

Gestion Actif Passif et Solvabilité

Charles Descure & Cristiano Borean

**Generali France
7/9 Boulevard Haussmann
75009 Paris**

Tel . : +33 1 58 38 86 84

+33 1 58 38 86 64

Fax. : +33 1 58 38 81 21

cdescure@generali.fr

cborean@generali.fr

Résumé

L'un des principaux enjeux pour les assureurs du passage aux nouvelles normes comptables (IFRS) et réglementaires (Solvabilité II) est la valorisation économique des Passifs, c'est-à-dire le calcul de la « Fair Value » des engagements. L'une des solutions possibles consiste à utiliser un modèle Actif / Passif stochastique pour projeter les flux futurs générés par l'activité puis à les valoriser grâce à une fonction d'actualisation elle-même stochastique : le déflateur. Par construction (il s'appuie sur le passage à la mesure de probabilité risque-neutre) le déflateur capte l'aversion au risque implicitement contenue dans la valeur de marché des actifs risqués. Il permet d'obtenir une valorisation « Market Consistent » des flux projetés, c'est-à-dire de retrouver la valeur de marché initiale des actifs risqués. En appliquant cette technique aux flux probabilisés du passif, on obtient la valeur du portefeuille d'actifs de marché qui couvre le mieux le risque contenu dans ces flux, et, donc, une Fair Value du passif. Nous proposons dans cet article une formulation générale du déflateur et explicitons son application pour quelques modèles financiers simples.

Mots Clés

Capital Économique, Solvabilité II, Déflateurs, Fair Value, Market Consistent Value, modélisation stochastique, Risque-Neutre.

Sommaire

1. Introduction	page 3
2. Méthodologie	page 4
2.1. Principes	
2.2. Technique de valorisation	
2.3. Indicateurs	
2.4. Application et résultats	
3. Discussion	page 6
3.1. Modèles discrets	
3.1.1. Modèles mono-périodique discret à deux états	
3.1.2. Les déflateurs d'état	
3.1.3. Modèles multi-périodiques et passage en temps continu	
3.2. Formule générale des déflateurs pour les modèles en temps continu	page 9
3.2.1. Définition des déflateurs	
3.2.2. Caractéristiques de l'économie sous-jacente	
3.2.3. Utilisation de la mesure risque-neutre et prix de marché du risque	
3.2.4. Construction du déflateur pour une économie avec une courbe des taux stochastique et un actif risqué	
3.2.5. Quelques propriétés des déflateurs	
3.3. Modèle de Black & Scholes	page 14
3.4. Modèle de Vasicek pour la courbe des taux	page 14
3.5. Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)	page 15
4. Résultats	page 17
4.1. Générateur de scénarios macro-économique et des déflateurs associés.	
4.2. Application : besoin en capital et création de valeur	
4.3. Résultats	
5. Conclusion	page 18
Bibliographie	page 20
Annexes	page 21

1. Introduction

Déterminer la valeur à long terme d'une société n'est pas un sujet facile. Il suffit d'observer les fluctuations considérables de la plupart des actions cotées pour constater que les investisseurs ont beaucoup de difficulté à déterminer la valeur des entreprises et donc le prix qu'il est juste de payer en échange des titres de ces sociétés. Les récents pics de volatilité atteints sur les marchés financiers correspondent, pour une action sur trois, à une variation de cours de plus d'un quart (à la hausse ou à la baisse) sur une période de douze mois.

Pour lutter contre ce phénomène qui menace leur capacité de financement, les entreprises d'assurance étayent leur communication financière par des analyses faisant apparaître, entre autres, une valeur à long terme. Cette dernière est estimée selon une méthode standardisée pour l'ensemble du marché : l'« Embedded Value ». Cette norme de valorisation évolue actuellement vers l'« European Embedded Value », notamment pour que la valeur de certains éléments du bilan comme les Instruments Financiers à Terme (explicite à l'actif du bilan ou implicites dans les passifs d'assurance), se rapproche de leur valeur observable sur les marchés financiers.

D'autre part, le contexte réglementaire évolue, là encore avec l'objectif de rendre plus transparentes et plus « économiques » les communications des entreprises d'assurance vers l'extérieur. Les normes comptables IAS / IFRS et le projet de norme réglementaire européen Solvabilité II entrent dans ce cadre. Elles envisagent notamment l'introduction d'un concept clé pour la valorisation des sociétés, celui de « Fair Value » des comptes et des états financiers.

Enfin, les dirigeants des entreprises d'assurance s'appuient de plus en plus sur des indicateurs internes qui, pour tel ou tel élément de la stratégie, estiment quantitativement le potentiel de création de richesse économique et la prise de risque associée. Les indicateurs de type « Capital Économique » et « Retour sur Capital Économique » en font partie. Ils sont le plus souvent utilisés pour, dans un premier temps, éclairer les prises de décision stratégiques puis à des fins de management pour expliciter aux principaux pôles de décisions opérationnelles des objectifs clairs et cohérents avec la stratégie globale.

Le projet Solvabilité II prévoit justement d'autoriser l'utilisation d'indicateurs internes de risque, comme le Capital Économique, pour justifier le caractère suffisant de la capitalisation des assureurs, voire le niveau de prudence dans leurs réserves. Les conditions seraient d'une part que les modèles soient reconnus pertinents du point de vue de l'Actif / Passif et du besoin en capital, et d'autre part qu'ils soient effectivement utilisés par le management pour éclairer des décisions opérationnelles.

Nous nous attacherons dans cet article à expliciter une méthode de valorisation de l'entreprise d'assurance qui soit en ligne avec ces nouvelles exigences de communication externe et de pilotage. Plus spécifiquement, nous nous efforcerons de déboucher sur des indicateurs de création de valeur et de risque (Fair Value et Capital Économique) qui soient cohérents entre eux. Enfin, nous donnerons pour des exemples simples les enjeux du passage de l'Embedded Value à l'European Embedded Value puis à la Fair Value pour les indicateurs de valeur, et du passage de la norme de Solvabilité actuelle à Solvabilité II, via une analyse fondée sur le Capital Économique.

2. Méthodologie

2.1. Principes

La méthode de valorisation sera fondée sur les principes suivants, qui nous semblent être compatibles avec la version actuelle des projets IFRS phase II et Solvabilité II, qui imposent de valoriser toutes les contingences futures (notamment les options implicites contenues dans les passifs d'assurance) :

- Projection des cash flows futurs grâce à un modèle Actif / Passif :

La valorisation repose sur une modélisation Actif / Passif de la société, c'est-à-dire sur une projection stochastique des cash flows futurs prenant en compte les interactions entre les deux cotés du bilan. Ces interactions comprennent l'impact du comportement des actifs investis sur les provisions techniques (ex. : la participation aux bénéfices ou le déclenchement des garanties de taux de rendement minimum), sur le comportement des assurés (ex. : les rachats conjoncturels) ou encore sur les décisions managériales (ex. : la réalisation de plus-values latentes).

- Valorisation des cash flows par une méthode « Market Consistent »

La valeur d'un actif ou d'un passif, calculée sur la base des cash flows futurs de l'élément considéré, doit être cohérente avec la valorisation que les marchés financiers donnent au même jeu de cash flows futurs. Pour les actifs cotés, la valeur doit être égale à la valeur observable sur les marchés. Pour les passifs d'assurance dont les cash flows sont répliquables par un portefeuille d'actifs investis (une garantie de rendement minimum sur un fonds d'épargne en actions peut, par exemple, être répliquée par une série de Puts), la Market Consistent Value doit être égale à celle, observable là encore, de ce portefeuille répliquant.

Note : Plus le modèle est sophistiqué plus il permet d'aller loin dans ce principe de « Market Consistency ». Les modèles les plus sophistiqués permettent non seulement de retrouver la valeur de marché de la plupart des actifs cotés classiques mais aussi celle de bon nombre d'Instruments Financiers à Terme, notamment la valeur des Puts, Calls, Floors et Caps, pour plusieurs échéances.

2.2. Technique de valorisation

Notre problème consiste donc à valoriser un échéancier de cash flows futurs générés par un modèle stochastique de projections financières. La technique de valorisation que nous utiliserons repose sur une fonction mathématique, le « déflateur » qui permet d'associer à un flux économique aléatoire (ici, les résultats futurs que l'entreprise distribuera à l'actionnaire), une valeur. Ce déflateur est plus précisément une fonction d'actualisation stochastique qui présente la particularité d'intégrer à la fois une composante risque et une composante temps. Il dépend du modèle financier utilisé pour caractériser les actifs échangés sur les marchés et toute la difficulté est d'explicitier le déflateur qui correspond au modèle financier choisi.

2.3. Indicateurs

En appliquant cette technique de valorisation aux flux projetés par le modèle Actif / Passif, nous pourrions calculer une Fair Value de la société à l'instant initial. Nous calculerions également pour des exemples relativement simples (cf. chapitre Applications et résultats) l'Embedded Value et l'European Embedded Value, afin d'identifier les enjeux de l'évolution des indicateurs de valeur.

Outre la Fair Value à l'instant initial, le déflateur permet également de produire la distribution de cette Fair Value au bout d'un an. C'est sur la base de cette distribution que nous expliciterons le Capital Économique requis pour garantir la solvabilité de la société. Nous définirons cette quantité comme l'écart entre la Fair Value médiane et la Fair Value dans un quantile de risque élevé (99.75%), à horizon un an.

2.4. Application et résultats

Pour illustrer l'utilisation des modèles de projection des flux économiques futurs, la technique de valorisation via les déflateurs et l'utilisation des indicateurs Fair Value et Capital Économique, nous terminerons cette étude par l'application à un produit d'assurance Vie relativement simple. Nous nous efforcerons de montrer la sensibilité des indicateurs de risque et de valeur à différents éléments de la stratégie de l'entreprise, comme le niveau des garanties données au passif ou le niveau de risque pris via l'allocation d'actifs.

3. Discussion

Cette troisième section explicite une technique de valorisation des cash flows futurs : le déflateur. Cette technique s'appuie sur deux principales hypothèses, la complétude des marchés financiers et l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage, et permet de produire une « Fair Value ».

3.1. Modèles discrets

3.1.1. Modèle mono périodique discret à deux états

Pour introduire le concept de déflateur, nous commencerons par décrire les modèles discrets et le concept d'actif d'état.

Définition des Actifs d'État

Un modèle basé sur le principe d'AOA peut être construit à partir des actifs d'Arrow-Debreu ou Actifs d'État. Ces actifs procurent le versement d'une unité de la devise considérée si un état précis de la nature se produit à un instant futur, rien sinon.

L'exemple du modèle mono périodique discret à deux états

Deux actifs risqués sont disponibles. Leur valeur de marché et leur cash flows futurs pour les deux états de la nature envisageables, A et B, sont explicités ci-dessous. Le principe est exactement le même pour un modèle avec N états de la nature.

	Actif risqué 1	Actif risqué 2
Valeur de marché initiale	3.1	1.75
Valeur future pour l'état de la nature A	5	3
Valeur future pour l'état de la nature B	2	1

Chaque actif est complètement caractérisé par sa valeur initiale et ses cash flows futurs dans les différents états de la nature possibles.

Les actifs d'état sont caractérisés par :

	Actif d'état A	Actif d'état B
Valeur future pour l'état de la nature A	1	0
Valeur future pour l'état de la nature B	0	1

Nous pouvons utiliser le **principe d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage** pour valoriser les actifs d'état en répliquant leur cash flows avec les actifs risqués existant sur le marché. Il suffit pour cela de résoudre un simple système d'équation. Les valeurs de marché se déduisent alors automatiquement de la composition du portefeuille répliquant :

	Portefeuille répliquant l'actif d'état A	Portefeuille répliquant l'actif d'état B
Actif risqué 1	-1	3
Actif risqué 2	2	-5
Valeur future pour l'état de la nature A	1	0
pour l'état de la nature B	0	1
Valeur de marché initiale	0.4	0.55

La valeur de marché des portefeuilles répliquants donne ainsi la valeur des actifs d'état qu'il est maintenant possible d'utiliser pour valoriser un nouvel actif risqué et l'actif sans risque, en fonction de leurs cash flows futurs :

	Nouvel Actif risqué	Actif sans risque
Valeur future pour l'état de la nature A	10	1
pour l'état de la nature B	-1	1
Valeur de marché initiale	3.45	0.95

La généralisation de cet exemple à un modèle mono périodique discret avec N états de la nature possibles est immédiate. La formule de valorisation d'un actif basée sur les N actifs d'états du modèle est alors donnée par :

$$P = \sum_{i=1}^N E(i).CF(i)$$

Où : P est le prix de l'actif considéré,
 CF(i) ses cash flows dans chacun des N états
 E(i) le prix de l'actif d'état associé à l'état i

Pour que le modèle soit cohérent et effectivement sans opportunité d'arbitrage, il est important d'imposer quelques contraintes quant à la valeur de marché initiale des actifs d'états, les E(i) :

- **Tous les E(i) doivent être strictement positifs**; si tel n'était pas le cas, l'achat du ou des actif(s) d'état de valeur négative ou nulle en 0 constitue une opportunité d'arbitrage.
- **Un modèle mono périodique ne présente pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement si les E(i) existent** (et sont strictement positifs). En effet, nous avons vu que, dans ce cas, le prix d'un actif s'exprimait de façon unique en fonction de ses cash flows futurs et du prix des actifs d'état.

Propriété impliquée par l'existence de l'actif sans risque :

L'actif sans risque est celui dont le rendement futur est indépendant des différents états du monde pouvant se produire. Soit $r \geq 0$ le rendement de l'actif sans risque. Comme il rembourse 1 en fin de période, sa valeur en 0 est $(1+r)^{-1}$. Le remboursement est assuré quel que soit l'état de la nature et la valeur de l'actif sans risque peut donc également être exprimée par la somme des valeurs des actifs états.

D'où la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^N E(i) = \frac{1}{1+r} \leq 1$$

3.1.2. Les déflateurs d'état

Nous allons maintenant introduire le concept de **déflateur d'état**. Pour ce faire, reprenons le modèle mono périodique à deux états utilisé précédemment et supposons que la probabilité d'occurrence de l'état de la nature A est p et celle de l'état B ($1-p$).

Posons le déflateur d'état $D(e) = E(e) / p(e)$

Avec $p(e)$ la probabilité supposée pour l'état e : $P(A) = p$ et $P(B) = 1-p$.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent avec une probabilité d'occurrence de l'état de la nature A de deux tiers et de l'état B de un tiers, nous pouvons calculer les déflateurs à partir

	Valeur de l'actif d'état	Probabilité d'occurrence	Déflateur
Valeur future pour l'état de la nature A	0.4	0.667	0.60
pour l'état de la nature B	0.55	0.333	1.65

du prix des actifs d'état :

⇒ On généralise facilement cet exemple à un univers avec N états de la nature possibles pour montrer que la valeur P d'un actif produisant le cash flows $CF(e)$ pour chacun des N états de la nature s'exprime par :

$$P = \sum_{e=1}^N E(e)CF(e) = \sum_{e=1}^N p(e)D(e)CF(e) = E[D.CF]$$

3.1.3. Modèles multi périodiques et passage en temps continu

Modèles multi périodiques

Pour généraliser les exemples précédents de modèles mono périodiques à N états, nous allons considérer un modèle à N états et H périodes.

Les prix des actifs d'états sont notés $E(t, e)$, avec $t \in [1, 2, \dots, H]$ et $e \in [1, 2, \dots, N]$.

Les probabilités associées à chaque état de la nature pour un instant t donné sont notées $p(t, e)$, avec $t \in [1, 2, \dots, H]$ et $e \in [1, 2, \dots, N]$.

Comme pour le modèle mono périodique, les déflateurs sont définis par : $D(t, e) = E(t, e) / p(t, e)$

Soit $CF(t, e)$ un jeu de cash flows dont nous cherchons la valeur P . Comme précédemment, on raisonne par absence d'opportunité d'arbitrage sur un portefeuille répliquant exactement les cash flows, puis on introduit les déflateurs d'état pour parvenir à la formule suivante :

$$P = \sum_{t=1}^H \sum_{e=1}^N p(t, e)D(t, e)CF(t, e) = \sum_{t=1}^H E[D(t)CF(t)]$$

Selon le même principe, il est également possible de valoriser un cash flows futur à un instant futur.

Soient deux instants t_1 et t_2 , avec $t_1 < t_2$, la valeur en t_1 d'un cash flows tombant en t_2 est donnée par :

$$\frac{E_{t_1}[D(t_2)CF(t_2)]}{D(t_1)}$$

Considérons maintenant l'évolution possible du prix d'un actif $P(t)$ sur une période allant de t_1 à t_2 , pendant laquelle l'actif ne verse pas de dividende ou de coupon. En utilisant la formule précédente sur l'ensemble des cash flows procurés par l'actif considéré, on déduit :

$$P(t_1) = \frac{E_{t_1}[D(t_2)P(t_2)]}{D(t_1)}$$

Ce qui nous permet de mettre en évidence l'une des caractéristiques les plus importantes des déflateurs grâce à la formule suivante : $D(t_1)P(t_1) = E_{t_1}[D(t_2)P(t_2)]$.

Autrement dit, **le processus D.P est une martingale**, c'est à dire que son espérance à un instant futur est égale à sa valeur présente (ou plus généralement que son espérance à un instant futur t_2 conditionnée par l'information disponible à un instant t_1 est égale à sa valeur en t_1). **Cette propriété nous permettra en particulier de vérifier que le modèle ne présente pas d'opportunité d'arbitrage.**

Passage en temps continu

Pour calculer la valeur des Actifs d'État, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre d'actifs risqués et de connaître leur valeur initiale ainsi que les flux qu'ils génèrent dans les différents états de la nature. En pratique il est plus facile de constater la valeur d'un nombre limité d'actifs de marché pour lesquels on aura identifié et paramétré des processus de diffusion continus à partir desquels on dérive le processus de diffusion des déflateurs. C'est ce mécanisme que nous nous sommes attachés à expliciter dans ce chapitre.

D'autre part, notons que pour être vraiment utiles dans la valorisation de portefeuilles complexes, les déflateurs doivent être produits par un modèle de valorisation suffisamment sophistiqué pour pouvoir intégrer cette complexité. Les modèles discrets à plusieurs états que nous avons décrits au chapitre précédent pour rendre notre propos plus facilement accessible doivent être remplacés par des modèles continus.

3.2. Formule générale des déflateurs pour les modèles en temps continu

Nous commencerons par donner la forme générale des déflateurs, pour une économie constituée d'une structure par terme des taux sans risque et d'un actif risqué. Puis, sur cette base, nous expliciterons les déflateurs de quelques modèles financiers classiques.

3.2.1. Définition des déflateurs

Pour une économie donnée, le prix déflaté d'un actif de marché est une martingale sous la mesure de probabilité historique. Mathématiquement, si $C(t)$ est le processus stochastique définissant la diffusion dans le temps du prix d'un actif de marché, \mathfrak{R} la mesure de probabilité historique et \mathcal{F}_t la tribu des événements en t , $C(s).D(s) = E_{\mathfrak{R}} [D(t).C(t) / \mathcal{F}_s]$.

3.2.2 Caractéristiques de l'économie sous-jacente

Hypothèse : Le marché est complet et il vérifie l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage, ce qui assure l'existence du déflatteur pour cette économie donnée (Duffie 2001).

Hypothèse : Le prix S de l'actif risqué suit un mouvement brownien géométrique tel que : $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$, où μ et σ sont des constantes.

Hypothèse : Les taux sans risque sont caractérisés par un modèle stochastique à un facteur (processus d'Itô), continu et de carré intégrable :

(1) $dr = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dZ$

Hypothèse : La dynamique d'une obligation zéro coupon d'échéance T , dont la valeur en t est notée $P = P(t, T)$, peut être modélisée par un processus d'Itô :

$$(2) \frac{dP}{P} = \tilde{\mu}(r(t), t)dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ \quad \text{où} \quad P(T, T) = 1$$

où $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des fonctions continues, de carré intégrable.

Hypothèse : Le prix d'un zéro coupon ne dépend que de la dynamique des taux, $P = P(r(t), t)$.

Posons : $\frac{\partial P}{\partial t} = P_t ; \quad \frac{\partial P}{\partial r} = P_r ; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = P_{rr} .$

En utilisant le calcul d'Itô (cf. Annexe 1) et l'équation (1) on obtient :

$$(3) dP = (P_r \alpha(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2} P_{rr} (\beta(r(t), t))^2) dt + P_r \beta(r(t), t) dZ$$

En identifiant dans les équations (2) et (3) pour les termes en dt et en dZ , on obtient :

$$(4) P \tilde{\sigma}(r(t), t) = P_r \beta(r(t), t) ; \quad P \tilde{\mu}(r(t), t) = P_r \alpha(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2} P_{rr} (\beta(r(t), t))^2$$

3.2.3 Utilisation de la mesure risque-neutre et prix de marché du risque

Q est une mesure de probabilité risque-neutre si :

- les prix actualisés au taux sans risque sont des Q -martingales
- le passage de la mesure historique \mathfrak{R} à la mesure risque neutre Q existe et est déterminé par un processus strictement positif que l'on appelle la dérivé de Radon-Nikodym : $\frac{dQ}{d\mathfrak{R}}$

- la dérivé de Radon-Nikodym $\frac{dQ}{d\mathfrak{R}}$ a une variance finie

On peut démontrer (Duffie 2000) que s'il existe un déflateur D en définissant la quantité

$\xi(t) = \exp\left[\int_0^t r(s)ds\right]D(t)$ pour $t < T$ la mesure de probabilité risque neutre Q est obtenue par

$$\xi(T) = \frac{dQ}{d\mathfrak{R}}.$$

Posons : (5) $\xi(t) = E_t\left(\frac{dQ}{d\mathfrak{R}}\right) \Rightarrow E_{t'}[\xi(t)] = E_{t'}[E_t\left(\frac{dQ}{d\mathfrak{R}}\right)] = E_t\left(\frac{dQ}{d\mathfrak{R}}\right) = \xi(t) \Rightarrow \xi(t)$ est une martingale sous la mesure historique \mathfrak{R} (\mathfrak{R} -martingale).

De plus le processus est strictement positif ($\xi(0) = 1$).

Enfin, le théorème de représentation des martingales browniennes implique l'existence d'un

processus $\lambda(r(t), t)$, à la condition que la quantité $E^{\mathfrak{R}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T (\lambda(r(s), s))^2 ds\right)\right]$ soit finie, qui

assure que la dérive de ξ (le terme en dt) est nulle :

$$(5bis) \quad d\xi = -\lambda(r(t), t)\xi dZ$$

Cette formulation (5)bis assure que le processus est strictement positif.

En utilisant le théorème de Girsanov le processus :

$$(6) \quad dZ^Q = dZ + \lambda(r(t), t)dt \quad Z^Q(t=0) = 0$$

est un mouvement brownien sous la mesure Q .

Le prix actualisé au taux sans risque d'un zéro coupon est :

$$(7) \quad \tilde{P} = \tilde{P}(r(t), t) = P(r(t), t) \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

ou bien sous forme différentielle grâce au calcul d'Itô

$$\frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}} = [\tilde{\mu}(r(t), t) - r(t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ$$

Si $dZ^Q = dZ + \lambda(r(t), t)dt$ on a :

$$(8) \quad \frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}} = [\tilde{\mu}(r(t), t) - r(t) - \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)]dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ^Q$$

Le prix actualisé au taux sans risque d'un zéro coupon est une Q -martingale

$$\Rightarrow 0 = \tilde{\mu}(r(t), t) - r(t) - \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)$$

$$\Rightarrow (9) \quad \tilde{\mu}(r(t), t) = r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)$$

On appelle le processus $\lambda(r(t), t)$ prix de marché du risque.

En reportant (9) dans les équations (2) et (4) on a :

$$(10) \quad P[r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)] = P_r \alpha(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2} P_{rr} (\beta(r(t), t))^2 \quad \text{et}$$

$$(11) \quad \frac{dP}{P} = (r(t) + \lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t))dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ_1 \quad \text{où} \quad \tilde{\sigma}(r(t), t) = \frac{P_r}{P} \beta(r(t), t)$$

C'est cette formulation de la structure par terme des taux que nous utiliserons dans la suite des calculs.

3.2.4. Construction du déflateur pour une économie avec une courbe des taux stochastique et un actif risqué

L'économie considérée comporte un actif risqué, par exemple un indice actions, dont le cours suit un mouvement brownien géométrique et une courbe des taux suivant un processus de diffusion stochastique à un facteur (processus d'Itô) :

$$(12) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + k dZ_2 \quad dr = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dZ_1$$

Les deux mouvements browniens qui décrivent l'aléa de l'économie considérée, sont corrélés. Soit Z_1^\perp un mouvement brownien tel que $dZ_1 \cdot dZ_1^\perp = 0$. Autrement dit, nous prenons une base orthogonale où Z_1^\perp est indépendant de Z_1 . On a ensuite :

$$(13) \quad dZ_1 \cdot dZ_2 = \rho dt \quad dZ_i \cdot dZ_i = dt \quad Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_1^\perp$$

Le trois actifs de l'économie sont le titre risqué S , le compte d'épargne court terme B et un zéro coupon P d'échéance T . Leurs dynamiques deviennent :

$$(14) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + k\rho dZ_1 + k\sqrt{1 - \rho^2} dZ_1^\perp$$

$$(15) \quad \frac{dB}{B} = r(t)dt$$

$$(16) \quad \frac{dP}{P} = (r(t) + \lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t))dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ_1$$

où $\lambda(r(t), t)$ est le prix de marché du risque de taux dépendant des hypothèses du modèle et

$$\tilde{\sigma}(r(t), t) = \frac{P_r}{P} \beta(r(t), t) \quad \text{où } P \text{ est une solution de l'équation différentielle (10).}$$

Comme le déflateur est un processus d'Itô, on peut décrire sa dynamique selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$(17) \quad dD = \Omega(D, r(t), t)dt + \Xi(D, r(t), t)dZ_1 + \Psi(D, r(t), t)dZ_1^\perp$$

Pour trouver $\Omega = \Omega(D, r(t), t), \Xi = \Xi(D, r(t), t), \Psi = \Psi(D, r(t), t)$ nous allons utiliser l'argument suivant : les processus de prix déflatés de trois actifs de marché, SD, BD, PD sont des \mathfrak{R} -martingales et le théorème de représentation des martingales assure que leur dérive (terme en dt) est nulle.

On obtient ainsi pour SD :

$$(18) \quad d(SD) = DdS + SdD + dSdD \quad \text{de (12), (13) et (17) on obtient}$$

$$(19) \quad d(SD) = \left(\mu SD + \Omega S + Sk\rho\Xi + Sk\sqrt{1-\rho^2}\Psi \right) dt + \dots dZ_1 + \dots dZ_1^\perp$$

\Rightarrow en annulant le terme en dt on a :

$$(20) \quad \mu D + \Omega + k\rho\Xi + k\sqrt{1-\rho^2}\Psi = 0$$

De même pour BD :

$$(21) \quad d(BD) = DdB + BdD + dBdD \quad \text{de (12), (13), (15) et (17) on obtient}$$

$$(22) \quad d(BD) = (DBr(t) + B\Omega)dt + \dots dZ_1 + \dots dZ_1^\perp$$

\Rightarrow en annulant le terme en dt on a :

$$(23) \quad Dr(t) + \Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = -Dr(t)$$

La troisième équation est obtenue pour PD :

$$(24) \quad d(PD) = PdD + DdP + dPdD \quad \text{de (13), (16) et (17) on obtient}$$

$$(25) \quad d(PD) = (P\Omega + DP[r(t) + \lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t)] + P\Xi\tilde{\sigma}(r(t), t))dt + \dots dZ_1 + \dots dZ_1^\perp$$

En reportant (23) dans (25) et en annulant le terme en dt on a :

$$(26) \quad D\lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t) + \Xi\tilde{\sigma}(r(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Xi = -D\lambda(r(t), t)$$

En reportant (23) et (26) dans (20) on a :

$$(27) \quad \Psi = D \frac{r(t) - \mu + \lambda(r(t), t)k\rho}{k\sqrt{1-\rho^2}}$$

On peut écrire l'équation différentielle stochastique suivie par D :

$$(28) \quad \frac{dD}{D} = -r(t)dt - \lambda(r(t), t)dZ_1 - K(r(t), t)dZ_1^\perp \quad K(r(t), t) = -\frac{r(t) - \mu + \lambda(r(t), t)k\rho}{k\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\text{Soit } y = \ln D \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dy}{dD}dD + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dy^2}dDdD \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dD}{D} - \frac{1}{2D^2}dDdD$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{dD}{D} - \frac{1}{2D^2} \left(D^2(\lambda(r(t), t))^2 + D^2(K(r(t), t))^2 \right) dt$$

En utilisant (28) on obtient :

$$dy = \left[-r(t) - \frac{(\lambda(r(t),t))^2}{2} - \frac{(K(r(t),t))^2}{2} \right] dt - \lambda(r(t),t)dZ_1 - K(r(t),t)dZ_1^\perp$$

⇒ en intégrant sur $(0,t)$ on obtient :

(29)

$$D(t) = D(0) \cdot \exp \left[- \int_0^t r(s) ds - \int_0^t \frac{\lambda(r(s),s)^2}{2} ds - \frac{1}{2} \int_0^t (K(r(s),s))^2 ds - \int_0^t \lambda(r(s),s) dZ_1(s) - \int_0^t K(r(s),s) dZ_1^\perp(s) \right]$$

Cette équation donne la formule générale du déflateur pour une économie constituée d'une structure par terme des taux à un facteur et d'un actif risqué. λ correspond à la prime de risque associée à la volatilité de la courbe des taux et K à la prime de risque associée à la volatilité des actions. Une économie avec un plus grand nombre de sources de risques (inflation, marché immobilier, etc) verrait ainsi sa forme complexifiée pour intégrer toutes les sources de risque.

3.2.5. Quelques propriétés des déflateurs

Nous avons vu que le déflateur existe s'il y a Absence d'Opportunité d'Arbitrage sur les marchés financiers et qu'il est unique si les marchés sont complets.

La forme générale (29) garantie bien que le déflateur est strictement positif.

L'espérance vue de l'instant 0 du déflateur à un instant futur t est égal à la valeur du zéro-coupon $P(0, t)$. En effet, en appliquant la propriété de martingale au prix des zéro-coupons déflatés, dont le cash flow certain en t est égal à 1, il vient : $E[D(t)] = E[D(t) \cdot 1] = 1 \cdot P(0, t)$

Notons, en conséquence, que l'on peut encore simplifier l'expression générale du déflateur (29) en remarquant que la valeur en $t=0$ du déflateur est 1 ($P(0,0)$).

3.3. Modèle de Black & Scholes

Dans ce modèle, l'actif risqué suit bien un mouvement brownien géométrique, comme nous l'avons supposé au 3.3.1., et l'actif sans risque donne un rendement constant r .

En appliquant la formule (29) à cette économie, il vient immédiatement :

$\lambda = 0$, la courbe des taux étant plate et statique, la prime de risque associée est nulle.

$K = \frac{\mu - r}{\sigma}$, la prime de risque associée au risque du processus action S .

En remplaçant ces primes de risque dans la formule générale (29), et sachant que $D(0) = 1$, il vient :

$$D_t = \exp \left(- \left(r + \frac{(r - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) t + \frac{r - \mu}{\sigma} X_t \right)$$

3.4. Modèle de Vasicek pour la courbe des taux

Vasicek a proposé en 1977 le processus de diffusion suivant pour le taux court $r(t)$ (processus d'Ornstein-Uhlenbeck) :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dZ_1$$

a, b, σ sont constants. a correspond à la vitesse de retour à la moyenne, b à la valeur de la moyenne et σ est la volatilité du taux court. Notons que dans ce modèle $r(t)$ peut devenir négatif. $\lambda(r(t), t)$ est le prix de marché du risque de taux. Il est constant dans ce modèle ($\lambda(r(t), t) = \lambda$). λ doit être dérivé d'un modèle d'équilibre pour assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Les taux courts négatifs sont certainement contraires à l'AOA. Le modèle de Vasicek est cohérent avec un modèle d'équilibre si les agents ne peuvent pas investir dans le compte d'épargne court terme. Bien que cette hypothèse ne soit pas réaliste, elle est donc nécessaire pour avoir l'AOA.

La dynamique d'un zéro coupon est déterminée par l'équation (11) :

$$\frac{dP}{P} = (r(t) + \lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t))dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ_1$$

Le modèle de Vasicek est un modèle affine de la courbe des taux. En effet, les taux nominaux sont des fonctions affines du $r(t)$. Duffie (1994) a montré que la structure des taux est affine si et seulement si les coefficients des processus sont affines. En résolvant l'équation (10) pour ce modèle on a (cf. Annexe 2):

$$\tilde{\sigma}(r(t), t) = -\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

L'équation différentielle stochastique suivie par le déflateur D pour l'économie où la courbe des taux suit le modèle de Vasicek et l'actif risqué S un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dD}{D} = -r(t)dt - \lambda dZ_1 - K(r(t), t)dZ_1^\perp \quad \text{où} \quad K(r(t), t) = -\frac{r(t) - \mu + \lambda k \rho}{k\sqrt{1 - \rho^2}} \quad \text{et}$$

$$D(t) = \exp\left[-\int_0^t r(s)ds - \frac{\lambda^2 t}{2} - \frac{1}{2} \int_0^t (K(r(s), s))^2 ds - \lambda Z_1(t) - \int_0^t K(r(s), s)dZ_1^\perp(s)\right]$$

3.5. Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

Cox, Ingersoll et Ross ont proposé en 1985 le processus de diffusion suivant pour le taux court $r(t)$:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dZ_1$$

a, b, σ sont constants. a correspond à la vitesse de retour à la moyenne, b à la valeur de la moyenne et $\sigma\sqrt{r(t)}$ est la volatilité stochastique du taux court. Dans ce modèle $r(t)$ ne peut pas être négatif. $\lambda(r(t), t)$, le prix de marché du risque de taux, est dans ce modèle:

$$\lambda(r(t), t) = \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma} \quad ; \quad \text{où } \lambda \text{ est constant}$$

$\lambda(r(t), t)$ est dérivé d'un modèle d'équilibre pour assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Le modèle CIR est cohérent avec un modèle d'équilibre où les agents ont une fonction d'utilité logarithmique.

La dynamique d'un zéro coupon est déterminée par l'équation (11) :

$$\frac{dP}{P} = (r(t) + \lambda(r(t), t)\tilde{\sigma}(r(t), t))dt + \tilde{\sigma}(r(t), t)dZ_1$$

Le modèle CIR est un modèle affine de la courbe des taux car les taux nominaux sont des fonctions affines de $r(t)$. Duffie (1994) a montré que la structure des taux est affine si et seulement si les coefficients des processus sont affines. En résolvant l'équation (10) pour ce modèle on a (cf. Annexe 2):

$$\tilde{\sigma}(r(t), t) = -\tilde{b}(T-t)\sigma\sqrt{r(t)} \quad ; \quad \tilde{b}(T-t) = \frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\gamma + a + \lambda)(\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \quad ;$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

L'équation différentielle stochastique suivie par le déflateur D devient pour l'économie avec cette courbe de taux et l'actif risqué S :

$$\frac{dD}{D} = -r(t)dt - \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma}dZ_1 - K(r(t), t)dZ_1^\perp \quad \text{où} \quad K(r(t), t) = -\frac{r(t) - \mu + \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma}k\rho}{k\sqrt{1 - \rho^2}}$$

et

$$D(t) = \exp\left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)\int_0^t r(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t (K(r(s), s))^2 ds - \frac{\lambda}{\sigma}\int_0^t \sqrt{r(s)}dZ_1(s) - \int_0^t K(r(s), s)dZ_1^\perp(s)\right]$$

4. Résultats

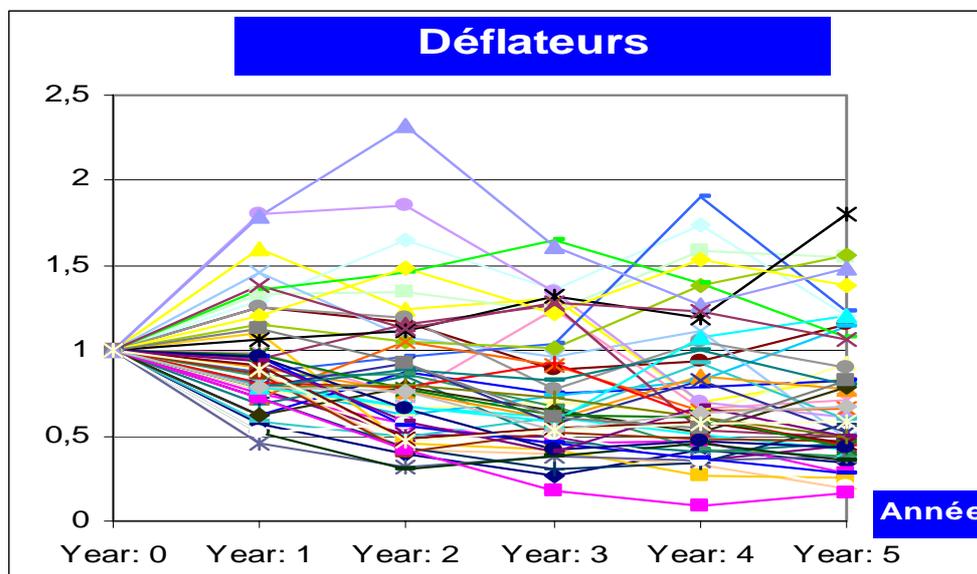
4.1. Générateur de scénarios macro-économique et des déflateurs associés.

Pour faciliter l'interprétation des résultats et permettre aux lecteurs qui le souhaiteraient de retrouver facilement les calculs, nous utiliserons la version la plus simple des déflateurs : celle du modèle de Black & Scholes (cf. section 3.3.). La courbe des taux est donc plate et constante dans le temps ; dans l'exemple que nous analyserons dans la section suivante, le risque de courbe des taux est de toute façon complètement couvert par l'adéquation Actif / Passif.

Simulations

Avec un générateur d'aléas classique, nous générons des simulations stochastiques de l'indice action et du déflateur associé.

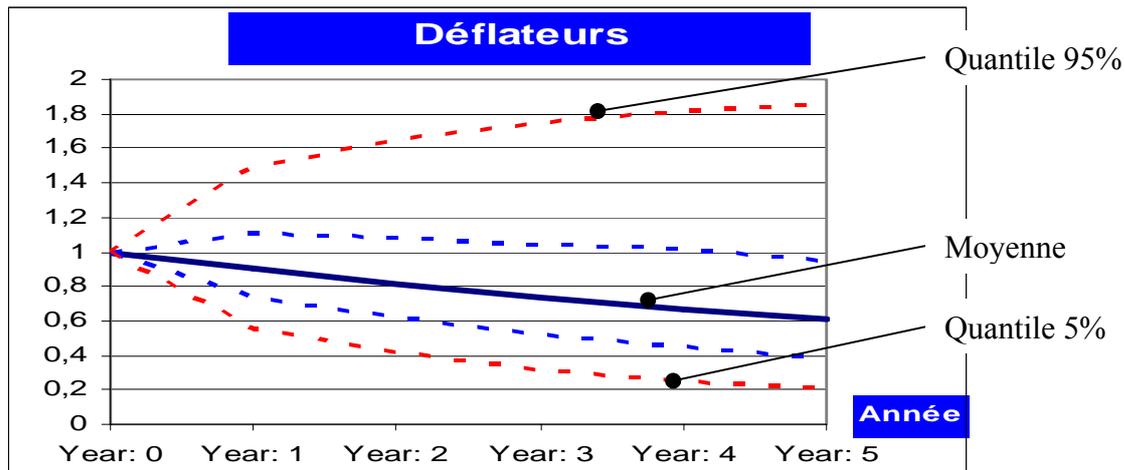
Sur les bases des résultats bruts ...



... nous pouvons expliciter quelques statistiques qui permettent de mieux voir comment fonctionne le déflateur :

- La moyenne des déflateurs, pour chaque année de projection, est égale à la valeur initiale du zéro-coupon de maturité correspondante (i.e. la moyenne du déflateur la troisième année de projection est égale au zéro-coupon $P(0,3)$).
- Comme le déflateur capte l'aversion au risque, les scénarios défavorables pour les investisseurs (ceux où l'indice action baisse) sont affectés d'un poids supérieur aux autres dans la valorisation ; et inversement pour les scénarios favorables. On le constate sur les quantiles 95% (scénarios très défavorables, correspondant à un indice action ayant perdu près de 30% pendant l'année) et 5% (scénarios très favorables où l'indice action a progressé d'environ 50%).

Cf. graphique page suivante.



4.2. Application : besoin en capital et création de valeur

Comme application, nous allons comparer le besoin en capital donné par la norme européenne actuelle et celui donné par le capital économique. Nous allons également considérer la création de valeur pour l'actionnaire selon trois indicateurs : l'Embedded Value, l'European Embedded Value et la Fair Value.

4.2.1. Indicateurs

Calcul de la Fair Value

La Fair Value de la société sera donné par la valeur actualisée en 0, grâce aux déflateurs, des cash flows futurs (CF) appartenant à l'actionnaire et générés par le modèle :

$$\text{Fair Value} = \sum_{i=1}^T E[D_i CF_i]$$

Calcul de l'European Embedded Value

L'European Embedded Value sera donnée en actualisant, chaque année, la moyenne des CF à un taux arbitraire, réputé capter le risque non valorisé par la méthode (et que nous préciserons à chaque fois dans les résultats). On déduit ensuite de cette valeur un coût du capital correspondant à l'écart entre le rendement constaté de l'actif et le rendement attendu par l'actionnaire sur le montant de capitaux immobilisés pour des raisons réglementaires.

Calcul de l'Embedded Value

L'Embedded Value sera donnée en ne faisant qu'une seule projection déterministe des CF annuels pour laquelle la source d'aléas (le rendement des actions) est fixée égale à son espérance (7% par exemple). Les cash flows appartenant à l'actionnaire sont ensuite actualisés avec un taux arbitraire réputé capter le risque non valorisé par la méthode (et que nous prendrons égal à l'espérance du rendement action). On déduit ensuite de cette valeur un coût du capital correspondant à l'écart entre le rendement constaté de l'actif et le rendement

attendu par l'actionnaire (ici le taux d'actualisation) sur le montant de capitaux immobilisé pour des raisons réglementaires.

Calcul du Capital Économique

Nous définirons le Capital Économique comme le capital nécessaire pour protéger avec une probabilité élevée (ex. : 99.75%) les assurés et les créiteurs « senior » contre le risque d'insolvabilité économique à horizon un an. Il y a insolvabilité économique lorsque la valeur de marché des actifs est inférieure à la Fair Value des passifs d'assurance et des dettes senior.

Pour éviter d'avoir à faire un grand nombre d'itération pour trouver le niveau de capital initial qui permet d'éviter l'insolvabilité économique avec la probabilité voulue, nous ferons l'approximation suivante :

$$\text{Capital Économique} = \text{Fair Value médiane dans 1 an} - \text{Fair Value du quantile 0.25\% dans 1 an.}$$

La distribution de Fair Value dans un an est obtenue selon le processus suivant :

- 1) une première simulation stochastique sur la première période d'un an conduit à N situations (par exemple 5000).
- 2) pour chacune de ces N situations, on projette les flux futurs jusqu'à l'horizon, avec les déflateurs associés.
- 3) les N jeux cash flows actualisés grâce aux déflateurs donnent une distribution de Fair Value à un an.

4.2.2. Cas modélisé

Considérons une société d'assurance ultra simplifiée pour laquelle les passifs techniques ne sont constitués que d'un seul produit d'assurance Vie, contenant des dérivés financiers implicites. Les actifs sont investis en actions de marché et en obligations d'état (considérées comme des actifs sans risque).

Nous allons nous appuyer sur un modèle Actif / Passif de projection des cash flows futurs et appliquer à ces cash flows la technique de valorisation explicitée précédemment.

Passif technique

Le passif technique est constitué d'un contrat à prime unique de 100 000 €, d'échéance 8 ans. On suppose qu'il n'y a ni rachat, ni décès pendant la durée du contrat et que le contrat n'est pas prorogeable après 8 ans.

Le contrat comprend une moitié investie en Unités de Compte et une autre moitié libellée en Euros. Pour la part UC, l'assuré supporte le risque d'investissement et conserve l'intégralité du rendement du fonds net de chargements. Les prélèvements sociaux sont déduits au terme.

La part Euros comprend une garantie de rendement minimum (« Taux Minimum Garanti », que nous ferons varier de 0% à 2%) et une participation aux bénéfices (que nous ferons varier de 90% à 100% des revenus financiers nets de chargements). Les prélèvements sociaux sont déduits chaque année.

Chargements

Sont prélevés sur les en-cours d'actifs ou les revenus financiers les chargements et cotisations suivantes :

- Prélèvements sociaux (CSG, CRDS) : 11% des revenus financiers
- Frais de gestion annuels bruts : 0.8% de l'en-cours pour la part Euros, 0,65% pour la part UC
0.25% de ces frais sont reversés au réseau de distribution
- Frais d'acquisition bruts : 2,5%
Ces frais sont intégralement reversés au réseau de distribution.

Coûts de fonctionnement

Les coûts de fonctionnement supportés par l'assureur sont modélisés comme un pro rata du volume d'actifs investis (0,1%).

Actifs investis

Les passifs techniques sont scindés en UC et Euros, chaque canton étant adossé à un fonds sur lequel sont prélevés les chargements. Les actifs sont investis en actions (actif risqué) et en obligations d'état 8 ans (actif sans risque), dans les mêmes proportions pour chacun des deux fonds ; cette allocation globale est précisée pour chaque simulation.

Nous n'avons pas modélisé d'impôt sur les flux appartenant à l'actionnaire.

4.3. Résultats

Nous avons modélisé le cas décrit précédemment, sous Excel, avec le paramétrage suivant :

HYPOTHESES	
Prime Unique	100 000
Part UC	50%
Caractéristiques du contrat €	
Prime Unique (en €)	50 000
Durée du contrat (en années)	8
Taux Minimum Garanti	0,00%
Participation aux bénéfices (sur l'excédent du TMG, net de frais)	100%
Prélèvement sociaux sur revenus financiers	11%
Chargements	
de gestion annuels bruts sur en-cours	0,80%
de gestion annuels nets sur en-cours	0,55%
sur versement, bruts	2,50%
sur versement, nets	0,00%
Frais sur encours	0,10%
Effet cliquet (oui=1 / non=0)	1
Caractéristiques du contrat UC	
Prime Unique (en €)	50 000
Durée du contrat (en années)	8
Prélèvement sociaux sur revenus financiers	11%
Chargements	
de gestion annuels bruts sur en-cours	0,65%
de gestion annuels nets sur en-cours	0,40%
sur versement, bruts	2,50%
sur versement, nets	0,00%
Frais sur encours	0,10%
Caractéristiques des actifs investis en représentation	
Taux sans risque	3,50%
Actions	
Rentabilité	7,00%
Volatilité	20,00%
Part Actions	10,0%
Part Obligations sans risque	90,0%
Hypothèses d'actualisation	
Taux d'actualisation actionnaire	7,0%
Ajustement de ce taux pour l'EEV	-1,25%
Impôts	0,0%

Sur la base de ce paramétrage, nous calculons les trois différents indicateurs de valeur, avec le montant en € et le ratio de ce montant divisé par 10% de la prime unique (un ratio classique d'analyse de la valeur crée par unité de prime récurrente, appelé « NBM » ou New

Business Margin), ainsi que les deux indicateurs de besoin en capital, le Capital Economique et l'exigence réglementaire actuelle « Solvabilité I » (4% de l'engagement € et 1% de l'engagement UC) :

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	1 746	1 799	713
NBM (%)	17,5%	18,0%	7,1%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	2 123	2 500

Sensibilité à la part actions :

- Avec 7% d'actions (au lieu de 10%)

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	1 727	1 854	1 813
NBM (%)	17,3%	18,5%	18,1%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	1 110	2 500

- Avec 13% d'actions

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	1 764	1 612	-546
NBM (%)	17,6%	16,1%	-5,5%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	3 125	2 500

Sensibilité au Taux Minimum Garanti :

- Avec 1% de TMG (au lieu de 0%)

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	1 746	1 531	-140
NBM (%)	17,5%	15,3%	-1,4%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	2 604	2 500

- Avec 2% de TMG

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	1 746	789	-1 619
NBM (%)	17,5%	7,9%	-16,2%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	3 130	2 500

Sensibilité aux prélèvements

- Avec 0,05% de prélèvements annuels supplémentaires

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	2 074	2 137	1 046
NBM (%)	20,7%	21,4%	10,5%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	2 168	2 500

- Avec 0,1% de prélèvements annuels supplémentaires

	Embedded Value	European Embedded Value	Fair Value
Montant (€)	2 402	2 474	1 377
NBM (%)	24,0%	24,7%	13,8%

Attention : Ces chiffres sont calculés avec un taux d'impôt sur les sociétés nul !

	Capital Economique	Exigence Solvabilité I
Montant (€)	2 213	2 500

4.4. Analyse des résultats

L'Embedded Value, qui d'une part ne capte pas l'optionnalité du produit et, d'autre part, ne restitue pas de valeur « Market Consistent », est insensible au niveau du Taux Minimum Garanti (tant que celui-ci reste inférieur au rendement moyen espéré du portefeuille d'actif, net de chargements, c'est à dire tant que l'option correspondant reste « hors de la monnaie »). D'autre part le choix du taux d'actualisation étant arbitraire et indépendant du risque réellement pris, l'augmentation de la prise de risque action n'est pas prise en compte et conduit à une augmentation de l'indicateur de valeur !

L'European Embedded Value, elle, capte l'optionnalité mais ne valorise pas de façon « Market Consistent ». Le choix du taux d'actualisation est moins arbitraire mais reste trop grossier pour réellement capter le risque encouru. Cet indicateur présente comme principal

avantage de fournir une valeur tenant compte des options du bilan tout en restant très simple (actualisation des cash flows moyens avec un taux simple).

La Fair Value capte l'optionnalité et la valorise de façon « Market Consistent », ce qui, on le voit, correspond à une valeur des options plus importante que ne le fait apparaître l'EEV. Ceci tient au fait que les déflateurs, captant l'aversion au risque des acteurs du marché financiers, donnent un poids plus important aux scénarios défavorables que ne le fait l'EEV en prenant simplement la moyenne sur tous les scénarios.

La **sensibilité à la part action** montre que l'EV y est quasiment insensible : elle ne capte pas du tout le risque associé seul l'en-cours sur lesquels sont pris les chargements évolue, influant très légèrement sur l'indicateur. L'EEV y est plus sensible, et de façon asymétrique, mais pas suffisamment pour capter complètement la valeur des options. La Fair Value montre que dans notre exemple la part action devrait être inférieure à 10%, toutes choses égales par ailleurs, pour que la NBM de ce produit soit satisfaisante. Le Capital Economique délivre le même message, si on considère que le niveau actuel d'exigence doit être un maximum.

La **sensibilité au TMG** confirme que l'EV y est bien totalement insensible. L'EEV, en revanche, capte bien ce type d'option mais y affecte une valeur inférieure à la « Market Consistent » value donnée par la Fair Value. Avec le paramétrage de l'exemple, donner des TMG de 2% recèle beaucoup trop de danger pour l'actionnaire et la valeur de ses flux s'en trouve largement amputée. Cette option doit se situer entre 0% et 1% pour que le produit soit rentable. Le Capital Economique délivre le même message.

La **sensibilité aux chargements** a simplement été effectuée pour donner un ordre de grandeur de l'équivalent en taux de chargement des impacts d'une augmentation de la part action ou du TMG.

5. Conclusion

L'utilisation de techniques financières, comme le passage sous la mesure de probabilité risque-neutre puis l'utilisation de déflateurs pour valoriser des cash flows futurs probabilisés, permet de faire face à l'une des principales difficultés techniques du passage aux nouvelles normes comptables et réglementaires : le calcul d'une « Fair Value » des passifs d'assurance.

La valeur des passifs ainsi calculée est très sensible à quelques hypothèses clés comme la volatilité supposée pour le marché actions, la corrélation entre le risque actions et les autres risques ainsi que la volatilité de la courbe des taux. De même, certaines caractéristiques de l'activité, comme la part d'actifs investis en actions et le niveau des Taux Minimum Garantis ont une influence dominante sur la sensibilité des indicateurs de risque et de valeur.

Pour utiliser ces techniques et mettre en place des indicateurs de pilotage de l'activité fondés sur la Fair Value (comme le potentiel de création de Fair Value et le Capital Économique), il nous semble qu'une première étape importante est la définition d'un cadre clair et d'outils simples pour produire un premier jeu d'indicateurs cohérents entre eux et captant de façon globale les principales sources de risque. Cette première étape permet de familiariser les différents intervenants aux concepts, aux aspects techniques importants et aux principaux leviers liés à l'activité. Elle permet surtout d'organiser un large échange autour des mécanismes de création de valeur et de gestion des risques pour permettre à l'organisation de mieux appréhender son processus de prise de décision et les impacts financiers possibles. Cette phase permet ainsi d'identifier ce que les indicateurs doivent véritablement capter, comment ils fonctionnent et la façon dont ils seront utilisés.

Après cette première phase, on pourra définir un cadre plus précis pour l'utilisation et la production des indicateurs, en fonction des objectifs stratégiques de l'entreprise, des cahiers des charges détaillés pour les outils et, finalement aboutir à des indicateurs plus précis et mieux adaptés aux spécificités de l'activité.

Le projet Solvabilité II favorise la production de tels indicateurs quantitatifs de risque et de valeur. Il permet, notamment, aux entreprises d'utiliser des modèles internes de type Capital Économique pour justifier le caractère suffisant de la capitalisation des assureurs. Les conditions pour que l'autorité accepte tel ou tel outil de projection des flux futurs associé à telle ou telle méthode de valorisation seraient, d'une part, que les modèles soient reconnus pertinents du point de vue de l'Actif / Passif et du besoin en capital, et d'autre part qu'ils soient effectivement utilisés par le management pour éclairer des décisions opérationnelles. Ainsi, les outils de calcul et de gestion de la valeur constituent un moyen de maîtriser l'allocation de capital et, certainement à court terme, de pouvoir la justifier aux autorités de contrôle.

Bibliographie

- Principes de Finance Moderne,
Robert Goffin (Editions Economica)
- Marchés des Capitaux et Théorie Financière,
François Quittard-Pinon (Editions Economica)
- An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices,
Cox, Ingersoll, Ross (Econometrica)
- A theory of the Term Structure of Interest Rates.
Cox, Ingersoll, Ross (Econometrica)
- Dynamic Asset Pricing Theory
Duffie (Princeton University Press)
- Stochastic Calculus
Alain Bain (“Notes” disponibles sur internet).
- From Embedded Value to Share Price,
V. Arabeyre & S. Hardwick
- Getting to grips with Fair Value,
M. Abbink & M. Saker
- Modern Valuation Techniques,
S. Jarvis, F. Southall & E. Varnell

Annexes

Annexe 1

Lemme d'Itô

Soit $dr(t)$ un processus stochastique général de la forme:

$$i) dr = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dZ$$

Soit $P = P(r(t), t)$ une quelconque fonction différentiable de $r(t)$.

$$\text{Soit : } \frac{\partial P}{\partial t} = P_t ; \quad \frac{\partial P}{\partial r} = P_r ; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = P_{rr}$$

Alors l'équation différentielle stochastique pour P est:

$$ii) dP = P_r dr(t) + P_t dt + \frac{1}{2} P_{rr} (\beta(r(t), t))^2 dt + O(dt dt, dt dZ, \dots) \quad \text{avec } (dZ dZ = dt)$$

en reportant i) en ii) on a :

$$ii\text{-bis) } dP = (P_r \alpha(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2} P_{rr} (\beta(r(t), t))^2) dt + P_r \beta(r(t), t) dZ$$

Annexe 2

Modèles affines de la courbe des taux

Soit $dr(t)$ un processus stochastique général de la forme:

$$iii) dr = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dZ$$

où Z est un mouvement brownien sur la mesure historique \mathfrak{R} . En introduisant la mesure risque neutre \mathcal{Q} et $\lambda(r(t), t)$, le prix de marché du risque. En utilisant le théorème de Girsanov on a :

$$iv) dZ^{\mathcal{Q}} = dZ + \lambda(r(t), t)dt \quad Z^{\mathcal{Q}}(t=0) = 0$$

est un mouvement brownien sur la mesure \mathcal{Q} .

Si nous écrivons l'équation iii) dans l'univers risque neutre en utilisant iv) on a :

$$v) dr = \hat{\alpha}(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dZ^{\mathcal{Q}} \quad \text{où} \quad \hat{\alpha}(r(t), t) = \alpha(r(t), t) - \beta(r(t), t)\lambda(r(t), t)$$

Si $\hat{\alpha}(r(t), t) = \hat{\alpha}(r(t))$ et $\beta(r(t), t) = \beta(r(t))$, on appelle le processus stochastique suivi par $r(t)$ homogène dans le temps.

En reportant $\hat{\alpha}(r(t), t)$ dans l'équation (10) :

$$P[r(t) + \tilde{\sigma}(r(t), t)\lambda(r(t), t)] = P_r\alpha(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2}P_{rr}(\beta(r(t), t))^2 \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}(r(t), t) = \frac{P_r}{P}\beta(r(t), t)$$

on a

$$\text{vi) } P_r\hat{\alpha}(r(t), t) + P_t + \frac{1}{2}P_{rr}(\beta(r(t), t))^2 - r(t)P = 0$$

Pour un zéro coupon d'échéance T , dont la valeur in t est notée $P = P(r(t), t; T)$, on peut montrer que si le processus est homogène dans le temps, il est de la forme $P = P(r(t), T - t)$

Un modèle s'appelle affine si :

$$\text{vii) } \hat{\alpha}(r(t), t) = \hat{\alpha}(r(t)) = \hat{\phi} - \hat{\kappa}r(t) \quad \text{et} \quad \beta(r(t), t) = \beta(r(t)) = \sqrt{\delta + \eta r(t)}$$

où $\hat{\phi}$, $\hat{\kappa}$, δ et η sont constants.

Duffie (1994) a montré que un modèle pour le taux court $r(t)$ est affine si et seulement si la solution de l'équation différentielle vi) a la forme :

$$\text{viii) } P = P(r(t), t; T) = \exp[-\tilde{a}(T - t) - \tilde{b}(T - t)r(t)]$$

où, avec $\tau = T - t$ et $T \geq t$, $\tilde{a}(\tau)$ et $\tilde{b}(\tau)$ sont les solutions des équations suivantes :

$$\text{ix) } \begin{cases} \frac{1}{2}\eta(\tilde{b}(\tau))^2 + \hat{\kappa}\tilde{b}(\tau) + \tilde{b}(\tau)' - 1 = 0 \\ \tilde{a}(\tau)' - \hat{\phi}\tilde{b}(\tau) + \frac{1}{2}\delta(\tilde{b}(\tau))^2 = 0 \end{cases}$$

Ces équations différentielles ix), dites de Riccati ont des solutions connues.

Modèle de Vasicek

$$dr = a(b - r)dt + \sigma.dZ \quad \text{où } a, b, \sigma \text{ sont constants.}$$

$$\text{Si } dZ^Q = dZ + \lambda(r(t), t)dt, \quad \text{avec } Z^Q(t = 0) = 0$$

est un mouvement brownien sur la mesure Q , où $\lambda(r(t), t) = \lambda$ est constante,

on peut écrire l'équation de diffusion dans le monde risque neutre comme :

$$\text{x) } dr = a(\hat{b} - r)dt + \sigma.dZ^Q \quad \text{où } \hat{b} = b - \frac{\lambda\sigma}{a}.$$

Le modèle de Vasicek est affine avec les paramètres suivants pour l'équation vii) :

$$\hat{\kappa} = a + \lambda, \hat{\phi} = ab, \eta = \sigma^2, \delta = 0$$

Les équations de Riccati deviennent ($\tau = T - t$):

$$\text{xi) } \tilde{a}\tilde{b}(\tau) + \tilde{b}(\tau)' - 1 = 0 \quad \text{avec } \tilde{b}(0) = 0 = \tilde{a}(0) \text{ dont la solution est:}$$

$$\text{xii) } \tilde{b}(\tau) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau})$$

$$\tilde{a}(\tau) = ab \int_0^\tau \tilde{b}(u) du - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^\tau (\tilde{b}(u))^2 du = [b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}][\tau - \tilde{b}(\tau)] + \frac{\sigma^2}{4a} (\tilde{b}(\tau))^2$$

Étant affine, la forme de $P = P(r(t), t; T) = \exp[-\tilde{a}(T-t) - \tilde{b}(T-t)r(t)]$ conduit à :

$$\text{xiii) } P_r = -\tilde{b}(\tau)P \quad \text{et} \quad P_{rr} = (\tilde{b}(\tau))^2 P$$

En reportant xiii) en ii-bis) on a :

$$\text{xiv) } \frac{dP}{P} = (r(t) - \lambda\sigma\tilde{b}(T-t))dt - \sigma\tilde{b}(T-t)dZ$$

Modèle CIR

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dZ \quad \text{où } a, b, \sigma \text{ sont constants.}$$

$$\text{Si } dZ^Q = dZ + \lambda(r(t), t)dt \quad Z^Q(t=0) = 0$$

est un mouvement brownien sur la mesure Q , où $\lambda(r(t), t) = \frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma}$, avec λ une constante,

on peut écrire l'équation de diffusion dans le monde risque neutre comme :

$$\text{xv) } dr = [ab - (a + \lambda)r]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dZ^Q \quad \text{en utilisant l'équation v).}$$

Le modèle CIR est affine avec les paramètres suivants pour l'équation vii) :

$$\hat{\kappa} = a, \hat{\phi} = ab, \delta = \sigma^2, \eta = 0$$

Les équations de Riccati deviennent ($\tau = T - t$):

$$\text{xvi) } \frac{1}{2} \sigma^2 (\tilde{b}(\tau))^2 + (a + \lambda)\tilde{b}(\tau) + \tilde{b}(\tau)' - 1 = 0 \quad \text{avec } \tilde{b}(0) = 0 = \tilde{a}(0) \quad \text{dont la solution est:}$$

$$\text{xvii) } \tilde{b}(\tau) = \frac{2(\exp(\gamma\tau) - 1)}{(\gamma + a + \lambda)(\exp(\gamma\tau) - 1) + 2\gamma}$$

$$\tilde{a}(\tau) = ab \int_0^\tau \tilde{b}(u) du = -\frac{2ab}{\sigma^2} [\ln(2\gamma) + \frac{1}{2}(a + \lambda + \gamma)\tau - \ln((\gamma + a + \lambda)(\exp(\gamma\tau) - 1) + 2\gamma)]$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

Étant affine, la forme de $P = P(r(t), t; T) = \exp[-\tilde{a}(T-t) - \tilde{b}(T-t)r(t)]$ conduit à :

$$\text{xviii) } P_r = -\tilde{b}(\tau)P \quad \text{et} \quad P_{rr} = (\tilde{b}(\tau))^2 P$$

En reportant xviii) en ii-bis) on obtient :

$$\text{xix) } \frac{dP}{P} = [r(t)(1 - \lambda\tilde{b}(T-t))]dt - \sigma\tilde{b}(T-t)\sqrt{r(t)}dZ$$