



ISUP

P R O M O T I O N 2 0 1 0

Mémoire présenté devant

**I ' I n s t i t u t d e S t a t i s t i q u e
d e l ' U n i v e r s i t é P i e r r e e t M a r i e C u r i e**

Pour l'obtention du

**D i p l ô m e d e S t a t i s t i c i e n
M e n t i o n A c t u a r i a t**

A s s u r a n c e ✍

F i n a n c e ✍

Par M. **Mohamed Ayoub OUAJJOU**

Sujet : **Risque de crédit**

Lieu du stage : **Ag2r La Mondiale**

Responsable du stage : **Mme. Mathilde JUNG**

Responsable à l'ISUP : **M. Jacques CHEVALIER**

CONFIDENTIEL ✍

À mes parents Zineb et Mohammed, mes frères, mes sœurs et mes nièces

Remerciements :

Je suis heureux de vous présenter ici mon mémoire de fin d'étude présenté devant le jury de l'institut des actuaires français. J'ai été ravi de passer ce stage au sein d'Ag2r La Mondiale, dans la direction des risques techniques. Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont, de près ou de loin participé à l'élaboration de ce mémoire.

Ainsi, je remercie tout particulièrement, ma responsable de stage Mathilde JUNG pour m'avoir proposé ce sujet et m'avoir suivi tout au long de la réalisation technique de ce mémoire en me guidant et me conseillant.

J'aimerais aussi remercier Jacques Chevalier qui a toujours pris le temps de répondre à mes nombreuses questions.

Je tiens également à remercier, Marie Deboosere, Christophe Izart et David Simon, qui m'ont accueilli au sein de l'équipe de modélisation.

Je voudrais aussi remercier Alexandra Hermann pour sa disponibilité et son aide dans mon assimilation des programmes Moses m'évitant au final de longues heures de recherche.

Je remercie aussi Roger Bonne et Clément Simard, pour leurs connaissances sur le sujet dont ils m'ont fait profiter.

Finalement, je voudrais remercier tous les collègues de la direction de risque : Aminata Diallo, Aurélien Cosmas, Benedicte Neyron, Christine Medou Casimurus, Hamidou Cissé, Jennifer Bestel, Jocelyne Conan, Marie Haderer, Maud Salvi, Olivier Bougarel et Vincent Rajaud pour la bonne ambiance qui fait vivre les locaux du boulevard Haussmann.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est de mieux appréhender en univers « risque neutre » le risque de crédit (risque de défaut et risque de liquidité) dans les modèles de projections utilisés pour les calculs de la « Market Consistent Embedded Value » et de Best Estimate. Nous avons retenu le modèle à intensité de défaut (i.e. modèle à forme réduite) baptisé **LMN** (Francis A. **L**ongstaff, Sanjay **M**ithal et Eric **N**eis).

Les modèles à intensité de défaut contournent la difficulté d'obtenir la valeur de marché des actifs des entreprises, en s'appuyant uniquement sur l'observation du spread de taux comme traduction du risque de crédit. Ces modèles n'expliquent pas directement la cause du défaut, ils s'intéressent plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises et ont pour qualité principale de pouvoir être calibrés aux prix des « Crédit Default Swaps » et des « Obligations de sociétés » observés sur le marché.

En outre le modèle LMN est compatible avec tous les modèles de taux court et en particulier le modèle utilisé dans le générateur de scénarios économique de La Mondiale.

Le premier volet de ce mémoire présente le générateur des scénarios économiques de La Mondiale, ainsi que les modélisations en univers « risque neutre » des différentes classes d'actifs (taux, actions et immobilier).

Nous introduisons ensuite le modèle LMN et nous nous intéressons à son implémentation dans le générateur des scénarios économiques.

Par la suite, nous détaillons l'implémentation du risque de crédit dans le modèle ALM et son impact sur les données d'actif en alimentation de ce dernier. Nous présentons après, l'impact de ce risque dans les projections ALM : cash-flows des obligations, valorisation des obligations Corporates.

Abstract:

The objective of this report is to better understand, under risk-neutral measure, the credit risk (default risk and liquidity risk) in the projection models used to compute the "Market Consistent Embedded Value" and the "Best Estimate". For this purpose, we considered a reduced form model for the default time called LMN (Francis A. Longstaff, Sanjay Mithal and Eric Neis).

The reduced form models circumvent the difficulty to obtain the market value of corporate assets, solely by the observation of the rate's spread as an explanation of credit risk. These models do not explain directly the cause of the default, but they compute the probability-default of corporations and they have as a principal quality the possibility to be calibrated from the prices of "Credit Default Swaps" and "Corporate bonds" observed on the market.

Besides, the LMN model is compatible with all the models of short rate and particularly the one used in the economic scenario generator of "La Mondiale".

The first part of this report deals with the economic scenario generator of "La Mondiale" and the modelling, under risk-neutral measure, of various asset types (rates, equities and real estate).

We then introduce the LMN model and we work on its implementation within the economic scenario generator.

Finally, we focus on the implementation of credit risk in the ALM model and on its impact on its asset's data. We present the impact of this risk in the ALM projections: bond's cash flows and valuation of corporate bonds.

Sommaire :

I.	CONTEXTE ET OBJECTIFS :	13
II.	GÉNÉRATEUR DES SCÉNARIOS STOCHASTIQUES :	15
II.1	GÉNÉRATEUR DE NOMBRE ALÉATOIRE :	15
II.2	RÉDUCTION DE LA VARIANCE (VARIABLE ANTITHÉTIQUE):	15
II.2.1	<i>Principe :</i>	16
II.2.2	<i>Exemple : estimation d'une intégrale :</i>	17
III.	MODÉLISATION EN RISQUE NEUTRE :	19
III.1	MODÈLE DE TAUX D'INTÉRÊT :	19
III.1.1	<i>Description du modèle :</i>	19
III.1.2	<i>Calibration du modèle :</i>	20
III.1.3	<i>Simulation des taux courts :</i>	21
III.1.4	<i>Facteur d'actualisation :</i>	21
III.1.5	<i>Génération des trajectoires :</i>	23
III.1.6	<i>Test de martingale :</i>	23
III.2	TAUX DE RENDEMENT ACTION :	24
III.2.1	<i>Modèle utilisé :</i>	24
III.2.2	<i>Calibration :</i>	24
III.2.3	<i>Génération des trajectoires :</i>	25
III.2.4	<i>Test de martingale :</i>	25
III.3	TAUX DE RENDEMENT IMMOBILIER :	26
III.3.1	<i>Modèle utilisé :</i>	26
III.3.2	<i>Calibration :</i>	26
III.3.3	<i>Génération des trajectoires :</i>	27
III.3.4	<i>Test de martingale :</i>	27
III.4	CORRÉLATIONS TAUX-ACTION-IMMO :	28
III.5	PONTS BROWNIENS :	28
IV.	INTRODUCTION AU RISQUE DE CRÉDIT:	31
IV.1	PRÉSENTATION DU MARCHÉ DU RISQUE DE CRÉDIT :	31
IV.1.1	<i>Prêteurs, emprunteurs, produits :</i>	31
IV.1.2	<i>Les obligations risquées :</i>	32
IV.2	MODÉLISATION :	35
IV.2.1	<i>Les modèles structurels :</i>	35
IV.2.2	<i>Les modèles à intensité de défaut (ou à forme réduite) :</i>	36
V.	LE MODÈLE LMN :	39
V.1	GÉNÉRALITÉS SUR LE MODÈLE :	39
V.2	DESCRIPTION DU MODÈLE :	40
V.2.1	<i>Principe :</i>	40
V.2.2	<i>Modélisation :</i>	40
V.3	DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS DU MODÈLE :	42
V.3.1	<i>Discrétisation du modèle CIR :</i>	42
V.3.2	<i>Discrétisation du Processus Brownien :</i>	42
V.4	CALIBRATION DU MODÈLE LMN :	43
V.4.1	<i>Les CDS (Credit Default Swaps) :</i>	43
V.4.1.1	<i>Introduction aux CDS :</i>	44
V.4.1.2	<i>Valeurs théorique des CDS :</i>	46
V.4.2	<i>Les données de marché :</i>	48
V.4.2.1	<i>Valeurs de marché des CDS :</i>	48
V.4.2.2	<i>Valeurs de marché des Obligations Corporate :</i>	49
V.4.2.3	<i>Taux LGD :</i>	49
V.4.3	<i>Calibration du modèle :</i>	50
V.5	SIMULATION DU MODÈLE LMN:	53
V.6	TESTS DE VALIDATION:	55
V.6.1	<i>Tests statistiques :</i>	55

Document Confidentiel

V.6.2	Test de validation pour la valeur de marché :.....	57
VI.	MODÈLE ALM LA MONDIALE :	61
VI.1	OBJECTIF DU MODÈLE :	61
VI.2	LA PROJECTION DU PASSIF :	62
VI.2.1	Flux du passif :	62
VI.2.2	Projection nombre/montant :.....	62
VI.2.3	Lois dynamiques :	62
VI.2.3.1	Loi de rachat :	63
VI.2.3.1.1	Loi en montant :	63
VI.2.3.1.2	Loi en nombre :.....	63
VI.2.3.2	Loi de reversement :	64
VI.2.3.2.1	Loi en nombre :	64
VI.2.3.2.2	Loi en montant :	64
VI.3	LA PROJECTION DE L'ACTIF :	64
VI.3.1	Prise en compte des scénarios :	64
VI.3.2	Classes d'actifs modélisées :	65
VI.3.2.1	Obligations :	66
VI.3.2.2	Actions :	66
VI.3.2.3	Immobilier :	66
VI.3.2.4	Monétaire :	66
VI.3.2.5	OPCVM obligataires :	67
VI.3.2.6	IFT :	67
VI.3.2.7	Les Unités de Compte :	67
VI.4	STRATÉGIES D'INVESTISSEMENT ET DÉINVESTISSEMENT :	68
VI.4.1	Allocation cible du stock en valeur nette comptable (VNC) :	68
VI.4.1.1	Étapes du processus :	68
VI.4.1.2	Cas des investissements / désinvestissements obligataires :	69
VI.4.2	Allocation cible des flux :	69
VI.4.2.1	Étapes du processus :	70
VI.4.2.2	Cas des obligations :	71
VI.4.3	Allocation cible du stock en VB :	71
VI.4.3.1	Étapes du processus :	71
VI.4.3.2	Cas des investissements / désinvestissements obligataires :	72
VII.	L'IMPACT DU MODÈLE LMN SUR LE MODÈLE ALM :	73
VII.1	LES DONNÉES À INTÉGRER DANS L'INPUT DU MODÈLE ALM :	73
VII.1.1	Les Probabilités de survie et défaut :	74
VII.1.1.1	Les coupons d'une Obligation Corporate :	74
VII.1.1.2	Le Remboursement du capital en cas de défaut :	74
VII.1.2	Les Taux Corporates :	77
VII.1.2.1	La valeur de marché :	77
VII.1.2.2	Taux ZC Corporate appliqués au principal:	78
VII.1.2.3	Taux ZC Corporate appliqués aux coupons d'une Oblig Corp :	78
VII.1.3	Les données à ajouter au fichier d'input Actuel :	78
VII.2	EXEMPLES D'IMPACTS DU MODÈLE LMN SUR LES DONNÉES D'ACTIF DE MODÈLE ALM :	79
VII.2.1	Nominal restant après investi/désinvesti :	80
VII.2.2	Les Coupons :	80
VII.2.3	Les Coupons courus :	81
VIII.	CONCLUSION :	85
IX.	ANNEXE :	87
IX.1	DISCRÉTISATION EXACTE DU PROCESSUS DE DIFFUSION DES TAUX COURTS DANS UN MODÈLE DE HULL & WHITE À 1 FACTEUR :	87
IX.2	CALCUL DU PRIX D'UNE OBLIGATION CORPORATE PAR DES FORMULES FERMÉES :	89
IX.3	DISCRÉTISATION DE DIOP DU MODÈLE CIR :	92
IX.4	ESPÉRANCES ET VARIANCES DES DISCRÉTISATIONS DES PROCESSUS DU MODÈLE LMN :	93
	Espérance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de l'intensité du crédit:	93
	Espérance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de liquidité :	93
	Variance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de l'intensité du crédit :	93
	Variance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de liquidité :	95
IX.5	TEST D'HYPOTHÈSE SUR LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON (TEST DE STUDENT) :	96

Document Confidentiel

IX.6	TEST D'HYPOTHÈSE SUR LA VARIANCE D'UN ÉCHANTILLON (TEST DU KHI-DEUX) :	97
IX.7	LA PROBABILITÉ DE DÉFAUT ENTRE T ET T+DT D'UN PROCESSUS À INTENSITÉ :	98
IX.8	TEST DE LA MARTINGALE :	99
X.	DOCUMENTS DE RÉFÉRENCE – BIBLIOGRAPHIE :	101

I. CONTEXTE ET OBJECTIFS :

Les autorités de contrôle sont de plus en plus exigeantes sur la connaissance et la mesure des risques inhérents à l'activité de la compagnie d'assurance. Dans ce contexte l'équipe Modélisation d'AG2R LA MONDIALE est chargée de développer des outils permettant une meilleure connaissance et une meilleure gestion des risques liés à l'activité de la compagnie.

Les portefeuilles de type épargne-retraite de La Mondiale font face à différents risques que sont principalement le risque de marché (risque de taux d'intérêt, risque de crédit, etc....), le risque de souscription (longévité, frais de gestion, etc....)

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux risques de défaut et de liquidité qui sont deux composantes du risque de crédit. Le risque de défaut correspond à l'incapacité du débiteur à faire face à ses obligations (manquement ou retard sur le paiement du principal ou des intérêts). Le risque de liquidité correspond à la difficulté de vendre un placement financier. Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles d'accuser une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant stipulé par le contrat de dette.

Actuellement, une approche simplifiée est utilisée pour tenir compte du risque de crédit (les coupons sont abattus de manière à égaliser l'espérance de cash-flows futurs et la valeur de marché initiale de ces obligations). L'équipe Modélisation d'AG2R LA MONDIALE souhaite mettre en place une mesure plus fine de ce risque, d'autant plus que les obligations risquées représentent une part importante dans nos portefeuilles d'actifs.

Plusieurs modèles existent pour évaluer le risque de crédit d'une entreprise ou d'une institution financière. On distingue deux grandes classes de modèles : les modèles structurels et les modèles à intensité de défaut. Les modèles structurels sont les modèles qui cherchent à expliquer l'événement de défaut à partir de variables économiques tandis que les modèles à intensité de défaut s'intéressent plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises.

L'équipe Modélisation AG2R LA MONDIALE a retenu pour la modélisation de ce risque en univers « Risque Neutre », un modèle à intensité de défaut dit modèle LMN développé par Francis A. Longstaff, Sanjay Mithal et Eric Neis.

Ce mémoire traitera du risque de crédit en univers « risque neutre » et il est structuré autour de trois étapes :

- Mise en place dans la génération des scénarios stochastiques d'une composante de crédit :
 - Intégrer au générateur de scénarios un modèle de risque de crédit
 - Mise en place des techniques de calibrage
- Implémentation du risque de crédit dans le modèle ALM
 - Impact sur les données d'actif en alimentation du modèle
 - Impact dans les projections ALM : cash-flows des obligations, valorisation des obligations Corporate

Nous introduisons dans ces premières parties (Sections II et III) le générateur des scénarios économiques (ESG) de la Mondiale. Ce générateur repose sur différents applicatifs et options de modélisation permettant de projeter en univers « risque neutre » ou en univers « monde-réel » les différentes classes d'actifs (Taux, Actions, Immobilier et Crédit).

Ensuite, nous présentons les démarches de calibrages des modèles d'actifs ainsi que les tests effectués pour valider la modélisation de chaque classe d'actifs.

II. GÉNÉRATEUR DES SCÉNARIOS STOCHASTIQUES :

Nous commençons par présenter le générateur de nombres aléatoires utilisé dans l'ESG, ensuite nous détaillons la technique de réduction de la variance dite : « des variables Antithétiques » qui nous permet d'augmenter la vitesse de convergence des scénarios.

II.1 Générateur de nombre aléatoire :

Dans le générateur des scénarios économiques de la Mondiale, les nombre aléatoires sont générés par un générateur pseudo-aléatoire appliquant l'algorithme Mersenne Twister (1997).

Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle (comportements de groupe).

Cependant, les sorties d'un tel générateur ne sont pas entièrement aléatoires ; elles s'approchent seulement des propriétés idéales des sources complètement aléatoires.

La raison pour laquelle on se contente d'un rendu pseudo-aléatoire est : d'une part qu'il est difficile d'obtenir de « vrais » nombres aléatoires et que, dans certaines situations, il est possible d'utiliser des nombres pseudo-aléatoires, en lieu et place de vrais nombres aléatoires ; d'autre part, que ce sont des générateurs particulièrement adaptés à une implantation informatique, donc plus facilement et plus efficacement utilisables.

Mersenne Twister est particulièrement réputé pour sa qualité. Avec sa période de $2^{19937}-1$ itérations, il distribue de manière uniforme sur 623 dimensions (pour des nombres de 32 bits) et s'avère être plus rapide que la plupart des méthodes statistiquement plus faibles.

À ce jour, les seuls effets négatifs sont liés à la cryptographie, Mersenne Twister ne pouvant accéder au titre de générateur cryptographique.

II.2 Réduction de la variance (Variable Antithétique):

Les techniques de réduction de la variance permettent d'augmenter la précision des estimations qui peuvent être obtenues avec un certain nombre de simulations.

La réduction de la variance regroupe l'ensemble des techniques, plus ou moins simples, qui permettent de réduire la variance des estimateurs de Monte-Carlo. En voici une courte liste :

- Variable de contrôle : on introduit une variable tierce, dite variable de contrôle, et on construit une nouvelle classe d'estimateurs, dépendant d'un paramètre c . On cherche la valeur du paramètre c permettant de réaliser une réduction de variance, par rapport à l'estimation Monte-Carlo de base.
- Variable antithétique : on introduit une seconde variable aléatoire très fortement négativement corrélée avec la première, permettant de réduire la variance. L'élément clef est la formule suivante, valable pour deux variables X, Y :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

- L'Échantillonnage préférentiel : lors du tirage de données aléatoires, certaines valeurs ont plus d'importance que d'autres dans l'évaluation de l'espérance/intégrale. L'idée est donc d'abandonner l'échantillonnage uniforme (selon la loi uniforme continue) pour un échantillonnage selon une autre loi, plus appropriée.

Le générateur d'AG2R LA MONDIALE des nombres aléatoire utilise la technique des variables antithétiques. Il s'agit de tirer partie de certaines symétries d'une distribution et de la corrélation (statistique) négative entre deux variables aléatoires.

II.2.1 Principe :

On souhaite estimer $\theta = E(h(X))$. La méthode de Monte-Carlo de base consiste à simuler n variables iid selon la loi de X , disons X_1, X_2, \dots, X_n , puis à estimer θ par :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$$

On peut avoir une idée de l'erreur commise en construisant un intervalle de confiance ; ce dernier nécessite un estimateur de la variance de l'estimateur $\sigma_{\hat{\theta}}^2$.

Supposons que l'on dispose de deux échantillons de taille n ; le premier est noté X_1, X_2, \dots, X_n et le second X'_1, X'_2, \dots, X'_n . Pour simplifier les notations, on pose m_1, m_2 les estimateurs empiriques de l'espérance de $h(X)$ sur respectivement l'échantillon 1 et 2. Autrement dit, on aura :

$$m_1 = \frac{h(X_1) + \dots + h(X_n)}{n} \quad \text{Et} \quad m_2 = \frac{h(X'_1) + \dots + h(X'_n)}{n}$$

L'estimateur Monte-Carlo sur l'échantillon complet est simplement : $\hat{\theta} = \frac{m_1 + m_2}{2}$

Et, du point de vue de la variance : $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^2 + \sigma_{m_2}^2 + 2\text{Cov}(m_1, m_2)}{4}$

Dans le cas iid, la covariance s'annule et $\sigma_{m_1}^2 = \sigma_{m_2}^2$, si bien que $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \sigma_{m_1}^2 / 2$: le facteur 2 s'explique car on a doublé la taille de l'échantillon.

La technique de la variable antithétique consiste à choisir l'échantillon 2 identiquement distribué selon la loi de X mais en renonçant à l'indépendance, plus précisément en s'arrangeant pour que $Cov(m_1, m_2) < 0$. Il faut donc exploiter les éléments de symétrie de la loi de X afin de construire le second échantillon à partir du premier, en s'assurant de la négativité de la covariance. Se faisant, la variance sera inférieure à la variance "normale" $\sigma_{m_1}^2 / 2$.

Par exemple, si la loi de X est la loi uniforme sur [0,1], le premier échantillon sera simplement u_1, \dots, u_n , où pour tout i, u_i est tirée selon $U(0,1)$. On construit le second échantillon u'_1, \dots, u'_n , en posant pour tout i: $u'_i = 1 - u_i$. Si les u_i sont uniformes sur [0;1], alors il en va de même pour les u'_i . De plus, la covariance est négative, ce qui permet de réduire la variance initiale.

Un autre exemple concerne la loi normale $N(\mu, s)$. En appliquant la transformation $x'_i = 2\mu - x_i$, où $x_i \sim N(\mu, s)$, on obtient un tirage dans $N(\mu, s)$, qui est négativement corrélé avec le premier tirage x_i .

II.2.2 Exemple : estimation d'une intégrale :

On souhaite estimer : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte est $I = \ln(2) \approx 0,6931471805599$. Cette intégrale peut se voir comme l'espérance de f(U), où $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et U distribuée selon une loi uniforme sur [0;1].

On compare l'estimateur Monte-Carlo classique (échantillon de taille 2n, avec n = 1500, tiré selon la loi uniforme standard) à l'estimateur avec variable antithétique (échantillon de taille n, complété par l'échantillon transformé $1 - u_i$). La variance se réduit comme suit :

	Estimation	Variance
Méthode classique	0,69365	0,02005
Variable antithétique	0,69399	0,00063

On constate une très nette réduction de la variance dans le cas de l'utilisation d'une variable antithétique.

III. MODÉLISATION EN RISQUE NEUTRE :

L'équipe de modélisation a développé en univers « risque neutre » les différentes classes d'actifs dans le générateur des scénarios économiques, en s'attachant à calibrer les modèles sur des données de marché, afin que les scénarios soient « market consistent ». Nous détaillons ici les choix de modélisation, les calibrages et les tests effectués pour chaque modèle, par classe d'actif.

III.1 Modèle de taux d'intérêt :

Le modèle retenu pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt, est le modèle de Hull & White à 1 facteur. Ce choix a été motivé par :

- Sa relative simplicité
- Il s'agit d'un modèle d'arbitrage, couramment utilisé en finance pour pricer des instruments dérivés de taux.
- Il est calibré sur l'ensemble de la courbe ZC observée aujourd'hui (ce qui n'est pas le cas des modèles d'équilibre)
- Le modèle à 1 facteur (plutôt qu'à 2 facteurs) a été préféré car il suffit à capter le principal risque de taux pour La Mondiale, qui est un risque de translation des taux d'intérêt (déformation de 1er ordre).

Principal inconvénient : le taux court étant gaussien, il peut prendre des valeurs négatives avec une probabilité non nulle.

III.1.1 Description du modèle :

Dans ce modèle, le taux court est simulé en pas mensuel et vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$r(t) = f(0,t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 \quad (1)$$

Où a et σ sont 2 paramètres du modèle, calibrés sur la courbe ZC aujourd'hui. ($W(s)$) est un pont brownien standard, et $f(0,t)$ est le taux forward instantané déterminé à la date 0 et commençant à t . Il se déduit de la courbe ZC observée aujourd'hui par la formule :

$$f(0,t) = -\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial (R(0,t) \times t)}{\partial t} = R(0,t) + t \times \frac{\partial R(0,t)}{\partial t}$$

Où $P(0,t)$ et $R(0,t)$ sont respectivement le prix d'une obligation ZC et le taux ZC à $t=0$ de maturité t .

Document Confidentiel

Seuls les taux ZC que nous récupérons sur Bloomberg sont utilisés pour estimer les taux forward instantanés. Les taux forward mensuels manquants sont obtenus par interpolation linéaire et par une dérivation du prix Zc. On a alors, pour ε très petit, la formule suivante :

$$f(0,t) = \frac{-\ln P(0,t+\varepsilon) + \ln P(0,t)}{\varepsilon} \quad (2)$$

Où $P(0,t) = \exp(-\text{taux_continu}(t) * t)$

Remarque.3.1.1 : Généralement, les courbes de taux récupérées sur Bloomberg sont exprimées en taux discret. Lorsque nous utilisons ces taux pour l'estimation des prix zéro-coupons, nous considérons que ces taux sont continus. En effet, les prix zéro-coupons à l'origine sont exprimés sous la forme $\exp(-r(t) * t)$. Pour convertir les taux discrets en taux continu, on applique la formule suivante :

$$\text{taux_continu}(t) = \ln(1 + \text{taux_discret}(t))$$

III.1.2 Calibration du modèle :

Le calibrage du modèle de Hull et White consiste à choisir les paramètres a et σ de façon à retrouver, à une marge d'erreur près, la valeur de marché réellement observée d'instruments financiers reflétant bien le risque de taux de la Mondiale (swaptions sur swap de taux 10 ans).

Pour le calibrage, nous avons utilisé l'outil de calibrage développé sous Excel/VBA. Cet outil s'appuie sur des macros téléchargeables depuis le site de Hull, qui permettent de calculer le prix de swaptions sur la base du modèle de taux d'intérêt Hull & White.

De façon plus précise, l'outil calcule le prix de swaptions 10 ans observés sur le marché à partir de 2 modèles :

- modèle de Black (formule fermée), prenant en input la courbe ZC issue des prix des swaptions observés sur le marché et la volatilité des swaptions → on obtient alors le prix de marché des swaptions
- modèle de Hull & White, en utilisant la fonction « HullWhiteSwapOpt » (macro importée depuis le site de Hull). Cette fonction prend en input la courbe ZC issue des prix des swaptions observés sur le marché.

Les paramètres a et σ sont déterminés de façon à minimiser la somme du carré des écarts entre les prix des swaptions issus des 2 modèles.

Exemple de données utilisées dans le calibrage du modèle HW1f :

Courbe des taux (continus) zéro coupon
au 31/12/2009

Years	Rate
0.00	0.42%
0.25	0.70%
0.50	0.98%
1.00	1.24%
2.00	1.87%
3.00	2.24%
4.00	2.55%
5.00	2.80%
6.00	3.01%
7.00	3.23%
8.00	3.36%
9.00	3.49%
10.00	3.62%
15.00	4.05%
20.00	4.15%
30.00	3.90%
40.00	3.90%

Volatilité implicites des Swaptions de maturité 10ans
au 31/12/2009

Départs \ Maturé	10
0.08333333	0.194
0.25	0.214
0.5	0.22
1	0.221
2	0.207
3	0.188
4	0.175
5	0.164
7	0.151
10	0.144
15	0.147
20	0.165
25	0.1775
30	0.181

III.1.3 Simulation des taux courts :

L'équation d'évolution des taux courts (1) permet d'écrire la relation suivante, reliant les taux courts à 2 instants T et t quelconques :

$$r_t = e^{-a(T-t)} r_T + f(0, T) - e^{-a(T-t)} f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-a(T-t)} + e^{-a2T} - e^{-a(T+t)}] + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(T-t)})}{2a}} \times N(0,1)$$

Voir l'annexe1 pour la démonstration.

Sans aucune condition sur le pas de temps Δ , on peut donc écrire la relation de récurrence exacte suivante entre $r(\Delta(n+1))$ et $r(\Delta n)$:

$$r_{\Delta(n+1)} = e^{-a\Delta} r_{\Delta n} + f(0, \Delta(n+1)) - e^{-a\Delta} f(0, \Delta n) + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-a\Delta} + e^{-a2\Delta(n+1)} - e^{-a\Delta(2n+1)}] + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a\Delta})}{2a}} \times N(0,1)$$

Cette équation de récurrence permet de calculer de proche en proche les valeurs du taux court à chaque pas de temps. Elle fait intervenir :

- les paramètres a et σ déterminés à l'étape de calibrage du modèle,
- les taux forward instantanés $f(0, t)$,
- les différentes réalisations de la loi normale standard $N(0,1)$.

Remarque : Dans le modèle Hull & White à un facteur, les taux courts sont gaussiens. Ils peuvent donc être négatifs avec une probabilité non nulle. Nous avons donc, choisi de ne pas annuler les taux courts en amont mais de laisser le choix à l'utilisateur de les annuler ou pas.

III.1.4 Facteur d'actualisation :

Le facteur d'actualisation se déduit des taux courts générés dans chaque scénario par la formule :

$$\text{Facteur d'actu}(T) = \frac{1}{(1 + R(0, T))^T} = \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)$$

Avec : $R(0, T)$ Le taux zéro coupon discret démarrant à $t = 0$ et d'échéance T

r_s : Le taux court.

Pour une meilleure estimation de ce facteur, nous appliquons une discrétisation à pas mensuel plutôt qu'annuel.

$$\text{facteur_actu}(T) = \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{l=0}^{11*T} r_{l/12}\right)$$

Où $r_{l/12}$ le taux court mensuel.

Exemple.3.1.4 :

En pas annuel :

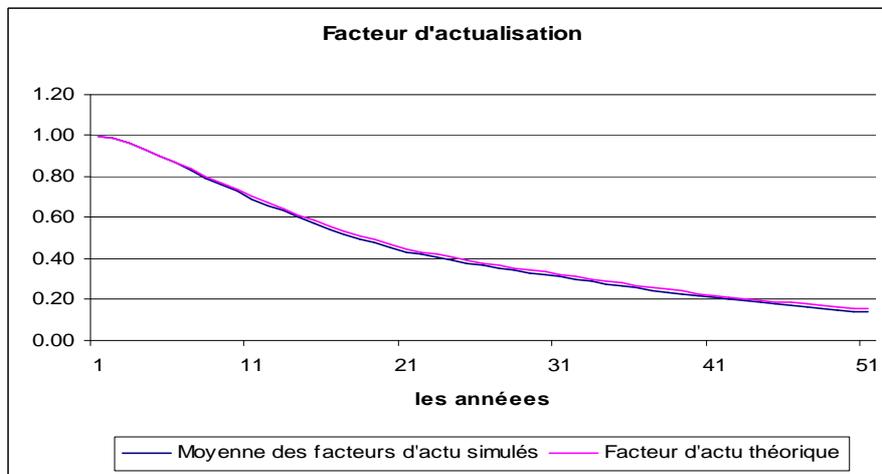
$$\text{facteur_actu}(1) = \exp(-r_1) \quad \text{où } r_1 \text{ est le taux court annuel 1 an}$$

En pas mensuel :

$$\text{facteur_actu}(1) = \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{t=0}^{11} r_{t/12}\right) \quad \text{où } r_{t/12} \text{ est le taux court mensuel.}$$

Ainsi, au lieu d'utiliser un seul taux en pas annuel, on utilise 12 taux pour estimer le facteur d'actualisation à 1 an en pas mensuel. Ceci induit une meilleure estimation du facteur d'actualisation.

Le graphe ci-dessous compare les courbes des facteurs d'actualisation simulés et théoriques :



Notons que ce graphe est obtenu grâce à une simulation stochastique utilisant les variables antithétiques ce qui explique la correspondance des deux courbes.

Remarque.3.1.4 : On utilise pour chaque scénario, la courbe de taux d'actualisation correspondante.

En effet, si par exemple : Le taux d'actualisation est utilisé pour actualiser les flux de marges futures servant au calcul de l'EV, suivant la formule :

$$EV = E \left[\sum_{t=1}^n F(t, r_t) \times \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \right]$$

Si le flux à la date t était indépendant du taux court r_t , on pourrait faire entrer l'espérance à l'intérieur de la somme, et écrire :

$$EV = \sum_{t=1}^n F(t) \times E \left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \right] = \sum_{t=1}^n F(t) \times P(0, t)$$

Puisque par définition, le prix d'une obligation ZC de maturité t, à l'instant 0 est égal :

$$P(0, t) = E \left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \right]$$

Dans ce cas, on aurait une courbe de taux d'actualisation unique pour tous les scénarios, égale à la courbe des taux ZC observée à $t = 0$.

Comme dans la pratique les flux dépendent du taux court r_t , on ne peut pas faire entrer l'espérance dans la somme, ce qui oblige à considérer pour chaque scénario i le facteur d'actualisation qui lui est propre, défini par :

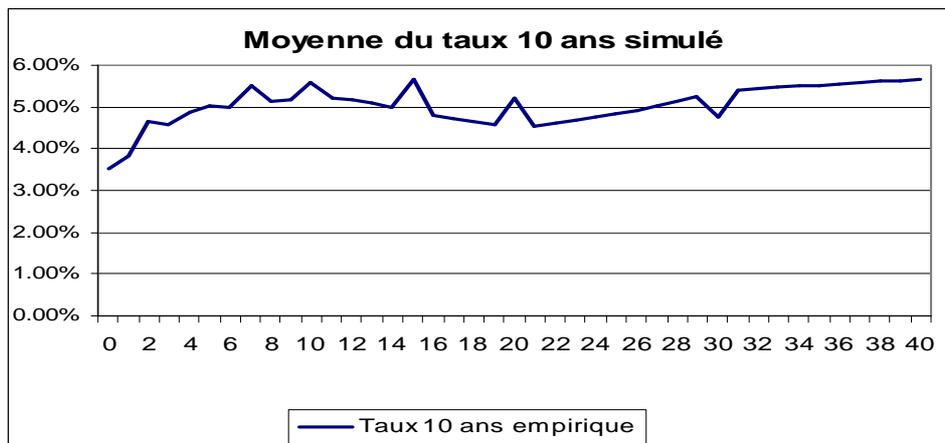
$$F_{actu}^{(i)}(t) = \exp\left(-\int_0^t r_s^{(i)} ds\right)$$

En pratique, les taux courts r_t sont générés suivant le pas de temps Δ . En posant toujours $t = n\Delta$, on a la relation discrétisée suivante (sous réserve que Δ soit suffisamment petit) :

$$F_{actu}^{(i)}(n\Delta) = \exp\left(-\int_0^{n\Delta} r_s ds\right) \approx \exp\left(-\Delta \sum_{k=0}^{n-1} r_{k\Delta}\right)$$

III.1.5 Génération des trajectoires :

Nous avons généré les taux d'une obligation « couponée » de maturité 10ans sur un horizon de 0 à 40 ans, avec un pas de temps annuel.



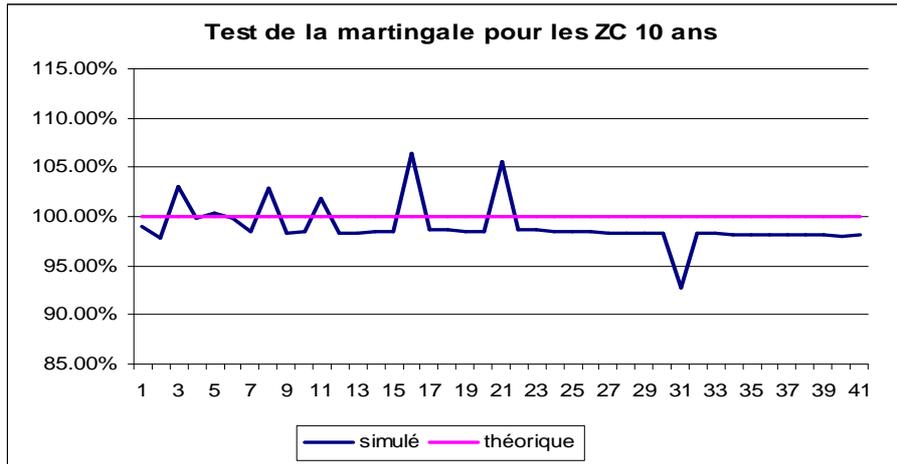
III.1.6 Test de martingale :

Le graphe suivant affiche les résultats du test de la martingale pour les prix d'une obligation ZC de maturité 10ans :

$$E[D_t P_n(t,10)] = P_n(0,10)$$

Où D_t est le facteur d'actualisation.

Remarque 3.1.6 : nous introduisons le test de la martingale en annexe8.



III.2 Taux de rendement action :

III.2.1 Modèle utilisé :

Pour simuler le prix des actions, nous supposons qu'il suit un mouvement brownien géométrique (modèle de B&S) :

$$dS_t = S_t \times ((\mu_a - d) * dt + \sigma_a dW_t) \quad (3)$$

Avec μ_a le taux de rendement moyen attendu de l'action, d est le taux de dividendes attendu, et σ_a la volatilité des prix de l'action.

Sous la probabilité risque-neutre, on peut écrire :

$$dS_t = S_t \times ((r_t - d) * dt + \sigma_a dW_t) \quad (4)$$

Où r_t est le taux court à la date t (suivant le processus de diffusion de Hull & White décrit au paragraphe précédent).

Si on considère un pas de temps suffisamment petit Δ , l'équation (4) peut être discrétisée de la manière suivante (discrétisation d'Euler):

$$S_{t+1} - S_t = S_t \times ((r_t - d) * \Delta + \sigma_a \sqrt{\Delta} N(0,1)) \quad (5)$$

Cette dernière équation permet de générer des trajectoires de prix de l'action au cours du temps.

III.2.2 Calibration :

Les paramètres du modèle sont :

- d : le taux de dividendes moyen attendu
- σ_a : la volatilité des prix de l'action

Aujourd'hui, ces paramètres sont calibrés comme suit :

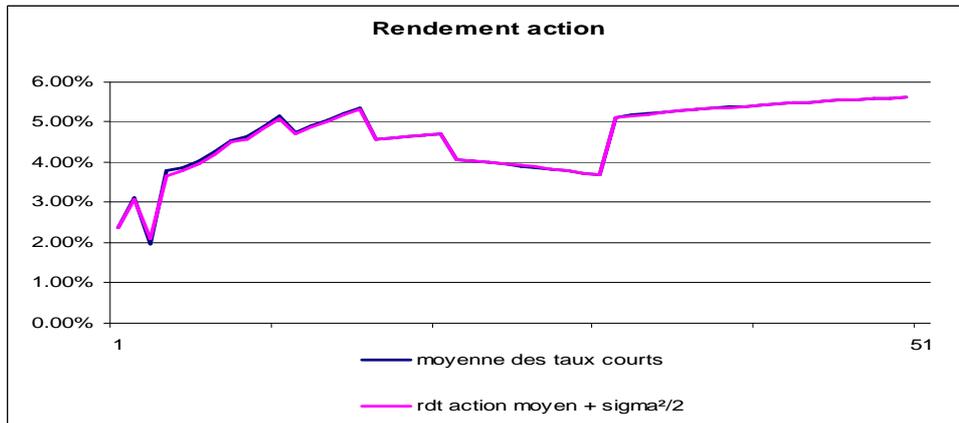
- $d = 0\%$
- σ_a = volatilité implicite moyenne d'un panel d'options sur indice Eurostoxx 50, les plus liquides, à la monnaie ; la moyenne est pondérée par la maturité afin de donner plus de poids aux maturités les plus longues.

Remarque.3.2.2 : Dans le modèle actuel, on suppose que nous réinvestissons les dividendes, chose qu'on ne fait pas automatiquement dans la vraie vie. Il faut donc développer ce modèle de telle façon à laisser le choix à l'utilisateur de réinvestir les dividendes ou pas.

III.2.3 Génération des trajectoires :

Nous avons généré les taux de rendement action sur un horizon de 0 à 50 ans, avec un pas de temps 1 an. Cette trajectoire est générée par des variables antithétiques, nous obtenons donc par construction une courbe simulée qui correspond à la courbe théorique.

Le graphe ci-dessous représente les rendements moyens obtenus :



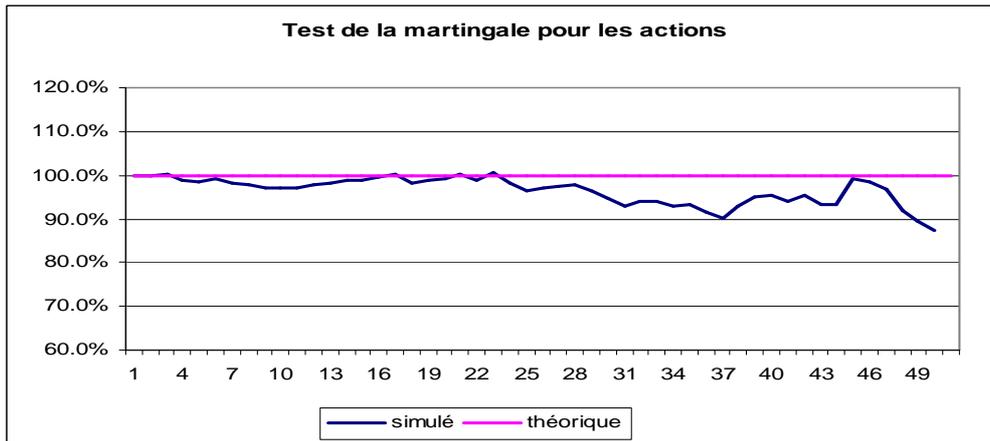
III.2.4 Test de martingale :

Le test de la martingale repose sur l'actualisation de l'indice des actifs par le facteur d'actualisation.

$$E[D_t S_t] = 1$$

Où D_t est le facteur d'actualisation et S_t est la valeur de l'indice action.

Le graphique suivant, montre le résultat du test de la martingale :



Nous obtenons des résultats satisfaisants.

III.3 Taux de rendement immobilier :

III.3.1 Modèle utilisé :

Pour simuler le prix des titres immobiliers, nous supposons, comme pour les actions, qu'il suit un mouvement brownien géométrique (modèle de B&S) :

$$dI_t = I_t \times ((\mu_i - l) * dt + \sigma_i dW_t) \quad (6)$$

Avec μ_i le taux de rendement moyen attendu de l'immobilier, l les loyers moyens attendus (en % du prix de l'actif) et σ_i la volatilité des prix de l'immobilier.

Sous la probabilité risque-neutre, on peut écrire :

$$dI_t = I_t \times ((r_t - l) dt + \sigma_i dW_t) \quad (7)$$

Où r_t est le taux court à la date t .

Si on considère un pas de temps suffisamment petit Δ , l'équation (7) peut être discrétisée de la manière suivante :

$$I_{t+1} - I_t = I_t \times ((r_t - l) * + \sigma_a \sqrt{\Delta} N(0,1)) \quad (8)$$

Cette dernière équation permet de générer des trajectoires de prix de l'immobilier au cours du temps.

III.3.2 Calibration :

Les paramètres du modèle sont :

- l : le loyer moyen attendu
- σ_i : la volatilité des prix des actifs immobilier

Aujourd'hui, ces paramètres sont calibrés comme suit :

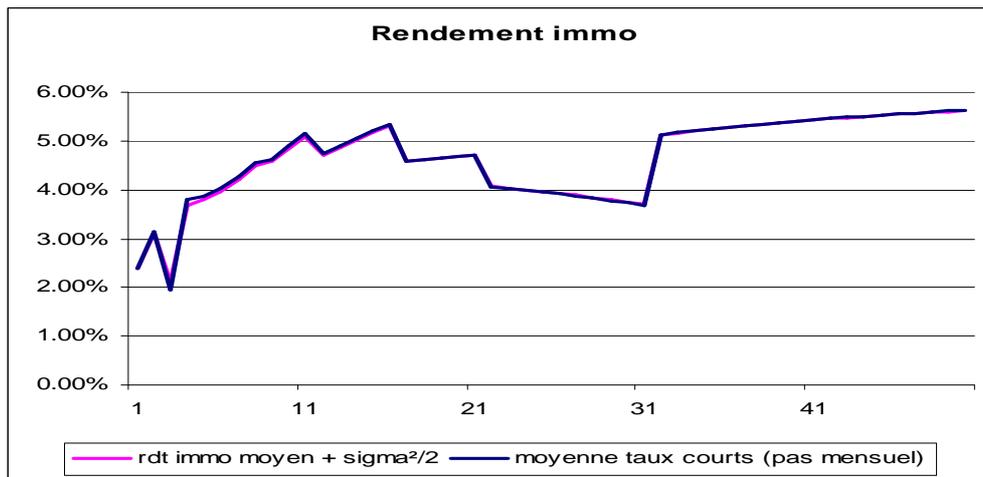
- $l = 0\%$
- σ_i = en l'absence de produits dérivés sur les actifs immobilier, on retient la volatilité historique des prix immobilier, soit 10% au 31.12.2009.

Remarque 3.3.2 : Dans le modèle actuel, on suppose que nous réinvestissons les loyers, chose qu'on ne fait pas automatiquement dans la vraie vie. Il faut donc développer ce modèle de telle façon à laisser le choix à l'utilisateur de réinvestir ou de ne pas réinvestir les dividendes.

III.3.3 Génération des trajectoires :

Nous avons généré les taux de rendement immobilier avec des variables antithétiques, ce qui explique la correspondance entre la courbe théorique et la courbe simulée.

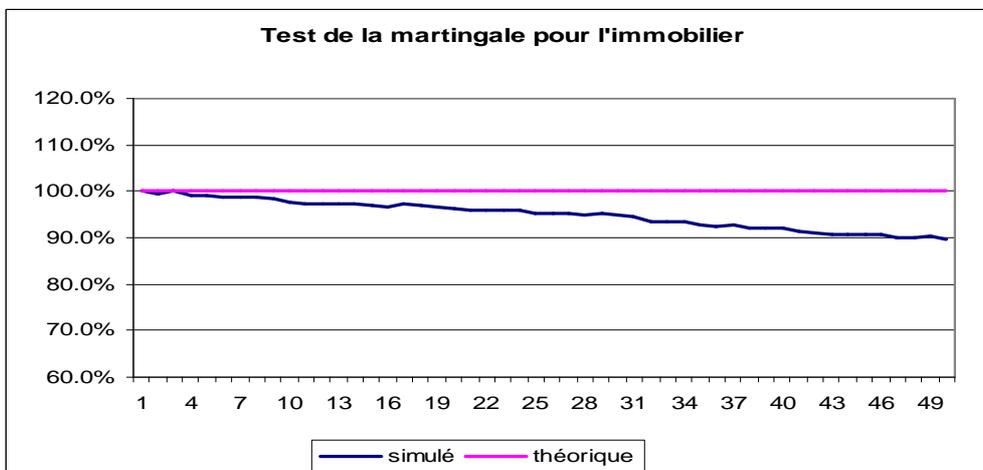
Le graphe suivant représente la moyenne des rendements obtenus sur un horizon de 0 à 50 ans, avec un pas de temps annuel :



III.3.4 Test de martingale :

Nous appliquons le test suivant : $E[D_t I_t] = 1$, où D_t est le facteur d'actualisation et I_t est la valeur de l'indice immobilier.

Le graphique ci-dessous représente le résultat du test de la martingale :



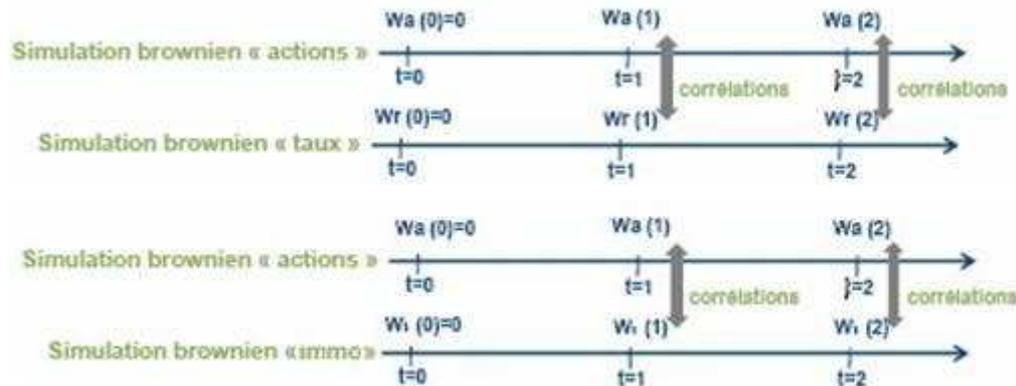
Le résultat est satisfaisant.

III.4 Corrélations taux-action-immobilier :

En risque neutre, il y a deux types de corrélations :

- **Corrélation implicite** via l'utilisation des taux courts pour la simulation des actions et de l'immobilier.
- **Corrélation explicite** via l'utilisation d'une matrice de corrélation entre les browniens en utilisant la transformée de Cholesky (L) de la matrice de corrélation empirique.

La matrice L est une matrice diagonale supérieure telle que $L'L =$ matrice de corrélation empirique.



La matrice de corrélation est la suivante :

31/12/2008	Taux	Actions	Immobilier
Taux	100.0%	-20.0%	0.0%
Actions	-20.0%	100.0%	10.0%
Immobilier	0.0%	10.0%	100.0%

La transformée de Cholesky (L) associée est la suivante:

	Taux	Actions	Immobilier
Taux	1	0	0
Actions	-20.00%	97.98%	0
Immobilier	0.00%	10.21%	99.48%

III.5 Ponts Browniens :

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes :

- le taux court instantané est utilisé dans les dynamiques servant à simuler les indices «actions » et « immobilier ».
- le taux instantané est simulé en pas mensuel pour un calcul robuste des facteurs d'actualisation.

Cependant les drivers « actions » et « immobilier » sont simulés en pas semestriel pour les besoins de projection dans le modèle ALM.

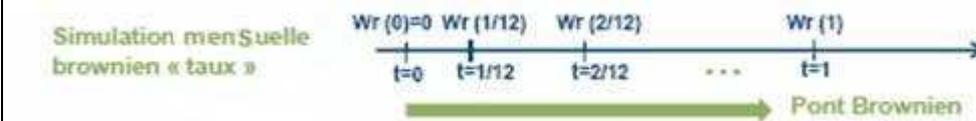
Pour résoudre cette difficulté, nous simulons la trajectoire du taux instantané en utilisant un pont brownien. Ainsi, comme on l'a vu dans la section précédente, pour corrélérer deux risques simulés par pont Brownien (qui suit une loi gaussienne) il suffit de corrélérer les normales centrées réduites utilisées pour former les deux ponts.

Exemple.3.5 : Mise en œuvre opérationnelle pour une simulation actions / taux :

Étape 1 : simulation des browniens actions / taux en pas semestriel



Étape 2 : simulation mensuelle du brownien « taux »



Étape 3 : obtention des indices « actions » et des taux instantanés

Rappel : la formule du pont brownien :

Pour si $s < s_{i+1}$, la loi conditionnelle de $W(s)$ sachant $W(s_i)$ et $W(s_{i+1})$ est la suivante :

$$W(s)/W(s_i), W(s_{i+1}) = \frac{(s_{i+1} - s)W(s_i) + (s - s_i)W(s_{i+1})}{s_{i+1} - s_i} + \sqrt{\frac{(s_{i+1} - s)(s - s_i)}{s_{i+1} - s_i}} Z$$

Où $Z \sim N(0,1)$ indépendante de $W(s_i)$ et $W(s_{i+1})$

IV. INTRODUCTION AU RISQUE DE CRÉDIT:

IV.1 Présentation du marché du risque de crédit :

Avant de parler de risque de défaut, ou de risque de crédit, il est important de comprendre quels sont les intervenants sur les marchés financiers. Comme c'est expliqué dans plusieurs ouvrages et articles*, les marchés financiers réunissent des acheteurs ou des vendeurs. Ceux ci sont liés par un contrat qui stipule les conditions d'échange de flux financiers ou d'achat vente.

Chaque contrat stipule les modalités d'échange. Prenons l'exemple d'une obligation d'une société « SP » du secteur privé. SP veut lever, par exemple, 1 Milliard d'Euros de capitaux pour financer une opération de rachat d'une société concurrente. SP va se tourner vers les interlocuteurs habituels pour obtenir les fonds manquants : banques, introduction en bourse de nouvelles actions, marché financiers.

Si la solution retenue est celle d'un emprunt sur les marchés financiers, SP doit lever 1 Milliard d'Euros sous forme d'obligation et peut proposer l'opération suivante : pour 100 EUR prêtés, SP versera un intérêt annuel de 6%, et remboursera les 100 EUR dans leur totalité en 2014.

Plusieurs questions vont être soulevées par les gérants des portefeuilles intéressés par cette obligation :

1. dois-je effectivement prêter 100 à SP, en échange des remboursements promis, ou moins? Pourquoi pas 95, ou 103 ? Quel prix dois-je donner à l'obligation SP ?
2. suis-je déjà trop exposé dans mon portefeuille à ce secteur d'activité. Les nouvelles obligations que j'achète me permettent-elles de bien diversifier mon risque ?
3. acheter des obligations SP implique des réserves (réglementaires et économiques) que je vais devoir supporter. Le rendement proposé par l'obligation me permet-il de couvrir ces frais additionnels?

IV.1.1 Prêteurs, emprunteurs, produits :

Les marchés de la dette regroupent plusieurs types d'intervenants :

- les emprunteurs
- les prêteurs (investisseurs privés ou institutionnels)
- les agences de notation qui sont des organismes indépendants dont le métier est d'attribuer une note représentative du risque de crédit associé à n'importe quel type d'émission obligataire.

Les produits traités sur les marchés financiers sont divers. Les plus simples et les plus anciens sont les obligations, qui sont émises par des Etats (en France Obligation au Trésor (OAT), Government Bonds américains, emprunts russes, etc.), des administrations, des villes (Municipality bonds aux Etats-Unis), des grandes entreprises (France Telecom, EDF, Sodexo) dont des banques (BNPP, Société Générale, Crédit Agricole, etc.). Des produits dérivés sont ensuite apparus : les CDS** (Credit Default Swap) ou plus généralement les

*les définitions présentées dans ce mémoire (sur le marché du crédit, les produits financiers, les principes d'échange de ces produits, etc...) sont prises de plusieurs ouvrages et articles que nous citerons à la fin de ce mémoire dans la bibliographie.

**nous définissons les CDS en détail dans le chapitre 5 de ce mémoire.

Dérivés de Crédit classiques et enfin des produits plus complexes tels que les CDO* (Collateralized Debt Obligations) ou First-to-Default. Notons enfin l'existence de produits dits hybrides tels que les obligations convertibles qui permettent d'échanger de la dette contre des actions.

Le marché de la dette représente un volume important des échanges. La figure suivante montre l'évolution de ce volume ainsi que la croissance de la titrisation puis sa chute avec la crise avec une très timide reprise aujourd'hui.

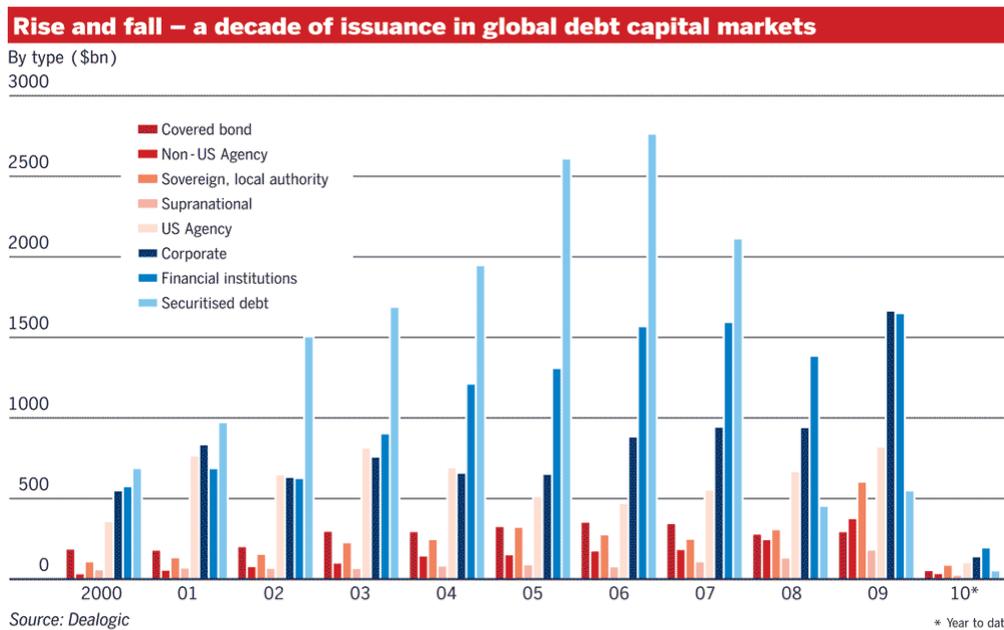


Figure 4.1.1 : Dette et son évolution 2000/2010 sur le marché des capitaux.
(Source : <http://investmentbankerparis.blogspot.com>)

On note aussi la montée des émissions Corporate, en 2009, le très fort volume des ces émissions fait jeu égal avec les émissions des institutions financières.

IV.1.2 Les obligations risquées :

Reprenons notre exemple de la société « SP ». Aujourd'hui, en 2010, SP souhaite lever des Fonds pour financer une acquisition importante ou une avancée technologique. En raison de contraintes fiscales, d'un cours boursier défavorable, SP souhaite financer son opération via l'émission d'un emprunt sur les marchés financiers sous la forme de bons aux porteurs. L'intérêt proposé est de 6% et la maturité de l'opération 4 ans.

*CDO : Le CDO (Collateralized Debt Obligation) est un produit financier qui s'est réellement développé fin 90 début 2000. Les CDO sont des titres représentatifs de portefeuilles de créances bancaires ou d'instruments financiers de nature variée. Au même titre que la titrisation et les dérivés de crédit, ces produits de finance structurés, sont issus de montages complexes, répondant à différents besoins tel que réduire les coûts de refinancement, exploiter des opportunités d'arbitrage et surtout se défaire du risque de crédit. Toutefois, quelle que soit leur forme, les CDO ont en commun d'être émis en différentes tranches de la même façon que l'on titrise une créance. Ainsi l'émetteur vend aux investisseurs des produits plus ou moins risqués selon la tranche choisie.

SP va se tourner vers une banque qui s'engage à placer sur les marchés financiers les titres émis, au prix de 100. Afin de parvenir à ce chiffre, la banque "testera" les marchés et demandera en conséquence à SP d'ajuster à la hausse ou à la baisse le taux d'intérêt proposé (le coupon). La banque garantira ensuite à SP la vente de tous les titres, s'engageant ainsi à prendre ceux qu'elle n'aura pas placés.

Les titres sont émis au 1er septembre 2010. Un échéancier est mis en place suivant lequel :

- au 01.09.2010, SP perçoit 100
- aux 01.09.2011, ..., 01.09.2013, SP verse le coupon de 6 au porteur
- le 01.09.2014, SP verse au porteur le dernier coupon de 6 et rembourse le principal de 100.

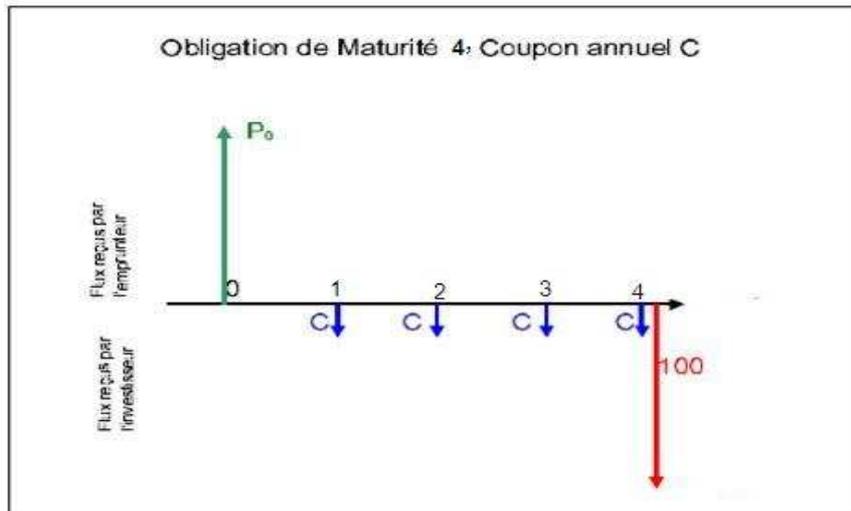


Figure 4.1.2a: Echéancier des paiements pendant la durée de vie de l'obligation.

Un porteur qui a acheté l'obligation SP au 01.09.2010 peut la revendre sur le marché obligataire. Le prix d'échange est fixé par le marché et on assiste à une cotation de l'obligation SP aux côtés d'autres obligations. Un exemple de cotation est le suivant :

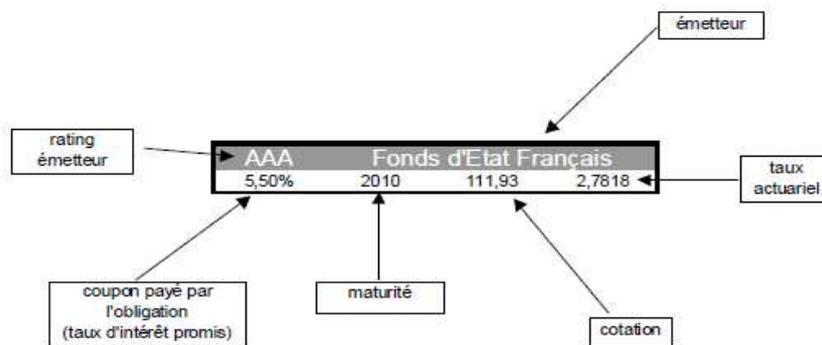


Figure 4.1.2b: exemple de cotation d'une obligation de l'état français en 2006.

Document Confidentiel

Plusieurs informations sont rassemblées autour de la cotation :

- nom de l'émetteur
- qualité de crédit de l'émetteur (rating attribué par une agence de notation)
- maturité de l'obligation
- coupon

La cotation est un prix (en l'occurrence 111.93) auquel on associe un taux, le taux actuariel. Le taux actuariel est le taux qui égalise prix d'achat (la jambe fixe) et flux à venir (la jambe variable). Il reflète la rémunération exigée pour le risque pris (risque de taux et risque de non-remboursement), qui dépend donc de la qualité de crédit de l'emprunteur (l'émetteur), du coupon et de la maturité de l'obligation. Le taux de rendement actuariel ρ est donc solution de l'équation :

$$\text{Prix} = 111.93 = \sum_{t=2011, \dots, 2014} \frac{5.5}{(1 + \rho)^{t-2010}} + \frac{100}{(1 + \rho)^{2014-2010}}$$

AAA	Fonds d'Etat Français		
5,50%	2010	111,93	2,7818
A-	France Télécom		
5,70%	2010	111,55	3,1396
AA	Caisse d'Epargne		
5,70%	2010	111,28	2,9665
AA-	Société Générale		
5,10%	2010	108,05	3,2827
AA	Crédit Agricole		
5,25%	2010	108,6	3,2826
BBB	Sodexho Alliance		
4,63%	2009	103	3,7094

Figure 4.1.2c: Le prix de l'obligation et le taux de rendement actuariel dépendent de la qualité de l'emprunteur. Comparaison de taux de rendement actuariels pour des maturités similaires.

La différence entre le taux de rendement actuariel et le taux sans risque mesure le risque de crédit sous-jacent à l'émetteur et supporté par le prêteur.

Un investisseur qui porte l'obligation quelques mois entre deux versements de coupons doit être rémunéré pour le risque porté bien qu'il ne puisse, en théorie, avoir droit à aucun versement de coupon puisqu'il ne possède pas l'obligation lors des versements de coupon. Aussi, le prix d'une obligation est-il corrigé du coupon couru qui est simplement l'intérêt linéaire (au taux du coupon) sur la période entre le dernier versement coupon et aujourd'hui.

Le prix côté de l'obligation est généralement le prix pied de coupon (Clean Price), c'est à dire le prix réel de l'obligation auquel on retranche le coupon couru. En conséquence, le prix de l'obligation dans le temps ne subit pas de sauts dus aux versements de coupons.

Certaines obligations vont être cotées différemment. Il s'agit des obligations convertibles. Les obligations convertibles sont des obligations normales auxquelles est ajoutée une option de conversion en actions. Le nombre d'actions en lesquelles l'obligation peut être convertie est spécifié à l'avance, ainsi que les dates d'exercice de l'option. Cette option permet pour l'émetteur de réduire le coût de la dette ainsi que les cash-flows à verser. Ce type de produit est attractif lorsque les marchés actions sont très volatiles. Il justifie enfin l'intérêt de modèles structurels permettant de décrire dans une même dynamique actions et obligations.

IV.2 Modélisation :

Dans cette section, nous allons présenter succinctement la modélisation du marché du risque de crédit. On distingue deux grandes classes de modèles : les modèles structurels et les modèles à intensité de défaut. Nous aborderons rapidement les premiers, puis nous définirons le cadre général des modèles à intensité de défaut. Cela nous permettra de situer dans cette classification le modèle LMN, qui est introduit au chapitre suivant, comme un modèle à intensité.

IV.2.1 Les modèles structurels :

Les modèles structurels sont les modèles qui cherchent à expliquer l'événement de défaut à partir de variables économiques. Nous allons présenter ici les modèles de Merton et de Black-Cox qui ont été les premiers introduits au milieu des années 1970.

Le modèle de Merton suppose que la valeur V_t d'une entreprise « C » à un instant t suit sous une probabilité martingale équivalente P (i.e. sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales) la dynamique :

$$dV_t = V_t((r - k)dt + \sigma dW_t)$$

Ici, $r \geq 0$ représente le taux d'intérêt sans risque, $k \geq 0$ le taux de dépense de l'entreprise (salaires, amortissement...) et $\sigma \geq 0$ la volatilité de la valeur de l'entreprise. On écrit alors la valeur de C, V_t , comme la somme de son actif S_t (la valeur de ses actions) et de son passif D_t (dette contractée pour financer son activité). On se place sur un intervalle $[0, T]$, et on suppose que la dette à été contractée auprès d'une seule autre entité « A », et que C doit rembourser en T la somme $L > 0$ à A. Le modèle de Merton considère alors deux cas de figure au moment du remboursement : soit $V_T \geq L$ et alors C rembourse sa dette, soit $V_T < L$ et alors C fait faillite et A récupère de C la somme V_T . L'instant de défaut s'écrit ainsi :

$$\tau = T \mathbf{1}_{V_T < L} + \infty \mathbf{1}_{V_T \geq L}$$

Et la dette à l'instant t vaut $D_t = \min(V_t, L)$. Sous ce modèle la valeur de la dette à l'instant 0 s'écrit :

$$D_0 = E[e^{-rT} \min(V_T, L)]$$

Un inconvénient de ce modèle est que le défaut d'une entreprise ne peut intervenir qu'à une seule date, connue à l'avance, ce qui n'est pas très réaliste.

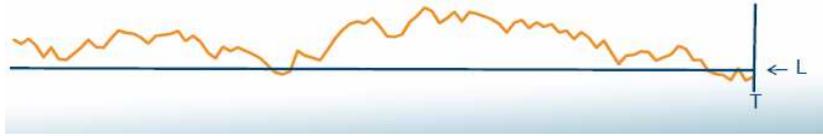


Figure 4.2.1a : le défaut est considéré en T et non sur l'intervalle [0, T]

Pour pallier ce problème, Black et Cox ont proposé de définir le défaut de l'entreprise C par le premier temps de passage en dessous d'une barrière $H(t)$:

$$\tau = \inf \{t \in [0, T], V_t \leq H(t)\}$$

Avec : $\inf \phi = +\infty$. Ils proposent de prendre $H(T) = L$ et pour $t \in [0, T], H(t) = \tilde{L}e^{-\gamma(T-t)}$.

Le paramètre \tilde{L} est supposé positif, et on suppose également $\tilde{L} < L$ ce qui signifie que l'entreprise C a plus de marge de manœuvre avant le remboursement de la dette.



Figure 4.2.1b : Option Vanille : considération du défaut à maturité T
Option à barrière : considération du premier instant de passage

Depuis ce modèle, plusieurs modèles expliquant le défaut comme le passage en dessous d'une barrière de la valeur (ou de l'actif) de l'entreprise ont été développés. Nous n'entrerons ici pas plus en détail sur les modèles structurels car le modèle LMN présenté dans ce mémoire appartient à l'autre catégorie de modèles : les modèles à intensité de défaut dits aussi modèles à forme réduite.

IV.2.2 Les modèles à intensité de défaut (ou à forme réduite) :

Comme on a vu dans la section précédente, la mise en œuvre des modèles structurels pose un certain nombre de difficultés pratiques liées à l'impossibilité d'observer la valeur de marché des actifs de la firme. Pour contourner cette difficulté, une nouvelle voie de recherche est apparue durant les années 90 et toute une classe de modèles à intensité a été proposée. Ces modèles contournent la difficulté d'obtenir la valeur de marché des actifs en s'appuyant uniquement sur l'observation du spread de taux comme traduction du risque de crédit.

Dans cette partie nous considérons un espace de probabilité (Ω, \mathcal{E}, P) qui décrit les aléas observés sur le marché. Nous ferons ici l'hypothèse que la probabilité P sous laquelle nous travaillons est une probabilité risque neutre. Nous supposons aussi que cet espace est muni d'une filtration $(F_t, t \geq 0)$ de \mathcal{E} qui contient schématiquement l'information de tous les actifs « sans risque de défaut ».

Document Confidentiel

En particulier ici, nous supposons que $B(t)$, la valeur à l'instant t d'1 euro placée à l'instant 0 dans un placement sans risque, est adapté à la filtration (F_t) . Notons que le coefficient d'actualisation utilisé pour décrire les produits s'écrit :

$$\forall t < T, D(t, T) = B(t) / B(T)$$

On considère ici un seul instant de défaut qui est supposé être une variable aléatoire positive \mathcal{E} -mesurable :

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$$

Maintenant que nous avons défini l'espace de probabilité sur lequel nous travaillons, nous pouvons définir ce qu'est un modèle de défaut à intensité :

Définition 4.1.3.2 : On dira que τ suit un modèle à intensité de défaut s'il existe un processus positif $(\lambda_t, t \geq 0)$ adapté à la filtration $(F_t, t \geq 0)$ et une variable aléatoire $\xi \mathcal{E}$ -mesurable, indépendante de $F_\infty = \bigvee_{t \geq 0} F_t$ et de loi exponentielle de paramètre 1 sous P tels que :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0, \int_0^t \lambda_s ds \geq \xi \right\}$$

Le processus $(\lambda_t, t \geq 0)$ est alors appelé intensité de défaut ou credit spread.

On pose alors dans ce cas $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds$ qui est un processus croissant. Remarquons ici que $\{\Lambda(t) = +\infty\} \subset \{\tau \leq t\}$, et on peut ainsi obtenir de l'information sur le défaut à partir de $(F_t, t \geq 0)$. Pour éviter cela, on ajoute souvent pour définir les modèles à intensité de défaut l'hypothèse suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(\Lambda(t) < +\infty) = 1 \text{ et } P(\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t) = +\infty) = 1$$

Cette hypothèse est satisfaite en général par les modèles à intensité qui sont utilisés et en particulier par le modèle LMN que nous allons présenter.

Par définition de τ , on a pour $t > 0$,

$$\{ \tau > t \} = \left\{ \int_0^t \lambda_s ds < \xi \right\} = \{ \Lambda(t) < \xi \}$$

Par conséquent, on a pour toute variable aléatoire Y intégrable et F_∞ -mesurable :

$$E \left[Y \mathbf{1}_{\{ \tau > t \}} \right] = E \left[Y \mathbf{1}_{\{ \Lambda(t) < \xi \}} \right] = E \left[Y E \left[\mathbf{1}_{\{ \Lambda(t) < \xi \}} / F_\infty \right] \right] = E \left[e^{-\Lambda(t)} Y \right]$$

Appliquons ceci pour calculer le prix en 0 d'un zéro-coupon d'échéance $T > 0$ avec défaut.

Puisque $D(0, T)$ est F_T -mesurable, on a :

$$E \left[D(0, T) \mathbf{1}_{\tau > T} \right] = E \left[D(0, T) e^{-\Lambda(T)} \right]$$

Supposons que l'actif sans risque soit modélisé par un taux d'intérêt court $(r_t, t \geq 0)$ adapté à $(F_t, t \geq 0)$:

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

Document Confidentiel

Ce prix est alors égal à :

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T (r_s + \lambda_s) ds \right) \right]$$

Qui représente également le prix d'un zéro-coupon sans risque de défaut avec un taux d'intérêt court égal à $r_t + \lambda_t$ au lieu de r_t . L'intensité $(\lambda_t, t \geq 0)$ représente bien ainsi un écart entre le prix d'un zéro-coupon sans défaut et avec défaut.

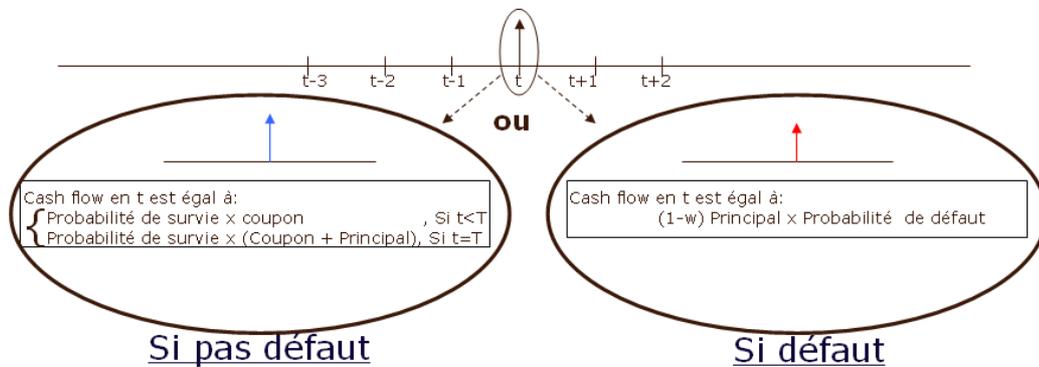
V. LE MODÈLE LMN :

V.1 Généralités sur le Modèle :

Le modèle LMN comme les autres modèles à intensité (i.e. modèles à forme réduite) n'explique pas directement la cause du défaut. Il s'intéresse plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises. Ce défaut peut arriver à n'importe quel moment (aucun élément ne peut le prédire).

Ce modèle est calibré uniquement à partir des prix de marché des obligations Corporate et des dérivées de crédit ce qui permet de respecter notre démarche de modélisation en risque neutre qui permet d'obtenir des scénarios « Market-Consistent ».

Le schéma ci-dessous explique le principe de calcul des cash-flows d'une obligation Corporate à une date de détachement de coupon :



Où: T est la date d'échéance de l'Obligation et w est le taux LGD(Loss Given Default).

Remarque 5.1 :

Le remboursement en cas de défaut a lieu au moment du défaut, ce qui n'est pas le cas dans la vraie vie.

En plus du fait que ce modèle est un modèle « Market-Consistent », l'équipe Modélisation a retenu ce modèle pour les raisons suivantes :

- Implémentation facilitée du fait des formules fermées pour calculer le prix du ZC Corporate
- Compatibilité avec tous les modèles de taux sans-risque
- Peut être utilisé comme un input externe au modèle ALM

V.2 Description du modèle :

V.2.1 Principe :

Le prix des obligations zéro coupon Corporates est modélisé par un taux instantané décomposé en taux sans risque, spread de crédit et spread de liquidité.

Le taux d'intérêt Corporate rc_t est alors défini comme suit :

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$$

Où r_t est le taux sans risque, λ_t est le spread de crédit et γ_t est le spread de liquidité :

Puisque Le modèle LMN n'impose pas de modèle de taux sans risque particulier, on utilise alors le taux ZC modélisé dans notre générateur de scénarios avec le Modèle Hull & White à un facteur. Il nous reste donc à modéliser deux processus :

- L'intensité du défaut qu'on modélise à partir d'un modèle de type CIR :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dZ(t)$$

Où α , β et σ sont des constantes positives tels que : $\alpha < \sigma^2 \leq 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$, et $Z(t)$ est un mouvement brownien standard. Ces paramètres permettent à la fois un retour à la moyenne et l'hétéroscédasticité conditionnelle du taux Corporate, et de garantir que le processus de l'intensité est toujours positive ou nulle.

- La prime de liquidité est modélisée grâce au processus :

$$d\gamma_t = \eta dB(t)$$

Où η est une constante positive et $B(t)$ est aussi un mouvement brownien standard. Ces paramètres permettent au processus de liquidité de prendre des valeurs positives et négatives.

Hypothèse supplémentaire : Ce modèle suppose qu'en cas de défaut une fraction constante $(1 - \omega)$ de la valeur de l'obligation est conservée, où ω est le taux de LGD (Loss Given Default).

Remarque 5.2.1: ce mémoire ne traitera que le cas où les trois processus : r_t , λ_t et γ_t sont décorrélés.

V.2.2 Modélisation :

Suite aux articles de : Duffie (1998), Lando (1998), Duffie et Singleton (1999) et d'autres, il est maintenant simple de représenter sous la probabilité « risque-neutre », la valeur d'une Obligation Corporate comme somme de simples espérances:

$$\begin{aligned}
 CB(0, c, w, t) = & E \left[c \int_0^T \exp \left(- \int_0^t (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) dt \right] & (9) \\
 & + E \left[\exp \left(- \int_0^T (r_t + \lambda_t + \gamma_t) dt \right) \right] \\
 & + E \left[(1 - \omega) \int_0^T \lambda_t \exp \left(- \int_0^t (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) dt \right]
 \end{aligned}$$

Où c est le taux nominal du coupon de l'obligation Corporate qui, pour simplifier est supposé payé en permanence tant qu'il n'y a pas de défaut.

La première espérance de l'équation (9) est la valeur actuelle des coupons promis, la seconde espérance est la valeur actualisée du remboursement principal promis, et la troisième espérance est la valeur actualisée des paiements versés en cas de défaut. Notons que dans chaque terme, les flux de trésorerie de l'obligation sont actualisés au taux d'actualisation ajusté $rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$.

Compte tenu de l'équation du processus de l'intensité et celle du processus de liquidité, des résultats standards tels que ceux de « Duffie, Pan et Singleton (2000) » rendent facile le calcul du prix d'une obligation Corporate par des formules fermées*. On a alors :

$$\begin{aligned}
 CB(0, c, w, t) = & c \int_0^T \left(A(t) \exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) e^{-\gamma_0 t} \right) dt & (10) \\
 & + A(T) \exp(\lambda_0 B(T)) C(T) D(0, T) e^{-\gamma_0 T} \\
 & + (1 - \omega) \int_0^T \left(\exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t)) e^{-\gamma_0 t} \right) dt
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \exp \left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t \right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}, \\
 B(t) &= \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2 (1 - \kappa e^{\phi t})}, \\
 C(t) &= \exp \left(\frac{\eta^2 t^3}{6} \right), \\
 G(t) &= \frac{\alpha}{\phi} (e^{\phi t} - 1) \exp \left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t \right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1}, \\
 H(t) &= \exp \left(\frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi \sigma^2}{\sigma^2} t \right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 2}, \\
 \phi &= \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}, \\
 \kappa &= (\beta + \phi) / (\beta - \phi).
 \end{aligned}$$

Où :

$$D(t, T) = E \left[\exp \left(- \int_t^{T+t} r_s ds \right) \right]$$

*Nous démontrons ces formules fermées en annexe2.

V.3 Discrétisation des équations du modèle :

Nous présentons dans cette section la discrétisation de l'équation différentielle stochastique de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) ainsi que la discrétisation de l'équation de la prime de liquidité qui intervient dans le modèle LMN

V.3.1 Discrétisation du modèle CIR :

Nous rappelons que nous modélisons l'intensité du défaut à partir d'un modèle de type CIR :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dZ(t)$$

Pour les besoins de modélisation, nous utilisons un pas de temps mensuel (=1/12) et nous appliquons dans un premier temps le schéma d'Euler-Maruyama pour discrétiser ce modèle:

$$\lambda_{\frac{k+1}{12}} = \lambda_{\frac{k}{12}} + (\alpha - \beta\lambda_{\frac{k}{12}}) \frac{1}{12} + \sigma \sqrt{\lambda_{\frac{k}{12}}} (Z_{k+1/12} - Z_k)$$

Où Z_i est un mouvement brownien centré de variance i .

Avec cette discrétisation, nous obtenons des solutions négatives pour le modèle CIR, car l'incrément brownien peut prendre des valeurs fortement négatives. Ainsi, à l'étape suivante, la racine carrée n'est plus correctement définie. Il en est de même pour plusieurs schémas.

Parmi les schémas existants dans la littérature sur ce type de diffusion, nous avons retenu le schéma de «Deelstra et Delbaen(1998)» :

$$\lambda_{\frac{k+1}{12}} = \lambda_{\frac{k}{12}} + (\alpha - \beta\lambda_{\frac{k}{12}}) \frac{1}{12} + \sigma \sqrt{\lambda_{\frac{k}{12}} I_{\lambda_{\frac{k}{12}} > 0}} (Z_{k+1/12} - Z_k)$$

Il peut certes prendre des valeurs négatives mais reste toujours bien défini. Nous appliquons dans un deuxième temps ce schéma.

Remarque.5.3.1. : Il existe une autre approche de discrétisation pour l'équation du CIR faite par « Diop(2003) », que nous présentons brièvement en annexe3.

V.3.2 Discrétisation du Processus Brownien :

La prime de liquidité est modélisée grâce au processus Brownien :

$$d\gamma_t = \eta dB(t)$$

Nous avons appliqué Le schéma d'Euler-Maruyama pour discrétisé ce modèle:

$$\gamma_{\frac{k+1}{12}} = \gamma_{\frac{k}{12}} + \eta (B_{k+1/12} - B_k)$$

Où B_i est un mouvement brownien centré de variance i .

V.4 Calibration du modèle LMN :

Afin d'assurer la « Market Consistency » du modèle, nous avons besoin de quelques données de marché pour lancer la calibration du modèle LMN :

- La prime CDS (Credit Default Swaps). Les CDS sont des contrats permettant de protéger ses acheteurs contre la faillite d'un émetteur de crédit (nous détaillerons cette définition dans la section suivante).
- Prix d'une « ZC Corporate ».
- Prix ZC sans risque (déduit de la courbe Swap).

Et d'une hypothèse supplémentaire sur le Taux LGD (Loss Given Default= Taux de perte en cas de défaut de crédit).

Les paramètres α , β , σ , η , λ_0 et γ_0 sont les paramètres de calibration. Ils sont estimés par la méthode des moindres carrés à partir des prix de marché des obligations Corporate et des CDS, en prenant en compte les conditions $\sigma^2 \leq 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$, pour obtenir des solutions positives.

Grâce à l'équation (10), notre approche empirique sera de calibrer le modèle pour correspondre à la fois la prime CDS et le prix des obligations de sociétés dont l'échéance correspond à la maturité de cinq ans du CDS.

Nous calibrons alors dans un premier temps les paramètres α , β , σ et λ_0 du processus de défaut λ_t en résolvant:

$$\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \lambda_0^* = \text{Arg min}_{\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0} \sum_T (s^{\text{théorique}} - s^{\text{marché}})^2$$

Où s est la prime CDS (voir plus loin la formule fermée).

Ensuite, nous calibrons les paramètres η et γ_0 du processus de liquidité γ_t en résolvant:

$$\eta^*, \gamma_0^* = \text{Arg min}_{\eta, \gamma_0} \sum_T (CB^{\text{théorique}} - CB^{\text{marché}})^2$$

Où CB est le prix d'une obligation Corporate compatible avec le choix du CDS.

Nous avons donc, besoin de connaître l'évaluation théorique de la valeur de la prime d'un CDS ainsi que les valeurs de marché d'une obligation Corporate et d'une prime CDS.

V.4.1 Les CDS (Credit Default Swaps) :

Au début de cette section, nous introduisons les « Credit Default Swaps » par la suite nous détaillons le calcul théorique pour l'évaluation de la prime d'une CDS par une formule fermée, et enfin nous présentons le choix de la valeur de marché du spread CDS.

V.4.1.1 Introduction aux CDS :

Les CDS (Credit Default Swaps) sont les dérivés de crédit les plus liquides du marché, ce sont les produits les plus simples des produits dérivés de crédit et ils constituent une base pour les produits dérivés plus complexes comme les CDO. Le swap CDS est une protection contre le défaut d'une entité donnée.

Imaginons par exemple qu'une entité « A » ait prêté une certaine somme d'argent à une entité « B », sous forme d'obligations, et souhaite ne pas avoir à supporter la perte de cet argent si B fait faillite. L'entité A va alors acheter un CDS qui l'engage à payer régulièrement au vendeur du CDS « C » une somme d'argent R. Il paye cette somme jusqu'à une certaine échéance fixée au préalable ou jusqu'au défaut de B s'il intervient avant.



Figure 5.3.1.2a: situation initiale d'un échange de CDS

Si l'entité B fait défaut pendant cette période, l'acheteur reçoit de C une somme LGD (Loss Given Default) qui idéalement correspond au préjudice subi par A à cause de la faillite de B. En revanche, si B ne fait pas défaut durant la période du contrat, le vendeur du CDS C aura reçu des paiements sans avoir rien à déboursier.

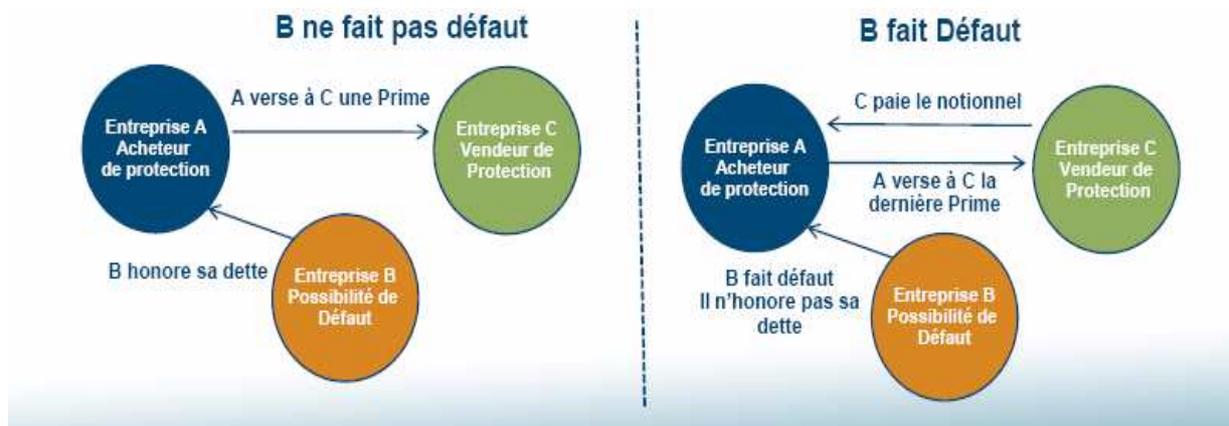


Figure 5.3.1.2a: Pendant toute la durée du contrat, deux situations sont envisageables.

Les CDS ont été "standardisés" afin de pouvoir être échangés sur le marché. Typiquement, les paiements réguliers de A à C ont lieu tous les trois mois, et les échéances du CDS peuvent être de un an, trois ans, cinq ans, sept ans ou dix ans.

Ce type de produit permet bien évidemment à A de se couvrir du risque de défaut de l'entité B lui-même. Mais le fait qu'il soit coté et échangé permet également d'échanger le risque de détérioration de la qualité de crédit de B.

En revanche, ces produits ne permettent pas de se couvrir contre le risque de plusieurs faillites en cascades, car il est fréquent que la faillite d'une grande entreprise entraîne la faillite d'autres entreprises (la crise des Subprimes en 2008, ENRON et le cabinet d'audit Arthur Andersen, la crise de 1929, etc.).

Comme on l'a mentionné au début de cette section les CDS sont les dérivés de crédit les plus liquides du marché, le volume d'échange est assez important et permet de déduire les anticipations du marché quant aux probabilités de défaut des émetteurs.

Créés au milieu des années 90, les CDS ont connu un développement exponentiel stoppé par la crise financière. Utilisés afin de spéculer sur la hausse du risque de défaut d'un État ou d'une entreprise.

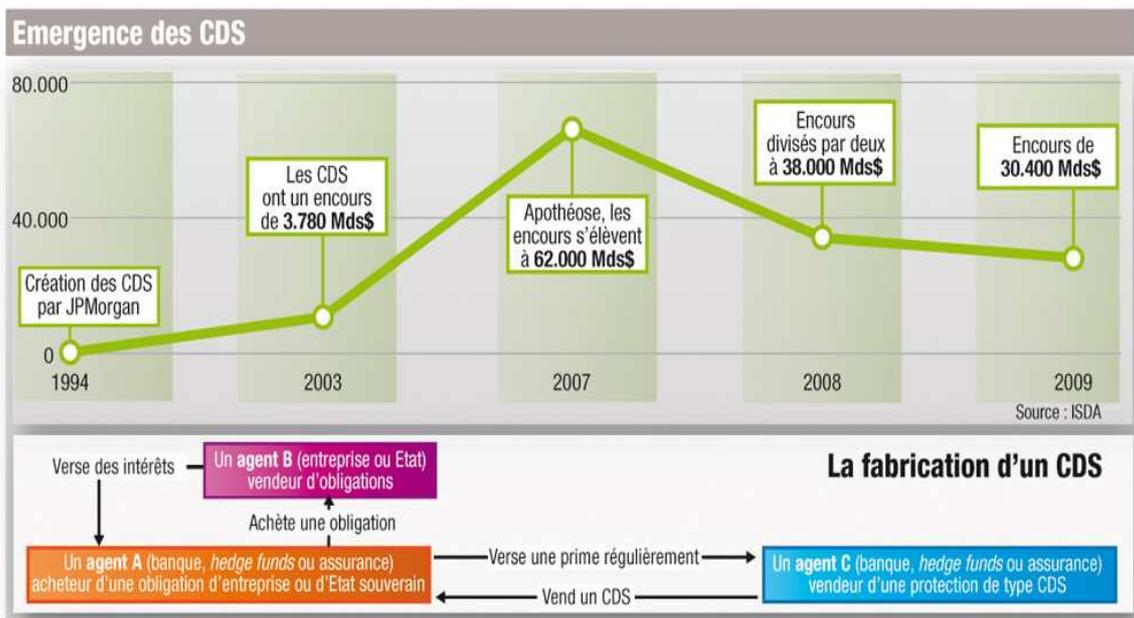


Figure 5.3.1.1a: encours notionnels des CDS 1994-2009.
Source : <http://www.investir.fr>

Les spreads de CDS sont donc des indicateurs de la qualité du crédit. Les marchés de CDS jouent désormais un rôle informatif sur les marchés de crédit, où les spreads de CDS sont souvent considérés comme le reflet du consensus du marché sur la solvabilité de l'entité sous-jacente (entreprise ou État). Cela se vérifie également à travers la pratique du marché consistant à calculer la probabilité implicite de défaut d'une entité à partir de ses spreads de CDS et à utiliser ces probabilités pour la valorisation des dérivés de crédit.

Comme la volatilité implicite dérivée des prix des options, ces probabilités de défaut ne contiennent pas nécessairement d'informations sur les défauts futurs ou sur le risque de défaut de l'entité de référence, mais indiquent simplement un consensus du marché relatif à la prime de protection contre le défaut à différentes échéances.

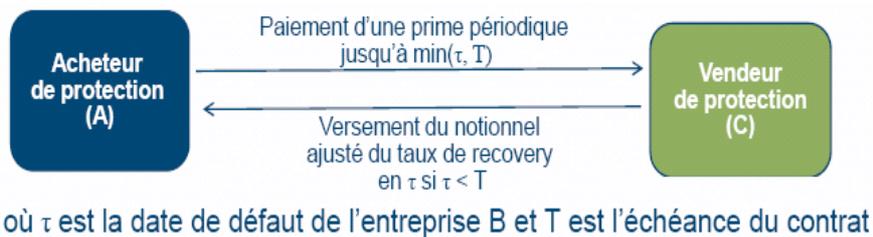
Néanmoins, les spread(s) de CDS constituent des indicateurs utiles du risque de crédit, notamment lorsque les marchés de la dette sous-jacente sont moins liquides.

En conclusion, les CDS sont une bonne source d'information pour calibrer les modèles de crédit « Market-Consistent ».

V.4.1.2 Valeurs théorique des CDS :

Avant de commencer l'évaluation du prix d'un CDS, nous expliquons notre choix de ne pas appliquer le processus de liquidité γ_t aux flux de trésorerie provenant des contrats CDS.

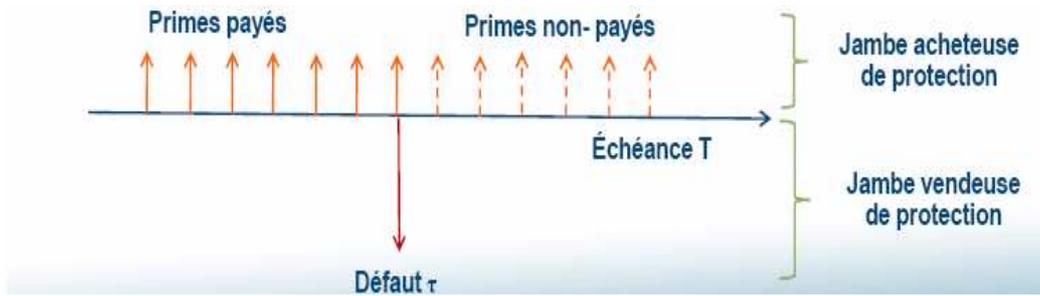
Nous avons bien vu de ce qui précède qu'un CDS est une opération Swap entre deux ensembles de flux déterminés par la possibilité du défaut. Donc **les CDS sont des produits dérivés**.



Cette distinction est importante parce que la nature contractuelle des CDS les rend beaucoup moins sensibles aux effets de la liquidité. Tout d'abord, les titres sont en offre fixe. En revanche, le montant notionnel des CDS peut être arbitrairement grand. Cela signifie que la pression de l'offre et la demande qui peut affecter les obligations Corporate est beaucoup moins susceptible d'influencer les CDS. Deuxièmement, depuis que les CDS ressemblent aux contrats d'assurance, de nombreux investisseurs qui achètent la protection de crédit peuvent avoir l'intention de le faire pour un horizon fixe et, par conséquent, n'envisagent généralement pas de dénouer leurs positions antérieures. Troisièmement, même si l'investisseur veut liquider une position de CDS, il peut être moins coûteux pour lui de simplement entrer dans un nouvel échange dans le sens opposé au lieu d'essayer de vendre sa position actuelle. Ainsi, la liquidité de sa position actuelle est moins pertinente compte tenu de sa capacité à reproduire les flux de trésorerie d'échange par le biais d'autres contrats. Quatrièmement, il peut parfois être difficile et coûteux de vendre les obligations de sociétés. En revanche, il est généralement plus facile de vendre la protection qu'acheter une protection dans le marché des CDS. Enfin, Blanco, Brennan et Marsh dans leur article publié en 2003, constatent que les marchés de crédit dérivés sont plus liquides que les marchés des obligations de sociétés dans le sens où de nouvelles informations sont saisies par les primes de CDS plus rapidement que dans les prix des obligations de sociétés.

En raison de ces considérations, nous n'impliquerons pas le processus γ_t dans l'évaluation des primes CDS.

Les flux de paiement en cas de défaut avant l'échéance du contrat sont :



Soit s la prime payée par l'acheteur de protection par défaut. En supposant que la prime est payée en continu, la valeur actuelle de la jambe acheteuse de protection : $PA(s, T)$ peut être exprimée sous la probabilité « risque neutre » comme suit :

$$PA(s, T) = E \left[s \int_0^T \left(\exp(-\int_0^t r_h + \lambda_h dh) \right) dt \right]$$

De même, la valeur de la jambe vendeuse de protection est :

$$PR(\omega, T) = E \left[\omega \int_0^T \left(\lambda_t \exp(-\int_0^t r_h + \lambda_h dh) \right) dt \right]$$

En égalisant la valeur des deux jambes, on trouve la valeur de s :

$$s = \frac{E \left[\omega \int_0^T \left(\lambda_t \exp(-\int_0^t r_h + \lambda_h dh) \right) dt \right]}{E \left[\int_0^T \left(\exp(-\int_0^t r_h + \lambda_h dh) \right) dt \right]}$$

On en déduit la prime du CDS par la formule fermée suivante :

$$s^{théorique} = \frac{\omega \int_0^T \left(\exp(\lambda_0 B(t)) D(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t)) \right) dt}{\int_0^T \left(A(t) \exp(\lambda_0 B(t)) D(0, t) \right) dt} \quad (11)$$

V.4.2 Les données de marché :

V.4.2.1 Valeurs de marché des CDS :

Une première approche a été envisagée qui consiste à calculer une prime CDS à partir d'un échantillon présentant les spécificités du marché et celle de notre portefeuille. Mais vu la difficulté de trouver les données nécessaires pour une telle méthode, une approche « **indice** » a été privilégiée.

Cette approche « indice » consiste à choisir un indice du marché correspondant aux spécificités de notre portefeuille.

Notre choix d'indice se limite aux indices européens, vu que notre portefeuille est composé essentiellement des produits financiers en euro.

Nous avons choisi l'indice « Itraxx Europe Main 5ans », car il répond à nos besoins de modélisation (maturité/duration, rating des sociétés le composant, secteurs d'activité de ces sociétés, etc.).

L'indice « Itraxx Europe Main 5ans » est constitué de 125 dérivés de crédit équipondérés sur des entreprises européennes « investment grade » (émetteurs de « qualité ») dont la notation est supérieure à BBB- (Standard & Poor's) ou Baa3 (Moody's). Ce sont les indices les plus liquides et les plus représentatifs du marché.

Les règles de diversification de cet indice permettent d'inclure des entreprises dans les principaux secteurs d'activité. Ces indices ont accru la transparence et la liquidité des marchés des dérivés de crédit, sur lesquels l'indices « Itraxx Europe Main 5ans » constitue la référence en Europe.

Voici quelques valeurs de marché du CDS de l'indice « Itraxx Europe Main 5ans » :

Date	ITRX EUR Main 5Y Corp (en BP)
31/12/2009	75.8615
31/12/2008	177.5322
31/12/2007	49.8902
29/12/2006	23.44
30/12/2005	36.9062

D'autres indices Itraxx existent mais répondent moins à nos critères, tels :

- Itraxx Europe Hi Vol : Il offre une exposition aux CDS de 30 entreprises peu risquées mais avec des spreads de crédit ayant une forte volatilité sur 5 ans.
- Itraxx Crossover : Il regroupe 50 CDS d'entreprises européennes qui appartiennent à la catégorie la plus risquée "high yield" (notes inférieures ou égales à BB).

V.4.2.2 Valeurs de marché des Obligations Corporate :

Pour calibrer les paramètres liés à la liquidité, nous avons besoin du prix de marché d'une obligation « ZC Corporate ». Plusieurs indices peuvent répondre à nos besoins :

- L'indice « Markit Iboxx Eur »: est conçu pour répliquer les investissements «investment grade» et à haut rendement des marchés à revenu fixe, permettant aux investisseurs d'analyser et sélectionner des repères qui reflètent leurs profils d'investissement spécifiques.
- L'indice **Corporate** de Barclays : est un indice qui regroupe une vaste base d'obligation Corporate, mis à jour par Barclays Capital, qui a repris l'entreprise indice de la banque « Lehman Brothers », et est souvent utilisé pour représenter des obligations de qualité.
- L'indice Aggregate de Barclays : « Barclays Capital Aggregate Bond Index », qui était appelé « Lehman Aggregate Bond Index ». Cet indice a le même principe de fonctionnement que l'indice Corporate du même nom, sauf qu'il est surpondéré par les obligations d'état.

Nous avons retenu l'Indice Corporate de Barclays car sa duration est proche de la maturité de l'indice CDS choisi précédemment.

Voici quelques valeurs de marché de l'indice « Barclays Corporate » :

Value Date	Price	Coupon	Maturity
31/12/2009	102,54	5,06	4,87
30/11/2009	103,00	5,06	4,94
30/10/2009	102,59	5,09	4,95
30/09/2009	102,10	5,09	4,96
31/08/2009	100,86	5,08	4,96
31/07/2009	100,06	5,08	4,99
30/06/2009	96,95	5,09	4,96
29/05/2009	95,09	5,09	4,94
30/04/2009	93,01	5,09	4,98
31/03/2009	90,27	5,06	5,02
27/02/2009	90,09	5,08	5,05
30/01/2009	90,35	5,06	5,06
31/12/2008	89,69	5,04	5,08

V.4.2.3 Taux LGD :

Nous avons retenu dans un premier temps un taux LGD de 35%, sans ignorer le fait, que ce taux est lié au type d'activité de la Corporate et aussi du niveau de levier (la dette de la Corporate, titre subordonné ou pas etc.).D'autres valeurs de taux LGD pourront être testées par la suite.

V.4.3 Calibration du modèle :

Comme nous l'avons déjà expliqué dans le début de cette section, les paramètres $\alpha, \beta, \sigma, \eta, \lambda_0$ et γ_0 sont les paramètres de calibration. Ils sont estimés par la méthode des moindres carrés à partir des prix de marché des obligations Corporate et des CDS.

Nous rappelons ci-dessous les formules fermées permettant l'évaluation du prix d'une Obligation ZC Corporate et de la prime d'un CDS :

$$\begin{aligned}
 CB^{théorique}(0, c, w, t) &= c \int_0^T (A(t) \exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) e^{-\gamma_0 t}) dt \\
 &+ A(T) \exp(\lambda_0 B(T)) C(T) D(0, T) e^{-\gamma_0 T} \\
 &+ (1 - \omega) \int_0^T (\exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t)) e^{-\gamma_0 t}) dt
 \end{aligned}$$

Et

$$s^{théorique} = \frac{\omega \int_0^T (\exp(\lambda_0 B(t)) D(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t))) dt}{\int_0^T (A(t) \exp(\lambda_0 B(t)) D(0, t)) dt}$$

Grâce à ces formules fermées, notre approche empirique sera de calibrer le modèle pour correspondre à la fois la prime CDS et le prix des obligations de sociétés dont l'échéance correspond à la maturité de cinq ans du CDS.

Ce calibrage sera effectué sous les conditions $\sigma^2 \leq 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$, pour garantir la positivité des solutions de l'équation CIR qui modélise l'intensité de crédit.

Nous calibrons alors dans un premier temps les paramètres α, β, σ et λ_0 du processus de défaut λ_t en résolvant:

$$\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \lambda_0^* = Arg \min_{\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0} \sum_T (s^{théorique} - s^{marché})^2$$

Où s est la prime CDS.

Un premier calibrage est effectué avec les données de marché correspondantes à la date du 31/12/2009:

CDS		
Tx LGD	Maturité	Prime CDS
35%	5	0.76%

Et

Obligation risquée		
Maturité	Coupon	Prix
vers les 5ans	5.059%	102.54%

Voici une image du fichier de calibration Excel :

$$\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \lambda_0^* = \text{Arg min}_{\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0} \sum_{T} (S^{\text{théorique}} - S^{\text{marché}})^2$$

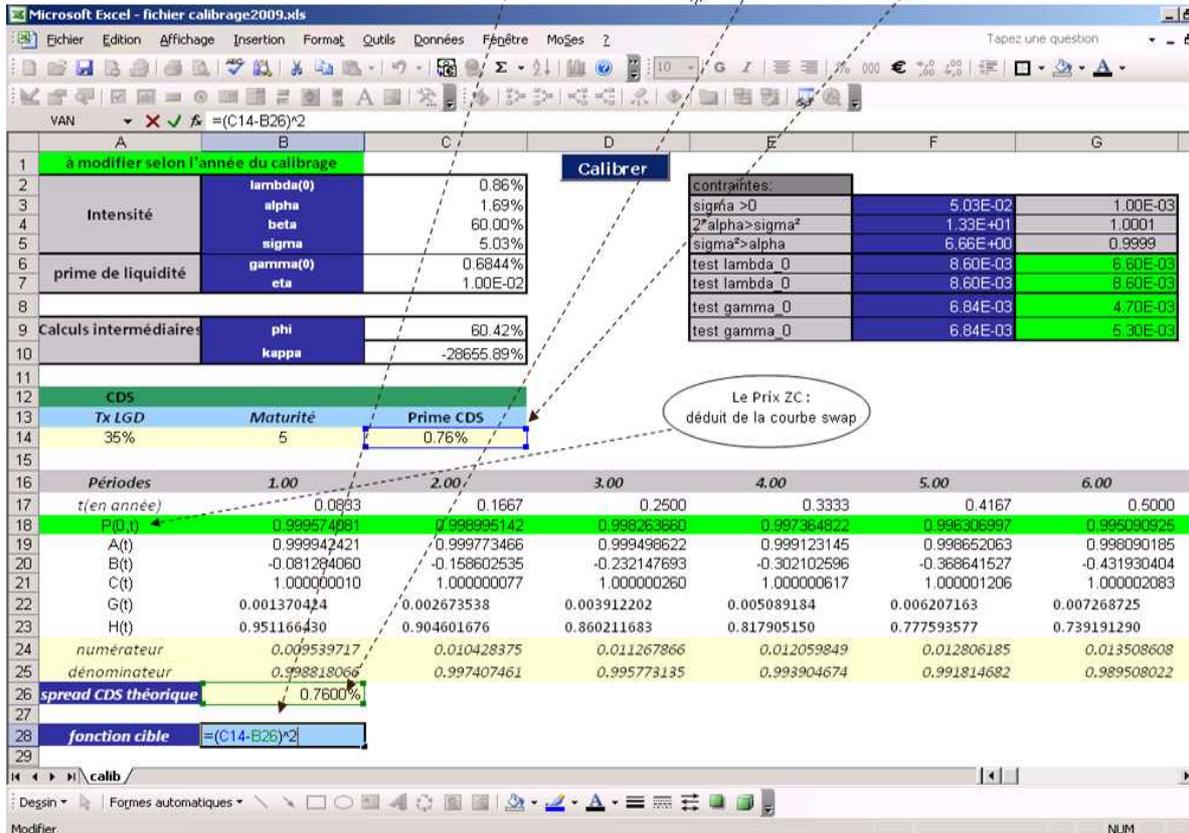


Figure 5.3.3a : une image du fichier de calibration des CDS

Ensuite, nous calibrons les paramètres η et γ_0 du processus de liquidité γ_t en résolvant:

$$\eta^*, \gamma_0^* = \text{Arg min}_{\eta, \gamma_0} \sum_T (CB^{\text{théorique}} - CB^{\text{marché}})^2$$

Où CB est le prix d'une obligation Corporate compatible avec le choix du CDS.

L'image suivante montre une capture d'écran du fichier de Calibration Excel permettant d'obtenir la valeur des paramètres η et γ_0 :

$$\eta^*, \gamma_0^* = \text{Arg min}_{\eta, \gamma_0} \sum_T (CB^{\text{théorique}} - CB^{\text{marché}})^2$$

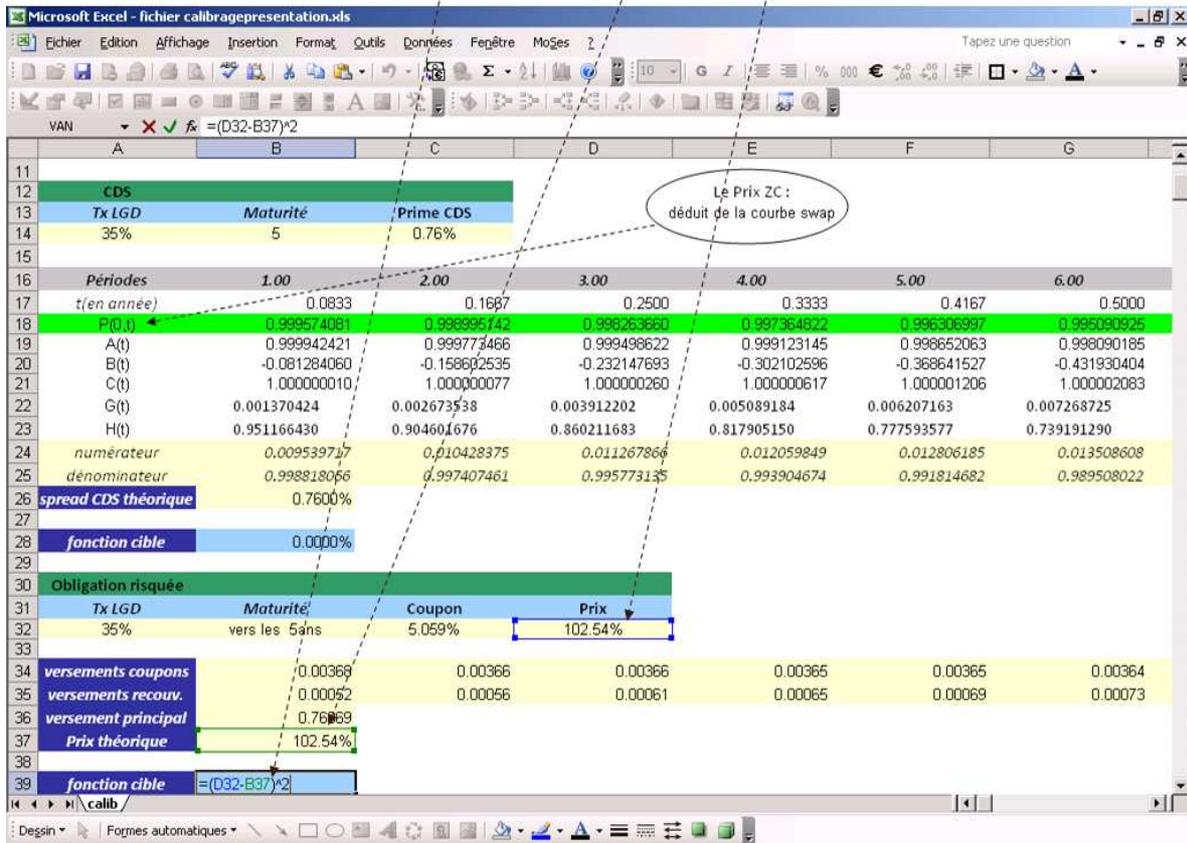


Figure 5.3.3b : une image du fichier de calibration des Obligations Corporates

On obtient alors, les valeurs suivantes :

lambda(0)	0.86%
alpha	1.73%
beta	60.00%
sigma	15.00%

Et

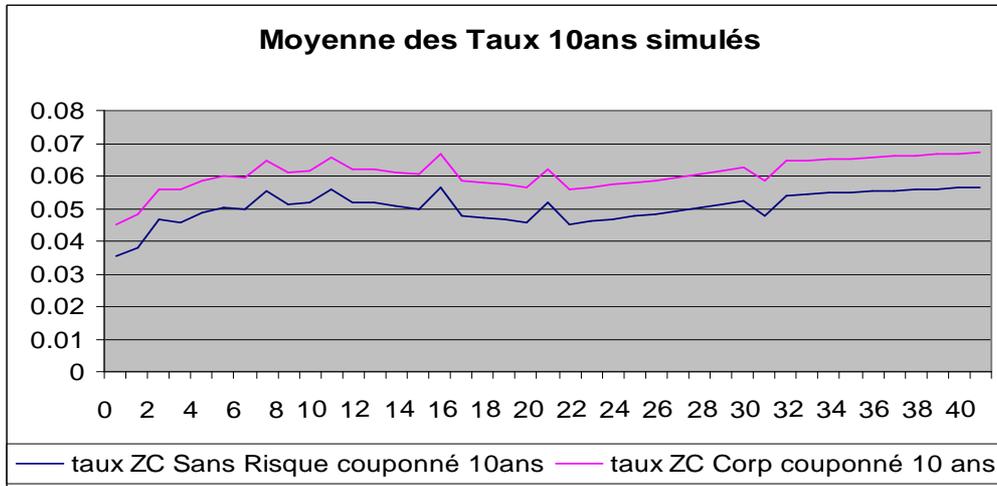
gamma(0)	0.6000%
eta	1.00%

Remarque.5.4.3 :

- Notons que pour ce modèle il faut calibrer 6 paramètres, chose qui est difficile, d'autant plus que l'outil qu'on utilise en l'occurrence le « Solver d'Excel », converge vers des solutions locales.
- Pour une question de temps, nous n'avons pas développé un meilleur outil de calibration.

V.5 Simulation du Modèle LMN:

Nous lançons une simulation du modèle sous le logiciel de projection « Moses », on obtient les graphes suivants :



Graph5.3.4. : la moyenne des taux 10 ans sans risque vs moyenne des taux 10 ans Corporate

L'écart entre le taux 10ans Sans Risque et le taux 10ans Corp varie entre 94 BP et 109 BP. Cet écart s'explique bien entendu du fait que les obligations Corporate sont moins liquides et comportent un risque. Cet écart de taux, correspond donc en théorie à la somme :

- d'une prime de liquidité.
- l'espérance mathématique du risque de défaut de l'émetteur multipliée par le taux de recouvrement des créances attendu en cas de défaut.

La stabilité en moyenne de cet écart dans le temps est due aux équations du modèle, qui par construction permettent un retour à la moyenne :

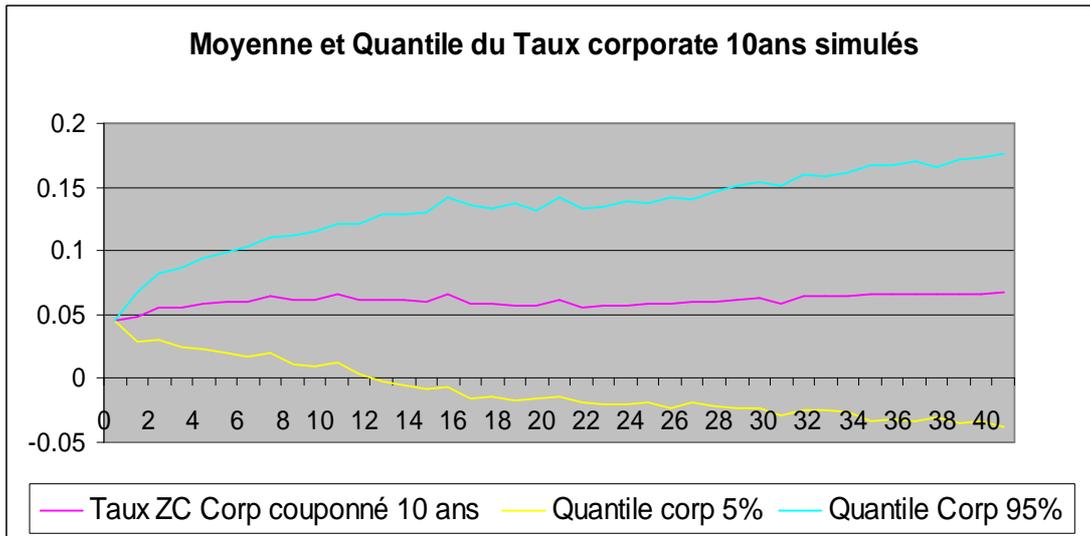
- pour l'intensité du crédit, l'espérance de la discrétisation du processus est donnée par la formule suivante :

$$E(\lambda_t)^{théorique} = \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t \lambda_0 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t\right)$$

Si $t \rightarrow \infty$, l'espérance tend vers $\frac{\alpha}{\beta}$

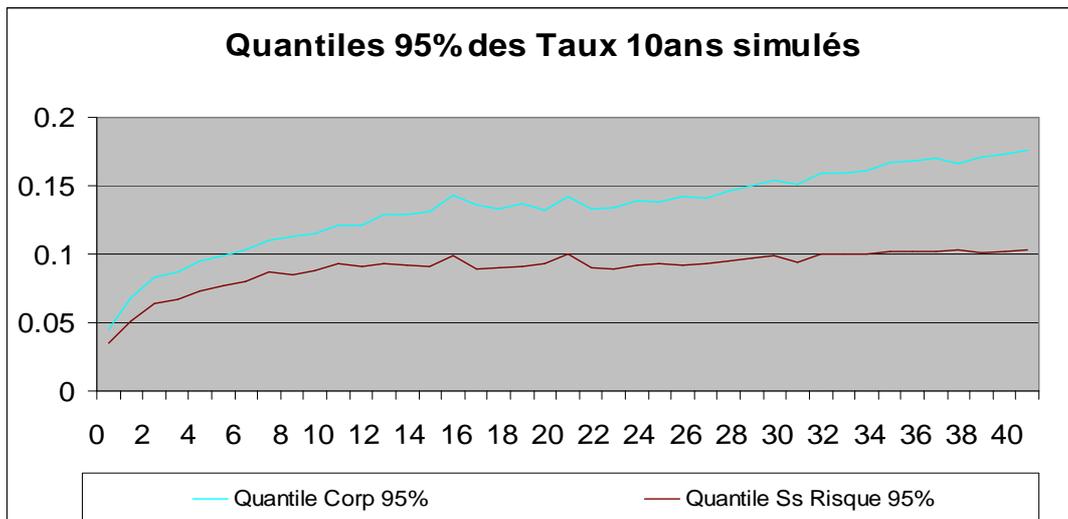
- pour la prime de liquidité, l'espérance de la discrétisation du processus est donnée par la formule suivante :

$$E(\gamma_t)^{théorique} = \gamma_0$$



Graphe5.3.4.1b : taux 10 ans Corporate (moyennes et quantiles)

Ce graphe montre les quantiles 95% et 5% de la simulation sous Moses des taux Corporates. On remarque que des taux négatifs sont générés, cela s'explique par la présence des Browniens (qui sont des gaussiens) dans les équations du modèles.



Graphe5.3.4.1c : quantiles 95% des taux 10 ans Corporate et sans risque

Ce graphe montre les quantiles 95%, on remarque que l'écart augmente entre les deux courbes, cela s'explique par l'écart-type des processus appliqués dans LMN. Par exemple la variance du processus de la liquidité est la suivante:

$$Var(\gamma_t)^{\text{théorique}} = t \frac{\eta^2}{12}$$

Quand t augmente l'écart-type augmente aussi.

Nous détaillerons ce calcul en annexe4.

V.6 Tests de validation:

V.6.1 Tests statistiques :

Nous effectuons dans cette section des tests statistiques pour tester les moyennes et les variances empiriques des deux discrétisations des processus stochastiques du modèle LMN.

Nous rappelons que les schémas de discrétisations retenus pour les deux processus stochastiques sont :

- pour l'intensité du crédit :

$$\lambda_{\frac{k+1}{12}} = \lambda_{\frac{k}{12}} + (\alpha - \beta \lambda_{\frac{k}{12}}) \frac{1}{12} + \sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\frac{k}{12}} I_{\lambda_{\frac{k}{12}} > 0}}{12}} (W_{t+1/12} - W_t)$$

Où W_i est un mouvement brownien centré de variance i .

- pour la prime de liquidité :

$$\gamma_{\frac{k+1}{12}} = \gamma_{\frac{k}{12}} + \eta (B_{k+1/12} - B_k)$$

Où B_i est un mouvement brownien centré de variance i .

Avant de présenter les tests effectués, nous présentons ci-dessous les résultats du calcul théorique des espérances et variances des **discrétisations** des deux processus stochastiques du modèle :

- espérances des discrétisations des deux processus :

$$E(\lambda_t)^{théorique} = \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t \lambda_0 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t\right)$$

Et

$$E(\gamma_t)^{théorique} = \gamma_0$$

- variances des discrétisations des deux processus :

On obtient les expressions suivantes pour l'intensité du crédit :

$$Var(\lambda_{t+1}) = V(\lambda_t) \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^2 \lambda_0 + \frac{\sigma^2}{12} E(\lambda_t I_{\lambda_t > 0})$$

Et

$$Var(\gamma_t)^{théorique} = t \frac{\eta^2}{12}$$

Nous avons remarqué que dans la pratique, les nombres de fois où $\lambda_t < 0$ sont négligeables ou inexistantes. Pour les valeurs des paramètres obtenus dans le calibrage précédent, les λ_t simulés sont tous positifs.

Afin d'obtenir une formule de récurrence pour la variance de ce processus, nous faisons l'hypothèse suivante :

$$E(\lambda_t I_{\lambda_t > 0}) = E(\lambda_t) \quad \text{Presque sûrement.}$$

On obtient alors, la formule suivante :

$$Var(\lambda_t)^{théorique} = \frac{\sigma^2}{\beta} \left(\lambda_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \left(1 - \frac{\beta}{12} \right)^{t-1} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12} \right)^t \right) + \frac{\alpha \sigma^2}{2\beta^2} \frac{1 - \left(1 - \frac{\beta}{12} \right)^{2t}}{1 - \frac{\beta}{24}} \quad \text{P.S.}$$

Nous effectuons alors les quatre tests suivant :

$$(1) \begin{cases} H_0 : E(\lambda_t)^{empirique} = E(\lambda_t)^{théorique} \\ H_1 : E(\lambda_t)^{empirique} \neq E(\lambda_t)^{théorique} \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} H_0 : Var(\lambda_t)^{empirique} = Var(\lambda_t)^{théorique} \\ H_1 : Var(\lambda_t)^{empirique} \neq Var(\lambda_t)^{théorique} \end{cases}$$

Et

$$(3) \begin{cases} H_0 : E(\gamma_t)^{empirique} = E(\gamma_t)^{théorique} \\ H_1 : E(\gamma_t)^{empirique} \neq E(\gamma_t)^{théorique} \end{cases}, \quad (4) \begin{cases} H_0 : Var(\gamma_t)^{empirique} = Var(\gamma_t)^{théorique} \\ H_1 : Var(\gamma_t)^{empirique} \neq Var(\gamma_t)^{théorique} \end{cases}$$

Les tests (1) et (3) sont des tests de Student qui comparent la moyenne observée d'un échantillon statistique à une valeur fixée. Et les tests (2) et (4) sont des tests de la variance qui comparent la variance observée d'un échantillon statistique à une variance théorique.

Remarque.5.6.1a : nous détaillerons le calcul théorique des espérances et des variances de ces discrétisations, et nous présenterons brièvement les tests statistiques utilisés dans cette section en annexe 5 et 6.

Ces tests sont effectués à chaque année de projection pour des λ_t et γ_t semestriels. Par exemple, si nous simulons les scénarios stochastiques sur 50 ans ; en effectuera alors, 99 fois les tests précédents et nous comptons ensuite le nombre de fois où l'hypothèse H_0 est réalisé :

$$(1) \begin{cases} H_0 : E(\lambda_{6\text{mois}})^{empirique} = E(\lambda_{6\text{mois}})^{théorique} \\ H_1 : E(\lambda_{6\text{mois}})^{empirique} \neq E(\lambda_{6\text{mois}})^{théorique} \end{cases}, \quad (1) \begin{cases} H_0 : E(\lambda_{12\text{mois}})^{empirique} = E(\lambda_{12\text{mois}})^{théorique} \\ H_1 : E(\lambda_{12\text{mois}})^{empirique} \neq E(\lambda_{12\text{mois}})^{théorique} \end{cases} \dots\dots,$$

$$\dots\dots, (1) \begin{cases} H_0 : E(\lambda_{600\text{mois}})^{empirique} = E(\lambda_{600\text{mois}})^{théorique} \\ H_1 : E(\lambda_{600\text{mois}})^{empirique} \neq E(\lambda_{600\text{mois}})^{théorique} \end{cases}$$

Document Confidentiel

On a alors les résultats suivants pour une simulation de 1000 scénarios sur 50 ans:

seuil de rejeter à tort H0	1%				5%			
	Esperance		Variance		Esperance		Variance	
	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée
lambda	100.00%	0.00%	89.00%	11.00%	100.00%	0.00%	82.00%	18.00%
gamma	100.00%	0.00%	96.00%	4.00%	100.00%	0.00%	77.00%	23.00%

Et les résultats suivants pour une simulation de 2000 scénarios pour le même nombre d'années de projection :

seuil de rejeter à tort H0	1%				5%			
	Esperance		Variance		Esperance		Variance	
	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée	acceptée	rejetée
lambda	100.00%	0.00%	95.00%	5.00%	100.00%	0.00%	91.67%	8.33%
gamma	100.00%	0.00%	100.00%	0.00%	100.00%	0.00%	95.00%	5.00%

En augmentant le nombre de simulation, on rejette moins les hypothèses H_0 ,

Remarque 5.6.1b : afin d'améliorer ces résultats, on pourrait dans le futur tester d'autres schémas de discrétisations des équations du modèle.

V.6.2 Test de validation pour la valeur de marché :

Dans cette section, nous testons le développement informatique du modèle LMN sous Moses.

Le principe de ce test est de vérifier si on obtient sous Moses la valeur marché calculée dans le fichier de calibrage.

Ce test est appliqué à l'échéancier suivant:

- au 31/12/2009, un détenteur de titre obligataire perçoit 102 d'un porteur pour un titre émis 6 mois plus tôt.
- aux 01.07.2010, ..., 01.07.2012, l'émetteur du titre obligataire verse le coupon de 5 au porteur
- le 01.07.2013, l'émetteur du titre obligataire verse au porteur le dernier coupon de 5 et rembourse le principal de 100.

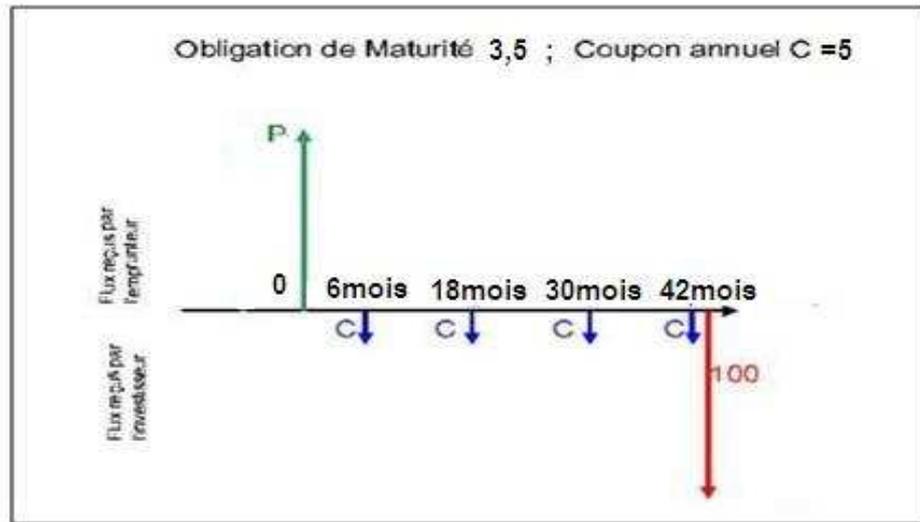


Figure 4.1.2a: Echancier des paiements pendant la durée de vie de l'obligation.

Puisque on n'a pas de valeur de marché d'une prime CDS correspondant à l'échéancier ci-dessus, et puisque ce test vérifie le développement sous Moses du modèle LMN ; nous appliquerons le calibrage suivant la méthode des moindres carrés à partir des prix de marché des obligations Corporate :

$$\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \lambda^*, \eta^*, \gamma_0^* = \text{Arg min}_{\eta, \gamma_0} \sum_T (CB^{\text{théorique}} - CB^{\text{marché}})^2$$

On obtient les valeurs suivantes :

Intensité	lambda(0)	0,66%
	alpha	4,20%
	beta	60,15%
	sigma	5,00%
prime de liquidité	gamma(0)	0,4700%
	eta	1,29E-02

N.B : ce calibrage est effectué en prenant en compte le coupon couru dans la formule du prix de l'obligation Corporate :

$$\begin{aligned}
 CB(0, c, w, t) = & c \int_0^T (A(t) \exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) e^{-\gamma_0 t}) dt \\
 & + A(T) \exp(\lambda_0 B(T)) C(T) D(0, T) e^{-\gamma_0 T} \\
 & + (1 - \omega) \int_0^T (\exp(\lambda_0 B(t)) C(t) D(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t)) e^{-\gamma_0 t}) dt \\
 & - \text{Coupon} - \text{Couru}
 \end{aligned}$$

Document Confidentiel

Nous lançons une simulation de 1000 itérations sous Moses, et nous obtenons les résultats suivant :

- Pour les coupons :

	coupons actualisés à t=0			
	Coupons	ecart-type	théq - siml	variation
somme des coupons actualisés	0,1781133			
	0,1782420	0,003856	-0,000129	0,072%
1er coupon à t=6 mois actualisé à t=0	0,0492739			
	0,0493020	0,000113	-0,000028	0,057%
2eme coupon à t=18 mois actualisé à t=0	0,0465958			
	0,0466390	0,000628	-0,000043	0,093%
3eme coupon à t=30 mois actualisé à t=0	0,0430122			
	0,0430470	0,001301	-0,000035	0,081%
4eme coupon à t=42 mois actualisé à t=0	0,0392314			
	0,0392540	0,001966	-0,000023	0,058%

Où :

valeurs théoriques
valeurs simulées

- Pour les remboursements en cas de défaut:

	les remboursements en cas de défaut actualisés à t=0			
	Defaut	ecart-type	théq - siml	variation
somme des remboursement actualisés à t=0	0,08195478			
	0,08244800	0,009841	-0,000493	0,602%
somme entre 0 et 6mois actualisés à t=0	0,00433060			
	0,00433400	0,000507	-0,000003	0,079%
somme entre 6 et 18 mois actualisés à t=0	0,02006077			
	0,02007200	0,00291	-0,000011	0,056%
somme entre 18 et 30 mois actualisés à t=0	0,02767136			
	0,02791900	0,004414	-0,000248	0,895%
somme entre 30 et 42 mois actualisés à t=0	0,02989205			
	0,03012300	0,004629	-0,000231	0,773%

- Pour le remboursement du principal:

Remboursement Principal			
RP	ecart-type	théq - siml	variation
0,784627007			
0,785088	0,039325	-0,000461	0,059%

Document Confidentiel

Nous obtenons alors la valeur de marché suivante :

Valeur de Marché			
VM	ecart-type	théoq - siml	variation
1,02			
1,021083	0,042259	-0,001083	0,106%

Les tests ci-dessous nous montrent que les variations entre le théorique et simulé sont inférieures à 1%. Les résultats sont donc satisfaisants.

Dans cette partie, nous introduisons le modèle ALM (Asset and Liability Management), ainsi que les projections du passif et de l'actif pour une des sociétés d'AG2R LA MONDIALE. Nous présenterons ensuite, les stratégies investissements et désinvestissements appliquées dans la gestion Actif-Passif.

VI. MODÈLE ALM LA MONDIALE :

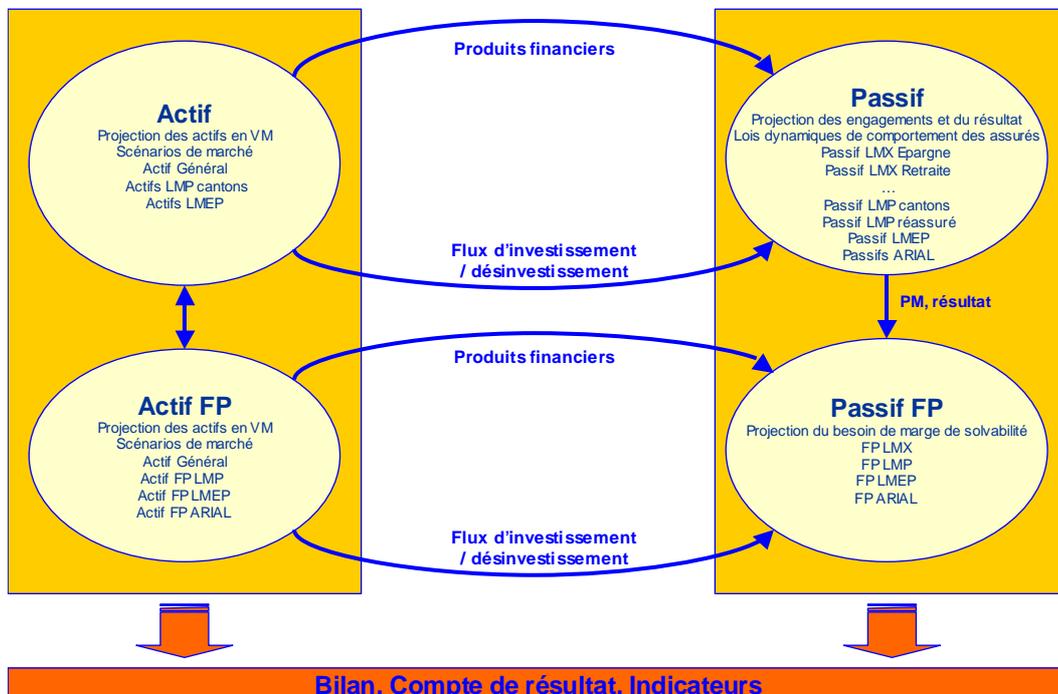
Nous commençons par définir les objectifs du modèle ALM, ensuite nous présentons les projections du passif et de l'actif pour une des sociétés d'Ag2r La Mondial. Et nous terminons cette partie par la présentation des trois stratégies d'investissement/désinvestissement appliquées dans le ce Modèle.

VI.1 Objectif du modèle :

Le modèle ALM a pour objectif :

- de permettre une appréciation de l'adéquation générale des politiques d'actif et de passif sur un horizon de gestion précis,
- de calculer l' Embedded Value
- de fournir les éléments nécessaires dans le cadre de Solvency 2 :
 - à une analyse quantitative : éléments chiffrés comme le calcul de Best Estimate.
 - à une analyse qualitative : alimentation des tableaux de bord des risques.

Le modèle ALM est un modèle avec des interactions actif passif.



Dans la suite de cette partie nous présentons Le modèle ALM pour le périmètre LMP (La Mondiale Partenaire).

Notre choix de présenter les projections du passif et de l'actif que pour la société LMP est motivé par les raisons suivantes:

- nos tests sur l'implémentation du risque de crédit dans le modèle ALM sont effectués sur un canton appartenant à cette société.
- Les contrats vendus par LMP sont essentiellement des contrats d'épargne.
- éviter d'aborder un sujet vaste qui nous éloignera du but de ce mémoire.

VI.2 La projection du passif :

VI.2.1 Flux du passif :

Pour les contrats d'épargne, les flux concernés sont :

- les primes (on différencie les versements des affaires nouvelles),
- les sorties en décès et rachats,
- les arbitrages

Remarque.6.2.1 :

- Dans le modèle, nous faisons l'hypothèse que les flux générés par ces contrats tombent en **milieu d'année**.
- Les mouvements sur ces flux génèrent des chargements sur encours et sur primes.

VI.2.2 Projection nombre/montant :

Le modèle tient compte de la projection de deux types de flux :

- Les flux en montant pour la projection de la provision mathématique
- Les flux en nombre pour la projection du nombre de contrat (nécessaire notamment pour le calcul des frais généraux par année de projection)

Remarque.6.2.2.: Les lois retenues sont déterminées selon l'expérience de chacun des portefeuilles.

VI.2.3 Lois dynamiques :

La projection des flux répond à des lois qui peuvent être de deux natures distinctes:

- des lois déterministes qui se basent sur l'expérience de chacun des portefeuilles (construites à partir des données historiques disponibles)
- des lois dynamiques qui sont déclenchées selon les conditions de marché.

Remarque.6.2.3.: L'utilisation de ces lois est optionnelle pour l'utilisateur.

VI.2.3.1 Loi de rachat :

Deux approches sont prises en compte :

- une première approche utilisant le montant des provisions mathématiques,
- et une deuxième utilisant le nombre de contrat.

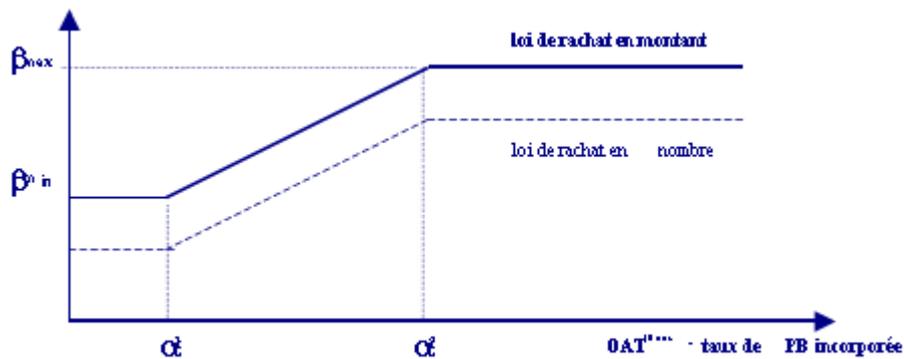
VI.2.3.1.1 Loi en montant :

Le montant de PM (Provisions Mathématiques) rachetées dépend du taux de rachat appliqué au montant de PM d'ouverture.

$$\text{Rachats} = \text{PM}_{\text{ouv}} \times \text{Taux de rachat}$$

En déterministe, le taux de rachat utilisé est déterminé à partir de l'expérience du portefeuille.

En dynamique, le taux de rachat utilisé correspond au taux déterministe auquel on applique un coefficient dépendant de l'écart entre le taux OAT 10 ans et le taux de PB servi. Cette loi permet de prendre en compte un niveau de rachats plus important dès lors qu'il y a un écart significatif entre le taux de PB servi et le taux de PB du marché.



VI.2.3.1.2 Loi en nombre :

En déterministe, le taux de rachat en nombre est déterminé à partir de l'expérience du portefeuille.

En dynamique, deux options sont possibles :

- soit le taux de rachat correspond à une translation de la loi dynamique de rachat vers le bas,
- soit le taux de rachat correspond à une translation du taux de rachat maximal observé sur le passif.

Remarque.5.2.3.1.2 : Le nombre de contrats rachetés n'est pas forcément lié aux rachats en montant.

VI.2.3.2 Loi de reversement :

Les mêmes approches pour la loi de rachat sont utilisées ici.

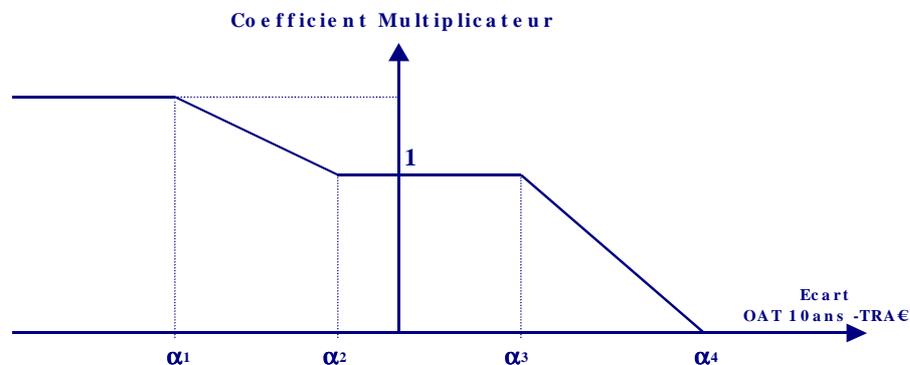
VI.2.3.2.1 Loi en nombre :

Le nombre de reversements se calcule grâce à un taux de reversement appliqué au nombre de contrats présents en début d'année :

$$\text{Nombre de reversements}_t = \text{Nombre de contrats}_{t-1} \times \text{Taux de reversement}$$

En déterministe, le taux de reversement utilisé est déterminé à partir de l'expérience du portefeuille.

En dynamique, Le taux de reversements est simulé par application d'un coefficient à un taux de reversements historique. Le coefficient suit la loi suivante :



VI.2.3.2.2 Loi en montant :

Les montants de reversement sont calculés via la loi dynamique du nombre de reversements :

$$\text{Montant de reversement} = \text{Nombre de reversements} \times \text{Montant moyen de reversement}$$

VI.3 La projection de l'actif :

Nous commençons cette partie par une présentation des scénarios pris en compte pour la projection de l'actif, ensuite nous détaillons les principes de calcul des valeurs comptables et boursières pour chaque classe d'actif.

VI.3.1 Prise en compte des scénarios :

Pour projeter l'actif, l'utilisation de données de marché est nécessaire. Différents scénarios peuvent être utilisés, notamment des scénarios de stress qui permettent de juger de la solidité de l'entreprise en cas de crise.

Document Confidentiel

Actuellement Les scénarios utilisés dans le modèle sont composés de données de taux annuels, sur une période qui peut varier ente de 30 ans et 90ans. Ils correspondent aux données :

- de taux zéro-coupon pour différentes maturités,
- de taux d'actualisation,
- de rendement des actions (rendement global y compris dividende),
- de rendement de l'immobilier (rendement global y compris loyers),
- de rendement monétaire.

Les taux zéro-coupon sont renseignés pour des obligations de maturité d'1an à 30 ans, pour les maturités non renseignées, on trouve le taux zéro-coupon par interpolation linéaire.

Remarque.6.3.1 : après l'implémentation de risque de crédit d'autres données vont être ajoutées, comme par exemple les taux zéro coupon Corporates.

VI.3.2 Classes d'actifs modélisées :

Plusieurs classes d'actif sont représentées dans ce modèle :

- les obligations à taux fixe,
- les actions,
- l'immobilier,
- le monétaire,
- les OPCVM obligataires,
- les IFT : swaps et swaptions.
- Les UC

Chacun de ces actifs est source de revenus financiers :

Actif	Flux
Obligations	Coupons Remboursement du nominal à échéance
Actions	Dividendes en % de la VB
Immobilier	Loyers en % de la VB
Monétaire	Revenus monétaires en % de la VB
OPCVM obligataire	Aucun : coupons réinvestis
IFT	Intérêts payés par la contrepartie ou à payer

VI.3.2.1 Obligations :

Lorsqu'une obligation est achetée, sa valeur d'achat (ou prix historique) peut être différente de sa valeur de remboursement :

- si le prix historique est supérieur à la valeur de remboursement de l'obligation, on parle de surcote,
- si le prix historique est inférieur à la valeur de remboursement de l'obligation, on parle de décote.

Cette surcote/décote doit alors être amortie au cours de la durée de vie résiduelle de l'obligation.

La valeur comptable d'une obligation est alors donné par :

$$VC_{\text{Oblig}} = \text{Prix historique} + \text{Surcote} / \text{Décote amortie}$$

La valeur boursière d'une obligation correspond à la somme actualisée de ses cash-flows futurs (coupons + remboursement).

VI.3.2.2 Actions :

La valeur comptable d'une action est donnée par son prix d'achat. Pour déterminer sa valeur boursière, on utilise le taux de rendement des actions entré en input (ce taux est net de frais de gestion) :

$$VB_{\text{Actions},t'} = (VB_{\text{Actions},t} \times (1 + \text{Taux de rendement actions}_{t,t'} - \text{Taux dividendes})^{(t'-t-1/2)} + \text{achat / vente}) \times (1 + \text{Taux de rendement actions}_{t,t'} - \text{Taux dividendes})^{(t'-t-1/2)}$$

Où : $VB_{\text{Actions},\text{Achat}} = VC_{\text{Actions}}$

VI.3.2.3 Immobilier :

Les principes de comptabilisation de l'immobilier sont les mêmes que ceux de la classe des actions. La valeur comptable correspond à la valeur d'achat, la valeur boursière de l'immobilier se déduit via le taux de rendement de l'immobilier entré en input (net de frais de gestion).

$$VB_{\text{immo},t'} = (VB_{\text{immo},t} \times (1 + \text{Taux de rendement immo}_{t,t'} - \text{Taux loyers})^{(t'-t-1/2)} + \text{achat / vente}) \times (1 + \text{Taux de rendement immo}_{t,t'} - \text{Taux loyers})^{(t'-t-1/2)}$$

Où $VB_{\text{immo},\text{Achat}} = VC_{\text{immo}}$

VI.3.2.4 Monétaire :

La part de monétaire est détenue via des OPCVM. Les revenus provenant de ces OPCVM sont calculés à partir du taux de rendement monétaire donné par les inputs du Modèle ALM :

$$\text{Revenus monétaires}_t = VB_{\text{monétaire}_{t-1}} \times ((1 + \text{Taux de rendement monétaire}_{t-1,t})^{1/2} - 1)$$

Document Confidentiel

La valeur boursière est calculée comme suit :

$$VB_{mon,t} = (VB_{mon,t-1} + \text{montant achats} - \text{montant ventes}) \times ((1 + \text{Taux de rendement monétaire}_{t-1,t})^{1/2} - 1)$$

VI.3.2.5 OPCVM obligataires :

- La valeur boursière se calcule en tenant compte de la variation des prix zéro-coupons :

$$VB_{oblig,t'} = (VB_{oblig,t} \times (1 + rdt_oblig)^{(t'-t-1/2)} + \text{montant achats} - \text{montants ventes}) \times (1 + rdt_oblig)^{(t'-t-1/2)}$$

Où $rdt_oblig = P(t',9)/P(t,10) - 1$, avec $P(t',9)$ est le prix d'un ZC de maturité 9 ans à la date t' et $P(t,10)$ est le prix d'un ZC de maturité 10 ans à la date t .

- La valeur comptable correspond au prix payé à l'achat.

VI.3.2.6 IFT :

- La valeur comptable en $t = 0$ est égale à la prime amortie payée. Elle évolue chaque année de l'amortissement supplémentaire réalisé (amortissement linéaire).
- La valeur boursière n'a pas encore été modélisée car il n'y a pas de stratégie d'achat/vente d'IFT.

VI.3.2.7 Les Unités de Compte :

À $t=0$ la composition initiale des UC (unités de compte) est renseignée selon 4 catégories :

- les OPCVM actions
- les OPCVM monétaires
- les OPCVM immobiliers
- les OPCVM obligataires

Chaque classe d'actif a son rendement propre. Un taux de rendement synthétique est alors calculé en tenant compte du poids de chacune des classes d'UC et permet le calcul de l'ajustement ACAV.

Étant donné que le rendement de chaque classe d'actif n'est pas le même, le pourcentage dans la PM UC totale de chacune des classes d'UC ne va pas rester stable. Pour suivre cette déformation, chaque année est recalculée la nouvelle part associée à chacune des classes UC dans la PM totale. Le rendement synthétique est calculé avec la mise à jour de ces parts.

VI.4 Stratégies d'investissement et désinvestissement :

Trois stratégies ont été mises en place dans le modèle, permettant d'une part de gérer les investissements / désinvestissements liés aux cash-flows de l'année, et d'autre part de respecter l'allocation cible fixée. Ces stratégies sont :

- allocation cible du stock en valeur nette comptable,
- allocation cible des flux,
- allocation cible du stock en valeur boursière.

VI.4.1 Allocation cible du stock en valeur nette comptable (VNC) :

L'allocation d'actifs cible d'une année est exprimée en % de la valeur nette comptable totale. Chaque année, un gap de trésorerie est calculé en milieu d'année. Il correspond à la différence entre les cash-flows de l'année de l'actif (remboursements, coupons, ...) et ceux du passif (rachats, décès, reversements, ...).

- Si le gap* de trésorerie est positif, des investissements sont à réaliser.
- S'il est négatif, des désinvestissements sont nécessaires.

L'objectif est d'obtenir, après investissement / désinvestissement des différents actifs (en milieu de période), l'allocation cible de l'année. L'allocation obtenue en fin d'année pourra donc être légèrement différente de l'allocation cible puisque notamment une demi période d'amortissement (surcote / décote) aura eu lieu depuis l'alignement des actifs sur l'allocation cible.

VI.4.1.1 Étapes du processus :

On retient pour le moment 5 classes d'actifs :

- obligations à taux fixe,
- actions,
- immobilier,
- OPCVM obligataires,
- monétaire.

Les étapes du processus d'investissement / désinvestissement sont les suivantes :

- La première étape consiste à déterminer la VNC et la valeur boursière (VB) de chaque classe d'actif en milieu d'année, avant investissement / désinvestissement.
- Puis, connaissant le montant du gap de trésorerie, on détermine le montant de VNC cible pour chaque classe d'actif. Ce calcul doit respecter deux contraintes :
 - le gap de trésorerie doit être comblé, c'est à dire que les variations de valeurs boursières doivent correspondre au montant du gap,
 - l'allocation d'actifs obtenue après investissement / désinvestissement doit respecter l'allocation cible définie en input (en % de la VNC).

* on appelle « gap » de trésorerie la différence entre les flux de trésorerie générés par l'actif et les flux de trésorerie générés par le passif. Cette mesure donne une idée sur le risque de liquidité et de taux auxquels l'entreprise est exposée.

Document Confidentiel

Cela revient à chercher les VNC de chaque classe d'actif telles que :

$$\sum_{\text{toutes classes d'actif}} \text{VB après investissements} - \sum_{\text{toutes classes d'actif}} \text{VB avant investissements} = \text{Gap de trésorerie}$$

Et $\text{VNC}_{\text{actif } i, \text{ après investissement}} = \underbrace{\% \text{cible}_{\text{actif } i}}_{\text{donné par la table d'allocation cible}} * \text{VNC}_{\text{totale, après investissements}}$

Pour résoudre ce problème, on a choisi de déterminer la VNC cible de la classe obligataire à l'aide de l'algorithme de Newton. Cette méthode présente l'avantage de converger rapidement vers une solution, donc d'être peu coûteuse en temps de simulation.

Cet algorithme trouvera une solution seulement si l'allocation cible sur les obligations à taux fixe est non nulle (réglementairement une part minimale d'obligations est exigée).

Les VNC cibles des autres classes d'actifs sont ensuite déduites de la VNC obligataire obtenue.

- La troisième étape consiste à définir les VNC et VB en fin d'année. Ce calcul tient compte des investissements / désinvestissements réalisés au cours de la période. Les désinvestissements réalisés pendant l'année ont un impact sur le compte de participation aux bénéficiaires (PB) via les plus ou moins values réalisées sur chaque classe d'actif.

VI.4.1.2 Cas des investissements / désinvestissements obligataires :

Lorsque l'on doit réaliser un investissement obligataire, le montant est investi en milieu d'année sur deux obligations de maturités différentes.

Les maturités et la part à investir sur chaque obligation sont paramétrables par l'utilisateur.

Si on doit désinvestir de la classe obligataire, le désinvestissement est effectué sur toutes les lignes obligataires présentes dans le portefeuille, au prorata de leur valeur comptable.

VI.4.2 Allocation cible des flux :

Cette stratégie consiste à réinvestir en fonction d'une allocation cible en flux, et à désinvestir par ordre de liquidité croissante.

Chaque année, un gap de trésorerie est calculé en milieu d'année. Il correspond à la différence entre les cash-flows de l'année de l'actif (remboursements, coupons, ...) et ceux du passif (rachats, décès, reversements, ...).

- Si le gap de trésorerie est positif, le montant du gap est à investir en fonction d'une allocation cible des flux définie en input.
- S'il est négatif, des désinvestissements sont nécessaires. Ces désinvestissements s'effectuent selon deux critères : la liquidité et les plus ou moins values latentes des titres. Ce principe revient à désinvestir tout d'abord les titres les plus liquides et en priorité les titres en plus values.

Document Confidentiel

L'ordre retenu est le suivant :

- monétaire,
- obligations court terme (de durée restante inférieure à 5 ans),
- actions + immobilier + OPCVM diversifiés (désinvestissement au prorata),
- obligations long terme (de durée restante supérieure à 5 ans).

Pour contrôler le risque induit par cette stratégie dans le portefeuille, on introduit une contrainte de Value at Risk (VaR). Après investissement / désinvestissement, la VaR du portefeuille doit rester inférieure à un % des éléments de couverture de la marge de solvabilité. Si ce seuil est dépassé, on cherchera à désinvestir une part (en VB) de l'actif risqué (actions + immobilier + OPCVM diversifié) et à la réinvestir sur des obligations long terme.

Les éléments de couverture de la marge de solvabilité pris en compte sont :

- les capitaux propres,
- la réserve de capitalisation,
- le report à nouveau,
- les titres subordonnés à durée indéterminée (TSDI),
- 50% des emprunts pour fonds d'établissement,
- les plus ou moins values latentes des actifs.

Le pourcentage d'actif risqué à désinvestir pour satisfaire le critère de VaR est déterminé à l'aide de l'algorithme de Newton.

Le processus d'investissement / désinvestissement procède donc :

- à l'investissement / désinvestissement de chaque classe d'actif selon la stratégie définie ci-dessus,
- au contrôle du critère de VaR et au rebalancement du portefeuille si le critère n'est pas respecté,
- à la gestion des impacts des désinvestissements sur les produits financiers à distribuer.

Remarque.6.4.2 : Le niveau de confiance de la VaR est fixé à 95% et le ratio de couverture de la marge de solvabilité à 50%. Par la suite, ces éléments seront paramétrables.

VI.4.2.1 Étapes du processus :

L'actif est segmenté en 5 classes d'actifs :

- obligations à taux fixe (segmentées entre les obligations court terme et les obligations long terme),
- actions,
- immobilier,
- OPCVM diversifiés,
- monétaire.

Les étapes du processus d'investissement / désinvestissement sont les suivantes :

- La première étape consiste à déterminer la valeur nette comptable et la valeur boursière de chaque classe d'actif en milieu d'année, avant investissement / désinvestissement.
- La seconde étape définit les montants (en VB) à investir / désinvestir dans chaque classe d'actif, en tenant compte du critère de VaR.
- La troisième étape consiste à définir les VNC et VB des actifs en fin d'année. Ce calcul tient compte des investissements / désinvestissements effectués sur l'année. Les désinvestissements réalisés pendant l'année ont un impact sur le compte de participation aux bénéfices (PB) via les plus ou moins values réalisées sur chaque classe d'actif.

VI.4.2.2 Cas des obligations :

Pour les obligations, les désinvestissements s'effectuent sur toutes les lignes obligataires présentes dans le portefeuille, au prorata de leur valeur boursière (on différencie les obligations court terme des obligations long terme).

Les investissements se font, comme dans la stratégie d'allocation cible du stock en VNC, entre deux obligations de maturités différentes (maturité et part d'investissement paramétrables). Les investissements liés à la contrainte de VaR sont, quant à eux, réalisés sur l'obligation qui a la maturité la plus proche de 10 ans.

VI.4.3 Allocation cible du stock en VB :

L'allocation d'actifs cible d'une année est exprimée en % de la valeur boursière totale. Chaque année, un gap de trésorerie est calculé en milieu d'année. Il correspond à la différence entre les cash-flows de l'année de l'actif (remboursements, coupons, ...) et ceux du passif (rachats, décès, reversements, ...).

- Si le gap de trésorerie est positif, des investissements sont à réaliser.
- S'il est négatif, des désinvestissements sont nécessaires.

L'objectif est d'obtenir, après investissement / désinvestissement des différents actifs (en milieu de période), l'allocation cible de l'année définie en input. L'allocation obtenue en fin d'année pourra donc être légèrement différente de l'allocation cible puisqu'une demi période d'amortissement (surcote / décote) aura eu lieu depuis l'alignement des actifs sur l'allocation cible.

VI.4.3.1 Étapes du processus :

On retient 5 classes d'actifs :

- obligations à taux fixe,
- actions,
- immobilier,
- OPCVM diversifiés,
- monétaire.

Document Confidentiel

Les étapes du processus d'investissement / désinvestissement sont les suivantes :

- La première étape consiste à déterminer la VNC et la VB de chaque classe d'actif en milieu d'année, avant investissement / désinvestissement.
- Puis, connaissant le montant du gap de trésorerie, on détermine le montant de VB cible à obtenir pour chaque classe d'actif. Ce calcul doit respecter deux contraintes :
 - le gap de trésorerie doit être comblé, c'est à dire que les variations de valeurs boursières doivent correspondre au montant du gap,
 - l'allocation d'actifs obtenue après investissement / désinvestissement doit respecter l'allocation cible définie en input, exprimée en % de la VB.

L'allocation cible et le gap de trésorerie étant tous deux exprimés en VB, il est aisé de déterminer le montant cible en VB de chaque classe d'actif.

$$VB_{\text{actif } i, \text{ après inv / désinv}} = \underbrace{\% \text{cible}_{\text{actif } i}}_{\text{donné par la table d'allocation cible}} * (VB \text{ totale}_{\text{après inv / désinv}} + Gap)$$

Le montant à investir / désinvestir sur chaque classe d'actif est ensuite déduit de la VB finale obtenue pour chaque classe d'actif.

- La troisième étape consiste à définir les VNC et VB en fin d'année. Ce calcul tient compte des investissements / désinvestissements réalisés au cours de la période.
- Les désinvestissements réalisés pendant l'année ont un impact sur le compte de participation aux bénéfices (PB) via les plus ou moins values réalisées sur chaque classe d'actif.

VI.4.3.2 Cas des investissements / désinvestissements obligataires :

Lorsque l'on doit réaliser un investissement obligataire, le montant est investi en milieu d'année sur deux obligations de maturités différentes.

Les maturités et la part à investir sur chaque obligation sont paramétrables par l'utilisateur.

Si on doit désinvestir de la classe obligataire, le désinvestissement est effectué sur toutes les lignes obligataires présentes dans le portefeuille, au prorata de leur valeur comptable.

Remarque.6.: le modèle ALM AG2R LA MONDIALE permet de lancer des simulations pour différentes politiques de participation aux bénéfices ainsi que pour les traités de réassurances appliqués.

VII. L'IMPACT DU MODÈLE LMN SUR LE MODÈLE ALM :

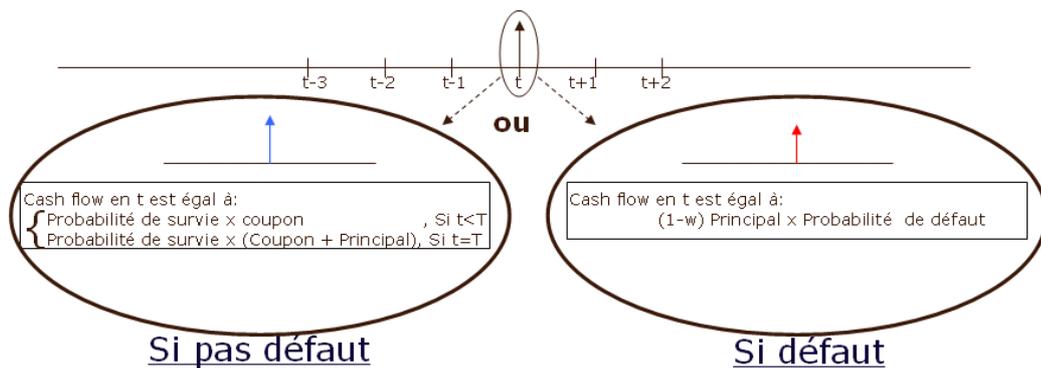
L'objectif de cette partie est de décrire comment le risque de crédit est traité et intégré dans le modèle ALM (sous Moses) avec comme modèle sous-jacent le modèle LMN.

Nous commençons par décrire les nouvelles données à intégrer dans l'alimentation du modèle ALM. Par la suite nous présenterons quelques impacts de ces nouvelles entrées sur les formules servant à calculer les différentes valeurs de l'actif.

VII.1 Les données à intégrer dans l'input du modèle ALM :

Le modèle LMN comme nous l'avons introduit au début de ce mémoire, n'explique pas directement la cause du défaut, il s'intéresse plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises ; ce défaut peut arriver à n'importe quel moment (aucun élément ne peut le prédire).

En prenant en compte le risque de crédit, il faut donc appliquer dans le modèle ALM une probabilité de survie ou de défaut à chaque cash flow futur des obligations Corporates.



Où: **T** est la date d'échéance de l'Obligation et **w** est le taux LGD(Loss Given Default).

Nous rappelons que le prix d'une Obligation Corporate modélisée par le modèle LMN est donné par la formule suivante:

$$CB(0,T) = E^Q \left[c \int_0^T e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] + E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} \right] + E^Q \left[(1 - \omega) \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right]$$

Où :

- $E^Q \left[c \int_0^T e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right]$ Valeur actualisée des coupons promis,
- $E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} \right]$ Valeur actualisée du Remboursement principal promis,
- $E^Q \left[(1 - \omega) \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right]$ Valeur actualisé du montant versé en cas de défaut.

À partir de cette formule, on déduira les probabilités de survie et de défaut à chaque instant t inférieur à l'échéance de l'Obligation Corporate.

VII.1.1 Les Probabilités de survie et défaut :

Dans le modèle ALM, on effectue des calculs au milieu et à la fin de chaque période (période= année), on aura donc, besoin pour la modélisation des Obligations Corporates de calculer les probabilités de survie semestriellement. Par ailleurs, on calculera les probabilités de défaut annuellement.

En résumé on aura besoin des probabilités de défaut annuelles et de survie semestrielles pour tout t , tel que $t \equiv 0 [6 \text{ mois}]$.

VII.1.1.1 Les coupons d'une Obligation Corporate :

Comme on l'a précisé au début de cette section, on calcule la probabilité de survie entre **tous les semestres**.

On a donc pour tout $t \leq T$ (où T est l'échéance):

$$C_Proba_s(t) = \exp\left(-\int_{t-6}^t \lambda_s + \gamma_s ds\right) \quad t \text{ en mois}$$

$$\text{I.e. : } C_Proba_s(t) = \exp\left(-\int_{t-1/2}^t \lambda_s + \gamma_s ds\right) \quad t \text{ en année}$$

En pratique cela revient à appliquer :

- Si t est exprimé en mois :

$$C_Proba_s(t) = \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=0}^5 \lambda_{t-s+1} + \gamma_{t-s+1}\right) \quad \text{(12)}$$

- Si t est exprimé en année :

$$C_Proba_s(t) = \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=0}^5 \lambda_{t-\frac{s-1}{12}} + \gamma_{t-\frac{s-1}{12}}\right)$$

Remarque 7.1.1.1 :

- on utilise la discrétisation « $\frac{1}{12} \sum_{s=0}^5$ » de l'intégrale « $\int_0^t \dots ds$ », car sous l'ESG on utilise cette discrétisation dans le calcul des taux ZC sans risque.
- les quantités $C_Proba_s(\cdot)$ seront ajoutées à l'input du modèle ALM

VII.1.1.2 Le Remboursement du capital en cas de défaut :

Comme c'est précisé précédemment, on effectue sous le modèle ALM des calculs au milieu et à la fin de période. Mais contrairement aux probabilités de survie on n'aura pas besoin de calculer les probabilités de défaut semestriellement sauf pour le premier semestre ($t=6$ mois).

On calculera donc, dans un premier temps les probabilités de défaut pour tout $t \geq 12$ mois et on déduira avec un raisonnement analogue la probabilité de défaut pour $t=6$.

La probabilité de défaut entre **t et $t+dt$** , tel que $0 < t \leq T$ (où T est l'échéance), est :

$$P(t < X < t + dt) = \lambda_t \exp\left(-\int_0^t \lambda_s + \gamma_s ds\right) dt \quad : \quad t \text{ en mois}$$

On démontre cette formule en annexe.

Puisque sous l'ESG on peut calculer les λ_t et γ_t mensuellement, on fixera comme 'pas' de calcul de ces probabilités un pas mensuel égal à : $dt=1/12$

1^{er} cas, si $t \geq 12$ mois :

- Le montant actualisé à la date d'aujourd'hui du remboursement d'un principal égal à 1 euro en cas de défaut entre t et $t+dt$ est égal à :

$$(1 - \omega) D(0, t) \lambda_t \exp\left(-\int_0^t \lambda_s + \gamma_s ds\right) \frac{1}{12}$$

Avec : $D(0, t)$ est le facteur d'actualisation :

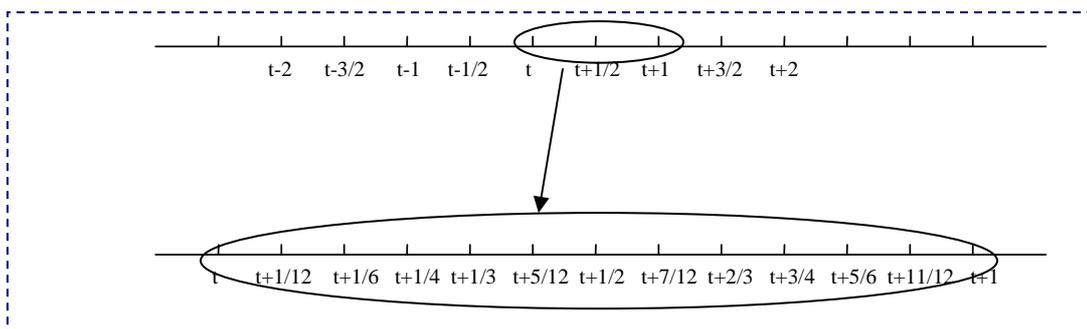
$$D(t, T) = E\left[\exp\left(-\int_t^{T+t} r_t dt\right)\right]$$

Et $(1 - \omega)$ est le taux de recouvrement où ω est le taux LGD (Loss Given Default).

- On alors pour tout $t \geq 12$ mois Le montant actualisé à la date d'aujourd'hui du remboursement d'un euro en cas de défaut entre $t-12$ mois et t est égal à :

$$\sum_{i=1}^{12} (1 - \omega) D(0, t - i + 1) \lambda_{t-i+1} \exp\left(-\int_0^{t-i+1} \lambda_s + \gamma_s ds\right) \frac{1}{12}$$

Car l'événement que la Corp fasse défaut entre deux années, est égal à l'union des événements qu'elle fasse défaut à chaque instant t compris entre Ces deux années :



- Pour les besoins du Modèle ALM, on calculera pour tout $t \geq 12$ mois, Le montant **à l'instant t** du remboursement d'un euro en cas de défaut entre **t -12 et t** en multipliant la formule précédente par l'inverse du facteur d'actualisation :

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} (1 - \omega) D(0, t - i + 1) \lambda_{t-i+1} \exp\left(-\int_0^{t-i+1} \lambda_s + \gamma_s ds\right) \frac{1}{12}}{D(0, t)}$$

Cela revient à capitaliser jusqu'à la date t les montants de remboursements en cas de défaut survenus avant la date t.

On discrétise cette formule de la même façon que les probabilités de survie pour la raison citée dans la **Remarque 7.1.1.1** :

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} (1 - \omega) D(0, t - i + 1) \lambda_{t-i+1} \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=0}^{t-i} \lambda_s + \gamma_s\right) \frac{1}{12}}{D(0, t)} \quad \text{(13)}$$

On posant :

$$\text{Remb_Proba_d}(t) = \sum_{i=0}^{12} \frac{(1 - \omega) D(0, t - i + 1) \lambda_{t-i+1} \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=t-12}^{t-i} \lambda_s + \gamma_s\right) \frac{1}{12}}{D(0, t)} \quad t \geq 12 \text{ mois}$$

La quantité **(13)** est alors égale, à :

$$\text{Remb_Proba_d}(t) \prod_{k=0}^{\frac{(t-12)}{6}-1} C_Proba_s(t - 12 - 6k)$$

2ème cas, si t=6mois :

- De la même façon, on obtient le montant **à l'instant 6mois**, du remboursement d'un euro en cas de défaut :

$$\frac{\sum_{i=1}^6 (1 - \omega) D(0, 6 - i + 1) \lambda_{6-i+1} \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=0}^{6-i} \lambda_s + \gamma_s\right) \frac{1}{12}}{D(0, 6)}$$

On pose :

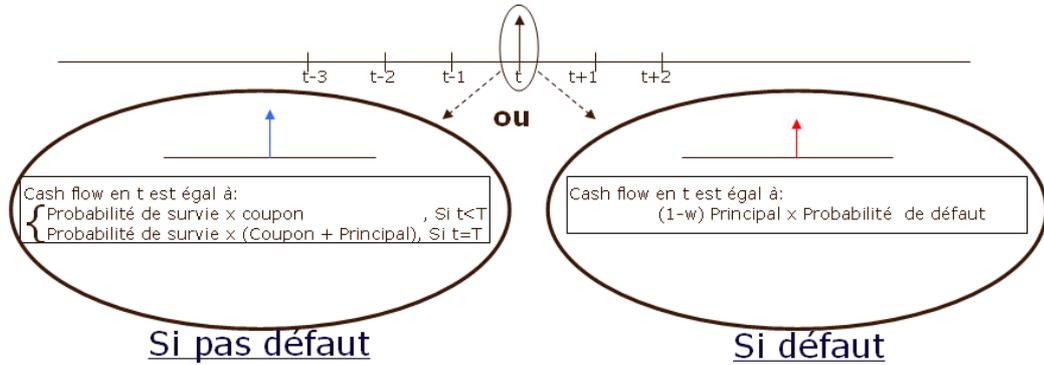
$$\text{Remb_Proba_d}(6) = \frac{\sum_{i=1}^6 (1 - \omega) D(0, 6 - i + 1) \lambda_{6-i+1} \exp\left(-\frac{1}{12} \sum_{s=0}^{6-i} \lambda_s + \gamma_s\right) \frac{1}{12}}{D(0, 6)}$$

| **Remarque 7.1.1.2** : les quantités Remb_Proba_d(.) seront ajoutées à l'input du modèle ALM.

VII.1.2 Les Taux Corporates :

VII.1.2.1 La valeur de marché :

On rappelle que dans le modèle LMN, **en cas de défaut** de la Corporate, on ne touche qu'une partie du remboursement principal promis.



Où: T est la date d'échéance de l'Obligation et w est le taux LGD (Loss Given Default).

Alors en prenant le modèle LMN comme modèle sous-jacent, **il ne faut pas appliquer** la formule suivante pour le calcul de la valeur de marché :

$$VM(.) = \sum_i \left(\frac{\text{coupons}}{(1 + \text{TauxZC}_{\text{corp}}(.,i))^i} \right) + \frac{\text{Remboursement principal}}{(1 + \text{TauxZC}_{\text{corp}}(.,T))^T}$$

Avec :

$$\text{TauxZc}_{\text{corp}}(t, T) = CB_{\text{zc}}(t, T, \omega)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Où :

$$CB_{\text{zc}}(t, T, \omega) = E^Q \left[e^{-\int_t^{T+t} r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} \right] + E^Q \left[(1 - \omega) \int_t^{T+t} \lambda_x e^{-\int_t^x r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dx \right]$$

Car cela **revient à supposer** que lorsqu'il y a **défaut**, on touche **une partie des coupons promis** ; chose qui n'est pas vraie.

On doit alors calculer La valeur de marché comme somme du Remboursement principal actualisé avec le $\text{TauxZC}_{\text{corp}}$ et des coupons actualisés avec un $\text{Taux}_{\text{coup}}$ que nous définissons dans la suite :

$$VM(.) = \sum_i \left(\frac{\text{coupons}}{(1 + \text{Taux}_{\text{coup}}(.,i))^i} \right) + \frac{\text{Remboursement principal}}{(1 + \text{TauxZC}_{\text{corp}}(.,T))^T}$$

Où T est l'échéance de l'Oblig Corp.

VII.1.2.2 Taux ZC Corporate appliqués au principal:

Le prix d'une obligation Corporate ZC est donné par la formule suivante:

$$CB_{zc}(t, T, \omega) = E^Q \left[e^{-\int_t^{T+t} r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} \right] + E^Q \left[(1 - \omega) \int_t^{T+t} \lambda_x e^{-\int_t^x r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dx \right]$$

Et il est modélisé à partir d'une **formule fermée** déduite de la formule précédente (voir la documentation sur le modèle LMN).

On obtient alors, les taux ZC Corp par la formule suivante :

$$TauxZc_{corp}(t, T) = CB_{zc}(t, T)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Où T est la maturité et t la date du calcul.

VII.1.2.3 Taux ZC Corporate appliqués aux coupons d'une Oblig Corp :

Pour calculer la somme des coupons actualisée, on calcule un nouveau Taux_{coup} déduit de la formule du prix des Obligation Corporate dans le cas où $\omega = 1$:

$$CB_{zc}(t, T, 1) = E^Q \left[e^{-\int_t^{T+t} r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} \right]$$

Le taux_{coup} est calculé alors, comme suit :

$$Taux_{coup}(t, T) = CB_{zc}(t, T, 1)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Où T est la maturité et t la date du calcul.

VII.1.3 Les données à ajouter au fichier d'input Actuel :

Nom	Description	Fréquence	Maturité	Nbre Sortie
Tauxcorp	taux zc corporate	Semestrielle	1à 20ans	nbre d'année de projection
Tauxcpcorp	taux zc corporate w=1	Semestrielle	1à 20ans	nbre d'année de projection
C_Proba_s	proba de survie entre deux semestres	Semestrielle	-	nbre d'année de projection
Remb_Proba_d	proba de défaut entre deux année sauf pour t=6mois	Semestrielle	-	nbre d'année de projection

VII.2 Exemples d'impacts du Modèle LMN sur les données d'actif de Modèle ALM :

Nous avons vu dans la section précédente, que les probabilités de survie sont semestrielles et les probabilités de défaut sont annuelles (sauf pour le premier semestre) et elles sont calculées pour tout t , tel que $t \equiv 0 [6 \text{ mois}]$.

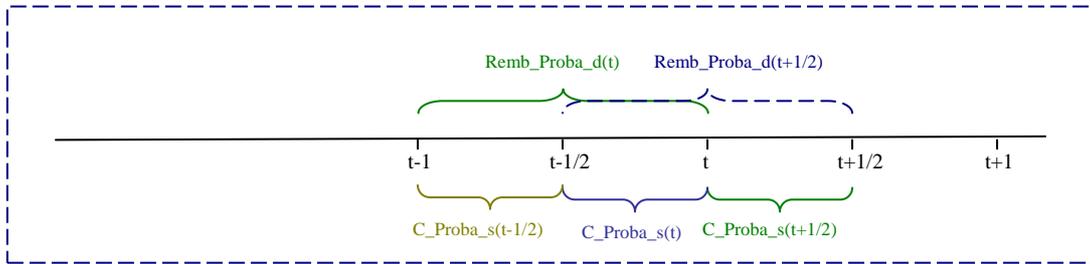


Figure.7.2a

Les deux figures ci-dessous montrent les spécificités du Modèle ALM concernant le début et la fin des périodes et aussi à quels moments les décisions d'investissements sont effectuées :

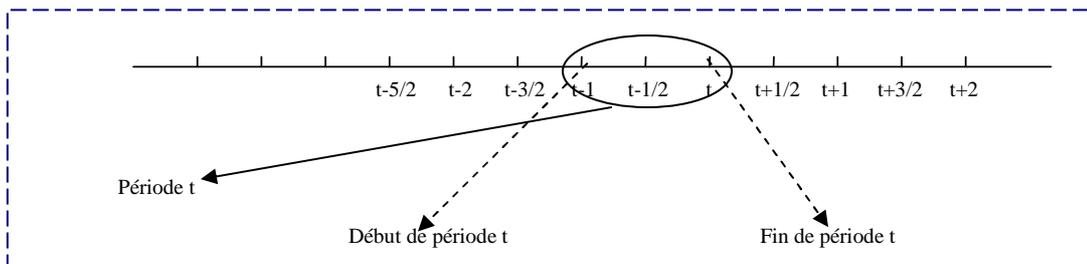


Figure.7.2b

Et

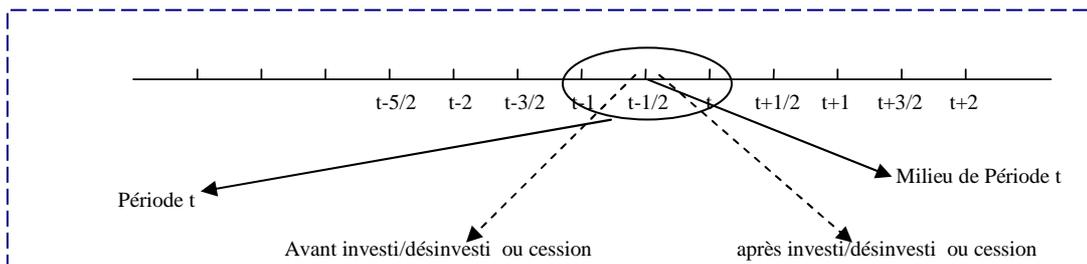


Figure.7.2c

VII.2.1 Nominal restant après investi/désinvesti :

On note *Nominal_alive*, le montant nominal en vie de l'obligation **après** investissements, désinvestissement ou en période *t*.

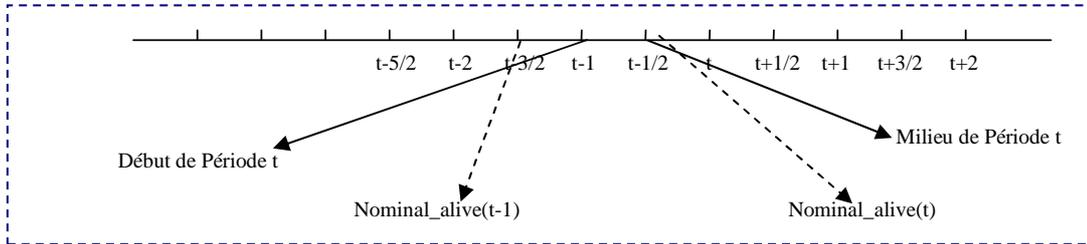


Figure. 7.2.1

On a alors :

- Si $t=0$:

$$\text{Nominal_alive}(0) = \text{Nominal} * Q$$

Où :- *Nominal* est la valeur nominale de l'obligation (pour un titre).

- *Q* est la quantité de titres.

- Si investissement :

On effectue d'abord un test pour savoir sur quelle maturité on réinvestit les achats Obligataires suivant la stratégie investi/désinvesti choisie.

$$\text{Nominal_alive}(t) = \text{montant_achat_oblig}(t) * \text{prop_invest}(t)$$

- Ce stock évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Nominal_alive}(t) = & C_Proba_s(t-1) * C_Proba_s(t-1/2) * \text{Nominal_alive}(t-1) \\ & * (1 - \text{prorata_vtc_oblig}(t)) \end{aligned}$$

Où *prorata_vtc_oblig(t)* est le prorata de la ligne obligataire à céder.

VII.2.2 Les Coupons :

On note *coupon_paimt* le montant de détachement des coupons, ils se détachent en milieu de période **avant** investissement, désinvestissement ou cession.

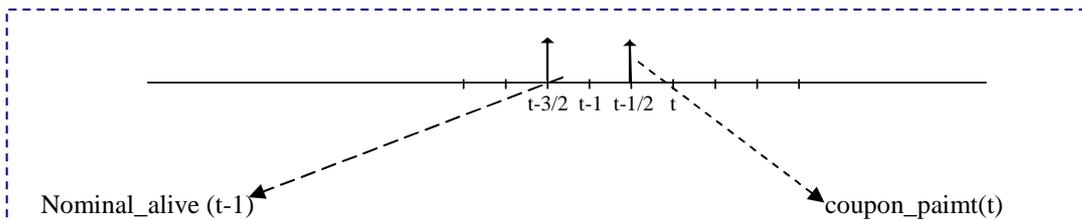


Figure. 7.2.2

On a alors :

$$\text{Coupon_paimt}(t) = C_Proba_s(t-1) * C_Proba_s(t-1/2) * \text{Nominal_alive}(t-1) * \text{taux nominal}(t-1)/100$$

VII.2.3 Les Coupons courus :

On note coupon_couru le montant du coupon couru de l'obligation à la fin de période

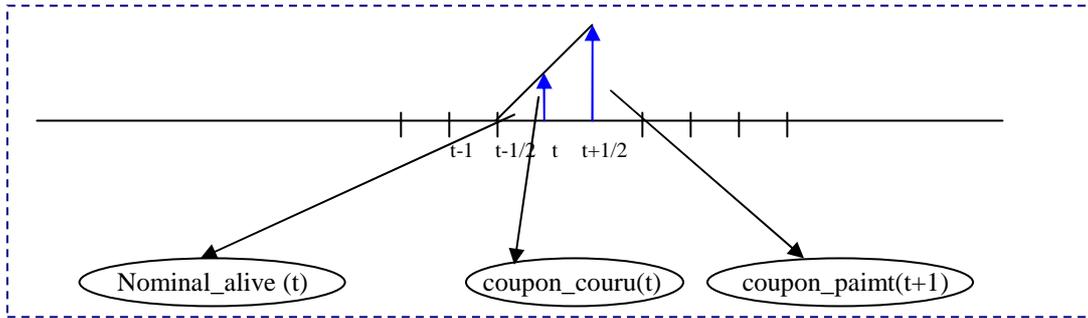


Figure.6

On a alors :

- Si $t \geq [T]+1$ ou $\text{nominal_alive} = 0$
 $\text{Coupon_couru}(t) = 0$

Où $[T]$ est la valeur entière de la date d'échéance de l'obligation

- Si $t = \text{année d'investissement}$
 $\text{Coupon_couru}(t) = \text{tx_nominal}(t)/100 * C_Proba_s(t) * \text{nominal_alive}(t) * 0.5$
- Sinon :
 $\text{Coupon_couru}(t) = (C_Proba_s(t)/C_Proba_s(t-1)) * \text{coupon_couru}(t-1) * \text{nominal_alive}(t)/(\text{nominal_alive}(t-1))$

Remarque 7.2 :

Dans les portefeuilles La Mondiale, les investissements sont effectués à chaque milieu d'année. Il peut y avoir donc un décalage de temps lors des détachements de coupons par rapport à ces dates.

L'utilisateur du modèle ALM a le choix de lancer les calculs avec l'hypothèse que les coupons se détachent en milieu d'année ou les lancer en prenant en compte les dates exactes des détachements de coupons

Pour ce dernier cas nous calculons les probabilités de survie correspondantes aux dates exactes par interpolation linéaire.

Exemple 7.2 : Il faut prendre en compte les deux cas suivants :

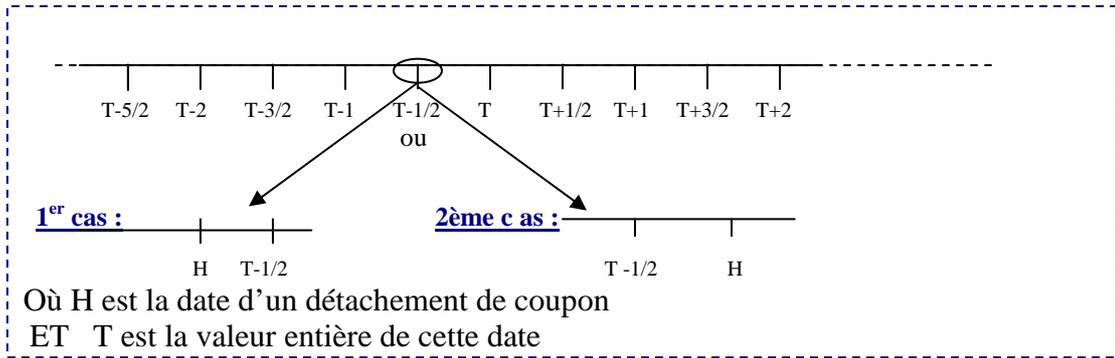
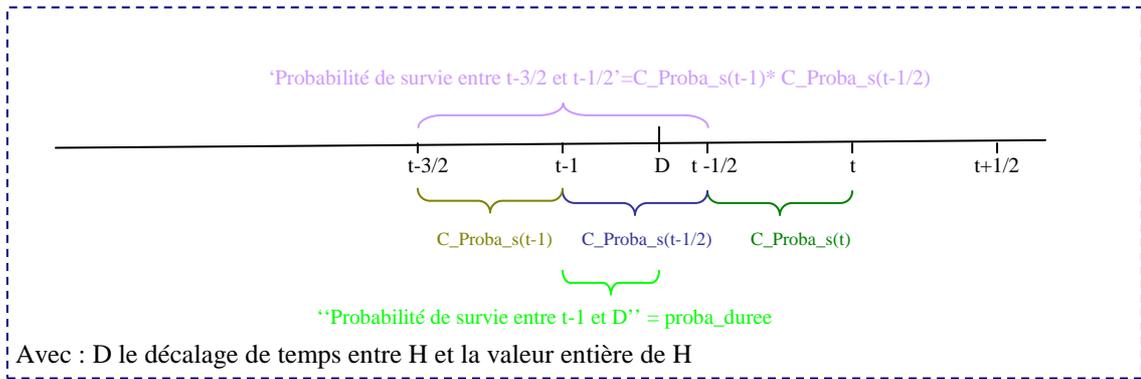


Figure.7.2

Calculons maintenant la probabilité de survie correspondante à ce décalage:

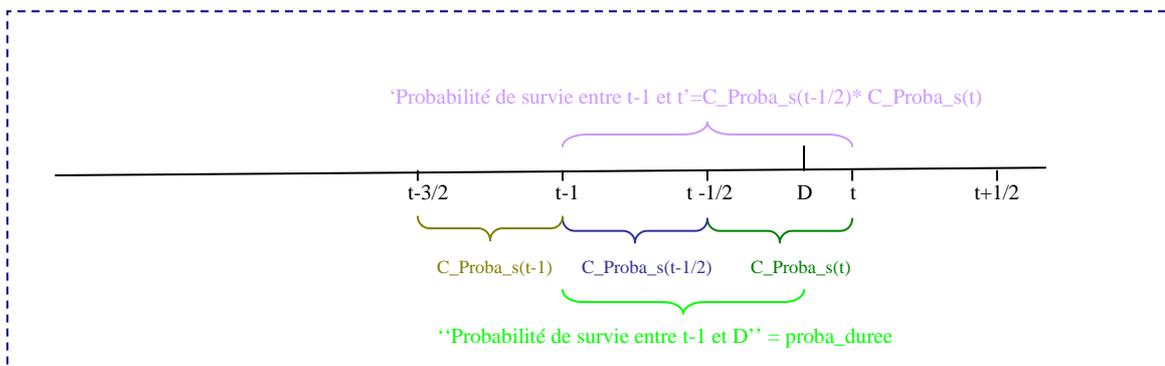
▪ **1^{er} cas :**



On obtient, par interpolation linéaire la formule suivante:

$$\text{proba_duree} = \frac{[C_Proba_s(t-1/2) - 1] * \text{duree}}{0.5} + \frac{t-1/2 - C_Proba_s(t-1/2) * (t-1)}{0.5}$$

▪ **2^{ème} cas :**



On obtient, par interpolation linéaire:

$$\text{proba_duree} = \frac{[C_Proba_s(t - 1/2) * C_Proba_s(t) - C_Proba_s(t - 1/2)] * duree}{0.5} + \frac{C_Proba_s(t - 1/2) * t - C_Proba_s(t - 1/2) * C_Proba_s(t) * (t - 1/2)}{0.5}$$

VIII. CONCLUSION :

Dans cette étude, nous avons implémenté une modélisation du risque de crédit dans le générateur des scénarios économiques ainsi que dans le modèle ALM d'AG2R LA MONDIALE. Cette modélisation permet d'intégrer ce risque dans le calcul du Best Estimate et d'autres indicateurs économiques (MCEV,... etc.).

Ce mémoire a permis de construire sous Excel un outil de calibration du modèle LMN, en se basant sur les prix de marché des CDS et les Obligations Corporates. Cependant, il faut noter la difficulté à ajuster ce modèle vu qu'il faut calibrer 6 paramètres. En effet l'outil développé sous Excel est très sensible aux valeurs initiales choisies pour lancer la calibration (cela est dû à l'outil qui converge vers des solutions locales).

Concernant le taux de recouvrement (i.e. taux LGD), nous avons testé une approche à taux fixe (à savoir 35%), sans ignorer le fait que ce taux est lié au type d'activité de la Corporate et aussi du niveau de levier (la dette de la Corporate, titre subordonné ou pas ...etc.). Il faut noter que ce choix est basé sur une opinion d'experts et que d'autres valeurs pourront être testées dans le futur.

En ce qui concerne le choix de modéliser le risque de crédit par rapport à un rating équivalent, ce choix a été motivé d'une part par la difficulté de trouver les données nécessaires pour une modélisation par rating et d'autre part, par le fait que notre portefeuille nous permet, au vue de ses spécificité et son homogénéité, d'appliquer une approche par rating équivalent. En outre une approche par rating équivalent est moins contraignante au niveau du temps de calcul qu'une approche par rating.

L'implémentation du risque de crédit sous Moses dans modèle ALM étant finie, plusieurs sensibilités, par rapport aux paramètres du modèle LMN, vont être testées pour mieux appréhender l'impact de cette modélisation sur les indicateurs économiques d'AG2R LA MONDIALE.

IX. ANNEXE :

IX.1 Discrétisation exacte du processus de diffusion des taux courts dans un modèle de Hull & White à 1 facteur :

Le processus de diffusion du modèle Hull & White à 1 facteur s'écrit :

$$r(t) = f(0, t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2$$

Soient T et t deux dates quelconques. En utilisant l'équation de diffusion précédente, on peut calculer : $r_T - e^{-a(T-t)} r_t$.

On obtient la formule :

$$r_T - e^{-a(T-t)} r_t = f(0, T) - e^{-a(T-t)} f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-a(T-t)} - e^{-a2T} + e^{-a(T+t)}] - \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW(s)$$

Nous allons montrer que le dernier terme peut s'écrire :

$$\sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW(s) = \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(T-t)})}{2a}} \times u,$$

Où u suit une loi normale N(0,1).

Remarquons d'abord que, $\sigma \int_t^T e^{a(s-T)} dW$ est une loi normale (somme de lois normales). Il suffit donc de calculer l'espérance et la variance, et de montrer que son espérance est nulle et sa variance égale à : $\sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(T-t)})}{2a}}$.

Nous utilisons pour cela le théorème suivant (définition de l'intégrale stochastique) :

Soit (W_t) un mouvement brownien et (F_t) sa filtration naturelle. A tout processus (X_t) , on associe une variable aléatoire de carré intégrable $I(X_t)$, notée $I(X_t) = \int X_t dW(t)$ telle que $E(I(X_t)) = 0$ et $E(I(X_t)^2) = E(\int X_t^2 dt)$. Le processus $I(X_t)$ est appelé intégrale stochastique ou intégrale d'Ito.

Posons, pour avoir les mêmes notations que dans le théorème :

$$X_s = \sigma e^{a(s-T)}$$

$$I(X_t) = \int_t^T X_s dW = \sigma \int_t^T e^{a(s-T)} dW$$

D'après le théorème :

$$E(I(X_t)) = 0$$

$$E(I(X_t)^2) = E\left(\int_t^T X_s^2 ds\right) = \int_t^T X_s^2 ds$$

La dernière égalité est due au fait que la fonction X_t est déterministe.

$$\begin{aligned} E(I(X_t)^2) &= \int_t^T (\sigma e^{a(s-T)})^2 ds = \int_t^T \sigma^2 \times e^{2a(s-T)} ds \\ &= \sigma^2 \times \int_t^T e^{2a(s-T)} ds \\ &= \sigma^2 \times e^{-2aT} \times \int_t^T e^{2as} ds \\ &= \sigma^2 \times e^{-2aT} \times \left[\frac{e^{2as}}{2a} \right]_t^T \\ &= \sigma^2 \times e^{-2aT} \times \left(\frac{e^{2aT}}{2a} - \frac{e^{2at}}{2a} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} \times (1 - e^{2a(t-T)}) \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \text{VAR}(I(X_t)) &= E(I(X_t)^2) - E(I(X_t))^2 \\ &= E(I(X_t)^2) - 0^2 = \frac{\sigma^2}{2a} \times (1 - e^{2a(t-T)}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma(I(X_t)) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} \times (1 - e^{2a(t-T)})} = \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{2a(t-T)})}{2a}}$$

Ce qui correspond à ce que nous cherchions à démontrer.

IX.2 Calcul du prix d'une obligation Corporate par des formules fermées :

De l'hypothèse d'indépendance, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt\right)\right] \\ &= D(T)E\left[\exp\left(-\int_0^T \lambda_t dt\right)\right]E\left[\exp\left(-\int_0^T \gamma_t dt\right)\right] \end{aligned}$$

Où :

$$D(T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right)\right]$$

Soit :

$$F(\lambda, T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T \lambda_t dt\right)\right].$$

Comme dans Cox, Ingersoll et Ross (1985), $F(\lambda, T)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\sigma^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + (\alpha - \beta \lambda) \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \lambda F - \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \quad (8.2)$$

Sous réserve de la condition aux limites $F(\lambda, 0) = 1$. $F(\lambda, T)$ peut être représenté comme suit :

$$F(\lambda, T) = A(T) \exp(B(T)\lambda) \quad (8.3).$$

En dérivant cette expression et en remplaçant ces dérivées dans l'équation (8.2) aux dérivées partielles, on constate que (8.3) est une solution à condition que $A(T)$ et $B(T)$ satisfassent aux équations de Riccati,

$$\begin{aligned} B' &= \frac{\sigma^2}{2} B^2 - \beta B - 1, \\ A' &= \alpha A \end{aligned}$$

Sous les conditions : $A(0) = 1$ et $B(0) = 0$. Ces deux équations différentielles ordinaires sont facilement résolues par intégration directe.

$$\begin{aligned} A(t) &= \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}, \\ B(t) &= \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi t})}, \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}, \\ \kappa &= (\beta + \phi)/(\beta - \phi) \end{aligned}$$

Rappel :

Une équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$$

Où : q_0, q_1 et q_2 sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun à valeurs réelles ou complexes.

Soit maintenant :

$$V(\gamma, T) = E \left[\exp \left(- \int_0^T \gamma_t dt \right) \right]$$

$V(\gamma, T)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} - \gamma V - \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (8.4)$$

Sous réserve de la condition aux limites $V(\gamma, 0) = 1$. $V(\gamma, T)$ peut être représenté comme suit :

$$V(\gamma, T) = C(T) \exp(L(T)\gamma) \quad (8.5).$$

En dérivant cette expression et en remplaçant ces dérivées dans l'équation (8.4) aux dérivées partielles, on constate que (8.5) est une solution à condition que $C(T)$ et $L(T)$ satisfassent aux équations de Riccati,

$$\begin{aligned} L' &= -1, \\ C' &= \frac{\eta^2}{2} L^2 C, \end{aligned}$$

Sous les conditions : $C(0) = 1$ et $L(0) = 0$. Ces deux équations différentielles ordinaires sont facilement résolues par intégration directe.

$$\begin{aligned} L(t) &= -t, \\ C(t) &= \exp \left(\frac{\eta^2 t^3}{6} \right), \end{aligned}$$

Encore une fois, à partir de l'hypothèse d'indépendance,

$$\begin{aligned} &E \left[\lambda_T \exp \left(- \int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt \right) \right] \\ &= D(T) V(\gamma, T) E \left[\lambda_T \exp \left(- \int_0^T \lambda_t dt \right) \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$W(\lambda, T) = E \left[\lambda_T \exp \left(- \int_0^T \lambda_t dt \right) \right].$$

Duffie, Pan, and Singleton (2000) ont montré que $W(\lambda, T)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\sigma^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} + (\alpha - \beta \lambda) \frac{\partial W}{\partial \lambda} - \lambda W - \frac{\partial W}{\partial T} = 0 \quad (8.6)$$

Sous réserve de la condition aux limites $W(\lambda, 0) = \lambda$.

$W(\lambda, T)$ peut être représenté comme suit :

$$W(\lambda, T) = (G(T) + H(t) \lambda) \exp(B(T) \lambda) \quad (8.7).$$

En dérivant cette expression et en remplaçant ces dérivées dans l'équation (8.6) aux dérivées partielles, on constate que (8.7) est une solution à condition que $B(T)$, $G(T)$ et $H(T)$ satisfassent aux équations de Riccati,

$$B' = \frac{\sigma^2}{2} B^2 - \beta B - 1,$$

$$H' = (\alpha + \sigma^2) H B - H \beta \quad (8.8),$$

$$G' = \alpha G B + \alpha H \quad (8.9),$$

Sous les conditions : $H(0) = 1$ et $G(0) = B(0) = 0$. La fonction B est la même que celle vue dans la première partie de cette démonstration, l'équation (8.8) peut maintenant être résolue pour $H(T)$ par intégration directe. Enfin, avec les expressions de $B(T)$ et $H(T)$, la fonction $G(T)$ peut aussi être résolue par une intégration directe.

$$G(t) = \frac{\alpha}{\phi} (e^{\phi t} - 1) \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1},$$

$$H(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi \sigma^2}{\sigma^2} t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 2},$$

IX.3 Discrétisation de Diop du modèle CIR :

Nous rappelons que nous discrétisons une équation différentielle suivant un modèle de type CIR :

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW(t)$$

L'approche de discrétisation pour l'équation du CIR faite par « Diop(2003) », est la suivante :

$$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = |\hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|.$$

Cet estimateur a les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\leq} Cte \sqrt{T/n}.$$

Et si $f \in C^4$ avec ses dérivées bornées,

$$|\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] - \mathbb{E}[f(X_T)]| \leq Cte \left((T/n)^{a/\sigma^2} + T/n \right).$$

IX.4 Espérances et variances des discrétisations des processus du modèle LMN :

Nous rappelons que les schémas de discrétisations retenus pour les deux processus stochastiques sont :

- pour l'intensité du crédit (le pas de la discrétisation =1/12):

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + (\alpha - \beta\lambda_t) \frac{1}{12} + \sigma \sqrt{\lambda_t I_{\lambda_t > 0}} (W_{t+1} - W_t)$$

Où W_t est un mouvement brownien centré de variance t .

- pour la prime de liquidité (le pas de la discrétisation =1/12):

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t + \eta (Z_{t+1} - Z_t)$$

Où Z_t est un mouvement brownien centré de variance t .

Espérance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de l'intensité du crédit:

On a :

$$\begin{aligned} E(\lambda_t) &= E\left(\lambda_{t-1} + (\alpha - \beta\lambda_{t-1}) \frac{1}{12} + \underbrace{E(\sigma \sqrt{\lambda_{t-1} I_{\lambda_{t-1} > 0}} (W_{t+1} - W_t))}_{=0 \text{ car } (W_t - W_{t-1}) \perp \lambda_{t-1} \text{ et } E(W_t - W_{t-1})=0}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{12}\right) E(\lambda_{t-1}) + \frac{\alpha}{12} \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t \lambda_0 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t\right) \end{aligned}$$

Espérance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de liquidité :

On a :

$$\begin{aligned} E(\gamma_t) &= E(\gamma_{t-1}) + \underbrace{E(\eta(Z_t - Z_{t-1}))}_{=0 \text{ car } E(Z_t - Z_{t-1})=0} \\ &= \gamma_0 \end{aligned}$$

Variance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de l'intensité du crédit :

On sait que :

$$Var(Y) = E[Var(Y / X)] + Var(E[Y / X])$$

Document Confidentiel

On a alors, avec une discrétisation à pas mensuel la formule suivante:

$$\text{Var}(\lambda_t) = \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^2 \text{var}(\lambda_{t-1}) + \frac{\sigma^2}{12} E(\lambda_{t-1} I_{\lambda_{t-1} > 0})$$

Car :

D'une part :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\lambda_t / \lambda_{t-1}) &= \sigma^2 \lambda_{t-1} I_{\lambda_{t-1} > 0} \text{Var}(W_t - W_{t-1}) \\ &= \frac{\sigma^2}{12} \lambda_{t-1} I_{\lambda_{t-1} > 0} \\ &\quad \text{car } t - (t-1) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[\text{Var}(\lambda_t / \lambda_{t-1})] = \frac{\sigma^2}{12} E[\lambda_{t-1} I_{\lambda_{t-1} > 0}]$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} E[\lambda_t / \lambda_{t-1}] &= \lambda_{t-1} + \frac{1}{12} (\alpha - \beta \lambda_{t-1}) \\ &= \frac{\alpha}{12} + \left(1 - \frac{\beta}{12}\right) \lambda_{t-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(E[\lambda_t / \lambda_{t-1}]) = \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^2 \text{Var}(\lambda_{t-1})$$

D'où le résultat.

Dans la pratique on a remarqué que l'événement $\{\lambda_t < 0\}$ est négligeable, on a supposé alors que $E(\lambda_t) = E(\lambda_t I_{\lambda_{t-1} > 0})$

$$\text{Var}(\lambda_t) = \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^2 \text{var}(\lambda_{t-1}) + \frac{\sigma^2}{12} \left[\left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^{t-1} \lambda_0 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^{t-1}\right) \right] \quad PS$$

$$= \frac{\sigma^2}{\beta} \left(\lambda_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^{t-1} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^t\right) + \frac{\alpha \sigma^2}{2\beta^2} \frac{1 - \left(1 - \frac{\beta}{12}\right)^{2t}}{1 - \frac{\beta}{12}} \quad PS$$

Variance de la discrétisation (à pas mensuel) du processus de liquidité :

On a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\gamma_t) &= \text{Var}(\gamma_{t-1}) + \frac{\eta^2}{12} \\ &= \underbrace{\text{Var}(\gamma_0)}_{=0} + t \frac{\eta^2}{12} = t \frac{\eta^2}{12} \end{aligned}$$

IX.5 Test d'hypothèse sur la moyenne d'un échantillon (test de Student) :

Le test de Student est un test paramétrique qui compare la moyenne observée d'un échantillon statistique à une valeur fixée, ou encore la probabilité observée d'un caractère à une probabilité théorique. Il permet aussi de comparer les moyennes de deux échantillons statistiques (on parle alors de test de conformité). Il tire son nom de la loi où on lit l'écart critique.

Test de comparaison d'une moyenne à une valeur donnée

- Données : un échantillon (x_1, \dots, x_n) de n valeurs observées d'une variable aléatoire X d'espérance m .
- Hypothèse testée : $H_0 = "m = m_0"$ avec un risque d'erreur α .
- Déroulement du test :

1. on calcule la moyenne observée :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. on calcule l'écart-type "débiaisé" :

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

3. on calcule l'écart du test

$$t = \frac{|\bar{x} - m_0|}{s} \times \sqrt{n}.$$

4. on cherche l'écart critique t_α dans la table de la loi de Student avec $n-1$ degrés de liberté.
5. si $t < t_\alpha$, on accepte l'hypothèse, si $t > t_\alpha$, on la rejette.

IX.6 Test d'hypothèse sur la variance d'un échantillon (test du Khi-deux) :

On observe la variance empirique s_0^2 d'un échantillon de n observations issues d'une loi normale $N(\mu, \sigma)$.

On veut tester $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Sous H_0 , on sait que la variable $Z = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ suit une loi de χ_{n-1}^2 . Si α est le niveau de confiance choisi pour le test, les bornes c et d de l'intervalle d'acceptation sont définies par :

$$P(\chi_{n-1}^2 < c) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } P(\chi_{n-1}^2 < d) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Si la valeur observée $\frac{ns_0^2}{\sigma_0^2}$ de la variable Z se trouve dans le domaine d'acceptation $[c, d]$, l'hypothèse H_0 est acceptée.

IX.7 La probabilité de défaut entre t et t+dt d'un processus à intensité :

- Soit à l'instant $T=t$:
 - λ_t : le taux instantané de défaut,
 - $\lambda_t dt$: la probabilité d'arrivée du défaut entre t et t + dt,
- Soit : $P(T < t)$: la probabilité d'arrivée du défaut entre 0 et t,
- Soit : $1 - P(T < t)$ la probabilité de survie à t.

Ainsi la probabilité que le défaut se produit précisément entre t et dt est la suivante :

$$P(T < t + dt) - P(T < t)$$

Par ailleurs : pour que l'événement se défaut se produit précisément entre t et t+dt , il faut qu'il ne soit pas produit entre 0 et t, et que ceci étant réalisé, l'événement de défaut se produit entre t et t+dt . Soit donc :

$$P(T < t + dt) - P(T < t) = (1 - P(T < t)) * \lambda_t dt$$

On a alors :

$$\frac{dP(T < t)}{1 - P(T < t)} = \lambda_t dt$$

Ainsi :

$$\left\{ \log [1 - P(T < t)] \right\}_0^t = \int_0^t -\lambda_t dt$$

La probabilité de survie est alors égale : $1 - P(T < t)$

$$[1 - P(T < t)] = (1 - P(T < 0)) \exp\left(\int_0^t -\lambda_t dt\right)$$

Compte tenu de la condition $P(T < 0) = 0$

$$P(T < t) = 1 - \exp\left(\int_0^t -\lambda_t dt\right)$$

Où $P(T < t)$ est la fonction de répartition de la variable T

On en déduit :

$$f(t) = \frac{dP(T < t)}{dt} = \lambda_t \exp\left(\int_0^t -\lambda_t dt\right)$$

Où $f(t)$ est la densité de probabilité de la variable T pour $T=t$

Alors : $f(t) dt$ représente le défaut entre t et t+dt d'une Corporate « en vie » à l'instant $t=0$.

$$f(t) dt = P(t < X < t + dt) = \lambda_t \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right) dt$$

IX.8 Test de la martingale :

Leroy et Porter (1981) et Shiller (1981) ont proposé un test de l'efficience des marchés qui permet une nouvelle approche à partir du modèle de martingale. Nous reprenons le développement de Leroy et Porter (1981).

Sous l'hypothèse de martingale (efficience des marchés) et en tenant compte des flux f_t , le prix d'un actif s'écrit alors :

$$p_t = \frac{E(p_{t+1} + f_{t+1} / \phi_t)}{1+r} \quad (1)$$

Où : ϕ_t est l'information disponible au temps t et r le taux d'actualisation.

p_t peut alors être réécrit comme :

$$p_t = \frac{p_{t+1} + f_{t+1} - \varepsilon_{t+1}}{1+r} \quad (2)$$

Où : $\varepsilon_{t+1} = p_{t+1} + f_{t+1} - E_t(p_{t+1} + f_{t+1})$

Ce qui devient si nous réécrivons l'équation (2) pour chaque période t+i :

$$\frac{p_{t+i}}{(1+r)^i} = \frac{p_{t+i+1} + f_{t+i+1} - \varepsilon_{t+i+1}}{(1+r)^{i+1}}$$

La sommation pour i allant de 1 à l'infini permet d'obtenir :

$$p_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{t+i}}{(1+r)^i} = p_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Dans un schéma tel que celui-ci, p_t^* est le prix qu'aurait l'actif si les flux futurs étaient connus avec certitude, et p_t est l'espérance conditionnelle de ce prix. De l'équation (1) il vient :

$$Var(p_t^*) = Var(p_t) + Var\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+i}}{(1+r)^i}\right)$$

De la propriété de positivité des variances, il découle :

$$Var(p_t^*) \geq Var(p_t)$$

La borne supérieure dépend uniquement du modèle de génération des flux. Il s'agit alors d'un test dont les résultats s'interprètent sans ambiguïté (LEROY, 1989).

X. DOCUMENTS DE RÉFÉRENCE – BIBLIOGRAPHIE :

Articles :

- Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit - Default Swap Market – Francis A. Longstaff, Sanjay Mithal and Eric Neis, February 2004.
- Modeling Term Structures of Defaultable Bonds – Darel Duffie and Kenneth J. Singleton, April 1999.
- A Theory of the Term Structure of Interest Rates - John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, March 1985.

Documents, livres et thèses:

- Risque de défaut : Une Approche Intensive – David Le Page, 2000.
- Risque de défaut / Risque de crédit – Vivien Brunel et Benoît Roger (cours de l'École Nationale des Ponts et Chaussées)
- Modélisation en risque de crédit. Calibration et discrétisation de modèles financiers - Aurélien Alfonsi, Thèse Juin 2006
- Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient : strong convergence- Berkaoui A., Bossy M. and Diop A. , RR-5637, INRIA, Juillet 2005.
- L'efficiencia bruitée. Une analyse non linéaire du marché français des actions- Hervé ALEXANDRE, thèse juin 2010

Autre références:

- <http://investmentbankerparis.blogspot.com>
- <http://www.lesaaa.fr/clients/jwa/aaa/aaa.../AAA22102009-03.pdf>
- <http://www.investir.fr>