

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université

Spécialité : **Science de Gestion**

préparée au laboratoire **Science Actuarielle et Financière**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences Economiques et de Gestion**

présentée et soutenue publiquement

par

Anthony DERIEN

le 30 Septembre 2010

Titre:

Solvabilité 2: Une réelle avancée?

Directeur de thèse: **M. Jean Paul LAURENT, professeur à l'université Lyon 1**

Co-directeur de thèse: **M. Stéphane LOISEL, professeur à l'université Lyon 1**

Jury

M. Jean Claude AUGROS, professeur à l'université Lyon 1,
Mme. Cécile KHAROUBI, professeur à ESCP-Europe. Rapporteur,
M. André DUBEY, professeur à l'université HEC Lausanne. Rapporteur,
M. Emmanuel LE FLOC'H. Responsable en entreprise,
M. Jean Paul LAURENT, professeur à l'université Lyon 1,
M. Stéphane LOISEL, professeur à l'université Lyon 1,

Pour Sylvie.

Resume

Les futures normes de solvabilité pour l'industrie de l'assurance, Solvabilité 2, ont pour buts d'améliorer la gestion des risques au travers de l'identification de différentes classes et modules de risque, et en autorisant les compagnies à utiliser des modèles internes pour estimer leur capital réglementaire. La formule standard définit ce capital comme étant égal à une VaR à 99.5% sur un horizon d'un an pour chaque module de risque. Puis, à chaque niveau de consolidation intermédiaire, les différentes VaR sont agrégées au travers d'une matrice de corrélation. Plusieurs problèmes apparaissent avec cette méthode :

- Le régulateur utilise le terme de “VaR” sans communiquer de distributions marginales ni globale. Cette mesure de risque multivariée n'est pertinente que si chaque risque suit une distribution normale.
- L'horizon temporel à un an ne correspond pas à celui des engagements d'une compagnie d'assurance, et pose des problèmes dès lors qu'il faut déterminer la fréquence de mises à jour des modèles internes.
- La structure de dépendance proposée par la formule standard ne correspond pas à celle habituellement mise en place par les compagnies et est difficilement utilisable dans un modèle interne.

La première partie présentera en détail les points clés de la réforme et donnera des axes de réflexion sur son application dans la gestion des risques. Dans une deuxième partie, il sera montré que cette mesure de risque multivariée ne satisfait pas aux principaux axiomes d'une mesure de risque. De plus, elle ne permet pas de comparer les exigences de capital entre compagnies, puisqu'elle n'est pas universelle. La troisième partie démontrera que pour évaluer un capital à un point intermédiaire avant l'échéance, une mesure de risque doit pouvoir s'ajuster à différentes périodes, et donc être multipériodique. Enfin, la quatrième partie mettra l'accent sur une alternative à la matrice de corrélation pour modéliser la dépendance, à savoir les copules.

Mots clés : Copule, Dépendance, Gestion des risques, Mesure de risque, Solvabilité

Abstract

Solvency 2 : An improvement ?

The new rules of solvency for the insurance industry, Solvency II, aim to improve the risk management in the insurance industry by identifying different classes / modules of risk, and by allowing insurance companies to use an internal model to estimate their capital. The standard formula sets the capital requirement at a VaR of 99.5% level for a one year horizon for each sub risk module. Then at each consolidation level, the different VaR are aggregated through a correlation matrix.

Some problems may appear with this method :

- The regulator uses “VaR” term while he provides neither marginal distributions nor the global one. This multivariate risk measure is relevant only if each risk follows a normal distribution.
- This short term horizon does not match the time horizon of the liabilities of an insurance company and leads to some problems in updating the capital requirement during the year.
- The dependance structure given in the standard formula does not correspond to a practical one, and cannot be used in an internal model.

The first part will present a detailed discussion about the reform and give some example of its application from risk management’s point of view. In the second part, it will be establish that this multivariate risk measure does not satisfy the main axioms that a risk measure should fulfill. With this approach, there is not uniqueness among the insurance companies, so the solvency capital requirement cannot be compared across the industry. The third part will demonstrate that a risk measure which adjusts to different periods should be used to evaluate the capital at a point in time, a multiperiod risk measure. At last, the fourth part will emphasize on an alternative to the correlation matrix to aggregate risks, the copula.

Keywords : Copula, Dependence, Risk management, Risk measure, Solvency

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'une convention tripartite entre l'Université de Lyon 1, AonBenfield et l'ANRT.

Elle a pu être initiée notamment grâce à deux personnes qui nous ont quittées prématurément, Christian Partrat et Olivier du Passage.

Christian Partrat, Professeur à l'Université Lyon 1, avait accepté d'encadrer le projet que je lui avais soumis et Olivier du Passage, Directeur Générale de Aon Ré, avait cru dans ce projet. Qu'ils trouvent au travers de ces quelques lignes toute ma reconnaissance.

Par la suite, cette thèse n'aurait pas pu être menée à bien sans le concours de deux personnes :

- Jean Paul Laurent, Professeur à l'Université Lyon 1, Directeur de Thèse. Vous avez toujours su élargir l'horizon des recherches, trouver de nouvelles perspectives, éclairer de vos connaissances les problématiques rencontrées.
- Stéphane Loisel, Professeur à l'Université Lyon 1, Co-Directeur de Thèse. De par son expérience et sa culture de la solvabilité des compagnies d'assurance, Stéphane a apporté des conseils pertinents et précieux, contribuant à la réussite de ce projet.

Ces quelques mots ; “Merci, gratitude, reconnaissance” ne sauraient traduire toute votre contribution à cette thèse.

Au rang des personnes qui ont permis à cette thèse de naître et d'aller jusqu'à son terme, il est indispensable de nommer également deux autres personnes :

- Michel Hideux, Directeur Général de AonBenfield, qui a cru et soutenu ce projet en mettant en oeuvre les conditions propices à sa réalisation.
- Emmanuel Le Floc'H, Responsable de thèse, dont la disponibilité n'a jamais été démentie tout au long de ces années, et qui a toujours su me donner des suggestions et remarques qui ont permis d'améliorer ce travail. Un grand merci à toi.

Cette thèse vous doit également énormément à tous les deux, merci de votre confiance.

Un grand merci également à l'équipe Actuariat de AonBenfield, qui même si elle n'a pas participé de manière directe à la réalisation de la thèse, de par sa sympathie, sa bonne humeur, ses encouragements et son esprit d'équipe, a réussi à me motiver. Un remerciement tout particulier

REMERCIEMENTS

à Yann Cueff, qui a pris sur son temps pour m'aider dans les différentes phases de relecture.

At last, but not least, c'est vers toi, Sylvie, ma plus fidèle lectrice, que se tournent mes plus vifs remerciements. Remerciement de m'avoir accompagné durant ces années de thèse, remerciement d'avoir su me motiver en toutes situations, remerciement pour me pardonner de t'avoir délaissé tant de week ends pour les consacrer à la thèse. Merci.

Table des matières

Resume	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Table des matières	ix
Introduction	1
1 Les futures normes de solvabilité	7
1 Introduction	7
2 La situation actuelle	9
2.1 Solvabilité 1	9
2.2 Agences de notation	11
2.2.1 Présentation	11
2.2.2 Détermination du rating	11
2.2.3 Analyse quantitative	13
3 Solvabilité 2	17
3.1 Présentation	17
3.2 Best Estimate	22
3.3 Risk Margin	24
3.4 Capital de solvabilité réglementaire	26
3.4.1 Architecture	26
3.4.2 Calcul du capital réglementaire	35
3.5 Le Capital minimum requis	38
3.6 Modèle interne	38
3.7 Fonds propres	45
3.8 Planning	47
3.9 Résultats	48
4 Le risque de souscription non-vie	51
4.1 Agrégation intra branche d'activité	52
4.2 Agrégation géographique	54
4.3 Agrégation inter branche d'activité	55
5 Conclusion	57

Bibliographie	59
2 La mesure de risque dans Solvabilité 2	63
1 Introduction	63
2 Mesure de risque univariée	65
2.1 Cadre et génèse	65
2.2 Mesure de risque cohérente	66
2.3 Mesure de risque convexe	67
3 Mesure de risque multivariée	69
3.1 Monotonie dans un cadre multivariée	70
3.2 Comonotonie dans un cadre multivarié	73
3.2.1 Comonotonie bivariée	73
3.2.2 Comonotonie intra vecteur	74
3.2.3 Comonotonie inter vecteur	74
4 Inconsistance de la mesure de risque	76
4.1 Non-universalité de la mesure de risques	78
4.2 De la pertinence de la mesure des risques dans Solvabilité 2	82
5 Conclusion de la mesure de risque dans Solvabilité 2	86
Bibliographie	89
3 Aspect temporel	93
1 Introduction	93
2 Mesure de risque multipériodique	96
2.1 Approche axiomatique	96
2.2 Application numérique	102
2.2.1 Fréquence de calcul du capital dans un modèle interne	102
2.2.2 Mesure de risque multipériodique appliquée à la RM	106
3 Les cycles de souscription dans Solvabilité 2	109
3.1 Les cycles de souscription : un cadre bien établi	111
3.1.1 Les cycles de souscription sur le marché français	111
3.1.2 Les théories sous jacentes aux cycles de souscription	112
3.2 Analyse empirique	114
3.2.1 Modèle	114
3.2.2 Données	116
3.2.3 Résultats	118
3.2.4 Estimation de la régression	120
3.3 Conclusion	127
4 Conclusion de l’horizon temporel	127
Bibliographie	129

4	La dépendance dans Solvabilité 2	133
1	Introduction	133
2	Comment mesurer la dépendance	139
2.1	Cadre bivarié	139
2.2	Cadre multivarié	142
3	Comparaison des méthodes d'agrégation dans Solvabilité 2	145
3.1	Distribution normale	146
3.2	Cas : Distribution lognormale / $\sigma_i = \sigma_j, \forall(i, j)$	146
3.3	Cas : Distribution lognormale / $\sigma_i \neq \sigma_j$	151
3.4	Distribution de Pareto	153
3.5	Conclusion de la comparaison des méthodes	156
4	Une approche de Solvabilité 2 par les copules	157
4.1	Les dépendances dans un modèle interne	157
4.2	Présentation des copules	161
4.3	Copules elliptiques	163
4.4	Copules archimédiennes échangeables	169
4.5	Copules archimédiennes non échangeables	175
4.5.1	Fully nested archimedean copula	175
4.5.2	Hierarchically nested archimedean copula	179
4.5.3	Pair copula construction	185
5	Application : Sensibilité dans l'agrégation des risques	191
5.1	Copule elliptique	192
5.2	Exchangeable archimedean copula	192
5.3	Fully nested archimedean copula	194
5.4	Hierarchical nested archimedean copula	194
5.5	Pair copula construction	198
6	Conclusion	201
	Bibliographie	203
	Conclusion	207
	Table des figures	211
	Liste des tableaux	213
	Bibliographie	215

Introduction

Que signifie le terme “ Solvabilité 2 ” ? A l’heure des technologies de l’information, le moyen le plus rapide pour avoir une réponse est de se diriger vers internet.

En date du 15/04/2010, le mot “ Solvency 2 ” donnait lieu à 2.020.0000 réponses sur le moteur de recherche Google, la version française n’est pas en reste puisque “ Solvabilité 2 ” donne 1.290.000 réponses¹. Ce nombre important de références montre combien ce sujet génère de nombreuses communications. Ces publications peuvent être classées de manière schématique en trois catégories :

- Les documents décrivant Solvabilité 2.
- Les documents critiquant Solvabilité 2.
- Les documents en faveur de Solvabilité 2.

Les moteurs de recherche ne ventilent pas les références parmi ces trois catégories donc, il n’est pas possible de mesurer leur importance relative. Néanmoins, il apparaît clairement que les deux premières catégories constituent la majeure partie des réponses, comme en témoigne la création du site internet www.stopsolvabilite2.com.

Quel est donc ce sujet qui suscite autant d’a priori négatif de la part des internautes ?

Solvabilité 2, comme son nom l’indique, est la deuxième version du cadre réglementaire des assurances en Europe. Ces nouvelles règles vont apporter beaucoup de modifications à celles existantes, voire les révisent complètement. L’un des traits essentiels de cette réforme tient au calcul du capital réglementaire (“Solvency Capital Requirement”, SCR) défini en référence à une probabilité de ruine dans 0.5% des cas dans l’année à venir. La réforme est beaucoup plus étendue que ce simple calcul et constitue une évolution importante dans le domaine du contrôle des compagnies d’assurance et de réassurance.

Pour élaborer les nouvelles règles, le collège des superviseurs au niveau européen (CEIOPS) s’est inspiré de systèmes de régulation déjà existants (“Swiss Solvency Test” en Suisse, modèle des agences de notation, “Risk Based Capital” aux Etats-Unis). La méthode identifie 3 piliers, chacun représentant un aspect important du contrôle d’une compagnie d’assurance : l’aspect quantitatif, qualitatif et la communication. L’aspect quantitatif permet d’évaluer le besoin en capital via une formule standard basée sur une approche “Bottom Up” (ascendante) des risques.

1. La même recherche effectuée sur “Google Scholar” renvoie 2.600 retours

Autrement dit, le régulateur identifie différents niveaux de consolidations intermédiaires, au sein desquels les risques sont agrégés.

A la base de cette approche se trouvent des modules de risque. Ceux-ci représentent différents facteurs de risques, tel que le risque de surmortalité par exemple, puis ces sous modules sont eux-mêmes agrégés au sein de classes de risque, par exemple, le risque de souscription vie. L'étape de consolidation suivante est alors la vision globale de la compagnie. Il est important de préciser que le principal grief à l'encontre de Solvabilité 2 (grief qui peut-être reproché à l'encontre des agences de notation ou du RBC) vise la méthode consistant à agréger non pas les risques, mais les besoins en capitaux (tous étant définis par rapport à une situation ne se produisant que dans 0.5% des cas).

L'une des avancées proposées par la réforme Solvabilité 2 est la possibilité pour les compagnies de calculer leur besoin en capital au moyen d'un modèle interne. Celui-ci devant être par essence plus à même de refléter la spécificité du profil de risque de la compagnie (appétit pour le risque différent, souscription de certains risques atypiques, système de gouvernance développée, ...). Cette méthode d'évaluation (sous réserve de satisfaire à différents critères) amènera l'entreprise à avoir une vision plus exhaustive de ses risques et ainsi pouvoir prendre les décisions de gestion adaptées. Malheureusement pour des raisons humaines, réglementaires et financières, seules les entreprises justifiant d'une taille suffisante seront à même de développer de tel procédé ; tandis que pour un nombre important d'acteurs, la formule standard restera le mode d'évaluation de la solvabilité de la compagnie.

Nonobstant la possibilité de recourir à une estimation spécifique de son exposition au risque par une compagnie, la formule standard constitue la pierre d'achoppement de la réforme. Puisque même si une compagnie utilise un modèle interne pour définir son besoin en capital, elle devra les premières années communiquer les résultats suivants les deux approches, expliquer les différences et justifier de l'utilisation de son modèle dans les différents processus internes (réassurance, tarification, provisionnement, management, ...). La formule standard constitue donc une référence incontournable.

Pourtant, cette référence cristallise l'ensemble des critiques formulées à l'encontre de Solvabilité 2, notamment car son calibrage est jugé trop conservateur par bon nombre d'assureurs (voir les remarques déposées en ligne sur le site du CEIOPS, www.ceiops.org). Pourtant, c'est presque une évidence de dire que la formule standard est imparfaite : comment une formule devant s'appliquer aussi bien à un groupe multinational, qu'à une mutuelle ne souscrivant qu'une branche d'activité, pourrait faire l'unanimité ? Comment pourrait-elle prendre en compte les différences de produits entre les pays européens ? Partant de ce constat, il est évident que cette formule ne peut susciter l'approbation et l'adhésion de l'intégralité du marché.

Il existe deux formules standard ; une première permettant de calculer le "Solvency Capital Requirement" (SCR), c'est à dire le capital cible que doit détenir une compagnie d'assurance ; une seconde représentant le "Minimum Capital Requirement" (MCR), montant de capital en dessous duquel le régulateur interviendra. Le SCR est défini en référence à une Value at Risk à

0.5% dans l'année à venir, tandis que le MCR est l'équivalent d'une Value at Risk à 15% dans l'année à venir.

Les nombreuses critiques adressées à Solvabilité 2 ne relèvent ni d'un simple "effet de mode", ni du simple constat que les nouvelles normes vont accroître les exigences de capital et donc mettre en péril la viabilité de certaines entités, mais bien d'arguments objectifs (opérationnels, comptables ou techniques) les justifiant.

Au rang des critiques opérationnelles, le processus de consultation entre le régulateur et les acteurs du marché est fréquemment mis en avant.

Lors des échanges entre le CEIOPS et le marché au travers des "Consultatives Papers" (CP - proposition du CEIOPS sur les modalités d'application de la Directive) ou bien des "Quantitative Impact Study" (QIS - test d'impact réalisé pour paramétrer et tester la formule), le délai de réponse accordé est souvent perçu comme trop court compte tenu des enjeux et ne permet pas de faire des contre propositions. Les quelques exemples suivants illustrent cette affirmation :

- Les CP sont publiés par "vague", c'est à dire que plusieurs CP sont ouverts à la consultation en même temps. Les réponses doivent avoir un cadre bien précis et être rendues avant une certaine date. Lors de la deuxième vague émise en juillet 2009, pas moins de 23 CP ont été publiés sur différents domaines (les calculs et paramètres de la formule standard, la procédure de validation des modèles interne, des règles sur les conglomerats, ...). Ces documents de travail représentent un total de 1171 pages. Ces documents concernent souvent différents services dans chaque entreprise d'assurance, cela nécessite une véritable organisation en interne. De plus, les entreprises doivent relayer leur position auprès des organes représentatifs (par exemple, la Fédération Française des Sociétés d'Assurance ou encore le Groupement des Entreprises Mutuelles d'Assurance). La recherche d'un consensus au sein de ses instances semble difficile dans le temps imparti, puisque dans le cadre de cette deuxième vague, les réponses à ces documents devaient être données pour le début du mois de septembre (en gardant à l'esprit que l'activité est moindre durant les vacances estivales).
- Les contraintes de temps que s'est imposé le CEIOPS lui ont également été préjudiciables. Ainsi au moment de la communication du fichier informatique (classé Excel) nécessaire à la réalisation du QIS4 (qui a eu lieu entre avril et fin juillet 2008) celui-ci était entaché d'erreurs. Plus d'une demi-douzaine de versions intermédiaires ont été nécessaires avant d'avoir la version définitive. Celle-ci ayant été communiquée courant juillet 2008, sans que le délai de réponse n'ait été modifié.
- La réalisation d'un QIS est très consommateur en ressource pour l'ensemble des structures et à plus forte raison pour les petites. En conséquence, certaines approximations sont faites dans les réponses apportées. Enfin, le temps de traitement et de vérification que s'est accordé le régulateur est court au regard du nombre important de réponses reçues (au niveau Européen, il y a eu 1412 participants au QIS4, dont 234 pour la France). Cela implique que les résultats des tests d'impacts (voir le Chapitre 1 - Section 3.9) servant à

calibrer la formule standard sont à prendre avec recul, car de qualités inégales.

Pour ce qui relève des problématiques comptables, là encore, les critiques sont pertinentes.

La référence à la valorisation en valeur de marché dans Solvabilité 2 va incontestablement avoir un effet pro cyclique important en cas de crise (l'exemple de la crise financière du marché hypothécaire américain survenus récemment en est une illustration). Ainsi des dépréciations importantes toucheront l'actif, le calcul de l'exposition au risque dans les conditions courantes de marché, va induire une exigence de capital accrue. Pour contrer ces effets, les assureurs soumis au principe de la valorisation en valeur de marché au travers des normes IFRS, ont fait valoir que celle-ci était trop pessimiste et que les cours allaient remonter vers leurs valeurs fondamentales et qu'ainsi il serait plus pertinent de prendre en compte la valeur à terme. Ce point de vue a été entendu par le CEIOPS puisque dans l'un des documents publics servant de base à l'élaboration de la future réforme, celui-ci propose de distinguer l'application des chocs selon l'horizon de détention des actions. Dans ce cas, il semble inutile de calculer une VaR sur une valeur de marché pour certains postes du bilan, si dans le même temps, d'autres éléments sont valorisés avec une valeur à terme.

De la même façon, la notion de valeur de marché d'un passif d'assurance est délicate, puisque les marchés primaires ou secondaires sont pour l'heure quasi inexistant.

Bien que cette thèse met en relief certaines déficiences concernant les méthodes actuellement employées dans le cadre des futures règles de solvabilité, ces deux types de problématiques ne seront pas approfondis. Afin de ne pas traiter de manière superficielle tous les problèmes, seule une partie des problèmes techniques seront traités dans ce travail de recherche. Ce travail ne prétend pas proposer une solution définitive à ceux-ci, mais plutôt de les éclaircir et de contribuer au débat. L'angle retenu dans cette thèse pour aborder les problèmes liés à la mise en oeuvre des futures normes est celui de la gestion des risques. Il y sera fait état des lacunes actuelles de sa mise en application, en présentant des exemples et des réflexions dans le domaine technique qui mettront en évidence que Solvabilité 2 est une bonne idée mais qu'elle doit encore être améliorée.

Avant d'étudier en détails certains de ces problèmes techniques, une analyse approfondie de la réforme sera faite dans le Chapitre 1. Celui-ci présentera les modifications et enjeux associés à ce nouveau référentiel, ainsi que son apport dans l'amélioration de la gestion des risques des compagnies d'assurance, tout en soulignant certaines difficultés de mise en oeuvre.

Parmi les problèmes traités, figure la méthode utilisée par le régulateur pour mesurer le risque. Comme indiqué, la formule standard reflète plus un consensus entre facilité d'application et règle forfaitaire, qu'entre rigueur scientifique et méthodes employées par les professionnels.

Là où le monde académique a été à l'origine d'une multitude de travaux en lien avec la mesure du risque (à titre de comparaison "risk measure" renvoi 64.800.000 références sous Google), le régulateur n'en a pas tenu compte dans sa proposition de quantification du besoin en capital. Est-elle plus pertinente? En quoi se différencie sa proposition de celle du monde académique? Le Chapitre 2 positionnera la mesure du risque employée par le régulateur dans un cadre axiomatique. Il y sera également fait état du caractère non universel de l'approche du régulateur.

Le Chapitre 3 traitera de l’horizon temporel visé par la réforme sous plusieurs approches. Chacune d’elle mettra en avant que l’horizon de solvabilité fixé à un an par Solvabilité 2, se concilie mal avec l’horizon de gestion des compagnies d’assurance, bien supérieur à une année.

Ce point sera développé notamment via une étude de l’impact de la fréquence de calcul du besoin en capital dans les modèles internes et du suivi de l’évolution du besoin en capital pour une variable fluctuant dans le temps. Au travers de deux exemples simplistes, mais néanmoins conformes à la future norme Solvabilité 2, il sera démontré qu’une mise à jour infra annuelle du besoin en capital conduit à une hausse des exigences. Sachant par ailleurs qu’aucune préconisation n’est faite par le régulateur à l’heure actuelle sur la fréquence de mise à jour des modèles internes, certaines entreprises pourraient être tentées d’adopter un comportement opportuniste et de répondre *a minima*. Autre enseignement de ce chapitre, l’approche traditionnelle consistant à appliquer une mesure de risque monopériodique sur un processus peut aboutir à la nécessité d’une recapitalisation en cours de période, ce qui ne serait pas le cas avec l’usage d’une mesure multipériodique. Ce focus sur l’horizon temporel sera complété par une analyse des cycles de souscription de l’assurance non-vie. Car en plus d’accroître l’instabilité des résultats avec une vision court terme de l’activité d’un assureur, la réforme n’a pas tenu compte de l’existence de ces cycles et raisonne donc à travers le cycle, sans en distinguer les différentes phases, pourtant déterminantes dans l’analyse de la solvabilité d’une compagnie à court terme. Les thèmes abordés dans ce chapitre ont fait l’objet de présentations à des conférences internationales (“Mathematical and Statistical Method for Actuarial Science and Finance” à Venise en 2008, ainsi qu’à “Insurance Mathematics and Economics” en 2009 à Istanbul) et des publications (“Bulletin Français des Actuaires”, “Mathematical Method in Economics and Finance”).

La formule d’agrégation des besoins en capitaux utilisée dans la formule standard aux différents niveaux de consolidation introduit sans doute une confusion entre la corrélation des risques et la corrélation des extrêmes. Il est ainsi fréquent de lire dans les revues spécialisées en assurance (par exemple “La tribune de l’assurance” ou “L’argus de l’assurance”) des interviews de professionnels critiquant la paramétrisation des matrices de corrélation en s’appuyant sur le fait que les corrélations réellement observées sont beaucoup plus faibles que celles qui sont indiquées dans les QIS.

Ce type d’argument représente bien la confusion citée précédemment, puisque dans un cas les données seront observées dans des conditions “normales” de marché, alors que dans l’autre cas, ces coefficients représentent une dépendance censée se produire dans des cas extrêmes. En d’autres termes, la dépendance serait asymétrique, plus le niveau de sécurité requis sera élevé, plus il y aura de dépendance. Néanmoins, si la logique du régulateur consistant à faire apparaître une dépendance plus forte pour ces situations est pertinente, son application l’est moins, puisque cette logique prend la forme d’une corrélation des capitaux.

Ce thème sera traité au travers du Chapitre 4, notamment au travers de propositions alternatives de structures de dépendances, ainsi qu’une illustration de la problématique du paramétrage des dépendances pour un niveau de sécurité encore jamais observé (0.5% dans l’année à venir). Comme attendu, l’introduction de la diversification sera justifiée au regard du métier d’assureur,

mais sa prise en compte de manière fiable et exhaustive sera délicate et nécessitera des tests de sensibilités approfondis tant au niveau des paramètres que de la forme prise par la liaison entre les risques.

Le portrait dressé au fil de ces différents chapitres sur la réforme Solvabilité 2 n'est pas aussi négatif que semble le laisser entendre ses détracteurs. Au travers des différents thèmes présentés, des avancées majeures ont été mentionnées qui ne doivent pas faire oublier les axes d'améliorations à poursuivre.

La Directive adoptée par le parlement Européen en avril 2009, ne fixe pour l'heure que les grandes lignes de la réforme, et certains points demeurant encore en discussion entre les régulateurs et les acteurs du marché. Tous les éléments présents dans cette thèse sont vus en date du 31/12/2009. Ainsi, un lecteur avertit lisant ces lignes dans quelques années ne devra pas être étonné d'avoir des paramètres différents ou une structure modifiée.

Chapitre 1

Les futures normes de solvabilité

1 Introduction

De manière générale lorsque l'environnement économique dans lequel évolue une compagnie d'assurance doit être caractérisé, les termes “risque” et “incertitude” sont utilisés. La clarification de la distinction entre ces deux termes intervient dès 1921 avec [Kni21], pour qui une situation est dite risquée quand la prévision peut se faire à partir de probabilités objectives. A l'inverse, une situation est qualifiée d'incertaine quand la prévision ne peut se faire qu'à l'aide de probabilités subjectives (voir [MRD04] pour une présentation des travaux de F. Knight). La notion de probabilités objectives doit être complétée par la notion de répétition des tirages aléatoires, puisque “dans le cas où il n'y a qu'un seul tirage, il n'y a aucune différence pour la conduite entre un risque mesurable et une incertitude qui ne l'est pas”, [Kni21]. Ainsi comme le note [Pra06], il convient de se demander si F. Knight n'énumère pas les éléments qui séparent les risques assurables de ceux non assurables. Dans la mesure où la connaissance des probabilités et la répétition des tirages aléatoires indépendants sont deux conditions nécessaires à l'assurance d'un risque, il suffit qu'une de ces conditions manquent pour utiliser le terme d'incertitude.

C'est en prenant note de cette distinction fondamentale qu'il faut apprécier l'activité d'une compagnie d'assurance. Lorsqu'il s'agira d'apprécier le montant et le moment du versement des indemnités aux assurés, l'activité de la compagnie sera à la fois risquée et incertaine. Par exemple, la garantie bris de glace en dommage automobile sera risquée puisque la quantification de ce risque repose sur des probabilités objectives; alors qu'inversement, la survenance d'un évènement naturel rend cette garantie incertaine, puisqu'il sera difficile de quantifier le nombre de véhicules impactés. De la même façon, l'estimation des produits financiers obtenus des primes et des provisions investies sur les marchés financiers, sans compter la capacité de la compagnie à mobiliser lesdits montants au moment souhaité, seront tout autant risqués qu'incertains. Enfin, le paiement des primes peut également être qualifié avec ces deux adjectifs, puisque même si par le phénomène de tacite reconduction, il y a une relative inertie dans le renouvellement et la résiliation des contrats, leur paiement n'est pas certain, du fait de l'arbitrage des assurés sur le

rachat de leur contrat d'assurance vie ou bien encore d'une intervention Etatique, la réforme "La-garde" sur les contrats d'assurance emprunteur en est un exemple. Cet environnement aléatoire décrit le cadre de l'inversion du cycle économique propre à l'activité d'assurance qui consiste dans le paiement d'une prime par les assurés dans un premier temps, puis le cas échéant, donne lieu au paiement d'un sinistre ultérieurement.

De fait, pour estimer toutes ces sources d'aléa, une compagnie d'assurance a recours à des méthodes statistiques pour estimer la sinistralité à venir ainsi que la collecte des primes. Comme tous ces modèles ne sont par définition que des reproductions imparfaites de l'environnement économique, des écarts existent entre ce qui est prédit et ce qui est réalisé. C'est pour faire face à ces écarts et pour respecter ses obligations vis-à-vis de ces assurés, que dans le cadre de son activité celle-ci doit satisfaire à des montants réglementaires de capital minimum. En ce sens, les assurés ont tout intérêt à ce que la compagnie détienne un maximum de fonds propres pour faire face à toute éventualité et ainsi être en mesure de satisfaire à ses engagements. Ce faisant, les compagnies seraient amenées à ne plus diminuer les primes d'assurance ou à ne plus distribuer de participation aux bénéficiaires alors même que les associations de consommateur sont les premières à réclamer des versements de participation (voir [dCU07]). Au contraire, les autres parties prenantes, tels les investisseurs, ont tout intérêt à ce que la compagnie détienne un montant de capital moindre en vue d'obtenir un meilleur rendement. Puisqu'un montant de capital immobilisé sans aucune justification économique diminuerait une partie du bénéfice leur revenant. Enfin, l'intérêt du Trésor Public est également dans une "juste" représentation de la réalité économique de l'entreprise d'assurance (provisions et fonds propres), de manière à ne pas soustraire des montants imposables de façon disproportionnée.

Tout le problème étant de trouver le compromis entre rendement et niveau de sécurité permettant de continuer l'exploitation. C'est dans ce contexte que s'insère le régulateur dont le rôle est de veiller à la solvabilité des compagnies et à la protection des assurés. Bien qu'il est clair qu'il n'est pas un arbitre, mais plutôt "juge et parti" en faveur des assurés, l'intérêt du régulateur n'est pas forcément à ce que les entreprises d'assurance soient surcapitalisées inutilement. Conscient de leur position d'investisseurs institutionnels de tout premier plan, les pénaliser nuirait de manière indirecte aux assurés. Dès lors la complexité de sa mission sera de trouver un juste milieu.

L'évolution de l'environnement économique (concurrence accrue, internationalisation des compagnies, nouveaux risques, ...) dans lequel évoluent les compagnies a rendu nécessaire une évolution des normes réglementaires au travers du passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2. Ce chapitre présentera de manière détaillée comment est-ce que le régulateur a adapté les nouvelles règles pour répondre à la mutation de cet environnement et comment il a essayé de trouver un équilibre entre les parties.

Dans une Section 2 sera retracée l'historique du système de réglementation du secteur des assurances en Europe ainsi qu'une description de l'évaluation des compagnies d'assurance par un acteur privé, à savoir les agences de notation. Cette section permettra de mettre en avant les évolutions ainsi que les sources d'inspiration du futur référentiel.

La Section 3 décrira de manière spécifique Solvabilité 2. Celle-ci traitera des grands principes sous tendant le nouveau cadre légal ainsi que les nouvelles notions comptables faisant leurs apparitions. Une présentation approfondie de la détermination du capital réglementaire sous Solvabilité 2 aura lieu tant du point de vue de la formule standard que des modèles internes. L'approche comptable des éléments permettant de couvrir les exigences de capital sera également traitée. Puis une quantification de la mise en application de la réforme, en l'état actuel, sera dressée. Enfin, un risque fera l'objet d'une attention particulière puisqu'il constituera le fil conducteur de cette thèse, le risque de souscription non-vie.

2 La situation actuelle

2.1 Solvabilité 1

Les 1^{ères} Directives datent de 1973 pour l'assurance non-vie et 1979 pour l'assurance vie. Ce système, appelé Solvabilité 1, définit une approche forfaitaire et *a minima* du risque. Elle est donc indépendante du niveau de risque réellement encouru. En effet, Solvabilité 1 prévoit une marge de solvabilité déterminée en fonction de pourcentages sur les primes et les sinistres en assurance non-vie¹ :

1. L'assurance non-vie est aussi appelé assurance IARD en référence à la couverture des risques par la compagnie d'assurance à savoir Incendie, Accident et Risque Divers

TABLE 1.1 – Marge de solvabilité en assurance non-vie

	1 ^{ère} tranche		2 ^{ème} tranche	
	Montant	Taux	Montant	Taux
Chiffre d'affaires (A)	<57.5 M Eur	18%	>57.5 M Eur	16%
Charge moyenne des sinistres (B)	<40.3 M Eur	26%	>40.3 M Eur	23%

$$\text{Marge de solvabilité} = \max(A, B) * \left(\max 50\%, \frac{\text{Sinistres à charge nets de réassurance}}{\text{Sinistres à charge bruts de réassurance}} \right)$$

En assurance-vie, la marge de solvabilité est calculée comme un pourcentage des provisions mathématiques : 4% pour les contrats en euros (le contrat rapporte un rendement fixe tous les ans) et 1% pour les contrats en unité de compte (le rendement du contrat dépend de l'évolution des marchés financiers). Ce système a été revu en 2002, avec les directives européennes 2002/13/EC (assurance non vie) et 2002/83/EC (assurance vie). Les modifications ont porté sur l'augmentation des seuils dans le calcul de la marge de solvabilité en assurance non-vie (de 10 M Eur à 50 M Eur pour les primes et de 7 M Eur à 35 M Eur pour les sinistres), puis d'autres modifications sont intervenues en 2007 et 2009 pour aboutir aux seuils actuels.

Solvabilité 1 présente de nombreuses imperfections :

- En assurance vie, plus les provisions mathématiques sont prudentes, plus le besoin en fonds propres est important.
- En non-vie, une hausse tarifaire entraîne une hausse du besoin en fonds propres sans qu'il y ait accroissement du risque.
- Tous les risques ne sont pas pris en compte (par exemple le risque de défaut des contreparties).
- L'asymétrie dans le traitement des plus ou moins values obligataires. Seules les plus values sont ajoutées aux fonds propres alors que les moins values ne sont pas retranchées.
- Le côté rétrospectif du contrôle réglementaire qui se base principalement sur des données comptables en coût historique.

Depuis le 1^{er} janvier 2004, la marge obligatoire de solvabilité doit être requise à tout moment et pas seulement à la fin de l'année, ce qui lui confère un rôle d'instrument de gestion des risques. Bien qu'il n'y ait eu à ce jour que très peu de faillite, la création d'un marché européen de l'assurance nécessite une harmonisation et une modernisation de la régulation.

Cette évolution des règles prudentielles est dans la lignée des autres réformes réglementaires qui touchent tant le secteur bancaire avec "Bâle 2" et la "Capital Requirement Directive" que le secteur de l'assurance avec les normes ICA en Angleterre, le "Swiss Solvency Test" en Suisse ou le "Risk Based Capital" aux Etats-Unis. Avant d'expliquer comment l'Europe a fait évoluer son dispositif de contrôle des entreprises d'assurances, une présentation détaillée du système d'évaluation des risques d'une entreprise d'assurance mise en oeuvre par le secteur privé (via

les agences de notation) sera donnée. Ceci permettra de montrer quelles ont été les sources d'inspiration du futur référentiel de solvabilité au niveau européen.

2.2 Agences de notation

2.2.1 Présentation

Une agence de notation est une entreprise chargée de la notation des collectivités (Etats, . . .) ou des entreprises selon certains critères. Ces agences opèrent, contre rémunération, à la demande des entreprises (et éventuellement des collectivités publiques) désirant être notées, mais en toute indépendance par rapport à celles-ci. Une notation n'étant qu'une opinion émise sur base des informations qui leurs sont communiquées, les agences ne garantissent rien à personne et ne sont pas responsables des conséquences de décisions prises d'après cette opinion. Il apparaît ici une des premières limites du recours aux agences de notation, dans le sens où elles n'ont aucun engagement alors même que leur rôle dans l'économie est important.

En dépit de la crise financière survenue en 2008 qui a mis à mal la crédibilité des agences de notation et leur fiabilité à apprécier la santé financière des entreprises ; elles sont et seront des sources d'inspirations de Solvabilité 2, comme l'attestent les références explicites qui leurs sont faites dans les différentes études d'impacts quantitatives (par exemple la description du risque de défaut qui utilisent les ratings des agences de notation, voir Chapitre 1 - Section 3.4.1). Parmi les principales agences de notation, certaines sont généralistes, telles S&P, Fitch ou Moody's, et donnent des notations sur les entreprises de tous les secteurs économiques. Ces dernières ont adapté leurs méthodologies de notations pour les faire correspondre à la spécificité du secteur des assurances. Une autre est exclusivement dédiée aux compagnies d'assurance, AM BEST.

2.2.2 Détermination du rating

Elles ont développé des modèles de détermination de besoins en fonds propres pour les compagnies d'assurance qui reposent à la fois sur une expertise quantitative de la solidité financière des entreprises d'assurance (analyse financière basée sur les données du bilan, du compte de résultat et du business plan, . . .) et une analyse plus qualitative de la gestion de la compagnie (gestion des risques dans l'entreprise, gouvernance, . . .). Ci-après sera détaillée la méthodologie suivie par S&P pour évaluer la santé financière d'une compagnie d'assurance. Cette approche recoupe 8 axes :

“Competitive position” L'analyse consiste ici à comprendre les forces et faiblesses concurrentielles de la société. Cette analyse est importante car elle permet d'évaluer la solidité des performances futures de la société. Les analystes passeront en revue les principales caractéristiques qui donneront à la compagnie un avantage concurrentiel à long terme et qui lui permettront d'avoir de bonnes performances financières. Ces éléments seront notamment : la diversification des revenus par branche, la part de marché de la société et de ses principales branches, l'efficacité du système de distribution, les marchés sur lesquels se positionne la société.

“Management and corporate strategy” Il s’agit ici d’un élément subjectif d’analyse du positionnement stratégique de la société (quels sont les objectifs stratégiques du management et comment ils sont implémentés), de la capacité de la société à mettre en place la stratégie choisie, des objectifs du management en termes financiers (structure de capital cible, leviers financiers utilisés, utilisation de la réassurance, . . .), et de l’organisation (comment l’organisation met en oeuvre la stratégie choisie).

“Operating performance” L’objectif pour S&P est de valider que la société est en mesure de mettre en place sa stratégie afin de générer de la croissance et d’attirer des investisseurs. Le principe est que des entreprises générant des revenus stables, basés sur les avantages concurrentiels dont elles disposent sur le marché, sont donc bien positionnées pour réussir. L’un des indicateurs utilisés par S&P est le Return On Revenues (ROR), c’est-à-dire la rentabilité mesurée par rapport au chiffre d’affaires. Cependant, le ROR ne tient pas compte des niveaux de risques différents selon les branches souscrites et ainsi des niveaux de ROR exigés plus ou moins élevés pour une performance standard. A cette fin, S&P utilise le ratio entre le ROR réel et un ROR ajusté, le Earnings Adequacy Ratio (EAR). Le ROR ajusté est obtenu en multipliant le résultat opérationnel de chaque branche par un facteur mis au point par S&P, représentant le niveau de ROR attendu par branche (entre 3% et 16% en fonction des branches). Le montant de l’EAR détermine la qualité des performances de la société. Cette analyse est menée sur les performances historiques mais aussi sur leurs projections.

“Investments” La qualité des investissements et leurs rendements sont des éléments importants de l’activité d’un assureur. L’analyse de S&P commence par la compréhension de l’allocation des actifs entre les différentes catégories d’investissements (obligations, immobilier, actions, . . .), afin de déterminer d’éventuelles concentrations d’actifs et l’adéquation aux passifs d’assurance. Sont ensuite revus : la diversification du portefeuille, le risque de crédit des actifs, l’exposition au risque de taux, la liquidité et l’exposition au risque de marché.

“Liquidity” Les actifs des assureurs doivent être d’une manière générale très liquides, notamment afin d’être en mesure de payer rapidement des sommes importantes en cas de catastrophes. S&P analyse la liquidité à partir du niveau des flux de trésorerie opérationnels et bien sûr de la liquidité du portefeuille d’investissement. D’autres sources de liquidité peuvent être prises en compte, notamment les lignes de crédit bancaires.

“Financial flexibility” Ce critère correspond à la fois aux besoins de capital et aux sources de capital et à l’adéquation entre les deux. Pour le premier, il s’agit d’analyser les différents postes qui pourraient donner lieu à des besoins en capital exceptionnellement importants à moyen ou long terme. Pour le second, il s’agit d’évaluer la capacité de la société d’accéder à des montants exceptionnellement importants de capital à moyen ou long terme (marchés de capitaux, réassurance, bonnes performances financières, . . .).

“Enterprise Risk Management (ERM)” Cette composante est apparue fin 2005 et consiste principalement à évaluer le niveau de contrôle interne de la société. Sont notamment analysés : l’intégration de la fonction de risk management dans l’organisation, la qualité des

procédures d'identification des risques et leur contrôle, qualité du management en cas d'événements extrêmes, les modèles d'évaluation des risques.

“Capitalization” Cette composante constitue l'unique élément quantitatif dans la méthode mise en oeuvre par S&P. Sur la base de documents financiers communiqués par la société (par exemple le détail du portefeuille d'investissements, la structure du programme de réassurance, les états financiers des 5 derniers exercices, primes et résultats techniques des principaux produits ou branches d'assurance sur les 5 derniers exercices), l'analyste évalue le “ Capital Adequacy Ratio ” de la société, c'est-à-dire le rapport entre le capital de la société (ajusté de certains éléments) et le niveau de capital attendu. Dans cette analyse quantitative, S&P et d'une manière générale la plupart des agences de notation ont retenu une approche par facteurs. C'est à dire que pour chaque type de risque, un certain pourcentage lui est attribué qui représente sa contribution dans la détermination du capital.

A chacune de ces composantes est attribuée une notation par l'agence. Le rating final de l'assureur ou du réassureur n'est pas la moyenne des 8 ratings, mais est décidé collectivement par un comité d'analystes lors de la revue de la société.

L'ensemble de ces critères est mis en perspective avec l' “Industry Risk”, c'est-à-dire l'environnement dans lequel la société évolue. Par exemple : la possibilité de nouveaux entrants sur le marché, la possibilité de produits ou services remplaçant les produits de la société, le niveau de concurrence et de volatilité du secteur, le pouvoir de négociation des acheteurs et fournisseurs d'assurance, le contexte légal, réglementaire et comptable dans lequel la société opère.

2.2.3 Analyse quantitative

Le modèle de mesure de la composante Capitalization de la méthode S&P est un modèle à facteur. Il a pour objectif de calculer un niveau de capital cible associé à un niveau de rating. Ce modèle a été profondément revu en 2007. La première étape consiste à calculer le TAC, ou Total Adjusted Capital, sur la base des capitaux propres du bilan de l'assureur. Sont notamment retraités : le goodwill, les participations dans les filiales non consolidées, les marges de prudence incluses dans les provisions techniques, les coûts d'acquisition différés, etc. C'est le TAC qui sera comparé au niveau de capital cible calculé par le modèle. La seconde étape consiste à calculer le niveau de capital cible à partir du bilan. Le bilan est analysé par type de risque, selon les deux composantes d'un bilan comptable, “Asset risks” et “Liability risks”.

Les classes de risque étudiées dans l'Asset risks sont :

Credit risk Le risque de crédit correspond au non remboursement de certaines classes d'actifs au bilan. Il concerne le risque de crédit des obligations, des créances de réassurance ainsi que certaines autres classes d'actifs (emprunts, dépôts chez les cédantes et la ligne “ autres actifs ” du bilan).

Market risk Il s'agit ici d'évaluer le risque de marché associé aux actions et à l'immobilier présents dans les actifs de la société. Egalement, cette composante traite de la problématique d'ALM.

Other assetrisks Cette classe de risque traite du non remboursement des impôts différés. Les actifs immobilisés en font également partis.

Size factor risk Cette composante est relative à la taille du portefeuille d'investissements de la société. Le principe est que plus le portefeuille est de taille importante, plus il est probable que celui-ci sera diversifié et pourra ainsi supporter divers risques.

Concentration risk Le risque de concentration compare l'importance du TAC par rapport aux 10 contreparties les plus importantes et leurs allouent une charge spécifique si celles-ci dépassent plus de 10% du TAC.

Le principe des "Liability risks" est d'évaluer le capital nécessaire afin de couvrir le risque que le coût des sinistres diffère du coût attendu dans le niveau des primes et des provisions techniques. Les principales classes de risque étudiées dans cette catégorie sont :

Non life net premium risk Ceci correspond au risque de souscription de la branche non vie, c'est-à-dire que les activités présentes et futures de la société ne seront pas rentables et que les pertes devront être couvertes par les capitaux propres. La base de calcul de ce risque est le montant des primes nettes de réassurance décomposées selon le marché (européen ou américain) et la branche.

Non life reserve risk Cette composante n'a pas pour objectif de vérifier le niveau des provisions techniques non vie, mais de mesurer les variations potentielles des provisions techniques que peut subir un assureur et de s'assurer que les capitaux propres sont suffisants pour couvrir ces variations. La base de calcul de ce risque est le montant des provisions techniques nettes de réassurance, décomposées selon le marché (européen ou américain) et la branche.

Non life property catastrophe risk Cette composante correspond au montant à immobiliser pour un événement catastrophique dont la probabilité d'occurrence serait d'au plus 0,4% (période de récurrence de 250 ans). Il est important de préciser, que les seuls risques qui sont identifiés par les agences de notations sont les risques climatiques. Les risques catastrophiques liés à l'activité humaine sont absents de leurs analyses et ce malgré les conséquences de ce type d'évènement pourraient se révéler plus coûteuses (par exemple l'accident automobile du Tunnel du Blanc ou l'explosion d'un site classé industriel ou encore une attaque terroriste). Comme les agences de notation sont principalement orientées vers le marché américain, et que celui-ci est soumis de manière récurrente aux ouragans sur la côte Ouest, aux tornades dans le centre et aux tremblements de terre sur la côte Est, cela explique la focalisation des agences sur ce type d'évènements. Alors même que les Etats-Unis ont subi une attaque terroriste sur leur sol. L'approche des scénarios catastrophes varient sensiblement entre les agences. A titre d'exemple pour S&P, l'évènement retenu sera la charge annuelle qui surviendra tous les 250 ans, tandis que pour AM BEST, c'est la survenance de 2 évènements centenaires qui est regardée, pour le péril tempête, un

évènement à 250 ans et un autre à 100 ans pour le tremblement de terre. Il s'agit d'une charge nette d'impôt, dont le calcul est basé sur l'estimation par la compagnie, nette des mécanismes de transfert de risque.

Life insurance risk Le risque sur les provisions techniques vie est décomposé entre Mortality, Morbidity, Longevity et Life reserves risk.

L'analyste peut ajouter à chacune de ces classes de risque des ajustements à sa discrétion. Il calcule ensuite un bonus à la diversification, basé sur le montant des primes et des provisions techniques par branche d'assurance, ainsi que sur une matrice de corrélation entre les différents montants obtenus pour chaque classe de risque (voir [Ss07]).

S&P	Accident & Health	Automobile	Marine Aviation Transport	Domage	Responsabilité	Credit
Accident & Health	100.00%	50.00%	50.00%	25.00%	50.00%	75.00%
Automobile	50.00%	100.00%	75.00%	75.00%	50.00%	50.00%
Marine Aviation Transport	50.00%	75.00%	100.00%	75.00%	75.00%	50.00%
Domage	25.00%	75.00%	75.00%	100.00%	50.00%	25.00%
Responsabilité	50.00%	50.00%	75.00%	50.00%	100.00%	75.00%
Credit	75.00%	50.00%	50.00%	25.00%	75.00%	100.00%

FIGURE 1.1 – Matrice de corrélation du risque de souscription non-vie de S&P

Pour la plupart des risques entrant dans le périmètre de la détermination du besoin en capital, l'évaluation se fait via l'application d'un coefficient sur une valeur censée refléter au mieux le risque. Par exemple, comme mentionné précédemment, pour le Reserve Risk, l'utilisation des provisions nettes de réassurance auxquelles un coefficient est appliqué ne permet ni une approche sensible du risque, ni une application exacte des techniques de transfert de risque.

Les coefficients qui sont appliqués dans cette approche sont fonction du rating visé par l'entité notée. Par exemple, pour le risque portant sur les provisions techniques cédées en réassurance (Credit Risk), sur la Figure 1.2 est représenté en ligne les ratings des réassureurs, en colonne est indiqué le rating "cible" visé par la compagnie d'assurance. A l'intersection des lignes et des colonnes est donnée la probabilité que le réassureur ne puisse honorer ses engagements. Une compagnie ayant ou voulant avoir un rating A et qui a toutes ses créances en réassurance détenues par un seul réassureur noté AA, devra appliquer une probabilité de défaut de 1.1%.

Ainsi la probabilité de défaut qui sera affectée aux réassureurs sera différente selon les ratings des réassureurs et le rating "cible" de la compagnie. De manière triviale, plus le rating "cible" sera important, plus la compagnie d'assurance devra immobiliser de

capital, alors qu'inversement, plus le rating du réassureur sera important, moins il lui faudra immobiliser de capital.

Certaines agences vont jusqu'à intégrer le positionnement dans le cycle de souscription au moment de l'analyse, pour avoir une meilleure visibilité à moyen terme de la situation économique.

	AAA	AA	A	BBB
Reinsurers rated AAA	0.80%	0.70%	0.60%	0.50%
Reinsurers rated AA	1.30%	1.20%	1.10%	0.90%
Reinsurers rated A	2.30%	2.00%	1.80%	1.40%
Reinsurers rated BBB	5.00%	4.40%	4.10%	3.10%
Reinsurers rated BB	18.40%	16.30%	14.90%	11.30%
Reinsurers rated B	34.10%	30.30%	27.70%	21.00%
Reinsurers rated CCC	50.00%	49.30%	45.10%	34.10%
Reinsurers rated R	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
Unrated reinsurers	40.70%	36.10%	33.10%	25.00%

FIGURE 1.2 – Probabilités de défaut de S&P

Pour obtenir le besoin en capital, les méthodes d'agrégation diffèrent selon les agences de notation, certaines utilisent la même approche que Solvabilité 2 (voir la Formule (1.1)) mais avec d'autres mesures de risques (par exemple l'agence de notation Fitch utilise la moyenne des pertes au delà d'un certain seuil). D'autres additionnent les besoins en capitaux de chaque risque faisant ainsi l'hypothèse qu'il n'y a pas de diversification entre les différents risques, d'autres effectuent des pondérations ou bien encore considèrent qu'il y a indépendance entre les risques (par exemple AM Best). Il est à noter que toutes les critiques faites à Solvabilité 2 quant à l'inadéquation de la méthode d'agrégation des risques pourront être réitérées envers les agences de notation.

A côté de cette analyse détaillée, l'analyse qualitative n'est pas délaissée, puisque les conclusions précédentes peuvent être invalidées si l'ERM ne satisfait pas aux critères de bonne gestion qu'ont définis les agences de notation. Parmi les critères, peuvent être mentionnés le reporting au comité exécutif, le contrôle interne, la cartographie, l'audit et l'analyse des risques, la communication financière. Cette liste non exhaustive montre bien l'importance que revêt la stratégie et le management au sein de l'appréciation de la solidité financière des compagnies d'assurance. Dans la lignée de ces approches de détermination du capital qui identifient et intègrent différents facteurs de risques, Solvabilité 2 va adopter une même approche de décomposition du capital entre les principaux risques auxquels est soumise une compagnie. Dans la suite des travaux initiés par l'IASB, organisme édictant les normes comptables, Solvabilité 2 propose de dépasser la vision comptable des risques pour aller vers une vision économique. Pour ce faire, une révolution va avoir lieu du point

du vue du bilan d'une compagnie d'assurance. Traditionnellement, le bilan était représenté en vision comptable, c'est à dire en ne prenant ni en compte la valeur vénale des actifs, ni la dimension temporelle dans le paiement des sinistres, alors qu'avec Solvabilité 2, ce sera la valeur de marché qui sera la référence.

3 Solvabilité 2

3.1 Présentation

Depuis 1997, L'Union Européenne et le Comité Européen des Régulateurs du secteur des assurances et des fonds de pension (CEIOPS) travaillent sur les nouvelles règles de solvabilité qui s'appliqueront aux membres de l'Union Européenne. Ces nouvelles règles ont pour but de :

- Accroître la protection des assurés
- Moderniser et harmoniser les exigences de capital à travers l'Europe.
- Améliorer la gestion des risques dans l'industrie de l'assurance par la prise en compte d'éléments qualitatifs tel que la gouvernance, le contrôle interne, . . .
- Promouvoir le recours à un modèle interne pour déterminer le capital réglementaire.

Pour mettre en place ce nouveau cadre réglementaire, l'Union Européenne a utilisé le processus Lamfalussy. Il s'agit du nom de la démarche utilisée par l'Union Européenne pour concevoir les réglementations du secteur de la finance et de l'assurance. Le processus Lamfalussy est composé de quatre niveaux successifs, dont l'objet est de se concentrer sur des aspects précis du travail législatif.

1. Elaboration de la législation : les institutions européennes adoptent un texte législatif selon le principe de codécision. Ce texte livre les principes directeurs de la future réglementation et donne des axes de mise en oeuvre.
2. Elaboration des mesures d'exécution : un comité spécialisé conçoit, en collaboration avec les autorités de régulation des Etats membres, les détails techniques liés à la mise en oeuvre de la réglementation. Ceux-ci sont portés au vote des états membres, au travers de représentants du secteur de la finance concernés par la réglementation.
3. Coopération des régulateurs : les autorités de régulation nationales coordonnent leurs travaux de déclinaison des textes européens dans leur droit, afin que les réglementations des états membres divergent le moins possible.
4. Contrôle du respect du droit : la commission européenne vérifie la conformité des réglementations nationales et prend les mesures nécessaires à l'encontre des états suspectés de contourner le règlement européen.

Afin d'identifier les champs d'intervention de Solvabilité 2, le CEIOPS a segmenté le projet autour de 3 piliers :

Pilier 1 Définition des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Deux niveaux de fonds propres seront définis :

MCR Il représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique.

SCR Il représente le capital nécessaire pour absorber le choc provoqué par une situation exceptionnelle.

La Commission européenne a demandé au CEIOPS d'étudier les répercussions quantitatives probables du futur régime Solvabilité 2 par le biais d'études d'impacts quantitatives (QIS, "Quantitative Impact Studies"). Il s'agit de questionnaires envoyés à l'ensemble des acteurs du marché pour qu'ils testent le paramétrage des éléments présents dans le Pilier 1. Les QIS successifs ont couvert un champ de plus en plus large :

- QIS1 (2005) : Calcul des provisions techniques.
- QIS2 (2006) : Première approche de la détermination des exigences de capital.
- QIS3 (2007) : Définition des éléments relatifs à la couverture des exigences de solvabilité et aspects relatifs aux groupes.
- QIS4 (2008) : Comparaison des résultats entre la formule standard et les résultats obtenus via des modèles internes. Détail des éléments quantitatifs pouvant être éligibles au capital réglementaire et les aspects groupes.
- QIS5 (2010) : Affinage du calibrage de la formule standard.

Pilier 2 Au sein de ce pilier sera fixé les normes qualitatives de suivi des risques en interne, il indiquera comment l'autorité de contrôle va exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte. Le Pilier 2 imposera la mise en place de dispositifs de gouvernance des risques (processus, responsabilités, production et suivis d'indicateurs, ...). De plus, c'est dans celui-ci que se réalisera la validation des modèles internes des compagnies d'assurance. De la même façon que le CEIOPS a réalisé des QIS pour évaluer l'impact financier des futures normes, il a consulté les acteurs du marché au travers des "Consultative Papers", au sein desquels il a publié les orientations qu'il envisageait de prendre. Le marché étant invité à donner son avis sur les propositions

Pilier 3 Il aura pour objectif de redéfinir les obligations de publications des entreprises d'assurance vis-à-vis de leurs assurés, des investisseurs ainsi que des autorités de marché. Les axes de discussions majeurs sont l'accessibilité et la transparence de l'information produite, ainsi que sa comparabilité au niveau européen. Ce pilier est pour l'heure le moins avancé dans la Directive.

Tous ces piliers sont étroitement liés entre eux. Les décisions de management (programme de réassurance, politique tarifaire, . . .) impacteront directement le besoin en capital, tandis que tout ce qui concerne le reporting permettra au management de prendre les décisions.

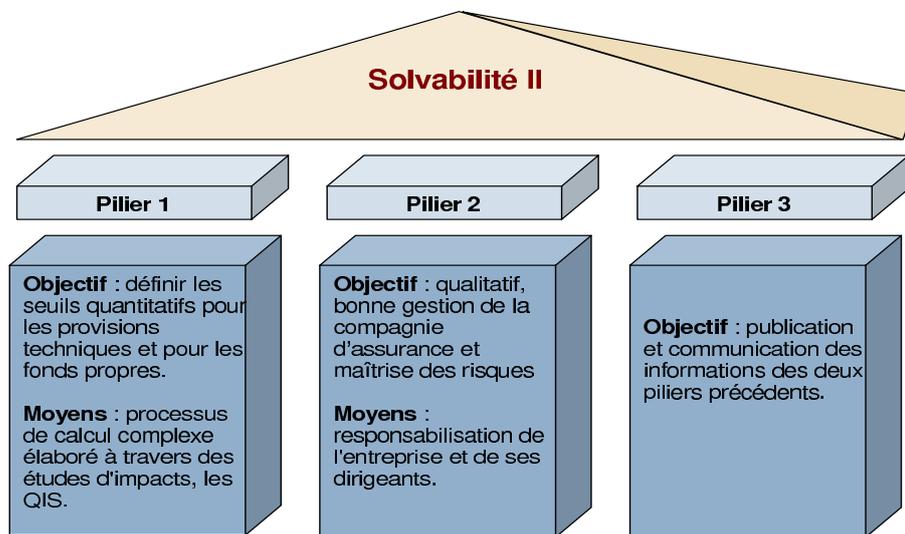


FIGURE 1.3 – Les 3 Piliers dans Solvabilité 2

En l'état actuel de l'avancée de la réforme, c'est surtout le Pilier 1 qui a donné lieu à des échanges avec le marché au travers soit des "Consultative Papers", soit des QIS. Des premières avancées sur le Pilier 2 sont enregistrées notamment sur tout ce qui est en lien avec les exigences de validation des modèles internes, mais cela reste marginal pour l'heure. Ceci contraste avec le rôle majeur donné par les agences de notation sur l'aspect qualitatif de la gestion des risques.

Un point pourtant suscite d'ores et déjà un débat en ce qui concerne le Pilier 2 : l'harmonisation et la pratique du contrôle par les autorités des différents Etats. Le Pilier 2 suppose non seulement que les autorités disposent des mêmes pouvoirs mais aussi qu'elles en fassent un usage comparable. C'est dans ce contexte qu'est né le débat autour de la possibilité pour une autorité de contrôle d'imposer une exigence de capital supplémentaire (capital add-on) au-delà de celle qui résulterait du Pilier 1, par exemple en cas de déficience du contrôle interne. Tous les Etats membres s'accordent sur la nécessité de prévoir cette possibilité. Pour certains, son usage doit toutefois être exceptionnel, temporaire et encadré par des principes stricts permettant de garantir une application équitable de cette exigence

sur tout le territoire de l'Union. Pour d'autres au contraire, alors qu'une harmonisation maximale doit être recherchée pour les Piliers 1 et 3, le Pilier 2 doit donner aux différentes autorités un cadre harmonisé, mais au sein duquel elles doivent pouvoir agir selon la "culture de contrôle nationale".

Tous les problèmes qui affectent chacun des Piliers n'ont pour l'heure pas encore été résolus, alors même que certains d'entre eux nécessitent des décisions supranationales et que Solvabilité 2 doit entrer en vigueur fin 2012.

Cette date d'application dès 2012 posera également un souci du point de vue de l'harmonisation des réglementations comptables, puisque même si l'évolution des normes comptables internationales (IFRS) va aller dans le sens de demander aux compagnies de publier leur bilan selon différentes notions économiques (la phase 2 des IFRS n'est pas encore arrêtée), le CEIOPS n'a pas travaillé en concertation avec l'IASB pour définir le nouveau bilan des compagnies. L'évolution du bilan économique entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2 indiqué à la Figure 1.4, reflète bien la mutation de la vision comptable à la vision économique d'une entreprise d'assurance.

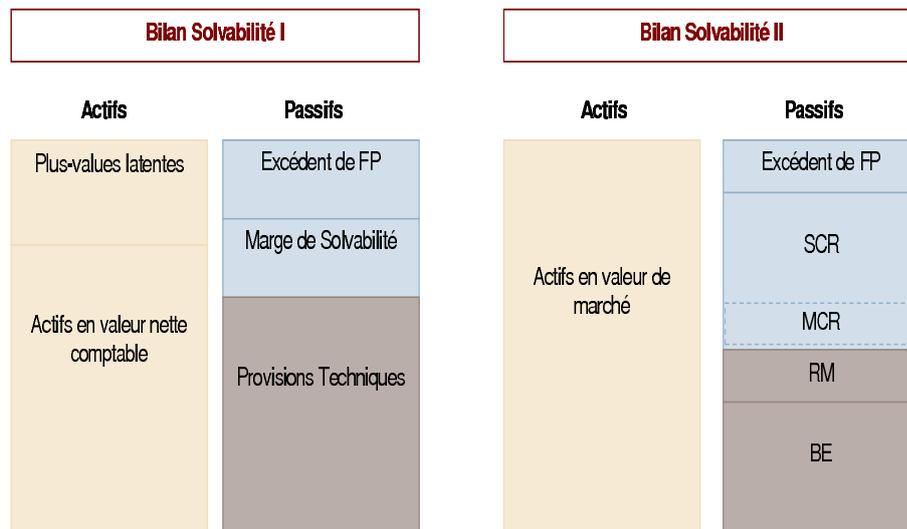


FIGURE 1.4 – L'évolution du bilan entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2

La valorisation en valeur de marché proposée par le CEIOPS semble simple a priori, sauf que comme le démontre la norme comptable SFAS 157 publié par le FASB (instance de réglementation comptable américaine), il faut s'assurer que le cadre de la valorisation comptable est clairement défini. Le FASB distingue trois configurations pour la valorisation de l'actif :

- Cas 1 : (*Mark to market*). Le prix de marché doit être observable et correspondre à une transaction ne s'apparentant pas à une vente forcée.
- Cas 2 : (*Mark to model*). Si la condition précédente n'est pas remplie, que se soit parce que le marché n'est pas liquide ou que le prix observé qui est associé représente une vente forcée, alors la valorisation reposera sur un modèle dont les paramètres sont supposés observables et extraits du marché, pour des titres ayant des caractéristiques voisines.
- Cas 3 : Ce cas s'applique dès lors que le cas 2 n'est plus possible puisqu'aucun paramètre observable sur le marché ne permet une réévaluation. L'évaluation repose sur des estimations internes et donc difficile à contrôler.

La condition 1 sur la liquidité du marché n'est pas forcément remplie, dès lors il est légitime de se demander s'il est pertinent d'appliquer un prix de "marché" obtenu sur un faible volume de transaction pour un stock de titres financiers. Cette problématique observée durant la crise financière du second trimestre 2008 a amené les pouvoirs publics à réfléchir sur une réforme des normes comptables. Elles sont accusées d'avoir contribué à l'effondrement des marchés financiers (voir [MM09]).

Initialement, Solvabilité 2 devait entrer en application après les normes comptables IFRS, ainsi Solvabilité 2 devait bénéficier des retours d'expérience de l'approche comptable, sans qu'il y ait pour autant convergence entre eux (voir [MM09]). Sauf qu'avec le retard pris par les normes comptables, c'est le nouveau régime prudentiel qui entrera en vigueur en premier et qui devra affronter ces problématiques. Pour l'heure, les préconisations du CEIOPS suivent les recommandations des normes internationales, à savoir que l'actif sera représenté en valeur de marché, si cette valeur n'existe pas pour un actif, ce sera la référence à un prix issu d'un modèle qui permettra de le valoriser.

La même référence à une valeur de marché est faite pour le passif. Vouloir appliquer le même raisonnement pour le passif est délicat, car ce genre de marché est très peu développé pour le moment. Pour contourner cette difficulté, le CEIOPS a introduit deux notions : le Best Estimate (BE) et la Risk Margin (RM).

Enfin, ces deux éléments du bilan sont complétés par les deux seuils réglementaires qui définiront les niveaux d'intervention du régulateur : le Minimum de Capital Requis (MCR) et le Capital de Solvabilité Réglementaire (SCR).

3.2 Best Estimate

Le Best Estimate représente l'espérance des cash flows futurs actualisés. Le graphique suivant illustre la méthodologie suivie pour estimer un Best Estimate sur base d'un triangle de liquidation. En ligne figure les années de survenance, puis en colonne les années de décalage, c'est à dire le nombre d'années avec lequel l'évolution de la sinistralité est observée. Il faut extrapoler le triangle de liquidation afin de prévoir la partie inférieure du triangle qui est inconnue, pour ce faire plusieurs méthodes existent (voir [Par05]). Puis il faut agréger et actualiser les résultats en diagonale, qui représentent les montants payés par arrêté comptable. Le Best Estimate s'obtient en faisant l'addition de toutes ces valeurs. L'actualisation des paiements est réalisée en se basant sur les courbes des taux communiquées par le régulateur. La Figure 1.6 présente les courbes de taux qui ont été utilisées lors des dernières études d'impacts.

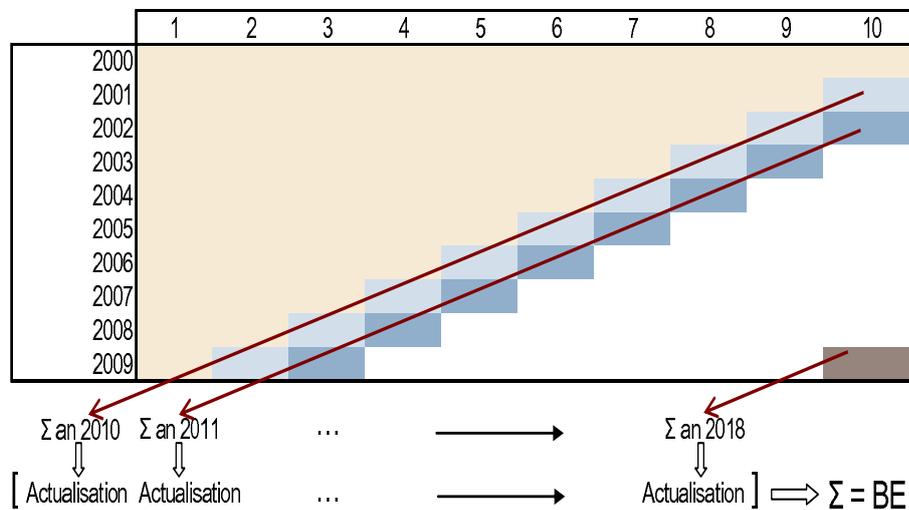


FIGURE 1.5 – Calcul du Best Estimate

Alors même que les différents QIS ont été réalisés à seulement 1 an d'intervalle à chaque fois, il y a une très forte variabilité de la courbe des taux. D'un QIS à l'autre, il y a au moins 50 points de base d'écart entre les taux à horizon long terme. La référence à la notion de marché permet effectivement une meilleure comparaison spatiale entre différents acteurs, par contre elle pénalise la comparaison temporelle puisqu'à périmètre inchangé, le résultat économique sera modifié du seul fait de l'impact de l'actualisation.

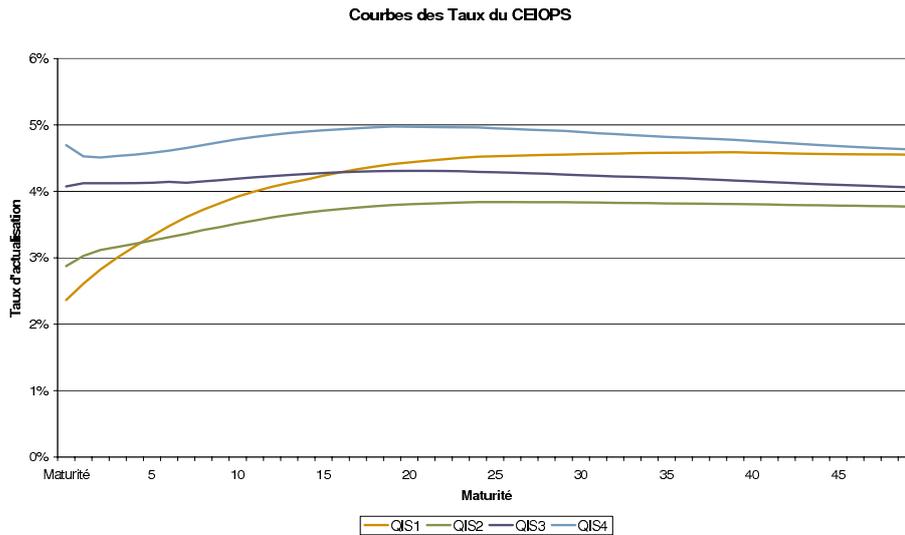


FIGURE 1.6 – Courbe des taux des différents QIS

Le calcul du Best Estimate se fera à la fois brut et net des techniques de transfert de risque (la technique la plus fréquente étant le recours à la réassurance). Bien qu'en apparence la mise en oeuvre de ces techniques semble simple à réaliser, des problèmes de mises en oeuvre existent dans les compagnies (migration informatique, fusion, ...). Pour résoudre ces problèmes, le régulateur a proposé différentes approximations, la principale étant l'application d'un taux proportionnel pour la prise en compte de la réassurance.

Le souci de ce proxy, qui a été utilisé par un grand nombre d'entreprises d'assurance, est que cela suppose que les provisions à charge de la compagnie et celles cédées au réassureur auront la même durée. Or, dans le cas d'une cession en réassurance non proportionnelle, la durée des provisions de l'entreprise d'assurance est souvent plus faible que celle du réassureur. Cela signifie que l'impact de l'actualisation produira moins d'effet pour l'assureur que pour le réassureur. Comme, la différence entre les provisions en valeur comptable et économique alimentera les fonds propres lors du passage au nouveau cadre réglementaire, il en ressort un excédent de capital puisque les provisions en valeur économique seront sous estimées.

3.3 Risk Margin

Le Best Estimate repose sur l'estimation de la moyenne des paiements futurs actualisés que devra payer la compagnie, pour faire face à l'aléa qui entoure la moyenne, la Risk Margin (RM) représente un niveau de prudence supplémentaire dans le cas où les provisions seraient cédées.

La RM ajoutée au Best Estimate représente la valeur de marché du passif d'une compagnie d'assurance. Autrement dit, s'il existait un marché secondaire où les compagnies pouvaient échanger leur portefeuille de provisions, la RM ajoutée au Best Estimate correspondrait à cette valeur de marché. Cette définition est théorique puisque ce marché n'existe pas, de fait le CEIOPS a introduit un calcul devant refléter cette notion. Dans le cadre d'un transfert de portefeuille, complet ou partiel, la RM représente la rémunération du capital supplémentaire que devrait détenir l'autre entité du fait de l'ajout de ces provisions. Le calcul de la Risk Margin a évolué dans le temps. Lors des deux premières études d'impacts quantitatives, la RM correspondait à un niveau de sécurité pour les provisions du fait de l'aléa qui entoure le Best Estimate. Le niveau était fixé en référence à un percentile, le 75ème. En parallèle à cette définition, le QIS2 a introduit une autre définition. Dans cette seconde approche, la RM représente le coût du transfert du portefeuille de l'organisme d'assurance vers un autre porteur de risque, ce dernier devant immobiliser des fonds propres et les rémunérer du fait de l'intégration de ce portefeuille. L'approche par percentile représente une référence à un aspect gestionnaire puisqu'il s'agit de se couvrir par rapport à un niveau de sécurité, alors que l'approche par le coût du capital suit une logique financière. C'est l'approche financière qui a été retenue pour les QIS3 et 4, et c'est celle qui prévaudra lors de la mise en application de Solvabilité 2. L'approche par le coût du capital diffère de l'approche préconisée par les normes IFRS, puisque dans le cadre de ces dernières, la RM représente la prime de risque du portefeuille lors de son échange sur un marché organisé.

Son calcul est délicat car il repose sur l'estimation des besoins en fonds propres réglementaires à l'horizon d'un an pour toutes les années jusqu'à extinction des engagements du portefeuille. Comme il le sera démontré dans le paragraphe suivant, calculer un besoin en fonds propre réglementaire à l'horizon d'un an n'est pas chose aisée, donc réitérer ce travail jusqu'à extinction des engagements est un travail complexe. En se reportant à la Figure 1.4, la détermination du capital sous Solvabilité 2 dépend à la fois des provisions en valeur économique (Best Estimate) et de la Risk Margin ainsi que de l'actif. En d'autres termes, une circularité dans le calcul de la RM apparaît, puisque son calcul dépend du SCR et que lui même dépend partiellement de la RM. Pour éviter ce problème de circularité dans l'approche proposée par Solvabilité 2 (utilisée également par le "Swiss Solvency Test", voir [oPI04]), le calcul des futurs SCR est indépendant de la RM, seul

le Best Estimate et certains risques d'actifs sont pris en compte (voir [Has08] pour une description de la problématique de la RM).

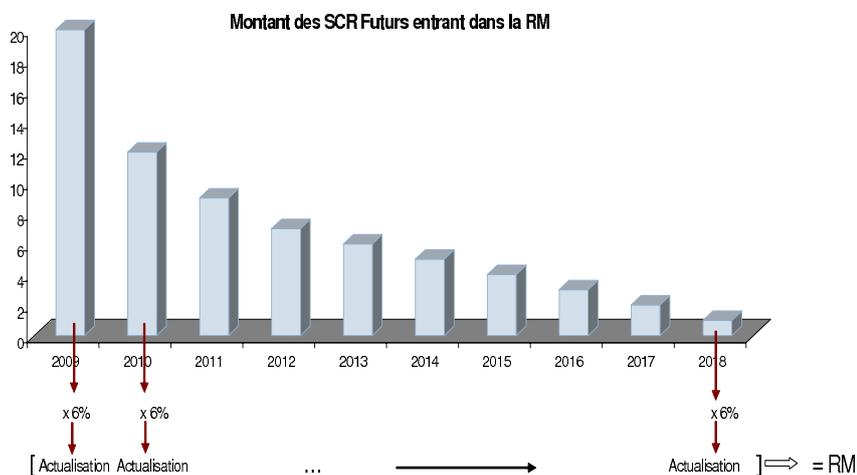


FIGURE 1.7 – Calcul de la Risk Margin

La RM se calcule sur la base du Best Estimate net, l'hypothèse sous jacente est que le repreneur bénéficie des modalités de transfert de risque mise en place pour couvrir le portefeuille. Sur chaque besoin en fonds propre ainsi projeté (voir la Figure 1.7), la Directive stipule qu'il faut lui appliquer un facteur de 6% (il est prévu dans la Directive que ce taux pourra être révisé), ce facteur représente le coût d'immobilisation du capital. Cette valeur provient de différentes sources :

- Le régime prudentiel Suisse (le “Swiss Solvency Test”) utilise également ce taux.
- Il représente le spread entre le taux sans risque et le coût du capital pour une entreprise d'assurance notée BBB (voir [CEI09d]).
- Différentes études visant à estimer le coût du capital des sociétés d'assurance donnent des ordres de grandeur similaire (voir [CF09]).

Cette approche a fait l'objet de vives critiques. Tout d'abord, ce calcul suppose que la compagnie arrête de souscrire de nouveaux contrats et que son activité se limite à la gestion du stock de provisions. Introduire dans le calcul la souscription future aurait amené à des hypothèses fortes, mais celles-ci auraient toujours été moins fortes que l'absence de continuité d'activité. C'est une situation qui ne correspond pas à une logique de pilotage de l'activité pour un assureur et qui est donc contradictoire avec l'un des objectifs de

Solvabilité 2 sur l'amélioration de la gestion des risques. Ensuite, la RM doit être calculée pour chaque branche d'activité, car le transfert de portefeuille peut être morcelé, donc il faut allouer à chaque branche la rémunération qui lui est propre. Cette méthode est justifiée puisqu'il arrive fréquemment que seule une partie du portefeuille soit transférée. Néanmoins, ces deux hypothèses posent des problèmes vis à vis du bénéfice de diversification présent au sein d'un portefeuille d'assurance. Celui-ci est permis par Solvabilité 2 pour calculer le besoin en capital à horizon d'un an, par contre avec cette approche de calcul pour la RM, il n'est plus autorisé pour calculer les besoins en capitaux pour toute la durée des engagements. Ce qui induit une hausse sensible du capital, donc de la rémunération à lui allouer. Enfin, le coût du capital est identique pour tous les risques qui sont cédés. Ainsi, la branche Responsabilité Civile Automobile, qui nécessite une immobilisation sur une durée plus longue et qui est plus sensible à l'évolution de l'environnement économique, est rémunérée à même hauteur que la branche dommages automobile qui a une durée très courte et dont les engagements sont stables. Bien que la dangerosité des branches soit représentée par des besoins en capitaux différents, il aurait été pertinent de définir des coûts d'immobilisation spécifiques à chaque branche afin d'avoir de vraies incitations pour les managers d'étudier l'externalisation de leurs risques.

Il est à noter que la méthode de la RM a évolué entre le QIS3 et le QIS4 dans le périmètre des risques à inclure dans le calcul, seuls certains modules de risque (risque opérationnel, risque de souscription, le risque de contrepartie et une partie du risque de marché, voir après pour une présentation de ces risques) sont présents pour le calcul du besoin en capital sur toute la durée des engagements.

3.4 Capital de solvabilité réglementaire

3.4.1 Architecture

Pour déterminer le capital réglementaire (“Solvency Capital Requirement”, SCR) dans le cadre de Solvabilité 2, le CEIOPS se base sur une approche modulaire qui segmente le SCR selon différents niveaux : classes et sous modules de risque. Au sommet de l'arborescence (voir la Figure 1.8), le SCR de la compagnie est obtenu en faisant l'addition du SCR de base (BSCR) et du SCR du risque opérationnel (SCRop), ce qui traduit une absence de diversification entre les différents risques d'une entreprise d'assurance et le “risque de pertes dues à une inadéquation ou à une défaillance des procédures, personnels, systèmes internes ou à des événements extérieurs”. Cette absence de diversification trouve sa justification dans le rapport “Sharma” (voir [Aut02]). Dans celui-ci les raisons des faillites de 21 compagnies d'assurance ont été analysées. Il en ressort que la faillite d'une compagnie n'est jamais due à un seul élément, mais plutôt à la combinaison de plusieurs facteurs. L'explication la plus fréquente est une mauvaise gestion couplée à un système de gestion

des risques inopérant. Ainsi dans une situation extrême, le risque opérationnel semblerait être l'une des causes dans nombre de faillites.

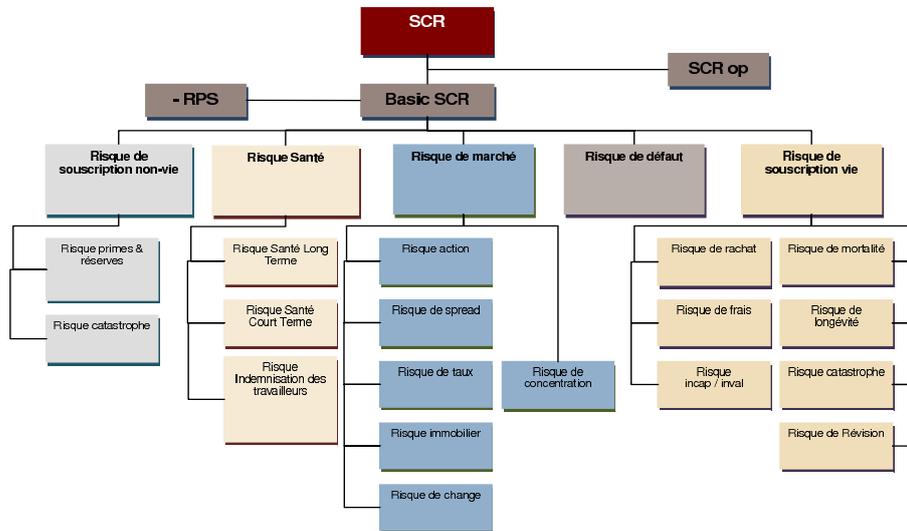


FIGURE 1.8 – Cartographie des risques dans Solvabilité 2

Le SCR de base (BSCR) est obtenu par l'agrégation des besoins en capitaux des cinq classes de risque retenues par le CEIOPS, elles-mêmes issues de l'agrégation des besoins en capitaux des sous modules de risque présents au sein de chaque classe de risque. Ces classes sont :

Risque santé Cette classe couvre le risque de souscription pour toutes les garanties santé et accidents du travail. Il distingue :

- Le risque à long terme (similaire à l'assurance vie en Allemagne et en Autriche). Ce sous module concerne les dépenses de santé, le risque mortalité, le risque de résiliation et l'épidémie.
- Le risque à court terme (risque de sous provisionnement et sous tarification / Cat) ; Application d'une volatilité sur les primes et les provisions pour ce qui dépend de la souscription. Tandis que pour la partie Cat, il s'agit soit d'un traitement en fonction de l'encaissement, soit de scénarios spécifiques.
- Les accidents du travail (risque de sous provisionnement et sous tarification / Cat / révision) fonctionnent de manière similaire au risque à court terme.

Ce risque a été entièrement modifié avec le QIS4. Lors des QIS précédents, le risque de santé était intégré au risque de souscription non-vie, ce qui explique les similitudes

de calcul entre ces deux classes de risque. Le problème de la segmentation des risques à un niveau européen pose des problèmes de transposition dans les Etats, puisque pour des raisons historiques et de diversité des systèmes de sécurités sociales nationales, le risque santé varie d'un pays à un autre. Dans [CEI09g] une liste de produits pouvant poser problème est communiquée avec la classification à utiliser.

Risque de marché Il quantifie les pertes suite à des fluctuations défavorables de l'actif. Ces fluctuations s'apprécient sur l'ensemble du bilan de la compagnie. Ainsi, une évolution à la hausse de la courbe des taux diminuera la valeur de marché des obligations, mais dans le même temps les paiements actualisés au passif du bilan diminueront. Le CEIOPS fait référence à la notion de " Net Asset Value " pour décrire cette évaluation. Les fluctuations défavorables sont les suivantes :

- Risque action : baisse de 32% / 45% du marché des actions des pays de l'OCDE / pays émergents. Etant donné l'importance des actions dans les bilans des compagnies (voir la Section 3.9), la seule segmentation des actions selon leur provenance géographique est sommaire et devrait inclure une analyse plus fine qui intégrerait par exemple le niveau de diversification. Il est à noter que la concentration des actions est prise en compte dans le sous module "risque de concentration". Aucun mécanisme de diversification n'est présent dans ce sous module, alors que comme il le sera démontré ultérieurement, le régulateur en intègre entre des risques d'assurance. Cela sous entendrait qu'en période de crise, les risques financiers tendent à être corrélés (parfaite dépendance dans les queues de distribution), alors qu'une certaine diversification doit subsister entre les risques assurantiels.

Dans [CEI09l] est communiqué la méthodologie de calcul qui a donné ce chiffrage. Le régulateur a utilisé une distribution empirique d'un indice financier (le MSCI) en base mensuelle depuis 1970, puis il a calculé la valeur qui correspondait au centile 99.5% sur un horizon d'un an.

Ce sous module de risque a fait l'objet de vives critiques lors du QIS2 du fait d'une baisse trop forte du marché des actions, à l'époque il était de 40%. Suite à cela, le CEIOPS a ramené la baisse du marché des actions à 32% pour le QIS3. Or, il a été observé une baisse de plus de 40% du marché des actions entre l'été 2008 et l'été 2009. Le scénario qui semblait trop fort aux professionnels s'est concrétisé tout récemment. Ce constat entraîne deux interprétations :

- Soit le scénario qui devait survenir avec une probabilité de 0.5% est survenu.
- Soit la baisse qui doit survenir dans 0.5% des cas dans l'année à venir devrait être encore plus importante.

Dans le cas de la deuxième interprétation (ce que suppose le CEIOPS, voir [CEI09l] qui prévoit une baisse du marché action de 45% et 60%, respectivement, pour le QIS5), une baisse plus forte amènerait les assureurs à se retirer du marché

des action, celui-ci tant trop consommateur de capital. Ce retrait des assureurs du marché des actions aggraverait la crise de l'économie européenne puisque les assureurs figurent parmi les premiers investisseurs institutionnels.

De manière similaire à ce qui s'est passé entre le QIS2 et le QIS3, où le CEIOPS s'était servi de distributions empiriques pour justifier le changement de taux de 40% à 32%, il reproduit le même schéma pour le QIS5. Chercher des lois de probabilité a posteriori pour justifier de l'objectivité de l'approche n'est pas pertinent, puisque le but est d'avoir une approche prospective et non rétrospective du contrôle de la solvabilité d'une compagnie. Il serait préférable d'avoir une approche qui tienne compte à la fois de l'horizon de détention des actions pour ne plus être sujet à des variations de court terme et plus simplement dire que l'estimation résulte du consensus d'un avis d'expert.

- Risque de taux : hausse et baisse des taux via des courbes spécifiques (baisse d'environ 40% et hausse de 55%)
- Risque immobilier : baisse de la valorisation du patrimoine de 20%
- Risque de change : dépréciation de 20% de toutes les devises
- Risque de spread : évolution défavorable de la qualité de signature des contreparties
- Risque de concentration : mesure la concentration des créances au sein d'un même émetteur. Ce sous module de risque n'est applicable que si la part de chaque émetteur noté "A" ou mieux dépasse 3% du montant total des créances, et 5% pour les autres ratings.

Il est à noter que du fait des données qui abondent et des travaux scientifiques nombreux, cette classe de risque fera très certainement partie des premiers risques à être modélisés de manière spécifique.

Risque de défaut Cette classe de risque spécifie l'exposition de la compagnie au défaut de ses contreparties. Pour estimer ce risque trois éléments sont pris en compte dans le QIS4 :

- La perte qui surviendra une fois tous les 200 ans liée au défaut d'une contrepartie après prise en compte des collatéraux et d'un taux de recouvrement. Dans le QIS4, le taux de recouvrement était de 50% tant pour les créances de réassurance que pour les produits financiers. Dans le Consultative Paper 51 (voir [CEI09h]) le taux de recouvrement est sensiblement modifié puisqu'il passe à 40% pour les créances de réassurance et à 10% pour les produits financiers. La crise financière actuelle a amené le régulateur à être plus prudent sur la possibilité de non remboursement des créances issues des produits financiers.

TABLE 1.2 – Probabilité de défaut selon le rating dans le QIS4

Rating	Probabilité de défaut
AAA	0.002%
AA	0.01%
A	0.05%
BBB	0.24%
BB	1.2%
B	6.04%
CCC ou non noté	30.41%

- La probabilité de défaut de la contrepartie. Celle-ci varie avec la solidité financière de la contrepartie. Plus elle aura un rating élevé, moins sa probabilité de défaut sera importante. Les contreparties non notées ainsi que non soumises à Solvabilité 2 seront considérées comme étant des CCC. Les contreparties non notées mais soumises à Solvabilité 2 seront considérées comme étant des BBB. Lorsqu'il y a de la réassurance interne, c'est le rating de la contrepartie en récession qui est utilisé ou bien le ratio de couverture du SCR est utilisé comme proxy pour déterminer le rating pour la réassurance interne.

Dans le cadre des différents QIS, les notations proposées sont celles de Standard and Poor's mais les notations des autres agences sont également acceptées. En l'état actuel, il n'y a pas de restrictions à utiliser une agence plutôt qu'une autre. Il faudra dans ce cas faire la correspondance entre les notations. Par exemple, un AA pour Standard and Poor's est équivalent à un Aa2 pour l'agence de notation Fitch. De la même façon, lorsqu'une entité a différentes notations, il faut prendre la seconde meilleure notation. Cette utilisation du rating pour quantifier la probabilité de défaut est limitative car pour un même rating, les spreads de défaut peuvent être différents.

- Un indice, l'indice de Herfindhal, est utilisé pour représenter la diversification des réassureurs. Dans Solvabilité 2, il est défini par le ratio des deux cas extrêmes. Au numérateur, le cas où les réassureurs font défaut de manière indépendante. Au dénominateur, le cas où les réassureurs font tous défaut en même temps. De manière triviale, plus il y aura de réassureurs plus l'indice sera faible.

Ce module de risque évolue avec les QIS. Lors du QIS2, il était fusionné avec le module de risque de crédit (détérioration de la qualité de la signature de la contrepartie), puis lors du QIS3 et du QIS4, il fut traité de manière indépendante. Il est à noter que lors des dernières recommandations à la date d'écriture de cette thèse, le CEIOPS envisageait de refondre ce module de risque dans son ensemble (voir

le Consultative Paper 28) suite aux remarques des acteurs du marché (temps de traitement de ce risque très long pour un impact marginal sur le besoin en capital global, prise en compte inadéquate des nantissements) et de quelques aberrations existantes dans la méthodologie proposée par le régulateur. Par exemple, la relation entre la diversification et le nombre de contreparties n'était pas bien prise en compte, puisque plus il y avait de contreparties au sein d'un même rating, plus le besoin en capital augmentait (voir annexe A.9 dans [CEI09h]).

Autre exemple, dans le cas où un assureur a une contrepartie chez un réassureur qui est en "run-off", autrement dit qui ne souscrit plus d'affaires nouvelles mais continue de gérer les affaires en stock. Le réassureur n'est plus noté, donc suivant les spécifications de Solvabilité 2, sa probabilité de défaut est de 30.41% (dans l'optique où il n'est pas soumis à Solvabilité 2). Dans une optique de prudence, le management devrait chercher à commuter les engagements du réassureur, c'est à dire lui demander de verser les engagements qu'il doit en contrepartie de la libération de ses obligations, afin que cela diminue son exigence de capital au risque de défaut. Or, suivant les spécifications techniques du QIS4, dans ce cas de figure une compagnie verrait son besoin en capital augmenter avec la formule standard. Ce résultat est contre-intuitif puisqu'une compagnie soumise à Solvabilité 2 aura par défaut un rating au moins équivalent à BBB. Le fait de ne plus céder des risques à une contrepartie non notée (assimilée à un rating CCC) entraîne effectivement une baisse de son exposition au risque de défaut, mais augmente son risque de souscription (les risques étant réintroduits dans son portefeuille) ce qui conduit à une hausse de capital.

Le problème du manque de données va survenir pour les entreprises souhaitant avoir recours à un modèle interne pour palier les inconvénients de la formule standard. En effet, le peu de faillites observées sur le marché rend difficile le paramétrage des modèles, nécessitant un recours à l'avis d'expert et à l'avis des agences de notation. Alors même que le CEIOPS recourt aux notations de celles-ci pour quantifier les probabilités de défaut et définir les classes de défaut, celui-ci est conscient qu'elles ont joué un rôle dans la crise financière actuelle et qu'elles ne sont pas forcément fiables (voir à partir du paragraphe 3.62 dans [CEI09h]).

Risque de souscription vie Il identifie un besoin de capital pour faire face à l'aléa entourant les contrats d'assurance vie. Cet aléa se retrouve dans :

- Des éléments biométriques avec le risque de mortalité, de longévité et invalidité. A l'issue du QIS4, le risque de mortalité se base sur un scénario d'augmentation des taux de mortalité de 10% pour chaque âge tandis que le risque de longévité fait l'hypothèse inverse, soit une baisse des taux de mortalité de 25% pour chaque âge. Le risque invalidité suppose une augmentation des taux d'invalidité de 35% la première année, puis de 25% les années suivantes pour chaque âge. Aucune

modification n'est apportée sur la probabilité de retourner de l'état d'incapable à celui de valide.

- Des éléments financiers au travers des risques de rachat, de dépenses et de révisions. Pour le risque de rachat trois alternatives sont envisagées. Un risque de diminution des taux de rachats (baisse de 50%), un risque d'augmentation des rachats (hausse de 50%). Enfin un risque de rachat massif correspondant à 30% du coût du rachat. Le risque de dépense consiste à appliquer une hausse de 10% des dépenses futures combinée à une hausse de 1% par an du taux d'inflation. Quant au risque de révision qui concerne le risque d'une augmentation des rentes, il faut appliquer une hausse de 3% du montant annuel à payer.
- Des éléments imprévisibles, le risque catastrophe couvre des évènements comme les pandémies. Il n'y a pas de scénario précis communiqué par le régulateur, le risque Cat se matérialise par une augmentation de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs décédant dans l'année et une hausse de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs touchés par la maladie. Cet impact se répartit proportionnellement dans le temps, puisque 1/3 des personnes malades le sont pendant les 6 premiers mois de l'année, un autre tiers dans le second semestre, le dernier tiers tombant malade progressivement pendant la deuxième année.

Pour l'application des scénarios des éléments biométriques de la formule standard, l'entreprise d'assurance doit disposer d'informations exhaustives quasi similaires à celles requises pour une modélisation spécifique, ce qui signifie qu'elles n'auront pas de difficultés majeures à avoir recours à un modèle interne. A contrario, la modélisation des rachats est une problématique importante pour tous les assureurs vie. A ce jour le CEIOPS n'apporte pas de réponses adéquates à la quantification de ce risque, puisque dans le QIS4 le risque de rachat était évalué indépendamment de l'évolution des autres risques (évolution de l'environnement économique).

Il est étonnant que seul le risque épidémique soit évoqué par la réforme. Si avec la pandémie de grippe A et les préconisations de l'Organisation Mondiale de la Santé, ce risque est sur le devant de la scène, d'autres risques majeurs existent et ne peuvent être négligés tel que le risque tsunami ou d'autres évènements d'origines humaines tel que la rupture de barrage ou l'accident technologique (pollution, nuage toxique ou autre).

Risque de souscription non vie Cette classe de risque détermine le montant de capital au titre de la volatilité entourant les primes et les provisions ainsi que la survenance d'évènements catastrophiques.

- Le risque de souscription non-vie concerne les primes et le provisionnement. Ce sous module permet de déterminer le besoin en fonds propres dû à la volatilité entourant ces 2 sources liées à l'activité d'assurance, volatilité provenant : soit

des cycles de souscription, soit de phénomènes économiques, sociaux, juridiques, etc ... Ce sous module sera le fil rouge de cette thèse puisqu'il fait l'objet d'un traitement spécifique de la part du régulateur comme il le sera présenté ci-après (voir Section 4). Le risque de souscription non-vie est l'un des sous modules basé sur une approche à facteur, autrement dit, ce sont des coefficients appliqués aux primes et aux Best Estimate nets de réassurance qui déterminent le besoin en capital au titre de ce risque.

Comme évoqué précédemment, l'un des défauts de cette approche tient à la mauvaise prise en compte de certaines techniques de transfert de risque, telle la réassurance non proportionnelle. Or il est connu qu'en assurance non-vie, la réassurance joue un rôle important. Il est donc dommageable que la méthode retenue ne soit pas complètement adaptée à sa prise en compte.

D'autre part, les limites qui étaient présentées en Section 2.1 sur Solvabilité 1, sont similaires pour ce module de risque, à savoir qu'une politique de provisionnement prudente entraînera un besoin en capital plus important, de même qu'une augmentation tarifaire.

Le risque Cat requiert un montant de capital au titre d'évènements catastrophiques, qu'ils soient d'origine climatique ou humaine. Le CEIOPS a proposé 3 approches pour identifier le capital à immobiliser à ce titre.

- Une approche Européenne qui se base sur les primes nettes de réassurance des branches d'activités auxquelles un pourcentage est appliqué.
- Une approche nationale qui fait intervenir le régulateur national, puisque c'est lui qui communique des scénarios spécifiques au pays. Par exemple pour la France, l'ACAM a proposé d'évaluer l'impact de deux tempêtes majeures survenues en 1999, une inondation du bassin de la Seine ainsi qu'un tremblement de terre sur la côte d'Azur. L'entreprise d'assurance applique ensuite sa part de marché sur ces scénarios marchés.
- Une approche spécifique à l'entité d'assurance. Une entreprise qui n'est pas concernée par les scénarios nationaux, ou pour laquelle ils ne sont pas significatifs peut définir des scénarios soit sur base de logiciels marchés ou d'avis d'expert.

Comme expliqué au Paragraphe 3.4.2, l'utilisation de scénarios permet d'avoir une meilleure approche que celle par facteur, puisqu'il est possible à l'entreprise d'assurance d'appliquer ses techniques de transfert de risque, telle la réassurance non proportionnelle. Le problème avec la seconde approche tient à ce que le régulateur a fourni des scénarios marchés, mais il n'a pas précisé la manière pour déterminer la part de marché. Les acteurs ont alors appliqué leur part dans l'encaissement

total des branches d'activités concernées, cette technique a plusieurs écueils :

- Elle est dépendante de la politique tarifaire.
- Elle est dépendante des branches d'assurance souscrites. Une entreprise qui souscrit principalement du risque agricole sera tentée d'appliquer sa part de marché sur l'encaissement, puisque ces risques ont des primes d'assurance moins élevés que les risques industriels, relativement à leur exposition pour ce scénario. A contrario, les entreprises souscrivant des risques industriels sont pénalisées par l'approche à la part de marché.
- Elle ne reflète qu'imparfaitement le risque. Suivant l'exemple d'une compagnie d'assurance qui souscrit principalement sur la façade Atlantique et qui n'est que très peu exposé sur la côte d'Azur, il n'est pas pertinent pour elle d'appliquer le scénario du tremblement de terre.
- Elle ne prend pas en compte l'étendue des garanties (tous les biens assurés n'ont pas forcément une garantie qui couvre ce genre d'évènements), ni même des franchises à la charge des assurés.

Avec cette cartographie des risques, le CEIOPS a reproduit celles qui prévalent dans d'autres systèmes prudentiels (voir la segmentation des risques utilisée par les agences de notation, Section 2.2), malgré tout, d'autres risques importants pour l'activité d'un assureur sont absents :

Risque de liquidité Plusieurs raisons expliquent son absence du Pilier 1 :

- Il n'y a pas de consensus sur une méthode à utiliser pour mesurer ce risque (voir l'article de G. Venter dans [AIMF09])
- La mission du régulateur est de veiller à ce que les compagnies d'assurance soient solvables, ce qui est distinct de leur liquidité. Un assureur peut-être solvable mais avoir un problème de liquidité (par exemple, la faillite de American Insurance Group) et inversement.
- Il n'y a pas d'institution, telle que la Banque Centrale, qui fournira les fonds nécessaires la continuité de l'exercice, même s'il est peu vraisemblable que l'Etat laisse faire faillite une compagnie. La fusion opérée ces derniers mois entre les régulateurs de l'Assurance et de la Banque au sein de l'Autorité de Contrôle Prudentiel sous l'égide du gouverneur de la Banque de France va dans ce sens.

Risque stratégique Bien qu'il n'y ait pas de définition précise et communément acceptée, le CEIOPS a proposé une définition dans [CEI09b], il correspond au risque que la situation actuelle ou future soit dégradée à la suite de décisions contre productives, d'écarts dans la mise en application des décisions ou d'un manque de réactivité à l'environnement qui évolue. Le CEIOPS a exclu ce risque de la formule standard mais le considère dans l'aspect qualitatif de la gestion de l'entreprise (Pilier 2). Il

n'est pas évident que le risque stratégique relève du champ d'action du superviseur, puisque les autres parties prenantes peuvent avoir une meilleure lisibilité de ce risque que le régulateur, par exemple, les actionnaires. Néanmoins, l'importance du risque stratégique pour le régulateur est justifiée par le rapport "Sharma", qui conclut que les mauvaises décisions stratégiques conduisent souvent à des situations de quasi faillites pour les compagnies d'assurance. Ces effets ne se produisent généralement pas dans l'horizon temporel requis dans Solvabilité 2, à savoir à horizon d'un an. Malgré tout, il est opportun d'inclure dans le Pilier 2 une revue continue de ce risque pour s'assurer des conséquences sur un horizon à plus long terme.

3.4.2 Calcul du capital réglementaire

Dans le cadre de la formule standard, le SCR est le montant de capital qu'une compagnie doit détenir pour faire face à l'écart entre une situation exceptionnelle qui se produirait avec une probabilité de 0.5% et la situation représentant les conditions normales d'exercice de la compagnie. Le niveau de 0.5% provient de l'hypothèse que les entreprises d'assurance et de réassurance soumises à Solvabilité 2 ont un rating au moins équivalent à BBB suivant la terminologie de Standard and Poor's. Il n'y a aucune explication de la raison pour laquelle le régulateur a choisi ce rating plutôt qu'un autre. A titre d'information, pour un rating A la probabilité de défaut est inférieure à 0.3%, pour un rating AA inférieure à 0.1%, tandis qu'un AAA devrait avoir une probabilité de défaut inférieure à 0.03%.

Le SCR de chaque classe de risque et de chaque sous module dans le cadre de la formule standard est déterminé en suivant la même logique que celle du SCR au niveau de la compagnie, c'est à dire la différence entre la $Var_{99.5\%}$ et la moyenne du risque à l'horizon d'un an.

Pour avoir un besoin en capital pour chaque racine de l'arbre qui corresponde à une situation ne survenant que dans 0.5% des cas dans l'année à venir, le CEIOPS a eu recours à deux approches :

- Une approche basée sur des scénarios
- Une approche basée sur des facteurs

La préconisation de scénarios précis permet à la fois une plus grande lisibilité dans la communication des hypothèses pour déterminer les besoins en capitaux et également une application par tous les acteurs avec des effets qui seront différents d'une compagnie à une autre selon leur exposition à ce risque. Cela rend l'approche par scénario à la fois sensible au risque et en même temps spécifique à l'entité, contrairement à l'approche par facteur. Dans cette approche, utilisée actuellement dans Solvabilité 1, ce sont les primes et/ou les sinistres qui sont utilisés comme données en entrée. L'avantage de cette méthode est

sa simplicité d'application qui la rend facilement utilisable pour l'ensemble des acteurs. Cette simplicité se fait au prix d'une perte en sensibilité face au risque. De la même façon, cette dernière approche ne permet pas une prise en compte exhaustive des techniques de transfert de risque.

A chaque noeud de cette arborescence, les classes et sous module de risque sont agrégés suivant la "Règle de la Racine Carrée", autrement dit les capitaux nécessaires à chaque classe de risque sont agrégés suivant une table de corrélation. Pour le CEIOPS, cette technique d'agrégation des risques permet d'avoir au niveau de chaque noeud une situation équivalente à un niveau de sécurité de 0.5%.

Il est intéressant de se demander pourquoi est-ce que le CEIOPS garde cette référence à la notion de ruine dans 0.5% des cas pour chaque niveau d'agrégation, alors même qu'aucune distribution de pertes n'est communiquée et que pour l'essentiel, ces estimations reposent sur des avis d'expert? Vouloir chercher à valider des hypothèses à tout prix au moyen de méthode probabiliste est récurrent dans le monde économique puisque comme le rappelle [Pra06] : " l'essentiel des outils de calculs probabiliste depuis Pascal - des mesures de dispersion à la théorie des tests au 18ème siècle ([Lap82]), en passant par les processus stochastique ([Bac00]) - ont leur source dans des questions liées à l'économie, la finance ou la gestion, à une époque où ces domaines n'étaient pas forcément distincts. Pourtant ces innovations n'ont pas été considérées avant d'avoir été consacrées par les sciences de la nature. C'est parce que les mathématiques probabilistes marchent en physique qu'on les emploie en finance alors mêmes qu'elles ont été conçues pour la finance! Etrange phénomène qui invite à réfléchir autant sur les théories que sur leur statut épistémologique". Ainsi en s'appuyant sur des outils probabilistes établis, le régulateur pense pouvoir justifier de la rigueur de l'approche.

La "Règle de la Racine Carrée" au niveau global est définie par :

$$BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_5) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)}, \quad (1.1)$$

où

- $BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_5)$ est le capital réglementaire de base requis au niveau de la compagnie au titre des cinq classes de risque.
- $SCR_{\alpha}(X_i)$ est le montant de capital que doit détenir la compagnie pour être en mesure de faire face à une sinistralité qui s'écarterait de celle attendue avec une probabilité de 0.5% ($SCR_{\alpha}(X_i) = VaR_{1-\alpha}(X_i - E(X_i)) = VaR_{1-\alpha}(X_i) - E(X_i)$) sur un horizon d'un an pour la classe de risque X_i .
- θ_{ij} représente la "corrélacion" entre les $SCRs$ des classes de risque X_i et X_j .

Le terme “corrélation” est utilisé à de nombreuses reprises dans les spécifications techniques du QIS4. Ce mot est référencé pas moins de 67 fois. Ce terme n’est pas utilisé à bon escient puisqu’il ne peut être employé que lorsqu’il est fait référence à des variables aléatoires. Or la plupart du temps où le CEIOPS évoque des corrélations, il fait allusion à des constantes. Identifier différentes classes et sous modules de risque a conduit le CEIOPS à utiliser une mesure de risque multivariée pour évaluer le besoin en capital au niveau de la compagnie (voir la Formule (1.1)), sauf que celle-ci n’est adaptée que si les classes de risques suivent des lois normales, ainsi la mesure de risque multivariée obtenue correspond à la volatilité d’une somme de risques normalement distribuée (voir [San05]). Dans le monde réel, il est peu vraisemblable que la distribution des risques au niveau de la compagnie d’assurance suive une distribution normale multivariée du fait de la présence de risques présentant des comportements extrêmes.

L’approche retenue détermine des montants de capitaux suivant les classes et sous modules de risque et non les risques eux mêmes. Comme le mentionne [MKK09], cette approche de détermination du capital n’est pas appropriée puisque si un risque est jugé excessif au regard du capital à lui allouer, il n’est pas possible de l’externaliser de l’entreprise car celui-ci est adossé à plusieurs autres risques au sein d’une classe de risque. En prenant le cas où le sous module du risque de taux d’intérêt est consommateur de fonds propres, ce besoin en capital provient de la stratégie de l’allocation d’actif en obligation et aussi de la souscription de certaines branches d’activités à développement long. D’autres sous modules de risque dans Solvabilité 2 font directement référence aux risques eux-mêmes, par exemple le risque action. Dans ce cas, si ce risque exige d’immobiliser beaucoup de capital, la compagnie d’assurance peut décider de choisir une allocation différente. C’est en ce sens que la possibilité offerte aux compagnies d’assurance d’utiliser des modèles internes pour déterminer leur capital réglementaire permettra de compenser les faiblesses de cette approche modulaire en offrant une approche intégrée du risque dans laquelle l’interaction et l’évaluation des différents risques seront pleinement représentées.

Aucune décision n’existe pour le moment pour déterminer si le SCR constitue une limite absolue à ne pas franchir ou une cible à atteindre. En d’autres termes, dans quelle mesure interviendra le régulateur si une compagnie d’assurance ne satisfait pas à l’obligation de détenir un montant de capital équivalent au SCR. De plus, est-ce qu’un écart par rapport au SCR entraînera une obligation de publication auprès des assurés/ investisseurs de cet écart, ou bien si dans un premier temps cette situation restera confidentielle laissant ainsi le temps à la compagnie d’ajuster le niveau de ses fonds propres. Si le régulateur répond de manière disproportionnée à un faible écart ou bien s’il y a une exigence de communication de l’écart constaté auprès des investisseurs ou des assurés, alors les compagnies seront incitées à détenir plus de capital que le SCR. Si les compagnies détiennent un montant de capital bien au delà de ce qui est requis, alors la situation sera non op-

timale dans l'industrie. Alors qu'en théorie, le capital est une protection pour absorber des situations extrêmes, il devrait être permis de puiser dans celui-ci lorsque le risque se matérialise. Ainsi, une réponse disproportionnée du régulateur à cette situation créera de mauvaises incitations à l'égard du marché.

3.5 Le Capital minimum requis

Il s'agit du niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique. Le régulateur pourra retirer l'agrément. Dans le cadre de Solvabilité 1, il correspond à l'exigence minimale de marge. Etant donné son caractère crucial, tant dans l'intervention du régulateur que du niveau de sécurité des assurés, les modalités de calculs doivent être simples, robustes et assurer un niveau de prudence suffisant. Sa méthodologie de calcul évolue au fil de l'avancée des travaux de Solvabilité 2. Le MCR est calculé suivant deux approches (voir l'article 117 [EC07]) :

- Le MCR est défini en référence à une $VaR_{85\%}$ à l'horizon d'un an
- Le MCR est délimité par le SCR. Ainsi le MCR ne peut pas être inférieure à 25% du SCR et supérieure à 45% du SCR (voir [CEI09j]).

Ce plancher et ce plafond confortent son rôle de dernière limite avant intervention du régulateur. Entre ces bornes, une approche forfaitaire par application de coefficients sur les primes/sinistres/capitaux sous risque permet de quantifier rapidement le MCR dans le cadre de la formule standard pour atteindre un niveau de sécurité équivalent à $VaR_{85\%}$. A titre d'information, les valeurs de l'encadrement de la MCR par un pourcentage du SCR (25% et 45%) proviennent du rapport entre le MCR et le SCR pour différentes distributions statistiques usuelles. Par exemple, si la variable aléatoire X suit une distribution normale et que le besoin en capital est calculé selon la même logique que celle utilisée dans la formule standard à savoir la différence entre $VaR(X)$ et $E(X)$, alors $\frac{MCR(X)}{SCR(X)} = 40.23\%$.

Contrairement au SCR, pour lequel la Directive précise qu'il doit être calculé sur base annuelle au minimum, pour veiller à ce qu'une entreprise ne franchisse ce seuil minimum, le CEIOPS propose que le calcul de la MCR se fasse sur une base trimestrielle. Un problème méthodologique apparaît puisqu'il y aura un décalage temporel dans la fréquence de calcul de ces deux seuils réglementaires, alors que le MCR dépend du SCR.

3.6 Modèle interne

L'avantage d'une formule standard est d'offrir une méthode rapide et homogène au niveau européen pour calculer les exigences de capital. Ses principaux inconvénients sont :

- Un manque de sensibilité à la structure des risques de l'entreprise d'assurance

- Une paramétrisation trop générale pour être adéquate.

Par essence, la formule standard ne donnera qu'une vision imparfaite du profil de risque de l'organisme puisqu'elle doit être appliquée par des groupes d'assurance internationaux et des petites mutuelles d'assurance locales ou spécialisées sur une branche d'activité. Pour résoudre ces problèmes, dans le cadre de la réforme, les assureurs ont la possibilité d'utiliser un modèle interne pour évaluer leur besoin en capital, celui-ci pourra être développé en cohérence avec les caractéristiques propres à l'activité exercée et avec l'organisation mise en place. Le CEIOPS précise les conditions sous lesquelles les autorités de supervision seraient en mesure d'approuver les modèles utilisés.

La réforme Solvabilité 2 permet ainsi aux entreprises d'assurance d'utiliser deux types de modèle interne : global et partiel. Un modèle interne global correspond à un modèle qui prendra en compte l'ensemble des risques auxquels est soumise une compagnie alors que le modèle partiel, correspond au cas où une compagnie d'assurance ne modéliserait qu'une partie de ces risques avec une approche spécifique ; pour les autres risques, elle aura recours à la formule standard. Cette faculté dépendra du profil de risque de la compagnie (entreprise spécialisée dans des risques atypiques ou mal représentés dans la formule standard telle la responsabilité civile médicale) et de sa capacité à modéliser (obtention de données fiables, ressource humaine, ...).

Un modèle interne ne pourra être utilisé à des fins réglementaires que si l'organisme démontre qu'il l'utilise largement à tous les niveaux (stratégique, commercial, ...) et que différentes normes de qualité sont respectées. Les critères qui devront être respectés sont :

- Use Test : Ce critère définit le champ d'utilisation du modèle interne au quotidien dans l'entreprise. Dans [CEI09i] est stipulé que le modèle interne doit être utilisé et avoir un rôle important dans le système de gouvernance, la gestion des risques et les décisions qui en découlent ainsi que la détermination et l'allocation du capital.
- Statistical Test : Ce test précise les exigences que doivent satisfaire les données utilisées et les hypothèses réalisées puisque celles-ci influenceront les résultats issus du modèle interne.
- Calibration Test : Ce test laisse la liberté aux entreprises d'assurance d'utiliser un horizon temporel différent de celui visé par la réforme ainsi qu'une autre mesure de risque, dès lors que le niveau de sécurité des assurés est au moins équivalent au niveau de protection avec un calcul suivant une $Var_{99.5\%}$ à horizon d'un an.

Un modèle interne n'a pas pour vocation à n'être qu'un simple modèle mathématique mais il doit au contraire faire partie intégrante de la gestion des risques de la compagnie, comme le montre la Figure 1.9.

L'évaluation du modèle ne s'effectuera pas uniquement au regard de ces 3 critères mais selon de nombreux autres dont aucun ne devra être négligé par ces utilisateurs :

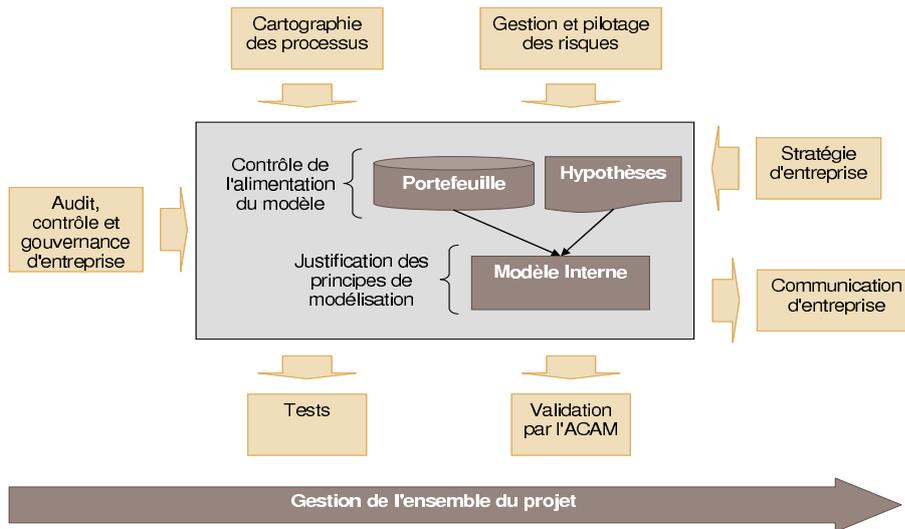


FIGURE 1.9 – Schéma d’un modèle interne

la précision des outils mathématiques, la documentation, la gouvernance, ou le contrôle interne. Le consultative paper CP56 identifie ainsi toute une série de principes à vérifier avant la validation d’un modèle interne. Certains de ces principes paraissent clair en matière de gestion des risques, (par exemple : “le management doit comprendre le modèle interne”), d’autres en revanche posent des problèmes liés à la construction de Solvabilité 2 et des modèles associés, comme il le sera illustré avec les exemples suivants.

L’un de ces principes est par exemple celui de la cohérence des méthodes de calculs entre les provisions et le risque de prime. Le fait que ces risques soient réunis dans un même sous module montre qu’ils partagent la même source d’incertitude. Cependant, les techniques mises en oeuvre dans chacun de ces risques sont différentes. Pour le risque de provisionnement, les assureurs auront tendance à retenir des méthodes basées sur des triangles de liquidation (voir la Figure 1.5) tels que les méthodes GLM, bootstrap ou autre (voir [PLNN07]). Tandis que pour le risque de prime, les compagnies choisiront vraisemblablement le modèle de risque collectif (comme le propose également le “Swiss Solvency Test”). Pour des limitations opérationnelles (principalement informatique) et méthodologiques, la plupart des modèles de sévérité et de fréquence utilisés dans le modèle de risque collectif sont vus à l’ultime, autrement dit les montants des sinistres sont projetés jusqu’à la clôture des sinistres. Des ajustements économiques et d’exposition seront éventuellement appliqués sur les données, puis des adéquations de distribution de coûts et de nombres seront réalisés avec cette vision ultime (voir [Par05] pour une présentation des méthodes d’estimations). La demande du CEIOPS sur la cohérence des méthodes entre la distribution de probabilité et les provisions techniques (voir le paragraphe 5.3.2.2 dans

[CEI09i]) posera des problèmes de mise en oeuvre puisque dans le cas du provisionnement, les provisions évolueront dans le temps du fait des règlements des sinistres et de la réévaluation de celles-ci. Alors que pour le risque de prime, suivant l'approche du modèle de risque collectif, la charge de sinistre est bien estimée dès le début, la seule variable modifiant le niveau des provisions étant la volatilité de la cadence de règlement. Le problème de cohérence surviendra lorsque les compagnies voudront utiliser leur modèle interne pour établir un business plan qui projettera plusieurs années. Pour un modèle représentant la sinistralité de la survenance 2009, la charge sera bien estimée et correspondra au besoin en capital au titre du risque de prime, mais la part restante à payer pour l'année de survenance 2009 (les provisions) observée lors de l'arrêté comptable 2010 viendra alimenter le risque de provisionnement, qui lui sera estimé à partir de méthodes d'extrapolations de triangles de liquidation, quand bien même, les provisions sont déjà en vision ultime. Donc il faudrait que les modèles réalisés pour le risque de prime ne soient pas projetés à l'ultime ce qui va à l'encontre des pratiques du marché. Dans le cas précis où les modèles sont réalisés à l'ultime, la cohérence de méthode n'est pas respectée sauf à faire évoluer les modèles du risque collectif dans le temps, ce que peu de logiciels font à l'heure actuel et qui conduit à des modélisations différentes.

Autre exemple où il sera difficile d'apprécier la validation du critère du Use Test sur la tarification des produits. Aujourd'hui, les modèles de sinistralité ne sont basés ni sur les mêmes découpages, ni sur les mêmes méthodes d'estimation que ceux utilisés en tarification (l'exemple de l'automobile est le plus évident puisque la tarification fait appel à l'âge de l'assuré, son sexe, son type de véhicule, de l'ancienneté de son permis, les coûts sont écrêtés; l'estimation est souvent faite au moyen des General Linear Model, etc...). Comment dans ces conditions sera-t-il possible de satisfaire le Use Test, puisque les modèles représentant la sinistralité ne seront pas les mêmes que ceux utilisés pour la tarification? Faudra-t-il faire autant de modèles de sinistralité qu'il y a de segmentation tarifaire ou faudra-t-il revoir le processus de tarification?

En parallèle à ces grands principes, certaines difficultés liées à la transposition de la Directive à un modèle interne vont apparaître du fait de l'interaction entre les flux qui opèrent au sein d'une compagnie d'assurance. Sur la Figure 1.10 ci-dessous est représentée pour une compagnie d'assurance vie l'interaction qui existe entre l'actif et le passif d'une compagnie. La politique de versement de la participation aux bénéfices dépendra de la conjoncture du marché et de la stratégie d'allocation. Cette participation impactera le passif du fait d'une hausse ou d'une baisse dans le rachat des provisions mathématiques. De la même façon le montant des primes versées impactera la politique d'investissement. Modéliser l'ensemble des interactions existantes dans une compagnie est une tâche difficile, cette difficulté se trouve donc renforcée par la nouvelle Directive.

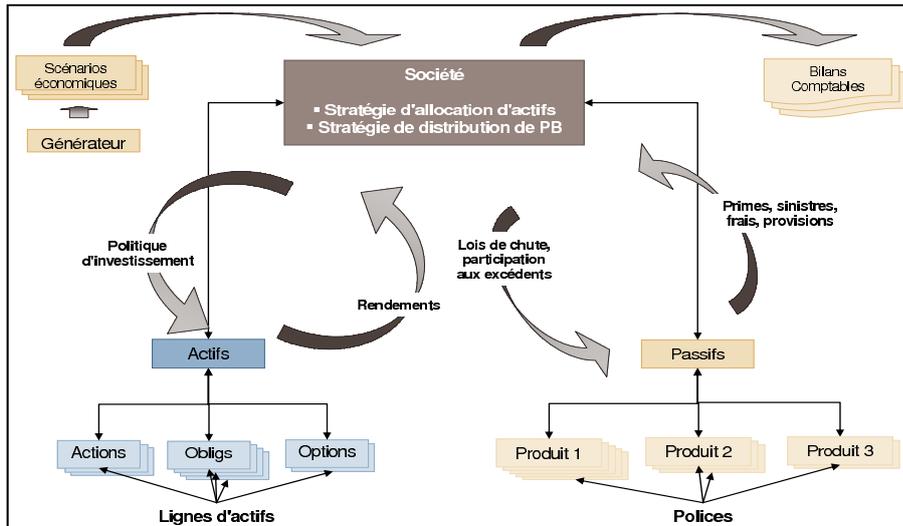


FIGURE 1.10 – Schéma d'une gestion active-passive intégrée

Comme mentionné dans la Section 3.3 sur la présentation de la Risk Margin, le besoin en capital à horizon d'un an dépendra de la cartographie des risques vue à la Figure 1.8, mais aussi des provisions techniques en valeur de marché et de la Risk Margin (voir la Figure 1.4). Cette dernière dépendant des futurs besoins en capitaux, une circularité apparaît dans son calcul sauf à adopter certaines hypothèses simplificatrices comme ce fut le cas lors du QIS4.

Autre exemple de la complexité de la modélisation de l'ensemble des risques mais cette fois-ci dans le cadre spécifique aux mutuelles d'assurance. Dans l'optique où l'une d'elle souhaiterait intégrer dans son modèle interne le rappel de cotisation pour faire face à une situation extrême (comme cela est survenu en 1999, lors des tempêtes Lothar et Martin) pouvant mettre en péril la solvabilité de la mutuelle. Comme il est vraisemblable que tous les assurés ne pourront pas payer le rappel de cotisation, elle aura une créance sur ses assurés, ce qui nécessitera de provisionner au sein du risque de défaut la perte de non recouvrement de ces créances. Le capital réglementaire étant défini au travers des différentes classes de risque vues précédemment, le besoin en capital sera augmenté de cette provision sur le risque de défaut. Cela nécessitera d'augmenter à nouveau le montant du rappel de cotisation qui entraînera encore une fois une hausse du risque de défaut et ainsi de suite. Il y aura à nouveau un problème de circularité.

Ces exemples illustrent les difficultés induites par les modèles internes dans l'optique de leur validation. Ils devront être construits de telle manière à reproduire tous les flux entrants et sortants d'une compagnie d'assurance et à tenir compte de toutes les interactions

composant son portefeuille.

Le développement d'un modèle interne dans l'optique d'une approbation par le régulateur est donc un processus important et potentiellement coûteux (voir les estimations de coût à l'issu du QIS4 au niveau Européen [CEI09a]). L'analyse des coûts et bénéfices engendrés devra être menée par chacun. Au rang des avantages figurent une exigence de capital plus faible. Cette diminution ne serait cependant que la traduction d'une exposition au risque plus faible que celle présumée par la formule standard et la reconnaissance d'une gestion des risques plus efficace. In fine, les organismes qui bénéficieront de la prise en compte des modèles internes au niveau réglementaire pourraient être ceux qui en tireront parti pour étoffer leur dispositif de gestion des risques, d'amélioration de leur " process " interne, d'une meilleure identification de la cartographie des risques, ...

Néanmoins ces avantages ne doivent pas masquer les difficultés induites par l'implémentation et la maintenance d'un modèle interne, celles-ci ne pouvant être sous estimées (voir [KPM02]) :

- Validation : Chaque niveau hiérarchique devra valider les hypothèses et procédés utilisés dans le modèle interne. Pour ce faire, la Direction devra avoir une connaissance approfondie des méthodes mises en place et s'appuyer sur les fonctions d'audit et de contrôle interne.
- Exhaustivité : L'avantage du modèle interne est basé sur l'hypothèse qu'il couvrira plus et mieux les risques que ceux intégrés dans la formule standard. Cet avantage ne peut être atteint qu'au prix d'une structure plus complexe et par un nombre plus important de paramètres et d'inputs. D'où des difficultés de mise à jour et de paramétrage.
- Communication : Un effort sera nécessaire pour rendre lisible les résultats issus du modèle interne. Le changement d'approche comptable et managériale impliquera de revoir la façon dont les chiffres sont communiqués et surtout de déterminer quels seront les chiffres pertinents parmi l'ensemble des sorties possibles.
- Subjectivité et jugement : Un modèle interne nécessite l'introduction d'un avis d'expert à la fois dans les hypothèses faites et dans l'interprétation des résultats. L'expertise dans l'utilisation du modèle est souvent concentrée au sein d'un groupe restreint d'utilisateur. Il en découle un risque opérationnel élevé, l'entreprise étant très dépendante dans ce cas de figure du "turn over". Ce genre de situation ne pourra être évité qu'au prix d'une documentation exhaustive et d'un transfert de savoir.

En plus de ces problèmes liés à l'utilisation au quotidien du modèle interne qu'il soit partiel ou global, d'autres plus spécifiques liés au modèle interne partiel (combinaison d'un modèle interne et d'une formule standard) existent :

- Comment le résultat issu d'un modèle interne partiel sera-t-il intégré avec la formule

standard? Faudra-t-il intégrer la quantité $VaR_{1-\alpha}(X) - E(X)$ issue du modèle dans la formule standard? Suivant les recommandations du CEIOPS (voir 5.17 dans [CEI09i]), en cas de modélisation interne, le capital d'une classe et/ou sous module de risque n'est pas déterminé par la différence entre la VaR et la moyenne du risque étudié, mais sur la VaR de la distribution du résultat. Les deux résultats vont cohabiter ce qui revient à considérer dans un cas que l'entreprise ne fait pas de bénéfice, puisque la prime égale le coût des sinistres et des frais, alors que dans un autre cas, la capacité de l'entreprise à réaliser des gains est prise en compte.

- Si une compagnie d'assurance modélise conjointement plusieurs classes de risque ou sous modules, devra-t-elle ventiler le résultat dans la formule standard ou utiliser le SCR de la distribution jointe des risques? Dans ce dernier cas, comment s'appliquera la formule standard?
- Si pour certains risques, la compagnie d'assurance utilise une autre segmentation, (par exemple si elle définit le risque de crédit comme correspondant au risque de spread et au risque de défaut) dans quelle classe de risque devra-t-elle reporter la valeur du besoin en capital?
- Si certains risques ne sont pas modélisés par la formule standard (par exemple, le risque d'inflation), comment seront-ils intégrés et analysés? La compagnie devra-t-elle créer une nouvelle classe de risque?
- Si pour une classe de risque modélisée par la compagnie, la mesure de risque utilisée ne correspond pas à la VaR, de quelle manière s'appliqueront les "corrélations" compte tenu de leur définition en référence à une VaR.

D'autres questions méritent d'être soulevées pour la validation des modèles internes :

- N'existe-t-il pas un risque d'uniformisation dans les modèles internes d'un même pays et ainsi la création d'un modèle interne standard? Il est déjà prévu dans la Directive (voir article 120 dans [EC07]) que le régulateur aura la possibilité de demander à l'entreprise d'assurance d'utiliser son modèle interne sur un portefeuille référent en utilisant des hypothèses extérieures afin de vérifier à la fois le calibrage du modèle interne et si les spécifications sont en conformité avec les pratiques de marché. Or, une entreprise d'assurance sera incitée à développer un modèle interne si la structure et les paramètres de la formule standard ne lui correspondent pas pour différentes raisons (appétit pour le risque différent, souscription de certains risques atypiques, système de gouvernance développé, ...). Certaines de ses spécificités, reflétées par son modèle interne, seront certainement gommées par cette étape de test sur des données standard. Il n'y aura alors plus d'intérêt pour la compagnie à l'avoir développé. In fine, au lieu d'avoir une formule standard, ce sera un modèle

interne standard qui existera en parallèle.

- En lien avec la question précédente, s'il n'y a pas d'harmonisation dans la validation des modèles internes au sein d'un pays, ne risque t-il pas d'y avoir des situations contradictoires où le régulateur valide les modèles internes de différentes entités qui ont chacune leur vision du risque? Dans ce cas, la validation d'un modèle interne serait plus liée à la validation de la gestion des risques de chaque entité qu'à la modélisation des risques, alors que pourtant in fine toutes les décisions de gestion découleront de cette modélisation.

Toutes ces questions qui restent en attente d'une position par le régulateur, ne doivent pas masquer l'opportunité que constitue un modèle interne pour le secteur de l'assurance. Couplé à une gouvernance des risques, celui-ci sera un véritable outil de gestion des risques via l'évaluation des politiques tarifaires, la pertinence des achats en réassurance, l'allocation de capital, . . . A chaque niveau décisionnel, le modèle interne pourra être utilisé.

3.7 Fonds propres

Tout comme dans le cadre actuel de Solvabilité 1, le régulateur ne considérera que certains éléments pour faire face aux exigences de solvabilité. Pour rappel, le capital réglementaire joue le rôle :

- D'amortisseur, en permettant d'assurer la continuité d'exploitation.
- D'absorbeur des pertes engendrées par les risques inhérents à l'activité.

Les éléments qui constituent ce capital réglementaire doivent revêtir certains critères :

- Subordination : remboursement après tout autre créancier en cas de mouvements extrêmes.
- Permanence : échéance perpétuelle ou très éloignée par rapport aux obligations d'assurance.
- Capacité à absorber des pertes : facilement mobilisable en cas de situation extrême.
- Absence de rémunération fixe (dividende, intérêt) ou d'autres obligations, notamment de remboursement.

Les fonds propres sont catégorisés en 3 Tiers en fonction de leur capacité d'absorption des pertes et de la présence ou non d'un terme. Les critères des éléments du Tier1 sont les plus restrictifs. Ces éléments peuvent être immédiatement disponibles ou à la demande lors de situations très défavorables, leur remboursement se fait après tous les autres créanciers et il n'y a aucune obligation ou incitation au remboursement anticipé.

Parmi les éléments figurant dans le Tier1, il y a :

- L'excédent de l'actif sur le passif. Un point qui a donné lieu à discussion entre le

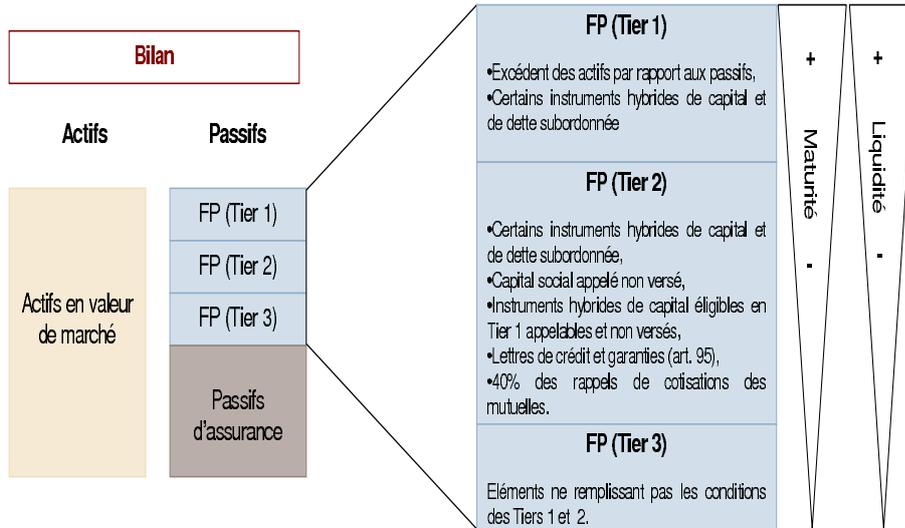


FIGURE 1.11 – Schéma de la catégorisation des fonds propres

régulateur et les acteurs du marché tient à la prise en compte des profits futurs dans le Pilier 1. En effet, l'évaluation des profits futurs est délicate car elle suppose de considérer la rentabilité des contrats sur plusieurs années (typiquement les contrats d'assurance emprunteur) alors même que les environnements réglementaires, concurrentiels ou économiques sont susceptibles d'influencer celle-ci.

- Le capital libéré (action avec droit de vote, part des fondateurs et fonds d'établissement) ou non appelé
- Les réserves et report à nouveau
- La différence positive d'évaluation de l'actif et du passif entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2. Par exemple, l'écart positif entre les provisions calculées sous Solvabilité 1 et Solvabilité 2, sous réserve que l'écart respecte les conditions d'éligibilité. Un autre élément pouvant être inclus est le rappel de cotisation dès lors que celui-ci est inclus dans le budget.

Dans le Tier2, figurent :

- Les dettes subordonnées qui possèdent les caractéristiques d'éligibilité au Tier2.
- Les lettres de crédit et de garanties délivrées par des institutions de crédit agréées (Directive 2006/48/EC) conservées par un établissement indépendant.
- Les autres capitaux contingents, qui possèdent les critères d'éligibilité au Tier 2 (capital non appelé, lettres de crédit et autres engagements reçus, . . .).
- Le rappel de cotisation, si inclus dans le budget.

Enfin, le Tier3 présente les éléments suivants :

- Le fond d'établissement ou capital non libéré, non appelé.
- Les lettres de crédit et autres engagements reçus non éligibles au Tier2.
- Les dettes subordonnées non éligibles au Tier2.

Tous ces éléments ne sont pas admis en représentation du SCR et du MCR, seuls certains Tiers peuvent couvrir le MCR et selon différentes règles. Ainsi, la somme des 3 Tiers doit couvrir le SCR. Mais au sein de cette somme, le Tier1 doit être supérieur au 1/3 du total éligible et le Tier3 doit être inférieur 1/3 du total éligible. Tandis que pour couvrir la MCR, seuls le Tier1 et le Tier2 sont retenus. Le Tier1 doit correspondre à au moins la moitié de la somme de ces deux Tiers.

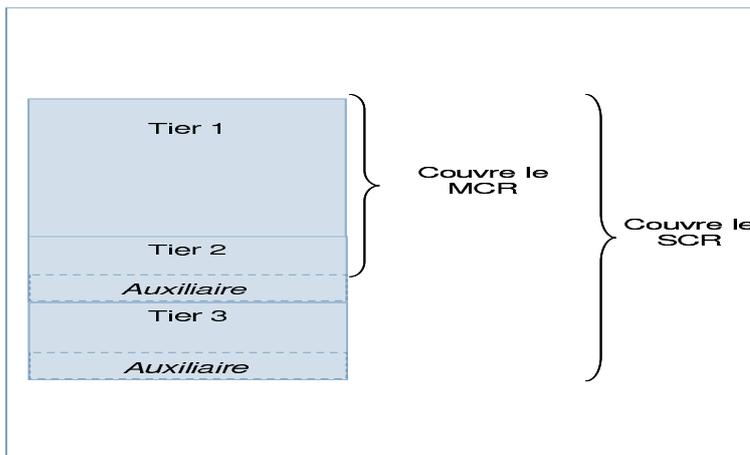


FIGURE 1.12 – Couverture des seuils réglementaires

3.8 Planning

Avec l'adoption de la Directive fin avril 2009 par une courte majorité au parlement Européen (93 voix pour, 80 contre et 3 abstentions), l'aspect législatif de la réforme prudentielle continue puisqu'il faudra transposer la Directive dans les droits nationaux, puis finaliser l'approche quantitative au travers d'une dernière étude d'impact en 2010 afin que les assureurs puissent publier des comptes suivants les nouvelles normes.

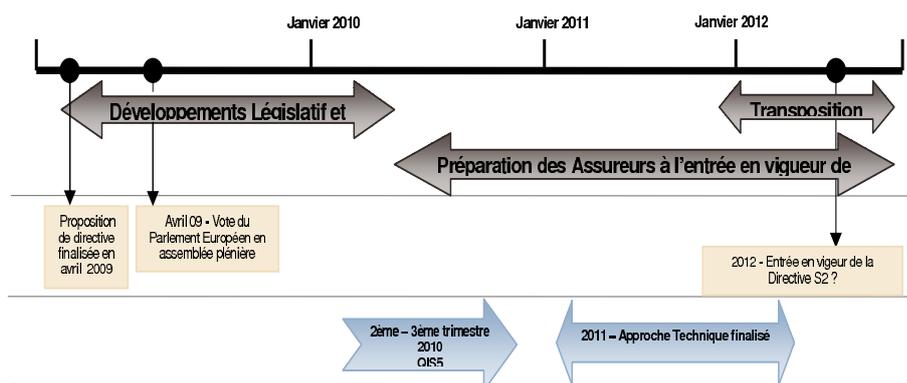


FIGURE 1.13 – Planning de la mise en application de Solvabilité 2, vu à ce jour

3.9 Résultats

Les résultats suivants, extrait des synthèses effectuées par le régulateur, n'ont fait l'objet ni de commentaires, ni d'avis de sa part sur la qualité des réponses. En effet, les études d'impact demandent aux compagnies d'immobiliser beaucoup de moyen et de temps pour y répondre. Toutes n'ayant pas forcément ces ressources, les réponses apportées sont de qualités différentes.

Dans les trois tableaux ci-dessous sont donnés les impacts du nouveau référentiel de solvabilité à l'issue du QIS4 pour le secteur de l'assurance au niveau français.

En vue de faire une comparaison relative de l'impact du passage à Solvabilité 2, l'exigence de marge minimale sous Solvabilité 1 servira de référence. Ainsi, dans le Tableau 1.3 est rappelé le niveau de couverture et l'excédent de fonds propres par rapport à l'exigence actuelle.

TABLE 1.3 – Niveau de solvabilité dans Solvabilité 1

Solvabilité 1	Entreprise Non-Vie	Entreprise Vie
Exigence minimale de marge	100%	100%
Couverture de l'exigence minimale	712%	278%
Surplus	612%	178%

source : Acam, *Analyse et Synthèse du QIS4*, Décembre 2008

TABLE 1.4 – Niveau de solvabilité minimum dans Solvabilité 2

Solvabilité 2	Entreprise Non-Vie	Entreprise Vie
MCR	133%	34%
Couverture du MCR	825%	248%
Ecart	692%	241%

source : Acam, Analyse et Synthèse du QIS4, Décembre 2008

TABLE 1.5 – Niveau de solvabilité dans Solvabilité 2

Solvabilité 2	Entreprise Non-Vie	Entreprise Vie
SCR	383%	94%
Couverture du SCR	903%	248%
Ecart	520%	154%

source : Acam, Analyse et Synthèse du QIS4, Décembre 2008

Dans le Tableau 1.4 est communiqué le MCR en référence à l'exigence minimale sous Solvabilité 1. Le MCR est sensiblement inférieur à la marge minimale pour les assureurs vie (-66%), là où il augmente de 33% pour les assureurs non-vie. Le Tableau 1.5 montre le positionnement du SCR par rapport à l'exigence actuelle. Le SCR en vie reste proche de l'exigence actuelle, par contre le SCR des assureurs non-vie quadruple presque par rapport à aujourd'hui. Il est néanmoins trompeur de s'arrêter à ce constat puisque le périmètre n'est pas le même entre les deux seuils réglementaires. Réaliser le calcul du ratio de couverture (éléments de couverture divisés par l'exigence) entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2 n'a pas de sens, puisque les méthodes conservatrices d'évaluation des provisions et de la valorisation des actifs dans Solvabilité 1 donnent une protection supplémentaire implicite. Tandis que sous Solvabilité 2, le périmètre de calcul est élargi puisque tous les risques quantitatifs sont inclus dans l'exigence de marge (risque opérationnel, ...).

Donc plutôt que de comparer l'évolution du taux de couverture, il est plus pertinent de comparer l'évolution du surplus entre les deux régimes prudentiels. Ainsi pour les assureurs non-vie, l'écart passe de 612% à 520% soit une baisse d'environ 20%, là où le ratio de couverture passe de 712% à 236%. Le surplus reste donc conséquent pour les assureurs non-vie et assure un niveau de solvabilité satisfaisant. Pour les assureurs vie, l'écart passerait de 178% à 154%, soit une baisse de près de 15%. Là encore, la solvabilité des assureurs vie semble garantie.

A l'issue du QIS4, les poids des différentes classes de risque² étaient le suivant selon la typologie des entreprises d'assurance :

TABLE 1.6 – Décomposition du SCR de base selon les différentes classes de risque

	Entreprise Non-Vie	Entreprise Vie
Risque de Marché	46%	82%
Risque Non-Vie	44%	0%
Risque Vie	0%	14%
Risque Santé	5%	3%
Risque de Défaut	5%	<1%

source : *Acam, Analyse et Synthèse du QIS4, Décembre 2008*

Au travers du Tableau 1.6 apparaît le rôle marginal du risque de défaut. Ce faible impact dans le capital global a motivé bon nombre d'acteurs à faire remarquer que les lourdeurs des calculs n'étaient pas en lien avec l'enjeu et ont suggéré des approximations et des simplifications pour cette classe de risque.

Les résultats de ce tableau sont riches en enseignements. Comme attendu, le risque de marché est la principale source de risque (plus de 80%) pour une compagnie d'assurance vie. Ce résultat s'explique naturellement par les risques supportés par un assureur vie. De manière plus surprenante pour un assureur non-vie, la moitié de son besoin en capital provient du risque de marché, alors que le coeur de son activité ne représente que la moitié de son besoin en capital. Dans le tableau suivant est présentée la ventilation du besoin en capital du risque de marché entre les différents modules.

Les spécificités liées aux métiers des assureurs vie/non-vie se retrouvent dans ces résultats. De par la nature de leurs engagements, les entreprises d'assurance vie investissent plus sur des supports à long terme, comme en témoigne la composante majeure du risque de taux. Inversement, les assureurs non-vie qui ont un besoin de liquidité sur un horizon court terme sont plus exposés au risque action et immobilier. Le poids prépondérant du risque de concentration des assureurs non-vie (contrairement aux assureurs vie) tient au rôle majeur de la réassurance dans leur activité. Le risque de change joue un rôle marginal quelques soient le secteur d'activité de l'entreprise d'assurance.

2. Ces résultats sont obtenus faisant le rapport d'une classe de risque sur la somme des autres classes de risques, sans prise en compte des diversifications

TABLE 1.7 – Décomposition de la classe du risque de marché selon les différents modules de risque

	Entreprise Non-Vie	Entreprise Vie
Risque de taux	37%	51%
Risque action	48%	44%
Risque immobilier	14%	8%
Risque spread	11%	21%
Risque de concentration	18%	7%
Risque de change	6%	7%

source : Acam, Analyse et Synthèse du QIS₄, Décembre 2008

4 Le risque de souscription non-vie

Ce module de risque est connu dans la littérature académique sous le terme de risque d’assurance puisqu’il correspond au coeur de métier d’un assureur non-vie. Le risque de souscription non-vie est défini comme étant (voir TS.XIII.A.1 dans [CEI08] : “le risque spécifique qui survient des contrats d’assurance. Il concerne l’incertitude qui entoure les résultats de l’activité de souscription d’une compagnie d’assurance”.

Il fera l’objet d’une description plus détaillée que les autres sous modules pour plusieurs raisons :

- Ce risque représente environ la moitié du besoin en capital d’une compagnie d’assurance non-vie (voir la Section 3.9).
- Contrairement aux autres modules de risque où les risques sont agrégés suivant la “ Règle de la Racine Carrée ” (voir la Formule 1.1), ce module fait l’objet d’un traitement particulier de la part du CEIOPS.
- Alors que pour la majorité des autres modules de risque le besoin en capital, censé représenter une situation survenant dans 0.5% des cas, est décrit au moyen d’un scénario, pour ce sous module, c’est une approche par facteur qui est proposée.
- Comme présenté à la Section 3.4.1, le périmètre de couverture des risques dans Solvabilité 2 est vaste. Vouloir couvrir l’ensemble des modules de risque aurait été ambitieux et aurait conduit à traiter de manière superficielle chacun des risques. Au lieu de cela, il a semblé préférable de s’attarder sur les grands principes de Solvabilité 2 dans un module de risque en particulier.

Ainsi ce module de risque sera le fil conducteur de cette thèse et le lecteur pourra se référer à cette section pour une présentation complète de ce risque.

Le risque de souscription non-vie couvre à la fois le risque de prime et le risque de provisionnement. Le risque de prime permet de couvrir les sinistres futurs. Le risque provient d'une inadéquation des frais et des montants (payés et provisionnés) de ces sinistres par rapport aux primes encaissées. Le risque de prime doit permettre de faire face à une sinistralité plus forte que celle qui est anticipée.

Quant au risque de provisionnement, il doit permettre d'absorber le comportement aléatoire de l'évolution des provisions. L'horizon temporel visé par le risque de provisionnement constitue une nouveauté dans la réforme. Jusqu'à présent l'ensemble des entreprises d'assurance estimait la volatilité de leurs engagements jusqu'à extinction de ceux-ci. Aujourd'hui, avec l'approche Solvabilité 2, la volatilité des engagements sera estimée uniquement pour un horizon d'un an. Le rapport [ACM07] fournit une première quantification de cette différence. L'impact est majeur puisque la volatilité à 1 an est environ 2 à 3 fois moins importante que celle calculée sur tout l'horizon des engagements. Les travaux récents menés par [Mac08a], [Mac08b], [MWL09] montrent des écarts moins importants et sont liés à la branche d'activité analysée.

Ce module couvrant tous les risques liés au passif d'une compagnie d'assurance non-vie, la problématique d'agrégation des risques est importante et intervient à différents niveaux au sein du module :

- Agrégation intra branche d'activité
- Agrégation géographique
- Agrégation inter branche d'activité

4.1 Agrégation intra branche d'activité

Lors du QIS4, il y avait 12 branches d'activités spécifiées au niveau européen. Cette dénomination est forcément un consensus supra national et donc induit des regroupements d'activités forcément hétérogènes. Ainsi, la branche "Incendie et autres dommages aux biens" inclue des risques liés aux événements naturels (tremblement de terre, tempête, inondation, etc . . .), et des dommages issus d'incendie, de dégâts des eaux, cambriolage, . . . pour des types de risques aussi divers que le risque agricole, des particuliers, commercial ou professionnel. Chacun de ces risques a des caractéristiques différentes et devrait donc avoir un traitement spécifique.

Une segmentation intra risque aurait été plus intéressante, mais naturellement, le CEIOPS a dû arbitrer entre flexibilité et simplicité de calcul. Dans le cadre de la Directive, ces regroupements sont définis comme un minimum, les entreprises d'assurance étant incitées à procéder à des agrégations plus fines dans des groupes de risques homogènes. Ces regroupements plus fins ne pourront être réalisés que dans le cadre d'un modèle

interne.

De manière formelle dans Solvabilité 2 les risques sont agrégés de la façon suivante : Soit X_i^P et X_i^R des variables aléatoires représentant le risque de prime et le risque de provisionnement pour la branche d'activité i . Ces variables sont considérées nettes des techniques de transfert de risque.

Les moments de chacune des ces variables sont représentées par :

$$\begin{aligned} V_i^P \sigma_i^P &= \sqrt{Var(X_i^P)} & V_i^P &= E(X_i^P) \\ V_i^R \sigma_i^R &= \sqrt{Var(X_i^R)} & V_i^R &= E(X_i^R) \\ Cov(X_i^P, X_i^R) &= \theta_{PR} \sigma_i^P V_i^P \sigma_i^R V_i^R, \end{aligned}$$

où

- σ_i^P est la volatilité de la branche d'activité i par unité pour le risque de prime, autrement dit pour chaque euro de prime. La volatilité par branche est fournie par le régulateur, voir TS.XIII.B25 dans [CEI08].
- V_i^P est le nombre d'unité pour le risque de prime, soit le montant des primes anticipées pour l'année à venir pour la branche d'activité i .
- σ_i^R est la volatilité de la branche d'activité i par unité pour le risque de provisionnement, autrement dit pour chaque euro de provision. La volatilité par branche est fournie par le régulateur, voir TS.XIII.B23 dans [CEI08].
- V_i^R est le nombre d'unité pour le risque de provisionnement, soit le montant des provisions en valeur économique pour la branche d'activité i , autrement dit le Best Estimate de la branche d'activité i .
- θ_{PR} est la " corrélation " entre le risque de prime et le risque de provisionnement par branche d'activité. Dans le QIS4, ce coefficient est égal à 50% pour toutes les branches.

Les moments de la variable X_i qui représente le risque au niveau de la branche d'activité i sont :

$$V_i = E(X_i) = V_i^P + V_i^R = E(X_i^P) + E(X_i^R) \quad (1.2)$$

$$V_i \sigma_i = \sqrt{(\sigma_i^P V_i^P)^2 + (\sigma_i^R V_i^R)^2 + 2\theta_{PR} \sigma_i^P V_i^P \sigma_i^R V_i^R}. \quad (1.3)$$

La Figure 1.14, ci-dessous, indique les niveaux de volatilité pour chaque type de risque selon les branches d'activités du QIS4. Ces niveaux de volatilités ont été extrapolés par le CEIOPS à partir de données comptables observées sur un seul Etat.

	Risque de prime	Risque de provisionnement
Automobile RC	9%	12%
Automobile Autres branches	9%	7%
Marine, Aviation, Transport (MAT)	12.50%	10%
Incendie et autres dommages	10%	10%
Responsabilité Civile	12.50%	15%
Crédit et Caution	15%	15%
Protection Juridique	5%	10%
Assistance	7.50%	10%
Divers	11%	10%
Réassurance non Prop-dommages	15%	15%
Réassurance non Prop-RC	15%	15%
Réassurance non Prop-MAT	15%	15%

FIGURE 1.14 – Volatilité par branche d’activité pour chaque type de risque lors du QIS4

L’évaluation du risque au niveau d’une branche d’activité s’effectue donc au travers du calcul d’une volatilité par branche d’activité pondérée par le risque de prime et de provisionnement via un coefficient. Ce coefficient est le même pour toutes les branches d’activités. Il apparaît immédiatement l’une des limites de ce calcul. Même s’il est délicat d’avoir une estimation qui fasse l’unanimité au niveau européen et que le recours à l’avis d’expert sera indispensable, il est étonnant que ce coefficient de “ corrélation ” soit le même pour toutes les branches.

L’inconvénient majeur de cette approche est que l’agrégation est faite par branche d’activité et non par type de risque (risque de prime et de provisionnement), de fait, cette information n’est pas disponible pour la Direction de l’entreprise.

4.2 Agrégation géographique

Dans le cadre de la Directive Solvabilité 2, la diversification géographique est prise en compte dans le QIS4 via l’indice d’Herfindhal. Celui-ci est basé sur les primes et les provisions par branche d’activité dans chaque pays (voir TS.XIII.B.29 dans [CEI08]). L’indice d’Herfindhal est ici défini par :

$$H_i = \frac{\sum_j V_{ij}^2}{(\sum_j V_{ij})^2}$$

$$V = \sum_i V_i(0.75 + 0.25H_i),$$

où

- H_i est l'indice d'Herfindhal pour la branche d'activité i .
- V_i est la mesure d'activité pour la branche d'activité i .
- j est un indice de la zone géographique.

La diversification ne peut dépasser 25% par branche d'activité. [Cru09] démontre de manière analytique le caractère conservateur du choix du régulateur de limiter la diversification géographique à 25% et ce d'autant plus que selon la spécification du CEIOPS, celle-ci pourrait aller jusqu'à 33% (voir le chapitre : "Optimization of the Non-Life Insurance Risk Diversification in Solvency II" de W. Hrlimann dans [Cru09]).

Malheureusement, l'introduction du bénéfice de diversification géographique qui a été demandé par le marché à la suite des premiers QIS et pris en compte dans le QIS4 ne sera pas retenue dans l'application de la formule standard. En effet, le CEIOPS juge la méthode trop complexe et donnant un crédit de capital trop fort au titre de la diversification car étant déjà incluse dans le paramétrage effectué sur des données agrégées (voir [CEI09e], annexe C).

4.3 Agrégation inter branche d'activité

Le risque de chacune des 12 branches d'activités est supposé suivre une loi lognormale et par conséquent au niveau de la compagnie, le risque est calculé comme une loi lognormale multivariée. Pour justifier ce choix, le régulateur s'appuie sur le fait que dans la classe de risque non-vie, deux sous modules sont agrégés :

- Le risque de souscription non-vie avec le risque de prime et de provisionnement.
- Le risque Cat, qui détermine le besoin en capital pour faire face à des événements extrêmes (événements naturels, explosion, sinistre en Responsabilité Civile majeur, attentat terroriste, etc ...).

Afin d'éviter un double comptage du besoin en capital au titre d'évènements Cat, le régulateur a retenu une distribution lognormale car "cette distribution ne sera pas à même de capturer de tels événements" (voir paragraphe 3.7 dans [CEI09e]).

La volatilité calculée au niveau de chacune des branches est ensuite utilisée pour paramétrer la distribution multivariée au niveau de la compagnie. Si les raisons du CEIOPS sont bien établies (arbitrage entre simplicité et complexité), il n'en demeure pas moins que certaines branches sont plus risquées que d'autres (par exemple, la branche Responsabilité Civile ainsi que la réassurance non proportionnelle). Faire l'hypothèse d'une même distribution pour tous les risques du portefeuille est questionnable.

Ainsi le portefeuille non-vie d'une compagnie est décrit dans ce contexte par $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$, soit une somme de risques corrélés suivant chacun une distribution lognormale.

Le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_{12}) est de la forme $(V_1 \exp(Y_1), \dots, V_{12} \exp(Y_{12}))$ où (Y_1, \dots, Y_{12}) a une distribution normale multivariée avec les vecteurs de moyennes et de variances suivants :

$$\begin{aligned} (E[Y_1], \dots, E[Y_{12}]) &= \left(-\frac{1}{2}\gamma_1^2, \dots, -\frac{1}{2}\gamma_{12}^2\right), \\ (Var[Y_1], \dots, Var[Y_{12}]) &= (\gamma_1^2, \dots, \gamma_{12}^2), \end{aligned}$$

et une matrice de covariance $Cov(Y_i, Y_j) = \rho_{ij}\gamma_i\gamma_j$.

Cette paramétrisation permet d'avoir : $(E[X_1], \dots, E[X_{12}]) = (V_1, \dots, V_{12})$.

Il n'existe pas de formule fermée permettant l'évaluation du SCR avec une loi multivariée. L'intérêt de la formule standard étant de proposer une évaluation simple des risques, le CEIOPS a fait l'hypothèse que la somme des risques suivait une distribution lognormale univariée. Cette approximation peut être justifiée théoriquement pour de faibles niveaux de volatilités, voir [Duf02].

La volatilité est obtenue au niveau de la compagnie avec la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma_i \sigma_j V_i V_j}{\left(\sum_{i=1}^m V_i\right)^2}\right)}, \quad (1.4)$$

où

- m est le nombre de branches d'activités.
- V_i est une mesure de l'activité, les primes anticipées pour l'année à venir auxquelles sont additionnées le Best Estimate.
- σ_i est la volatilité de la branche d'activité i .
- θ_{ij} est le coefficient de corrélation entre la volatilité de la branche d'activité i et j .

Comme la volatilité est évaluée au niveau de la compagnie à l'aide d'une matrice de corrélation appliquée au niveau des branches d'activités, il n'existe pas de relation transitive entre les branches d'activités et les types de risques. Il n'est ainsi pas possible d'observer la corrélation entre le risque de provisionnement de la branche i et le risque de provisionnement de la branche j . A titre d'exemple, l'impact de l'inflation n'est pas directement quantifiable entre la branche Responsabilité Civile Générale et la Responsabilité Civile Automobile sur le risque de provisionnement.

Cette méthode implique que la volatilité pondérée utilisée par Solvabilité 2 est plus élevée que la volatilité pondérée calculée dans le cas transitif, dès lors que le coefficient

de corrélation est inférieur à 100%.

correlation – Solvabilite2 > correlation – Transitive,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sqrt{((\sigma_j^P P_j)^2 + 2\alpha \sigma_j^P P_j \sigma_j^R R_j + (\sigma_j^R R_j)^2)} \sqrt{((\sigma_i^P P_i)^2 + 2\alpha \sigma_i^P P_i \sigma_i^R R_i + (\sigma_i^R R_i)^2)} > \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} \theta_{ij} \sigma_i \sigma_j V_i V_j,$$

où, pour le cas transitif :

- $i, j = 1, \dots, m$ $V_i = V_i^P$ et $\sigma_i = \sigma_i^P$
- $i, j = m + 1, \dots, 2m$ $V_i = V_i^R$ et $\sigma_i = \sigma_i^R$
- $i = 1, \dots, m$ et $j = m + 1, \dots, 2m$ $\theta_{ij} = \theta_{ij-m}\alpha$ et pour $i = m + 1, \dots, 2m$ et $j = 1, \dots, m$ $\theta_{ij} = \theta_{i-mj}\alpha$ pour $\alpha < 1$

Appliquer la Formule (1.4) sur tout le portefeuille donne le *SCR* du risque de souscription, SCR_{uw} , (voir TS.XIII.B.18 dans [CEI08]) :

$$SCR_{uw} = \left(\sum_{i=1}^m V_i \right) \left(\frac{\exp \left(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma_i \sigma_j V_i V_j}{(\sum_{i=1}^m V_i)^2} + 1 \right)} \right)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma_i \sigma_j V_i V_j}{(\sum_{i=1}^m V_i)^2} + 1}} - 1 \right), \quad (1.5)$$

où

- m est le nombre de branches d'activités. Dans le QIS4, $m = 12$.
- V_i représente une mesure du volume d'affaire de la compagnie, cela correspond à la somme des primes encaissées et des provisions actualisées. Ce sont les seuls inputs nécessaires pour le QIS4.
- σ_i est la volatilité spécifique d'une branche d'activité i .
- θ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les branches d'activités i and j .
- $N_{0,995}$ est l'inverse de la fonction de répartition normal centrée réduite.

Il apparaît avec cette formule que l'évaluation du risque de souscription se base sur une approche à facteur et non par scénario. La Formule (1.5) comporte les mêmes défauts identifiés dans le cadre de Solvabilité 1 (voir Section 1.1).

5 Conclusion

Au travers de ce chapitre de présentation du futur régime prudentiel dans le secteur des assurances, des similitudes surviennent avec d'autres modèles d'évaluation de la solvabi-

lité des entreprises tels les modèles des agences de notation. Alors même que ces dernières ont une approche quantitative semblable à celle de Solvabilité 2, les principales critiques qui leurs sont adressées portent sur leur indépendance financière vis-à-vis de l'entité demandant à être notée. Ce focus sur l'indépendance financière plutôt que sur la méthode de calcul tient au poids important accordé (et communiqué également plus) sur tout ce qui est lié à l'aspect stratégique et management (voir la Section 2.2). Ces points bien qu'également présents dans Solvabilité 2 au travers du Pilier 2 sont à l'heure actuels peu abordés, ou seulement dans le cadre de la possibilité offerte aux entreprises d'assurance d'utiliser un modèle interne pour estimer leur besoin en capital.

Si l'harmonisation européenne est un des buts principaux de la réforme tant au niveau des seuils que des règles d'application, les aspects spécifiques de chaque marché ont été gommés et ainsi ne convient qu'à peu d'entités (comme en témoigne les 20.000 commentaires reçus par le CEIOPS pour les " Consultatives Papers " publiés au premier semestre 2009, voir www.ceiops.org). La propension des compagnies à développer un modèle interne viendra peut-être encore plus à rebours de cet objectif. Tout dépendra de l'approche de pré validation des modèles internes effectuée par les cabinets d'audit et de conseil, qui sera vraisemblablement en amont de la validation par le régulateur. Un peu à la façon dont ils ont orienté la structure de Solvabilité 2 (voir [KPM02]), ils devraient faire converger les pratiques en la matière. Le régulateur ne s'étant accordé que six mois pour valider un modèle interne (voir [CEI09i]), il est vraisemblable qu'il ira également dans ce sens.

L'orientation du débat sur l'aspect technique plutôt que managériale est préjudiciable, puisque comme le démontre le rapport "Sharma" (voir [Aut02]), les 21 faillites observées et analysées dans ce rapport avaient pour origine principale une erreur de management et non des problèmes quantitatifs. Ceci confirme le faible nombre actuel de faillite reflétant une industrie suffisamment capitalisée (voir la Section 3.9 sur les résultats du passage au nouveau référentiel). Sa bonne tenue face à la crise actuelle en est une autre illustration. Ces notions de bonnes pratiques de gestion présentées comme étant des pré requis indispensables à la validation d'un modèle interne devraient sans doute être élargies à l'ensemble des acteurs. Sans vouloir chercher à tout prix la vérité dans les résultats d'un modèle interne ni même à les idéaliser, pouvoir juger de l'allocation de capital, des orientations des politiques tarifaires ou la modification des programmes de réassurance donnera des indications claires au management de l'entreprise sur les décisions à prendre et seront aussi validées tout au long du processus décisionnel.

Bibliographie

- [ACM07] AISAM ACME. Study on non-life long tail liabilities. Technical report, AISAM - ACME, 2007.
- [AIMF09] M. Altschull, D. Ingram, D. Mango, and W. Fisher. Gestion des risques : La crise financière actuelle, les leçons tirées et les répercussions dans l'avenir. Technical report, Institut Canadien des actuaires - Society of actuaries, 2009.
- [Aut02] Financial Services Authority. Lessons about risk : analysing the causal chain of insurance company failure. Technical report, Financial Services Authority, December 2002.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1900.
- [CEI08] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.
- [CEI09a] CEIOPS. Ceiops report on its fourth quantitative impact study for solvency 2. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09b] CEIOPS. Cp - 33 system of governance. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09c] CEIOPS. Cp - 42 risk margin. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09d] CEIOPS. Cp - 48 scr standard formula : Non-life underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09e] CEIOPS. Cp - 50 scr standard formula health underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09f] CEIOPS. Cp - 51 scr standard formula further advice on the counterparty default risk module. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09g] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2 : article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09h] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 mcr calculation. Technical report, CEIOPS, 2009.

- [CEI09i] CEIOPS. Cp - 69 level 2 implementing measures on solvency 2 : Article 109b, equity risk sub module. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CF09] CRO-Forum. Market value of liabilities for insurance firms - implementing elements for solvency 2. Technical report, CROforum, 2009.
- [Cru09] M. Cruz. *The Solvency 2 handbook*. RiskBooks, 2009.
- [dCU07] Union Fédérale des Consommateurs UFC. Le scandale financier de l'assurance emprunteur. *communiqué de presse*, 2007.
- [Duf02] D. Dufresne. The log-normal approximation in financial and other computations. *Advances in applied probability*, 36 :774–773, 2002.
- [EC07] European-Commission. Directive of the european parliament and of the council on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance solveny ii. Directive, European Commission, 2007.
- [Has08] G. Haslip. Risk assessment. *The actuary*, pages 28–30, December 2008.
- [Kni21] F. Knight. *Risk, uncertainty and profit*. Boston and New York : Houghton Mifflin, 1921.
- [KPM02] KPMG. Study into the methodologies to asses the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision. Technical report, KPMG, May 2002.
- [Lap82] P. Laplace. Sur les naissances, les mariages et les morts à paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la france pendant les années 1781 et 1782. *Mémoire de l'Académie royale des sciences*, 1782.
- [Mac08a] T. Mack. Parameter estimation for bornhuetter-ferguson. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2008.
- [Mac08b] T. Mack. The prediction error of bornhuetter-ferguson. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2008.
- [MKK09] A. McNeil, G. Kretschmar, and A. Kirchner. The case for fully integrated models of economic capital. *preprint*, 2009.
- [MM09] P. Morand and D. Marteau. Normes comptables et crise financière. Technical report, ESCP, July 2009.
- [MRD04] N. Moureau and D Rivaud-Danset. *L'incertitude dans les théories économiques*. Collection Repères, 2004.
- [MWL09] M. Merz, M. Wuthrich, and N. Lysenko. Uncertainty in the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :63–84, 2009.
- [oPI04] Swiss Federal Office of Private Insurance. White paper of the swiss solvency test. Technical report, Swiss Federal Office of Private Insurance, November 2004.

- [Par05] C. Partrat. *Assurance non-vie : modelisation, simulation*. Assurance Audit Actuariat, 2005.
- [PLNN07] C. Partrat, E. Lecoœur, JM. Nessi, and E. Nisipasú. *Provisionnement technique en assurance non vie : perspectives actuarielles modernes*. Assurance Audit Actuariat, 2007.
- [Pra06] PC. Pradier. *La notion de risque en économie*. Collection Repères, 2006.
- [San05] A. Sandstrom. *Solvency : Models, assessment and regulation*. Chapman and Hall, 2005.
- [Ss07] Standard and Poor s. New risk based insurance capital model. Technical report, Standard and Poor s, 2007.

Chapitre 2

La mesure de risque dans Solvabilité 2

1 Introduction

La problématique de la quantification des risques est ancienne, elle peut être datée de manière précise à 1713 avec le “Paradoxe de Saint Pétersbourg” posé par Nicolas Bernoulli. C’est avec Jean Le Rond d’Alembert que la notion de “ruine” commence à apparaître, notion qui sera ensuite développée par Nicolas de Condorcet. Le problème intéressant le Marquis de Condorcet est l’accumulation de sinistres, puisque cette situation pourrait menacer la solvabilité des assureurs. Pour l’éviter, Condorcet (voir [Con21]) propose de fixer les primes de manière à ce que l’assureur n’ait qu’une faible probabilité de ne pas pouvoir faire face aux paiements. Il introduit la notion de chargement sur les primes dont le but n’est pas seulement de couvrir les frais de gestion de l’assureur mais aussi d’assurer la sécurité des remboursements. Les outils mathématiques de l’époque ne permettaient pas la résolution de manière analytique du calcul du niveau de sécurité d’un portefeuille d’assurance, autrement dit d’une somme de variables aléatoires. Il a fallu attendre l’introduction de l’approximation d’une somme de variables aléatoires par la méthode de Laplace pour voir la théorie du risque se développer.

Ces calculs vont connaître un véritable essor au 20^{ème} siècle avec les travaux de Filip Lundberg ([Lun19]) et Harald Cramer ([Cra30]) (pour une présentation intéressante de l’histoire des mesures de risque voir [Cha08b]).

Nonobstant le fait que dès le départ les travaux concernaient des variables aléatoires (ce qui avait limité la portée des travaux de N. Condorcet lors de leurs publications) et qu’il n’y avait aucune contrainte d’harmonisation et de consensus contrairement aux principes donnés au CEIOPS, celui-ci a proposé une méthode d’estimation du besoin en capital

basé sur une somme pondérée de constantes (les besoins en capitaux). En comparant avec la situation prévalant à la fin 18ème, l'approche du CEIOPS (et d'autres instances d'évaluation de la solvabilité des compagnies d'assurance) semble simple a priori.

Pourtant, en voulant donner une signification économique particulière (chaque somme pondérée représente une VaR) qui n'a pas lieu d'être, le régulateur a complexifié l'approche, ce qui nuit à son adhésion et approbation par les acteurs du marché de l'assurance (voir les remarques émises par les assureurs sur le site internet du CEIOPS).

En faisant référence constamment à une probabilité de ruine dans 0.5% des cas à l'horizon d'un an, le régulateur a voulu fixer les idées sur l'ordre de grandeur du niveau souhaitable de protection. Cette approche simple du point de vue de la communication interpelle néanmoins le monde académique et professionnel, puisqu'elle apparaît de manière systématique à tous les niveaux hiérarchiques (voir la Figure 1.8). Ceci nécessite des hypothèses très fortes, puisque l'approche " Bottom-up " retenue amène à réaliser des agrégations à des niveaux intermédiaires qui eux-mêmes doivent représenter cette probabilité de ruine. Cela revient à faire l'hypothèse que l'application d'une matrice de corrélation sur des constantes (les besoins en capitaux des niveaux inférieurs) représente le même niveau de protection pour cette somme de capitaux.

Du point de vue du régulateur cette approche respecte les finalités attendues d'une formule standard :

- Simplicité et rapidité des calculs
- Compréhension rapide.

Mais ces avantages doivent être mis en balance avec des inconvénients :

- Arbitraire
- Forfaitaire
- Simpliste.

Cette formule ne représente ni la réalité du fonctionnement d'une compagnie d'assurance (voir [MKK09]) ni la réalité des dépendances existantes entre les variables sous jacentes. Ainsi, il paraît intéressant de mettre en parallèle les caractéristiques d'une mesure de risque pertinente par rapport à cette formule et de voir quelles seraient les éventuelles pistes à suivre pour l'améliorer.

La mesure de risque utilisée par le régulateur pour définir le capital, introduit la référence à un environnement multivarié via l'introduction de plusieurs classes et sous modules de risque. Ce point est important car alors que les propriétés des mesures de risque peuvent revêtir certaines difficultés dans un cadre univarié, l'extension à une mesure de risque multivariée complexifie l'analyse et n'est pas aussi simple que la formule proposée par le régulateur.

Au cours de la Section 2 seront rappelés les axiomes de référence d’une mesure de risque dans un environnement univarié. Puis dans une Section 3, le cas multivarié sera présenté. Le passage de certains axiomes du cadre univarié au cadre multivarié sera assez intuitif, les autres feront l’objet d’un développement particulier. La Section 4 consistera en une application des précédents axiomes sur l’approche suivie par Solvabilité 2, et mettra par la même en évidence les lacunes de l’approche du régulateur d’un point de vue théorique. Enfin, une conclusion mettra en perspective le choix du régulateur.

2 Mesure de risque univariée

2.1 Cadre et genèse

La notion de ruine telle qu’envisagée par Solvabilité 2 voit le jour au début des années 90, notamment sous la publication de [Mor96] par la banque d’investissement JP Morgan qui fait émerger la notion de “ Value at Risk ” (VaR). La VaR est définie par $VaR_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq 1-\alpha\}$ où α est le niveau de confiance. Si la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X est continue et strictement croissante, $VaR_{1-\alpha}(X)$ est l’unique x satisfaisant $F(x) = P(X \leq x) = 1 - \alpha$, ainsi $VaR_{1-\alpha}(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha)$. Elle signifie que la perte X , se produisant dans $\alpha\%$ des cas, sera inférieure ou égale à x .

Sa simplicité de calcul et sa rapidité de compréhension ont permis l’utilisation de cette notion par un grand nombre d’acteur, puis l’ont imposé comme la mesure de risque par excellence. Son adoption par le Comité de Bâle en 1996 pour déterminer les exigences de capital des banques a été l’une des raisons de son appropriation par le marché.

Une dizaine d’années plus tard, cette mesure a été remise en cause par [ADEH99]. La VaR ne remplissant pas certaines conditions, ils ont donné une définition des propriétés que devrait revêtir une mesure de risque, le terme de mesure de risque étant à comprendre dans le sens “métrique”.

Si chacun possède une définition intuitive de ce que recoupe un risque financier, il est pourtant difficile de donner une bonne estimation d’un risque financier sans avoir spécifié au préalable ce que signifie une mesure de risque (pour faire un parallèle, la notion de température est difficile à appréhender sans un thermomètre indiquant de combien est la température). Après avoir transposé de manière formelle ce qu’est une mesure de risque, les propriétés de celle-ci seront définies.

Definition 2.1. Mesure de risque

Soit Ω , un ensemble de scénarios définis et \mathbb{P} un ensemble représentant toutes les positions qui donnent des valeurs réelles sur Ω .

Une mesure de risque ρ est une projection de variables aléatoires sur l'ensemble des réels $\rho : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$. C'est une fonction qui renvoie un montant donnant la position acceptable.

Definition 2.2. Ensemble d'acceptabilité associé à une mesure de risque.

L'ensemble d'acceptabilité associé à une mesure de risque ρ est l'ensemble \mathbf{A}_ρ défini par : $\mathbf{A}_\rho = \{X \in \mathbb{P} : \rho(X) \leq 0\}$.

2.2 Mesure de risque cohérente

La notion de mesure de risque cohérente est apparue dans la littérature dès 1997 avec [ADEH97]. La cohérence d'une mesure de risque s'entend comme allant de pair avec la cohérence d'un point de vue économique. Puis en 1999, [ADEH99] donne une approche axiomatique d'une mesure de risque cohérente pour un ensemble fini de probabilité. Dans [Del00], l'analyse est étendue au cas général.

Definition 2.3. Mesure de risque cohérente.

Une mesure de risque est cohérente si elle satisfait aux quatre axiomes suivant :

- Invariance par Translation : $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En se rappelant la définition d'une mesure de risque qui renvoie un montant rendant une position risquée acceptable, mesurer le risque d'une variable aléatoire à laquelle est ajouté un montant déterministe α doit être équivalent à mesurer le risque de la variable aléatoire augmentée du montant déterministe.
- Sous-additivité : X et $Y \in \mathbb{P}$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Cet axiome peut-être résumé par "une fusion n'aggrave pas le risque". Le risque peut-être réduit au moyen de la diversification. La diversification étant définie par la différence entre la somme des mesures de risque prises isolements et la mesure de risque estimée sur la somme des risques.
- Homogénéité positive : $\forall \lambda > 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$. Cet axiome est lié à l'hypothèse d'indépendance par rapport à la monnaie utilisée. Autrement dit, mesurer le risque après avoir appliqué le taux de change est équivalent à mesurer le risque sur la monnaie initiale puis appliquer le taux de conversion.
- Monotonicité : if $X \leq Y$ a.s alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Si un risque X est systématiquement plus risqué qu'un risque Y , le montant de capital à lui allouer doit être plus élevé.

En reprenant l'exemple de la VaR comme mesure de risque, [ADEH99] montrent que celle-ci ne respecte pas l'axiome de sous-additivité.

Une autre façon de formaliser une mesure de risque cohérente est le théorème de représentation d'une mesure de risque cohérente :

Théorème 1. *Une mesure de risque est cohérente si et seulement si, il existe une famille \mathcal{P} de mesure de probabilité sur l'ensemble des états de la nature tel que :*

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_P(X) | P \in \mathcal{P}\}. \quad (2.1)$$

Voir [ADEH99] pour une démonstration.

Il est intéressant de noter qu'avec ce théorème, un ensemble de probabilité se résumant à un singleton est une mesure de risque cohérente, ainsi lorsqu'un besoin en capital est défini au moyen d'un scénario, il s'agit d'une mesure de risque cohérente.

Il est démontré par [Kus01] qu'une mesure de risque cohérente possède la propriété d'être invariante en loi, autrement dit, si $X \sim Y$ alors $\rho(X) = \rho(Y)$. Si les risques X et Y suivent une même distribution alors chaque risque donne le même montant de capital.

Il semble accepté par les professionnels que le concept de mesure de risque cohérente donne un moyen très utile pour caractériser une mesure de risque sous certaines conditions. Un problème peut survenir avec les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité positive lorsque le risque de liquidité doit être pris en compte. Le risque de liquidité (voir Chapitre 1 - Section 3.4.1) correspond au risque d'incapacité du marché à répondre aux demandes d'échanges massives, comme cela a été observé pour la crise financière survenue en 2008. Dans cette situation, doubler la taille de son portefeuille peut entraîner plus que le doublement de son risque. Pour prendre en compte ce cas de figure, le concept de mesure de risque convexe a été introduit par [FS02] et [HK04]. Leur but est de remplacer ces deux axiomes par une exigence moins forte, la convexité.

2.3 Mesure de risque convexe

Bien que la première mention de la notion de mesure de risque convexe apparaisse dans [FS02], des travaux antérieurs avaient été menés par [Kus01], [WYP97] et [WH00].

Definition 2.4. Mesure de risque convexe.

Une mesure de risque est convexe si elle satisfait aux trois axiomes suivant :

- Invariance par Translation : $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Monotonie : Si $X \leq Y$ a.s alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Si un risque X est systématiquement plus risqué qu'un risque Y , le montant de capital à lui allouer doit être plus élevé.
- Convexité : $\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y) \forall X, Y \in \mathbb{P}, \alpha \in [0, 1]$. Une mesure de risque estimée sur une combinaison de risques doit donner un résultat moindre que la combinaison des mesures de risque.

A l'instar d'une mesure de risque cohérente, il est possible de caractériser une mesure de risque convexe via un théorème de représentation. En reprenant les notations précédentes :

Théorème 2. *Une fonction $\rho : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ est une mesure de risque convexe si et seulement si il existe une "fonction de pénalité" $\alpha : \mathbb{P} \rightarrow (-\infty, \infty)$ tel que :*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathbb{P}} \{\mathbb{E}_Q(X) - \alpha(Q)\}, \quad (2.2)$$

où $\alpha(Q) \geq -\rho(0)$ pour n'importe quel $Q \in \mathbb{P}$.

$\alpha(Q)$ peut s'interpréter comme étant le montant de capital qui rend la position acceptable. Voir [FS02], [FG05] et [Kus01] pour une démonstration.

Les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité positive englobant l'axiome de convexité, n'importe quelle mesure de risque cohérente est aussi une mesure de risque convexe. La réciproque est bien évidemment fausse. Comme le mentionne [Mul07], un exemple typique de mesure de risque convexe qui n'est pas cohérente est la mesure de risque entropique définie par :

$$\rho(X) = \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_P \{\exp(\gamma X)\} = \sup \left\{ \mathbb{E}_Q(X) - \frac{1}{\gamma} H(Q|P) \right\},$$

dans ce cas $\alpha(Q) = \frac{1}{\gamma} H(Q|P)$ avec $H(Q|P)$ qui dénote l'entropie relative de Q par rapport à P, représentée par : $H(Q|P) = \begin{cases} \mathbb{E}_Q(\log \phi) & \text{si } Q \text{ admet une densité } \phi \text{ par rapport à } P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$.

Il est à noter que le Théorème 1 est un cas particulier du théorème ci-dessus où la "fonction de pénalité" est donnée par : $\alpha(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } Q \in \mathbb{P} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$.

Au final, le calcul d'une position X se ramène à la procédure suivante. Au lieu de fixer un seul modèle probabiliste, toute une classe Q de mesures de probabilité sur l'ensemble des scénarios est admise. Pour toute mesure Q dans cette classe, l'espérance des pertes est calculée par $\mathbb{E}_Q(X)$. En règle générale, toutes ces mesures ne sont pas traitées de manière égale, cette distinction est quantifiée par la soustraction de la valeur $\alpha(Q)$. Ayant fait cette soustraction, le cas le moins favorable est considéré parmi toutes les classes Q, ce qui donne la mesure de risque.

Un autre axiome hors du champ de la notion de mesure de risque convexe peut également être mentionné, il s'agit de l'axiome de comonotone additivité défini par $\rho_c(X + Y) = \rho_c(X) + \rho_c(Y)$. Dans une situation comonotone, mettre ensemble des risques ne produit pas de gain en diversification (voir [DMG⁺3a], [DMG⁺3b]). D'autres mesures de

risques existent en parallèles, tel que les mesures de risque spectral qui s'expriment comme une moyenne pondérée des quantiles de la distribution de perte (voir [Ace02]) ; ou bien encore les opérateurs de distorsion (voir [Den00], [Wan96]) qui correspondent à l'espérance des pertes après avoir appliqué une transformation sur la fonction de répartition. Ces différentes mesures de risque partagent des axiomes avec les mesures de risque convexe et cohérente.

Après avoir caractérisé des mesures de risque dans un cadre univarié, la spécification de mesures de risque dans un environnement multivarié sera réalisée, afin de correspondre à la vision " Solvabilité 2 " où le capital est estimé sur plusieurs risques. L'extension d'une mesure de risque dans un cadre multivarié sera limitée à la notion de convexité puisqu'elle est moins forte que la notion de cohérence au regard du risque de liquidité.

3 Mesure de risque multivariée

Avant toute chose, il faut préciser dans quel contexte doit être interprétée la notion de mesure de risque multivariée. La notion envisagée dans la présente thèse est l'extension naturelle de la mesure du risque d'un portefeuille $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ qui consiste à mesurer le risque sur la somme des risques du portefeuille (voir [BR06]) :

$$\rho(\mathbf{X}) = \rho \left(\sum_{i=1}^n X_i \right). \quad (2.3)$$

Ainsi l'approche suivie par [JMT04] n'est pas reprise ici, puisqu'ils considèrent chaque composant du portefeuille.

Definition 2.5 Mesure de risque multivariée.

Soit deux vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ définis sur l'espace des probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors :

- Invariance translation : $\rho(\mathbf{X} + \alpha e_i) = \rho(\mathbf{X}) + \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et e_i correspond au composant i du vecteur.
- Convexité : $\rho(\alpha \mathbf{X} + (1 - \alpha) \mathbf{Y}) \leq \alpha \rho(\mathbf{X}) + (1 - \alpha) \rho(\mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}, \alpha \in [0, 1]$.
- Comonotone additivité : $\rho_c(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \rho_c(\mathbf{X}) + \rho_c(\mathbf{Y})$.
- Monotonie : Si $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ a.s alors $\rho(\mathbf{X}) \geq \rho(\mathbf{Y})$.

Voir [BR06] pour une démonstration.

Bien que l'axiome de comonotone additivité ne fasse pas partie de la définition d'une

mesure de risque convexe (contrairement aux autres axiomes), celui-ci sera étudié car il paraît pertinent pour plusieurs raisons :

- Plus il sera difficile d’estimer la structure de dépendance entre les risques, plus cette situation intéressera la compagnie pour l’aspect conservateur de cette hypothèse (voir [DMG⁺3a], [DMG⁺3b] et le Chapitre 6 de [EMS05]).
- Le régulateur est souvent intéressé par le calcul le besoin en capital dans le cas où la pire situation possible survient. Dans de nombreux cas de figures, ce sera le cas comonotone, mais pas uniquement. En effet, le concept de comonotonie est souvent associé de manière abusive à la notion de Worst Case, or celle-ci ne constitue un “Worst Case” que dans certains cas particulier, voir [Tch80].

Pour certains des axiomes présentés dans les sous-sections précédentes (2.2 et 2.3), l’extension à un cadre multivarié est directe (aux notations près) ; pour les autres, il convient de s’attarder sur ceux-ci afin de montrer les modifications.

Du fait de l’approche multivariée retenue (voir la Formule (2.3)), la généralisation des axiomes de comonotone additivité et de monotonie à un environnement multivarié n’est pas directe et nécessite d’être développée. Comme il le sera exposé par la suite, l’extension de l’axiome de sous additivité dans un environnement multivarié présente certaines similitudes avec le cas comonotone dans son traitement. La transposition des principes de l’axiome de comonotonie à celle de sous-additivité sera alors possible.

3.1 Monotonie dans un cadre multivariée

Dans un cadre univarié pour établir le caractère plus ou moins dangereux d’un risque par rapport à un autre, les concepts d’ordre *stochastique* ou d’ordre *stop loss* sont employés.

Definition 2.6 Ordre stochastique

Un risque X est moins dangereux qu’un risque Y selon l’*ordre stochastique*, $X \leq_{st} Y$, si $F_X^{-1}(\alpha) \leq F_Y^{-1}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$ où $F_X(t) = P(X \leq t)$ est la fonction de répartition et $F_X^{-1}(t) = P(X > t) = 1 - F_X(t)$ son inverse.

Definition 2.7 Ordre Stop Loss

Un risque X est moins dangereux qu’un risque Y selon l’*ordre stop loss*, $X \leq_{SL} Y$, si $\mathbb{E}(X - t)^+ \leq \mathbb{E}(Y - t)^+$ où $(X - t)^+ = \max(X - t, 0)$ pour tout $t \geq 0$.

En se positionnant dans un environnement multivarié, d’autres ordres doivent être utilisés pour établir qu’un vecteur aléatoire, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est moins risqué que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ avec X_i et Y_i non négatifs pour $1 \leq i \leq n$.

Une première façon de caractériser cette relation d'ordre est le *Conditional Increasing in Sequence* (CIS). Un vecteur aléatoire est dit CIS si :

$$X_i \uparrow_{st} (X_1, \dots, X_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

autrement dit, si $E(\psi(X_i)|X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1})$ est une fonction croissante des variables (x_1, \dots, x_{i-1}) pour toutes fonctions croissantes ψ pour lesquelles l'espérance existe pour $i = 2, \dots, n$.

Un autre concept de dépendance plus fort que l'ordre CIS est l'ordre *Conditional Increasing* (CI) développé par [MS01]. Un vecteur aléatoire \mathbf{X} est dit CI si $\mathbf{X}_\pi = (X_{\pi_1}, X_{\pi_2}, \dots, X_{\pi_n})$ est CIS pour toutes les permutations π de $(1, 2, \dots, n)$, autrement dit, si pour chaque i la relation suivante est respectée :

$$X_i \uparrow_{st} (X_j, j \in \mathbf{J}), \quad \text{pour tout } \mathbf{J} \subset (1, \dots, n) \text{ et } i \notin \mathbf{J}. \quad (2.5)$$

Comme le mentionne [MS01], une propriété intéressante de cet ordre est qu'une combinaison linéaire non-négative de variables respectant l'ordre CI, préserve l'ordre CI (pour une démonstration voir [MS01], Corollaire 4.6). Autrement dit,

$$\begin{aligned} E(\psi(X_i)) &\leq E(\psi(Y_i)), \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ alors} \\ E(\psi(\sum_{i=1}^n c_i X_i)) &\leq E(\psi(\sum_{i=1}^n c_i Y_i)), \quad \forall c_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Enfin, le concept de *Multivariate Totally Positive of Order 2* (MTP2) est défini par [KR80] :

$$f(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})f(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \geq f(\mathbf{X})f(\mathbf{Y}), \quad (2.7)$$

où les opérateurs \vee et \wedge dénotent par paire de composants, le maximum $(\max(x_i, y_i), \forall i = 1, \dots, n)$ et le minimum $(\min(x_i, y_i), \forall i = 1, \dots, n)$, respectivement. Parmi ces trois ordres, la relation suivante est vérifiée : $MTP2 \implies CI \implies CIS$.

Démonstration. Comme MTP2 est invariant par permutation, si un vecteur aléatoire \mathbf{X} est MTP2, alors \mathbf{X}_π est CIS pour toutes les permutations π , alors \mathbf{X} est CI. \square

Une autre façon de définir le concept MTP2 est que $\log f(\mathbf{X})$ est une fonction supermodulaire. Une fonction supermodulaire est une notion importante puisqu'il peut être établi que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est moins risqué que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ si les somme des risques $f(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$ et $f(\mathbf{Y}) = Y_1 + \dots + Y_n$ sont ordonnées suivant *stop*

loss, $f(\mathbf{X}) \leq_{SL} f(\mathbf{Y})$. Une condition suffisante pour cela est l'ordre supermodulaire, voir [Tch80].

Definition 2.8 Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est dit plus petit qu'un vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ selon l'ordre supermodulaire, défini par $\mathbf{X} \preceq_{SM} \mathbf{Y}$, si $E(f_m(\mathbf{X})) \leq E(f_m(\mathbf{Y}))$ pour toute fonction supermodulaire f_m pour laquelle l'espérance existe. Une fonction $f_m : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ est appelée supermodulaire si

$$f_m(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) + f_m(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \geq f_m(\mathbf{X}) + f_m(\mathbf{Y}). \quad (2.8)$$

Si f_m est deux fois différentiable, alors f_m est supermodulaire si et seulement si :

$$\frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, \quad (2.9)$$

pour chaque $1 \leq i < j \leq n$. Une variante de la fonction supermodulaire est la fonction *directionnally convex* définie par :

$$\frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, \forall i \leq j. \quad (2.10)$$

Si les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont comparables par rapport à l'ordre supermodulaire (\leq_{SM}) alors nécessairement les marginales des variables aléatoires sont identiques, autrement dit $X_i = \text{dist } Y_i, \forall i$.

Un résultat plus générale de [BM98] et [JMT04] montre que l'ordre *stop loss* est compatible avec toutes les mesures de risque convexe et invariante en loi, voir également [BR06]. Ainsi.

$$\mathbf{X} \leq_{SM} \mathbf{Y} \Rightarrow \rho(\mathbf{X}) \leq \rho(\mathbf{Y}),$$

où ρ est une mesure de risque convexe et invariante en loi.

De manière intuitive la notion de supermodularité peut-être interprétée comme suit : soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires représentant les n pertes subies par une compagnie d'assurance, et f_m représente la perte agrégée de ces pertes individuelles. La supermodularité de la fonction f_m signifie que l'influence sur la somme des risques d'une augmentation d'une seule perte sera d'autant plus importante que les autres pertes le sont. Dans la littérature, la notion de supermodularité est aussi appelée superadditivité. Pour une présentation détaillée voir [BM98], [MS01] et [Rus04].

L'extension de l'axiome de monotonie à un environnement multivarié nécessite d'avoir recours à des ordres faisant intervenir les relations entre les composants du vecteur. Avec

la méthode qui a été retenue pour caractériser la mesure de risque multivariée (voir la Formule (2.3)), la notion d'ordre supermodulaire est fondamentale et permet de répondre aux exigences imposées par le régulateur sur la façon de différencier le besoin en capital entre deux portefeuilles (voir le paragraphe 5.232.C dans [CEI09i]).

3.2 Comonotonie dans un cadre multivarié

En reprenant la notion de sous additivité évoquée précédemment, il paraît légitime de s'attendre à ce que la mesure de risque d'une somme de variables aléatoires soit inférieure à la somme des mesures de risque des variables aléatoires. Cette notion essentielle pour l'activité d'assurance a néanmoins une limitation, en effet dans une situation où les variables aléatoires sont parfaitement reliées entre elles de manière positive, la mesure de risque de la somme devrait être égale à la somme des mesures de risque. Cette notion revêt certaines difficultés dès lors que l'environnement est multivarié (voir [Sch89] et [Yaa87]).

Par exemple, une difficulté résidera dans le fait de savoir à quel niveau s'applique la comonotonie : intra ou inter vecteur. Ou bien encore de pouvoir statuer sur l'existence du vecteur comonotone et l'unicité de sa distribution.

Avant d'aborder la comonotonie dans un cadre multivarié, le cadre bivarié sera rappelé. Les notations et formulations utilisées sont empruntées à [EGH] et [PS10].

3.2.1 Comonotonie bivariée

Definition 2.9 Comonotonie bivariée.

L'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est dit comonotone si il est totalement ordonné, c'est à dire que pour tout couple $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$ soit $(x_1, y_1) \succeq (x_2, y_2)$, soit $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$.

Les caractérisations suivantes d'un vecteur bivarié comonotone dans l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont équivalentes :

- $F_{(X,Y)}(x, y) = \min(F_X(x), F_Y(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $(X, Y) =^{dist} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U))$ où U suit une distribution uniforme $[0,1]$.
- Il existe une variable aléatoire Z et des fonctions non décroissantes f_1, f_2 tel que : $(X, Y) =^{dist} (f_1(Z), f_2(Z))$.

Comme introduit, la transposition de cet axiome dans un cadre multivarié nécessite de préciser le niveau auquel s'applique la comonotonie additivité.

3.2.2 Comonotonie intra vecteur

Definition 2.10 Comonotonie intra vecteur (“strongly-comonotone”) L’ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est dit “strongly-comonotone” si il est totalement ordonné, c’est à dire que pour tout couple $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in \Gamma$ soit $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \succeq (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$, soit $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \preceq (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$.

Comme l’espace \mathbb{R}^n n’est plus totalement ordonné quand $n > 1$, l’ordre “strongly-comonotone” nécessite des contraintes sur la distribution F_X et F_Y , puisque un vecteur aléatoire “strongly-comonotone” (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) a des distributions marginales de la forme :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \min(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (2.11)$$

$$F_Y(y_1, \dots, y_n) = \min(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_n}(y_n)), \quad (2.12)$$

quelques soient les distributions univariées F_{X_1}, \dots, F_{X_n} et F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n} .

Théorème 3. Soit \mathbf{X} et \mathbf{Y} , deux vecteurs aléatoires ayant pour fonctions de répartitions respectives, F_X et F_Y de la forme des Formules (2.11) et (2.12), alors les caractérisations suivantes d’un vecteur comonotone multivarié sont équivalentes :

- Le vecteur (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est “strongly-comonotone”
- $F_{(X,Y)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \min(F_X(x_1, \dots, x_n), F_Y(y_1, \dots, y_n)),$
 $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \stackrel{dist}{=} ((F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)), (F_{Y_1}^{-1}(U), \dots, F_{Y_n}^{-1}(U)))$ où U suit une distribution uniforme $[0, 1]$.
- Il existe une variable aléatoire Z et des fonctions non décroissantes f_1, \dots, f_n et g_1, \dots, g_n tel que : $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \stackrel{dist}{=} ((f_1(Z), \dots, f_n(Z)), (g_1(Z), \dots, g_n(Z)))$.

Cette définition donne une extension assez intuitive du cas bivarié de la comonotonicité au cas multivarié, mais cette extension est assez restrictive puisque la distribution jointe du vecteur est imposée. Afin de relâcher cette contrainte, la notion de comonotonicité inter vecteur sera présentée.

3.2.3 Comonotonie inter vecteur

Soit $A_i, B_i, i \in \mathbb{R}$ des sous ensembles mesurables.

Definition 2.11 Comonotonie inter vecteur (“ π -comonotone”)

L’ensemble $\Gamma \subset (\times_{i=1}^n A_i) \times (\times_{i=1}^n B_i)$ est dit “ π -comonotone” si pour $i \in D$, $\pi_i(\Gamma)$ est comonotone pour un sous ensemble de $A_i \times B_i$.

Si deux vecteurs aléatoires \mathbf{X}, \mathbf{Y} sont “ π -comonotone”, alors ses distributions marginales ont une copule commune (voir le lemme 3.6 dans [59] pour une démonstration).

Cette définition implique qu'un vecteur "π-comonotone" a des distributions marginales de la forme :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (2.13)$$

$$F_Y(y_1, \dots, y_n) = C(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_n}(y_n)), \quad (2.14)$$

quelques soient les distributions univariées F_{X_1}, \dots, F_{X_n} et F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n} et la copule C . Pour une présentation des copules voir le Chapitre 4.

Théorème 4. *Soit \mathbf{X} et \mathbf{Y} , deux vecteurs aléatoires ayant pour fonctions de répartition respectives, F_X et F_Y de la forme des Formules (2.13) et (2.14), alors les caractérisations suivantes d'un vecteur comonotones multivarié sont équivalentes :*

- *Le vecteur (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est "π-comonotone"*
- $F_{(X,Y)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = C(\min(F_X(x_1), F_Y(y_1)), \dots, \min(F_X(x_n), F_Y(y_n))), \forall((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
- $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \stackrel{dist}{=} ((F_{X_1}^{-1}(U_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(U_n)), (F_{Y_1}^{-1}(U_1), \dots, F_{Y_n}^{-1}(U_n)))$
où $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ est un vecteur aléatoire ayant une distribution C .
- *Il existe une variable aléatoire $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ et des fonctions non décroissantes f_1, \dots, f_n et g_1, \dots, g_n tel que :*
 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \stackrel{dist}{=} ((f_1(Z_1), \dots, f_n(Z_n)), (g_1(Z_1), \dots, g_n(Z_n)))$.

Bien que la notion de "π-comonotonicité" soit moins restrictive que la notion "strongly-comonotonicité", celle-ci reste limitative car s'appliquant sur des vecteurs ayant des marginales à structure de dépendance identique.

D'autres formes de comonotonicité existent (voir [EGH] et [PS10] pour une revue), celles-ci sont plus générales et ne garantissent ni l'existence du vecteur comonotone, ni l'unicité de sa distribution puisque dans les autres cas, la comonotonie est envisagée sur un espace seulement partiellement ordonné.

Néanmoins, comme la finalité est de tester l'approche retenue par Solvabilité 2 par rapport à ces différents cas, la relation d'ordre démontrée par [PS10] permet de garantir que si la méthode est comonotone intra ou inter vecteur, alors elle sera comonotone additive pour les autres cas de figures.

Cette présentation de la comonotonie dans un cadre multivarié laisse d'ores et déjà apparaître la proximité avec la représentation de l'axiome de sous additivité en multivarié,

puisque son application sur un vecteur nécessitera de préciser le type de sous additivité recherchée : intra ou inter vecteur.

Au travers de cette section, il apparaît que la caractérisation d'une mesure de risque appliquée sur un vecteur, nécessite de spécifier la distribution jointe. Les conditions associées sont fortes (dans le cas de la comonotonie intra vecteur, la distribution jointe est imposée) et spécifiques à la compagnie. Ainsi s'esquisse déjà une première conclusion : les critères servants de base à une mesure de risque acceptée par les acteurs de marché ne seront pas appropriés pour une formule standard.

4 Inconsistance de la mesure de risque

Parmi toutes les mesures de risque existantes (volatilité, VaR, Expected ShortFall, . . . , voir [DB06]), le régulateur détermine le capital (SCR) pour chaque sous module de risque dans la formule standard comme la différence entre la Value at Risk à 99.5% à l'horizon d'un an et la moyenne appliquée sur les pertes du sous module.

Au delà des problèmes théoriques liés au non-respect de l'axiome de sous additivité énoncé dans [ADEH99], le recours à une $VaR_{99.5\%}$ pourrait induire un comportement opportuniste de la part des risk managers qui pourraient être tentés de limiter le recours à des mécanismes de transfert de risque uniquement jusqu'à ce niveau de sécurité. L'exemple le plus évident à ce sujet est la couverture contre des événements naturels où la structuration des programmes de réassurance est déterminée par la période de récurrence du phénomène climatique.

Cette possible stratégie de management guidée par le choix du régulateur de retenir cet indicateur au risque, exposera alors le risk manager à l'erreur de modèle dû à la sensibilité entourant l'estimation d'un quantile comme le montre les différents travaux de [GLS00] et [GL06].

Cette mesure de risque est appliquée à chaque noeud de l'arborescence des risques de la Figure 1.8, puis elles font l'objet d'une consolidation à chacun des niveaux supérieurs. La méthode utilisée dans Solvabilité 2 pour les agréger est rappelée (Formule (1.1)) dans le cas du calcul au niveau global de la compagnie :

$$BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)}.$$

Comme il a été mentionné au Chapitre 1 - Section 3.4.2, pour définir un besoin en capital

qui soit l'équivalent d'une situation ne se produisant que dans 0.5% des cas, le CEIOPS a eu recours à deux approches 1 :

- Une approche basée sur des scénarios.
- Une approche basée sur des facteurs.

Selon la définition donnée à la Section 2.1, une VaR se définit en référence à un percentile d'une distribution théorique ou empirique. Or, lorsque le régulateur fait référence à cette notion de VaR deux cas surviennent :

- Pour certains sous modules de risque, le scénario correspond à une VaR obtenue sur une distribution empirique. Le CEIOPS applique cette méthode pour le sous module de risque "Action" (voir [CEI09]) : la distribution empirique d'un indice financier (le MSCI) est utilisée, puis la $VaR_{99.5\%}$ sur un horizon d'un an est calculée en utilisant des données mensuelles depuis 1970 pour définir le scénario.
- Pour d'autres sous modules de risque, le régulateur assimile la VaR soit à un scénario, soit à un facteur (par exemple pour le sous module du risque "Cat" dans la classe de risque "Non-vie"). Dans ce cas faire référence à une VaR à 99.5% n'a pas grand sens. Il serait sans doute plus judicieux de parler directement de scénario, voire de "stress test" à l'image des méthodes et scénarios appliqués par les agences de notation (voir Chapitre 1 - Section 2.2).

Autrement dit la Formule (1.1) va consister à agréger des marginales dégénérées où seul un point représente l'ensemble de la distribution. Cela rend le problème à la fois original mais aussi difficile à appréhender, puisque agréger des $VaR_{99.5\%}$ conduit à obtenir une structure de dépendance où les lois sont discrètes. Ceci implique une absence d'unicité mais aussi entraîne des interrogations sur la signification d'avoir de la dépendance entre des quantités non aléatoires. Comme cela a été exposé aux sections précédentes, une représentation probabiliste nécessite d'avoir des distributions des risques marginaux ainsi qu'une distribution jointe à l'image de la Formule (2.3). En admettant que chacun des différents scénarios / facteurs estimés par le régulateur correspondent isolément à une situation survenant avec une probabilité de 0.5%, l'artefact de la Formule (1.1) ne garantit en rien la cohérence de ces différentes valeurs au niveau de la compagnie.

Si l'objectif du régulateur était de montrer comment le capital global au niveau de la compagnie se ventile entre les différentes classes et sous modules de risque lors de la situation extrême qui surviendra avec une probabilité de 0.5%, il aurait été préférable d'utiliser une approche basée sur la méthode Euler (voir ([Den01], [Kal05], [Tas08]) qui détermine la contribution marginale de chaque risque conditionnellement au fait que la valeur globale de l'entreprise prenne une certaine valeur. Dans le cadre de Solvabilité 2 cela reviendrait à calculer $E(X_i|X = VaR_{1-\alpha}(X))$ où X_i représente l'un des risques de la compagnie et X , le portefeuille total. Même une approche en conditionnant par

rapport aux facteurs de risque et non pas les risques eux-mêmes est possible comme le démontre [RS10] et [Tas99]. L'agrégation de capitaux par classe de risque nuit à une analyse scientifique de la mesure de risque.

De manière similaire au point évoqué au Chapitre 1 - Section 3.6 sur la modification de ces corrélations en cas de changement dans la mesure de risque utilisée pour un modèle interne partiel, qu'advient-il des coefficients si les scénarios / facteurs utilisés sont modifiés ? Est-ce que cela modifiera également les coefficients ? Et si oui à quel niveau ? Lorsque le régulateur applique la Formule (1.1) au niveau des classes de risques, il agrège des mesures de risque représentant des $VaR_{99.5\%}$ estimées sur des sous modules de risque, donc il détermine $VaR_{99.5\%}$ de la classe de risque conditionnellement aux $VaR_{99.5\%}$ des sous modules de risque de cette classe. Apporter une modification sur l'un des coefficients amènera à changer les coefficients se trouvant aux niveaux supérieurs. En prenant l'exemple du sous module de risque "Action", pour lequel le taux représentant la baisse du cours des actions a baissé de 40% à 32% entre le QIS2 et le QIS3 (voir [CEI06] et [CEI07b]), le coefficient de corrélation des capitaux entre le sous module de risque "Taux d'intérêt" et le module "Action" n'a pas été modifié, alors que le coefficient de corrélation entre le module "Action" et le module "Immobilier" a été revu à la hausse. Dans le même temps, le choc appliqué au sous module de risque "Immobilier" n'a pas été modifié, mais celui du risque de taux, oui.

Avant même d'aborder la démonstration théorique de l'inconsistance de la méthode d'agrégation proposée par le régulateur, la simple observation de l'évolution des paramètres montre le caractère illogique sous tendant à cette formule, et que la référence à la notion de probabilité de ruine, présentée comme garante d'une approche scientifique, n'est en rien souhaitable dès lors que les paramètres sont définis de manière arbitraire.

Dans une première sous section, il sera démontré que l'approche hiérarchique retenue par le régulateur fait de la formule standard un outil incapable de remplir son rôle de comparaison entre assureurs. Tandis que dans une deuxième sous section, malgré les problèmes de représentation probabiliste évoqués précédemment, les différents axiomes vus à la Section 2 seront testés sur la mesure de risque multivariée utilisée par le régulateur, afin de mettre en avant les faiblesses de celle-ci d'un point de vue axiomatique.

4.1 Non-universalité de la mesure de risques

Dans le cadre de la formule standard, le régulateur a utilisé une approche "Bottom-up" pour agréger les risques, autrement dit les besoins en capitaux des risques sont d'abord constitués en sous module, puis ces sous modules représentant des risques, tels que le risque de mortalité par exemple, sont agrégés par classe de risque comme le risque de

souscription vie par exemple (voir la Figure 1.8).

Cette logique de constitution du capital au niveau d'une compagnie est communément utilisée par nombre d'instances : des acteurs du secteur privé, par exemple les agences de notations (voir Chapitre 1 - Section 2.2) ou bien des instances de régulation (cf le "Risk Based Capital" aux Etats-Unis, voir [San05]).

Cette méthode d'agrégation présentée à la Formule (1.1) du Chapitre 1 - Section 3.4.2, qui sera appelée " Règle de la Racine Carrée" s'applique à l'ensemble des acteurs qui auront recours à la formule standard pour déterminer les exigences du capital réglementaire.

Comme cette formule s'appliquera à toute l'industrie européenne de l'assurance, il est normal de supposer que les résultats pourront être comparés entre les compagnies et qu'ainsi il sera possible de dire si une compagnie est moins bien capitalisée, mieux protégée en réassurance, si sa politique de souscription est plus rigoureuse, etc . . . puisque seuls les besoins en capitaux insérés dans la formule seront différents, la structure d'agrégation étant identique.

Or comme le démontre [Fil09], cette supposition est infondée et seule une approche où tous les sous modules sont directement agrégés dès la racine de l'arborescence permet d'avoir une structure de dépendance commune à tout le marché. Sinon, suivant celle utilisée par le régulateur, la différence dans les résultats observés seront la conséquence des différences des besoins en capitaux des sous modules, mais également des différences dans la structure de dépendance.

Pour avoir une structure qui consolide les résultats à des niveaux intermédiaires, telle celle prévue dans Solvabilité 2 et qui soit identique pour tous les acteurs, les matrices permettant d'agréger les capitaux au sein de ces niveaux intermédiaires doivent satisfaire certaines conditions.

Ces conclusions seront illustrées par l'exemple suivant : soit une compagnie d'assurance ne souscrivant que deux classes de risque, \mathbf{X} et \mathbf{Y} . Les sous modules présents dans ces classes sont définis ainsi :

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \text{ et } \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n), \quad (2.15)$$

où

- \mathbf{X} représente l'ensemble des besoins en capitaux des "m" sous modules de la classe de risque \mathbf{X}
- \mathbf{Y} représente l'ensemble des besoins en capitaux des "n" sous modules de la classe de risque \mathbf{Y}

En appliquant la méthode d'agrégation des risques dans Solvabilité 2, les besoins en capitaux (SCR) pour ces deux classes de risque sont :

$$SCR_X = \sqrt{\mathbf{X}^T * A * \mathbf{X}} \text{ et } SCR_Y = \sqrt{\mathbf{Y}^T * B * \mathbf{Y}}, \quad (2.16)$$

où

- A est une matrice m x m
- B est une matrice n x n
- SCR_X est le besoin en capital de la classe de risque \mathbf{X} .
- SCR_Y est le besoin en capital de la classe de risque \mathbf{Y} .

Typiquement, les matrices A et B sont communiquées par le régulateur, voir [CEI08].

Puis, ces deux classes de risque sont agrégées au niveau de la compagnie via la formule suivante :

$$BSCR = \sqrt{(SCR_X)^2 + 2 * R * SCR_X * SCR_Y + (SCR_Y)^2}, \quad (2.17)$$

où

- $BSCR$ est le besoin en capital au niveau de la compagnie.
- R est un coefficient représentant la corrélation existant entre les besoins en capitaux des classes de risque X et Y. Ce coefficient est également communiqué par le régulateur.

Si maintenant au lieu d'agrégé les besoins en fonds propres au travers de niveaux intermédiaires, ceux-ci étaient agrégés directement au niveau des sous modules, il faudrait considérer une matrice M qui s'appliquerait à tous les sous modules. Cette matrice M serait définie par : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$.

C est une matrice de taille m * n représentant les corrélations entre les besoins en capitaux des sous modules de la classe de risque \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Cette matrice M reflète la dépendance existante entre tous les sous modules de la compagnie et n'est ni fonction du choix de la logique d'agrégation des risques (tous les risques étant agrégés dès la racine de l'arborescence des risques), ni de la composition du portefeuille des compagnies.

En utilisant cette matrice pour déterminer le besoin en capital au niveau de la compagnie, la formalisation matricielle est la suivante :

$$BSCR = \sqrt{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T * M * (\mathbf{X}, \mathbf{Y})} \quad (2.18)$$

En égalisant les Formules (2.17) et (2.18), il ressort que :

$$(\mathbf{X})^T * C * \mathbf{Y} = R \sqrt{\mathbf{X}^T * A * \mathbf{X}} \sqrt{\mathbf{Y}^T * B * \mathbf{Y}}. \quad (2.19)$$

Alors que les matrices A et B ainsi que le coefficient R sont fournis par le régulateur et s'appliquent à tous les acteurs du marché, de manière à avoir une structure de dépendance commune au niveau européen, l'agrégation de tous les sous modules via la matrice M indique que la comparaison n'est plus possible. En effet, en réarrangeant la Formule (2.19), il vient que :

$$R = R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\mathbf{X}^T * C * \mathbf{Y}}{\sqrt{\mathbf{X}^T * A * \mathbf{X}} \sqrt{\mathbf{Y}^T * B * \mathbf{Y}}}. \quad (2.20)$$

Alors que la matrice M est indépendante de la stratégie commerciale de la compagnie puisqu'elle n'est dépendante ni de X ni de Y, le coefficient R dépend de la composition des risques de l'entreprise et lui est donc spécifique. Ainsi, alors que le régulateur a privilégié une approche didactique de la constitution du capital réglementaire en détaillant par niveaux successifs les classes de risque consommatrices de capital, il a rendu cette méthode non universelle, allant ainsi à l'encontre du but recherché de la formule standard.

Pour que la formule standard soit comparable entre tous les acteurs, il aurait fallu préconiser également la matrice des corrélations inter sous modules de risque. Sous réserve qu'une telle matrice M existe, puisque dans le cadre du QIS4, cette matrice serait de taille 19 * 19 pour une entreprise d'assurance soumise à l'ensemble des sous modules de risque présents dans Solvabilité 2.

La seule possibilité pour que les deux méthodes (agrégation directe de tous les sous modules de risque ou par niveau intermédiaire au travers des classes de risque) donnent le même résultat est que $C = R J_{m*n}$, où J_{m*n} est une matrice de taille (m * n) avec des 1 à chacun de ses composants (pour une démonstration voir [Fil09]). Dans ce cas, deux situations sont envisageables :

- Soit $R=0$
- Soit $A = J_{m*m}$ et $B = J_{n*n}$

Autrement dit, soit les classes de risque ne sont pas corrélées ($R=0$), soit les sous modules de risque au sein des classes de risque sont parfaitement corrélés. Une autre façon de lire ces conditions est la suivante : plus la position dans l'arborescence des risques est proche du niveau global, moins il y a de corrélations entre les risques, puisque la corrélation introduite par les matrices A et B intervient avant le coefficient R.

Naturellement comme A,B et R sont communiqués par le régulateur, il est possible de déterminer la matrice C à partir de ces valeurs et ainsi de créer une matrice pouvant s'appliquer sur tous les sous modules de risque. La matrice ainsi obtenue n'aura pas de caractère universel. Comme elle n'est pas unique, il existe plusieurs méthodes pour la paramétrer, seule la méthode donnant les plus faibles écarts entre les coefficients au sein de la matrice C sera communiquée ci-après, pour une revue des autres méthodes, voir

[Fil09]. La méthode minimisant les écarts entre les coefficients présents dans la matrice M est :

$$C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = R \frac{\sqrt{\mathbf{X}^T A \mathbf{X}} \sqrt{\mathbf{Y}^T B \mathbf{Y}}}{\|\mathbf{X}\|^2 \|\mathbf{Y}\|^2} \mathbf{X} \mathbf{Y}^T \quad (2.21)$$

où $\|\mathbf{Y}\| = \sqrt{\text{tr}(Y Y^T)}$.

Dans la Formule (2.21), le ratio $\frac{\sqrt{\mathbf{X}^T A \mathbf{X}}}{\|\mathbf{X}\|^2}$ représente non pas un gain en diversification mais une perte en diversification, puisqu'au numérateur est intégrée la matrice de corrélation de la classe de risque \mathbf{X} (représentant la diversification entre les sous modules de risque pour la classe de risque \mathbf{X}) alors qu'au dénominateur figure le cas où il y a indépendance.

Ainsi la Formule (2.21) peut se lire comme le produit des pertes en diversification des classes de risque \mathbf{X} et \mathbf{Y} par la corrélation entre ces deux classes de risque, le tout appliqué au produit des classes de risque \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Dans cette sous-section a été exposé la non-universalité de la formule standard, puisqu'il aurait fallu que les corrélations spécifiées aux niveaux supérieurs (classes de risque et niveau global de la compagnie) tiennent compte des corrélations inter sous modules de risque, afin d'avoir une vision transitive des corrélations entre les sous modules de risque (voir la remarque du Chapitre 1 - Section 4.3).

4.2 De la pertinence de la mesure des risques dans Solvabilité 2

Dans cette sous section, les différents axiomes précédents seront appliqués sur la mesure de risque utilisée par le régulateur. L'axiome de convexité étant moins fort que les axiomes d'homogénéité positive et de sous additivité, la validation de ces derniers induira celle de cet axiome.

Pour comprendre pourquoi l'axiome d'invariance par translation n'est pas vérifié, il faut se rappeler que le CEIOPS conçoit le SCR comme l'écart entre $VaR_{1-\alpha}$ et la moyenne du risque. L'ajout d'un montant déterministe ne modifiera pas le SCR de ce même montant. Pour s'en convaincre, il suffit de voir le calcul suivant :

$$\begin{aligned} SCR_\alpha(X + a) &= (VaR_{1-\alpha}(X + a) - E(X + a)) = \\ (VaR_{1-\alpha}(X) + a - E(X) - a) &= SCR_\alpha(X) \end{aligned}$$

En reprenant le calcul du besoin en capital au niveau de la compagnie, $BSCR_\alpha(\mathbf{X})$, alors :

$$BSCR_\alpha(X_1 + a_1, \dots, X_n + a_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_\alpha(X_i + a_i) SCR_\alpha(X_j + a_j)}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)} = BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_n)$$

Naturellement, en se positionnant du point de vue comptable d'une compagnie, ajouter une charge déterministe au passif du bilan, augmentera le besoin en capital de ce même montant du fait de la propriété d'invariance par translation de la VaR :

$$SCR_{\alpha}(X + a) + E(X + a) = VaR_{1-\alpha}(X + a)$$

Cet écart de comptabilisation n'est pas sans introduire certains décalages comme ceux évoqués au Chapitre 1 - Section 3.6 concernant les modèles internes partiels. Ceux-ci utiliseront à la fois des résultats issus de la formule standard (différence entre VaR et la moyenne du risque) et des résultats issus des modèles internes (la probabilité de ruine est calculée sur la distribution des pertes et profits). Le régulateur introduit donc une forme de distorsion de concurrence, puisque les compagnies qui utiliseront des modèles internes pourront faire valoir leurs éventuels résultats techniques positifs (prime > sinistres + frais) et ainsi dégager un gain en capital à ce titre, contrairement aux compagnies utilisant la formule standard. Le régulateur peut justifier cette approche par une incitation au développement d'un modèle interne, mais comme expliqué au Chapitre 1 - Section 2.6, ce processus est couteux et sera réservé aux entreprises de tailles importantes. Ainsi, cette distorsion de concurrence pourrait conduire à l'affaiblissement des petites entités.

La vérification de l'axiome d'homogénéité positive ne pose pas de difficulté majeure. Cette propriété est vérifiée pour la VaR et l'espérance, ainsi que pour la méthode d'agrégation des risques, qui est une somme pondérée des besoins en capitaux. Les calculs donnent :

$$SCR_{\alpha}(\lambda X) = VaR_{1-\alpha}(\lambda X) - E(\lambda X) = \lambda SCR_{\alpha}(X)$$

En introduisant ce résultat dans $BSCR(\mathbf{X})$, il vient que :

$$BSCR_{\alpha}(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(\lambda X_i) SCR_{\alpha}(\lambda X_j)}$$

$$\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)} = \lambda BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_n)$$

La vérification des axiomes de comonotone additivité et de sous additivité seront traités conjointement.

Comme expliqué à la Section 3.2, la première précision à apporter est celle du contexte dans lequel s'appliquent ces axiomes. S'agit-il de regarder la diversification / comonotonie intra compagnie (ce qui intéressera la compagnie) ou bien de diversification / comonotonie inter compagnie (ce qui suscitera l'intérêt du régulateur pour évaluer le risque systémique)? Afin de vérifier ces axiomes dans le cas "intra", il suffit de s'arrêter sur la méthode d'agrégation des risques qui consiste en une somme pondérée des besoins en capitaux. En considérant l'agrégation des classes et sous modules de risque via la Formule (1.1), comme $\theta_{ij} \leq 1, \forall(i, j)$, alors

$$BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)} \leq \sum_{i=1}^n SCR(X_i)$$

La partie droite de l'inégalité représentant le cas de comonotone additivité. L'axiome de sous-additivité intra compagnie est accepté, mais pas celui de comonotone additivité, sauf dans le cas où les coefficients $\theta_{ij} = 1, \forall(i, j)$ pour toutes les classes et sous modules de risque. Pour ce qui est de la sous-additivité et de la comonotonie "inter" compagnie, comme la définition des besoins en capitaux des sous modules de risque repose sur deux approches :

- Soit sur l'application d'un scénario pour plusieurs sous modules (action, immobilier, ...).
- Soit sur des facteurs (par exemple pour le sous module de risque santé).

En se basant sur la définition du SCR de chaque sous module de risque, l'axiome de comonotonie "inter" est satisfait pour chaque sous module, car ce seront les mêmes scénarios / facteurs qui s'appliqueront à toutes les compagnies. Une autre manière de l'illustrer serait de considérer que ces scénarios / facteurs correspondent effectivement à une VaR, et d'utiliser la propriété de comonotone additivité de la VaR :

$$SCR_{\alpha}(X_{i1} + X_{i2}) = VaR_{1-\alpha}(X_{i1} + X_{i2}) - E(X_{i1} + X_{i2}) =$$

$$VaR_{1-\alpha}(X_{i1}) - E(X_{i1}) + VaR_{1-\alpha}(X_{i2}) - E(X_{i2}) = SCR_{\alpha}(X_{i1}) + SCR_{\alpha}(X_{i2}).$$

où X_{i1} et X_{i2} représente les sous modules de risque i pour deux compagnies d'assurance différentes. L'axiome de sous additivité étant définis par la relation " \leq ", celui-ci est également satisfait, même si dans le cadre de la réforme Solvabilité 2 la relation est saturée (" $=$ "). La prescription de scénarios / facteurs par le régulateur amène à réfléchir sur la notion de diversification, puisque tous les acteurs étant soumis à la même situation, il n'y aura pas de diversification. De par son choix d'approche, le régulateur considère que ce qui mettra en péril la solvabilité des assureurs sera un risque systémique puisque tous

les acteurs devront se couvrir pour un même risque, quand bien même celui-ci ne reflétera pas la véritable situation mettant en faillite l'une ou l'autre des compagnies.

Ainsi, même si un scénario est une mesure de risque cohérente, son application par le régulateur n'est pas forcément très pertinente.

La vérification de l'axiome de monotonie n'est pas possible en l'état puisqu'il faudrait appliquer l'ordre supermodulaire sur les besoins en capitaux des classes et sous modules de risque. Mais celui-ci s'applique sur des vecteurs aléatoires et non pas sur des constantes. Malgré cela pour démontrer que la mesure de risque multivariée employée par le régulateur ne satisfait pas aux axiomes communément acceptés par le monde académique et professionnel, il sera procédé au remplacement des besoins en capitaux issus des classes et sous modules de risque par des variables aléatoires. Ainsi :

$$BSCR_{\alpha}(X_1, \dots, X_n) = f_m(\mathbf{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} x_i x_j}$$

où $(x_1, \dots, x_n) = (SCR_{\alpha}(X_1), \dots, SCR_{\alpha}(X_n))$. De par la condition posée à la Section 3.1, il vient que :

$$\frac{\partial^2 f_m(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\theta_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl} x_k x_l}} - \frac{(\sum_{k=1}^n \theta_{ik} x_k)(\sum_{l=1}^n \theta_{lj} x_l)}{(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl} x_k x_l)^{3/2}}$$

Pour être une fonction supermodulaire, il faut que :

$$\theta_{ij} \geq \frac{(\sum_{k=1}^n \theta_{ik} x_k)(\sum_{l=1}^n \theta_{lj} x_l)}{(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl} x_k x_l)} \quad (2.22)$$

Pour $\forall(i, j)$, $\theta_{ij} = 1$ la relation est vérifiée. $\forall(i, j)$, $\theta_{ij} \in [0, 1[$, l'axiome n'est pas satisfait. Ainsi, pour que la mesure de risque de Solvabilité 2 respecte l'axiome de monotonie (appliqué au cas où les besoins en capitaux sont considérés comme des variables aléatoires), les coefficients de corrélations devraient tous être égaux à 1, ce qui correspondrait au cas de la comonotonie intra vecteur.

Une autre façon de démontrer le non respect de cet axiome est de se remémorer la remarque faite au Chapitre 1 - Section 3.4.2, il y était mentionné que la "Règle de la Racine Carrée" était justifiée dans le cas où les classes de risque suivaient des distributions normales, ainsi la somme des risques correspondait à la volatilité d'une somme de risques normalement distribués (voir [San05]). Or, la volatilité est une mesure de risque qui ne respecte pas l'axiome de monotonie.

L'axiome de convexité est un axiome moins fort que les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité, qui sont satisfait, la démonstration de cet axiome ne sera pas abordé.

5 Conclusion de la mesure de risque dans Solvabilité 2

Tout d’abord, si les axiomes qui ont été présentés dans ce chapitre sont des axiomes communément acceptés, ils ne constituent pas une finalité en soi.

Il est difficile de se livrer à l’examen de la pertinence d’une formule standard au regard de critères scientifiques. En effet, dans de nombreux cas, les hypothèses sous jacentes ont été modifiées (les SCR des modules de risques étant considérés comme des variables aléatoires, les VaR sont issues de distributions et non pas de valeurs à dire d’expert, ...) pour pouvoir appliquer de manière rigoureuse les différents axiomes.

Malgré ces remarques et même si certains axiomes sont acceptés, de nombreuses critiques peuvent être formulées à l’encontre la mesure de risque d’un point de vue théorique mais également pratique. Certaines d’entre elles sont liées à la façon d’interpréter le SCR dans la formule standard (l’axiome de translation par invariance par exemple). D’autres tiennent à la construction même de la mesure de risque qui utilisent d’autres mesures de risque basées sur des scénarios et des facteurs assimilés à des Value at Risk.

D’une manière générale, le principal reproche pouvant être adressé à la formule standard est justement d’être une formule trop standard. Inévitablement, certains acteurs du marché se sentiront défavorisés (voir le site du CEIOPS et les remarques des assureurs spécialisés dans l’assurance construction ou médicale plus particulièrement) ou ne se retrouveront dans cette façon de mesurer les risques (l’approche par classe de risque ne correspondant pas à une approche intégrée des risques, voir [MKK09]). Mais, parmi les buts de Solvabilité 2 (voir Chapitre 1 - Section 3.1) figurent l’harmonisation et la comparaison des exigences de capital à travers l’Europe. Une fois cette contrainte posée, quelle que soit la méthode utilisée par le régulateur pour mesurer le risque, celle-ci sera imparfaite. Seule une quantification des risques par un modèle interne respectant les précédents axiomes, permettra de combler les lacunes de la formule standard. Cependant, les objectifs de la réforme s’éloigneront tant les modèles internes seront propres à chaque compagnie.

L’approche adoptée (agrégation des besoins en capitaux à des niveaux intermédiaires, sans aucune référence au risque sous jacent) a le mérite de la simplicité et d’être rapide à communiquer, mais il faut se demander si ces avantages valaient le prix d’une évaluation très incorrecte des risques.

Dans ce cas quelle devrait être “LA” formule standard ? Il n’existe pas de réponse universelle à apporter à cette question car même si le régulateur avait retenu une approche “Bottom Up” à partir des modules de risque et non pas des classes de risque, d’autres problèmes liés aux propriétés de la matrice et la pertinence de l’agrégation des besoins en capitaux surviendraient.

Il faut se repositionner dans le référentiel prudentiel actuel, Solvabilité 1, et voir le chemin parcouru depuis l'application d'un simple pourcentage sur les provisions / primes au niveau global de la compagnie.

Comme le disait Paul Valéry : “Ce qui est meilleur dans le nouveau est ce qui répond à un désir ancien”. Solvabilité 1 était critiqué pour son absence de reconnaissance des autres risques, avec Solvabilité 2, un vocabulaire nouveau a fait son apparition : classes et modules de risque. Les inconvénients de cette formule standard doivent être tempérés au regard des progrès réalisés.

Bibliographie

- [Ace02] C. Acerbi. Spectral measures of risk : a coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of banking and finance*, 26 :1505–1518, 2002.
- [ADEH97] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *RISK*, 10 :68–71, November 1997.
- [ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risks. *Mathematical Finance*, 9 :203–228, October 1999.
- [BM98] N. Bauerle and A. Muller. Modeling and comparing dependencies in a multivariate risk portfolios. *Astin Bulletin*, 28(1) :59–76, 1998.
- [BR06] C. Burgert and L. Ruschendorf. Consistent risk measure for portfolio vector. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38 :289–297, 2006.
- [CEI06] CEIOPS. Qis2 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2006.
- [CEI07] CEIOPS. Qis3 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2007.
- [CEI08] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.
- [CEI09a] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2 : article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09b] CEIOPS. Cp - 69 level 2 implementing measures on solvency 2 : Article 109b, equity risk sub module. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [Cha08] A. Charpentier. Value at risk et probabilité de ruine, entre vaccination et banque d'affaires. *Risque*, 76 :103–106, 2008.
- [Con21] N. Condorcet. *Assurances (maritimes)*. Paris - INED, 1921.
- [Cra30] H. Cramer. *On the mathematical theory of risk*. Skandia Jubilee volume, 1930.
- [DB06] K. Dowd and D. Blake. After var : The theory, estimation, and insurance applications of quantile based risk measure. *Journal of Risk and Insurance*, 73 :193–229, Juin 2006.
- [Del00] F. Delbaen. Coherent measures of risks on general probability spaces. *Preprint*, 2000.

- [Den01] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4 :1–34, 2001.
- [Den00] D. Denneberg. Distorted probabilities and insurance premiums. *Method of operations research*, 63 :3–15, 2000.
- [DMG+3a] J. Dhaene, M.Denuit, MJ. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vynke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. *Insurance : mathematics and economics*, 31 :3–33, 2003a.
- [DMG+3b] J. Dhaene, M.Denuit, MJ. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vynke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : Application. *Insurance : mathematics and economics*, 31 :133–161, 2003b.
- [EGH09] I. Ekeland, A. Galichon, and M. Henry. Comonotonic measures of multivariate risks. *Preprint*, 2009.
- [EMS05] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. *Quantitative risk management : concept, techniques and tools*. Risk management : value at risk and beyond, 2005.
- [FG05] M. Frittelli and E. Gianin. Law invariant convex risk measures. *Advances in mathematical economics*, 7 :33–46, 2005.
- [Fil09] D. Filipovic. Multi risk level aggregation. *ASTIN Bulletin*, 2009.
- [FS02] H. Follmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6 :429–447, 2002.
- [GL06] C. Gourieroux and W. Liu. Sensitivity analysis of distortion risk measures. *Document de travail du CREST*, 33, 2006.
- [GLS00] C. Gourieroux, JP. Laurent, and O. Scaillet. Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of empirical finance*, 7 :225–245, 2000.
- [HK04] D. Heath and H. Ku. Pareto equilibria with coherent measures of risk. *Mathematical finance*, pages 163–172, 2004.
- [JMT04] E. Jouini, M. Meddeb, and N. Touzi. vector valued coherent risk measures. *Finance and stochastics*, 4 :531–552, 2004.
- [Kal80] M. Kalkbrener. An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance*, 15 :425–437, 2005.
- [KR80] S. Karlin and Y. Rinott. Class of orderings of measures and related correlation inequalities. *Journal of multivariate analysis*, 10 :467–498, 1980.
- [Kus01] S. Kusuoka. On law invariant coherent risk measures. *Advances in mathematical economics*, 3 :83–95, 2001.
- [Lun19] F. Lundberg. *Teorin for riskmassor*, 1919.
- [MKK09] A. McNeil, G. Kretschmar, and A. Kirchner. The case for fully integrated models of economic capital. *preprint*, 2009.

- [Mor96] JP. Morgan. Risk metrics - technical document. Technical report, JP. Morgan, 1996.
- [MS01] A. Muller and M. Scarsini. Stochastic comparison of random vectors with a common copula. *Mathematics of operations research*, 26 :723–740, November 2001.
- [Mul07] A. Muller. Certainty equivalents as risk measures. *Brazilian Journal of probability and statistics*, 21 :1–12, 2007.
- [PS10] G. Pucetti and M. Scarsini. Multivariate comonotonicity. *Preprint*, 2010.
- [RS10] D. Rosen and D. Saunders. Risk factor contributions in portfolio credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 34 :336–349, 2010.
- [Rus04] L. Ruschendorf. Comparison of multivariate risks and positive dependence. *Journal of applied probability*, 41 :391–406, 2004.
- [San05] A. Sandstrom. *Solvency : Models, assessment and regulation*. Chapman and Hall, 2005.
- [Sch89] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57 :571–587, 1989.
- [Tas99] D. Tasche. Risk contributions and performance measurement. *Report of the Lehrstuhl fr mathematische Statistik, T.U. Mnchen*, 208.
- [Tas08] D. Tasche. Capital Allocation to Business Units and sub portfolio; the Euler Principe. *Preprint*, 208.
- [Tch80] A. Tchen. Inequalities for distributions with given marginals. *The annals of probability*, 8(4) :814–827, 1980.
- [Wan96] S. Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin bulletin*, 26 :71–92, 1996.
- [WH00] J. Wirch and M. Hardy. Distortion risk measures : coherence and stochastic dominance. *Preprint*, 2000.
- [WYP97] S. Wang, V. Young, and H. Panjer. Axiomatic characterisation of insurance prices. *Insurance mathematics and economics*, 21 :173–183, 1997.
- [Yaa87] M. Yaari. The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55 :95–115, 1987.

Chapitre 3

Aspect temporel

1 Introduction

Le nouveau référentiel de Solvabilité 2 met l'accent sur deux points très importants pour une mesure de risque :

- Son niveau
- Son horizon temporel

Le 1^{er} point permet de définir quel doit être le niveau de probabilité pour que la ruine d'une compagnie d'assurance soit considérée comme acceptable par le régulateur. Dans Solvabilité 2, ce niveau est fixé à 99.5%. Autrement dit, le régulateur accepte qu'il y ait 0.5% des cas où une entreprise d'assurance puisse être en faillite. En actuariat cette notion est dénommée Value at Risk (voir [Mor96] pour les premières utilisations en finance).

Après avoir défini le niveau, il reste à définir l'horizon. Le régulateur demande à une entreprise d'assurance d'être solvable dans 99.5% des cas dans l'année à venir.

Même si en apparence la définition de la solvabilité pour un horizon d'un an semble facile à appréhender, différents éléments nécessitent d'être approfondis :

- Faut-il que l'entreprise d'assurance soit solvable à chaque instant jusqu'à l'extinction de l'horizon temporel? Dans le cadre de Solvabilité 2, cela se traduirait par le fait d'être solvable pendant 12 mois consécutifs. Si la solvabilité est estimée le 31 décembre 2009, chaque jour qui passe jusqu'au 31 décembre 2010, le capital doit être supérieur aux exigences de solvabilité. Ou, est-ce que l'entreprise d'assurance doit être solvable dans un an? En appliquant cette approche à l'exemple précédent, cela signifie que l'entreprise d'assurance doit être solvable au 31 décembre 2010, sans forcément tenir compte de la solvabilité entre ces deux dates.

- L’horizon visé est-il représentatif de l’activité exercée et comment est-il pris en compte dans le calcul ?
- Est-ce que cela ne va pas entraîner un besoin en capital qui varie d’une année sur l’autre ?

L’article 100(3) de la Directive Européenne [EC07] permet de répondre à la 1^{ère} question. La traduction française de celui-ci spécifie que le besoin en capital est calculé à l’horizon d’un an. La version anglaise est plus explicite puisqu’il y est fait mention de “ over a one-year period ”. Dans ce cas, il est clair qu’il s’agit d’avoir la marge de solvabilité pendant tout l’horizon spécifié et pas seulement à l’échéance. L’article 102(1) de la Directive précise la fréquence de calcul : celle-ci doit avoir lieu au moins une fois par an.

Deux approches sont prévues par Solvabilité 2 pour estimer le SCR :

- Une formule standard : elle est définie par le régulateur et s’applique à l’ensemble des acteurs.
- Un modèle interne : la compagnie adopte alors une modélisation spécifique et ce pour diverses raisons (appétit pour le risque différent, souscription de risques atypiques, système de gouvernance développé, ...)

Pour les compagnies travaillant sur la base de la formule standard, la différence entre le fait de raisonner à solvabilité permanente pendant 12 mois ou dans 12 mois ne les affectera pas. En effet, seules les données observées au dernier arrêté comptable permettront d’apprécier la solvabilité de l’arrêté à venir.

Par contre les entreprises utilisant un modèle interne devront être à même d’évaluer les exigences de capital lorsque se produira dans l’année un changement de nature à affecter leur solvabilité (voir article 102(2) [EC07]). Malheureusement la fréquence de ces mises à jour ne sont pas détaillées. Le paragraphe 5.158 dans [CEI09i] précise simplement que lorsque des conditions anormales dans l’environnement économique surviendront, la fréquence de calcul doit être augmentée. La fréquence de calcul du MCR sera trimestrielle ; comme le MCR est défini en référence au SCR (voir Chapitre 1 - Section 3.5), afin de ne pas avoir de décalage temporel entre un MCR calculé en fin de premier trimestre N ajusté sur un SCR calculé au 31/12/ $N-1$, la fréquence de calcul devrait être à minima trimestrielle pour le SCR. Une illustration de l’impact du calcul de la fréquence sera donnée dans la Section 2.

La réponse à la 2^{ème} question a donné lieu à un débat entre les professionnels et le régulateur. La réforme rencontre de nombreuses critiques sur l’aspect court terme de sa vision en opposition complète avec l’activité même des assureurs, à savoir des engagements qui s’échelonnent au delà d’une année. Les assureurs vie portent des engagements qui s’étalent sur plusieurs dizaines d’années. Il en est de même pour les assureurs non-vie

pour lesquels, même si les contrats sont annuels, la durée de leur passif excède une année (voir [ACA08] pour un exemple de durée du passif d'un assureur).

Ainsi, alors que la stratégie de placement des assureurs vie est adossée à l'horizon long terme de leur engagement. Le risque action est "stressé" au travers d'un scénario de baisse de 32% du cours des actions pour l'année à venir. Ce scénario est tout à fait crédible (comme l'ont démontré les récents événements de la crise financière) mais la moins value ne se réalisera que si l'entreprise d'assurance liquide ses positions. Si elle a investi dans ce support pour suivre sa stratégie de rendement à long terme, le risque ne se matérialisera qu'au moment du déboucement de ses achats. Dans cet exemple, l'horizon de calcul est inadéquat.

Il en va de même pour les assureurs non-vie avec le risque de provisionnement. Celui-ci est défini par $SCR_{0.5\%}$ de l'ensemble des provisions en valeur économique à la date d'évaluation et pour un horizon d'un an. L'idée est de faire face à la volatilité de l'ensemble des paiements restant à verser dans l'année à venir.

Une raison d'appliquer le $SCR_{0.5\%}$ sur l'ensemble des provisions est que tout changement dans le provisionnement s'applique sur le stock de sinistres. C'est la raison pour laquelle l'article 105(2) de la Directive Européenne fait expressément référence à la notion d'engagement. Seule la variation pour l'année à venir est couverte par le SCR, quand bien même l'assureur doit honorer ses engagements sur tout l'horizon. Les évolutions qui surviendront au delà de l'année à venir seront prises en compte via le calcul de la Risk Margin (RM). Pour rappel la RM (voir Chapitre 1 - Section 3.3) ajoutée au Best Estimate (voir Chapitre 1 - Section 3.3) permet de donner une valeur de marché à un passif d'assurance qui n'est pourtant pas échangeable sur un marché organisé, faute d'existence dudit marché. Dans le cadre d'un transfert de portefeuille d'une entreprise d'assurance vers une autre société, la RM représente la rémunération du capital à immobiliser pour cette autre société, afin d'assumer les engagements d'assurance jusqu'à leur extinction. Pour ce faire, chaque année un besoin en capital à horizon d'un an sera calculé. Puisque la RM rémunère l'immobilisation du capital nécessaire à faire face aux engagements jusqu'à leur échéance, pourquoi ne pas déterminer un besoin en capital sur tout l'horizon plutôt que de le déterminer année par année? Cette approche serait-elle plus prudente?

Pour répondre à ces deux questions, l'approche utilisée sera différente de celles utilisées en "théorie de la ruine" (voir par exemple [GS98], [LP97] et [PL08]), puisqu'il s'agira d'utiliser une mesure de risque qui tienne compte des flux intermédiaires survenant entre la date d'évaluation et la fin de l'horizon. Ainsi, la mesure de risque devra s'adapter à différentes périodes temporelles, autrement dit être multipériodique. Celle-ci sera traitée dans la Section 2 de ce chapitre.

Par ailleurs la définition des règles de solvabilité sur un horizon aussi court terme induira des conséquences sur la variabilité sur le besoin en fond propre. En phase de récession ou de croissance économique, le besoin en capital variera selon la phase du cycle économique où le besoin en capital est estimé. La réforme Solvabilité 2 pourra-t-elle éviter cet effet procyclique ? En phase de croissance, les actifs s'apprécieront ce qui permettra de dégager du capital, alors qu'inversement en phase de récession, la valeur de marché des actifs se dépréciera. Ces résultats volatiles nuiront à la communication financière auprès des investisseurs.

Cet aspect cyclique au niveau macro économique est aussi présent au niveau micro économique, via les cycles de souscription en assurance non-vie. C'est l'une des raisons pour laquelle Solvabilité 2 spécifie un besoin en capital pour le risque de prime.

Comment est-ce que le régulateur a concilié la stabilité du besoin en capital, nécessaire pour une vision long terme de l'activité d'assurance et la cyclicité du marché de l'assurance ? Une des réponses interviendra lors de la dernière section de ce chapitre.

2 Mesure de risque multipériodique

Déterminer une mesure de risque sur une variable aléatoire évoluant dans le temps implique de sortir de l'approche traditionnelle de quantification du besoin en capital où une mesure de risque monopériodique est utilisée (voir Chapitre 2 - Section 2.2 pour une présentation des propriétés des mesures de risques). Pour appréhender le comportement de celle-ci à chaque période de temps, il faut utiliser une mesure de risque qui évolue avec elle, une mesure de risque multipériodique. Ce point fera l'objet de cette première sous-section au travers d'une présentation axiomatique. Celle-ci sera illustrée dans une deuxième sous-section avec un exemple simple, puis dans le contexte de Solvabilité 2 via le calcul de la RM.

2.1 Approche axiomatique

Dans cette section, les propriétés que doit revêtir une mesure de risque multipériodique seront présentées. Cette notion de mesure de risque multipériodique a déjà été étudiée de manière axiomatique dans de nombreux travaux scientifiques (voir [ADE⁺07], [DS06], [Rie04], [Wan00]). Une mesure de risque multipériodique partage des axiomes avec le cas monopériodique. D'autres lui sont spécifiques.

Soit la variable $t = 0, \dots, T$ dénotant une succession de périodes dans le temps, un ensemble fini des états de la nature Ω et X_t est l'information révélée au temps t . La filtration est représentée par $F_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ et $F_0 = (\emptyset, \Omega)$. $D = (D_t)$ représente le

montant des paiements restant à effectuer en date t . D_t est F_t mesurable. L'ensemble des paiements possibles est dénoté par Δ . Soit r le taux d'intérêt (constant). $\rho_t(D, \omega)$ est une mesure de risque multipériodique, autrement dit dans l'état de la nature ω à la date t qui a donné lieu au montant D , la compagnie d'assurance doit disposer d'un montant de capital égal à $\rho_t(D, \omega)$ pour que la position soit acceptable.

En premier sera présenté les axiomes communs aux deux mesures de risque, puis seront présentés les axiomes liés à l'aspect multipériodique de la mesure.

Axiomes communs :

Monotonie Si $D > D'$ alors $\rho_t(D, \omega) > \rho_t(D', \omega)$. Tout comme dans le cas monopériodique, plus le montant restant à payer est important, plus il faut immobiliser de capital.

Translation par invariance ρ_t est invariant par translation par rapport à des flux certains. Soit Z , F_t mesurable, où $D(s, \omega) = Z(\omega)1_\tau(s)$ pour tout $\tau \geq t$. Dans ce cas, pour toutes les positions D' et tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\rho_t(D + D', \omega) = \rho_t(D', \omega) + \frac{Z(\omega)}{(1+r)^{\tau-t}}.$$

Sous additivité Une mesure de risque multipériodique est sous additive si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T-1$ et toutes positions $(D, D') \in \Delta$, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_t(D + D', \omega) \leq \rho_t(D, \omega) + \rho_t(D', \omega).$$

La mutualisation des paiements doit donner un besoin en capital moindre que la somme des besoins en fonds propres.

Homogénéité Une mesure de risque multipériodique est homogène si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T-1$ et toutes positions $(D) \in \Delta$, $\lambda > 0$ la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_t(\lambda D, \omega) = \lambda \rho_t(D, \omega).$$

Appliquer une mesure de risque sur des paiements qui sont multipliés par une constante, revient à multiplier la mesure de risque par cette même constante.

Les axiomes d'homogénéité et de sous additivité sont souvent remis en cause lorsque le risque de liquidité est pris en compte. Liquider ses positions en période de crise peut induire une perte supérieure ($\rho_t(\lambda D, \omega) \geq \lambda \rho_t(D, \omega)$). C'est pour cela que l'axiome de convexité lui est préféré (voir [FS02], [HK04]).

Convexité Une mesure de risque est convexe si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T - 1$ et toutes positions $(D, D') \in \Delta$, $\alpha \in [0, 1]$, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_t(\alpha D + (1 - \alpha)D', \omega) \leq \alpha \rho_t(D, \omega) + (1 - \alpha) \rho_t(D', \omega).$$

Un besoin en capital estimé sur une combinaison de flux de paiements doit donner un capital moindre que la combinaison des capitaux.

La transposition des axiomes d'une mesure de risque monopériodique au cas multipériodique est directe.

Axiomes spécifiques au caractère multipériodique de la mesure de risque :

Adaptabilité Pour tout $D \in \Delta$ et pour tout t , $\rho_t(D, \cdot)$ est F_t mesurable. Autrement dit, la mesure de risque ne dépend pas de l'information qui sera révélée dans le futur. Seule l'information présente à la date t permet d'apporter des modifications à la mesure de risque.

Indépendance du passé Pour tout paiement réalisé $D, D' \in \Delta$ et quel que soit l'intervalle de temps auquel a lieu ce paiement, si $D(s, \omega) = D'(s, \omega)$ pour tout $s \geq t$ et pour tout $\omega \in \Omega$ alors $\rho_t(D, \omega) = \rho_t(D', \omega)$. Cette propriété signifie que les paiements passés n'ont aucune influence sur la façon d'estimer le risque à venir.

Consistance temporelle Une mesure de risque est consistante dans le temps si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T - 1$ et toutes positions $(D, D') \in \Delta$, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_{t+1}(D, \omega) = \rho_{t+1}(D', \omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Cela implique que

$$\rho_t(D, \omega) = \rho_t(D', \omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Cette propriété signifie que si deux paiements qui vont avoir lieu dans le futur sont aussi risqués l'un que l'autre dans chaque état de la nature, alors ils représentent dès à présent le même risque.

Multipériodiquement réursive Une mesure de risque multipériodique est réursive si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T - 1$ et toutes positions $(D) \in \Delta$, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_t(D, \omega) = \rho_t(\rho_{t+1}(D, \omega)).$$

Le montant de capital à immobiliser aujourd'hui ρ_t pour faire face aux paiements à l'échéance est égal au montant de capital à immobiliser demain ρ_{t+1} pour faire face à ce même risque. Une autre façon d'exprimer cette récurtivité est :

$$\rho_t(D, \omega) = \rho_t(D_t + (1 + r)^{-1} \rho_{t+1}(D, \omega)).$$

Supermartingale Une mesure de risque multipériodique est une supermartingale si et seulement si pour toutes périodes $t = 0, \dots, T - 1$ et toutes positions $(D) \in \Delta$, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_t(D, \omega) \geq E(\rho_{t+1}(D, \omega) | F_t).$$

Plus l'échéance se rapproche, plus il y a d'information sur le montant à payer. Cela entraîne une diminution de la perception du risque.

Une mesure de risque qui satisfera à ces différentes propriétés sera appelée une mesure de risque multipériodique.

La VaR ne satisfaisant pas à l'axiome de sous additivité dans le cas monopériodique, elle ne saurait être une mesure de risque multipériodique, puisque celle-ci partage un ensemble d'axiomes avec le cas monopériodique. Toutefois, pour suivre les recommandations de Solvabilité 2 quant à la mesure de risque à retenir, des extensions de la VaR seront considérées pour vérifier si ces dernières respectent les axiomes liés au caractère multipériodique, et ainsi déterminer les modifications possibles à la formule standard pour prendre en compte un horizon de calcul différent.

Trois possibilités existent à cet effet :

- L'approche la plus simple consiste à calculer un besoin en capital pour chaque période de temps. Elle sera appelée, suivant la dénomination de [HW04], R-VaR pour "Recalculated VaR". Cette approche revient à recalculer la $VaR_{1-\alpha}$ à chaque intervalle de temps. De manière formelle, elle est définie par : $VaR_{1-\alpha}(D|F_t)$. C'est l'approche proposée par le régulateur pour déterminer le coût d'immobilisation du capital dans le cadre de la RM, puisque le besoin en capital est calculé à horizon d'un an pour chaque arrêté comptable jusqu'à extinction des engagements.
- Une alternative serait de déterminer le capital en période $t=0$ et de détenir ce montant jusqu'à l'échéance. Cette approche aurait pour avantage de ne pas augmenter le capital au cours de la période, mais aussi pour corollaire d'immobiliser plus ou pas assez de capital. Cette approche est appelée A-VaR, "Accumulated VaR", car la $VaR_{1-\alpha}$ est calculée à la date F_0 , donc elle accumule l'ensemble des valeurs. Elle est égale à : $VaR_{1-\alpha}(D|F_0)$. Seule l'information présente à la date 0 est intégrée dans le calcul de la VaR. Cette approche est employée par la plupart des professionnels pour estimer le risque de provisionnement des engagements jusqu'à leurs extinctions, voir [ACM07].
- Enfin, plutôt que de considérer les pertes à l'échéance vues depuis la date d'évaluation, les pertes potentielles sont prises en compte à la fin de la prochaine période de temps. Cette méthode est appelée I-VaR, "Incremental VaR", puisque le calcul du besoin

en capital est effectué de manière récursive en partant des valeurs à l'échéance. Sa formulation est la suivante : $VaR_{1-\alpha}(D|D = VaR_{1-\alpha}(D|F_{t+1}))$

Pour illustrer ces 3 approches, l'arbre binomial suivant sera considéré avec la variable aléatoire X représentant les pertes d'une compagnie :

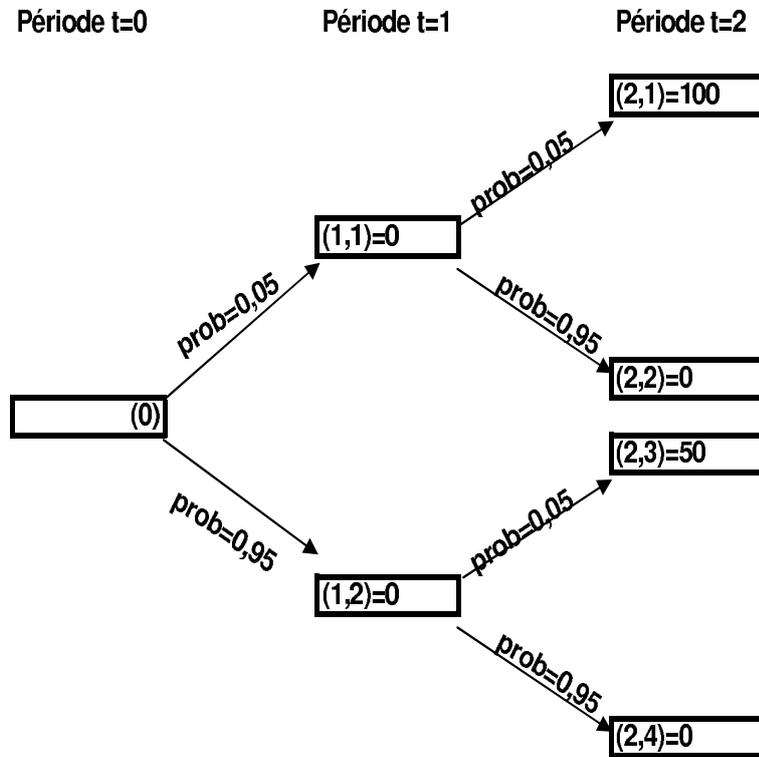


FIGURE 3.1 – Arbre binomial avec deux périodes

L'arbre s'étend sur deux périodes. En période 0, la variable aléatoire X vaut 0, en période 2, elle peut prendre les valeurs : $X = \begin{cases} 100 & \text{avec probabilité } 0.0025 \\ 50 & \text{avec probabilité } 0.0475 \\ 0 & \text{avec probabilité } 0.95 \end{cases}$

En suivant la contrainte réglementaire de Solvabilité 2 pour la détermination du besoin en capital, à savoir la $VaR_{99.5\%}$, le montant de capital à immobiliser en période $t=0$ est égal à 50. En période $t=1$, la variable est soit au noeud (1,1), soit au noeud (1,2) de l'arbre. Au noeud (1,1), $VaR_{99.5\%}(X) = 100$, alors qu'au noeud (1,2), $VaR_{99.5\%}(X) = 50$. Sur cet exemple, déterminer le besoin en capital en se basant sur le comportement de la variable aléatoire entièrement connue dès la période $t=0$, induit un besoin de capital supplémentaire de 50 si la variable se positionne sur le noeud (1,1).

Dans le tableau suivant sont résumés les résultats des 3 méthodes pour l'exemple présenté à la Figure 3.1 ci-dessus :

TABLE 3.1 – Comparaison du besoin en capital selon les différentes approches

Noeud	R-VaR	A-VaR	I-VaR
(0)	50	50	100
(1,1)	100	50	100
(1,2)	50	50	50

La méthode I-VaR permet de faire face à toutes les exigences de capital et évite ainsi d'avoir à faire une augmentation de capital en cours de période.

Les différents axiomes vus précédemment appliqués sur les trois méthodes donnent les résultats suivants¹ :

Mesure de risque	Cohérente	multipériodique
R-VaR	Non	Non
A-VaR	Non	Non
I-VaR	Non	Oui

- De par sa construction même, A-VaR n'est pas dépendante du temps. En tant que mesure de risque monopériodique, elle ne respecte aucun des axiomes liés à l'aspect multipériodique. La méthode R-VaR satisfait évidemment à l'axiome d'indépendance du passé, puisque n'évaluant que les risques futurs. Bien qu'elle soit recalculée à chaque intervalle de temps, les axiomes de consistance, de récursivité et de supermartingale ne sont pas satisfaits, car les risques ne sont envisagés qu'à l'échéance.

1. Les critères liés à la notion de cohérence ne sont évidemment pas respectés pour aucune des trois méthodes, car la mesure de risque sous jacente à ces trois alternatives est une Value at Risk.

- La méthode I-VaR satisfait à tous les axiomes liés à la notion multipériodique.

2.2 Application numérique

Il a été vu à la section précédente, que seule la version itérative de la mesure de risque utilisée (une VaR pour suivre les recommandations de Solvabilité 2) satisfaisait aux contraintes spécifiques liées à son utilisation dans un cadre multipériodique.

L'application de la méthode I-VaR sera d'abord réalisée pour le cas standard d'une variable aléatoire suivant une loi lognormale (loi sous jacente du risque de souscription non-vie). Ce cas simple permettra d'illustrer la problématique de la fréquence du calcul du besoin en capital à l'horizon d'un an. Des résultats spécifiques seront établis pour la RM du risque de souscription non-vie puisque d'une part, la période envisagée est l'extinction des engagements et que d'autre part, celle-ci se base sur l'hypothèse d'une loi lognormale pour l'évolution des provisions. Ainsi il sera possible d'avoir une formule fermée et de comparer la VaR dans un cadre monopériodique et multipériodique.

2.2.1 Fréquence de calcul du capital dans un modèle interne

Soit T , la date à laquelle tous les engagements auront été réglés, t la date d'évaluation de la mesure de risque. La relation suivante est vérifiée : $nk = T - t$ avec k qui indique la fréquence de mise à jour de la mesure de risque dans une année et n le nombre de mise à jour. Par exemple, si $T=10$ et $t=0$, pour une mise à jour semestrielle de la fréquence de calcul ($k = \frac{1}{2}$), n vaudra 20.

Pour l'exemple standard, $T=1$. Soit X_t , une variable aléatoire suivant une loi lognormale avec les paramètres μ et $\sigma > 0$. La distribution de $X_{t+k}|X_t$ pour $t + k \leq 1$ est lognormale avec les paramètres $\mu k + \ln(X_t)$ et $\sigma^2 k$. Suivant cette formulation, le résultat pour la VaR est :

$$VaR_{1-\alpha}(X_{t+k}|X_t) = X_t \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right), \quad (3.1)$$

où $N_{1-\alpha}$ est l'inverse de la loi normale centrée réduite pour le percentile $1 - \alpha$. Si $t=0$ et $k=1$, alors :

$$VaR_{1-\alpha}(X_1|X_0) = X_0 \exp(\sigma N_{1-\alpha} + \mu). \quad (3.2)$$

Maintenant, si la période est décomposée en $n = \frac{1}{k}$ intervalles de temps égaux de k années. Le calcul de la VaR lors du dernier intervalle de temps donne :

$$VaR_{1-\alpha}(X_1|X_{1-k}) = X_{1-k} \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right).$$

En appliquant ce raisonnement et en utilisant la propriété d'homogénéité de la Value at Risk, $VaR_{1-\alpha}(cX) = cVaR_{1-\alpha}(X)$, cela entraîne que :

$$\begin{aligned} VaR_{1-\alpha}(X_1|X_{1-2k}) &= VaR_{1-\alpha}(VaR_{1-\alpha}(X_1|X_{1-k})|X_{1-2k}) \\ &= VaR_{1-\alpha}(X_{1-k}|X_{1-2k}) \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right) \\ &= X_{1-2k} \exp\left(\sigma 2\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu 2k\right). \end{aligned}$$

De manière similaire pour une 3^{ème} itération :

$$VaR_{1-\alpha}(X_1|X_{1-3k}) = X_{1-3k} \exp\left(\sigma 3\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu 3k\right).$$

En continuant de manière itérative jusqu'à t=0 :

$$VaR_{1-\alpha}(X_1|X_0) = X_0 \exp\left(\sigma n\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu nk\right) = X_0 \exp\left(\sigma \frac{1}{\sqrt{k}}N_{1-\alpha} + \mu\right). \quad (3.3)$$

La Formule (3.2) est une version monopériodique de la VaR alors que la Formule (3.3) est une version multipériodique de la VaR pour une variable aléatoire suivant une loi lognormale.

Dans le cas d'un horizon de calcul à un an (n=1) sans mise à jour infra annuelle, les deux méthodes de calcul donnent le même montant, par contre dès lors qu'il y a une mise à jour infra annuelle, la méthode multipériodique donne un montant supérieur au cas monopériodique.

A titre d'illustration, soit une variable aléatoire X suivant une loi lognormale de paramètre $\sigma = 12\%$ et $\mu = -0.72\%$. Ce paramétrage permet d'avoir $\mathbb{E}(X) = 1$.

Dans la figure ci-dessous, le niveau de sécurité retenu pour la VaR est de 99.5% à horizon d'un an, comme indiqué dans la réforme Solvabilité 2. Avec la Figure 3.2, il apparaît clairement que le ratio VaR-Multipériodique par rapport à VaR-Monopériodique augmente avec le nombre d'intervalles (nombre de mise à jour dans l'année).

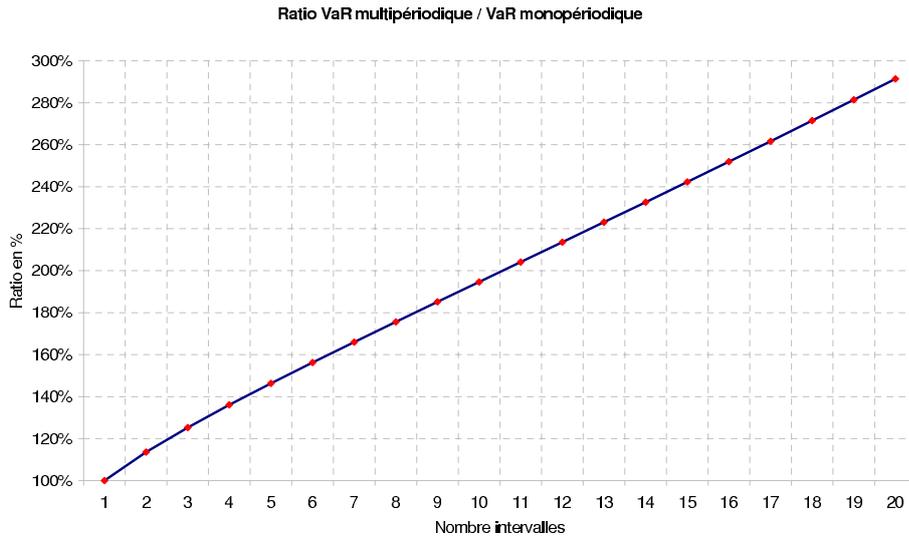


FIGURE 3.2 – Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d’intervalles

Lecture : Une mesure de risque calculée à horizon d’un an avec une mise à jour tous les trimestres (nombre d’intervalle=4) donne un montant plus élevé de 36% qu’une mesure de risque calculée à une fréquence annuelle. Une mise à jour mensuelle (n=12) du besoin en capital nécessitera un capital plus important de 112% par rapport à une mise à jour annuelle.

Le graphique ci-dessous présente un autre test de sensibilité : le rapport de la VaR multipériodique sur la VaR monopériodique en fonction du niveau de sécurité pour une mise à jour k=10 fixe.

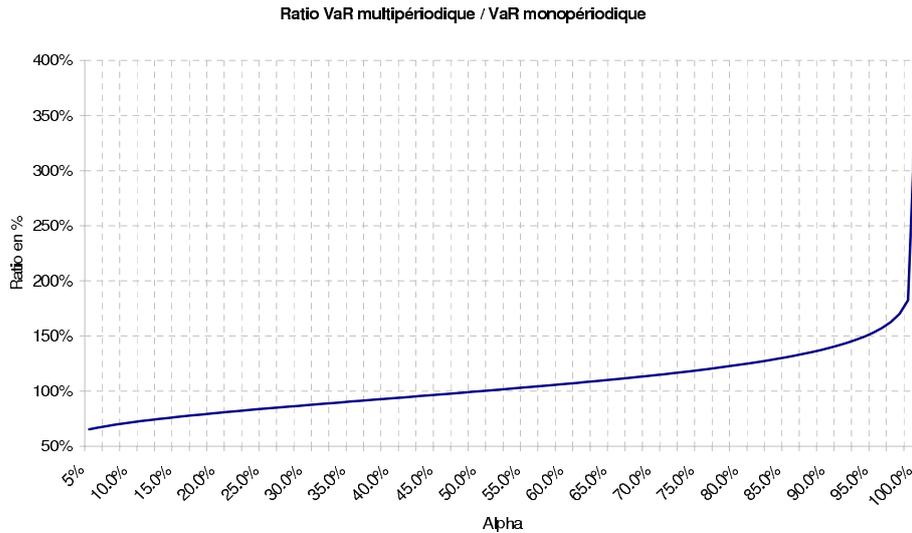


FIGURE 3.3 – Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du niveau de percentile

Lecture : Pour un niveau de sécurité de 75%, la VaR multipériodique pour $k=10$ donne un besoin en capital supérieur à la VaR monopériodique de l'ordre de 20%.

Plus le niveau de sécurité est élevé, plus la différence est importante entre les approches monopériodiques et multipériodiques. Sur cet exemple, à 99.5% la différence est supérieure à 95%. Pour un niveau de sécurité inférieur à 50%, la méthode monopériodique donne une valeur supérieure à la méthode multipériodique.

Cet exemple simplifié illustre la problématique de la fréquence de mise à jour du calcul du capital et de ses conséquences importantes. Sans consignes précises de la part du régulateur sur la fréquence de calcul dans le cadre d'un modèle interne, les entreprises d'assurance seront incitées à suivre les recommandations minimales, à savoir une fréquence de mise à jour annuelle ou alors à calquer cette mise à jour sur la fréquence de publication des résultats.

Le choix de la fréquence de mise à jour des calculs sera importante, puisque plus celle-ci sera fréquente, plus l'ampleur des pertes sera faible (en l'absence de chocs). En effet, la surveillance en continue de la solvabilité va amener à liquider la compagnie dès lors que son passif sera supérieur à son actif, ainsi il n'y aurait aucune perte à charge pour la collectivité (voir [LP09]). A l'inverse une surveillance permanente du niveau de fonds propres, empêcherait la compagnie de fonctionner puisqu'à chaque fois qu'un nou-

veau contrat serait souscrit, il faudrait évaluer son impact sur le besoin en capital de la compagnie, ce qui est difficilement concevable.

2.2.2 Mesure de risque multipériodique appliquée à la RM

Afin de voir l'impact d'une mesure de risque multipériodique sur la durée des engagements d'une compagnie d'assurance, l'exemple précédent est modifié pour le rendre conforme à l'application de la RM du risque de souscription non-vie dans Solvabilité 2 (voir Chapitre 1 - Section 3.3 pour une description exhaustive de ce risque).

L'hypothèse de base est que l'évolution du stock de provisions à horizon d'un an, dénotée par la variable aléatoire X , est modélisée par une loi lognormale multivariée. Afin d'obtenir une formule fermée, l'approximation utilisée dans le QIS4, à savoir une loi lognormale univariée, sera employée. Les paramètres de cette variable aléatoire seront supposés constant dans le temps (hypothèse similaire à celle de Solvabilité 2).

Le Best Estimate (moyenne de la valeur actualisée des paiements futurs) pour chacune des 12 branches d'activités proposées dans le QIS4 sera supposé égal à 1 ($\mathbb{E}(X_i) = 1, \forall i = 1, \dots, 12$). Les volatilités des provisions seront utilisées comme approximation pour paramétrer les volatilités des branches d'activités (voir Chapitre 1 - Section 4). Suivant les spécifications de Solvabilité 2, la matrice de corrélation du QIS4 sera appliquée pour représenter le bénéfice de mutualisation au sein de ce portefeuille (bien que le régulateur n'en tienne pas compte dans le calcul de la RM, voir [CEI09d]).

Avec ces hypothèses, les paramètres sont $\sigma = 7.616\%$ et $\mu = -0.29\%$. Ce paramétrage permet de faire correspondre les moments (moyenne et volatilité) de la distribution à ceux du portefeuille. Dans un souci de présentation, les paiements futurs s'étaleront sur 10 ans ($T=10$) et seront réglés à une cadence régulière dans le temps. Il n'y aura aucune mise à jour dans l'année ($k=1$) de fait $n=10$.

Pour obtenir des résultats comparables entre l'approche proposée par le régulateur (focalisée sur l'année à venir), et l'approche multipériodique (quantification du risque jusqu'à l'échéance); les résultats pour l'approche Solvabilité 2 seront agrégés pour chaque année jusqu'à extinction des engagements afin d'avoir une vision du besoin en capital jusqu'à l'échéance. Cette vision correspondra ainsi aux résultats présentés dans le cas multipériodique.

A titre d'illustration, quand le calcul du besoin en capital se fera en période $t=5$, pour l'approche mise en place par le régulateur, les SCRs de chacune des années de $t=5$ à $t=10$ seront agrégés afin d'être comparable au résultat multipériodique. En effet, l'approche du régulateur recalcule le besoin en capital chaque année, alors que la mesure multipériodique estime le capital jusqu'à extinction des engagements.

Suivant la Formule (3.2)² :

$$\begin{aligned}
 SCR_{\alpha}^{Dyn}(X_{10}|X_9) &= SCR_{\alpha}^{sta}(X_{10}) \\
 &= X_9 (\exp(\sigma N_{1-\alpha} + \mu) - 1) \\
 &= 10\% X_0 (\exp(\sigma N_{1-\alpha} + \mu) - 1) \\
 &= 0.2554,
 \end{aligned}$$

où

- SCR_{α}^{Dyn} est le besoin en capital calculé avec une mesure de risque multipériodique.
- SCR_{α}^{sta} est le besoin en capital calculé avec une mesure de risque monopériodique.

Lors de la 9^{ème} année le calcul du besoin en capital sur un horizon d'un an est équivalent entre la méthode monopériodique et la méthode multipériodique, dès lors que le pas des itérations est de 1 an. Par contre lors de l'estimation du besoin en capital pour la 8^{ème} année, les résultats sont différents. En effet, pour le cas multipériodique :

$$\begin{aligned}
 SCR_{\alpha}^{Dyn}(X_{10}|X_8) &= 10\% X_0 \left[\underbrace{(\exp(\sigma N_{1-\alpha} + \mu) - 1)}_{\text{Montant payé en t=8}} + \underbrace{(\exp(2\sigma N_{1-\alpha} + 2\mu) - 1)}_{\text{Montant payé en t=9}} \right] \\
 &= 0.8207.
 \end{aligned}$$

Il apparait très clairement dans la formule précédente, la propriété de récursivité multipériodique vue dans la Section 2.2.1. La mesure de risque en t est basée sur ce qui sera payé en t à laquelle est ajoutée la mesure de risque en t+1. Alors que dans le cas monopériodique :

$$\begin{aligned}
 SCR_{\alpha}^{Sta}(X_{10}) + SCR_{\alpha}^{Sta}(X_9) &= X_0 (\exp(\sigma N_{1-\alpha} + \mu) - 1) (20\% + 10\%) \\
 &= 0.7663
 \end{aligned}$$

Soit un besoin en capital de près de 7% supérieur pour la méthode multipériodique. En raisonnant de proche en proche, l'estimation initiale du besoin en capital donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 SCR_{\alpha}^{Dyn}(X_{10}|X_0) &= 28.26 \\
 SCR_{\alpha}^{Sta}(X_0) &= 14.05
 \end{aligned}$$

$SCR_{\alpha}^{Dyn}(X_{10}|X_0)$ et $SCR_{\alpha}^{Sta}(X_0)$ sont les besoins en capitaux pour faire face aux engagements de l'assureur jusqu'à extinction de ceux-ci en l'absence d'un facteur d'actualisation.

². La mesure de risque n'est plus représentée par une Value at Risk mais par le SCR, voir chapitre 1 - Section 3.4.2

Pour avoir la valeur de la RM, il conviendrait de multiplier cette valeur par 6% (coût du capital retenu dans le QIS4). Ainsi, la RM dans un cadre multipériodique serait de 1.69 et de 0.84 pour le cas monopériodique.

Sur la Figure 3.4 est représenté le ratio entre les deux approches en fonction du nombre d'années restantes jusqu'à l'extinction des engagements de l'assureur.

Au début de l'horizon en $t=0$, l'échéance est à 10 ans, la mesure de risque multipériodique requiert un besoin en capital deux fois plus importants que celui observé avec la méthode proposée pour la RM. Le ratio tombe à 156% en $t=3$ (il reste à ce moment là 7 années jusqu'à l'extinction des engagements). Enfin, en $t=9$ (autrement dit l'échéance est à un an), les deux approches donnent les mêmes résultats.

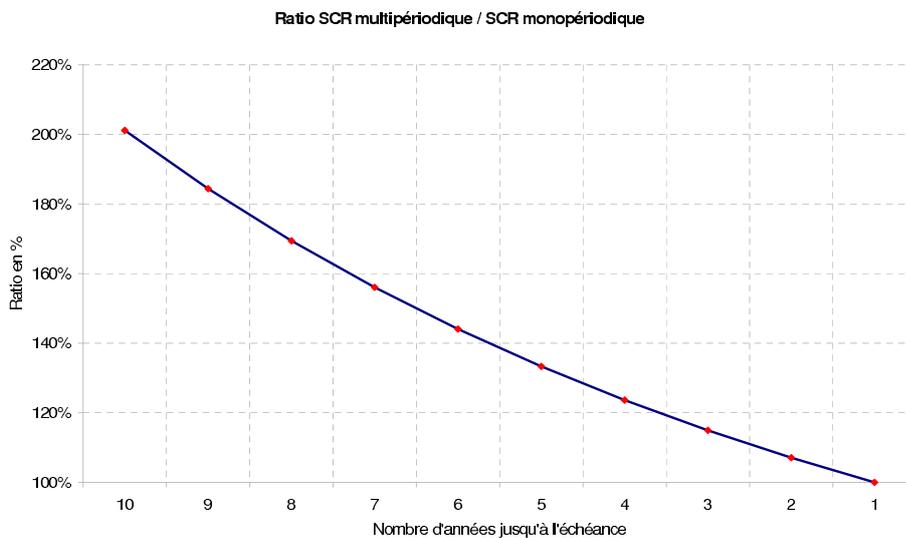


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la MVM multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d'années jusqu'à l'échéance

Dans le cas de la mesure de risque multipériodique, plus l'échéance est lointaine plus il faut immobiliser de capital.

La mesure de risque multipériodique offre plusieurs avantages sur la mesure de risque monopériodique :

- Elle permet de faire face à d'éventuelles insuffisances de capital et ainsi évite de devoir procéder à une augmentation de capital.
- En se fondant sur les spécifications du régulateur pour le calcul de la RM du risque non-vie, il est possible de déterminer une formule fermée pour l'application de cette

mesure de risque multipériodique, ce qui permettrait son implémentation dans le cadre d’une formule standard.

Plusieurs difficultés liées à cette méthode doivent être mentionnées :

- L’implémentation de cette méthode est directe pour certaines distributions (dans un cadre univarié). Son application sur tous les risques d’une compagnie nécessite d’avoir recours à un modèle interne qui emploie des techniques de simulations imbriquées (voir [DL09a]).
- La hausse des exigences en capital induite par cette méthode est importante (voir les exemples présentés). Son utilisation dans le cadre d’une formule standard nécessiterait une analyse approfondie du régulateur afin de déterminer la distribution et les paramètres à utiliser.

Au travers de cette section, certaines problématiques ont été mises en avant, notamment celles liées à l’étalement des paiements dans le temps ; tant au travers de la fréquence de mise à jour des calculs qu’en terme de quantification du capital à détenir pour un horizon long terme. La prochaine section abordera un point de vue différent : L’arbitrage effectué par le régulateur entre stabilité du besoin en capital et l’aspect cyclique du marché de l’assurance.

3 Les cycles de souscription dans Solvabilité 2

L’horizon d’un an demandé par le régulateur pour établir le besoin en capital est difficilement conciliable avec l’environnement économique constitué de phases d’expansion et de récession s’étalant sur plusieurs années. Les cycles touchant principalement les entreprises d’assurance sont ceux liés à l’évolution tarifaire (appelés cycles de souscription). Ces cycles ont des conséquences importantes sur la solvabilité des compagnies. Ainsi quand le marché est en baisse, si la tendance est suivie par la compagnie, cela contribue à dégrader sa santé financière et donc augmente son risque d’insolvabilité. Inversement, si ses prix sont trop élevés, elle serait confrontée à des problèmes de pertes de clients, ce qui mettra à mal la mutualisation de ses risques. Le régulateur a pris la mesure de la variabilité des primes puisque celle-ci est prise en compte dans le risque de souscription non-vie à travers à la fois le risque de réserve et le risque de prime. Pour estimer le besoin en capital, le risque de prime décrit dans la formule standard requiert les éléments suivants :

- La volatilité par branche d’activité (communiquée par le régulateur).
- Une hypothèse de distribution lognormale.
- L’estimation des primes émises pour l’année à venir.

Cependant, cette approche ne permet pas de tenir compte de l’existence des cycles de souscription, qui peuvent être schématiquement décomposés en deux régimes :

- Un régime “soft” caractérisé par une importante offre de contrats d’assurance et une baisse des primes de ceux-ci.
- Un régime “hard” lors duquel est observé une diminution dans l’offre de contrats d’assurance accompagnée d’une hausse des primes d’assurance.

Cette non-prise en compte des cycles par la méthodologie du CEIOPS induit quatre problèmes principaux :

- L’identification des causes de l’évolution du ratio sinistres à primes. Le CEIOPS utilise le ratio sinistres à primes pour représenter l’incertitude entourant les primes, voir TS.XIII.B.12 dans [CEI08]. Un ratio élevé peut-être dû à une sinistralité importante ou à une baisse du montant des primes encaissées, et une baisse du montant des primes encaissées peut provenir d’une baisse dans le nombre d’assurés (effet volume) ou d’une baisse des primes payées par les assurés (effet prix).
- Il applique la volatilité estimée à travers le cycle, c’est à dire la volatilité inter-régime, bien que l’horizon du calcul spécifié par Solvabilité 2 soit de 1 an. Cette approche va à l’encontre de l’horizon court terme spécifié dans la réforme.
- Le calcul du risque de prime est appliqué sans distinction du régime. Dans un régime “hard”, les exigences en fonds propres vont augmenter en même temps que les primes d’assurances augmentent, alors que la logique voudrait l’inverse. Avec cette approche réapparaît l’une des critiques majeures faites à Solvabilité 1.
- Dans son approche, le régulateur ne considère que la variabilité des sinistres comme facteur explicatif des cycles de souscription (voir TS.XIII.B.23 et suivant dans [CEI08]), alors qu’une investigation plus approfondie, ne se limitant pas à ce seul facteur, aurait permis d’avoir une meilleure gestion des risques.

En voulant concilier l’horizon court terme et la variabilité du capital pour le risque de prime, le régulateur a fait le choix de ne pas reconnaître l’aspect cyclique des primes et de raisonner ainsi à travers le cycle. A exigence réglementaire constante, un assureur peut donc souscrire plus de risques moins bien tarifés, ce qui va à l’encontre d’une meilleure prise en compte de la gestion des risques dans une entreprise d’assurance puisque cela contredit une composante majeure de l’activité d’un assureur non-vie. Le seul moyen de tenir compte de l’aspect cyclique de l’activité de l’assureur sur le besoin en capital sera donc apparemment de le modéliser au sein d’un modèle interne.

Partant du constat que le régulateur ne donne aucune orientation sur comment intégrer les cycles de souscription dans le cadre d’un modèle interne, les cycles de souscription ainsi que les théories sous jacentes seront présentées dans la première sous section. Puis, une proposition de modélisation de ceux-ci dans un modèle interne sera donnée. Enfin dans une dernière sous section, une alternative à la formule standard sera abordée.

3.1 Les cycles de souscription : un cadre bien établi

Avant de présenter un aperçu des recherches sur les cycles de souscription, leurs présences seront illustrées sur le marché français.

3.1.1 Les cycles de souscription sur le marché français

Sur la Figure 3.5 ci-dessous est représentée les trois branches d'assurance étudiées : le Dommage Automobile (DA), la Responsabilité Civile Automobile (RCA) et le Dommage Aux Biens (DAB) pour un échantillon de 19 compagnies du marché français d'assurance non-vie, représentant une part de marché de 30% environ. Ces trois branches correspondent à environ 35% des primes de l'assurance non-vie.

L'analyse se concentrera sur ces trois branches pour différentes raisons. Il est nécessaire d'avoir le nombre de contrats pour ces branches afin de pouvoir décomposer l'effet volume et l'effet prix dans les primes. Avec cette distinction, il est possible de déterminer l'origine de la croissance des primes : une augmentation du volume de contrats ou impact des cycles de souscription. Les primes sont normalisées par le nombre de contrats.

L'échantillon est principalement constitué de mutuelles d'assurance souscrivant pour l'essentiel des branches de particuliers. Elles représentent environ 60% des primes acquises brutes du marché non-vie. Pour correspondre avec la définition des branches du CEIOPS, la branche Dommage aux Biens inclue le dommage aux biens des particuliers, professionnels et agricoles ainsi que les catastrophes naturelles (au sens du code des assurances français, voir [dR07] pour une présentation détaillée).

La période couverte va de 1995 à 2006, quand les données sont disponibles. La période moyenne observée de l'échantillon est de 8.2 ans. Avec cet échantillon, l'évolution moyenne des primes est calculée pour chaque année, comme l'indique la Figure 3.5.

Il apparaît clairement une succession de phase de croissance et de décroissance.

La branche RCA (dénommée "Motor Third Part Liability" sur la figure) montre une décroissance de 1997 à 1999, puis une augmentation jusqu'à 2003. Une nouvelle période de décroissance s'amorce à partir de 2003. Le Dommage Automobile (dénommée "Motor Own Damage" sur la figure) montre une décroissance jusqu'à 1999, suivi d'une forte augmentation (supérieure à 5pts) qui continue jusqu'à 2005. En 2006, une nouvelle tendance à la baisse apparaît pour cette branche. La branche Dommage aux Biens (dénommée "Property" sur la figure) a un comportement similaire (décroissance jusqu'à 1999, puis une forte augmentation en 2000). Cet accroissement s'accélère en 2003, puis s'atténue. La phase d'augmentation des primes est relativement plus longue pour cette branche que pour les deux autres branches. Il y a plusieurs raisons à ces tendances. La définition des

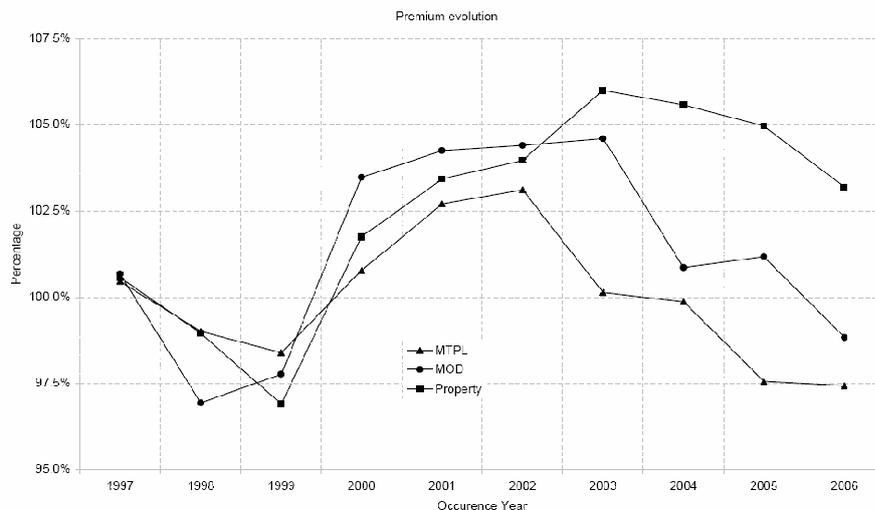


FIGURE 3.5 – Evolution des primes normalisée pour les trois principales branches d’assurance

branches retenue est celle utilisée par le CEIOPS. Comme mentionné précédemment, pour faire correspondre la définition avec la nomenclature française, des agrégats de branches ont dû être réalisés, introduisant sans doute un biais dans la longueur du cycle, comme l’ont mentionné [FLPW98]. Sur la dernière décennie, plusieurs évènements climatiques sont survenus en France :

- 1999 : Deux tempêtes majeures (Lothar et Martin)
- 2002 : Plusieurs inondations
- 2003 : Sécheresse
- 2006 : Tempêtes

Ces évolutions justifient le besoin de détenir des fonds propres dans une phase de baisse des primes pour faire face à un risque accru d’insolvabilité.

Dans le prolongement du graphique précédent, les cycles de souscription peuvent varier d’une branche à l’autre et d’une manière générale d’un pays à l’autre (voir [LM06]).

3.1.2 Les théories sous jacentes aux cycles de souscription

Aucun consensus n’existe dans la littérature. Plusieurs théories ont été explorées. Quelques analyses sont basées sur le comportement du ratio sinistres à primes pour déterminer l’évolution des cycles de souscription (voir les papiers de [CO87], [Ven85]). Pour ce faire, les séries temporelles sont utilisées pour démontrer le comportement cyclique.

D'autres, plus nombreuses se sont penchées sur le modèle de prix d'équilibre et l'hypothèse de contrainte de capacité. Le modèle de prix d'équilibre est basé sur les paiements futurs escomptés. Les primes d'assurance sont égales aux frais de gestion des polices plus la valeur attendue des sinistres futurs. La compagnie d'assurance est considérée comme risque neutre et a des anticipations rationnelles par rapport aux sinistres. Plusieurs auteurs, tels que [CO87], [Hal93], [Hal95], [LM06] ont utilisé des séries temporelles pour confirmer les hypothèses de ce modèle. Cette théorie implique une relation positive des provisions des sinistres, des sinistres payés et de l'évolution de la prime de l'année précédente avec l'évolution des primes de l'année en cours. A l'inverse, le coefficient du taux d'intérêt doit être négativement corrélé avec l'évolution des primes.

L'hypothèse de la contrainte de capacité est basée sur le fait qu'un assureur doit avoir un montant de capital suffisamment important pour faire face à ses obligations. En cas de survenance d'un choc de grande ampleur sur l'institution, une compagnie d'assurance aura des difficultés à lever des capitaux sur les marchés financiers. Le capital externe sera plus cher que le capital interne à cause de l'asymétrie d'information existante entre le manager et l'investisseur, l'investisseur ne voyant pas dans l'augmentation de capital un signe favorable sur l'activité de l'assureur. Dans un tel cas, l'assureur augmenterait son capital par autofinancement. Ainsi l'investisseur demanderait une prime de risque plus élevée et la compagnie aurait intérêt à augmenter les primes pour reconstituer son capital. Cette approche implique une relation négative entre l'évolution du capital et l'évolution des primes. La contrainte de capacité est soutenue par [CHT02], [Gro90], [Gro94a], [Gro94b], [HT00], [Win88], [Win91], [Win94].

Dans [CD97] est proposé une extension de la contrainte de capacité en ajoutant l'hypothèse que les assurés sont prêts à payer plus cher si l'assureur a une probabilité de défaut plus faible que celle de ses concurrents. Cette approche est dans une certaine mesure utilisée sur le marché de la réassurance non-vie. En effet, l'entreprise d'assurance qui se réassure auprès de différents réassureurs peut dans certains cas payer des primes différentes pour un même traité en fonction du rating des réassureurs. Ainsi trivialement, un réassureur AA dans la terminologie de Standard and Poor's recevra une prime plus importante qu'un réassureur noté A. Ce genre de pratique peut s'observer dans différents pays européen, le marché français faisant exception (voir www.aonbenfield.com).

Une autre approche représentant la méthode de tarification la plus utilisée en pratique est la méthode actuarielle. Les primes sont égales à la valeur attendue des sinistres actualisés plus un chargement de sécurité. Le chargement de sécurité est une protection qui permet d'avoir une probabilité de ruine acceptable. Ce modèle est positivement lié avec la variance des sinistres et négativement avec le capital. Le modèle actuariel a été choisi par le CEIOPS pour asseoir la solvabilité des assureurs, voir [BS70].

Tous les papiers mentionnés, excepté [HT00] utilisent la même approche statistique

(techniques de régression et séries temporelles) pour modéliser le comportement des cycles de souscription. Ces techniques impliquent une invariance temporelle des paramètres des variables. Il semble cependant difficile de croire que les variables auront le même comportement à travers le cycle. Par exemple, pour la contrainte de capacité, quand le capital décroît, les primes devraient croître, mais l'explication pour la décroissance des primes est plus incertaine.

L'existence de deux régimes (un marché "hard" et un "soft") conduit à utiliser un modèle à changement de régime dans un environnement Markovien. Ce modèle permettra d'estimer les variables dans chaque phase du cycle. Le travail de [HT00] sera étendu, puisque la volatilité pourra être différente selon les états du cycle.

3.2 Analyse empirique

Cette section décrit le modèle, les données et enfin les résultats obtenus.

3.2.1 Modèle

L'approche proposée se positionnera dans la suite des travaux de [Ham05] et [KPS03]. Les états du régime sont supposés être des variables exogènes par rapport aux réalisations du vecteur de la régression. De plus, la variable exogène sera une réalisation d'une chaîne de Markov à deux états avec :

$$Pr(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, y_{nt-1}, y_{nt-2}, \dots) = Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) = P_{ij}, \quad (3.4)$$

où

s_t est la variable représentant les deux états du monde.

y_{nt} est l'évolution de la prime d'assurance de la compagnie n pour l'année t .

La probabilité P_{11} est la probabilité de rester dans l'état 1, qui est l'état où une compagnie augmente ses primes. Alors que P_{22} est la probabilité de rester dans l'état 2, qui est l'état où une compagnie diminue ses primes. Comme il n'y a que deux états et que la chaîne de Markov est ergodique, alors $P_{12} = 1 - P_{11}$ et $P_{21} = 1 - P_{22}$. La situation de s_t sera déduite au travers du comportement de y_{nt} . L'information disponible est définie par :

$$F_{t-1} = (y_{nt-1}, y_{nt-2}, \dots, y_{(n-k)(t-1)}, y_{(n-k)(t-2)}, \dots). \quad (3.5)$$

Un modèle de régression sur données de panel sera utilisé pour chaque branche.

$$y_{nt}^l = \beta_0^l + \alpha_n^l + \sum_{j=1}^5 \beta_j^l x_{jnt}^l + \epsilon_{nt}^l. \quad (3.6)$$

pour $n = 1, \dots, 19$ et $s_t = l$ pour $l = 1, 2$.

y_{nt}^l est l'évolution de la prime pour la compagnie n à la date t dans l'état l .

α_n^l est une constante spécifique à la compagnie n dans l'état l .

x_{jnt}^l représente l'évolution de la variable j : évolution des provisions des sinistres, des sinistres payés, du capital, de la prime de l'année précédente pour la compagnie n dans l'état l à la date t .

β_j^l sont les coefficients de régression qui seront estimés dans l'état l pour la variable j .

β_0^l est une constante pour l'état l .

ϵ_{nt}^l est le terme d'erreur dans l'état l à la date t pour la compagnie n .

Dans ce cas :

$$\mu(y_{nt}^l) = E(y_{nt}|l = i, F_{t-1}) \quad (3.7)$$

$$= \beta_0^l + \alpha_n^l + \sum_{j=1}^5 \beta_j^l x_{jn}^l \quad (3.8)$$

$$\sigma^2(y_{nt}^l) = Var(y_{nt}|l = i, F_{t-1}). \quad (3.9)$$

où $i = 1, 2$. Comme s_t est exogène par rapport à ϵ_{nt}^l :

$$\begin{aligned} E(\epsilon_{nt}^l | l = i, F_{t-1}) &= 0 \\ E(\epsilon_{nt}^l \epsilon_{mk}^l | l = i, F_{t-1}) &= \delta_{nm} \delta_{tk} \sigma_l^2 \quad \forall n, m, t, k. \end{aligned}$$

L'hypothèse commune est que les résidus sont indépendants entre compagnie et par branche d'activité conditionnellement à l'état du régime. Le test de "Breusch et Pagan" sera réalisé pour vérifier cette hypothèse.

Dans la littérature, l'hypothèse la plus courante sur la distribution conditionnelle de $(y_{nt}^l | l = i, F_{t-1})$ est la distribution Gaussienne. Les règles actuelles pour déterminer le risque de prime dans Solvabilité 2 sont basées sur l'hypothèse que le risque sous jacent suit une loi lognormale, celle-ci sera également testée.

Les paramètres seront estimés par le maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L = \prod_{l=1}^2 \prod_{n=1}^N \prod_{t=1}^T f(y_{nt}^l | F_{t-1}), \quad (3.10)$$

où

$$f(y_{nt}^l | F_{t-1}) = \sum_{s_t=1}^2 \sum_{s_{t-1}=1}^2 f(y_{nt}, s_t, s_{t-1} | F_{t-1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s_t=1}^2 \sum_{s_{t-1}=1}^2 f(y_{nt}|s_t, s_{t-1}, F_{t-1}) Pr(s_t, s_{t-1}|F_{t-1}) \\
 &= \sum_{s_t=1}^2 \sum_{s_{t-1}=1}^2 f(y_{nt}|s_t, s_{t-1}, F_{t-1}) Pr(s_t|s_{t-1}) Pr(s_{t-1}|F_{t-1}).
 \end{aligned}$$

Par définition $\sum_{i=1,2} Pr(s_t = i|F_t) = 1$. Un processus itératif sera utilisé pour résoudre cette algorithme via le filtre employé dans [Ham05] :

$$Pr(s_t = j|F_t) = Pr(s_t = j|y_{kt}; 1 \leq k \leq N, F_{t-1}) =$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 \frac{Pr(s_t = j|s_{t-1} = i, y_{1t}, \dots, y_{Nt}, F_{t-1}) Pr(s_{t-1} = i|F_{t-1}) f(y_{1t}, \dots, y_{Nt}|s_t = j, F_{t-1})}{f(y_{1t}, \dots, y_{Nt}|F_{t-1})} &= \\
 \sum_{i=1}^2 \frac{Pr(s_t = j|s_{t-1} = i) Pr(s_{t-1} = i|F_{t-1}) \prod_{n=1}^N f(y_{nt}|s_t = j, F_{t-1})}{f(y_{1t}, \dots, y_{Nt}|F_{t-1})}, &
 \end{aligned}$$

où

$$f(y_{1t}, \dots, y_{Nt}|s_t = j, F_{t-1}) = \prod_{n=1}^N f(y_{nt}|s_t = j, F_{t-1}) \quad (3.11)$$

$$\text{et } Pr(s_t = j|s_{t-1} = i, y_{1t}, \dots, y_{Nt}, F_{t-1}) = Pr(s_t = j|s_{t-1} = i). \quad (3.12)$$

La Formule (3.11) signifie que les résidus sont indépendants entre compagnie, tandis que la Formule (3.12) provient de la Formule (3.4).

3.2.2 Données

Les données utilisées sont celles issues des rapports annuels de compagnies d'assurance publiés selon les normes comptables françaises (en valeur nominale). Ces données sont similaires à celles utilisées par les agences de notations pour établir un rating sur base d'information publiques, voir [Fit07], [SP05]. Les branches d'assurance présentées à la Section 3.1.1 seront étudiées à savoir : la Responsabilité Civile Automobile, le Dommage Automobile et le Dommage aux Biens. L'échantillon a été limité afin de disposer du nombre de contrats pour chaque compagnie et ainsi distinguer dans l'évolution de la prime ce qui provient d'un accroissement dû au portefeuille de ce qui est réellement dû aux cycles de souscription. Même si le panel est limité, le propos est illustratif et pourrait être élargi à un échantillon plus important.

Les données utilisées dans la régression pour chaque branche sont :

Sinistres Les sinistres survenus et payés dans l'année.

Primes Les primes acquises dans l'année.

Revenus financiers Les revenus financiers provenant de chaque branche.

Provisions Les provisions des sinistres par année calendaire (les provisions de l'année en cours plus la variation des provisions passées).

Capital Le capital détenu au niveau de la compagnie.

Ces variables sont normées par le nombre de contrats. Parmi les données utilisées, aucune référence au taux d'intérêt n'apparaît alors qu'il est présent dans les théories envisagées. En étudiant les résultats de la deuxième et troisième étude d'impact quantitative (QIS2 et QIS3) élaborées par le CEIOPS, le taux d'intérêt a clairement un impact. Le CEIOPS a fourni deux courbes des taux différentes (voir la Figure 3.6) pour estimer la valeur actuelle des sinistres.

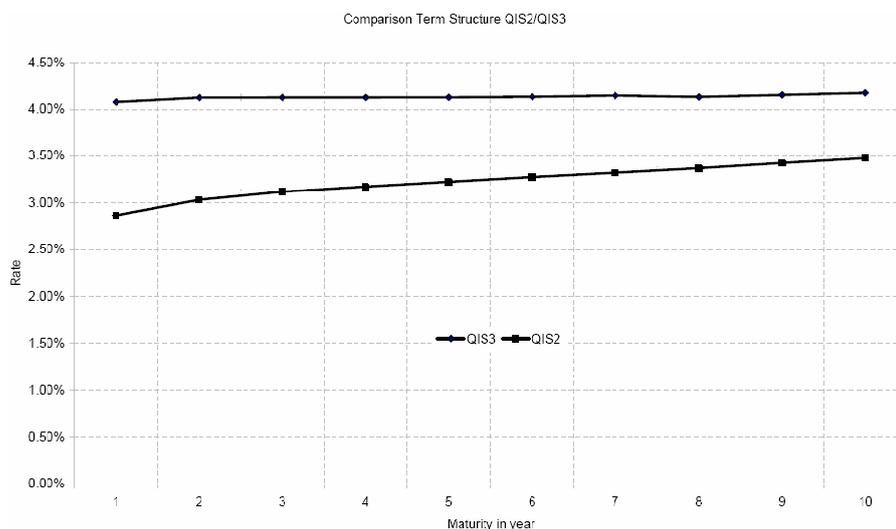


FIGURE 3.6 – Courbe des taux utilisées dans la 2^{ème} et 3^{ème} étude d'impact quantitative

Le tableau suivant présente le ratio de la valeur escomptée des provisions sur la valeur nominal des provisions sur le marché français pour ces deux QIS.

Avec une augmentation de plus de 30% dans les taux d'intérêt, la branche automobile montre une diminution de ces provisions de 8 points en valeur économique. Pour la branche Dommage aux Biens, aucune différence n'apparaît malgré la différence entre les courbes

TABLE 3.2 – Ratio de la valeur escomptée des paiement futurs sur la valeur comptable des provisions

LoB	Best Estimate	
	QIS2	QIS3
Automobile (Dommage + Responsabilité)	85%	78%
Dommage aux Biens	82%	81%

des taux. L’impact du taux d’actualisation n’est pas identique pour ces deux branches, la différence dans les cadences de paiement rentre en ligne de compte.

Malheureusement, il n’est pas possible de tester spécifiquement l’impact du taux d’intérêt. En effet, pour estimer la valeur des paiements futurs escomptés, il faudrait connaître la vitesse de paiement des sinistres, information indisponible dans les sources utilisées. L’approximation proposée par [Win94] pourrait être utilisée mais celle-ci devrait être appliquée à l’ensemble des compagnies. Il semble difficile de croire que chaque compagnie ait la même cadence de règlement. Cette approximation serait adaptée si le travail était réalisé à un niveau agrégé avec des séries temporelles (voir [CHT02], [Win94]), mais pas sur des données de panel comme dans le cas présent. Néanmoins, pour vérifier l’impact de la valeur temporelle, une approximation sera intégrée dans la régression : les revenus financiers alloués par branche. Cela permettra de voir si une relation apparaît avec l’évolution de la prime, ce qui prouvera que l’environnement économique affecte celle-ci.

3.2.3 Résultats

Fonctions de distribution A l’issue de la phase d’optimisation de la fonction de vraisemblance, c’est la distribution lognormale qui est la meilleure distribution pour représenter l’évolution des primes pour la DA et le DAB. Ces résultats supportent l’hypothèse du CEIOPS, mais elle est rejetée pour la RCA qui exhibe une distribution à queue plus légère que la loi lognormale.

Le test de “Breusch et Pagan ” confirme l’hypothèse que les résidus sont indépendants entre les compagnies.

Comme le travail est réalisé sur des données de panel, il est pertinent de tester pour chaque branche si la présence d’un effet spécifique à la compagnie (α_n^l dans la Formule (3.6)) accroît la capacité prédictive du modèle via le critère AIC.

TABLE 3.3 – Résultats pour la fonction du maximum de vraisemblance

Log Likelihood	RCA	DA	DAB
Normal	145.73	181.4	150.34
Lognormale	134.51	184.43	165.62

TABLE 3.4 – Résultats pour le test “Breusch et Pagan”

	RCA	DA	DAB
P-Value	23%	18%	12%

TABLE 3.5 – Résultats AIC

AIC	RCA	DA	DAB
Avec l’effet spécifique	-6.14	-6.74	-6.28
Sans l’effet spécifique	-6.63	-6.79	-5.88

Une constante spécifique à chaque compagnie augmente la performance du modèle uniquement pour le DAB, pour la RCA et le DA, cet effet peut être ignoré. Une explication pour la présence d’un effet spécifique dans la branche DAB peut provenir du fait que différents types de risques (particulier, agricole, et professionnel ainsi que les catastrophes naturelles) sont réunis au sein d’une même branche. Même si les trois dernières catégories représentent une faible part des primes acquises, cela peut affecter l’évolution des primes.

3.2.4 Estimation de la régression

Ci-après sont communiqués les coefficients de régression pour chaque branche. Toutes les variables ont le signe attendu, quand celui-ci est significatif. Les sinistres payés et les provisions sont positivement corrélés avec l'évolution des primes. Les coefficients des provisions sont assez similaires dans les deux phases du cycle. Cela confirme les modèles de prix d'équilibre et actuariel, du fait de l'ajustement des primes aux sinistres. En cas de hausse de la sinistralité lors de l'année n-1, à l'année n, les primes augmenteront.

TABLE 3.6 – Coefficients de régression pour le DA

DA	marché "Soft"	marché "Hard"
Constant	-3.09%*	3.52%*
Revenus financiers	-0.22%	-0.35%
Provisions	2.57%*	2.79%*
Sinistres	2.29%*	0.85%
Capital	1.26%	-4.40%*
Prime N-1	-0.72%	23.57%*
Volatilité	2.02%*	3.47%*

*Significatif à 5%

TABLE 3.7 – Coefficients de régression pour la RCA

RCA	marché "Soft"	marché "Hard"
Constant	89.53%*	87.00%*
Revenus financiers	-0.29%	0.06%
Provisions	5.82%*	7.08%*
Sinistres	1.78%*	0.35%
Capital	1.64%*	-8.84%*
Prime N-1	0.49%	32.95%*
Volatilité	3.19%*	4.76%*

*Significatif à 5%

Il y a une relation négative entre le capital et l'évolution des primes dans un marché haussier mais la corrélation n'est pas significative dans le marché baissier. C'est une validation de la théorie de la contrainte de capacité. Ce résultat confirme le choix d'utiliser un

TABLE 3.8 – Coefficients de régression pour le DAB

DAB	marché “Soft”	marché “Hard”
Constant	-5.41%*	5.90%*
Revenus financiers	-0.21%	-0.06%
Provisions	2.84%*	1.07%
Sinistres	-0.19%	2.04%*
Capital	1.32%	-5.26%*
Prime N-1	6.67%*	0.38%
Volatilité	3.46%*	3.98%*

*Significatif à 5%

modèle à changement de régime, puisqu’il permet d’estimer les paramètres dans chaque phase du cycle. Le coefficient des revenus financiers est négatif, mais non significatif. Du fait de la présence d’un coefficient important pour la variable qui représente les provisions, une approche plus fine pour traiter les provisions en valeur actualisées devrait être appliquée pour mieux refléter l’impact de l’environnement économique. Une corrélation très forte est présente entre la valeur retardée de l’évolution de la prime et l’évolution de la prime dans un marché haussier pour le DA et la RCA et dans un marché baissier pour le DAB. Comme la valeur retardée de l’évolution de la prime n’est pas significative dans le marché baissier pour les branches relevant de la garantie automobile, cela démontre que quand les sinistres diminuent, les compagnies d’assurances reflètent de manière rapide la baisse sur les primes. Inversement, il y a un phénomène d’inertie dans le marché haussier.

Du fait de la concurrence sur ce marché d’assurance qui représente 35% du marché non- vie en France, une compagnie d’assurance ne peut répercuter toute l’augmentation de la sinistralité sur la prime, elle est obligée de l’étaler sur plusieurs années. Il est important de mentionner la différence dans le niveau de la volatilité entre les régimes. Pour la RCA, dans le marché baissier, la volatilité est 40% plus faible que dans le marché haussier. Le même constat peut être observé pour le DA. La différence est plus faible pour le DAB mais existe. L’existence de coûts frictionnels (tacite reconduction, résiliation à la date anniversaire) sur ces branches justifie le besoin pour une compagnie d’assurance de diminuer ses primes pour éviter de perdre des parts de marché, qui serait difficile à reconquérir. Cela peut expliquer pourquoi il est observé une pression à la baisse sur les primes dans la phase de baisse de prime du cycle.

Le modèle à changement de régime permet de voir spécifiquement dans quelle phase du cycle, les variables produisent leurs effets sur l’évolution de la prime.

Le même travail est réalisé, mais cette fois-ci sans distinguer les régimes. Le test de Chow donne les résultats suivants :

TABLE 3.9 – Test de Chow pour les différentes branches d’activités

	P-value
RCA	0.36%
DA	0.28%
DAB	0.76%

Comme la P-value est inférieure à 1%, il est nécessaire de différencier l’estimation des paramètres selon les régimes, cela confirme le recours au modèle à changement de régime. Après avoir présenté les paramètres des variables dans chaque phase du cycle, il convient de voir les probabilités de passage de la phase d’un régime “Hard” à un régime “Soft” et inversement.

Matrice de transition Ci-après sont présentées les probabilités de la chaîne de Markov à un an.

TABLE 3.10 – Matrice de transition à un an

Probabilité	RCA	DA	DAB
P_{11} - Probabilité de rester dans le marché haussier	61.66%	68.83%	42.42%
P_{12} - Probabilité de quitter le marché haussier	38.34%	31.17%	57.58%
P_{22} - Probabilité de rester dans le marché baissier	70.67%	59.10%	82.52%
P_{21} - Probabilité de quitter le marché baissier	29.33%	40.90%	17.48%

Il ressort du Tableau 3.10 que la probabilité de rester dans le marché haussier à 1 an est plus importante que la probabilité de rester dans le marché baissier pour le DA. L’inverse est observé pour les deux autres branches. La probabilité de rester dans un marché haussier est deux fois moins importante que celle de rester dans un marché baissier pour le DAB. Encore une fois la spécificité de cette branche brouille les analyses. L’agrégation de différents types de risques dans cette branche peut expliquer ce résultat. De même que la survenance d’évènements climatiques peut interrompre le cycle.

Il est possible de calculer les longueurs moyennes des régimes baissier et haussier au moyen de la chaîne de Markov. Comme la probabilité d'avoir un régime en période i depuis t années est $p_{ii}^{t-1}p_{ij}$, la longueur moyenne d'une période du régime i se déduit comme étant :

$$\sum_{t=1}^{\infty} t p_{ii}^{t-1} p_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}. \quad (3.13)$$

TABLE 3.11 – Temps moyen dans chaque régime pour chaque branche

Branche	Marché baissier	Marché haussier
RCA	3.41	2.62
DA	2.45	3.21
DAB	1.74	5.72

La longueur d'un régime baissier est plus longue que celle d'un régime haussier pour la RCA, le contraire est observé pour les deux autres branches.

En additionnant le temps passé dans chaque régime pour chaque branche, il est possible d'obtenir la longueur moyenne d'un cycle de souscription pour les différentes branches. La longueur des cycles sont, respectivement, de 6.03 années pour la RCA, de 5.66 années pour le DA et de 7.46 années pour le DAB. Ces résultats sont assez proches de ceux obtenus par [Ven85] pour son travail basé sur des données américaines. Il trouva un cycle de 6.3 années pour la RCA, 5.5 années pour le DA et 7.2 années pour le DAB.

Au travers de cette partie, plusieurs conclusions apparaissent :

- La modélisation des cycles de souscription interagit avec plusieurs variables. L'hypothèse que les cycles de souscription sont entièrement liés à l'évolution de la sinistralité (hypothèse faite par le CEIOPS) nie l'environnement économique des assureurs (concurrence avec les autres acteurs du marché, contrainte de capital, ...).
- Les variables affectant l'évolution des primes d'assurance se comportent différemment selon la phase du cycle.
- Ne pas tenir compte des comportements à court terme de l'évolution des primes revient à ne pas intégrer les décisions stratégiques de l'entreprise d'assurance.

L'interaction des déterminants de l'évolution des primes ne pourra être pleinement prise en compte que via un modèle interne, il est intéressant de voir s'il est possible d'avoir une approche par la formule standard intégrant les cycles de souscription. Ce point fera l'objet du paragraphe suivant.

Modèle alternatif Le modèle précédent explique comment construire un modèle stochastique pour estimer le risque de prime pour une compagnie qui utiliserait un modèle interne. Etant conscient que toutes les compagnies n'ont pas les capacités financières et logistiques pour investir dans un tel modèle, il est intéressant de tenter de définir une formule standard à même de dépasser les lacunes de la formule actuelle.

Comme mentionné précédemment, le CEIOPS applique la volatilité inter-régime à la prime anticipée sans distinguer le régime, alors qu'il semble plus réaliste d'appliquer la volatilité intra-régime et l'évolution de la prime selon le positionnement dans le cycle (ie la phase du régime). Graphiquement, l'approche suivie par le CEIOPS peut être représentée avec les lettres " A " et " B ". Elle s'applique sans discernement de la phase du régime. Dans un marché haussier, le modèle du CEIOPS requiert plus de capital parce que le risque de prime est calculé au moyen d'un pourcentage appliqué sur la prime. Or si la compagnie augmente ses primes, son risque d'insolvabilité devrait diminuer.

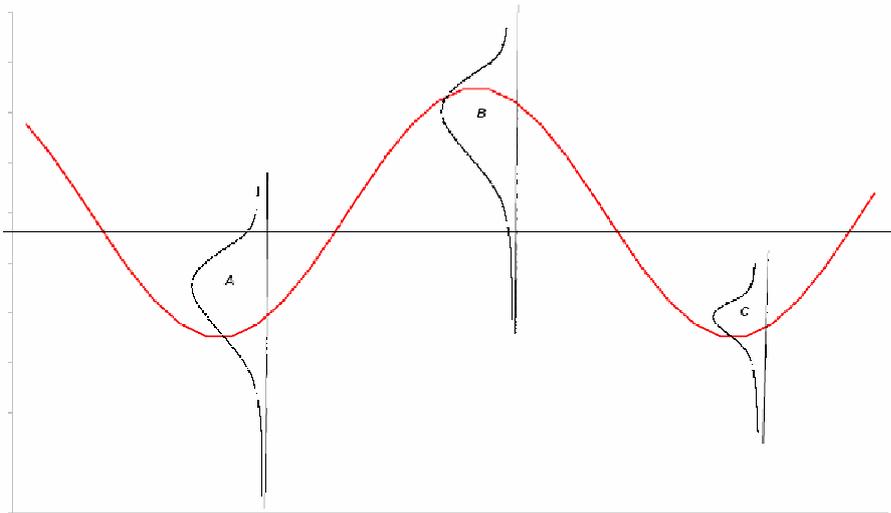


FIGURE 3.7 – Modèle Alternatif pour le risque de prime

Dans l'alternative proposée, le régime est identifié. La fonction de distribution représentée par " C " a une queue plus légère, ceci représentant la distribution du marché baissier.

La volatilité et l'évolution des primes sont spécifiques au marché baissier.

De manière plus précise, selon l'état actuel du cycle, une formule fermée basée sur une approche à facteur comme dans Solvabilité 2 pourrait être appliquée. Cette formule représenterait une somme pondérée des mesures de risques dans les deux états du régime (équivalent à la valeur espérée), multipliée par la prime attendue :

$$PR = PE[\pi_{s_t,H}(\alpha_H + \rho(X_H)(1 + \alpha_H)) + \pi_{s_t,S}(\alpha_S + \rho(X_S)(1 + \alpha_S))], \quad (3.14)$$

où :

PR est le risque de prime.

PE est la prime de l'année N .

α_H, α_S représentent, respectivement, l'évolution de la prime dans le marché haussier et le marché baissier (par exemple : 3% et -2%).

$\pi_{s_t,H}, \pi_{s_t,S}$ représentent, respectivement, la probabilité de passer de l'état s_t au marché haussier, et la probabilité de passer de l'état s_t au marché baissier. s_t est le marché haussier ou baissier.

$\rho(X_H), \rho(X_S)$ correspond, respectivement, au 99.5^{ème} percentile de la fonction distribution dans le marché haussier et dans le marché baissier, une distribution lognormale dans le cas présent.

Ces paramètres seraient estimés par le régulateur local. En utilisant les paramètres précédents (donnés dans le Tableau 3.12) pour calculer le risque de prime suivant cette approche (en gardant les mêmes hypothèses : distribution lognormale et Value at Risk), les pourcentages à appliquer à la prime sont communiquées dans le Tableau 3.13 :

TABLE 3.12 – Paramètre pour le modèle alternatif

Branche	α_S	$\rho(X_S)$	α_H	$\rho(X_H)$
RCA	-4.2%	-12.7%	4.8%	-9.3%
DA	-2.9%	-7.9%	4.5%	-5.3%
DAB	-4.2%	-15.3%	5.5%	-6.3%

Utiliser la volatilité inter-régime, comme le fait le CEIOPS, plutôt qu'utiliser la volatilité intra-régime donne des résultats très différents et nécessite d'immobiliser plus de capital que dans le modèle distinguant les phases du régime. Ce résultat se retrouve en phase baissière du cycle.

Ces différences importantes peuvent s'expliquer par le fait que le CEIOPS estime le risque de prime en se basant sur le ratio sinistres à prime. Alors que dans le modèle utilisé, le risque de prime est estimé sur les primes normalisées par l'exposition. Afin de comparer l'impact du cycle de souscription sur la formule standard, la même analyse est effectuée

TABLE 3.13 – Comparaison du risque de prime

Etat actuel	RCA	DA	DAB
Marché baissier	13%	7%	9%
Marché haussier	9%	4%	4%
Solvency II	29%	29%	29%

en utilisant le ratio sinistres à prime pour deux échantillons. L'un est le même que le précédent (Panel A) et l'autre un échantillon étendu comprenant 25 compagnies (Panel B) avec une période moyenne de 9.4 années.

TABLE 3.14 – Comparaison du risque de prime avec le ratio sinistres à prime

Echantillon	Etat actuel	RCA	DA	DAB
Panel A	Marché baissier	22%	15%	30%
	Marché haussier	21%	6%	26%
	Solvency II	29%	29%	29%
Panel B	Marché baissier	22%	16%	30%
	Marché haussier	20%	6%	26%
	Solvency II	29%	29%	29%

Le travail est réalisé sur base calendaire. Cela signifie que la volatilité et l'évolution du ratio sinistres à primes inclus le risque de prime et une part du risque de provisionnement. Les enseignements des résultats du Tableau 3.14 sont nombreux :

- Sur la base de l'échantillon utilisé, les estimations du risque de prime par le CEIOPS sont supérieures.
- Du fait des niveaux et des volatilités spécifiques à chaque régime, le besoin en capital est assez semblable dans les deux phases du cycle pour les branches RCA et DAB. Ce qui justifierait le choix du CEIOPS d'avoir une vision à travers le cycle, à la limite près que le niveau est plus faible pour la RCA. Par contre, une différence significative apparaît pour le DA, où le besoin en capital est moitié moindre dans le cas où les primes augmentent.
- L'utilisation du ratio sinistres à primes pour quantifier la variabilité des primes perturbe l'analyse et augmente de manière sensible le besoin en capital.

3.3 Conclusion

Le CEIOPS reconnaît l'existence de fluctuations dans les primes d'assurance, et requiert à ce titre que les compagnies détiennent du capital pour les protéger contre cet aléa. Néanmoins, la méthodologie proposée n'identifie que la variation des sinistres comme source de variabilité des primes, sans tenir compte de l'environnement économique et concurrentiel.

Utiliser un modèle à changement de régime pour intégrer les phases des cycles de souscription (un régime baissier et un régime haussier) permet d'estimer quelles variables influencent la formation de la prime et ainsi d'anticiper un besoin en capital au titre des cycles et d'améliorer la méthode de tarification mise en oeuvre au sein de la compagnie. Il serait également possible de les intégrer en améliorant la formule standard. Cela donnerait des indications aux Directions des compagnies d'assurance de l'impact d'une modification de la tarification des contrats sur le besoin en capital.

4 Conclusion de l'horizon temporel

Un horizon aussi court que celui spécifié par Solvabilité 2 entraîne d'importantes conséquences en ce qui concerne la stratégie d'une compagnie d'assurance et par voie de conséquence pour la supervision effectuée par le régulateur.

Une entreprise qui chercherait à optimiser son rendement en capital ne serait-elle pas tentée de privilégier des stratégies certes gagnantes à court terme, mais aussi défavorables aux assurés à long terme ?

Est-ce qu'une compagnie pourrait attendre de voir les résultats d'une décision qui mettra plusieurs mois à s'appliquer ? Dans l'exemple d'une décision de politique tarifaire en assurance automobile qui se fait un an à l'avance, le délai de mise en application de la nouvelle stratégie commerciale prend du temps puisqu'il faut que les polices soient renouvelées. Ainsi, une hausse des tarifs décidée en juin N-1, sera appliquée progressivement au cours de l'année N. Si la fréquence de mise à jour du calcul du besoin en capital est décidé semestriellement par le régulateur, évaluer l'impact de cette décision avant que toutes les polices concernées ne soient impactées n'aura pas de sens et pourrait remettre en cause cette décision ou amputer le capital disponible. Pour faire face à ce problème d'arbitrage entre court et long terme, l'assureur devra puiser dans son excédent de couverture et ainsi détenir plus de capital que celui qui est demandé par la réforme. L'horizon temporel décidé par Solvabilité 2 se concilie difficilement avec la réalité managériale d'une compagnie d'assurance.

L'horizon de solvabilité des assureurs à 1 an est pertinent lorsque le secteur est soumis à

une crise systémique telle que celle survenue sur les marchés financiers au second semestre 2008 ; Ainsi conscient des difficultés rencontrées, le régulateur peut demander une mise à jour de l'estimation du besoin en capital à tous les acteurs du marché et réagir rapidement si des problèmes de capitalisation apparaissent. Dans le cadre d'évènements majeurs (crise financière, tempête, . . .), l'optique court terme est donc justifié.

A l'inverse lorsqu'un assureur, éprouvera des difficultés financières de manière isolée, le régulateur ne connaîtra ces difficultés que lorsqu'il mettra à jour le calcul du SCR. Un problème spécifique à un assureur passera inaperçu pour le régulateur tant que sa faillite ne menace pas le système économique. Il est à noter que ce constat est d'ores et déjà valable avec le système actuel. Il appartiendra au régulateur de trouver un équilibre entre la fréquence du calcul du besoin en capital et la réalité opérationnelle d'un assureur.

Bibliographie

- [ACA08] ACAM. Orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques. Technical report, ACAM, 2008.
- [ACM07] AISAM ACME. Study on non-life long tail liabilities. Technical report, AISAM - ACME, 2007.
- [ADE+07] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, D. Heath, and H. Ku. Coherent multiperiod risk adjusted values and bellmann’s principle. *Annals of operationnal research*, 152 :5–22, 2007.
- [BS70] H. Buhlmann and E. Straub. Glaubwürdigkeit für schadensätze. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 1970.
- [CD97] JD. Cummins and P. Danzon. Price, financial quality and capital flows in insurance markets. *Journal of Financial Intermediation*, 6 :3–38, 1997.
- [CEI08] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.
- [CEI09a] CEIOPS. Cp - 42 risk margin. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09b] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2 : article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CHT02] S. Choi, D. Hardigree, and P. Thistle. The property-liability insurance cycle : A comparison of alternative models. *Southern Economic journal*, 68 :530–548, 2002.
- [CO87] JD. Cummins and JF. Outreville. An international analysis of underwriting cycle. *Journal of Risk and Insurance*, 54 :246–262, 1987.
- [DL09] L. Devineau and S. Loisel. Construction d’un algorithm d’accélération pour le calcul du capital économique dans solvabilité 2. *preprint*, 2009.
- [dR07] Caisse Centrale de Réassurance. Natural disasters in france. Technical report, Caisse Centrale de Réassurance, 2007.
- [DS06] K. Detlefsen and G. Scandolo. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. *Electronic journal of probability*, 11 :57–106, 2006.

- [EC07] European-Commission. Directive of the european parliament and of the council on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance solveny ii. Directive, European Commission, 2007.
- [Fit07] Rating Fitch. 2006 prism and beta aggregated capital scores for french life and non-life insurers. Technical report, Fitch, 2007.
- [FLPW98] HG. Fung, G. Lai, G. Patterson, and R. Witt. Underwriting cycle in property and liability insurance : An empirical analysis of industry and byline data. *Journal of Risk and Insurance*, 65 :539–562, 1998.
- [FS02] H. Follmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6 :429–447, 2002.
- [Gro90] A. Gron. *Property-Casualty Insurance Cycle, Capacity Constraint, and Empirical result*. Phd thesis, MIT, 1990.
- [Gro94a] A. Gron. Capacity constraint and cycle in property-casualty insurance markets. *RAND Journal of Economics*, 25, 1994.
- [Gro94b] A. Gron. Evidence of capacity constraint and cycle in insurance markets. *Journal of Law and Economics*, 37, 1994.
- [GS98] H. Gerber and E. Shiu. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2 :48–72, 1998.
- [Hal93] JD. Haley. A cointegration analysis of relationship between underwriting margins and interest rates : 1930-1989. *Journal of Risk and Insurance*, pages 480–493, 1993.
- [Hal95] JD. Haley. A by line cointegration analysis of underwriting margins and interest rates in the property-liability insurance industry. *Journal of Risk and Insurance*, pages 755–763, 1995.
- [Ham05] JD. Hamilton. *Regime-Switching Models*. Palgrave Dictionary of Economics, 2005.
- [HK04] D. Heath and H. Ku. Pareto equilibria with coherent measures of risk. *Mathematical finance*, pages 163–172, 2004.
- [HT00] M. Higgins and P. Thistle. Capacity constraints and the dynamics of underwriting profits. *Economic Inquiry*, 38 :442–457, 2000.
- [HW04] M. Hardy and J. Wirch. The iterated cte - a dynamic risk measure. *preprint*, 2004.
- [KPS03] C.J. Kim, J. Piger, and R. Startz. Estimation of markov regime switching regression models with endogeneous swtiching. Working paper, Federal Reserve Bank of St. Louis, 2003.
- [LM06] C. Leng and U. Meier. Analysis of multi national underwriting cycles in property-liability insurance. *The Journal of Risk Finance*, 7 :146–159, 2006.

-
- [LP09] S. Lindset and SA. Persson. Continuous monitoring : lokk before you leap. *preprint*, 2009.
- [Mor96] JP. Morgan. Risk metrics - technical document. Technical report, JP. Morgan, 1996.
- [PL97] C. Lefèvre and P. Picard The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :58–69, 1997.
- [PL08] P. Picard and S. Loisel. On finite time ruin probabilities for classical ruin models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :41–60, 2008.
- [Rie04] F. Riedel. Dynamic coherent risk measure. *Stochastic processes and their application*, 112 :185–200, 2004.
- [SP05] Standard and Poor’s. Property casualty insurance rating criteria. Technical report, Standard and Poor’s, 2005.
- [Ven85] E. Venezian. Ratemaking method and profit cycles in property and liability insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 52 :477–500, 1985.
- [Wan00] T. Wang. A class of dynamic risk measures. *preprint*, 2000.
- [Win88] R. Winter. The liability crisis and the dynamics of competitive insurance markets. *Yale Journal on Regulation*, pages 455–499, 1988.
- [Win91] R. Winter. Solvency regulation and the property - liability insurance cycle. *Economic Inquiry*, 29 :458–471, 1991.
- [Win94] R. Winter. The dynamics of competitive insurance markets. *Journal of Financial Intermediation*, 3 :379–415, 1994.

Chapitre 4

La dépendance dans Solvabilité 2

1 Introduction

Depuis maintenant plusieurs années, voire des décennies, la problématique de la dépendance est au coeur des travaux académiques en finance et en assurance. Ces recherches ont été appliquées dans un premier temps par les professionnels du monde de la finance via la théorie moderne du portefeuille de H. Markowitz (voir [Mar52]) et du Modèle l'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF ou CAPM) avec W. Sharpe (voir [Sha64]), les deux évoluant dans un cadre bien spécifique (la corrélation étant définie par le coefficient de corrélation entre des variables aléatoires).

Cette thématique s'est diffusée plus tardivement dans le monde de l'assurance, il a fallu attendre la fin des années 90 avec les livres pionniers de H. Joe (voir [Joe97]) et R. Nelsen ([Nel99]) pour que le champ actuariel tourné vers l'assurance se l'approprie, quand bien même l'un des théorèmes fondateurs, le Théorème de Sklar (voir [Skl59]) ait été établi très tôt, et que W. Hoeffding ([Hoe40]) ou M. Fréchet ([Fre51]) donnent les bases à cette théorie dès le milieu du siècle dernier. Par la suite d'autres auteurs ont contribué au développement du thème de la dépendance, tel P. Embrechts (avec [ELM97]), A. McNeil (voir [EMS99]) ou bien encore C. Genest (voir [Gen86]). Toutes ces recherches orientées vers l'assurance se sont focalisées sur une nouvelle façon de prendre en compte la dépendance autrement que par un coefficient de corrélation linéaire (dépendant des distributions sur lesquelles portent la dépendance) à savoir par les copules. Une copule est une alternative à l'extension des distributions univariées aux distributions multivariées, puisque la fonction multivariée obtenue a une structure de dépendance indépendante du choix des marginales. Cet avantage apparemment anodin est en fait très utile, puisque cela permet une représentation des marginales avec des lois uniformes (voir la Section 4.2) et ainsi de séparer la structure de dépendance des distributions suivies par chacune des

variables aléatoires. Plusieurs familles de copules existent, chacune ayant des avantages et des inconvénients en ce qui concerne leur flexibilité, leur paramètre ou bien encore la façon de les implémenter. Toutes ces propriétés feront l'objet de la Section 4. En parallèle à cette évolution, d'autres indicateurs ont été mis en avant pour suivre la distinction entre la distribution jointe et les distributions marginales et par la même résoudre les lacunes d'utilisation du coefficient de corrélation linéaire. Ces indicateurs alternatifs seront présentés à la Section 2.

Même si les débuts de ces travaux dans le monde de l'assurance ont déjà plusieurs années et que leurs transpositions en dehors du monde académique offre de réelles avancées, leurs applications comme outil de gestion par les professionnels est récente. Jusqu'alors, seule la notion d'indépendance était présumée entre les risques puisqu'elle garantissait la loi faible des grands nombres; l'assureur pouvait ainsi profiter de la mutualisation des risques. Des phénomènes de grande ampleur touchant plusieurs risques simultanément sont venus remettre en question cette hypothèse et confirmer ce que ces travaux avaient démontré, à savoir que ne pas prendre en compte les dépendances existantes au sein d'un portefeuille pouvait conduire à des conclusions erronées, notamment en ce qui concerne la détermination du besoin en capital.

Fort de ces avancées scientifiques permettant de quantifier et modéliser la dépendance entre les risques, il restait au régulateur à transposer ces structures dans un cadre réglementaire, puisque les dépendances jouent un rôle majeur dans l'estimation du capital réglementaire d'une compagnie. Compte tenu du niveau de sécurité recherché dans la réforme, à savoir la perte qui surviendra dans un cas sur 200 dans l'année à venir, la prise en compte des dépendances est primordiale, la survenance de cette situation extrême ayant à coup sûr des conséquences sur l'ensemble de l'activité d'assurance.

Dans le cas d'un évènement naturel, tel une tempête, les dommages causés sur les habitations ainsi que sur les véhicules viennent immédiatement à l'esprit. Mais celle-ci entraînera d'autres conséquences : les forêts sont dévastées, les zones côtières subissent les débordements de la mer, les lignes électriques sont coupées. Lors de la remise en fonction des appareils électriques, des pannes électriques voire des incendies peuvent survenir, sans compter les conséquences de ces dégâts sur l'activité des entreprises à savoir la perte d'exploitation.

Cet exemple réaliste montre bien qu'une situation pour laquelle tous les impacts sont a priori bien identifiés, entraîne de par son ampleur des dégâts non envisagés ou sous estimés. Ainsi la problématique des dépendances est cruciale au niveau global de la compagnie.

A ce stade il convient de distinguer les deux formes de dépendances qui coexistent dans un portefeuille d'assurance :

- Les dépendances implicites
- Les dépendances explicites

Les dépendances explicites correspondent à l'idée de causalité dans le sens où les variables aléatoires partagent un même facteur de risque, ce qui est le cas dans l'exemple précédent. Ainsi sachant la valeur prise par la source de risque commune aux variables aléatoires, celles-ci sont indépendantes. Le modèle est dit explicite parce que les causes de la dépendance entre les variables aléatoires sont identifiées. Ce sont les dépendances qui sont appliquées dans le cadre de la modélisation d'évènements naturels. Puisque le montant des dégâts sur les maisons et sur les voitures consécutif à une tempête seront reliés à la fois par la localisation de la tempête et par son intensité. L'important pour ce type de dépendance est de s'assurer que les effets du facteur se propagent correctement dans le modèle (l'exemple de la dépendance entre le taux d'intérêt et le taux de rachat des contrats d'assurance-vie est une illustration de cette difficulté).

Inversement, pour les dépendances implicites, les dépendances entre variables aléatoires sont modélisées en spécifiant directement la structure de dépendance entre celles-ci puisque la source de risque n'est pas modélisée directement. Plusieurs raisons peuvent expliquer le fait que la source de risque ne soit pas modélisée :

- Elle n'est pas observable directement.
- La source de risque n'est pas modélisable (parce qu'il n'existe pas de modèle fiable ou parce que les données manquent).

A titre d'exemple, [FV98] utilisent cette forme de dépendance pour démontrer l'influence du décès de l'un des conjoints sur la probabilité de décès du conjoint survivant. Pour ce cas de figure, la source de risque n'est pas observable directement puisqu'étant issue de facteur sociaux et environnementaux.

Avant de présenter la réponse du CEIOPS sur la manière de représenter ces deux formes de dépendance, il convient de rappeler que pour déterminer les variables aléatoires sur lesquelles s'appliquera la dépendance, le régulateur a adopté une approche " Bottom-Up ". C'est à dire qu'il a identifié 6 classes de risque intégrant elles-mêmes des sous modules, cette structure revient in fine à définir des dépendances pour 19 modules de risque (voir Figure 1.8).

Parmi toutes les structures de dépendance qui existent (simple addition des risques, application d'un pourcentage fixe de diversification, matrice de corrélation, copules, modèle à choc commun, voir [BC08]), le régulateur a retenu une matrice de " corrélation " ¹ qui s'applique sur les montants de capitaux de chacun de ces 19 modules de risque. Cette ap-

1. Le mot "corrélation" suit la terminologie employée par le CEIOPS (voir [CEI08]), bien que ce terme ne puisse s'utiliser que lorsqu'il s'agit de variables aléatoires.

proche est censée refléter une forme de dépendance entre des situations extrêmes. Comme mentionné dans les chapitres précédents, les risques ne sont pas dans cette méthode d'agrégation des variables aléatoires mais des constantes.

En procédant de la sorte, la réforme introduit une confusion entre la corrélation des risques et la corrélation des extrêmes. A titre d'illustration, soit X et Y qui suivent une distribution lognormale bivariée dont les paramètres sont $(\mu_X = 5\%, \sigma_X = 10\%)$ et $(\mu_Y = 10\%, \sigma_Y = 20\%)$ et θ le coefficient de corrélation. Il en ressort les statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} VaR_{99.5\%}(X) &= 136\%, SCR_{0.5\%}(X) = VaR_{99.5\%}(X) - E(X) = 30.3\% \\ VaR_{99.5\%}(Y) &= 185\%, SCR_{0.5\%}(Y) = VaR_{99.5\%}(Y) - E(Y) = 72.3\% \end{aligned}$$

Le Tableau 4.1 est un tableau de correspondance entre les deux méthodes d'agrégation. En mettant le coefficient indiqué dans chaque colonne, les deux méthodes donnent le même montant de capital.

TABLE 4.1 – Corrélation : Risques vs Extrêmes

Corrélation des risques	Corrélation des extrêmes
10%	2.49%
20%	11.09%
25%	17.37%
50%	46.40%
75%	72.63%

Lecture : Introduire un coefficient de corrélation de 10% dans le cas de la corrélation des risques² donne un montant de capital équivalent au cas de la corrélation des extrêmes³ avec un coefficient de "corrélation" de 2.49%.

Dans le Tableau 4.1 apparaît que plus le coefficient est élevé, moins il y a d'écart entre les deux coefficients. Pour obtenir le même montant de capital, la méthode de corrélation des extrêmes a besoin d'un coefficient de corrélation plus faible que la méthode où le capital est déterminé sur la corrélation des risques. Bien que sur cet exemple simpliste, la méthodologie proposée par Solvabilité 2 est plus conservatrice, il met en évidence que l'approche d'agrégation des capitaux ne permet pas de refléter les dépendances implicites.

2. $(SCR(X + Y) = VaR_{99.5}(X + Y) - E(X + Y))$

3. $(\sqrt{(SCR_{0.5\%}(X))^2 + (SCR_{0.5\%}(Y))^2 + 2\theta SCR_{0.5\%}(X)SCR_{0.5\%}(Y)})$

De la même façon pour représenter les dépendances explicites, la méthode de Solvabilité 2 n'est pas adéquate comme le montre le fonctionnement du sous module du risque de rachat dans la classe du risque de souscription vie. Ce sous module lié à l'estimation de l'exposition de la compagnie à un risque de rachat des contrats d'assurance vie est déterminée de manière isolée (voir Chapitre 1 - Section 3.4.1 pour une présentation de ce module). Or, l'évolution des taux d'intérêts peut entraîner une vague de rachat importante, si celui-ci est au-dessus du taux servi ou inversement si le taux du marché est en dessous. De la même manière, une situation économique détériorée peut avoir un impact sur le comportement des assurés. Ainsi, déterminer de manière isolée le risque de rachat sans prendre en compte les interactions avec les autres risques sous estime ce risque. Comme le mentionne le CEIOPS dans [CEI09f], ce problème ne peut pas être résolu en augmentant le coefficient entre la classe du risque de souscription en vie et les autres classes de risque, car cela amènerait à tort, une augmentation de la dépendance entre des classes de risque (par exemple le risque catastrophe en vie et le risque de marché). Ce constat de mauvaise prise en compte des dépendances explicites peut être fait pour d'autres risques, par exemple pour la dépendance entre le risque de souscription et le risque de défaut, ou bien celle entre le risque de marché et le risque de crédit.

Ces exemples démontrent que malgré la littérature abondante sur la thématique de la modélisation de la dépendance, l'approche suivie par le régulateur n'est pas la plus pertinente pour reproduire les formes de dépendances présentes dans un portefeuille d'assurance. Dès lors il est légitime de s'interroger sur les raisons du choix de cette approche par le CEIOPS. Plusieurs raisons peuvent être avancées :

- Par essence, une formule standard doit être applicable par tous les acteurs du marché afin qu'elle ait un caractère universel. Comme le mentionne [Sai04], les risk-managers seront les principaux utilisateurs des résultats. Ceux-ci préféreront sans doute une méthode simple, voire forfaitaire, produisant des résultats stables et compréhensibles plutôt qu'une méthode scientifiquement plus rigoureuse mais entraînant des instabilités dans les résultats et donc un problème de communication.
- Toutes les entreprises d'assurance n'auront pas nécessairement les moyens humains et financiers pour réaliser un modèle interne.
- Cette méthode permet une consolidation facile de différents risques pour lesquels le niveau d'information n'est pas équivalent.
- Paramétrer et valider une distribution multivariée au niveau d'un portefeuille est difficile, puisqu'il faut disposer de données et d'un historique important.
- Une formule standard peut-être considérée comme une approximation d'un modèle interne (voir [DL09b]).

Naturellement ce choix de la simplicité et de facilité d'application dans le cadre de la formule standard n'est pas satisfaisant du point de vue des professionnels. Le nombre

important de contributions au QIS4, pour lequel pas moins de 710 entreprises ont fourni des résultats (voir [CEI09a]) via une modélisation interne, illustre leurs intérêts pour une approche permettant de résoudre les faiblesses de la formule standard et ainsi mieux représenter la réalité de leurs risques.

Le monde académique partage cette vision de l'avantage des modèles internes, comme l'attestent les nombreux travaux réalisés en lien avec la détermination du besoin en capital (voir [CCL04], [EHJ03], [EMS05], [EP08], [PS08], [QM05]). Dans chacun de ces travaux académiques, ce sont toujours les dépendances implicites qui ont été étudiées. En effet, comme expliqué précédemment les dépendances explicites sont mises en oeuvre "naturellement" dans le cadre d'un modèle interne via la construction de celui-ci (voir [SCO08] pour un exemple d'implémentation de ces dépendances dans un modèle interne). Ainsi, bien que la formule standard ne permet pas de reproduire cette forme de dépendance, seules les dépendances implicites seront envisagées dans la suite de ce chapitre, car elles relèvent de l'application d'outils statistiques et non de problèmes de propagation des effets du facteur commun dans le modèle interne.

La problématique de la dépendance va induire deux pistes de réflexions différentes dans ce chapitre :

- N'existe-t-il pas une méthode d'agrégation adaptée à une formule standard qui soit plus pertinente ? La méthode utilisée par le régulateur pour modéliser la dépendance est critiquable car appliquer des coefficients sur des constantes ne permet pas de représenter la dépendance existante (quelques soient les valeurs de ces coefficients). Pourtant, malgré ce constat, celui-ci a recours à cette méthode à chaque noeud de la cartographie des risques (voir la Figure 1.8), à l'exception du risque de souscription non-vie où une autre approche (voir Chapitre 1 - Section 4) est utilisée. Il est intéressant de voir si pour cette seule exception ce choix paraît plus pertinent. La réponse sera apportée à la Section 3.
- Comment une structure de dépendance issue du monde académique peut s'inscrire dans un cadre réglementaire ? Le régulateur va avoir différentes exigences avant d'autoriser les compagnies à utiliser leur propre structure de dépendance dans leur modèle interne (voir [CEI09i]). De plus lorsque Solvabilité 2 sera appliquée, le régulateur demandera aux entreprises utilisant un modèle interne de communiquer les résultats suivants les deux approches (voir [CEI09c]) et de fournir une explication de la différence. Il est donc intéressant de voir si ces règles vont se concilier avec les propriétés de ces structures et sous quelles contraintes. Ce point sera abordé à la Section 4.

Avant d'aborder les structures de dépendance, différents indicateurs permettant de quantifier la dépendance seront présentés à la Section 2 afin de mettre en perspective le choix

du régulateur.

2 Comment mesurer la dépendance

Dans cette section sera présentée des indicateurs permettant d'évaluer la dépendance entre des variables. Dans une première sous section, des indicateurs de dépendance dans un cadre bivarié seront présentés, autrement dit la dépendance sera caractérisée pour un couple de variables aléatoires. Cet environnement est le plus développé à l'heure actuelle et est aussi le plus facile à appréhender. Puis dans une seconde sous section, des indicateurs dans un cadre multivarié seront abordés. Avec l'introduction de plusieurs classes de risque dans sa mesure de risque, le régulateur oriente la réflexion vers un cadre multivarié. Comme il le sera démontré, les dépendances dans ce cadre sont plus délicates à exprimer.

2.1 Cadre bivarié

Coefficient de corrélation de Pearson Il s'agit de l'indicateur le plus connu. Il est également appelé le coefficient de corrélation linéaire. Il repose sur la formule suivante :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y), \quad (4.1)$$

où $\text{Var}(X)$ est la variance de la variable aléatoire X et $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ est la covariance entre X et Y . La covariance mesure l'addition ou la diminution de volatilité de la somme de variables aléatoires par rapport à la somme de la variabilité de chacune des variables aléatoires. La covariance permet donc d'apprécier le sens de variation de deux variables aléatoires. Soit deux variables aléatoires X et Y admettant des moments d'ordre 2. Le coefficient de corrélation de Pearson entre X et Y , noté $\rho(X, Y)$, est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Plus le coefficient de corrélation de Pearson sera grand en valeur absolue, plus la dépendance entre les variables aléatoires sera forte. Par définition, l'encadrement du coefficient de Pearson : $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Il est à noter que pour deux variables aléatoires X et Y ayant pour fonction de répartition $F_X(X)$ et $F_Y(Y)$, il n'est pas toujours possible d'avoir une distribution jointe permettant d'atteindre les bornes de l'inégalité. Par exemple, soit X et Y deux variables aléatoires suivant chacune une distribution lognormale de paramètres (μ_X, σ_X) et (μ_Y, σ_Y)

avec un coefficient de corrélation δ . Le calcul du coefficient de corrélation de Pearson donne une valeur inférieure en valeur absolue au coefficient initial :

$$\rho(X, Y) = \frac{\exp \delta \sigma_X \sigma_Y - 1}{\sqrt{(\exp \sigma_X^2 - 1)(\exp \sigma_Y^2 - 1)}}.$$

Un autre inconvénient lié à son utilisation est que pour deux variables aléatoires indépendantes, le coefficient de corrélation sera égale à 0, mais la réciproque est fautive. Avoir un coefficient de corrélation égale à 0, n'indique pas forcément des variables aléatoires indépendantes. Ainsi dans Solvabilité 2, lorsque le régulateur définit des “ corrélations ” (dans l'utilisation qui en est faite, il les assimile à des coefficients de corrélation de Pearson) égaux à 0, il n'est pas pour autant possible d'en déduire l'indépendance des risques. Ainsi, en regardant le tableau des corrélations entre le risque de souscription non-vie et le risque catastrophe non-vie (voir TS.XIII.A.4 dans [CEI08]), le régulateur considère que la perte associée à chacun de ces risques extrêmes ne se réalisera pas en même temps dans ces deux classes de risque. Pourtant, l'exemple donné en introduction de ce chapitre indique que les dépendances pourraient survenir entre ces deux risques. Dans ce cas comment interpréter ce coefficient de 0% ? Une situation où le régulateur sous estime le risque, c'est-à-dire des variables indépendantes ; ou une situation de non indépendance représentée par un coefficient égal à 0 ? Un autre écueil lié à l'utilisation du coefficient de corrélation est que celui-ci n'est calculable que pour des variables aléatoires pour lesquelles les deux premiers moments existent. La distribution des risques du passif d'une compagnie présente généralement un comportement qui n'a pas forcément de variance (voir [Wal03] pour des exemples).

Enfin, l'usage du coefficient de corrélation est restrictif puisqu'appliquer une transformation linéaire strictement croissante aux variables aléatoires mesurées, ne modifie pas la valeur du coefficient de corrélation. Par contre, il sera affecté si une transformation non linéaire est appliquée. Cela correspond au cas où les distributions des variables aléatoires seraient modifiées. Ainsi le coefficient de corrélation dépend à la fois de la structure de dépendance et des distributions des variables aléatoires.

Malgré toutes ces limitations liées au coefficient de corrélation, sa notoriété et sa compréhension rapide en ont fait la mesure de dépendance retenue dans le cadre de Solvabilité 2.

Les autres mesures alternatives proposées dans la suite de cette section compensent les problèmes liés au coefficient de corrélation de Pearson.

Coefficient de corrélation des rangs de Kendall Le coefficient de corrélation des rangs de Kendall, encore appelé le τ de Kendall, utilise le concept des paires concordantes

et discordantes ainsi défini :

Théorème 5. *Des paires de variables aléatoires (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont dites concordantes si $(X_1 < Y_1 \cap X_2 < Y_2)$ ou $(X_1 > Y_1 \cap X_2 > Y_2)$.*

Théorème 6. *Des paires de variables aléatoires (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont dites discordantes si $(X_1 < Y_1 \cap X_2 > Y_2)$ ou $(X_1 > Y_1 \cap X_2 < Y_2)$.*

Théorème 7. *Soit (X_1, X_2) , un couple de variables aléatoires dont les fonctions de répartitions marginales sont connues. Le τ de Kendall du vecteur \mathbf{X} est défini par $\tau(X_1, X_2) = Pr [(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] - Pr [(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0]$ où (X'_1, X'_2) est un couple de variables aléatoires indépendant de (X_1, X_2) et de même loi.*

Le τ de Kendall mesure la différence entre la probabilité que deux couples indépendants mais de même loi soient concordant et la probabilité qu'ils soient en discordance. Un $\tau \geq 0$ signifie qu'en probabilité les couples sont plus en concordance qu'en discordance. La relation suivante est vérifiée pour le τ de Kendall :

$$\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}(F(X, Y)) - 1, \quad (4.2)$$

où $F(X, Y)$ est la fonction de distribution jointe des risques X et Y . Le τ de Kendall est invariant en loi, puisque quelles que soient les fonctions f et g croissantes ou décroissantes, il y a $\tau(f(X), g(Y)) = \tau(X, Y)$. Ainsi, le τ de Kendall ne dépend pas des distributions des variables aléatoires mais uniquement de la structure de dépendance.

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman Ce coefficient, appelé aussi le ρ_S de Spearman, fait appel aux notions de concordance et de discordance en comparant le couple observé à une situation où les variables sont indépendantes.

Théorème 8. *Soit (X_1, X_2) , un couple de variables aléatoires dont les fonctions de répartitions marginales sont connues. Le ρ_S de Spearman du vecteur \mathbf{X} est défini par : $\rho_S(X_1, X_2) = 3 [Pr [(X_1 - X_1^\perp)(X_2 - X_2^\perp) > 0] - Pr [(X_1 - X_1^\perp)(X_2 - X_2^\perp) < 0]]$ où $\mathbf{X}^\perp(X_1^\perp, X_2^\perp)$ est de même loi que \mathbf{X} dont les composantes sont indépendantes.*

Le coefficient de Spearman peut également s'exprimer sous la forme suivante :

$$\rho_S = 12 \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} F(u, v) dudv - 3, \quad (4.3)$$

où $F(u, v)$ est la fonction de répartition jointe des variables aléatoires u et v .

Le ρ_S de Spearman est également invariant en loi.

Ces deux mesures de concordance (ρ_S et τ) sont liées entre elles via différentes relations, voir [CD04]

Coefficients de dépendance de queue Il en existe deux sortes. La première mesure la dépendance entre des risques lorsque ceux ci ont une probabilité de survenance élevée, c'est le " Coefficient of lower tail dependency " (λ_l). Tandis que l'autre mesure la dépendance entre des risques lorsque ceux ci surviennent avec une probabilité faible, il s'agira du Coefficient of upper tail dependency " (λ_u). Ils sont définis par :

$$\begin{aligned}\lambda_l(X, Y) &= \lim_{q \rightarrow 0^+} Pr[X \leq F_X^{-1}(q) | Y \leq F_Y^{-1}(q)], \\ \lambda_u(X, Y) &= \lim_{q \rightarrow 1^-} Pr[X > F_X^{-1}(q) | Y > F_Y^{-1}(q)].\end{aligned}$$

Ces coefficients s'interprètent de la manière suivante : étant donné que la variable aléatoire Y prend une valeur extrême, quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne également une valeur extrême ?

Dans sa façon de produire les "matrices de corrélations" s'appliquant sur les montants de capitaux de chaque classe et sous module de risque et non sur les risques eux-mêmes, le régulateur a voulu introduire une référence à la notion de coefficient de dépendance de queue supérieure. En effet, ces coefficients représentent une pondération entre la situation qui va survenir dans un cas sur 200 dans une classe donnée et une autre situation bicentenaire se produisant en même temps dans une autre classe. Malheureusement, la méthode utilisée pour agréger ces besoins en capitaux ne permet pas d'aller plus loin dans la comparaison avec le coefficient de dépendance de queue, car son application fait référence à un coefficient de corrélation.

Si les indicateurs présentés dans cette première partie sont ceux qui sont les plus utilisés dans le secteur de l'assurance et de la finance, d'autres indicateurs existent tel l'indice de Gini ou le coefficient de Blomqvist.

Les indicateurs de dépendance dans un cadre bivarié sont simples à comprendre et à appliquer. Sauf que la réalité du fonctionnement d'une entreprise d'assurance est plus complexe. Plusieurs risques interagissant entre eux existent au sein d'une compagnie. Ces interactions nécessitent d'avoir des indicateurs de dépendance multivariés.

2.2 Cadre multivarié

Coefficient de corrélation multiple L'extension du coefficient de corrélation de Pearson à un cadre multivarié passe par le coefficient de corrélation multiple. Son interprétation est assez intuitive, il mesure la corrélation entre une variable et une combinaison d'autres variables aléatoires. Le coefficient de corrélation multiple se définit par :

$$\rho_{Y|(X_1, \dots, X_n)} = 1 - \frac{|\Sigma_{YX}|}{|\Sigma_X|},$$

où

- Σ_{YX} est la matrice de corrélation de taille $(n+1) \times (n+1)$ pour les variables (Y, X_1, \dots, X_n) .
- Σ_X est la matrice de corrélation de taille $n \times n$ pour les variables (X_1, \dots, X_n) .
- $|\Sigma_X|$ désigne le déterminant de la matrice de corrélation X.

L'avantage de cet indicateur multivarié est de fournir une information sur l'impact qu'aura l'ajout d'une variable sur la somme des autres variables. Il ne reflète pas la dépendance qui existe au sein du portefeuille, mais simplement la dépendance présente entre un vecteur et une autre variable aléatoire.

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman Contrairement au cas bivarié, il n'y a plus de référence à la notion de concordance et de discordance du fait des dimensions envisagées ($d > 2$). Il existe plusieurs adaptations du coefficient de Spearman dans un cadre multivarié.

$$\begin{aligned} \rho_{S1} &= h(d) \left[2^d \int_{[0,1]^d} F(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - 1 \right], \\ \rho_{S2} &= h(d) \left[2^d \int_{[0,1]^d} u_1 \dots u_d dF(\mathbf{u}) - 1 \right], \\ \rho_{S3} &= h(2) \left[2^2 \sum_{k < l} \binom{d}{2}^{-1} \int_{[0,1]^2} F_{kl}(k, l) dkdl - 1 \right], \\ &= h(2) \left(\frac{2}{3(d-1)d} \sum_{k < l} (\rho_{S,kl} + 3) - 1 \right), \end{aligned}$$

avec $h(d) = \frac{d+1}{2^d + (d+1)}$,

où

- $F(\mathbf{u})$ correspond à la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$
- $F_{kl}(k, l)$ correspond à la fonction de répartition jointe bivariée des variables aléatoires k et l.
- $\rho_{S,kl}$ représente le coefficient de corrélation de Spearman bivarié pour les variables aléatoires k et l.

ρ_{S1} a été analysé par [Joe97], [Nel99] et [Wol80], tandis que ρ_{S2} a été introduit par [Joe97] et [Nel99]. ρ_{S3} présenté par [Ken70] correspond à une vision pondérée du coefficient de Spearman en dimension 2. Les calculs explicites pour ρ_{S1} et ρ_{S2} sont assez délicat. ρ_{S3} est plus souvent utilisé compte tenu de la simplicité de son calcul.

Coefficient de corrélation des rangs de Kendall Là encore, l'interprétation en terme de paires concordantes et discordantes n'est plus possible. L'une des généralisations du τ de Kendall discuté par [Joe97] en dimension $d > 2$ est :

$$\tau_n = \frac{1}{2^{(d-1)} - 1} \left(2^d \int_{[0,1]^d} F(\mathbf{u}) dF(\mathbf{u}) - 1 \right), \quad (4.4)$$

où

– $F(\mathbf{u})$ correspond à la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire \mathbf{u} .

Bien qu'il n'y a plus de référence aux notions de paires concordantes et discordantes, de manière similaire au cas bivarié, il réapparaît la notion d'espérance, plus particulièrement de mesure de l'ordre MTP2, voir [Nel99].

Coefficients de dépendance de queue La même approche que dans le cas bivarié est reprise, à savoir évaluer le comportement limite des variables, conditionnellement au fait que l'une d'entre elle dépasse une certaine valeur.

$$\lambda_U(u_1, \dots, u_d | u_i) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} Pr[\dots, X_{i-1} > F_{i-1}^{-1}(1 - u_{i-1}u), X_{i+1} > F_{i+1}^{-1}(1 - u_{i+1}u), \dots | X_i > F_i^{-1}(1 - u_iu)]$$

$$\lambda_L(u_1, \dots, u_d | u_i) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} Pr[\dots, X_{i-1} \leq F_{i-1}^{-1}(u_{i-1}u), X_{i+1} \leq F_{i+1}^{-1}(u_{i+1}u), \dots | X_i \leq F_i^{-1}(u_iu)]$$

$\lambda_U(u_1, \dots, u_d | u_i)$ définit la limite des probabilités lorsque toutes les variables aléatoires excèdent en même temps les seuils $(1 - u_j u)$ conditionnellement au fait que l'une d'entre elle excède le seuil $(1 - u_i u)$ quand $u \rightarrow 0^+$. L'inverse vaut pour $\lambda_L(u_1, \dots, u_d | u_i)$.

Malheureusement, il y a de nombreux inconvénients à l'utilisation de ces mesures multivariées. Ainsi, il est très restrictif de quantifier toutes les interactions existantes entre les composants d'un vecteur aléatoire avec uniquement un scalaire. De plus le calcul des indicateurs est rendu difficile par la présence d'intégrale multiple. Enfin, il n'existe pas de méthode unique pour étendre le cas bivarié au cas multivarié, comme le montre l'indicateur de Spearman pour lequel différentes méthodes existent.

Ainsi, pour avoir une approche multivariée qui reste facilement compréhensible et interprétable par la plupart des acteurs, le régulateur a retenu une approche faisant

intervenir des coefficients de corrélation bivariés employés au travers d'une matrice de corrélation.

Cette première section a posé les bases des méthodes existantes pour mesurer la dépendance. La suite de ce chapitre présentera les structures de dépendances existantes pour agréger les risques.

3 Comparaison des méthodes d'agrégation dans Solvabilité 2

Bien que la méthode de la “ Règle de la Racine Carrée ” existe dans d'autres formes de réglementations (voir Chapitre 1 - Section 2.2), Solvabilité 2 a mis au grand jour cette structure de dépendance. Cette méthode est employée à chaque noeud de la cartographie des risques (voir Figure 1.8) pour agréger des risques, excepté pour le risque de souscription non-vie.

Au lieu d'introduire une dépendance entre les montants de capitaux suivant une matrice de corrélation, le régulateur a eu une approche plus théorique puisque le capital est déterminé sur la somme des risques (pour une description détaillée de ce module de risque voir le Chapitre 1 - Section 4). Etant donné que ce sont les deux seules méthodes d'agrégation utilisées dans Solvabilité 2, il est légitime de se demander si le choix du régulateur d'opter pour une autre méthode pour le risque de souscription non-vie est pertinent. Pour ce faire, la méthode de la “Règle de la Racine Carrée” sera appliquée sur le risque de souscription non-vie.

Si le SCR du risque de souscription non-vie avait été conforme à la méthode de la “Règle de la Racine Carrée”, il aurait été représenté sous la forme, $SCR_{\sqrt{\cdot}}$:

$$SCR_{\sqrt{\cdot}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} SCR_{\alpha}(X_i) SCR_{\alpha}(X_j)} = \quad (4.5)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i \left(\frac{\exp(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln(\sigma_i^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma_i^2 + 1}} - 1 \right) V_j \left(\frac{\exp(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln(\sigma_j^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma_j^2 + 1}} - 1 \right)}.$$

Dans le cadre du risque de souscription non-vie, le besoin en capital est représenté par $SCR_{0.05\%}(X) = VaR_{99.5\%}(X) - E(X)$ dans le cas d'une distribution lognormale. Cette formule est à comparer à la Formule (1.5).

Dans cette formule, le choix du régulateur quant à la distribution à utiliser a été gardé (une distribution lognormale), mais la différence entre $SCR_{\sqrt{\cdot}}$ et SCR_{uw} sera testée en utilisant d'autres distributions : normale et Pareto. Le choix de ces distributions permet d'avoir une distribution dans chaque domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes, voir [EM97]. Différentes configurations seront également envisagées. Dans un premier temps, les volatilités de chaque branche d'activité seront supposées égales. Puis, le cas où elles sont différentes sera considéré. Aucune remarque sur la pertinence de l'utilisation d'une matrice de corrélation pour modéliser les dépendances de queue ni les propriétés que devraient revêtir cette matrice (voir [Fil09]) ne seront faites. Durant cette comparaison, la matrice de corrélation utilisée (issue du QIS4) sera la même pour les deux méthodes d'agrégation.

3.1 Distribution normale

Aucune différence n'apparaît dans les deux méthodes car :

- La volatilité calculée au niveau de la compagnie correspond à une somme de risques corrélés suivant des lois normales.
- Le SCR est représenté par des multiples de la volatilité.
- La même matrice est appliquée pour les deux méthodes.

$$SCR_{uw} = \left(\sum_{i=1}^m V_i \right) N_{0.995} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma_i V_i \sigma_j V_j}{\left(\sum_{i=1}^m V_i \right)^2}} \right)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} N_{0.995} \sigma_i V_i N_{0.995} \sigma_j V_j} = SCR_{\sqrt{\cdot}}.$$

Ce résultat est une illustration de la remarque faite au Chapitre 1 - Section 3.4.2 dans laquelle était mentionnée le fait que la "Règle de la Racine Carrée" était justifiée dans le cas où les classes de risque suivaient des distributions normales (voir [San05]).

3.2 Cas : Distribution lognormale / $\sigma_i = \sigma_j, \forall (i, j)$

Pour cette configuration le SCR du portefeuille pour le risque de souscription est :

$$SCR_{uw} = \left(\sum_{i=1}^m V_i \right) \left(\frac{\exp \left(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln \left(\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma^2 V_i V_j}{\left(\sum_{i=1}^m V \right)^2}} \right)^2 + 1} \right)} \right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \sigma^2 V_i V_j}{\left(\sum_{i=1}^m V \right)^2}} \right)^2 + 1}} - 1 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m V_i \right) \left(\frac{\exp \left(N_{0.995} \sqrt{\ln((\sigma^2 A) + 1)} \right)}{\sqrt{(\sigma^2 A) + 1}} - 1 \right),$$

où

$$A = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i V_j}{\left(\sum_{i=1}^m V_i \right)^2}, \quad (4.6)$$

$$\text{et } A \in \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^m V_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m V_i V_j \right)}{\left(\sum_{i=1}^m V_i \right)^2}, 1 \right].$$

A peut être défini comme un indice de corrélation. Cet indice peut atteindre des valeurs négatives, mais seule une plage de valeurs limitées ($A \in]0, 1]$) permet d'obtenir une solution. Avec cette plage de valeurs, la décorrélation entre les différentes branches d'activités est possible. Néanmoins, il semble difficile de croire que le régulateur autorise la décorrélation parmi les risques. Pour se persuader de ce point, il suffit d'observer la matrice de corrélation fournie pour le QIS4, dans laquelle aucun des coefficients par défaut n'est négatif (voir ci-dessous pour une discussion sur les coefficients de corrélation retenus par la réforme Solvabilité 2). Ceci signifie que du point de vue du régulateur, la plage de valeurs admissibles devrait être $[\frac{1}{m}, 1]$. Pour un nombre important de branches d'activités, les deux intervalles se rejoignent ($]0, 1]$).

Quand $\lim A \rightarrow 0^+$, les branches d'activités sont indépendantes. A l'inverse, quand les branches d'activités sont comonotones (parfaite dépendance), il y a $\lim A \rightarrow 1$, donc :

$$VaR_{1-\alpha}(X_1 + X_2) = VaR_{1-\alpha}(X_1) + VaR_{1-\alpha}(X_2).$$

La formule de la "Règle de la Racine Carrée" appliquée dans le cas $\sigma_i = \sigma_j, \forall(i, j)$ donne :

$$SCR_{\sqrt{}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i V_j \left(\frac{\exp(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \right)^2}.$$

La fonction qui représente la différence entre les deux méthodes vaut :

$$f(A, \sigma, \alpha) = SCR_{\sqrt{}} - SCR_{uw},$$

$$f(A, \sigma, \alpha) = 1 - \sqrt{A} + \sqrt{A} \frac{\exp \left(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)} \right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - \frac{\exp \left(N_{1-\alpha} \sqrt{\ln(\sigma^2 A + 1)} \right)}{\sqrt{\sigma^2 A + 1}}.$$

3. COMPARAISON DES MÉTHODES D'AGRÉGATION DANS SOLVABILITÉ 2 147

Quand $f(A, \sigma, \alpha) = 0$, il y a égalité entre les deux méthodes, alors que quand $f(A, \sigma, \alpha) < 0$, $SCR_{uw} > SCR_{\surd}$, la méthode utilisée pour le risque de souscription non-vie donne des résultats plus conservateurs que pour le cas de la “Règle de la Racine Carrée”, l’inverse prévaut si $f(A, \sigma, \alpha) > 0$.

Les comportements asymptotiques de la fonction par rapport aux paramètres donnent :

$$\begin{array}{ll} \lim_{A \rightarrow 0^+} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0^+ & \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ A \in (0, 1) \\ \alpha \rightarrow 1^-}} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 1 - \sqrt{A} \\ \lim_{A \rightarrow 1^-} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0^+ & \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0^+ & \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ A \in (0, 1) \\ \alpha \rightarrow 0^+}} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow -\infty. \end{array}$$

Lorsque l’indice de corrélation tend vers 1 ($A \rightarrow 1^-$), la situation représentant le cas survenant une fois sur 200 survient en même temps dans chacune des branches d’activités, le SCR du portefeuille est égale à la somme des SCRs de chaque sous portefeuille. Quand l’indice de corrélation tend vers 0 ($A \rightarrow 0^+$), la situation représentant le cas survenant une fois sur 200 apparaît de manière indépendante dans chaque branche d’activité, les deux méthodes d’agrégation donnent alors le même montant de capital.

Enfin, quand il n’y a aucune incertitude ($\sigma \rightarrow 0$), il n’y a pas besoin de détenir du capital, les deux méthodes donnent le même résultat. Dans le cas où le niveau de la volatilité est important et qu’un faible niveau de sécurité est retenu, la “Règle de la Racine Carrée” est plus élevée que le SCR calculé sur le portefeuille ($SCR_{\surd} > SCR_{uw}$). Une borne inférieure existe dans ce cas, SCR_{\surd} ne pouvant dépasser SCR_{uw} de plus de $1 - \sqrt{A}$. Mais du point de vue du régulateur ou même d’un professionnel, il n’y a aucun intérêt à se focaliser sur un faible niveau de sécurité. Alors qu’avec un niveau de sécurité important, $SCR_{\surd} < SCR_{uw}$, la limite tend vers $-\infty$, ce qui signifie que lorsque la distribution est instable, SCR_{uw} est plus conservateur.

En faisant l’hypothèse que la valeur espérée des risques (risque de prime et de provisionnement) est identique pour chaque branche ($V_i = V_j, \forall(i, j)$) l’indice de corrélation est égal à 40.625% en utilisant la matrice du QIS4. Le choix du CEIOPS est assez fort. Les coefficients de corrélation ne prennent que deux valeurs : 50% ou 25%. Les corrélations entre les branches d’activités sont difficiles à estimer car les historiques de données sont peu nombreux contrairement au monde bancaire et parce que les produits ne sont pas forcément homogènes d’une compagnie à une autre. Il y a trop peu de données pour asseoir des estimations robustes, ainsi “ces coefficients de corrélations intègrent un certain degré de jugement” voir le paragraphe 1.84 dans [CEI07a].

Dans le but de visualiser la différence entre les deux méthodes, la variation relative est utilisée pour avoir une représentation graphique de l'impact sur le besoin en capital :

$$\Delta SCR(A, \sigma, \alpha) = \left(\frac{f(A, \sigma, \alpha)}{SCR_{uw}} \right).$$

La représentation graphique de $\Delta SCR(40.625\%, \sigma, \alpha)$ est donnée à la Figure 4.1.

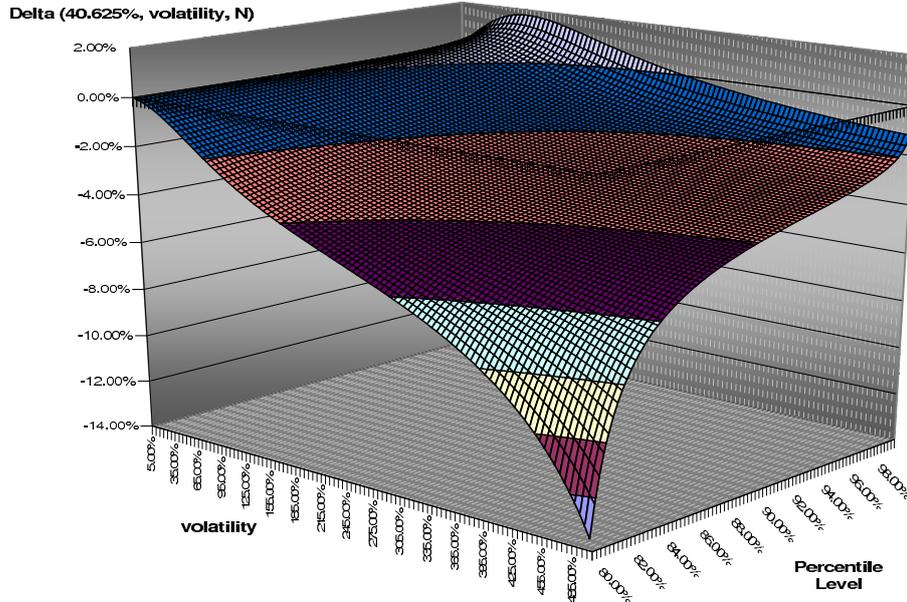


FIGURE 4.1 – Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction σ et $1 - \alpha$

La zone de $\Delta SCR(40.625\%, \sigma, \alpha)$ est principalement négative, ce qui signifie que $SCR_{uw} > SCR_{\sqrt{}}$, donc l'approche par SCR_{uw} (le SCR calculé sur tout le portefeuille) est plus prudente que la méthode employée par le régulateur aux différents niveaux de l'arborescence des risques. La valeur la plus élevée de ΔSCR est de 1.75% pour une volatilité égale à 85% quand $\alpha \rightarrow 0^+$. Donc la différence la plus importante en faveur de "Règle de la Racine Carrée" est de 1.75%.

Dans le QIS4, la plage de valeurs des volatilités pour les branches d'activités est [7%, 15%], voir TS.XIII.B25 dans [CEI08]. Dans le but de mieux visualiser le comportement de la variation, la Figure 4.2 effectue un zoom sur cette plage.

Pour des niveaux faibles de volatilités, $SCR_{\sqrt{}}$ est plus élevé que SCR_{uw} pour des percentiles au dessus de 85%. Puisque le niveau de confiance demandé par Solvabilité 2 est de 99.5%, la méthode d'agrégation utilisée par le régulateur aux différents noeuds de

l'arborescence des risques est plus prudente que celle du SCR calculé sur le portefeuille pour le risque de souscription non-vie. Naturellement, il est possible d'opposer que le niveau de l'écart type est trop faible, mais il faut garder à l'esprit que la volatilité est appliquée sur des risques après prise en compte des techniques de transfert de risque, telle que la réassurance. Le risque sous jacent n'aura pas de comportement instable dès lors que la couverture permet un niveau de protection jusqu'à 99.5%. Donc la plage de valeurs envisagée par le régulateur n'est pas irréaliste.

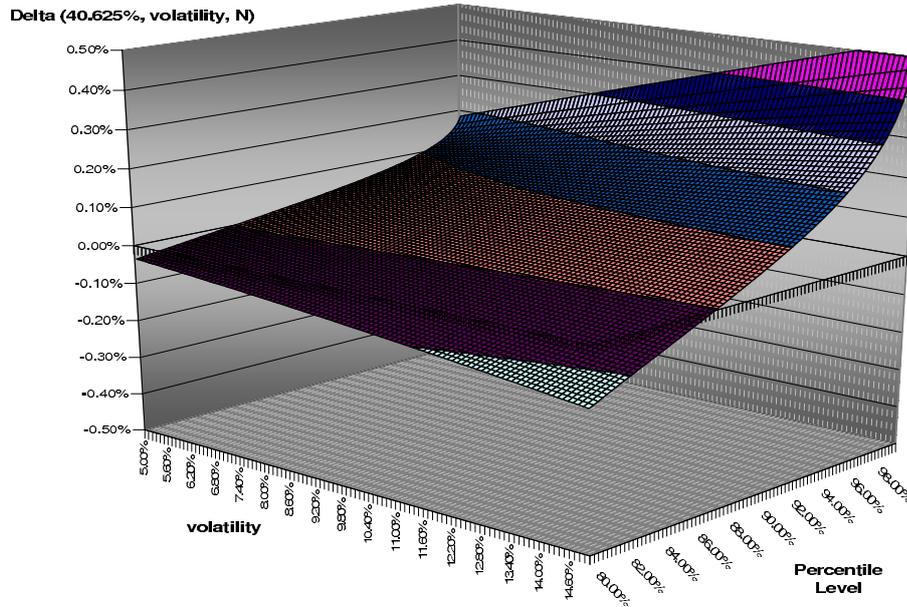


FIGURE 4.2 – Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction σ et $1 - \alpha$

Dans le Tableau 4.2 est donné le niveau de percentile qui égalise les deux méthodes suivant un indice de corrélation estimé à l'aide du QIS4 ($A = 40.625\%$).

TABLE 4.2 – Egalité des deux méthodes

σ	50%	75%	100%	125%	150%	175%	200%
$1 - \alpha$	93%	95.5%	97.25%	98.25%	98.75%	99.25%	99.4%

Au niveau de confiance défini par Solvabilité 2, la volatilité doit être au-dessus de 200% pour avoir $SCR_{uw} > SCR_{\sqrt{\cdot}}$.

Dans le cadre du nouveau référentiel de solvabilité, la "Règle de la Racine Carrée" donne des résultats plus élevés que la méthode utilisée pour le risque de souscription.

Ainsi du point de vue du régulateur, le choix d'utiliser une autre méthode n'est pas pertinent car elle est moins prudente pour les assurés.

3.3 Cas : Distribution lognormale / $\sigma_i \neq \sigma_j$

L'hypothèse d'égalité des volatilités n'est plus retenue, le positionnement utilisé est celui présenté aux Formules (4.5) de la Section 3 et (1.5) du Chapitre 1 - Section 3.3. A nouveau, les deux méthodes d'agrégation sont représentées sous forme de variation. Il n'y a pas de représentation mathématique communiquée puisqu'aucune formule fermée n'existe. Les formules seront appliquées avec deux jeux de données⁴ :

- Des données issues du marché français (voir le site du régulateur français, www.acam.fr)
- Des données provenant du marché américain au travers de la base de données intitulée "Schedule P" obtenue via le regroupement des régulateurs américain au sein du "NAIC".

Comme il n'existe pas de décomposition des branches d'activités au niveau européen, les données du marché américain sont utilisées comme approximation. Pour les deux jeux de données, la vision s'effectue à l'arrêté comptable 2006.

4. La définition des branches d'activités des normes comptables française et américaine étant différente de celle indiquée par Solvabilité 2, des regroupements ont été opérés pour certaines branches, voir Chapitre 3 - Section 3.3.1 pour un exemple de regroupement de branches

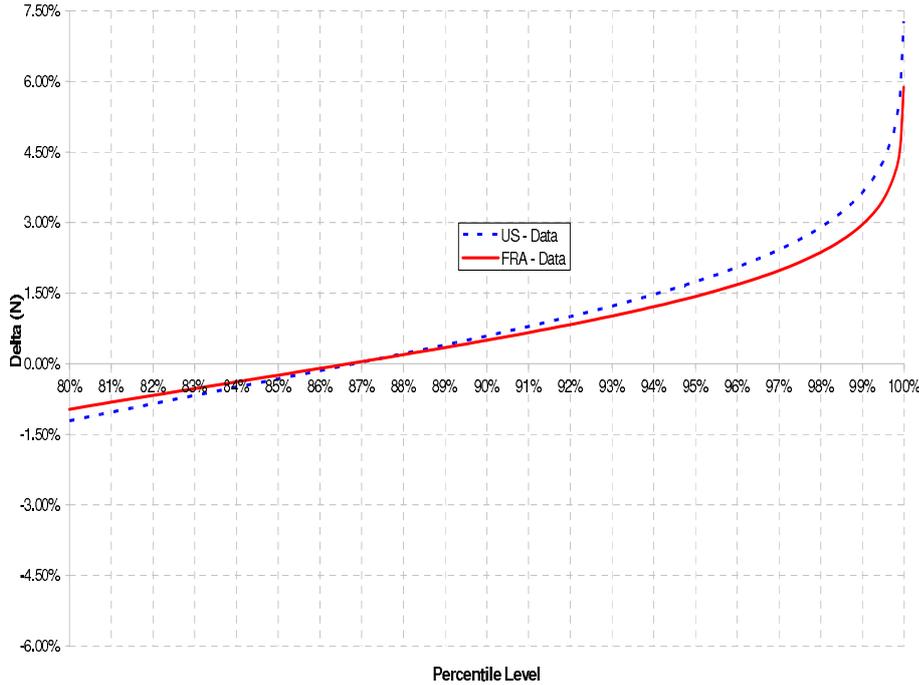


FIGURE 4.3 – Comparaison des méthodes d’agrégation en fonction de $1 - \alpha$

Sur la Figure 4.3, la “Règle de la Racine Carrée” est au dessus du SCR du portefeuille pour des niveaux de percentiles supérieurs à 87%. A 99.5%, la différence est supérieure à 4% pour les données du marché français et environ 3% pour les données américaines. Naturellement, ce pourcentage est faible, mais en gardant à l’esprit que cette méthode d’agrégation est appliquée à chaque noeud de l’arborescence de Solvabilité 2 (voir la Figure 1.8 au Chapitre 1), la différence peut devenir importante au niveau de la compagnie et pénalise les compagnies d’assurance en leur demandant d’immobiliser plus de capital que si l’hypothèse d’un SCR calculé à l’aide d’une distribution lognormale multivariée était faite.

Avec la plage de valeurs des paramètres dans le QIS4, le théorème suivant peut-être établi :

Théorème 9. *Il existe un niveau de percentile $(1 - \alpha)^*$, pour lequel $SCR_{uv} < SCR_{\surd}$ si $(1 - \alpha) \geq (1 - \alpha)^*$.*

Démonstration. Le calcul du comportement asymptotique de la variation par rapport au niveau des percentiles donne :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Delta SCR = - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i V_j}}{(\sum_{i=1}^m V_i)} - 1 < 0.$$

Après différentes étapes de calculs, la limite dans le cas d'un niveau de sécurité élevé est :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Delta SCR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i V_j \exp\left(N_{1-\alpha} \left(\sqrt{\ln(\sigma_j^2+1)} + \sqrt{\ln(\sigma_i^2+1)} - 2\sqrt{\ln(A+1)}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^n V_i\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2+1} \sqrt{\sigma_j^2+1}}} (A+1)^{-1} > 0.$$

La dérivée de $\Delta SCR(A, \sigma, \alpha)$ par rapport à $N_{1-\alpha}$ est positive. □

3.4 Distribution de Pareto

En gardant la même approche, c'est à dire la différence entre le percentile à 99.5% et l'espérance du risque, le SCR pour un risque X suivant une distribution de Pareto est défini par :

$$VaR_{1-\alpha}(X) - E(X) = \left(\frac{\Theta}{\alpha^{1/\nu}} - \frac{\Theta\nu}{\nu-1} \right), \quad (4.7)$$

où

- Θ est le paramètre d'échelle,
- ν est le paramètre de courbure
- α est un percentile.

La paramétrisation est faite avec la méthode des moments (en faisant l'hypothèse additionnelle que pour le risque sous jacent, les deux premiers moments existent) :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Theta\nu}{\nu-1} = 1, \\ V(X) &= \frac{\Theta^2\nu}{(\nu-1)^2(\nu-2)} = \sigma^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\sqrt{\sigma^2+1}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2+1}}, \\ \nu &= \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2+1}}{\sigma}. \end{aligned}$$

Le SCR est égale à :

$$SCR = \left(\frac{\sqrt{\sigma^2+1}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2+1}} \alpha^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma + \sqrt{\sigma^2+1}}\right)} - 1 \right). \quad (4.8)$$

Pour avoir une valeur positive du SCR, le niveau du percentile doit être inférieur à :

$$\alpha^* = \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}} \right)^{\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sigma}} \geq \alpha.$$

Le travail de comparaison se fera dans un premier temps dans le cas où $\sigma_i = \sigma_j, \forall(i, j)$.

Le SCR calculé au niveau du portefeuille est :

$$SCR_{uw} = \left(\sum_{i=1}^m V_i \right) \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 A + 1}}{\sigma A + \sqrt{\sigma^2 A + 1}} \alpha^{-\left(\frac{\sigma A}{\sigma A + \sqrt{\sigma^2 A + 1}}\right)} - 1 \right), \quad (4.9)$$

où A est l'indice de corrélation, voir la Formule (4.6).

Quant à la “Règle de la Racine Carrée”, elle est égale à :

$$SCR_{\sqrt{}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \theta_{ij} V_i V_j \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 + 1}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}} \alpha^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}}\right)} - 1 \right)^2}.$$

La fonction représentant la différence vaut :

$$f(A, \sigma, n) = SCR_{\sqrt{}} - SCR_{uw},$$

$$f(A, \sigma, n) = \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 A + A}}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}} \alpha^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}}\right)} - \frac{\sqrt{\sigma^2 A + 1}}{\sigma A + \sqrt{\sigma^2 A + 1}} \alpha^{-\left(\frac{\sigma A}{\sigma A + \sqrt{\sigma^2 A + 1}}\right)} \right) + 1 - \sqrt{A}.$$

Le calcul du comportement asymptotique de cette fonction selon les paramètres donne :

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0^+ \\ A \in (0, 1)}} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0 & \lim_{A \rightarrow 1^-} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0 \\ \lim_{A \rightarrow 0^+} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow 0 & \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ A \in (0, 1) \\ \alpha \rightarrow 0^+}} f(A, \sigma, \alpha) \rightarrow -\infty. \end{array}$$

Dans une situation comonotone entre les branches d'activités ($A \rightarrow 1^-$), aucune différence n'apparaît entre les méthodes. Quand l'indice de corrélation tend vers 0, le SCR du portefeuille est égal à la “Règle de la Racine Carrée”. Ceci signifie que dans une situation d'indépendance, le recours à une distribution de Pareto pour représenter le

risque sous jacent avec le SCR du portefeuille donne le même résultat que la “Règle de la Racine Carrée”. Le même constat peut-être fait lorsqu’il n’y a aucune incertitude. Inversement, lorsque celle-ci devient importante, l’approche de Solvabilité 2 donne un résultat plus faible que celle du SCR calculé sur l’ensemble du portefeuille.

En étudiant, le cas plus réaliste où $\sigma_i \neq \sigma_j$, la figure ci-dessous est obtenue pour représenter la variation, $\Delta SCR(A, \sigma, \alpha)$, avec les données prises du marché français et américain.

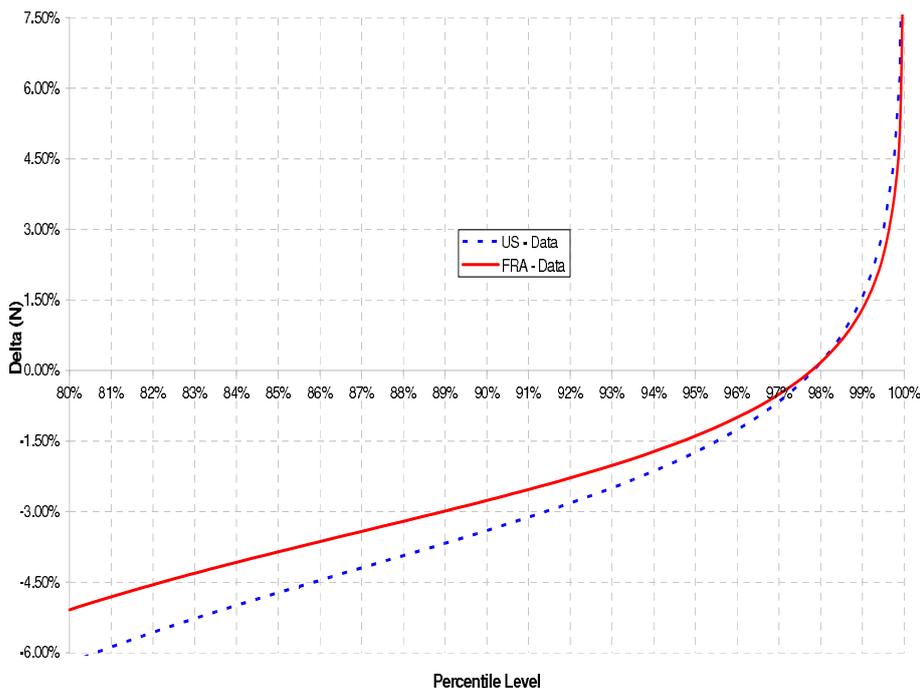


FIGURE 4.4 – Comparaison des méthodes d’agrégation en fonction de α

La différence est positive (3%) au niveau du percentile 99.5%, ce qui signifie que la “Règle de la Racine Carrée” est plus élevée que le SCR du portefeuille de 3% pour les deux jeux de données. Dans une situation plus réaliste, les conclusions sont les mêmes entre les distributions lognormale et Pareto. L’approche adoptée par le régulateur pour agréger les risques dans le futur référentiel est plus prudente que celle utilisée pour le risque de souscription non-vie.

Théorème 10. *Il existe un niveau de percentile α^{**} , pour lequel $SCR_{uw} < SCR_{\vee}$ si $\alpha \geq \alpha^{**}$.*

Démonstration. Le calcul du comportement asymptotique de la variation par rapport au niveau de sécurité donne :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha^*} \Delta SCR = -1 < 0.$$

Après quelques étapes de calculs la limite pour un niveau de sécurité élevé est :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta SCR > 0.$$

La dérivée de $\Delta SCR(A, \sigma, \alpha)$ par rapport à α est positive □

3.5 Conclusion de la comparaison des méthodes

Au travers des distributions testées et des variantes appliquées, il ressort que pour la plage de valeurs des écarts types et le niveau de sécurité envisagés dans Solvabilité 2, la méthode consistant à corréliser les capitaux est plus conservatrice que la méthode consistant à déterminer le capital sur l'agrégation des risques. Les écarts sont faibles, de l'ordre de quelques pourcents. Néanmoins, ces écarts appellent quelques commentaires :

- Comme indiqué dans le Chapitre 1 - Section 4, la méthode d'agrégation employée pour le risque de souscription non-vie est basée sur le fait que chaque branche d'activité suit une distribution lognormale, ainsi le portefeuille suit une distribution lognormale multivariée. Dans le but d'obtenir une formule fermée, le régulateur fait l'hypothèse que le portefeuille suit une distribution lognormale univariée. Cette approximation affecte les résultats observés. En reprenant les résultats de la Section 3.3, avec les données américaines, la différence entre la "Règle de la Racine Carrée" et l'approximation par une distribution lognormale univariée était de 3.49%. Si au lieu d'utiliser cette approximation, la distribution lognormale multivariée était utilisée, la différence avec la "Règle de la Racine Carrée" serait de 6.14%, soit presque le double. L'approximation utilisée par le CEIOPS est un majorant, les écarts avec ce qui devrait être observé dans l'esprit de la Directive seraient alors bien plus important.
- Le CEIOPS contourne la problématique de la dépendance de queue en utilisant des coefficients de corrélation plus élevés que ceux qui devraient être utilisés (voir le paragraphe 1.84 dans [CEI07a]). Donc, si l'hypothèse d'utilisation de la même matrice de corrélation entre les deux méthodes d'agrégation devait être levée, cela entraînerait un écart plus important en faveur de la "Règle de la Racine Carrée". Puisque dans ce cas, les coefficients utilisés avec cette méthode seraient plus élevés, il en résulterait un besoin en capital plus important.

Outre le fait que ces deux remarques mettent en lumière une sous estimation de la différence avec la “Règle de la Racine Carrée”, puisqu’elle est appliquée à chaque noeud de l’arborescence des risques (voir Figure 1.8), le besoin en capital au niveau de la compagnie est surestimé et donc contraint les compagnies à être surcapitalisées en comparaison du cas où il y aurait une distribution lognormale multivariée spécifiée. Ceci assure une meilleure protection des assurés, mais peut aussi se faire à leur détriment, si l’entreprise d’assurance fait payer ce surcroît de capital au travers d’une augmentation de leur prime d’assurance et/ou d’une moindre distribution des participations aux bénéficiaires.

Dans cette section la comparaison a été faite entre les deux approches présentes dans Solvabilité 2 pour agréger les risques. Ces deux approches se basent sur des formules fermées. Il est évident que trouver une structure de dépendance correspondant à l’ensemble des acteurs du marché de l’assurance au niveau européen est forcément voué à l’échec. Comment croire qu’une structure s’ajuste à la fois aux besoins d’un groupe d’assurance multinational et dans le même temps à une mutuelle d’assurance mono branche exerçant dans un seul pays, voire département ? La taille, la nature juridique, les risques souscrits ou bien encore les techniques de transfert de risque, influencent la structure de dépendance. De fait, une formule standard sera inévitablement un compromis ne pouvant satisfaire tous les acteurs. Conscient de l’inaptitude de la formule standard à représenter la réalité des risques d’une entreprise d’assurance, le régulateur autorise les compagnies à utiliser un modèle interne pour déterminer leur capital réglementaire. Cette utilisation est contrainte par différentes conditions qui seront présentées ci-après.

4 Une approche de Solvabilité 2 par les copules

4.1 Les dépendances dans un modèle interne

La mise en place des dépendances dans un modèle interne nécessite de répondre à trois questions :

- Quel est le niveau de finesse à retenir ?
- Comment estimer les paramètres ?
- Quelle est la méthode d’agrégation à utiliser ?

Avoir une segmentation des risques précise est importante pour une entreprise d’assurance, que se soit dans le cadre d’un processus de tarification, de prévention ou de gestion des risques. Un maillage très fin permettra d’avoir une vision exhaustive des risques, mais cette exhaustivité se fera au prix d’une complexité accrue dans la modélisation. Il n’est pas certain qu’une entreprise d’assurance ait intérêt à retenir la maille la plus fine tant du point de vue de l’utilisation des résultats (le temps de calcul sera très long ce qui nuira

à la satisfaction du critère du “ Use Test ”, voir Chapitre 1 - Section 2.6) que de leurs précisions (voir le point suivant sur la problématique des estimations).

Bien que des méthodes scientifiques de classifications hiérarchiques existent pour effectuer des regroupements au moyen du choix d’un indice de dissimilarité (Distance Euclidienne, de Manhattan, ...) et d’un indice d’agrégation (Méthode de Ward, centre de pondérée, ...), il n’est pas certain que ceux-ci correspondent à la politique commerciale de l’entreprise ou à la segmentation retenue dans la Directive. Ainsi le découpage des risques par groupe de risque homogènes devra correspondre à la fois à des critères techniques pour satisfaire au “ Statistical Test ” et opérationnel pour répondre à la cartographie des risques de l’entreprise et ainsi satisfaire au “ Use test ”.

Avant de répondre à la deuxième question, il convient de noter que plusieurs éléments font que l’estimation des corrélations difficile :

- Le niveau de prudence élevé et l’horizon d’un an rendent le paramétrage de ces dépendances difficile à estimer et à valider (cette difficulté est à l’esprit du régulateur, voir le paragraphe 5.232.a dans [CEI09i]). Le recours à l’avis d’expert sera essentiel car aucun historique de données d’une longueur suffisante n’existe. En effet, les données dans l’industrie de l’assurance sont produites au mieux sur une base mensuelle, mais plus sûrement sur base trimestrielle ou annuelle (alors que les données du monde bancaire sont reportées sur base journalière), sans compter les problèmes de constitutions et de récupérations de l’information. Les données pour asseoir des estimations robustes sont trop peu nombreuses. C’est dans cette optique que le régulateur a communiqué des coefficients de corrélation (pour le risque de souscription non-vie) et des coefficients assimilés à des coefficients de corrélation pour les autres classes et sous modules de risque afin de donner les bases d’une discussion avec les acteurs du marché, étant conscient que “ces coefficients de corrélations intègrent un certain degré de jugement” voir le paragraphe 1.84 dans [CEI07a].
- Les corrélations sont appliquées sur les risques après prise en compte des techniques de transfert de risque. Or, comme ce sont les montants de capitaux qui sont corrélés, ces techniques de transfert de risque (tout particulièrement la réassurance non proportionnelle) modifient la distribution agrégée des risques (voir l’exemple donné dans [CEI09m]), de fait l’estimation est délicate puisque chaque entreprise d’assurance à des protections en réassurance différentes.
- L’estimation des corrélations par le CEIOPS inclut des décisions de gestion. Par exemple, en cas de survenance d’évènements extrêmes sur la mortalité des individus ou d’une révision des annuités versées, les frais de gestion dans ces situations augmenteront. Autre exemple lié au risque de souscription en vie, en cas de rachat massif, le nombre de transactions augmentera très fortement, ce qui entraînera un ajustement.

tement du processus interne et donc des frais de gestion associés. Ces conséquences incitent le régulateur à introduire une corrélation. Il est indéniable qu'il y a une relation de dépendance entre le montant des sinistres et les frais liés à leur gestion. De la même façon ces situations impacteront différents sous modules de risque, mais est-ce que c'est au sein du Pilier 1 (voir Chapitre 1 - Section 3.1), qu'il faut les prendre en compte ou bien plutôt au sein du Pilier 2, qui concernent le suivi des risques en interne. Là encore, le processus de gestion de suivi des sinistres est propre à chaque entité et ne saurait être traduit via un coefficient de corrélation.

Enfin, la réponse à la troisième question sur le choix de la méthode à utiliser pour agréger les risques devra répondre à deux conditions :

- Etre aussi simple que possible
- Etre aussi complexe que nécessaire.

Combiner ces deux conditions est délicat. Il n'existe pas de structure universelle applicable à tous les acteurs (les nombreuses critiques formulées à l'encontre de la structure proposée en sont une illustration, voir www.ceiops.org). Chaque entreprise d'assurance doit déterminer la structure représentant au mieux ses risques, mais la Directive indique que la structure retenue devra satisfaire quatre critères :

- Est-elle capable de différencier deux portefeuilles ne se différenciant l'un de l'autre que par la structure de dépendance et avec quelles contraintes (voir le paragraphe 5.232.b dans [CEI09i]) ? Comme évoqué, le paramétrage des dépendances sera délicat et l'avis d'expert pour le déterminer sera primordial. Si ces paramètres sont modifiés, il faudra pouvoir quantifier leurs impacts sur le besoin en capital. Cette notion de comparabilité de deux portefeuilles est à mettre en rapport avec l'axiome de monotonie présenté au Chapitre 2 - Section 3.1. Comme il a été démontré précédemment dans cette thèse (voir Chapitre 2 - Section 4.2), la méthode proposée par Solvabilité 2 pour tenir compte de la dépendance entre les risques via la méthode de la " Règle de la Racine Carrée " ne permet pas de discriminer deux portefeuilles, d'un point de vue mathématique. Pour pouvoir satisfaire à ce critère, il faut que la méthode d'agrégation respecte l'ordre supermodulaire (voir Chapitre 2 - Section 4.2 pour une présentation de la supermodularité). Ainsi, pour deux portefeuilles ordonnés suivant l'ordre supermodulaire, il sera possible de statuer sur le besoin en capital calculé sur ces deux portefeuilles, dès lors que ce besoin est estimé avec une mesure de risque convexe et invariante en loi. Une méthode d'agrégation respectant cet ordre permet de s'assurer qu'une augmentation de la dépendance entraînera une augmentation du besoin en capital. Bien qu'a priori cette condition devrait être remplie, des contre exemples existent où une hausse de la dépendance se traduit par un besoin en capital moindre, notamment du fait de la mesure de risque utilisée (voir [Cha08a]).

- Est-elle facilement implémentable et utilisable dans le cadre des lignes directrices de Solvabilité 2 ? Une méthode avec un temps de calcul long ne pourra être retenue car elle ne pourra pas satisfaire à la fois au critère du “Use Test” définissant les conditions d’utilisation du modèle interne dans le processus décisionnel de la compagnie, ainsi qu’à l’exigence de plus en plus forte de délais en ce qui concerne la communication financière. Par exemple, si l’entreprise d’assurance a l’opportunité d’acquérir une partie du portefeuille d’une autre entité, il lui faudra estimer l’impact de cet apport sur son besoin en capital, puisque la structure de dépendance sera modifiée. Ne pas donner une estimation de cet impact du fait d’un temps de calcul trop long, pourrait priver l’entreprise acquéreuse d’opportunités. Même si le délai dans ce genre de transaction (fusion / acquisition) peut-être assez long du fait de la nécessité d’obtenir l’accord des actionnaires et des autorités, devoir attendre plusieurs jours, voire semaines, serait pénalisant. Bien que la méthode d’agrégation des risques dans Solvabilité 2 ne soit pas exempt d’imperfection, le résultat est immédiat.
- Est-elle suffisamment flexible pour reproduire la structure des risques d’une compagnie d’assurance ? Solvabilité 2 a introduit une cartographie des risques suivant une approche “ Bottom-Up ”. Cette approche ascendante permet d’agrèger les risques par sous module de risque puis par classe de risque. La décomposition est certes critiquable, mais relativement souple d’utilisation. Si la formule standard répond à ce critère, il est légitime pour le régulateur de le demander pour un modèle interne.
- La structure de dépendance peut-elle modéliser des dépendances asymétriques (voir l’exemple évoqué en introduction de ce chapitre) ? Comme indiqué, la “ Règle de la Racine Carrée ” ne respecte pas ce critère, mais le contourne en utilisant des coefficients plus élevés que ceux qui devraient être utilisés (voir le paragraphe 1.84 dans [CEI07a]). Il est néanmoins demandé (voir le paragraphe 5.232.c dans [CEI09i]) aux entreprises d’assurance d’utiliser une méthode respectant ce principe sans introduire de biais.

Une structure de dépendance ne respectant pas ces différents critères pourrait amener le régulateur soit à modifier les paramètres de la structure de dépendance retenue, soit la structure de dépendance elle-même. Dans ce dernier cas, le régulateur appliquerait le cas comonotone, puisqu’il additionnerait chacun des risques (voir le paragraphe 5.235.b dans [CEI09i]).

Dans cette section, différentes familles de copules seront présentées et testées à la lumière de ces quatre critères afin de voir si elles pourraient être utilisables dans le cadre réglementaire de Solvabilité 2 et sous quelles contraintes.

4.2 Présentation des copules

Pour modéliser une distribution jointe de l'ensemble des risques auxquels est soumise une compagnie d'assurance, plusieurs alternatives existent.

- Une approche directe est l'extension des distributions univariées à un environnement multivarié. Par exemple la distribution normale, Pareto, ou bien encore gamma multivariée, etc Cette approche a été retenue dans Solvabilité 2 pour le risque de souscription non-vie puisque c'est une distribution lognormale multivariée qui est utilisée. Le problème de cette approche est que chaque loi marginale appartient à la même famille et que les paramètres des distributions marginales participent aussi à la caractérisation de la dépendance entre les variables aléatoires.
- Une autre approche consiste à utiliser les copules. Une copule est une fonction multivariée dont la structure de dépendance est indépendante des lois marginales.

Du fait de sa structure de dépendance non restrictive et des variantes nombreuses offertes par les copules, seule cette dernière approche sera présentée.

Une copule est définie par le théorème suivant, dit Théorème de Sklar (voir [Skl59]) :

Théorème 11. *Soit F une fonction de distribution de dimension n avec des marginales F_1, \dots, F_n alors il existe une copule C telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$*

Le précédent théorème appliqué à des variables aléatoires continues donne le théorème suivant :

Théorème 12. *Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur de variables aléatoires continues admettant F_1, \dots, F_n comme fonction de répartition marginales et F comme fonction de répartition jointe, alors il existe une copule C qui vérifie la relation du théorème précédent. Si les marginales F_1, \dots, F_n sont continues, alors C est unique, autrement dit C est uniquement déterminée sur $Im(F_1) \times \dots \times Im(F_n)$, où $Im(F_i)$ représente l'ensemble des valeurs prises par F_i*

Une copule permet d'exprimer une fonction de répartition multivariée selon ses marginales et résume toute la structure de dépendance. C'est une fonction de répartition dont les lois marginales sont uniformes, ce qui conduit à une expression probabiliste simple : $C(u_1, \dots, u_n) = Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$

Elle possède les propriétés suivantes :

- $C(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0$
- $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

Une importante propriété des copules est leur invariance par transformation strictement croissante. Soit un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ dont chaque composant suit une distribution continue, si (T_1, \dots, T_n) sont des fonctions strictement croissantes alors les vecteurs (X_1, \dots, X_n) et $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$ ont la même copule. Ce qui signifie qu'il est possible de séparer la structure de dépendance et les distributions suivies par chacune des marginales.

Parmi les différentes sortes de copules existantes, certaines d'entre elles jouent un rôle particulier. Il y a par exemple la copule indépendante définie par :

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Cette copule implique que le comportement d'un risque n'est pas influencé par celui des autres. Par exemple, entre des risques relevant de la garantie dommage en assurance construction et la garantie dommage en automobile, il est légitime de penser qu'il y a une situation d'indépendance.

D'autres copules occupent une place importante. Il s'agit des bornes de Fréchet. La borne inférieure de Fréchet est définie par :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max \left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1 \right).$$

alors que la borne supérieure de Fréchet est :

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n).$$

La borne supérieure de Fréchet représente la structure de dépendance de variables aléatoires reliées positivement de manière parfaite, appelée copule "Comonotonic". En dimension 2, la borne inférieure de Fréchet, représente la copule "Counter Comonotonic", c'est à dire la dépendance dans le cas de variables aléatoires reliées négativement de manière parfaite. Il est à noter que pour $n > 2$ la borne inférieure n'est pas une copule alors que $\forall n$ la borne supérieure est une copule. Dans le monde de l'assurance, il y a peu de cas où ces deux situations se rencontrent, hormis pour la réalisation de scénarios extrêmes. En effet, il semble peu réaliste d'imaginer qu'il y ait comonotonie entre des sinistres provenant par exemple, d'un vol de voiture et d'une inondation, le recours à cette copule n'aura lieu que lorsqu'il s'agira de sensibiliser le risk-manager à des "Worst Case" scénarios (voir le Chapitre 2 - Section 3 pour une discussion sur la notion de "Worst Case").

Pour toute copule C et pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ dans $[0, 1]^n$, la relation suivante est vérifiée : $C^-(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq C^+(\mathbf{u})$.

Comme l'indique le théorème de Sklar, la copule est unique si les marginales sont continues; si les marginales sont discrètes, il n'y a plus unicité. Le remplacement de la structure de dépendance prévalant dans la formule standard de Solvabilité 2 par des copules est impossible puisque la notion de dépendance entre des variables non aléatoires (besoin en capitaux définit au moyen de scénarios ou de facteurs) n'a que peu de sens et que de surcroît il n'y a pas unicité.

4.3 Copules elliptiques

Une importante classe de copules est la classe des copules elliptiques. Soit X un vecteur de dimension n avec une distribution multivariée elliptique $X \sim E_n(\mu, \Sigma)$, sa fonction caractéristique est représentée par :

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(it^T X)) = \exp(it^T \mu) \psi \left(\frac{1}{2} t^T \Sigma t \right)$$

Où

- ψ est le générateur caractéristique

Parmi les copules les plus importantes de cette classe figurent les copules Gaussienne, Student et Cauchy.

La Copule Gaussienne Elle est générée par une distribution normale multivariée avec une matrice de corrélation linéaire Σ . Dans ce cas, le générateur caractéristique est de la forme $\psi(u) = \exp(-u)$. La formalisation mathématique de la copule Gaussienne est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp \left(-\frac{z^t \Sigma^{-1} z}{2} \right) dz_1 \dots dz_n$$

Où $\Phi^{-1}(\cdot)$ est l'inverse de la loi normale centrée réduite. L'un des principaux reproches formulé à l'encontre de la copule Gaussienne est la symétrie dans l'application des corrélations. Comme il a été expliqué au début de ce chapitre, lors de la survenance d'une situation extrême, des conséquences apparaîtront avec d'autres risques qui en temps normal n'aurait pas eu lieu. Ce phénomène de dépendance de queue n'est pas retranscrit par la copule Gaussienne. La formule du coefficient de dépendance de queue ci-dessous le démontre :

$$\lambda_l(X, Y) = \lambda_u(X, Y) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Ceci confirme que pour la copule Gaussienne, les évènements extrêmes se produisent indépendamment pour X et Y .

Il est à noter que pour les copules elliptiques, le coefficient de dépendance de queue supérieure et inférieure sont identiques.

Les autres indicateurs de dépendance : le Tau de Kendall (τ) et le Rho de Spearman (ρ_S) pour la copule Gaussienne s'expriment en fonction du coefficient de corrélation de Pearson et sont donnés par :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\theta) \quad (4.11)$$

$$\rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.12)$$

La copule de Student Elle est représentée par une distribution multivariée de Student avec une matrice de corrélation linéaire Σ , le générateur caractéristique suivant $\psi(u) = \left(1 + \frac{u}{\nu/2}\right)^{(\nu+n)/2}$.

La fonction de répartition est donnée par : $C(u_1, \dots, u_n) =$

$$\int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_n)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \left(1 + \frac{z^t \Sigma^{-1} z}{\nu}\right)^{(\nu+n)/2} dz_1 \dots dz_n,$$

où $t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ est l'inverse d'une distribution de Student standard avec ν degré de liberté.

La copule de Cauchy est un cas particulier de la copule de Student où le degré de liberté est égal à 1. La copule Gaussienne est également un cas particulier de la copule de Student où le degré de liberté est égal à ∞ . Le degré de liberté permet d'augmenter la survenance d'évènements défavorables dans plusieurs risques en même temps. Plus celui-ci est faible (proche de 1) plus ces évènements se produiront en même temps.

La copule de Student possède la propriété de pouvoir reproduire le phénomène de dépendance de queue. Dans un cadre bivarié celui-ci vaut :

$$\lambda_l(X, Y) = \lambda_u(X, Y) = 2t_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right) \quad (4.13)$$

Plus le coefficient de corrélation ρ est élevé et plus le degré de liberté est faible, plus le coefficient de dépendance de queue est important. A noter que si le coefficient de corrélation est égal à 0, le coefficient de dépendance de queue n'est pas nul.

Remarque : Dans chaque copule la matrice de corrélation doit être définie positive.

Les copules elliptiques répondent aux 4 critères évoqués au début de cette section sur les conditions devant être respectées par les structures d'agréations des risques dans Solvabilité 2 :

- Elles sont simples à simuler, ce qui permet de satisfaire à l’une des exigences du “Use Test”. Ci-dessous est donné l’algorithme permettant de simuler cette famille de copules :

Algorithme 1

1. Déterminer la matrice triangulaire inférieure C partant de l’égalité $\Sigma = CC^T$ en utilisant la décomposition de Choleski.
2. Simuler des variables indépendantes uniformes U_1, \dots, U_n
3. Calculer $Z = CU$
4. Simuler V à partir d’une distribution du Chi-Deux avec ν degré de liberté.
5. Poser $T = \sqrt{\frac{\nu}{V}}Z$
6. $Y = t_\nu(T)$

Pour simuler une copule Gaussienne, l’algorithme est le même jusqu’à l’étape 3, ensuite il faut passer directement à l’étape 6 et calculer $Y = \Phi(Z)$

- Cette famille de copule permet de comparer l’impact d’un changement dans la matrice de corrélation sur le besoin en capital puisqu’une copule elliptique est une fonction supermodulaire (voir le Chapitre 2 - Section 3.1 pour une présentation de la supermodularité).

Théorème 13. *Une copule elliptique est supermodulaire si tous les éléments de la matrice $R = \Sigma^{-1}$ en dehors de la diagonale sont négatifs ou nuls.*

Démonstration. Suivant la définition du Chapitre 2 sur les ordres stochastiques, la caractérisation de l’ordre supermodulaire est donnée par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln(c(u_1, \dots, u_n)) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(-\frac{z^t \Sigma^{-1} z}{2} \right) = -\frac{1}{2} r_{ij} \geq 0,$$

pour tout $i \neq j$, où

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

r_{ij} est l’élément (i,j) de l’inverse de la matrice de corrélation Σ (voir [Ton90]). □

Ainsi, une hausse de l’un des coefficients de corrélation se traduira mathématiquement par une hausse du besoin en capital.

- La flexibilité de la matrice de corrélation dans la construction d’une distribution multivariée permet de reproduire au mieux les dépendances existantes au sein d’un portefeuille. En effet, les coefficients de corrélations de la matrice représentent des dépendances pour des couples de variables aléatoires. Cette approche, utilisée par le CEIOPS, offre une grande souplesse dans la paramétrisation d’une distribution multivariée. Cette simplicité apparente masque néanmoins une difficulté. Il est souvent admis sans vérification que l’agrégation de copules Gaussiennes bivariées donne également une copule Gaussienne, or ce postulat n’est pas toujours respecté. En effet, la condition que la matrice de corrélation soit définie positive n’est pas nécessairement vérifiée dès lors que sont agrégées des copules Gaussiennes pour lesquelles les matrices de corrélation sont définies positives. De manière formelle, la relation suivante est-elle vérifiée ?

$$\begin{aligned} (X, Y) &\sim N(\mu_{XY}, \Sigma_{XY}) \\ (Y, Z) &\sim N(\mu_{YZ}, \Sigma_{YZ}) \\ (Z, X) &\sim N(\mu_{ZX}, \Sigma_{ZX}) \end{aligned} \Rightarrow? (X, Y, Z) \sim N(\mu_{XYZ}, \Sigma_{XYZ}), \text{ où } \Sigma_{XY} = \Sigma_{YZ} = \Sigma_{ZX} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma_{XYZ} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette relation n’est pas toujours respectée. En effet, si ρ est choisi proche de -1, alors la matrice de corrélation du triplet n’est pas définie positive et n’est donc pas un vecteur Gaussien. Pour une démonstration voir [Joe97] et [Loi09]. Tester la normalité d’une paire de variables aléatoires n’est pas suffisant pour établir que la distribution multivariée construite en intégrant des paires bivariées est également Gaussienne.

- Comme il a été présenté, la copule de Student possède la propriété de tenir compte de dépendance asymétrique via le coefficient de dépendance de queue. La généralisation du coefficient de dépendance de queue dans un cadre multivarié n’est pas directe et nécessite de passer par la démonstration faite dans [HL02] qui établit qu’un vecteur de variables aléatoires suivant une distribution elliptique appartient au domaine d’attraction d’une distribution des valeurs extrêmes multivariées. Partant de là, il est possible d’avoir un coefficient de dépendance de queue avec l’indice de queue et la matrice de corrélation (voir également [Fra06]).

Du fait des limitations déjà évoquées concernant les données, les méthodes d’estimations de la matrice de corrélation et du degré de liberté ne sont pas abordées dans la présente thèse. Pour une revue de celles-ci voir [ELM97].

Comme il a été mentionné au cours de la Section 2, le CEIOPS a retenu des coefficients

de corrélation de Pearson comme mesure de dépendance. Ce choix est important, puisqu'en fournissant des matrices de corrélation (pour le risque de souscription non-vie et des matrices qui sont assimilées à des matrices de corrélation pour tous les autres risques), le régulateur oriente les pistes de réflexion pour l'utilisation des structures de dépendance dans un modèle interne, notamment pour le risque de souscription non-vie. En effet, même si le régulateur a spécifié une matrice de corrélation qu'il utilise au sein d'une distribution lognormale multivariée et non au sein d'une copule elliptique, peu d'assureurs vont opter pour le même choix, car l'hypothèse de distribution lognormale pour chaque branche d'activité n'est pas forcément représentative de la réalité. Les compagnies, n'ayant que peu ou pas de données pour estimer les dépendances, seront amenées à se servir des matrices communiquées par le régulateur et donc à utiliser une structure de dépendance basée sur une matrice de corrélation, mais avec d'autres distributions marginales. Or les paramètres de la matrice communiquée par le régulateur pour ce sous module de risque sont liés à l'hypothèse de distribution lognormale pour les marginales, ainsi le recours à ces coefficients dans un autre cadre est inadéquat.

Malgré cette limitation, celle-ci sera vraisemblablement utilisée dans le cadre des copules elliptiques puisque même si les coefficients présents dans cette matrice ont été définis de manière arbitraire, sans fondement empirique (voir le paragraphe 1.84 dans [CEI07a]), cette matrice satisfait néanmoins à la contrainte d'être définie positive.

Le problème du choix de la copule reste entier. Les bases de données n'existant pas, les assureurs ne pourront pas utiliser la copule de Student puisqu'ils ne pourront pas paramétrer le degré de liberté. Sauf, là encore, à avoir recours à un paramétrage sur avis d'expert, donc nécessairement sujet à caution et utilisable principalement dans le cadre de tests de sensibilité.

Pour les professionnels, les alternatives à retenir parmi ces trois copules elliptiques seront la copule Gaussienne et la copule de Cauchy (ces deux copules étant les cas extrêmes de la copule de Student). Puisque le régulateur demande à ce que la méthode d'agrégation des risques soit asymétrique (voir le paragraphe 5.232.C dans [CEI09i]), la déduction logique est que seule la copule de Cauchy satisfait à cette demande.

Cette exigence du régulateur entraîne une hausse importante du besoin en capital (comme il le sera démontré par la suite) ainsi qu'une remise en cause des pratiques de marché. Lorsque des dépendances sont appliquées entre différents modèles, des problématiques liées à la construction de ceux-ci apparaissent. La plupart du temps en assurance non-vie, chaque modèle se décompose en deux sous modèles : un sous modèle "attritionnel", représentant la masse des petits sinistres (fréquence importante - intensité faible), et un sous modèle dit "grave", qui concernera les sinistres de grande ampleur (fréquence faible - intensité importante). Le modèle "grave" fait souvent l'objet

d’une modélisation coût-fréquence via le modèle de risque collectif (voir [Par05] pour une présentation des distributions communément utilisées), tandis que le modèle “attritionnel” sera généralement modélisé par une charge⁵.

Vouloir intégrer de la dépendance entre deux modèles construits de cette façon nécessite de se demander au préalable à quel niveau doit être introduite la dépendance, c’est à dire les variables sur lesquelles seront appliquées les dépendances.

Si la dépendance est intégrée entre des sous modèles “attritionnel” ou “grave” de différents modèles, les charges ou nombres modélisés correspondront aux marginales des copules, l’application ne posera pas de difficulté (la modélisation de la dépendance sur la fréquence passera par un modèle à forme explicite). Par contre, pour introduire de la dépendance au sein d’un modèle, c’est à dire entre les sous modèles “attritionnels” et “graves” ou entre des charges du sous modèle “grave” de plusieurs risques, en pratique c’est la méthode développée par [IC82] qui est utilisée.

L’idée de la méthode est de corrélérer les rangs des simulations des variables aléatoires. Pour ce faire, ils simulent un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ suivant une copule Gaussienne avec une matrice de corrélation Σ , puis transforment les marginales de manière à obtenir $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n) = (F^{-1}(\Phi(X_1)), \dots, F^{-1}(\Phi(X_n)))$. Le rang de \mathbf{Y} étant identique à celui de \mathbf{X} . Le recours à une copule Gaussienne permet de minorer l’erreur commise en utilisant le coefficient de corrélation de Pearson au lieu du coefficient de corrélation des rangs de Spearman, elle est inférieure à 2% ($|\frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{\theta}{2}) - \theta| \leq 0.0181$).

Ainsi, une compagnie d’assurance souhaitant corrélérer les charges des modèles “graves” des branches Responsabilité Civile Automobile et Dommage Automobile construira ceux-ci comme expliqué ci-haut, puis corrélèra les charges ainsi obtenues via la méthode [IC82].

Cette méthode ne permet pas de répondre au critère d’asymétrie puisque la copule Gaussienne ne possède pas de coefficient de dépendance de queue. Une lecture stricte du critère du CEIOPS amènerait donc d’importantes modifications dans les pratiques usuelles. Les copules elliptiques possèdent certes des propriétés intéressantes qui ont permis leur essor dans l’industrie de la finance et de l’assurance, cependant bien que le régulateur mette l’accent sur cette structure d’agrégation ; il semble inadapté de se limiter à cette seule forme de dépendance. Elles présentent certaines limitations, notamment celles liées à son fonctionnement par paire, empêchant d’avoir une vision des risques par marché, garanties, filiales ou pour tout autre regroupement, ainsi que par l’absence de dépendance de queue pour la copule Gaussienne, copule la plus répandue.

5. Le “Swiss Solvency Test” utilise cette approche. La charge des sinistres attritionnels est modélisée avec une loi Gamma, tandis que les sinistres “graves” sont modélisés par le couple de distributions Poisson-Pareto, voir[oPI04]

D'autres familles de copules existent en parallèle et présentent des caractéristiques intéressantes. L'une de ces autres familles est la famille des copules archimédiennes.

4.4 Copules archimédiennes échangeables

Suite aux livres de référence de [Joe97] et de [Nel99], une famille de copules a intéressé le monde académique et professionnel de la finance et de l'assurance : les copules archimédiennes. En effet, pour les construire il suffit de faire appel à une fonction univariée, ce qui les rend simples à analyser et à utiliser. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ une fonction continue, strictement décroissante et convexe tel que $\phi(1) = 0$ et $\phi(0) = \infty$. La fonction ϕ a son inverse défini par $\phi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ avec les mêmes propriétés que ϕ , excepté que $\phi^{-1}(0) = 1$ et $\phi^{-1}(\infty) = 0$. La fonction $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)), \quad (4.14)$$

est appelée une copule archimédienne échangeable (EAC) de dimension $n \geq 2$ si et seulement si ϕ^{-1} est complètement monotone sur $[0, \infty]$ (voir [Joe97], [Nel99]), ce qui se caractérise par :

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial u^k} \phi^{-1}(u) \geq 0; \forall k \in N.$$

La condition de complète monotonicité peut-être relâchée si la dimension de la copule est fixée. La fonction ϕ est appelée le générateur de la copule. Il est supposé que le générateur ϕ a seulement un paramètre, représenté par θ .

La classe de fonction complètement monotone ϕ^{-1} sur $[0, \infty]$ correspond à la classe des Transformés de Laplace ("TL" par la suite) des fonctions de distribution. La TL est donnée par :

$$\phi^{-1}(t) = \int_0^\infty \exp(-tx) dG(x), t \geq 0.$$

Suivant [Joe97], la classification suivante des fonctions sera utilisée :

$$\mathcal{L}_n = \{ \phi : [0, \infty] \rightarrow [0, 1] \mid \phi(0) = 1, \phi(\infty) = 0, (-1)^j \phi^{-1(j)} \geq 0, j = 1, \dots, n \}$$

$n = 1, \dots, \infty$ avec \mathcal{L}_∞ étant la classe de TL. La condition nécessaire et suffisante pour que la Formule (4.14) soit une copule est $\phi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$.

Les générateurs de copules archimédiennes les plus utilisés respectant la contrainte d'être des "TL" sont définis dans le tableau ci-dessous :

Le paramètre θ représente le degré de dépendance.

TABLE 4.3 – Générateur pour quelques copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel

	$\phi(t)$	$\phi^{-1}(t)(= TL)$
Clayton ($\theta \in (0, \infty)$)	$(t^{-\theta} - 1)$	$(1 + t)^{-\frac{1}{\theta}}$
Frank ($\theta \in (-\infty, \infty)$)	$-\ln\left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)$	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 - \exp(-t)(1 - \exp(-\theta)))$
Gumbel ($\theta \in (1, \infty)$)	$(-\ln(t))^\theta$	$\exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$

Tout comme les copules elliptiques, les copules EAC sont des fonctions supermodulaires et sont donc à même d'être utilisées dans le cadre des ordres stochastiques pour effectuer des comparaisons. Ainsi une augmentation de la dépendance entre des risques au sein d'un portefeuille entraînera une hausse du besoin en capital.

Théorème 14. *Une EAC, $C(u_1, \dots, u_n)$, est MTP2 si le logarithme de la densité est supermodulaire.*

Démonstration. Pour démontrer qu'une EAC est MTP2, la démonstration faite par [MS05] dans le Théorème 2.11 sera reprise. La densité d'une EAC est définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \phi^{-1(n)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \prod_{i=1}^n \phi^{(1)}(u_i).$$

Une EAC est une fonction supermodulaire si $\frac{\delta^2 \log c(u_1, \dots, u_n)}{\delta u_i \delta u_j} \geq 0$. La condition sur la dérivée seconde de la log densité donne :

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+2} \phi^{-1(n+2)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) (-1)^n \phi^{-1(n)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \\ & \geq \left((-1)^{n+1} \phi^{-1(n+1)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \right)^2 \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la log convexité de $(-1)^n \phi^{-1(n)}$. □

Une fois le caractère supermodulaire de la fonction d'agrégation vérifié, il est possible de comparer deux portefeuilles d'un point de vue analytique grâce aux propriétés des copules archimédiennes. Le Théorème 15 permet d'établir cet ordre.

Théorème 15. *Soit $C_i(u_1, u_2) = \phi_i^{-1}(\sum_{k=1}^n \phi_i(u_k))$ où ϕ_i est une TL, $i = 1, 2$. Si $\nu = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, alors $C_1 \leq_{sm} C_2$ ou de manière équivalente, ν est sousmodulaire.*

Démonstration. Voir le Théorème 4.1 dans [Joe97]. □

Comme il le sera démontré à la section suivante, lorsque ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent à la même famille archimédienne, cela revient à comparer le paramètre de dépendance de la copule. Ainsi trivialement, si $\theta_1 \leq \theta_2$ alors $C_1 \leq_{sm} C_2$. Par contre, si ϕ_1 et ϕ_2 n'appartiennent pas à une même famille, dans ce cas la vérification de $\nu = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ est indispensable. Une copule EAC respectant ce critère est donc à même de quantifier l'impact d'un changement dans l'estimation du degré de dépendance sur le besoin en capital. Ainsi, le premier critère définit en début de section est respecté pour les copules EAC.

Les indicateurs de dépendance présentés à la Section 2 trouvent avec ces copules une expression analytique. Dans le tableau suivant est donné le τ de Kendall.

TABLE 4.4 – τ de Kendall pour les copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel

	τ
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta))$
Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$

où $D_k(x) = \int_0^x \frac{t^k}{(\exp(t)-1)}$.

Les coefficients de dépendances de queue peuvent être exprimés en fonction des générateurs. En se rappelant les définitions des coefficients :

$$\begin{aligned} \lambda_l(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} Pr[X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \\ \lambda_u(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\overline{C}(u, u)}{1-u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1-u} \end{aligned}$$

Il est possible de donner une version des coefficients qui utilise les générateurs, voir [Nel97] :

$$\begin{aligned} \lambda_l(x, y) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\phi^{-1}(2\phi(u))}{u} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(2w)}{w} \\ \lambda_u(x, y) &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \phi^{-1}(2\phi(u))}{1-u} = 2 - \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{1 - \phi^{-1}(2w)}{1 - \phi^{-1}(w)} \end{aligned}$$

La formalisation du coefficient de dépendance de queue des copules archimédiennes par les générateurs est très proche de la notion de variation régulière. En effet, soit une fonction $V > 0$ définie sur $(0, \infty)$, V est dite à variation régulière en l'infini avec un exposant $\lambda > 0$

(indice de queue) si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(t)} = x^{-\lambda}$. Ainsi dans le cadre des coefficients de dépendance de queue :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(xw)}{\phi^{-1}(w)} = \Phi_1 \quad (4.15)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1 - \phi^{-1}(xw)}{1 - \phi^{-1}(w)} = \Phi_2. \quad (4.16)$$

Ces formules appliquées aux générateurs précédents donnent les coefficients de dépendance de queue indiqués dans le Tableau 4.5.

TABLE 4.5 – Coefficient de dépendance de queue pour quelques copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel

	λ_u	λ_l
Clayton	0	$2^{-\frac{1}{\theta}}$
Frank	0	0
Gumbel	$2 - 2^{-\frac{1}{\theta}}$	0

Comme le démontrent les coefficients de queue dans le Tableau 4.5, la copule de Gumbel donne plus de poids aux évènements survenant dans la queue de distribution, alors que la copule de Clayton met plus en avant les évènements de faibles intensités. La Copule de Frank permet de modéliser à la fois des dépendances positives ou négatives, de fait elle n'a aucun coefficient de dépendance de queue. L'industrie de la finance et de l'assurance, ainsi que le régulateur sont plus intéressés par les évènements de faibles fréquences et de fortes intensités, donc la copule de Gumbel sera sans doute plus retenue.

Ces coefficients sont exprimés dans un cadre bivarié, l'extension à un environnement multivarié nécessite un nombre plus important d'étapes. Dans [CS09] sont définis des coefficients de dépendance de queue pour une copule EAC multivariée pour différents générateurs.

Soit une copule archimédienne C de dimension n (> 2) avec le générateur ϕ^{-1} alors :

$$\begin{aligned} \lambda_l(u_1, \dots, u_n) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u_1, \dots, u_n)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\phi^{-1}(n\phi(u))}{u} \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(nw)}{w} = \Phi_1(n) = n^{-\lambda_1} \\ \lambda_u(u_1, \dots, u_n) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u_1, \dots, u_n)}{1 - u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1 - \phi^{-1}(i\phi(1-u))}{u} \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \Phi_2(i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} i^{-\lambda_2},
 \end{aligned}$$

où Φ_1, Φ_2 sont définis aux équations (4.15) et (4.16), et λ_1, λ_2 sont les indices de queue, respectivement, à l'infini et en zéro. Ainsi, ce type de copule permet de modéliser des dépendances variant en fonction du niveau de percentile, sous réserve qu'elles possèdent des indices de queue.

Suite aux travaux de Marshall et Olkin sur la réalisation d'un échantillon (U_1, \dots, U_n) issu d'une copule EAC par une approche par "TL", l'implémentation de ces copules est directe et satisfait au critère défini au regard des recommandations du "Use test". Soit $F(u) = \exp(-\phi(u))$. $(F^v(u))$ est une fonction de distribution univariée sur $[0, 1]$ quelque soit $v > 0$. Soit V une variable aléatoire suivant une distribution G et (U_1, \dots, U_n) sont conditionnellement indépendants à V fixe avec la distribution conditionnelle donnée par $P(U_i \leq u | V = v)$ alors la fonction de distribution multivariée (U_1, \dots, U_n) est représentée par :

$$\begin{aligned}
 P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) &= \int_0^\infty P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n | V = v) dG(v) \\
 &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n F^v(u_i) dG(v) \\
 &= \int_0^\infty \exp(-v(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))) dG(v) \\
 &= \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))
 \end{aligned}$$

Pour modéliser l'inverse de la fonction générateur avec une Transformée de Laplace, il faut déterminer la distribution de G telle que la TL de G soit l'inverse du générateur.

Dans le Tableau 4.6 est donné la fonction G des principales copules archimédiennes.

TABLE 4.6 – Fonction G pour quelques copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel

	Fonction de distribution de G
Clayton	Distribution gamma $\Gamma(\frac{1}{\theta}, 1)$
Frank	Distribution logarithmique $\alpha = (1 - \exp(-\theta))$
Gumbel	Distribution stable $(\frac{1}{\theta}, 1, (\cos \frac{\pi}{2\theta})^\theta, 0)$

Pour simuler une distribution logarithmique ou une distribution stable, voir [Mel07].

L’algorithme pour simuler une copule archimédienne avec une approche par TL est fourni par [MO98], il est récapitulé ci-dessous :

Algorithme 2

1. Simuler V avec la fonction de distribution G dont la TL vaut ϕ^{-1}
2. Simuler n variables uniformes U_1, \dots, U_n
3. Renvoyer $(X_1, \dots, X_n) = (\phi^{-1}(\frac{-\ln(U_1)}{V}), \dots, \phi^{-1}(\frac{-\ln(U_n)}{V}))$

Cet algorithme est rapide à mettre en oeuvre et son application pour un nombre de dimensions importants n’est pas une contrainte.

Bien que cette structure de dépendance présente certaines propriétés mathématiques intéressantes (voir par exemple [EMS99]) il y a un inconvénient majeur avec la Formule (4.14), puisque la structure de dépendance est assez restrictive. Les copules EAC sont principalement utilisées pour modéliser des dépendances dans le cadre d’un couple de variables aléatoires. Dans cette situation, un seul paramètre représente la liaison existante entre deux variables. Par contre, dès lors qu’il y a n variables aléatoires uniformes échangeables, ce seul paramètre doit représenter la liaison entre toutes les variables. Chaque marginale possède donc le même niveau de dépendance par rapport aux autres marginales.

Autrement dit, dans le contexte d’une distribution jointe au niveau d’une compagnie d’assurance, chaque risque aura le même degré de dépendance vis-à-vis de chacun des autres risques. Cette approche sous entend que la compagnie ne pratique aucune segmentation dans l’agrégation de ces risques, ce qui ne représente en aucune façon le fonctionnement de l’entreprise. Par exemple, le bris de glace automobile sera agrégé avec le dégât des eaux suite à un débordement de baignoire ainsi qu’avec un sinistre corporel grave. Cet agrégat de risques au sein d’un même ensemble n’a a priori pas de sens. Pour dépasser cette vision restrictive des risques d’une compagnie d’assurance, les copules archimédiennes non échangeables seront présentées à la section suivante. Elles autorisent une dépendance asymétrique entre les risques.

4.5 Copules archimédiennes non échangeables

4.5.1 Fully nested archimedean copula

Pour assouplir la contrainte de permutation symétrique, une copule fully nested archimedean copula (FNAC) est construite en ajoutant une dimension étape par étape. Tout d'abord, les marginales u_1 et u_2 sont couplées avec le générateur ϕ_1 , puis la marginale u_3 est couplée avec les précédentes marginales via le générateur ϕ_2 . Et ainsi de suite. Cette structure de dépendance est plus flexible que celle présentée à la Formule (4.14). Une copule de dimensions n nécessite $n - 1$ générateurs et il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ permutations symétriques pour les marginales bivariées. La plus faible dimension pour laquelle cette classe de copule existe est $n = 3$. La formule en dimension 3 est :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= C(C(u_1, u_2), u_3) \\ &= \phi_2^{-1}[\phi_2 \circ \phi_1^{-1}[(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2))] + \phi_2(u_3)] \end{aligned}$$

En dimension 4 :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C(C(C(u_1, u_2), u_3), u_4) \\ &= \phi_3^{-1}\{\phi_3 \circ \phi_2^{-1}[\phi_2 \circ \phi_1^{-1}[(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2))] + \phi_2(u_3)] + \phi_3(u_4)\} \end{aligned}$$

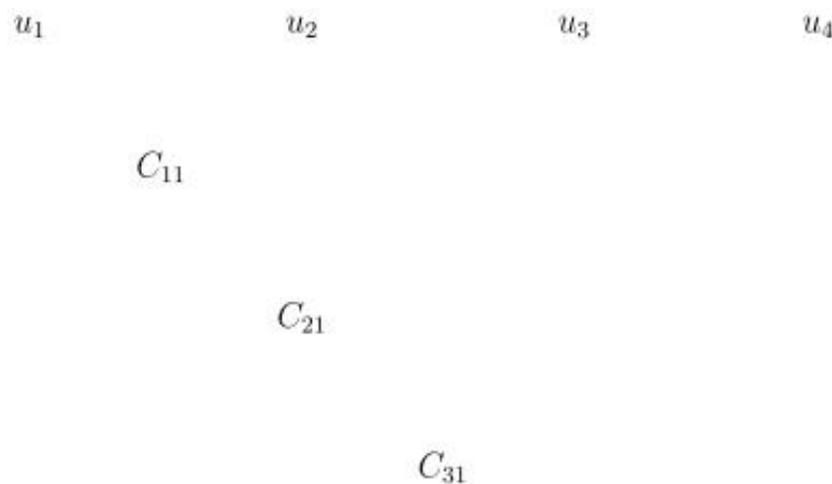


FIGURE 4.5 – Structure arborescente pour une FNAC en dimension 4

Une représentation matricielle des FNAC en dimension 4 semblable à celle existante pour les matrices de corrélation serait la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta_{11} & \theta_{21} & \theta_{31} \\ \theta_{11} & 1 & \theta_{21} & \theta_{31} \\ \theta_{21} & \theta_{21} & 1 & \theta_{31} \\ \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne/colonne possède le même paramètre, cela représente le degré de dépendance entre la nouvelle variable ajoutée et les autres variables déjà présentes dans le portefeuille. De manière récursive pour le cas général, la formule est la suivante :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi_{n-1}^{-1}(\phi_{n-1} \circ \phi_{n-2}^{-1}[\dots \phi_2^{-1}[\phi_2 \circ \phi_1^{-1}[(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2))] + \phi_2(u_3)] \\ + \dots + \phi_{n-2}(u_{n-1})] + \phi_{n-1}(u_n))$$

Cette approche est particulièrement pertinente puisqu'elle permet de démontrer directement l'impact marginal de l'ajout d'un risque sur le portefeuille en cours, au travers du degré de dépendance et ainsi de pouvoir quantifier l'intérêt d'inclure ce risque dans le portefeuille. Cette méthode s'avère spécialement utile avant le lancement d'un nouveau produit ou bien dans l'optique de racheter un portefeuille de risques inexistant dans le portefeuille actuel.

Une condition nécessaire pour que les FNAC appartiennent à la classe de TL est que $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$. Cette condition doit être satisfaite à chaque niveau de composition des TL. Dans ce cas seulement, la distribution finale est une fonction multivariée. Voir le Théorème A.1 dans [Joe97] pour la démonstration.

Pour satisfaire à cette condition, le degré de dépendance, représenté par le paramètre de la copule, doit décroître avec le niveau de composition, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1}$. La logique étant de mettre à la racine de l'arborescence les risques les plus liés. Puis, au fur et à mesure que les risques sont agrégés, le degré de dépendance entre la variable aléatoire à ajouter et la somme des autres variables aléatoires diminue.

Cette condition est vérifiée si ϕ_i^{-1} et ϕ_{i+1} appartiennent à la même famille archimédienne. Comme mentionné par [Hof07], cette condition n'est pas toujours remplie si les générateurs de différentes familles archimédiennes sont mélangés. Soit les générateurs ϕ_0 et ϕ_1 appartenant, respectivement, à la copule de Clayton et de Gumbel. La relation $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ n'est vérifiée que si le paramètre de la copule de Gumbel est égal à 1, autrement dit le cas d'indépendance pour cette copule. Dans [Hof07] est listé, pour une série de combinaisons de copules, les valeurs des paramètres qui permettent à la relation $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ d'être vérifiée.

Comme il a été montré dans le Théorème 15, la condition $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ a une autre interprétation (voir [Joe97] et [WH02]), puisqu'elle signifie que la fonction $\nu = \phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1}$ est une fonction sousmodulaire. Ainsi, en partant du postulat que les FNAC sont des fonctions supermodulaires, il est possible de comparer deux copules FNAC pour lesquelles, seul un noeud de l'arbre diffère entre les deux structures.

Théorème 16. *Soit une copule FNAC représentée par :*

$$C_i(u_1, \dots, u_n) = \phi_{n-1,i}^{-1}(\phi_{n-1,i} \circ \phi_{n-2,i}^{-1}[\dots \phi_{2,i}^{-1}[\phi_{2,i} \circ \phi_{1,i}^{-1}[(\phi_{1,i}(u_1) + \phi_{1,i}(u_2))]] + \phi_{2,i}(u_3)] \\ + \dots + \phi_{n-2,i}(u_{n-1})] + \phi_{n-1,i}(u_n))$$

pour $i = 1, 2$, tel que $\phi_{k,1} \circ \phi_{k,2}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ alors $C_1 \leq_{sm} C_2$ pour $\forall k \in 1, \dots, n-1$.

Démonstration. Voir les Théorèmes 4.1 à 4.5 dans [Joe97] et le Théorème 3.2 dans [WH02] pour une démonstration. \square

Il est à noter qu'au travers de ce théorème, les auteurs partent du postulat que les copules hiérarchiques archimédiennes sont des fonctions supermodulaires, puis démontrent que si deux copules C_i et C_j ont à chaque noeud de l'arbre les mêmes compositions (famille de copule et paramètre) excepté à un noeud donné où il y a $\phi_{k,i} \circ \phi_{k,j}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, alors le résultat du théorème précédent est vérifié. Ce théorème est très utile excepté dans le cas où il y a plus d'un noeud qui diffère entre les deux copules, puisque dans ce cas aucune formule fermée n'existe. En reprenant la Définition 2.8 du Chapitre 2 - Section 3.1 dans laquelle est caractérisée la supermodularité, la propriété $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ garantit que la FNAC est une fonction supermodulaire comme le démontre le théorème suivant.

Théorème 17. *Une FNAC, $C(u_1, \dots, u_n)$ pour $n \geq 3$, est une fonction supermodulaire si $C(u_1, u_2)$ est une fonction supermodulaire et si pour chaque niveau de composition la condition suivante est vérifiée : $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, pour $i = 1, \dots, n-1$.*

Démonstration. Soit

$$\phi_2^{-1}(\phi_2(u_1) + \phi_2(u_2)) \leq \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) \quad (4.17)$$

Suivant le Théorème 15, il vient que :

$$\begin{aligned} \phi_2(u_1) + \phi_2(u_2) &\geq \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) \\ \phi_2(u_1) + \phi_2(u_2) + \phi_2(u_3) &\geq \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) + \phi_2(u_3). \end{aligned}$$

Or $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) + \phi_2(u_3)$ est une sousmodulaire. Comme ϕ^{-1} est une fonction décroissante convexe, en prenant la fonction composée $f \circ g$ où f est décroissante convexe

et g une fonction sous modulaire, $f \circ g$ est une fonction supermodulaire, $f \circ g = \phi_2^{-1}(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) + \phi_2(u_3)) = C(u_1, u_2, u_3)$. En procédant ainsi de proche en proche, $C(u_1, \dots, u_n)$ est supermodulaire, si $C(u_1, u_2)$ est une fonction supermodulaire, ce qui est vrai pour n'importe quelle copule en dimension 2. \square

La condition de supermodularité est plus difficile à obtenir que dans le cas des copules archimédiennes échangeables car elle fait intervenir toutes les compositions de copules présentes dans l'arborescence. Néanmoins, avec le théorème précédent, même s'il y a plus d'un noeud où les compositions diffèrent, il est possible de pouvoir statuer sur le caractère plus ou moins risqué d'un portefeuille par rapport à un autre. Le capital calculé sur chaque portefeuille au moyen d'une mesure de risque convexe et invariante reflètera cette moindre dangerosité (voir Chapitre 2 - Section 3.1).

Comme le principe de construction d'une FNAC est l'imbrication de copules, le calcul du coefficient de dépendance de queue au dernier niveau de l'arbre fait appel aux coefficients de dépendances de queue des niveaux inférieurs. Une procédure récursive doit être appliquée, celle-ci sera détaillée à la section suivante.

Enfin, la technique de simulation à mettre en oeuvre pour une FNAC en dimension 3 repose sur l'algorithme suivant :

Algorithme 3

1. Simuler V avec la fonction de distribution G dont la TL vaut $\phi_{2,1}^{-1}$
2. Simuler U_1, U_2 à partir de la copule archimédienne bivariée avec le générateur $\phi_{2,1}(t, V) = \exp(-V \phi_{2,1}^{-1} \circ \phi_{1,1})$ au moyen de l'algorithme 2.
3. Simuler une variable uniforme U_3
4. Retourner X_1, X_2, X_3 où $X_i = \phi_{31}^{-1}(\frac{-\ln(U_i)}{V})$

Certains problèmes numériques peuvent apparaître à la 2^{ème} étape si aucune formalisation explicite n'est possible. Ceux-ci seront également présentés à la prochaine section.

Tous les critères devant être respectés par une fonction pour agréger les risques (tel que définis au début de cette section) sont respectés :

- Comparaison de deux portefeuilles qui ont les mêmes risques mais pas la même structure de dépendance,
- Facilement implémentable,
- Dépendance asymétrique,
- Flexibilité.

Malgré une flexibilité accrue par rapport aux copules EAC, l'inclusion de marginale de manière progressive, une par une, reste une limitation. Il faut trouver un ordre dans

l'agrégation des risques garantissant la décroissance du paramètre de dépendance. Les exemples de cette limitation pourraient être les deux cas suivants. Dans l'optique du lancement d'un nouveau produit, celui-ci présentera vraisemblablement des interactions avec d'autres risques déjà en portefeuille puisqu'il s'agit souvent de garanties annexes sur d'autres garanties existantes. De la même façon, lors d'un rachat de portefeuille, l'acheteur possède déjà une expertise sur celui-ci, expertise acquise par la souscription de ce type de risque (seul le rachat de portefeuille est considéré et non le rachat de compagnie, puisque l'ajout des risques se fait un à un). Ainsi l'ajout de nouveaux risques ne pourra se faire directement à cause de la contrainte de décroissance de degré de dépendance, mais devra nécessiter un réarrangement des risques au sein de la copule pour respecter ce critère. Il n'est pas certain de trouver une combinaison qui garantisse celui-ci.

De plus, la dépendance est modélisée de façon bivariée, puisqu'elle s'applique entre une agrégation de risques et un nouveau risque. Il n'est donc pas possible d'avoir une lisibilité exacte des causes de la dépendance. Une solution à ce dernier problème est le recours aux copules hierarchically nested archimedean copula.

4.5.2 Hierarchically nested archimedean copula

Une hierarchically nested archimedean copula (HNAC) est un mélange entre une EAC et une FNAC. En effet, une copule hiérarchique est construite en ajoutant plusieurs dimensions en même temps au travers de différentes copules. A l'intérieur de chaque copule, les distributions marginales sont échangeables. Cette copule permet aux compagnies d'assurance d'agréger leurs risques par secteur, branche d'activité ou filiale (voir [SCO08]).

Dans un premier exemple de construction de copules HNAC, une copule en dimension 8 sera envisagée, elle aura la représentation graphique ci-dessous. Le premier niveau de l'arborescence correspondra aux garanties souscrites par la compagnie, tandis que le second niveau sera l'équivalent des branches d'activités. Au final, toutes les branches se rejoindront au niveau de la compagnie. La formalisation de cet exemple donne :

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_8) &= C_{21}[C_{11}(u_1, u_2), C_{12}(u_3, u_4), C_{13}(u_5, u_6), C_{14}(u_7, u_8)] \\ &= \phi_{21}^{-1}[\phi_{21} \circ \phi_{11}^{-1}(\phi_{11}(u_1) + \phi_{11}(u_2)) + \phi_{21} \circ \phi_{12}^{-1}(\phi_{12}(u_3) + \phi_{12}(u_4)) \\ &\quad + \phi_{21} \circ \phi_{13}^{-1}(\phi_{13}(u_5) + \phi_{13}(u_6)) + \phi_{21} \circ \phi_{14}^{-1}(\phi_{14}(u_7) + \phi_{14}(u_8))] \end{aligned}$$

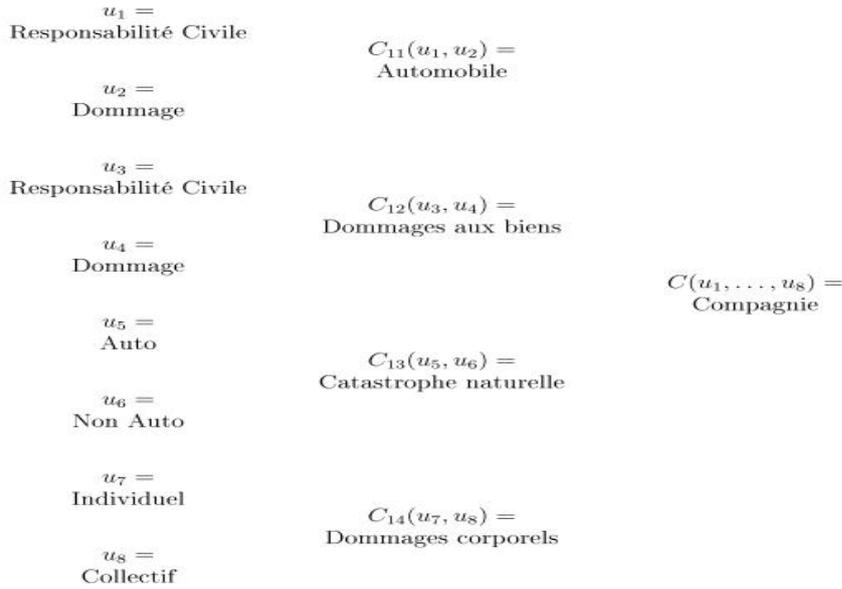


FIGURE 4.6 – Arborescence pour une HNAC en dimension 8

Dans un deuxième exemple, une représentation alternative d'une copule en dimension 8 qui intégrerait un niveau supplémentaire correspondant aux produits, aurait la formalisation mathématique suivante :

$$\begin{aligned}
 C(u_1, \dots, u_8) &= C_{31} \{ C_{21} [C_{11}(u_1, u_2), C_{12}(u_3, u_4)], C_{22} [C_{13}(u_5, u_6), C_{14}(u_7, u_8)] \} \\
 &= \phi_{31}^{-1} [\phi_{31} \circ \phi_{21}^{-1} [\phi_{21} \circ \phi_{11}^{-1} (\phi_{11}(u_1) + \phi_{11}(u_2)) + \phi_{21} \circ \phi_{12}^{-1} (\phi_{12}(u_3) + \phi_{12}(u_4))] \\
 &\quad + \phi_{31} \circ \phi_{22}^{-1} [\phi_{22} \circ \phi_{13}^{-1} (\phi_{13}(u_5) + \phi_{13}(u_6)) + \phi_{22} \circ \phi_{14}^{-1} (\phi_{14}(u_7) + \phi_{14}(u_8))]]
 \end{aligned}$$

De la même manière que pour une copule FNAC, une représentation matricielle des HNAC en dimension 8 semblable à celle existante pour une matrice de corrélation donnerait :

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
 1 & \theta_{11} & \theta_{21} & \theta_{21} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} \\
 \theta_{11} & 1 & \theta_{21} & \theta_{21} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} \\
 \hline
 \theta_{21} & \theta_{21} & 1 & \theta_{12} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} \\
 \theta_{21} & \theta_{21} & \theta_{12} & 1 & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} \\
 \hline
 \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & 1 & \theta_{13} & \theta_{22} & \theta_{22} \\
 \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{13} & 1 & \theta_{22} & \theta_{22} \\
 \hline
 \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{22} & \theta_{22} & 1 & \theta_{14} \\
 \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{31} & \theta_{22} & \theta_{22} & \theta_{14} & 1
 \end{array} \right)$$

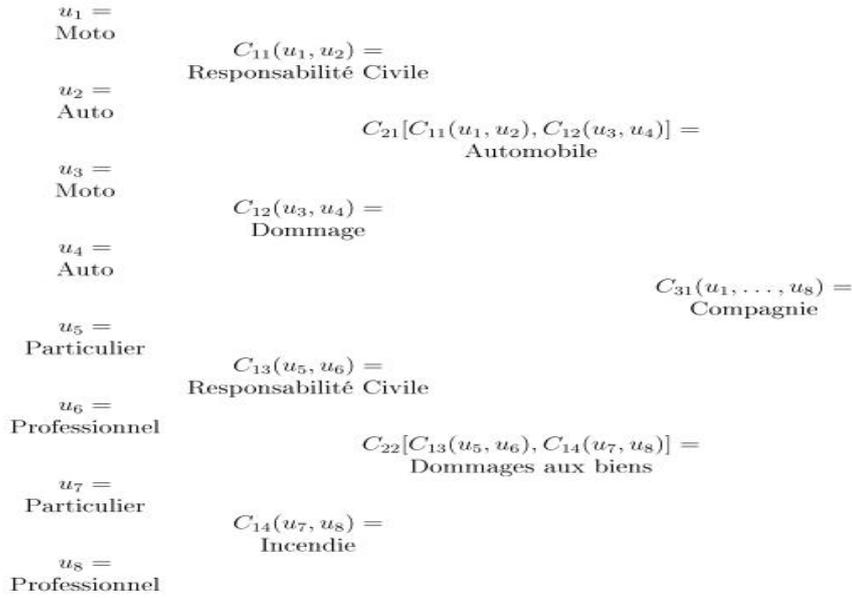


FIGURE 4.7 – Arborescence pour une HNAC en dimension 8

Dans ces exemples, chaque copule est en dimension 2, une approche en dimension 3 ou plus, est tout aussi possible. D'autres consolidations en fonction des produits, réseaux de distribution, marchés ou bien de différentes filiales est tout aussi envisageable, ce qui rend les HNAC très flexibles et leur permet de correspondre au mieux aux différentes strates / structures composant une compagnie d'assurance.

L'avantage de ces structures hybrides entre les EAC et les FNAC est d'avoir une lisibilité sur les sources de l'agrégation des risques entre eux. Ainsi, des risques liés entre eux par une même cause pourront être regroupés ensemble à un niveau intermédiaire avant d'être consolidés.

Comme pour les FNAC, pour appartenir à la classe \mathcal{L}_∞ , le degré de dépendance doit décroître avec le niveau de composition, ainsi la relation suivante doit être respectée

$$\phi_{j+1,i} \circ \phi_{j,k}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty, \forall j \in 1, \dots, L-1, \forall i \in 1, \dots, l_{j+1}, \forall k \in 1, \dots, m_i,$$

où

- j correspond au niveau dans l'arborescence,
- i représente une copule au niveau de l'arborescence j+1,
- k est une copule au niveau j qui rejoint la copule i du niveau j+1.

Une HNAC permet de modéliser jusqu'à $n - 1$ copules différentes.

Pour vérifier qu'une HNAC est une fonction supermodulaire et qu'elle peut ainsi discriminer les exigences de capital suite à une modification de la dépendance, la même approche que pour les FNAC est utilisée.

Théorème 18. *Une HNAC, $C(u_1, \dots, u_n)$ est une fonction supermodulaire si chacune des copules aux racines de l'arborescence est supermodulaire et si pour chaque niveau de composition la relation suivante est vérifiée : $\phi_{j+1,i} \circ \phi_{j,k}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty, \forall j \in 1, \dots, L-1, \forall i \in 1, \dots, l_{j+1}, \forall k \in 1, \dots, m_j$.*

Démonstration. Soit $C_{L,1}(u_1, \dots, u_n) = \phi_{L-1,1}^{-1}(\sum_{i=1}^k \phi_{L-1,1}(C_{L-2,i}(\mathbf{U}_{L-2,i}))$, où $\mathbf{U}_{L-2,i}$ est un vecteur représentant les composants de la copule $C_{L-2,i}$ et L correspond au nombre de niveaux dans l'arborescence. En supposant que $C_{L-2,i}(\mathbf{U}_{L-2,i})$ est une fonction supermodulaire, $\forall i$. Comme $\phi_{L-1,1}$ est décroissante convexe, $\phi_{L-1,1}(C_{L-2,i}(\mathbf{U}_{L-2,i}))$ est sousmodulaire. L'addition de fonctions sousmodulaires donne une fonction sousmodulaire. Ensuite en appliquant une fonction décroissante sur une fonction sousmodulaire, le résultat donne une fonction supermodulaire. En utilisant la même approche de manière récursive, une HNAC est une fonction supermodulaire si les copules aux racines de l'arborescence sont des fonctions supermodulaires. \square

Comme précédemment, pour qu'une copule archimédienne à la racine de l'arbre soit une fonction supermodulaire, la copule doit satisfaire aux conditions du Théorème 14. Dans le cas où seul un noeud au travers de l'arbre diffèrerait entre deux copules, il est possible avec les propriétés des copules archimédiennes échangeable d'instaurer une relation d'ordre.

Théorème 19. *Soit la copule HNAC représentée par :*

$$C_{L,1,i}(u_1, \dots, u_n) = \phi_{L-1,1,i}^{-1}(\sum_{m=1}^l \phi_{L-1,1,i}(C_{L-2,m,i}(\mathbf{U}_{L-2,m,i}))),$$

pour $i = 1, 2$, tel que $\phi_{L-k,j,1} \circ \phi_{L-k,j,2}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ alors $C_1 \leq_{sm} C_2$ pour $\forall k \in 1, \dots, L-1$ et $\forall j \in 1, \dots, l_{L-1}$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle que pour les copules FNAC. \square

Tout comme pour les copules FNAC, la portée de ce théorème est réduite puisque de nombreux générateurs peuvent intervenir au travers de cet arbre. Il est donc peu vraisemblable que seul un générateur diffère. La vérification de la supermodularité des HNAC du Théorème 18 sera plus à même de comparer deux portefeuilles.

Après avoir démontré qu'une copule HNAC peut différencier deux portefeuilles d'assurance et que sa structure flexible lui permet de prendre en compte la réalité de l'environnement économique dans lequel évolue une compagnie d'assurance, le critère concernant la dépendance asymétrique sera évalué.

Comme pour les copules FNAC, les copules HNAC sont construites sur la composition de copules archimédiennes se situant aux niveaux inférieurs dans l'arborescence. Ainsi, le calcul du coefficient de dépendance de queue d'un niveau donné fera appel aux calculs des coefficients de dépendance de queue des niveaux précédents. Les algorithmes proposés par [OOS09] distinguent les coefficients de dépendance de queue supérieure et inférieure et se basent sur les propriétés de variation régulière des générateurs.

Soit une copule :

$C(u_1, \dots, u_n) = C_0(C_1(u_1, \dots, u_{k_1}), \dots, C_m(u_{k_{m-1}+1}, \dots, u_{k_m}), u_{k_m+1}, \dots, u_n)$, où C_0 a un générateur ϕ_0^{-1} à variation régulière (voir les Formules (4.15) et (4.16)) et chaque copule C_i , $\forall i = 1, \dots, m$ est une copule archimédienne avec des coefficients de dépendance de queue représentés par $\lambda_{u,i}, \lambda_{l,i}$. Alors les coefficients de dépendance de queue supérieure et inférieure sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_l(1, \dots, 1) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{-1} P(X_i < F_i^{-1}(u) \quad \forall i = 1, \dots, n) \\ &= \Phi_1 \left(\sum_{i=1}^m \Phi_1^{-1}(\lambda_{l,i}) + k - k_m \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \lambda_u(1, \dots, 1) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{-1} P(X_i > F_i^{-1}(1-u) \quad \forall i = 1, \dots, n) \\ &= \sum_{s, s \neq \emptyset} (-1)^{|s|+1} \Phi_2 \left(\sum_{i=1}^{m_s} \Phi_2^{-1}(\beta_{si}) + |s| - |s|_{m_s} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $\beta_{si} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - C_{s_i}(1 - u_j, j \in s_i \in s)}{u}$ pour chacune des copules présentes dans $C_s(C_{s_1}(u_i, i \in s_1), \dots, C_{s_m}(u_i, i \in s_m), u_{|s|_{m_s}}, \dots, u_{|s|})$ avec $|s|_{m_s} = \sum_{i=1}^{m_s} |s_i|$.

Les copules hiérarchiques possèdent des coefficients de dépendances de queue, si les copules imbriquées possèdent elles aussi lesdits coefficients. Même si la construction de l'arborescence fait intervenir de nombreux niveaux, via ce processus itératif, calculer le coefficient au niveau global n'est pas une difficulté.

Les remarques suivantes sur les méthodes de simulation des copules HNAC seront également valables pour les copules FNAC. Le critère concernant la rapidité d'exécution de cette technique d'agrégation est plus délicat à valider. La méthode de simulation se base toujours sur une approche par "Transformée de Laplace", mais les nombreuses compositions peuvent amener à des temps de calculs très long selon la copule retenue. L'algorithme suivant permet d'obtenir le premier exemple introduit au début de cette sous section :

Algorithme 4

1. Simuler V avec la fonction de distribution G dont la TL vaut ϕ_{31}^{-1}
2. Simuler U_1, U_2 à partir de la copule archimédienne bivariée avec le générateur $\phi_{31,11}(t, V) = \exp(-V\phi_{31}^{-1} \circ \phi_{11})$ au moyen de l'algorithme 2.
3. Simuler U_3, U_4 à partir de la copule archimédienne bivariée avec le générateur $\phi_{31,12}(t, V) = \exp(-V\phi_{31}^{-1} \circ \phi_{12})$ au moyen de l'algorithme 2.
4. Simuler U_5, U_6 à partir de la copule archimédienne bivariée avec le générateur $\phi_{31,13}(t, V) = \exp(-V\phi_{31}^{-1} \circ \phi_{13})$ au moyen de l'algorithme 2.
5. Simuler U_7, U_8 à partir de la copule archimédienne bivariée avec le générateur $\phi_{31,14}(t, V) = \exp(-V\phi_{31}^{-1} \circ \phi_{14})$ au moyen de l'algorithme 2.
6. Retourner X_1, \dots, X_{12} où $X_i = \phi_{31}^{-1}\left(\frac{-\ln(U_i)}{V}\right)$

Certaines difficultés peuvent apparaître en simulant $\exp(-V\phi_j^{-1} \circ \phi_i)$. Nonobstant le fait que les générateurs appartiennent à la même famille archimédienne, il n'existe pas forcément de distributions explicites.

Pour la copule de Gumbel, aucune difficulté ne survient puisque le générateur simulé au niveau inférieur a la même structure que le générateur simulé au niveau supérieur, en utilisant la propriété $\phi(t) = \phi(ct)$ (voir [McN07]) :

$$\exp(-V\phi_j^{-1} \circ \phi_i(t)) = \exp\left(-Vt^{\frac{\theta_j}{\theta_i}}\right) = \exp\left(-t^{\frac{\theta_j}{\theta_i}}\right) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right) = \phi^{-1}(t).$$

Aucune référence n'est faite au générateur du niveau supérieur en simulant le générateur du niveau inférieur, de fait cette copule est facile à simuler.

Pour la copule de Clayton, l'algorithme du générateur utilisé au niveau inférieur nécessite d'avoir recours à la méthode de simulation du "rejet" :

Algorithme 5

1. Simuler V_j avec la fonction de distribution stable $(\frac{\theta_i}{\theta_j}, 1, \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\theta_i}{\theta_j}V_i\right)^{\frac{\theta_j}{\theta_i}}, 0)$.
2. Simuler U à partir d'une distribution uniforme
3. Si $U \leq \exp(-V_j)$ alors renvoyer V_j sinon retourner à l'étape 1.

Selon le ratio $\frac{\theta_i}{\theta_j}$, les temps de calcul peuvent être relativement long.

Tandis que pour la copule de Frank, l'algorithme proposé par [Dev99] se base sur les fonctions génératrices du modèle de risque collectif. Soit g_3, g_1 et g_2 des fonctions génératrices telles que $g_3(t) = g_1(g_2(t))$, soit N et X ayant respectivement les fonctions génératrices g_1 et g_2 , alors $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ a la fonction génératrice g_3 . Pour simuler le générateur inférieur :

Algorithme 6

1. Simuler V_i qui suit une distribution en série logarithmique dont le paramètre vaut $\alpha = (1 - \exp(-\theta_i))$
2. Simuler X_i qui suit une distribution en série logarithmique dont le paramètre vaut $\alpha = (1 - \exp(-\frac{\theta_i}{\theta_j}))$ for $i = 1, \dots, V_i$ alors $\sum_{i=1}^{V_i} X_i$

Que les copules envisagées soient des HNAC, des FNAC ou des EAC, l'estimation des paramètres se fait par la méthode du maximum de vraisemblance. Comme exposé précédemment, le manque de données induira sans doute des estimations à dire d'expert, de fait ces méthodes d'estimations ne seront pas détaillées dans la présente thèse. Les descriptions des procédures à mettre en oeuvre pour estimer les copules HNAC et FNAC sont dans [ST06], alors que pour les copules EAC, le lecteur est renvoyé vers [ELM97] et [Joe97].

Il a été démontré dans cette section que si les copules archimédiennes imbriquées (FNAC ou HNAC) respectaient pour chaque niveau de composition la relation $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, alors la distribution finale est une distribution multivariée. Les seules limitations à l'usage de ces copules sont le temps de calcul pouvant-être long pour certains générateurs ainsi que la vérification de la relation $\phi_{i+1} \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ qui n'est pas directe dès lors que des générateurs sont mélangés.

4.5.3 Pair copula construction

Une structure plus flexible pour modéliser les dépendances au sein d'un portefeuille de compagnie d'assurance est obtenue au moyen des pair copula construction (PCC). Le principe est de partager la distribution multivariée en une cascade de copule bivariable (voir la Figure 4.8 pour une représentation). Cette approche permet de spécifier $\frac{n(n-1)}{2}$ différentes copules. Contrairement aux cas précédents soumis à différentes conditions, pour cette approche, aucune contrainte tant sur le niveau du degré de dépendance que sur la famille de copule n'est nécessaire. L'idée de base provient de la fonction de densité d'une distribution multivariée :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{12\dots n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Il est possible de l'exprimer sous la forme suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_n)f_{n-1}(x_{n-1}|x_n)f_{n-2}(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \dots f_1(x_1|x_2, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

En dimension 2, la densité est égale à :

$$f(x_1, x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2).$$

La densité conditionnelle en dimension 2 est :

$$f(x_1|x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1).$$

En dimension 3 :

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2, x_3) &= c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))f_1(x_1|x_3) \\ &= c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3))f_1(x_1). \end{aligned}$$

Ou de manière alternative :

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2, x_3) &= c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))f_1(x_1|x_2) \\ &= c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1). \end{aligned}$$

Dans le cas général, la formule est :

$$f(x|\mathbf{v}) = c_{xv_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))f(x|\mathbf{v}_{-j}), \quad (4.20)$$

où

- \mathbf{v} est un vecteur en dimension n
- v_j est le $j^{\text{ème}}$ composant du vecteur
- \mathbf{v}_{-j} est le vecteur \mathbf{v} dans lequel le $j^{\text{ème}}$ composant n'est pas présent.

La densité d'une distribution multivariée peut être représentée par un produit de copules bivariées. La construction de la densité conditionnelle est itérative et dépend d'une factorisation spécifique. Il a été démontré par [Joe97] que :

$$F(x|\mathbf{v}) = \frac{\delta C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))}{\delta F(v_j|\mathbf{v}_{-j})}, \quad (4.21)$$

où $C_{ij|k}$ est une copule bivariée.

Pour les professionnels, cette importante flexibilité peut-être un avantage comme un inconvénient. L'avantage est de ne pas avoir besoin de spécifier des choix d'agrégation aux niveaux intermédiaires puisque seule la combinaison à la racine de l'arborescence impactera le résultat. Cet avantage est également son inconvénient, puisqu'il n'y a aucune lisibilité sur les causes de la dépendance aux niveaux intermédiaires. De plus, le choix de l'agencement des risques à la racine de l'arbre est assez délicat (voir le paragraphe suivant).

Il y a un nombre important de combinaisons possibles pour construire une PCC. Pour présenter de manière simple les PCC, dans [BC02] est défini plusieurs types de constructions utilisant une arborescence appelée *Vine*. Il existe deux principaux types de structures *Vine* :

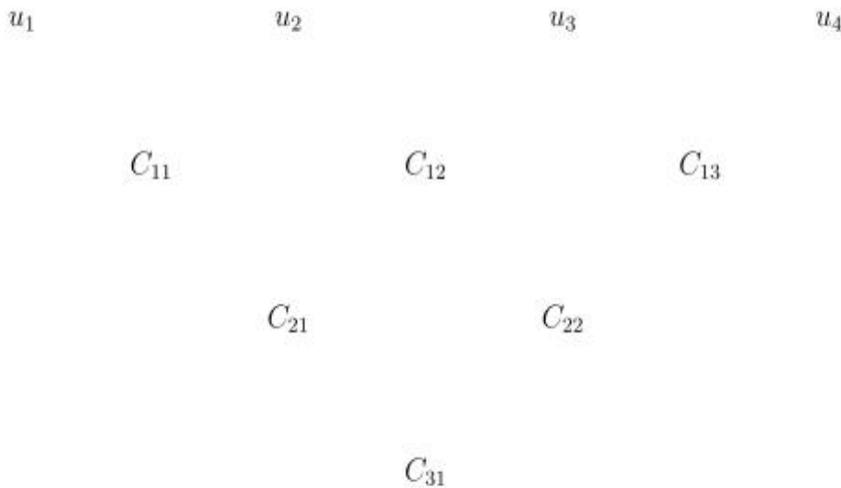


FIGURE 4.8 – Arborescence pour une 4-Vine PCC

- *D-Vine* : Chaque nœud de l'arbre ne peut pas être connecté à plus de deux “parents” (voir la Figure 4.8).
- *Canonical-Vine* : Chaque niveau de l'arbre a un nœud unique qui est connecté à $n - j$ “parents”. Ce genre de structure est particulièrement intéressant lorsqu'une variable a une influence sur les autres variables. Dans ce cas, cette variable est positionnée à la racine de l'arbre.

Seule la structure *D-Vine* sera développée dans cette thèse, la structure *Canonical-Vine* ressemblant à une forme de dépendance explicite, or cette forme de dépendance a été exclue dès le début de ce chapitre, car elle nécessite de faire des hypothèses de “construction” sur la variable clé.

Il est important de comprendre qu'à chaque nœud de l'arbre, il est possible d'utiliser une copule appartenant à une famille différente sans contrainte particulière sur le degré de dépendance entre chaque nœud / niveau de l'arbre.

Dans une structure *D-Vine* en dimension n , il y a $n!$ combinaisons possibles à la racine de l'arbre. Au premier niveau, grâce à la propriété de symétrie des copules, $C_{ij|k} = C_{ji|k}$, l'ordre des marginales à la racine de l'arbre peut être renversé sans modifier le premier niveau, ainsi il y a $\frac{n!}{2}$ différentes combinaisons possibles à travers l'arbre. Pour une présentation détaillée voir [ACFb].

Pour une structure D -Vine, la densité $f(u_1, \dots, u_n)$ est représentée par :

$$\prod_{k=1}^n f(u_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j,i} [F(u_i|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1}), F(u_{i+j}|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})]$$

où j correspond au niveau et i représente la copule à travers l'arbre.

Cette densité appliquée aux copules archimédiennes donne :

$$\prod_{k=1}^n f(u_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \phi_{j,i}^{-1(2)} [\phi_{j,i}(F(u_i|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})) + \phi_{j,i}(F(u_{i+j}|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1}))]$$

$$\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})) \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1}))$$

Une copule PCC est-elle capable de différencier des portefeuilles qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la structure de dépendance ?

Théorème 20. *Une copule archimédienne PCC est MTP2 si le logarithme de la densité est supermodulaire.*

Démonstration. $C(\mathbf{u})$ est MTP2 seulement si $\log c(\mathbf{u})$ est supermodulaire.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \underbrace{\log \left(\phi_{j,i}^{-1(2)} [\phi_{j,i}(F(u_i|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})) + \phi_{j,i}(F(u_{i+j}|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1}))] \right)}_{\Upsilon}$$

$$+ \underbrace{\log(\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})))}_{\Phi} + \underbrace{\log(\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})))}_{\Psi}$$

qui est équivalent à :

$$\frac{\partial^{(2)} \Delta}{\partial u_k \partial u_l} \geq 0.$$

$$\frac{\partial^{(2)} \Upsilon}{\partial u_k \partial u_l} = \frac{\phi_{j,i}^{-1(2)} [A] \left(BC \phi_{j,i}^{-1(4)} [A] + \phi_{j,i}^{-1(3)} [A] D \right) - BC (\phi_{j,i}^{-1(3)} [A])^2}{\left(\phi_{j,i}^{-1(2)} [A] \right)^2} \geq 0,$$

où

$$A = \phi_{j,i}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) + \phi_{j,i}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))$$

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_k}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) + \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_k}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}) \right) \\
 C &= \left(\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) + \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}) \right) \\
 D &= \phi_{j,i}^{(2)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j})F_{u_k}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) \\
 &+ \phi_{j,i}^{(2)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})F_{u_k}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}) \\
 &+ \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l, u_k}^{(2)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) + \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))F_{u_l, u_k}^{(2)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})
 \end{aligned}$$

Cette relation est vérifiée si :

$$\underbrace{BC}_{\geq 0} \left(\phi_{j,i}^{-1(4)}[A] \phi_{j,i}^{-1(2)}[A] - (\phi_{j,i}^{-1(3)}[A])^2 \right) \geq \underbrace{-\phi_{j,i}^{-1(3)}[A] \phi_{j,i}^{-1(2)}[A]}_{\geq 0} D \quad (4.22)$$

Le Théoreme 2.8 de [MS01] indique que $F(u_i|\mathbf{u}_{-j})$ est décroissante avec \mathbf{u}_{-j} , donc $F_{u_l}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) < 0$, en complétant avec les propriétés du générateur de la copule archimédienne (ϕ^{-1} est complètement monotone et $\phi^{(1)} < 0$, $\phi^{(2)} > 0$). Une condition nécessaire pour que l'Equation (4.22) soit satisfaite est que :

$$\phi_{j,i}^{-1(4)}(x) \phi_{j,i}^{-1(2)}(x) \geq (\phi_{j,i}^{-1(3)}(x))^2.$$

Cette condition est équivalente à la log convexité de $(-1)^k \phi^{-1(k)}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{(2)}\Phi}{\partial u_k \partial u_l} &= \frac{\phi_{j,i}^{(3)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) F_{u_l}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) F_{u_k}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))^2} \\
 &+ \frac{\phi_{j,i}^{(2)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) F_{u_k, u_l}^{(2)}(u_i|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))^2} \\
 &- \frac{\left(\phi_{j,i}^{(2)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j})) \right)^2 F_{u_l}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j}) F_{u_k}^{(1)}(u_i|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_i|\mathbf{u}_{-j}))^2} \geq 0 \\
 \\
 \frac{\partial^{(2)}\Psi}{\partial u_k \partial u_l} &= \frac{\phi_{j,i}^{(3)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})) \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})) F_{u_l}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}) F_{u_k}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))^2} \\
 &+ \frac{\phi_{j,i}^{(2)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})) \phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})) F_{u_k, u_l}^{(2)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))^2} \\
 &- \frac{\left(\phi_{j,i}^{(2)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})) \right)^2 F_{u_l}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}) F_{u_k}^{(1)}(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j})}{\phi_{j,i}^{(1)}(F(u_{i+j}|\mathbf{u}_{-j}))^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Cela se vérifie pour :

$$\underbrace{F_{u_l}^{(1)}() F_{u_k}^{(1)}()}_{\geq 0} \left[\phi_{j,i}^{(3)}() \phi_{j,i}^{(1)}() - \left(\phi_{j,i}^{(2)}() \right)^2 \right] \geq \underbrace{-\phi_{j,i}^{(1)}() \phi_{j,i}^{(2)}()}_{\geq 0} F_{u_k, u_l}^{(2)}()$$

Ψ et Φ doivent satisfaire l'équation suivante :

$$\phi_{j,i}^{(3)}(x) \phi_{j,i}^{(1)}(x) \geq \left(\phi_{j,i}^{(2)}(x) \right)^2$$

□

Pour être MTP2, le logarithme de la densité de chaque copule composant une copule archimédienne PCC doit avoir $\phi^{(k)}$ et $(-1)^k \phi^{-1(k)}$ log convexe. Cette condition est similaire à celle d'une EAC. Enfin tout comme pour les copules envisagées précédemment, il est possible dans le cas des copules archimédiennes de donner les conditions d'une relation d'ordre, s'il n'y a qu'un noeud de différent dans l'arborescence.

Théorème 21. *Soit une copule PCC archimédienne représentée par :*

$$\prod_{k=1}^n f(u_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{l=1}^{n-j} \phi_{j,l,i}^{-1(2)} [\phi_{j,l,i}(F(u_l|u_{l+1}, \dots, u_{l+j-1})) + \phi_{j,l,i}(F(u_{l+j}|u_{l+1}, \dots, u_{l+j-1}))]$$

$$\phi_{j,l,i}^{(1)}(F(u_l|u_{l+1}, \dots, u_{l+j-1})) \phi_{j,l,i}^{(1)}(F(u_{l+j}|u_{l+1}, \dots, u_{l+j-1}))$$

pour $i = 1, 2$, tel que $\phi_{j,l,1} \circ \phi_{j,l,2}^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ alors $C_1 \leq_{sm} C_2$ pour $\forall j \in 1, \dots, n-1$ et $\forall l \in 1, \dots, n-j$.

Plus encore pour ce type de copules que précédemment, l'impact de ce théorème sera limité à des tests de sensibilité puisqu'une relation d'ordre n'est possible de manière analytique que pour le cas où un seul noeud est différent. Compte tenu du nombre important de noeuds $\binom{n(n-1)}{2}$, ce cas de figure ne devrait pas être rencontré.

Ci-après est donné l'algorithme de simulation des copules PCC.

Algorithme 7

1. Simuler U_i qui suit une loi uniforme pour $i = 1, \dots, n$
2. Résoudre $x_1 = U_1$ $x_2 = F_{2|1}^{-1}(U_2|x_1)$ $x_3 = F_{3|1,2}^{-1}(U_3|x_1, x_2) \dots$
 $x_n = F_{n|1,2,\dots,n-1}^{-1}(U_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

La résolution de l'inverse de la fonction de répartition conditionnelle n'est pas directe. Pour certaines familles de copules, des formules fermées existent (voir [ACFb]) tandis que

pour d'autres, des méthodes d'optimisation sont nécessaires pour résoudre les équations, ceci entraînant un temps de calcul relativement long dès lors que la dimension de la distribution multivariée devient conséquente. Ainsi le critère du temps de calcul n'est pas certain d'être respecté.

Une mise en garde avait été faite en Section 4.2 sur le postulat de l'agrégat de copules Gaussiennes bivariées donnait de manière directe une copule Gaussienne. Avec l'approche par PCC, il n'y a aucune restriction à agréger des copules bivariées Gaussiennes de cette façon.

Il est à noter que si aucune des copules archimédiennes (échangeables ou non échangeables) ne s'applique sur un portefeuille; que se soit parce que les conditions d'application ne sont pas respectées ou parce que les regroupements opérés n'ont pas de sens d'un point de vue économique (regrouper des risques relevant de la branche "Responsabilité Civile en Construction" avec la branche "Dommage Corporels" par exemple, n'est a priori pas justifié), les PCC peuvent être une alternative aux copules elliptiques. Sous réserve que les points du paragraphe précédent sur l'ordre des marginales à la racine de l'arborescence et du choix des copules ont été résolus.

5 Application : Sensibilité dans l'agrégation des risques

Les différentes structures de dépendance présentées au cours des sections précédentes seront appliquées sur le risque de souscription non-vie. Celui-ci est retenu pour deux raisons, d'une part parce que les corrélations proposées par le CEIOPS sont de "vrais" coefficients de corrélation et d'autre part, une formule fermée est communiquée contrairement aux autres classes de risque où des scénarios sont proposés. Afin de garder un point de repère avec la réforme, le niveau de finesse et dans une moindre mesure les paramètres, seront alignés avec ceux du risque de souscription non-vie. Pour chaque structure de dépendance faisant appel aux copules, 100.000 simulations seront générées, les distributions marginales suivront une loi lognormale comme c'est le cas dans Solvabilité 2. L'espérance des pertes de chacune des branches d'activité sera supposée égale à 1, les volatilités des primes seront utilisées comme approximation pour paramétrer les volatilités par branche d'activité (voir Chapitre 1 - Section 4). Les résultats seront présentés avec le SCR exprimé en pourcentage des charges moyennes. Avec cette paramétrisation, pour la formule utilisée dans le risque de souscription non-vie, le SCR est de 20.63%. Cela signifie que le montant de capital à immobiliser au titre de ce risque représente $SCR_{uv} = 20.63\%$ de la moyenne des pertes. Si cela devait être la formule utilisée à chaque niveau d'agrégation dans Solvabilité 2, à savoir la "Règle de la Racine Carrée", ce besoin en capital passerait à $SCR_{\sqrt{}} = 22.42\%$. Dans le cas comonotone, le SCR vaudrait dans ce cas 34.06%.

5.1 Copule elliptique

Comme indiqué lors de la Section 4.2 consacrée aux copules elliptiques, le paramétrage du degré de liberté de la copule de Student ne pourra se faire que sur avis d'expert. Le degré de liberté est fixé de manière arbitraire à 10. Les coefficients de corrélation de la matrice du QIS4 seront transformés en coefficient de corrélation de Spearman afin que la structure de dépendance soit indépendante des distributions marginales.

TABLE 4.7 – SCR pour les copules elliptiques

elliptique	SCR
Gaussienne	19.92%
Student	21.00%
Cauchy	23.67%

La relation suivante est observée.

$$SCR_{Cauchy} > SCR_{\surd} > SCR_{Student} > SCR_{uw} > SCR_{Gaussienne}$$

Parmi les structures d'agrégation utilisant des copules, le classement n'est pas surprenant. Le copule de Cauchy donne plus de poids aux événements survenant avec une faible probabilité que les copules Gaussienne et Student, donc le SCR pour cette copule est plus important. De la même façon, les résultats pour SCR_{uw} et SCR_{\surd} supérieurs à $SCR_{Gaussienne}$ étaient prévisibles puisque SCR_{uw} est basé sur une hypothèse de distribution lognormale multivariée; distribution aboutissant à des besoins en capitaux plus importants qu'une distribution Gaussienne. De plus, comme il a été présenté à la Section 3 que $SCR_{\surd} > SCR_{uw}$, le fait que $SCR_{\surd} > SCR_{Gaussienne}$ est logique en prenant en compte la remarque précédente. Pour égaliser le SCR de la copule de Student et le SCR_{\surd} , le degré de liberté doit être égal à 3. Il y a une différence de près de 16% entre SCR_{Cauchy} et SCR_{uw} . Cette application démontre l'importance de l'estimation du choix du degré de liberté pour les copules elliptiques, puisqu'entre la copule de Cauchy et la copule Gaussienne, une différence de près de 19% existe dans cet exemple.

5.2 Exchangeable archimedean copula

Pour comparer les résultats entre les besoins en capitaux issus des formules fermées proposées par Solvabilité 2 et ceux obtenus via les copules elliptiques, la seule hypothèse concernait le degré de liberté de la copule de Student puisque la matrice de corrélation est celle du QIS4. Pour déterminer le besoin en capital avec des copules archimédiennes échangeables, une hypothèse supplémentaire est nécessaire.

Dans la matrice de corrélation du risque de souscription non-vie, chaque coefficient représente le coefficient de corrélation des pertes entre deux branches d'activités. Comme il a été expliqué à la Section 2.2, il n'existe pas de coefficient multivarié permettant de retranscrire le niveau de dépendance qui existe au sein d'un portefeuille et pouvant être utilisé pour paramétrer le niveau de dépendance d'une copule archimédienne échangeable.

Cette information est nécessaire pour ce type de copules, car seul un paramètre est utilisé pour représenter la dépendance au sein du portefeuille.

Afin de donner une quantification de l'impact de cette structure de dépendance, la méthode des moments sera utilisée pour estimer le paramètre de la copule. Le manque de données conduira vraisemblablement les compagnies à utiliser cette approche puisque celle-ci revient à paramétrer sur avis d'expert : autrement dit l'expert donnera une estimation de la dépendance puis les paramètres seront déduits de cet avis. Il est également vraisemblable que le management de l'entreprise souhaitera voir quantifier le niveau de dépendance en fonction du coefficient de corrélation, du fait de sa rapide interprétation, malgré toutes les faiblesses évoquées en Section 2.1.

Suivant cette logique, deux alternatives sont possibles :

- Soit un coefficient de corrélation “moyen” est calculé avec la matrice de corrélation du QIS4. Celui-ci correspondra à la moyenne des coefficients de corrélation de Pearson soit 35.23%. Cette méthode est retenue par le régulateur dans le cadre des simplifications proposées aux captives d'assurance (voir le paragraphe 3.1.3 dans [CEI09n]).
- Soit le coefficient de Spearman ρ_{S3} multivarié (voir Section 2.2) est estimé avec la même matrice de corrélation. La valeur obtenue est 33.89%.

La transformation du coefficient de corrélation de Pearson “moyen” en un coefficient de Spearman donne 33.82%, soit un écart inférieur 0.2%. Cette faible différence s'explique par la logique de construction du coefficient de Spearman multivarié qui se base sur une moyenne pondérée des coefficients bivariés.

Naturellement, ces approximations sont pleinement critiquables, mais le but n'est pas de déterminer la vraie valeur des paramètres, mais plutôt de montrer les problématiques existantes dans l'agrégation des risques dans un modèle interne. Le problème d'estimation des paramètres pour des regroupements et des méthodes autres que ceux proposés par le nouveau cadre réglementaire en est un autre.

L'approximation par le coefficient de Spearman multivarié sera retenue.

Comme indiqué, le paramétrage effectué ne permet pas de faire des comparaisons avec les besoins en capitaux des copules elliptiques. La copule de Gumbel a un SCR

TABLE 4.8 – *SCR* pour les copules archimédiennes échangeables

EAC	<i>SCR</i>
Frank	18.08%
Clayton	15.03%
Gumbel	15.85%

plus faible que celui de la copule de Frank alors même que c'est la seule copule qui possède un coefficient de dépendance de queue supérieure. Ce résultat contre-intuitif est la conséquence de la paramétrisation par la méthode des moments. Les seules données à disposition des compagnies d'assurance ne pouvant être remises en cause sont celles communiquées par le régulateur, et ce d'autant plus qu'aucune compagnie n'aura un historique assez long permettant d'asseoir de manière fiable les estimations.

Ainsi, obtenir des estimations pour des regroupements de risques différents de ceux proposés par le régulateur, amènera à utiliser une approximation telle que celle utilisée dans cette section et à avoir des résultats contre-intuitifs où le besoin en capital avec la copule de Gumbel est inférieur de plus de 2pts à celui de la copule de Frank. Raisonner à dépendance fixe ou sur avis d'expert peut donc conduire à des résultats contre-intuitifs.

5.3 Fully nested archimedean copula

En se servant de la matrice de corrélation du risque de souscription non-vie, le coefficient de corrélation multiple a été utilisé pour estimer le paramètre des copules FNAC à chaque étape de composition des copules (pour un rappel du schéma de construction d'une FNAC voir la Figure 4.4). En effet la logique de construction d'une FNAC suit la logique de calcul du coefficient de corrélation multiple, la dépendance est appliquée entre une somme de variables et une autre variable aléatoire.

Il ressort de cette approche que peu importe l'agencement avec lequel les branches d'activités sont positionnées à la racine de l'arborescence, la condition de décroissance du degré de dépendance n'est jamais respectée. Il y a toujours un niveau d'agrégation pour lequel le degré de dépendance devient supérieur à celui du niveau précédent. Cette approche ne peut donc être utilisée sur base de la matrice de corrélation du risque de souscription non-vie.

5.4 Hierarchical nested archimedean copula

Pour tester les copules HNAC, il faut au préalable procéder à des regroupements. Les branches d'activités sont rassemblées par groupe de 3 branches. Ces groupes sont établis

de telle sorte à obtenir une matrice de corrélation pour chaque triplet avec uniquement un coefficient de corrélation de 50% entre les paires des branches d'activités. Cela signifie que les 4 matrices de corrélation (de dimension 3) sont identiques et ont des coefficients de corrélation de 50% pour chaque couple.

De la même manière que les copules archimédiennes échangeables, le problème de l'estimation des corrélations intra et inter groupe survient. L'approche utilisée pour les copules EAC sera appliquée, à savoir le calcul d'un coefficient de corrélation parmi les branches spécifiées.

Ci-dessous sont présentés les 4 groupes construits (de manière évidente, le choix de regrouper par 3 les branches d'activités est un choix arbitraire et un regroupement par 2, 4, 6 ou autres, est tout aussi envisageable) :

Groupe 1 (représenté par C_{11}) :

- Branche 10 : Réassurance non proportionnelle - Dommage
- Branche 4 : Dommages aux Biens
- Branche 8 : Assistance

Groupe 2 (représenté par C_{12}) :

- Branche 3 : Marine, aviation, transport (MAT)
- Branche 12 : Réassurance non proportionnelle - MAT
- Branche 9 : Divers

Groupe 3 (représenté par C_{13}) :

- Branche 1 : Automobile, Responsabilité Civile
- Branche 2 : Automobile, Autres risques
- Branche 7 : Protection juridique

Groupe 4 (représenté par C_{14}) :

- Branche 5 : Responsabilité Civile
- Branche 11 : Réassurance non proportionnelle - Responsabilité Civile
- Branche 6 : Credit et caution

Le regroupement opéré est cohérent. Une entreprise d'assurance qui souscrit de l'assurance primaire et de la réassurance pour les mêmes risques (marine, incendie, responsabilité) aura entre ces deux activités une forte corrélation. De plus, une dépendance existe entre la branche Responsabilité Civile Automobile et Dommage Automobile, ceci étant le reflet de la politique de souscription au niveau des contrats automobiles.

Sur la Figure 4.9 ci-dessous est représentée la matrice de corrélation du risque de souscription non-vie du QIS4 réarrangée, pour mettre en perspective les différents groupes.

Corr	10	4	8	9	3	12	1	2	7	5	6	11
10	1	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
4	0.5	1	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
8	0.5	0.5	1	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25
9	0.25	0.5	0.5	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25
3	0.25	0.25	0.5	0.5	1	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
12	0.25	0.5	0.25	0.5	0.5	1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	1	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25
2	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	1	0.5	0.25	0.25	0.25
7	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	1	0.5	0.5	0.5
5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.5	0.25	0.5	1	0.5	0.5
6	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	1	0.5
11	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	1

FIGURE 4.9 – Matrice de corrélation du risque de souscription non-vie du QIS4

En se basant sur ces quatre groupes, différentes structures sont envisagées. Certaines d'entre elles ne respectent pas la contrainte de décroissance dans le degré de dépendance à chaque niveau de composition. Par exemple, suivant l'approche proposée pour estimer le coefficient de corrélation, la structure $C_{31}(C_{21}(C_{11}, C_{13}), C_{22}(C_{12}, C_{14}))$ n'est pas retenue car la condition n'est pas respectée. En effet, $\theta_{11} = \dots = \theta_{14} = 48.26\% \geq \theta_{21} = 26.63\%$ et $\theta_{22} = 29.34\%$ mais $\theta_{31} = 31.98\% \geq \theta_{21}$ et θ_{22} .

Seules les structures suivantes respectent la contrainte de décroissance du paramètre de dépendance :

- S1** $C_{21}(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})$
- S2** $C_{31}(C_{21}(C_{11}, C_{12}), C_{22}(C_{13}, C_{14}))$
- S3** $C_{41}(C_{31}(C_{21}(C_{11}, C_{12}), C_{13}), C_{14})$
- S4** $C_{41}(C_{31}(C_{21}(C_{12}, C_{13}), C_{11}), C_{14})$
- S5** $C_{41}(C_{31}(C_{21}(C_{12}, C_{13}), C_{14}), C_{11})$
- S6** $C_{41}(C_{31}(C_{21}(C_{14}, C_{13}), C_{12}), C_{11})$

Le Tableau 4.9 communique les coefficients de corrélation pour les différents niveaux d'agrégations des groupes. Ce tableau indique que la condition de décroissance est respectée.

Puisqu'il n'y a que deux coefficients de corrélation différents dans le cadre de la matrice de corrélation du risque non-vie dans le QIS4, les coefficients sont très proches, comme le

TABLE 4.9 – Coefficients de corrélation des différentes structures

Structure	$C_{11}/C_{12}/C_{13}/C_{14}$	C_{21}	C_{31}	C_{41}
S1	48.26%	30.64%		
S2	48.26%	34.67%	28.62%	
S3	48.26%	34.67%	30.64%	29.29%
S4	48.26%	34.67%	31.98%	29.29%
S5	48.26%	34.67%	31.98%	28.40%
S6	48.26%	34.67%	31.98%	28.40%

démontrent les coefficients des structures S2 à S6. A partir de ces coefficients, le paramètre de la copule est obtenu en minimisant l'écart entre cette valeur et la valeur du coefficient de corrélation de Spearman ρ_{S1} vu à la Section 2.2.

Il est important de préciser qu'une seule et même famille de copule est appliquée au travers de l'arbre pour chacune des estimations des besoins en capitaux. A l'issue de la phase de simulation, ceux-ci sont communiqués dans le Tableau 4.10 :

TABLE 4.10 – SCR pour les copules HNAC

HNAC	Clayton	Frank	Gumbel
S1	14.37%	16.78%	16.67%
S2	14.53%	16.34%	15.05%
S3	15.26%	16.39%	14.84%
S4	15.13%	16.20%	14.95%
S5	15.05%	16.19%	14.83%
S6	14.85%	16.27%	14.88%

Là encore, les comparaisons ne peuvent être étendues aux résultats des formules du QIS4 (SCR_{uw} et SCR_{\checkmark}) ou à ceux des copules elliptiques à cause de la méthode utilisée pour estimer le degré de dépendance. Seule une comparaison infra méthode sera faite.

Pour la copule de Frank, plus il y a de compositions, plus le SCR décroît. L'inverse est observé pour la copule de Clayton. La copule de Gumbel montre un comportement identique à celle de Frank.

En comparant l'amplitude des résultats des différentes structures au sein de chacune des copules, c'est pour la copule de Gumbel que l'étendue est la plus grande puisque l'écart entre la plus grande valeur (S1) et la plus faible (S5) est de 12%. Tandis que la

copule de Frank montre la plus faible amplitude, puisque la différence entre le plus grand SCR (S1) et le plus faible (S5) est de 3.65%.

Le coefficient de dépendance de queue supérieure pour la copule de Gumbel est déterminé avec la Formule (4.19), ses valeurs sont données dans le Tableau 4.11 pour les différentes structures.

TABLE 4.11 – Coefficient de dépendance de queue supérieure pour une HNAC-Gumbel

HNAC	Gumbel
S1	6.572%
S2	3.369%
S3	3.070%
S4	3.157%
S5	3.081%
S6	3.081%

Les coefficients de dépendance de queue supérieure obtenus sont en lien avec les résultats obtenus pour les besoins en capitaux. La structure S1 a le coefficient de dépendance supérieure et le SCR les plus élevés. Les besoins en capitaux des structures S3 à S6 sont proches, les coefficients de dépendance de queue en sont une autre illustration.

Les résultats sont contre-intuitifs et tiennent à l'approche utilisée pour estimer les paramètres. En estimant les copules sur des données, les conclusions seraient vraisemblablement invalidées, sous réserve de l'existence d'un échantillon correspondant aux exigences de Solvabilité 2, si une lecture stricte de la Directive est faite. Aucune compagnie ne peut se prévaloir d'un historique de deux cents ans. Ainsi la paramétrisation présentée ici est une bonne illustration des problématiques auxquelles pourraient faire face les compagnies.

5.5 Pair copula construction

A la section 4.5.3, il a été présenté que pour une copule ayant une décomposition par paire avec une structure *D-Vine*, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ permutations possibles, ce qui appliqué au nombre de branches présentes dans le QIS4 représente 66 combinaisons différentes.

Seuls quatre ordres à la racine de l'arborescence sont proposés :

O1 Les distributions marginales sont arrangées de telle sorte à avoir un coefficient de corrélation de 50% entre chaque paire à la racine de l'arborescence. L'ordre des branches d'activités représentant les marginales est le suivant :

10/4/8/2/1/5/11/6/7/9/3/12 (voir la sous-section précédente pour la correspondance des branches d'activités). Seule cette combinaison permet d'avoir des coefficients de corrélation de 50% entre chaque paire à la racine de l'arborescence.

- O2** Le même agencement de branches d'activités est repris, à l'exception des premières et dernières branches qui sont interverties, de manière à montrer la sensibilité dans le choix de définir les risques à la racine de l'arborescence.
- O3** L'ordre des branches d'activités est le suivant :
9/10/7/8/5/2/3/6/1/12/11. Avec cette combinaison, le coefficient de corrélation entre la charge de chaque branche d'activité est de 25%. Il existe plusieurs combinaisons permettant d'avoir un coefficient de corrélation de 25% entre chaque paire à la racine de l'arborescence.
- O4** Comme pour O2, les premières et dernières branches d'activités de O3 sont interverties pour montrer la sensibilité de l'approche.

De la même façon, il a été mentionné qu'il n'existait aucune contrainte ni sur le degré de dépendance ni sur la famille des copules. A chaque noeud de l'arborescence (voir Figure 4.8) il est possible d'introduire une copule différente. Cependant, dans un souci de simplicité, la même copule sera appliquée au travers de l'arbre.

Au final, il y a $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 55$ coefficients estimés pour chaque ordre, qui feront eux-mêmes l'objet d'estimation pour obtenir le degré de dépendance de chaque copule. A chaque niveau de l'arbre, le coefficient de corrélation partiel est calculé. Il est donné par la formule suivante :

$$\rho_{13|2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}\sqrt{1 - \rho_{13}^2}} \quad (4.23)$$

Puis les paramètres des copules archimédiennes sont estimés en minimisant l'écart entre cette valeur et la Formule (4.3) de la Section 2.1.

Les copules de Clayton, Frank et Gumbel sont utilisées avec cette structure, de même que les copules elliptiques. Avant de commenter les résultats, il convient de mentionner que le temps de calcul est relativement long, principalement pour la copule Gumbel pour laquelle des procédures numériques sont mises en oeuvre pour résoudre la fonction de répartition conditionnelle indiquée à l'algorithme 7.

C'est la raison pour laquelle les résultats pour les ordres O3 et O4 ne sont pas communiqués. Comme il y a 11 niveaux hiérarchiques, la résolution de la fonction de répartition conditionnelle indiquée à l'algorithme 7 n'est pas toujours atteinte.

De plus, les résultats pour les structures O1 et O2 sont à prendre avec précaution puisque la moyenne théorique de la charge du portefeuille est égale à 12 dans cet exemple,

TABLE 4.12 – SCR pour les copules issues d’une décomposition par paire

HNAC	Clayton	Frank	Gumbel	Gauss	Student	Cauchy
O1	17.21%	21.93%	29.55%	22.78%	23.85%	24.78%
O2	16.92%	21.42%	29.35%	21.62%	22.59%	24.13%
O3	16.81%	22.03%	**	21.57%	22.71%	23.50%
O4	16.92%	22.66%	**	21.42%	22.57%	24.18%

alors qu’à l’issu de la phase de simulation, la moyenne est de 12.25, soit un écart de près de 2%, là où les autres copules ont un écart à la moyenne théorique inférieure à 0.2%.

L’étendue des résultats au sein de chaque famille varie selon les copules. L’écart relatif entre la plus grande valeur et la plus faible est de l’ordre de 2% pour la copule de Clayton et de 6-7% pour les autres copules. La copule de Clayton étant plus à même de mesurer la dépendance de queue inférieure, cette caractéristique peut expliquer cette moindre sensibilité à l’agencement des risques à la racine de l’arborescence. Naturellement, il faudrait tester l’ensemble des combinaisons possibles pour confirmer ou infirmer cette constatation.

En considérant une distribution multivariée construite au travers d’un agrégat de distributions bivariées, le montant de capital obtenu pour les copules elliptiques est plus important que celui issu de l’application directe de la distribution multivariée. En se remémorant les résultats présentés à la Section 5.1, la différence est assez importante (environ 1.5pts pour la copule Gaussienne et Student et 1pt pour la copule de Cauchy) et justifie l’étape de vérification au préalable de savoir si l’agrégation de copules Gaussienne bivariées donne une copule Gaussienne multivariée comme mentionné à la Section 4.2. Contrairement aux autres structures de dépendance avec les copules archimédiennes, il n’y a aucune approximation dans l’estimation des paramètres, de fait il est possible de comparer les résultats aux formules de Solvabilité 2. Excepté pour la copule de Clayton, le besoin en capital avec les copules archimédiennes est plus important que celui obtenu avec la formule utilisée pour le risque de souscription ($SCR_{uw} = 20.63\%$). Dans le cas de la formule de la “Règle de la Racine Carrée” ($SCR_{\sqrt{\cdot}} = 22.42\%$), le constat est moins tranché. L’ordre O4 de la copule de Frank donne un besoin en capital supérieur, là où les trois autres ordres testés donnent un montant moindre, pour se prononcer d’autres combinaisons seraient nécessaires. Néanmoins, le SCR avec la copule de Frank reste proche de $SCR_{\sqrt{\cdot}}$.

A l’inverse des cas EAC (Section 5.2) et HNAC (Section 5.4), le SCR de la copule de Gumbel (sous réserve que les méthodes numériques permettent de résoudre la distribution conditionnelle) est conforme aux attentes, dans le sens où son SCR est supérieur à celui des autres copules archimédiennes puisqu’elle possède un coefficient de dépendance de queue. Aucune conclusion évidente ne peut être tirée sur le fait d’avoir mis à la racine

de l'arborescence une combinaison de branches d'activités présentant les corrélations les plus importantes. Entre O1, où les branches à la racine sont "reliées" par un coefficient de corrélation de 50%, O3 dont les branches à la racine sont "reliées" par un coefficient de corrélation de 25%, O2 avec des branches "reliées" par un coefficient de corrélation de 50% exceptées aux extrémités, et enfin O4 qui a le même ordre que O3, excepté aux extrémités, aucune règle n'apparaît. Là encore, il faut rappeler que la même copule a été appliquée tout au long de l'arborescence et que seuls quelques arrangements de copules à la racine de cette arborescence ont été réalisés. Il conviendrait de tester la sensibilité de l'approche en utilisant différentes copules au travers de l'arborescence et également plus de réagencement des branches d'activités à la racine de l'arbre.

6 Conclusion

Plusieurs enseignements peuvent être tirés à l'issue de ce chapitre :

- Dans de nombreux cas, dès lors qu'il faut modéliser une distribution multivariée pour un nombre de dimensions élevés, le recours aux copules elliptiques devient la norme, car d'une part, la méthode de simulation est relativement simple et d'autre part, parce que le paramétrage repose pour l'essentiel sur la détermination de la matrice de corrélation. Des alternatives aux copules elliptiques existent et permettent de répondre aux différents critères exigés par la Directive Européenne pour une utilisation dans le cadre d'un modèle interne. Leur présentation sous forme d'arborescence permet une compréhension explicite de la part du risk manager de la pertinence du regroupement effectué et donne une meilleure lisibilité des résultats puisque l'architecture envisagée correspondra à la cartographie des risques de l'entreprise d'assurance. Néanmoins, le problème de calibrage de la famille de copule ainsi que des temps de calculs importants peuvent pénaliser ces approches.
- Au niveau de sécurité fixé dans Solvabilité 2, 99.5% à l'horizon d'un an, l'estimation des paramètres et de la structure de dépendance sont difficiles à obtenir. Le recours à l'avis d'expert sera une étape presque obligatoire. Il a été mis en évidence que la paramétrisation par la méthode des moments (équivalente au paramétrage sur avis d'expert) donnait des résultats contreintuitifs. S'il est vrai que l'avis d'expert est très important pour juger de la qualité des données, faire reposer une partie du capital réglementaire sur cet avis semble une hypothèse forte et ce d'autant plus que se posera le problème de la transcription de l'avis d'expert dans une valeur chiffrée. Une piste possible serait de réaliser des entretiens avec les experts, au cours desquels une codification par variable qualitative serait faite de la dépendance. Par exemple, le responsable de pôle pourrait émettre un avis sur l'importance de la dépendance entre 2 garanties qu'il en a charge au moyen d'un barème, qui irait de " Absence de

dépendance ” à “ Parfaite dépendance ” en passant par “ Dépendance faible ”. Ces variables donneraient lieu à un chiffrage forfaitaire de la dépendance (à l’image de ce qui est fait par le collège des superviseurs dans le QIS4, par pas de 25%), puis selon les résultats des différents niveaux de consolidations, ces estimations initiales seraient réajustées

- Comme il a été présenté au Chapitre 1 - Section 3.6, l’association des résultats de modèles internes avec ceux de la formule standard dans le cadre des modèles internes partiels nécessitera d’utiliser des structures de dépendance. Dans le Consultative Paper 65 (voir [CEI09k]), le CEIOPS prévoit différentes étapes :
 - Etape 1 : Soit la structure par la “ Règle de la Racine Carrée ” correspond à la structure de dépendance, auquel cas celle-ci s’appliquera.
 - Etape 2 : L’étape 1 ne satisfait pas à différents tests (voir le paragraphe 3.146 dans [CEI09k]), auquel cas la compagnie doit utiliser l’une des structures que le CEIOPS aura prédéfini au préalable.
 - Etape 3 : Aucune des étapes précédentes ne représentent la réalité de l’entreprise, alors la compagnie utilise une structure lui correspondant plus. Ce choix devra naturellement être motivé.

Il est légitime de se demander si le régulateur proposera de lui-même à l’étape 2 des structures d’agrégations divergentes des règles forfaitaires ou bien même s’il permettra aux compagnies d’utiliser à l’étape 3 des structures similaires à celles présentées dans ce chapitre.

Malheureusement, au vu des exemples (non exhaustifs) communiqués au paragraphe 3.6 de [CEI09k] (absence de prise en compte de la diversification, corrélation implicite, . . .) comme alternative à la formule standard, il apparaît que le plus délicat pour les compagnies ne soit pas l’arbitrage entre les différentes structures présentées dans ce chapitre, mais la reconnaissance par le régulateur du fait que la formule standard ne donne pas la véritable vision de la distribution agrégée des risques.

Bibliographie

- [ACFb] K. Ass, C. Czado, A. Frigessi, and H. bakken. Pair copula constructions of multiple dependence. *Insurance Mathematics and economics*, To appear.
- [BC02] T. Bedford and R. Cooke. Vines a new graphical model for dependent random variables. *Annals of statistics*, 30(4) :1031–1068, 2002.
- [BC08] Basel-Committee. Range of practices and issues in economic capital modelling. Technical report, Bank for International Settlements, 2008.
- [CCL04] A. Chabaane, A. Chouillou, and JP. Laurent. Aggregation and credit risk measurement in retail banking. *Banque & marchés*, 70 :5–15, mai-juin 2004.
- [CD04] A. Charpentier and M. Denuit. *Mathématique de l'assurance non-vie*. Dunod, 2004.
- [CEI07] CEIOPS. Qis3 - calibration of the underwriting risk, market risk and mcr. Technical report, CEIOPS, 2007.
- [CEI08] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.
- [CEI09a] CEIOPS. Ceiops report on its fourth quantitative impact study for solvency 2. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09b] CEIOPS. Cp - 37 the procedure to be followed for the approval of an internal model. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09c] CEIOPS. Cp - 49 scr standard formula : Life underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09d] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2 : article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09e] CEIOPS. Cp - 65 level 2 implementing measures on solvency 2 : Partial internal models. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09f] CEIOPS. Cp - 74 scr standard formula : Article 109 correlations. Technical report, CEIOPS, 2009.

- [CEI09g] CEIOPS. Cp - 79 scr standard formula, article 109j - simplification / specification for captives. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [Cha08] A. Charpentier. Copulas, risk dependence and applications to solvency 2. Groupe consultatif actuariel europeen, 2008.
- [CS09] A. Charpentier and J. Segers. Tails of multivariate archimedean copulas. *Journal of multivariate analysis*, 100(7) :1521–1537, 2009.
- [Dev99] L. Devroye. Algorithm for generating discrete random variables with a given generating function or a given moment sequence. *Journal on scientific and statistical computing*, 12 :107–126, 1999.
- [DL09] L. Devineau and S. Loisel. Risk aggregation in solvency 2 : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula. *preprint*, 2009.
- [EHJ03] P. Embrechts, A. Hoing, and A. Juri. Using copulae to bound the value at risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastic*, 7 :145–167, April 2003.
- [ELM97] P. Embrechts, F. Lindskog, and A. McNeil. *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*. Elsevier, 1997.
- [EM97] P. Embrechts and A. McNeil. *Modelling extremal event in Finance*. Springer-Verlag : Berlin, 1997.
- [EMS99] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation and dependence in risk management : Properties and pitfalls. *Preprint ETH*, 1999.
- [EMS99] P. Embrechts, J. Neslehova, and M. Wurthrich. Additivity properties for Value at Risk under archimedean dependence and heavy tailedness. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44 :164–169, 2009.
- [EMS05] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. *Quantitative risk management : concept, techniques and tools*. Risk management : value at risk and beyond, 2005.
- [EP08] P. Embrechts and G. Pucetti. Aggregating risk across matrix structured loss data : the case of operational risk. *Journal of Operational Risk*, 3 :29–44, July 2008.
- [Fil09] D. Filipovic. Multi risk level aggregation. *ASTIN Bulletin*, 2009.
- [Fra06] G. Frahm. On the extremal dependence coefficient of multivariate distribution. *Statistics and probability letters*, 76 :1470–1481, 2006.
- [Fre51] M. Frechet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann Univ Lyon*, 9 :53–77, 1951.
- [FV98] E. Free and E. Valdez. Understanding relationship with copula. *North American Actuarial Journal*, 2 :1–25, 1998.
- [Gen86] C. Genest. The joy of copulas : bivariate distributions with uniform marginal. *The american statistician*, 40 :280–283, 1986.

- [HL02] H. Hult and F. Lindskog. Multivariate extremes, aggregation and dependence in elliptical distribution. *Advance in Applied Probability*, 34 :587–608, 2002.
- [Hoe40] W. Hoeffding. Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5 :179–233, 1940.
- [Hof07] M. Hofert. Sampling archimedean copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52 :5163–5174, 2007.
- [IC82] R. Iman and W. Conover. A distribution free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 11 :311–334, 1982.
- [Joe97] H. Joe. *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman and Hall, 1997.
- [Ken70] M. Kendall. *Rank correlation method*. Griffin, 1970.
- [Loi09] S. Loisel. A trivariate non-gaussian copula having 2-dimensional gaussian copulas as margins. *preprint*, 2009.
- [Mar52] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1) :77–91, 1952.
- [McN07] A. McNeil. Sampling nested archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 83 :834–841, 2007.
- [MKK09] A. McNeil, G. Kretschmar, and A. Kirchner. The case for fully integrated models of economic capital. *preprint*, 2009.
- [Mel07] M. Melchiori. Tools for sampling multivariate archimedean copulas. *Preprint*, 2007.
- [MO98] A. Marshall and I. Olkin. Families of multivariate distributions. *Journal of the american statistical association*, 83 :834–841, 1998.
- [MS01] A. Muller and M. Scarsini. Stochastic comparison of random vectors with a common copula. *Mathematics of operations research*, 26 :723–740, November 2001.
- [MS05] A. Muller and M. Scarsini. Archimedean copula and positive dependence. *Journal of multivariate analysis*, 93 :434–445, April 2005.
- [Nel97] R. Nelsen. Dependence and order in families of archimedean copulas. *Journal of multivariate analysis*, 60(1) :111–122, 1997.
- [Nel99] R. Nelsen. *An introduction to copula*. Springer, 1999.
- [OOS09] O. Okhrin, Y. Okhrin, and W. Schmid. Properties of hierarchical archimedean copula. Technical report, SBF 649 Economic risk, 2009.
- [oPI04] Swiss Federal Office of Private Insurance. White paper of the swiss solvency test. Technical report, Swiss Federal Office of Private Insurance, November 2004.

- [Par05] C. Partrat. *Assurance non-vie : modelisation, simulation*. Assurance Audit Actuariat, 2005.
- [PS08] D. Pfeifer and D. Strassburger. Solvency ii : stability problems with the scr aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :61–77, avril 2008.
- [QM05] JF. Quesy and M. Mesfioui. Bounds on the value at risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance Mathematics and Economics*, 37 :135–151, July 2005.
- [Sai04] F. Saita. Risk capital aggregation : the risk manager’s perspective. Technical report, EFMA Basel Meetings, 2004.
- [San05] A. Sandstrom. *Solvency : Models, assessment and regulation*. Chapman and Hall, 2005.
- [SCO08] SCOR. From principle based risk management to solvency requirements. Technical report, SCOR, 2008.
- [Sha64] W. Sharpe. Capital asset prices : a theory of market equilibrium under condition of risk. *The journal of finance*, 19(3) :425–442, 1964.
- [Skl59] A. Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Pub. Inst. Statist. Univ. Paris 8*, pages 228–231, 1959.
- [ST06] C. Savu and M. Trede. Hierarchical archimedean copulas. *Preprint*,2006.
- [Ton90] Y. Tong. *The multivariate normal distribution*. Springer, 1990.
- [Wal03] JF. Walhin. Une nouvelle caractérisation de la distribution de pareto, avec application a l’analyse de la cadence de paiements du reassureur en excédent de sinistre. *Bulletin of swiss association of actuaries*, 2 :131–148, 2003.
- [WH02] G. Wei and T. Hu. Supermodular ordering on a class of multivariate copulas. *Statistics and probability letters*, 57 :357–385, 2002.
- [Wol80] E. Wolf. N-dimensional measures of dependence. *Stochastica*, 4(3) :175–188, 1980.

Conclusion

Le nouveau cadre réglementaire issu de la réforme Solvabilité 2 va donc permettre aux compagnies de choisir de quelle manière elles souhaitent estimer le capital parmi les trois options offertes :

- Une formule standard. Celle-ci repose sur une approche modulaire des risques : pour chaque risque, un montant de capital réglementaire est défini au travers de scénarios ou de facteurs ; ce capital devant correspondre à une $VaR_{99,5\%}$ à l’horizon d’un an. Ces besoins en capitaux sont ensuite agrégés pour permettre à l’exigence globale de représenter elle-même une $VaR_{99,5\%}$. Affirmer que les hypothèses sous jacentes à la formule standard sont simplistes est une tautologie, car pour correspondre à un maximum d’acteurs, le CEIOPS a dû faire des compromis. Au regard des autres méthodes de détermination du capital à travers le monde (“ Risk Based Capital ”, “ Swiss Solvency Test ”, agences de notation, . . .), le seul point différent dans l’approche adoptée par le CEIOPS, est la justification scientifique recherchée au travers de l’emploi de termes techniques, tels que “VaR” ou bien encore “corrélation”. La non satisfaction de plusieurs des axiomes qui sont attendus par une mesure de risque est un exemple de la difficulté de concilier une mesure de risque réglementaire avec une mesure de risque scientifique.
- Un modèle interne global. Une compagnie peut estimer de manière spécifique l’ensemble des risques auxquels elle est confrontée pour déterminer son capital réglementaire. Plusieurs limitations doivent être mentionnées :
 - Le niveau des quantiles requis par la Directive, est tellement important que la modélisation des événements et des dépendances se produisant dans la queue sera délicate. Le Chapitre 4 a mis l’accent sur la difficulté d’obtenir de telles valeurs et de les utiliser dans une structure de dépendance.
 - La modélisation du comportement des assurés et des actions du management de la compagnie sera inévitablement sujette à caution (politique de versement des dividendes, de participation aux bénéfices, de rachats, . . .).
 - La concentration du savoir faire sur quelques individus experts entraîne un risque opérationnel.

- L’horizon temporel visé par la Directive se concilie assez mal avec l’horizon de gestion d’une entreprise d’assurance.
- Un modèle interne partiel. Il est à mi-chemin entre les deux choix précédents. La structure modulaire de la formule standard sera utilisée, mais les besoins en capitaux de certains des risques sont issus d’estimations réalisées par l’assureur. Retenir cette option paraît justifier pour certains acteurs par leur spécialisation dans la souscription de certains risques (des garanties particulières : RC médicale, RC construction ; ou bien des produits atypiques : 2 roues par exemple) ou bien par leur système de gouvernance interne (les fonctions de contrôle et d’audit interne sont ancrées dans la culture de l’entreprise).

Il est à noter que pour les choix incluant l’usage d’un modèle interne, le régulateur imposera différents tests avant de permettre leurs utilisations, tel le “ Use Test ”.

Les intérêts de chacune des parties prenantes sont différents : Du point de vue des compagnies, le modèle interne reflétera le mieux la réalité des risques et leurs maîtrises au sein de l’entreprise, mais l’aspect très spécifique de ces modèles ne permettra pas d’atteindre une harmonisation au niveau européen et une plus grande transparence pour les investisseurs. A contrario, la formule standard ne reflétera pas correctement les risques des compagnies, mais permettra d’avoir une trame commune à tous les Etats membres et ainsi une base de comparaison pour la communication financière. Que se soit les compagnies ou les investisseurs, un compromis ne pourra être atteint qu’au prix d’une standardisation du modèle interne. Du point de vue de l’assuré ? En se focalisant sur le montant de capital à détenir, il est vraisemblable que son intérêt soit dans l’utilisation de la formule standard. Sans vouloir imaginer un comportement opportuniste de certaines compagnies, ces dernières ne développeront un modèle interne que si l’un des avantages attendus (en dehors de celui de l’amélioration du management de la compagnie) est une exigence de capital moindre que celle de la formule standard. Inversement, l’assuré aura intérêt à ce que les compagnies utilisent un modèle interne, car cela leurs permettra de mieux maîtriser les risques et ainsi d’offrir des garanties / services en adéquation.

Ces trois méthodes de détermination du capital réglementaire sont l’aboutissement de réflexions et de décisions prises par le régulateur, en concertation plus ou moins importante avec le marché. Pourtant, certaines pistes auraient mérité d’être approfondies, tandis que d’autres ont été exclues alors mêmes qu’elles auraient pu constituer des sources d’amélioration de cette réglementation. Plusieurs de ces pistes sont évoquées :

- Les réflexions actuelles ne portent que sur un renforcement du pouvoir des autorités de contrôle et une augmentation des exigences sur le capital réglementaire. Alors que d’autres pistes peuvent être envisagées comme l’autorégulation. Comme il est mentionné dans [Lef00], est-ce qu’une exigence accrue de transparence ne pourrait

pas se substituer au moins partiellement à l'exigence de capital. Cette solution existe et est mise en pratique par la Nouvelle-Zélande, dont le régime prudentiel se résume presque exclusivement à l'obligation pour les assureurs d'indiquer aux souscripteurs potentiels, la notation obtenue auprès des agences de notation lors de la conclusion ou du renouvellement d'un contrat. A l'heure actuelle, aucun Etat européen ne préconise cette solution extrême, certains estiment toutefois qu'une exigence de capital calibrée pour éviter les faillites avec un seuil de confiance élevé, fait peser une contrainte trop forte sur la compétitivité des assureurs. Ils argumentent en faveur d'un allègement des exigences en passant par une responsabilisation accrue des assurés, au travers d'une augmentation sensible des informations données au public. Cette solution revient à donner une crédibilité très forte au jugement émis par les agences de notation, crédibilité mise à mal par la crise financière récente. De plus, elle met l'accent sur le devoir de conseil des compagnies en direction des assurés. Ce rôle de conseil devant vraisemblablement faire l'objet d'une intervention étatique pour imposer un cadre minimum, à l'image de la réforme " Lagarde " en assurance emprunteur.

- Le régime prudentiel de l'assurance passe d'une estimation statique à des méthodes dynamiques fondées sur les risques. Ces estimations dynamiques déjà employées dans le monde bancaire, sont aujourd'hui mises à l'épreuve par la récession économique qui sévit au moment d'écrire ces lignes. L'un des motifs de cette situation semble être l'insuffisance de capital. L'une des théories expliquant l'origine de celle-ci, serait que les régimes d'évaluation du capital mesurent le risque d'après les conditions existantes du marché. Les marchés à la hausse avec un faible niveau de variation, sont perçus comme présentant un environnement avec un risque faible. Dans cette situation, les exigences de capital chutent. Alors qu'inversement, lorsque les marchés sont à la baisse avec une forte instabilité, les exigences de capital augmentent. Cette approche de valorisation des entreprises est procyclique et intensifie les variations économiques. En période d'expansion, les entreprises sont incitées à assumer plus de risques et en phase de récession, leurs choix sont limités. C'est le cas de figure observé à l'heure actuelle pour les sociétés soumises aux normes IFRS. Elles sont confrontées à la dépréciation de leur actif et doivent simultanément faire face à des exigences de capital élevées. Une approche opposée (contracyclique) serait plus avantageuse et pourrait être basée sur un horizon plus long que celui visé par Solvabilité 2 et ainsi correspondre à l'exercice de l'activité des assureurs. Les discussions en cours sur l'adaptation du choc appliqué au sous module de risque " action " dans le CP69 (voir [CEI09]), montrent que cette méthode pourrait être transposée à l'ensemble de la Directive. Il suffirait dans ce cas d'évaluer la solvabilité des assureurs non pas à un point ou sur un horizon donné, mais de l'évaluer sur tout le cycle économique

afin d'avoir une correspondance avec le cycle de vie des polices d'assurance.

- Une utilisation des avancées induite par Solvabilité 1 aurait pu être un socle à Solvabilité 2. La proposition peut paraître surprenante alors que tous s'accorde à dire depuis 1973 que Solvabilité 1 est une vision trop simpliste et inefficace de la solvabilité des assureurs. Pourtant, ces règles de solvabilité ont évolué dans le temps, comme le démontre par exemple les nouveaux états réglementaires apparus ces dernières années en France :
 - Les états trimestriels T3 de suivi actif-passif.
 - Le test d'exigibilité C3bis permettant d'évaluer la solidité financière de la compagnie sur des scénarios pré-spécifié. Dans ces états sont reproduits l'impact de différents scénarios sur une hausse (+200bp à +400b) ou une baisse (-100bp à -300 bp) du taux d'intérêt (TEC10), ainsi qu'une baisse du cours des actions et de l'immobilier (-10% à -40%).
 - Les stress-test des dispositifs de réassurance C8 et C9 en cas de survenance d'évènements majeurs.

En y regardant de plus près, ces états réglementaires correspondent déjà aux futures normes (le régulateur français s'est ainsi servi des réponses aux états C9 pour formuler les spécifications techniques nationales dans le cadre du QIS4, voir [ACA08]). Ces états sont bien acceptés par les acteurs du marché français, puisque ces scénarios ne constituent pas des critères impératifs mais donnent plutôt lieu à un échange entre l'entité contrôlée et le régulateur pour voir les situations qui posent problèmes. Ainsi plutôt que d'imposer de suivre un cadre strict quelle que soit sa pertinence, le régulateur français a préféré sensibiliser les acteurs du marché à l'impact potentiel de perturbations brutales de l'économie, et à l'intérêt de mettre en place une gestion des risques adéquate. Si cette approche par une sensibilisation à l'environnement économique devait être élargie à l'ensemble des pays de l'Union Européenne, le principe d'harmonisation ne pourrait plus être atteint, mais est-il atteignable en l'état ? Des différences existent dans les procédures d'indemnisations (barémisation des corporels graves en Espagne), dans les contrats (clause de tacite reconduction), dans les modes de distributions (bancassurance), etc . . . Ces quelques idées constituant une esquisse des améliorations possibles. Il serait pertinent de prendre en compte les remarques des professionnels et des académiques sur les améliorations à apporter à Solvabilité 2, quitte à ce que cela ajourne son application. Ce délai supplémentaire permettrait de combler les faiblesses de la réforme et d'avoir ainsi une réglementation ambitieuse qui soit aboutie.

Table des figures

1.1	Matrice de corrélation du risque de souscription non-vie de S&P	15
1.2	Probabilités de défaut de S&P	16
1.3	Les 3 Piliers dans Solvabilité 2	19
1.4	L'évolution du bilan entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2	20
1.5	Calcul du Best Estimate	22
1.6	Courbe des taux des différents QIS	23
1.7	Calcul de la Risk Margin	25
1.8	Cartographie des risques dans Solvabilité 2	27
1.9	Schéma d'un modèle interne	40
1.10	Schéma d'une gestion active-passive intégrée	42
1.11	Schéma de la catégorisation des fonds propres	46
1.12	Couverture des seuils réglementaires	47
1.13	Planning de la mise en application de Solvabilité 2, vu à ce jour	48
1.14	Volatilité par branche d'activité pour chaque type de risque lors du QIS4	54
3.1	Arbre binomial avec deux périodes	100
3.2	Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d'intervalles	104
3.3	Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du niveau de percentile	105
3.4	Comparaison entre la MVM multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d'années jusqu'à l'échéance	108
3.5	Evolution des primes normalisée pour les trois principales branches d'assurance	112
3.6	Courbe des taux utilisées dans la 2 ^{ème} et 3 ^{ème} étude d'impact quantitative	117
3.7	Modèle Alternatif pour le risque de prime	124
4.1	Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction σ et $1 - \alpha$	149
4.2	Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction σ et $1 - \alpha$	150
4.3	Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction de $1 - \alpha$	152

4.4	Comparaison des méthodes d'agrégation en fonction de α	155
4.5	Structure arborescente pour une FNAC en dimension 4	175
4.6	Arborescence pour une HNAC en dimension 8	180
4.7	Arborescence pour une HNAC en dimension 8	181
4.8	Arborescence pour une <i>4-Vine</i> PCC	187
4.9	Matrice de corrélation du risque de souscription non-vie du QIS4	196

Liste des tableaux

1.1	Marge de solvabilité en assurance non-vie	10
1.2	Probabilité de défaut selon le rating dans le QIS4	30
1.3	Niveau de solvabilité dans Solvabilité 1	48
1.4	Niveau de solvabilité minimum dans Solvabilité 2	49
1.5	Niveau de solvabilité dans Solvabilité 2	49
1.6	Décomposition du SCR de base selon les différentes classes de risque	50
1.7	Décomposition de la classe du risque de marché selon les différents modules de risque	51
3.1	Comparaison du besoin en capital selon les différentes approches	101
3.2	Ratio de la valeur escomptée des paiement futurs sur la valeur comptable des provisions	118
3.3	Résultats pour la fonction du maximum de vraisemblance	119
3.4	Résultats pour le test “Breusch et Pagan”	119
3.5	Résultats AIC	119
3.6	Coefficients de régression pour le DA	120
3.7	Coefficients de régression pour la RCA	120
3.8	Coefficients de régression pour le DAB	121
3.9	Test de Chow pour les différentes branches d’activités	122
3.10	Matrice de transition à un an	122
3.11	Temps moyen dans chaque régime pour chaque branche	123
3.12	Paramètre pour le modèle alternatif	125
3.13	Comparaison du risque de prime	126
3.14	Comparaison du risque de prime avec le ratio sinistres à prime	126
4.1	Corrélation : Risques vs Extrêmes	136
4.2	Egalité des deux méthodes	150
4.3	Générateur pour quelques copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel	170
4.4	τ de Kendall pour les copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel .	171

4.5	Coefficient de dépendance de queue pour quelques copules archimédiennes :	
	Clayton, Frank et Gumbel	172
4.6	Fonction G pour quelques copules archimédiennes : Clayton, Frank et Gumbel	174
4.7	<i>SCR</i> pour les copules elliptiques	192
4.8	<i>SCR</i> pour les copules archimédiennes échangeables	194
4.9	Coefficients de corrélation des différentes structures	197
4.10	<i>SCR</i> pour les copules HNAC	197
4.11	Coefficient de dépendance de queue supérieure pour une HNAC-Gumbel . .	198
4.12	<i>SCR</i> pour les copules issues d'une décomposition par paire	200

Bibliographie

- [ACA08] ACAM. Orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques. Technical report, ACAM, 2008.
- [Ace02] C. Acerbi. Spectral measures of risk : a coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of banking and finance*, 26 :1505–1518, 2002.
- [ACFb] K. Ass, C. Czado, A. Frigessi, and H. bakken. Pair copula constructions of multiple dependence. *Insurance Mathematics and economics*, To appear.
- [ACM07] AISAM ACME. Study on non-life long tail liabilities. Technical report, AISAM - ACME, 2007.
- [ADE⁺07] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, D. Heath, and H. Ku. Coherent multiperiod risk adjusted values and bellmann’s principle. *Annals of operationnal research*, 152 :5–22, 2007.
- [ADEH97] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *RISK*, 10 :68–71, November 1997.
- [ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, JM. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risks. *Mathematical Finance*, 9 :203–228, October 1999.
- [AIMF09] M. Altschull, D. Ingram, D. Mango, and W. Fisher. Gestion des risques : La crise financière actuelle, les leçons tirées et les répercussions dans l’avenir. Technical report, Institut Canadien des actuaires - Society of actuaries, 2009.
- [Aut02] Financial Services Authority. Lessons about risk : analysing the causal chain of insurance company failure. Technical report, Financial Services Authority, December 2002.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, 1900.
- [BC02] T. Bedford and R. Cooke. Vines a new graphical model for dependent random variables. *Annals of statistics*, 30(4) :1031–1068, 2002.
- [BC08] Basel-Committee. Range of practices and issues in economic capital modeling. Technical report, Bank for International Settlements, 2008.

- [BM98] N. Bauerle and A. Muller. Modeling and comparing dependencies in a multivariate risk portfolios. *Astin Bulletin*, 28(1) :59–76, 1998.
- [BR06] C. Burgert and L. Ruschendorf. Consistent risk measure for portfolio vector. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38 :289–297, 2006.
- [BS70] H. Buhlmann and E. Straub. Glaubwürdigkeit für Schadensätze. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 1970.
- [CCL04] A. Chabaane, A. Chouillou, and JP. Laurent. Aggregation and credit risk measurement in retail banking. *Banque & marchés*, 70 :5–15, mai-juin 2004.
- [CD97] JD. Cummins and P. Danzon. Price, financial quality and capital flows in insurance markets. *Journal of Financial Intermediation*, 6 :3–38, 1997.
- [CD04] A. Charpentier and M. Denuit. *Mathématique de l'assurance non-vie*. Dunod, 2004.
- [CEI06] CEIOPS. Qis2 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2006.
- [CEI07a] CEIOPS. Qis3 - calibration of the underwriting risk, market risk and mcr. Technical report, CEIOPS, 2007.
- [CEI07b] CEIOPS. Qis3 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2007.
- [CEI08] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.
- [CEI09a] CEIOPS. Ceiops report on its fourth quantitative impact study for solvency 2. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09b] CEIOPS. Cp - 33 system of governance. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09c] CEIOPS. Cp - 37 the procedure to be followed for the approval of an internal model. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09d] CEIOPS. Cp - 42 risk margin. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09e] CEIOPS. Cp - 48 scr standard formula : Non-life underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09f] CEIOPS. Cp - 49 scr standard formula : Life underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09g] CEIOPS. Cp - 50 scr standard formula health underwriting risk. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09h] CEIOPS. Cp - 51 scr standard formula further advice on the counterparty default risk module. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09i] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2 : article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.

- [CEI09j] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 mcr calculation. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09k] CEIOPS. Cp - 65 level 2 implementing measures on solvency 2 : Partial internal models. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09l] CEIOPS. Cp - 69 level 2 implementing measures on solvency 2 : Article 109b, equity risk sub module. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09m] CEIOPS. Cp - 74 scr standard formula : Article 109 correlations. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CEI09n] CEIOPS. Cp - 79 scr standard formula, article 109j - simplification / specification for captives. Technical report, CEIOPS, 2009.
- [CF09] CRO-Forum. Market value of liabilities for insurance firms - implementing elements for solvency 2. Technical report, CROforum, 2009.
- [Cha08a] A. Charpentier. Copulas, risk dependence and applications to solvency 2. Groupe consultatif actuariel europeen, 2008.
- [Cha08b] A. Charpentier. Value at risk et probabilité de ruine, entre vaccination et banque d'affaires. *Risque*, 76 :103–106, 2008.
- [CHT02] S. Choi, D. Hardigree, and P. Thistle. The property-liability insurance cycle : A comparison of alternative models. *Southern Economic journal*, 68 :530–548, 2002.
- [CO87] JD. Cummins and JF. Outreville. An international analysis of underwriting cycle. *Journal of Risk and Insurance*, 54 :246–262, 1987.
- [Con21] N. Condorcet. *Assurances (maritimes)*. Paris - INED, 1921.
- [Cra30] H. Cramer. *On the mathematical theory of risk*. Skandia Jubilee volume, 1930.
- [Cru09] M. Cruz. *The Solvency 2 handbook*. RiskBooks, 2009.
- [CS09] A. Charpentier and J. Segers. Tails of multivariate archimedean copulas. *Journal of multivariate analysis*, 100(7) :1521–1537, 2009.
- [DB06] K. Dowd and D. Blake. After var : The theory, estimation, and insurance applications of quantile based risk measure. *Journal of Risk and Insurance*, 73 :193–229, Juin 2006.
- [dCU07] Union Fédérale des Consommateurs UFC. Le scandale financier de l'assurance emprunteur. *communiqué de presse*, 2007.
- [Del00] F. Delbaen. Coherent measures of risks on general probability spaces. *Preprint*, 2000.
- [Den00] D. Denneberg. Distorted probabilities and insurance premiums. *Method of operations research*, 63 :3–5, 2000.

- [Den01] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of risk*, 4 :1–34, 2001.
- [Dev99] L. Devroye. Algorithm for generating discrete random variables with a given generating function or a given moment sequence. *Journal on scientific and statistical computing*, 12 :107–126, 1999.
- [DL09a] L. Devineau and S. Loisel. Construction d’un algorithm d’accélération pour le calcul du capital économique dans solvabilité 2. *preprint*, 2009.
- [DL09b] L. Devineau and S. Loisel. Risk aggregation in solvency 2 : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula. *preprint*, 2009.
- [DMG⁺3a] J. Dhaene, M.Denuit, MJ. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vynke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. *Insurance : mathematics and economics*, 31 :3–33, 2003a.
- [DMG⁺3b] J. Dhaene, M.Denuit, MJ. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vynke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : Application. *Insurance : mathematics and economics*, 31 :133–161, 2003b.
- [dR07] Caisse Centrale de Réassurance. Natural disasters in france. Technical report, Caisse Centrale de Réassurance, 2007.
- [DS06] K. Detlefsen and G. Scandolo. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. *Electronic journal of probability*, 11 :57–106, 2006.
- [Duf02] D. Dufresne. The log-normal approximation in financial and other computations. *Advances in applied probability*, 36 :774–773, 2002.
- [EC07] European-Commission. Directive of the european parliament and of the council on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance solveny ii. Directive, European Commission, 2007.
- [EGH] I. Ekeland, A. Galichon, and M. Henry. Comonotonic measures of multivariate risks. *Preprint*.
- [EHJ03] P. Embrechts, A. Hoing, and A. Juri. Using copulae to bound the value at risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastic*, 7 :145–167, April 2003.
- [ELM97] P. Embrechts, F. Lindskog, and A. McNeil. *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*. Elsevier, 1997.
- [EM97] P. Embrechts and A. McNeil. *Modelling extremal event in Finance*. Springer-Verlag : Berlin, 1997.
- [EMS99] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. Correlation and dependence in risk management : Properties and pitfalls. *Preprint ETH*, 1999.

- [EMS05] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. *Quantitative risk management : concept, techniques and tools*. Risk management : value at risk and beyond, 2005.
- [EP08] P. Embrechts and G. Pucetti. Aggregating risk across matrix structured loss data : the case of operational risk. *Journal of Operational Risk*, 3 :29–44, July 2008.
- [FG05] M. Frittelli and E. Gianin. Law invariant convex risk measures. *Advances in mathematical economics*, 7 :33–46, 2005.
- [Fil09] D. Filipovic. Multi risk level aggregation. *ASTIN Bulletin*, 2009.
- [Fit07] Rating Fitch. 2006 prism and beta aggregated capital scores for french life and non-life insurers. Technical report, Fitch, 2007.
- [FLPW98] HG. Fung, G. Lai, G. Patterson, and R. Witt. Underwriting cycle in property and liability insurance : An empirical analysis of industry and byline data. *Journal of Risk and Insurance*, 65 :539–562, 1998.
- [Fra06] G. Frahm. On the extremal dependence coefficient of multivariate distribution. *Statistics and probability letters*, 76 :1470–1481, 2006.
- [Fre51] M. Frechet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann Univ Lyon*, 9 :53–77, 1951.
- [FS02] H. Follmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6 :429–447, 2002.
- [FV98] E. Free and E. Valdez. Understanding relationship with copula. *North American Actuarial Journal*, 2 :1–25, 1998.
- [Gen86] C. Genest. The joy of copulas : bivariate distributions with uniform marginal. *The american statistician*, 40 :280–283, 1986.
- [GL06] C. Gouriéroux and W. Liu. Sensitivity analysis of distortion risk measures. *Document de travail du CREST*, 33, 2006.
- [GLS00] C. Gouriéroux, JP. Laurent, and O. Scaillet. Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of empirical finance*, 7 :225–245, 2000.
- [Gro90] A. Gron. *Property-Casualty Insurance Cycle, Capacity Constraint, and Empirical result*. Phd thesis, MIT, 1990.
- [Gro94a] A. Gron. Capacity constraint and cycle in property-casualty insurance markets. *RAND Journal of Economics*, 25, 1994.
- [Gro94b] A. Gron. Evidence of capacity constraint and cycle in insurance markets. *Journal of Law and Economics*, 37, 1994.
- [GS98] H. Gerber and E. Shiu. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2 :48–72, 1998.

- [Hal93] JD. Haley. A cointegration analysis of relationship between underwriting margins and interest rates : 1930-1989. *Journal of Risk and Insurance*, pages 480–493, 1993.
- [Hal95] JD. Haley. A by line cointegration analysis of underwriting margins and interest rates in the property-liability insurance industry. *Journal of Risk and Insurance*, pages 755–763, 1995.
- [Ham05] JD. Hamilton. *Regime-Switching Models*. Palgrave Dictionary of Economics, 2005.
- [Has08] G. Haslip. Risk assessment. *The actuary*, pages 28–30, December 2008.
- [HK04] D. Heath and H. Ku. Pareto equilibria with coherent measures of risk. *Mathematical finance*, pages 163–172, 2004.
- [HL02] H. Hult and F. Lindskog. Multivariate extremes, aggregation and dependence in elliptical distribution. *Advance in Applied Probability*, 34 :587–608, 2002.
- [Hoe40] W. Hoeffding. Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik de Universität Berlin*, 5 :179–233, 1940.
- [Hof07] M. Hofert. Sampling archimedean copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52 :5163–5174, 2007.
- [HT00] M. Higgins and P. Thistle. Capacity constraints and the dynamics of underwriting profits. *Economic Inquiry*, 38 :442–457, 2000.
- [HW04] M. Hardy and J. Wirch. The iterated cte - a dynamic risk measure. *preprint*, 2004.
- [IC82] R. Iman and W. Conover. A distribution free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 11 :311–334, 1982.
- [JMT04] E. Jouini, M. Meddeb, and N. Touzi. vector valued coherent risk measures. *Finance and stochastics*, 4 :531–552, 2004.
- [Joe97] H. Joe. *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman and Hall, 1997.
- [Kal05] M. Kalkbrenner. An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance*, 15 :425–437, 2005.
- [Ken70] M. Kendall. *Rank correlation method*. Griffin, 1970.
- [Kni21] F. Knight. *Risk, uncertainty and profit*. Boston and New York : Houghton Mifflin, 1921.

- [KPM02] KPMG. Study into the methodologies to asses the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision. Technical report, KPMG, May 2002.
- [KPS03] C.J. Kim, J. Piger, and R. Startz. Estimation of markov regime switching regression models with endogeneous swtiching. Working paper, Federal Reserve Bank of St. Louis, 2003.
- [KR80] S. Karlin and Y. Rinott. Class of orderings of measures and related correlation inequalities. *Journal of multivariate analysis*, 10 :467–498, 1980.
- [Kus01] S. Kusuoka. On law invariant coherent risk measures. *Advances in mathematical economics*, 3 :83–95, 2001.
- [Lap82] P. Laplace. Sur les naissances, les mariages et les morts à paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la france pendant les années 1781 et 1782. *Mémoire de l'Académie royale des sciences*, 1782.
- [Lef00] V. Leflaive. Les enjeux de la réforme solvabilité 2. *Variances*, 29, 2000.
- [LM06] C. Leng and U. Meier. Analysis of multi national underwriting cycles in property-liability insurance. *The Journal of Risk Finance*, 7 :146–159, 2006.
- [Loi09] S. Loisel. A trivariate non-gaussian copula having 2-dimensional gaussian copulas as margins. *preprint*, 2009.
- [LP97] C. Lefèvre and P. Picard. The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :58–69, 1997.
- [LP09] S. Lindset and SA. Persson. Continuous monitoring : lokk before you leap. *preprint*, 2009.
- [Lun19] F. Lundberg. *Teorin for riskmassor*. Forsdkringsinspekt, 1919.
- [Mac08a] T. Mack. Parameter estimation for bornhuetter-ferguson. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2008.
- [Mac08b] T. Mack. The prediction error of bornhuetter-ferguson. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2008.
- [Mar52] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1) :77–91, 1952.
- [McN07] A. McNeil. Sampling nested archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 83 :834–841, 2007.
- [Mel07] M. Melchiori. Tools for sampling multivariate archimedean copulas. *Preprint*, 2007.
- [MKK09] A. McNeil, G. Kretschmar, and A. Kirchner. The case for fully integrated models of economic capital. *preprint*, 2009.

- [MM09] P. Morand and D. Marteau. Normes comptables et crise financière. Technical report, ESCP, July 2009.
- [MO98] A. Marshall and I. Olkin. Families of multivariate distributions. *Journal of the american statistical association*, 83 :834–841, 1998.
- [Mor96] JP. Morgan. Risk metrics - technical document. Technical report, JP. Morgan, 1996.
- [MRD04] N. Moureau and D Rivaud-Danset. *L'incertitude dans les théories économiques*. Collection Repères, 2004.
- [MS01] A. Muller and M. Scarsini. Stochastic comparison of random vectors with a common copula. *Mathematics of operations research*, 26 :723–740, November 2001.
- [MS05] A. Muller and M. Scarsini. Archimedean copula and positive dependence. *Journal of multivariate analysis*, 93 :434–445, April 2005.
- [Mul07] A. Muller. Certainty equivalents as risk measures. *Brazilian Journal of probability and statistics*, 21 :1–12, 2007.
- [MWL09] M. Merz, M. Wuthrich, and N. Lysenko. Uncertainty in the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :63–84, 2009.
- [Nel97] R. Nelsen. Dependence and order in families of archimedean copulass. *Journal of multivariate analysis*, 60(1) :111–122, 1997.
- [Nel99] R. Nelsen. *An introduction to copula*. Springer, 1999.
- [OOS09] O. Okhrin, Y. Okhrin, and W. Schmid. Properties of hierarchical archimedean copula. Technical report, SBF 649 Economic risk, 2009.
- [oPI04] Swiss Federal Office of Private Insurance. White paper of the swiss solvency test. Technical report, Swiss Federal Office of Private Insurance, November 2004.
- [Par05] C. Partrat. *Assurance non-vie : modélisation, simulation*. Assurance Audit Actuariat, 2005.
- [PL08] P. Picard and S. Loisel. On finite time ruin probabilities for classical ruin models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :41–60, 2008.
- [PLNN07] C. Partrat, E. Lecoeur, JM. Nessi, and E. Nisipasu. *Provisionnement technique en assurance non vie : perspectives actuarielles modernes*. Assurance Audit Actuariat, 2007.
- [Pra06] PC. Pradier. *La notion de risque en économie*. Collection Repères, 2006.
- [PS08] D. Pfeifer and D. Strassburger. Solvency ii : stability problems with the scr aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1 :61–77, avril 2008.

- [PS10] G. Pucetti and M. Scarsini. Multivariate comonotonicity. *Preprint*, 2010.
- [QM05] JF. Quesy and M. Mesfioui. Bounds on the value at risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance Mathematics and Economics*, 37 :135–151, July 2005.
- [Rie04] F. Riedel. Dynamic coherent risk measure. *Stochastic processes and their application*, 112 :185–200, 2004.
- [RS10] D. Rosen and D. Saunders. Risk factor contributions in portfolio credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 34 :336–349, 2010.
- [Rus04] L. Ruschendorf. Comparison of multivariate risks and positive dependence. *Journal of applied probability*, 41 :391–406, 2004.
- [Sai04] F. Saita. Risk capital aggregation : the risk manager’s perspective. Technical report, EFMA Basel Meetings, 2004.
- [San05] A. Sandstrom. *Solvency : Models, assessment and regulation*. Chapman and Hall, 2005.
- [Sch89] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57 :571–587, 1989.
- [SCO08] SCOR. From principle based risk management to solvency requirements. Technical report, SCOR, 2008.
- [Sha64] W. Sharpe. Capital asset prices : a theory of market equilibrium under condition of risk. *The journal of finance*, 19(3) :425–442, 1964.
- [Skl59] A. Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Pub. Inst. Statist. Univ. Paris 8*, pages 228–231, 1959.
- [SP05] Standard and Poor’s. Property casualty insurance rating criteria. Technical report, Standard and Poor’s, 2005.
- [Ss07] Standard and Poor s. New risk based insurance capital model. Technical report, Standard and Poor s, 2007.
- [ST06] C. Savu and M. Trede. Hierarchical archimedean copulas. *Preprint*, 2006.
- [Tas99] D. Tasche. Risk contributions and performance measurement. *Report of the Lehrstuhl fr mathematische Statistik, T.U. Mnchen*, 1999.
- [Tas08] D. Tasche. Capital allocation to business units and sub portfolio; the euler principe. *Preprint*, 2008.
- [Tch80] A. Tchen. Inequalities for distributions with given marginals. *The annals of probability*, 8(4) :814–827, 1980.
- [Ton90] Y. Tong. *The multivariate normal distribution*. Springer, 1990.

- [Ven85] E. Venezian. Ratemaking method and profit cycles in property and liability insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 52 :477–500, 1985.
- [Wal03] JF. Walhin. Une nouvelle caractérisation de la distribution de pareto, avec application à l'analyse de la cadence de paiements du réassureur en excédent de sinistre. *Bulletin of swiss association of actuaries*, 2 :131–148, 2003.
- [Wan96] S. Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin bulletin*, 26 :71–92, 1996.
- [Wan00] T. Wang. A class of dynamic risk measures. *preprint*, 2000.
- [WH00] J. Wirth and M. Hardy. Distortion risk measures : coherence and stochastic dominance. *Preprint*, 2000.
- [WH02] G. Wei and T. Hu. Supermodular ordering on a class of multivariate copulas. *Statistics and probability letters*, 57 :357–385, 2002.
- [Win88] R. Winter. The liability crisis and the dynamics of competitive insurance markets. *Yale Journal on Regulation*, pages 455–499, 1988.
- [Win91] R. Winter. Solvency regulation and the property - liability insurance cycle. *Economic Inquiry*, 29 :458–471, 1991.
- [Win94] R. Winter. The dynamics of competitive insurance markets. *Journal of Financial Intermediation*, 3 :379–415, 1994.
- [Wol80] E. Wolf. N-dimensional measures of dependence. *Stochastica*, 4(3) :175–188, 1980.
- [WYP97] S. Wang, V. Young, and H. Panjer. Axiomatic characterisation of insurance prices. *Insurance mathematics and economics*, 21 :173–183, 1997.
- [Yaa87] M. Yaari. The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55 :95–115, 1987.