

# MODÉLISATION DU SYSTÈME DE BONUS MALUS FRANÇAIS

Magali KELLE

*Ingénieur en mathématiques INSA de Rouen  
Chargée d'Études Statistiques à la MATMUT*

*Note : Ce travail ayant été réalisé dans le cadre d'un stage,  
il n'implique que son auteur et non l'organisme qui l'emploie.*

## ABSTRACT

We present a modelisation of the French bonus malus system. For this study we use J. Lemaire's work about the representation of the bonus malus system with a Markov chain and C. Partrat's work about Poisson compound model.

First of all, we would like to insist on the fact that French bonus malus system is fixed by a « law ». So each insurance company must use this system. But european considerations throw this principle back into question. A modelisation of the French bonus malus system could help insurance companies to test some applicable transformations and anticipate eventual changes.

Rules of the French bonus malus system introduce dependences between drivers' reduction of year  $n+1$  and previous ones. These relations are also based on the number of claims occurred during year  $n$ . So we define the French bonus malus system with a Markov chain whose transitions probabilities depend on the number of claims. But this system differs from traditional bonus malus system mainly due to the fact that bonus reduction after a claim is dependent on the driver's part of responsibility. Then, in order to obtain the transitions law we have to find the law of the pair : (number of claim with whole responsibility, number of claim with partial responsibility). After several tests we choose to estimate this with a Poisson compound model. Finally, we implement our Markov chain (with 530 states) and use it. Here we present some applications in which competition between insurance companies is simulated aid of additional states.

## RÉSUMÉ

Nous proposons une modélisation de la clause française de bonus malus. Le travail de J. Lemaire sur la représentation des systèmes de bonus malus par chaîne de Markov et celui de C. Partrat sur les modèles composés de Poisson, forment la base de notre étude. Nous commençons par rappeler brièvement la clause de bonus malus, puis nous explicitons notre modélisation, enfin nous en présentons différentes applications et notamment un exemple de simulation de marché concurrentiel.

**Mots clés :** système de bonus malus, chaîne de Markov, loi de Poisson bivariée.

BULLETIN FRANÇAIS D'ACTUARIAT, Vol. 4, N° 7, 2000, pp. 61-82

## INTRODUCTION

La tarification en assurance automobile peut généralement se décomposer en deux étapes. La première, dite tarification a priori, consiste à segmenter le portefeuille d'assurés en groupes de risques homogènes en fonction de certains critères retenus dès la souscription. La deuxième, dite tarification a posteriori, permet d'affiner la tarification en intégrant une dimension individuelle. Les systèmes de bonus malus sont une des méthodes possibles de tarification a posteriori. Actuellement, en France, une clause type impose aux assureurs un système de bonus malus. Cette clause est remise en cause par la Commission Européenne au nom de la libre prestation de services. En effet, la troisième directive européenne sur l'assurance non vie stipule notamment que les états membres n'ont pas le droit d'imposer un système tarifaire aux entreprises d'assurance non vie. Or, selon Bruxelles, la clause type est un élément obligatoire du système de tarification automobile. Cette directive n'empêche pas les états membres de maintenir des systèmes de bonus malus non uniformes et non obligatoires. C'est aux assureurs automobiles de choisir leurs systèmes et leurs critères de tarification a posteriori. Dans ce contexte, il nous a semblé intéressant de proposer une modélisation aussi complète que possible de la clause type pouvant permettre d'appréhender les conséquences d'une possible disparition et d'envisager les transformations applicables au système. Dans cet article, après avoir présenté notre modélisation, nous illustrons notre démarche par une série, non exhaustive, d'applications. Un bref rappel sur les chaînes de Markov est fourni en annexe.

### 1. LA CLAUSE TYPE DE BONUS MALUS

Il est important de noter que l'on appelle sinistre un accident de la circulation dans lequel l'assuré a une part de responsabilité. Pour un véhicule standard (non déclaré en « tournées » ou « tous usages »), la clause type contient les informations suivantes ([5]).

*Article 1 :* La prime due par l'assuré est déterminée en multipliant la prime de référence par un coefficient de réduction majoration.

*Article 4 :* Après chaque période annuelle d'assurance sans sinistre, le coefficient de réduction majoration applicable est celui utilisé à la précédente échéance réduit de 5%, arrondi par défaut à la deuxième décimale. Ce coefficient ne peut être inférieur à 0,50. Un conducteur ayant un coefficient 0,50 depuis au moins trois ans n'est pas pénalisé pour son premier sinistre (franchise de malus).

*Article 5 :* Un sinistre survenu au cours de la période annuelle majore le coefficient de 25% ; il en est de même pour chaque sinistre supplémentaire. Le coefficient obtenu est arrondi par défaut à la deuxième décimale. La majoration est réduite de moitié lorsque la

responsabilité du conducteur n'est que partielle. En aucun cas le coefficient ne peut être supérieur à 3,50. Après deux années consécutives sans sinistre, le coefficient ne peut être supérieur à 1 (descente rapide).

**Article 11 :** Lors d'un changement de compagnie d'assurance, le coefficient applicable à la première prime est calculé en tenant compte des informations figurant sur le précédent relevé d'informations.

## 2. LA MODÉLISATION

Pour modéliser le système français, nous représentons les valeurs du coefficient de réduction majoration. Pour alléger les notations nous multiplions ce coefficient par 100 ; un coefficient de 0,50 dans la clause type sera noté  $CRM=50$  dans notre modèle ( $CRM$ =coefficient de réduction majoration). La clause type régit l'évolution de ce coefficient. Pourtant, cette évolution a un caractère aléatoire puisqu'elle dépend de la survenance ou non de sinistre. De plus, d'après les *articles 4 et 5*, on constate que sa valeur en l'année  $n$  se déduit, presque toujours, de celle de l'année  $n-1$ . C'est pourquoi, pour modéliser un tel système, nous utilisons une chaîne de Markov. Les états de cette chaîne sont, au premier abord, les valeurs possibles du  $CRM$  (de 50 à 350).

On remarque que les règles de franchise de malus et de descente rapide nécessitent une mémorisation de trois et deux ans. Ces règles seront donc traitées séparément.

### 2.1 La franchise de malus

« Les conducteurs dont le coefficient de réduction majoration est égal à 0,50 depuis au moins trois ans, ne sont pas pénalisés au premier sinistre de responsabilité entière ou partielle ». Dans le but de conserver le caractère markovien du système, nous éliminons la mémorisation de 3 ans en créant quatre états : 50;0 / 50;1 / 50;2 / 50;3.

Un conducteur est mis dans la classe 50; $i$  s'il a un coefficient de 50 depuis  $i$  années. Les conducteurs étant à 50 depuis 3 ans ou plus restent dans l'état 50;3.

### 2.2 La descente rapide

« Après deux ans sans sinistre, aucun conducteur ne peut avoir un coefficient supérieur ou égal à 1 ». Cette clause nécessite, a priori, une mémorisation de 2 ans des années sans sinistre sur l'ensemble des coefficients de malus. Pour cela, on associe à chaque coefficient deux états :

- $CRM;1$  : l'assuré a une ancienneté d'un an sans sinistre lorsqu'il obtient ce coefficient.

- $CRM;0$  : l'assuré a eu au moins un sinistre l'année précédent l'obtention de ce coefficient.

Pour éviter l'augmentation inutile du nombre d'états, on ne double que les états correspondant à l'intervalle  $[107; 332]$ . Cette restriction permet d'éviter la création de 25 états. Elle s'explique par les considérations suivantes :

- Lorsque l'on a un malus inférieur ou égal à 106, une année sans sinistre ramène le  $CRM$  au-dessous de 100. La mémorisation est donc inutile entre 100 et 106.
- Le coefficient de majoration maximum est 350. Une année sans sinistre à ce niveau ramène le  $CRM$  à 332. Donc, si un automobiliste a un coefficient supérieur à 332, c'est qu'il a connu « une année à sinistre ». Or, nous ne mémorisons que les années sans accident, il est donc inutile de doubler les classes dont le coefficient est strictement supérieur à 332.

### 2.3 L'espace d'état

Prenant en compte les dédoublements de classes, le coefficient de réduction majoration peut prendre les « valeurs » suivantes :

$$\{ \underbrace{50;3 / 50;2 / 50;1 / 50;0}_{\text{coeff 50}} / \underbrace{51 / 52 / \dots / 106}_{\text{coeff non modifiés}} / \underbrace{107;1 / 107;0 / \dots / 332;1 / 332;0}_{\text{coeff dédoublés}} / \underbrace{333 / 334 / \dots / 350}_{\text{coeff non modifiés}} \}$$

La chaîne de Markov associée au système français possède donc 530 états.

### 2.4 L'homogénéité

Supposer le caractère homogène de la chaîne de Markov signifie que les probabilités de passer d'un coefficient de réduction majoration  $i$  à un coefficient  $j$  n'évoluent pas au cours du temps. C'est-à-dire que les probabilités d'avoir ou de ne pas avoir de sinistre lorsque le coefficient est  $i$  sont les mêmes aujourd'hui et dans 50 ans. Sur des horizons de cinq à dix ans cette hypothèse n'est pas choquante. Par contre, sur de plus longues périodes, elle pourrait être remise en cause puisqu'elle omet, entre autres, l'évolution des conditions d'apprentissage de la conduite, de la sécurité routière, du parc automobile, etc. Toutefois, nous maintiendrons cette hypothèse quelle que soit la durée retenue pour les simulations.

### 2.5 Expression des probabilités de transition

Recensons tous les coefficients  $CRM_{n+1}$  qu'un individu peut avoir l'année  $n+1$  s'il a un coefficient  $CRM_n$  l'année  $n$ .

Soit  $k$  le nombre de sinistres à responsabilité entière et  $r$  celui à responsabilité partagée ( $k$  et  $r \geq 0$ ). Les transitions possibles vérifient (on arrondit à l'entier par défaut) :

Nous notons :  $x \wedge y = \min(x, y)$  et  $x \vee y = \max(x, y)$

Si  $k+r > 0$  (année avec sinistre(s))

Si  $CRM_n \neq 50;3$  alors  $CRM_{n+1} = 1,25^k 1,125^r CRM_n \wedge 350$

Si  $CRM_n = 50;3$  alors (franchise de malus)

si le premier sinistre est à responsabilité entière

alors  $CRM_{n+1} = 1,25^{k-1} 1,125^r CRM_n \wedge 350$ .

si le premier sinistre est à responsabilité partagée

alors  $CRM_{n+1} = 1,25^k 1,125^{r-1} CRM_n \wedge 350$ .

Si  $k+r = 0$  (année sans sinistre)

Si  $CRM_n \in \{107 ; \dots ; 332\}$  et  $CRM_n$  de la forme  $CRM;1$

alors  $CRM_{n+1} = 100$  (descente rapide)

Sinon  $CRM_{n+1} = 0.95 CRM_n \vee 50$  (si  $CRM_{n+1} \in \{107 ; \dots ; 332\}$ )

alors  $CRM_{n+1}$  sera de la forme  $CRM;0$ .

**Remarque :** *en pratique, nous ne disposons pas de l'ordre d'arrivée des sinistres.*

*C'est pourquoi nous appliquons la franchise de malus sur le sinistre de plus faible responsabilité.*

L'obtention de  $CRM_{n+1}$  nécessite la connaissance de  $CRM_n, k, r$ . Les transitions de  $CRM_n$  à  $CRM_{n+1}$  s'expriment donc en fonction des probabilités d'avoir  $k$  et  $r$  sinistres qui elles-mêmes dépendent de  $CRM_n$ . Il nous faut ainsi modéliser, pour chaque  $CRM_n$ , la loi du couple (nombre de sinistres à responsabilité entière, nombre de sinistres à responsabilité partagée). Or, il nous est impossible d'estimer l'ensemble de ces lois puisque certains coefficients sont peu représentés, voire exclus, des données. Néanmoins, par expérience, nous regroupons des coefficients tout en conservant des populations de risques homogènes. Notre portefeuille d'assurés est ainsi partagé en 6 segments. Dans chacun d'eux, la loi du couple est réputée être la même. Le tableau ci-après explicite les populations formées.

Population	CRM
1	{50;0 , 50;1 , 50;2 , 50;3}
2	[51;63]
3	[64;89]
4	[90;99]
5	{100}
6	[101;350]

**Remarque :** le coefficient 100 représente surtout des jeunes conducteurs, ce qui lui confère des caractéristiques particulières, c'est pourquoi on l'isole.

Sur chacune des 6 populations ainsi formées, on définit les variables aléatoires suivantes :

$N_1$  représentant le nombre d'accidents à responsabilité entière d'un individu observé sur un an.

$N_2$  représentant le nombre d'accidents à responsabilité partagée d'un individu observé sur un an.

#### a) Les données

On dispose de données sous forme de tableaux croisés représentant le nombre de paires ( $N_1 = k$ ,  $N_2 = r$ ) observées, pour chacun des 6 groupes ci-dessus. Le nombre maximum de sinistres enregistrés pour un individu varie selon les populations, de 3 à 6 pour  $N_1$ , et de 2 à 3 pour  $N_2$ .

Par soucis de confidentialité, l'exemple de données ci-dessous est exprimé en pourcentage et non en fréquence :

#### Pourcentage de sinistres pour la population 3

RC totale	RC Partielle		
	0 sinistre	1 sinistre	2 sinistres
0 sinistre	94.686%	0.487%	0.001%
1 sinistre	4.581%	0.035%	0.001%
2 sinistres	0.198%	0.002%	.
3 sinistres	0.008%	.	.
4 sinistres	0.001%	.	.

A titre indicatif, nous donnons la part des sinistres à responsabilité partagée pour les 6 populations (sur l'ensemble des sinistres) :

Population 1	Population 2	Population 3	Population 4	Population 5	Population 6
8.1%	9.1%	9.5%	10.1%	10.2%	9.6%

#### b) L'indépendance

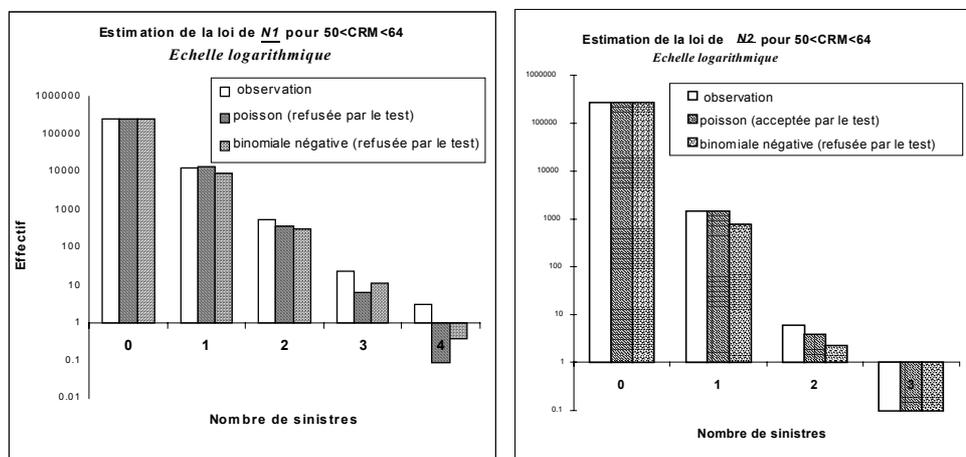
Le premier test appliqué sur ces données est un test d'indépendance du  $\chi^2$  entre  $N_1$  et  $N_2$ . Ce test rejette l'hypothèse d'indépendance sur chacune des 6 populations. Bien que l'indépendance soit rejetée, on s'intéresse, dans un deuxième temps, aux lois marginales de  $N_1$  et  $N_2$ .

**Remarque :** Les échantillons que nous manipulons sont de grande taille. Or, il est connu que sur de telles tailles la sensibilité du  $\chi^2$  peut amener à refuser une hypothèse pourtant valide. Nous suivrons toutefois ce test et poserons l'hypothèse de dépendance entre  $N_1$  et  $N_2$  bien que ceci puisse apparaître superflu par la suite.

**c) Les lois marginales**

Le test d'adéquation de lois du  $\chi^2$  est utilisé pour valider plusieurs hypothèses. Dans chaque population, on teste notamment l'adéquation des données avec «  $N_j / \lambda_j$  suit une loi de Poisson  $\lambda_j$  ( $j=1,2$ ) » ou « une loi Poisson mélange gamma (binomiale négative) ». Pour ces deux lois, les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblances.

Au vu de ces résultats, nous supposons que, pour chaque population, les lois marginales de  $N_1$  et  $N_2$  sont des Poisson. Le  $\chi^2$  ne valide pas toujours cette hypothèse (pour  $N_1$  notamment) mais c'est celle qu'il refuse avec le moins de virulence. Le  $\chi^2$  est employé, ici, comme une métrique qui nous indique quelle est la loi la moins éloignée de nos données. Nous donnons, ci-après un exemple d'estimation pour la population 2.



**d) La loi du couple**

Puisqu'il nous faut modéliser la loi d'un couple de variables aléatoires dépendantes de loi marginale poissonnienne, nous optons pour le modèle Poisson bivarié ([4]). Dans cette partie, on suppose que l'on est à l'intérieur d'une des 6 populations.

Si on suppose que  $(N_1, N_2) \rightsquigarrow P_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$ , alors on a :

$$\begin{cases} P(N_1 = k, N_2 = r) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)} \sum_{j=0}^{\min(k,r)} \frac{\mu^j}{j!} \frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{\lambda_2^{r-j}}{(r-j)!} \\ N_i \rightsquigarrow P(\lambda_i + \mu) \\ \text{cov}(N_1, N_2) = \mu \end{cases}$$

### e) L'estimation des paramètres

On montre ([4]) que la méthode du maximum de vraisemblances donne les estimateurs suivants :

Notons :

$(n_1^m, n_2^m)_{m=1, \dots, K}$  la réalisation d'un  $K$ -échantillon de  $(N_1, N_2)$ .

$\bar{n}_i$  la moyenne des  $n_i^m$  sur le  $K$ -échantillon ( $i=1, 2$ ),

$$1_{(k,r)}(n_1^m, n_2^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1^m = k \text{ et } n_2^m = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{et } H(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = \sum_{k \geq 1} \sum_{r \geq 1} f_{kr} \frac{p(k-1, r-1)}{p(k, r)} \left( \frac{1}{K} \sum_m 1_{(k,r)}(n_1^m, n_2^m) \right).$$

Alors on a :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \bar{n}_1 - \hat{\mu} , \\ \hat{\lambda}_2 = \bar{n}_2 - \hat{\mu} , \\ \hat{\mu} \text{ racine positive de } H(\bar{n}_1 - \hat{\mu} , \bar{n}_2 - \hat{\mu} , \hat{\mu}) = 1 \end{cases}$$

La recherche de  $\hat{\mu}$  se fait par la méthode itérative de Newton-Raphson, en prenant comme valeur initiale l'estimateur  $\mu^*$  donné par la méthode des moments soit  $\mu^* = \frac{1}{K} \sum_m (n_1^m - \bar{n}_1)(n_2^m - \bar{n}_2)$ .

Nous recherchons alors ces estimateurs pour chacune des 6 populations. Nous noterons :  $\hat{\lambda}_1^{(b)}$ ,  $\hat{\lambda}_2^{(b)}$  et  $\hat{\mu}^{(b)}$  les estimateurs obtenus pour la  $b^{\text{ème}}$  population.

Donner la valeur exacte de nos estimateurs ne nous semble pas apporter de plus-value. C'est pourquoi, nous prenons comme référence la population de  $CRM=100$  ( $b=5$ ) et donnons les rapports existants entre ces derniers et ceux des autres populations.

CRM	$\frac{\hat{\lambda}_1^{(b)}}{\hat{\lambda}_1^{(5)}}$	$\frac{\hat{\lambda}_2^{(b)}}{\hat{\lambda}_2^{(5)}}$	$\frac{\hat{\mu}^{(b)}}{\hat{\mu}^{(5)}}$
{50;0 , 50;1 , 50;2 , 50;3}	0.75	0.59	0.26
[51;63]	0.74	0.66	0.48
[64;89]	0.70	0.65	0.48
[90.99]	0.79	0.82	0.77
{100}	1.00	1.00	1.00
[101.350]	0.92	0.89	0.18

On constate que la population CRM={100} a les moyennes et les variances les plus élevées. Ceci n'est pas surprenant puisque les jeunes conducteurs sont considérés comme des conducteurs « à haut niveau de risque » parmi lesquels il existe de bons conducteurs.

**Remarque :** Si on calcule  $r = \frac{\hat{c}ov(N_1, N_2)}{\sqrt{\hat{V}(N_1)\hat{V}(N_2)}} = \frac{\hat{\mu}^{(b)}}{\sqrt{(\hat{\lambda}_1^{(b)} + \hat{\mu}^{(b)})(\hat{\lambda}_2^{(b)} + \hat{\mu}^{(b)})}}$ , on a

$r = \{0,004 ; 0,008 ; 0,008 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,002\}$ . Ceci semble rejeter l'hypothèse de dépendance entre  $N_1$  et  $N_2$  et confirmer la sensibilité du  $\chi^2$ . Toutefois, pour ne pas perdre en généralité nous continuons à supposer la dépendance de  $N_1$  et  $N_2$ .

**2.7 Graphe de la chaîne de Markov**

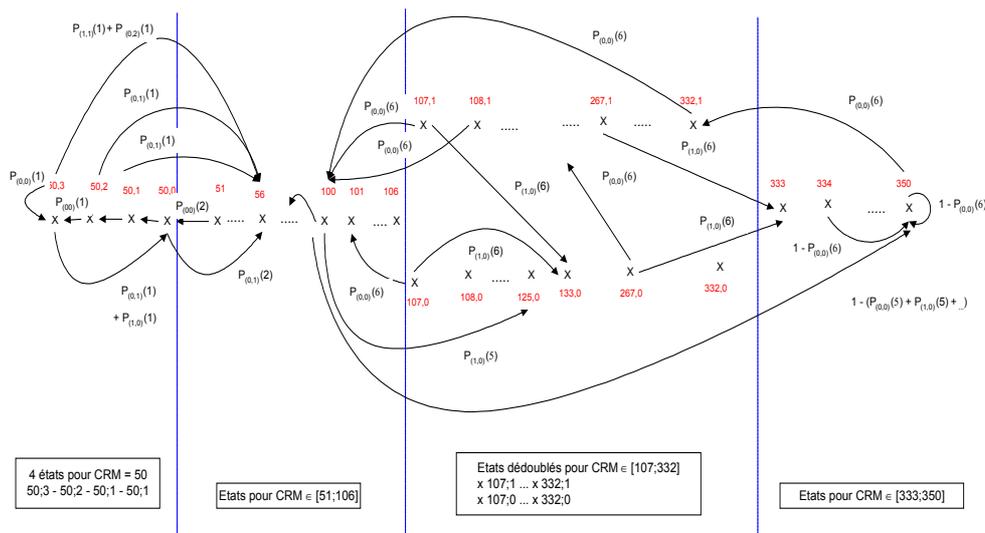
Nous introduisons ici les notations utilisées sur le graphe de la chaîne (ci-dessous) :

Prenons, par exemple,  $i$  et  $j$  deux états tels que :  $j = 1,25^k 1,125^r i$ .

Soit  $pop$  une fonction qui, à un CRM, associe la population auquel il appartient, exemple :  $pop(100)=5$ .

On a alors  $P(CRM_{n+1}=j / CRM_n=i) = P(N_1 = k, N_2 = r / pop(i)) = p_{(k,r)}(pop(i))$ .

**Graphe de la chaîne de Markov**



**2.8 Loi de l'état initial**

Pour achever la modélisation, il nous manque la distribution de l'état initial. La probabilité d'être dans un état  $i$  au temps  $n=0$  est estimée par la fréquence, observée sur nos données. Pour les états que l'on a créés (en doublant ou en quadruplant), on ne possède pas de données. On suppose, à titre d'illustration, qu'à l'instant 0 tous les individus se répartissent dans les états  $i;0$  de la chaîne.

A ce stade de la modélisation, il est possible de suivre l'évolution d'un portefeuille régi par la clause type. Toutefois, cette évolution se fera en circuit fermé, c'est-à-dire sans pouvoir introduire d'entrée ou de sortie du portefeuille. Or, cette clause indique comment gérer les nouveaux assurés et les changements d'assureurs. Il nous faut donc compléter ce modèle pour prendre en compte les transferts d'assurés. C'est pourquoi, avant de présenter quelques applications du modèle, nous introduisons, dans la partie suivante, un nouvel état permettant « d'ouvrir le circuit ».

**3. MODÈLE AVEC ENTRÉES-SORTIES**

La chaîne de Markov définie ci-dessus représente, maintenant, une société d'assurance que nous appelons « BMS ». Dans cette partie, nous introduisons un 531<sup>ème</sup> état, que nous nommons HA (hors assurance). Cet état constitue un « vivier » d'automobilistes qui permet de simuler les « va et vient » des conducteurs.

**3.1 Liaisons entre BMS et HA**

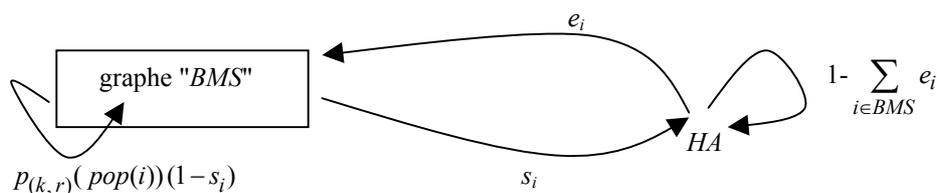
On note :

$s_i$  la probabilité de sortir de BMS (de rejoindre HA) sachant qu'on est en  $i$  de BMS,  $e_i$  celle de rentrer dans l'état  $i$  de BMS (quitter HA) sachant qu'on est en HA.

Les transitions s'expriment alors :

- \* Si  $i, j \in BMS$  :  $p(i, j) = p_{(k,r)}(pop(i))(1 - s_i)$
- \* Si  $i \in BMS$  et  $j = HA$  :  $p(i, j) = s_i$
- \* Si  $i = HA$  et  $j \in BMS$  :  $p(i, j) = e_j$
- \* Si  $i = HA$  et  $j = HA$  :  $p(i, j) = 1 - \sum_{k \in BMS} e_k$

Le nouveau graphe de la chaîne est donné ci-après :



Les probabilités d'entrée – sortie ( $e_i$  et  $s_i$ ) sont estimées à l'aide de nos données. Toutefois, une hypothèse est faite pour les classes dédoublées ou quadruplées, on suppose, à titre d'illustration, que :

- les sorties sont réparties de façon uniforme dans les états dupliqués.  
*(exemple : les probabilités de sortir en 50;3 ou en 50;0 sont les mêmes, elles sont égales au quart de la fréquence des sorties observées à CRM=50)*
- les entrées ne sont autorisées que dans les états  $i;0$ .

### 3.2 Loi de l'état initial

Ici encore, pour achever la modélisation, il faut connaître la distribution de l'état initial. Dans ce cas, on considère que la probabilité d'être, à l'instant 0, dans un des états de BMS est égale à 0,05 (part de marché d'une compagnie d'assurance représentative). Nous multiplions donc la loi initiale du modèle sans entrée-sortie par 0,05 et ajoutons une colonne pour HA de probabilité 0,95.

## 4. APPLICATIONS

Nous disposons a priori de suffisamment d'informations théoriques pour utiliser ce modèle. C'est pourquoi, après avoir estimé les paramètres des lois de transition à l'aide d'EXCEL et de SAS, nous avons programmé la matrice de transition sous SAS IML. Malgré la taille de cette matrice (531×531), cette étape est relativement facile puisque l'expression des transitions donne toutes les règles de remplissage.

### 4.1 La régularité ([2] et annexe)

Une fois la matrice de transition programmée, on constate que le modèle sans entrée-sortie atteint la régularité ( $M^n > 0$ ) pour  $n = 18$ , alors que le modèle complet vérifie la condition dès  $n = 14$ . Ce gain n'est pas surprenant puisque la communication entre les états est facilitée par l'introduction de l'état HA.

Puisque les 2 chaînes (avec et sans HA) sont régulières, nous nous intéressons aux distributions stationnaires.

### 4.2 L'état stationnaire

Rappelons que, la loi stationnaire  $v$ , d'une chaîne de Markov régulière de matrice de transition  $M$ , vérifie :

$$\begin{cases} vM = v , \\ \sum_i v_i = 1 . \end{cases}$$

Elle représente la proportion d'automobilistes qui se trouve dans chaque état du système quand celui-ci est stabilisé. Cette loi est indépendante de la distribution de départ.

L'état stationnaire est intéressant pour tester des hypothèses et leurs aboutissants. Il permet, notamment, de comparer deux scénarios indépendamment des points de départ. Mais on s'aperçoit que ce régime ne permet pas de prévoir l'évolution du système actuel. En effet, en prenant pour point de départ nos données, il faut un minimum de 70 ans pour « atteindre » le régime stationnaire. De plus, en considérant de tels horizons le caractère homogène de la chaîne de Markov est largement remis en cause.

Toutefois, à l'aide de ce régime, on constate que le système français ne conduit pas à une bonne discrimination des risques puisqu'une grande majorité des assurés est caractérisée par le même niveau de risque.

#### Portefeuille en régime stationnaire sans entrée-sortie

<b>50;3</b>	<b>50;2</b>	<b>50;1</b>	<b>50;0</b>	<b>51</b>	<b>52</b>	<b>53</b>	<b>54</b>	<b>55</b>	<b>57</b>	<b>58</b>	<b>60</b>	<b>62</b>	<b>64</b>	<b>68</b>
<b>79.4%</b>	4.80%	5%	5%	0.001%	0.007%	0.001%	0.001%	0.008%	0.001%	0.008%	0.001%	0.009%	0.001%	0.001%

Si on considère le portefeuille fermé, 79,4% des constructeurs auraient un  $CRM=50;3$  en régime stationnaire. Cette forte proportion s'explique, d'une part, par de très faibles probabilités d'avoir au moins un sinistre (dans toutes les populations ces probabilités sont comprises entre 0,05 et 0,08). D'autre part, les quelques personnes ayant plusieurs accidents bénéficient de la descente rapide à 100 ce qui leur permet de regagner « en peu de temps » les bons états.

En outre, il est possible que notre modélisation accentue ce phénomène. En effet, si le modèle applique de plus fortes probabilités d'accident aux coefficients 200 qu'aux coefficients 50, par exemple, il ne prend pas en compte tous les anciens coefficients ou le nombre d'années passées dans des états de malus. Or, il est possible que cette information traduise une conduite peu fiable et un risque d'accident élevé. Sur l'ensemble des conducteurs français, il en existe avec de telles caractéristiques. Ces derniers maintiennent un effectif minimum dans les états malusés alors que notre modélisation entraîne uniformément les assurés vers les bons états. L'introduction d'un Markov d'ordre supérieur pourrait permettre de pallier le problème. Ainsi, le système français semble, ici, peu sévère. En prenant les données dont nous disposons comme état initial, nous pouvons considérer que le régime stationnaire est atteint en 70 ans.

#### Portefeuille en stationnaire avec entrée-sortie

<b>HA</b>	<b>50;3</b>	50;2	50;1	50;0	52	54	57	58	60	62	64	68	72	76	80
<b>10.3%</b>	<b>66%</b>	4.4%	4.7%	5%	0.007%	0.005%	0.005%	0.008%	0.004%	0.009%	0.004%	0.004%	0.004%	0.004%	0.003%

Si on s'intéresse au modèle avec entrées et sorties, 66% des personnes auraient un coefficient 50,3 et 10,3% des conducteurs seraient dans l'état *HA*. Cette faible proportion s'explique par le fait que les probabilités de sortie d'un état de *CRM* peu élevé sont faibles. Au cours du temps, de moins en moins de gens sortent donc de *BMS*. Notons que ce régime est difficilement utilisable puisqu'en partant des données on peut considérer qu'il est atteint en 170 ans !

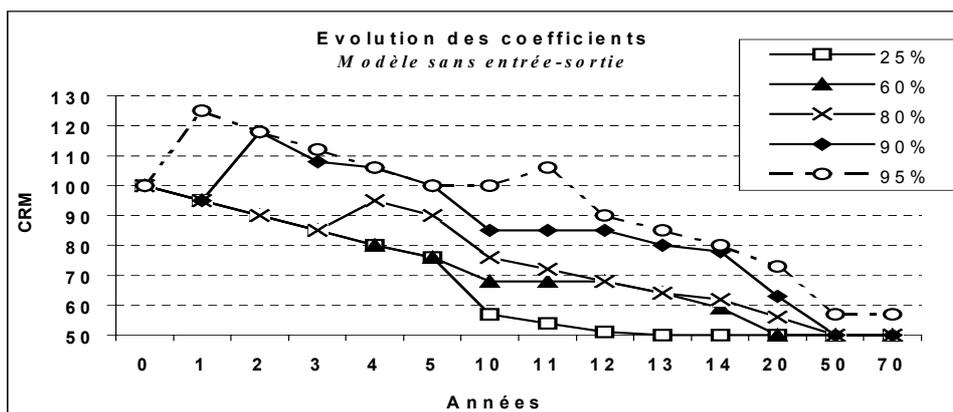
**4.3 Suivi d'une cohorte de jeunes conducteurs**

Pour mettre en évidence le mécanisme du système français, nous créons un groupe de 100 000 conducteurs démarrant tous avec un coefficient de réduction majoration de 100. Nous allons suivre l'évolution que prévoit le modèle pour ces jeunes conducteurs sur plusieurs années.

**a) Observation sans entrée-sortie**

Le graphe ci-après donne, au fil des ans, le *CRM* maximum d'une portion du portefeuille ; la série « 25% » (premier quantile) donne le *CRM* maximum des 25% « meilleurs » assurés du portefeuille.

Prenons un exemple : l'année 10, on voit que 25% des conducteurs ont un *CRM* inférieur ou égal à 57, 60% ont un *CRM* inférieur ou égal à 68 et seulement 5% des assurés ont un coefficient supérieur à 100.



On s'aperçoit que la série des 60% visite exclusivement les états de la « descente normale » : 95, 90, 85, 80, 76, 72, 68, 64, 60, 57, 54, 51, 50. On appelle descente normale les états que l'on rejoint en bénéficiant chaque année des 5% de bonus en partant de 100. On vérifie que la descente rapide associée aux faibles probabilités d'accident permet une réduction rapide des *CRM* d'une majorité des conducteurs.

On remarque que sur les 100 000 individus de départ, 46 % atteignent l'état 50;0 en 13 ans. Ces conducteurs ont donc connu une sinistralité nulle pendant treize années consécutives.

L'état de *CRM* 100 réapparaît en l'année 3, son effectif dépasse les 10 000 dès l'année 5. Ces deux constatations s'expliquent par la descente rapide.

#### b) Observation avec entrée-sortie

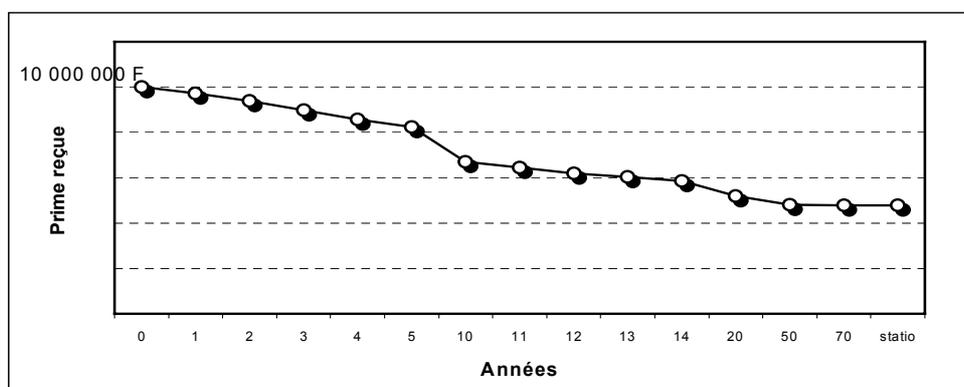
Les constatations faites précédemment sont toujours vérifiées ici. Les effectifs des états rencontrés varient mais les dominances sont conservées. L'introduction de l'état *HA* a toutefois un impact important à signaler. En effet, on voit apparaître des conducteurs de coefficient 50;3 dès la troisième année, leur nombre est supérieur à 100 à partir de la onzième année. Ceci s'explique par le fait qu'une fois dans l'état *HA* (et 331 personnes rejoignent cet état l'année 1) la probabilité de rentrer dans l'état de *CRM* 50;0 est non nulle. Ainsi, on remarque que l'introduction d'un état non régi par la clause type introduit une perturbation dans le système en permettant l'entrée de conducteurs non expérimentés dans des états de faible coefficient. Dans ce cas, la justification mathématique du coefficient de réduction majoration est totalement mise à la trappe. Il perd son rôle de représentant du risque individuel et devient un outil promotionnel.

#### c) L'effet du creusement

Dans cette partie, nous observons l'évolution des primes payées par les 100 000 conducteurs en système fermé. Pour simplifier, nous supposons qu'ils ont tous la même prime de référence d'un montant de 100 F. De plus, nous laissons de côté, lors du calcul de la prime payée, les taxes ou frais de dossier et considérons que :

$$\text{Prime payée} = \frac{\text{CRM}}{100} \text{ Prime de référence.}$$

Le graphique suivant représente la somme annuelle touchée par la société d'assurance :



On voit qu'au fur et à mesure l'encaissement de la compagnie diminue. Cette tendance est inhérente au modèle puisque les conducteurs étant de plus en plus expérimentés leur bonus croît. Toutefois, elle paraît exagérée puisque, d'une part, elle s'appuie sur un principe et non pas sur un calcul actuariel et, d'autre part, elle n'intègre pas de dimension économique (inflation des coûts de la réparation notamment). Cette « distorsion » est appelée **effet de creusement**. Pour lutter contre le creusement, les sociétés d'assurance réajustent les primes de référence en fonction des taux d'inflation et des évènements non pris en compte par le système de bonus malus.

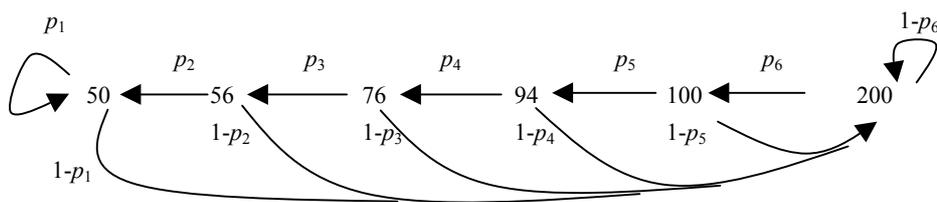
**4.4 Exemple de marché concurrentiel**

Dans cette partie, l'état *HA* est scindé en plusieurs états représentant un système de tarification a posteriori (*BMS2*) concurrent de *BMS*. Pour suivre l'interaction de ces deux systèmes de bonus malus, on utilise toujours une cohorte de jeunes conducteurs. On suppose que l'année 0 ces conducteurs débutent dans la société *BMS* au coefficient 100.

Pour construire les nouveaux états, on suppose que la compagnie, nommée *BMS2*, crée une tarification a posteriori simplifiée. Pour cela, elle décide de restreindre le nombre de valeurs du coefficient de réduction majoration au nombre de populations de risque constatées en pratique. Elle utilise, ainsi, 6 *CRM*. La société *BMS2* propose, à chaque assuré de *BMS* ayant un *CRM* dans une population *b*, de remplacer ce coefficient comme suit.

CRM	Population	CRM dans BMS2
{50}	1	50
[51;63]	2	56
[64;89]	3	76
[90;99]	4	94
{100}	5	100
[101;350]	6	200

*BMS2* propose aussi des règles de transition plus simples que celles de la clause type. Ces règles de transition sont représentées par la chaîne *BMS2* suivante : (sur le graphique ci-après, nous notons :  $p_b = p_{(0,0)}(b)$  = probabilité d'avoir aucun accident quand on appartient à la  $b^{ème}$  population).



Cette société propose donc une descente plus rapide que celle autorisée par la clause type mais elle pénalise fortement toutes les fautes sans distinction de responsabilité (système inspiré de l'ancien bonus malus espagnol).

La chaîne  $BMS2$  doit être « accrochée » à  $BMS$ . On va donc constituer une chaîne de Markov à 536 états. Pour relier  $BMS$  et  $BMS2$ , on considère que le changement de compagnie permet de changer de coefficient de réduction majoration mais pas de population de risque. Ainsi, nous estimons les probabilités de transition entre les deux systèmes comme suit :

Soit  $i$  un état de  $BMS$  et  $j$  un état de  $BMS2$ ,

$$p(i, j) = \begin{cases} s_i & \text{si } i \in \text{pop}(j) , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \quad \text{et} \quad p(j, i) = \begin{cases} e_i & \text{si } i \in \text{pop}(j) , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Maintenant que les deux parties  $BMS$  et  $BMS2$  sont reliées, nous devons revoir les probabilités de transition à l'intérieur de chacune d'entre elles. On rappelle l'expression des probabilités, soit  $u$  et  $q$  deux états d'un système  $S$  ( $S = BMS$  ou  $BMS2$ ) :

$$p(u, q) = P(\{CRM_{n+1} = q\} / \{\text{on reste dans } S\}, CRM_n = u) \quad P(\{\text{on reste dans } S\} / CRM_n = u) .$$

Quel que soit le système étudié, la première probabilité de cette formule s'exprime à l'aide des  $p_{(k, r)}(\text{pop}(u))$ .

Pour la deuxième probabilité, on doit distinguer les deux systèmes :

$$\begin{aligned} P(\{\text{on reste dans } BMS\} / \{\text{on est en } u \text{ dans } BMS\}) &= 1 - s_u . \\ P(\{\text{on reste dans } BMS2\} / \{\text{on est en } u \text{ dans } BMS2\}) &= 1 - \sum_{k \in I_u} e_k . \end{aligned}$$

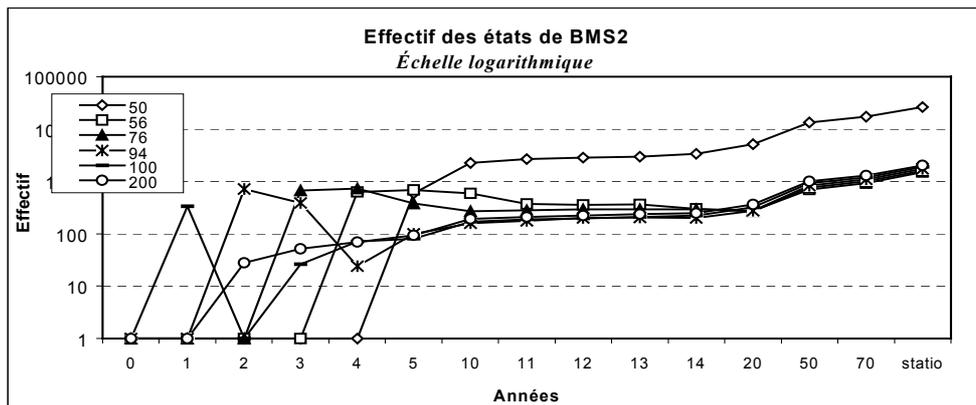
Avec ces règles de transition, la nouvelle chaîne de Markov est régulière. En effet, la matrice  $M^n$  est positive à partir de  $n=16$ . Le régime stationnaire semble atteint après 200 transitions !

Dans un premier temps, on s'intéresse aux états qui apparaissent dans la société  $BMS$ . On constate que ce scénario ne perturbe pas l'évolution des jeunes conducteurs au sein de la compagnie.

On voit apparaître deux " descentes normales " et l'ensemble des phénomènes mis en évidence précédemment. Par contre, les effectifs de ces états sont modifiés. Il semble que la cohabitation des deux systèmes de tarification a posteriori n'entraîne pas une descente accélérée de jeunes automobilistes. Le principe mathématique des coefficients de réduction majoration paraît donc respecté. Mais attention, ceci émane entièrement de nos hypothèses. En effet, en n'autorisant comme transitions entre les systèmes que celles qui ne modifient pas les populations de risque, on a, en fait, forcé le respect du sens des coefficients.

Si on s'intéresse aux états de  $BMS2$ , on remarque que des jeunes conducteurs ont un coefficient 100 après la première année, puis on les retrouve aux coefficients 94, 76, 56

pour enfin arriver à un coefficient de 50 en l'année 5. Un cycle de descente normale apparaît donc également dans cette société d'assurance. Ceci provient encore de nos hypothèses. L'année 2, l'effectif de l'état 100 est nul, ceci s'explique par le fait que seules les personnes se trouvant en 100 de BMS l'année 1 peuvent être en 100 de BMS2 l'année 2. Or, peu de personnes sont à 100 de BMS l'année 1. On constate également, qu'en écartant l'état 50, les effectifs des autres états sont du même ordre de grandeur. Le dernier état (coefficient 200) a même un effectif légèrement supérieur aux autres dans le régime stationnaire. Il semble que ce modèle offre une meilleure segmentation du portefeuille que la clause type mais on peut se demander si les coefficients obtenus offrent une bonne représentation des risques.



#### 4.5 Commentaires sur les applications

Les applications précédentes demeurent assez théoriques. En effet, les données dont nous disposons ne permettent pas d'estimer toutes les probabilités nécessaires au modèle (pour les transferts d'assurés notamment), ce qui nous pousse à émettre des hypothèses. Ainsi, notre modèle ne semble donner que des informations qualitatives.

Toutefois, en complétant cette modélisation par des études marketing ou comportementales, il est possible d'obtenir des informations quantitatives. Ce peut être un bon outil d'aide à la décision dans les cas suivants, par exemple :

- Une société d'assurance réfléchit à un système de super bonus et veut connaître l'effet de creusement généré ainsi que l'impact de cette offre sur le marché (de même pour le super malus).
- Une compagnie hésite entre deux types de mesures promotionnelles (baisser les primes à partir de  $CRM=60$  ou  $70$ , par exemple). En répercutant la baisse des primes sur les coefficients de réduction majoration, elle peut mesurer le rapport  $\frac{\text{effet de creusement}}{\text{attractivité}}$  et choisir la solution la plus adaptée.

## CONCLUSION

Comme nous l'avons déjà évoqué, cette modélisation a l'inconvénient qu'ont quasiment toutes les modélisations, à savoir ne pas retranscrire entièrement les phénomènes qu'elles décrivent. Ainsi, la mise en place de ce système qui gère les individus « en masse » lisse les particularités et accentue les principales caractéristiques de la clause type.

Toutefois, la souplesse de cet outil de modélisation nous apparaît important à souligner. En effet, il est aisé de construire et tester différentes évolutions de la clause type tout en simulant des marchés concurrentiels. Et s'il existe d'autres moyens pour mesurer l'effet de creusement et choisir entre deux modèles de bonus malus, cette modélisation offre directement des réponses à ces deux problèmes (et à d'autres d'ailleurs). Néanmoins, il faut également noter que ce modèle est très sensible aux hypothèses faites sur les probabilités.

En outre, dans le contexte actuel, où le marché de l'assurance dommages périclète, la fidélisation des portefeuilles devient la préoccupation majeure des assureurs. Les systèmes de tarification a posteriori, dont les systèmes de bonus malus sont une illustration, seront au centre des stratégies de fidélisation des compagnies d'assurance (que la clause type disparaisse ou non). De nombreuses hypothèses de fidélisation verront le jour, mais comment simuler, tester et comparer ces stratégies ?

## RAPPEL SUR LES CHAINES DE MARKOV

Dans cette partie, nous rappelons brièvement quelques résultats de la théorie des chaînes de Markov.

Soit  $(X_n)$  un processus à temps discret ( $n \in \mathbb{N}$ ) à valeur dans  $E$ , ensemble fini.  $E$  est appelé espace d'état.

$(X_n)$  est un **processus de Markov homogène** s'il vérifie la propriété suivante :

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_2, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P(X_1 = j / X_0 = i)$$

où  $i, i_2, \dots, i_n, j \in E$ .

On appelle  $p(i, j) = p_{ij} = P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P(X_1 = j / X_0 = i)$  la probabilité de transition d'un état  $i$  à un état  $j$  de la chaîne  $(X_n)$  et  $M$  la matrice associée à ces probabilités,  $M = (p_{ij})_{i, j \in E}$  (matrice de transition).

### PROPRIÉTÉ DE CHAPMAN - KOLMOGOROV :

Une chaîne de Markov  $(X_n)$  de matrice de transition  $M$  vérifie :  $M^{n+m} = M^n M^m$ .

Ainsi, les probabilités de changement d'état en  $n$  transitions, notées  $p_{ij}^{(n)}$ , se déduisent directement des probabilités de transition  $p_{ij}$  :

$$M^{(n)} = \left( p_{ij}^{(n)} \right)_{i,j \in E} = M^n = MM \dots M, n \text{ fois.}$$

Si on appelle :  $a^{(n)} = (a_j^{(n)})$  le vecteur des probabilités d'être dans l'état  $j$  après  $n$  transitions,  $a = (a_i)$  la probabilité initiale de l'état  $i$ ,

on a alors :  $a_j^{(n)} = \sum_i a_i p_{ij}^{(n)}$  soit  $a^{(n)} = a M^n$ .

On appelle **distribution stationnaire (ou invariante)** associée à une matrice de transition  $M$ , une loi de probabilité  $v$  vérifiant :

$$\begin{cases} vM = v, \\ \sum_i v_i = 1. \end{cases}$$

$v$  est un vecteur propre gauche associé à la valeur propre 1 de  $M$ .

**THEOREME :**

Une chaîne de Markov  $(X_n)$  d'espace d'état  $E$  fini est régulière si et seulement si :

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall i, j \in E \text{ tel que } p_{ij}^{(n)} \neq 0 \text{ ie } M^n > 0.$$

On peut maintenant énoncer un théorème fondamental :

**Théorème ergodique :**

Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov régulière d'espace d'état  $E$ , fini.

Il existe une unique loi de probabilité stationnaire sur  $E$ .

Cette distribution stationnaire, notée  $v$ , est alors la limite en  $n$  de la distribution des états.

**RÉFÉRENCES**

[1] LEMAIRE J. - 1995 - *Bonus malus systems in automobile insurance*, Kluwer Publishers  
 [2] CARTON D. - 1975 - *Processus aléatoires utilisés en recherche opérationnelle, Statistiques et Décisions économiques*  
 [3] SUBRAMANIAN K. - 1999 - *Competing merit - rating systems in automobile insurance*, SCOR notes

- [4] **PARTRAT C.** - 1994 - *Compound Poisson Models for two types of claims, Insurance Mathematics and Economics vol.15, p. 219-231*
- [5] **CODE DES ASSURANCES**, *annexe de l'article A121.1*

Magali KELLE  
*Ingénieur en mathématiques INSA Rouen*  
MATMUT  
66 rue de Sotteville  
76100 ROUEN