

# CONSTRUCTION DE TABLES DE MORTALITE PROSPECTIVES SUR UN GROUPE RESTREINT : MESURE DU RISQUE D'ESTIMATION

Version 1.1 du 03/11/2012

**Frédéric Planchet\***

**Aymric Kamega<sup>α</sup>**

**Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 / ISFA /  
Laboratoire SAF<sup>γ</sup>**

**Université de Bretagne Occidentale / EURIA / Laboratoire LMBA<sup>π</sup>**

**WINTER & Associés<sup>λ</sup>**

## RESUME

La nécessité de déterminer des provisions *best estimate* conduit les assureurs de régimes de rentes et les régimes de retraite supplémentaires à devoir construire des tables de mortalité prospectives rendant compte des spécificités du portefeuille considéré. Cette construction se heurte à deux difficultés pratiques : un volume de données restreint et une profondeur d'historique d'une dizaine d'année seulement. De ce fait, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de positionnement par rapport à une table de référence externe, souvent dans le cadre d'une régression des *logits* d'expérience sur les *logits* de référence.

La table ainsi obtenue est entachée d'une erreur d'estimation qui a pour conséquence une incertitude sur le niveau de la provision *best estimate* à constituer. On présente alors une méthode de quantification de cette incertitude qui permet, entre autres, de construire des intervalles de confiance sur le niveau de la provision.

---

\* Frédéric Planchet est professeur à l'ISFA, membre du Laboratoire de Sciences Actuarielles et Financière (EA 2429) et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : frederic.planchet@univ-lyon1.fr

<sup>α</sup> Aymric Kamega est maître de conférences associé à l'EURIA, membre associé du Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (UMR 6205) et actuaire chez WINTER & Associés. Contact : aymric.kamega@univ-brest.fr

<sup>γ</sup> Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) – 50 avenue Tony Garnier – 69366 Lyon Cedex 07 – France.

<sup>π</sup> EUro-Institut d'Actuariat (EURIA) – 6 avenue le Gorgeu – CS 93837 – 29238 Brest Cedex 3 – France.

<sup>λ</sup> WINTER & Associés – 43/47 avenue de la grande armée – 75116 Paris – France.

## SOMMAIRE

1. Introduction .....	2
2. Construction des tables de mortalité prospectives .....	4
2.1. Présentation des données disponibles.....	4
2.2. Présentation de la méthode retenue .....	5
2.3. Validation de la table obtenue et présentation des risques .....	7
3. Encadrement des taux bruts au titre des fluctuations d'échantillonnage .....	8
3.1. Intervalles de confiance pour les taux bruts .....	9
3.2. Bandes de confiance pour les taux bruts .....	9
4. Mesure du risque d'estimation : encadrement des tables de mortalité au titre des fluctuations d'échantillonnage .....	12
4.1. Ré-échantillonnage des taux bruts au titre des fluctuations d'échantillonnage et nouvelles constructions de tables.....	12
4.2. Construction d'intervalles de confiance sur les tables à partir des espérances de vie générationnelles partielles .....	14
5. Mesure du risque d'estimation : impacts des fluctuations d'échantillonnage dans les évaluations de l'assureur .....	18
5.1. Impacts sur l'évaluation de la provision <i>best estimate</i> .....	18
5.2. Impacts sur l'évaluation du besoin en capital (Solvabilité 2).....	20
6. Comparaison du risque d'estimation et du risque d'avis d'expert .....	23
7. Conclusion.....	25
8. Bibliographie.....	27

## 1. INTRODUCTION

Comme le rappellent BROUHNS ET DENUIT [2002], dans un régime de rentes le risque viager est transféré de l'assuré à l'assureur. Ce dernier doit alors évaluer son engagement avec des tables de mortalité appropriées, et c'est dans ce contexte que depuis 1993 les tables réglementaires en France pour les rentes viagères sont des tables de mortalité prospectives, prenant en compte l'augmentation de l'espérance de vie.

Aujourd'hui, avec les référentiels Solvabilité 2 et IFRS, les assureurs sont appelés à évaluer leurs engagements d'assurance à partir d'hypothèses réalistes et fines, dans le cadre d'évaluations *best estimate* (cf. PLANCHET et THEROND [2007]). Aussi, pour les régimes de rentes, et plus généralement pour les risques viagers pluriannuels, les assureurs doivent logiquement construire des tables de mortalité prospectives spécifiques, prenant en compte l'évolution attendue de la mortalité de leurs populations assurées.

Dans le cadre de la construction de telles tables, et plus généralement dans le cadre de projections de la mortalité, il est nécessaire de décrire les risques en fonction de leur caractère mutualisable ou systématique, compte tenu des différences existantes entre un aléa frappant différemment les diverses têtes de la population (risque mutualisable) et un aléa frappant de manière systématique l'ensemble de la population (risque systématique, non mutualisable et donc potentiellement plus dangereux pour l'assureur ou le régime).

En reprenant la classification d'Alho, on distingue plus précisément les quatre sources de risques suivantes (*cf.* détails dans BOOTH ET TICKLE [2008] par exemple) :

- le risque mutualisable, dû aux fluctuations de l'espérance empirique autour de l'espérance mathématique, compte tenu des fluctuations d'échantillonnage ;

- le risque systématique d'estimation des paramètres, dû à une mauvaise estimation des paramètres du modèle, compte tenu par exemple des fluctuations d'échantillonnage ;

- le risque systématique de modèle, dû à une mauvaise spécification du modèle ou à un changement de tendance au cours du temps ;

- le risque systématique d'avis d'expert, dû à un mauvais jugement de l'expert lors de la prise en compte d'informations externes.

Le risque mutualisable, relatif au caractère aléatoire des décès individuels (que ce soit pour les observations passées ou pour les prévisions futures, comme le rappelle PITACCO [2004]), n'est pas traité ici et on se concentre dans cette étude sur les risques systématiques. Comme indiqué ci-dessus, les risques systématiques peuvent être répartis en trois classes : le risque d'estimation, le risque de modèle et le risque d'avis d'expert.

En pratique, on considère ici un groupe restreint observé sur un historique relativement court d'une dizaine d'années pour construire des tables et projeter la mortalité, et en termes de risques on se limite aux risques d'estimation et d'avis d'expert. L'attention accordée au risque systématique d'estimation, lié aux fluctuations d'échantillonnage, est due à l'importance des fluctuations d'échantillonnage lorsque le volume de données est restreint (comme le rappelle OLIVIERI [2001] dans son papier sur l'incertitude dans les projections de mortalité). Par ailleurs, l'attention accordée, dans une moindre mesure, au risque systématique d'avis d'expert, lié au choix de la table de référence externe, est justifié par le fait que l'utilisation d'un groupe restreint pour construire la table prospective conduit à utiliser une table de référence externe (*cf.* PLANCHET et LELIEUR [2007]). Le troisième risque systématique, le risque de modèle, n'est pas traité dans cette étude, mais on peut toutefois rappeler ici qu'il s'agit d'un sujet utile qui peut se révéler complexe et pour lequel il existe un espace important pour la recherche future (*cf.* BOOTH et TICKLE [2008]).

En résumé, on se concentre donc ici sur le risque d'estimation des paramètres lié aux fluctuations d'échantillonnage et, dans une moindre mesure, sur le risque d'avis d'expert lié au choix de la référence externe retenue.

Ces deux risques sont des risques systématiques et ne se mutualisent donc pas. Il s'agit ainsi de risques potentiellement dangereux, et susceptibles d'avoir un impact non négligeable dans les évaluations de l'assureur (provision *best estimate*, marge de risque, besoin de capital, coût

des risques non couvrables, etc.). Une réflexion s'impose alors sur la mesure de ces risques dans le cadre de la construction de tables prospectives d'expérience.

Dans ce contexte, cette étude évalue et compare ces deux sources de risques, en accordant notamment une attention particulière au risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage. Ainsi, après avoir présenté dans la section 2 les données et la méthode retenue pour construire et valider la table, on présente dans la section 3 une démarche pour encadrer les taux de décès bruts au titre des fluctuations d'échantillonnage. La section 4 s'attache ensuite à proposer une méthode pour mesurer le risque d'estimation sur les tables au titre de ces fluctuations d'échantillonnage. Cette méthode permet notamment d'obtenir, à partir de simulations, une table de mortalité pour un niveau de quantile donné. Avec cette méthode, il est possible de construire des intervalles de confiance pour les provisions et de déterminer un capital économique associé à ces fluctuations d'échantillonnage sans réaliser de nouvelles simulations (comme illustré dans la section 5). Enfin, la section 6 est consacrée à la comparaison du risque d'estimation dû aux fluctuations d'échantillonnage au risque d'avis d'expert exprimé au travers du choix de l'information externe retenue.

Le problème de l'interdépendance des sources de risques entre les périodes ou entre les âges (*cf.* BOOTH et TICKLE [2008] et LOISEL et SERANT [2007]) n'est pas traité dans ce travail.

## 2. CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITE PROSPECTIVES

Cette section est consacrée à la présentation de la méthode de construction de tables de mortalité prospectives d'expérience par sexe pour l'évaluation et le provisionnement des engagements d'un régime de retraite professionnel.

### 2.1. PRESENTATION DES DONNEES DISPONIBLES

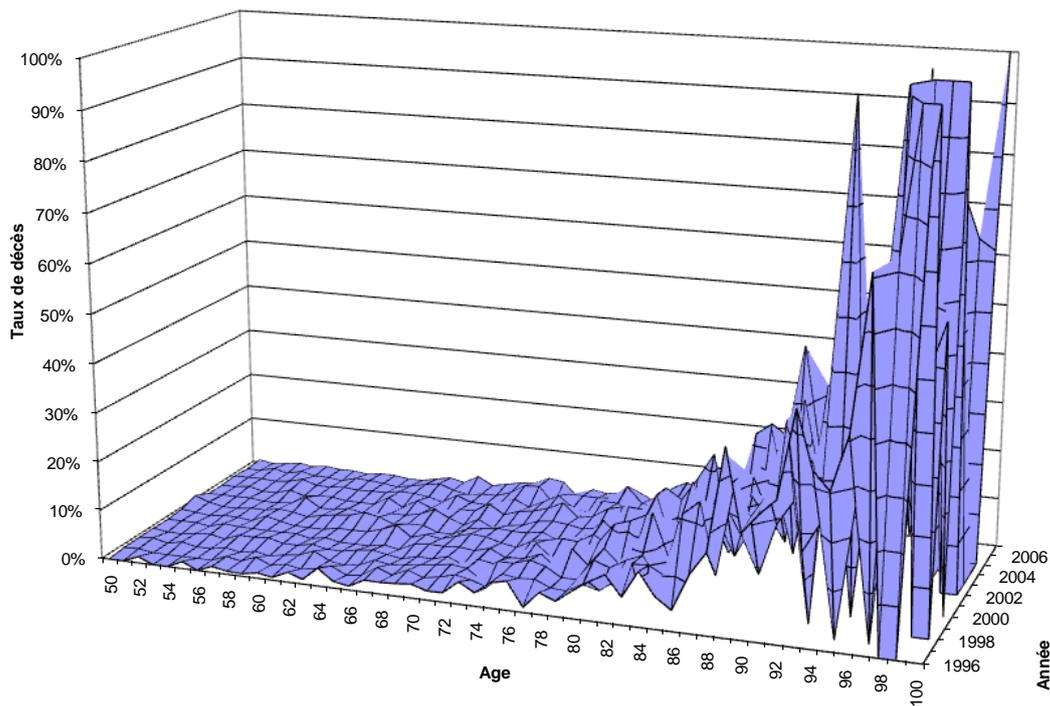
On dispose de données relatives à un régime de retraite de 1996 à 2007 avec une exposition au risque concentrée sur la plage d'âge 50-100 ans. L'exposition annuelle globale est d'environ 20 000 années avec un *sex-ratio* de 40 %.

Les taux bruts, notés  $\hat{q}_{xt}$  pour  $x=50,\dots,100$  et  $t=1996,\dots,2007$ , sont calculés en rapportant le nombre de décès  $d_{xt}$  à l'exposition au risque  $R_{xt}$  (méthode de Hoem<sup>1</sup>), soit :  $\hat{q}_{xt} = d_{xt}/R_{xt}$ . Ils ont l'allure suivante, pour la population masculine :

---

<sup>1</sup> Ce qui s'avère très proche de l'estimateur de Kaplan-Meier dans le cas présent.

Fig. 1 - Taux de décès bruts (hommes)



Cette figure présente des irrégularités dans les taux bruts de décès, directement liées aux fluctuations d'échantillonnage.

## 2.2. PRESENTATION DE LA METHODE RETENUE

Le volume des données utilisables est modeste : avec une exposition au risque annuelle d'environ 8 000 pour les hommes et 12 000 pour les femmes sur les 12 années de la période d'observation, il n'est pas envisageable de proposer une construction endogène des tables d'expérience *via* un modèle classique de type Lee-Carter (*cf.* par exemple LEE [2000]) ou l'une de ses variantes (*cf.* notamment BROUHNS et al. [2002], RENSHAW et HABERMAN [2003] et RENSHAW et HABERMAN [2005]).

Aussi, il a été décidé de s'appuyer sur une référence externe et de construire les tables d'expérience H/F en positionnant la mortalité d'expérience par rapport à cette référence. Les tables réglementaires françaises TGH/F 05 ont été choisies comme référence, compte tenu du fait qu'elles décrivent la survie des rentiers de portefeuilles d'assureurs (*cf.* PLANCHET [2006]). L'ajustement est effectué sur les tables du moment reconstituées de 1996 à 2007. Le modèle utilisé repose sur :

$$\ln\left(\frac{\hat{q}_{xt}}{1-\hat{q}_{xt}}\right) = a \times \ln\left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1-q_{xt}^{réf}}\right) + b + \varepsilon_{xt},$$

où  $\varepsilon_{xt}$  désigne un terme d'erreur à spécifier et  $q_{xt}^{réf}$  représente le taux de décès à l'âge  $x$  l'année calendaire  $t$  pour la table de référence (issue de la table TGH 05 pour les hommes et de la table TGF 05 pour les femmes).

Ce modèle s'apparente au modèle relationnel de Brass ; il présente notamment l'avantage d'éviter l'hypothèse de proportionnalité sous-jacente au modèle relationnel de Cox et d'être moins paramétré que le modèle relationnel de Hannerz (ces trois modèles relationnels sont présentés et comparés dans DELWARDE et al. [2004]).

Par ailleurs, l'utilisation des *logits* dans ce modèle relationnel est justifiée par le fait qu'empiriquement on constate que  $\ln\left(\frac{q_{xt}}{1-q_{xt}}\right)$  est approximativement affine au-delà de 25 ans. Cette observation est à l'origine du modèle paramétrique proposé dans THATCHER [1999]. Dès lors, il est naturel de proposer une relation affine entre les *logits* de différentes tables de mortalité. Au surplus, l'utilisation des *logits* dans un contexte de rentes permet d'introduire une certaine prudence dans l'ajustement des  $q_{xt}$  qui en résulte : en effet, par concavité de la fonction logistique pour des taux de décès inférieurs à  $\frac{1}{2}$ , avec l'inégalité de Jensen on montre que les *logits* sont biaisées négativement si les taux de décès sont estimés sans biais (cf. PLANCHET et THEROND [2006]).

Les taux ajustés du jeu de tables finalement utilisés sont obtenus en inversant la fonction logistique :

$$q_{xt} = \frac{\exp(y_{xt})}{1 + \exp(y_{xt})},$$

$$\text{avec } y_{xt} = \hat{a} \ln\left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1-q_{xt}^{réf}}\right) + \hat{b}.$$

Les paramètres  $\theta = (a, b)$  correspondant sont estimés en minimisant la « distance » sur la base du critère de moindres carrés pondérés suivant :

$$D = \sum_{x,t} R_{xt} (\hat{q}_{xt} - q_{xt})^2,$$

où  $R_{xt}$  représente l'exposition au risque à l'âge  $x$  l'année calendaire  $t$ . Ce critère est proche de celui obtenu par la méthode de De Vylder (cf. DELWARDE et DENUIT [2006] ou PLANCHET

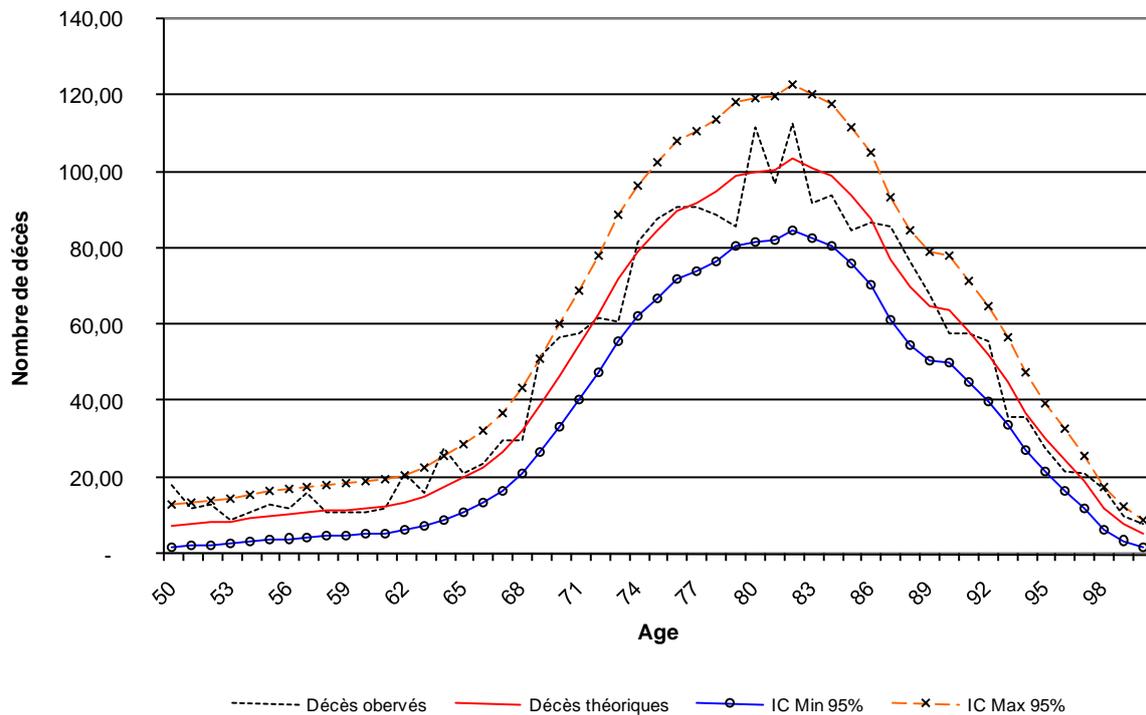
et THEROND [2006]), lorsque l'on ramène la méthode de maximum de vraisemblance à un problème de moindres carrés en utilisant l'approximation de la loi de  $\hat{q}_{xt}$  par une loi normale et en remplaçant la variance théorique par la variance estimée (pour mémoire, dans ce cas le critère s'écrit  $D^{(*)} = \sum_{x,t} \frac{R_{xt}}{\hat{q}_{xt}(1-\hat{q}_{xt})} (\hat{q}_{xt} - q_{xt})^2$ ). Le critère  $D$  retenu ici présente notamment l'avantage d'inclure les observations où les  $\hat{q}_{xt}$  sont nuls, ce qui est fréquent lorsque le groupe de la population assuré est restreint.

L'optimisation est réalisée sur la plage 50-100 ans et sur la période 1996-2007 pour les hommes, puis pour les femmes.

### 2.3. VALIDATION DE LA TABLE OBTENUE ET PRESENTATION DES RISQUES

La table ainsi obtenue est classiquement validée en comparant les décès théoriques et observés âge par âge sur l'ensemble de la période d'observation. En effectuant l'approximation usuelle d'une loi binomiale par une loi normale, on obtient pour les hommes les résultats ci-après :

Fig. 2 - Comparaison par âge des décès théoriques et des décès observés 1996-2007 (hommes)



Les courbes avec des marqueurs représentent les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance ponctuel (IC) à 95 % pour les taux de décès ajustés. On peut formuler deux observations à la lecture de ce graphique :

- les décès observés se situent à l'intérieur des intervalles de confiance théoriques à 95 % sur l'ensemble de la plage d'âge considérée, signe d'une représentation correcte de la réalité par la table d'expérience ;

- l'imprécision est importante, l'erreur relative<sup>2</sup> sur le nombre de décès étant supérieure à 18 % à tous les âges (l'erreur relative globale est d'environ 25 % sur l'ensemble des âges).

On obtient pour les femmes des conclusions analogues avec une erreur relative supérieure à 14 % à tous les âges (l'erreur relative globale est d'environ 20 % sur l'ensemble des âges).

Le niveau élevé des erreurs relatives sur les nombres de décès impose une attention particulière sur l'analyse des risques. En pratique, l'erreur relative entre les décès théoriques et les décès observés est due à plusieurs sources de risques de nature différente :

- pour les décès théoriques, il existe un risque systématique lié à l'incertitude dans la spécification du modèle, dans l'estimation des paramètres et dans le choix de la table de référence externe ;

- pour les décès observés, il existe un risque mutualisable, conséquence directe de la taille finie du groupe entraînant une fluctuation de l'espérance empirique autour de l'espérance mathématique (même si l'on considère que les trois sources de risque systématique sont négligeables, on doit s'attendre à un écart entre les décès théoriques et les décès observés du fait des fluctuations d'échantillonnage).

Dans le cadre de cette étude, on s'attache principalement à apprécier le risque d'estimation des paramètres du modèle (*cf.* sections 4 et 5), c'est-à-dire le risque systématique associé à l'utilisation du calibrage d'une loi de durée dont on sait qu'il n'est pas exact du fait des erreurs d'échantillonnage affectant sa construction. Dans un premier temps toutefois, on apprécie le niveau des fluctuations d'échantillonnage sur les taux de décès observés (*cf.* section 3). L'ensemble des applications numériques présentées est réalisé pour la population masculine uniquement.

### **3. ENCADREMENT DES TAUX BRUTS AU TITRE DES FLUCTUATIONS D'ECHANTILLONNAGE**

Les taux de décès bruts, c'est-à-dire les taux de décès observés, présentent des irrégularités directement liées aux fluctuations d'échantillonnage. Dans cette section on cherche à construire un encadrement des taux de décès bruts au titre de ces fluctuations.

---

<sup>2</sup> Mesurée par la demi-longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %.

En pratique, on cherche notamment à encadrer les taux de décès bruts simultanément sur une tranche d'âges (bandes de confiance, cf. sous-section 3.2), et non uniquement ponctuellement à un âge donné (intervalles de confiance, cf. sous-section 3.1), puisque les tables de mortalité que l'on construit pour le provisionnement sont appliquées à plusieurs âges, et non uniquement à un âge ponctuel donné.

### 3.1. INTERVALLES DE CONFIANCE POUR LES TAUX BRUTS

On cherche ici dans un premier temps un intervalle de confiance pour  $q_{xt}$  (taux de décès théorique) à partir de  $\hat{q}_{xt}$  (taux de décès observé), pour un âge  $x$  et une année  $t$ . Pour mémoire on retient ici l'estimateur de taux bruts de Hoem, qui considère entre autres que les décès suivent une loi binomiale (cf. PLANCHET et THEROND [2006]). On peut alors réaliser l'approximation de la loi de  $\hat{q}_{xt}$  par une loi normale, et en remplaçant la variance théorique

par la variance estimée, on a la loi  $N\left(\hat{q}_{xt}; \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}(1-\hat{q}_{xt})}{R_{xt}}}\right)$ . L'expression approchée des bornes

de l'intervalle de confiance ponctuel de  $q_{xt}$  à l'âge  $x = x_0$  est alors (pour une période  $t$  fixée) :

$$\hat{q}_{xt} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}(1-\hat{q}_{xt})}{R_{xt}}},$$

où  $u_{\alpha/2}$  désigne le quantile d'ordre  $\alpha/2$  de la loi normale centrée réduite et  $1-\alpha$  désigne le niveau de confiance (avec  $\alpha \in ]0,1[$ ). Cette approximation de l'intervalle de confiance permet d'encadrer les taux de décès tel que (pour une période  $t$  fixée) :

$$P\left(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}(1-\hat{q}_{xt})}{R_{xt}}}, x = x_0\right) = 1 - \alpha.$$

### 3.2. BANDES DE CONFIANCE POUR LES TAUX BRUTS

On souhaite désormais encadrer les taux de décès simultanément sur tous les âges  $x$  d'une plage d'âges  $[x_0, x_0 + n]$  (où  $n$  est un nombre entier positif) pour une année  $t$ . L'encadrement des taux de décès correspond donc désormais à une bande de confiance, et non plus à un intervalle de confiance ponctuel.

Dans les analyses de la mortalité, les approches les plus classiques pour construire des bandes de confiance concernent les estimateurs de fonctions de survie. Les méthodes les plus répandues sont notamment les bandes de confiance de NAIR [1984] et celles de HALL et

WELLNER [1980] (*cf.* également l'ouvrage de KLEIN et MOESCHBERGER [2005] sur ce point), qui s'appuient entre autres sur les propriétés de convergence de l'estimateur de Kaplan-Meier pour la fonction de survie.

On souhaite ici construire des bandes de confiance pour les taux de décès, et non pour des fonctions de survie. En pratique, on cherche ainsi  $t(\hat{q}_{xt})$  tel que  $P(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm t(\hat{q}_{xt}), \forall x \in [x_0, x_0 + n]) = 1 - \alpha$ , pour une année  $t$  fixée. À cet effet, on s'appuie sur la méthode d'estimation de Sidak, qui repose sur le principe d'inflation du seuil du test lorsque le nombre de tests augmente (*cf.* par exemple ABDI [2007]).

Pour mémoire, une bande de confiance au niveau de confiance  $1 - \alpha$  sur la plage d'âges  $[x_0, x_0 + n]$  peut être présentée comme une collection d'intervalles de confiance pour les différents âges  $x \in [x_0, x_0 + n]$  construits de manière à avoir un intervalle simultané de probabilité égal à  $1 - \alpha$ . Soit donc  $P(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm t(\hat{q}_{xt}), x = x_0) = 1 - \beta$  l'intervalle de probabilité de niveau  $1 - \beta$  (avec  $\beta \in ]0, 1[$ ) pour  $q_{xt}$  à l'âge  $x = x_0$  et pour une période  $t$  fixée. La probabilité simultanée d'encadrer les taux de décès  $q_{xt}$  aux deux âges  $x = x_0$  et  $x = x_0 + 1$  est alors  $(1 - \beta)^2$ , en supposant l'encadrement indépendant sur ces deux âges. En répétant l'opération de manière à inclure tous les âges de  $[x_0, x_0 + n]$ , il apparaît alors, toujours sous l'hypothèse d'indépendance, que la probabilité simultanée d'encadrer les taux de décès  $q_{xt}$  pour les différents âges  $x \in [x_0, x_0 + n]$  est  $(1 - \beta)^{n+1}$ .

Sur ces bases, on peut ainsi construire une bande de confiance au seuil  $\alpha$  sur la tranche d'âges  $[x_0, x_0 + n]$ , en constituant des intervalles de confiance ponctuels pour chaque âge  $x \in [x_0, x_0 + n]$  au seuil :

$$\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/(n+1)},$$

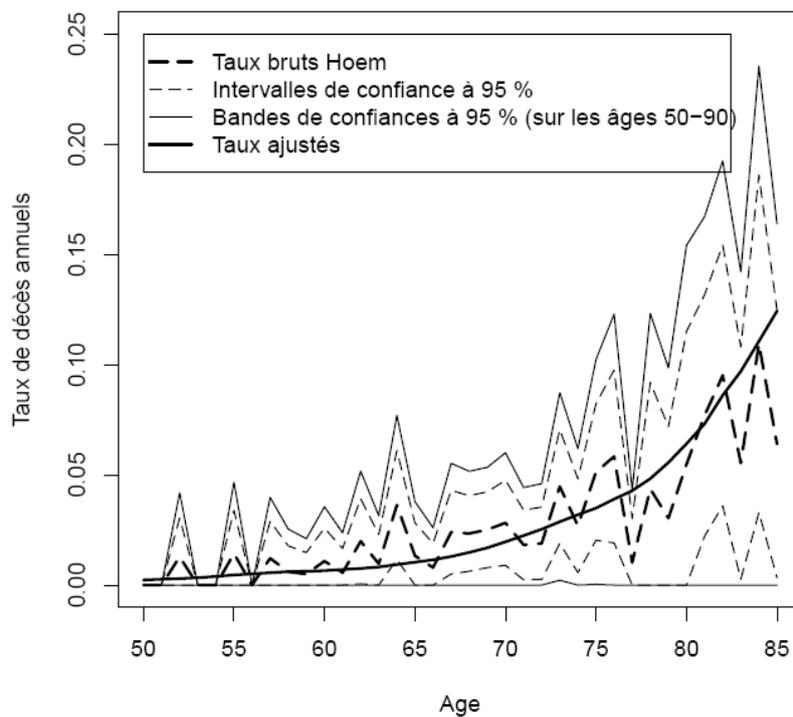
puisque dans ce cas on a bien  $(1 - \alpha) = (1 - \beta)^{n+1}$ . On rappelle ici que la méthode de Sidak ci-dessus est une amélioration de la méthode de Bonferroni (*cf.* par exemple BLAND et ALTMAN [1995]) qui considère que  $\beta = \alpha/(n+1)$ . Aussi, une approximation de la bande de confiance permettant d'encadrer simultanément les taux de décès sur tous les âges  $[x_0, x_0 + n]$  à partir de la méthode de Sidak est (pour une période  $t$  fixée) :

$$P\left(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm u_{\beta/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}(1-\hat{q}_{xt})}{R_{xt}}}, \forall x \in [x_0, x_0+n]\right) = 1-\alpha, \text{ avec } \beta = 1-(1-\alpha)^{1/(n+1)}.$$

Les intervalles et bandes de confiance ci-dessus permettent d'encadrer les taux de décès bruts au titre des fluctuations d'échantillonnage, respectivement pour un âge donné ou sur une tranche d'âges.

La figure ci-dessous illustre les taux bruts, les intervalles de confiance, les bandes de confiance (sur la tranche d'âges  $[x_0 = 50, x_0 + n = 90]$ ) et les taux ajustés des hommes pour l'année 1996. Pour plus de lisibilité, l'illustration graphique est réalisée entre 50 et 85 ans uniquement.

Fig. 3 - Intervalles et bandes de confiance pour l'année 1996 (hommes)



Il apparaît logiquement que les bandes de confiance sont plus larges que les intervalles de confiance. En outre, l'intérêt des bandes de confiance est ici illustré par l'allure des taux de décès théoriques, qui pour mémoire sont construits en prenant en compte les informations sur les décès sur tous les âges retenues pour l'ajustement (en l'occurrence ici les 50-100 ans). En effet, il apparaît qu'entre 50 et 85 ans, les taux de décès théoriques se situent tous dans les bandes de confiance des taux bruts, alors qu'à 77 ans le taux de décès théorique se situe en dehors de l'intervalle de confiance ponctuel. Cette observation confirme donc ici que les bandes de confiance sont plus adaptées pour encadrer les taux de décès bruts sur un ensemble d'âges.

#### 4. MESURE DU RISQUE D'ESTIMATION : ENCADREMENT DES TABLES DE MORTALITE AU TITRE DES FLUCTUATIONS D'ECHANTILLONNAGE

Les irrégularités des taux bruts liées aux fluctuations d'échantillonnage créées une incertitude dans l'estimation des paramètres du modèle retenu pour ajuster les taux de décès (risque d'estimation). La description des taux de décès ajustés par les seules valeurs estimées est donc insuffisante et il est nécessaire de les décrire par des indicateurs numériques complémentaires. À cet effet, on présente ici, entre autres, un encadrement des taux de décès ajustés (et donc du jeu de tables de mortalité prospectives) associé à ces fluctuations d'échantillonnage.

Dans la continuité de ce qui a été présenté dans la section précédente, on cherche ici à encadrer directement les taux de décès ajustés sur un ensemble d'âges (c'est-à-dire la table de mortalité), et non uniquement pour un âge ponctuel donné.

##### 4.1. RE-ECHANTILLONNAGE DES TAUX BRUTS AU TITRE DES FLUCTUATIONS D'ECHANTILLONNAGE ET NOUVELLES CONSTRUCTIONS DE TABLES

On cherche désormais à mesurer l'impact des fluctuations d'échantillonnage sur l'estimation des paramètres du modèle retenu pour ajuster les taux de décès. La démarche retenue à cet effet consiste, dans un premier temps, à ré-échantillonner les taux de décès bruts à partir de la méthode de simulation directe des taux présentée dans KAMEGA et PLANCHET [2010].

Pour mémoire, les taux bruts issus des données d'expérience sont estimés selon l'approche de Hoem, qui considère entre autres que le nombre de décès  $D_{xt}$  suit une loi binomiale  $B(R_{xt}; q_{xt})$ . Dans ce contexte, pour simuler les taux bruts  $\hat{q}_{xt}^k$  on peut s'appuyer sur la simulation du nombre de décès  $d_{xt}^k$  selon  $B(R_{xt}; \hat{q}_{xt}^k)$ , en retenant la méthode de simulation de Monte-Carlo. On en déduit alors pour chaque simulation  $k$  ( $k \in [1, K]$ ,  $K$  étant le nombre total de simulations) :

$$\hat{q}_{xt}^k = d_{xt}^k / R_{xt} .$$

À partir de ces différents taux bruts ré-échantillonnés, on détermine une nouvelle estimation des paramètres  $\theta = (a, b)$ , notés  $\theta^k = (a^k, b^k)$  au titre de la simulation  $k$ , en minimisant la « distance »  $D^k = \sum_{x,t} R_{xt} (\hat{q}_{xt}^k - q_{xt}^k)^2$ . On peut alors facilement obtenir une estimation des taux

ajustés pour la simulation  $k$ , à partir de  $q_{xt}^k = \frac{\exp(y_{xt}^k)}{1 + \exp(y_{xt}^k)}$ , avec  $y_{xt}^k = \hat{a}^k \ln \left( \frac{q_{xt}^{réf}}{1 - q_{xt}^{réf}} \right) + \hat{b}^k$ .

Ces différents taux ajustés issus des simulations  $k$  représentent la dispersion des taux de

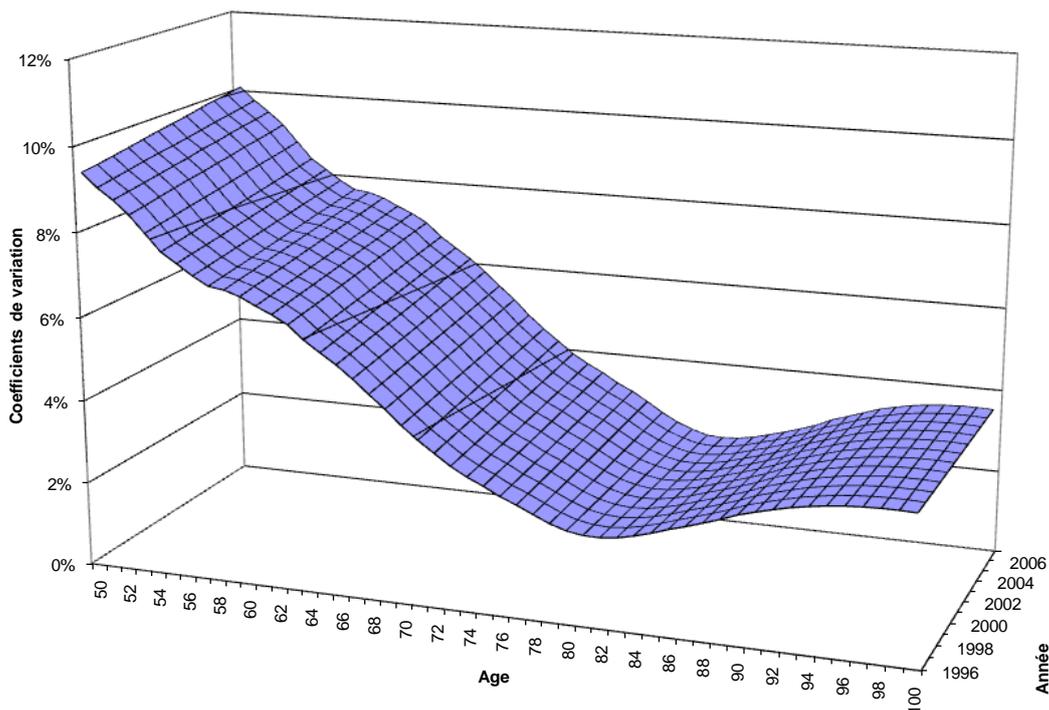
décès ajustés au titre du risque systématique sur l'estimation des paramètres compte tenu des fluctuations d'échantillonnage (risque d'estimation).

Pour quantifier cette dispersion des taux de décès ajustés au titre des fluctuations d'échantillonnage, on calcule une approximation des coefficients de variations des taux de décès, notés  $cv_{xt}$  pour un âge  $x$  et une année calendaire  $t$ . Ces coefficients sont calculés par la relation suivante :

$$cv_{xt} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_k \left( q_{xt}^k - \frac{1}{K} \sum_k q_{xt}^k \right)^2}}{\frac{1}{K} \sum_k q_{xt}^k} .$$

En considérant  $K = 5000$  simulations, on obtient les résultats des coefficients de variation présentés dans la figure suivante.

Fig. 4 - Coefficients de variation des taux ajustés issus des simulations (hommes)



Il apparaît notamment que les coefficients de variation ont tendance à augmenter au fil des années (pour un âge donné), ce qui est cohérent avec la baisse des taux de décès à un âge donné au fil des années (compte tenu de l'amélioration de l'espérance de vie).

En outre, malgré l'augmentation logique des fluctuations d'échantillonnage lorsque l'âge augmente (comme illustrée en page 5 sur la figure relative aux taux de décès bruts des hommes), il apparaît une diminution de la valeur des coefficients jusqu'à 80 ans environ. Cette baisse est liée à la hausse des taux de décès au fil des âges. À partir de 80 ans toutefois,

les coefficients repartent à la hausse, ce qui signifie que l'effet lié à la hausse des taux de décès avec l'âge devient plus faible que l'effet lié à la hausse des fluctuations d'échantillonnage avec l'âge du fait de la baisse de l'exposition.

#### 4.2. CONSTRUCTION D'INTERVALLES DE CONFIANCE SUR LES TABLES A PARTIR DES ESPERANCES DE VIE GENERATIONNELLES PARTIELLES

À l'image de ce qui a été réalisé en 3.2 avec les bandes de confiance sur les taux bruts, on cherche ici à encadrer les taux de décès ajustés au titre du risque d'estimation sur une tranche d'âges dans son ensemble et non uniquement à un âge ponctuel donné. En d'autres termes, on souhaite ici un encadrement d'une table de mortalité au titre du risque d'estimation. L'approche retenue à cet effet consiste à considérer une fonctionnelle propre à chaque table de mortalité qui lui associe un nombre positif, puis à lui appliquer un encadrement. L'espérance de vie générationnelle est de ce point de vue une fonctionnelle naturelle.

##### Construction d'un encadrement pour les tables de mortalité prospectives

On utilise plus précisément l'espérance de vie générationnelle partielle, entre les âges  $x_0$  et  $x_0 + n$  uniquement (avec  $x_0 + n$  inférieur à l'âge limite de la table). En pratique, on ne prend donc pas en compte les âges très élevés (au-delà de  $x_0 + n = 95$  ans par exemple), compte tenu de la faible exposition des effectifs à ces âges (à titre d'exemple, les plus de 95 ans représentent moins de 1 % de l'effectif sous risque chez les hommes dans notre étude) et de leur faible impact dans les analyses (cf. par exemple PLANCHET et THEROND [2006] et QUASHIE et DENUIT [2005] qui illustrent que lorsque les rentiers âgés sont en proportion modeste dans le portefeuille, la fermeture de la table a une importance limitée).

À l'âge  $x = x_0$  et à une date  $t$ , l'espérance de vie générationnelle partielle est notée  $EV_{xt(x:x+n)}$ . On a alors avec les taux ajustés issus des données d'expérience :

$$EV_{xt(x:x+n)} = \sum_{h=1}^n \prod_{u=0}^{h-1} (1 - q_{x+u,t+u}).$$

Ainsi, en considérant les taux ajustés issus des

simulations, on a donc pour la simulation  $k$  :

$$EV_{xt(x:x+n)}^k = \sum_{h=1}^n \prod_{u=0}^{h-1} (1 - q_{x+u,t+u}^k),$$

avec les mêmes notations. Dans la suite, l'espérance de vie générationnelle partielle  $EV_{xt(x:x+n)}$  entre les âges  $x$  et  $x + n$  est notée simplement  $EV_{xt}$  (à l'âge  $x = x_0$  et à une date  $t$ ) pour faciliter la lecture.

L'espérance de vie générationnelle partielle représente les tables de mortalité prospectives sur une tranche d'âges. Pour encadrer ces tables au titre du risque d'estimation avec une probabilité de  $1-\alpha$ , on utilise alors les intervalles de confiance autour de cette espérance de vie générationnelle partielle entre  $x$  et  $x+n$  ans, à l'âge  $x=x_0$  et à une date  $t$  fixé. L'encadrement prend alors la forme suivante :

$$P\left(EV_{xt}^i < EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^s, x = x_0\right) = 1 - \alpha,$$

où  $EV_{xt}^i$  et  $EV_{xt}^s$  représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'espérance de vie générationnelle partielle, et  $1-\alpha$  (avec  $1-\alpha \in ]0,1[$ ) représente la probabilité que l'espérance de vie générationnelle partielle issue de la simulation  $k$  se trouve entre ces bornes.

Compte tenu de l'approche retenue pour illustrer l'impact des fluctuations d'échantillonnage, l'encadrement des tables à partir des espérances de vie est réalisé sur la base des quantiles. On dispose à cet effet à la date  $t=t_0$  de  $K$  espérances de vie générationnelles partielles simulées, déduits des  $K$  simulations des taux de décès (chaque simulation  $k$  de l'espérance de vie générationnelle partielle est calculée à partir de la simulation  $k$  des taux de décès ajustés à partir de la simulation  $k$  des taux bruts aux âges 50 à 100 ans et aux périodes 1996 et 2007).

En considérant un seuil fixé à  $\alpha$ , on retient les quantiles à  $\alpha/2$  et  $1-\alpha/2$  des  $K$  simulations d'espérance de vie générationnelle partielle. On peut alors estimer à une date  $t=t_0$  les bornes  $EV_{xt}^i$  et  $EV_{xt}^s$  par :

$$EV_{xt}^i = \inf \left\{ EV_{xt}^g \in \left[ EV_{xt}^1, \dots, EV_{xt}^K \right] \mid P\left( EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^g \right) \geq \alpha/2, x = x_0 \right\}$$

$$EV_{xt}^s = \inf \left\{ EV_{xt}^g \in \left[ EV_{xt}^1, \dots, EV_{xt}^K \right] \mid P\left( EV_{xt}^k \leq EV_{xt}^g \right) \geq 1 - \alpha/2, x = x_0 \right\},$$

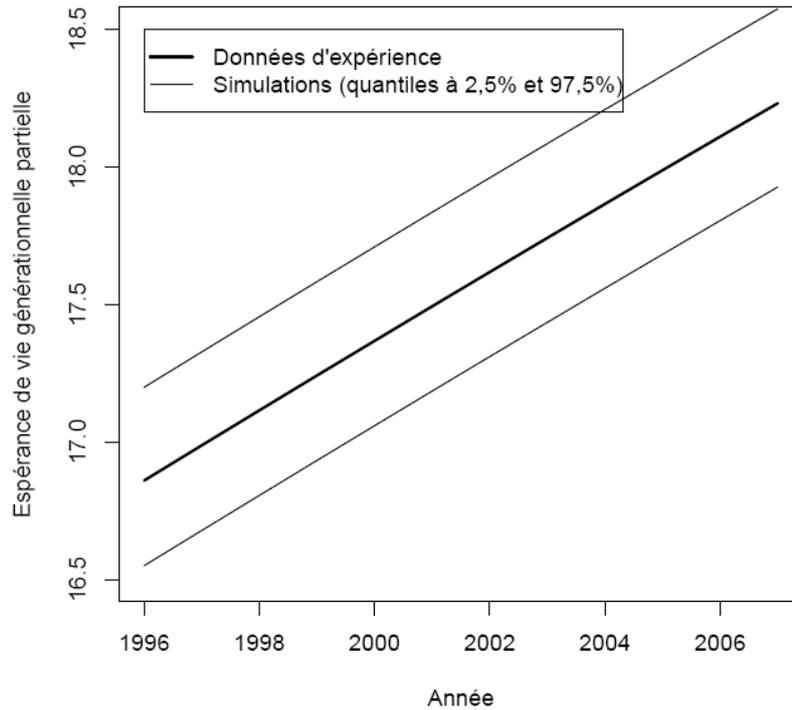
avec  $g \in [1, K]$ , pour un âge  $x = x_0$  et une date  $t = t_0$  fixés. Ces bornes permettent notamment d'en déduire les numéros des simulations  $i$  et  $s$  correspondantes et de sélectionner alors les taux de décès ajustés  $q_{xt}^i$  et  $q_{xt}^s$  associés, pour différents âges  $x \in [x_0, x_0(\text{fin\_table})]$  et différentes dates  $t \in [t_0, t_0(\text{fin\_table})]$ . Au final, on dispose ainsi d'un encadrement de la table de mortalité prospectives d'expérience avec un intervalle de probabilité de  $1-\alpha$ .

### Illustration de l'encadrement des tables de mortalité prospectives

Cet encadrement des tables de mortalité est illustré ci-dessous pour les hommes à partir de l'encadrement des espérances de vie générationnelles partielles entre les âges  $x = x_0 = 67$  et

$x+n=95$ , à l'âge  $x=x_0=67$  ans (âge moyen de la population masculine exposée au risque) et aux périodes  $t=t_0=1996$  à  $t_0+m=2007$ . En d'autres termes, sur la figure ci-dessous, les espérances de vie générationnelles partielles  $EV_{67t}$  sont ainsi encadrées par les bornes  $EV_{67t}^i$  et  $EV_{67t}^s$  (pour  $t \in [t_0, t_0+m]$ ). Le niveau de confiance retenu est  $1-\alpha=95\%$  et on considère toujours  $K=5000$  simulations.

Fig. 5 - Intervalles de confiance à 95 % sur les tables de mortalité prospectives (esp. de vie, hommes)



Il apparaît logiquement que les espérances de vie générationnelles partielles augmentent au fil des années.

Par ailleurs, pour l'année  $t=t_0=1996$  par exemple, il apparaît au titre des fluctuations d'échantillonnage des écarts d'environ 2 % (que ce soit à la hausse ou à la baisse) autour des espérances de vie générationnelles partielles issues des taux ajustés à partir des données.

Ces écarts d'environ 2 % sont observés dans différents scénarios pour l'âge de début et de fin retenu pour le calcul de l'espérance de vie générationnelle partielle, comme l'illustre le tableau suivant (toujours pour l'année  $t=t_0=1996$ ).

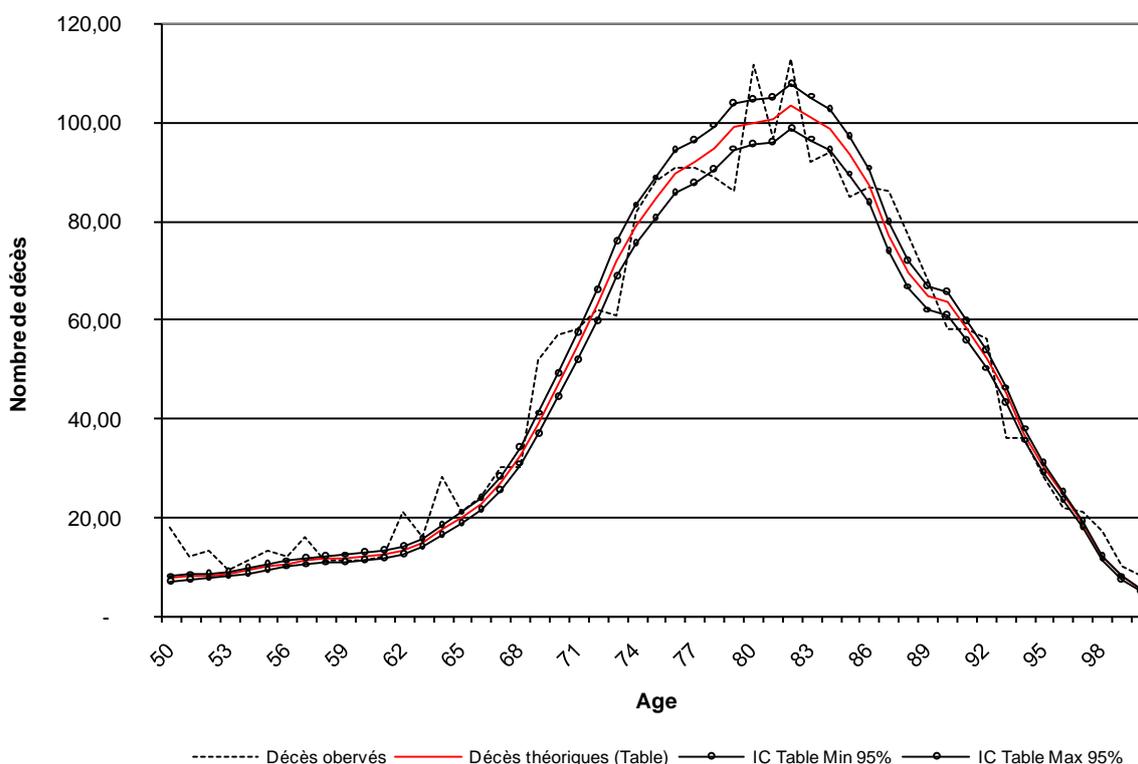
Fig. 6 - Écarts entre les quantiles des esp. de vie et les esp. de vie issues des taux ajustés (hommes)

Esp. de vie gén, partielle (pour $t=1996$ )	Données d'expérience (1)	Simulations à partir des données d'expérience			
		Quantile à 2,5% (2)	Ecart relatif (2)/(1)-1	Quantile à 97,5% (3)	Ecart relatif (3)/(1)-1
Age: 50 / Age fin: 90	32,7	32,2	-1,6%	33,3	1,7%
Age: 60 / Age fin: 90	22,7	22,3	-1,7%	23,1	1,9%
Age: 67 / Age fin: 90	16,1	15,8	-1,7%	16,4	1,9%
Age: 70 / Age fin: 90	13,5	13,2	-1,7%	13,7	1,8%
Age: 50 / Age fin: 95	33,9	33,3	-1,7%	34,5	1,9%
Age: 60 / Age fin: 95	23,6	23,2	-1,8%	24,0	2,0%
<b>Age: 67 / Age fin: 95</b>	<b>16,9</b>	<b>16,5</b>	<b>-1,8%</b>	<b>17,2</b>	<b>2,0%</b>
Age: 70 / Age fin: 95	14,2	13,9	-1,9%	14,5	2,0%

Sur ce tableau, il apparaît en particulier que les écarts des quantiles ne sont pas symétriques, compte tenu du caractère non linéaire de la fonction *logit* retenue pour l'ajustement des taux de décès.

Pour compléter l'encadrement des tables de mortalité, on présente également une comparaison des décès théoriques issus des taux de décès ajustés sur la base des données d'expérience à ceux issus des quantiles à 2,5 % et 97,5 % des taux de décès ajustés sur la base des simulations (simulations au titre des fluctuations d'échantillonnage pour mémoire).

Fig. 7 - Comparaison des décès théoriques à partir des données et des quantiles (1996-2007, hommes)



Les intervalles de confiance présentent ainsi les quantiles à 2,5 % et 97,5 % (simulations *i* et *s*) des tables de mortalité au titre du risque systématique d'estimation des paramètres du modèle retenu.

En particulier, il apparaît que l'erreur relative globale sur l'ensemble des âges au titre du seul risque systématique d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage atteint dans nos illustrations environ 4 %, à la hausse comme à la baisse (pour mémoire l'erreur relative globale au titre de l'ensemble des risques identifiés est égale à environ 25 %, cf. figure page 7).

## 5. MESURE DU RISQUE D'ESTIMATION : IMPACTS DES FLUCTUATIONS D'ECHANTILLONNAGE DANS LES EVALUATIONS DE L'ASSUREUR

Cette section s'attache à présenter les conséquences du risque d'estimation, au titre des fluctuations d'échantillonnage, sur deux variables d'intérêt importantes pour l'assureur : la provision *best estimate* et le besoin de capital de solvabilité.

À cet effet, on considère un régime de rentes en cours de service et une population de rentiers de sexe masculin. La rente annuelle individuelle est supposée égale à 1 € à la date initiale de calcul (0), et est supposée être revalorisée de 2 % chaque année. Le régime prévoit le versement de cette rente jusqu'à 95 ans (pour les raisons évoquées ci-dessus en 4.2).

### 5.1. IMPACTS SUR L'EVALUATION DE LA PROVISION *BEST ESTIMATE*

Dans un premier temps, l'impact du risque d'estimation est mesuré sur la provision *best estimate* de l'assureur. En pratique, il s'agit ici d'une part de présenter la provision *best estimate* calculée avec la table construite à partir des données, puis d'autre part de présenter un encadrement à 95 % de la provision *best estimate* au titre du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage. Dans les deux cas, on évalue des provisions déterministes : pour un jeu de tables donné, on considère ainsi qu'il n'y a pas d'aléa sur la durée de vie restante des assurés (on ne tient donc pas compte du risque mutualisable).

La provision *best estimate* obtenue avec la table construite à partir des données est calculée à la date initiale à partir de la relation suivante :

$$L_0 = \sum_{t=1}^{\omega} F(t) \times (1+r_t)^{-t},$$

où  $r_t$  représente le taux d'actualisation des flux de l'échéance  $t$  (issu de la courbe des taux à la date initiale),  $\omega$  représente la dernière échéance de versement des flux et

$F(t) = \sum_{j \in J} (1+2\%)^{t-1} \prod_{u=0}^{t-1} (1 - q_{x_d(j)+u, t_d+u})$  représente les flux probables des prestations à

payer en  $t$  (à terme échu), avec  $J$  l'ensemble des  $j$  individus du portefeuille,  $x_d(j)$  l'âge

de l'individu  $j$  à la date initiale  $t_d$  et  $q_{x_d(j)+u,t_d+u}$  le taux de décès ajusté issu de la table construite à partir des données d'expérience.

Pour l'encadrement à 95 %, la provision obtenue avec la table correspondant au quantile à 2,5 % (donc issue de la simulation  $i$ ) est notée  $L_0^i$  à la date initiale et est calculée par :

$$L_0^i = \sum_{t=1}^{\omega} F^i(t) \times (1+r_t)^{-t},$$

où  $F^i(t) = \sum_{j \in J} (1+2\%)^{t-1} \prod_{u=0}^{t-1} (1 - q_{x_d(j)+u,t_d+u}^i)$ . De même, la provision obtenue avec la

table correspondant au quantile à 97,5 % (donc issue de la simulation  $s$ ) est notée  $L_0^s$  à la date initiale et est calculée par :

$$L_0^s = \sum_{t=1}^{\omega} F^s(t) \times (1+r_t)^{-t},$$

où  $F^s(t) = \sum_{j \in J} (1+2\%)^{t-1} \prod_{u=0}^{t-1} (1 - q_{x_d(j)+u,t_d+u}^s)$ .

Une illustration de l'encadrement de ces provisions est présentée dans le tableau suivant. On considère à cet effet un échantillon de la population d'expérience utilisée pour la construction de la table. Cet échantillon est composé de 301 têtes masculines, âgés de 59 à 89 ans au 31/12/2009 (date initiale retenue pour l'application numérique) et dont l'âge moyen est 66 ans. Pour mémoire le régime prévoit le versement d'une rente jusqu'à 95 ans, revalorisée annuellement de 2 %. La courbe d'actualisation retenue est la courbe de l'Institut des Actuaire<sup>3</sup> au 31/12/2009.

Fig. 8 - Encadrement de la provision best estimate avec les quantiles des tables à 2,5 % et 97,5 % (hommes)

Provision	Données d'expérience (1)	Simulations à partir des données d'expérience			
		Quantile à 2,5% (2)	Ecart relatif (2)/(1)-1	Quantile à 97,5% (3)	Ecart relatif (3)/(1)-1
	4 752	4 683	-1,4%	4 827	1,6%

Il apparaît ainsi que les bornes de l'intervalle de confiance à 95 % au titre des fluctuations d'échantillonnage encadrent la provision *best estimate* avec un écart d'environ 1,5 %, à la hausse ou la baisse. Cet écart est proche de celui évalué ci-dessus pour l'espérance de vie

<sup>3</sup> Courbe disponible sur le site de l'Institut des Actuaire : [http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc\\_link=../docs/2010003190313\\_IA20091231.xls](http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc_link=../docs/2010003190313_IA20091231.xls).

générationnelle partielle (cf. sous-section 4.2, tableau page 17), mais demeure plus faible compte tenu de l'effet lié à l'actualisation des flux.

## 5.2. IMPACTS SUR L'ÉVALUATION DU BESOIN EN CAPITAL (SOLVABILITE 2)

Dans un second temps, on présente l'impact du risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage en termes de besoin de capital. À cet effet, on se place dans le cadre du dispositif européen Solvabilité 2, dans lequel on cherche le montant de capital dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5 % (cf. article 101 de la Directive dans PARLEMENT EUROPEEN ET CONSEIL [2009]).

Le capital requis doit théoriquement couvrir un ensemble de risques et de sous-risques. Toutefois, dans cette étude on se limite au traitement du sous-risque de longévité du risque de souscription vie, qui pour mémoire représente le « risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau, l'évolution tendancielle ou la volatilité des taux de mortalité, lorsqu'une baisse de ces taux entraîne une augmentation de la valeur des engagements d'assurance » (cf. article 105 de la Directive dans PARLEMENT EUROPEEN ET CONSEIL [2009]).

En particulier, dans cette étude on compare le capital requis au titre du risque de longévité et évalué à partir de l'approche standard (premier cas) au capital requis au titre du risque d'estimation des tables de mortalité prospectives lié aux fluctuations d'échantillonnage (second cas).

### Approche formule standard (risque de longévité)

Dans le premier cas, on s'appuie sur la formule standard (FS). La charge de capital au titre du risque de longévité est alors calculée par :

$$\text{Capital\_FS}_0 = L_0(\text{choc}) - L_0,$$

où  $L_0(\text{choc}) = \sum_{t=1}^{\omega} F_{\text{choc}}(t) \times (1+r_t)^{-t}$ . En considérant la baisse permanente des taux de mortalité de 20 % requise dans les spécifications du QIS5 (cf. EUROPEAN

COMMISSION [2010]), on a  $F_{\text{choc}}(t) = \sum_{j \in J} (1+2\%)^{t-1} \prod_{u=0}^{t-1} (1 - (1-20\%) \times q_{x_d(j)+u, t_d+u})$ .

Sur ces bases, le tableau suivant présente la charge de capital au titre du risque de longévité selon la formule standard du QIS5 (Solvabilité 2).

Fig. 9 - Charge de capital au titre du risque de longévité (formule standard)

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (FS - Longévité) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	316	6,7%

Il apparaît que la charge de capital associée au risque de longévité, qui pour mémoire reflète le risque lié au niveau, à la tendance et à la volatilité des taux de décès ajustés, représente plus de 6,5 % de la provision *best estimate*.

Approche modèle interne partiel (risque d'estimation)

Dans le second cas, on s'appuie sur les démarches retenues pour la constitution des modèles internes partiels (MIP) en assurance de personnes, en se limitant toutefois au risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage. En reprenant l'expression de la charge de capital présentée dans GUIBERT et al. [2010], on a alors (pour le calcul du capital économique dans le cadre d'un modèle interne partiel en assurance vie, on pourra également consulter DEVINEAU et LOISEL [2009]) :

$$\text{Capital\_MIP}_0 = \text{VaR}_{99,5\%} \left( \frac{P_1 + TP_1}{1 + R_1} \right) - TP_0,$$

où  $R_1$  représente le rendement aléatoire des actifs entre 0 et 1,  $P_1$  représente les prestations aléatoires versées entre 0 et 1,  $TP_1$  représente la provision technique à la date 1 calculée à partir des taux de décès simulés ( $TP_1 = L_1 + RM_1$ , avec  $L_1$  représentant la provision *best estimate* à la date 1 calculée à partir des taux de décès simulés et  $RM_1$  représentant la marge pour risque correspondante) et  $TP_0$  représente la provision technique à la date initiale calculée à partir des taux de décès ajustés ( $TP_0 = L_0 + RM_0$ ).

Dans l'expression  $TP_0 = L_0 + RM_0$ ,  $L_0$  est connue et en faisant l'hypothèse que la charge de capital à la date  $t=0$  est proportionnelle à la provision *best estimate*, soit  $\text{Capital\_MIP}_0 = \beta \times L_0$ , GUIBERT et al. [2010] montrent qu'on a  $RM_0 = \alpha \times \text{Capital\_MIP}_0 \times D_0$ , où  $\alpha$  représente le taux d'immobilisation du capital et  $D_0$  représente la durée de l'engagement à la date initiale.

Pour l'expression  $\frac{P_1 + TP_1}{1 + R_1}$ , on considère dans le cadre de cette étude que le rendement des actifs entre 0 et 1 est fixé. On a ainsi  $R_1 = R_1$ . On considère ainsi que les seules sources d'aléa dans  $\frac{P_1 + TP_1}{1 + R_1}$  portent sur les prestations versées  $P_1$  et sur la provision technique

$TP_1 = L_1 + RM_1$ . On suppose par ailleurs que ces aléas sont liés au risque systématique d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage (pour mémoire, on considère qu'il n'y a pas d'aléa sur la durée de vie humaine et donc que la mortalité observée est égale à la mortalité théorique). Pour les prestations versées, on a  $P_1 = F^k(1) = \sum_{j \in J} (1 - q_{x_d(j), t_d}^k)$ , pour

$k \in [1, K]$ . Pour la provision technique, on a la provision *best estimate*

$$L_1 = (1 + R_1) \sum_{t=2}^{\omega} F^k(t) \times (1 + r_t)^{-t} \text{ et la marge pour risque } RM_1 = \alpha \times \beta \times L_1 \times D_1 \text{ (en faisant}$$

l'hypothèse que la charge de capital à la date  $t=1$  est proportionnelle à la provision *best estimate* et en notant  $D_1$  la durée de l'engagement  $L_1$  à la date  $t=1$ ).

En considérant que  $\beta = \text{Capital\_MIP}_0 / L_0 = \text{Capital\_MIP}_1 / L_1$  et en approximant  $D_1$  par  $D_0 - 1$ , PLANCHET ET AL. [2010] en déduisent alors que :

$$\text{Capital\_MIP}_0 \approx \frac{\tau - 1}{1 + \alpha(D_0 - \tau(D_0 - 1))} L_0,$$

où  $\tau = \frac{\text{VaR}_{99,5\%}(\chi)}{L_0}$ , avec  $\chi = \frac{P_1 + L_1}{1 + R_1}$ .

Sur ces bases, le tableau suivant présente la charge de capital au titre du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage (dans le cadre de la construction des tables de mortalité prospectives d'expérience). À cet effet, on fait l'hypothèse que  $\alpha = 6\%$  et que  $R_1 = r_1 + 1\%$ . Par ailleurs,  $\text{VaR}_{99,5\%}(\chi)$  est calculé analytiquement à partir de la table de mortalité correspondant au quantile à 99,5% (sur la base de la méthode présentée en 4.2, c'est-à-dire sélectionnée à partir de l'espérance de vie générationnelle partielle à 67 ans - entre 67 ans et 95 ans -).

Fig. 10 - Charge de capital au titre du risque d'estimation (modèle interne partiel)

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (MIP - Risque estimation) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	92	1,9%

Il apparaît que la charge de capital au titre du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage, qui se limite ainsi principalement à un risque de volatilité des taux de décès ajustés, représente environ 2% de la provision *best estimate*. Aussi, il ressort que la charge de capital au titre du seul risque d'estimation représente environ 30% de la charge de capital au titre du risque de longévité prévue par la formule standard du QIS5.

## 6. COMPARAISON DU RISQUE D'ESTIMATION ET DU RISQUE D'AVIS D'EXPERT

Les sections précédentes présentent le risque d'estimation associé aux fluctuations d'échantillonnage dans les données. Dans cette section on présente également le risque d'avis d'expert au titre du choix du jeu de tables de référence pour l'évaluation de l'évolution tendancielle de la mortalité. En d'autres termes, dans le modèle relationnel de Brass, on cherche désormais à apprécier l'impact du choix du jeu de tables de référence dans

l'estimation des taux de décès ajustés  $q_{xt} = \frac{\exp(y_{xt})}{1 + \exp(y_{xt})}$ , avec  $y_{xt} = \hat{a} \ln \left( \frac{q_{xt}^{réf}}{1 - q_{xt}^{réf}} \right) + \hat{b}$ .

Les tables de référence retenues pour l'ajustement dans les sections précédentes sont les tables réglementaires françaises TGH/F 05. Pour mémoire, ces tables sont construites à partir de données d'expérience et ont elles-mêmes été obtenues à partir d'un positionnement par rapport aux tables de la population générale française de 1962 à 2000 (pour mémoire, les données d'expérience utilisées pour la construction de ces tables réglementaires comptent 700 000 rentiers et 2 000 000 de lignes, et couvrent la période 1993-2005, cf. PLANCHET [2006]).

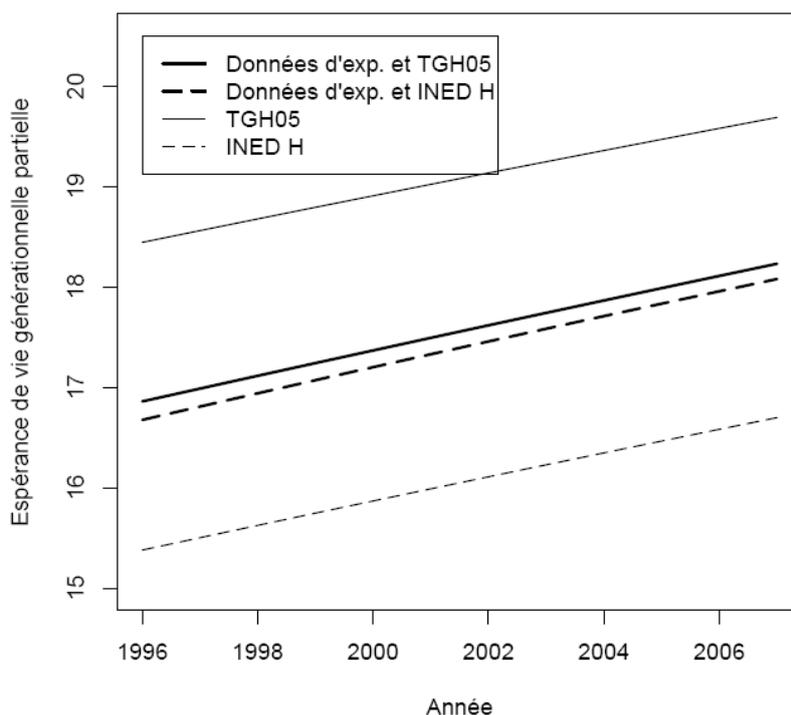
Dans cette section, on compare l'ajustement du modèle à partir de deux jeux de tables de référence différents : d'une part à partir des tables de la population assurée (tables prospectives réglementaires TGH/F 05), et d'autre part à partir des tables de la population générale française (tables prospectives de l'INED<sup>4</sup>). Dans les deux scénarios, la méthode d'ajustement des paramètres  $\theta = (a, b)$  correspond exactement à celle présentée dans la sous-section 2.2 ; seule l'hypothèse relative aux tables de référence évolue dans le deuxième scénario.

Pour les illustrations, à l'image des sections précédentes, on se limite ici à la population masculine. Aussi, une fois les tables ajustées dans chacun de ces scénarios (pour mémoire, pour le premier scénario l'ajustement a déjà été réalisé dans les sections précédentes), on calcule et on compare les espérances de vie générationnelles partielles. Les résultats sont présentés sur la figure suivante (une illustration des espérances de vie issues des tables de référence y est également présentée).

---

<sup>4</sup> Institut National d'Études Démographiques.

Fig. 11 - Évolution des esp. de vie selon le jeu de tables de référence retenu pour l'ajustement (hommes)



En premier lieu, il apparaît logiquement que l'espérance de vie issue des données d'expérience est, dans les deux scénarios, supérieure à celle issue des tables INED de la population générale (compte tenu des effets de sélection et d'anti-sélection au sein de la population d'expérience) et inférieure à celle issue des tables réglementaires TGH 05 de la population assurée (compte tenu de la prudence *a priori* intégrée dans les tables prospectives réglementaires).

Au niveau de la comparaison des deux scénarios, il apparaît en outre que le positionnement par rapport aux tables prospectives de la population générale (INED) conduit à des espérances de vie générationnelles plus faibles que celles issues du positionnement par rapport aux tables prospectives de la population assurée (tables réglementaires TGH 05). En d'autres termes, le choix d'un positionnement par rapport aux tables INED minore la baisse tendancielle de l'évolution de la mortalité de la population d'expérience étudiée (en comparaison avec le choix d'un positionnement par rapport aux tables TGH 05).

L'impact de l'écart dans les estimations selon les deux scénarios est présenté dans le tableau ci-dessous (pour l'année  $t = t_0 = 1996$  uniquement). En particulier, l'impact du risque d'avis d'expert au titre du choix de la table de référence sur l'espérance de vie est comparé avec l'impact du risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage sur l'espérance de vie.

Fig. 12 - Comparaison des esp. de vie selon le jeu de tables de référence retenu pour l'ajustement (hommes)

Esp. de vie gén. partielle (pour t=1996) Age: 67 / Age fin: 95		Ecart relatif avec (1)
Données d'expérience / Positionnement table population assurée (TGH05) (1)	16,9	0,0%
Quantile à 2,5% (simulations et positionnement TGH05)	16,5	-1,8%
Quantile à 97,5% (simulations et positionnement TGH05)	17,2	2,0%
Données d'expérience / Positionnement table population générale (INED H)	16,7	-1,1%
Table population assurée (TGH05)	18,4	9,4%
Table population générale (INED H)	15,4	-8,8%

Il apparaît que le changement de table de référence engendre un écart d'environ 1 % dans l'espérance de vie générationnelle partielle, soit un écart égal à la moitié environ des bornes de l'intervalle de probabilité à 95 % au titre du risque d'estimation (ces bornes correspondant à des écarts d'environ 2 %, à la hausse comme à la baisse).

Dans notre exemple, le risque d'avis d'expert au titre du choix des tables prospectives de référence (tables TGH 05 représentant le niveau et l'évolution tendancielle la mortalité des assurés ou tables INED représentant le niveau et l'évolution tendancielle la mortalité de la population générale) ressort ainsi égal à la moitié du risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage.

## 7. CONCLUSION

Dans cette étude, on propose une mesure du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage des données et, dans une moindre mesure, du risque d'avis d'expert lié au choix de la table de référence externe.

En pratique, l'étude propose ainsi dans un premier temps (section 3) une démarche simple pour construire des intervalles de confiance ponctuels (pour un âge) et des bandes de confiance simultanées (pour une tranche d'âges) sur les taux bruts au titre des fluctuations d'échantillonnage. Ce travail permet notamment d'illustrer l'intérêt des bandes de confiance pour encadrer les taux sur un ensemble d'âges (puisque dans nos illustrations les taux ajustés sont parfois en dehors des intervalles de confiance ponctuels à 95 %, alors qu'ils se situent toujours entre les bandes de confiance simultanées à 95 %).

Dans un second temps (section 4), et dans la continuité de l'encadrement simultané des taux bruts sur plusieurs âges, l'étude menée propose un encadrement des taux ajustés sur plusieurs âges (tables de mortalité), au titre des fluctuations d'échantillonnage, à partir de l'encadrement des espérances de vie générationnelles partielles. Dans notre exemple, cette

méthode d'encadrement permet notamment de constater un écart d'environ 2 % entre la table issue des données et les bornes de l'intervalle de probabilité à 95 % des tables issues des fluctuations d'échantillonnages simulées.

Dans une troisième étape (section 5), l'impact du risque d'estimation sur les évaluations de l'assureur (provision *best estimate* et charge de capital) est mesuré. À cet effet, on considère un régime de rente. Concernant la provision *best estimate*, il ressort un écart d'environ 1,5 % entre la provision calculée à partir de la table issue des données et celle calculée à partir des tables correspondant aux bornes de l'intervalle de probabilité à 95 % des tables issues des simulations. Cet écart est proche de celui observé dans la section 4 pour les espérances de vie, mais ressort plus faible compte tenu notamment de l'effet actualisation. Concernant la charge de capital, il apparaît que le besoin de capital au titre du seul risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage représente environ 30 % du besoin de capital au titre du risque de longévité du projet Solvabilité 2 (QIS5). Sur ce point, on rappelle pour mémoire que le risque de longévité du projet Solvabilité 2 reflète le risque lié au niveau, à la tendance et à la volatilité des taux de décès ajustés à partir des données (*cf.* article 105 de la Directive dans PARLEMENT EUROPEEN ET CONSEIL [2009]).

Dans une dernière étape (section 6), le risque systématique d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage est comparé au risque systématique d'avis d'expert lié au choix de la table de référence externe. Cette comparaison illustre que dans notre exemple le poids dans l'espérance de vie de l'incertitude lié au risque d'avis d'expert (en remplaçant la table de référence relative à la population assurée par une table de référence relative à la population générale) représente la moitié du poids de l'incertitude lié au risque d'estimation. En effet, dans le cas du risque d'avis d'expert les bornes de l'intervalle de probabilité à 95 % présentent un écart d'environ 1 % par rapport à l'espérance de vie issue des données, contre un écart de 2 % dans le cas du risque d'estimation.

Tous ces indicateurs fournissent des informations utiles pour quantifier l'impact et le coût du risque systématique d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage. Il apparaît notamment que ce risque n'est négligeable ni sur le niveau de l'espérance de vie, ni sur la provision *best estimate* et ni sur la charge de capital.

En introduction du présent travail, nous rappelions que « dans un régime de rentes, le risque viager est transféré de l'assuré à l'assureur » (*cf.* également BROUHNS et DENUIT [2002]). Cette présentation pourrait toutefois être précisée en indiquant que le transfert vers l'assureur porte en priorité sur le risque viager mutualisable, la mutualisation des risques entre assurés étant le métier de base de l'assureur. Dans ce contexte, une réflexion semble alors nécessaire sur la prise en charge du risque systématique, en particulier pour le risque systématique d'estimation illustré dans ce travail.

Aujourd'hui la prise en charge de ce risque d'estimation est principalement assumée par l'assureur, qui se constitue à cet effet un capital de solvabilité approprié (*cf.* OLIVIERI [2001]). Demain toutefois, il pourrait être envisagé une prise en charge différente de ce risque systématique d'estimation, au sein d'une configuration consistant, par exemple, à « mutualiser » les risques d'estimation de plusieurs portefeuilles d'assurés (en faisant intervenir un ensemble d'organismes assureurs, une autorité publique, un réassureur, etc.) ou à introduire un tarif, une cotisation et/ou une prestation dynamique, évoluant *a posteriori* au titre du risque systématique d'estimation.

## 8. BIBLIOGRAPHIE

- ABDI H. [2007] « Bonferroni and Sidak corrections for multiple comparisons », *N. J. Salkind (ed.). Encyclopedia of Measurement and Statistics*, Thousand Oaks, CA: Sage.
- BLAND J. M., ALTMAN D. G. [1995] « Multiple significance tests: the Bonferroni method », *BMJ*, Vol. 310.
- BOOTH H., TICKLE L. [2008] « Mortality modeling and forecasting: A review of methods », *The Australian Demographic and Social Research Institute*, WP3.
- BROUHNS N., DENUIT M. [2002] « Risque de longévité et rentes viagères – I. Évolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours », *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 2, No. 1.
- BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J. K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, No. 31.
- DELWARDE A., DENUIT M. [2006] « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.
- DELWARDE A., KACHAKHIDZE D., OLIÉ L., DENUIT M. [2004] « Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 6, No. 12.
- DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] « Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 9, No. 17.
- EUROPEAN COMMISSION [2010] « QIS5 Technical Specifications – Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5 », *European Commission, Financial Institutions*.
- GUIBERT Q., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 10, No. 20.
- HALL W. J., WELLNER J. A. [1980], « Confidence bands for a survival curve from censored data », *Biometrika*, Vol. 67, No. 1.
- KAMEGA A., PLANCHET F. [2011] « Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 11, No. 21.
- KAMEGA A., PLANCHET F. [2010] « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2136.
- KLEIN J. P., MOESCHBERGER M. L. [2005] « Survival Analysis – Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer*, 2<sup>nd</sup> edition.
- LEE R. [2000] « The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications », *North American Actuarial Journal*, Vol. 4, No. 1.
- LOISEL S., SERANT D. [2007] « In the core of longevity risk: hidden dependence in stochastic mortality models and cut-offs in prices of longevity swaps », *Cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2044.
- NAIR V. N. [1984], « Confidence Bands for Survival Functions With Censored Data: A Comparative Study », *Technometrics*, Vol. 26, No. 3.
- OLIVIERI A. [2001] « Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective », *Insurance Mathematics & Economics*, No. 29.

- PARLEMENT EUROPÉEN, CONSEIL [2009] « Directive du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance (Solvabilité II) (Refonte) », *Union européenne*, PE-CONS 3643/6/09, REV 6.
- PITACCO E. [2004] « Survival models in a dynamic context: a survey », *Insurance Mathematics & Economics*, No. 35.
- PLANCHET F. [2006] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation », Document de travail, Institut des Actuaire.
- PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Utilisation des méthodes de Lee-Carter et log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillon », *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 7, No. 14.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2007] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2006] « Modèles de Durée – Applications actuarielles », *Economica*.
- QUASHIE A., DENUIT M. [2005] « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges », *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain*, WP.
- RENSHAW A., HABERMAN S. [2003] « Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement », *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 33.
- RENSHAW A., HABERMAN S. [2005] « Mortality Reduction Factors Incorporating Cohort Effects », *Actuarial Research Paper (Cass Business School)*, No. 160.
- THATCHER A.R. [1999] « The Long-term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age. », *Journal of the Royal Statistical Society* 162 Part 1: 5-43.