

# PILOTAGE DE LA PARTICIPATION AUX BÉNÉFICES ET CALCUL DE L'OPTION DE REVALORISATION

Version<sup>1</sup> 1.5 du 29/03/2016

Florent Combes<sup>2</sup> Frédéric Planchet<sup>3</sup> Montassar Tamar<sup>4</sup>

ISFA - Laboratoire SAF<sup>β</sup>

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

## RÉSUMÉ

Le présent article propose une nouvelle approche pour la modélisation du coût de l'option de revalorisation pour des contrats d'assurance vie, permettant d'intégrer explicitement, dans un modèle prospectif, l'effet associé au processus de revalorisation comptable ainsi que celui associé à la consommation des plus-values latentes.

1. CONTEXTE ET OBJECTIFS .....	1
2. LA MODÉLISATION DE L'OPTION.....	3
1. Exemple : le modèle basé sur l'inflation de BONNIN <i>et al.</i> [2015] .....	3
2. Prise en compte de la revalorisation comptable.....	4
a. Modèle de base sans prise en compte explicite des plus-values latentes.....	4
b. Prise en compte des plus-values latentes.....	5
3. CALIBRAGE DU MODÈLE .....	6
4. CONCLUSION.....	12
5. RÉFÉRENCES .....	12
6. ANNEXE : CALCUL NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS D'ACTUALISATION .....	14

### 1. Contexte et objectifs

L'analyse des contrats d'assurance-vie fait apparaître des flux asymétriques dont la forme s'apparente à des flux optionnels classiques en finance de marché. Cette observation a donné lieu dès les années 1990 à de nombreux travaux avec pour objectif la valorisation (au sens de détermination du prix) de ces options. On peut notamment citer le travail fondateur de BRYN et DE VARENNE [1994]. Depuis cette première lecture simplifiée des flux de tels contrats, la plupart des travaux publiés utilisent des descriptions très simplifiées du contrat, notamment de la détermination de la participation aux bénéfices, qui constitue un élément majeur de ces options. On peut par exemple mentionner les articles de HAASE et PERSSON [1996], GROSEN et JORGENSEN [2000], BALLOTTA [2004] ou encore HAINAUT [2003]. Les modèles considérés dans ces articles ne prennent pas notamment en compte l'interaction entre le rendement économique de l'actif et les comptes sociaux qui constitue sans doute

---

<sup>1</sup> Ce travail a bénéficié du soutien de la chaire Management de la Modélisation (<http://isfa.univ-lyon1.fr/m2a>).

Les auteurs remercient Quentin GUIBERT pour ses remarques et suggestions ainsi que le relecteur anonyme dont les observations ont permis d'améliorer l'estimation des paramètres du modèle proposé.

<sup>2</sup> Florent Combes est actuaire, responsable de la gestion des risques à la MNRA.

<sup>3</sup> Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez PRIM'ACT. Contact : [frederic@planchet.net](mailto:frederic@planchet.net).

<sup>4</sup> Montassar Tamar est consultant actuaire chez PRIM'ACT

<sup>β</sup> Université de Lyon, université Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

une particularité du contexte français de l'assurance vie. Les modèles de la littérature se limitent ainsi le plus souvent à considérer la présence d'un taux garanti dans une clause de participation aux bénéfices versée au terme (« *terminal bonus* »).

Avec les règles de calcul des *best estimate* dans le nouveau cadre réglementaire Solvabilité 2 (cf. PARLEMENT EUROPÉEN [2009]), ces approches se sont avérées inadaptées à une mise en œuvre pratique du fait de leur incapacité à la prise en compte des actions des dirigeants dans le modèle de valorisation.

Les praticiens ont donc développé des modèles de projection *ad'hoc* qui, s'ils sont coûteux d'un point de vue numérique s'avèrent assez souples pour répondre aux exigences du régulateur dans le cadre de la construction du bilan prudentiel. Une description détaillée de ces modèles est proposée par exemple dans le chapitre 4 de LAURENT et al. [2016] et une synthèse dans BONNIN et PLANCHET [2013]. Ces modèles utilisent de manière intensive des techniques de Monte-Carlo et s'avèrent mal adaptés aux projections du bilan requises dans le cadre de l'ORSA (*Own Risks Solvency Assessment*) du fait à la fois de leur lourdeur numérique, la convergence des estimateurs empiriques étant relativement lente (voir par exemple sur ce point IFERGAN [2013]), mais aussi de leur nombre de paramètres très élevé, qui pénalise leur pouvoir prédictif (cf. GUIBERT et al. [2014]).

Des propositions d'approche ont récemment été effectuées pour permettre une évaluation simplifiée mieux adaptée à une vision prospective dans le cadre de l'ORSA. On peut sur ce registre citer BONNIN et al. [2014] pour une analyse générale d'un contrat d'épargne et BONNIN et al. [2015] pour une déclinaison dans un contexte de retraite.

Le modèle proposé par ces auteurs utilise pour calculer la valeur de l'option de revalorisation le lien entre la revalorisation des rentes et l'inflation dans le cas particulier d'un régime de retraite. Toutefois, dans le contexte actuel de faible inflation, la valeur de cette option est faible et le modèle ne mesure pas le coût de la revalorisation associée à la participation au bénéfice associée au pilotage à court terme du rendement comptable. De manière simplifiée, on peut dire que l'organisme subit le rendement comptable issu des produits obligataires (tombée et valeur des flux obligataires quasi-déterministes) et pilote le rendement comptable des produits non amortissables pour piloter la revalorisation à court terme.

L'objectif du présent travail est donc d'intégrer, dans le calcul de la valeur de l'option de revalorisation, l'effet associé au processus de revalorisation comptable. Pour cela, on reprend la décomposition des aléas affectant le contrat entre une part répliquable (évaluée sous une probabilité risque neutre) et une part non répliquable (associée aux actions des dirigeants et évaluées sous la probabilité historique) en suivant BONNIN et al. [2014] et on propose une modélisation *ad'hoc* pour l'excès de rendement servi par le contrat au-delà du taux sans risque. L'idée est d'exploiter la convergence à moyen terme du rendement comptable vers le rendement économique pour structurer cet excès de rendement.

On se focalise ici sur le calcul du déflateur, le modèle de projection dans lequel celui-ci peut être ensuite utilisé étant typiquement celui de BONNIN et al. [2015], que l'on généralise donc ici. En particulier, la prise en compte de l'impact des rachats reste ici analogue à l'approche décrite dans BONNIN et al. [2015].

## 2. La modélisation de l'option

On travaille dans un cadre de projection en temps discret dans lequel, en notant  $\rho_k$  le taux de revalorisation de l'épargne ou de la rente à la  $k^{\text{ème}}$  période, il s'agit de proposer un cadre dans lequel on puisse obtenir une expression explicite pour le déflateur applicable aux flux de l'année  $j$  :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left( \delta(j) \times \prod_{k=1}^j (1 + \rho_k) \right) = E^{Q^f} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + \rho_k}{1 + r_k} \right)$$

avec  $r_j$  le taux sans risque instantané pour la période  $j$ ,  $\delta(j) = \prod_{k=1}^j (1 + r_k)^{-1}$  le facteur d'actualisation et  $\cdot Q^f$  une probabilité risque neutre pour les risques financiers. Ce déflateur s'interprète comme le prix de la garantie de revalorisation.

On considère des contrats qui incluent un taux technique ou un taux garanti et doivent donc être revalorisés au moins à ce taux, ce qui implique que le coefficient de revalorisation des flux pour la période  $k$  associé à une génération de contrats de taux technique  $\zeta$  donné est de la forme  $1 + \rho_k = 1 + \zeta + [\omega_k - \zeta]^+$  avec  $\omega_k$  la référence de revalorisation globale.

### 1. Exemple : le modèle basé sur l'inflation de BONNIN et al. [2015]

L'approche de ces auteurs se place dans le cas où  $\omega_k = i_k$  se confond avec l'inflation et on exploite, dans le cadre retenu pour modéliser les facteurs de risque financiers, le lien entre inflation et taux court conséquence de la relation de Fisher (cf. ROSSPOPOFF [2012]). Afin de faciliter les calculs, les auteurs utilisent un développement limité à l'ordre un qui conduit à  $i_t \approx (1 + r_t) \times (1 - R_r(t, 1)) - 1 \approx r_t - R_r(t, 1)$ , avec  $R_r(t, 1)$  le taux court réel, puis, par récurrence, à

$$i_t \approx (1 - \beta)r_t + \beta r_0 - R_r(0, 1).$$

L'inflation de court terme est donc dans ce modèle approchée par une fonction affine du taux court, ce qui permet d'écrire

$$1 - \Delta_k = \frac{1 + \zeta + [(1 - \beta)r_k + \beta r_0 - R_r(0, 1) - \zeta]^+}{1 + r_k}.$$

Dès lors, en se plaçant dans le cadre d'un modèle de taux court gaussien (en probabilité risque neutre), on se ramène au calcul des intégrales suivantes :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + \zeta + [(1 - \beta)r_k + \beta r_0 - R_r(0, 1) - \zeta]^+}{1 + r_k} \right).$$

## 2. Prise en compte de la revalorisation comptable

Compte tenu de l'environnement économique actuel, avec une inflation très faible, le mécanisme ci-dessus conduit à ne pas prendre en compte de revalorisation au-delà du taux technique (ou garanti), ce qui s'avère biaisé par rapport à la réalité.

Au surplus, on souhaite faire apparaître explicitement dans la valorisation l'effet du niveau des plus-values latentes et les objectifs d'utilisation de ces plus-values par les dirigeants.

Le modèle proposé ci-après s'appuie sur une décomposition de l'excès de rendement en deux composantes, l'une associée au rendement des produits de taux et l'autre pour le rendement des produits non amortissables (typiquement les actifs de type « actions »). Le modèle intègre une décomposition entre les composantes répliquable et non répliquable pour refléter au mieux la prise en compte des actions des dirigeants.

### a. Modèle de base sans prise en compte explicite des plus-values latentes

Dans cette première étape, le facteur de revalorisation global s'exprime en fonction du taux de rendement comptable, soit  $\omega_k = \tau \times r_c(k)$ , le taux de rendement comptable étant exprimé en fonction du taux de rendement économique de l'actif comme dans BONNIN et al. [2014]

$$r_c(t) = r(t) + \lambda(t).$$

Le supplément de rendement offert  $\lambda(t)$  est modélisé par un processus de « retour à la moyenne »

$$d\lambda(t) = k_\lambda \times (\lambda_\infty - \lambda(t))dt + \sigma_\lambda dW_\lambda(t).$$

En suivant BONNIN et al. [2014], il est proposé de considérer que ce supplément de rendement, associé aux règles comptables et aux décisions des dirigeants de l'organisme en termes de politique de gestion actif / passif (ALM) et de décisions d'attribution de participation aux bénéfices, n'est pas complètement répliquable.

On utilise comme dans le modèle de BONNIN et al. [2015] un taux court modélisé, sous une probabilité risque neutre, par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = a(r_\infty - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

ce qui conduit à une expression simple pour le processus de revalorisation qui est, avant application du taux technique, gaussien. Ainsi, on peut écrire que :

$$1 - \Delta_k = \frac{1 + \zeta + [\omega_k - \zeta]^+}{1 + r_k} = \frac{1 + i + [\tau \times (r_k + \lambda_k) - \zeta]^+}{1 + r_k}.$$

Dès lors, on se ramène au calcul des intégrales suivantes :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f \otimes P^{nh}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + \zeta + [\tau \times (r_k + \lambda_k) - \zeta]^+}{1 + r_k} \right)$$

en notant, comme dans BONNIN et al. [2014],  $Q^f \otimes P^{nh}$  le produit entre une probabilité risque neutre associée aux risques financiers répliquables et la probabilité  $P^{nh}$  utilisée pour les risques financiers non répliquables. Le calcul se fait par simulation des deux composantes de la revalorisation à savoir le taux court et le supplément de rendement offert, chacune suivant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

### b. Prise en compte des plus-values latentes

Dans le cadre proposé ci-dessus, l'effet de la marge de manœuvre dont dispose l'assureur du fait de la présence éventuelle de plus-values latentes sur des actifs non amortissables (PMVL) n'est pas explicité. Il est pris en compte de manière indirecte au travers du paramètre  $k_\delta$ , qui est *a priori* une fonction décroissante du niveau des plus-values latentes.

On propose ici une variante dans laquelle le niveau des PMVL est explicitement intégré. Dans le modèle global, on utilise le mouvement brownien géométrique pour représenter la dynamique du prix des actifs non amortissables du portefeuille (cf. BONNIN et al. [2015]), que l'on peut assimiler ici au périmètre des actifs concernés par les PMVL

$$S(t) = S(0) \exp \left( \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A W_A(t) \right).$$

En notant  $S_c(t)$  la valeur comptable en  $t$  des actifs non amortissables, égale à leur coût d'achat, alors la dynamique de PMVL est simplement  $PV(t) = S(t) - S_c(t)$  ; une fois spécifiée le comportement de  $S_c(t)$ , on connaît donc celui de  $PV(t)$ . Toutefois, la structure de  $S_c(t)$  est complexe et conditionnée par l'historique des achats (ce processus est non markovien). En notant par ailleurs  $\gamma_t$  la quote-part de PMVL distribuée aux assurés en revalorisation supplémentaire, le taux de rendement global s'écrit à l'aide des provisions mathématiques  $PM(t)$  :

$$r_c(t) = r(t) + \lambda(t) + \gamma_t \times \frac{\max(0, PV(t))}{PM(t)}.$$

Le coefficient  $\gamma_t$  sera considéré ici comme donné de manière exogène, ce qui constitue une simplification. La présence du terme  $x_t = \frac{\max(0, PV(t))}{PM(t)}$  rend le calcul *a priori* délicat et le choix d'une dynamique pour  $S_c(t)$  n'est pas simple ; il est donc proposé de modéliser directement la dynamique de ce ratio en considérant qu'elle est décrite, sous une probabilité risque-neutre, par un processus de Feller (CIR, cf. JUILLARD et al. [2011])

$$dx(t) = k_x \times (x_\infty - x(t))dt + \sigma_x \sqrt{x(t)}dW_x(t).$$

Le paramètre  $x_\infty$  représente alors l'objectif de revalorisation additionnelle associée à la consommation des plus-values latentes (avant application du facteur déterministe  $\gamma_t$ , potentiellement modulable par génération de contrat),  $k_x$  étant lui associé à la vitesse de consommation de ces plus-values.

Les mouvements browniens  $W_x$  et  $W_\lambda$  sont supposés négativement corrélés pour rendre compte du fait qu'une augmentation du niveau de  $\lambda(t)$  conduit, toutes choses égales par ailleurs, à une baisse de  $x(t)$ . Le taux servi avant application du taux garanti s'écrit alors simplement comme la somme de trois processus

$$r_c(t) = r(t) + \lambda(t) + \gamma_t \times x(t).$$

ce qui permet un calcul numérique du coefficient

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f \otimes P^{nh}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1+i + [\tau \times (r_k + \lambda_k + x_k) - i]^+}{1+r_k} \right).$$

L'estimation des paramètres des diffusions  $\lambda$  et  $x$  est un point délicat, abordé ci-après.

### 3. Calibrage du modèle

On s'intéresse ici au calibrage du processus d'excès de rendement  $z(t) = \lambda(t) + \gamma_t \times x(t)$ , qui dépend des paramètres  $(k_\lambda, \delta_\infty, \sigma_\lambda), (k_x, x_\infty, \sigma_x)$  et du coefficient de corrélation  $\rho_{x\lambda}$ .  $\gamma_t$  est, comme indiqué *infra*, une donnée exogène. Il est rappelé que le calibrage doit être réalisé sous la probabilité historique, ce processus reflétant la composante non répliquable du rendement servi par le contrat.

Ces coefficients sont déterminés par le niveau de richesse de l'entité et les règles de gestion en place. Il est proposé de fixer leur calibrage de la manière suivante :

- en utilisant des historiques d'indicateurs de gestion pour l'ensemble des paramètres à l'exception des volatilités  $\sigma_\lambda$  et  $\sigma_x$  ;
- en déterminant les volatilités  $\sigma_\lambda$  et  $\sigma_x$ , en estimant tout d'abord le coefficient de proportionnalité entre ces deux paramètres puis en faisant en sorte que la valeur du *best estimate* issu du modèle soit identique à celle fournie par le modèle « pilier 1 ». Pour plus de robustesse, un calibrage sur un historique de valeurs du pilier 1 pourrait être envisagé.

La justification de cette démarche est que les volatilités  $\sigma_\lambda$  et  $\sigma_x$  capturent les risques financiers exogènes alors que les autres paramètres rendent compte de la politique de gestion actif / passif de la mutuelle. On peut écrire que :

$$dz(t) = d\lambda(t) + \gamma_t dx(t) \\ = \left[ \gamma_t \times k_x \times (x_\infty - x(t)) + k_\lambda \times (\lambda_\infty - \lambda(t)) \right] dt + \gamma_t \times \sigma_x \sqrt{x(t)} dW_x(t) + \sigma_\lambda dW_\lambda(t)$$

On se base sur le tableau illustratif suivant afin d'estimer les paramètres du processus  $z$  :

**Tab. 1 : Données de calibrage**

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Revenus obligations en direct	4,96%	4,34%	4,11%	3,74%	2,96%	2,89%	2,94%	3,20%	3,42%	2,18%	3,46%	3,36%	3,33%
Autres revenus et plus-values	0,28%	0,96%	0,99%	1,26%	3,43%	1,97%	3,17%	1,46%	1,07%	1,10%	0,89%	1,59%	0,87%
Taux sans risque : Swap Euribor 1 an - CRA	2,62%	2,23%	2,27%	2,78%	3,98%	4,54%	2,20%	1,05%	1,16%	1,17%	0,16%	0,30%	0,06%
Taux réalisé	5,24%	5,30%	5,10%	5,00%	6,39%	4,86%	6,11%	4,66%	4,49%	3,28%	4,35%	4,95%	4,20%
lambda	2,34%	2,11%	1,84%	0,96%	-1,02%	-1,65%	0,74%	2,15%	2,26%	1,01%	3,30%	3,06%	3,27%
x	0,28%	0,96%	0,99%	1,26%	3,43%	1,97%	3,17%	1,46%	1,07%	1,10%	0,89%	1,59%	0,87%

On suppose que :

- La ligne « revenus obligations en direct » correspond au taux de rendement comptable (obligataire) et donc à  $r_t + \lambda_t$  ;
- La ligne « autres revenus et plus-values » correspond à la revalorisation issue de la réalisation des PMVL et donc à  $x_t$  ;
- La ligne « Swap Euribor 1 an-CRA » correspond au taux sans risque ou taux court  $r_t$ .

À partir de ces éléments, on déduit un historique de  $\lambda_t$  et du taux réalisé (somme des trois processus  $r_t$ ,  $\lambda_t$  et  $x_t$ ). En ce qui concerne les paramètres de diffusion du processus  $\lambda$ , on propose de les choisir de la manière suivante :

- $\lambda_\infty$  : la valeur long terme du différentiel entre taux de rendement économique et taux de rendement comptable peut être prise à 0 étant donné que les

réinvestissements relatifs au portefeuille obligataire se font au taux de rendement économique  $r_t$  et que la duration de l'actif obligataire est bien inférieure à l'horizon de projection ;

- $k_\lambda$  : en utilisant les propriétés d'un processus d'Orstein-Uhlenbeck (cf. JUILLARD et al. [2011]), comme  $E(\lambda_t) = \lambda_0 \exp(-k_\lambda t) + \lambda_\infty (1 - \exp(-k_\lambda t))$ , avec  $\lambda_0$  la valeur initiale de  $\lambda$ . Le paramètre  $k_\lambda$  peut donc être estimé à l'aide de la « demi-période » du processus, correspondant au temps au bout duquel on divise en moyenne par 2 l'écart à la valeur asymptotique. À l'aide de la relation  $k_\lambda = \frac{\ln(2)}{\text{demi-période}}$ , on obtient directement un estimateur de  $k_\lambda$ . La demi-période, est ici assimilée à la moitié de la duration en années du portefeuille obligataire. Comme la duration est égale à 13,2, la valeur estimée de  $k_\lambda$  est donc égale à 10,5 %.

En ce qui concerne les paramètres de diffusion du processus  $x$ , on propose de les choisir de la manière suivante :

- $x_\infty$  : la valeur long terme du processus  $x$ , peut être calculée comme la différence entre d'une part le taux réalisé à long terme (pris comme la moyenne sur l'historique du taux réalisé soit 4,9 %) et d'autre part la somme de la valeur long terme du taux court (nous avons considéré la moyenne empirique du taux court à la fin de l'horizon de projection estimé à 4,7 %) et  $\lambda_\infty$  (égal à 0). Il est donc égal à 0,2 %.
- $k_x$  : On note par  $F_j$  les montants des flux servis, hors revalorisation, par année de projection  $j$  et permettant de retrouver la PM initiale  $PM = \sum_{j=1} F_j e^{-r \times j}$ . Ainsi, la provision mathématique vue en année  $i$ , hors prise en compte des revalorisations passées et notée  $PM_i$ , est égale à :  $\sum_{j=i+1} F_j e^{-r \times (j-i)}$ .

On peut écrire qu'en  $t=0$ , la PVL existante multipliée par le coefficient  $\gamma$  est égale à la somme actualisée des montants servis en tant que revalorisation des provisions mathématiques<sup>5</sup> via la liquidation de cette PVL initiale. On peut traduire ceci par l'équation suivante :

---

<sup>5</sup> Afin de faciliter les calculs, on fait ici l'approximation que, pour une année de projection  $i$ , la provision mathématique sur laquelle se base la revalorisation est égale la provision mathématique  $PM_i$ , ne tenant pas compte des revalorisations passées.



$$\begin{aligned}
\gamma PVL &= \sum_{i=0} e^{-rx_i} \times E(x_i) \times PM_i \\
\gamma PVL &= \sum_{i=0} e^{-rx_i} \times \left[ x_0 e^{-k_x \times i} + x_\infty (1 - e^{-k_x \times i}) \right] \times PM_i \\
\gamma PVL &= \sum_{i=0} e^{-rx_i} \times \left[ x_\infty + (x_0 - x_\infty) e^{-k_x \times i} \right] \times \sum_{j=i+1} F_j e^{-rx(j-i)} \\
\gamma PVL &= x_\infty \times \sum_{i=0} \sum_{j=i+1} F_j e^{-rxj} + (x_0 - x_\infty) \sum_{i=0} \sum_{j=i+1} F_j e^{-k_x \times i} e^{-rxj} \\
\gamma PVL &= x_\infty \times \sum_{i=1} j F_j e^{-rxj} + (x_0 - x_\infty) \sum_{j=1} F_j e^{-rxj} \sum_{i=0}^{j-1} e^{-k_x \times i} \\
\gamma PVL &= x_\infty \times d \times PM + (x_0 - x_\infty) \sum_{j=1} F_j e^{-rxj} \frac{1 - e^{-k_x \times j}}{1 - e^{-k_x}} \\
\sum_{j=1} F_j e^{-rxj} \frac{1 - e^{-k_x \times j}}{1 - e^{-k_x}} &= \frac{\gamma PVL - x_\infty \times d \times PM}{(x_0 - x_\infty)} \\
\frac{\sum_{j=1} F_j e^{-rxj} \frac{1 - e^{-k_x \times j}}{1 - e^{-k_x}}}{d \times PM} &= F(k_x) = \frac{\gamma PVL}{d \times PM} - x_\infty
\end{aligned}$$

avec :

- Le taux  $r$  correspond au taux d'actualisation constant qui permet d'égaliser la somme des prestations actualisées à la provision mathématique initiale ;
- $d$  correspond à la durée initiale du passif en années.

On en déduit que  $k_x = F^{-1} \left( \theta = \frac{\frac{\gamma PVL}{d \times PM} - x_\infty}{(x_0 - x_\infty)} \right)$ . La fonction  $F(k_x)$  est

décroissante et atteint son maximum égal à 1 en  $k_x = 0$ . La valeur  $k_x$  peut être calculée facilement, par exemple par dichotomie.

Application numérique :

- $r : 2,75 \%$  ;
- $d : 19,6$  ;
- $x_0 : 0,9 \%$  (dernière valeur disponible de  $x$ , prise du tableau 1 ci-dessus) ;
- PVL : 7 M€ ;
- $\gamma : 1$  (on distribue toute les plus-values latentes).

On obtient alors une valeur de  $\theta = 35 \%$ . Il suffit maintenant de trouver la valeur de  $k_x$  tel que  $k_x = F^{-1}(\theta)$ . La valeur estimée de  $k_x$  à travers la résolution de cette équation est 12,2 %.

L'écart type de l'erreur associé à chacun des deux processus  $x$  et  $\lambda$  est estimé à partir d'un historique sur la période de 2002 à 2014. Pour cela, on discrétise suivant le schéma d'Euler

chacun de ces deux processus pour les écrire sous la forme d'une régression linéaire dont on estimera l'écart-type de l'erreur. On écrit donc :

$$\lambda(t+1) = k_\lambda \times \lambda_\infty + (1 - k_\lambda) \times \lambda(t) + \sigma_\lambda N(0,1)$$

$$\frac{x(t+1)}{\sqrt{x(t)}} = \frac{k_x \times x_\infty}{\sqrt{x(t)}} + (1 - k_x) \sqrt{x(t)} + \sigma_x N(0,1)$$

Il s'ensuit que  $\hat{\sigma}_\lambda = 1,3\%$  et  $\hat{\sigma}_x = 7,3\%$  soit  $\hat{\sigma}_\lambda = 18\% \hat{\sigma}_x$ .

La corrélation est calculée comme le coefficient de corrélation entre le processus  $\lambda$  et le processus  $x$  fournis dans le tableau 1. Elle est égale à  $-67\%$ . Le signe de ce paramètre est logiquement négatif. Son niveau est plus délicat à interpréter. La stabilité au cours de temps des différents paramètres doit être suivie.

Globalement, en exprimant la volatilité du processus  $\lambda$  en fonction de celle de  $x$ , le modèle servant à calculer le *best estimate* à la date initiale n'admet plus qu'une seule inconnue à savoir  $\sigma_x$ . Le *best estimate* s'écrit ici :

$$BE_p(0) = \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) E^{P^a}(F_j)$$

avec :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f \otimes P^{nh}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1 + i + [\tau \times (r_k + \lambda_k + x_k) - i]^+}{1 + r_k} \right)$$

Dans le tableau suivant, nous faisons la correspondance entre la valeur du *best estimate* et la volatilité du processus  $\sigma_x$  associée<sup>6</sup> :

---

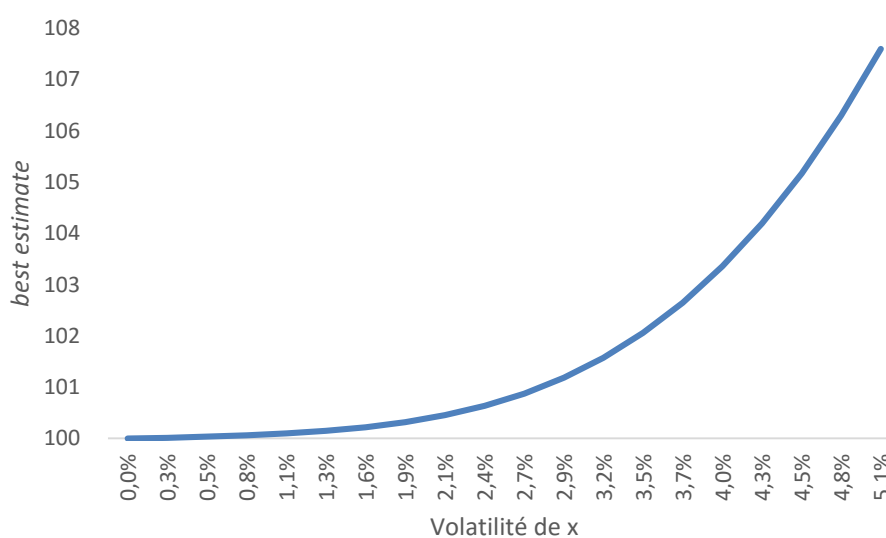
<sup>6</sup> Le *best estimate* sans revalorisation est normalisé à 100.

**Tab. 1 :** *Best estimate* et volatilité  $\sigma_x$  associée

volatilité de x	Valeur BE TOTAL	Coût des options en % du BE
0,0%	100	1,3%
0,3%	100	1,3%
0,5%	100	1,4%
0,8%	100	1,4%
1,1%	100	1,4%
1,3%	100	1,5%
1,6%	100	1,5%
1,9%	100	1,6%
2,1%	100	1,8%
2,4%	101	2,0%
2,7%	101	2,2%
2,9%	101	2,5%
3,2%	102	2,9%
3,5%	102	3,4%
3,7%	103	4,0%
4,0%	103	4,7%
4,3%	104	5,6%
4,5%	105	6,6%
4,8%	106	7,7%
5,1%	108	9,0%

Nous présentons dans le graphique suivant le *best estimate* obtenu en fonction la volatilité du processus  $\sigma_x$  associée.

**Fig. 1 :** *Best Estimate* et volatilité du processus x



#### 4. Conclusion

L'ORSA est au service des décideurs. Il doit permettre de donner une vision prospective, que ce soit pour étudier l'impact de décisions ou bien pour mettre en évidence des situations qui demandent à être gérées en prévention. Pour cela, des outils permettant une évaluation simplifiée s'avèrent très adaptés (temps de calcul, nombre de paramètres), plus souples (évolution du modèle, simplicité pour tester de nouvelles configurations ou règles de gestion) et permettent également une discussion vis-à-vis des choix effectués pour le pilier 1.

Nous proposons ainsi un cadre qui permet d'analyser l'option de revalorisation. Elle est abordée suivant deux approches. L'une tient compte de l'objectif de préserver le pouvoir d'achat. Sa projection s'appuie sur le lien entre l'inflation et les taux courts. L'autre correspond au mécanisme de revalorisation réglementaire via le pilotage du rendement comptable.

Le rendement comptable est modélisé comme la somme de processus dont une part traduit le rendement économique et l'autre le surcroît de rendement pour arriver au rendement comptable. Ce surcroît traduit le décalage de rendement lié à la comptabilisation des actifs au coût amorti ainsi que les choix de réalisation des plus-values latentes sur le reste du portefeuille.

Nous avons proposé une méthodologie pour caler les paramètres de ces processus de manière à être en cohérence avec les calculs du Pilier 1 et la pratique historique.

Ce cadre étant assez parcimonieux, il permet d'effectuer facilement des simulations et d'apporter un éclairage aux décisions concernant le pilotage comptable et autres « management actions » pour la participation aux bénéficiaires.

Cette approche peut également être utilisée pour revisiter la politique de gestion des plus-values latentes du portefeuille en termes de niveau de risque ou de stratégie d'atténuation des pertes extrêmes.

#### 5. Références

AASE K.K., PERSSON S.A. [1996] « [Valuation of the Minimum Guaranteed Return Embedded in Life Insurance Products](#) », Wharton School Working Paper, 96-20.

BALLOTTA L. [2004] « [Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts](#) », Cass Business School, Actuarial Research Paper n°157.

BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2015] « [Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 14, n°28.

BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014] « [Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA](#) », *European Actuarial Journal*, Vol. 4, Issue 1, Page 181-196. <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z>.

- BONNIN F., PLANCHET F. [2013] « [Engagement best estimate d'un contrat d'épargne en Euro](#) », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°185 du 01/11/2013.
- BRIYS E., de VARENNE F. [1994] « Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.
- GROSEN A.; JORGENSEN P. [2000] « [Fair value of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies](#) », *Insurance: Mathematics and Economics*, 26 37-57
- GUIBERT Q., JUILLARD M., NTEUKAM T. O., PLANCHET F. [2014] [Solvabilité Prospective en Assurance - Méthodes quantitatives pour l'ORSA](#), Paris : Economica.
- HAINAUT D. [2009] « [Profit sharing: a stochastic control approach](#) », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°18.
- IFERGAN E. [2013] [Mise en oeuvre d'un calcul de best estimate](#), Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine
- JUILLARD M., PLANCHET F., THÉRON P.E. [2011] [Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition revue et augmentée](#), Paris : Economica (première édition : 2005).
- LAURENT J.P., NORBERG R., PLANCHET F. (editors) [2016] *Modelling in life insurance – a management perspective*, EAA Series, Springer.
- PARLEMENT EUROPÉEN, CONSEIL [2009] « [Directive du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice \(Solvabilité II\) \(Refonte\)](#) », *Union européenne*, PE-CONS 3643/6/09, REV 6.
- ROSSPOPOFF B. [2012] [Modèles de taux et d'inflation pour Solvabilité 2](#), Mémoire d'actuaire, ISFA.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM [2016] « R: A Language and Environment for Statistical Computing », Vienna, Austria, (R Foundation for Statistical Computing), ISBN : 3-900051-07-0.

## 6. Annexe : calcul numérique des coefficients d'actualisation

On rappelle brièvement l'expression des coefficients d'actualisation nécessaires au calcul Best Estimate :

$$\Omega(0, j) = E^{Q^f \otimes P^{nh}} \left( \prod_{k=1}^j \frac{1+i + [\tau \times (r_k + \lambda_k + x_k) - i]^+}{1+r_k} \right)$$

On présente ci-dessous l'algorithme servant au calcul des facteurs d'actualisation :

- 1- Simulation en probabilité risque neutre des 3 processus  $r$ ,  $\lambda$  et  $x$ , suivant une discrétisation exacte pour les processus OU  $r$  et  $\lambda$  et une discrétisation de Milstein pour le processus CIR  $x$ . On utilise les paramètres issus de la partie calibrage de leurs modèles respectifs :

$$r(t+1) = r(t) \times e^{-k_r} + r_\infty \times (1 - e^{-k_r}) + \sigma_r \times \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_r}}{2k_r}} \varepsilon_r$$

$$\lambda(t+1) = \lambda(t) \times e^{-k_\lambda} + \lambda_\infty \times (1 - e^{-k_\lambda}) + \sigma_\lambda \times \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_\lambda}}{2k_\lambda}} \varepsilon_\lambda$$

$$x(t+1) = x(t) + k_x \times (x_\infty - x(t)) + \sigma_x \times \sqrt{x(t)} \varepsilon_x + \frac{\sigma_x^2}{4} \times (\varepsilon_x^2 - 1)$$

- 2- Définition de la fonction  $f$  permettant de calculer l'intégrant des facteurs d'actualisation à savoir :

$$f(i, r[\text{traj}], \lambda[\text{traj}], x[\text{traj}]) = \prod_{k=1}^j \frac{1+i + [\tau \times (r_k[\text{traj}] + \lambda_k[\text{traj}] + x_k[\text{traj}]) - i]^+}{1+r_k[\text{traj}]}, \text{ pour}$$

un taux technique donné  $i$  et une trajectoire  $\text{traj}$  donnée associée à chacun des processus  $r$ ,  $\lambda$  et  $x$ .

- 3- Pour  $i$  allant de  $i_{\min}$  à  $i_{\max}$

DEBUT POUR

Pour  $\text{traj}$  allant de 1 à nombre\_trajectoires\_simulées

DEBUT POUR

$$\text{res}[i] = f(i, r[\text{traj}], \lambda[\text{traj}], x[\text{traj}])$$

FIN POUR

$$\text{omega}[i] = \text{moyenne}(\text{res}[i])$$

FIN POUR