Les Univers Virtuels de la Finance

Virtuel Worlds of Finance

Pierre Devolder[1]

Résumé. La mesure neutre au risque est devenue une notion centrale en finance moderne: elle s'obtient par changement de mesure de probabilité par rapport à l'univers réel donnant ainsi naissance à un univers virtuel dans lequel les actifs ont tous un rendement moyen correspondant au taux sans risque. Elle peut également s'interpréter comme un changement de numéraire: les actifs sont exprimés dans une nouvelle monnaie en unités de titre sans risque. Ce changement de mesure de probabilité permet la tarification directe de nombreux instruments financiers; l'application à la tarification des obligations zéro-coupons sera donnée à titre d'exemple classique.

L'univers neutre au risque ne constitue néanmoins pas une solution universelle à tous les problèmes de tarification: nous présentons à titre d'exemple les options sur zéro-coupon où les corrélations évidentes entre les taux sans risque et les prix des zéro-coupons ne permettent pas l'utilisation pratique de la mesure neutre au risque. Il convient alors de faire un nouveau changement d'univers et passer de la mesure neutre au risque à la mesure forward-neutre; cette dernière peut également se définir en terme de nouveau numéraire: les actifs sont cette fois exprimés en unités d'un zéro-coupon d 'échéance fixée. Nous montrons comment cet outil permet d'obtenir une formule explicite simple du prix d'une option sur zéro-coupon dont par ailleurs la forme ne sera pas sans rappeler la célèbre formule de Black et Scholes utilisée pour les options sur actions.

Abstract. Risk-neutral measure is a central topic in modern theory of finance; it can be obtained by a change of the probability measure with respect to the real world, creating so a new universe where all the assets have the same mean return equal to the risk free rate. It can be also interpreted as a change of numéraire: the assets are expressed in a new currency corresponding to the risk free rate. This change of measure gives the possibility of direct pricing of many financial products: the application to the pricing of zero-coupon bonds is given as example.

Nevertheless the risk-neutral universe is not always suitable for all problems of pricing; the case of option on zero-coupon bonds is given counterexample. The correlation between the risk free rate and the price of zero-coupon bonds do not practically allow to use the technique of risk-neutral measure. We must then proceed to a new change of probability measure and go from the risk-neutral world to the forward risk-neutral world; an interpretation can again be given in terms of new currency: the assets are now expressed in unity of a zero-coupon bond of fixed maturity. This powerful tool permits to give an explicit form of the price of an option on zero-coupon bond; the form of this price has the same structure as the classical formula of Black and Scholes for options on equity.

Mots-clés: mesure neutre risque, mesure forward neutre, zéro-coupons, options sur zéro-coupons

Keywords: risk-neutral measure, forward risk-neutral measure, zero-coupon bonds, options on zero-coupon bonds

1 Introduction

Les techniques actuarielles classiques de calcul des primes sont toujours basées sur des raisonnements d'espérance mathématique des flux actualisés; on peut penser dans ce contexte au calcul traditionnel des primes en assurance vie basé sur un taux d'escompte et une table de mortalité censée refléter l'espérance du risque de mortalité. On peut également se référer au calcul de la prime pure en assurance non vie. La justification sous-jacente est bien entendu la référence à la loi des grands nombres, la couverture d'un grand nombre de risques de même nature autorisant le passage à la moyenne

Lorsque, plutôt que de s'intéresser à des risques classiques d'assurance, on se tourne vers les risques des marchés financiers et qu'on essaie de tarifer des produits dont l'aléa est cette fois "indicé" sur le chaos des marchés financiers on comprend sans peine que les règles de compensation entre risques ne jouent plus: les mouvements financiers sont des phénomènes qui touchent simultanément tout un marché et ne trouvent pas à être modélisés par la loi des grands nombres. La question est alors de savoir quelle méthodologie utiliser dans la tarification de tels risques omniprésents dans le monde financier contemporain et que les actuaires sont de plus en plus amenés à intégrer dans leurs préoccupations.

Le résultat fondamental de la finance moderne est que curieusement on peut toujours utiliser des techniques d'espérance mathématique mais en ayant pris au préalable la précaution de changer la mesure de probabilité du risque considéré. Il s'agit donc d'une certaine manière de passer à un univers virtuel dont les états du monde sont identiques à ceux du monde réel mais où la mesure de leur probabilité est modifiée.

[1] AXA Royale Belge, Université Libre de Bruxelles, Université Catholique de Louvain, e-mail: pierre.devolder@axa-royalebelge.be

On comprend donc ainsi l'importance des méthodes de changement de mesure de probabilité dans la tarification des instruments financiers. Elles permettent d'exprimer directement le prix d'un instrument financier sous la forme d'une espérance mathématique adéquate. Qu'il s'agisse d'options ou d'obligations, la technique permet d'obtenir des formules explicites. On peut citer dans ce cadre, en option sur actions la célèbre formule de Black et Scholes, ou encore la formule de VASICEK dans la tarification des zéro-coupons. Un tel premier changement de mesure donne naissance à un premier monde virtuel ,l'univers neutre au risque, dans lesquels les instruments financiers actualisés se comportent comme des martingales.

Nous décrirons au paragraphe 2, cet univers neutre au risque en nous plaçant dans le cadre d'un modèle de zéro-coupons à une variable d'état. Le paragraphe 3 montrera comment cette notion permet de tarifer explicitement la structure des prix des zéro-coupons dans le cadre du célèbre modèle de Vasicek. Un second changement de mesure de probabilité se révèle néanmoins utile dans certains problèmes de tarification où il y a corrélation entre le sous-jacent et la structure des taux d'intérêt; on introduit dans ce but la notion de mesure forward neutre, débouchant ainsi sur un second monde virtuel, explicitée au paragraphe 4. Le paragraphe 5 montrera comment cet outil puissant permet de résoudre la tarification des options sur zéro-coupons, là où la méthode classique neutre au risque échoue.

2 L'univers neutre au risque

La notion de mesure neutre au risque s'est révélée jouer un rôle central quoique à première vue caché dans l'évaluation des actifs financiers. Comme son nom le suggère, la notion de mesure neutre au risque repose sur deux concepts:

- *celui de mesure*: la mesure neutre au risque sera une mesure de probabilité particulière sur l'espace de base $(\Omega, \mathcal{F})$ censé modéliser les aléas du marché financier. Il s'agit donc d'une mesure alternative à la mesure réelle de probabilité, donnant ainsi naissance à un univers virtuel où les états du monde ne sont pas modifiés mais où les probabilités correspondantes en sont modifiées.
  Au niveau mathématique, la méthode s'apparentera à un changement de mesure de probabilité sur un espace probabilisable (le théorème de GIRSANOV constituant en l'espèce l'outil central).
- *celui de neutralité au risque*: l'univers financier virtuel auquel donne naissance la mesure neutre au risque est basé sur une neutralité des différents instruments financiers vis-à-vis du risque; ils se comporteront tous en moyenne comme l'actif sans risque.

Cette notion peut se développer qu'il s'agisse de modèles d'évaluation d'option ou de modèles de structure de taux d'intérêt. Nous avons choisi ci-dessous d'illustrer le concept dans le cadre de la tarification des obligations zéro-coupons.

Nous nous placerons dans le cadre général d'un modèle d'arbitrage à une variable d'état. Nous définissons les processus stochastiques suivants définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

1. $\{P(t,s,\omega); t \in [0,s], s \in [0,T], \omega \in \Omega\}$, représentant le prix en t d'une obligation zéro-coupon échéant à l'instant s (c'est-à-dire la valeur actuelle en t d'une unité monétaire payable à l'instant futur s).
2. $\{R(t,s,\omega); t \in [0,s], s \in [0,T], \omega \in \Omega\}$, représentant le processus rendement au temps t de cette obligation: $P(t,s,\omega) = e^{-(s-t)R(t;s,\omega)}$
3. le taux spot défini par: $r(t,\omega) = \lim_{\theta \to 0} R(t, t+\theta, \omega)$ et jouant le rôle de variable d'état explicative du modèle (taux instantané sans risque). Autrement dit, une fois connu ce processus, toute la structure des prix en découle.

Nous pourrons donc écrire:

$$\begin{aligned} P(t,s,\omega) &= P(t,s,r(t,\omega)) \\ &= P(t,s,r) \end{aligned}$$

Nous supposerons de plus que ce processus spot est solution d'une équation différentielle stochastique:

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + \rho(t, r(t))dw(t) \tag{1}$$

où $\{w(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ est un mouvement brownien standard; et f et ρ sont deux fonctions de deux variables réelles. Grâce à la formule de ITO, le processus P admet également une différentielle stochastique donnée par:

$$\begin{aligned} dP(t,s,r) = P(t,s,r)&\mu(t,s,r)dt \\ &- P(t,s,r)\sigma(t,s,r)dw(t) \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} \mu(t,s,r) &= \frac{1}{P(t,s,r)} \times \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] P(t,s,r) \\ \sigma(t,s,r) &= -\frac{1}{P(t,s,r)}\rho(t,r)\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r) \end{aligned} \tag{3}$$

On peut d'autre part montrer par un raisonnement d'arbitrage que le quotient suivant est indépendant de la maturité du zéro-coupon:

$$\frac{\mu(t,s,r) - r}{\sigma(t,s,r)} = \lambda(t,r) \tag{4}$$

Cette variable λ est appelée *prix du risque de marché*. En vue d'introduire la mesure neutre au risque, il conviendrait de substituer dans l'équation (2) de comportement du prix du zéro-coupon, au rendement instantané moyen μ, le taux sans risque r. Tenant compte de la relation (4) entre μ et r, il vient:

$$\begin{aligned} dP(t,s,r) &= P(t,sr)\mu(t,s,r)dt - P(t,s,r)\sigma(t,s,r)dw(t) \\ &= P(t,s,r)\left[r(t) + \lambda(t,r)\sigma(t,s,r)\right]dt \\ &\quad - P(t,s,r)\sigma(t,s,r)dw(t) \\ &= P(t,s,r)r(t)dt \\ &\quad - P(t,s,r)\sigma(t,s,r)(dw(t) - \lambda(t,r)dt) \end{aligned}$$

Finalement

$$dP = P(t,s,r)r(t)dt - P(t,s,r)\sigma(t,s,r)d\hat{w}(t) \qquad (5)$$

avec $\hat{w}(t) = w(t) - \int_0^t \lambda(u,r)du$. Cette dernière relation d'évolution du prix P a la même forme que celle dans le monde réel (cf. comparer (5) et (2) — y compris le même coefficient de volatilité $\sigma(t,s,r)$ — à la différence près que:

1. le taux de rendement moyen du zéro-coupon est remplacé par le taux sans risque r
2. le nouveau processus de bruit $\widetilde{w}$ n'est hélas plus un mouvement brownien sous la mesure P

L'introduction de la mesure neutre au risque, notée Q, a précisément pour objet de transformer ce processus $\widetilde{w}$ est un mouvement brownien. Par le théorème de Girsanov, on sait que le processus $\widetilde{w}$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$ par rapport à la mesure modifiée Q définie par:

$$Q(B) = \int_B \Psi(\omega)dP(\omega) \qquad (B \in \mathcal{F})$$

où Ψ est la variable aléatoire donnée par:

$$\Psi = \exp\left(\int_0^T \lambda(u,r)dw(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u,r)du\right) \qquad (6)$$

On peut en déduire en particulier que sous Q, tous les zéro-coupons ont un rendement moyen équivalent au taux sans risque (taux SPOT):

$$\mathrm{E}_Q\left[\frac{dP}{P}\right] = r(t)dt \qquad (7)$$

On peut dire d'une manière alternative que le processus $P^\star$ obtenu en prenant la valeur actuelle au taux spot du prix du zéro-coupon est une martingale sous Q (c'est la raison pour laquelle on parle parfois de mesure martingale). Notons pour ce:

$$P^\star(t,s) = P(t,s)\exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\} \qquad (8)$$

On a donc par (7) pour $t' \le t'' \le s$:

$$\mathrm{E}_Q\left[P^\star(t'',s)|t'\right] = P^\star(t',s) \qquad (9)$$

où $\mathrm{E}[X|t']$ représentera par abus de notation l'espérance conditionnelle de la variable X par rapport à l'information disponible à l'instant t'.

En particulier, en prenant $t' = t$ et $t'' = s$, il vient

$$\begin{aligned}
P^\star(t,s) &= P(t,s)\exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\} \\
&= \mathrm{E}_Q\left[P(s,s)\exp\left\{-\int_0^s r(u)du\right\}|t\right] \\
&= \mathrm{E}_Q\left[P(s,s)\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\}|t\right] \\
&\quad \times \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}
\end{aligned}$$

On a donc

$$P(t,s) = \mathrm{E}_Q\left[P(s,s)\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\}|t\right]$$

or $P(s,s) = 1$ (puisqu'il s'agit de la valeur à maturité d'un zéro-coupon) et donc

$$P(t,s) = \mathrm{E}_Q\left[\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\}|t\right] \qquad (10)$$

Cette dernière relation fondamentale initie une voie alternative fondamentale de tarification des instruments financiers: elle indique que *sous la mesure neutre au risque, le prix d'un instrument peut directement s'obtenir comme l'espérance mathématique actualisée de sa valeur future*.

Le passage à la mesure neutre au risque peut également s'interpréter comme un changement de numéraire (changement d'unité monétaire). L'application successive des formules (8) et (9) permet de visualiser ce fait:

- changement de numéraire (formule (8)): au cours initial de l'obligation $P(t,s)$, est substitué un cours $P^\star(t,s)$ exprimé en unité de compte d'un actif de capitalisation au taux instantané r (placement continu au taux spot).
- martingale (formule (9)): après cette modification de numéraire, le changement de mesure de probabilité conduit à la propriété de martingale.

3 Application à la tarification des zéro-coupons

Montrons sur un exemple de structure (modèle de Vasicek) comment cette méthodologie permet une tarification immédiate des zéro-coupons. On s'intéressera pour ce au modèle particulier suivant où le prix du risque de marché est constant et le processus taux spot suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{aligned}
\lambda(t,r) &= \lambda > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}_0^+) \\
dr(t) &= a(b - r(t))dt + \rho dw(t)
\end{aligned} \qquad (11)$$

où a, b et ρ sont des constantes réelles strictement positives et a représente la force de rappel vers un taux asymptotique b. La solution de l'équation différentielle stochastique (11) peut être obtenue explicitement. Pour ce, effectuons le changement de variable suivant:

$$\varphi(t) = e^{at}r(t)$$

En différenciant, il vient:

$$\begin{aligned}
d\varphi(t) &= e^{at}dr(t) + ae^{at}r(t)dt \\
&= e^{at}[a(b - r(t))dt + \rho dw(t)] + ae^{at}r(t)dt
\end{aligned}$$

Cette dernière expression autorise une intégration directe:

$$\varphi(t) - \varphi(0) = b(e^{at} - 1) + \rho\int_0^t e^{as}dw(s)$$

En revenant à la variable initiale r, on a:

$$r(t)e^{at} - r(0) = b(e^{at} - 1) + \rho \int_0^t e^{as} dw(s)$$

et finalement:

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \rho e^{-at} \int_0^t e^{as} dw(s) \quad (12)$$

Cette dernière formule exprime bien le caractère dynamique de la modélisation:

- les 2 premiers termes reflètent une moyenne pondérée, variable dans le temps, entre le taux initial $r(0)$ et le taux asymptotique b.
- le troisième terme est la perturbation aléatoire.

Les moments des deux premiers ordres sont donnés par:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[r(t)] &= r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \\ \mathrm{Var}[r(t)] &= \mathrm{Var}\left[\rho e^{-at} \int_0^t e^{as} dw(s)\right] \\ &= \rho^2 e^{-2at} \mathrm{Var}\left[\int_0^t e^{as} dw(s)\right] \\ &= \rho^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds \end{aligned}$$

Voyons à présent comment l'équation d'évolution (11) peut s'écrire dans l'univers neutre au risque.

Tenant compte de (5) et de la constance de λ dans ce modèle, il vient:

$$\begin{aligned} dr(t) &= a(b - r(t))dt + \rho dw(t) \\ &= a(b - r(t))dt + \rho d\widetilde{w}(t) + \rho\lambda dt \end{aligned}$$

ou

$$dr(t) = a\left(b + \rho\frac{\lambda}{a} - r(t)\right) dt + \rho d\widetilde{w}(t) \qquad (13)$$

La structure de cette équation dans l'univers neutre au risque est comparable à celle dans l'univers réel ((13) versus (11)), si ce n'est que la constante b devient $b + \rho\frac{\lambda}{a} = \theta$.

En particulier, on peut utiliser la solution explicite (12) vue précédemment:

$$\begin{aligned} r(t) = r(0)e^{-at} &+ \left(b + \rho\frac{\lambda}{a}\right)(1 - e^{-at}) \\ &+ \rho e^{-at} \int_0^t e^{as} d\widetilde{w}(s) \end{aligned} \qquad (14)$$

Notre objectif, dans ce modèle, est d'obtenir une forme explicite de la structure des prix des zéro-coupons.

Nous allons pour ce exploiter directement dans l'univers neutre au risque la formule de tarification (10):

$$P(t, s) = \mathrm{E}_Q\left[\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\} \Big| t\right]$$

Nous nous intéressons à la structure initiale $P(0, s)$ (la méthodologie étant comparable pour un instant d'observation t ultérieur). Posons pour ce:

$$U(0, s) = \int_0^s r(u)du$$

et

$$B(s) = \frac{1 - e^{-as}}{a}.$$

Il vient:

$$\begin{aligned} U(0, s) &= \int_0^s \Big[r(0)e^{-au} + a\theta B(u) \\ &\qquad + \rho \int_0^u e^{-a(u-v)} d\widetilde{w}(v)\Big] du \\ &= \int_0^s r(0)e^{-au} du + \int_0^s a\theta B(u)du \\ &\qquad + \rho \int_0^s \int_0^u e^{-a(u-v)} d\widetilde{w}(v)du \end{aligned}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans la dernière intégrale, on a:

$$\begin{aligned} U(0, s) &= (r(0) - \theta) \int_0^s e^{-au} du + \theta s \\ &\qquad + \rho \int_0^s \int_v^s e^{-a(u-v)} du d\widetilde{w}(v) \\ &= (r(0) - \theta)B(s) + \theta s \\ &\qquad + \rho \int_0^s -\frac{e^{-a(s-v)} - 1}{a} d\widetilde{w}(v) \\ &= (r(0) - \theta)B(s) + \theta s + \rho \int_0^s B(s - v)d\widetilde{w}(v) \end{aligned}$$

en particulier, U admet une distribution normale sous la mesure Q.

Or, $P(0, s) = \mathrm{E}_Q[\exp\{-U(0, s)\}]$. La variable U étant distribuée normalement, la variable $\exp\{-U\}$ est distribuée log-normalement. Or on sait que si X est une variable normale de moyenne a et de variance b^2, la variable $Y = \exp\{X\}$ est distribuée log-normalement et admet une moyenne donnée par:

$$\mathrm{E}Y = e^{a + \frac{1}{2}b^2}$$

Il en résulte:

$$P(0, s) = \exp\left[-\mathrm{E}_Q U(0, s) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_Q U(0, s)\right]$$

Or, on a successivement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_Q U(0,s) &= (r(0)-\theta)B(s)+\theta s \\
\mathrm{Var}_Q U(0,s) &= \mathrm{Var}\left[\rho \int_0^s B(s-v)d\widetilde{w}(v)\right] \\
&= \rho^2 \int_0^s B^2(s-v)dv \\
&= \rho^2 \int_0^s \left(\frac{1-e^{-a(s-v)}}{a}\right)^2 dv \\
&= \frac{\rho^2}{a^2}\left[s+\frac{1-e^{-2as}}{2a}-2\frac{1-e^{-as}}{a}\right] \\
&= \frac{\rho^2}{2a^3}\left[2as-e^{-2as}+4e^{-as}-3\right]
\end{aligned}$$

On a donc finalement:

$$\begin{aligned}
P(0,s) &= \exp\left[-\mathrm{E}_Q U(0,s)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}_Q U(0,s)\right] \\
&= \exp\big[-(r(0)-\theta)B(s)-\theta s \\
&\quad + \frac{\sigma}{4a^3}(2as-e^{-2as}+4e^{-as}-3)\big]
\end{aligned} \tag{15}$$

On obtient donc ainsi explicitement la structure des prix dans ce modèle.

4 L'univers forward neutre

L'univers neutre au risque nous a permis de développer une formule directe de valorisation des instruments financiers. D'une manière générale, si X est un instrument financier, la formule (10) nous incite à écrire sous la mesure neutre:

$$X(t) = \mathrm{E}_Q\left[X(s)\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\}|t\right] \tag{16}$$

Cette approche nous a permis avec succès d'obtenir la forme des prix des zéro-coupons (paragraphe 3). Cette formule (16) peut néanmoins parfois s'avérer beaucoup plus difficile à exploiter, tout particulièrement lorsque $X(s)$ devient aléatoire et corrélé à la structure des taux sans risque r; dans ce cas, on a à calculer une espérance d'un produit qui souvent en pratique se révèle inexploitable. Face à cette difficulté, le passage de l'univers risque neutre à l'univers forward neutre permet de contourner le problème; pour ce, il s'agit d'une certaine façon de sortir le coefficient d'actualisation de l'espérance. Schématiquement on a donc:

- dans l'univers neutre au risque:

prix = espérance[(payoff) $\times$ actualisation]

- dans l'univers forward neutre:

prix = actualisation $\times$ espérance(payoff)

Techniquement, il s'agira d'opérer un nouveau changement de probabilité:

P	univers réel
$\downarrow$	
Q	univers neutre au risque
$\downarrow$	
Q_f	univers forward-neutre

Le coefficient d'actualisation ainsi sorti de l'espérance doit donc être un élément observable à l'instant d'évaluation; il ne pourra en particulier tenir compte des taux spots futurs comme dans l'univers neutre au risque. Le coefficient d'actualisation naturel auquel on peut penser dans ce contexte sera précisément donné par la structure des zéro-coupons. La formule alternative à la formule (16) dans cet univers forward neutre serait donc:

$$X(t) = P(t,s)\mathrm{E}_{Q_f}[X(s)|t] \tag{17}$$

Montrons à nouveau dans le cadre du modèle d'arbitrage à une variable d'état présenté au paragraphe 2, comment cette mesure forward neutre peut être introduite, justifiant ainsi la relation (17) qui s'avérera une voie alternative adéquate pour des instruments financiers complexes comme des options sur zéro-coupons (voir paragraphe 5 ci-dessous).

Partons pour ce des équations d'évolution (2) et (5) des prix dans l'univers réel et dans l'univers neutre au risque:

$$\frac{dP}{P} = \mu(t,s,r)dt - \sigma(t,s,r)dw(t)$$

et

$$\frac{dP}{P} = r(t)dt - \sigma(t,s,r)d\widetilde{w}(t)$$

Nous avons vu que le passage à l'univers neutre au risque peut être synthétisé par la transformation du processus prix P en un processus prix actualisé $P^\star$ défini à partir des taux spots (cf. (8)):

$$P^\star(t,s) = \frac{P(t,s)}{\exp\left\{\int_0^t r(u)du\right\}} \tag{18}$$

le processus $P^\star$ devenant une martingale sous Q (cf. (9)).

Plutôt que d'utiliser cette version actualisée du prix à l'aide de taux spot, l'univers forward neutre consiste à utiliser une actualisation par un zéro-coupon d'échéance future f donnée (avec $t < f < s$).

$$\widetilde{P}(t,s,f) = \frac{P(t,s)}{P(t,f)} \tag{19}$$

Ce processus $\widetilde{P}$ représente donc cette fois le prix en t d'un zéro-coupon de maturité s, exprimé en nombre de parts d'un zéro-coupon d'échéance intermédiaire f. On constate en particulier qu'il s'agit cette fois d'une famille à un paramètre de transformées. Il existera donc autant d'univers forward neutre que d'instant intermédiaire f.

Une fois cette transformation opérée, voyons si l'on peut comme dans la méthodologie risque neutre opérer un changement de mesure de probabilité sous laquelle le processus $\widetilde{P}$

devient une martingale. L'équation d'évolution (5) du prix dans l'univers risque neutre, peut s'écrire:

$$P(t,s) = P(0,s)\exp\Big\{\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,s,r)d\widetilde{w}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s,r)du\Big\} \tag{20}$$

Voyons si l'on peut obtenir la même structure pour le processus forward $\widetilde{P}(t,s,f)$. On a:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(t,s,f) &= \frac{P(t,s)}{P(t,f)}\\ &= \frac{P(0,s)e^{\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,s,r)d\widetilde{w}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s,r)du}}{P(0,f)e^{\int_0^t r(u)du - \int_0^t \sigma(u,f,r)d\widetilde{w}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,f,r)du}}\\ &= \widetilde{P}(0,s,f)\exp\Big\{-\int_0^t (\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))d\widetilde{w}(u)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,s,r)-\sigma^2(u,f,r))du\Big\}\end{aligned} \tag{21}$$

La relation (21) diffère de la relation (20) en ce que le carré de la volatilité n'apparaît pas dans la dernière intégrale de (21). Modifions donc (21) en ce sens:

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}(t,s;f) =\\ &= \widetilde{P}(0,s;f)\exp\Big\{-\int_0^t (\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))d\widetilde{w}(u)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t [\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r)]^2 du\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^t (2\sigma^2(u,f,r)-2\sigma(u,s,r)\sigma(u,f,r))du\Big\}\\ &= \widetilde{P}(0,s;f)\exp\Big\{-\int_0^t (\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))d\widetilde{w}(u)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t [\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r)]^2 du\\ &\quad -\int_0^t \sigma(u,f,r)[\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r)]du\Big\}\\ &= \widetilde{P}(0,s;f)\exp\Big\{-\int_0^t (\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))[d\widetilde{w}(u)\\ &\quad +\sigma(u,f,r)du] - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))^2 du\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

La relation (22) est bien cette fois de la même structure que (20) et conduit naturellement à un nouveau changement de mesure de probabilité.

Posons pour ce:

$$\begin{aligned}d\widetilde{w}_f(u) &= d\widetilde{w}(u) + \sigma(u,f,r)du\\ &= dw(u) - \lambda(u)du + \sigma(u,f,r)du\\ &= dw(u) - (\lambda(u) - \sigma(u,f,r))du\end{aligned} \tag{23}$$

On introduit donc la mesure forward neutre Q_f sous laquelle cette fois c'est le processus $\widetilde{w}_f$ qui devient un mouvement brownien. De la relation (22), il résulte que:

$$\frac{d\widetilde{P}}{\widetilde{P}}(u) = -(\sigma(u,s,r)-\sigma(u,f,r))d\widetilde{w}_f(u)$$

et le processus $\widetilde{P}$ est devenu une martingale sous cette mesure forward neutre Q_f.

L'équivalent de la relation (9) obtenue en risque neutre (propriété de martingale du prix modifié) devient, pour $u \le v \le f \le s$:

$$\mathrm{E}_{Q_f}\left[\widetilde{P}(v,s;f)\big|u\right] = \widetilde{P}(u,s;f)$$

En particulier en prenant $u = t$ et $v = f$, il vient:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(t,s;f) &= \frac{P(t,s)}{P(t,f)}\\ &= \mathrm{E}_{Q_f}\left[\widetilde{P}(f,s;f)\big|t\right]\\ &= \mathrm{E}_{Q_f}\left[\frac{P(f,s)}{P(f,f)}\bigg|t\right]\end{aligned}$$

On a donc finalement en univers forward neutre la forme suivante:

$$P(t,s) = P(t,f)\mathrm{E}_{Q_f}[P(f,s)|t] \tag{24}$$

Sous la mesure forward neutre le prix d'un instrument peut ainsi s'obtenir comme le produit de l'espérance mathématique non actualisée de sa valeur future, par le prix d'un zéro-coupon.

D'une manière générale, si on s'intéresse à d'autres actifs financiers que des zéro-coupons, ayant une équation d'évolution comparable (dans le monde réel):

$$\frac{dS}{S}(t) = \mu(t,s,r)dt - \sigma^2(t,s,r)dw(t),$$

on pourra écrire:

- dans l'univers neutre au risque ($t < f$):

$$S(t) = \mathrm{E}_Q\left[\exp\left\{-\int_t^f r(u)du\right\}S(f)\big|t\right] \tag{25}$$

- dans l'univers forward neutre:

$$S(t) = P(t,f)\mathrm{E}_{Q_f}[S(f)|t] \tag{26}$$

Au prix d'un nouveau changement de mesure de probabilité, l'univers forward neutre permet ainsi d'obtenir une espérance se révélant souvent beaucoup plus simple à calculer.

5 Application à la tarification des options sur zéro-coupons

On s'intéressera comme application à la tarification d'une option d'achat européenne sur une obligation zéro-coupon. Les notations seront les suivantes:

- $s =$ échéance du zéro-coupon
- $f =$ échéance de l'option sur zéro-coupon ($f < s$)
- $K =$ prix d'exercice de l'option
- $C(t)$ = prix à l'instant t de l'option ($0 \leq t \leq f$), en particulier: $C(f) = (P(f,s) - K)^+$.

L'utilisation de la méthodologie risque neutre conduit à la relation suivante (cf. (25)).

$$\begin{aligned} C(t) &= \mathrm{E}_Q\left[C(f)\exp\left\{-\int_t^f r(u)du\right\}|t\right] \\ &= \mathrm{E}_Q\left[(P(f,s)-K)^+\exp\left\{-\int_t^f r(u)du\right\}|t\right] \end{aligned} \tag{27}$$

Les deux processus sous l'espérance sont ici clairement corrélés (la structure des prix des zéro-coupons étant précisément expliquée par les taux spot !)

On est donc bien dans un cas où la mesure risque neutre n'est pas facilement utilisable. Nous allons par contre montrer que la méthodologie forward neutre permet d'obtenir une formule explicite, et ce, dans le cas où le processus de volatilité $\sigma(t,s,r)$ intervenant dans l'équation d'évolution des prix, ne dépend pas de r:

$$\sigma(t,s,r) = \sigma(t,s)$$

ceci permettant d'assurer une propriété de normalité .

On exploitera bien sûr pour ce la formule directe (26):

$$\begin{aligned} C(t) &= P(t,f)\mathrm{E}_{Q_f}\left[(P(f,s)-K)^+|t\right] \\ &= P(t,f)\mathrm{E}_{Q_f}\left[(\widetilde{P}(f,s;f)-K)^+\Big|t\right] \\ &= P(t,f)\mathrm{E}_{Q_f}\left[\left(\frac{\widetilde{P}(f,s;f)}{\widetilde{P}(t,s;f)} - \frac{K}{\widetilde{P}(t,s;f)}\right)^+\widetilde{P}(t,s;f)\Big|t\right] \end{aligned}$$

Le coefficient $\widetilde{P}(t,s;f)$ étant observable en t, peut sortir de l'espérance.

Notons d'autre part:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{K}{\widetilde{P}(t,s;f)} \\ \chi(t,f) &= \frac{\widetilde{P}(f,s;f)}{\widetilde{P}(t,s;f)} \end{aligned}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} C(t) &= P(t,f)\widetilde{P}(t,s;f)\mathrm{E}_{Q_f}\left[(\chi(t,f)-K_1)^+|t\right] \\ &= P(t,f)\frac{P(t,s)}{P(t,f)}\mathrm{E}_{Q_f}\left[(\chi(t,f)-K_1)^+|t\right] \\ &= P(t,s)\int_{K_1}^{\infty}(x-K_1)dF(x) \end{aligned} \tag{28}$$

où F est la fonction de répartition de la variable $\chi(t,f)$ sous la mesure Q_f.

Or de la relation (22), on a:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(f,s;f) = \widetilde{P}(t,s;f)\exp\Big[&-\int_t^f(\sigma(u,s)-\sigma(u,f))d\widetilde{w}_f(u) \\ &-\frac{1}{2}\int_t^f(\sigma(u,s)-\sigma(u,f))^2du\Big] \end{aligned}$$

La variable $\chi(t,f) = \frac{\widetilde{P}(f,s;f)}{\widetilde{P}(t,s;f)} = \exp(\Psi)$ admet donc sous la mesure Q_f une distribution log-normale de paramètres:

$$a = \mathrm{E}\Psi = -\frac{1}{2}\int_t^f(\sigma(u,s)-\sigma(u,f))^2du \tag{29}$$

$$\begin{aligned} b^2 = \mathrm{Var}\Psi &= \mathrm{Var}\int_t^f(\sigma(u,s)-\sigma(u,f))d\widetilde{w}_f(u) \\ &= \int_t^f(\sigma(u,s)-\sigma(u,f))^2du \overset{\text{not.}}{=} v^2(t,f) \end{aligned} \tag{30}$$

(et ce, puisque σ est supposé non aléatoire c'est-à-dire indépendant de r).

On peut alors calculer explicitement (28):

$$\begin{aligned} C(t) &= P(t,s)\left[\int_{K_1}^{\infty}xdF(x) - K_1\int_{K_1}^{\infty}dF(x)\right] \\ &= P(t,s)[I_1 - I_2] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(x) &= Q_f\left[\chi(t,f) \leq x\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln x - a}{b}\right) \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition d'une normale centrée réduite.

Posons $y = \frac{\ln x - a}{b}$ et donc $x = e^a e^{yb}$

$$K_2 = y(K_1) = \frac{\ln K_1 - a}{b}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{K_1}^{\infty}xdF(x) &= \int_{K_2}^{\infty}e^a e^{yb}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= \int_{K_2}^{\infty}e^a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{y-b}{2}\right)^2}e^{\frac{b^2}{2}}dy \\ &= 1 - \Phi(K_2 - b) = \Phi(b - K_2), \end{aligned}$$

puisque $a + \frac{b^2}{2} = 0$, et

$$\begin{aligned} I_2 &= K_1\int_{K_1}^{\infty}dF(x) \\ &= K_1\int_{K_2}^{\infty}d\Phi(y) = K_1\Phi(-K_2) \end{aligned}$$

Finalement on a:

$$\begin{aligned}C(t) &= P(t,s)\{\Phi(b-K_2) - K_1\Phi(-K_2)\}\\ &= P(t,s)\Phi(b-K_2) - P(t,s)\frac{K}{\widetilde{P}(t,s;f)}\Phi(-K_2)\\ &= P(t,s)\Phi(b-K_2) - P(t,s)\frac{K}{P(t,s)}P(t,f)\Phi(-K_2)\end{aligned}$$

soit:

$$\boxed{C(t) = P(t,s)\Phi(C_1) - KP(t,f)\Phi(C_2)} \qquad (31)$$

où C_1 et C_2 sont 2 constantes données par:

$$\begin{aligned}C_1 &= b - K_2\\ &= v(t,f) - \frac{\ln K_1 + \frac{1}{2}v^2(t,f)}{v(t,f)}\\ &= \frac{1}{2}v(t,f) + \frac{\ln(\widetilde{P}(t,s;f)/K)}{v(t,f)}\\ &= \frac{1}{2}v(t,f) + \frac{1}{v(t,f)}\ln\left(\frac{P(t,s)}{P(t,f)K}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_2 &= C_1 - v(t,f)\\ &= -\frac{1}{2}v(t,f) + \frac{1}{v(t,f)}\ln\left(\frac{P(t,s)}{P(t,f)K}\right)\end{aligned}$$

($v(t,f)$ étant défini en (30)).

Il est intéressant de comparer la relation ainsi obtenue à la célèbre formule de Black Scholes de tarification d'option sur actions:

- option sur zéro-coupon (formule (31)):

$$C(t) = P(t,s)\Phi(C_1) - KP(t,f)\Phi(C_2) \qquad (32)$$

- option sur action (Black et Scholes):

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(f-t)}\Phi(d_2) \qquad (33)$$

Le passage de (33) à (32) semble naturel:

- le sous-jacent de type action S est remplacé par le sous-jacent obligataire $P(t,s)$
- le facteur d'actualisation $e^{-r(f-t)}$ entre l'instant d'observation et le terme de l'option est remplacé par un zéro-coupon entre ces 2 instants.

6 Conclusion

La méthodologie de changement de mesure de probabilité permet donc de tarifer les risques financiers à l'instar des risques classiques par utilisation d'une espérance actualisée des flux générés. Le choix adéquat du changement de mesure est bien sûr crucial comme l'a montré le cas d'options sur zéro-coupons; en termes financiers , cette modification de la mesure de probabilité peut s'interpréter comme un changement de monnaie.

REFERENCES

[1] N.H. Bingham, R.Kiessel. "Risk neutral valuation - pricing and hedging of financial derivatives". *Springer Finance*, 1998, Springer.

[2] P. Devolder. "Finance stochastique". *Editions de l'ULB*, 1993, Bruxelles.

[3] D. Duffie. "Security markets - stochastic models". Academic press, 1988.

[4] H. Geman, N. El Katoui, J.C. Rochet. "Changes of numeraire, change of probability measure and option pricing". *J.Appl.Prob*. 32, 1995.

[5] J. Ingersoll. "Theory of financial decision making". *Rowman and Littlefield*, 1987.

[6] F. Quittard Pinon. "Marché des capitaux et théorie financière". *Economica*, duexième édition, 1998.

[7] R-A. Dana, M. Jean-Blanc-Picque. "Marchés Financiers en temps continu: valorisation et équilibre", *Economica*, 1998.

[8] M. Musiela, M. Rutkowski. "Martingale Methods in Financial Modelling". *Springer*, 1997.