

9

LA CLAUSE  
DE RACHAT ANTICIPÉ  
ÉVALUÉE  
COMME UNE OPTION

Christian Prudent

Finance

# SOMMAIRE

OBJECTIF : calculer l'ordre de grandeur du prix de la clause de rachat anticipé (par une formule analytique) et étudier l'importance des paramètres qui l'influencent.

## I. INTRODUCTION

1. Rachat anticipé et risque pour l'assureur
2. Le contrat étudié
3. Caractéristiques financières de l'option de rachat anticipé
4. Prix de l'option et horizon d'investissement
5. Moment de l'exercice
6. Notations utilisées

## II. EVALUATION DE L'OPTION (date origine $t = 0$ )

1. Etape n°1 : Flux associé à l'exercice de l'option
2. Etape n°2 : Formule probabiliste dans l'univers risque-neutre
3. Etape n°3 : Décomposition de l'option en plusieurs options classiques
4. Etape n°4 : Détermination d'un estimateur de la probabilité de rachat
5. Etape n°5 : Formule probabiliste dans l'univers forward-neutre
6. Etape n°6 : Modélisation de la courbe des taux d'intérêt
7. Etape n°7 : Modélisation du comportement des souscripteurs
8. Etape n°8 : Formule analytique (volatilité déterministe du temps)
9. Etape n°9 : Formule analytique (volatilité linéaire de la maturité)

## III. ETUDE GRAPHIQUE DES DETERMINANTS DU PRIX

1. Les données de l'exemple
2. Sensibilité du prix de l'option à la courbe des taux initiale
3. Sensibilité du prix de l'option à la volatilité des taux
4. Sensibilité du prix de l'option à la pente de la fonction "taux de rachat"

## IV. CONCLUSION

1. Relative à cette étude
2. Relative aux possibilités d'amélioration du modèle

## INTRODUCTION

### 1. Rachat anticipé et risque pour l'assureur

La clause de rachat anticipé d'un contrat de capitalisation peut être exercée à tout moment par le souscripteur :

- volontairement, en cas de hausse des taux significative et durable, le souscripteur ayant alors intérêt à racheter son contrat pour en souscrire de plus rémunérateurs.
- involontairement, lorsque le souscripteur décède (c'est alors le bénéficiaire qui obtient le remboursement de la valeur capitalisée du contrat).

Le volant de liquidités courant peut permettre à l'assureur de faire face aux sorties structurelles pour cause de décès. En cas de sorties plus massives dues à la hausse des taux, l'assureur peut être conduit à vendre des actifs obligataires dans des conditions de taux désavantageuses et à réaliser d'importantes moins-values. Le risque est significatif s'il n'existe pas une couverture financière appropriée.

### 2. Le contrat étudié

Nous nous intéressons à un contrat d'assurance français particulier : le bon de capitalisation d'échéance  $T$ .

Une prime unique, de valeur  $L_0$ , est versée par le souscripteur à la date initiale.

Dans ce type de contrat, le taux d'intérêt effectivement versé chaque année n'est normalement pas connu à l'avance puisqu'il est composé d'un taux minimum garanti et d'une participation aux bénéfices aléatoire. Pour des raisons techniques, nous le supposons fixé à un certain niveau dès le moment de l'émission du bon (hypothèse acceptable lorsque l'assureur cherche à lisser les taux de rendement effectifs versés). Il est égal à  $R$  sur toute la durée du contrat, de sorte que la valeur capitalisée du bon peut s'écrire, à toute date  $t$ ,  $L_t = L_0 \cdot \exp\{Rt\}$ .

En cas de sortie anticipée à la date  $t$ , l'assureur verse au souscripteur ou au bénéficiaire le montant  $L_t$  (capital + intérêts capitalisés).

### 3. Caractéristiques financières de l'option de rachat anticipé

Comme pour le remboursement anticipé d'un prêt à taux fixe, le droit de rachat anticipé du bon peut s'analyser comme une option sur ce bon, exerçable par le souscripteur, et dont les trois principales caractéristiques sont les suivantes :

- L'option est américaine : elle peut être exercée à tout instant aléatoire  $\tau$  ( $0 < \tau < T$ ).
- L'exercice peut être rationnel (hausse des taux) ou non (décès, contraintes personnelles du souscripteur). Cela suppose que nous devons choisir une modélisation réaliste du comportement des souscripteurs, par l'intermédiaire d'une fonction "taux de rachat" reflétant la proportion de bons rachetés à un instant donné par rapport au nombre de bons encore en vie avant cette date.
- L'option porte sur un actif sensible aux taux d'intérêt, ce qui pose le problème du choix de la modélisation de la courbe des taux.

### 4. Prix de l'option et horizon de réinvestissement

L'horizon de réinvestissement est un déterminant essentiel du prix de l'option. En effet, toutes choses étant égales par ailleurs, le souscripteur ayant un horizon long sera plus sensible à une hausse de taux que celui ayant un horizon limité à la durée  $T$  du contrat car il bénéficiera plus longtemps d'un taux plus élevé. Ainsi, le risque de rachat anticipé et le prix de l'option sont des fonctions croissantes de l'horizon de réinvestissement.

Nous examinerons deux types de souscripteurs :

- le premier a un horizon d'investissement limité à  $T$  années : en cas de sortie anticipée à la date  $t$ , il réinvestit sur une durée  $(T-t)$ .
- le second a un horizon d'investissement supérieur à  $T$  années : en cas de sortie anticipée à la date  $t$ , il réinvestit sur une nouvelle durée  $T$ .

### 5. Moment de l'exercice

Nous proposons deux approches pour modéliser le moment de l'exercice :

- l'approche discrète : les souscripteurs peuvent exercer à des dates fixes annuelles
- l'approche continue : le souscripteurs peuvent exercer à tout moment pendant la durée du contrat

## 6. Notations

- $B(t,D)$  : prix, à la date  $t$ , d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut d'échéance  $D$ .  
Nous avons  $B(t,t) = 1 \forall t$  (convergence vers la parité).
- $Y(t,D)$  : taux de rendement à l'échéance  $D$ , en date  $t = \text{TRI}$  d'un investissement à la date  $t$  dans une obligation zéro-coupon sans risque de défaut conservée jusqu'à son échéance  $D$ .  
Pour  $t$  fixé et  $D$  variable,  $Y(t,D)$  décrit la courbe des taux de la date  $t$ .
- $r(t)$  : taux d'intérêt court terme instantané sans risque de la date  $t$ .
- $\delta(t)$  : fonction d'actualisation de la date  $t$ . Nous avons  $\delta(0) = 1$ .
- $Q$  : probabilité risque-neutre équivalente à la probabilité historique.

### Relations fondamentales :

$B(t,D) \equiv \exp\{-(T-t) \cdot Y(t,D)\} \quad (1)$	et	$\delta(t) \equiv \exp\left\{-\int_0^t r(s) ds\right\} \quad (2)$
---	----	---

EVALUATION : étape n°1
------------------------

OBJECTIF : déterminer le flux  $F(\tau)$  associé à l'option de rachat anticipé lorsque celle-ci est exercée à la date aléatoire  $\tau$ .

Le flux associé à l'option est égal au flux écart obtenu comme étant la différence entre la valeur d'une stratégie consistant à racheter le contrat et celle d'une stratégie consistant à ne pas le racheter.

En effet, l'exercice de l'option (volontaire ou non) entraîne pour le bénéficiaire un gain égal à la valeur de rachat du contrat (valeur capitalisée du bon à la date  $\tau$ ), diminué de la valeur de marché du contrat à la date  $\tau$  (abandon des intérêts qui auraient pu être accumulés entre  $\tau$  et  $T$ ).

En appliquant le principe de valorisation d'un actif financier dans l'univers risque-neutre, la valeur actualisée du contrat à la date  $\tau$  est égale à :

$$E_Q[L_T \cdot \delta(T) / F_\tau]$$

Donc la valeur de marché du contrat à la date  $\tau$  est égale à :  $E_Q\left[L_T \cdot \frac{\delta(T)}{\delta(\tau)} / F_\tau\right]$

Par conséquent, le flux associé à l'option de rachat anticipé à une date  $\tau \leq T$  est :

$F(\tau) = L_\tau - E_Q\left[L_T \cdot \frac{\delta(T)}{\delta(\tau)} / F_\tau\right] = L_\tau - E_Q\left[L_T \cdot \exp\left\{-\int_\tau^T r(s) ds\right\} / F_\tau\right] \quad (3)$
--

Cette dernière expression montre clairement que l'option de rachat est un put sur le contrat dont le prix d'exercice, croissant, est égal à la valeur de rachat du contrat.

L'exercice à la date  $\tau$  est rationnel dès lors que  $F(\tau) > 0$ .

EVALUATION : étape n°2
------------------------

OBJECTIF : déterminer une formule probabiliste pour le prix de l'option dans l'univers risque-neutre.

On notera ORA la valeur de l'option de rachat anticipé à la date initiale  $t = 0$ . Dans toute la suite de l'exposé, la date de référence est la date  $t = 0$ .

En appliquant le principe de valorisation d'un actif financier dans l'univers risque-neutre, la valeur de l'option à la date 0 est égale à l'espérance, sous la probabilité risque-neutre  $Q$ , du flux actualisé associé à l'option à la date d'exercice aléatoire  $\tau$ .

$$\text{ORA} \cdot \delta(0) = E_Q[F(\tau) \cdot \delta(\tau) / F_0]$$

$$\text{D'où : ORA} = E_Q \left[ F(\tau) \cdot \exp \left\{ - \int_0^{\tau} r(s) ds \right\} / F_0 \right]$$

En remplaçant  $F(\tau)$  par son expression et en remarquant que  $F_0 \subset F_{\tau}$  puisque  $0 < \tau$  (on pourra donc écrire  $E[E[./F_{\tau}] / F_0] = E[./F_0] = E[.]$ ), il vient après calculs :

$\text{ORA} = E_Q \left[ L_{\tau} \cdot \exp \left\{ - \int_0^{\tau} r(s) ds \right\} - L_T \cdot \exp \left\{ - \int_0^T r(s) ds \right\} \right] \quad (4)$
---

EVALUATION : étape n°3
------------------------

**OBJECTIF** : décomposer l'option en plusieurs options classiques exercées à des dates fixes.

Afin de mieux comprendre l'exposé, nous passons d'abord en temps discret : on suppose que le rachat du contrat est uniquement possible aux (N-1) dates ponctuelles  $t_1, \dots, t_{N-1}$  telles que  $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1}$ , la date initiale étant notée  $t_0 = 0$  et la date finale  $t_N = T$ . Si le rachat a lieu à la date  $t_i$ , on a alors  $\tau = t_i = i$  (afin d'alléger les notations, on notera souvent  $t_i = i$ ) où  $i = 1, \dots, N-1$

L'option américaine de date d'exercice aléatoire  $\tau$  peut s'analyser comme la somme de (N-1) options classiques de même nature qui ne pourraient chacune être exercée qu'à une date  $t_i$  fixée ( $i = 1, \dots, N-1$ ). Toutefois, il faut prendre en compte le fait que l'exercice d'une de ces options s'accompagne de l'abandon des options dont le moment d'exercice théorique est postérieur à celui de l'option exercée.

Ainsi, la valeur à la date  $t_0 = 0$  de l'option exerçable à la date aléatoire  $\tau$  est égale à la somme des valeurs de marché à la date 0 des flux  $F(t_i)$  (où  $t_i > t_0 = 0$ ) associés aux (N-1) options fictives, chacune étant pondérée par la probabilité que le flux  $F(t_i)$  soit effectivement versé à la date  $t_i$ , c'est-à-dire pondérée par la probabilité que la date d'exercice aléatoire  $\tau$  soit égale à la date  $t_i$ . Notons qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle puisqu'il faut prendre en compte le lien existant entre les (N-1) options fictives.

En suivant ce raisonnement, nous pouvons écrire :

$$ORA = \sum_{i=1}^{N-1} E_Q \left[ L_{t_i} \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_i} r(s) ds \right\} - L_T \cdot \exp \left\{ - \int_0^T r(s) ds \right\} \right] \cdot P(\tau = t_i / F_{t_i})$$

Puisque l'espérance est un opérateur linéaire et que  $P(\tau = t_i / F_{t_i})$  désigne une probabilité indépendante de  $Q$  (c'est un nombre pouvant être "entré" dans l'espérance), il vient, en utilisant les notations simplifiées :

$ORA = E_Q \left[ \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left[ L_i \cdot \exp \left\{ - \int_0^i r(s) ds \right\} - L_T \cdot \exp \left\{ - \int_0^T r(s) ds \right\} \right] \cdot P(\tau = i / F_i) \right) \right] \quad (5)$
---



EVALUATION : étape n°4

**OBJECTIF** : déterminer un estimateur de la probabilité théorique  $P$  que la variable aléatoire  $\tau$  (représentant la date d'exercice aléatoire) soit égale à une date quelconque donnée entre 0 et  $T$ .

La probabilité conditionnelle  $P(\tau = i / F_i)$  représente la probabilité qu'a un contrat  $j$  (parmi les  $M$  contrats totaux souscrits à la date initiale) d'être racheté à la date  $t_i$ , c'est-à-dire la probabilité théorique  $p_i$  associée à la variable aléatoire de Bernoulli  $N_{ij}$  définie par :

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le contrat } j \text{ est racheté à la date } t_i \text{ (probabilité } = p_i) \\ 0 & \text{si le contrat } j \text{ n'est pas racheté à la date } t_i \text{ (probabilité } = 1 - p_i) \end{cases}$$

L'objectif est de trouver un estimateur sans biais de  $p_i$ . Pour cela, considérons la variable aléatoire  $S_i \equiv \sum_{j=1}^M N_{ij}$  représentant le nombre aléatoire de contrats rachetés à la date  $t_i$ .  $S_i$  étant la somme de  $M$  variables de Bernoulli de paramètre  $p_i$ ,  $S_i$  suit donc une loi binômiale  $B(M, p_i)$ . Nous savons alors qu'un estimateur sans biais de  $p_i$  est donné par la proportion empirique de contrats rachetés à la date  $t_i$  par rapport au nombre total de contrats  $M$ .

Donc un estimateur sans biais de  $P(\tau = i / F_i)$  est donné par :

$$P_i = \frac{S_i}{M} = \frac{\text{nombre de contrats rachetés à la date } t_i}{\text{nombre total de contrats souscrits à la date initiale}}$$

Ainsi, nous pouvons à partir de (5) obtenir une estimation du prix de l'option à la date 0 :

$$ORA = E_Q \left[ \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left[ L_i \cdot \exp \left\{ - \int_0^i r(s) ds \right\} - L_T \cdot \exp \left\{ - \int_0^T r(s) ds \right\} \right] \cdot P_i \right) \right] \quad (6)$$

EVALUATION : étape n°4 (suite)

D'autre part, à la date d'évaluation du contrat  $t_0 = 0$ , le nombre de contrats rachetés aux différentes dates  $t_i$  est inconnu. Par conséquent, il faut soit estimer statistiquement  $P_i$ , soit se donner une modélisation à priori. Nous retenons la deuxième solution.

Toutefois, plutôt que de modéliser  $P_i$ , il est plus facile de modéliser un taux de rachat, noté  $v_i$ , reflétant la proportion de contrats rachetés à la date  $t_i$  par rapport au nombre de contrats encore "vivants" à la date précédente  $t_{i-1}$ , puis de trouver une relation entre  $P_i$  et  $v_i$ .

Le taux de rachat à la date  $t_i$  est estimé par :  $v_i = \frac{S_i}{M_{i-1}}$

où  $M_{i-1}$  est le nombre de contrats encore "vivants" à la date  $t_{i-1}$  (plus précisément, juste après les rachats de cette date  $t_{i-1}$ )

Il est facile de montrer par récurrence que la relation entre  $P_i$  et  $v_i$  est donnée par :

$$P_i = \begin{cases} v_i & \text{pour } i = 1 \\ v_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1 - v_j) & \text{pour } i \geq 2 \end{cases} \quad (7)$$

Le cas continu s'obtient comme limite du cas discret : le rachat du contrat peut se faire à des dates très proches l'une de l'autre.

On notera  $P_t$  et  $v_t$  respectivement la proportion instantanée des contrats totaux rachetés à la date  $t \in ]0; T[$  et le taux instantané de rachat à la date  $t$ .

Ainsi, la valeur de l'option à la date 0 est donnée par :

$$ORA = E_Q \left[ \int_0^T \left[ L_t \cdot \exp \left\{ - \int_0^t r(s) ds \right\} - L_T \cdot \exp \left\{ - \int_0^T r(s) ds \right\} \right] \cdot P_t \cdot dt \right] \quad (8)$$

La relation entre  $P_t$  et  $v_t$  est obtenue comme cas limite de la relation (7) :

$$P_t = v_t \cdot \exp \left\{ - \int_0^t v_s ds \right\} \quad (9)$$

EVALUATION : étape n°5

OBJECTIF : déterminer une formule probabiliste pour le prix de l'option dans l'univers forward-neutre.

Les calculs sont poursuivis en temps discret dans un premier temps. Le passage dans l'univers forward-neutre va nous permettre d'exprimer le prix de l'option en fonction des prix des zéro-coupons d'échéance  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ).

En utilisant :

- la propriété de linéarité de l'opérateur espérance mathématique,
- la définition de la probabilité forward-neutre  $Q_u$ , équivalente à  $Q$ , relative à un

instant  $u$  quelconque : 
$$\frac{dQ_u}{dQ} = \frac{\exp\left\{-\int_0^u r(s) ds\right\}}{B(0, u)}$$
 (application avec  $u = i$  et  $u = T$ ),

- le fait que les valeurs capitalisées  $L_i$  et  $L_T$  sont déterministes puisque le taux de rendement effectif  $R$  est supposé déterminé dès la date initiale,
- la relation fondamentale sur les espérances sous deux probabilités équivalentes :

$$E_Q\left[\frac{dQ_u}{dQ} \cdot P_u\right] = E_Q\left[\frac{dQ_u}{dQ}\right] \cdot E_{Q_u}[P_u] \text{ (application avec } u = i \text{ et } u = T)$$

Il est facile de démontrer que :

$$ORA = \sum_{i=1}^{N-1} [L_i \cdot B(0, i) \cdot E_{Q_i}[P_i] - L_T \cdot B(0, T) \cdot E_{Q_T}[P_i]] \quad (10)$$

Dans le cas continu, la formule s'écrit :

$$ORA = \int_0^T [L_t \cdot B(0, t) \cdot E_{Q_t}[P_t] - L_T \cdot B(0, T) \cdot E_{Q_T}[P_t]] dt \quad (11)$$

EVALUATION : étape n°6

OBJECTIF : spécifier la dynamique des zéro-coupons.

cas général : nous retenons un modèle à un aléa (incertitude sur le taux d'intérêt court terme  $r(t)$  avec une structure de volatilité déterministe du temps, mais non constante. Cette volatilité s'écrit  $\sigma(t,D)$  et représente la volatilité, à la date  $t$ , du prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $D$ .

cas particulier : nous retenons le modèle de Ho et Lee où la volatilité est une fonction linéaire de la maturité. Elle s'écrit  $\sigma(t,D) = \sigma \cdot (D - t)$  où  $\sigma$  est une constante positive.

ans le cas général, nous supposons que le prix  $B(t,D)$  suit, sous la probabilité risque-neutre  $Q$ , le processus de diffusion suivant :

$$\frac{dB(t,D)}{B(t,D)} = r(t)dt - \sigma(t,D)d\bar{W}_t \quad (12)$$

où  $\bar{W}_t$  est un  $Q$ -mouvement brownien standard représentant l'incertitude sur la courbe des taux.

En utilisant le lemme d'Itô et le fait que la valeur d'une obligation zéro-coupon converge vers la parité à l'échéance, la solution de l'équation différentielle (12) (0 étant choisi comme date origine) est donnée par :

$$B(t,D) = \frac{B(0,D)}{B(0,t)} \cdot \exp\left\{-\phi_t^D - \bar{Z}_t^D\right\} \quad (13)$$

avec

$$\phi_t^D \equiv \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma^2(s,D) - \sigma^2(s,t)] ds \quad (13.1)$$

$$\bar{Z}_t^D \equiv \int_0^t [\sigma(s,D) - \sigma(s,t)] d\bar{W}_s \quad (13.2)$$

43.31.19

EVALUATION : étape n°6 (suite)

De même, en utilisant le théorème de Girsanov et la définition de la probabilité forward-neutre, il est possible de déterminer un nouveau mouvement brownien

$$\hat{W}_t = \bar{W}_t + \int_0^t \sigma(s,u) ds \quad \text{sous la probabilité forward-neutre } Q_u.$$

La solution de l'équation différentielle (12) dans l'univers forward-neutre est alors donnée par :

$$B(t,D) = \frac{B(0,D)}{B(0,t)} \cdot \exp\{\gamma_{t,u}^D - \hat{Z}_t^D\} \quad (14)$$

avec

$$\gamma_{t,u}^D \equiv \int_0^t \left[ -\frac{1}{2} [\sigma^2(s,D) - \sigma^2(s,t)] + \sigma(s,u) \cdot [\sigma(s,D) - \sigma(s,t)] \right] ds \quad (14.1)$$

$$\hat{Z}_t^D \equiv \int_0^t [\sigma(s,D) - \sigma(s,t)] d\hat{W}_s \quad (14.2)$$

Dans le cas particulier du modèle de Ho et Lee,  $\phi_t^D$ ,  $\gamma_{t,u}^D$ ,  $\bar{Z}_t^D$  et  $\hat{Z}_t^D$  peuvent être calculés :

$$\phi_t^D = \frac{1}{2} \sigma^2 D t (D - t) \quad (15.1)$$

$$\gamma_{t,u}^D = -\frac{1}{2} \sigma^2 t (D - t) (D + t - 2u) \quad (15.2)$$

$$\bar{Z}_t^D = \sigma (D - t) \bar{W}_t \quad (15.3)$$

$$\hat{Z}_t^D = \sigma (D - t) \hat{W}_t \quad (15.4)$$

EVALUATION : étape n°7

**OBJECTIF** : déterminer une fonction permettant de modéliser le comportement des souscripteurs face à l'évolution des taux d'intérêt, afin de calculer les espérances des estimateurs des probabilités de rachat.

L'idée est d'exprimer le taux de rachat de la date  $t$  comme une fonction de variables explicatives observables influençant les souscripteurs dans leur décision de rachat (niveau des taux d'intérêt, situation fiscale et financière personnelle des souscripteurs, âge des souscripteurs).

Il existe deux possibilités :

- détermination statistique des facteurs explicatifs et des sensibilités à ces facteurs
- détermination à priori des variables explicatives et de la relation fonctionnelle

Nous choisissons ici la deuxième possibilité, avec un modèle à une variable explicative  $X(t)$  et une relation fonctionnelle  $f$  telle que  $v_t = f[X(t)]$ .

Détermination de la variable explicative  $X(t)$

- 1er cas : le souscripteur a un horizon d'investissement limité à  $T$  années

Dans ce cas, le souscripteur décide de racheter son contrat à la date  $t$  si le gain procuré par ce rachat (après impôts sur intérêts capitalisés, pénalité de rachat anticipé et droits d'entrée payés sur le nouveau contrat) est supérieur à la valeur de marché du même contrat conservé jusqu'à son échéance  $T$ .

Il devient ainsi naturel de prendre comme variable explicative :

$$X_1(t) = \frac{L_t \cdot \beta_t}{L_T \cdot B(t, T)} \quad (16)$$

*gain net* (pointing to  $L_t \cdot \beta_t$ )  
*↳ valeur de rachat* (pointing to  $L_T \cdot B(t, T)$ )

où  $\beta_t \leq 1$  représente l'effet cumulé des taxes, pénalités et droits d'entrée, soit :

$$\beta_t \equiv (1 - J_t)(1 - b)(1 - d) \quad \text{où} \quad J_t \equiv \rho_t \cdot \frac{L_t - L_0}{L_t}$$

EVALUATION : étape n°7 (suite)

- avec :
- $\rho_t$  = taux d'imposition sur les intérêts capitalisés en cas de rachat anticipé à la date t
  - b = taux de pénalité en cas de rachat anticipé
  - d = droits d'entrée (en %) sur l'achat du nouveau contrat

Dès lors que  $X_1(t) > 1$ , le souscripteur a intérêt à racheter son contrat et inversement lorsque  $X_1(t) < 1$ . Par conséquent, le taux de rachat instantané  $v_t$  devra être une fonction croissante de  $X_1(t)$ .

- 2ème cas : le souscripteur a un horizon d'investissement H supérieur à T années (on suppose qu'en cas de rachat à la date t, il réinvestit sur T années, soit  $H=t+T$ )

Dans ce cas, le souscripteur attache beaucoup plus d'importance au taux à T années. Si le taux de la date origine 0, corrigé des effets des taxes, pénalités et droits d'entrée, est inférieur à celui prévalant à la date t, le souscripteur aura intérêt à racheter son contrat à cette date t et à en souscrire de plus rémunérateurs. Par conséquent, la variable explicative retenue devra intégrer  $Y(t,t+T)$  et  $Y(0,T)$ , ou encore  $B(t,t+T)$  et  $B(0,T)$  en raison de la relation (1).

Il devient ainsi naturel de prendre comme variable explicative :

$$X_2(t) = \frac{B(0,T)}{B(t,t+T)} \cdot \beta_t \quad (17)$$

Dès lors que  $B(0,T) \cdot \beta_t > B(t,t+T)$ , on a  $Y(0,T) - (1/T) \cdot \ln(\beta_t) < Y(t,t+T)$  et le souscripteur est incité à racheté son contrat. Par conséquent, le taux de rachat instantané  $v_t$  devra être une fonction croissante de  $X_2(t)$ .

Connaissant les expressions de  $B(t,D)$  (étape précédente), les variables explicatives s'écrivent :

$$X_1(t) = x_1(t, u, T) \cdot \exp\{\hat{Z}_t^T\} \quad (18)$$

avec

$$x_1(t, u, T) \equiv \beta_t \cdot \frac{L_t}{L_T} \cdot \frac{B(0,t)}{B(0,T)} \cdot \exp\{-\gamma_{t,u}^T\} \quad (18.1)$$

EVALUATION : étape n°7 (suite)

et :

$$X_2(t) = x_2(t, u, T) \cdot \exp\{\hat{Z}_t^{t+T}\} \quad (19)$$

avec

$$x_2(t, u, T) \equiv \beta_t \cdot \frac{B(0, T) \cdot B(0, t)}{B(0, t+T)} \cdot \exp\{-\gamma_{t,u}^{t+T}\} \quad (19.1)$$

avec  $\gamma_{t,u}^D$  et  $\hat{Z}_t^D$  donnés par les relations (14.1) et (14.2)

Détermination de la relation fonctionnelle f

Les deux variables explicatives  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont des variables dépendantes de l'évolution des taux d'intérêt permettant de modéliser le comportement d'un souscripteur qui serait financièrement parfaitement rationnel et "immortel" pendant toute la durée du contrat. Nous allons nous donner à priori une forme fonctionnelle entre  $v_t$  et  $X_k(t)$  ( $k = 1, 2$ ) permettant de prendre en compte :

- une sensibilité plus ou moins grande à l'évolution des taux d'intérêt, le souscripteur ne réagissant pas toujours de façon rationnelle,
- la possibilité de rachats "non volontaires", dûs à la mort de l'assuré, et de rachats volontaires non liés à l'évolution des taux.

Dans le cas continu, la relation fonctionnelle f vérifie simplement :  $v_t = f[X_k(t)]$

Dans le cas discret :  $v_i = 1 - \exp\{-f[X_k(i)]\}$

On peut en effet montrer qu'il y a équivalence des deux approches à l'ordre 1.

Nous choisissons pour la fonction f une forme Log-linéaire du type :

$f(x) = -\ln(A) + p \cdot \ln(x)$  où A et p sont des constantes telles que  $0 < A < 1$  et  $p > 0$ .

Avec une telle spécification pour f, le taux de rachat instantané s'écrit :

- Cas continu :  $v_t = -\ln(A) + p \cdot \ln[X_k(t)] \quad (20)$

- Cas discret :  $v_i = 1 - \frac{A}{[X_k(i)]^p} \quad (21)$



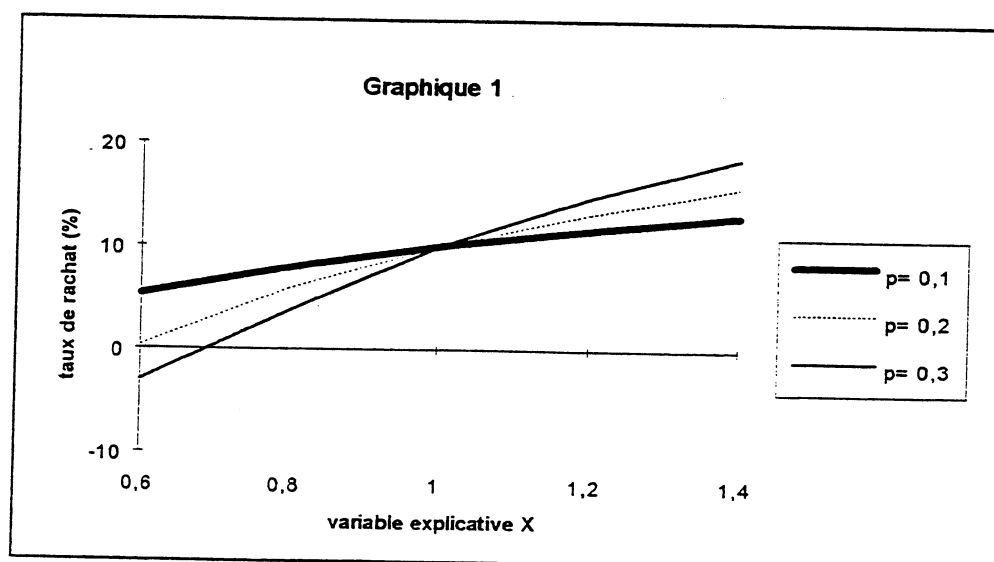
## EVALUATION : étape n°7 (suite)

Le choix de cette fonction Log-linéaire répond à trois objectifs :

- Les calculs que nous développerons par la suite resteront simples,
- Avec un choix approprié des paramètres A et p, les valeurs obtenues pour le taux de rachat grâce à cette fonction sont réalistes,
- Les paramètres A et p ont une signification financière facilement compréhensible :

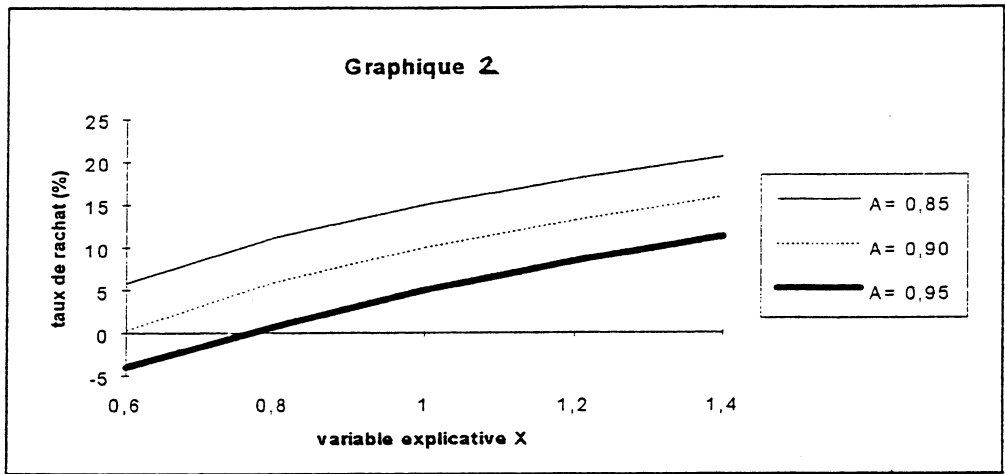
. Le coefficient p représente la pente de la courbe. Plus p est élevé et plus les souscripteurs seront sensibles à l'évolution des taux et auront tendance à effectuer des rachats financièrement rationnels.

. Le coefficient A représente la proportion de souscripteurs qui gardent leur contrat lorsqu'il est équivalent, d'un point de vue rationnel, de "sortir" ou de ne pas "sortir" du contrat. Plus A est élevé et plus la proportion de souscripteurs qui maintiennent leur contrat est importante, alors qu'aucune raison financière rationnelle ne les poussait à garder leur contrat. Le coefficient (1-A) mesure donc la propension des souscripteurs à racheter leur contrat pour des raisons différentes de celles qui sont liées à l'évolution des taux. En particulier, plus l'âge de l'assuré est avancé et moins on choisira A élevé car la probabilité de rachat "non volontaire" (dû au décès) augmente, indépendamment de l'évolution des taux.



Ce graphique, avec A fixé à 0,90, montre bien que la courbe est d'autant plus pentue que p est élevé.

EVALUATION : étape n°7 (suite)



Ce graphique, avec p fixé à 0,2, montre bien que le taux de rachat est d'autant plus élevé que A est faible.

EVALUATION : étape n°8

**OBJECTIF** : déterminer une formule analytique pour le prix de l'option dans le cas général d'une volatilité déterministe (les formules sont données pour des souscripteurs ayant un horizon d'investissement limité à T années).

Les formules probabilistes qui avaient été obtenues sont les suivantes :

Cas discret :

$$ORA = \sum_{i=1}^{N-1} [L_i \cdot B(0,i) \cdot E_{Q_i}[P_i] - L_T \cdot B(0,T) \cdot E_{Q_T}[P_i]] \quad (10)$$

Cas continu :

$$ORA = \int_0^T [L_t \cdot B(0,t) \cdot E_{Q_t}[P_t] - L_T \cdot B(0,T) \cdot E_{Q_T}[P_t]] dt \quad (11)$$

Cas discret :

Nous avons désormais tous les éléments pour calculer  $E_{Q_i}[P_i]$  et  $E_{Q_T}[P_i]$  à partir des relations (7) et (21) :

- i = 1

$$E_{Q_u}[P_1] = 1 - A \cdot (x_1(1,u,T))^{-p} \cdot \exp\left\{\frac{p^2}{2} \cdot \text{Var}(\hat{Z}_1^T)\right\} \quad u = 1, T \quad (22)$$

- i = 2, ..., N - 1

$$E_{Q_u}[P_i] = \left( \prod_{j=1}^{i-1} x_1^{-p}(j,u,T) \right) \cdot \exp\left\{\frac{p^2}{2} \cdot \text{Var}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \hat{Z}_j^T\right)\right\} \\ \times \left[ A^{i-1} - A^i \cdot x_1^{-p}(i,u,T) \cdot \exp\left\{\frac{p^2}{2} \cdot \text{Var}(\hat{Z}_i^T)\right\} \cdot \exp\left\{p^2 \cdot \text{Cov}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \hat{Z}_j^T, \hat{Z}_i^T\right)\right\} \right] \\ u = i, T \quad (22.1)$$

Pour le souscripteur ayant un horizon supérieur à T années, il suffit de remplacer dans les formules (22) et (22.1)  $x_1(j,u,T)$  par  $x_2(j,u,T)$  et  $\hat{Z}_j^T$  par  $\hat{Z}_j^{j+T}$ .

EVALUATION : étape n°8 (suite)
--------------------------------

Cas continu :

Nous avons désormais tous les éléments pour calculer  $E_{Q_t}[P_t]$  et  $E_{Q_T}[P_t]$  à partir des relations (9) et (20) :

$E_{Q_u}[P_t] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp \left\{ \int_0^t (\text{Ln}(A) - p \cdot \text{Ln}[x_1(s, u, T)]) ds + \frac{p^2}{2} \cdot \text{Var} \left( \int_0^t \hat{Z}_s^T ds \right) \right\} \right]$ <p><math>u = t, T</math>                      (23)</p>
--

Pour le souscripteur ayant un horizon supérieur à T années, il suffit de remplacer dans la formule (23)  $x_1(s, u, T)$  par  $x_2(s, u, T)$  et  $\hat{Z}_s^T$  par  $\hat{Z}_s^{s+T}$ .

EVALUATION : étape n°9

OBJECTIF : déterminer une formule analytique pour le prix de l'option dans le cas particulier d'une volatilité linéaire de la maturité.

Cas discret : nous avons déjà vu :

$$\gamma_{t,u}^D = -\frac{1}{2}\sigma^2 t(D-t)(D+t-2u) \quad (15.2)$$

$$\hat{Z}_t^D = \sigma(D-t)\hat{W}_t \quad (15.4)$$

. Horizon limité à T années :  $D = T$

On a : 
$$x_1(t,u,T) = \beta_t \cdot \frac{L_t}{L_T} \cdot \frac{B(0,t)}{B(0,T)} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)(T+t-2u)\right\} \quad (24)$$

D'autre part, (22) et (22.1) s'écrivent ici :

-  $i = 1$

$$E_{Q_u}[P_1] = 1 - A \cdot (x_1(1,u,T))^{-p} \cdot \exp\left\{\frac{p^2}{2}\sigma^2(T-1)^2\right\} \quad u = 1, T \quad (25)$$

-  $i = 2, \dots, N-1$

$$E_{Q_u}[P_i] = \left( \prod_{j=1}^{i-1} x_1^{-p}(j,u,T) \right) \cdot \exp\left\{\frac{p^2\sigma^2}{2} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} j(T-j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} j(T-j)(T-k) \right]\right\}$$

$$\times \left[ A^{i-1} - A^i \cdot x_1^{-p}(i,u,T) \cdot \exp\left\{\frac{p^2\sigma^2}{2} i(T-i)^2\right\} \cdot \exp\left\{p^2\sigma^2 \sum_{j=1}^{i-1} j(T-j)(T-i)\right\} \right]$$

$u = i, T \quad (25.1)$

EVALUATION : étape n°9 (suite)

. Horizon supérieur à T années : D = t+T

$$\text{On a : } x_2(t, u, T) = \beta_1 \cdot \frac{B(0, T) \cdot B(0, t)}{B(0, t+T)} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \sigma^2 T t (T + 2t - 2u)\right\} \quad (26)$$

D'autre part, (22) et (22.1) s'écrivent ici :

- i = 1

$$E_{Q_u}[P_1] = 1 - A \cdot (x_2(1, u, T))^{-p} \cdot \exp\left\{\frac{p^2}{2} \sigma^2 T^2\right\} \quad u = 1, T \quad (27)$$

- i = 2, ..., N-1

$$E_{Q_u}[P_i] = \left( \prod_{j=1}^{i-1} x_2^{-p}(j, u, T) \right) \cdot \exp\left\{\frac{3}{4} p^2 \sigma^2 T^2 i(i-1)\right\} \\ \times \left[ A^{i-1} - A^i \cdot x_2^{-p}(i, u, T) \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} p^2 \sigma^2 T^2 i^2\right\} \right] \\ u = i, T \quad (27.1)$$

Cas continu :

$x_1$  et  $x_2$  sont donnés respectivement par (24) et (26)  
(selon l'horizon du souscripteur)

. Horizon limité à T années :

La formule (23) devient alors :

$$E_{Q_u}[P_i] = \left[ -\ln(A) + p \cdot \ln[x_1(t, u, T)] - \frac{\sigma^2 p^2}{120} \frac{\partial[\psi(t)]}{\partial t} \right] \times \exp\left\{ \int_0^t (\ln(A) - p \cdot \ln[x_1(s, u, T)]) ds + \frac{\sigma^2 p^2}{120} \psi(t) \right\} \\ \text{avec :} \\ \psi(t) \equiv t^3(8t^2 - 25Tt + 20T^2) \\ \frac{\partial[\psi(t)]}{\partial t} = 20t^2(2t^2 - 5tT + 3T^2) \\ u = t, T \quad (28)$$

EVALUATION : étape n°9 (suite)

. Horizon supérieur à T années :

On obtient alors :

$$E_{Q_0}[P_t] = \left[ -\text{Ln}(A) + p \cdot \text{Ln}[x_2(t, u, T)] - \frac{\sigma^2 p^2 T^2 t^2}{2} \right] \times \exp \left\{ \int_0^t (\text{Ln}(A) - p \cdot \text{Ln}[x_2(s, u, T)]) ds + \frac{\sigma^2 p^2 T^2 t^3}{6} \right\}$$

$u = t, T$  (29)

ETUDE GRAPHIQUE DES DETERMINANTS DU PRIX

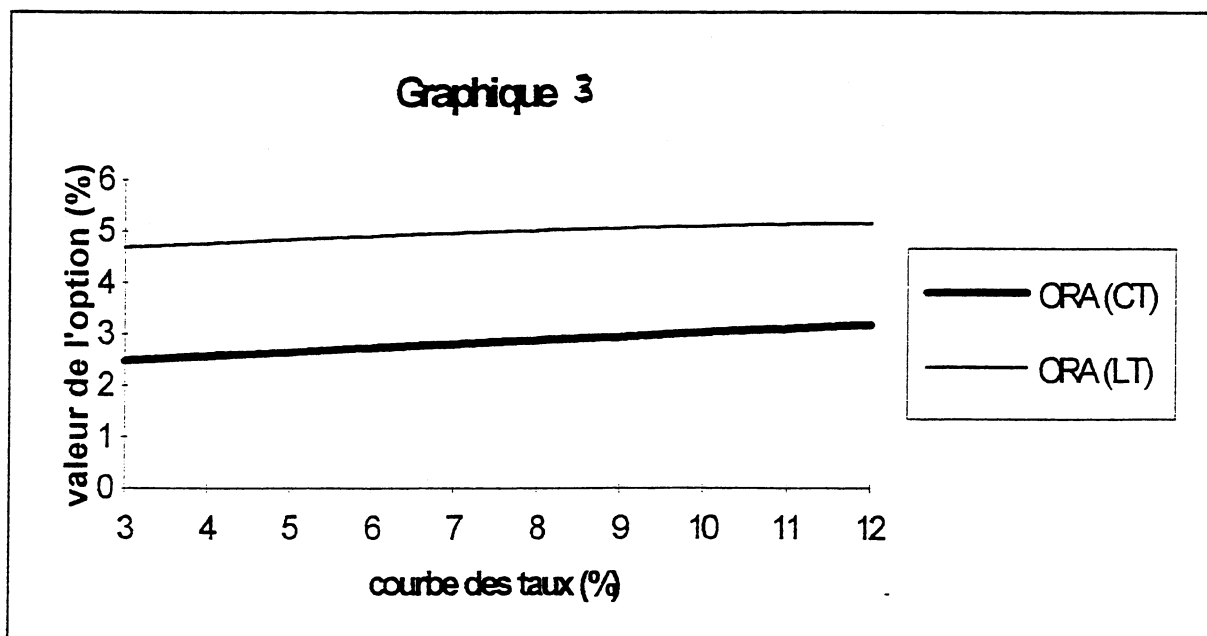
1. Les données de l'exemple

- Cas discret, modèle de Ho et Lee (volatilité linéaire de la maturité)
- Résultats exprimés en pourcentage du nominal du contrat
- Durée du contrat :  $T = 8$  ans
- Taux de rendement effectif servi aux souscripteurs :  $R = 7,2 \%$
- Courbe des taux de la date initiale plate :  $Y(0,i) = 8 \% \forall i$
- Coefficient de volatilité :  $\sigma = 2 \%$
- Droits d'entrée lors de la souscription à un nouveau contrat :  $d = 5 \%$
- Pénalité en cas de rachat anticipé :  $b = 0 \%$
- Taux d'imposition en cas de rachat anticipé :  $\rho_i = \begin{cases} 39,4 \% & \text{pour } i=1,2,3 \\ 19,4 \% & \text{pour } i=4,5,6,7 \end{cases}$
- Fonction "taux de rachat" :  $p = 0,2$  et  $A = 0,95$

On trouve : ORA =  $\begin{cases} 2,87 \% & \text{(CT)} \\ 5,01 \% & \text{(LT)} \end{cases}$

2. Sensibilité du prix de l'option à la courbe des taux initiale

Nous supposons ici un déplacement parallèle d'une courbe de taux plate.



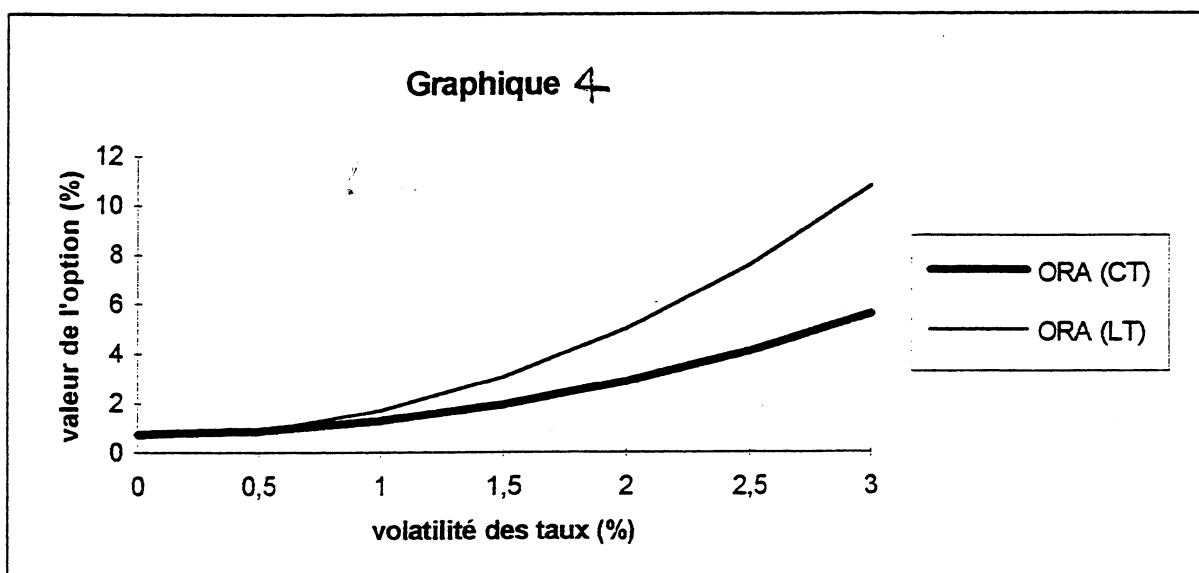


Nous remarquons en premier lieu l'importance de l'horizon d'investissement du souscripteur qui est fondamental dans l'analyse du risque de rachat anticipé : plus il est long, et plus le souscripteur attache de l'importance à l'évolution des taux et le risque de rachat anticipé est plus élevé : l'option est donc plus chère.

Dans le cas court terme, le graphique 3 nous montre qu'il existe une relation linéaire croissante entre le prix de l'option de rachat anticipé et la courbe des taux initiale : avec nos données, pour une hausse des taux d'un point de base, le prix de l'option augmente de 0,8 point.

Dans le cas long terme, c'est la même chose, mais l'influence des taux est d'autant moins importante qu'ils sont élevés.

### 3. Sensibilité du prix de l'option à la volatilité des taux

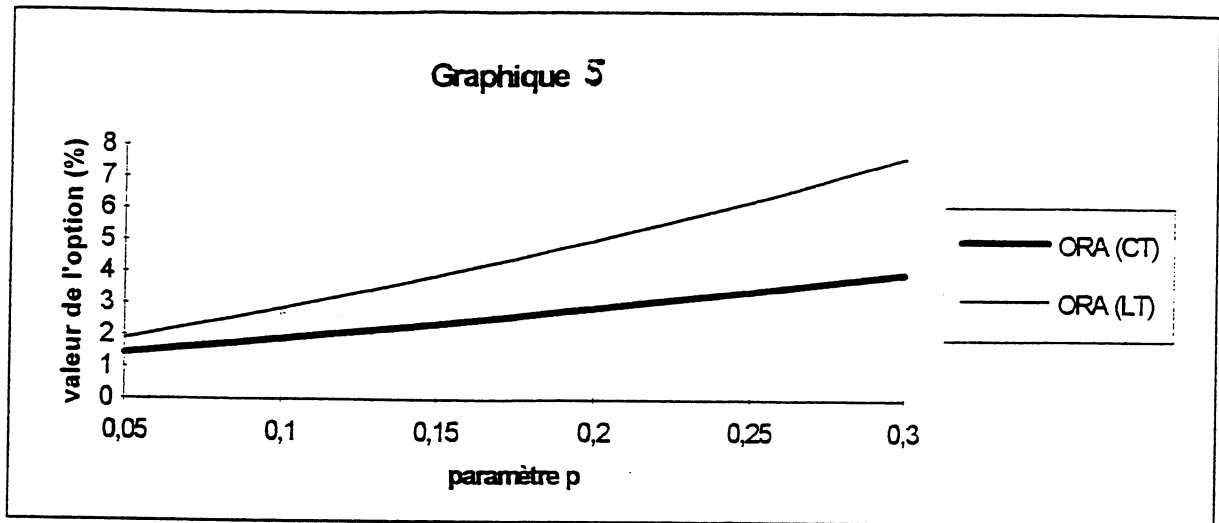


Le graphique 4 montre que le prix de l'option est une fonction croissante de la volatilité des taux d'intérêt. En effet, plus les taux sont volatils et plus ils risquent de dépasser un taux seuil au-delà duquel les souscripteurs sont incités à racheter leur contrat. Il s'agit d'un résultat tout à fait classique de la théorie financière : la valeur de l'option augmente avec la volatilité du sous-jacent.

D'autre part, nous remarquons que la valeur de l'option est plus sensible à la volatilité des taux quand l'horizon d'investissement du souscripteur est long (courbe plus "pentue") : en effet, le souscripteur est d'autant plus attentif aux mouvements des taux que son horizon de gestion est long car la perte en cas de mauvaise gestion serait alors plus importante que celle d'un souscripteur ayant un horizon plus court.

Enfin, notons que la valeur de l'option reste positive lorsque les taux ne sont pas volatils : cela s'explique par la possibilité de rachats systématiques non rationnels, dûs au décès de l'assuré par exemple.

#### 4. Sensibilité du prix de l'option à la pente de la fonction "taux de rachat"



Le graphique 5 montre que le prix de l'option augmente avec le paramètre p. Ceci est tout à fait logique : plus les souscripteurs sont sensibles à l'évolution des taux, plus le droit de rachat du contrat doit être cher car il sera exercé plus souvent et de façon plus rationnelle.

La relation est linéaire lorsque l'horizon est court ; quand l'horizon est long, la courbe est légèrement convexe.

## CONCLUSION

### 1. Relative à cette étude

Nous avons établi que :

- Le risque de rachat anticipé est significatif (valeur de l'option comprise entre 2% et 8% selon les données et l'horizon du souscripteur) : nécessité d'une couverture.
- La valeur de l'option de rachat anticipé est une fonction croissante de trois variables essentielles : le niveau de la courbe des taux initiale, la volatilité des taux et la pente de la fonction "taux de rachat" modélisant le comportement des souscripteurs face aux fluctuations des taux.
- L'horizon d'investissement, ou plutôt de réinvestissement en cas de rachat, est tout aussi essentiel car il est en relation directe avec la sensibilité des souscripteurs aux mouvements des taux.
- Enfin, la valeur de l'option est plus petite quand la durée du contrat T diminue. Autrement dit, la valeur de l'option décroît avec le passage du temps : son théta est négatif.

### 2. Relative aux possibilités d'amélioration du modèle

Voies de recherche possibles :

- Développer des formules explicites dans le cadre de la modélisation de Vasicek (volatilité exponentielle du type  $\sigma(t,D) = \frac{\sigma}{a} [1 - \exp\{-a(D-t)\}]$  où  $\sigma$  et  $a$  sont des constantes positives).
- Déterminer une fonction "taux de rachat" plus appropriée à partir de différentes statistiques sur le comportement des souscripteurs.
- Développer une modélisation plus complexe qui tiendrait compte du caractère aléatoire de la participation bénéficiaire.