

Searching for scaling laws in distributional properties of price variations : a review over 40 years

Christian WALTER

PRICEWATERHOUSECOOPERS and UNIVERSITE OF EVRY
32, rue Guersant – 75017 PARIS
tel. 33.1 56 57 85 96
fac-simile 33.1 56 57 58 60
e-mail : christian.walter@fr.pwcglobal.com

April 2001

Abstract

Due to the increasing importance of long-term risk management issues (mutual funds, pension funds, corporates), it is now necessary to extend the generally used short-term models implemented in the financial industry (for example, the VaR) to a longer term context. Long-horizon forecasts lead to consider the concept of scaling in the study of statistical properties of price changes in markets. I provide a first survey and review of the major financial works devoted to the search for scaling laws in the price fluctuations, over the last 40 years. Following Mandelbrot's intuition, this academic current began by looking for scale invariances before switching to other forms of scaling laws. Mandelbrot's two models (1963, 1965) paved the way for an active research, but no totally conclusive results have emerged. For the return process, the results of tests were unclear, and certain scaling anomalies were revealed, which seems to contradict the stable (fractal) hypothesis. However certain other forms of scale invariance (relative to extremes) were detected, thus partially confirming the hypothesis. For the volatility process, results were though conclusive and it is now common knowledge that the volatility process exhibits a long range dependence (fractal) structure.

Sommaire

0. Introduction : les lois d'échelle en finance

L'observation des graphiques boursiers représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps, laisse apparaître à l'œil des formes irrégulières qui semblent se reproduire et se répéter à toutes les échelles d'analyse : les périodes haussières se succèdent aux périodes baissières, mais les hausses sont elles-mêmes traversées de phase de baisses intermédiaires, baisses à leur tour entrecoupées de hausses partielles, et ceci presque indéfiniment jusqu'à la limite naturelle de l'échelle de cotation des titres. Cet enchevêtrement de vagues haussières et baissières accompagné de motifs répétitifs à toutes les échelles avait été relevé dans les années trente par Ralph Elliott à qui cette suggestion était venue en observant le flux et le reflux de la marée sur le sable de la grève. Il en avait formulé une symbolisation financière connue sous l'appellation de « vagues boursières », ou « vagues d'Elliott », qu'il décomposait en grandes marées, vagues normales, vaguelettes, mais aussi « tsunami », du nom donné au Japon aux grandes vagues issues des tremblements de terre. La théorie dite des « vagues d'Elliott »¹ présente de fait une description fractale déterministe du marché boursier à partir de figures géométriques autosimilaires que l'on retrouve sur toutes les échelles d'observation, et constitue la boîte à outils d'une forme d'analyse graphique des fluctuations boursières utilisée par certains professionnels des marchés, les analystes techniques. Ces figures d'Elliott proposent un calibrage des variations haussières et baissières à partir d'une numérologie pythagoricienne fondée sur l'usage du nombre d'or et de la suite de Fibonacci, prévisions fortement empreintes de subjectivité, dans la mesure où la détection et le positionnement des vagues dépend du regard de l'analyste graphique sur le marché qu'il examine. Faute d'un appareil mathématique approprié, cette conceptualisation des variations boursières resta, telle l'alchimie avant la chimie, dans le domaine préscientifique jusqu'à l'apparition des fractales.

Les fractales de Benoît Mandelbrot, quoique développées dans une démarche radicalement différente, s'inscrivent pourtant dans cette compréhension des variations boursières, et présentent comme point commun avec les vagues d'Elliott, le fait de rechercher à démêler les inextricables entrelacements des fluctuations boursières à toutes les échelles : pour employer un langage de boursier, se trouve-t-on dans la correction baissière d'une phase de hausse ou dans une période baissière contredite par une hausse temporaire ? Les fractales représentent la conceptualisation adéquate permettant la traduction des intuitions des analystes graphiques en représentations mathématiques rigoureuses.

¹ Elliott [1938].

Pourtant l'aventure des fractales en finance n'est pas une histoire paisible. Il s'agit plutôt du cheminement mouvementé des hypothèses de Mandelbrot au travers des évolutions de la théorie de la finance en quarante ans de parcours, de 1960 à nos jours, qui vit surgir de violentes controverses sur les modélisations à variance infinie ou à mémoire infinie. Le fil conducteur des travaux de Mandelbrot, suivi par d'autres, y compris ses contradicteurs, fut la recherche de lois d'échelle sur les fluctuations boursières, que cette recherche se fit dans la direction d'une invariance d'échelle, ou approche fractale pure des marchés, comme le proposait Mandelbrot, ou plutôt suivant celle d'une instrumentation d'une analyse multi-échelles des marchés, telle que celle correspondant aux processus mixtes ou de type ARCH apparus dans les années 80, ou à changement de régime dans les années 90.

Le point de départ de cette controverse fut l'existence de distributions leptokurtiques (ou non gaussiennes) sur les variations boursières. Cette anomalie distributionnelle par rapport à l'hypothèse brownienne de la modélisation financière classique, a conduit Mandelbrot en 1962 à proposer des distributions α -stables à variance infinie de Paul Lévy en remplacement des gaussiennes pour la modélisation des rentabilités périodiques.

Mais très tôt, cette nouvelle hypothèse suscita une controverse relativement âpre sur l'existence de la variance, et d'autres processus candidats apparurent, ceci d'autant plus aisément que l'invariance d'échelle des lois α -stables, propriété cardinale de l'hypothèse fractale de Mandelbrot, n'apparaissait pas, ou difficilement, validée expérimentalement. La tentative de résolution du problème leptokurtique par la conservation de l'hypothèse iid et la proposition de distributions α -stables ne résolvait pas toutes les anomalies, dans la mesure où un nouveau type d'anomalies, ou anomalies scalantes, apparaissait.

La recherche théorique s'intéressa alors à d'autres manières possibles de modéliser la leptokurticité, et l'on se tourna vers le deuxième pivot de la modélisation financière : l'hypothèse d'indépendance des rentabilités successives, qui fut également remise en question. On chercha alors dans des formes diverses de dépendance entre les rentabilités (dépendance linéaire puis non linéaire) la cause de la leptokurticité observée. C'est le deuxième temps des investigations empiriques. Après la mise en évidence de l'absence de mémoire courte sur les rentabilités, la recherche se tourna vers la détection de mémoire longue sur les rentabilités. Cette tentative n'aboutit pas non plus. Puis on s'intéressa au processus des volatilités, avec la formalisation d'une mémoire courte sur les volatilités, démarche qui a conduit au courant de la modélisation ARCH, puis avec la mise en évidence de mémoire longue sur les volatilités (ou dépendance longue), courant qui a abouti à la redécouverte des lois d'échelles en finance.

Finalement l'hypothèse fractale a été validée sur le processus générateur des volatilités boursières. Aujourd'hui, la mémoire longue des volatilités (c'est-à-dire une loi hyperbolique sur les corrélations entre volatilités) est devenue un fait acquis sur les marchés financiers, et la modélisation financière cherche à concilier absence de mémoire sur les rentabilités, et présence de mémoire longue sur les volatilités.

Après une première partie qui rappelle sommairement les quantités suivies en finance et la modélisation financière classique, on présente une revue de la littérature théorique sur les résultats de la recherche des lois d'échelle pour la description des variations boursières². Cette revue fait apparaître assez nettement plusieurs périodes distinctes, et l'on propose donc

² Les aspects mathématiques de la modélisation fractale en général, développés dans de nombreux ouvrages, ne sont pas abordés ici. Les aspects spécifiques de la modélisation fractale en finance, et des exemples d'application du modèle iid- α -stable sont présentés en détail dans un ouvrage à paraître en 2001 : voir référence Lévy-Véhel et Walter [2001].

d'établir une chronologie dans cette recherche de lois d'échelle, périodisation qui illustre les déplacements conceptuels dont la finance a fait l'objet depuis une quarantaine d'années. Cette chronologie est la suivante.

– Au cours d'une première période, de 1960 à 1970, les propositions de Mandelbrot et les premières découvertes prometteuses des invariances d'échelle sur les marchés lancent un débat dans la communauté universitaire, en introduisant les modèles iid- α -stables et H -corrélés.

– Ce débat se développe au cours de la période 1970-1990 et semble s'achever avec le rejet expérimental des fractales en finance sur les rentabilités boursières.

– Pourtant, parallèlement aux fractales, les développements de l'économétrie des séries temporelles sur les processus à degré d'intégration fractionnaire de type ARFIMA à partir des années 1980, puis FIGARCH dans les années 90, conduisent, dans la décennie 1990-2000, à redécouvrir les lois d'échelle sur le processus des volatilités boursières, à travers le phénomène de mémoire longue.

– Finalement, c'est la mesure du temps elle-même qui devient l'objet des recherches, avec les développements récents des modélisations à temps déformé.

1. La présence des échelles dans l'étude des variations boursières

1.1. La modélisation des variations des marchés boursiers

1.1.1. L'appréhension statistique des fluctuations boursières

Lorsque l'on veut décrire statistiquement le comportement d'un marché boursier entre deux dates 0 et T , dans le but d'en proposer une modélisation probabiliste, deux appréhensions « naturelles » des données disponibles que sont les cotations des cours sont possibles. Soit l'on relève les cours cotés entre 0 et T selon une fréquence d'observation fixe, qui peut être égale à un jour, un mois, un trimestre... mais aussi une heure ou cinq minutes. Cela revient à subdiviser l'intervalle $[0, T]$ en n périodes égales de pas de temps de base $\tau = T/n$, cette durée τ définissant un « temps caractéristique » d'observation du marché. Soit on relève chaque cours coté à chaque transaction ayant lieu entre 0 et T , ce qui revient à partitionner l'intervalle $[0, T]$ en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, et à travailler en « temps déformé », ou « temps-transaction », t_j étant le moment de la j -ème transaction.

La première approche paraît la plus immédiate, mais, en raison de la nature discontinue et irrégulière des cotations boursières, il est possible que le cours relevé en date t ne corresponde pas à un échange réel sur le marché, c'est-à-dire à un équilibre d'offre et de demande au moment du relevé : dans ce cas sa significativité économique pour l'analyse statistique peut apparaître plus faible. D'autre part, lorsque la fréquence de relevé est supérieure à la journée, les variations entre le cours de clôture-veille et d'ouverture-lendemain sont traitées comme les variations intraquotidiennes. Enfin, ce relevé en temps physique revient à faire l'hypothèse que l'activité du marché est plus ou moins uniforme durant la période d'observation, ce qui n'est en général pas le cas. D'où l'intérêt de la seconde approche, qui correspond à une succession de prix d'équilibre entre offre et demande.

Ces deux approches existent simultanément dans la modélisation financière, et cette alternative amène à se poser la question du temps adéquat pour mesurer les fluctuations boursières, question posée pour la première fois Mandelbrot et Taylor [1967] et Clark [1973], qui introduisirent la notion de « temps-information » ou l'information était associé au volume

des transactions³. La première analyse (temps calendaire) est la plus utilisée, mais le second courant de recherche (temps déformé) commence à faire l'objet d'un intérêt nouveau.

Cet intérêt résulte du changement (et le reflète aussi) qui est apparu dans l'environnement informatique des marchés boursiers, changement qui se traduit par une abondance toujours plus grande des données de cours disponibles : si les cours sont relevés en fréquence quotidienne depuis le dix-neuvième siècle, dans les années quatre-vingt sont apparus des relevés toutes les minutes, puis dans les années quatre-vingt dix, toutes les cotations. Aussi, l'ordre de grandeur de la taille des échantillons a augmenté de plusieurs puissances de dix. Les tests statistiques réalisés sur les marchés dans les années soixante utilisaient environ 10^3 données. Ceux du début des années quatre-vingt dix traitent environ 10^5 données. Les plus récentes investigations examinent environ 10^7 données.

En temps calendaire, la modélisation de base est la suivante. Soit S_t le cours de l'actif S (pour « stock » ou « security ») en date t . La variation du cours entre 0 et T est

$$S_T = S_0 + \sum_{k=1}^n \Delta S_k \quad n = \frac{T}{\tau} \quad [1]$$

La notation ΔS_k représente la variation du cours de l'actif S entre les dates $t-\tau$ et t , où t est exprimé en multiple du pas de temps de base τ :

$$\Delta S_{t,\tau} = S_t - S_{t-\tau} = S_{k\tau} - S_{(k-1)\tau} = \Delta S_k \quad [2]$$

En temps-transaction, on relève les cours à chaque transaction effectuée, et l'on considère les variations de cours entre deux transactions successives. Soit $N(t)$ le nombre de transactions⁴ effectuées entre les dates 0 et t . La variation du cours entre 0 et T est dans ce cas

$$S_T = S_0 + \sum_{j=1}^{N(T)} \Delta S_j \quad [3]$$

La notation ΔS_j représente la variation du cours de l'actif S entre les transactions $j-1$ et j :

$$\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$$

Le processus $\{S_j\}$ des cours est alors indicé par un temps boursier opérationnel, ou « temps-transaction », noté $\theta(t)$: $S_j = S_{\theta(t)}$.

Enfin, les professionnels des marchés disent généralement que la valeur d'un prix coté (et donc la pertinence de la mesure) n'est pas la même selon que ce prix correspond à une transaction de cinq cent mille titres ou de cinq titres. Une notion de « profondeur » du marché, de « poids » de l'échange, intervient alors. On mesure l'intensité de l'échange ou « niveau d'activité » du marché, par la quantité de titres échangés, ou volume des transactions. La modélisation financière a pris en compte cet élément, et le volume des transactions dans

³ On peut observer que cette démarche est voisine de celle de Maurice Allais qui introduisit la notion de « temps psychologique » en économie. Voir par exemple Allais [1974].

⁴ Le processus d'arrivée des transactions $N(t)$ a été abordé par Hasbrouck et Ho [1987] et récemment par Ghysels *et al.* [1997]. Evertsz [1995a] a montré que la distribution des temps d'attente entre deux cotations suivait une loi de puissance de type Pareto, dont la valeur de l'exposant implique une espérance mathématique infinie.

l'évolution des cours est aujourd'hui analysé⁵ en introduisant le processus des volumes dans la modélisation financière.

Soit $V(t)$ le volume total de titres échangés entre 0 et t . Le volume global de titres échangés entre 0 et T est

$$V_T = \sum_{j=1}^{N(T)} v_j \quad [4]$$

La notation v_j représente le volume de titres échangés au cours de la transaction j . Le processus $\{V_j\}$ des volumes est indicé par le temps-transaction.

Le cours coté en date T est donc la résultante de trois facteurs, ou processus entre 0 et T : le processus des transactions $N(t)$, le processus des variations du cours entre deux transactions ΔS_j , le processus des volumes v_j . Le cours en date T est issu de l'effet simultané de ces trois facteurs.

1.1.2. Gain et rentabilité des opérations boursières à différentes échelles

A partir des données de base que sont les cours cotés sur la période $[0, T]$, trois quantités sont généralement suivies en finance. Ces trois quantités sont les suivantes.

Le *gain* réalisé sur le titre pendant la période $[0, T]$ défini par

$$G_T = S_T - S_0 \quad [5]$$

Le *taux de rentabilité* du titre sur la période $[0, T]$ défini par

$$R_T = \frac{G_T}{S_0} = \frac{S_T - S_0}{S_0} \quad [6]$$

Le *taux de rentabilité continu* du titre sur la période $[0, T]$, défini par

$$r_T = \text{Log}(1 + R_T) = \text{Log } S_T - \text{Log } S_0 \quad [7]$$

On s'intéresse aux évolutions de ces quantités sur des sous-périodes successives $[t-\tau, t]$:

Le *gain périodique* réalisé sur le titre pendant la sous-période $[t-\tau, t]$ est

$$\Delta G_{t,\tau} = G_t - G_{t-\tau} = S_t - S_{t-\tau} = \Delta S_{t,\tau} \quad [8]$$

Le *taux de rentabilité périodique* du titre sur la sous-période $[t-\tau, t]$ est

$$\begin{aligned} \Delta R_{t,\tau} &= \frac{S_t - S_{t-\tau}}{S_{t-\tau}} = \frac{\Delta S_{t,\tau}}{S_{t-\tau}} \\ 1 + \Delta R_{t,\tau} &= \frac{S_t}{S_{t-\tau}} = \frac{1 + R_t}{1 + R_{t-\tau}} \end{aligned} \quad [9]$$

⁵ Voir par exemple Lamoureux et Lastrapes [1994], ou Gouriéroux et Le Fol [1997] qui donnent un aperçu synthétique de cette question. Maillat et Michel [1997] ont montré que la distribution des volumes suit une loi de puissance de type Pareto.

Le taux de rentabilité continu périodique du titre sur sous-période $[t-\tau, t]$ est

$$\Delta r_{t,\tau} = \text{Log}(1 + \Delta R_{t,\tau}) = \text{Log } S_t - \text{Log } S_{t-\tau} = r_t - r_{t-\tau} \quad [10]$$

Lorsque les données sont relevées en haute fréquence, $\Delta R_{t,\tau}$ est « petit », et $\text{Log}(1 + \Delta R_{t,\tau}) \approx \Delta R_{t,\tau}$: les expressions (9) et (10) sont très voisines, et l'on mesure la rentabilité périodique du titre indifféremment par l'une ou par l'autre.

L'agrégation temporelle des rentabilités s'effectue en rapprochant les expressions (6) et (9), on a ($t = k\tau$)

$$1 + R_T = \prod_{i=\tau}^T (1 + \Delta R_{i,\tau}) = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta R_k) \quad [11]$$

De la même manière, (7) et (10) conduisent à

$$r_T = \sum_{i=\tau}^T \Delta r_{i,\tau} = \sum_{k=1}^n \Delta r_k \quad [12]$$

1.1.3. La modélisation financière classique : le mouvement brownien

Modéliser les variations boursières revient à faire l'hypothèse que S_t est une *variable aléatoire* : la suite des valeurs S_1, S_2, S_3, \dots est alors considérée comme les valeurs à certaines dates t d'un processus en temps continu. L'analyse des variations boursières conduit alors à l'étude du processus stochastique $\{S(t), t \geq 0\}$ ou des processus associés $\{R(t), t \geq 0\}$ ou $\{r(t), t \geq 0\}$, et de leurs accroissements.

L'hypothèse usuelle de la théorie de la finance suppose que ces processus aléatoires ont des accroissements *indépendants et identiquement distribués* (iid) *de variance finie*. Ce que l'on peut noter en abrégé la modélisation « iid-gaussienne ». L'hypothèse iid-gaussienne a fait l'objet d'un grand nombre de controverses depuis une cinquantaine d'années. La sous-hypothèse iid a été massivement testée dans la littérature théorique⁶. Il est aujourd'hui admis pour les calculs des modèles d'évaluation et de couverture usuels que, *en première approximation*, et dès que τ est supérieur à quelques dizaines de minutes⁷, cette hypothèse est valide. Elle est très commode pour le passage de la distribution des rentabilités à l'échelle τ à celle des rentabilités à l'échelle $T=n\tau$ puisque, dans ce cas, si $P(\Delta r_{t,\tau})$ est la distribution de probabilité des rentabilités périodiques $\Delta r_{t,\tau}$,

$$P(\Delta r_{t,n\tau}) = P(\Delta r_{t,\tau})^{\otimes n} \quad [13]$$

où \otimes représente l'opérateur de convolution. Du point de vue probabiliste, l'intérêt de cette hypothèse est donc purement calculatoire. Du point de vue économique, l'indépendance des rentabilités revient à considérer que l'information disponible et pertinente pour l'évaluation des actifs financiers se transmet correctement dans les prix cotés, et est à l'origine du concept d'efficience informationnelle des marchés ; la stationnarité signifie que les caractéristiques économiques du phénomène observé ne changent « pas trop » au fil du temps. L'existence de

⁶ On pourra trouver dans Campbell *et al.* [1997] une revue très complète des différentes manières de la tester statistiquement, ainsi que des résultats obtenus.

⁷ Voir par exemple Bouchaud et Potters [1997].

la variance limite les fluctuations de la rentabilité : pas de krach boursier, pas de flambée haussière.

Le premier modèle formel de représentation des variations boursières fut proposé dès 1900 par Louis Bachelier⁸ sur les gains (8), puis modifié en 1959 par Osborne sur les rentabilités (9) et (10)

$$\frac{dS_t}{S_t} = dr_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad [14]$$

avec des coefficients constants $\mu \in \mathfrak{R}$ et $\sigma > 0$, où W_t est un mouvement brownien⁹ standard, i.e. $E(W_1) = 0$ et $E(W_1^2) = 1$. Le coefficient μ représente l'espérance de rentabilité instantanée de l'action achetée.

Le risque d'un actif financier est, en général, mesuré par le coefficient σ du mouvement brownien, et est appelé « volatilité » par les professionnels des marchés : c'est une mesure de la dispersion potentielle des rentabilités boursières. Il existe d'autres mesures de risque, toutes fondées sur cette idée de variabilité conditionnelle des rentabilités à un horizon de temps donné¹⁰.

La solution de (14) s'obtient en posant $X_t = \text{Log } S_t$ et en appliquant les formules de différenciation de Itô à dX_t

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\} \quad t \in [0, T] \quad [15]$$

qui est considéré comme le *modèle standard* des variations boursières.

1.2. Les échelles de temps dans la modélisation financière

1.2.1. La question de l'existence d'un temps caractéristique

Si l'on choisit une modélisation en temps physique, donc à pas de temps fixe, une première question apparaît, celle du choix de ce pas de temps τ , c'est-à-dire de l'échelle de résolution de l'analyse du marché : faut-il examiner les variations horaires, quotidiennes, hebdomadaires, mensuelles etc. ? Quelle est l'échelle d'observation la plus pertinente pour capter la structure statistique des variations boursières ?

Une question de nature financière apparaît alors : la loi de probabilité qui régit les variations boursières doit-elle être la même à toutes les échelles ? Si l'on comprend chaque échelle de temps comme représentant un horizon d'investissement pour une catégorie donnée d'opérateurs, il n'y a apparemment pas de raison particulière pour que les variations correspondant à l'horizon court du trader et celles correspondant à l'horizon long du gérant de

⁸ Voir Bachelier [1900]. Une biographie de Louis Bachelier est faite par Courtault *et al.* [2000]. Pour une description des aspects financiers de l'œuvre de Bachelier et de leur impact dans l'industrie financière, voir Walter [1996]. Pour une mise en perspective du travail probabiliste de Bachelier dans le contexte de son époque, voir Taqqu [2000].

⁹ Il est à noter que Bachelier ne connaissait pas le mouvement brownien au sens strict de sa définition, puisque ce n'est qu'en 1905 que cette définition sera donnée par Einstein, puis en 1923 par Wiener. Mais Bachelier suppose que les différences successives de la forme $\Delta S_{t,\tau}$ sont indépendantes de distribution gaussienne et de variance proportionnelle à l'intervalle de temps τ , ce qui revient de fait à décrire le processus de Wiener.

¹⁰ Voir une revue par Gouriéroux et Le Fol [1997].

portefeuille soient modélisables par la même loi de probabilité. L'équation (12) montre que la rentabilité à l'échelle T est la somme des rentabilités aux échelles τ dans le cas iid. En général, lorsqu'on additionne des variables aléatoires iid, la loi de probabilité résultante est différente des lois de probabilités initiales. Une analyse multi-échelles des marchés semble donc à première vue inévitable si l'on ne veut pas perdre d'information sur le comportement du marché à chaque échelle de temps caractéristique d'un phénomène économique donné.

Les premières analyses du comportement des marchés n'utilisaient qu'une seule fréquence d'observation, souvent mensuelle. C'est Mandelbrot qui, en 1962, fut le premier à introduire l'idée d'une analyse simultanée sur plusieurs échelles, afin de comparer les distributions des rentabilités périodiques $\Delta r_{t,\tau}$ selon ces différentes échelles τ . Mandelbrot cherchait à mettre en évidence une *invariance par changement d'échelle* sur les rentabilités périodiques (c'est-à-dire une structure fractale du marché). Soit, si $P(\Delta r_{t,\tau})$ est la distribution de probabilité des rentabilités périodiques $\Delta r_{t,\tau}$, la relation (13) se simplifie en

$$P(\Delta r_{t,\tau})^{\otimes n} = n^H P(\Delta r_{t,\tau}) \quad [16]$$

où H est un exposant d'autosimilarité. Ce qui revient à dire que le processus des rentabilités $\{r(t), t \geq 0\}$ est autosimilaire d'exposant H :

$$r(T) = r(n\tau) \equiv n^H r(\tau) \quad T = n\tau \quad [17]$$

où \equiv symbolise l'égalité en distribution.

Dans un tel modèle de marché, une conséquence importante de l'hypothèse fractale est l'absence d'échelle d'observation privilégiée, de temps caractéristique discriminant, pour son observation statistique. Dans ce cas, il devient possible d'estimer la loi de probabilité pour un horizon long à partir de l'étude des fluctuations boursières sur un horizon court : la distribution de la rentabilité à horizon long terme T s'obtient à partir de la distribution de la rentabilité à horizon court terme τ au moyen de la relation (17). Autrement dit, en observant le marché à n'importe quelle échelle, on accède à sa structure comportementale fondamentale : la loi de probabilité qui caractérise les fluctuations boursières est indépendante de l'échelle de ces fluctuations.

1.2.2 Les invariances d'échelle implicites de la modélisation financière classique

Or la modélisation financière classique possède des propriétés fractales : le mouvement brownien est un processus autosimilaire d'exposant $H=1/2$. En particulier, ses accroissements Δr sur une durée τ suivent une loi d'échelle telle que

$$\Delta r_t(\tau) \sim \tau^{1/2} \quad [18]$$

La distribution du rapport $\Delta r / \tau^{1/2}$ est *indépendante du temps*. Traduit en termes financiers, l'ordre de grandeur de la rentabilité d'un titre pendant une durée donnée est proportionnel à la racine carrée de cette durée. En théorie de la finance, il est postulé que la rentabilité et le risque associés sont proportionnels au temps écoulé. La relation (18) donne cette proportionnalité. Ceci quelle que soit l'échelle de temps (la durée) considérée. Il y a donc invariance de la loi de la rentabilité par changement d'échelle : la loi de la rentabilité des titres ne dépend pas de la durée de détention du titre. Le risque théorique d'un actif financier va se donc dilater en racine carrée (l'exposant 1/2) du temps de détention de cet actif.

Les acteurs des marchés appliquent en permanence cette propriété fractale, en cherchant à « annualiser » la volatilité au moyen de la formule (18) ci-dessus. Ainsi par exemple, la volatilité à 12 mois sera égale à la volatilité à 1 mois multipliée par la racine carrée de 12. Ce calcul de niveau de risque à temps long à partir du risque à temps court est aussi à la base des réflexions prudentielles de l'industrie bancaire pour le contrôle des risques sur les opérations de marché¹¹.

2. Les modélisations postulant l'indépendance des rentabilités boursières

2.1. 1960-1970 : de la loi de Pareto aux distributions de Lévy

2.1.1. Le problème leptokurtique et le premier modèle de Mandelbrot

La première mise en évidence du caractère scalant des fluctuations des prix cotés sur les marchés boursiers est due à Mandelbrot, avec l'étude des variations du prix du coton entre 1880 et 1958¹². C'est la première trace d'une considération explicite de l'existence de phénomènes d'échelle sur les variations boursières. Cette existence est mise en évidence à partir de l'étude des *queues de distribution*, et fait apparaître la conjonction entre découverte des lois d'échelle et traitement approprié des grandes variations boursières.

Dès les premières études statistiques des fluctuations boursières, il avait été mis en évidence que les distributions empiriques des rentabilités successives contenaient trop de points de queue pour pouvoir être ajustées par des densités gaussiennes : les distributions empiriques obtenues étaient toutes leptokurtiques. Ce problème des grandes variations boursières n'était pas résolu et avait été temporairement abandonné par la recherche faute de moyen appropriés pour le modéliser. Cette non normalité des queues de distribution était d'ailleurs ancienne, et remontait à Pareto qui avait, précisément, inventé la loi qui porte son nom pour rendre compte de la distribution des revenus dans une économie à une date donnée, et qui est une loi de puissance. Mais la loi de Pareto n'apparaissait pas posséder un statut de loi limite en probabilité, et n'était pas utilisée en finance.

Mandelbrot aborde alors la problème des *grandes valeurs* des fonctions de répartitions empiriques des rentabilités $\Delta r_{t,\tau} = \text{Log } S(t+\tau) - \text{Log } S(t)$, où $S(t)$ est le prix de clôture du coton en date t , avec pour τ deux valeurs : 1 mois et 1 jour. En calculant les expressions $\text{Fr} [\Delta r_{t,\tau} > u]$ pour les valeurs positives et $\text{Fr} [\Delta r_{t,\tau} < -u]$ pour les valeurs négatives où Fr désigne la fréquence cumulée des variations $\Delta r_{t,\tau}$, il obtient un double ajustement par des lois de Pareto d'exposant α

$$\begin{aligned} \text{Log} \left\{ \text{Fr} [\Delta r_{t,\tau} > u] \right\} &\approx -\alpha \text{Log } u + \log C'(\tau) \\ \text{Log} \left\{ \text{Fr} [\Delta r_{t,\tau} < -u] \right\} &\approx -\alpha \text{Log } u + \log C''(\tau) \end{aligned} \quad [19]$$

Observant que les droites d'ajustement correspondant aux distributions $\tau = 1$ jour et $\tau = 1$ mois sont *parallèles*, Mandelbrot en déduit que les lois de distribution de Δr pour $\tau = 1$ jour et 1 mois ne diffèrent que par un *changement d'échelle*, et propose alors un *nouveau modèle de variation des prix* : en conservant les hypothèses iid, la stabilité du phénomène entre 1 jour et 1 mois est interprétée comme la trace de la stabilité au sens de Lévy.

¹¹ Voir références : Bâle [1994, 1996, 1998, 1999] et IOSCO [1994].

¹² Cette étude constitua une partie d'un rapport interne de recherche à IBM, avant d'être publiée sous forme réduite dans les Comptes-rendus à l'Académie des Sciences. Voir références Mandelbrot [1962a] et Mandelbrot [1962b].

Une variable aléatoire X est appelée stable au sens de Lévy, ou α -stable, si pour tout couple $c_1, c_2 > 0$, il existe $\alpha \in]0,2]$ et $d \in \Re$ tels que

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \equiv cX + d \quad c^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha \quad [20]$$

où \equiv symbolise l'égalité en distribution et où X_1 et X_2 sont deux copies indépendantes de X . Dans le cas où $d = 0$, X est dite strictement stable. $\alpha \in]0,2]$ est l'exposant caractéristique des lois stables.

La déduction de Mandelbrot provient de la propriété suivante des lois stables. Si X est une loi stable d'exposant caractéristique α , alors on peut montrer que

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} \left[\frac{A_1}{\pi\alpha} + \frac{A_2}{2\pi\alpha} x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha}) \right] \quad [21]$$

où A_1 et A_2 sont des quantités indépendantes de α . D'autre part, par définition, une variable aléatoire suit une loi de type Pareto dans la queue supérieure si

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} h(x) \quad x \geq x_0 \quad [22]$$

où α est appelé index de Pareto, et où $h(x)$ est une fonction à variation lente (qui varie lentement au voisinage de l'infini), i.e. $\lim_{x \rightarrow \infty} h(tx)/h(x) = 1$ quand $x \rightarrow \infty$ pour tout $t > 0$. Si $h(x)$ est une fonction constante, la loi est dite de Pareto au sens strict.

En posant $h(x) = [A_1/\pi\alpha + A_2/2\pi\alpha x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})]$, les relations (21) et (22) montrent que les lois stables de Lévy sont *asymptotiquement parétiennes* avec l'indice de queue α : c'est la raison pour laquelle, dans sa communication de 1962, Mandelbrot en conclut que « le caractère parétien (...) est « prédit » ou « confirmé » par la stabilité ».

Le second fait important de cette mise en évidence empirique concerne la valeur de α égale à 1,7. Aucun moment d'ordre supérieur à α n'existe. Comme α est inférieur à 2 (mais supérieur à 1), la variance des distributions $\Delta r_{t,\tau}$ est infinie.

1.2.2 Les premières mises en évidence de distributions de Lévy en finance

Mandelbrot [1963] développe et précise le modèle de variation des prix proposé en 1962 : « ce fut le premier modèle que j'ai élaboré pour décrire de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines Bourses de valeurs et de matières premières »¹³. On peut qualifier ce premier modèle de « iid- α -stable » dans la mesure où les hypothèses iid sont conservées, et que la valeur de l'exposant caractéristique α des lois stables passe de 2 (Gauss) à une valeur $\alpha < 2$. Ce modèle permettant de faire surgir de manière imprévisible des déluges boursiers, fut appelé par Mandelbrot « effet Noé » en référence à l'épisode biblique du déluge¹⁴.

Fama [1965a] puis Mandelbrot [1967] vont poursuivre les investigations initiales et valider le modèle. Enfin, en 1968, les premières tabulations de lois stables symétriques sont effectuées par Fama et Roll [1968], qui vont permettre de concevoir les premiers estimateurs des paramètres de ces distributions.

¹³ Mandelbrot [1997] (édition française), p.128.

¹⁴ Mandelbrot [1973a].

2.2. 1970-1990 : les difficultés expérimentales du modèle iid- α -stable

2.2.1. Le problème statistique de l'estimation des paramètres des lois stables

Comme Fama l'indique dès 1965, ces premières mises en évidence de distributions de Lévy sont fragiles car les méthodes d'estimation de l'exposant caractéristique α sont peu sûres : la méthode ajustement des queues de distribution dans un graphique bilogarithmique est très sensible au choix subjectif du point à partir duquel faire commencer la queue de distribution. Fama [1965a] avait proposé deux autres estimateurs fondés sur la propriété d'invariance par addition appliquée, soit une mesure d'intervalle interquantiles, soit sur la loi de dilatation de la variance empirique. Mais ces deux estimateurs étaient également fragiles : le premier présupposait l'indépendance des accroissements, et le second était très sensible au choix de la taille de l'échantillon.

Une étape est franchie en 1971 : Fama et Roll, utilisant des propriétés relatives aux quantiles, détectées grâce aux tabulations des distributions stables symétriques faites précédemment, proposent de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres α et c des lois stables symétriques¹⁵. Ces premiers outils statistiques vont permettre la mise en œuvre des premiers tests du modèle iid- α -stable à partir de 1970.

Puis une seconde génération d'estimateurs va apparaître au cours des années 70. Successivement Press [1972], DuMouchel [1973, 1975], Paulson *et al.* [1975], Arad [1980], Koutrouvélis [1980], et McCulloch [1981], développent de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres, utilisant la fonction caractéristique des lois stables¹⁶.

Simultanément, des générateurs de variables aléatoires stables sont conçus par Chambers *et al.* [1976], dont les algorithmes permettent une amélioration des possibilités de simulation sur les marchés financiers. Ces nouvelles étapes théoriques permettent d'améliorer les tests sur l'hypothèse d'invariance d'échelle.

Mais DuMouchel [1983] fait apparaître qu'il est possible, au moyen des méthodes précédentes, de qualifier de Lévy-stables des distributions de Pareto non stables (i.e. avec convergence vers une loi normale). Il montre que ces méthodes sont bonnes lorsque la « vraie » distribution est stable, mais biaisées quand ce n'est pas le cas, ce qui laisse subsister un doute quant à la validation de l'invariance d'échelle, lorsque cette invariance est vérifiée au moyen de ces méthodes.

D'autre part, la taille des échantillons peut affecter les résultats des estimations faites avec la méthode de Koutrouvélis et a fortiori avec des méthodes plus anciennes¹⁷. Par exemple, Walter [1999] vérifie que α augmente en fonction de la baisse de la taille des échantillons mais reste à peu près constant lorsque des tests sur sous-échantillons de taille constante sont entrepris.

Plus généralement, l'on peut dire que les difficultés d'estimation de l'exposant caractéristique rendent délicate la détermination d'une position définitive. On trouve ainsi dans un manuel récent la considération suivante : « Nous pensons que les méthodes d'estimation du paramètre α ne sont pas assez précises pour inférer une conclusion nette sur la nature réelle des distributions à partir d'estimations faites sur différentes échelles de

¹⁵ Fama et Roll [1971].

¹⁶ Pour une revue de ces méthodes, voir Akgiray et Lamoureux [1989], ou Walter [1994], qui arrivent à la même conclusion sur le choix de la meilleure méthode d'estimation : celle de Koutrouvélis [1980].

¹⁷ Voir Koutrouvélis [1980] et Akgiray et Lamoureux [1989] pour des illustrations de ce problème de la taille des échantillons, connu depuis les premiers travaux de Mandelbrot et Fama.

temps »¹⁸. Lorsqu'il se produit, le rejet de la stabilité de α n'apparaît donc pas aussi « concluant » que l'affirme péremptoirement Taylor (cf. plus bas). D'ailleurs, d'autres études plus récentes, comme Belkacem *et al.* [2000], ont fait apparaître des validations partielles de cette invariance.

2.2.2. Non normalité et controverses sur l'invariance d'échelle

De manière générale, tous les travaux qui vont être entrepris sur les marchés boursiers vont confirmer la non normalité des distributions des rentabilités sur différentes échelles, l'ajustement éventuel à des distributions de Lévy sur chaque échelle, mais aussi la difficulté de valider l'hypothèse fractale. En effet, très vite va apparaître une anomalie scalante, la tendance à l'augmentation systématique de la valeur de $\alpha(\tau)$ en fonction de τ . Les différences entre les travaux concerneront le choix de processus de remplacement pour rendre compte de cette défaillance, au moyen de modélisations non fractales, c'est-à-dire d'une analyse multi-échelles des marchés. On présente ici les principaux articles portant sur cette mise en évidence.

Teichmoller [1971], Officer [1972], Fielitz et Smith [1972], Praetz [1972], Barnea et Downes [1973], obtiennent tous des valeurs de α qui augmentent en moyenne de 1,6 en haute fréquence à 1,8 en basse fréquence. Cette augmentation conduit Hsu *et al.* [1974], qui la vérifient aussi, à estimer que « dans une économie où les facteurs affectant les niveaux de cours (développement techniques, politiques gouvernementales etc) peuvent subir des mouvements de grande ampleur, il paraît *déraisonnable* (souligné par nous) de vouloir chercher à représenter par une distribution de probabilité unique les variations des cours »¹⁹.

Brenner [1974], Blattberg et Gonedes [1974], Hagerman [1978] poursuivent les investigations en observant le même phénomène. Hagerman en conclut que « le modèle stable symétrique ne peut pas *raisonnablement* (souligné par nous) être considéré comme une description appropriée des rentabilités boursières »²⁰. On peut remarquer la parenté d'argumentation entre Hagerman et Hsu *et al.*, pour lesquels il n'apparaît pas « raisonnable » de retenir un modèle à variance infinie. C'était déjà l'argument utilisé par Bienaymé contre Cauchy en 1853...

Zajdenweber [1976] vérifie l'ajustement à une distribution de Lévy mais ne teste pas l'invariance d'échelle. Upton et Shannon [1979] reprennent la question différemment en cherchant à estimer le degré de violation à la normalité selon l'échelle d'observation, en utilisant la méthode de Kolmogorov-Smirnov (KS), un calcul des coefficients de courbure K et d'obliquité S . L'invariance d'échelle n'est pas retenue.

Une nouvelle étude, celle de Fielitz et Rozelle [1983], confirme l'anomalie scalante. D'autres investigations sont faites sur les marchés des changes. Wasserfallen et Zimmermann [1985], Boothe et Glassman [1987], Agkiray et Booth [1988b], Tucker et Pond [1988], Hall *et al.* [1989] sont à leur tour confrontés à l'augmentation de α en fonction de la baisse de la fréquence d'observation.

A la fin de la décennie 80, le modèle iid- α -stable des rentabilités boursières semble rejeté par l'ensemble des travaux réalisés. En 1986, on lit dans un ouvrage de synthèse sur l'analyse des variations boursières : « Beaucoup de chercheurs ont estimé que l'hypothèse de la variance infinie n'était pas acceptable. Des études détaillées sur les variations boursières ont

¹⁸ Embrechts *et al.* [1997], p. 406.

¹⁹ Hsu *et al.* [1974], p. 1

²⁰ Hagerman [1978], p. 1220.

rejeté de manière concluante les distributions de Lévy. (...) Dix ans après son article de 1965, Fama lui-même préféra utiliser une distribution normale pour les variations mensuelles et donc abandonner les distributions stables pour les variations quotidiennes »²¹.

Mais l'on peut observer que l'invariance d'échelle théorique de la modélisation gaussienne (loi d'échelle en racine carrée du temps) n'est en tous les cas pas validée par les marchés réels, et que la généralisation par un modèle iid- α -stable représente un bon compromis entre puissance de modélisation et coût statistique de l'estimation. On trouve ce type d'argument chez, par exemple McCulloch [1978], qui met en avant le faible nombre de paramètres requis par les lois stables, par rapport aux cinq paramètres nécessaires aux modèles à sauts comme ceux proposés par Merton [1976].

Autrement dit, la question reste donc ouverte, même s'il est vraisemblable que le « vrai » processus des rentabilités soit plus complexe que la modélisation iid- α -stable. Certains travaux entrepris ont fait apparaître que les valeurs de α peuvent varier au cours du temps²² (problème de la stationnarité des Δr). Ce qui revient à introduire la question de la *dépendance* entre accroissements du processus des cours, et à chercher d'autres formes de lois d'échelle sur les séries financières.

2.2.3 Les anomalies scalantes des paramètres sous hypothèse iid

L'augmentation systématique de l'exposant caractéristique $\alpha(\tau)$ des lois stables en fonction de τ constitue ce qui est appelé une « anomalie scalante ». En effet, dans une modélisation iid- α -stable, on doit vérifier la relation

$$\alpha(T) = \alpha(n\tau) = \alpha(\tau) = \alpha \quad T = n\tau \quad [23]$$

Le fait que cette relation ne soit pas retrouvée pour toutes les valeurs de n montre que l'invariance d'échelle n'est pas globale sur l'ensemble des échelles de temps, ou que l'hypothèse iid n'est pas valide. Plus généralement, une manière de mettre en évidence l'invariance par changement d'échelle d'une loi de probabilité, et donc de pouvoir se déterminer sur l'hypothèse fractale, est d'examiner si ses paramètres caractéristiques ont un comportement scalant, c'est-à-dire de chercher une loi de dilatation (ou de contraction) des paramètres en fonction de l'échelle de temps. Cette idée est à l'origine d'un courant important de la recherche théorique en finance.

Soit $\lambda(\tau)$ un paramètre statistique de la distribution $\Delta r_{t,\tau}$: $\lambda(\tau)$ est fonction de τ , et la recherche de lois d'échelles sur un marché entre 0 et T revient alors à l'estimation des valeurs des paramètres selon chaque valeur de τ , puis à l'étude de la relation d'échelle, ou fonction $\lambda : \tau \rightarrow \lambda(\tau)$. Tous les paramètres statistiques des distributions sont a priori également utilisables pour la recherche de lois d'échelles sur les distributions. Les paramètres les plus analysés dans les travaux de recherche sont, soit un paramètre d'échelle, soit le coefficient de courbure, ou kurtosis K .

Dans le cas de la gaussienne, le paramètre d'échelle est l'écart-type, et dans le cas d'accroissements iid, on doit avoir la relation

$$\sigma(T) = \sigma(n\tau) = n^{1/2}\sigma(\tau) \quad T = n\tau \quad [24]$$

²¹ Taylor [1986], p. 46.

²² Voir un exemple dans Walter [1994].

Cette relation d'échelle déjà postulée sur la variance chez Bachelier [1900] a été introduite dans la recherche au cours des années 80, et est connue sous le nom de « test du ratio de variance »²³. La relation (24) montre que dans le cas de rentabilités iid, on doit avoir une proportionnalité $\sigma(\tau) \sim \tau^{1/2}$. Un certain nombre de travaux ont mis en évidence une violation légère de cette relation, faisant apparaître une proportionnalité de type $\sigma(\tau) \sim \tau^H$ avec $H > 0,5$. Par exemple, Mantegna [1991] et Mantegna et Stanley [2000] recensent des valeurs voisines de 0,53 ou 0,57.

Dans le cas de lois stables non gaussiennes, on teste le paramètre d'échelle noté c , et on doit avoir la relation²⁴

$$c(T) = c(n\tau) = n^{1/\alpha} c(\tau) \quad T = n\tau \quad [25]$$

Un paramètre important est le coefficient de Pearson, ou kurtosis K , défini par $K_X = E[(X - E(X))^4] / E[(X - E(X))^2]^2 - 3$, car il permet de mettre en évidence un écart à la normalité de la distribution observée. Pour une distribution normale, $K_X = 0$. Dans le cas de rentabilités iid-gaussiennes, on doit avoir

$$K(T) = K(n\tau) = \frac{K(\tau)}{n} \quad T = n\tau \quad [26]$$

Or, par exemple, Cont [1997] trouve que le coefficient de kurtosis $K(\tau)$ ne décroît pas en $1/n$ mais en $n^{-\alpha}$ avec $\alpha \cong 0,5$ indiquant la présence d'une possible dépendance non linéaire entre les variations (cf. plus bas).

De manière générale, plus l'on améliore la connaissance que l'on a des comportements d'échelle des différents paramètres, et plus il devient possible de choisir entre les deux termes de l'alternative, invariance d'échelle ou échelles caractéristiques. L'étude des comportements scalants des paramètres apporte ainsi une aide dans la détermination d'une modélisation des fluctuations boursières.

L'existence d'une anomalie scalante sur le paramètre α au cours des investigations entreprises entre 1970 et 1980, puis sur le paramètre K dans la décennie suivante, a conduit certains auteurs à chercher à modifier le modèle de Mandelbrot en limitant l'invariance d'échelle, soit à certaines échelles de temps, par introduction de changements de régimes (« cross-over »), soit à certaines parties des distributions sur les seules valeurs extrêmes. Dans ces deux métamorphoses de la fractalité, cela revenait à introduire une analyse multi-échelles des marchés.

2.3. Modèles iid non stables à invariance d'échelle partielle

4.1. Invariances d'échelle partielles par changement de régime

La question des changements de régime, ou invariance d'échelle partielle sur une bande de fréquences données, avait déjà été abordée par Mandelbrot [1963], qui supposait l'existence de limites supérieures et inférieures (« cutoff ») à la fractalité des marchés²⁵, et introduisait la

²³ Voir par exemple Lo et MacKinlay [1988], qui fournissent une liste de travaux antérieurs sur les calculs du ratio de variance.

²⁴ Relation qui est vérifiée par Walter [1991,1994,1999], et Belkacem *et al.* [2000].

²⁵ Voir aussi Mandelbrot [1997], p. 51, et pp 64-66.

notion de « bande de fractalité » (« scaling range »). Akgiray et Booth [1988a] utilisent cette conception pour renforcer l'argumentation de McCulloch [1978] sur le rapport coût-avantage d'un modèle à invariance d'échelle : l'utilisation de distributions stables entre deux fréquences repérées (deux « cutoff ») est pertinente car moins coûteuse en estimations de paramètres que d'autres modélisations, peut-être plus fines (comme les mélanges de lois normales ou les processus mixtes diffusion-sauts) mais également plus complexes et donc sources d'un plus grand nombre d'erreurs d'estimation. Mais la question à résoudre est alors la détection des points de changements de régime. Bouchaud et Potters [1997] et Mantegna et Stanley [2000] proposent un tel modèle, combinant distributions de Lévy et loi exponentielle à partir d'une valeur donnée.

4.2. Invariances d'échelle par rapport aux extrêmes

DuMouchel [1983] propose, sans faire a priori d'hypothèse sur l'invariance d'échelle globale, de « laisser les queues de distribution parler d'elles-mêmes »²⁶. Il utilise pour cela la distribution de Pareto généralisée introduite par Pickands [1975], et dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 - kx/\sigma)^{1/k} & k \neq 0, \sigma > 0 \\ 1 - \exp(-x/\sigma) & k = 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad [27]$$

où σ et k sont des paramètres de forme : plus k est grand, et plus la queue de distribution est épaisse. Dans le cas où la distribution est stable d'exposant caractéristique $\alpha < 2$ (invariance d'échelle), alors $\alpha \cong 1/k$.

On peut remarquer que, alors que les lois de Pareto avaient été à l'origine de la démarche de Mandelbrot dans son introduction de la notion d'invariance d'échelle sur les variations boursières, DuMouchel opérait d'une certaine manière un retour aux sources, et redécouvrait la loi de Pareto, mais sans l'invariance cherchée par Mandelbrot.

Mittnik et Rachev [1989] proposent de remplacer l'invariance d'échelle sur la sommation des variables iid α -stables par une autre structure d'invariance, l'invariance par rapport au minimum

$$a_n \min_{1 \leq i \leq n} X_i + b_n \equiv X_1 \quad [28]$$

dans lequel la propriété de stabilité par addition est remplacée par la propriété de stabilité pour une valeur extrême, le minimum. La distribution de Weibull correspond à cette structure. C'est le début d'un courant de recherche qui aboutira à la redécouverte en finance, dans les années quatre-vingt dix, de la théorie des valeurs extrêmes²⁷, théorie qui présente une autre forme d'invariance : l'invariance par rapport à la considération des maxima et des minima.

3. La recherche de dépendances et la mémoire des marchés

²⁶ DuMouchel [1983], p. 1025.

²⁷ Sur l'application de la théorie des valeurs extrêmes en finance, voir Longin [1996, 2000].

3.1. Dépendance linéaire : les essais du modèle H-corrélé sur les rentabilités

3.1.1. La question de la dépendance des rentabilités boursières successives

Le modèle standard des variations boursières faisait l'hypothèse que les rentabilités $\Delta r_{t,\tau} = \text{Log } S_t - \text{Log } S_{t-\tau}$ étaient iid selon une loi normale de variance $\sigma^2 \tau$. La question de la validation de l'hypothèse d'indépendance est apparue très tôt dans les travaux empiriques sur les caractérisations des fluctuations boursières.

Dans le cas le plus général, la dépendance entre deux variables aléatoires X et Y est mesurée par la quantité $C_{f,g}(X,Y) = E[f(X)g(Y)] - E[f(X)]E[g(Y)]$ et on a la relation : X et Y indépendantes $\Leftrightarrow C_{f,g}(X,Y) = 0$. Le cas $f(x) = g(x) = x$ correspond à la mesure de covariance usuelle. Les autres cas incluent toutes les corrélations possibles (non linéaires) entre les variables X et Y . Appliquée aux variations boursières, cette mesure revient à dire que les rentabilités $\Delta r_{t,\tau}$ sont indépendantes si et seulement si $C(h) = C_{f,f}(\Delta r_t, \Delta r_{t+h}) = 0$ pour toute fonction $f(\Delta r_t)$. L'étude de l'indépendance des variations boursières va donc prendre le chemin de l'analyse de la fonction

$$C(h) = E[f(\Delta r_t)f(\Delta r_{t+h})] - E[f(\Delta r_t)]E[f(\Delta r_{t+h})] \quad [29]$$

La chronologie de l'étude de la dépendance des variations boursières se confond avec les différents choix effectués pour la définition de la fonction $f(\cdot)$.

Les premiers travaux (1930-1970) sur la vérification de l'indépendance des accroissements ont porté sur le seul cas $f(x) = x$. Dans ce cas, $C(h)$ devient la fonction d'autocovariance usuelle

$$C(h) = \gamma(h) = E[\Delta r_t \Delta r_{t+h}] - E[\Delta r_t]E[\Delta r_{t+h}] \quad [30]$$

et l'indépendance des accroissements correspond à la nullité du coefficient de corrélation linéaire.

Dans l'ensemble, les conclusions de ces premiers travaux ont validé l'absence d'existence d'une autocorrélation sérielle et ont contribué à la formation du concept d'efficience informationnelle des marchés boursiers²⁸.

3.1.2 Le problème des cycles lents et le deuxième modèle de Mandelbrot

Pourtant, à partir de la fin des années 1970, certains résultats contraires à cette relation sont apparus dans l'étude des comportements des rentabilités sur un horizon de long terme, qui ont conduit aux tests dits « de mémoire longue ». En notant $\gamma(h) = E[\Delta r_t \Delta r_{t+h}] - E[\Delta r_t]E[\Delta r_{t+h}]$ la fonction d'autocovariance usuelle et $\rho(h) = \gamma(h) / \gamma(0)$ la fonction d'autocorrélation associée, le modèle standard des variations boursières impliquait que $\rho(h)$ devait être géométriquement bornée, soit $\rho(h) \leq c r^{-h}$, $c > 0$. Or il est apparu que, dans certains cas, on obtenait parfois une décroissance de type hyperbolique $\rho(h) \sim c h^{2H-2}$ avec $c > 0$ et $0 < H < 1$, correspondant à un phénomène de « mémoire longue » ou « dépendance longue ».

Ce phénomène de longue mémoire avait été observé dès les années soixante par Adelman [1965] et Granger [1966], ce dernier le décrivant comme « caractéristique des fluctuations des variables économiques » et avait conduit Mandelbrot [1965] à redécouvrir la loi de Hurst [1951] en introduisant la notion de « processus homothétique à soi », devenu par la suite

²⁸ Voir par exemple Taylor [1986], ou Campbell *et al.* [1997] pour une revue de cette forme d'indépendance, et Walter [1996] pour la formation historique du concept d'efficience à partir de ces premiers travaux.

(Mandelbrot et Van Ness [1968]) le mouvement brownien fractionnaire (mBF, ou « FBM » en langue anglaise) dont les accroissements sont autosimilaires d'exposant H et admettent comme fonction d'autocovariance $\gamma(h) = 1/2 [|h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H}]$. Ce modèle de Mandelbrot peut ainsi être qualifié de modèle « H -corrélé ». Mandelbrot l'appela « effet Joseph » en référence aux cycles lents et aperiodiques évoqués dans l'histoire biblique de Joseph à propos des fluctuations des récoltes²⁹.

Summers [1986], Fama et French [1988], Poterba et Summers [1988] et DeBondt et Thaler [1989], mirent en évidence des phénomènes de « retour à la moyenne » des rentabilités successives, introduisant la notion d'horizon à long terme sur les marchés. Quoique divergentes, les interprétations de ces phénomènes d'autocorrélations sur horizon long tendaient à remettre en cause l'hypothèse d'indépendance usuelle, et à inciter à chercher une forme de mémoire longue sur les rentabilités boursières.

3.1.3 L'introduction de la différenciation fractionnaire en économétrie

Parallèlement, et depuis les années soixante-dix, les limites économétriques des processus ARMA (p,q) et ARIMA (p,d,q) stationnaires dans la description des séries financières, avaient conduit progressivement à une généralisation de ces modèles en introduisant un degré de différenciation $0 < d < 1/2$ non entier, avec les processus ARFIMA, qui trouvèrent dans les années quatre-vingt un large écho en finance. L'opérateur de différenciation non entière $\nabla^d = (1-L)^d$ où ∇ est défini par $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L) X_t$ et

$$\nabla^d = (1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_d^k L^k \quad [31]$$

où C_d^k est le coefficient du binôme, permettait l'obtention de « mémoire longue » sur les séries économiques étudiées et correspondait à un besoin de caractérisation nouveau de certaines des propriétés observées de ces séries. Baillie [1996] présente une synthèse très complète de l'utilisation de ces processus en économétrie de la finance. Les courants ARFIMA et FBM se rejoignirent et conduisirent à la recherche de mémoire longue sur les rentabilités.

3.1.4 Les difficultés expérimentales du modèle H -corrélé sur les rentabilités

Les tests utilisés dans les travaux de recherche de ces anomalies mettaient en œuvre la statistique R/S de Hurst améliorée par Mandelbrot [1972]. Cette statistique permet de trouver la valeur de l'exposant d'autosimilarité H dans la mesure où le ratio R/S est asymptotiquement proportionnel à n^H : $H \approx \log(R/S)/\log n$.

Ainsi, entre 1980 et 1990, plusieurs travaux ont fait apparaître des valeurs de H supérieures à 0,5 indiquant la présence d'une mémoire longue sur les marchés, ce qui semblait corroborer les observations sur le comportement « anormal » des rentabilités sur longues périodes.

Mais Lo [1991] a montré que cette statistique est sensible également aux effets de mémoire courte : dans le cas d'un processus AR(1), le résultat de la statistique R/S peut être biaisé à la hausse de 73%. Lo a proposé une statistique R/S modifiée, en ajoutant au dénominateur des termes d'autocovariances pondérées. Il apparaissait alors que les nouvelles valeurs obtenues de H étaient voisines de 0,5. Ainsi par exemple, Corazza *et al.* [1997], Batten *et al.* [1999], Howe *et al.* [1999] vérifient que l'analyse classique R/S donne des valeurs de H supérieures à 0,5 mais que la statistique R/S modifiée de Lo [1991] fait chuter les valeurs de H vers 0,5 : « ce

²⁹ Mandelbrot [1973b].

qui est le plus surprenant dans ce résultat, est moins l'absence de mémoire longue en tant que telle, que *le changement radical de jugement que l'on est conduit à opérer lorsqu'on utilise la statistique modifiée de Lo (souligné par nous) »*³⁰.

Les études ultérieures sur l'indépendance vont considérer dans la fonction $C(h)$ définie en (29) les cas $f(x)=x^2$ et $f(x)=|x|$ Les variations absolues des cours et leur carré représentent une mesure de la « volatilité » des cours. C'est sur cette forme de dépendance, dépendance sur la volatilité, que vont apparaître des lois d'échelle en finance.

3.2. Dépendance non linéaire: validation du modèle H-corrélé sur les volatilités

3.2.1. Les années 80 : la modélisation ARCH et ses limites

Le point de départ commun des études qui vont être menées dans les années 90 est donc le constat des limites des modèles iid α -stable et H-corrélé appliqués sur les rentabilités boursières. Ce constat va conduire à chercher une forme de dépendance sur leur volatilité, en introduisant d'abord une mémoire courte sur les variances, avec le courant de la modélisation ARCH³¹, courant qui donné naissance à un très grand nombre de modèles de cette famille développant dans plusieurs directions la logique initiale du conditionnement de la variance³². Pourtant, en 1997, on pouvait lire ce commentaire sur le courant ARCH : « Cependant, l'inflation récente de variantes du modèle de base et des terminologies : GARCH, IGARCH, EGARCH, TARCH, QTARCH, SWARCH, ACD-ARCH, révèle que cette approche *semble avoir atteint ses limites* (souligné par nous), ne pas pouvoir répondre de façon adéquate à certains questions, ou ne pas permettre de reproduire certains faits stylisés »³³. Ces « faits stylisés » concernent, en particulier, la décroissance hyperbolique de la corrélation des volatilités, c'est-à-dire la longue mémoire, ou loi d'échelle sur la volatilité.

3.2.2. Les années 90 : mise en évidence de dépendance longue sur la volatilité

Baillie [1996] et Bollerslev *et al.* [2000] présentent une revue des mises en évidence de la mémoire longue sur la volatilité, à laquelle on se permet de renvoyer le lecteur. Cette loi d'échelle sur la volatilité permet de rendre compte des anomalies scalantes observées sur la kurtosis K . En effet, comme le montre Cont [1997], si l'on fait l'hypothèse que les corrélations sur la volatilité sont définies par une loi de puissance de type $g(k) \cong g_0.k^{-\alpha}$, alors on obtient comme relation scalante pour la kurtosis K

$$K(n\tau) = \frac{K(\tau)}{n} + \frac{6(K(\tau) + 2)}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)n^\alpha} \quad [32]$$

qui illustre le phénomène observé de décroissance anormale de la kurtosis.

Mandelbrot [1971] a fait apparaître l'importance de la prise en compte de l'horizon dans des marchés dont les variations sont modélisables par des processus à dépendance longue : en particulier, la probabilité de grandes pertes décroît moins rapidement que dans un monde iid-gaussien. Les financiers disent souvent que « la patience diminue le risque » : ce que montre la dépendance longue, c'est que cette diminution est moins rapide qu'il n'y paraît, ou qu'il faut être très patient...

³⁰ Howe *et al.* [1999], p. 149.

³¹ Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity, modélisation introduite par Engle [1982]. Voir une présentation des ARCH dans Guégan [1994] ou Gouriéroux [1997].

³² Voir une revue de synthèse dans Bollerslev *et al.* [1992].

³³ Gouriéroux et Le Fol [1997], p. 8.

4. Perspectives : vers une redécouverte des lois d'échelle en finance

A l'issue de quarante années de modélisation financière des cours boursiers, on peut observer que l'un des aspects intellectuels nouveaux de la décennie 90 dans la description des variations boursières est le changement de regard sur les marchés qui apparaît dans la recherche en finance.

On peut trouver une trace de ce changement dans une prudente émergence d'un vocabulaire nouveau. Alors que depuis Zajdenweber [1976], toute référence aux fractales avait disparu des articles de finance (les fractales se développant dans d'autres champs de recherche), Peters [1989] qui estime la valeur de l'exposant H de Hurst sur l'indice SP 500, et Walter [1989,1990] avaient réintroduit la terminologie de Mandelbrot, et la notion de structure fractale des marchés, en considérant à la fois les effets « Noé » et « Joseph », dans leurs implications pour la compréhension de la nature des variations boursières. C'est surtout avec la mémoire longue des volatilités que la notion de structure fractale réapparaît, et Baillie [1996] peut rappeler la relation entre la terminologie de Mandelbrot et les études économétriques récentes. Richards [2000] s'intéresse directement à la dimension fractale du marché. C'est en fait le début d'une redécouverte progressive des lois d'échelle, et d'un intérêt qui va croissant pour ces lois.

On peut cependant attirer l'attention sur l'apparition, à la suite des travaux de Peters, d'une confusion qui va naître dans la communauté financière professionnelle entre la notion de fractales et celle de chaos, Peters [1991] ayant associé les deux concepts dans une démarche plus spontanée que rigoureuse, et l'ayant surtout solidifiée dans son second ouvrage (Peters [1994]) dont le titre unifie de manière erronée fractales et chaos, en présentant l'application de la théorie du chaos sur les politiques d'investissement, à partir d'une description fractale des variations boursières. Dans la mesure où de nombreuses études ont mis en évidence la non applicabilité des approches de type chaos pour la description des variations boursières³⁴, cette confusion introduite par Peters a contribué (et contribue peut-être encore) à rendre difficile la pénétration de l'hypothèse fractale dans la communauté professionnelle, qui associe souvent aux fractales la notion de chaos.

Nonobstant cette hésitation conceptuelle, on peut conjecturer que, devant le succès de la modélisation fractale de la volatilité, et avec les récentes tentatives d'appliquer le mouvement brownien sur un temps déformé³⁵, la modélisation financière des variations boursières dans années à venir devrait prendre le chemin d'une redécouverte partielle des invariances d'échelle, non plus dans un contexte de dimension fractale unique (cas des modèles iid- α -stable et H -corrélé) mais à partir de l'introduction de modèles à temps déformé, qui permettent de comprendre le temps des marchés en remplaçant le temps physique par un temps boursier intrinsèque. Les plus récentes modélisations explorent actuellement cette voie qui semble prometteuse³⁶.

³⁴ Voir une synthèse dans, par exemple, Mignon [1998].

³⁵ Müller *et al.* [1990], Dacorogna *et al.* [1993], Müller *et al.* [1993], Evertsz [1995b].

³⁶ Voir par exemple Mandelbrot *et al.* [1997], Ané et Geman [2000].

Références bibliographiques

- ADELMAN I. [1965], « Long Cycles : Facts or Artefacts ? », *American Economic Review*, vol. 50, pp 444-463.
- AKGIRAY V., BOOTH G. [1988a], « The Stable-Law Model of Stock Returns », *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 6, n°1, pp 51-57.
- AKGIRAY V., BOOTH G. [1988b], « Mixed Diffusion-Jump Process Modeling of Exchange Rate Movements », *The Review of Economics and Statistics*, pp 631-637.
- AKGIRAY V., LAMOUREUX C. [1989], « Estimation of Stable-Law Parameters : A Comparative Study », *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 7, n°1, pp 85-93.
- ALLAIS M. [1974], « The psychological rate of interest », *Journal of Money, Crédit and Banking*, vol. 3, pp 285-331.
- ANE T., GEMAN H. [2000], « Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns », *Journal of Finance*, vol. 55, n°5, pp 2259-2284.
- ARAD R. [1980], « Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions », *International Economic Review*, vol. 21, n°1, pp 209-220.
- BAILLIE R. [1996], « Long memory processes and fractional integration in econometrics », *Journal of Econometrics*, vol. 73, pp 5-59.
- BALE [1994], *Risk Management Guidelines for Derivatives*, Basle Committee on Banking Supervision, juillet.
- BALE [1996], *Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks*, Basle Committee on Banking Supervision, janvier.
- BALE [1998], *Framework for Supervisory Information about Derivatives and Trading Activities*, Joint Report by the Basle Committee on Banking Supervision and the Technical Committee of the IOSCO, septembre.
- BALE [1999], *Trading and Derivatives Disclosures of Banks and Securities Firms*, Joint Report by the Basle Committee on Banking Supervision and the Technical Committee of the IOSCO, décembre.
- BARNEA A., DOWNES D. [1973], « A Reexamination of the Empirical Distribution of Stock Price Changes », *J. of the American Statistical Association*, vol. 68, n° 342, pp 348-350.
- BATTEN J., ELLIS C., MELLOR R. [1999], « Scaling laws in variance as a measure of long-term dependence », *International Review of Financial Analysis*, vol. 8, n°2, pp 123-138.
- BELKACEM L., LEVY-VEHEL J., WALTER C. [2000], « CAPM, Risk, and Portfolio Selection in α -Stable Markets », *Fractals*, vol. 8, n°1, pp 99-115.
- BLATTBERG R., GONEDES N. [1974], « A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices », *Journal of Business*, vol. 47, pp 244-280.
- BOLLERSLEV T., CAI J., SONG F. [2000], « Intraday periodicity, long memory volatility, and macroeconomic announcements effects in the US Treasury bond market », *Journal of Empirical Finance*, vol. 7, pp 37-55.
- BOLLERSLEV T., CHOU R., KRONER K. [1992], « ARCH Modeling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence », *Journal of Econometrics*, vol. 52, n°s 1-2, pp 5-59.
- BOOTH G., KAEN F., KOVEOS P. [1982], « R/S Analysis of Foreign Exchange Rates under Two International Monetary Regimes », *Journal of Monetary Economics*, vol. 10, pp 407-415.

- BOOTHE P., GLASSMAN D. [1987], « The statistical distribution of exchange rates : Empirical Evidence and Economic Implications », *J. of International Economics*, vol. 22, pp 297-319.
- BOUCHAUD J.P., POTTERS M. [1997], *Théorie des risques financiers*, Saclay, collection Aléas.
- BRENNER M. [1974], « On the stability of the distribution of the market component in stock price changes », *J. of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 9, pp 945-961.
- CAMPBELL J., LO A., MACKINLAY A.C. [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- CHAMBERS J., MALLOWS C. STUCK B. [1976], « A Method for Simulating Stable Random Variables », *J. of the American Statistical Association*, vol. 71, n° 354, pp 340-344.
- CLARK P. [1973], « A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices », *Econometrica*, vol. 41, n°1, pp 135-155.
- CONT R. [1997], « Scaling Properties of Intraday Price Changes », Science & Finance Working Paper, June.
- CORAZZA M., MALLIARIS A.G., NARDELLI C. [1997], « Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Markets », *The Journal of Future Markets*, vol. 17, n°4, pp 433-473.
- COURTAULT J.M., KABANOV Y., BRU B., CREPEL P., LEBON I, LE MARCHAND A. [2000], « Louis Bachelier on the Centenary of Théorie de la spéculation », *Mathematical Finance*, vol. 10, n°3, pp 341-353.
- DACOROGNA M., MÜLLER U., NAGLER R., OLSEN R., PICTET O. [1993], « A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market », *Journal of International Money and Finance*, vol. 12, pp 413-438.
- DEBONDT W., THALER R. [1989], « Anomalies. A Mean-Reverting Walk Down Wall Street », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3, n°1, pp 189-202.
- DUMOUCHEL W. [1973], « Stable Distributions in Statistical Inference : 1. Symmetric Stable Distributions Compared to Other Long-Tailed Distributions », *J. of the American Statistical Association*, vol. 68, n° 342, pp 469-477.
- DUMOUCHEL W. [1975], « Stable Distributions in Statistical Inference : 2. Information from Stably Distributed Samples », *J. of the American Statistical Association*, vol. 70, n° 350, pp 386-393.
- DUMOUCHEL W. [1983], « Estimating the stable index α in order to measure tail thickness : a critique », *The Annals of Statistics*, vol. 11, n°4, pp 1019-1031.
- ELLIOTT R. [1938], *The Wave Principle*, Collins, New York.
- EMBRECHTS P., KLÜPPELBERG C., MIKOSCH T. [1997], *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer.
- EVERTSZ C.G. [1995a], « Self-similarity of high-frequency USD-DEM exchange rates », Proc. of 1st Int. Conf. on High Frequency Data in Finance, Zürich, Mars, vol. 3.
- EVERTSZ C.G. [1995b], « Fractal Geometry of Financial Time Series », *Fractals*, vol. 3, n°3, pp 609-616.
- FAMA E. [1965a], « The Behavior of Stock Market Prices », *Journal of Business*, vol. 38, n°1, pp 34-195.
- FAMA E. [1965b], « Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market », *Management Science*, vol. 11, n°3, pp 404-419.
- FAMA E., FRENCH K. [1988], « Permanent and Temporary Components of Stock Prices », *Journal of Political Economy*, vol. 96, n°2, pp 246-273.
- FAMA E., ROLL R. [1968], « Some Properties of Symmetric Stable Distributions », *J. of the American Statistical Association*, vol. 63, pp 817-836.
- FAMA E., ROLL R. [1971], « Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions », *J. of the American Statistical Association*, vol. 66, n° 334, pp 331-336.
- FIELITZ B., ROZELLE J. [1983], « Stable Distributions and the Mixture of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns », *J. of the American Statistical Association*, vol. 78, n° 381, pp 28-36.
- FIELITZ B., SMITH E. [1972], « Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes », *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, n° 340, pp 813-814.
- GHYSELS E., GOURIEROUX C., JASIAK J. [1997], « Market Time and Asset Price Movements : Theory and Estimation », in D. HAND et S. JARKA (ed.) *Statistics in Finance*, Londres, Arnold, pp 307-322.
- GOURIEROUX C. [1997], *ARCH Models and Financial Applications*, Springer Verlag.

- GOURIEROUX C., LE FOL G. [1997], « Volatilités et mesures du risque », *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 138, n°4, pp 7-32.
- GRANGER C.W.J [1966], « The typical spectral shape of an economic variable », *Econometrica*, vol. 34, pp 150-161.
- GREENE M., FIELITZ B. [1977], « Long-Term Dependence in Common Stock Returns », *Journal of Financial Economics*, vol. 4, pp 339-349.
- GUEGAN D. [1994], *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*, Economica, Paris.
- HALL J., BRORSEN B., IRWIN S. [1989], « The Distribution of Future Prices : A Test of the Stable Paretian and Mixture of Normal Hypotheses », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24, n°1, pp 105-116.
- HASBROUCK J., HO T. [1987], « Order Arrival, Quote Behavior and the Return Generating Process », *Journal of Finance*, vol. 42, pp 1035-1048.
- HOWE J.S, MARTIN D, WOOD B. [1999], « Much ado about nothing : Long-term memory in Pacific Rim equity markets », *International Review of Financial Analysis*, vol. 8, n°2, pp 139-151.
- HSU D.A, MILLER R., WICHERN D. [1974], « On the Stable Paretian Behavior of Stock-Market Prices », *J. of the American Statistical Association*, vol. 69, n° 345, pp 108-1
- HURST H.E. [1951], « Long Term Storage Capacity of Reservoirs », *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116, pp 770-799.
- IOSCO [1994], *Operational and Financial Risk Management Control Mechanisms for Other-the-Counter Derivatives Activities of Regulated Securities Firms*, Technical Committee of International Organization of Securities Commissions, juillet.
- KOUTROVELIS I. [1980], « Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws », *J. of the American Statistical Association*, vol. 75, n° 372, pp 918-928.
- LAMOUREUX C., LASTRAPES W. [1994], « Endogeneous Trading Volume and Momentum in Stock-Return Volatility », *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, n°2, pp 225-234.
- LEVY-VEHEL J., WALTER C. [2001], *Les marchés fractals*, à paraître aux PUF, Paris.
- LO A.W [1991], « Long-Term Memory in Stock Market Prices », *Econometrica*, vol. 59, n°5, pp 1279-13
- LO A.W, MACKINLAY A. [1988], « Stock Prices do not follow Random Walks : evidence from a simple specification test », *Review of Financial Studies*, vol. 1, pp 41-66.
- LONGIN F. [1996], « The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns », *Journal of Business*, vol. 69, n°3, pp 383-408.
- LONGIN F. [2000], « From value at risk to stress testing approach : The extreme value theory », *Journal of Banking & Finance*, pp 1097-1130.
- MAILLET B., MICHEL T. [1997], « Mesures de temps, information et distribution des rendements intrajournaliers », *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 138, n°4, pp 89-120.
- MANDELBROT B. [1962a], Research Note NC-87, 26 mars 1962, Centre de recherche IBM, Yorktown Heights, New York.
- MANDELBROT B. [1962b], « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy », *Comptes-rendus à l'Académie des Sciences*, vol. 254, pp 3968-3970.
- MANDELBROT B. [1963], « The Variation of Certain Speculative Prices », *Journal of Business*, vol. 36, pp 394-419.
- MANDELBROT B. [1965], « Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi ; application à la loi climatologique de H.E. Hurst », *Comptes-rendus à l'Académie des Sciences*, vol. 260, pp 3274-3277.
- MANDELBROT B. [1967], « The Variation of Some Other Speculative Prices », *Journal of Business*, vol. 40, pp 393-4
- MANDELBROT B. [1969], « Long-Run Linearity, Locally Gaussian Process, H-Spectra and Infinite Variance », *International Economic Review*, vol. 10, n°1, pp 82-111.
- MANDELBROT B. [1971], « When can price be arbitrated efficiently ? A limit to the validity of random walk and martingale models », *Review of Economics and Statistics*, vol. 53, pp 225-236.
- MANDELBROT B. [1972], « Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles : from the Covariance to R/S Analysis », *Annals of Economic and Social Measurement*, vol. 1, pp 259-290.

- MANDELBROT B. [1973a], « Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix », *Economie Appliquée*, vol. 26, pp 321-348.
- MANDELBROT B. [1973b], « Le problème de la réalité des cycles lents et le syndrome de Joseph », *Economie Appliquée*, vol. 26, pp 349-365.
- MANDELBROT B. [1997], *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, New York, et la version française abrégée : *Fractales, Hasard et Finances*, Flammarion, Paris.
- MANDELBROT B., FISHER A., CALVET L. [1997], « A Multifractal Model of Asset Returns », Cowles Foundation Discussion Paper n°1164, septembre.
- MANDELBROT B., TAYLOR H. [1967], « On the Distribution of Stock Prices Differences », *Opérations Research*, vol. 15, pp 1057-1062.
- MANDELBROT B., VAN NESS J.W. [1968], « Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications », *SIAM Review*, vol. 10, n°4, pp 422-437.
- MANTEGNA R, STANLEY E. [2000], *An introduction to Econophysics : Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, UK.
- MANTEGNA R. [1991], « Lévy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange », *Physica A*, vol. 179, pp 232-242.
- MCCULLOCH J.H. [1978], « Continuous Time Processes with Stable Increments », *Journal of Business*, vol. 51, n°4, pp 601-619.
- MCCULLOCH J.H. [1981], « Simple Consistent Estimators of the Stable Distributions », présenté à l'Annual Meeting of the Econometric Society.
- MERTON R. [1976], « Optimal Pricing when underlying Stock Returns are discontinuous », *J. of Financial Economics*, vol. 3, pp 125-144.
- MIGNON V. [1998], *Marchés financiers et modélisation des rentabilités boursières*, Economica, Paris.
- MITNIK S., RACHEV S. [1989], « Stable Distributions for Asset Returns », *Applied Mathematics Letters*, vol. 2, n°3, pp 301-304.
- MÜLLER U., DACOROGNA M., DAVE R., PICTET O., OLSEN R., WARD J. [1993], « Fractals and Intrinsic Time – A Challenge to Econometricians », Olsen & Associates Research Group, UAM 1993-08-16.
- MÜLLER U., DACOROGNA M., OLSEN R., PICTET O., SCHWARZ M., MORGENEGG C. [1990], « Statistical Study of Foreign Exchange Rates, Empirical Evidence of a Price Change Scaling Law and Intraday Pattern », *Journal of Banking and Finance*, vol. 14, pp 1189-1208.
- OFFICER R. [1972], « The Distribution of Stock Returns », *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, n° 340, pp 807-812.
- OSBORNE M.F.M. [1959], « Brownian Motion in the Stock Market », *Operations Research*, vol. 7, pp 145-173, et discussions : vol. 7, pp 807-811.
- PAULSON A., HOLCOMB E., LEITCH R. [1975], « The estimation of the parameters of the stable laws », *Biometrika*, vol. 62, n°1, pp 163-170.
- PETERS E. [1989], « Fractal Structure in the Capital Markets », *Financial Analysts Journal*, Juillet-Août, pp 32-37.
- PETERS E. [1991], *Chaos and Order in the Capital Markets : A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, John Wiley, New York.
- PETERS E. [1994], *Fractal Market Analysis : Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley, New York.
- PICKANDS J. [1975], « Statistical Inference Using Extreme Order Statistics », *The Annals of Statistics*, vol. 3, pp 119-131.
- POTERBA J.M., SUMMERS L. [1988], « Mean Reversion in Stock Prices, Evidence and Implications », *Journal of Financial Economics*, vol. 22, pp 27-59.
- PRAETZ P. [1972], « The Distribution of Share Price Changes », *Journal of Business*, vol. 45 (janvier), pp 49-55.
- PRESS S. J. [1967], « A Compound Events Model for Security Prices », *Journal of Business*, vol. 36, pp 317-335.
- PRESS S. J. [1972], « Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions », *J. of the American Statistical Association*, vol. 67, n° 340, pp 842-846.

- RICHARDS G. [2000], « The fractal structure of exchange rates : measurement and forecasting », *J. of International Financial Markets, Institutions & Money*, vol. 10, pp 163-180.
- SUMMERS L. [1986], « Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values ? », *Journal of Finance*, vol. 41, n°3, pp 591-601.
- TAQQU M. [2000], « Bachelier et son époque : une conversation avec Bernard Bru », 1st World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris, Juin.
- TAYLOR S. [1986], *Modelling Financial Time Series*, J. Wiley & Sons.
- TEICHMOELLER J. [1971], « A Note on the Distribution of Stock Price Changes », *J. of the American Statistical Association*, vol. 66, n° 334, pp 282-284.
- TUCKER A., POND L. [1988], « The Probability Distribution of Foreign Exchange Price Changes : Test of Candidate Processes », *The Review of Economics and Statistics*, pp 638-647.
- UPTON D., SHANNON D. [1979], « The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Processes, and Asymptotic Lognormality : An Empirical Investigation », *Journal of Finance*, vol. 34, n°4, pp 1031-1039.
- WALTER C. [1989], « Les risques de marché et les distributions de Lévy », *Analyse Financière*, n°78, 3^{ème} trimestre, pp 40-50.
- WALTER C. [1990], « Mise en évidence de distributions Lévy-stables et d'une structure fractale sur le marché de Paris », *Actes du 1er colloque international AFIR*, tome 3, Paris, pp 241-259.
- WALTER C. [1991], « L'utilisation des lois Lévy-stables en finance : une solution possible au problème posé par les discontinuités des trajectoires boursières », *Bull. de l'IAF*, n° 349, pp 3-32, et 350, pp 4-23.
- WALTER C. [1994], « Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals », Thèse de doctorat, IEP Paris.
- WALTER C. [1996], « Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers », *Annales HSS*, juillet-août, n°4, pp 873-905.
- WALTER C. [1999], « Lévy-stability-under-addition and fractal structure of markets : implications for the investment management industry and emphasized examination of MATIF notional contract », *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 29, n°10-12, pp 37-56.
- WASSERFALLEN W., ZIMMERMANN H. [1985], « The behavior of intra-daily exchange rates », *Journal of Banking and Finance*, vol. 9, pp 55-72.
- ZAJDENWEBER D. [1976], *Hasard et prévision*, Economica.