COMMENT DÉFINIR LA QUALITÉ D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES DESTINÉ À ÉVALUER LE *BEST-ESTIMATE ÉPARGNE* EN € ?

Version 1.3 du 15/04/2018

KAMAL ARMEL[1] FRÉDÉRIC PLANCHET[2]

Appliquer une démarche *Mark-to-Market* pour évaluer les engagements de l'assureur en juste valeur (*best-estimate*), pour les contrats d'épargne en €, implique de disposer des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est réalisé dans un cadre *Mark-to-Model*.

Le calibrage et la validation du générateur de scénarios économiques (GSE), utilisé pour l'estimation du *best-estimate*, par une confrontation des simulations aux données observées, dans le cadre d'une démarche statistique, ne peuvent être envisagés. On se contente alors de calibrer et d'apprécier le GSE en référence aux instruments financiers (*caps*, *floors*, *swaps*…) dérivés des facteurs de risque modélisés sans justifier la relation de correspondance ou de bijection entre ces instruments financiers et les options du passif (*cf.* par exemple Laurent et al. [2014], Planchet et al [2009], Armel et Planchet [2018]).

[1] Kamal Armel est actuaire qualifié/certifié et fondateur d'ARMEL Consulting. Contact : kamal.armel@armelconsulting.fr
[2] Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé à PRIM'ACT. Contact : frederic@planchet.net

Contenu

1 Préambule

1.1 Contrat d'épargne en € Français

Le marché de l'épargne en € s'est développé en France dans un contexte institutionnel et fiscal favorable. Les contrats d'épargne bénéficient d'une fiscalité réduite sur les revenus et sur les successions qui incite les ménages à une détention de ces produits sur le long terme. En l'absence de fonds de pension en France, l'assurance vie a fourni un cadre comptable et fiscal aux ménages, aux employeurs et aux institutions de prévoyance pour organiser l'épargne retraite en complément du système obligatoire par répartition.

Les contrats d'épargne en € français proposent une capitalisation de l'investissement et la possibilité de racheter le contrat à tout moment (C. ass., Article R-132-5-3). Les primes perçues par les assureurs sont investies sur les marchés financiers, en achats immobiliers et d'infrastructures.

Pour l'assuré, la perte en capital ne peut survenir qu'en cas de faillite de l'assureur. Dans ce cas, le fonds de garantie des assurances de personnes (FGAP) peut être saisi. Le montant garanti est à hauteur de 70 K€.

Les intérêts techniques constituent une revalorisation contractuelle minimale des encours (C. ass., Article A-132-1). Cette revalorisation est complétée par une rémunération supplémentaire : la participation au bénéfice (PB). Celle-ci représente le reliquat du compte de résultat technico-financier après prise en compte des intérêts techniques.

La PB est réglementée par le code des assurances (C. ass., Articles A331-3 et suivants) et ne donne aucun droit individuel à l'assuré. La PB est distribuée soit immédiatement soit affectée à la provision pour participation aux bénéfices, qui doit être distribuée sous huit ans à compter de son affectation au fonds.

Les assurés disposent donc de deux provisions acquises :

- Les provisions mathématiques qui sont déterminées individuellement et correspondent à l'épargne acquise.
- La provision pour participation aux bénéfices, globale, dont la redistribution relève de la politique de l'assureur.

La PB permet ainsi de lisser la rémunération entre les différents contrats et dans le temps, et de piloter l'activité en fonction des contraintes commerciales et des conditions du marché financier. Outre la PB, d'autres provisions sont constituées par l'assureur impliquant un lissage de la performance comptable de l'actif sur le temps. On peut lister notamment la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité.

L'assureur dispose également d'une richesse latente (différence entre l'actif en valeur de marché et en valeur comptable) lui procurant une marge de manœuvre dans la gestion de la revalorisation de l'épargne.

Les options incluses dans les contrats d'épargne en € classiques peuvent être synthétisées en trois catégories :

- Options financières : l'assureur s'engage sur une rémunération minimale de l'épargne en garantissant un taux minimal de revalorisation ou une PB garantie.
- Options comportementales : l'assureur propose des options de rachat, d'arbitrage, de versement libre ou programmés, bonus de fidélité… L'activation de ces options est à l'appréciation de l'assuré.
- Options biométriques : sont les options dépendant du risque de mortalité (ou longévité) comme la proposition par l'assureur d'une garantie de table si l'assuré transforme son épargne en rente.

Du point de vue de l'assuré (cf. Brys et de Varenne [1994]) :

- L'option de taux technique ou de PB garanti peut être assimilée à une option vanille européenne ;
- L'option de rachat peut être assimilée à une option de vente américaine ;
- L'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés, peut être assimilée à une *swaption*.

1.2 Valorisation des passifs des contrats d'épargne en €

Instituée par la Commission Européenne, la directive Solvabilité 2 impose entre autres le calcul en « juste valeur » des passifs d'assurance. Cette valorisation, implique l'évaluation des options et garanties proposées par l'assureur dans ses contrats.

L'article 77 de la directive solvabilité 2 introduit le concept de *best-estimate* pour désigner la valorisation économique des engagements de l'assureur envers l'assuré et le définit comme la « moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendues des flux de trésorerie futur), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinent ».

La valorisation du passif des contrats en € implique la prise en compte de deux sources de risques :

- Des risques couvrables liés aux marchés financiers.
- Des risques non-couvrables liés aux risques techniques : risques biométriques, comportement client…

Les actions de management de l'assureur interviennent notamment dans le pilotage du rendement (comptable) servi aux assurés. Elles sont des fonctions des facteurs de risque.

Les projections de flux de trésorerie doivent également intégrer, dans les contraintes des limites de contrats : les primes futures, la réassurance, les prestations futures (décès, cessions, rentes, ...), les charges futures (frais administratifs, frais de gestion, ...) et l'impôt à terme.

Le calcul du *best-estimate* doit prendre en compte :

- Les options financières et garanties des contrats ;
- La structure biométrique ;
- Le comportement des assurés ;

- L'impact des actions de management sur les options du contrat ;
- Une modélisation appropriée des risques sous-jacents et de leur structure de dépendance.

Aussi, les hypothèses de construction des flux doivent être définies avec une granularité suffisamment fine et l'agrégation des contrats doit se faire en groupes présentant des risques homogènes.

L'évaluation des options et des garanties financières, la diffusion des flux futurs de trésorerie des contrats d'épargne en € et la construction de la courbe des taux sans risque nécessitent la mise en place d'un générateur de scénario économique stochastique (GSE).

1.3 Générateur de scénarios économiques pour calculer le *best-estimate*

Les GSE peuvent produire, sur plusieurs horizons, des scénarios matérialisant l'impact des différents facteurs de risques économiques et financiers, tels que les taux d'intérêt, le taux d'inflation, le rendement des actions, le rendement de l'immobilier, sur les prix des actifs.

Ces scénarios économiques doivent être cohérents avec les prix observés (*Market Consistent*). Une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser des grandeurs d'intérêt en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés. L'objectif est de fabriquer une juste valeur qui soit cohérente avec les prix et les risques observables et mesurables sur le marché.

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur implique de disposer *a priori* des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est donc mené dans un cadre *Mark-to-Model*. Dans ce cadre, le GSE est calibré non pas sur les options et garanties du contrat d'assurance mais sur des produits financiers (*caps*, *floors*, *swaptions*…). Sa qualité est appréciée par sa capacité à reproduire les prix de ces produits financiers.

Les orientations élaborées par l'EIOPA (cf. ACPR [2015] - orientations 55 à 60) présentent un certain nombre de contraintes qu'un GSE doit satisfaire. Il y est notamment précisé que :

- Les instruments financiers retenus pour calibrer les GSE doivent être pertinents eu égard aux caractéristiques des options et garanties financières proposées par l'assureur ;
- Les données doivent provenir de marchés financiers qui soient profonds, liquides et transparents. Les résultats fournis par le GSE doivent être cohérents avec les données du marché financier (règlement délégué article 76).

1.4 Problématique

La capacité d'un modèle à bien représenter l'instrument financier qu'il modélise constitue un critère de respect de la cohérence avec les valeurs de marché. Les modèles devraient donc être choisis et calibrés pour représenter au mieux les prix des instruments financiers retenus dans le processus de modélisation. Ils ne sont par ailleurs pas destinés à représenter correctement les prix d'autres instruments de structure différente. En d'autres termes, le GSE, est propre à l'objectif (valoriser un instrument financier) pour lequel il est construit (cf. sur ce point Félix et Planchet [2015]).

Dans cette logique, le processus de génération de scénarios économique devrait être validé en appréciant sa capacité à reproduire le prix des options des contrats d'épargne en €. Or ces valeurs ne sont pas observables. La validation du GSE par une comparaison des résultats du modèle aux prix observés ne peut donc être envisagée. On se contente alors d'apprécier le GSE en le confrontant aux instruments financiers qui ont servi à sa fabrication sans justifier la relation de correspondance ou de bijection entre ces instruments financiers et les options du passif.

La littérature financière est riche en exemples confrontant le modèle à sa destination ou à son usage. En assurance-vie on peut citer, à titre d'exemple, Armel et al. [2011] présentant l'impact du choix de la structure de dépendance sur le SCR marché et Laïdi et Planchet [2015] qui proposent une méthode de calibrage alternative du modèle LMN pour des obligations crédit.

Le processus de génération de scénarios économiques pour la valorisation du *best-estimate* en *mark-to-model* peut être synthétisé en trois étapes (cf. Armel et Planchet [2018]) :

1. L'environnement de modélisation : il s'agit de choisir les variables économiques à modéliser. Classiquement, la mesure retenue est une probabilité risque neutre.
2. Les modèles : il s'agit de construire les modèles mathématiques des variables d'intérêt. Cela consiste à choisir les modèles qui vont représenter la dynamique individuelle de ces variables et le choix du modèle qui représente le co-mouvement.
3. Les paramètres et calibrages : il s'agit de choisir les produits financiers dérivés pour les calibrages, les données, les méthodes d'estimation statistique des paramètres des modèles et des méthodes de validation.

Ce sont les étapes 2 et 3 qui seront discutées dans cet article qui s'organise comme suit :

- La section 2 propose une formalisation du cadre théorique du calcul du *best-estimate* et propose une reformulation quantitative de la problématique ;
- La section 3 propose d'étudier la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et de leur calibrage. L'objectif est d'illustrer, sur la base d'un modèle ALM et de données réelles, la variabilité du *best-estimate* en fonction du choix du modèle de taux sans risque et/ou de son calibrage, pour des modèles choisis dans une famille respectant l'ensemble des contraintes de valorisation imposées par le superviseur ;
- La section 4 propose une analyse de la structure optionnelle du *best-estimate* et cherche à construire un lien entre cette structure et le modèle de génération de scénarios économiques.

Les questions relatives aux calculs de la marge de risque ne seront pas abordées dans ce papier.

2 Reformulation quantitative de la problématique

2.1 Introduction

Deux sources d'aléas, représentées par deux espaces probabilisés filtrés, sont distinguées :

- $\left(\Omega^f, \left(F_t^f\right)_{t\geq 0}, Q\right)$: pour les risques financiers qui sont couvrables[3] ;
- $(\Omega^a, (F_t^a)_{t\geq 0}, P)$ pour les risques d'assurance qui ne sont pas couvrables. On peut éviter le recours à l'utilisation de cette probabilité en introduisant l'espérance conditionnelle des flux sachant les facteurs de risque financiers.

Le *best-estimate* des contrats en € calculé à un instant t s'écrit (Laurent et al. [2016]) :

$$BE(t) = E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=t}^{+\infty} F_i.\exp(-i.r_i)\right)$$

où r_i est le taux sans risque à terme à l'échéance i.

Le flux F_i est la somme des paiements versés aux assurés et des frais diminués des primes et des chargements :

$$F_i = Paiements_i^{bruts} - Primes_i + Frais_i - Chargements_i$$

En pratique, l'évaluation du *best-estimate* se fait dans un cadre de calcul Monte-Carlo et le calcul des flux s'arrête à un horizon de projection T. Le *best-estimate* à l'instant 0 s'écrit donc comme une moyenne de MxN trajectoires simulées ; M représentant les trajectoires des variables financières sous la probabilité Q et N le nombre de trajectoires des risques non-couvrables sous la probabilité P :

$$BE(0) = E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} F_i.\exp(-i.r_i)\right) = \frac{1}{\mathrm{MN}}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} F_{i,m,n}.\exp(-i.r_{i,m})\right)$$

Pour les risques non couvrables, le calcul de l'espérance est en général simple. On peut éviter le recours aux simulations dans les simulations en introduisant des flux moyens comme le montre la section 2.2.3.

En l'absence de primes futures le *best-estimate* s'écrit :

$$BE(0) = E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Paiements_i^{bruts}.\exp(-i.r_i)\right) - E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Chargements_i.\exp(-i.r_i)\right) + E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Frais_i.\exp(-i.r_i)\right)$$

Sans perte de généralité, on suppose dans la suite que les chargements prélevés par l'assureur sont égaux aux frais engagés pour la gestion des contrats. Le cas général où les frais sont différents des chargements peut se déduire directement de ce qui suit en décomposant le taux de chargement en taux de frais sur encours et en marge sur chargements (positive ou négative). On peut écrire alors :

[3] Ou réplicables, les 2 termes sont employés ici sans distinction.

$$E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Chargements_i . \exp(-i.r_i)\right) = E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Frais_i . \exp(-i.r_i)\right)$$

et :

$$BE(0) = E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Paiements_i^{bruts} . \exp(-i.r_i)\right)$$

En distinguant les flux nets et les frais, on écrit donc :

$$BE(0) = \underbrace{E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Paiements_i^{nets} . \exp(-i.r_i)\right)}_{Terme\ 1\ :\ paiements\ nets} + \underbrace{E^{P\otimes Q}\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{T}} Frais_i . \exp(-i.r_i)\right)}_{Terme\ 2\ :\ prix\ du\ contrat/frais}$$

Le *best-estimate* peut s'écrire donc comme la somme de deux termes :

- Terme 1 : représentant les flux futurs payés aux assurés comprenant les options et garanties proposés par l'assureur ;
- Terme 2 : représentant les chargements encaissés par l'assureur et sont égaux aux frais engagés par celui-ci. Ce terme peut s'interpréter comme le prix du contrat et intègre implicitement le prix des options et garanties.

Le *best-estimate* s'écrit donc : $BE(0) = BE^{net}(0) + BE^{frais}(0)$. Dans la suite nous nous intéressons d'abord au *best-estimate* calculé sur la base des taux de revalorisation nets de chargements. La meilleure estimation des frais est ensuite explicitée.

Il est noté que le calcul du *best-estimate* dans la norme Solvabilité 2 est réalisé sur des portefeuilles en *runoff* (les contrats futurs sont hors périmètre).

2.2 Cadre théorique

2.2.1 La valeur de rachat

L'assureur rémunère chaque instant u l'épargne en € de l'assuré d'un taux de revalorisation de l'épargne net de chargements instantané noté c_u. Ce taux de rémunération est le résultat d'une décision du management prenant en compte notamment le taux de rendement de l'actif, la richesse disponible de l'assureur et le taux minimum garanti.

La valeur de rachat d'un contrat d'épargne, noté VR(t) s'écrit en fonction de la provision mathématique à l'instant 0 et des taux de revalorisation net de chargements comme suit (cf. Bonnin et al. [2014]) :

$$VR(t) = PM(0) \times \exp\left\{\int_0^t c_u . du\right\}$$

La valeur actuelle de la valeur de rachat à l'instant t s'écrit :

$$VR(t).\delta(t) = PM(0) \times \exp\left\{\int_0^t c_u . du - \int_0^t r_u . du\right\} = PM(0).\psi(t)$$

où $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r_u . du\right)$ et r_u est le taux d'intérêt court instantané.

En cas de sortie du contrat, donc en cas de décès ou de rachat, la valeur versée par l'assureur est égale à $VR(\tau)$ ou τ designe l'instant (aléatoire) de sortie du contrat.

La valeur actuelle du flux sortant est donc :

$$\Lambda = VR(\tau). \delta(\tau)$$

La variable aléatoire τ est supposée être le temps d'arrêt de la filtration naturelle associée au processus des valeurs de rachats $(VR(t), t \geq 0)$.

Le *best-estimate* à l'instant 0 pour un contrat d'épargne en € s'écrit :

$$BE^{net}(0) = E^{P \otimes Q}(\Lambda)$$

Le lecteur peut se référer à Prudent [1996] qui présente un cadre similaire pour la valorisation des clauses de rachats anticipés.

2.2.2 Formule continue du *best-estimate* net de chargements

On peut distinguer deux sources d'aléas sous la probabilité P :

- Une composante P^a représentant les risques purement techniques liés aux risques d'assurance - rachat structurel et mortalité - que l'on suppose mutualisables et indépendants des marchés financiers. Soit Θ_1 l'ensemble des paramètres définissant ces risques. Ce paramètre comprend donc les tables de mortalité et les courbes de rachat.
- Une composante P^h représentant les risques liés aux comportements dynamiques des assurés, dépendant des taux de revalorisation. Ces comportements sont supposés indépendants des risques techniques (donc de P^a). La réaction des assurés aux taux de revalorisation est caractérisée par une fonction de rachat conjoncturel dont les paramètres sont représentés par le vecteur Θ_2.

La réaction de l'assureur aux taux de rendements de l'actif et aux anticipations des comportements des assurés prend la forme d'actions de gestion, sur la base d'un taux comptable, dont la résultante est le taux servi. Le vecteur de paramètres de cette fonction de réaction est représenté par Θ_3.

Soit par ailleurs Θ_4 le vecteur de paramètres relatif aux risques financiers. Cela représente les paramètres du GSE (tendance, volatilités, vitesse de retour à la moyenne…).

On note $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)$ l'ensemble des paramètres du calcul.

Soit h la fonction de hasard représentant le taux de sortie instantané. Cette fonction est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$ vérifiant pour tout $(t, u_t) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$:

$$S(t, u_t) = \exp\left(-\int_0^t h(t, u_t)\right)$$

$$dln\big(S(t, u_t)\big) = -h(t, u_t)dt$$

où :

- $S(t, u_t)$ est la fonction de survie définie sur $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$;
- t représente le temps ;
- u_t est une variable caractérisant les rachats conjoncturels. Elle peut représenter les n derniers taux servis à l'instant t entrant dans le calcul de la fonction de satisfaction des assurés. Le facteur n peut s'interpréter comme le temps de réaction aux taux servis.

La fonction de hasard et la fonction de survie ont comme paramètres Θ_1 et Θ_2.

Soit : $BE^a(0) = E^{P^a}(\Lambda)$, alors :

$$BE^a(0) = E^{P^a}(\Lambda) = \int_0^{+\infty} \Lambda . dP^a = \int_0^{+\infty} -\Lambda . dS(t, u_t) = \int_0^{+\infty} \Lambda . S(t, u_t) h(t, u_t) dt$$

Donc :

$$BE^a(0) = PM(0). \int_0^{+\infty} \psi(t). S(t, u_t) h(t, u_t) dt$$

Il s'en suit que :

$$BE^{net}(0) = E^{P \otimes Q}(\Lambda) = E^{P^h \otimes Q}\left(BE^a(0)\right)$$

$$BE^{net}(0) = PM(0). E^{P^h \otimes Q}\left(\int_0^{+\infty} \psi(t). S(t, u_t) h(t, u_t) dt\right)$$

Ce qui s'écrit en explicitant les vecteurs de paramètres du modèle :

$$BE^{net}(0|\Theta) = PM(0). E^{P^h \otimes Q}\left(\int_0^{+\infty} \psi(t|\Theta_3, \Theta_4). S(t, u_t|\Theta_1, \Theta_2) h(t, u_t|\Theta_1, \Theta_2) dt\right)$$

En notant :

$$\alpha(\Theta) = E^{P^h \otimes Q}\left(\int_0^{+\infty} \psi(t|\Theta_3, \Theta_4). S(t, u_t|\Theta_1, \Theta_2) h(t, u_t|\Theta_1, \Theta_2) dt\right)$$

S'établit alors la relation de proportionnalité suivante :

$$BE^{net}(0|\Theta) = PM(0). \alpha(\Theta)$$

2.2.3 Formule discrétisée du best-estimate net de chargements

Sur un horizon de projection fini noté T le *best-estimate* discrétisé s'écrit :

$$BE^{net}(0) = PM(0). E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{l_{t-1}}{l_0} . R(t-1). (q_{t-1} + v_{t-1} - q_{t-1}. v_{t-1}). \psi(t) + \frac{l_T}{l_0} . R(T). \psi(T)\right)$$

avec :

- q_t taux de mortalité entre t et $t+1$.

- v_t taux de rachat entre t et t+1. Ce taux comprend le rachat conjoncturel et le rachat structurel.
- $R(t) = \prod_{j=1}^{t-1}(1 - v_j)$ et $R(0) = 1$ est la part non-rachetée de l'épargne entre 0 et t.
- $\psi(t) = \exp\{\sum_{i=1}^{t} c_i - \sum_{i=1}^{t} r_i\}$ avec :
  - c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i. Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
  - r_i est le taux sans risque pour la période entre $i - 1$ et i.

2.2.4 La meilleure estimation des frais

Soit ι le taux de frais/chargements annuel constant appliqué à l'épargne acquise. Comme précisé ci-dessus, ce taux correspond également au taux de frais. Le montant de frais engagés par l'assureur entre t' et t, s'écrit :

$$\mathrm{I}(\mathrm{t},\mathrm{t}') = \mathrm{VR}(\mathrm{t}').\exp\left(\int_{t'}^{t} c_u.du + (\mathrm{t}-\mathrm{t}').\iota\right) - \mathrm{VR}(\mathrm{t}').\exp\left(\int_{t'}^{t} c_u.du\right)$$

donc :

$$\mathrm{I}(\mathrm{t},\mathrm{t}') = \mathrm{VR}(\mathrm{t}).\big(\exp\big((\mathrm{t}-\mathrm{t}').\iota\big) - 1\big) \simeq (\mathrm{t}-\mathrm{t}').\iota.\mathrm{VR}(\mathrm{t})$$

Pour $t' = t - 1$ on peut écrire :

$$\mathrm{I}(\mathrm{t}) = \mathrm{I}(\mathrm{t},\mathrm{t}') = \mathrm{VR}(\mathrm{t}).(\exp(\iota) - 1) \simeq \mathrm{VR}(\mathrm{t}).\iota \simeq \iota.\mathrm{PM}(0).\exp\left(\int_{0}^{t} c_u.du\right)$$

En suivant le même raisonnement que la section précédente et en gardant les mêmes notations, la meilleure estimation des chargements/frais discrétisée à pas annuel s'écrit :

$$BE^{frais}(0) = (\exp(\iota) - 1).PM(0).E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{l_t}{l_0}.R(t).\psi(t)\right)$$

Donc :

$$BE^{frais}(0|\Theta) = (\exp(\iota) - 1).PM(0).\beta(\Theta) \simeq \iota.PM(0).\beta(\Theta)$$

2.2.5 La formule discrétisée du *best-estimate*

Notons :

- $f_t = \frac{l_{t-1}}{l_0}.R(t-1).(q_{t-1} + v_{t-1} - q_{t-1}.v_{t-1})$: la probabilité de sortie entre $t - 1$ et t ;
- $g_t = \frac{l_t}{l_0}.R(t)$: la probabilité de présence à l'instant t.

Les grandeurs f_t et g_t sont stochastiques car elles intègrent les rachats conjoncturels.

Sur un horizon de projection fini noté T le *best-estimate* discrétisé s'écrit :

$$BE(0) = BE^{net}(0) + BE^{frais}(0)$$

donc :

$$BE(0) = PM(0).E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t + \iota g_t\right).\psi(t) + g_T.\psi(T)\right)$$

2.3 Reformulation quantitative de la problématique

Pour simplifier les notations, reprenons la relation de proportionnalité démontrée dans les sections précédentes :

$$BE(0|\Theta) = PM(0).\left(\alpha(\Theta) + \iota.\beta(\Theta)\right)$$

Dans l'hypothèse où les paramètres suivants sont prédéfinis :

- Le vecteur Θ_1 : tables de mortalité et courbes de rachat structurel. Ces risques sont supposés être parfaitement mutualisés et ne dépendent pas des risques financiers.
- Le vecteur Θ_2 : l'ensemble des paramètres de la fonction de réaction des assurés aux taux servis (par exemple la fonction proposée dans les ONC, cf. ACPR [2013]). La fonction de réaction prend comme arguments des rendements financiers et la résultante est donc aléatoire.
- Le vecteur Θ_3 : l'ensemble des paramètres de la fonction de réaction de l'assureur aux comportements des assurés et aux taux de rendements de l'actif (actions de gestion). La fonction de réaction prend comme arguments des rendements financiers. La résultante est donc aléatoire.

Dans un cadre où les fonctions de réaction sont déterministes, la structure stochastique du *best-estimate* dépend uniquement du vecteur des paramètres Θ_4 du GSE.

Dans ce cadre, on écrit par simplification :

$$BE(0|\Theta) = PM(0).\left(\alpha(\Theta_4) + \iota.\beta(\Theta_4)\right)$$

On pose :

$$\lambda(\Theta_4) = \left(\alpha(\Theta_4) + \iota.\beta(\Theta_4)\right) = \frac{BE(0|\Theta)}{PM(0)}$$

2.3.1 Méthode de calibrage standard

En général, le GSE devraient être choisis et calibrés pour représenter au mieux les prix des instruments financiers retenus dans le processus de modélisation. Dans ce cadre, calibrer un GSE pour calculer le *best-estimate* revient à :

- Choisir une mesure de distance[4] noté d ;
- Construire le vecteur des observations λ^{obs} ;

[4] Pour rappel la distance de Minkovski d'ordre p entre deux vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ réels s'écrit : $d(X,Y) = \sqrt[p]{\sum_1^n |x_i - y_i|^p}$ et pour $p = +\infty, d(X,Y) = \sup(|x_i - y_i|)$. On retrouve un cadre similaire pour les fonctions mesurables dans les espaces de Lebesgue.

- Construire le vecteur des prix théoriques λ^{th} ;
- Calibrer le modèle en choisissant Θ_4 tel que : $\widehat{\Theta}_4 = \underset{\Theta_4}{\operatorname{argmin}}\left(d(\lambda^{obs}, \lambda^{th}(\Theta_4))\right)$.

On peut trouver des applications de ce processus assez classique en modélisation financière dans Armel et Planchet [2018] et dans des publications de référence comme Brigo et Mercurio [2001] ou Hull [2007].

2.3.2 Méthode de calibrage conventionnelle

En épargne, l'application du processus standard se heurte à une limite majeure : le *best-estimate* est un prix qui n'est pas observé. Il n'existe pas de marché d'échanges des passifs d'assurance des contrats d'épargne en *runoff*.

Face à la nécessité, réglementaire notamment, de calculer le *best-estimate* et l'incapacité de calibrer les GSE par le processus standard, une convention de valorisation s'est établie.

Cette convention consiste à calibrer le GSE sur les prix de produits financiers échangés sur le marché jouant le rôle de substitut au *best-estimate*. Les paramètres du GSE sont déduits ensuite par l'optimisation suivante :

$$\widehat{\Theta}_4 = \underset{\Theta_4}{\operatorname{argmin}}\left(d(prod\_fi^{obs}, prod\_fi^{th}(\Theta_4))\right)$$

L'hypothèse sous-jacente à cette pratique est l'équivalence entre les options financières et le *best-estimate*. Cette hypothèse ne peut cependant être vérifiée car le *best-estimate* n'est pas observable.

Par ailleurs, Armel et Planchet [2018] présentent le cadre conventionnel du calibrage des modèles de taux et explicite ses limites. Ils présentent également une démarche de construction d'un générateur de scénarios économiques risque neutre.

La section suivante se focalise sur deux choix conventionnels :

- Le choix du modèle de taux ;
- Le choix des instruments financiers pour le calibrage du GSE.

L'objectif est d'étudier l'impact des choix de modèles de taux et des données de calibrage sur le *best-estimate* calculé sur un portefeuille d'épargne en € réel.

3 Impact du choix du modèle de taux et des données de calibrage sur le best-estimate

3.1 Modèles de générations de scénarios économiques utilisés

Armel et Planchet [2018] présentent une démarche de génération de scénarios économiques permettant de produire des scénarios cohérents avec un environnement économique caractérisé par des taux négatifs. Ils appliquent cette démarche pour générer des scénarios économiques destinés à la valorisation des passifs d'épargne en euro dans le référentiel solvabilité 2. Par ailleurs, ils analysent la convention de calibrage des modèles de taux, explicitent ses limites et proposent une étude de sensibilité des paramètres du GSE et des simulations au facteur de décalage.

Dans la suite, l'étude de la sensibilité du *best-estimate* aux choix des modèles de taux et de leurs calibrages s'appuie sur le cadre théorique et les applications présentées dans Armel et Planchet [2018].

L'actif est supposé se composer d'actions, d'investissement en immobilier et d'obligations zéros-coupons sans risque. Les prix des actions et des investissements en immobiliers sont supposés suivre un mouvement brownien géométrique sous la probabilité risque neutre.

Trois modèles de taux sont testés :

- Un modèle mono-factoriel : Hull & White calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle à deux facteurs : modèle gaussien G2++ calibré sur des *caps* et sur des *swaptions* ;
- Un modèle de marché : *Libor Market Model* (LMM) calibré sur des *swaptions*.

Au total, 3 modèles combinés à 2 types de produits financiers (*caps* et *swaptions*) sont proposés dans la suite. Ces modèles respectent les contraintes du régulateur et sont utilisés par le marché.

Par ailleurs, les choix suivants sont retenus :

- Les options retenues pour le calibrage des différents modèles (*call*, *caps* et *swaption*) sont *ATM* ;
- Les volatilités de marché des *caps* et *swaptions* utilisées dans le processus de calibrage sont des volatilités log-normales *ATM* non décalées observées au 02 janvier 2018 et fournies par Bloomberg (le facteur de décalage est égal à 0) ;
- La courbe de taux sans risque retenue pour les processus de calibrage et de simulation est la courbe de taux fournie par l'EIOPA au 31 décembre 2017 ;
- L'utilisation de la courbe EIOPA implique la nécessité d'introduire un facteur de décalage non nul pour calibrer et projeter les modèles de taux. L'introduction de ce facteur non nul (alors que l'extraction des volatilités est réalisée avec un facteur de décalage nul) induit un certain biais dans le modèle :
    - Pour les modèles Hull et White et G2++ : différents calibrages ont été réalisés correspondant à différents niveaux du facteur de décalage. Ces modèles sont normaux et ne nécessitent pas la définition d'un facteur de décalage pour la diffusion ;
    - Le modèle LMM a été calibré sur les volatilités de Black sur les maturités ne présentant pas de taux négatifs : aucun facteur de décalage n'a été introduit dans le processus de calibrage ;
    - La diffusion du modèle LMM nécessite la définition d'un facteur de décalage. Plusieurs facteurs ont été testés ;

- Trois niveaux du facteur de décalage sont testés : 0,4 %, 1 % et 2 %. La valeur de 0,4 % correspond à la valeur absolue arrondie du taux minimal de la courbe de taux sans risque EIOPA au 31 décembre 2017.

- Pour la projection d'investissements en actions et en immobilier, nous avons retenu des modèles de Black-Scholes à volatilités constantes :
  - La volatilité implicite à un investissement en actions est calibrée sur la volatilité implicite du *call ATM* sur le CAC 40 de maturité 3 ans ;
  - La volatilité d'un investissement en immobilier correspond à la volatilité historique des rendements de l'indice des prix de vente des logements anciens publié par l'INSEE[5].

Dans la suite, nous présentons les paramètres des modèles de taux utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* au choix de modèles de taux et de leur paramétrage. Les matrices de corrélations, les résultats des calibrages des modèles actions et investissements en immobilier ainsi qu'une analyse complète des résultats sont proposés dans Armel et Planchet [2018].

Le Tableau 1 et le Tableau 2 présente respectivement les résultats des calibrages des modèle Hull & White et G2++ sur les données de *caps* et de *swaptions* observées au 02/01/2018.

Tableau 1 : résultats du calibrage du modèle Hull & White

Indice	Décalage du modèle Black	*a*	σ	Erreur totale au carré relative
HW 1 (Caps)	0,40%	0,97%	0,53%	2,71%
HW 2 (Caps)	1,00%	1,00%	0,80%	2,98%
HW 3 (Caps)	2,00%	1,04%	1,25%	2,92%
HW 4 (Swaption)	0,40%	0,07%	1,27%	7,32%
HW 5 (Swaption)	1,00%	0,10%	1,62%	8,48%
HW 6 (Swaption)	2,00%	0,01%	2,20%	10,43%

Tableau 2 : résultats du calibrage du modèle G2++

Indice	Décalage du modèle Black	*a*	b	σ	η	ρ	Erreur totale au carré relative
G2 1 (Caps)	0,40%	1,48%	0,50%	26,02%	25,64%	-99,99%	0,009%
G2 2 (Caps)	1,00%	5,14%	0,03%	7,50%	7,07%	-100,00%	0,005%
G2 3 (Caps)	2,00%	8,39%	4,36%	17,46%	16,76%	-99,99%	0,012%
G2 4 (Swaption)	0,40%	11,47%	9,04%	24,20%	23,22%	-99,99%	0,17%
G2 5 (Swaption)	1,00%	11,49%	8,90%	26,50%	25,67%	-99,80%	0,21%
G2 6 (Swaption)	2,00%	11,71%	8,38%	25,59%	24,97%	-99,97%	0,29%

Le Tableau 3 présente les résultats du calibrage du modèle LMM sur les données de *swaptions*. Le calibrage est réalisé sans introduire de facteur de décalage en ne retenant que les volatilités de marché correspondant aux taux positifs.

[5] https://www.insee.fr/fr/statistiques/series/102770558

Tableau 3 : résultats du calibrage du modèle LMM

Facteur de décalage	*a*	*b*	*c*	*d*	*Beta*	Erreur totale au carré relative
0,00%	18,85%	0,19%	7,45%	0,01%	0,10%	1,19%

Le modèle LMM calibré sur les swaptions diverge, et ce, même avec le plus petit facteur de décalage admissible pour contourner la contrainte des taux négatifs. Ce calibrage, bien que *market-consistent*, ne peut être retenu dans l'état pour la valorisation des passifs des contrats d'épargne en euro.

Nous nous sommes appuyés sur ce calibrage *market-consistent* pour proposer un paramétrage convergent du modèle LMM. Ce paramétrage n'est de fait pas *market-consistent*.

Comme présenté dans le Tableau 4, nous avons augmenté la vitesse de convergence de la volatilité de Rebonato et le niveau de la limite asymptotique.

Tableau 4 : paramétrage convergent du modèle LMM

a	*b*	*c*	*d*	*Beta*
18,85%	0,19%	**20,00%**	**1,00%**	0,10%

3.2 Impact du choix de modèle de taux sur le *best-estimate*

3.2.1 Modèle de calcul du *best-estimate*

Afin d'évaluer le *best-estimate* nous avons utilisé le package R SimBEL[6]. Cette évaluation intègre les tables de scénarios économiques que nous avons générés et s'appuie sur des données réelles modifiées d'un assureur. L'outil SimBEL permet de calculer les provisions *best-estimate* et les *SCR* de la formule standard.

3.2.2 Paramètres et résultats

Le Tableau 5 présente quelques données de paramétrage du modèle de valorisation du *best-estimate*. L'actif est essentiellement composé d'obligations sans risque. La plus-value latente est de 6 M€. La provision mathématique est par ailleurs de 70 M€ et l'horizon de projection est 20 ans.

Tableau 5 : description de l'actif

Actifs	*Valeur de marché*	*Valeur comptable*	*Allocation stratégique*
Actions	20,00	18,54	20%
Immobilier	10,00	9,88	10%
Obligations sans risque	63,00	58,85	63%
Cash	7,00	7,00	7%
Total	*100,00*	*94,26*	*100%*

[6] Voir http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/C5542E1CF549F21FC12581680046FD2E

Les Tableau 6 et Tableau 7 présentent la sensibilité du *best-estimate* aux choix et aux calibrages des modèles de taux sans risque *market-consistent* Hull et White et G2++.

Nous constatons que :

- Les *best-estimates*, évalués en utilisant le modèle de taux Hull & White, sont insensibles aux facteurs de décalage et aux choix des produits dérivés pour le calibrage ;
- Les *best-estimates*, évalués en utilisant le modèle de taux G2++, sont plus sensibles aux facteurs de décalage (impact maximal de 4 %) et aux choix des produits dérivés pour le calibrage (impact maximal de 4,4 %) ;
- L'impact du choix de modèles de taux Hull & White et G2++ est au maximum 4,3 % de la moyenne des *best-estimate* (Tableau 9).

Tableau 6 : best-estimate par le modèle Hull & White market-consistent

Montants en M€	*HW 1*	*HW 2*	*HW 3*	*HW 4*	*HW 5*	*HW 6*
Best-estimate net de frais	82,92	82,92	82,64	82,89	82,63	82,45
Frais	7,95	7,94	7,85	7,86	7,76	7,60
Best-estimate	90,88	90,86	90,49	90,75	90,39	90,05

Tableau 7 : best-estimate par le modèle G2++ market-consistent

Montants en M€	G2 1	G2 2	G2 3	G2 4	G2 5	G2 6
Best-estimate net de frais	80,58	83,18	81,42	82,75	82,84	83,60
Frais	6,90	7,79	7,40	7,88	7,77	7,76
Best-estimate	87,48	90,97	88,82	90,63	90,61	91,36

Le Tableau 8 présente les *best-estimates* évalués en utilisant le modèle LMM non *market-consistent* dérivé du modèle LMM *market-consistent* par ajustement du paramètre de volatilité (cf. section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Nous constatons que les *best-estimates* sont insensibles aux facteurs de décalage et sont comparables aux grandeurs présentées dans le Tableau 1Tableau 6.

Tableau 8 : best-estimate par le modèle LMM non market-consistent

Montants en M€	*LMM 1*	*LMM 2*	*LMM 3*
Best-estimate net de frais	82,87	82,62	82,78
Frais	7,94	7,92	7,94
Best-estimate	90,81	90,54	90,72

Tableau 9 : comparaison des best-estimates

Best-estimate	*Ecart-type*	*Min*	*Max*	*Ecart (Max-Min)/Moyennne*
Uniquement les modèles *market-consistant* (HW & G2 ++)	1,20%	87,48	91,36	4,30%
Tous les modèles	1,08%	87,48	91,36	4,29%

Par ailleurs, les ratios entre la provision mathématique et les *best-estimates* varient entre 77 % et 80 %. Ces ratios sont inférieurs aux ratios observés des entreprises BNP Paribas Cardif[7] (88 %) et AXA France Vie[8] (83 %) mais restent dans les mêmes ordres de grandeur.

[7] Les données sont extraites du rapport SFCR disponible sur le site institutionnel de BNP Paribas Cardif : lien.
[8] Les données sont extraites du rapport SFCR disponible sur le site institutionnel d'AXA France : lien.

La différence entre le *best-estimate* et la provision mathématique peut s'expliquer notamment par une richesse initiale à la discrétion de l'assureur (cf. section 4.1.1).

Bien que les modèles utilisés pour évaluer la sensibilité du *best-estimate* présentent des caractéristiques différentes, l'impact sur la valeur de ce dernier reste assez contenu. La différence entre la valeur minimale et maximale est de 4,30 %. Une attention particulière doit être néanmoins accordée au modèle LMM. Ce modèle, calibré sur les données observées au 02/01/2018, ne peut être retenu pour l'évaluation du *best-estimate* du fait de sa divergence.

4 Peut-on construire un GSE cohérent avec la structure optionnelle du *best-estimate* ?

4.1 Analyse qualitative de la construction du *best-estimate*

4.1.1 Richesse initiale de l'assureur

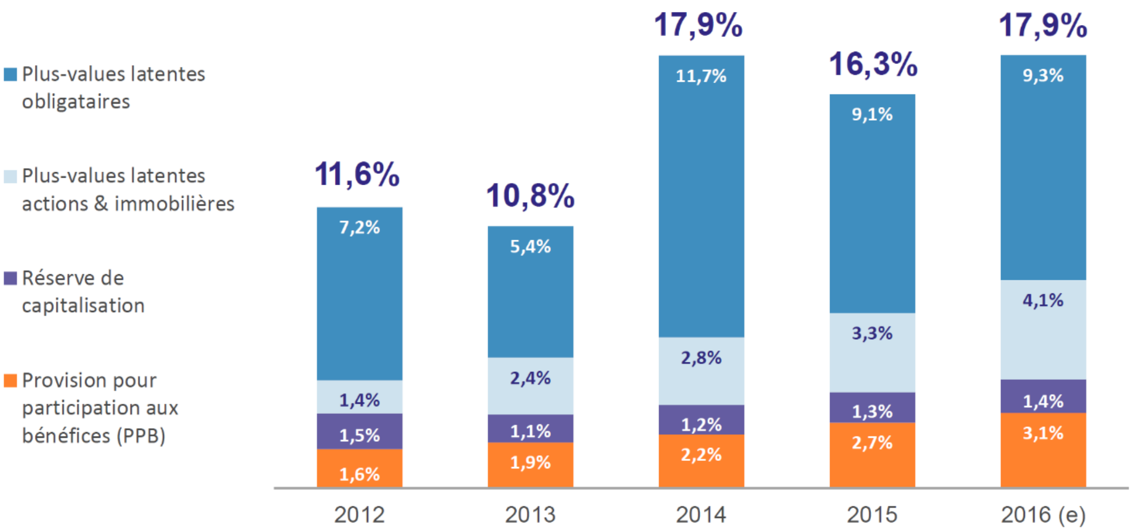
Les contrats futurs sont exclus du périmètre d'évaluation du *best-estimate*. En outre, si les contrats d'épargne ne contiennent pas de garanties financières prédéterminées pour tous les versements futurs, ce qui est en général le cas des contrats d'épargne classiques, les primes futures ne peuvent être prises en compte dans le périmètre d'évaluation (ACPR [2013]). La valorisation du *best-estimate* épargne en € est donc est donc effectuée dans un cadre supposant que l'assureur arrête son activité commerciale et se contente de gérer son encours.

Les assurés, dont l'épargne acquise à la date d'évaluation 0 est la provision mathématique $PM(0)$, peuvent profiter d'une richesse initiale cumulée par l'assureur. Cette dernière se présente comme suit :

- La provision pour participation aux bénéfices qui est totalement acquise aux assurés. Sa distribution est à la discrétion de l'assureur. La valeur initiale de cette provision est notée $PPB(0)$;
- Les plus ou moins-values latentes générées par la gestion comptable des taux de revalorisation déjà distribués. La valeur initiale est notée $PMVL(0)$;
- Les provisions de pilotage des rendements comptables comme la réserve de capitalisation, la provision pour aléas financiers et la provision pour risque d'exigibilité. Ces provisions sont à la discrétion de l'assureur. Leur valeur initiale est notée $PR(0)$.

La Figure 1 illustre l'importance de la richesse initiale cumulée par les entreprises régies par le code des assurances sur le marché français (cf. FFA [2017]).

Figure 1 : richesse initiale des assureurs sur le marché français de 2012 à 2016



En 2016, la richesse maximale est d'au moins 17,9 %. La richesse initiale acquise aux assurés est de 3,1 %. La richesse initiale pouvant être distribuée par l'assureur peut varier théoriquement dans un intervalle dont le diamètre représente 14,8 % des provisions mathématiques en 2016.

En 2016, les provisions mathématiques des contrats d'épargne en € est de 1 286,9 milliards d'euros. Les fonds propres des sociétés vie, de capitalisation et mixtes avant affectation des résultats sont de 67,5 milliards d'euros (FFA [2017]).

Une incertitude additive de 5 % sur l'intégration de la richesse initiale et sa distribution dans les flux futurs représente une variabilité du *best-estimate* de 64,3 Mds €. Ce qui est bien comparable aux fonds propres cumulés des assureurs vie.

Dans un univers de gestion des contrats en *runoff*, les actifs seront cédés progressivement pour servir des taux de revalorisation comptables ou pour honorer les flux sortants. La valeur latente initiale sera progressivement distribuée en partie aux assurés et intégrée aux flux futurs à la discrétion de l'assureur. Celui-ci partage par ailleurs les bénéfices comptables réalisés sur la cession d'actifs dans les limites réglementaires et contractuelles des clauses de participation aux bénéfices.

La valeur latente initiale et actuelle maximale pouvant être distribuée aux assurées est $PMVL_{max} = PMVL(0)$[9]. La valeur minimale dépend de plusieurs paramètres comme la politique de gestion du rendement comptable, de la performance de l'actif, des clauses de distribution de la participation aux bénéfices et de la politique de dotation/reprise des provisions de pilotage des rendements. Si, par exemple, l'assureur décide de ne réaliser les PMVL que pour les distribuer aux assurés, alors le minimum réglementaire devant être distribué est :

[9] La valeur de marché de l'actif est égale à la valeur comptable augmentée des valeurs latentes. La somme des flux futurs actualisés de l'actif en valeur de marché est égale à la valeur actuelle (AOA). En gestion *runoff*, la totalité de l'actif sera distribuée. La somme des flux futurs comptables actualisés est égale à l'actif actuel en valeur de marché et donc égal à la valeur actuelle comptable de l'actif plus les valeurs latentes.

$$PMVL_{min} = 85\% \, PMVL(0)$$

Dans tous les cas, il existe des $PMVL_{min} \leq \, PMVL(0)$ tel que :

$$PMVL_{min} \leq PMVL_{distribuée} \leq \, PMVL_{max}$$

Les provisions de pilotage de rendements comptable seront par ailleurs dotées ou reprises au fur et à mesure de la cession de l'actif et de la réalisation des valeurs latentes. Leur distribution est discrétionnaire et dépend de la politique d'investissement de l'assureur. Ces provisions viennent moduler les rendements financiers de l'actif.

Si certaines provisions de pilotage sont non-nulles à la fin de la projection des flux, l'assureur se réserve le droit de ne pas les verser aux assurés (exemple : la réserve de capitalisation). Le montant maximal actuel pouvant être distribué aux assurés est donc $PR_{max} = PR(0)$. Le montant minimal actuel pouvant être distribué dépend de la politique de l'assureur et peut être nul : $0 \leq PR_{min} \leq PR(0)$.

Notons :

$$Richesse_{min}^{init}(0) = PPB(0) + PMVL_{min}(0) + PR_{min}(0)$$

$$Richesse_{max}^{init}(0) = PPB(0) + PMVL_{max}(0) + PR_{max}(0)$$

Ainsi, la somme des flux futurs actualisés que l'assureur doit distribuer est d'au moins (AOA) :

$$PM(0) + Richesse_{min}^{init}(0)$$

Les assurés profitent ou subissent donc un effet mémoire sur l'actif géré par l'assureur. Si la richesse initiale incorporée aux flux futurs est positive, la valeur actuelle de ces flux est supérieure à leur investissement initial (PM(0)). Si cette richesse est négative (dans le cas de moins-values latentes significatives par exemple), les assurés rationnels peuvent :

- Garder leurs contrats si la garantie offerte par l'assureur est significative. Dans ce cas, l'assureur peut être contraint d'engager ses fonds propres pour servir les taux garantis ;
- Arbitrer ou racheter leur épargne acquise.

On peut donc supposer que la somme des flux futurs actualisés distribués par l'assureur est dans tous les cas supérieure ou égale à la PM(0).

Par ailleurs, l'assureur rationnel cherchera à maximiser son utilité espérée et évitera de verser plus que la richesse initiale maximale afin d'éviter d'engager ses fonds propres. Pour ce faire, la valeur économique de son engagement minimal envers les assurés doit être inférieure à la provision mathématique augmentée de la richesse initiale maximale.

Cette valeur économique consiste à évaluer la somme des flux futurs minimaux garantis et s'avère nécessaire pour apprécier l'équilibre économique des contrats d'épargnes gérés. C'est ce que nous appelons dans la suite : *best-estimate* contractuel minimal.

4.1.2 Valorisation du best-estimate contractuel minimal

Nous définissons le *best-estimate* contractuel comme la somme des flux futurs garantis actualisés. Il correspond au scénario où l'assureur verse les taux minimums sur lesquels il s'est engagé (ou il compte s'engager).

Soit $TMG = \{tmg_i\}_{i\in[\![1,T]\!]}$ la courbe anticipée des taux minimums garantis tel que tmg_i est le taux garanti anticipé déterministe entre les date $i-1$ et i.

Reprenons les notations de la section 2.2.3. Par définition, nous avons donc : $c_i = tmg_i$ pour chaque date i.

Puisque les taux de revalorisation sont déterministes, les chroniques de f_t et de g_t sont déterministes également.

Notons par ailleurs que :

$$E^{P^h\otimes Q}(\psi(t)) = exp\left(\sum_{i=1}^{t} tmg_i\right)E^Q\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{t} r_i\right)\right) = exp\left(\sum_{i=1}^{t} tmg_i\right).P(0,t)$$

Donc :

$$BE_{contr}(0) = PM(0).\sum_{t=1}^{T}\left(f_t^{(tmg_i)} + \iota g_t^{(tmg_i)}\right)P^M(0,t).exp\left(\sum_{i=1}^{t} tmg_i\right) + g_T^{(tmg_T)}.P^M(0,T).exp\left(\sum_{i=1}^{T} tmg_i\right)$$

où $P^M(0,t)$ est le prix d'une obligation zéro coupon sans risque observé sur le marché payant une unité monétaire à la maturité t et ι le taux de chargement.

Notons que :

- Cette écriture du *best-estimate* contractuel ne dépend pas de modèles de génération de scénarios économiques ;
- Le *best-estimate* contractuel représente l'engagement minimal de l'assureur. Il indique notamment le niveau de la garantie quand les taux promis sont significatifs ;
- Le *best-estimate* contractuel est complètement déterminé par la politique et le tarif de l'assureur (les tmg_i et ι), la structure biométrique et la structure comportementale (les chroniques $f_t^{(tmg_i)}$ et $g_t^{(tmg_i)}$) ;
- Le *best-estimate* contractuel représente la valeur minimale obligatoire des flux futurs actualisés. Si le *best-estimate* est inférieur strictement au *best-estimate* garanti, deux cas se présentent :
    - o Il existe au moins un taux de revalorisation inférieur strictement au taux garanti ce qui signifie le défaut de l'assureur ;
    - o Il n'existe aucun taux de revalorisation inférieur strictement au taux garantis : cela signifie que l'origine de la baisse se trouve dans le

comportement des assurés (rachat conjoncturel). Or ce comportement n'est pas rationnel dans le sens où il ne maximise pas l'utilité espérée[10].

- Le *best-estimate* contractuel peut s'interpréter comme le montant minimal que l'assureur peut investir en actifs sans risque tout en étant certain d'honorer ses engagements contractuels ;
- Le *best-estimate* contractuel permet d'étudier la *moneyness* du contrat et d'évaluer l'écart entre la garantie et la valeur du rachat (cf. section 8).

Notons que le *best-estimate* contractuel est différent du *best-estimate* garanti (BEG) tel qu'il est construit dans ACPR [2013]. Le *best-estimate* contractuel est en effet un scénario possible, notamment quand les rendements de l'actif ne sont pas suffisants pour couvrir les taux garantis. Le BEG est une valeur calculée, ne correspondant à aucun scénario possible. Elle indique la part garantie du *best-estimate* réglementaire. En effet, la méthode de calcul du BEG proposée dans ACPR [2013] se présente en quatre étapes :

- Étape 1 : extraction de la chronique des prestations non revalorisées de calcul du *best-estimate* pour chaque scénario et pour chaque pas de temps (décès, rachats structurels, rachats dynamiques…)[11] ;
- Étape 2 : valorisation de ces prestations par les rendements garantis. Ces rendements garantis incorporent les taux techniques et la PPB arrivée à échéance. L'épargne est diminuée annuellement des chargements contractuels éventuels ;
- Étape 3 : actualisation des flux garantis par les taux propres à chaque scenario ;
- Étape 4 : le BEG est égal à la moyenne des valeurs obtenues sur tous les scenarios.

Cette construction du BEG repose donc sur des chroniques de prestations extraites des scénarios utilisés pour le calcul du *best-estimate* en amont de l'intégration des rendements garantis. Dans ce cas les séries f_t et g_t sont dépendantes des trajectoires stochastiques. Le BEG est une indication sur la part garantie du best-estimate et non une mesure de l'engagement minimal de l'assureur.

En conclusion, la valeur minimale du best-estimate s'écrit :

$$BE_{min}(0) = max\left(PM(0), BE_{contr}(0), PM(0) + Richesse_{min}^{init}(0)\right)$$

Si l'on suppose que l'assureur maximise son utilité et veille à préserver ses fonds propres sociaux, la valeur maximale du best-estimate s'écrit :

$$BE_{max}(0) = max\left(PM(0), BE_{contr}(0), PM(0) + Richesse_{max}^{init}(0)\right)$$

Si $BE_{max}(0) = BE_{min}(0) = BE_{contr}(0)$ cela signifie que l'assureur mobilisera une partie de ses fonds propres pour honorer ses engagements conditionnellement à l'état du monde à la date 0.

Notons que ses deux bornes du *best-estimate* sont indépendantes des choix de modèles de génération de scénarios économiques.

---

[10] Si les taux de revalorisations moyens sont supérieurs aux taux garantis, les assurés sont certains d'avoir un *best-estimate* supérieur au *best-estimate* garanti en gardant le même comportement $f_t^{(tmg_i)}$ et $g_t^{(tmg_i)}$.

[11] Cela correspond aux séries f_t et g_t introduites dans cet article et qui sont des variables stochastiques.

4.1.3 Le *best-estimate* dépend de la politique de l'assureur

La politique de l'assureur impacte le niveau du *best-estimate*. L'exemple suivant illustre comment le pilotage de la richesse initiale peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate*.

Soit deux assureurs A et B avec des caractéristiques identiques :

- Ils disposent des mêmes actifs et passifs ;
- Ils évoluent dans un même environnement économique ;
- Ils ont une richesse suffisante pour servir les taux garantis.

Ayant la même structure de portefeuille, les *best-estimates* des deux assureurs ont les mêmes bornes maximales et minimales.

Soit par exemple $BE^A(0) < BE_{max}(0)$ le best-estimate de l'entreprise A.

Quel que soit l'état de l'économie, l'assureur B peut choisir un *best-estimate* cible tel que : $BE^A(0) < BE_{cible}(0) < BE_{max}(0)$ en servant un *spread* a solution de l'équation suivante (cf. section 7) :

$$BE_{cible}(0) = PM(0)E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}(f_t^a + \iota g_t^a).\psi_a(t) + g_T^a.\psi_a(T)\right)$$

avec : $\psi_a(t) = \exp\{\sum_{i=1}^{t} c_i - \sum_{i=1}^{t} r_i + t.a\}$ et :

- c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i versé par l'assureur A. Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
- r_i est le taux sans risque pour la période entre $i-1$ et i.

L'assureur B, par une décision discrétionnaire, partage plus de richesse initiale que l'assureur A. Le *best-estimate* de B est différent du *best-estimate* de A alors que l'exposition des deux assureurs aux risques est identique.

Cet exemple illustre qu'une action de management sur la politique de partage de richesse peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate* fonction du niveau du *spread a*.

La différence entre le *best-estimate* de A et B peut être significatif et varier en moyenne entre 0 % et 17,6 % de la provision mathématique sur la base des statistiques de marché de 2016. Cette différence, aussi significative qu'elle puisse être, peut être définie indépendamment du modèle de génération de scénarios économiques.

4.1.4 Conclusion

Nous avons montré dans cette section que la politique de l'assureur peut avoir un impact significatif sur le *best-estimate* et ce quel que soit l'univers des risques biométriques, comportementaux ou économiques.

Dans un environnement de risques prédéfini, le *best-estimate* d'un portefeuille d'épargne en € n'est donc pas unique. Le transfert instantané du portefeuille d'une société à une autre change instantanément le montant du *best-estimate* si les politiques de gestion sont différentes, et ce, même si l'environnement économique reste inchangé.

Il n'existe donc pas de valeur économique d'un passif d'assurance mais une infinité de valeurs représentant chacune une politique de gestion subjective des contrats d'épargne en € par l'entreprise d'assurance. Le *best-estimate* n'est pas la valeur économique du passif. Il représente au mieux la valeur économique des engagements d'assurance conditionnellement à la politique de gestion de l'assureur.

Le processus de calibrage et de validation du générateur de scénarios économiques, utilisés pour évaluer le *best-estimate*, en comparant les simulations aux données observées dans le cadre d'une approche statistique, ne peut être considéré. En effet :

- Le *best-estimate* n'est pas observé dans un marché profond et liquide ;
- Nous pouvons obtenir différentes valeurs du *best-estimate* pour les mêmes risques sous-jacents : un marché profond et liquide pour le *best-estimate* tel qu'il est défini dans le cadre de Solvabilité 2 ne peut exister.

Par ailleurs, le *best-estimate* est borné. Ses bornes ne dépendent pas de modèles de génération de scénarios économiques.

Aussi, quel que soit le choix du GSE, il est possible de piloter les taux de revalorisation pour atteindre un *best-estimate* cible prédéfini entre la valeur minimale et la valeur maximale du *best-estimate*.

Il est donc discutable de faire le lien entre un GSE et un *best-estimate* sans préciser la politique de revalorisation de l'assureur.

Il est discutable également d'utiliser certains produits dérivés de taux pour calibrer le GSE sans établir de lien entre ces dérivés et : la structure optionnelle des engagements de l'assureur, son passif, ses actifs et sa politique.

Le Tableau 10 présente la répartition de l'actif des assureurs en valeur de marché à fin 2016 (source FFA [2017]).

Tableau 10 : placements des sociétés d'assurance fin 2016

Encours des placements des sociétés d'assurances à fin 2016	*En Md€*	*Allocation*
Actions d'entreprises	401	17%
Obligations d'entreprises	907	39%
Obligations émises ou garanties par l'État	773	33%
Actifs immobiliers	97	4%
Actifs monétaires	123	5%
Autres	49	2%
Total	*2 350*	*100%*
Dont sociétés vie et mixte	2 114	90%
Dont sociétés dommages	236	10%

Un générateur de scénarios économiques permettant de valoriser des obligations, des actions, des investissements en immobilier et des titres monétaires couvre 98 % de l'actif des entreprises d'assurance et permet de diffuser les taux sans risque.

Se pose alors la question : un GSE construit et calibré pour reproduire des prix de produits dérivés tels que les *caps*, les *floors* et les *swaptions*, est-il pertinent pour la valorisation du *best-estimate* ?

Le GSE destiné à valoriser le *best-estimate* est donc destiné à évaluer les options et les garanties du contrat d'épargne. Le sous-jacent de ces options est l'actif de l'assureur. Nous cherchons dans la suite à expliciter la nature de ces options et garanties afin d'établir un lien entre le GSE et le *best-estimate*.

4.2 Analyse de la structure optionnelle implicite au *best-estimate* et son lien avec les GSE

4.2.1 Définition du périmètre et du cadre d'analyse

Comme précisé dans la section 2.2.2, l'évaluation du *best-estimate* intègre quatre composantes :

- Composante 1 : la définition des lois de mortalité et de rachat ;
- Composante 2 : la définition de la structure comportementale des assurés ;
- Composante 3 : la définition de la structure comportementale de l'assureur ;
- Composante 4 : la construction d'un générateur de scénarios économiques.

Sans faire d'hypothèses sur les points 1, 2 et 4 nous avons montré dans la section 4.1.3 que le *best-estimate* peut varier significativement en fonction de la politique de revalorisation de l'assureur et que cette variation peut être totalement indépendante du modèle de génération de scénarios économiques.

Plus généralement si les composantes 1, 2 et 4 sont totalement définies, alors on peut construire une correspondance entre les taux de revalorisation et des *best-estimates* cibles (cf. section 4.1.3).

Nous pourrons généraliser ce constat comme suit :

- Le *best-estimate* ne peut être défini que si les quatre composantes ci-dessus sont définies ;
- Pour construire une correspondance entre une composante et le *best-estimate* il faut définir les 3 autres composantes ;
- Dans un processus de calibrage (des composantes 2, 3 ou 4) il faut (1) définir trois composantes et (2) disposer de valeurs du *best-estimate* pour déduire les paramètres de la composante que l'on cherche à calibrer.

Comme présenté dans la section 2, en l'absence d'observations du *best-estimate*, le calibrage des modèles de taux est conventionnel et consiste à utiliser des produits dérivés de taux (*caps*, *swaption…*) pour inférer les paramètres.

Le lien entre ces produits dérivés et le *best-estimate* est discutable. En effet, la fonction qui lie le *best-estimate* aux paramètres du GSE dépend des composantes : 1, 2 et 3. Le paramètrage du GSE peut se révéler incohérent avec l'objectif d'évaluation du *best-estimate* si ces composantes n'interviennent pas dans le processus de calibrage.

Dans cette section nous cherchons à construire un lien entre la structure optionnelle du *best-estimate* et le modèle de génération de scénarios économiques. Notre analyse se place dans un cadre défini comme suit :

- Les risques d'assurance (rachat structurel et mortalité) : sont supposés mutualisables et indépendants de l'environnement économique et financier ;
- Comportement client : le rachat conjoncturel est supposé nul ;
- Politique de l'assureur :
  - Politique d'investissement : l'assureur transfère directement l'investissement de l'assuré (PM) sur le marché financier. Il réalise des achats / ventes instantanés à chaque fin d'année. La composition et le profil de risque de l'actif sont stables sur toute la période de projection ;
  - La richesse initiale se compose uniquement de la provision pour participation aux bénéfices et est placée sur des supports non risqués. La richesse initiale que l'assureur décide de distribuer sera liquidée à un taux fixe noté a ;
  - Revalorisation : chaque année l'assureur revalorise l'épargne du taux de rendement financier et d'un *spread* défini à partir de la richesse initiale (a) ;
  - Chargements et frais : l'assureur applique un taux de chargement sur l'épargne acquise. Le taux de chargements est égal au taux de frais ;
  - Les taux minimums garantis sont notés $TMG = \{tmg_i\}_{i\in[\![1,T]\!]}$. Les taux de rendements minimaux de l'actif que l'assureur doit avoir pour honorer ses engagements sont donc $K = \{k_i\}_{i\in[\![1,T]\!]} = \{tmg_i - a\}_{i\in[\![1,T]\!]}$.

4.2.2 La structure optionnelle financière implicite à un contrat d'épargne en €

Notons s_t le rendement de l'actif de l'assureur. À chaque date t nous avons :

$$\begin{aligned} VR(t+1) &= VR(t).\exp(max(k_{t+1}, s_{t+1}) + a) \\ &= VR(t).\mathrm{e}^{a}.e^{s_{t+1}} + VR(t).\mathrm{e}^{a}.max(0, e^{k_{t+1}} - e^{s_{t+1}}) \end{aligned}$$

À chaque date $t+1$ le *pay-off* est similaire à une option de vente vanille dont le nominal est la valeur de rachat à l'instant t revalorisée du *spread a*.

Le *pay-off* dépend de l'épargne acquise à la date t. La garantie porte sur un nominal stochastique.

L'optionalité financière présente dans le *best-estimate* est donc différente de celle de la garantie plancher. Cette dernière porte sur un nominal constant et connu à la souscription. L'évaluation du *best-estimate* d'un contrat d'épargne en € par la méthode des *puts* telle qu'elle est appliquée pour valoriser des garanties planchers est inadaptée. En effet à la date $0 < t$ la valeur garantie n'est pas déterministe. Elle dépend des rendements financiers distribués sur toute la trajectoire :

$$VR(t) = PM(0).\mathrm{e}^{a.t}.\exp\left(\sum_{i=1}^{t} max(k_i, s_i)\right)$$

L'optionalité financière implicite à la valeur de rachat présente une structure par cliquets. Elle est donc *path-dependant*. Nous nous intéressons dans la suite à la structure financière par cliquets.

4.2.3 Qu'est-ce qu'une option par cliquets ?

Les options par cliquets sont des contrats dérivés qui offrent un rendement annuel minimum garanti chaque année pendant toute la durée du contrat. Ce sont des options exotiques formées d'une série d'option *forward start* consécutives.

Ces options permettent de réduire le risque de pertes tout en offrant la possibilité de profiter d'une potentielle hausse.

Le rendement s_t d'un actif, dont le processus de prix est S_t, sur une période de $t-1$ à t est :

$$s_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

Les rendements définis par : $\bar{s}_t = max\ (min\ (s_t, C_t), F_t)$ sont des rendements tronqués. Ils sont plafonné à un niveau C_t et sont au minimum égaux à F_t ($F_t < C_t$). L'absence de plancher et / ou de plafond correspond à $F_t = -1$ et $C_t = +\infty$.

L'expression générale du *payoff* Z_T d'une option par cliquets de maturité T indéxée sur S_t est :

$$Z_T = B.\exp\left(min\ \left(max\ \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{s}_t\,, F_g \right), C_g \right) \right)$$

où :

- F_g est le plancher global représentant le rendement minimal global sur toute la période de 0 à T ;
- C_g est le plafond global représentant le rendement maximal global sur toute la periode de 0 à T ;
- B est le notionnel.

Pour $C_g = +\infty$, l'expression générale du *payoff* s'écrit :

$$Z_T = B.\exp\left(max\ \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{s}_t\,, F_g \right) \right)$$

En posant : $F_g = \sum_{t=1}^{T} F_t$ et $C_t = +\infty$ on peut écrire :

$$Z_T = B.\exp\left(max\ \left(\sum_{t=1}^{T} \bar{s}_t\,, F_g \right) \right) = B.\exp\left(\sum_{t=1}^{T} \max(s_t, F_t) \right)$$

Cette formule est similaire à celle explicitée pour la valeur de rachat dans la section précédente.

La valeur actuelle espérée du *payoff* d'une option par cliquets de maturité T dont le taux minimum garanti à t est F_t s'écrit :

$$Y_T = E^Q\left(\exp\left(\sum_{t=1}^{T}\max(s_t, F_t) - \sum_{t=1}^{T} r_t\right)\right)$$

Nous ne présenterons pas dans ce papier une revue de la littérature financière au sujet de la valorisation des options par cliquets. Nous nous contentons de formuler quelques constats :

- La sensibilité du prix de l'option au modèle de valorisation : Wilmott [2002] montre que les options par cliquets sont sensibles aux modèles et aux paramètres de la dynamique de l'actif sous-jacent ;
- La sensibilité du prix de l'option aux données de calibrage : Windcliff et al. [2006] explore diverses alternatives de modélisation du sous-jacent d'options par cliquets. Ils constatent qu'un modèle calibré sur des options vanilles ne permet pas nécessairement de valoriser correctement les options exotiques. En supposant que le sous-jacent suit un modèle à sauts de Merton, Windcliff et al. [2006] montrent qu'une correction en aval de la volatilité implicite aux options vanilles peut entraîner plus de précision lors de la valorisation d'options par cliquets ;
- Les modèles de taux d'intérêt utilisés dans les références consultées sont essentiellement déterministes. Ahlip et Rutkowski [2008] proposent une démarche d'évaluation d'options *forward start* dans un cadre où le taux d'intérêt suit un modèle CIR et où la volatilité suit un modèle de Heston ;
- Le modèle de volatilité du sous-jacent est une préoccupation assez récurrente des articles consultés ;
- Kjaer [2004] présente un cas particulier d'options par cliquets et développe des formules fermées pour les valoriser sous certaines hypothèses dans le cas où les *strikes* sont constants ;
- Windcliff et al. [2006] proposent des méthodes numériques pour évaluer des options par cliquets pour un ensemble de modèles mathématiques de prix du sous-jacent.

4.2.4 L'expression du *best-estimate* en fonction d'options par cliquets

Soit Y_t le prix d'une option par cliquets s'écrivant :

$$Y_t = E^Q\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{t}\max(s_i, F_i) - \sum_{i=1}^{t} r_i\right)\right)$$

Comme présenté dans la section 4.2, la totalité du rendement de l'actif est distribuée. On peut écrire alors :

$$F_i = k_i + \iota$$

$$c_i = \max(s_i, F_i) + a - \iota$$

Le rendement c_i distribué est donc supérieur ou égal au taux garanti tmg_i net de chargement.

La probabilité P^h est indépendante de l'aléa financier car les rachats conjoncturels sont supposés nuls et la politique de l'assureur n'intervient pas sur le rendement financier. On a donc :

$$E^{P^h \otimes Q}\big(\psi(t)\big) = E^Q\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{t} c_i - \sum_{i=1}^{t} r_i\right\}\right)$$
$$= E^Q\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{t} \max(s_i, F_i) + a.t - \iota.t - \sum_{i=1}^{t} r_i\right\}\right)$$

Donc :

$$E^Q\big(\psi(t)\big) = \mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.t}.Y_t$$

Ainsi :

$$BE_a(0) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T}\big(f_t + \iota g_t\big).\mathrm{e}^{at}.e^{-\iota.t}.Y_t + g_T.\mathrm{e}^{aT}.e^{-\iota.T}.Y_T\right)$$

Le *best-estimate* s'écrit comme une somme d'options par cliquets :

- de notionnels : $N_t = PM(0)\big(f_t + \iota g_t\big).\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.t}$ si $t < T$ et $N_T = PM(0)\big(f_T + (\iota+1)g_T\big)\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.T}$;
- dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur.

Notons par ailleurs que le *best-estimate* net de chargement s'écrit :

$$BE_a^{net}(0) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T} f_t.\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.t}.Y_t + g_T.\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.T}.Y_T\right)$$

Pour couvrir ses engagements de servir les taux garantis, l'assureur peut acheter des options par cliquets de *strikes* $\{F_i\}_{i\in[\![1,T]\!]}$ et de notionnel $N_t^{net} = PM(0).f_t.\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.t}$ si $t < T$ et $N_T^{net} = PM(0)\big(f_T + g_T\big).\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.T}$.

Le coût total de ces options est :

$$Cout\_garantie = \sum_{t=1}^{T} N_t^{net}.(Y_t - 1)$$

Dans l'hypothèse où les chargements sur encours servent uniquement à couvrir les frais de la gestion financière (les frais de structure, de gestions administrative etc., sont nuls) alors, le coût total des couvertures est égal au *best-estimate* de frais :

$$BE^{frais}(0) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T} \iota g_t.\mathrm{e}^{a.t}.e^{-\iota.t}.Y_t\right) = \sum_{t=1}^{T} N_t^{net}.(Y_t - 1)$$

4.2.5 Caractérisation des options financières implicites au *best-estimate*

La structure optionnelle financière du *best-estimate* est totalement caractérisée par les options par cliquets qui le composent. Il suffit de décrire la structure optionnelle élémentaire d'une option par cliquets pour en déduire celle du *best-estimate*.

Dans la suite trois cadres d'analyse des options par cliquets sont présentés. Nous en déduisons que la structure optionnelle du *best-estimate* est cohérente avec :

- Une structure optionnelle vanille *start-forward* sur les actifs risqués de type actions ;
- Une structure optionnelle par *floorlets* sur les actifs obligataires.

Donc dans le cadre d'analyse et de valorisation présenté dans la section 4.2.1 :

- Le calibrage des modèles de taux destinés à la valorisation du *best-estimate* peut être cohérents avec un calibrage sur des *floorlets* ;
- Le calibrage des modèles de type actions peut être cohérents avec un calibrage sur des options vanilles.

4.2.5.1 *L'actif de l'assureur est assimilé à un indice actions*

Dans le cas où l'actif de l'assureur est assimilé à un indice actions, la valorisation d'options par cliquets peut être réalisée avec des modèles mathématiques de type actions. Les paramètres de ces modèles doivent représenter les caractéristiques de l'actif de l'assureur. Un exemple classique est le modèle de Black-Scholes.

La littérature financière est riche en références traitant les problématiques de valorisation d'options par cliquets dont le sous-jacent est un indice actions. Le lecteur peut se référer, par exemple, à Kjaer [2004] qui présente des formules fermées pour la valorisation d'options par cliquets sur un indice actions.

Bien que pratique, le calibrage de tels modèles par une approche *market-consistent* en intégrant les anticipations des acteurs de marché ne peut être réalisé. Des produits dérivés dont le sous-jacent est l'actif de l'assureur ne sont pas échangés sur des marchés liquides et profonds.

4.2.5.2 *L'actif de l'assureur est assimilé à un panier d'obligations*

Supposons que l'actif de l'assureur est composé d'un panier d'obligations sans risque à coupons variable indexés sur les taux d'intérêt sans risque.

Soit T une échéance d'intérêt et soit Y_T une option par cliquets dont la chronique des prix d'exercice est $\{F_t\}_{1\leq t\leq T}$. Cette option correspond au flux T du *best-estimate*.

Afin de répliquer le *pay-off* de cette option par cliquets, l'assureur peut :

- Acheter une obligation à coupons variables de maturité T indexée sur le taux d'intérêt sans risque dont la courbe de taux *forward* un an est donnée par $\{b_t\}_{1\leq t\leq T}$ [12];
- Réinvestir les coupons sur les taux sans risque variables et sur la maturité résiduelle ;

[12] Le taux d'intérêt annuel entre t et t+1 est : b_{t+1}.

- Acheter des *floorlets* dont les prix d'exercice sont les $\{F_t\}_{1\leq t\leq T}$ et dont le nominal est variable : une sorte de « *floor* par cliquets ».

En effet, à chaque date $t \leq T$, la valeur de l'actif adossé à l'échéance T s'écrit :

$$B_{t+1} = B_t.(1 + max(b_{t+1}, F_{t+1})) = B_t(1 + b_{t+1}) + B_t(F_{t+1} - b_{t+1})^+$$

et : $B_0 = 1$ est l'investissement initial en obligation à taux variable sans risque.

Le deuxième terme de la formule ci-dessus correspond au *pay-off* d'un *floorlet* dont le nominal est B_t.

Cette expression montre que :

- L'optionalité du passif est cohérente, sous certaines conditions, avec des *floorlets* ;
- Les *pay-offs* des options par cliquets sur un actif composé d'un panier d'obligations peut être valorisé par récurrence en s'appuyant sur la valorisation de *floorlets*. Certains modèles comme le modèle de Black ou le modèle LMM permettent la valorisation de *floorlets* par des formules fermées.

4.2.5.3 *L'actif de l'assureur est composé d'obligations et de supports risqués*

Soit T une échéance d'intérêt et soit Y_T une option par cliquets sur l'actif de l'assureur dont la chronique des prix d'exercice est $\{F_t\}_{1\leq t\leq T}$.

Sans perte de généralité, supposons que l'actif de l'assureur se compose de deux familles de supports financiers :

- Un actif risqué de type investissements en actions (immobilier, infrastructure,…) dont le prix initial est noté $A_0 = 1$ et dont l'allocation initiale est x_1. Le rendement annuel entre t et $t + 1$ est noté a_{t+1} ;
- Un actif sans risque (de type obligations) dont le prix initial est noté $B_0 = 1$ et dont l'allocation initiale est x_2. Le taux de rendement à chaque instant est le taux d'intérêt sans risque *forward* un an noté $\{b_t\}_{1\leq t\leq T}$.

Afin de répliquer les *pay-offs* de l'option par cliquets, l'assureur peut acheter :

- Un actif risqué de type actions et une option par cliquets sur cet actif de prix d'exercice : $\{F_t^A\}_{1\leq t\leq T}$;
- Une obligation à coupons variables indexée sur le taux d'intérêt sans risque associée à des *floorlets* dont les prix d'exercice sont $\{F_t^B\}_{1\leq t\leq T}$ et dont les nominaux sont variables.

Soit $t \leq T$, les prix des actifs s'écrivent alors :

$$A_{t+1} = A_t + A_t.max(a_{t+1}, F_{t+1}^A)$$

$$B_{t+1} = B_t.(1 + max(b_{t+1}, F_{t+1}^B)) = B_t(1 + b_{t+1}) + B_t(F_{t+1}^B - b_{t+1})^+$$

L'actif total s'écrit :

$$S_{t+1} = S_t + S_t.max(x_1.a_{t+1} + x_2.b_{t+1}, F_{t+1})$$

A chaque date, on peut définir les prix d'exercices F_t^Aet F_t^B afin que l'actif soit valorisé au moins par F_{t+1}. Plusieurs solutions sont possibles. Elles dépendent essentiellement de la nature des actifs, de leur structure de dépendance et des objectifs de rentabilité sur chaque actif. Cette problématique ne fait pas l'objet de ce papier.

Dans le cas où $F_t = x_1.F_t^A + x_2.F_t^B$, la réplication des *pay-offs* est prudente. En effet, on peut noter que :

$$S_t.max(x_1.a_{t+1} + x_2.b_{t+1}, F_{t+1}) \leq x_1.A_t.max(a_{t+1}, F_{t+1}^A) + x_2.B_t.max(b_{t+1}, F_{t+1}^B)$$

L'égalité peut être obtenue dans l'exemple où $a_t = b_t$ et $F_t^A = F_t^B$.

Nous constatons donc que la structure optionnelle implicite au *best-estimate* peut être décomposée en options vanilles sur les actifs risqués et en *floorlets* sur les poches obligataires.

4.2.6 Les équations d'équilibre dans un cadre sans opportunités d'arbitrage

Dans la suite, nous supposons que le taux de frais ι sert uniquement à financer la gestion financière des options et garanties des contrats d'épargne.

Dans un marché sans opportunités d'arbitrage, la somme des flux futurs distribués par l'assureur doit être égale à l'investissement initial.

Les assurés investissent à la date $t = 0$ la $PM(0)$ et ne profite d'aucune richesse initiale : *a=0*. Donc le *best-estimate* est égal à la $PM(0)$:

$$BE(0) = PM(0) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t + \iota g_t\right).e^{-\iota.t}.Y_t + g_T.e^{-\iota.T}.Y_T\right)$$

Afin d'avoir une écriture polynomiale en e^{ι} dans les développements suivants, reprenons l'approximation de la section 2.2.4 : $e^{\iota} - 1 \simeq \iota$:

$$BE(0) = PM(0) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t + (e^{\iota} - 1).g_t\right).e^{-\iota.t}.Y_t + g_T.e^{-\iota.T}.Y_T\right)$$

Le *best-estimate* est un polynôme d'ordre T de $e^{-\iota}$.

Outre les chroniques de sorties, nous notons notamment trois variables vectorielles entrant dans la formule ci-dessus :

- Les paramètres du GSE : θ_4 ;
- Les taux garantis K ;
- Le prix de la couverture (ce que l'on peut appeler aussi le tarif du contrat) : ι.

Notons :

- $\Gamma(\theta_4, k, \iota) = PM(0)\left(\sum_{t=1}^{T}\left(f_t + (e^{\iota} - 1)g_t\right).e^{-\iota.t}.Y_t + g_T.e^{-\iota.T}.Y_T\right) - PM(0)$;
- $\Delta(\theta_4, k, \iota) = PM(0).\left(\sum_{t=1}^{T}(e^{\iota} - 1)g_t.e^{-\iota.t}.Y_t\right) - \sum_{t=1}^{T} N_t^{net}.(Y_t - 1)$.

Le système d'équations suivant traduit deux propriétés : le *best-estimate* est égal à la provision mathématique en l'absence d'opportunité d'arbitrage et le cout de la garantie est égale aux prix des options par cliquets. Il s'écrit :

$$\begin{cases}\Gamma(\theta_4, k, \iota) = 0 \\ \Delta(\theta_4, k, \iota) = 0\end{cases}$$

Ce système ne peut caractériser les paramètres entrant dans le calcul du *best-estimate* car le nombre de ces paramètres est supérieur aux nombres d'équations à résoudre.

Si l'on dispose d'un générateur de scénario économique et que l'on souhaite tarifer un contrat d'épargne versant $PM(0)$ à $t = 0$ alors :

- Les taux minimum garantis K et le taux de frais ι sont les solutions du système d'équation présenté ci-dessus ;
- Si la chronique des taux garantis K est constante (le même taux garanti k sur toute la durée de vie du contrat) alors le système d'équations peut admettre une solution (k, ι). Ce couple garantie (k) & coût (ι) caractérise l'équilibre économique du contrat d'épargne dans un univers sans opportunités d'arbitrage.

Par ailleurs, dans un cadre hypothétique[13] sans opportunité d'arbitrage où l'on dispose du tarif économique ι d'un contrat à taux garanti k, les paramètres du GSE vérifient le système à deux équations ci-dessus. Il est clair que si le nombre de paramètres du GSE est supérieur ou égale à 3 paramètres, le système d'équation peut admettre une infinité de solutions.

En conclusion, dans un cadre sans opportunités d'arbitrage, il peut exister une infinité de paramètres possibles du GSE qui sont cohérents avec les caractéristiques économiques d'un contrat d'épargne en € (couple taux garanti et tarif des options).

Donc, un lien direct entre les paramètres du GSE et le *best-estimate* ne peut être établi et ce même si la politique de l'assureur est prédéfinie.

5 Conclusion

Appliquer une démarche *Mark to Market* pour évaluer le *best-estimate* en juste valeur implique de disposer des prix des options et des garanties des polices d'assurance. Cette information n'étant pas observable sur un marché organisé et liquide, le calcul est mené dans un cadre conventionnel *Mark-to-Model*.

Nous nous sommes intéressés dans ce papier à ce cadre conventionnel. Nos travaux ont porté en synthèse sur trois points :

- Une analyse des sensibilités du *best-estimate* aux choix de modèles de taux et aux choix des données (section 3) ;
- Une analyse du lien entre le *best-estimate*, la politique de revalorisation de l'assureur et les générateurs de scénarios économiques (section 4.1) ;
- Une analyse de la structure optionnelle financière élémentaire du *best-estimate* et son lien avec le GSE (section 4.2).

Il ressort de l'analyse des sensibilités du *best-estimate* aux choix de modèles de taux et aux choix des données que l'impact sur la valeur de ce dernier reste assez contenu. La différence entre la valeur minimale et maximale est de 4,30 %. Une attention particulière

[13] Ce cadre n'existe pas en pratique car il n'y a pas de marchés pour échanger des *best-estimates*.

doit être néanmoins accordée au modèle LMM. Ce modèle, calibré sur les données observées au 02/01/2018, ne peut être retenu pour l'évaluation du *best-estimate* du fait de sa divergence.

L'analyse du lien entre le *best-estimate*, la politique de revalorisation de l'assureur et les GSE a permis de conclure que :

- Le *best-estimate* d'un portefeuille d'épargne en € n'est pas unique. Le *best-estimate* n'est pas la valeur économique du passif. Il représente au mieux la valeur économique des engagements d'assurance conditionnellement à la politique de gestion de l'assureur ;
- Le processus de calibrage et de validation du GSE, en comparant les simulations aux données observées dans le cadre d'une approche statistique, ne peut être considéré car le *best-estimate* n'est pas observé dans un marché profond et liquide. Un tel marché ne peut exister d'ailleurs du fait de l'absence d'unicité du *best-estimate* conditionnellement aux risques ;
- Le *best-estimate* est borné. Ses bornes ne dépendent pas de modèles de génération de scénarios économiques ;
- Quel que soit le choix du GSE, il est possible de piloter les taux de revalorisation pour atteindre un *best-estimate* cible.

Dans le cadre d'analyse présenté dans la section 4.2.1, l'étude de la structure optionnelle financière élémentaire du *best-estimate* et son lien avec le GSE a permis de conclure que :

- La structure optionnelle financière du *best-estimate* est totalement caractérisée par des options par cliquets ;
- Le calibrage des modèles de taux destinés à la valorisation du *best-estimate* est cohérents, sous certaines conditions, avec un calibrage sur des *floorlets* ;
- Le calibrage des modèles de type actions est cohérents, sous certaines conditions, avec un calibrage sur des options vanilles ;
- Dans un cadre hypothétique sans opportunités d'arbitrage ou l'on peut observer le coût des garanties, il existe une infinité de choix de paramètres pour le GSE reproduisant tous ce coût ;
- Un lien direct entre les paramètres du GSE et le *best-estimate* ne peut être établi et ce même si la politique de revalorisation de l'assureur est prédéfinie.

6 Références

ACPR Banque de France. [2015] « NOTICE Solvabilité II, Provisions techniques (y compris mesures « branches longues ») », *Publication et textes de référence*.

ACPR. [2013] « Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II ».

Ahlip R. et Rutkowski M. [2008] « Forward start options under stochastic volatility and stochastic interest rates », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* - March 2009.

Armel K., Planchet F., Kamega A. [2011] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.

Armel K. et Planchet F. [2018] « Comment construire un générateur de scenarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation du *best-estimate* des contrats d'épargne en € ? », *Working-paper*.

Bernales A., Guidolin M. [2014] « Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options? Predictability and economic value tests ». *Journal of Banking & Finance 46* (2014) 326–342.

Bonnin F., Juillard M., Planchet F. [2014] « Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA », *European Actuarial Journal*, Vol. 4, Issue 1, Page 181-196. http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z.

Brigo D., Mercurio F. [2007] « Interest Rate Models - Theory and Practice ». 2nd Edition. *Springer*.

Briys E., de Varenne F. [1994] « Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.

Christoffersen P., Jacobs K. [2002] « The importance of the loss function in option valuation », *Journal of Financial Economics*, Volume 72, Issue 2, May 2004, Pages 291-318.

Cont R., da Fonseca J. [2001] « Dynamics of implied volatility Surfaces », *Quantitative finance* volume 2 (2002) 45–60.

Félix J.P., Planchet F. [2015] « Calcul des engagements en assurance-vie : quel calibrage 'cohérent avec des valeurs de marché' ? », L'Actuariel, n°16 du 01/03/2015.

FFA (Fédération Française de l'Assurance) [2017] « Bilan de l'année 2016 et perspectives de l'année 2017 », conférence de presse.

Gonçalves S., Guidolin M. [2006] « Predictable Dynamics in the S&P 500 Index Options Implied Volatility Surface », *EFMA 2003 Helsinki Meetings*.

Hainaut D. [2009] « Profit sharing: a stochastic control approach », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°18.

Hull J., White A. [1990] « Pricing interest rate derivative securities », *Review of Financial Studies* 3, 573–92.

Kjaer M. [2004] « On the Pricing of Cliquet Options with Global Floor and Cap », Thesis for the Degree of Licentiate of Engineering, Department of Mathematics *Chalmers University of Technology and Goteborg University*.

Laïdi Y., Planchet F. [2015] « Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 15, n°29.

Laurent J.P., Norberg R., Planchet F. (editors) [2016] « *Modelling in life insurance – a management perspective* », EAA Series, Springer.

Planchet F., Kamega A., Thérond P.E. [2009] « Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation », Paris : *Economica*.

Planchet F. [2015] « Valorisation des assurances-vie : comment mesurer la volatilité ? », Risques, n°104.

Prudent C. [1996] « La clause de rachat anticipé évaluée comme une option », Séminaire « *utilisation des Méthode de la Théorie Financière Moderne en Assurance* », *FFSA*, Paris 10-11 juin 1996.

Wilmott, P. [2002] « Cliquet options and volatility models », *Wilmott Magazine*, December, 78-83.

Windcliff H. A., Forsyth P. A., Vetzal K. R. [2006] « Numerical Methods and Volatility Models for Valuing Cliquet Options », Applied Mathematical Finance, Volume 13, 2006 - Issue 4.

7 Annexe 1 : *best-estimate* et liquidation de la richesse initiale

Soit :

$$B_{sto}(a) = PM(0)\left(\sum_{t=1}^{T}(f_t^a + \iota g_t^a).\psi_a(t) + g_T^a.\psi_a(T)\right)$$

- $\psi_a(t) = \exp\{\sum_{i=1}^{t} c_i - \sum_{i=1}^{t} r_i + t.a\}$ avec :
  - c_i : le taux de revalorisation de l'épargne net de chargements à la date i. Ce taux doit être supérieur au taux minimum garanti ;
  - r_i est le taux sans risque pour la période entre $i-1$ et i ;
  - a est un nombre réel.

Notons :

$$BE_a(0) = E^{P^h \otimes Q}\left(B_{sto}(a)\right)$$

En particulier, pour $a = 0$ on retrouve le *best-estimate* $BE(0)$.

<u>Proposition :</u>

Soit x un réel positif tel que $BE(0) < x$. Alors il existe un nombre réel positif a tel que $BE_a(0) = x$.

En effet, la fonction $BE_a(0)$ est continue et sa limite quand a tend positivement vers l'infini est infinie.

<u>Solution par approximation de l'équation $BE_a(0) = x$:</u>

Mettons-nous au voisinage du $BE(0)$ et cherchons une approximation de a tel que $BE_a(0) = x$.

Supposons que la variabilité par rapport à a des f_t et g_t est négligeable quand la variation de a est faible :

$$dBE_a(0) = PM(0)E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}(f_t + \iota g_t).d\psi_a(t) + g_T.d\psi_a(T)\right)da$$

Donc :

$$dBE_a(0) = PM(0)E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}t(f_t + \iota g_t).\psi_a(t) + Tg_T.\psi_a(T)\right)da$$

Ainsi :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} = \frac{E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T} t(f_t + \iota g_t).\psi_a(t) + Tg_T.\psi_a(T)\right)}{E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}(f_t + \iota g_t).\psi_a(t) + g_T.\psi_a(T)\right)}da$$

La duration du *best-estimate* s'écrit :

$$D_{BE}(a) = \frac{E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T} t(f_t + \iota g_t).\psi_a(t) + T g_T.\psi_a(T)\right)}{E^{P^h \otimes Q}\left(\sum_{t=1}^{T}(f_t + \iota g_t).\psi_a(t) + g_T.\psi_a(T)\right)}$$

Alors :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} = D_{BE}(a)da$$

Si l'on suppose que la variabilité de la duration par rapport à a est faible au voisinage du $BE(0)$ alors :

$$\frac{dBE_a(0)}{BE_a(0)} \backsimeq D_{BE}(0)da$$

Et :

$$BE_a(0) \backsimeq BE_0(0)\exp(D_{BE}(0)a)$$

Ainsi pour de faibles variation de a on peut avoir une indication sur la solution de $x = BE_a(0)$:

$$a \backsimeq \frac{ln(x) - ln(BE(0))}{D_{BE}(0)}$$

Cette solution est notamment utile pour initier l'algorithme d'optimisation en cas de résolution numérique de l'équation : $x = BE_a(0)$.

Cette expression s'interprète comme suit : le taux de distribution a de la richesse A relative à la différence entre un *best-estimate* calculé $BE(0)$ et un *best-estimate* cible x correspond à cette richesse A, divisée par la duration du portefeuille.

8 Annexe 2 : définition de la *moneyness* du passif d'un contrat d'épargne

Dans la littérature, les définitions de la *moneyness* s'accordent pour prendre en compte, dans son évaluation, le rapport entre le *strike* et le prix de marché du sous-jacent prévu à la maturité de l'option. Par exemple :

- Goncalves et Guidolin [2006] et Bernales et Guidolin [2014] proposent la définition suivante de la *moneyness* notée M pour l'échéance T : $M = \frac{\ln\left(\frac{K_T}{S_T}\right)}{\sqrt{T}}$ où S_T est le cours du sous-jacent à la date T.
- Dans d'autres références, la *moneyness* est tout simplement définie comme un rapport entre le *strike* et le prix du marché du sous-jacent (Cont et Fonseca [2001] et Christoffersen et Jacobs [2002]) : $M = \frac{K_T}{S_T}$.

Dans le cas où le sous-jacent verse des dividendes, on peut écrire :

$$S_T = \exp(r_T T).S_0 - FVD_T$$

Le terme FVD_T correspondant aux dividendes futurs jusqu'à l'expiration de l'option et correspond donc à la valeur capitalisée des dividendes versés entre 0 et T.

Si le sous-jacent ne verse pas de dividendes entre 0 et T alors : $S_T = \exp(r_T T)\, S_0$.

Notons que dans ce dernier cas :

$$\frac{K_T}{S_T} = \frac{K_T}{\exp(r_T T)\, S_0} = \frac{K_T \exp(-r_T T)}{S_0} = \frac{K_0}{S_0}$$

La *moneyness* peut se définir donc comme le ratio entre la valeur actuelle du *strike* et l'investissement initial.

Notons également qu'un contrat d'assurance est un contrat de capitalisation. Il ne verse pas de dividendes.

La sommes des valeurs actuelles probables des flux futurs garantis (les *strikes* se matérialisant par les taux garantis) est le $BE_{contr}(0)$ (cf. section 4.1.2).

Pour l'assuré, la valeur initiale de l'investissement est la $PM(0)$. Nous définissons la *moneyness* d'un contrat d'assurance comme le ratio entre le *best-estimate* contractuel et la provision mathématique à t=0 :

$$Moneyness_{assurés}(0) = \frac{BE_{contr}(0)}{PM(0)}$$

L'assureur doit distribuer une richesse initiale à sa discrétion. Cette richesse peut s'ajouter à la $PM(0)$ et jouer le rôle de l'investissement initial. La *moneyness* s'écrit dans ce cas :

$$Moneyness_{assureur}(0) = \frac{BE_{contr}(0)}{PM(0) + richesse_{init}}$$