Un modèle d'équilibre partiel d'arbitrage multifactoriel : l'écueil des primes de risque des facteurs

---

José ZEMMOUR
Centre d'Economie et Finances Internationales
UMR 6126, CNRS - Université de la Méditerranée

L'introduction du calcul stochastique en finance a mis en exergue le principe de constitution de portefeuilles dans le respect de l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage et a favorisé l'émergence de nouvelles modélisations que nous qualifierons de "deuxième génération" (en opposition aux modélisations traditionnelles) qui déterminent de manière analytique une structure par terme des taux d'intérêt à partir du concept d'arbitrage. La démarche basée sur l'identification de la dynamique des variables aléatoires puis l'élaboration de portefeuilles sans risque permet de déduire la gamme des taux à partir du prix d'obligations zéro-coupon. Il convient dans ce cadre théorique de définir les processus suivis par les variables d'état du modèle et de spécifier la forme fonctionnelle des primes de risque qui leur sont associées. Malgré l'accroissement du nombre de variables explicatives et la nature des processus adoptés, la forme de la solution reste bien souvent non explicite et vient buter sur le processus de prix de marché des risques associés aux facteurs explicatifs du modèle.

Classification *JEL.* : E43; G13;

Mots-clés : Taux d'intérêt – Structure par terme – Absence d'Opportunité d'Arbitrage – Variables d'état – Primes de risque.

Document de travail
N° 2002/06
Juin

1 Introduction

Les approches de la structure par terme des taux d'intérêt qualifiées de "deuxième génération" qui se sont développées au début des années 1980 reposent sur deux postulats :

- Le principe d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (A.O.A.).
- Une meilleure explication des primes de terme présentes dans les modèles.

La démarche théorique consiste à créer des portefeuilles libres d'arbitrage, à déduire le prix d'équilibre des instruments, et à extraire la structure par terme des taux d'intérêt, celle-ci dépendant de la dynamique des facteurs (variables d'état) qui commandent l'évolution des taux, et des primes de risque associées à ces variables d'état. Les dynamiques peuvent être exogènes (définies à priori) et constituent le courant des modèles d'équilibre partiel, ou au contraire être endogènes (définies à posteriori) et constituent le courant des modèles d'équilibre général. Le plan de cet article est le suivant, la section 2 présente les éléments constitutifs des modèles factoriels, à savoir les hypothèses de base permettant d'identifier les variables d'état qui déterminent la valorisation d'un portefeuille dans le cadre du respect de la condition d'arbitrage et qui aboutissent à la formalisation d'une équation fondamentale. La section 3 met en évidence une modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt dans le cadre d'une approche à trois facteurs, la section 4 aboutit à la conclusion que la présence de primes de terme associées aux facteurs explicatifs du modèle ne rend pas explicite la solution.

2 La logique des modèles factoriels

La structure de base des modèles d'évaluation relative permet de définir l'ensemble des hypothèses qui prédominent dans la construction d'un portefeuille répliquant parfaitement la chronique des *cash-flows* de l'instrument à évaluer, et permet d'égaliser le prix de l'instrument à la valeur du portefeuille sous l'hypothèse d'A.O.A. Cette méthodologie développée par F. Black et M. Scholes [1973] dans un modèle d'évaluation d'options sur des actifs financiers a été appliquée à la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt et de la structure par terme des risques par R.C. Merton [1973a, 1974]. Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

Hypothèse 1 : Les marchés financiers sont sans friction (pas de taxes, ni coûts de transaction, tous les instruments sont parfaitement divisibles).

Hypothèse 2 : L'équilibre des marchés est réalisé en continu, et il existe un taux d'intérêt unique sans risque pour réaliser toutes les opérations d'emprunts et de prêts.

Hypothèse 3 : La maturité résiduelle est la seule caractéristique qui permette d'opposer les instruments dont sont extraits les taux.

Hypothèse 4 : Il existe une logique factorielle des modèles qui lie la dynamique du prix des actifs à la dynamique des variables d'état qui sont autant de sources de risque à identifier. La démarche suit trois étapes :

- Identification du nombre et de la nature des facteurs sous-jacents (variables d'état sources de risque).
- Mise en évidence de la dynamique temporelle de chacun de ces facteurs.
- Extraction de la valeur fondamentale (*fair price*) du prix des actifs contingents à cette dynamique.

Hypothèse 5 : La méthodologie consiste à construire un portefeuille d'actions et d'options tel que dans l'optique d'une restructuration continue, le portefeuille est sans risque, c'est à dire que son rendement instantané est égal au taux d'intérêt sans risque du marché.

La transposition de cette modélisation au domaine des taux d'intérêt pose deux problèmes :

- Le modèle suppose la constance du taux sans risque, ce qui représente une démarche acceptable s'il s'agit de valoriser une option sur un instrument de taux long, mais qui ne peut être retenue dans le domaine de l'explication de la déformation stochastique de toute la gamme des taux.
- Le modèle suppose une volatilité constante, hypothèse qui n'est pas admissible pour caractériser le prix d'un instrument de taux dont on sait que la volatilité dépend positivement de sa maturité résiduelle, et oblige donc à spécifier la structure par terme de la volatilité.

La modélisation de F. Black et M. Scholes [1973] est basée sur une variable d'état (c'est à dire un facteur explicatif de la déformation de la courbe) qui est un actif négocié sur le marché, dont le prix observé est accepté comme facteur exogène du produit dérivé, alors que dans les modélisations de la structure par terme des taux, la variable d'état ne représente pas un actif négocié sur un marché. Il convient donc de définir des processus permettant de prendre en considération l'inconstance de la volatilité et l'existence d'une structure par terme de celle-ci. La problématique de la gestion de portefeuille est d'identifier les différentes sources de risque associées à la dynamique de la structure par terme des taux afin de sélectionner un sous-ensemble de titres offrant la meilleure protection contre le risque, cette démarche se décompose ainsi en trois étapes :

- Identification des N sources de risque (variables d'état dont dépend la structure par terme des taux).
- Constitution d'un portefeuille de $N-1$ titres zéro-coupon non risqués dont le rendement est égal au taux sans risque, ce qui conduit à l'élaboration d'une équation fondamentale de valorisation que doit vérifier le prix de tout zéro-coupon dans le cadre de l'hypothèse d'A.O.A.
- Déduction de la structure par terme des taux d'intérêt.

L'objectif des modèles factoriels est d'expliquer la démarche fondamentale d'extraction du prix des zéro-coupon et de la structure par terme des taux de rendement dans le cas où il existe *N* facteurs de risque. Nous reprenons ci-après l'ensemble des hypothèses et définitions utilisées[1] :

Hypothèse 1 : Soit Y_n l'ensemble des *N* variables d'état dont les valeurs courantes spécifient complètement toute l'information significative pour les investisseurs, et suivent conjointement un processus d'Itô multidimentionnel à $K \leq N$ chocs aléatoires. Chaque variable d'état subit les mêmes chocs exogènes mais y répond différemment par les paramètres personnalisés σ_n, ce qui génère une corrélation des changements en *t* des variables d'état (σ_Y^2 est une matrice carrée de dimension *N*).

Hypothèse 2 : Les variables d'état sont de type markovien, leurs mouvements sont déterminés par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\underset{(N\times 1)}{dY_n(t)} = \underset{(N\times 1)}{\mu_n(Y,t)}dt + \underset{(N\times K)}{\sigma_n'(Y,t)}\underset{(K\times 1)}{dz(t)} \qquad (1)$$

μ_n représente le changement anticipé par unité de temps de la *n-ième* variable d'état.

$z(t)$ est un processus de Wiener standardisé de dimension *K*.

σ_n est un vecteur de dimension *K* mesurant la réponse de la *n-ième* variable d'état à chacune des $K \leq N$ sources d'incertitude de l'économie.

$\sigma_n' \sigma_m$ représente la covariance des changements des *n-ième* et *m-ième* variables d'état.

$\{\sigma_n' \sigma_m\}$ représente la matrice variance-covariance qui est positive semi-définie, de rang *K* (et définie positive si *K* = *N*).

Hypothèse 3 : Les investisseurs sont insatiables préférant détenir plus de richesse. Ils sont suffisamment tolérants au risque pour être disposés à détenir des actifs risqués à des taux de rendement futurs fixes, ainsi tous les actifs sont évalués de telle manière qu'aucun n'est dominé, et le marché des actifs risqués peut atteindre un équilibre. Les marchés d'actifs sont supposés parfaits et sans friction.

Hypothèse 4 : Tous les investisseurs croient en l'économie décrite dans les hypothèses 1 et 2 et ont des estimations homogènes des paramètres. Cette hypothèse permet de lier la dynamique des prix aux paramètres des variables d'état, car les décisions d'offre et de demande sont conditionnées à l'information pertinente détenue en *t*.

Hypothèse 5 : Tous les marchés sont compétitifs et chaque investisseur peut acheter ou vendre autant d'actifs qu'il le souhaite au prix de marché. Sur ces marchés, les échanges ne peuvent avoir lieu qu'à l'équilibre.

[1] J.C. Cox, J.E. Ingersoll et S.A. Ross [1981] (CIR par la suite).

Hypothèse 6 : Il existe un marché où les prêts et emprunts instantanés se réalisent au taux sans risque *r*. Les titres sont des obligations zéro-coupon de valeur faciale égale à l'unité, exempts de tout risque de défaut.

Dans le cadre d'une modélisation en temps continu, le prix à l'instant *t* d'une obligation d'échéance T ($t \leq T$), est défini par la fonction : $P(t,T)$. Pour une maturité $S \equiv T - t$, nous avons la condition terminale suivante : $P(T,T) \equiv 1$. Le taux de rendement interne d'une obligation de prix $P(t,T)$, noté $R(t,T)$, est un taux de rendement qui appliqué continûment à un investissement de montant $P(t,T)$ en *t*, permet d'obtenir une unité monétaire en *T*.

$$P(t,T) = \exp\{-R(t,T)S\} \equiv 1 \tag{2a}$$

$$P(t,T) \equiv \exp\{-R(t,T)S\} \tag{2b}$$

$$R(t,T) = -\frac{\ln\{P(t,T)\}}{S} \tag{2c}$$

$R(t,T)$ représente la structure par terme des taux d'intérêt en *t*. Le taux d'intérêt instantané au comptant ($r(t)$) est égal à la limite du rendement d'une obligation dont la maturité tend vers 0, ce qui nous donne :

$$r(t) \equiv \lim_{T \to t} R(t,T) \tag{3}$$

En prenant la valeur de $R(t,T)$ dans (2c) et en reportant dans (3), il vient :

$$r(t) = \lim_{T \to t} -\ln\left\{\frac{P(t,T)}{S}\right\} \tag{4}$$

Pour $t = T \Rightarrow \begin{cases} \ln P(T,T) = \ln 1 = 0 \\ S = 0 \end{cases}$

En utilisant la règle de l'Hôpital[2] nous obtenons :

$$r(t) = \lim_{T \to t} \left\{\frac{P_t(t,T)}{P(t,T)}\right\} \tag{5}$$

- $P_t(t,T)$ représente la dérivée partielle de $P(t,T)$ par rapport à *t*.

Avec la condition terminale $P(T,T) \equiv 1$, nous obtenons :

$$r(t) = P_t(t,t) \tag{6}$$

Le taux de croissance d'un investissement sans risque (*W*) pendant un intervalle de temps très court (*dt*) s'exprime par :

[2] Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur un voisinage de *a* telles que :
$f(a) = g(a) = 0$ ou $f(a) = g(a) = +\infty$, alors :
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, où *L* peut représenter une limite finie ou infinie.

$$dW = Wr(t)dt \tag{7}$$

Nous venons d'exposer l'ensemble des hypothèses de base d'un modèle d'arbitrage à *K* facteurs, nous présentons ci-après les trois étapes conduisant à l'élaboration d'une équation de structure par terme des taux d'intérêt.

2.1 L'identification des *N* variables d'état (lien entre variables d'état et prix des obligations)

Le processus *Y* étant un processus d'Itô, celui-ci est par définition toujours markovien et conduit ainsi à l'élimination de son histoire (si l'on se place en *t*, tous les événements avant *t* ne sont d'aucune utilité), mais également à l'élimination de son futur (tous les mouvements après *t*), seule l'information en *t* sur le processus *Y* est suffisante, ce qui nous donne :

$$P(t,T) = P(Y,t,T) \tag{8}$$

$$r(t) = r(Y,t) \tag{9}$$

La fonction prix, en qualité de fonction d'un processus d'Itô (*Y)* est elle-même un processus d'Itô, il en est de même pour le taux de rendement instantané d'une obligation (par application du Lemme d'Itô). Soit $P(Y,t,T)$ le prix courant en *t* d'une obligation versant une unité monétaire en *T*, le pourcentage de variation instantanée du prix de l'obligation peut être décomposé entre le taux de rendement anticipé d'équilibre et le taux de variation non anticipé du rendement dû au changement aléatoire des variables d'état. Le taux de rendement instantané en *t* d'une obligation d'échéance *T* est donc égal à l'expression :

$$\boxed{\frac{dP(Y,t,T)}{P(Y,t,T)} = \alpha(Y,t,T)dt + \delta'(Y,t,T)\,dz(t)} \tag{10}$$

- $\alpha(Y,t,T)$ représente l'espérance mathématique du taux de rendement instantané (taux de rendement anticipé).

- $\delta(Y,t,T)$ représente la matrice (*K X 1*) dont l'élément général $(\delta_k(Y,t,T))$ représente la volatilité non anticipée de $\frac{dP}{P}$ générée par les fluctuations imprévues de *Y* sous l'effet de la *k-ième* source d'incertitude.

La variance totale est égale à : $\delta'\delta$, et en utilisant le Lemme d'Itô, nous obtenons :

- L'expression de l'espérance mathématique (ou terme de tendance) du processus[3] :

$$\alpha(Y,t,T)P(Y,t,T) = \left\{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y\mu + P_t\right\}$$
$$\alpha(Y,t,T) = \frac{1}{P}\left\{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y\mu + P_t\right\} \quad (11)$$

- L'expression de la variance (ou volatilité) du processus[4] :

$$\delta'(Y,t,T)P(Y,t,T) = P_Y\sigma$$
$$\delta'(Y,t,T) = \frac{1}{P}\{P_Y\sigma\} \quad (12)$$

2.2 Valorisation du portefeuille sous l'hypothèse d'A.O.A. (respect de la condition d'arbitrage)

Les modèles de la "nouvelle génération" sont basés sur le principe de non-arbitrage, c'est à dire que les conditions de marché sont suffisantes pour assurer qu'il n'existe pas d'opportunité de profit sans risque donc que les prix de marché sont des prix d'équilibre. La démarche adoptée est la suivante :

- Construction de deux portefeuilles composés différemment mais avec des caractéristiques de risques identiques.
- Egalisation de leurs taux de rendement.

Le premier portefeuille totalement investi au taux sans risque ($r(t)$) a comme taux de rendement certain, ($r(t)$). Ce portefeuille sert de référence pour construire un portefeuille sans risque instantané.

Le deuxième portefeuille suit la stratégie suivante consistant en l'investissement de V unités monétaires dans K + 1 obligations de maturités distinctes dans des proportions x_i. Le taux de rendement réalisé sur ce portefeuille est :

---

[3] Afin de ne pas alourdir les formulations, nous avons supprimé les indices et par voie de conséquence, les opérateurs mathématiques. L'expression exacte serait la suivante :

$$\alpha(Y,t,T)P(Y,t,T) = \sum_{n=1}^{N} P_{Y_n}\mu_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} P_{Y_n}P_{Y_m}\sigma'_n\sigma_m + P_t$$
$$\equiv L[P(Y,t,T)] + P_t$$

L représente le *Dynkin* ou générateur différentiel des variables d'état

[4] L'expression est de la forme : $\delta'(Y,t,T)P(Y,t,T) = \sum_{n=1}^{N} P_Y\sigma'_n$. La réponse à la *k-ième* source d'incertitude est : $\delta_k = \frac{1}{P}\sum P_Y\sigma_{nk}$.

$$\frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^{K+1} x_i \frac{dP(Y,t,T_i)}{P(Y,t,T_i)} \tag{13}$$

En utilisant l'expression (10), nous obtenons :

$$\frac{dV}{V} = \left[\sum_{i=1}^{K+1} x_i \alpha(Y,t,T_i) \right] dt + \left[\sum_{i=1}^{K+1} x_i \delta'(Y,t,T_i) \right] dz(t) \tag{14}$$

Le deuxième terme de droite représente les pondérations des "événements" constatés sur les $K + 1$ actifs. En sommant les sources d'incertitude pour exprimer l'effet global de chaque source sur l'évolution de la valeur du portefeuille nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{K+1} x_i \delta_k \left(Y,t,T_i\right) \right) dz(t) \tag{15}$$

Les pondérations sont telles qu'elles éliminent chacune des sources présentent dans l'expression, ce qui nous donne :

$$\sum_{i=1}^{K+1} x_i \delta_k (Y,t,T_i) = 0, \quad \forall k = 1,.....,K \tag{16}$$

Le portefeuille étant localement sans risque, à l'équilibre son taux de rendement anticipé doit être égal au taux spot en vigueur.

$$\sum_{i=1}^{K+1} x_i \alpha(Y,t,T_i) = r(Y,t)$$

ou encore (17)

$$\sum_{i=1}^{K+1} x_i \left[\alpha(Y,t,T_i) - r(Y,t) \right] = 0$$

Avec la condition $\sum_{i=1}^{K+1} x_i = 1$, ceci nous donne les conditions d'équilibre d'un système de $K + 1$ équations à $K + 1$ inconnues (les coefficients x_i).

Présenté sous forme matricielle, celui-ci s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha(Y,t,T_1) - r(Y,t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha(Y,t,T_{K+1}) - r(Y,t) \\ \delta_1(Y,t,T_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \delta_1(Y,t,T_{K+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \delta_k(Y,t,T_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \delta_k(Y,t,T_{K+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18a}$$

Le système admet une infinité de solutions si son déterminant est nul, différent de la solution triviale $x_i = 0, \forall i$, soit :

$$\alpha(Y,t,T) - r(Y,t) = \lambda_i(Y,t)\delta(Y,t,T) \tag{18b}$$

$$\frac{\alpha(Y,t,T) - r(Y,t)}{\delta(Y,t,T)} = \lambda_i(Y,t) \tag{18c}$$

Cette équation décrit les taux de rendement anticipés sur tous les actifs dont les valeurs dépendent seulement de ces *N* variables d'état :

- Le terme de gauche représente le taux de rendement espéré au-delà du taux sans risque, donc la prime de terme instantanée à la date *t* pour l'échéance *T*.
- Le terme $\lambda_i(Y,t)$ représente le prix unitaire du risque de taux, identique pour tous les titres, indépendamment de leur vie, le *K-ième* élément de $\lambda_i(Y,t)$ représente "le prix de marché" de la *K-ième* source d'incertitude.
- Le produit $\lambda_i(Y,t)\delta(Y,t,T)$ est donc la prime offerte par le marché, définie comme le produit de la prime unitaire de risque par la quantité de risque encouru, elle même étant le résultat du produit de la volatilité (σ) par la sensibilité du prix du titre au facteur *K*, $\left(\frac{P_{Y_k}}{P}\right)$.

Si l'on définit le vecteur $\lambda_Y \equiv \sigma\lambda_i$, qui représente les rémunérations unitaires offertes à l'équilibre pour le risque porté par chacun des états, nous obtenons :

$$\boxed{\alpha(Y,t,T) - r(Y,t) = \frac{1}{P}(P_Y \lambda_Y)} \tag{19}$$

2.3 Définition de l'équation fondamentale de valorisation d'un actif

En posant : $\frac{\lambda_Y}{\lambda_i} = \sigma$, et en prenant la valeur de $\delta(Y,t,T)$ dans (12), $\left(\text{soit } \frac{1}{P}(P_Y\sigma)\right)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha(Y,t,T) - r(Y,t) &= \lambda_i(Y,t)\frac{1}{P}\left(P_Y\sigma\right) \\ &= \lambda_i(Y,t)\frac{1}{P}\left[P_Y\frac{\lambda_Y}{\lambda_i}\right] \\ \Phi(Y,t,T) &= \frac{1}{P}P_Y\lambda_Y \\ \text{avec}: \Phi(Y,t,T) &= \alpha(Y,t,T) - r(Y,t) \end{aligned} \tag{20}$$

Le prix ($P(Y,t,T)$) satisfait l'équation différentielle partielle (E.D.P.) suivante :

$$\boxed{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y(\mu - \lambda_Y) - rP + P_t = 0} \tag{21}$$

Preuve :

En remplaçant dans l'équation (19) α par sa valeur (équation 11), nous obtenons :

$$\alpha(Y,t,T) = \frac{1}{P}\left\{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y\mu + P_t\right\} \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{P}\left\{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y\mu + P_t\right\} - r(Y,t) = \frac{1}{P}P_Y\lambda_Y$$

En simplifiant, nous obtenons l'EDS :

$$\left\{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y\mu + P_t\right\} - rP(Y,t) - P_Y\lambda_Y = 0$$

En regroupant les termes nous retrouvons (21).

L'équation (21) représente l'équation de structure par terme dont la résolution sous la condition terminale que le prix d'une obligation soit égal à sa valeur faciale ($P(Y,T,T) \equiv 1$) fournit la structure des prix ($P(Y,t,T)$), et par transformation, la structure par terme des taux de rendement. Cette équation constitue une condition nécessaire d'A.O.A. sur un marché "efficient"[5], suivie par le processus du prix des obligations. Nous venons d'examiner les diverses conditions et étapes de l'élaboration d'une structure par terme des taux d'intérêt dans un environnement incertain sous une hypothèse centrale d'absence d'opportunité d'arbitrage, le modèle que nous venons de décrire étant générique, nous allons aborder dans la section suivante une application de cette méthodologie à travers une modélisation à trois facteurs dans le cadre d'un modèle d'équilibre partiel d'arbitrage.

3 Un modèle d'équilibre partiel de la structure par terme des taux où il existe trois sources d'incertitude

La modélisation à un facteur (généralement le taux court)[6] semble peu satisfaisante, compte tenu des limites rencontrées dans les modèles "traditionnels". Ces limites sont liées aux contraintes apportées sur les hypothèses servant de base aux modèles, mais également àl'expression analytique des solutions. En effet, en examinant les covariances du rendement instantané de deux titres d'échéances respectives T_1 et T_2, nous pouvons définir les processus suivis par les rendements :

[5] Voir par exemple S. F Leroy [1989], E. Fama [1970,1976,1998]; J. Hamon [1997] pour la définition et l'interprétation de cette notion, parmi la littérature abondante et très controversée sur ce sujet.
[6] Voir annexe.

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{P_1} &= \alpha_1 dt + \delta_1 dz \\ \frac{dP_2}{P_2} &= \alpha_2 dt + \delta_2 dz\end{aligned} \qquad (22)$$

en calculant leur covariance, nous obtenons :

$$\operatorname{cov}\left[\frac{dP_1}{P_1}, \frac{dP_2}{P_2}\right] = E\left[\delta_1 dz \times \delta_2 dz\right] = \delta_1 \delta_2 dt \qquad (23)$$

E représente l'opérateur d'espérance conditionnelle.

Comme $V\left[\frac{dP_i}{P_i}\right] = \delta_i^2 dt$, nous obtenons une parfaite corrélation par unité de temps entre les rendements de toutes les obligations. Ce résultat constitue la règle standard des modèles de la structure par terme des taux à facteur unique. Afin de supprimer cette "rigidité", il convient d'ajouter un ou plusieurs facteurs, et parmi les différentes modélisations multifactorielles, nous pouvons citer S. Richard [1978] qui faisant référence à I. Fisher [1896] utilise comme variables d'état le taux d'intérêt nominal, et le taux d'inflation anticipé; M.J.Brennan et E.S. Schwartz [1979] qui se réfèrent à la théorie pure des anticipations où les taux longs reflètent les anticipations du taux court, ou encore S.M. Schaefer et E.S. Schwartz [1984], qui prennent comme variables d'état le taux à long terme et le *spread* de taux (taux à court terme – taux à long terme). La réponse au choix du nombre de variables semble plutôt être empirique[7], il convient d'en préciser deux points :

- L'évaluation des performances des modèles les plus simples (à un ou deux facteurs), en règle générale deux sources de risque, permet de mesurer l'impact des variations des variables d'état sur le niveau des taux (déplacements parallèles de la courbe des rendements) et sur le *spread* de taux (rotations de la courbe).
- Les analyses en composantes principales permettent de repérer le nombre minimal de facteurs comme l'ont fait par exemple P.J. Knez, R. Litterman, et J. Scheinkman [1994], en mesurant et en interprétant les facteurs communs décrivant les rendements sur le marché monétaire.

La méthodologie utilisée est identique à la modélisation à un seul facteur et représente en fait une spécification du modèle à K- facteurs présenté en section 2. L'approche factorielle repose sur l'hypothèse que la matrice des covariances des variables aléatoires (rendements excédentaires) peut se décomposer en facteurs communs et particuliers ou facteurs systématiques et non systématiques. Cette décomposition fait référence à l'hypothèse de linéarité des relations entre les rendements de chaque titre et les rendements de l'ensemble des facteurs communs. L'interprétation de cette approche est que les facteurs communs représentent les sources de risques systématiques ou non diversifiables, alors que les composantes particulières représentent les risques diversifiables. Ces

[7] C. Bisière, Thèse [1994], Université Aix-Marseille II, pp 139-140.

précisions énoncées, le modèle que nous développons ci-après prend en compte l'information concernant la structure par terme des taux futurs à partir de trois variables d'état :

- Le taux à court terme.
- Le taux à long terme.
- Le *spread* de taux (taux à court terme – taux à long terme).

Cette présentation se situe dans la lignée des modèles d'équilibre partiel (définitions exogènes de la forme des primes de risque associées aux facteurs), nous aborderons dans un premier temps la définition de l'environnement théorique et des notations, puis dans un deuxième temps la structure du modèle d'évaluation du prix d'une obligation zéro-coupon. A ce stade de l'analyse, compte tenu de l'objectif assigné à cet article, à savoir déterminer l'impact sur la forme de la solution d'un système d'équations de facteurs supplémentaires (donc de primes de terme supplémentaires) dans un modèle à plusieurs sources de risques, la solution explicite n'apporte pas un intérêt intrinsèque, car comme nous l'avons évoqué, cette solution passe bien souvent par une approximation des approches multifactorielles. Il s'agit en fait ici à titre d'exercice, de formaliser les spécifications d'un modèle à trois facteurs permettant d'aboutir à l'élaboration de l'équation d'évaluation du prix des obligations, dont une application empirique nécessiterait comme pour M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979] la linéarisation du processus stochastique trouvé ou comme pour S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984] de générer une approximation analytique pour en déduire une solution exacte.

3.1 Définition du cadre théorique et notations du modèle

Les hypothèses de base du modèle reprennent celles des modèles d'équilibre d'arbitrage soumis à K sources d'incertitudes, nous les rappelons brièvement ci-après :

Hypothèse 1 :

Modèle de marché sans friction, et marché équilibré en continu avec un taux d'intérêt sans risque servant de base aux opérations d'emprunts et prêts.

Hypothèse 2 :

Les titres sont représentés par des obligations zéro-coupon (sans risque de défaut).

Hypothèse 3 :

Le modèle répond à une logique factorielle qui lie dynamique du prix et dynamique des variables d'état (sources de risque).

Hypothèse 4 :

Le modèle permet d'évaluer le prix d'actifs financiers dans un environnement d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage.

Le modèle présenté ci-après est une combinaison des modèles à deux sources d'incertitude :

- Modèle de M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979] où les deux sources d'aléa sont représentées par le taux à court terme et le taux à long terme.
- Modèle de S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984] où les deux sources d'incertitude sont le taux à long terme et le *spread* de taux.

Les trois sources d'incertitudes identifiées sont les suivantes :

- Le taux à court terme (r).
- Le taux à long terme (l).
- Le *spread* de taux $(s = r - l)$.

Le choix théorique de ces trois variables répond aux critères de sélection définis par M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979] et S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984], à savoir :

- Le taux à court terme qui sous-tend l'ensemble des acquis théoriques traditionnels de la structure par terme des taux montre son rôle prédominant dans la détermination des taux à long terme futurs, même si dans une modélisation à un facteur, celui-ci reste insuffisant à démontrer sa capacité à atteindre une structure par terme satisfaisante.
- Le taux à long terme, qui fait référence ici aux hypothèses émises dans le cadre de la théorie de la prime de liquidité[8] où nous le rappelons, le taux de rendement d'un titre long est représenté par la moyenne pondérée des taux court présents et futurs plus une prime de terme.
- Le *spread* de taux permet comme le soulignaient S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984] d'introduire la structure par terme des taux d'intérêt dans le modèle.

Dans ce contexte, le prix d'une obligation sera une fonction de trois variables d'état et de la maturité (durée résiduelle), ce qui s'exprime par : $P(r,l,s,S)$, avec $S \equiv T - t$, et $t \leq T$.

3.2 Le modèle d'évaluation des obligations

Dans le cadre théorique ainsi défini, les processus d'évolution des trois variables d'état sont représentés par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dr = \beta_r(r,l,s,t)dt + \eta_r(r,l,s,t)dz_r \\ dl = \beta_l(r,l,s,t)dt + \eta_l(r,l,s,t)dz_l \\ ds = \beta_s(r,l,s,t)dt + \eta_s(r,l,s,t)dz_s \end{cases} \qquad (24)$$

- t représente le temps calendaire.
- dz_r, dz_l, dz_s sont des processus Gauss-Wiener standards ayant les propriétés suivantes :

[8] J.R. Hicks [1939].

$$\begin{cases} E[dz_r] = E[dz_l] = E[dz_s] = 0 \\ dz_r^2 = dz_l^2 = dz_s^2 = dt \\ dz_r dz_l = dz_l dz_s = dz_r dz_s = \rho dt \end{cases}.$$

- β représentent les taux anticipés de variations instantanées des taux à court terme, taux à long terme et du *spread* de taux.
- η représentent les taux de variances instantanées des taux à court terme, taux à long terme et du *spread* de taux.
- ρ est le coefficient de corrélation entre les variables. Nous apportons les spécifications suivantes concernant ce coefficient, il est égal à ρdt pour la corrélation entre les deux taux (identique aux arguments de M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979], p 136), et il est égal à 0 pour la corrélation entre le *spread* et les deux taux (basée sur l'argument de S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984], p146, qui impose dans la spécification de leur modèle la nullité de ce coefficient). Dans ce cadre et avec les hypothèses définies ci-dessus, en appliquant le Lemme d'Itô, la valeur de toutes les obligations zéro-coupon doit satisfaire l'Equation Différentielle Partielle (EDP) suivante :

$$\boxed{\frac{dP}{P} = \mu(r,l,s,S)dt + \sigma_r(r,l,s,S)dz_r + \sigma_l(r,l,s,S)dz_l + \sigma_s(r,l,s,S)dz_s} \quad (25)$$

avec :

$$\mu(r,l,s,S) = \frac{1}{P}\left[P_r\beta_r + P_l\beta_l + P_s\beta_s + \frac{1}{2}P_{rr}\eta_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\eta_l^2 + \frac{1}{2}P_{ss}\eta_s^2 + P_{rl}\rho\eta_r\eta_l - P_S\right]$$

$$\sigma_r(r,l,s,S) = \frac{1}{P}[P_r\eta_r]$$

$$\sigma_l(r,l,s,S) = \frac{1}{P}[P_l\eta_l]$$

$$\sigma_s(r,l,s,S) = \frac{1}{P}[P_s\eta_s]$$

Nous rappelons que $dz_r dz_s = dz_l dz_s = \rho dt = 0$ et que les notations suivantes ont été utilisées pour représenter les dérivées partielles par rapport aux variables du modèle, à savoir :

$$P_r \equiv \frac{\partial P}{\partial r}; P_l \equiv \frac{\partial P}{\partial l}; P_s \equiv \frac{\partial P}{\partial s}; P_{rr} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}; P_{ll} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial l^2}; P_{ss} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}; P_{rl} \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial l}; P_S \equiv \frac{\partial P}{\partial S}$$

En suivant la méthodologie appliquée par M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979], et S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984] à partir des relations d'équilibre entre les rendements anticipés des obligations de différentes maturités, des conditions de rendements certains et d'absence d'opportunité d'arbitrage nous aboutissons à la forme suivante définie pour l'équation d'arbitrage.

$$\boxed{\mu(r,l,s,S) - r(t) = \lambda_r(r,l,s,t)\sigma_r(r,l,s,S) + \lambda_l(r,l,s,t)\sigma_l(r,l,s,S) + \lambda_s(r,l,s,t)\sigma_s(r,l,s,S)} (26)$$

$\lambda_r ; \lambda_l ; \lambda_s$ représentent les prix de marché des risques associés à chacune des variables du modèle. Ainsi, la solution sera une EDP du prix d'une obligation $(P(r,l,s,S))$ qui contiendra les fonctions λ indépendantes de la maturité *S*. En identifiant les paramètres $\mu(.); \sigma_r(.); \sigma_l(.); \sigma_s(.); r = s + l$ [9] dans l'équation (26), nous obtenons la formalisation suivante :

$$
\begin{aligned}
&P_r(\beta_r - \lambda_r \eta_r) + P_l(\beta_l - \lambda_l \eta_l) + P_s(\beta_s - \lambda_s \eta_s) + \frac{1}{2} P_{rr} \eta_r^2 + \\
&\frac{1}{2} P_{ll} \eta_l^2 + \frac{1}{2} P_{ss} \eta_s^2 + P_{rl} \rho \eta_r \eta_l - P(s+l) - P_S = 0
\end{aligned} \tag{27}
$$

Afin d'éliminer le prix de marché du risque lié au taux à long terme, nous posons la condition suivante :

- *l* est une fonction du prix d'un actif négociable (prix d'une rente perpétuelle pour P. Artus et C. Lubochinsky [1990], p 43), ce qui définit son prix comme étant égal à : $P = \frac{1}{l}$. En appliquant le Lemme d'Itô, le processus stochastique du prix d'une obligation à long terme devient :

$$
\frac{dP(l)}{P(l)} = \left[\frac{\eta_l^2}{l^2} - \frac{\beta_l}{l} \right] dt - \left[\frac{\eta_l}{l} \right] dz_l \tag{28}
$$

Nous définissons les covariances du taux de rendement de l'obligation à long terme avec les variations non anticipées du taux à court terme et du *spread*, ainsi que son taux de rendement anticipé (incluant les gains en capital et le taux du coupon par unité de capital) :

$$
\begin{cases}
\sigma_r(\infty) = \eta_r \dfrac{P_r}{P} = 0 \\
\sigma_s(\infty) = \eta_s \dfrac{P_r}{P} = 0 \\
\sigma_l(\infty) = \eta_l \dfrac{P_l}{P} = -\dfrac{\eta_l}{l} \\
\mu(\infty) = \dfrac{\eta_l^2}{l^2} - \dfrac{\beta_l}{l} + l
\end{cases}
$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (26) ceci nous donne :

$$
\mu(\infty) - r(t) = \lambda_r(r,l,s,t)\sigma_r(\infty) + \lambda_l(r,l,s,t)\sigma_l(\infty) + \lambda_s(r,l,s,t)\sigma_s(\infty)
$$

et en résolvant par rapport à λ, nous obtenons :

[9] Compte tenu de la définition du *spread* : $s = r - l$.

$$\frac{\eta_l^2}{l^2}-\frac{\beta_l}{l}+l-(s+l)=\underbrace{\lambda_r\sigma_r}_{=0}+\lambda_l\sigma_l+\underbrace{\lambda_s\sigma_s}_{=0}$$

$$\frac{\eta_l^2}{l^2}-\frac{\beta_l}{l}+l-(s+l)=-\frac{\eta_l}{l}\lambda_l$$

Nous retrouvons ainsi la définition du prix de marché du risque associée au taux d'intérêt à long terme des modélisations précédentes soit :

$$\boxed{\lambda_l=-\frac{\eta_l}{l}+\frac{[\beta_l+sl]}{\eta_l}} \tag{29}$$

En reportant la valeur de λ_l dans l'équation (27), il vient :

$$P_r(\beta_r-\lambda_r\eta_r)+P_l\left[\beta_l-\left(-\frac{\eta_l}{l^2}+\frac{[\beta_l+sl]}{\eta_l}\right)\eta_l\right]+P_s(\beta_s-\lambda_s\eta)_s+\frac{1}{2}P_{rr}\eta_r^2+$$
$$\frac{1}{2}P_{ll}\eta_l^2+\frac{1}{2}P_{ss}\eta_s^2+P_{rl}\rho\eta_r\eta_l-P(s+l)-P_S=0$$

Soit en développant :

$$\boxed{\begin{aligned}&P_r(\beta_r-\lambda_r\eta_r)+P_l\left[\frac{\eta_l^2}{l}-sl\right]+P_s(\beta_s-\lambda_s\eta_s)+\frac{1}{2}P_{rr}\eta_r^2+\\&\frac{1}{2}P_{ll}\eta_l^2+\frac{1}{2}P_{ss}\eta_s^2+P_{rl}\rho\eta_r\eta_l-P(s+l)-P_S=0\end{aligned}} \tag{30}$$

L'équation (30) représente l'EDP d'évaluation d'obligations qui ne dépend ni de la prime de risque sur le taux long terme (λ_l), ni de son terme de tendance (β_l), avec comme condition terminale $P(r,l,s,0)=1$. Afin de résoudre cette équation, nous devons apporter des spécifications sur la nature des processus d'évolution du système d'équations (24) ainsi que sur la forme fonctionnelle des prix de marché du risque associés au taux à court terme (λ_r) et au *spread* (λ_s) :

- Le processus suivi par le *spread* est un processus Ornstein-Uhlenbeck (O. Vasicek [1977] par exemple).
- Les variances des changements du taux à court terme et du taux à long terme dépendent de leur niveau (C.I.R. [1985a,1985b] par exemple).

La spécification des processus est donc la suivante :

$$\begin{cases}dr=\beta_r(r,l,s,t)dt+\sigma\sqrt{r}dz_r\\dl=\beta_l(r,l,s,t)dt+\sigma\sqrt{l}dz_l\\ds=a(b-s)dt+\gamma dz_s\end{cases} \tag{31}$$

Les termes de tendance du taux à court terme et du taux à long terme sont compatibles avec l'équation (30) et peuvent donc être présentés sous une forme générique non spécifiée. En identifiant chaque facteur, l'équation d'évaluation d'une obligation zéro-coupon (30) devient :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_r\left(\beta_r - \lambda_r \sigma \sqrt{r}\right) + P_l\left[\sigma^2 - sl\right] + P_s\left[a(b-s) - \lambda_s \gamma\right] + \dfrac{1}{2} P_{rr} \sigma^2 r + \\ \dfrac{1}{2} P_{ll} \sigma^2 l + \dfrac{1}{2} P_{ss} \gamma^2 + P_{rl} \rho\left(\sigma \sqrt{r} \sigma \sqrt{l}\right) - P(s+l) - P_S = 0 \end{array}} \tag{32}$$

Cette équation soumise à la condition terminale : $P(r,l,s,0)=1$ représente l'équation d'évaluation du modèle pour des obligations actualisées. Sa solution n'est pas explicite et nécessite une procédure numérique pour en déterminer sa forme, en effet elle est une fonction des prix de marché du risque sur le taux à court terme et sur le *spread*, ainsi que des paramètres de volatilité des processus sous-jacents du taux à court terme, taux à long terme et du *spread*. Dans ce cadre de modélisation, les modèles à deux variables d'état se ramènent à des modèles à une variable comme ceux cités précédemment (M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979], où seul le prix de marché du risque de taux à court terme (λ_r) reste inconnu, et S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984] où seul le prix de marché du risque de *spread* (λ_s) reste non connu dans le modèle). Cette approche à trois variables d'état, confirme l'argumentation développée par M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979], qui définissent le nombre de paramètres inconnus restant dans l'EDP comme étant égal à la différence entre le nombre de variables d'état du modèle (à l'exclusion du temps) et le nombre d'actifs pour lesquels les dérivées partielles de ces fonctions sont connues. En l'occurrence, pour F. Black et M. Scholes [1973], ce nombre est nul, et pour M.J. Brennan, E.S. Schwartz, [1979], ou S.M. Schaefer, E.S. Schwartz, [1984], celui-ci est de 1 car le prix de marché du risque sur le taux à long terme disparaît dans les deux équations. Dans le modèle à trois variables, le prix de marché du risque sur le taux à long terme disparaît également et seuls restent inconnus les prix de marché du risque sur le taux à court terme et sur le *spread*.

4 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article l'évolution qui s'est produite de l'approche "traditionnelle" de la structure par terme des taux à l'analyse factorielle. En effet, l'incidence attribuée à des facteurs particuliers sur l'évolution de la courbe des taux a été essentielle dans les modèles de la "deuxième génération", sans abandonner les acquis théoriques des approches traditionnelles, notamment celle de la rationalité des anticipations des agents et celles d'efficience informationnelle des marchés, ou de primes de risque.

Ces nouveaux modèles ont mis en avant un concept important d'analyse, le principe d'équilibre d'arbitrage. Un des problèmes majeurs des approches en terme d'équilibre partiel d'arbitrage tient au fait que le prix des obligations reste dépendant du choix du type de processus suivi par les variables d'état et de la forme fonctionnelle attribuée aux primes de risque (information exogène pouvant remettre en cause le principe d'A.O.A.) souvent supposées constantes. Si cette prime est positive alors le prix de l'obligation sera égal au taux d'intérêt sans risque plus une prime positive (confirmant ainsi la théorie de la prime de liquidité, où le risque croît avec la maturité). Si cette prime est négative, nous retrouvons la théorie de l'habitat préféré où les titres longs garantissent la sécurité des investisseurs. Dans le choix exogène d'une prime de risque constante, le modèle peut offrir des opportunités d'arbitrage et la réponse à cette problématique a été donnée par C.I.R. [1985a,1985b] en endogénéisant ces primes dans un contexte d'équilibre général. Toutefois, dans ce cadre là, la détermination d'une structure par terme des taux d'intérêt pose le problème de la diminution de la volatilité des taux longs liée au terme constant de long terme mais le fait marquant est que la forme fonctionnelle de la solution reste complexe.

L'introduction de nouvelles variables permet de suppléer l'hypothèse de corrélation parfaite entre tous les rendements des modélisations à une variable d'état (qui est en contradiction avec les observations empiriques des séries de taux). Les modèles à deux ou trois variables d'état montrent que le gain théorique n'est pas évident. L'ajout de variables améliore le réalisme des hypothèses des modèles, mais accroît en contrepartie la complexité des solutions.

La modélisation à trois variables d'état présentée dans cet article aboutit aux mêmes écueils que ceux des modèles à une ou deux variables dans un cadre d'analyse d'équilibre partiel, à savoir l'endogénéisation des paramètres, notamment des primes de risque associées aux facteurs aléatoires et de la forme prise par les processus gouvernant ces variables. Comme nous l'avons vu dans la présentation du modèle à K sources de risques, le modèle à une seule variable d'état ne représente qu'un sous-ensemble de ce cadre général où la procédure aboutissant à la détermination d'une structure par terme des taux est soumise aux mêmes identifications des facteurs (primes de risque et forme fonctionnelle des processus gouvernant les facteurs aléatoires). D'autres voies ont été explorées afin de répondre à l'amélioration de la construction d'une structure par terme des taux, celles-ci s'appuient sur le concept d'équilibre d'arbitrage par les martingales (modèle "probabiliste") où la structure des taux observée et sa volatilité sont des *inputs* du processus de modélisation. Ces approches s'inscrivent dans le courant des modèles d'équilibre partiels d'arbitrage et restent certainement une voie d'exploration possible pour de futures recherches..

Annexe mathématique

<u>Spécifications des paramètres du modèle d'arbitrage à facteur unique</u>

Nous prenons le taux court comme unique variable aléatoire déterminant la courbe des taux et à partir des hypothèses du modèle à K facteurs nous définissons son processus de diffusion par l'équation suivante :

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dz(t) \qquad \text{(a.1)}$$

Processus d'Itô avec : $\mu(r,t)$ représentant l'espérance du changement instantané de $r(t)$ et $\sigma^2(r,t)$ représentant la variance du changement instantané de $r(t)$. Les trajectoires de $r(t)$ sont continues, r n'effectue donc pas de saut instantané. Nous déterminons les trois étapes du modèle à savoir, la définition du lien entre la variable aléatoire et le prix des obligations, la définition de la condition d'arbitrage du modèle, et l'obtention de la structure par terme des taux d'intérêt.

(a) <u>Définition du lien entre taux court et prix des obligations</u>:

Celui-ci est réalisé en faisant l'hypothèse que le prix d'une obligation d'échéance T en t ($P(t,T)$) est déterminé par l'évolution attendue du taux court entre t et T ($r(\tau), t \leq \tau \leq T$). Le prix de l'obligation se définit ainsi :

$$P(t,T) \equiv P(r,t,T) \tag{a.2}$$

Le taux court représente l'information pertinente pour les investisseurs qui vont ajuster leurs comportements à son évolution prévue. En appliquant le Lemme d'Itô au processus des prix nous obtenons :

$$\boxed{\frac{dP(r,t,T)}{P(r,t,T)} = \alpha(r,t,T)dt + \delta(r,t,T)dz(t)} \tag{a.3}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha(r,t,T) &= \frac{1}{P}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(r,t)P_{rr} + \mu(r,t)P_r + P_t\right\} \\ \delta(r,t,T) &= \frac{1}{P}\{\sigma(r,t)P_r\} \end{aligned} \tag{a.4}$$

(b) <u>Respect de la condition d'arbitrage</u> :

Quand il y a unicité de facteurs, il est nécessaire de construire un portefeuille comportant deux types d'obligations (de prix $(P(r,t,T)$ et d'échéances respectives T_1 et T_2) dans des proportions respectives : ω_1 et ω_2, avec $\omega_2 = 1 - \omega_1$. La valeur du portefeuille (W) évolue comme suit :

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = \frac{dP(r,t,T_1)}{P(r,t,T_1)}\omega_1 + \frac{dP(r,t,T_2)}{P(r,t,T_2)}\omega_2 \tag{a.5}$$

en remplaçant la valeur de $\frac{dP}{P}$ (a.3) dans (a.5), nous obtenons :

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = [\alpha(r,t,T_1)\omega_1 + \alpha(r,t,T_2)\omega_2]dt + [\delta(r,t,T_1)\omega_1 + \delta(r,t,T_2)\omega_2]dz(t) \tag{a.6}$$

Le rendement certain du portefeuille permet de définir ω_1 et ω_2 tels que :

$$\delta(r,t,T_1)\omega_1 + \delta(r,t,T_2)\omega_2 = 0 \tag{a.7}$$

Son rendement instantané ne pouvant être supérieur au taux sans risque ($r(t)$), nous avons :

$$\alpha(r,t,T_1)\omega_1 + \alpha(r,t,T_2)\omega_2 = r(t) \tag{a.8}$$

Compte tenu de la contrainte de dotations $(\omega_1 + \omega_2 = 1)$, nous avons :

$$[\alpha(r,t,T_1) - r(t)]\omega_1 + [\alpha(r,t,T_2) - r(t)]\omega_2 = 0 \tag{a.9}$$

Nous obtenons par conséquent un système de deux équations à deux inconnues qui s'exprime sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} \alpha(r,t,T_1) - r(t) & \alpha(r,t,T_2) - r(t) \\ \delta(r,t,T_1) & \delta(r,t,T_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{a.10}$$

Le système admet une solution autre que la solution triviale (0,0) si et seulement si son déterminant est nul, soit :

$$\frac{\alpha(r,t,T_1) - r(t)}{\delta(r,t,T_1)} = \frac{\alpha(r,t,T_2) - r(t)}{\delta(r,t,T_2)} \tag{a.11}$$

Compte tenu des résultats observés dans le modèle général à *K* facteurs et de l'indépendance de la solution par rapport aux échéances, cette écriture devient pour tout *T* :

$$\frac{\alpha(r,t,T) - r(t)}{\delta(r,t,T)} = \lambda(r,t) \tag{a.12}$$

Si l'on exprime le rendement espéré par :

$$\alpha(r,t,T) = r(t) + \lambda(r,t)\delta(r,t,T) \tag{a.13}$$

Celui-ci est donc égal à un élément certain (*r*) et à une prime unique de risque exigée par le marché, proportionnelle à la volatilité instantanée $\left(\sigma \frac{P_r}{P}\right)$. Si nous reprenons la formulation (a.13), nous obtenons ainsi l'expression de la prime de terme :

$$\boxed{\alpha(r,t,T) - r(t) = \lambda(r,t)\delta(r,t,T)} \tag{a.14}$$

$\lambda(r,t)$ représente la prime unitaire offerte par le marché pour le risque généré par les fluctuations imprévues du taux court en *t*, à la suite d'un choc aléatoire (*dz*(*t*)). La prime de terme est définie comme le produit de la prime unitaire du risque induit par l'unique source d'incertitude et la quantité de risque encouru $(\delta(r,t,T))$. La mesure de risque total porté par le taux court (λ_r) est égale au produit de la prime unitaire ($\lambda(r,t)$) par σ : $\lambda_r \equiv \lambda\sigma$. La prime de terme est alors égale à[10] :

$$\Phi(r,t,T) = \lambda_r \frac{P_r}{P} \tag{a.15}$$

[10] Avec $\Phi(r,t,T) = \alpha(r,t,T) - r(t)$

(c) <u>Equation de la structure par terme</u> :

Nous reportons dans l'équation (a.14) les valeurs de α et δ (a.4), ce qui nous donne :

$$\frac{1}{P}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + \mu P_r + P_t\right] - r(t) = \lambda \frac{1}{P}\left[\sigma P_r\right] \qquad \text{(a.16)}$$

En simplifiant par *P* et en réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r)P_r - r(t)P + P_t = 0 \qquad \text{(a.17)}$$

Sous la condition terminale $P(r,T,T) \equiv 1$, et comme *r* ne peut pas être négatif, quand celui-ci est nul, alors $\mu \geq 0$ et $\sigma = 0$, de fait (a.17) devient :

$$\mu P_r + P_t = 0 \qquad \text{(a.18)}$$

Nous obtenons donc ainsi l'expression de la structure par terme des prix ($P(r,t,T)$) solution de l'équation fondamentale et nous en déduisons la structure par terme des taux de rendement ($R(r,t,T)$). La formulation générale de la structure par terme des prix est la suivante :

$$\boxed{P(r,t,T) = E_t\left[\exp\left\{-\int_t^T r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(r,\tau)d\tau - \int_t^T \lambda(r,\tau)dz(\tau)\right\}\right]} \qquad \text{(a.19)}$$

Cette équation est une équation commune à tous les modèles à facteur unique. L'obtention d'une solution spécifique nécessite la spécification de $\mu(r,t);\sigma(r,t);$ et $\lambda_r(r,t)$ exogènes au modèle. Le rattachement de la théorie pure des anticipations à cette modélisation à un facteur se fait par les deux spécifications suivantes :

- Le taux court est le seul facteur explicatif de la structure des taux.
- La prime unitaire de risque de taux est nulle (hypothèse locale des anticipations).

Formellement nous l'exprimons par :

$$\begin{cases} P(t,T) = P(r,t,T) \\ \lambda_r(r,t) = 0 \end{cases} \qquad \text{(a.20)}$$

Ces conditions permettent d'aboutir à la solution suivante :

$$P(r,t,T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r(\tau)d\tau\right\}\right] \qquad \text{(a.21)}$$

Le prix d'une obligation est dans ce cas complètement spécifié par l'évolution attendue du taux instantané au cours de la durée de vie du titre. La solution de l'équation (a.19) nécessite la spécification de la valeur de la prime de risque unitaire attachée à la variable d'état, et l'explication du processus unique c'est à dire la spécification de $\mu(r,t)$ et $\lambda(r,t)$.

Bibliographie

Artus, Patrick, Catherine Lubochinsky [1990], "Théorie Financière des Taux d'intérêt et Gestion du Risque de Taux", Presse Universitaire de France, Paris.

Bisière, Christophe [1994], "Théorie de la structure part terme des taux d'intérêt, une analyse de l'effet richesse et de l'effet information en économie d'échange et de production", Thèse de Doctorat ès Sciences Economiques, Université d'Aix-Marseille II, CEFI, mars.

Black, Fisher, Myron Scholes [1973], "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, n° 3, mai-juin, pp 637-654.

Brennan, Michael J., Eduardo S. Schwartz [1979], "A continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, vol. 3, n° 2, juillet, pp 133-155.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, et Stephen A. Ross [1981], "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, vol. 36, n° 4, septembre, pp 769-799.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, et Stephen A. Ross [1985a], "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, vol. 53, n° 2, mars, pp 363-384.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, et Stephen A. Ross [1985b], "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, n° 2, mars, pp 385-407.

Fama, Eugène [1970], "Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Works", *The Journal of Finance*, vol. 25, n° 2, mai, pp 383-417.

Fama, Eugène [1976a], "The Information in the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, n° 4, octobre, pp 361-377.

Fama, Eugène [1998], "Market Efficiency, Long Term Returns, and Behavioral Finance", *Journal of Financial Economics*, n° 49, pp 283-306.

Fisher, Irving [1896], "Appreciation and Interest", *Publication of the American Economic Association*.

Hamon, Jacques [1997], "La Théorie des Marchés Efficients", *Encyclopédie des Marchés Financiers*, ed. Y. Simon, tome 1, pp 409-432.

Hicks, John R. [1939], "Value and Capital", *London Oxford University Press*, Traduction française : "Valeur et Capital : enquête sur divers principes fondamentaux de la théorie économique", *Collection Finance et Economie Appliquée*, Dunod, Paris, 1981.

Knez Peter.J., Robert Litterman, José Scheinkman [1994], "Explorations into Factors Explaining Money Market Returns", *The Journal of Finance*, vol 49, n° 5, pp 1861-1882.

Leroy, Stephen.F. [1989], "Efficient Capital Markets and Martingales", *Journal of Economic Literature*, vol 27, n° 4, décembre, pp 1583-1621.

Merton, Robert C. [1973a], "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, n° 1, automne, pp 141-183.

Merton, Robert C. [1974], "On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, vol. 19, n° , pp 449-470.

Richard Scott [1978], "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, vol 6, n° 1, mars, pp 33-57.

Schaefer Stephen.M., Eduardo S. Schwartz [1984], "A Two-Factor Model of the Term Structure : An Approximate Analytical Solution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* vol 19, n° 4, décembre, pp 413-424.

Vasicek, Oldrich [1977], "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, n° 5, pp 177-188.