Master Actuariat de Dauphine

Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 16 novembre 2011

Par : Stanislas Ray

Titre: « Optimalité des structures de réassurance »

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires :

Signature :

Entreprise :

Nom :

Signature :

Membres présents du jury du Master Actuariat de Dauphine :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels** (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat :

Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 PARIS Cedex 16

Résumé

Mots-clés : capitaux requis, création de valeur, Iso Value, optimalité, optimisation, reconstitutions, structure de réassurance.

Avec l'introduction de la directive européenne Solvabilité II, la réassurance fait l'objet d'une attention accrue de la part notamment des grands groupes d'assureurs, qui y voient le moyen de réduire leur marge de solvabilité.

La multiplicité des formes de réassurance comme des caractéristiques des portefeuilles à réassurer rend peu évidente la recherche de la solution la plus adaptée.

Ce mémoire a pour vocation de chercher, dans un cadre limité, quels outils peuvent être utilisés afin d'éclairer le choix d'une structure de réassurance, et aux alentours de quels prix il est souhaitable de la négocier.

L'estimation de ces prix implique notamment la résolution de la tarification des traités en excès de sinistre (XS) avec reconstitutions payantes.

L'étude de l'impact de la réassurance sur la marge de solvabilité nécessite quant à elle le développement de méthode d'évaluation des capitaux requis en face des risques de prime et de réserve.

La confrontation des points de vue de l'assureur cédant et du réassureur par le truchement d'un indicateur symétrique (l'Iso Value) offre enfin des perspectives intéressantes de développement à ce mémoire.

Abstract

Keywords: Iso Value, optimality, optimisation, reinstatements, reinsurance structure, required capital, value creation.

With the introduction of the European directive Solvency II, reinsurance is the subject of increased attention from the major insurance groups, which see it as a way to reduce their solvency margin.

Reinsurance's multiplicity of forms as the characteristics of reinsurance portfolios makes the searching of the best solution complicated.

The objective of this document is to show, within a limited framework, what tools can be used to assist the insurer in its choice of reinsurance structure, and around what price it is desirable to negotiate.

The estimation of this price implies in particular the resolution of the pricing of excess of loss treaties (XL) with paying reinstatements.

The study of the impact of reinsurance on the solvency margin required the development of methodologies to estimate the capital required to face both premium and reserve risks.

The comparison of views of the ceding insurer and reinsurer through a symmetric indicator (the Iso Value) finally offers interesting prospects for developing this paper.

Remerciements

Je remercie Diane Dubois pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser mon stage de fin d'étude et proposé ce sujet de mémoire, Simon Blaquière et Sébastien Dirat pour avoir suivi et encadré stage et mémoire, ainsi que de manière générale les membres de l'équipe actuarielle d'AXA Global P&C pour leur accueil et les six mois passés dans une bonne ambiance.

Je remercie également Olivier Wintenberger pour son suivi académique du mémoire, et enfin Simon Bridier, Jonathan Favier, Edouard Guillot et Amaury Jabouley pour leur soutien tant logistique que moral…

Sommaire

Introduction

optimalité n.f. Substantif de « optimal » (néologisme).

Le sujet initial de ce mémoire était posé en ces termes : « optimisation des structures de réassurance ».

L'optimisation est la recherche d'une solution optimale à un problème, autrement dit de la meilleure solution possible. Pour une compagnie d'assurance, la gestion de ses risques implique bien souvent un transfert d'une partie de ceux-ci, par la réassurance. Celle-ci est devenue d'autant plus importante ces dernières années que l'entrée en vigueur de la directive européenne Solvabilité II lui accorde une plus grande place que son prédécesseur, Solvabilité I, dans les facteurs de diminution du montant des capitaux requis pour exercer une activité d'assureur.

L'objectif final de la problématique développée dans ce mémoire est donc de trouver la structure de réassurance la plus adaptée au portefeuille d'un assureur.

Cependant, le raisonnement préalable à la mise en œuvre de cette optimisation a pris une telle ampleur qu'il est vite apparu qu'une étude sur la description des caractéristiques d'une structure de réassurance optimale recelait suffisamment de matière en elle-même pour un mémoire.

C'est ainsi que de la question d'origine : « Quelle est la structure de réassurance optimale ? » nous avons glissé plus modestement vers la question : « qu'est-ce qu'une structure de réassurance optimale ? » et que tout au long de ce mémoire nous discuterons de l' « optimalité » d'une structure de réassurance.

Ce mémoire, divisé en cinq chapitres, présentera dans le premier le cadre général dans lequel nous évoluerons (notions d'assurance et de réassurance). A partir de ce cadre général nous bâtirons le cadre particulier à l'optimisation d'une structure de réassurance dans le deuxième chapitre (critère d'optimisation, contraintes, paramètres).

Nous disposerons alors dans le principe d'un critère permettant de décrire l'optimalité d'une structure de réassurance (la Création de Valeur). Il nous faudra développer des méthodes pour l'évaluer dans chaque situation. La construction de la Création de Valeur fera donc l'objet des troisième et quatrième chapitres : le troisième portera sur l'étude du prix d'un traité de réassurance, le quatrième sur l'adaptation de la Création de Valeur aux portefeuilles des branches d'activités à déroulement long.

La Création de Valeur enfin obtenue, le cinquième et dernier chapitre présentera l'Iso Value, un indicateur de prix fondé sur la Création de Valeur permettant d'optimiser la prime de la structure.

Chapitre I : Présentation du cadre du mémoire

Ce premier chapitre permettra au lecteur de se familiariser avec les notions essentielles qui seront utilisées tout au long du mémoire. Usant d'une approche très générale (notion d'assurance, puis de réassurance) et, nous l'espérons, pédagogique, il sera amené à découvrir les principales formes de fonctionnement de la réassurance.

Des connaissances de base en probabilité et en statistique seront sans doute nécessaires afin d'appréhender la deuxième partie qui développera la notion de « Value-at-Risk ».

Cette dernière trouvera une application immédiate dans la partie suivante puisqu'elle est la mesure de risque essentielle utilisée par la directive européenne Solvabilité II, dont l'entrée en vigueur future aura un impact déterminant sur l'optimalité des structures de réassurance, comme nous le verrons par la suite.

La rédaction de ce mémoire est directement liée aux missions du stage au cours duquel il a été rédigé, ces missions relevant de l'amélioration de l'outil informatique HERMES servant à l'étude des structures de réassurance d'AXA Global P&C. Une présentation de cette entité atypique du groupe AXA et de l'outil HERMES complèteront donc ce premier chapitre.

Nous suggérons de plus au lecteur peu familier du domaine de l'assurance de parcourir le florilège de définitions concises des concepts et formulations utilisées dans ce mémoire contenues dans le lexique page 125 (Annexe I), auquel il pourra se référer avec profit tout au long de sa lecture.

1. Notions d'assurance

Le sujet de ce mémoire porte sur les « structures de réassurance ». Il serait donc impensable de ne pas commencer par définir ce terme, ce qui nécessite au préalable des définitions élémentaires relatives à l'assurance, puis à la réassurance et les différentes formes qu'elle peut recouvrir.

.

1.1. Définitions

risque n.m. Danger, inconvénient possible. Préjudice, sinistre éventuel. (*Petit dictionnaire français,* Larousse éd. 1992)

<u>L'assurance :</u>

Le contrat d'assurance ou police est un contrat aléatoire par lequel l'assureur s'engage envers l'assuré à couvrir financièrement pour une période, moyennant le paiement d'une somme dite « prime d'assurance », la réalisation de certains risques déterminés par le contrat. La réalisation d'un risque est appelée « sinistre », un ensemble des contrats détenu par un assureur est un « portefeuille de contrats».

L'assurance est donc le transfert d'un risque de l'assuré à l'assureur. Celui-ci collecte dans son portefeuille un ensemble de risques, dont il espère que seule une part limitée se réalisera. Les primes collectées auprès de chacun des assurés, sinistré ou non, doivent alors permettre de rembourser ceux qui l'ont été : on parle de « mutualisation » des risques

Le système de l'assurance revient donc à faire payer à un coût supportable par tous les risques pouvant être subis par chacun.

Historiquement, nous pouvons citer le contrat d'assurance maritime, où plusieurs armateurs s'associent afin de couvrir les pertes de ceux dont le navire sombre, ou encore la tontine, où chaque participant d'un même âge apporte un capital mis en commun, puis partagé entre ceux ayant survécu jusqu'à un âge prédéfini, leur assurant ainsi un capital pour leurs vieux jours.

De l'assurance à la réassurance :

Toute entreprise humaine comporte sa part de risque, risque qui avec la complexité ou l'ampleur de l'entreprise pourrait devenir insoutenable pour l'entrepreneur s'il devait compter sur sa seule solidité économique ou financière. Aussi le développement du marché de l'assurance, en transférant une partie de ces risques des entrepreneurs aux assureurs, a-t-il accompagné, favorisé et ainsi dynamisé les grandes phases d'expansion économique de notre monde (commerce maritime, révolutions industrielles), ce qui n'a pas échappé à Henry Ford : *« New York n'est pas la création des hommes, mais celle des assureurs »*.

Une compagnie d'assurance est une entreprise, sujette de ce fait à certains risques. C'est donc naturellement qu'avec le développement de son portefeuille, et donc de son risque, elle en viendra elle-même à s'assurer.

La révolution industrielle en Allemagne au XIX$^{\text{ème}}$ siècle a permis la création d'importants complexes industriels. L'escalade des montants assurés ainsi que la vulnérabilité de ces complexes, notamment face aux risques d'incendies, les rendirent trop risqués pour un assureur seul. Les sociétés d'assurances cherchèrent donc elles-mêmes à s'assurer, par le biais de contrats dits « de réassurance ».

La réassurance :

Le contrat de réassurance est un contrat aléatoire par lequel le réassureur s'engage envers l'assureur contractant, nommé cédante, à couvrir financièrement pour une période, moyennant le paiement d'une somme d'argent dite « prime de réassurance», tout ou partie des montants des sinistres relatifs à tout ou une partie des polices du portefeuille de l'assureur, selon les termes et modalités déterminés par le contrat.

Le « périmètre du contrat » recouvre l'ensemble des polices de la cédante pour lesquelles le contrat de réassurance joue.

Les sommes dues à la cédante par le réassureur au titre du contrat sont appelées « récupérations » ou « recouvrements ».

Le contrat de réassurance est un contrat d'assurance particulier liant un assureur (la cédante) à un autre (le réassureur). Légalement parlant, tout assureur peut faire de la réassurance s'il remplit les conditions de capitaux propres nécessaires. Certains n'exercent que cette activité. Parmi les réassureurs les plus important nous pouvons citer Swiss Re, Munich Re, Hannover Re, Berkshire Hathaway ou encore SCOR (Société Commerciale de Réassurance, principal réassureur français).

Au contraire d'un contrat d'assurance classique qui lierait un particulier à un assureur (contrat d’adhésion) et nécessite une protection juridique particulière de l’assuré, le contrat de réassurance est beaucoup plus libre dans ses formes juridiques. Il en découle d’une part une dimension internationale du marché de la réassurance offrant une diversification des risques qui fait défaut aux assureurs limités par les législations nationales, et d’autre part l’existence d’une grande variété de contrats qui rendra d’autant plus délicate toute étude de modélisation de traités de réassurance, dont le champ d’application restera limité à la similarité des contrats rencontrés avec le modèle proposé.

Notre étude se limitera au mode de réassurance dit « obligatoire ». En réassurance obligatoire, le contrat de réassurance est nommé « traité ». Il couvre l’ensemble du portefeuille de la cédante relatif à une branche d’activité (par exemple le portefeuille « incendie »). Les polices contenues dans ce portefeuille ne sont donc pas identifiées, et ni la cédante, ni le réassureur ne peuvent exiger d’en exclure une partie, d’où le terme « obligatoire ».

Il existe différentes formes de réassurance obligatoire. Nous en distinguerons deux : la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle.

La réassurance est dite « proportionnelle » lorsque le réassureur participe de manière proportionnelle à l’activité de la cédante pour le périmètre du contrat de réassurance. Cela signifie qu’en échange d’un certain pourcentage des primes il paiera un certain pourcentage des sinistres du périmètre du contrat, ces pourcentages étant définis contractuellement.

Par opposition, la réassurance non proportionnelle recouvre l’ensemble des formes de réassurance qui ne correspondent pas à ce principe.

La suite de cette première partie s’attachera à détailler plus en détail les formes de réassurance principales.

1.2. Traités Proportionnels – Traités QP

Principe :

Parmi les formes de réassurance proportionnelles la plus usitée est le traité en « quote-part », (QP) ou en anglais *quota share (QS)*. Le principe est le suivant :

Le réassureur perçoit un certain pourcentage des primes collectées par la cédante sur le portefeuille réassuré. En échange, le réassureur paiera le même pourcentage sur le montant cumulé des sinistres touchant ce portefeuille.

*Exemple : Pour l'année n, la cédante A a collecté 100M€ de primes sur les polices couvrant le risque d'incendie. Elle contracte avec le réassureur R un traité en quote-part à 30%. Elle lui cède donc 30%*100M = 30M€ de primes.*
*La sinistralité de l'année n pour la branche incendie de A s'est élevée à 70M€. R doit donc à A 30%*70M = 21M€ au titre du traité. R a réalisé sur cette opération un résultat technique de : 30 – 21 = 9M€.*

Commission de réassurance :

En pratique est intégrée à ce principe la notion de partage des coûts d'acquisition et de gestion. En effet la cédante a, à son passif, un certain nombre de charges : pour collecter les primes (publicité, réseau de distribution, …), mais aussi pour assurer le suivi des sinistres (coût de gestion des sinistres).
Le réassureur paie donc à la cédante une commission destinée à le faire participer aux frais d'acquisition des primes et de gestion des sinistres. Le montant de cette commission est déterminé en général selon les estimations faites respectivement par la Cédante et le Réassureur autour du ratio de perte attendu (*Loss ratio cible*) du portefeuille réassuré, et s'exprime alors en pourcentage des primes cédées.

Exemple : en reprenant l'exemple ci –dessus le ratio de perte vaut : 70/100 = 70M€. Le Réassureur souhaite garder une marge représentant 10% des primes cédées. La commission vaut alors : 100% - 70% (Loss Ratio) – 10% (marge bénéficiaire du réassureur) = 20%.
*Si nous reprenons l'application numérique précédente, la commission vaut : 20%*30M = 6M€. La sinistralité n'ayant pas changée, le résultat du réassureur est de : 30 – 6 – 21 = 3M€ ce qui représente bien 10% des primes cédées.*

Le montant de la commission fait donc l'objet de l'essentiel des négociations entre réassureur et cédante autour d'un traité en quote-part, car derrière elle se profile la notion de marge du réassureur : plus celle-ci sera faible, plus la marge bénéficiaire du réassureur sera grande.
Dans l'exemple ci-dessus, le Réassureur peut par exemple réclamer une baisse de la commission de 20% à 15%, arguant que ses prévisions concernant le ratio de perte semblent plus proches de 75% que de 70%.

Les avantages de ce traité pour la Cédante sont le partage des frais avec le réassureur, l'apport de son expertise lors du lancement d'un nouveau produit d'assurance, et une sécurité renforcée en cas d'incertitude quant à la profitabilité d'un portefeuille, en lissant le résultat de la cédante ce qui atténue ses pertes comme ses gains.

Son inconvénient principal de ce traité est qu'il oblige la cédante à partager ses primes sur l'intégralité des risques : la part la plus extrême qui serait insoutenable pour la cédante, mais aussi la part « attritionnelle » qu'elle est capable de subir et pour laquelle il semble inutile de céder des primes.

D'autres formes de traités proportionnels ont été développées afin de pallier cet inconvénient, notamment le traité en excédent de pleins (XP) ou *surplus share*. Ces traités adaptent le pourcentage de quote-part en fonction de la ligne de montant assurée sur chaque police. Ils nécessitent néanmoins une gestion police par police qui s'avère en pratique lourde.

Les seuls traités proportionnels considérés par la suite seront donc les traités en quote-part.

1.3. Traités Non Proportionnels – Traités XS

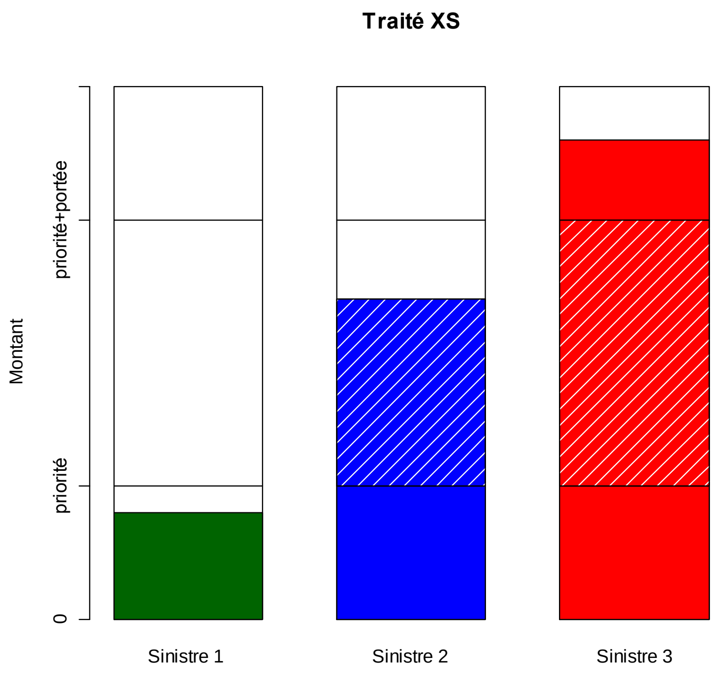
Principe :

Le traité en « excédent de sinistre» (XS), ou en anglais *excess of loss (XL)* est le plus usité sur le marché de la réassurance. Le principe, ici pour un traité XS dit « par sinistre », est le suivant :

La cédante et le réassureur conviennent d'une prime de réassurance, exprimée généralement en pourcentage de GNPI. Pour l'ensemble du portefeuille est défini un seuil d'intervention appelé « priorité », et un montant maximal appelé « portée ».

Pour chaque sinistre survenu dans le périmètre du traité le réassureur remboursera le montant excédant la priorité à concurrence de la portée.

Si a est la priorité et m la portée d'un traité XS il est commun de noter brièvement le traité « m xs a » (portée en excès de la priorité). a et m sont en général exprimés en million d'unité monétaire (le plus souvent euro ou dollar). m xs a désigne en réalité l'intervalle [a,a+m] et est appelé « tranche » ou « ligne » de réassurance.



Fonctionnement d'un traité XS - (G.I.1.2)

Dans ce schéma, le montant pris en charge par le réassureur sur chaque sinistre est hachuré. Dans le cas du premier sinistre, le montant total est insuffisant pour atteindre la tranche réassurée aussi n'y a-t-il aucune prise en charge par le réassureur. Dans le cas du deuxième sinistre la part excédent la priorité est prise en charge par le réassureur. Pour le troisième sinistre, le montant est si élevé qu'il transperce la tranche, qui est entièrement prise en charge par le réassureur. L'excédent au-dessus de a+m, en revanche, reste toujours à charge de la cédante.

Exemple : la cédante A et le réassureur R ont signé un traité 10xs5 pour l'année n. Pour *une sinistralité donnée la répartition des charges entre réassureur et cédant s'effectue comme suit :*

Sinistre	Montant (M€)	A charge du réassureur (M€)	A charge de la cédante (M€)
1	9	4	5
2	20	10	10
3	13	8	5
4	14	9	5
Agrégé	**56**	**31**	**25**

Tableau de répartition des charges de sinistres pour un traité 10xs5 – (T.I.1.1)

Le réassureur prend donc à sa charge la part de chaque sinistre comprise entre 5M€ et 5+10=15M€.

La répartition des charges n'est donc plus proportionnelle et dépend du montant de chaque sinistre. Le calcul de la prime de réassurance ne découle plus de l'assiette de primes du portefeuille et nécessite de faire appel à des algorithmes ou à des simulations numériques.

Caractéristiques des traités XS :

Il est possible pour le réassureur de limiter son engagement sur une tranche en établissant contractuellement une franchise globale (AAD : *Annual Aggregate Deductible*) et une limite globale (AAL : *Annual Aggregate Limit*).

Exemple : ***en reprenant le tableau de sinistralité ci-dessus****, avec un AAD de 10M€ et un AAL de 20M€ on obtient le tableau suivant :*

Sinistre	Montant (M€)	10xs5 (M€)	Montant cumulé 10xs5 (M€)	Réassureur (M€)
1	9	4	4	0
2	20	10	14	4
3	13	8	22	12
4	14	9	**31**	**20**

Paiements cumulés du réassureur sur une tranche 10xs5, AAD=10, AAL=20 – (T.I.1.3)

L'AAD et l'AAL ont tous les deux joué (retrait de 10M€ et plafonnement à 20M€), le réassureur doit donc 20M€ à la cédante au titre du traité, et non plus 31.

Programme de reconstitutions :

Il est d'usage que le montant d'AAL soit énoncé en nombre de portées (dans l'exemple ci-dessus, AAL = 20 = 2*10 soit un AAL de deux portées). La prime associée à ce type de contrat peut alors s'exprimer sous deux formes :

- soit elle est payée au fur et à mesure de la consommation de la capacité : la survenance d'un sinistre touchant la ligne réassurée entraine alors la « reconstitution » de la portée par le paiement d'une nouvelle prime, dite prime de reconstitution.
- soit elle est payée de manière unique pour l'ensemble de la capacité : on parle alors de « prime avec reconstitutions gratuites », quoique le concept de gratuité semble ici vide de sens puisque l'ensemble de la capacité est effectivement achetée, non offerte : nous parlerons par la suite plutôt de « prime avec reconstitutions payées d'avance ».

Le montant des primes de reconstitutions est fixé à l'avance, s'exprime en pourcentage de la prime initiale et est payé *pro rata capita* (proportionnellement au montant de portée consommé).

Exemple : Ainsi on suppose le même traité 10xs5 avec deux reconstitutions : une à 50% et une à 100% (Ce qu'il est d'usage de noter : « 1@50,1@100 »). P est la prime versée initialement (qui correspond donc à la première portée).

*L'AAD est supposé nul. L'AAL vaut deux plus une fois la portée, soit : 3*10 = 30. Etant donnée un scénario de sinistralité, nous obtenons alors les flux suivants :*

Sinistre	Montant du sinistre	Montant touchant la tranche	Capacité du réassureur consommée	Capacité potentielle du réassureur restante	Prime de reconstitution
				10+10+10	
1	9	4	4+0+0	6+10+10	(4/10)*50%*P
2	20	10	6+4+0	0+6+10	(6/10)*50%*P + (4/10)*100%*P
3	13	8	0+6+2	0+0+8	(6/10)*100%*P+0
4	14	9	0+0+8	0+0+0	0

Tableau de calcul des primes de reconstitutions – (T.I.1.4)

Le premier sinistre consomme 4/10 de la première portée qui sont « reconstitués » par le paiement d'un supplément de prime (dernière colonne) au prix convenu pour la première reconstitution, soit 50% de la prime initiale.

Le second consomme l'intégralité d'une portée : il épuise le reste de la première portée, soit 6/10, et 4/10 de la seconde : il est donc reconstitué pour 6/10 au prix de la première reconstitution et pour 4/10 au prix de la deuxième.

Le troisième sinistre épuise les 6/10 restant de la seconde portée et entame la dernière pour 2/10 : comme il n'y a que deux reconstitutions prévues au total la reconstitution après ce sinistre s'arrête aux 6/10 de prime, payés à 100%. Il ne reste donc plus que 8/10 de portée réassurée.

Enfin le quatrième et dernier sinistre épuise ces 8/10 restants : il y a donc 1/10 du sinistre qui reste à la charge de l'assureur.

Autre visualisation de la reconstitution, où C1 et C2 sont les pourcentages de reconstitution de la prime initiale respectivement pour la première et la deuxième reconstitution :

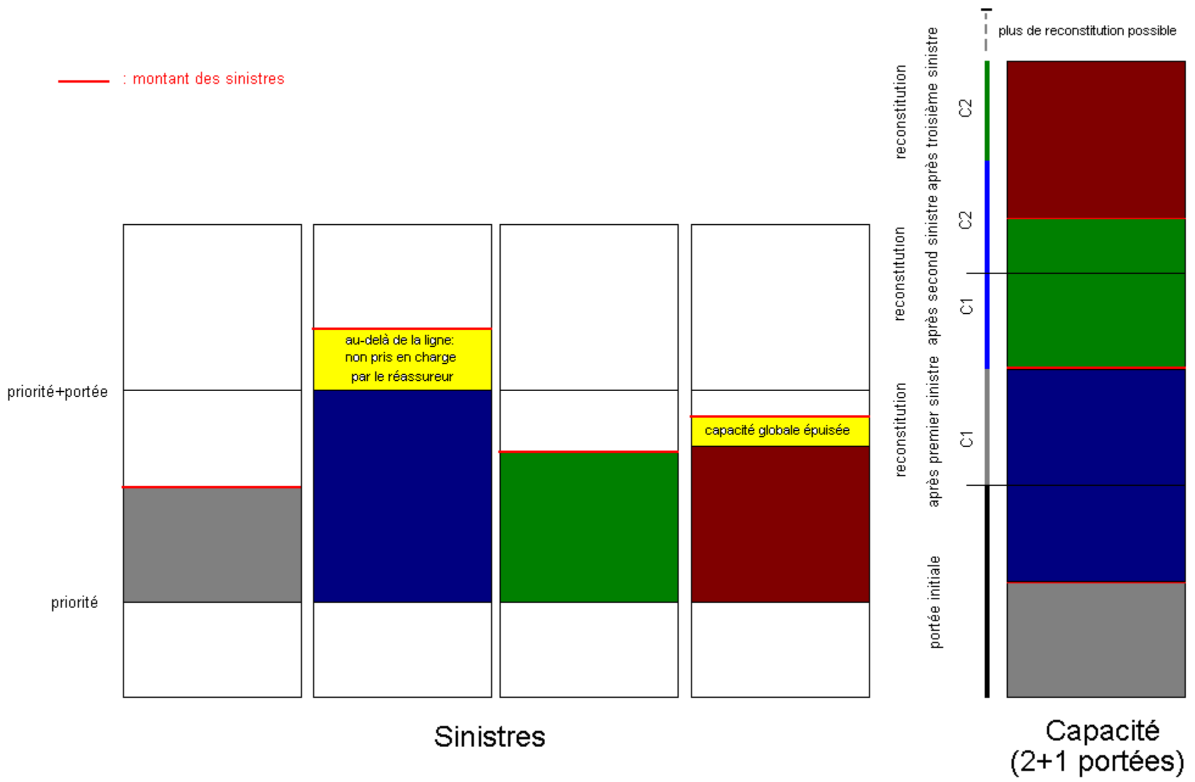


Schéma de reconstitutions des portées – (G.I.1.3)

Un programme « k@0 » correspond à k reconstitutions payées d'avance.
On parle de programme « avec reconstitutions illimitées » lorsqu'il n'y a pas de limite globale (AAL est infini).

Le « cas simple » d'un traité XS exposé au début de cette partie peut être vu comme un traité avec reconstitutions gratuites et illimitées et un AAD nul.
Dans la pratique ce cas se rencontre peu fréquemment car la plupart des réassureurs rechignent à s'exposer à des sinistralités potentiellement infinies, en tous cas non contrôlées.

Les traités XS avec reconstitutions constituant la structure de réassurance la plus courante, son étude est incontournable dans notre réflexion sur l'optimalité des structures de réassurance.
Il est important de noter que dans le cadre des reconstitutions payantes, la prime dépend de la sinistralité : elle est donc aléatoire. Ceci aura un impact fort sur la plupart des raisonnements présentés au cours de ce mémoire aussi une formalisation spécifique au cadre des reconstitutions sera-t-elle développée ultérieurement.

<u>Traités SL</u> :

L'autre forme principale de traités non proportionnels est l'excédent de perte (ou *stop-loss, SL*). Un traité en excédent de perte peut s'exprimer, soit en montant, soit plus souvent en pourcentage de ratio de perte (*loss ratio*).
Le réassureur intervient lorsque la cédante est en perte jusqu'à un certain niveau. Pour un seuil d'intervention P_{min} jusqu'à une portée P, un traité en excédent de perte sera noté, sur le même modèle que l'XS : « P SL P_{min} ».

Exemple : La cédante A et le réassureur R ont signé pour l'année n un traité en excédent de perte 20% SL 110% sur un portefeuille de 100M€ d'assiette de primes.

*Si la sinistralité cumulée dépasse les 110M€ (le ratio de perte valant alors plus de 110%) le réassureur remboursera à la cédante l'excédent des 110M€ jusqu'à concurrence de : 20%*100 = 20M€.*

Le traité peut également se noter en montant : « 20 SL 110 ».

Ce type de traité permet à la cédante de limiter efficacement ses pertes. Il est néanmoins assez rare car coûtant cher.

Ces traités agissent sur le montant cumulé des sinistres d'un portefeuille comme un traité XS sur un sinistre particulier. Leur étude peut se déduire de celle des traités XS par agrégation générale des sinistres d'une année.

1.4. Programme et structure de réassurance

Programme de réassurance :

Un ensemble de traités du même type relatifs à un même portefeuille constitue un programme de réassurance.

La cédante contracte en général plusieurs traités XS couvrant des tranches de réassurance (le plus souvent consécutives, mais pas forcément). Cet ensemble de traités est le programme XS du portefeuille de la cédante.

Exemple : La cédante souscrit au programme de réassurance suivant :

Tranches (M€)	Reconstitutions	AAD (M€)	AAL (M€)
5 xs 5	2@100	10	Illimité
20 xs 10	2@100	0	Illimité
20 xs 30	1@100	0	Illimité
20 xs 50	1@100	0	Illimité

Exemple de programme de réassurance – (T.I.1.5)

En pratique plusieurs réassureurs se partagent un même programme, voire une même tranche divisée en parts.

Exemple : en reprenant la tranche 5xs5 définie ci-dessus, la répartition suivante entre réassureurs est imaginée :

Tranche	***5 xs 5***
Réassureur	**Part**
Swiss Re	55,00%
Hannover Re	15,00%
XL Europe Re	12,00%
SCOR	10,00%
Secura Re	8,00%

Placements de la tranche 5xs5 auprès des réassureurs – (T.I.1.6)

Un réassureur principal, prenant une part plus importante que les autres, est nommé « apériteur ». (Dans notre exemple il s'agira de Swiss Re). Il est en général le principal interlocuteur de la cédante, les autres réassureurs suivant les décisions prises entre l'apériteur et la cédante.

La pluralité des réassureurs au sein d'un programme contribue à une meilleure dilution des risques de la cédante et diminue le risque de défaut de paiement des récupérations.

Dans ce mémoire le réassureur sera supposé unique et son identité ne sera jamais discutée. Il est important toutefois de noter que le choix d'un réassureur pour un traité dépend de nombreux paramètres tels que réputation quant à la solidité financière du réassureur (les notations Standard & Poor's, Moody's ou autres, constituent un indicateur important à cet égard), relations commerciales passées entre cédante et réassureur, expertise et savoir-faire du réassureur dans la branche d'activité du portefeuille,…

Structure de réassurance :

La structure de réassurance d'un portefeuille est constituée de l'ensemble des contrats de réassurance qui y sont liés : traités, facultatives, formes alternatives de réassurance.

Nous considèrerons dans ce mémoire qu'une structure de réassurance est plus simplement l'ensemble des programmes relatifs à un même portefeuille.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, supposons que la cédante a, au préalable, souscrit à un traité QS(50%). Ce traité représente le programme QS de la cédante. Le programme XS s'appliquant à la rétention du programme QS.

*Ainsi, si un sinistre d'un montant de 72M€ survient, il sera d'abord pris en charge par le traité QS, ce qui transférera : 72*0.5 = 36M€ au réassureur QS, laissant un montant de : 72*(1-0.5) = 36M€, auquel nous appliquons le programme XS : En supposant que les reconstitutions ne soient pas épuisées, seuls les 5 premiers millions restent à la charge de la cédante, le reste étant pris en charge par le traité.*

Par l'application du seul programme XS, 50 – 5 = 45M€ seulement auraient été pris en charge par la réassurance, laissant : 72 – 45 = 27M€ à charge de la cédante.

Une structure avec un programme XS venant en complément d'un programme QS est particulièrement protectrice pour la cédante. Elle est également plus chère, donc plus rare.

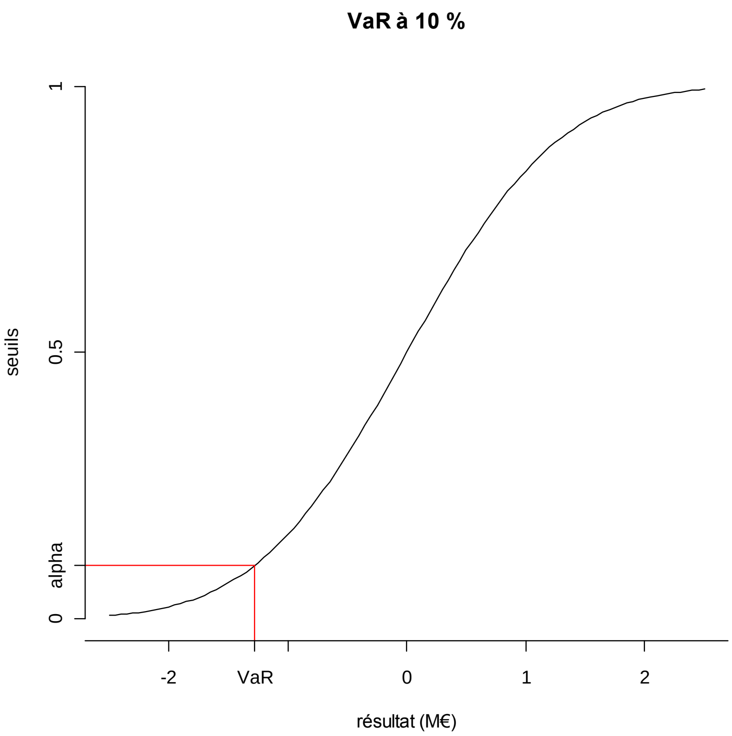
2. Présentation de la Value-at-Risk (VaR)

Si les notions d'espérance (moyenne) et de variance ou d'écart-type dont il est fait un usage abondant dans ce mémoire nous semblent inutiles à préciser, il n'en va pas de même pour celle de « Value-at-Risk », mesure de risque moins répandue que la variance, mais appelée à devenir incontournable dans les mathématiques appliquées à l'assurance avec la nouvelle directive européenne Solvabilité II.

D'un point de vue économique, la Value-at-Risk (notée pour la suite du mémoire VaR) d'une activité représente la perte potentielle maximale que peut subir un agent sur cette activité compte tenu d'un horizon temporel et d'un intervalle de confiance.

Supposons dans un premier temps que X modélise le résultat d'un assureur sur un portefeuille. L'assureur est dans une position d'autant plus délicate que son résultat est mauvais : le risque est donc que X soit très faible, et on va chercher à mesurer la VaR à un petit seuil, par exemple 10%.

Supposons que X suit une loi normale centrée réduite. F_X est alors bijective de R dans [0,1] et on obtient la $VaR_{10\%}(X)$ par lecture graphique :



Lecture graphique d'une VaR – (G.I.2.1)

Dans cet exemple la $VaR_{10\%}$ est d'environ -1.28M€, ce qui signifie qu'à un seuil de probabilité de 10% et à un horizon d'un an, le pire résultat observable sur le portefeuille est de 1.28M€. Muni de ce renseignement, on pourra chercher à se couvrir contre une telle perte, par exemple en ajustant les fonds propres afin d'atteindre ce montant.

Mathématiquement parlant il s'agit du quantile de la loi associée au résultat pris à l'intervalle de confiance fixé, soit :

$$VaR_{\alpha}(X) = F_X^{-1}(\alpha) \quad \text{(I.2.3)}$$

Cette première définition de la VaR n'est valable que si F_X est inversible. Dans la pratique ce n'est pas toujours le cas aussi adopterons-nous la définition plus générale suivante, assurant l'existence et l'unicité de la VaR :

Relativement à une variable aléatoire X, le risque est dit « croissant » si l'opérateur considère comme d'autant plus défavorable la survenance d'une réalisation de X que sa valeur est élevée.

A contrario, le risque est dit « décroissant » si l'opérateur considère comme d'autant plus défavorable la survenance d'une réalisation de X que sa valeur est faible.

Par exemple, au résultat est associé un risque décroissant tandis qu'à la sinistralité est associée un risque croissant.

Alors, selon que X est choisie à risque croissant ou décroissant, $VaR_\alpha(X)$ vaut :

$$\begin{cases} VaR_\alpha^{cr}(X) = \sup\{x \in \Re / F_X(x) \leq \alpha\} \\ VaR_\alpha^{décr}(X) = \inf\{x \in \Re / F_X(x) \geq \alpha\} \end{cases} \quad \text{(I.2.4)}$$

La plupart du temps X sera à risque décroissant (modélisation du résultat) aussi utiliserons-nous le plus souvent la formule :

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \Re / F_X(x) \geq \alpha\}.$$

La VaR dispose de quelques propriétés dont les plus utiles seront citées au fur et à mesure de ce mémoire. Elle présente également des défauts, comparée notamment à l'écart-type. La plus importante est, pour deux variables aléatoires X et Y quelconques, l'absence de relation en général entre VaR(X+Y) et le couple (VaR(X) ; VaR(Y)), sauf dans un cas particulier de comonotonie qui sera développé au chapitre III.

Elle reste néanmoins indispensable pour toute gestion réglementaire du risque en assurance, comme la partie suivante va le montrer.

3. Un mot sur Solvabilité II

Les conditions d'accès au marché de l'assurance sont limitées dans chaque pays par une règlementation, afin de protéger les assurés contre le risque d'insolvabilité des assureurs, c'est-à-dire leur incapacité à rembourser les sinistres couverts pour cause d'insuffisance de fonds.

Chaque assureur doit donc avoir à sa disposition un montant règlementaire minimum en fonds propres appelé « marge de solvabilité » pour exercer son activité. Ce montant est censé lui permettre de survivre à un pic violent de sinistralité, ou encore à une crise financière majeure, soit de manière générale à un évènement néfaste de grande ampleur.

Le calcul de cette marge de solvabilité est formulé et appliqué depuis les années 1970, et défini au niveau de l'Union Européenne par une directive nommée « Solvabilité I».

Le mode de calcul défini par cette directive présente des faiblesses (calcul insuffisamment différencié selon les typologies de risque, prise en compte limitée de la réassurance) qui ont conduit au début des années 2000 à l'élaboration d'une nouvelle directive : « Solvabilité II ».

Cette directive initialement prévue pour 2012 entrera en vigueur, sauf nouveau report, au premier janvier 2014. L'objectif du calcul de la marge de solvabilité qu'elle définit est de couvrir un assureur contre un risque bicentenaire à l'horizon un an.

Nous pouvons grossièrement schématiser ceci en considérant que le résultat d'un assureur contient l'ensemble de son risque.

Nommons R le résultat réalisé par un assureur sur une année. L'assureur doit alors disposer de suffisamment de fonds pour résister à son pire résultat constatable sur une période de 200 ans, c'est-à-dire au pire résultat de fréquence : 1/200 = 0.5%, soit à l'évènement:

$$R = VaR_{0.5\%}(R)$$

La marge de solvabilité requise (*Solvency Capital Requirement, SCR*) définie par Solvabilité II est dans le principe constituée soit simplement par la le pire résulta attendu sur 200 ans :

$$SCR = -VaR_{0.5\%}(R) \quad (I.3.1)$$

Soit par la différence entre le résultat attendu (E(R), résultat moyen) et le pire résultat sur 200 ans :

$$SCR = E[R] - VaR_{0.5\%}(R) \quad (I.3.2)$$

Dans le premier cas, le choc bicentenaire est mis en face de la ruine (résultat nul), dans le second en face de la situation « normale » (résultat moyen). Nous utiliserons dans ce mémoire la seconde vision, la raison étant qu'il est possible d'attendre un résultat nul, voire négatif en moyenne, dans le cas d'une mauvaise année, sans pour autant tomber dans la ruine (possibilité de financement par la dette).

La problématique revient donc à définir les composantes du risque d'un assureur. Dans la pratique, l'agrégation de multiples activités (souscription, gestion des réserves, gestion de l'actif,…) comportant chacune leurs risques spécifiques (risque de sous-tarification, de chute du rendement des actifs,…) conduit à une cartographie des risques auxquels on associe un capital requis associé. Ces capitaux sont ensuite agrégés pour former le SCR global de l'assureur.

La manière dont est calculé chacun des capitaux puis celle avec laquelle ils sont agrégés entre eux sont définies par une formule standard. Toutefois, la directive laisse la possibilité aux assureurs qui le désirent (principalement les grands groupes internationaux aux profils atypiques) de produire un modèle interne de calcul de la marge de solvabilité en le justifiant de sorte à le faire valider par une autorité de contrôle.

L'une des préoccupations principales des assureurs est le financement de ce capital : partie des fonds propres, il est apporté par des actionnaires qui en attendent une rémunération, mais ne peut être investi que sur des actifs peu risqué, donc de rendement insuffisant à couvrir les exigences des actionnaires.

La différence entre taux de rémunération de l'actionnaire et taux de rendement du capital définit le taux du coût du capital de la cédante (*spread*).

Ce taux multiplié par le SCR constitue le coût d'acquisition de sa marge de solvabilité pour l'assureur (*Market Value Margin : MVM*)

Les formules de capitaux requis sont fondées sur des quantiles et des moments de lois d'aléas. Elles permettent donc, en étudiant la manière avec laquelle une structure de réassurance affecte les lois des risques d'une cédante (notamment sa sinistralité), d'estimer son impact sur la marge de solvabilité (SCR) et donc sur son coût (MVM).

4. Environnement

Ce mémoire comprenant une part opérationnelle il a semblé nécessaire de présenter le cadre dans lequel il a été réalisé afin de mieux comprendre l'impact des applications qui y sont présentées.

4.1. AXA Global P&C

AXA est l'un des plus grands groupe mondiaux d'assurance, avec 93 millions de clients pour 96 milliards d'euros de chiffre d'affaire et un résultat opérationnel annuel approchant les 4 milliards d'euros en 2010.

Les sous-branches d'activité IARD (*property*) et responsabilité civile (*casualty*) représentent un tiers du chiffre d'affaires du groupe et sont composée de nombreuses entités réparties sur les cinq continents.

Souhaitant profiter de sa stature de groupe international, AXA a créé fin 2010 une nouvelle entité, AXA Global P&C, ayant pour but de piloter les activités *Property* et *Casualty* de l'ensemble du groupe, la référence à une entité unique devant permettre des synergies et une expertise concernant les méthodes de travail, les outils de développement ou encore un meilleur partage de l'information.

Au sein de cette entité le département réassurance est chargé de recueillir les besoins en réassurance des entités du groupe et de les placer auprès des réassureurs.

Un outil de tarification et d'évaluation des performances d'une structure de réassurance développé au sein de cette entité a donc vocation à être diffusé auprès de la branche *Property & Casualty* des entités du groupe AXA.

4.2. Le programme HERMES

Le département réassurance d'AXA Global P&C dispose d'un outil de modélisation et de comparaison de structures de réassurances utilisant comme plate-forme le logiciel HARP (logiciel développé à partir du logiciel de programmation gratuit R).

Cet outil procède par méthode de Monte Carlo, en simulant un grand nombre de scénarios de sinistralité.

Un programme de réassurance s'applique à un portefeuille donné. La sinistralité générée par ce portefeuille est modélisée au préalable, par exemple par l'équipe actuarielle du département réassurance par le biais d'un ou plusieurs générateurs de sinistralité (modélisant éventuellement plusieurs sous-portefeuilles, par exemple dans le cas d'un traité régional couvrant plusieurs pays), séparant à chaque fois attritionnel et atypique.

- L'atypique est généré sinistre par sinistre selon un modèle fréquence/coût classique, en estimant en général d'après les historiques de sinistres les paramètres des lois de fréquence et d'intensité, avec un seuil minimum et/ou un plafond maximum variant d'un générateur à l'autre.
- L'attritionnel, pour chaque générateur, est généré à partir d'un seul montant agrégé par le tirage d'une loi log-normale proportionnelle à l'assiette de primes.

Chaque générateur est calibré selon une devise précisée.

Exemple : la sinistralité atypique d'un portefeuille sera modélisée par un générateur ayant pour loi de fréquence une Poisson de paramètre 2.6 et pour loi de fréquence une loi log-normale de moyenne 1.3M€ et d'écart-type 1.6M€ au-dessus d'un seuil de 5M€.

Alors suite à un tirage la simulation de sinistralité atypique suivante peut être constatée:

Nombre de sinistres générés	3
Sinistre	Montant (M€)
1	6,39
2	7,78
3	6,08

Tirage de la sinistralité atypique du portefeuille défini – (T.I.4.1)

L'utilisateur peut sélectionner la devise dans laquelle il souhaite modéliser son programme de réassurance, ainsi que la structure du programme parmi les trois choix suivants, qui représentent l'ensemble des structures de réassurance les plus courantes :

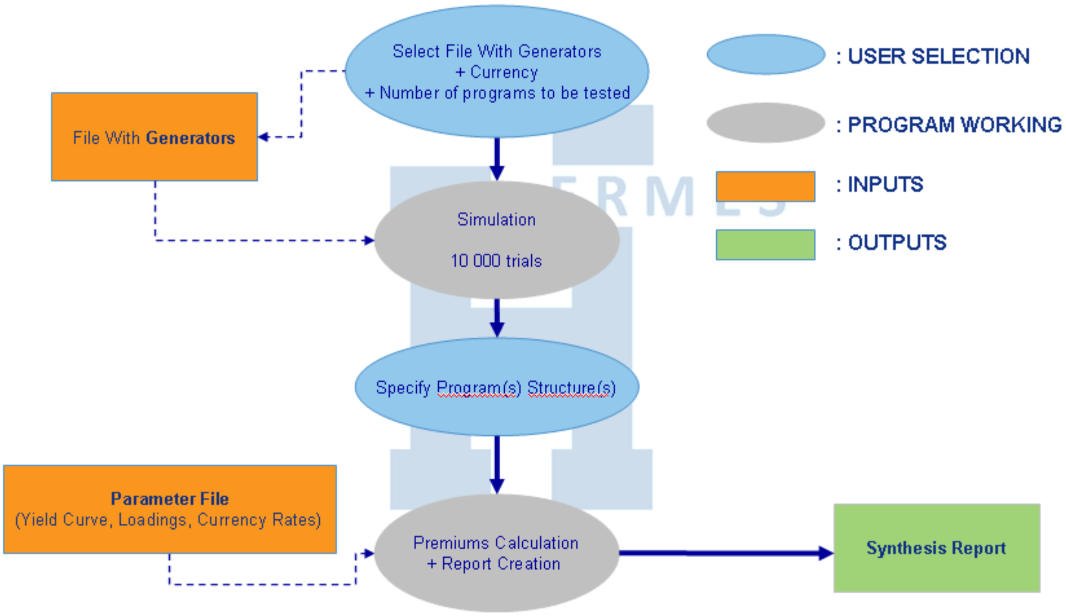
- Traités XS
- Traités QP
- Traités XS sur rétention de traités QP

Les caractéristiques propres à chaque traité XS (portée, priorité, AAD, AAL, programme de reconstitutions) et QP (pourcentage cédé, pourcentage de la commission) sont définies, éventuellement pour chaque générateur (dans le cas où par exemple une tranche du programme ne s'appliquerait qu'à un sous-portefeuille et pas aux autres, ou si le pourcentage cédé varie selon les sous-portefeuilles).

Un nombre de N=10.000 simulations de sinistralité est effectué pour chaque générateur modélisant le portefeuille réassuré et converti dans la devise du traité. Pour chaque simulation de sinistralité le programme de réassurance est appliqué, donnant ainsi la situation nette de réassurance correspondante. Il est alors possible de calculer les indicateurs souhaités afin d'étudier l'impact du programme sur la situation de la cédante.

Ces indicateurs sont résumés et placés dans un rapport synthétique sous format *pdf* généré automatiquement.

L'architecture du programme HERMES peut donc être résumée comme suit :



Architecture du programme HERMES (source HERMES User Guide) – (G.I.4.1)

C'est sur le choix et le mode de calcul des indicateurs calculés par cet outil que repose ce mémoire.

Munis des notions que nous venons d'exposer, nous allons pouvoir dans le deuxième chapitre chercher des réponses à la problématique de ce mémoire, en essayant de mettre en forme de cadre d'optimisation d'une structure de réassurance.

Chapitre II : Caractérisation de l'optimalité d'une structure de réassurance

Ayant présenté le cadre de notre étude, et notamment développé le terme « structure de réassurance », nous allons maintenant passer à la seconde partie de la problématique : l' « optimalité ».

Les problématiques d'optimisation sont nombreuses, variées et, pour ainsi dire, permanentes dans la vie pratique : quel est le meilleur trajet pour aller du domicile au lieu de travail? Comment répartir au mieux les bagages dans une voiture au moment du départ en vacances? Ou à un autre niveau : comment améliorer le processus de production d'une usine? Où faire passer un nouvel axe autoroutier?

L'élaboration d'un processus généralisé pour la résolution de ces problématiques si fréquentes semble donc naturelle.

Ce processus consiste à définir d'une part les critères d'optimisation quantitatifs, devant être maximisés ou minimisés selon le choix du critère, et d'autre part l'espace des solutions admissibles du problème, cet espace étant souvent réduit par un certain nombre de contraintes. La résolution de l'optimisation se fait ensuite par la recherche des extremums sur ces critères dans l'espace des solutions admissibles.

Afin d'obtenir une application opérationnelle pertinente, le choix des critères sélectionnés doit refléter de manière la plus complète possible les attentes d'une cédante vis-à-vis de la réassurance. Ces attentes seront définies dans une première partie.

Nous exposerons ensuite les critères sélectionnés pour représenter ces attentes.

La définition de l'ensemble des structures de réassurances admissibles, d'une part par une présentation des contraintes auxquelles elles peuvent être soumises, d'autre part par les paramètres de variation de ces structures achèvera enfin la formalisation de notre cadre théorique d'optimisation.

1. Fonctions de la Réassurance

Nous listons maintenant les différents aspects courants liés à l'emploi de la réassurance.

Transfert de risque

En faisant appel à la réassurance, par l'évacuation d'une part potentielle de sa sinistralité, la cédante se prémunit contre un risque de dérive de celle-ci pouvant mettre en péril sa solvabilité. Le transfert du risque de sinistralité est donc la fonction première de la réassurance.

Lissage du résultat

L'emploi de types de contrats adaptés (facultatives, obligatoires proportionnels ou non) peut permettre à la cédante de limiter les fluctuations de sa sinistralité, et donc de lisser son résultat au fil des exercices : la stabilité ainsi procurée peut améliorer l'attractivité de la cédante auprès des marchés financiers, et par là ses conditions de financement.

Diminution des exigences règlementaires en capital immobilisé

L'exercice de l'activité d'assureur est encadré par des contraintes légales, souvent propres à chaque pays. L'exigence d'un capital minimal propre détenu par l'assureur (marge de solvabilité) fait toutefois partie des obligations légales récurrentes. Cette exigence dépend de l'exposition du portefeuille de l'assureur (sa sinistralité estimée). La diminution attendue de la sinistralité moyenne ainsi que de sa volatilité, par le biais da la réassurance, permet donc une baisse de l'exposition du portefeuille, et par là de l'exigence en capital. La réassurance peut être utilisée comme opération financière conduisant à une économie de capital.

Elargissement des capacités de souscription

En prenant par avance en charge une partie de la sinistralité, la réassurance offre la possibilité à la cédante de souscrire des engagements plus important qu'autrement sa capacité en capital ne lui eût permis d'acquérir. C'est ce qui rend des assureurs de petite taille capables de concurrencer les autres.

Apport de liquidités

La présence d'un réassureur permet à la cédante de disposer rapidement de liquidités importantes en cas de pic de sinistralité, simplifiant ainsi la gestion de son actif.

Conseil

Enfin, en sus de la seule prise en charge d'une part de la sinistralité, certains réassureurs, par leur envergure internationale et leur vocation à mutualiser les risques globaux, ont les connaissances et les capacités pour proposer assistance et conseils à la cédante sur la tarification, la politique de souscription, la prévention des risques, la gestion des sinistres,... La proposition de ces services est motivée par l'intérêt que le réassureur porte à la bonne gestion du portefeuille de la cédante, dont le résultat influe sur celui du réassureur par le biais du contrat les liants (particulièrement dans le cas d'un traité proportionnel).

Cette dernière fonction, par sa portée plus large que le seul cadre économique modélisable, ne sera pas étudiée. Elle reste néanmoins à prendre en compte avec attention et joue un rôle important dans toute relation entre cédante et réassureur.

Parmi les fonctions restantes, à l'heure actuelle, la mesure de l'impact de la réassurance sur l'apport des liquidités, l'élargissement des capacités de souscription ou encore le lissage du résultat n'est pas mesurable. Leur quantification (notamment pour le lissage du résultat) pourrait néanmoins faire l'objet d'autres travaux.

Le transfert de risque est mesurable par des indicateurs (règle 10-10, ERD) qui seront développés en dernière partie de ce chapitre. Etant associé à des contraintes règlementaires comme nous le verrons, ils sont mesurés *a posteriori* et ne feront donc pas l'objet d'une optimisation.

Parmi toutes les fonctions citées, nous nous focaliseront donc dans cette étude sur la diminution des exigences réglementaires en capital immobilisé.

2. Création de Valeur

Il nous faut maintenant chercher les critères qui nous permettront de traduire mathématiquement la diminution des exigences réglementaires en capital immobilisé.

Nous nous concentrerons dans ce mémoire sur un critère unique : la Création de Valeur. Deux autres critères associés sont présentés en annexes (A.II.1) et (A.II.2). L'essentiel des travaux ayant porté sur la Création de Valeur ils ne seront pas développés ici.

Le critère de Création de Valeur est fondé sur l'impact économique d'une structure de réassurance sur le résultat de la cédante.

Deux facteurs sont pris en compte afin de le calculer : d'une part le coût moyen de la réassurance, et d'autre part l'économie réalisée grâce à la diminution du montant requis en capitaux propres de la cédante.

La cédante paie au réassureur des primes, en échange desquelles le réassureur verse des récupérations à la cédante. La différence entre ces deux flux (récupérations et primes) constitue pour la cédante son « résultat de réassurance » technique, dit aussi « coût de réassurance » car il est plus probablement négatif que positif (le réassureur doit se constituer une marge bénéficiaire). Ce coût vient diminuer le résultat de la cédante.

La « création de valeur » est la somme entre le coût de la réassurance (négatif) et l'économie de capital obtenue (positive). Il y a en réalité « création » lorsque la seconde compense le premier.

En posant les notations suivantes :

- $\tau_{\text{rém}}$: taux de rémunération des actionnaires
- τ_{PF} : taux des produits financiers résultant du placement des fonds propres
- τ_{taxe} : taux de taxation
- Δ_{Capital} : diminution des montants de capitaux du à la réassurance
- $R_{\text{Réass}}$: résultat technique et financier de la structure de réassurance du portefeuille considéré

Le taux d'économie du coût en capital est donné par:

$$spread = \tau_{rém} - (1 - \tau_{taxe})\tau_{PF} \quad \text{(II.2.1)}$$

D'où la formule de la création de valeur :

$$CV = (1 - \tau_{taxe}) \times E[R_{Réass}] + spread \times \Delta_{Capital} \quad \text{(II.2.2)}$$

Les grandeurs intégrant le résultat de la cédante (produits financiers et résultat de réassurance) sont soumises à une taxe si le résultat de la cédante est positive (34% en France) d'où la correction effectuée, en supposant que le résultat de la cédante est toujours positif, ce qui est idéalement le cas.

Plus la création de valeur est élevée, plus grand sera l'intérêt de la cédante pour la structure de réassurance associée.

La méthode de calcul de la marge de solvabilité dans la directive Solvabilité II ayant pour objectif de balayer l'ensemble des risques (et donc des activités) de l'assureur, l'économie de marge synthétise dans l'idéal l'impact de la réassurance sur la cédante. L'économie réalisée en coût de capital, confrontée à son coût d'acquisition, fournit en théorie toute l'information nécessaire sur l'apport de la réassurance.

La création de valeur constituera notre critère fondamental d'optimisation. Nous allons en détailler les composantes :

2.1. Le Résultat de réassurance

Le résultat de réassurance est la différence entre les récupérations versées à la cédante et les primes qu'elle verse au(x) réassureur(s). Les frais engendrés par l'acquisition et la gestion de la structure de réassurance sont négligés, ou considérés comme intégrés aux primes.

Nous supposerons que récupérations et primes de réassurance sont versées quasi-simultanément. La distribution des flux de récupérations est supposée uniforme au cours de l'exercice. Alors ils peuvent être modélisés par un flux moyen unique survenant en milieu d'exercice.

Avec les notations :

- PR : montant total des primes de réassurance
- Réc : montant total des récupérations
- r : taux d'actualisation (par exemple 3%)

Le résultat de réassurance, vu en début d'exercice, est modélisé par :

$$R_{Réass} = \frac{Réc - PR}{(1+r)^{1/2}} \text{ (II.2.3)}$$

Dans un premier temps, pour la clarté des notations, nous négligerons le facteur d'actualisation :

$$R_{Réass} \approx Réc - PR \text{ (App.II.2.1)}$$

Cette approximation sera remise en cause lors de l'étude des branches à développement long (cf. chapitre IV).

2.2. L'économie de capital

Solvabilité II laisse aux assureurs le choix, ou bien d'utiliser une formule standard, ou bien de développer un modèle interne justifié. AXA a choisi de développer un modèle interne, fondé sur le concept du STEC (*Short Term Economic Capital*), qui joue le même rôle que le SCR dans la formule standard.

Pour toute activité risquée A générant un résultat R_A, le capital requis associé à cette seule activité vaut :

$$STEC_A = E[R_A] - VaR_{0.5\%}(R_A)$$

Ce principe sera appliqué pour chaque calcul de capital associé à un risque.

Le modèle interne de solvabilité d'AXA définit trois risques pour l'activité P&C (*Property&Casualty*) : le risque de prime (*premium risk*), le risque de réserve (*reserve risk*), et enfin le risque catastrophe (*catastrophe risk*). A chacun de ces risques doit être associé un capital.

Le risque catastrophe est défini pour les contrats de réassurance relatifs aux catastrophes naturelles. Il sera assimilé dans cette étude à un risque de prime.

2.2.1. Risque de prime

Le risque de prime résulte de l'incertitude liée à la tarification du portefeuille, qui peut entraîner une mauvaise maîtrise des fluctuations en fréquence comme en coût de la sinistralité de l'assureur.

Nous calculerons le capital associé à ce risque avec la formule :

$$STEC_{prime} = E[R] - VaR_{0.5\%}(R) \quad \text{(II.2.4)}$$

Où R est le résultat technique de l'assureur sur le portefeuille. Ce résultat va varier selon que l'assureur est réassuré ou non. Nous comparerons donc les situations brutes et nettes de réassurance.

En brut de réassurance, ce résultat est modélisé par la différence entre les primes collectées par l'assureur (P) et les prestations (S) versées pour les sinistres survenus à son portefeuille auxquelles s'ajoutent les frais (F) (notamment frais d'acquisition et de gestion):

$$R_{brut} = P - S - F \quad \text{(II.2.5)}$$

L'application d'une structure de réassurance entraîne l'apparition d'un résultat de réassurance qui vient s'agréger à celui de l'assureur :

$$R_{net} = R_{brut} + R_{réass} = P + Réc - S - PR - F \quad \text{(II.2.6)}$$

D'où le STEC prime en brut et net de réassurance :

$$\begin{cases} STEC_{prime}^{brut} = E[P - S - F] - VaR_{0.5\%}(P - S - F) \\ STEC_{prime}^{net} = E[P + Réc - S - PR - F] - VaR_{0.5\%}(P + Réc - S - PR - F) \end{cases}$$

Nous supposons que les frais F ainsi que les primes collectées par la cédante P sont des quantités déterministes. Alors les propriétés de linéarité de l'espérance et de la Value-at-Risk permettent de les sortir des expressions et de se compenser :

$$\begin{cases} STEC_{prime}^{brut} = E[-S] - VaR_{0.5\%}(-S) \\ STEC_{prime}^{net} = E[Réc - S - PR] - VaR_{0.5\%}(Réc - S - PR) \end{cases} \quad \text{(II.2.7)}$$

En dehors du cadre des reconstitutions (où le montant final de primes versées est aléatoire) le même raisonnement pourra être appliqué aux primes de réassurance :

$$\begin{cases} STEC_{prime}^{brut} = E[-S] - VaR_{0.5\%}(-S) \\ STEC_{prime}^{net} = E[Réc - S] - VaR_{0.5\%}(Réc - S) = E[-S'] - VaR_{0.5\%}(-S') \end{cases} \quad \text{(II.2.8)}$$

Où S’ est la sinistralité nette de réassurance. Ces deux formules seront successivement utilisées dans la suite des calculs.

2.2.2. Risque de réserve

Le risque de réserve résulte quant à lui de la variabilité des paiements dans le temps, ainsi que de l’évolution de l’estimation de la charge ultime. Ce risque est donc particulier aux branches d’activités à développement long (*Long Tail*).

Nous considèrerons pour l’instant que les traités étudiés sont relatifs à des branches d’activités *short tail* et nous développerons le traitement du capital requis pour le risque de réserve dans une autre partie.

En *short tail*, l’économie de capital est donc donnée par la formule générale :

$$\Delta_{Capital} = STEC_{prime}^{brut} - STEC_{prime}^{net} = \Delta_{Capital}^{prime}$$

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}(Réc - S - PR) - VaR_{0.5\%}(-S) - E[Réc - PR] \quad \text{(II.2.9)}$$

Si la prime de réassurance est déterministe nous obtiendrons la formule simplifiée :

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}(Réc - S) - VaR_{0.5\%}(-S) - E[Réc] \quad \text{(II.2.10)}$$

2.3. Le taux de taxation

Le taux de taxation, variant selon le pays, dépend du portefeuille. Dans le cas d’un traité régional le taux de taxation peut différer entre les sous-portefeuilles.

Cependant de manière générale, un taux de taxation moyen par défaut de 20% est appliqué. Ce taux peut être corrigé pour certaines entités spécifiques (France, Royaume-Uni,…).

2.4. Le coût du capital

Le taux d’économie du capital : $spread = \tau_{rém} - (1 - \tau_{taxe})\tau_{PF}$ est modélisé par un taux uniforme de 6%, en référence aux spécifications techniques du QIS 5, ce qui correspond environ à un *spread* à un an pour un actif noté BBB.

Cette approximation passe donc outre la différence induite par le taux de taxation, mais donne l’assurance d’utiliser un indicateur de référence donc cohérent avec le marché.

2.5. Avertissement : postulat du *stand alone*

Il est important de noter que les seuls renseignements sur les entités exploités par HERMES sont fournis par les fichiers générateurs. Si certains indicateurs (sinistralité moyenne) s'adaptent très bien au manque d'information sur le reste de l'entité, il n'en va pas de même pour d'autres (le montant de capital règlementaire requis notamment). Les indicateurs fournis par HERMES sont donc calculés sous un postulat de *stand alone*, c'est-à-dire en considérant que l'activité modélisée par les fichiers générateurs est la seule prise en compte par l'entité et que le portefeuille réassuré est le seul dont dispose l'entité.

Nous supposerons dans un premier temps que l'ordre des valeurs de Création de Valeur obtenues pour deux structures ne varie pas en faisant ce postulat, ce qui nous permettra de valider les conclusions dégagées des rapports de HERMES. En revanche, les valeurs numériques obtenues sont pour la plupart surestimées par cette approximation (le montant de capitaux règlementaire économisé notamment) d'où l'obligation sous ce postulat d'interpréter la Création de Valeur plus comme un score que de comme une valeurs comptable réelle.

3. Contraintes et paramètres modulables

Il nous faut définir l'ensemble des structures de réassurance admissibles sur lesquelles il nous faudra chercher celles qui sont efficientes au regard des critères retenus.

3.1. Contraintes

Forme de la structure :

Nous nous limiterons à l'étude et la comparaison de traités obligatoires sous les trois formes suivantes :

- programme en excédent de sinistre (XS)
- programme en quote-part (QS)
- programme en excédant de sinistres appliqué à la rétention d'un programme en quote-part (XS sur rétention QS)

Ce sont les structures les plus courantes en réassurance.

Budget de réassurance :

Le budget de réassurance est le montant maximal des primes de réassurance que la cédante est prête à verser.

Dans le cas d'une prime unique et déterministe, il est aisé de comparer la prime au budget. En revanche dans le cadre des reconstitutions, pour un traité XS, la prime est aléatoire, aussi la notion de limite devient plus floue : une cédante peut-elle s'autoriser un dépassement théorique de son budget si la probabilité de l'évènement est très faible ?

A cette question nous répondrons négativement, en considérant que la cédante applique une politique budgétaire stricte : au budget sera comparé le montant maximum de primes versables.

Ceci exclut *de facto* des traités XS avec reconstitutions payantes et illimitées, pouvant conduire à des montants de primes en théorie infinis.

Niveau de rétention minimal :

Afin de garantir la conservation d'un certain montant de primes et ainsi satisfaire des objectifs de résultat auprès des actionnaires, une cédante détermine pour un portefeuille une rétention, en-deçà de laquelle les risques sont tous conservés.

La détermination de cette rétention est délicate : trop basse, les primes conservées seront insuffisantes pour compenser le prix élevé de la réassurance, échouant ainsi à garantir un bon résultat. Trop haute, la réassurance sera d'autant moins chère mais la cédante s'expose alors à une volatilité trop forte pour protéger son résultat en cas d'évènement défavorable.

Le travail d'optimisation de la rétention est en grande partie effectué au niveau des entités, qui possèdent seules l'intégralité de l'historique des sinistres.

Ne disposant pour notre part que d'un historique atypique défini à partir d'un certain seuil, nos possibilités pour faire varier la rétention sont restreintes par le bas par ce seuil de modélisation, qui constitue une contrainte pour notre étude.

Contraintes règlementaires sur le transfert de risque :

Une opération de réassurance permet d'améliorer un certain nombre d'indicateurs financiers (volatilité du résultat, profitabilité). Cela peut encourager le développement d'opérations de réassurance ayant pour seul but l'amélioration, alors artificielle, de ces indicateurs : pour un risque transféré quasi nul, c'est-à-dire une situation pratiquement inchangée, la cédante renvoie aux marchés financiers une image faussement saine de sa situation.

Ces abus, ayant parfois entraîné des faillites d'agents de premier plan (HIH, deuxième assureur australien, en 2001), ont poussé les autorités de contrôle à imposer des barrières à ce type de pratiques : dans les normes comptables américaines (US GAAP) comme internationales (IFRS) la cédante doit prouver qu'une partie significative de son risque est effectivement transmise et qu'il s'agit donc d'une « vraie » opération de réassurance.

Pour ce faire, l'usage a mis en place le processus suivant décomposé en trois étapes successives :

- Chercher à déterminer si le contrat de réassurance induit un « transfert substantiel » du risque.
- Chercher à déterminer si la signifiance de la part du risque transférée est « raisonnablement évidente ».
- Calculer une ou plusieurs mesures de risque et comparer les résultats à des seuils reconnus comme caractéristiques d'un transfert de risque significatif.

Les deux premières étapes font appel à des notions subjectives et ambigües de « transfert substantiel » et d'« évidence raisonnable d'un transfert significatif », souvent appuyées par des documents juridiques. La solidité de ces derniers est laissée à l'appréciation des autorités de contrôle.

Des mesures « objectives » du transfert de risque ne sont calculées que si la cédante échoue successivement aux deux premières étapes : en effet, les mesures disponibles aujourd'hui ne permettent pas de prendre en compte l'immense diversité des formes de réassurance aussi sont-elles utilisées en dernier recours.

Ne disposant d'aucun élément pour appuyer notre décision afin de déterminer si une structure de réassurance présente un transfert de risque significatif ou non, nous nous contenterons de mettre en œuvre la troisième étape en calculant deux mesures de risques couramment utilisées.

3.1.1. La règle « 10%-10% » (*10%-10% rule*)

Selon cette règle, un transfert de risque est dit significatif si le réassureur a au moins 10% de probabilité de subir une perte valant au moins 10% de la prime de réassurance.

Dans le cas où cette prime serait aléatoire (reconstitutions payantes pour un traité XS par exemple) c'est l'espérance des primes de réassurance qui sera retenue comme assiette de valeur. En notant PR le montant total des primes de réassurance nous obtenons la condition :

$$P\left(Résultat_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \quad \text{(II.3.1)}$$

Exemple 1: Une cédante souhaite réassurer un portefeuille par un traité 5xs5. La loi de probabilité des récupérations relatives à ce traité est la suivante :

Perte (M€)	0	1	3	5	6
Probabilité (%)	10	30	35	20	5

Loi des récupérations – (T.II.3.1)

*La prime pure de ce traité est de : (30*1 + 35*3 + 20*6+5*6)/100 = 2.65M€. Le réassureur négocie avec la cédante une prime d'environ 3M€.*

Pour respecter la règle « 10/10 », Le réassureur doit avoir au moins 10% de probabilité d'essuyer une perte d'au moins 10% de la primes, soit d'au moins 300K€.

Pour ce faire nous calculons la distribution du résultat du réassureur, donné par : $R_{réassureur}$ *= Primes de réassurance - Récupérations*

Résultat (M€)	-3	-2	0	2	3
Probabilité (%)	5	20	35	30	10

Loi du résultat du réassureur – (T.II.3.2)

La $VaR_{10\%}$ *donne la perte maximale à une probabilité de 10%. Ici nous calculons :*

$$VaR_{10\%}\left(Résultat_{Réassureur}\right) = -2M\,€$$

La perte maximale à 10% de probabilité est donc de 2M€, ce qui est supérieur au seuil de 300K€. Cette opération réalise donc bien un transfert de risque significatif au regard de la règle 10-10.

La règle 10-10, l'une des premières utilisées, présente toutefois le désavantage de ne pas tenir compte de l'épaisseur de la queue de distribution en-deçà du seuil de 10%, ce qui pénalise les risques de forte intensité mais de peu de fréquence (comme les risques de catastrophes naturelles).

Il parait pourtant légitime que la cédante puisse se prémunir contre une telle typologie de sinistralité. Une autre mesure, plus complète, a donc été mise en place.

3.1.2. La perte attendue du réassureur (*Expected Reinsurer Deficit*)

L'ERD est égale au produit de la probabilité pour le réassureur d'être en perte, multipliée par la moyenne du résultat du réassureur sachant qu'il est en perte, et ramené en pourcentage de prime de réassurance. De même que pour la règle 10-10, le cas de la prime aléatoire est traité en remplaçant le montant de primes par son espérance :

$$ERD = -\frac{P\left(Résultat_{Réassureur} < 0\right) \times E\left[Résultat_{Réassureur} / Résultat_{Réassureur} < 0\right]}{E\left[PR\right]} \quad \text{(II.3.2)}$$

Selon cette règle, un transfert de risque est dit significatif si l'ERD est supérieur à 1%. Le calibrage à 1% résulte de la règle 10-10 : 10% * 10% = 1%.

Exemple 1: Nous reprenons l'exemple précédent. La prime de réassurance est de 3M€, et la distribution du résultat du réassureur est donnée par le tableau :

Résultat (M€)	-3	-2	0	2	3
Probabilité (%)	5	20	35	30	10

Loi du résultat du réassureur – (T.II.3.3)

Alors la probabilité d'être en perte est de : 5 + 20 = 25%. L'espérance de la perte est de :

$$-E\left[Résultat_{Réassureur} / Résultat_{Réassureur} < 0\right] = -\frac{0.05\times(-3)+0.20\times(-2)}{0.25} = 2.2M€$$

D'où l'ERD :

$$ERD = \frac{0.25\times 2.2}{3} \approx 18.33\%$$

Cette opération réalise également un transfert de risque significatif au regard de l'ERD.

De manière générale, en ne prenant en compte que les facteurs économiques (primes et prestations pour sinistres) nous pouvons montrer qu'un traité vérifiant la règle 10-10 vérifie toujours la règle ERD. La démonstration de cette propriété se trouve en Annexe, référencée (A.II.3).

L'ERD est donc un indicateur plus robuste de transfert de risque que la règle 10-10. Il permet de surcroît de prendre en compte plusieurs types de transferts de risques « raisonnablement significatifs » mais ne passant pas la règle 10-10.

Il est important de rappeler que l'application des deux règles, 10-10 et ERD, relève de l'usage et n'ont pas de fondement réglementaire propre.

3.2. Paramètres modulables d'un traité

En présence d'une même sinistralité, un traité simple est défini par un nombre limité de paramètre, qui suffisent à décrire à partir de quand et jusqu'à quel point un réassureur doit verser des récupérations à la cédante. Dans notre cas ces paramètres diffèrent selon que le traité est un QS ou un XS.

Traité QS :

Un traité QS varie selon deux paramètres : premièrement la part cédée, exprimée en pourcentage (par exemple : 50%) et deuxièmement le pourcentage de commission pour frais d'acquisition et de gestion (par exemple 5%).

Traité XS :

Un traité XS varie selon deux paramètres principaux : sa priorité et sa portée. S'ajoutent à ces deux paramètres deux bornes éventuelles que sont l'AAD et l'AAL.

Enfin la présence d'un programme de reconstitutions (qui induit automatiquement celle d'un AAL en limitant la capacité par le nombre de portées pouvant être reconstituées) génère une série de paramètres supplémentaires :

- le nombre de reconstitutions (noté k)
- le prix de chacune de ces reconstitutions (k-uplet noté $c_1,\ldots,c_k$)

Soit un total de 5 + k paramètres pour une seule tranche XS. Les critères d'optimisation se calculant sur l'ensemble du programme, l'efficience d'un programme XS pur par rapport à la situation brute de réassurance s'évalue sur l'ensemble des tranches le constituant, démultipliant ainsi le nombre de paramètres.

Le dernier élément pouvant faire varier la structure de réassurance est la différenciation des structures par générateurs au sein d'un unique portefeuille.

L'établissement d'une même couverture sur plusieurs portefeuilles supposés indépendants entre eux peut permettre à la ou les cédantes d'améliorer l'efficience de leur structure[1].

Cependant les contraintes de chaque partie (minimum de rétention, budget) ne sont pas forcément homogènes aussi peut-il arriver que tous les sous-portefeuilles n'intègrent pas toutes les tranches d'un programme XS.

Exemple : Soit un programme XS régional entre différentes entités du même groupe défini comme il suit :

Tranche	Portée (M€)	Priorité (M€)	Portefeuilles concernés
Sublayer	1	1	GRE
1	3	2	GRE,ITA,ESP
2	5	5	GRE,ITA,ESP
3	10	10	ESP

Programme XS Régional – (T.II.3.4)

[1] cf. J-F. WALHIN (2005) On the Optimality of Multiline Excess of Loss Covers

Ce programme s'applique aux portefeuilles de responsabilité civile automobile (RCA) de l'Espagne, l'Italie et la Grèce.

Si l'entité grecque du groupe est moins développée, son besoin en réassurance sera moins fort aussi souhaitera-t-elle conserver une rétention plus faible : dans ce traité, la tranche « Sublayer » ne s'applique par exemple qu'au portefeuille RCA Grec.

Si l'entité espagnole a une expérience de sinistres de très forte sévérité, elle pourra souhaiter se couvrir plus haut que les autres, aussi la tranche 3 de ce programme est-elle appliquée sur le portefeuille RCA espagnol seul.

De telles pratiques ne sont pas exceptionnelles au sein d'un groupe international. La variété des structures de réassurance XS s'enrichit donc des combinaisons d'associations de sous-portefeuilles au sein d'un même programme.

Cet exemple de multiplicité des combinaisons achève ce chapitre sur la caractérisation de l'optimalité des structures de réassurance, et met en exergue la difficulté de la tâche qui attend l'utilisateur soucieux d'optimiser une structure. Hormis pour les traités en quote-part, où les paramètres sont en nombre réduit et qui fera l'objet d'une partie du chapitre V, l'ensemble des solutions admissibles semble beaucoup trop vaste pour une optimisation rapide et efficace.

Notre étude se limitera donc, pour les deux prochains chapitres, à mettre en œuvre de manière générale une estimation calculable dans HERMES du critère fondamental sélectionné : la Création de Valeur.

Dans un premier temps nous estimerons le prix d'une structure de réassurance (objet du chapitre III suivant immédiatement) et dans un second temps nous chercherons à adapter la Création de Valeur aux portefeuilles de sinistralité à déroulement long (chapitre IV).

Chapitre III - Etablissement d'un modèle prédictif de la prime

L'étude des critères d'optimalité d'une structure de réassurance peut servir de deux manières :

- Etudier l'efficience d'une structure de réassurance préexistante, dont toutes les caractéristiques sont alors connues
- Rechercher de nouvelles structures afin d'améliorer l'optimalité de la réassurance. Des paramètres tels que l'identité du ou des réassureurs, ainsi que le prix de la structure, sont alors inconnus.

Nous nous placerons dans ce chapitre dans le second cas.

L'identité du ou des réassureurs sera considérée comme sans impact sur les critères d'optimalité retenus. Il n'en va en revanche pas de même pour le prix de la structure, qui joue directement sur le résultat de réassurance, et donc sur la Création de Valeur.

Chercher à définir une estimation efficace, au moins réaliste, du prix d'une structure est donc indispensable pour évaluer sa Création de Valeur.

Dans le cadre d'un traité en quote-part (QP) (et des traités proportionnels en général), le montant de prime cédée se calcule par le produit du pourcentage contractuel avec l'assiette de prime du portefeuille réassuré. Du fait de cette spécificité contractuelle, le cas des traités en quote-part sera étudié à part, à la fin de ce chapitre.

Dans le cadre d'un traité en excès de sinistre (XS) le montant total des primes versées par la cédante au réassureur est caractérisé par la prime initiale, négociée entre la cédante et les réassureurs. L'objectif est de définir, pour un traité XS aux caractéristiques données (portée, priorité, AAD, AAL, programme de reconstitutions), la prime commerciale correspondante.

Pour ce faire nous avons mené une étude sur les cotations des réassureurs afin de déterminer une formule prédictive de la prime d'un traité. Cette étude se décompose en deux parties : la première, théorique, présente les différentes formes de constructions d'une prime. La seconde, appliquée à des données réelles, recherche les paramètres optimaux d'une formule de prime qui soit satisfaisante.

1. Formules de Primes

Nous avons décomposé en deux phases le processus de fabrication d'une prime : la première définit les éléments de construction de la prime, la seconde la manière de les agencer.

1.1. Eléments de construction

Les éléments de constructions reflètent les besoins du réassureur. Son point de vue sera développé en premier lieu. En second nous listerons un certain nombre de propriétés classiques appliquées en tarification actuarielle. Ces deux renseignements nous permettrons ensuite d'exposer les différents principes de primes de réassurance.

1.1.1. Le point de vue du réassureur

Il est important de souligner que, comme nous recherchons à établir un modèle prédictif des primes commerciales de réassurance, nous devons adopter dans cette partie le point de vue du réassureur et non celui de la cédante.

Les éléments suivant de la vision de la prime d'un réassureur ont été dégagés :

- Le montant des primes doit couvrir en moyenne le montant des récupérations.
- La prime doit prendre en compte la volatilité du résultat du traité.
- La prime doit prendre en compte un certain nombre de coûts fixes liés au programme (acquisition, gestion, coût financier).
- La prime dépend des cycles du marché de la réassurance, dont les tendances sont fonction de la sinistralité récente au niveau mondial.
- L'ensemble des primes collectées par le réassureur sur son portefeuille doit lui permettre de rester solvable face aux pertes qu'il subit et d'atteindre ses objectifs de profitabilité.

C'est à partir de cette liste de critères que nous mènerons notre réflexion. Parmi ces critères, les deux derniers font appel à des phénomènes extérieurs au cadre du programme de réassurance.

Par le dialogue continu que mènent cédantes et réassureurs et la visibilité médiatique de la plupart des sinistres majeurs (Christchurch, Fukushima en 2011), l'information concernant les tendances de marché circule assez bien ce qui peut permettre d'anticiper le cycle.

En revanche le dernier critère induit une asymétrie d'information irrémédiable entre cédante et réassureur qui nous conduit à l'écarter : ce point sera donc ignoré dans toute l'étude avant d'être repris en conclusion.

1.1.2. Propriétés souhaitables

En complément de cette liste de critères un certain nombre de propriétés mathématiques issues de raisonnements économiques sont d'usages dans le domaine de la tarification en assurance. Ces propriétés traduisent des raisonnements distincts aussi n'existe-t-il pas forcément de principe les satisfaisant toutes : la transgression d'une propriété n'est donc pas nécessairement rédhibitoire.

Nous ne relevons ici que les principales :

- Propriété d'indépendance : la prime payée pour assurer un risque doit dépendre uniquement de la distribution aléatoire de ce risque.

- Propriété de risque maximal : le montant de la prime ne peut excéder celui des sommes assurées.

- Propriété d'homogénéité positive : si λ est un nombre positif et X modélise le risque assuré, alors la prime payée pour assurer λX vaut λ fois la prime payée pour X.

- Propriétés de sous-additivité/sur-additivité : la prime associée à l'assurance de deux risques est inférieure ou égale/supérieure ou égale à la somme des primes associées à l'assurance de chacun de ces risques.

- Propriétés d'additivité par risques indépendants : Si deux risques sont indépendants, alors la prime associée à l'assurance des deux risques est égale à la somme des primes associées à l'assurance de chacun de ces risques.

X, Y et Z sont des variables aléatoires. X et Y sont dites comonotones si et seulement si il existe deux fonctions croissantes f et g telles que, presque sûrement, $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.

- Propriétés d'additivité par risques comonotones : Si deux risques sont comonotones, alors la prime associée à l'assurance des deux risques est égale à la somme des primes associées à l'assurance de chacun de ces risques.

X et Y sont des variables aléatoires de fonctions de survie respectives S_X et S_Y. Alors X est dite stochastiquement plus grande que Y si et seulement si pour tout réel t on a : $S_X(t) \geq S_Y(t)$.

- Propriété de conservation de l'ordre stochastique : si un risque est stochastiquement plus grand qu'un autre, alors la prime associée à ce risque est supérieure à la prime associée à l'autre risque.

La probabilité que le risque X dépasse un certain montant est toujours plus grande que celle que Y dépasse le même montant, quel qu'il soit. Il semble dès lors raisonnable d'en conclure que X est plus dangereux que Y, et qu'il nécessite donc une prime plus élevée.

Certaines de ces propriétés sont contradictoires (sur-additivité/sous-additivité). Leur application dépend donc du contexte de tarification : dans le cadre de la réassurance, l'importance accrue de la mutualisation des risques poussera par exemple à accorder une importance plus particulière à la sous-additivité qu'à la sur-additivité.

1.2. Principes de primes

Distinguons maintenant les différents principes de primes développés. Nous nous plaçons pour l'instant dans un cadre où la prime est unique et payée d'avance : nous adapterons ensuite au cadre d'une prime aléatoire.

1.2.1. Prime pure

Le premier des principes est celui de la prime pure. C'est le montant de prime qui permet de compenser en moyenne le montant des récupérations, et donc de fournir un résultat de réassurance en moyenne nul. En notant PP la prime pure, Réc étant celui des récupérations, nous obtenons :

$$E[R_{Réass}] = 0 \Leftrightarrow PP = E[Réc] \quad \text{(III.1.1)}$$

Ce principe fournit une prime minimale en accord avec le premier critère du 1.a. Les autres principes sont des « principes de chargement » de la prime pure prenant en compte d'autres éléments venant alourdir le montant de la prime (deuxième critère du 1.a).

1.2.2. Principes de chargements linéaires

Ces principes de chargement reposent sur une combinaison linéaire de différentes variables issues de la sinistralité ou encore des paramètres du traité. Si nous nommons PT la prime technique issue de ce principe de chargement nous obtenons :

$$PT = PP + \sum_{i=1}^{nbre.\,facteurs} \alpha_i F_i \quad \text{(III.1.2)}$$

Où les α_i sont des coefficients positifs et les F_i des facteurs explicatifs tels que :

- l'écart-type du résultat / des récupérations
- La $VaR_{99.5\%}$ du résultat / des récupérations
- Autres

La positivité des coefficients garantit d'avoir : PT ≥ PP.

Le résultat est ici le résultat de réassurance vu du point de vue de la cédante, c'est-à-dire : $R_{Réass}$ = Récupérations – Primes de réassurance.

Nous tarifons ici du point de vue du réassureur. Hors de toute considération de frais additionnels, son résultat vaut exactement l'opposé du résultat de la cédante (il reçoit les primes de réassurance et paie les récupérations).

Le risque pour le réassureur est d'avoir un résultat faible. A ce risque il doit réglementairement associer un capital (les réassureurs étant également soumis à la directive Solvabilité II) que nous pouvons définir comme :

$$STEC^{primes}_{Réassureur} = E[-R_{Réass}] - VaR_{0.5\%}(-R_{Réass})$$

En utilisant la propriété suivante vérifiée par la VaR :

$$-VaR_{\alpha}(-X) = VaR_{1-\alpha}(X)$$

La formule du capital devient :

$$STEC^{primes}_{Réassureur} = VaR_{99.5\%}(R_{Réass}) - E[R_{Réass}] \quad \text{(III.1.3)}$$

La $VaR_{99.5\%}$ du résultat peut donc être un facteur explicatif pertinent, car représentatif du coût en capital associé au traité, du point de vue du réassureur.

L'écart type est une mesure de volatilité très répandue pour le chargement des primes. L'écart type des récupérations ne permet cependant pas de prendre en compte la part de cette volatilité générée par le paiement aléatoire des primes : elle peut donc s'avérer insuffisante aussi lui préférerons-nous l'écart type du résultat.

Ces deux critères, $VaR_{99.5\%}$ et écart-type du résultat, seront donc ceux retenus dans le cadre de l'étude des chargements par principe linéaire de la prime de réassurance.

Les formules linéaires ont pour avantage d'être intuitives pour un public large et de s'estimer facilement (par régression linéaire).

Selon les facteurs explicatifs choisis, elles ne respectent cependant pas toujours les différentes propriétés (risque maximum, homogénéité, sous-additivité,…) et l'agrégation de la prime sur l'ensemble d'un programme donner lieu à des incohérences.

1.2.3. Autres principes

Parmi les autres familles de principe nous nous limiterons aux distorsions de probabilité. Le principe consiste à « remplacer » la mesure de probabilité des variables aléatoires par une nouvelle mesure, plus lourde.

Soit g, une fonction croissante et concave de [0,1] dans [0,1] telle que g(0)=0 et g(1)=1.

Soit S_{rec} la fonction de survie des récupérations.

Soit : h = g(S_{rec}). Alors h définit aussi une fonction de survie. La concavité de g assure pour tout x positif :

$$h(x) = g(S_{réc}(x)) \geq S_{réc}(x)$$

Alors l'égalité : $E[Réc] = \int_0^{\infty} S_{réc}(x).dx$ donne en intégrant sur R^+ le résultat :

$$H_g(Réc) \geq E[Réc] = PP \quad \text{(III.1.4)}$$

Avec : $PT = H_g(Réc) = \int_0^{\infty} g(S_{réc}(x)).dx$ défini comme le chargement de la prime par distorsion de probabilité.

La distorsion de probabilité permet une très grande souplesse dans la modélisation puisque le choix de g reste vaste sous les contraintes précitées. De plus de nombreuses propriétés (linéarité, sous-additivité, additivité par tranche de programme,…) sont vérifiées.

Il est néanmoins difficile de justifier économiquement ces transformations. De plus, si leur mise en œuvre est simple, l'estimation et la calibration de ces formules est compliquée car elle nécessite pour chaque observation de transformer l'intégralité de sa distribution : c'est pourquoi notre étude ne prendra pas en compte ces principes de chargement, néanmoins d'un grand intérêt théorique.

Les seules formules de chargement étudiées en pratique seront donc celles relevant de principes de chargement linéaires.

1.2.4. La prime commerciale

Tous les principes cités précédemment reposent uniquement sur la loi de la sinistralité sous-jacente au risque assuré. Les éléments exogènes qui composent une prime d'assurance ou de réassurance (principalement la prise en compte des frais d'acquisition et de gestion des affaires) sont modélisés le plus souvent en divisant la prime technique par un coefficient modélisant les coûts dits « fixes » à intégrer à la prime:

$$P = \frac{PT}{1-\beta} \quad \text{(III.1.5)}$$

Où P est alors la prime commerciale estimée et β le coefficient de coûts fixes.

1.3. Formule linéaire dans le cadre des reconstitutions

Le cadre des reconstitutions change profondément la donne dans le calcul des formules de chargement linéaires. Parce que le montant des primes devient aléatoire, certains facteurs explicatifs deviennent dépendants de la valeur de la prime initiale :

$$PT = PP + \sum_{i=1}^{nbre.\,facteurs} \alpha_i F_i(PT)$$

C'est le cas principalement pour les facteurs découlant du résultat de réassurance, comme l'écart-type ou la VaR :

$$\sigma(R_{Réass}) = \sigma(Réc - PR) \neq \sigma(Réc) \text{ si PR aléatoire}$$
$$VaR_\alpha(R_{Réass}) = VaR_\alpha(Réc - PR) \neq VaR_\alpha(Réc) - PR \text{ si PR aléatoire.}$$

Nous devons dans ce cas résoudre des équations en PT. Commençons par définir un cadre de notations formelles avant de l'appliquer à la résolution de ces équations.

1.3.1. Formalisation du cadre des reconstitutions

A un portefeuille donné nous associons N le nombre de sinistres l'ayant affecté au cours de l'exercice. $Z_1, \ldots Z_N$ sont les N montants de chacun des sinistres.

Exemple : N = 5, avec la sinistralité suivante :

Sinistre	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
Montant (M€)	3	12	5	2	8

Sinistralité d'un exercice – (T.III.1.1)

La cédante choisit de se réassurer par un traité m xs a à K reconstitutions, le prix des K reconstitutions étant donné par les pourcentages $c_1, \ldots, c_K$.

Exemple : tranche 5xs5, programme 1@100,1@50 (soit : 1+1=2 reconstitutions). La prime initiale vaut : P = 5M€.

$X_1, \ldots X_N$ sont les montants associés touchant la tranche réassurée m xs a, soit pour tout i :

$$X_i = (Z_i - a)^+ \wedge m$$

Exemple :

Sinistre	X1	X2	X3	X4	X5
Montant (M€)	0	5	0	0	3

Part touchant la tranche 5xs5 – (T.III.1.2)

Nommons X la somme des X_i : $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Alors la somme des récupérations payées par le réassureur à la cédante vaut :

$$Réc = X \wedge (K+1) \times m \quad \text{(III.1.6)}$$

*Exemple : ici nous avons : Réc = min(5+3 ;(2+1)*5) = min(8 ;15) = 8M€.*

D'autre part le montant final des primes versées au réassureur vaut :

$$PR = P(1 + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{K-1} c_{i+1}((X - im)^{+} \wedge m))$$

Où P est la prime versée pour la portée initiale.

Exemple : la prime de reconstitution payée est calculée en effectuant le produit de la proportion de la portée précédente touchée parle montant X de sinistralité touchant la tranche réassurée, avec le prix de la reconstitution (en l'occurrence 100%P puis 50%P) :

Portée	Initiale	à 100%	à 50%
Proportion touchée	100%	60%	0%
Prime payée (M€)	**5**	5=100%*100%***5**	1,5=50%*60%***5**

Répartition des paiements des primes de réassurance – (T.III.1.3)

Nous définissons M comme la prime finale normalisée par la prime initiale, soit :

$$M = 1 + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{K-1} c_{i+1}((X - im)^{+} \wedge m) \quad \text{(III.1.7)}$$

Nous pouvons remarquer, ce que st un résultat important pour la suite, que M et Réc sont deux variables aléatoires comonotones, car fonctions de la même variable X.

*Exemple : M est égal à la somme des produits des proportions touchées des portées précédentes par le prix de la portée considérée, soit : M= 1+100%*1 + 60%*0.5 = 2.3 :*

Portée	Initiale	à 100%	à 50%
Proportion touchée	100%	60%	0%
Prime normalisée	1=100%	1=100%*100%	0.3=50%*60%

Répartition de la prime totale normalisée – (T.III.1.4)

M étant une variable aléatoire qui ne dépend que de X, nous pouvons réécrire PR comme :

$$PR = P \times M$$

Cette décomposition du montant final de la prime en une partie déterministe (la prime initiale) et une aléatoire (la prime normalisée, indépendante de la prime initiale) va permettre de résoudre les équations en P.

1.3.2. Equation avec l'écart-type du résultat

Prenons en compte le principe suivant de calcul d'une prime commerciale :

$$P = \frac{PP + \alpha.\sigma(R_{Réass})}{1-\beta} \quad \text{(III.1.8)}$$

Où α est le chargement de l'écart-type et β celui des coûts fixes.

Dans le cadre d'une prime payée d'avance (donc en particulier hors reconstitutions) l'écart-type du résultat est égal à l'écart-type des récupérations aussi la formule est-elle aisée à calculer à partir de simulations de sinistralité par une méthode de Monte Carlo.
En revanche avec les reconstitutions la prime technique est donnée par l'équation :

$$P = \frac{PP + \alpha.\sigma(Réc - PR)}{1-\beta} = \frac{PP + \alpha.\sigma(Réc - P.M)}{1-\beta} \quad \text{(III.1.9)}$$

Equation menant à la recherche des racines d'un polynôme de degré deux et que nous pouvons résoudre en supposant son discriminant positif.
La démonstration de la résolution de (III.1.9) se trouve en annexe, référencée (A.III.1).

1.3.3. Equation avec la Value-at-Risk du résultat

Nous considérons maintenant le principe de calcul de la prime commerciale suivant :

$$P = \frac{PP + \gamma VaR_{99.5\%}(R_{Réass})}{1-\beta} = \frac{PP + \gamma VaR_{99.5\%}(Réc - P.M)}{1-\beta} \quad \text{(III.1.10)}$$

Au contraire de la variance, et comme signalé au chapitre I, la Value-at-Risk ne définit pas, pour deux variables aléatoires X et Y, de relation générale entre : VaR(X+Y) et le couple (VaR(X) ; VaR(Y)). La résolution de cette équation sera donc plus complexe.

Nous sommes partis de la propriété suivante :

Soit X une variable aléatoire réelle, et Φ une fonction continue et croissante sur R. Alors pour tout α compris entre 0 et 1, la variable aléatoire : Y = Φ (X) a pour Value-at-Risk de niveau α :

$$VaR_\alpha(Y) = VaR_\alpha(\Phi(X)) = \Phi\left(VaR_\alpha(X)\right) \quad \text{(P.III.1.1)}$$

Réc et M étant comonotones (ne dépendent que de l'aléa X), il devrait être possible de réécrire $R_{Réass}$ comme une fonction de X. Si nous arrivons à trouver une condition suffisante pour que cette fonction soit croissante et continue, alors l'application de la propriété permettra de résoudre l'équation (III.1.10).

Cette condition est la suivante (cf démonstration en annexe, référencée A.III.2) :

$$P \leq \frac{m}{\max(c_k)}, k \in \{1...K\} \quad \text{(C.3.1.1)}$$

Où les c_1,… c_K sont les prix des K reconstitutions de la tranche de portée m du traité.

Dans la très grande majorité des cas, le prix des reconstitutions est compris entre 0 et 100%, d'où :

$$\max{(c_k)}_{k\in\{1...K\}} \leq 1 \Rightarrow \left((C.3.1.1) \Leftrightarrow \frac{P}{m} \leq \frac{1}{\max(c_k)} \leq 1 \right) \text{ (C.3.1.2)}$$

Le rapport $\frac{P}{m}$ définit le Rate-on-Line (RoL) de la tranche, qui est le plus souvent inférieur à 100% (donc vérifiant (C.3.1.2)). Dans le cadre d'un programme de reconstitutions de type (K@100) la propriété de risque maximal force même cette relation.

Certains montages atypiques (avec un grand nombre de reconstitutions payées d'avance et peu de payantes) peuvent cependant ne pas la vérifier.

Exemple : Un assureur réassureur un portefeuille sur la tranche 5xs5 par un traité avec le programme de reconstitutions : 10@0,1@100.

Alors : $\begin{cases} Réc = X \wedge (11 \times m) = X \wedge 55M€ \\ M = 1 + \frac{1}{m}((X - 10 \times m)^+ \wedge m) = 1 + (\frac{X}{5M€} - 10)^+ \wedge 1 \end{cases}$ *. Nous allons supposer :*

$$E[X] = 25M€ \text{ d'où } PP = \frac{E[Réc]}{E[M]} = \frac{25}{1} = 25M€.$$

Alors : $P \geq PP \Leftrightarrow \frac{P}{m} \geq \frac{25}{5} = 5 > 1 = \frac{1}{\max(c_k)}$ *d'où la relation (C.3.1.2) n'est pas vérifiée.*

Ce type de programme n'a pas encore été rencontré en pratique, aussi dans une application pratique la condition sera-t-elle toujours supposée vraie. Une fois l'équation donnant la prime résolue, il sera toujours possible de vérifier si la solution respecte (C.3.1.1).

<u>Retour à l'équation (III.1.10)</u> :

L'application de la condition (C.3.11) nous permet d'appliquer la propriété (P.III.1.1) et ainsi de réécrire (III.1.11) pour obtenir (démonstration en annexe référencée A.III.3) :

$$P = \frac{PP + a\gamma}{1 - \beta + b\gamma} \text{ (III.1.11)}$$

Avec :

$$\begin{cases} a = Réc / X = VaR_{99.5\%}(X) \\ b = M / X = VaR_{99.5\%}(X) \end{cases}$$

1.3.4. <u>Equation avec écart-type et Value-at-Risk du résultat</u>

$$P = \frac{PP + \alpha\sigma(R_{Réass}) + \gamma VaR_{99.5\%}(R_{Réass})}{1-\beta} \quad \text{(III.1.12)}$$

La résolution de cette équation peut se rapporter à une recherche de racines d'un polynôme de degré deux, comme pour (III.1.9). Les coefficients de ce polynôme sont donnés en annexe, référencés (III.1.4).

Cette adaptation des formules de chargement linéaire au cadre des reconstitutions s'avère en pratique plutôt fastidieuse. Ceci représente bien la complexité de ce cadre, et la difficulté à prouver l'existence de solutions viables (positivité du discriminant pour l'écart-type, croissance du résultat de réassurance pour la VaR) montre la fragilité de ce principe de chargement dans ce cadre.

Il était néanmoins utile et nécessaire de réaliser ces travaux au vu de la popularité des principes de chargements linéaires dans la tarification, en assurance comme en réassurance.

Ces formules exposées dans la première partie de ce chapitre vont maintenant être testées dans la seconde sur des données réelles, afin d'essayer d'en appliquer une représentante efficace dans l'outil HERMES.

2. Application à des données réelles

En se limitant aux principes de chargement linéaires, nous nous sommes efforcés de rechercher une formule de chargement efficace sur un ensemble de traités disponibles.

L'étude mettant en œuvre cette recherche a été menée sur les quatre branches d'activités principales d'AXA Global P&C :

- Dommage aux biens (DAB)
- Maritime (MARIT)
- Responsabilité civile automobile (RCA)
- Responsabilité civile générale (RCG)

Une formule de chargement de primes étant déjà implémentée dans l'outil HERMES, l'objectif était de tester l'efficacité de la formule proposée, puis de chercher dans un second temps s'il existait une formule alternative l'améliorant significativement.

Cette formule est la suivante :

$$P = \frac{PP + 20\%\sigma\left(R_{Réass}\right)}{1-15\%} \quad \text{(III.2.1)}$$

Le chargement d'écart-type représente donc 20%, celui des coûts fixes 15%.

2.1. Constitution de la base de données

En reprenant la base de données d'une étude réalisée antérieurement au sein du département réassurance, nous avons pu obtenir plus de 1100 cotations de réassureurs sur des tranches de programmes de réassurance pour l'année 2010 avec pour informations :

- le nom de l'entité cédante
- le nom du réassureur
- la branche d'activité réassurée
- la monnaie utilisée par le traité
- la portée et la priorité de la tranche (*Limit* et *Priority*)
- son programme de reconstitutions
- AAD et AAL éventuels de la tranche
- l'assiette de primes estimée sur la tranche (*GNPI*)
- la cotation du réassureur exprimée en pourcentage de l'assiette de primes (*cotation*).

La répartition des traités de la base de données par entité et par branche d'activité est rapportée en annexe (A.III.5), tableau (T.5.1). Plus de la moitié des cotations sont des la branche d'activité DAB.

Afin de tarifer ces tranches avec HERMES, une bibliothèque de fichiers générateurs a été constituée : dans la mesure du possible, les risques de chaque entité sont modélisés par des générateurs de sinistres révisés chaque année.

Grâce à cette bibliothèque nous avons pu compléter pour un peu moins d'un millier de lignes de la base de données les informations suivantes :

- prime pure (en monnaie) (*PP*)
- prime technique HERMES (en monnaie) (*PT*)
- écart-type du résultat de réassurance (*SD*)
- $VaR_{99,5\%}$ des récupérations (*VaR995*)
- probabilité de toucher la tranche (*ProbaTouch*)

Comme précisé en première partie de ce chapitre, c'est la $VaR_{99,5\%}$ du résultat de réassurance et non des récupérations qui constitue un facteur explicatif. Par imitation de l'étude précédemment menée, c'est pourtant la $VaR_{99,5\%}$ des récupérations que nous avons collecté.

Une régression linéaire menée sur des échantillons comparables a cependant permis de montrer :

$$VaR_{99.5\%}\left(R_{Réass}\right) \approx 0.86 \times VaR_{99.5\%}\left(Réc\right) \quad \text{(App.III.2.1)}$$

Avec un R² associé supérieur à 98.5% ce qui est très bon.

Nous avons donc pris la variable : $0.86*VaR_{99,5\%}$(Récupérations) comme approximation de $VaR_{99,5\%}(R_{Réass})$ dans la base de données. Dans toute la suite de l'étude *VaR995* désignera cette approximation de $VaR_{99,5\%}(R_{Réass})$.

Afin de rendre homogènes les données entre elles nous avons exprimé les grandeurs monétaires (primes pure et technique, écart-type et VaR) en pourcentage d'assiette de primes.

Nous pouvons remarquer qu'aucune distribution de probabilité n'ayant été collecté, il nous sera impossible d'effectuer des estimations pour des chargements selon un principe de distorsion de probabilité : en l'absence de formules analytiques pour de telles distributions, le stockage de quantiles empiriques ce serait révélé de prime abord bien trop fastidieux. Il pourrait cependant se révéler utile de mener une réflexion plus approfondie sur le sujet au cas où les principes de chargements linéaires aboutiraient à une impasse.

Les bases de données ont été agrégées sous Excel, puis converties en fichiers .csv afin d'être importées sous R

2.2. Etude des corrélations

La formule de HERMES (et de manière générale toute formule qui sera testée au cours de cette étude) répond au principe de chargement linéaire. Par conséquent ses paramètres s'estiment par le biais de la régression linéaire. Deux des conditions favorisant l'efficacité de cette méthode sont d'une part la bonne corrélation des variables explicatives avec la variable à expliquer et d'autre part des variables explicatives fortement décorrélées entre elles.

Nous avons donc calculé la matrice des corrélations des variables numériques de cette étude afin d'étudier ces conditions :

	Cotation	PT	PP	SD	VaR995	Limit	Priority	ProbaTouch
Cotation	1	**0,87**	**0,86**	**0,68**	**0,66**	0,31	0,08	0,26
PT	0,87	1	0,98	0,84	0,8	0,38	0,12	0,29
PP	0,86	0,98	1	0,71	0,7	0,22	-0,02	0,4
SD	0,68	0,84	**0,71**	1	0,92	0,7	0,43	-0,07

VaR995	0,66	0,8	**0,7**	**0,92**	1	0,65	0,41	-0,05
Limit	0,31	0,38	0,22	0,7	0,65	1	0,76	-0,37
Priority	0,08	0,12	-0,02	0,43	0,41	0,76	1	-0,43
ProbaTouch	0,26	0,29	0,4	-0,07	-0,05	-0,37	-0,43	1

Matrice des corrélations du nuage de points (T.III.2.1)

Les variables exprimées sont toutes normalisées par l'assiette de primes.

Les variables exprimées sont toutes normalisées par l'assiette de primes. Nous avons remarqué trois choses :

- Primes techniques de la formule actuelle et cotations sont assez bien corrélées entre elles (à 87%, en vert sur la matrice), ce qui indique que la formule actuelle n'est pas totalement inefficace.
- Les meilleures variables explicatives semblent être (en bleu sur la matrice): prime pure, écart-type des résultats et $VaR_{99,5\%}$ des résultats, qui sont corrélées à plus de 65% avec les cotations. La priorité étant presque totalement décorrélée de la cotation (8%) et limite et probabilité de toucher étant limitée à 30% de corrélation.
- Les trois variables explicatives sont en revanche fortement corrélées entre elles (en rouge sur la matrice), principalement l'écart-type avec la $VaR_{99,5\%}$ (plus de 90%).

Cette forte corrélation entre écart-type et $VaR_{99,5\%}$, si elle n'est qu'un constat empirique, est cependant un résultat fort qui montre une certaine homogénéité entre ces deux mesures de risques.

Nous pouvons en tous cas craindre que du fait de cette forte corrélation l'ajout à la formule actuelle d'une nouvelle variable explicative (la $VaR_{99,5\%}$ du résultat) n'apporte que peu d'information.

2.3. Etude de l'efficacité de la formule initiale de HERMES

Il nous a d'abord fallu choisir un critère mesurant l'efficacité des formules. Etant dans un cadre linéaire, c'est sur le coefficient de détermination que notre choix s'est porté :

Soient n observations de la variable à expliquer $Y_1,...,Y_n$ et leurs n estimations associées $\hat{Y}_1,...,\hat{Y}_n$. Alors nous définirons le coefficient de détermination des estimations, noté R², par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} \quad \text{(III.2.2)}$$

Plus le R² est proche de 1 (son maximum), meilleure est l'adéquation (la distance entre Y_i et son estimateur se rapproche de 0).

Cette mesure présente le désavantage d'être systématiquement croissante dès qu'on ajoute un facteur explicatif (ce qui signifie qu'on pourrait « artificiellement » rajouter un grand nombre de facteurs sans aucun rapport avec la variable à expliquer pour augmenter le R²) aussi utilisera-t-on une version corrigée du coefficient de détermination, le R² ajusté :

$$R^2_{aj.}(k) = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1 - R^2) \quad \text{(III.2.3)}$$

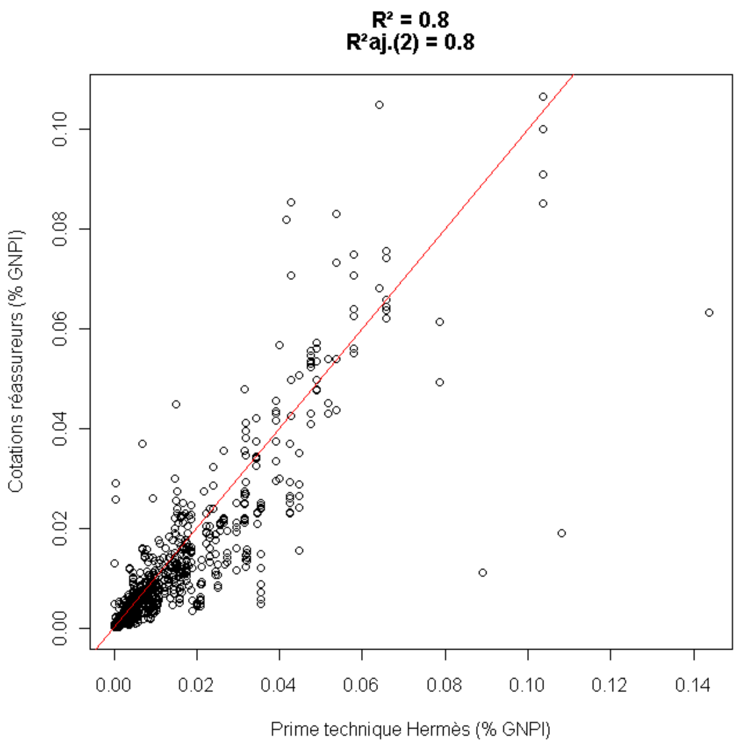
Cette expression est décroissante selon le nombre de facteurs explicatifs. Par la suite, sans autre précision, la notation R^2 désignera le R^2 ajusté au nombre de facteurs explicatifs idoine.

Munis de cette « mesure » nous avons étudié l'efficacité de la formule à plusieurs niveaux :
- Au global (sur l'ensemble du nuage de point)
- Par entité
- Par branche d'activité
- Par probabilité de toucher la tranche du traité

Parmi ces quatre niveaux, Les deux premiers se sont révélés être les plus pertinents, aussi les présenterons-nous successivement.

2.3.1. Efficacité au global

En projetant dans un plan les cotations et les primes techniques de l'ensemble du nuage de point nous avons obtenu le graphe suivant :



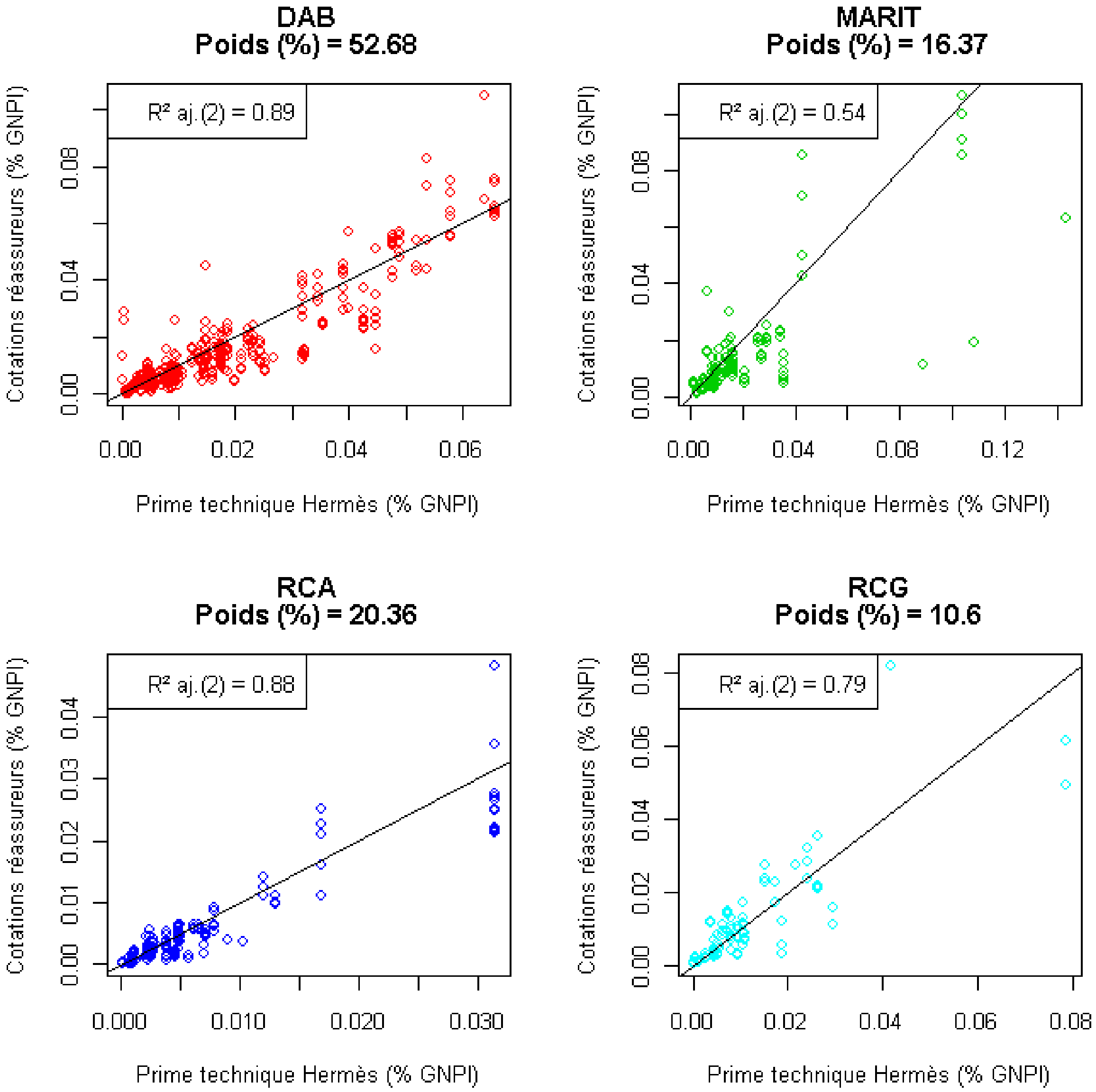
Projection des cotations et des primes HERMES hors aberrants - (G.III.2.1)

La droite rouge est la droite identité : l'idéal serait donc de rapprocher le plus possible le nuage de points de la droite. La répartition en chapelets de points verticaux s'explique par le fait que plusieurs réassureurs cotent la même tranche (pour laquelle HERMES ressort une prime technique unique).

Le R^2 ajusté est de 80%. Sans être totalement satisfaisant, ce résultat montre que la prime HERMES présente de bonnes qualités d'adéquation.

2.3.2. Efficacité par branche d'activité

Le nuage de points a été décomposé par branche d'activité, la formule s'adaptant diversement à chacune d'entre elles :



Projection des cotations et des primes HERMES par branche d'activité – (G.III.2.2)

Les branches DAB et RCA sont très bien représentées avec des R^2 approchant les 90%. Ces deux entités représentent près de 75% du nuage de points. La formule est mois efficace sur la branche RCG avec un R^2 à 79%, tandis que la branche Maritime est très mal représentée (R^2 de 55%).

C'est donc sur les branches RCA et Maritime que se portera principalement notre attention dans la recherche d'une formule de chargement révisée.

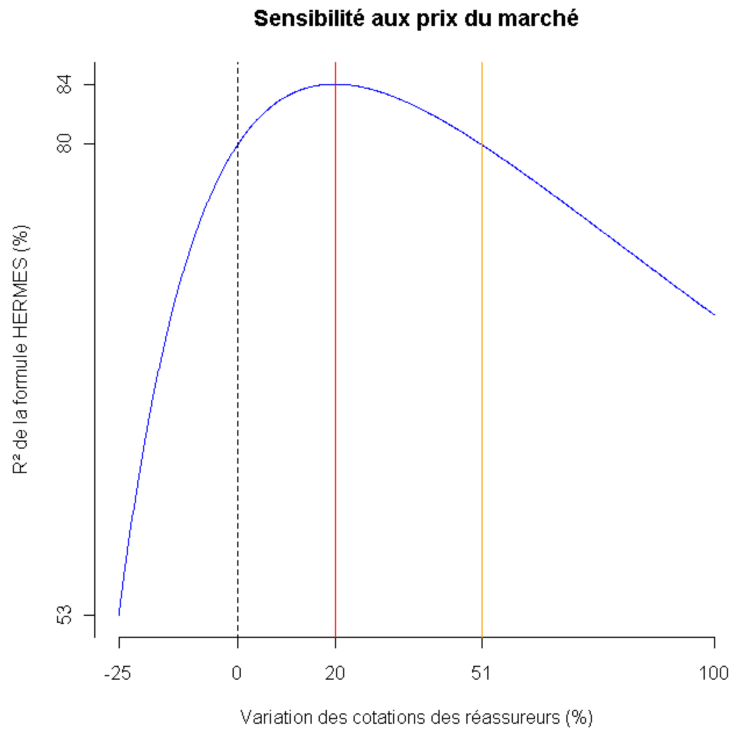
Sensibilité aux cycles du marché :

2.3.3. Sensibilité au global

Comme rappelé dans la première partie, la prime de réassurance dépend des cycles du marché. Après plusieurs années avec une baisse régulière des primes, les années 2010 et 2011, de forte sinistralité (Tempête Xynthia sur la côte Atlantique, tsunami puis crise nucléaire au Japon, tremblements de terre à répétition en Nouvelle-Zélande) annoncent un renversement de tendance.

Selon les premiers contacts pris avec les réassureurs en vue du renouvellement des contrats pour 2012, et à moins d'une forte sinistralité mondiale d'ici la fin de l'année 2011, les primes ne devraient cependant pas subir d'augmentations l'année prochaine. En revanche il semble sûr qu'elles ne baisseront pas non plus. On peut donc pertinemment envisager une hypothèse de durcissement du marché avec une hausse générale des prix au cours des prochaines années.

Pour modéliser cette tendance nous avons appliqué des séries de chocs uniformes à l'ensemble des cotations, et avons calculé à chaque fois le R^2 associé aux primes techniques. Le résultat peut être ressorti sous la forme d'un graphe (ici l'ensemble du nuage de points) :

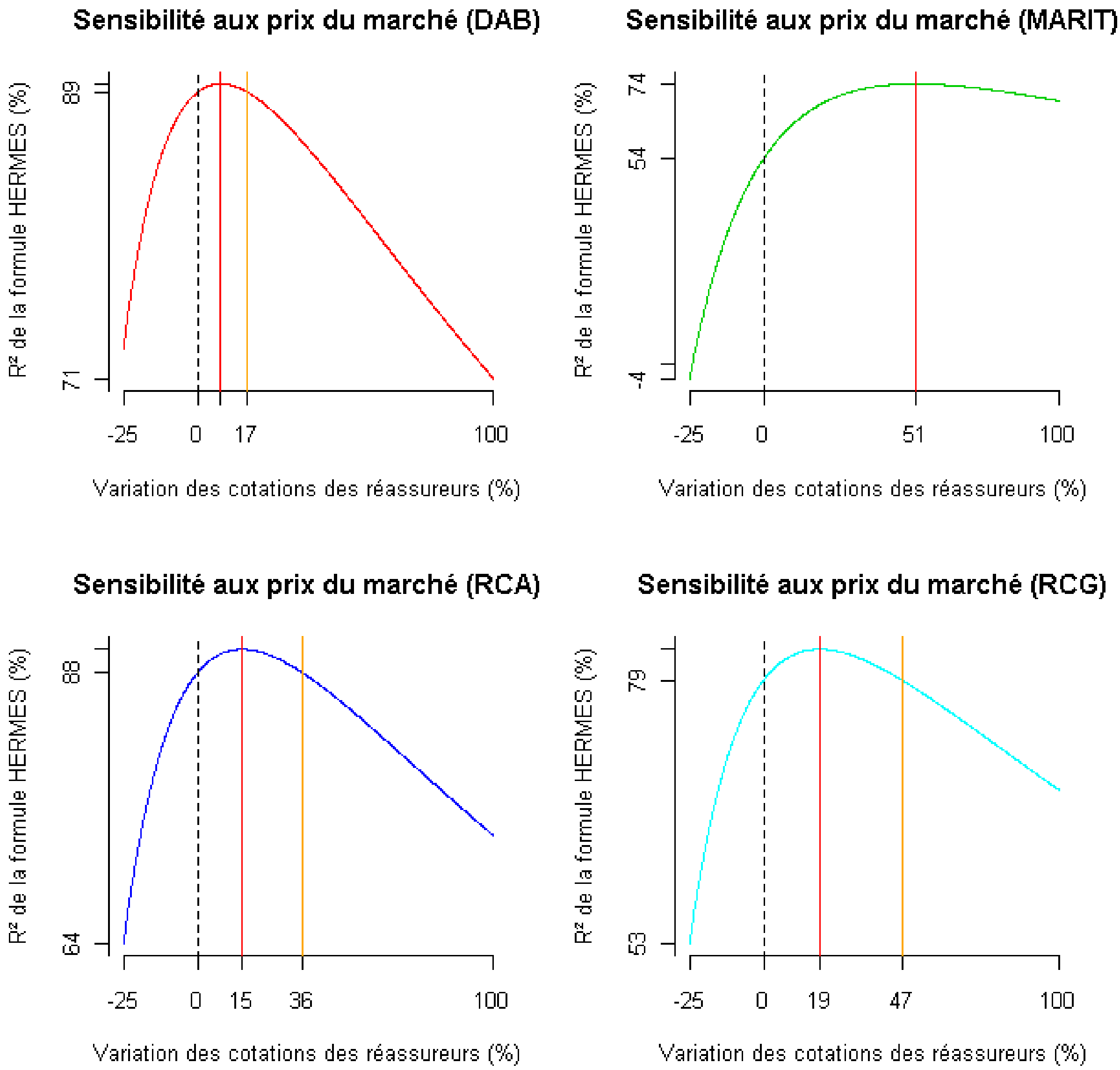


Sensibilité du R^2 de la formule HERMES aux variations du marché - (G.III.2.3)

Le R^2 serait optimal pour une hausse de 20% du prix des cotations, avec une progression de quatre points à 84%. Aucune dégradation ne serait constatée pour une hausse allant jusqu'à 50%. Cette formule est donc favorable à la tendance actuelle du marché de la réassurance.

2.3.4. Sensibilité par branche d'activité

La même étude de sensibilité sur chaque branche d'activité donne les résultats suivants :



Décomposition par branche d'activité des sensibilités - (G.III.2.4)

L'amplitude des sensibilités au cycle du marché est liée à l'efficacité de la formule sur chacune des branches d'activité.

Ainsi, les variations optimales pour DAB et RCA et les améliorations de R^2 qui en découlent sont faibles (respectivement 7,75% et 15% pour des R^2 dépassant à peine 90%) tandis que RCG est plus proche de la moyenne (hausse optimale à 20%, maximale à 50%).

Il apparaît en revanche clairement que le chargement pour la branche Maritime n'est pas adapté aux prix du marché : la hausse optimale est de 50% (pour un R^2 associé à 74%) et la hausse maximale avant dégradation du R^2 dépasse les 100%.

Cette étude de sensibilité montre d'une part une sur-tarification de la formule actuelle pouvant permettre d'anticiper une hausse future du marché de la réassurance, et d'autre part un défaut important de la formule sur la branche Maritime, qui peut s'expliquer en partie par une divergence temporaire entre le calibrage des modèles de générateurs sous-jacents à HERMES et le marché actuel.

2.4. Etude de formules alternatives

Le but principal de cette partie est de tester l'introduction d'un nouveau facteur explicatif : la $VaR_{99,5\%}$ du résultat de réassurance. Il existe plusieurs manières de l'intégrer :

(i) en s'en servant comme substitut de l'écart-type :

$$P = \frac{PP + \gamma VaR_{99.5\%}(R_{Réass})}{1-\beta} \quad \text{(III.2.4)}$$

(ii) en l'ajoutant aux deux premiers facteurs explicatifs (prime pure et écart-type) :

$$P = \frac{PP + \alpha\sigma(Résultat) + \gamma VaR_{99.5\%}(R_{Réass})}{1-\beta} \quad \text{(III.2.5)}$$

Dans les deux cas, le paramètre des coûts fixes β sera considéré dans un premier temps comme juste et donc immobilisé à sa valeur actuelle (15%).

2.4.1. Formule avec VaR (III.2.4)

L'optimisation des paramètres de la formule (III.2.4) a donné les résultats suivant :

Branche d'activité	Chargement VaR (%)	R²aj.(1) (%)	R²aj.(1) actuel (%)
Toutes branches	2,43	79,44	79,35
DAB	2,34	89,47	89,26
MARIT	0	76,99	53,99
RCA	2,44	90,27	88,35
RCG	6,38	79,49	76,96

Paramètres optimaux de régression sur (III.2.4) – (T.III.2.2)

Il apparait que le remplacement de 20% d'écart-type par environ 2,5% de VaR est en moyenne sans effet sur le R^2 de l'ensemble du nuage de points (79% dans les deux cas).

Hormis pour le Maritime, avec un chargement nul, les améliorations constatées sont insignifiantes (DAB) ou très modérées (RCA et RCG), la plus forte étant de 2,5 points pour la RCG (de 77% à 79,5%).

Le chargement nul du Maritime confirme sa sur-tarification inhérente à la calibration de la sinistralité.

2.4.2. Formule avec écart-type et VaR (III.2.5)

L'optimisation des paramètres de la formule (III.2.5) a donné les résultats suivant :

Branche d'activité	Chargement SD (%)	Chargement VaR (%)	R²aj.(2) (%)	R²aj.(1) actuel (%)
Toutes branches	8,13	0,11	84,04	80,19
DAB	13,44	0,26	89,9	89,26
MARIT	0	0	76,84	53,99
RCA	12,48	0	90,83	88,35
RCG	15,92	0	78,94	78,51

Paramètres optimaux de régression sur (III.2.5) – (T.III.2.3)

Pour un remplacement de 12 points d'écart-type par 0,1 de VaR, la formule (III.2.4) permet une hausse modérée de quatre points du R^2 (de 80% à 84%).

Néanmoins, en décomposant par branche d'activité, nous constatons que la VaR n'a en réalité que peu d'influence, seule la branche DAB l'adoptant (0,25% pour 13,5% de chargement d'écart-type) n'entrainant qu'une amélioration négligeable (R^2 toujours en-deçà des 90%).

Les branches RCA et RCG ont encore des comportements similaires avec une baisse des chargements d'écart-type (ce qui est en concordance avec le fait que la formule actuelle est sur-tarifée, comme nous l'avons vu dans l'étude de sensibilité) ne permettant qu'une amélioration limitée du R^2 (de 88% à 91% pour RCA, et de 78,5 à 79% pour RCG).

Les paramètres de chargement sont tous deux à 0 pour la branche Maritime. Nous avons choisi pour cette dernière d'effectuer une régression en optimisant également le paramètre des coûts fixes :

	Coûts fixes(%)	Chargement SD(%)	Chargement VaR(%)	R^2aj.(3)(%)	R^2aj.(2) actuel(%)
MARIT	4,47	0	0,58	77,06	53,99

Paramètres optimaux de régression sur le Maritime – (T.III.2.4)

Malgré un changement radical (coûts fixes passant de 15% à 5%, remplacement de 20% d'écart-type par 0,6% de VaR) la meilleure formule observable pour le Maritime n'obtient qu'un R^2 de 77%, donc inférieur à 80%. Il nous est donc impossible de corriger le biais initial des générateurs de cette branche.

L'introduction de la $VaR_{99,5\%}$ du résultat de réassurance dans la formule de chargement n'a donc eut qu'un faible impact sur l'adéquation de cette formule avec les cotations des réassureurs. Ce manque d'efficacité s'explique en grande partie par une forte corrélation constatée entre écart-type et VaR (supérieure à 90%) les rendant ainsi pratiquement interchangeables.

Les défauts inhérents à cette mesure de risque (pas de relation générale pour la somme de deux variables indépendantes, pas de sous-additivité) la rendent de plus délicate à manipuler, aussi lui préférerons-nous l'écart-type.

Le manque irrémédiable d'information sur une part importante du processus de détermination du prix (stratégie du réassureur en fonction de ses objectifs en terme de solvabilité et de profitabilité : appétence aux risques différente selon la branche d'activité, ou encore la priorité de la tranche considérée) rend hasardeux tout exercice de tarification fondé sur la seule distribution du risque réassuré : la formule actuelle présentant en moyenne 80% d'adéquation avec les cotations, les 20% restant peuvent modéliser notre incertitude et notre ignorance du comportement du réassureur.

Nous avons donc pris la décision de conserver la formule (III.2.1) dans l'outil HERMES. Cette étude n'aura néanmoins pas été inutile, ayant permis de poser les bases théoriques d'une tarification dépendant du capital économique dans le cadre des reconstitutions payantes.

3. Cadre du traité en quote-part (QP)

Le montant de prime cédée au réassureur, défini par le pourcentage de quote-part, est corrigé du montant de la commission de réassurance versée à la cédante pour participation du réassureur aux charges d'acquisition et de gestion du portefeuille. C'est sur cette commission, principal objet des négociations entre réassureur et cédante, que porte l'incertitude sur la prime de réassurance.

Notations :

- q est la part du Quota-Share (par exemple : q = 30%).
- c est la commission de réassurance associée.
- S est le montant total de sinistralité, à partager entre cédante et réassureur. S est de fonction de répartition F_S et de densité f_S.
- GNPI est le montant des primes collectées par la cédante sur le portefeuille réassuré

Alors le montant de sinistralité à charge du réassureur et le montant des primes cédées au regard du traité sont respectivement :

$$Réc = q \times S \text{ et } PR = q \times (1 - c) \times GNPI$$

D'où le résultat du traité, **du point de vue du réassureur** :

$$R_{Réassureur} = PR - Réc = q \times (1 - c) \times GNPI - q \times S = q\big((1 - c)GNPI - S\big) \quad \text{(III.3.1)}$$

3.1. Marge du réassureur

Comme vu au chapitre I, la marge du réassureur est déterminée par cette commission. Nous pouvons donc fixer une marge-cible (mettons M = 5 %) et en déduire la commission :

$$\begin{cases} c = 1 - LR - M \\ LR = \dfrac{E[S]}{GNPI} \end{cases} \quad \text{(III.3.2)}$$

De manière générale, en reprenant les principes définis dans la partie XS, nous supposons, afin qu'il puisse dégager une marge, que le réassureur ne souscrira jamais un contrat ne lui assurant pas un résultat en moyenne positif. Par conséquent nous pouvons poser la contrainte :

$$E\left[R_{Réassureur}\right] \geq 0 \Leftrightarrow q\big((1-c)GNPI - E[S]\big) \geq 0$$
$$E\left[R_{Réassureur}\right] \geq 0 \Leftrightarrow c \leq 1 - \frac{E[S]}{GNPI} = c_{\max} \quad \text{(III.3.3)}$$

Cette première borne c_{max} majore la commission de réassurance. Nous pouvons observer que c_{max} correspond simplement à une marge de réassurance nulle.

Nous devons ensuite vérifier les règles de transfert de risque, dont deux indicateurs ont été définis en partie II : la règle 10-10 et l'ERD. Nous allons donc calculer ces deux indicateurs dans le cadre d'un traité QS.

3.2. Règle 10%-10%

La contrainte de la règle 10%-10% sur la commission de réassurance se traduit comme il suit :

$$P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow c \geq 1 - \frac{VaR_{90\%}(S)}{1.1 \times GNPI} = c_{10-10} \quad \text{(III.3.4)}$$

La démonstration de ce résultat est en annexe (A.III.6).

Afin de respecter la règle 10-10, la commission de réassurance doit être supérieure à c_{10-10} qui est fonction décroissante de S (plus la sinistralité est grande, plus le risque pris est important) et croissante de GNPI (plus la prime partagée est importante, plus la perte prise en compte pour la règle 10-10 l'est). La commission minimale au regard de la règle 10-10 est indépendante de la part q cédée.

Il est possible de trouver des valeurs de c_{10-10} négatives, ce qui implique que le transfert de risque sera validé au regard de la règle 10% - 10%, aussi faible que soit la commission adoptée. Ce cas correspond cependant à une situation où la sinistralité maximale du portefeuille avec une probabilité de 10% serait supérieure à 110% du montant des primes collectées (cf. III.3.3). Une telle situation semble trop risquée pour la Cédante et donc peu réaliste.

3.3. Règle de l'ERD

La contrainte sur la commission de réassurance donnée par l'ERD est également une minoration de la commission par un pourcentage minimum noté c_{ERD} et fourni par résolution de l'équation (détaillée en annexe A.III.7) :

$$P\left(S > (1 - c_{ERD})GNPI\right)\left(\frac{E\left[S / S > (1 - c_{ERD})GNPI\right]}{(1 - c_{ERD})GNPI} - 1\right) = 1\% \quad \text{(III.3.5)}$$

La commission de réassurance est donc d'une part minorée par c_{10-10} ou c_{ERD} selon la règle choisie (la règle ERD impliquant la règle 10%-10%, nous devrions logiquement observer : $c_{10-10} < c_{ERD}$) et d'autre part majorée par c_{max}. Il est théoriquement possible d'avoir cette dernière quantité inférieure aux deux autres. Dans ce cas nous pouvons en conclure qu'un traité en quote-part n'est pas possible aux conditions réalisant cette situation.

Il reste donc à vérifier que la commission-cible est bien incluse dans l'intervalle décrit par c_{10-10} ou c_{ERD} et c_{max}, et à défaut prendre la borne la plus proche comme commission de réassurance.

L'établissement d'intervalles de confiance liés aux contraintes de transfert de risque est possible de manière simple que dans le cadre d'un traité en quote-part unique à cause de la réduction du nombre de variables à la seule commission : dans le cas de traités XS, cette vérification ne s'effectuera en pratique qu'*a posteriori*.

Ce chapitre III aura montré toute la difficulté qu'il y a à tarifer sur la base unique du risque couvert par un contrat de réassurance. Il était néanmoins nécessaire de trouver un moyen d'évaluer par défaut un prix afin de poursuivre notre calcul d'une estimation de la Création de Valeur. De ce prix découle désormais une estimation du résultat de réassurance, et donc le calcul du STEC de prime d'une structure de réassurance, conduisant au calcul de la Création de Valeur pour les portefeuilles des branches courtes (dommages aux biens notamment). Il nous reste maintenant à adapter le critère de Création de Valeur aux branches longues, ce qui fera l'objet du chapitre IV suivant.

Chapitre IV : Adaptation de la Création de Valeur aux branches longues

Pour les branches d'activité dites « longues », la gestion des sinistres peut s'étaler sur une durée prolongée, durée pendant laquelle le montant des sommes dues fait l'objet de régulières réévaluations, entraînant ainsi une gestion dynamique des réserves.

La connaissance du cadencement des paiements de tels sinistres permet de prendre en compte l'actualisation des flux entre cédante et réassureur (primes de reconstitutions d'une part et récupérations d'autre part) et ainsi de partager les produits financiers liés au placement des réserves.

Le montant « final » du sinistre étant une inconnue, il y a un risque pour que les réserves subissent un fort réajustement d'une année sur l'autre. Ce risque, nommé « risque de réserve », est pris en compte par la directive Solvabilité II qui lui associe un capital dédié.

En entrant en jeu à partir d'un certain seuil de paiements des sinistres (et donc à partir d'une certaine date dans le temps) la réassurance modifie profondément les cadencements de paiement. D'autre part la volatilité des réserves, directement liée à celle de la sinistralité, se trouve diminuée. Ces modifications doivent être prises en compte dans l'étude de l'impact d'une structure de réassurance :

- le coût moyen de réassurance ainsi que l'économie de STEC de prime sont calculés avec des résultats actualisés (c'est-à-dire ramenés à un horizon d'un an comme le prévoit la directive Solvabilité II), qui dépendent directement des cadences de flux.
- Un STEC de réserve est estimé pour les situations brute et nette de réassurance, conduisant ainsi au calcul d'une économie de capital liée à la diminution de la volatilité des réserves et venant renforcer la création de valeur.

Nous allons donc exposer dans cette partie la manière avec laquelle sont générés les cadencements de paiement et en déduire le calcul du STEC de prime, puis la méthode de calcul du STEC de réserve, en achevant par l'intégration de ces composantes à la Création de Valeur.

Pour ce faire, nous devons tout d'abord formaliser le cadre des branches à développement long (*Long Tail*).

1. Formalisation du cadre *Long Tail*

Nous considèrerons une activité d'assurance liée à un portefeuille de contrats courants du premier janvier au 31 décembre de l'année 1. Du fait des caractéristiques spécifiques à cette activité (sinistres à déroulement long, comme la responsabilité civile) les paiements liés à tous les sinistres se développent pendant un certain nombre d'années que nous nommons n (n=15 ans ou n=30 ans par exemple). Passé le 31 décembre de l'année n, tous les sinistres sont supposés clos (c'est-à-dire qu'ils sont tous déclarés et payés intégralement).

Pour un sinistre donné sa **charge** ou son **ultime** sont le montant cumulé des paiements relatifs à ce sinistre au 31 décembre de l'année n.

Nous notons U l'ultime de ce sinistre et P(1),…,P(n) les montants des paiements effectués chaque année entre 1 et n. Alors :

$$U = \sum_{i=1}^{n} P(i) \quad \text{(IV.1.1)}$$

Au premier janvier d'une année l'estimation d'un montant ultime est donnée par la somme des paiements déjà effectués avec une estimation de ceux à venir. Nous nommons $\hat{P}_i(i),\ldots,\hat{P}_i(n)$ les estimations faites à cette date des paiements à venir. Alors :

$$\hat{U}_i = \sum_{j=1}^{i-1} P(i) + \sum_{j=i}^{n} \hat{P}_i(j) \quad \text{(IV.1.2)}$$

Exemple : *Nous constatons les paiements et réserves suivants pour un sinistre s'étalant sur cinq ans.*

Année de paiement Visions successives	1	2	3	4	5	Ûi
1/1/1	10	10	10	10	10	50
1/1/2	**10**	10	10	10	10	50
1/1/3	10	**20**	20	20	10	80
1/1/4	10	20	**30**	30	20	110
1/1/5	10	20	30	**20**	20	100
31/12/5	10	20	30	20	**10**	90

Cadencement de paiement et estimations d'ultime d'un sinistre - (T.IV.1.1)

Les nombres en bleu correspondent à des estimations, ceux en gris à des paiements passés. Les nombres en rouge et gras sont les paiements de l'année précédente. Au 31 décembre de la dernière année nous constatons que l'estimation est bien égale au montant exact (puisque tous les paiements ont été effectués).

Au premier janvier d'une année de paiement les **réserves** sont donc constituées par la différence entre la charge estimée à cette date et celle du cumul des paiements déjà effectués. Les réserves sont nécessairement positives au cours du temps, et finissent nulles au 31 décembre de l'année n.

Nous nous plaçons au premier janvier de l'année i :

$$R\acute{e}serves(1/1/i) = \hat{U}_i - \sum_{j=1}^{i-1} P(i) = \sum_{j=1}^{i-1} P(i) + \sum_{j=i}^{n} \hat{P}_i(j) - \sum_{j=1}^{i-1} P(i) = \sum_{j=i}^{n} \hat{P}_i(j) \quad \text{(IV.1.3)}$$

A proprement parler, les réserves se calculent le plus souvent sur l'ensemble des sinistres du portefeuille et non sinistre par sinistre, mais la logique reste la même (différence entre l'agrégation des charges estimées et celle des paiements déjà effectués).

Année de paiement	1	2	3	4	5
Réserves (31/12)	40	50	50	20	0

Réserves au 31 décembre du sinistre présenté en (T.IV.1.1) - (T.IV.1.2)

Munis de ces notions, nous pouvons désormais aborder la génération du cadencement des paiements.

2. Cadencement des paiements

Nous disposons, grâce aux lois de fréquence et d'intensité des générateurs, d'une matrice donnant pour chacune des 10.000 simulations réalisées par HERMES un nombre de sinistres issu de chaque générateur, et pour tous ces sinistres leur montant ultime associé.

C'est ce montant qu'il s'agit maintenant de projeter dans le temps. Dans toute la suite de cette partie nous nous centrerons sur un générateur unique, la démarche étant la même pour chaque générateur.

Pour répartir dans le temps les montants ultimes des sinistres, nous allons utiliser la décomposition moyenne des temps de paiement de pourcentages – cibles de l'ultime d'un sinistre fournis par les fichiers générateurs de HERMES.

Afin de générer les pourcentages payés chaque année de l'ultime d'un sinistre, nous avons le choix entre deux possibilités : la première est d'établir un cadencement de paiements déterministe qui ne varierait pas d'un sinistre à l'autre (plus simple à mettre en œuvre), la seconde un stochastique (plus réaliste en théorie, mais se heurtant à la difficulté du choix des lois).

Dans ce dernier cas le cadencement de paiement moyen doit logiquement être égal au cadencement déterministe, aussi allons-nous commencer par établir celui-ci.

2.1. Cadencement de paiement déterministe

Partons du cadencement de paiement moyen fourni par le générateur. Celui-ci associe à des pourcentages-cibles un temps moyen. Pour notre part, nous voulons effectuer la démarche inverse en associant à des temps donnés (chaque année successive) un pourcentage moyen.

A chacun des coefficients c_i est associé un temps caractéristique t_i. Alors le temps mis pour que soit payé chaque proportion successive c_i du sinistre à l'ultime est donné par une variable aléatoire X_i de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i = \frac{1}{t_i}$.

Exemple : en reprenant (T.IV.2.1) *les paramètres des X_i sont donnés par le tableau suivant:*

Pourcentage-cible	5%	25%	50%	75%	95%	100%
Temps de paiement	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Espérance (années)	2,92	4,82	3,48	2,63	3,46	2,68
Paramètre	0,342	0,207	0,287	0,381	0,289	0,373

Paramètres des lois des temps de paiement - (T.IV.2.1)

Le temps total de paiement d'un sinistre est majoré par : $T_{\max} = \sum_{i=1}^{k} t_i$ (l'exemple donné par (T.IV.2.1) donne : $T_{max} = 20$).

Pour un temps t donné (t entre 0 et T_{max}) le pourcentage p_t de sinistre ultime payé est obtenu par interpolation linéaire sur les tirages des lois exponentielles.

Exemple : Reprenons le générateur au cadencement caractérisé par (T.IV.2.1). *Une simulation donne les tirages suivant pour les temps de paiements d'un sinistre:*

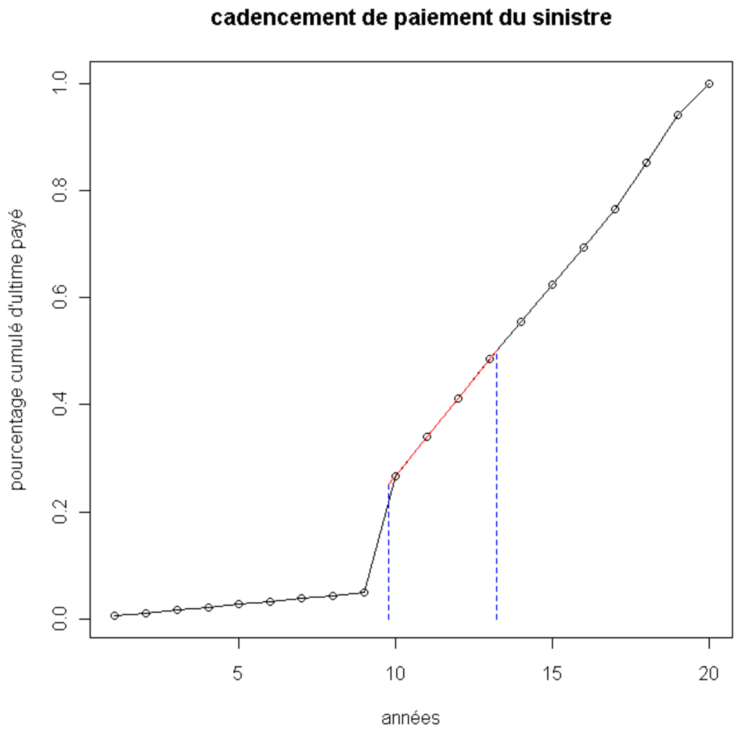
Pourcentage-cible	5%	25%	50%	75%	95%	100%
Temps de paiement	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Tirage	9,15	0,63	3,43	3,61	2,30	0,73
Valeur Cumulée	9,15	9,77	13,21	16,82	19,12	19,85

Tirage d'un cadencement de paiement - (T.IV.2.2)

Posons : t = 10 ans. Alors t est entre T_2 (9,77) et T_3 (13,21) donc : Ut = 2. L'application de (IV.2.3) *donne:*

$$p_{10} = 25\% + \frac{10 - 9{,}77}{13{,}21 - 9{,}77}(50\% - 25\%) = 26{,}64\%$$

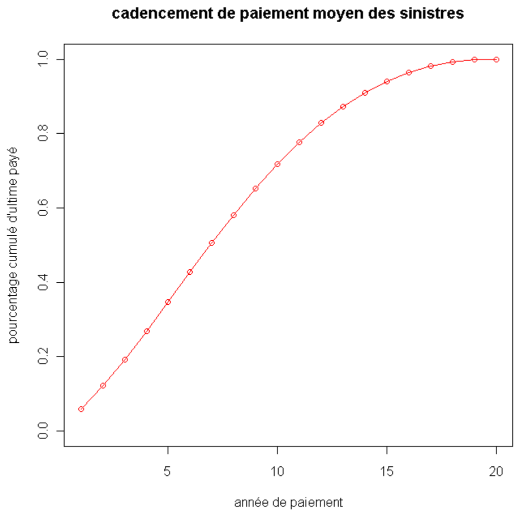
Selon cette simulation, environ un quart du montant ultime du sinistre est donc payé au bout de 10 ans. L'application pour chaque année de l'interpolation linéaire donne le cadencement de paiement suivant :



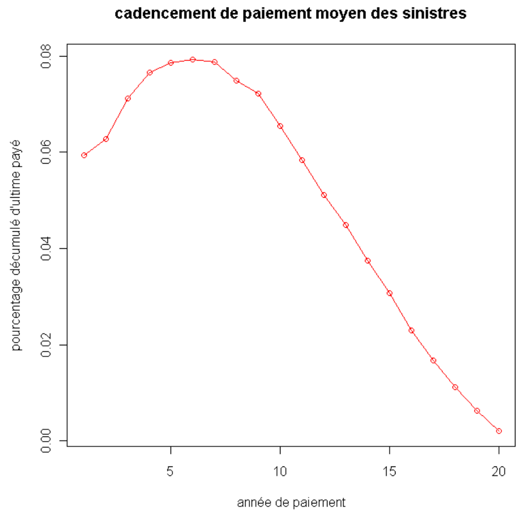
Graphe de cadencement de paiement d'un sinistre – (G.IV.2.1)

Le pourcentage cumulé payé au bout de 10 ans est bien obtenu par interpolation linéaire entre T_2 et T_3.

La multiplication des trajectoires de paiement permet de converger vers un cadencement de paiement moyen empirique :



Cadencement des paiements cumulés – (G.IV.2.2)

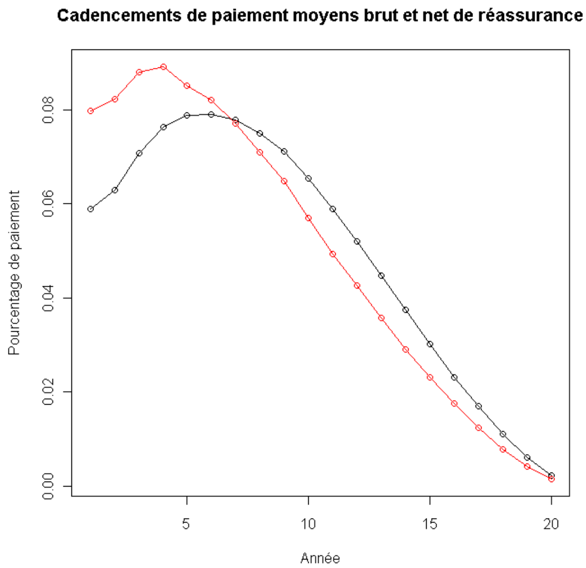


Cadencement des paiements décumulés – (G.IV.2.3)

Ce cadencement de paiement moyen, calculé pour chaque générateur, est appliqué à chaque charge ultime de sinistre générée, créant ainsi une matrice des cadencements de paiement.

La durée de paiement maximum pouvant varier d'un générateur à l'autre, les années au-delà de l'année maximale pour un générateur présentent alors un flux de paiement nul pour les sinistres issus du générateur le moins long.

L'application d'un cadencement de paiement déterministe permet de constater *de visu* le décalage entre les situations brute et nette de réassurance :



Décalage des cadencements de paiement par la réassurance – (G.IV.2.4)

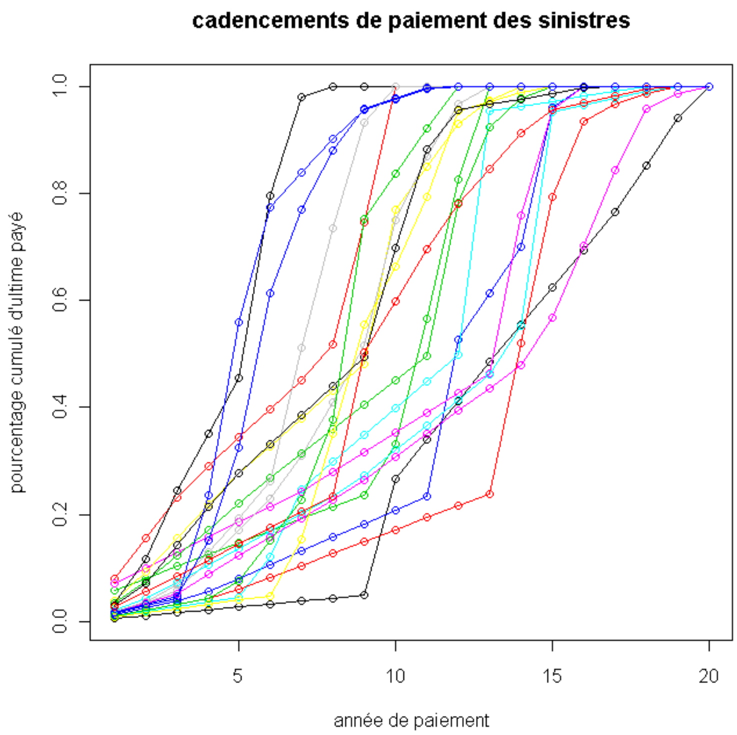
Dans cet exemple, la Cédante paie en net (courbe rouge) proportionnellement une plus grande part de sinistres les premières années comparativement au brut, ce qui signifie que le traité ne rentre pas immédiatement en vigueur (ce qui sera d'autant plus vrai que la rétention est haute, le montant cumulé des sommes payés pour un sinistre mettant alors plus de temps à l'atteindre). Ce décalage a des conséquences notamment sur l'estimation du STEC de réserve, comme nous le verrons dans la partie 3 de ce chapitre.

2.2. Cadencement de paiement stochastique

Le cadencement de paiement stochastique s'établit en utilisant les mêmes tirages ayant permis d'estimer le cadencement de paiement empirique.

Pour un générateur g donné, sur N simulations, un total N_g de sinistres aura été simulé, en sommant le nombre de sinistres du générateur sur chaque simulation.

Alors en effectuant N_g tirages indépendants de sextuplets de lois exponentielles selon les temps d'atteintes moyens caractéristiques du générateur, nous en déduisons N_g cadences de paiements indépendantes que nous pouvons appliquer à chacun des sinistres :



Cadencements de paiements de sinistres – (G.IV.2.5)

2.3. Calcul du STEC de prime

La directive Solvabilité II impose une vision à un an du résultat. Il s'agit donc, afin de calculer le capital associé au risque de prime, de ramener un résultat se développant sur n années à une vision à un an.

L'élaboration de la génération automatique d'un cadencement de paiement nous permet maintenant de projeter dans le temps les paiements des sinistres, et donc des récupérations comme des éventuelles primes de reconstitutions.

Il est alors possible de mesurer un résultat de réassurance par année de paiement. Pour une année i. En reprenant la définition (II.3.3) du résultat de réassurance nous avons :

$$R_{Réass}(i) = \frac{Réc(i) - PR(i)}{(1+r)^{-1/2}} \quad \text{(IV.2.4)}$$

Où Réc(i) et PR(i) sont respectivement les récupérations et les primes de réassurance payées au cours de l'année i.

Alors le résultat de réassurance, vu à un an, est constitué de la somme actualisé des résultats de réassurances annuels :

$$R_{Réass} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{Réass}(i)}{(1+r)^{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Réc(i) - PR(i)}{(1+r)^{i+1/2}} \quad \text{(IV.2.5)}$$

Nous pouvons de la même manière ramener à un an le résultat de la cédante brut :

$$R_{brut} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{brut}(i)}{(1+r)^{i}} = P - \sum_{i=1}^{n} \frac{Paiements(i)}{(1+r)^{i+1/2}} - F \quad \text{(IV.2.6)}$$

Ces mesure actualisées des résultats ramenées à un an, vont permettre de calculer un capital associé au risque de prime en situation brute comme nette de réassurance en *long-tail* :

$$\begin{cases} STEC^{brut}_{prime} = E[R_{brut}] - VaR_{0.5\%}(R_{brut}) \\ STEC^{net}_{prime} = E[R_{brut} + R_{Réass}] - VaR_{0.5\%}(R_{brut} + R_{Réass}) \end{cases} \quad \text{(IV.2.7)}$$

Une diminution de capital pour le risque de prime peut donc être évaluée également pour les branches à développement long grâce à l'établissement d'un cadencement de paiement :

$$\Delta^{prime}_{Capital} = STEC^{brut}_{prime} - STEC^{net}_{prime} \quad \text{(IV.2.8)}$$

Le choix d'un cadencement de paiement stochastique semble plus réaliste, chaque sinistre étant supposé indépendant des autres.

Cependant, la génération d'un tel cadencement peut s'avérer lourde en termes de temps. D'autre part, le choix d'un cadencement stochastique augmente la volatilité des paiements et donc la valeur du capital requis pour chaque année de déroulement, comme nous le verrons dans la partie suivante. Cette augmentation peut conduire à une surestimation de ce capital.

Enfin le modèle de déroulement dans le temps des paiements, calibré par des lois exponentielles, peut s'avérer inadapté face aux données historiques.

Opter pour un cadencement de paiement moyen peut permettre de limiter le temps de calcul, la volatilité, et l'incertitude du modèle. Il pourra donc s'avérer plus adapté que le cadencement de paiement stochastique dans certaines circonstances.

3. Calcul des STEC de réserve

La MVM (*Market Value Margin*) est définie comme le coût actualisé du capital auquel elle est associée. Dans le cadre des portefeuilles à branche longue, chaque année de développement (soit de l'année 2 à l'année n) doit être constitué un capital de réserve, auquel nous pouvons donc associer sa MVM. Ainsi pour l'année de paiement i nous avons :

$$MVM^{i}_{réserve} = \rho \times \frac{STEC_{réserve}(i)}{(1+r)^{i-1}} \quad \text{(IV.3.1)}$$

Où r est un taux d'actualisation (3% par exemple). Le capital requis pour une année devant être levé au début de cette année, il n'y a que i-1 années d'actualisation pour le capital de i.

Le coût total du aux capitaux de réserve à immobiliser chaque année peut donc être défini par une MVM globale :

$$MVM_{réserve} = \sum_{i=2}^{n} MVM^{i}_{réserve} = \rho \times \sum_{i=2}^{n} \frac{STEC_{réserve}(i)}{(1+r)^{i-1}} \quad \text{(IV.3.2)}$$

Nous considérerons en pratique un capital global actualisé auquel nous appliquerons *in fine* le taux de coût du capital pour le calcul de la Création de Valeur :

$$Capital_{réserve} = \sum_{i=2}^{n} \frac{STEC_{réserve}(i)}{(1+r)^{i-1}} \quad \text{(IV.3.3)}$$

Le montant des paiements ainsi que leur cadencement sont modifiés par l'application d'une structure de réassurance. Cette modification se reflète sur le montant des $STEC_{réserve}(i)$, permettant de calculer un différentiel de capital entre situations brutes et nettes de réassurance :

$$\Delta^{réserve}_{Capital} = Capital^{brut}_{réserve} - Capital^{net}_{réserve} = \sum_{i=2}^{n} \frac{STEC^{brut}_{réserve}(i)}{(1+r)^{i-1}} - \sum_{i=2}^{n} \frac{STEC^{net}_{réserve}(i)}{(1+r)^{i-1}} \quad \text{(IV.3.4)}$$

Ce différentiel est *a priori* positif (le montant des paiements ainsi que leur volatilité diminue) et pourra être intégré au gain en capital global permis par une structure de réassurance et utilisé dans la formule de la Création de Valeur.

Nous allons chercher à estimer pour chaque année le STEC de réserve. Pour ce faire, nous allons chercher à exprimer dans un premier temps sa formule, puis nous présenterons deux méthodes différentes (méthode dite « des réserves » et « méthode standard » pour l'approcher.

3.1. Formule

Le **résultat de réserves**, calculé au 31 décembre de l'année i considérée, est donné par la formule :

$$Résultat^{Réserves}_{i} = Réserves(1/1/i) - Paiements(i) - Réserves(31/12/i) \quad \text{(IV.3.5)}$$

Nous supposerons toujours qu'aucun changement n'est effectué entre le 31 décembre d'une année et le premier janvier de la suivante, aussi avons nous :

$$Réserves(31/12/i) = Réserves(1/1/i+1)$$

Alors le résultat de réserve d'une année est aussi égal à la différence entre l'estimation du montant agrégé des charges ultimes en début et en fin d'année (démonstration en annexe, A.IV.1) :

$$Résultat_i^{Réserves} = \hat{U}_i - \hat{U}_{i+1} \quad \text{(IV.3.6)}$$

La première année (année de survenance des sinistres du contrat) ne donne lieu à aucun résultat de réserve, car nous supposons qu'au premier janvier de l'année 1 aucune réserve n'a été constituée.

Exemple : Soit le tableau de paiements et réserves suivant :

Année	1	2	3	4	5
Paiements agrégés	15	35	140	200	220
Charges agrégées	160	160	220	240	220
Réserves au 31 déc.	**145**	**125**	**80**	**40**	**0**

Tableau de paiements, charges et réserves agrégés – (T.IV.3.1)

Alors l'application de la formule (IV.3.1) *au tableau précédent donne les résultats de réserves:*

Année	1	2	3	4	5
Résultat de réserves		0	-60	-20	20

Résultats de réserves par année - (T.IV.3.2)

Nous retrouvons effectivement des résultats égaux en calculant la différence entre les estimations de charges agrégées.

La somme des résultats de réserves (-60) est égale à la différence entre l'estimation initiale des charges agrégées (160) et le montant agrégé des charges ultimes (220).

A un horizon d'un an le **STEC de réserve** est donné par la formule :

$$STEC_{réserve} = E[Résultat^{Réserves}] - VaR_{0.5\%}(Résultat^{Réserves}) \quad \text{(IV.3.7)}$$

Pour chaque année de paiement hormis la première (où il n'y a pas de réserves) il faut immobiliser un STEC associé au résultat de réserve de cette année. Cette activité d'assurance nécessite donc l'immobilisation successive de (n -1) STEC.

<u>Calibration du $STEC_{réserve}$</u> :

Pour la première année, aucune réserve n'est encore constituée. Par conséquent, le résultat de réserve vaut :

$$Résultat_1^{Réserves} = -Paiements(1) - Réserves(31/12/1) \approx -E[U]$$

Où U est la charge ultime de sinistralité du portefeuille. Alors la définition d'un $STEC_{réserve}$ pour la première année revient approximativement à calculer :

$$STEC_{réserve}(1) \approx E[-U] - VaR_{0.5\%}(-U)$$

En situation brute de réassurance, U vaut la sinistralité totale S, le $STEC_{réserve}$ de la première année vaut donc simplement le STEC prime hors actualisation, noté STEC' :

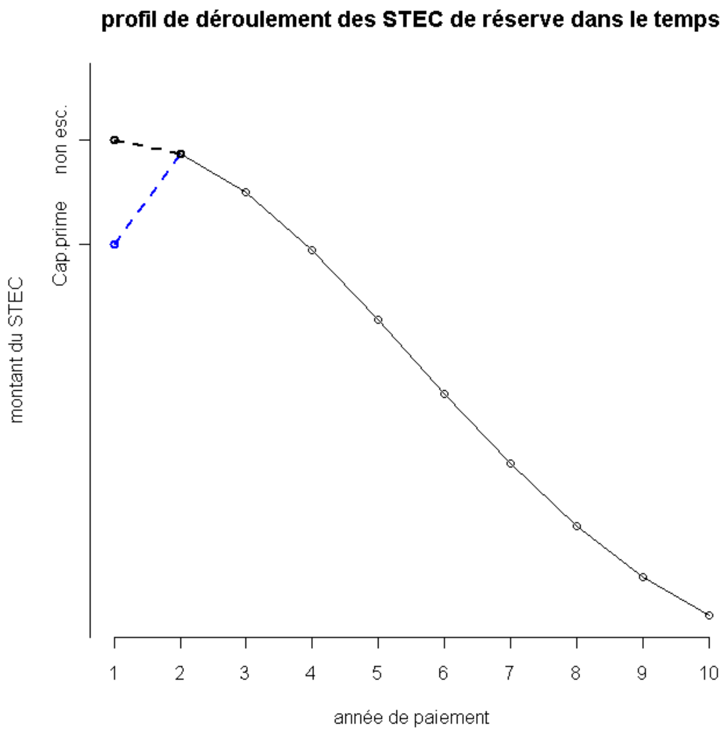
$$STEC_{réserve}^{brut}(1) \approx STEC_{prime}^{brut\,'} \quad \text{(App.IV.3.1)}$$

En net de réassurance, pour une prime déterministe, la même approximation peut être réalisée, U valant la charge de sinistralité nette de réassurance.

$$STEC_{réserve}^{net}(1) \approx STEC_{prime}^{net\,'} \quad \text{(App.IV.3.2)}$$

Au cours du temps, la cédante accumule l'information ce qui lui permet de mieux calibrer ses réserves en fonction de la sinistralité de son portefeuille. Il semble donc logique que la volatilité des réserves diminue avec le temps.

Nous pouvons donc supposer que le graphe des capitaux de réserve par année de développement, brut ou net de réassurance, présente le profil suivant :



Profil de l'échelonnement des $STEC_{réserve}$ – (G.IV.3.1)

Sur ce graphe, « Cap.prime » indique le STEC prime associé à ce portefeuille, et « non esc. » ce même capital calculé sans l'escompte, qui sert de point de départ pour l'établissement de notre profil.

Les $STEC_{réserve}$ sont donc majorés par le capital de risque de prime non escompté et décroissent régulièrement.

3.2. Méthode des réserves

3.2.1. Mise en œuvre dans HERMES

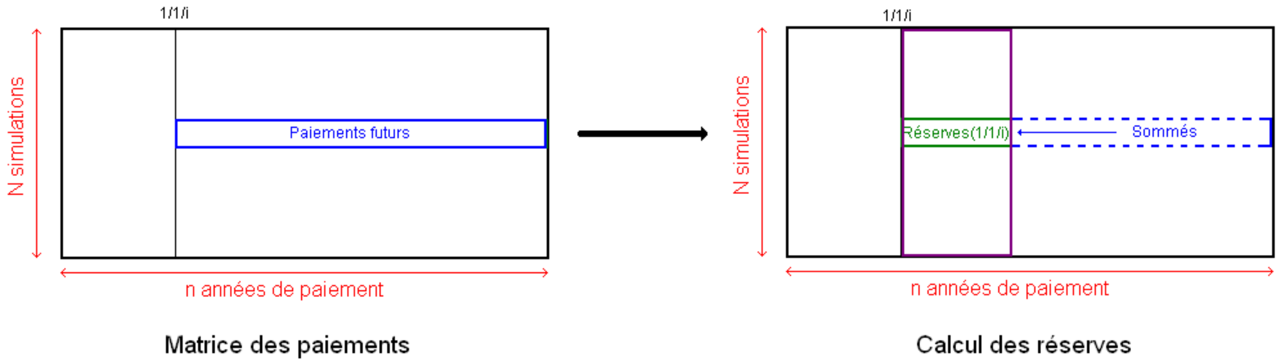
Le calcul du STEC de réserve d'une année aurait nécessité l'approximation de lois conditionnelles trop lourdes à estimer, ainsi que le montre l'annexe (A.IV.2). Aussi deux méthodes d'estimations du STEC de réserve ont elles été développées : la méthode dite « des réserves » et la méthode dite « MVM ». Nous ne présenterons ici que la première, considérée plus proche dans son approche de la réalité, et utilisée dans HERMES. La seconde est décrite en annexe (A.IV.3).

Dans la méthode des réserves, l'approximation suivante a été employée afin d'estimer le STEC de réserve dans HERMES :

$$STEC^{i}_{Réserves} \approx VaR_{99.5\%}(Réserves(1/1/i)) - E[Réserves(1/1/i)] \quad \text{(IV.3.8)}$$

Pour chacune des N=10.000 simulations effectuées les réserves au premier janvier de l'année i vaudront exactement les paiements futurs de la simulation :

$$Réserves(1/1/i)_{simu} \approx \sum_{j=i}^{n} P(j)_{simu} \quad \text{(App.IV.3.3)}$$



Mode de calcul des réserves dans HERMES – (G.IV.3.2)

Une VaR et une moyenne empirique sont calculées sur les N=10.000 simulations de réserves, conduisant au calcul du STEC de réserves de l'année i tel qu'implémenté dans HERMES.

Exemple : Soit un portefeuille sur une branche d'activité générant des sinistres se développant sur une durée de : n = 8 ans. Le cadencement de paiement choisi est stochastique. La sinistralité de ce portefeuille est modélisée par un générateur qui nous permet de simuler la matrice de paiements agrégés par simulation suivante :

Simulation/Année	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	1,25	1,83	1,26	0,32	0,00	0,00	0,00
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	2,21	1,38	1,18	0,84	1,12	1,04	0,09	0,08

Paiements par simulation bruts de réassurance (M$) - (T.IV.3.3)

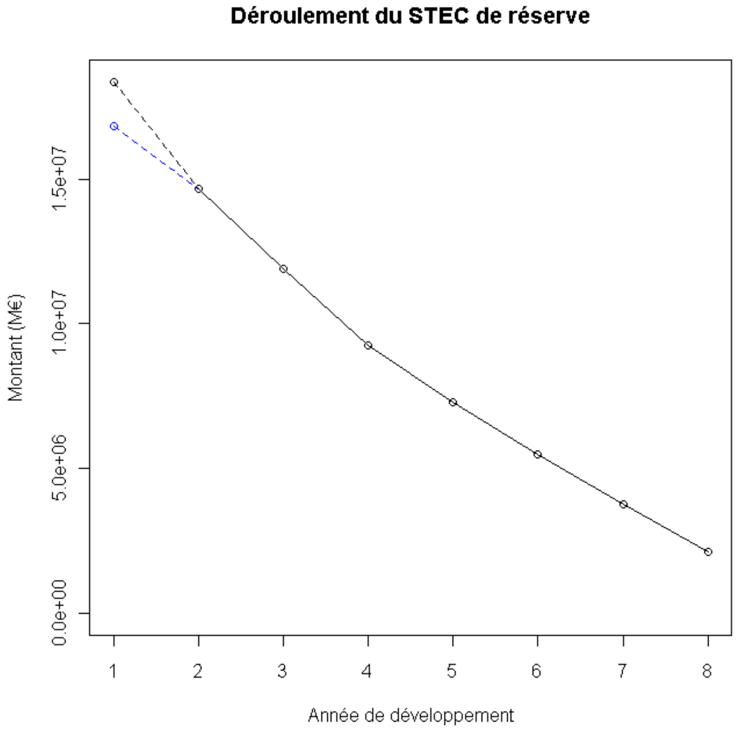
Alors la matrice de réserves associées vaudra :

Simulation/Année	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5,66	4,65	3,41	1,58	0,32	0,00	0,00	0,00
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	7,96	5,75	4,37	3,18	2,34	1,21	0,18	0,08

Réserves au 1/1/i par simulation brutes de réassurance (M$) - (T.IV.3.4)

De chaque colonne de cette matrice de réserves sont déduites l'estimation pour chaque année de paiement de la moyenne et de la $VaR_{99.5\%}$ empiriques (par exemple pour l'année 2, moyenne à :

6,86M\$ et $VaR_{99.5\%}$ à : 21,53M\$) aboutissant à l'estimation d'un STEC de réserves brut de réassurance chaque année (14,67M\$ pour l'année 2) :



Estimation des STEC de réserves bruts de réassurance - (G.IV.3.3)

Ce profil est bien conforme aux attentes de profil présentées dans le graphe (G.IV.3.1), *avec une décroissance du STEC de réserve depuis le capital prime non escompté (en noir).*

Nous proposons maintenant d'appliquer à ce portefeuille le programme de réassurance XS suivant :

Tranche	Reconstitutions	AAD	AAL
1 000 000 XS 1 000 000	2@100	0	Infini
3 000 000 XS 2 000 000	1@100	0	Infini

Programme XS proposé (\$) - (T.IV.3.5)

Les paiements nets de réassurance sont calculés :

Simulation/Année	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	0,60	0,24	0,29	0,32	0,00	0,00	0,00
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	1,64	0,80	0,90	0,50	0,42	0,34	0,09	0,08

Paiements par simulation nets de réassurance (M\$) - (T.IV.3.6)

Nous remarquons une diminution des flux de paiement dès que nous touchons la première tranche (1M\$, dès la deuxième année pour la première simulation, les flux passant de 1,25M\$ à 0,6M\$) et des flux identiques en brute ou net de réassurance dès que la capacité est épuisée (0.08M\$ la huitième année pour la simulation N).

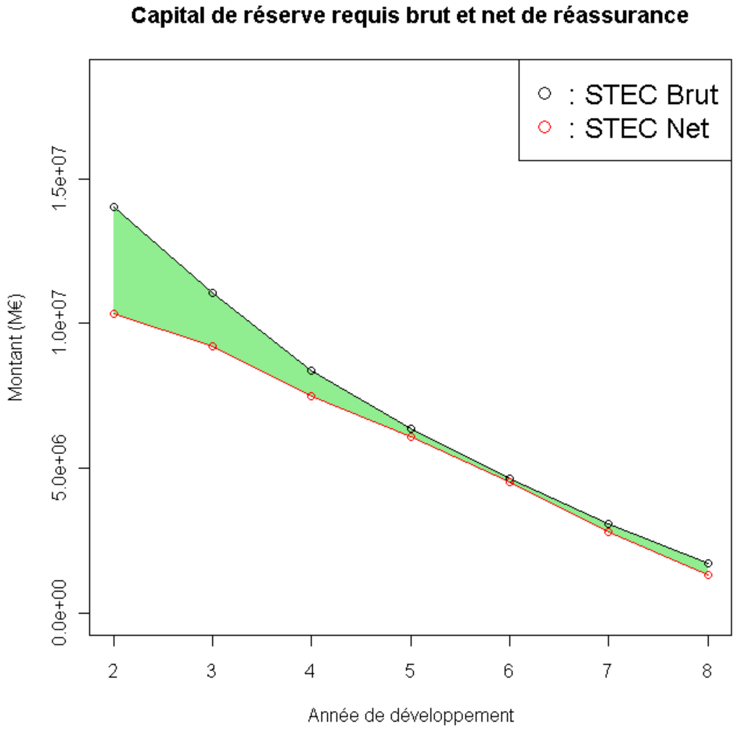
La matrice des réserves associée vaut :

Simulation/Année	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,45	1,45	0,85	0,61	0,32	0,00	0,00	0,00
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	4,78	3,14	2,34	1,44	0,93	0,51	0,18	0,08

Réserves au 1/1/i par simulation nettes de réassurance (M$) - (T.IV.3.7)

Pour l'année 2, la moyenne empirique vaut environ : 3.96M$ et la $VaR_{99.5\%}$: 14.77M$, soit un STEC de réserve estimé à : 14.77 – 3.96 = 10.81M$ (inférieur aux 14.67M$ en situation brute).

La diminution de capital qui résulte de l'application du programme de réassurance est schématisée dans le graphe ci-dessous par l'aire coloriée en vert (les montants sont actualisés, les STEC bruts en noir et les STEC nets en rouge) :



Répartition de la diminution de capital de réserve dans le temps, cadencements stochastiques - (G.IV.3.4)

Soit une économie de capital pour le risque de réserve :

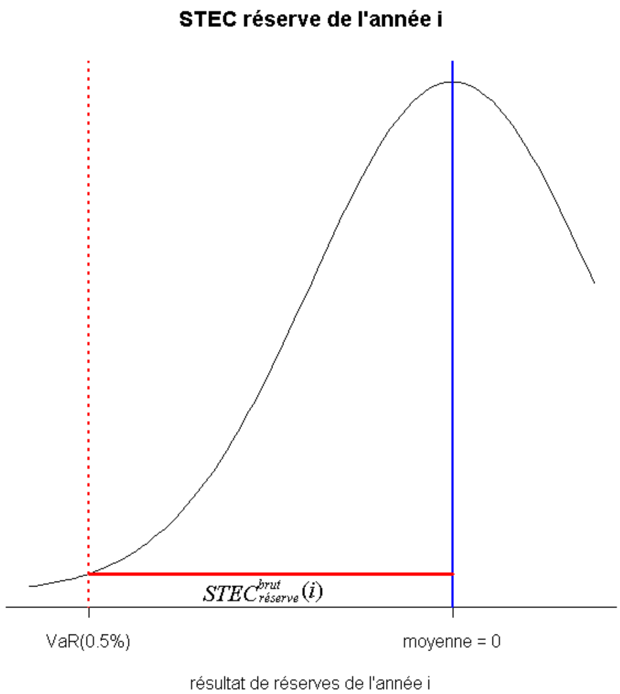
$$\Delta_{Capital}^{réserve} \approx 49{,}34 - 41{,}82 = 7{,}52M\$$$

3.2.2. Biais du modèle d'estimation du STEC de réserve

Si la méthode employée pour estimer le capital du risque de réserve semble vraisemblable (diminution progressive de l'exigence en capital) et est rapide à calculer, les approximations successives ne sont pas sans conséquences sur la qualité de l'estimateur de l'économie en capital de risque de réserve $\Delta_{Capital}^{réserve}$.

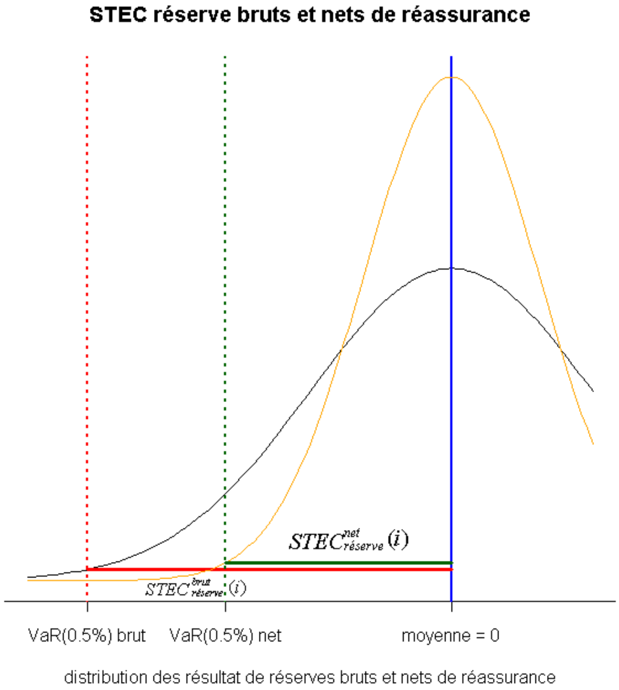
Il est ainsi possible d'estimer des économies de capital négatives.

Nous nous fixons sur une année i. Dans la formule d'origine (IV.3.3), le STEC de réserve associé est obtenu par différence entre la moyenne et le quantile à 0.5% de la distribution du résultat de réserves :



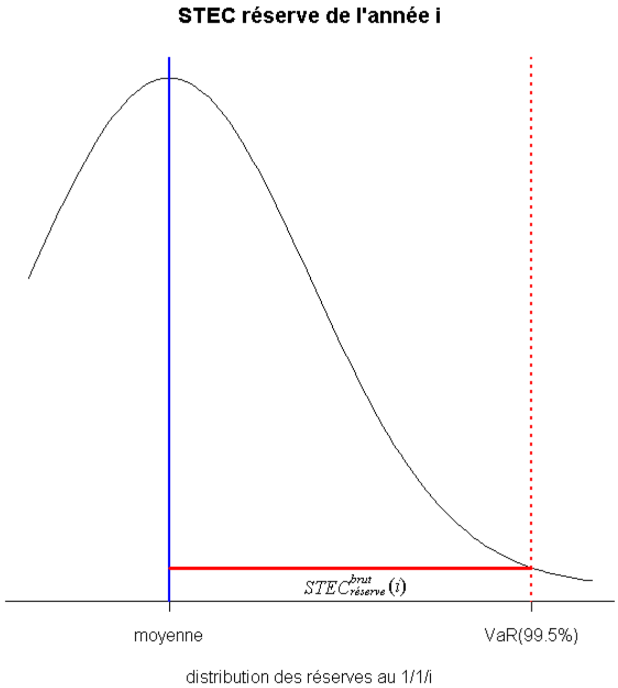
Distribution du résultat de réserve de l'année i brut de réassurance – (G.IV.3.5)

Par application du programme de réassurance, la moyenne reste nulle. En revanche, nous observons une diminution de la volatilité, donc une augmentation du quantile à 0.5% de la distribution, conduisant obligatoirement à une diminution du capital :



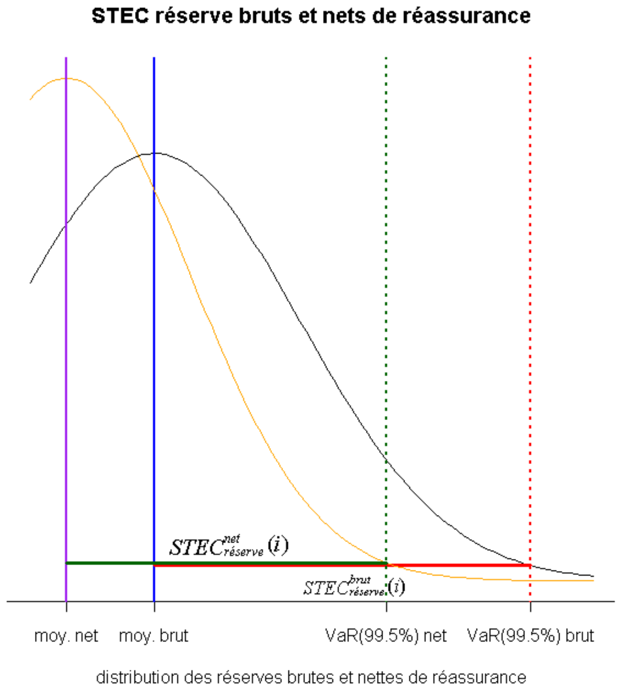
Distribution du résultat de réserve de l'année i net de réassurance – (G.IV.3.6)

Dans la formule approchée (IV.3.8), le STEC résulte de la comparaison entre le quantile à 99.5% de la distribution des réserves avec la moyenne :



Distribution des réserves de l'année i brutes de réassurance – (G.IV.3.7)

L'application d'un programme de réassurance diminue le montant des réserves, et en moyenne, et en volatilité. Par conséquent une réduction de capital ne sera constatée que si la diminution en volatilité (comparaison des quantiles à 99.5%) est plus forte que la diminution en moyenne :



Distribution des réserves de l'année i nettes de réassurance – (G.IV.3.8)

Sur le graphe ci-dessus le STEC net de réassurance (en vert) n'est pas directement comparable au STEC brut (en rouge) : il faut comparer les différentiels des $VaR_{99.5\%}$ et des moyennes. Dans cet exemple, le premier est effectivement plus grand que le second : l'économie de capital est donc positive.

Ceci n'est pas toujours vrai, particulièrement dans les programmes XS pour les tranches fines de basse rétention. En effet pour ces traités, les récupérations issues des simulations avec une forte sinistralité sont versées très tôt ce qui signifie que la VaR des réserves en net est très proche sinon égale à celle en brut.

En revanche, en moyenne, les récupérations s'étalent dans le temps, et la diminution de la valeur moyenne des réserves fait de même.

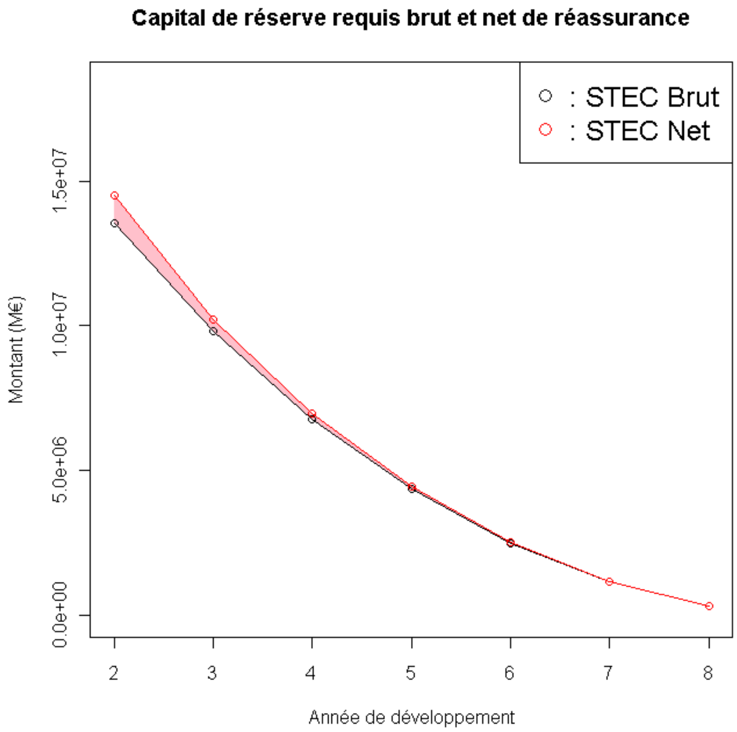
Les premières années, l'économie de capital peut donc être positive, mais devient négative au fil du temps, l'écart entre les VaR brute et nette devenant négligeable devant celui des moyennes des réserves.

Exemple : Toujours sur le même portefeuille (de seuil de modélisation atypique 0,4M$) nous choisissons d'appliquer le programme XS suivant :

Tranche	Reconstitutions	AAD	AAL
1 600 000 XS 400 000	Aucune	0	Infini

Programme XS proposé ($) - (T.IV.3.8)

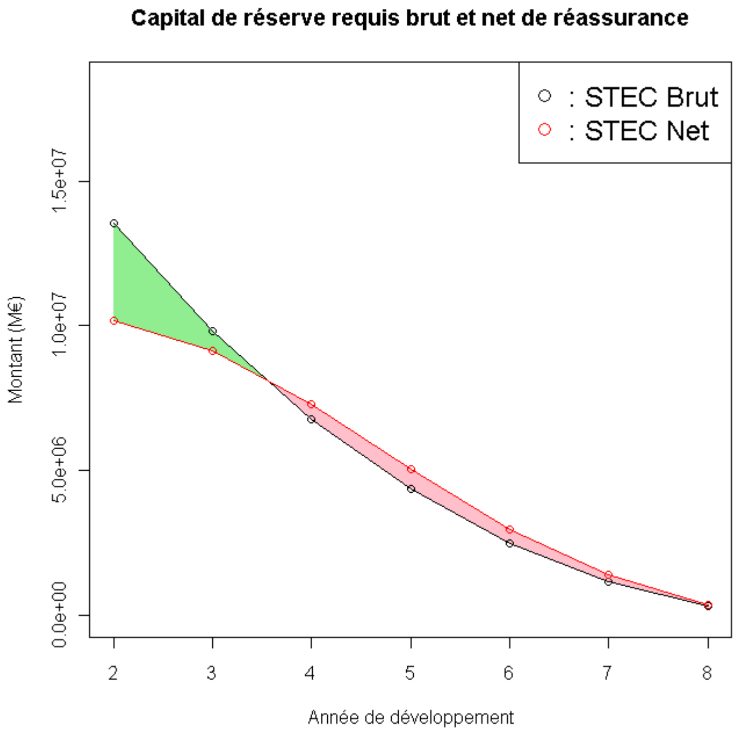
Alors nous constatons que la variation de capital de réserve est inversée pour chacune des années de développement : la part des paiements des sinistres étant même si important pour la première année qu'elle absorbe entièrement les récupérations du traité pour les simulations avec une forte sinistralité. Par conséquent dès la première année de constitution des réserves (soit la deuxième année de paiement) le capital net est plus fort que le brut.



Surcoût du capital de réserve estimé - (G.IV.3.9)

Le surcoût cumulé estimé est de : $-\Delta_{Capital}^{réserve} \approx -(49{,}34 - 50{,}86) = 1{,}52M\$$

Il est également possible d'observer des inversions de tendance au cours du temps. Ainsi, en reprenant le programme (T.IV.3.8) avec le même portefeuille, mais en changeant la méthode de cadencement des paiements (de stochastique à déterministe) nous observons :

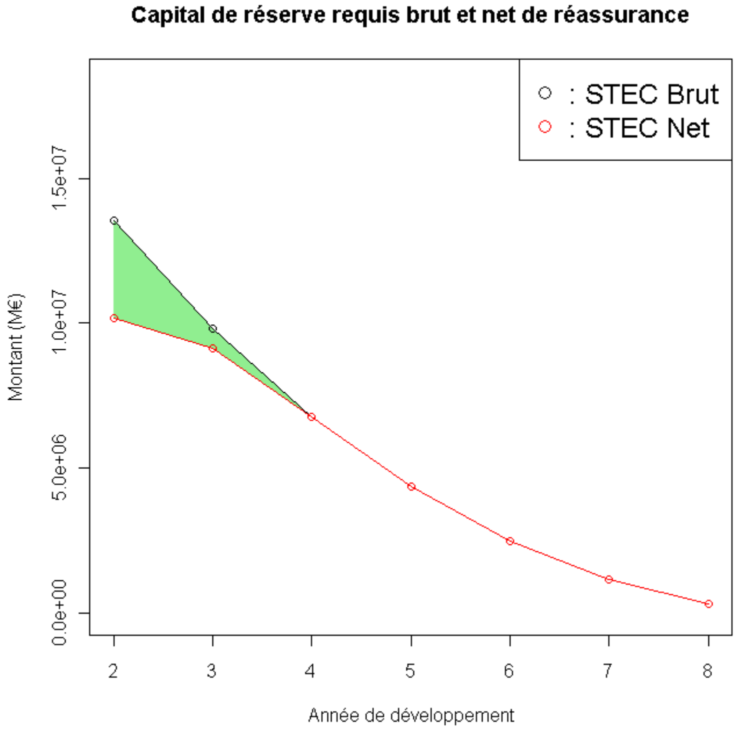


Evaluation du STEC réserve dans le temps, cadencement de paiement aléatoire - (G.IV.3.10)

Le traité ne fait dans ce cas effet que les trois premières années de paiement. Nous observons que le choix du cadencement de paiement peut dans de tels cas se révéler d'une grande importance.

Il est possible de corriger le biais en ramenant à zéro l'impact de la réassurance sur le capital de réserve pour les années où l'estimation en net est plus forte que celle en brut :

Dans la pratique toutefois, les surcoûts de capitaux sont de faibles montants, et il est rare de souscrire à des programmes XS composés seulement de tranches fines et basses. En présence d'une diminution négative de capital de réserve pour une année, nous ramènerons donc à zéro l'impact de la réassurance sur le capital de réserve :



STEC réserve net de réassurance corrigé, cadencement de paiement aléatoire - (G.IV.3.11)

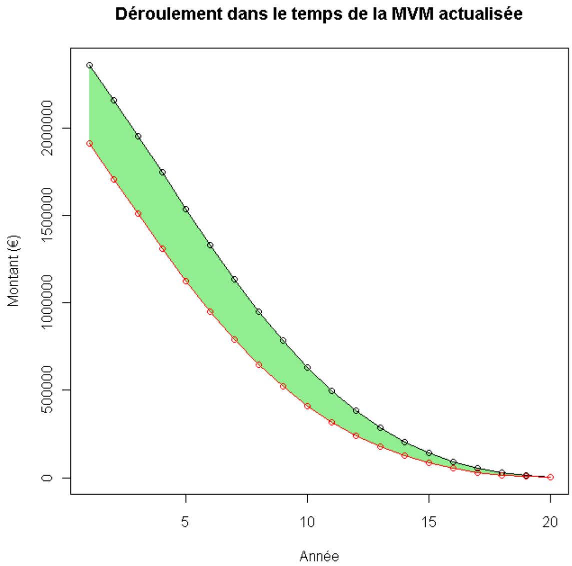
3.3. Méthode standard

La méthode standard consiste à partir du capital économique calculé pour la première année, et à le diminuer chaque année de la proportion des sinistres payés pour obtenir le capital requis de l'année considérée.

La somme des capitaux ainsi générés est ramenée en valeur présente, donnant un capital global actualisé calculable en brut comme en net de réassurance par l'estimation des cadencements de paiement moyens. La différence entre ces deux grandeurs constitue alors l'estimation de l'économie de capital réalisée :

$$\Delta_{Capital}^{réserve} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} p_{brut}(j)\right) STEC_{brut} - \left(1-\sum_{j=1}^{i-1} p_{net}(j)\right) STEC_{net}}{(1+r)^{i-1}} \quad \text{(IV.3.9)}$$

Pour un portefeuille nous obtenons par exemple le déroulé de l'économie de capital suivant dans le temps :



Décomposition de l'économie en coût du capital dans le temps.- (G.IV.3.12)

Cette méthode a également un bon profil. Elle fournit en général des économies de capital plus importantes que la méthode des réserves. Du fait du décalage entre les cadencements de paiement bruts et nets de réassurance (cf. G.IV.2.4) cette méthode peut également produire des économies de capital négatives, mais de manière moins fréquente que pour la méthode des réserves.

Elle suppose cependant que paiements des sinistres et capitaux de réserve se comportent de manière proportionnelle, ce qui est une approximation lourde du fait de l'utilisation de la VaR dans le calcul du capital. La méthode des réserves lui est donc en général préférée.

Le calcul du STEC de réserve d'une année de développement est en théorie complexe (formule IV.3.9) car il nécessite la connaissance de lois conditionnelles trop lourdes à estimer numériquement.

Les méthode bâties pour en calculer une valeur approchée souffrent d'un biais et peuvent donc parfois s'avérer trop grossière. Ce cas reste cependant assez rare.

Les points forts de la méthode sélectionnée, celle des réserves, sont qu'elle est intuitive (au risque de réserve est associée une mesure de risque des réserves), simple d'utilisation et correspondant au profil recherché (cf. G.IV.3.1).

4. Adaptation à la Création de Valeur

L'établissement d'un cadencement de paiement et l 'estimation de la diminution des STEC de réserve vont permettre le calcul d'une Création de Valeur pour les branches à déroulement long.

4.1. Formule

La formule de la Création de Valeur pour un portefeuille relatif à une branche d'activité se développant sur n années, considéré sous postulat du *stand alone*, est la suivante :

$$CV = (1 - \tau_{taxe}) \times E[R_{Réass}] + spread \times \Delta_{Capital} \quad \text{(IV.4.1)}$$

Où $R_{Réass}$ est défini par la formule (IV.2.5) et $\Delta_{Capital}$ vaut :

$$\Delta_{Capital} = \Delta_{Capital}^{prime} + \Delta_{Capital}^{réserve} \quad \text{(IV.4.2)}$$

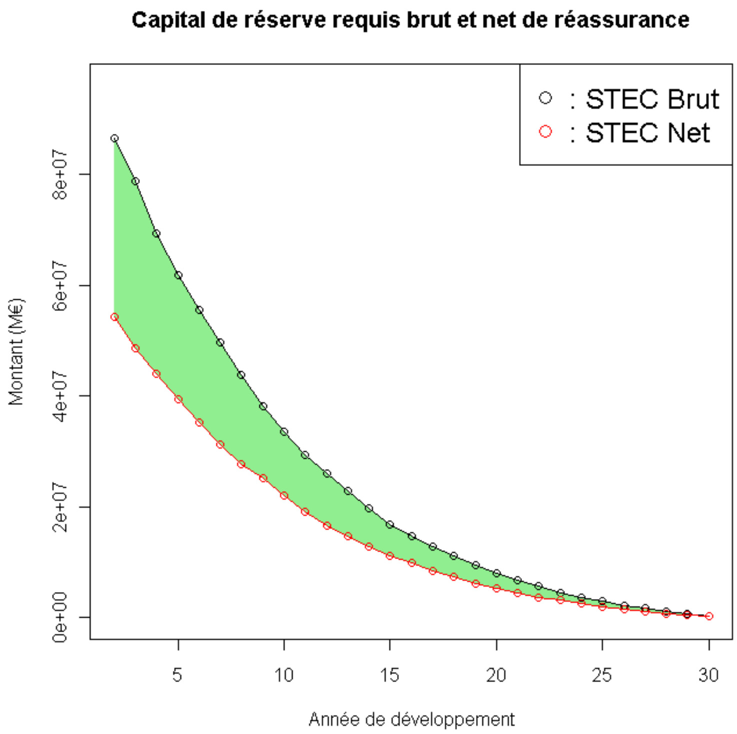
Exemple : Soit un portefeuille de responsabilité civile automobile taxé à 34% et générant des dommages pouvant se développer jusqu'à 30 ans, auquel nous appliquons le programme XS suivant :

Tranche	Reconstitutions	AAD	AAL
10 000 000 XS 5 000 000	gratuites et illimitées	0	Infini
Illimité XS 15 000 000	gratuites et illimitées	0	Infini

Programme XS proposé (€) - (T.IV.4.1)

Alors le résultat de réassurance ramené à un an vaut environ : - 6,56M€ et la diminution de capital pour le risque de prime est évaluée à 25,66M€.

La diminution de capital pour le risque de réserve est estimée à 279,18M€ et se répartit comme il suit :



(G.IV.4.1)

Alors, avec un spread *toujours à 6% nous pouvons calculer :*

$$CV = (1-34\%)\times(-6{,}56)+6\%\times(25{,}66+279{,}18)=13{,}96M€$$

Ce programme entraîne donc une Création de Valeur d'environ 14M€ pour la Cédante, ce qui correspond à plus du double du résultat de réassurance moyen en valeur absolue.

4.2. Problématique de la diversification

En examinant l'exemple ci-dessus, nous constatons que la diminution en capital relative au risque de réserve constitue la principale composante de la Création de Valeur (économie de capital estimée à environ 18M€) qui diminue considérablement l'impact du résultat de réassurance sur la Création de Valeur.

Nous rappelons que ces calculs sont faits sous le postulat du *stand alone* : le portefeuille réassuré est considéré comme le seul détenu par la Cédante, or ceci est faux en réalité.

La VaR étant une mesure généralement (pas toujours cependant) sous-additive, il est fréquent d'observer par l'agrégation des capitaux liés aux portefeuilles un « effet de diversification » : le capital à associer à deux portefeuilles est inférieur au capital à associer à chacun de ces portefeuilles pris séparément.

Intuitivement, ceci se comprend par le fait que la probabilité de subir une perte importante simultanément sur chacun des portefeuilles est inférieure à celle de subir une perte globale sur l'ensemble des portefeuilles (la perte globale pouvant être l'effet d'un cumul de pertes modérées sur l'ensemble des portefeuilles).

Cet effet de diversification peut être très important : pour les traités relatifs aux catastrophes naturelles, nous considérons une diversification de 70% du capital. Cela signifie que le capital pour assurer un portefeuille vu au niveau de la Cédante vaut (1-70%) = 30% du capital calculé en *stand alone*. En reprenant les résultats précédents, par l'application d'un coefficient de diversification, nous obtenons :

$$CV_{div} = (1-34\%)\times(-6{,}56)+6\%\times(1-70\%)\times(25{,}66+279{,}18)=1{,}16M€$$

La Création de Valeur a fondu de 14M€ à moins de 1,2M€, ce qui est plus raisonnable au regard du résultat de réassurance.

L'impact qu'a le coefficient de diversification sur la Création de Valeur est important au point que l'ordre de préférence entre deux structures de réassurance peut être modifié selon sa valeur.

Exemple : pour le même portefeuille nous désirons comparer deux programmes XS.

Tranche	Reconstitutions	AAD	AAL
10 000 000 XS 5 000 000	gratuites et illimitées	0	Infini
Illimité XS 15 000 000	gratuites et illimitées	0	Infini

Programme XS 1 (€) - (T.IV.4.2)

Tranche	Reconstitutions	AAD	AAL
Illimité XS 15 000 000	gratuites et illimitées	0	Infini

Programme XS 2 (€) - (T.IV.4.3)

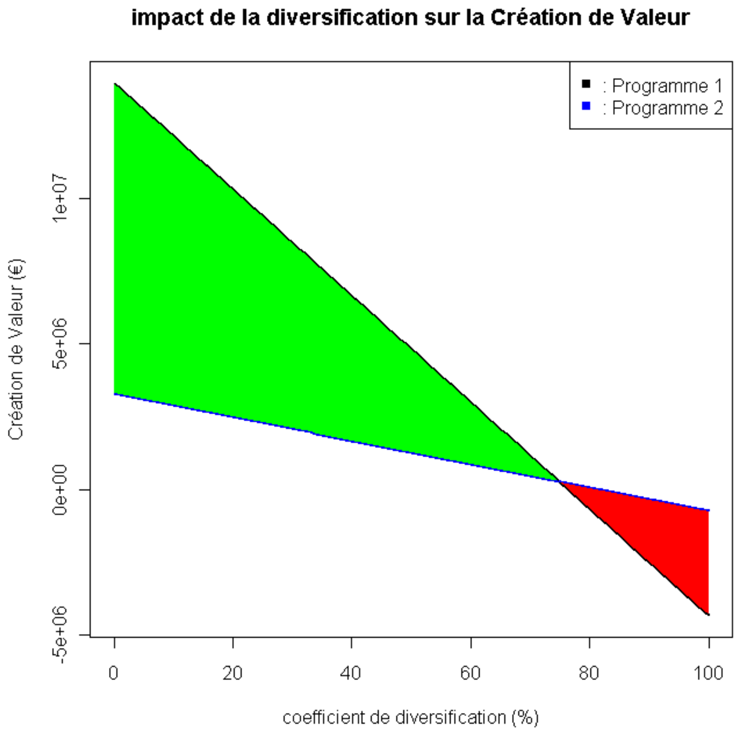
Il s'agit donc simplement de relever la rétention de 5M€ à15M€, le programme 1 étant le même qu'à l'exemple précédent.

Le résultat de réassurance moyen ainsi que la diminution totale de capital en stand alone *ont été calculés pour chacun de ces programmes :*

	Programme 1	Programme 2
Diminution de capital	304 842 755	67 196 229
Résultat de Réassurance	- 6 558 281	- 1 120 721

Comparaison des programmes XS (€) - (T.IV.4.4)

Alors la Création de Valeur respective de chacun de ces contrats en fonction du coefficient de diversification est représentée par le graphe suivant :



(G.IV.4.2)

Le programme avec la rétention la plus basse (programme 1) est celui qui permet d'économiser le plus de capital mais aussi le plus cher. En *stand alone*, l'importance de la diminution de capital n'étant pas corrigée, il est nettement plus performant que l'autre. Cependant, l'écart entre les deux décroit au fur et à mesure que l'effet de diversification prend de l'importance.

Ainsi, ici, à partir de 75% de diversification, l'ordre de préférence entre les deux programmes est inversé.

L'application d'une structure de réassurance à des portefeuilles de branches longues induit de très importantes diminutions de capital.

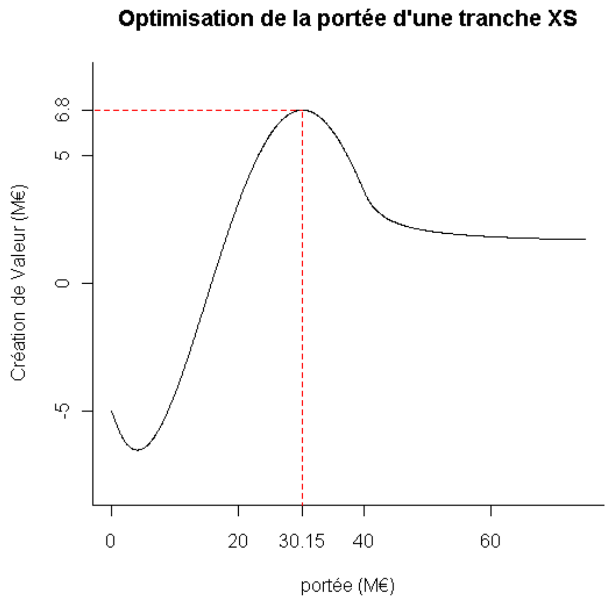
Particulièrement sur ce type de portefeuille, il est donc nécessaire, d'une part de savoir au regard de quel périmètre nous souhaitons mesurer l'impact de notre programme de réassurance (sur le portefeuille seul ? Sur l'entité ? Au niveau du groupe ?), puis d'avoir une idée de la valeur du coefficient de diversification associé au périmètre choisi (0% en *stand alone*) afin de pouvoir comparer efficacement deux structures de réassurance.

La mesure de ce coefficient de diversification, qui est forcément une mesure approchée compte tenu des particularités de la VaR (pas de relation générale par agrégation de variables aléatoires), ne sera pas exposée dans ce mémoire. Il serait néanmoins intéressant de développer sur ce sujet.

Dans le cadre de l'utilisation de l'outil HERMES, le coefficient de diversification sera en pratique fourni par les entités.

5. Exemple simple d'optimisation par la Création de Valeur

Une Cédante s'est arrêtée pour un de ses portefeuilles sur la structure de réassurance suivante : une tranche XS unique de rétention a = 10M€, à reconstitutions illimitées et payées d'avance. Elle s'interroge désormais sur la portée à accorder à cette tranche. Grâce à l'outil HERMES, nous sommes en mesure d'estimer la Création de Valeur de la tranche liée à chaque portée, construisant ainsi une courbe de Création de Valeur :



Exemple d'optimisation simple d'une structure par la Création de Valeur - (G.IV.4.3)

La portée optimale est donc de 30M€ environ pour cette structure de réassurance. Ce problème simple montre la manière dont peut être utilisé la Création de Valeur pour la recherche d'une structure de réassurance optimale.

L'application de l'indicateur de Création de Valeur pour les branches à développement long nécessite donc la mise en place de méthodes d'estimation d'objets complexes (cadencement de paiement, capital associé au risque de réserve). La mise en œuvre de ces méthodes passe parfois par des approximations induisant des défauts de conception (biais pour le STEC de réserve).

La confrontation de la Création de Valeur obtenue pour une structure de réassurance avec celle obtenue pour une autre est de plus limitée par le choix du cadre de comparaison (portefeuille, entité, groupe).

L'estimation obtenue est donc encore très perfectible. Néanmoins, celui-ci constituant une innovation apportée à l'outil HERMES, sa réalisation fournit une base de travail utile et nécessaire qui pourra conduire par la suite, connaissant ses faiblesses, à d'éventuelles améliorations.

Tout en prenant conscience de ses limites, nous avons donc pu bâtir un estimateur de la Création de Valeur. Sa comparaison d'une structure à l'autre permet de déterminer un ordre de préférence. Une recherche généralisée sur l'ensemble des solutions possibles permet donc en théorie de trouver la structure de réassurance maximisant la Création de Valeur, soit la structure « optimale » au regard de notre cadre d'optimisation (cf. exemple partie 5).

Nous pouvons cependant nous interroger sur la viabilité d'une telle structure, en prenant en compte le point de vue du réassureur. C'est l'objet du dernier chapitre, qui développe une méthode permettant de déterminer si une structure est acceptable par la Cédante comme par le Réassureur, au moyen de la comparaison d'un indicateur défini à la fois du point de vue de la Cédante et de celui du Réassureur : l'« Iso Value ».

Chapitre V : Iso Values

Le concept d' « Iso Value » a été développé en interne chez AXA. L'Iso Value se définit comme la prime de réassurance qui annule la création de valeur. Cela signifie que le coût de la réassurance est en moyenne compensé par l'économie en capital réalisée.

C'est donc la situation commerciale où, au regard de la Création de Valeur, il est indifférent pour la cédante de se réassurer ou non.

L'Iso Value d'une structure de réassurance, si elle est fiable et bien estimée, constitue un excellent indicateur pour les négociations entre cédante et réassureur : tout prix supérieur à l'Iso Value implique une destruction de valeur, tout prix inférieur une création.

Le mode de calcul de l'Iso Value d'une structure de réassurance sera exposé dans une première partie.

La difficulté dans l'estimation d'une Iso Value réside dans le calibrage du modèle. L'incertitude liée à celui-ci oblige à introduire une certaine souplesse dans cette mesure. Le concept d'« Iso Value Max », comme nous le verrons dans une deuxième partie, permet de prendre en compte l'incertitude liée au modèle. Par opposition, l'Iso Value définie en première partie, sans prise en compte de l'incertitude, sera nommé « Iso Value Min », le couple (Iso Values Min et Max) définissant un intervalle de confiance.

Enfin, nous verrons dans une troisième partie qu'il est également possible de définir une Création de Valeur du point de vue du Réassureur, et donc des Iso Values (Min et Max) associées. De la comparaison croisée des Iso Values de la cédante et du réassureur nous pouvons en théorie déduire la viabilité ou non d'une structure, comme le montrera la quatrième partie.

Le cadre des traités en quote-part, proportionnels, permet de simplifier considérablement les calculs. Le traitement de l'Iso Value pour un traité en quote-part, calculatoire, sera donc considéré séparément en annexe à la référence (A.V.7).

1. Calcul de l'Iso Value Min

Nous rappelons la formule de la création de valeur pour une cédante ayant acquit une structure de réassurance :

$$CV = (1-\tau_{taxe}) \times E[R_{Réass}] + \rho \times \Delta_{Capital} \quad \text{(V.1.1)}$$

Où le taux d'économie de capital (le *spread*, noté ici ρ) vaut 6% et où celui de taxation (τ_{taxe}) est fixe et connu (34% en France par exemple).

Par commodité des notations, l'éventuel effet de diversification lié au capital requis sera intégré au taux d'économie de capital ρ et non à la diminution en capital elle-même :

$$\rho_d = (1 - coefficient_{diversification}) \times \rho \quad \text{(V.1.2)}$$

ρ_d est le taux d'économie de capital diversifié. En remplaçant CV par 0, cette formule devient maintenant une équation ayant pour inconnue(s) la ou les primes de chaque traité intégré à la structure de réassurance.

Nous rappelons la décomposition de la diminution du capital requis $\Delta_{Capital}$:

$$\Delta_{Capital} = \Delta_{Capital}^{prime} + \Delta_{Capital}^{réserve}$$

Comme nous pouvons le remarquer d'après le chapitre IV, le calcul du STEC de réserve net de réassurance est indépendant de la prime. La diminution en capital lié au risque de réserve est donc une constante (éventuellement nulle pour une branche courte) dans l'équation d'inconnue PR :

$$(1-\tau_{taxe}) \times E[Réc - PR] + \rho_d \times \left(\left(VaR_{0.5\%}(Réc - S - PR) - VaR_{0.5\%}(-S) - E[Réc - PR] \right) + \Delta_{Capital}^{réserve} \right) = 0$$
(V.1.3)

1.1. Primes de réassurance payées d'avance (déterministes)

Nous supposons dans un premier temps que le montant des primes de réassurance (PR) n'est pas aléatoire. Alors $\Delta_{Capital}$ devient indépendant de la prime et l'Iso Value Min s'obtient par la formule :

$$IV_{\min} = PP_{structure} + \frac{\rho_d}{1-\tau_{taxe}} \times \Delta_{Capital} \quad \text{(V.1.4)}$$

Où $PP_{structure}$ est la prime pure de la structure de réassurance (espérance des récupérations). Pour la démonstration, se référer à l'annexe (A.V.1).

Exemple : Nous appliquons à un portefeuille le programme XS à deux tranches avec des reconstitutions payantes.

Tranches	Reconstitutions	AAD	AAL
2 500 000 XS 2 500 000	2@0	0	Infini
5 000 000 XS 5 000 000	1@0	0	Infini

Programme XS à deux tranches et reconstitutions payées d'avance (€) - (T.V.1.1)

Nous obtenons alors les caractéristiques suivantes pour ce programme :

Prime Pure	Prime Technique	Capital économisé	Création de Valeur
5 742 879	7 769 749	30 321 140	117 772

Primes initiales de chaque tranche du programme (€) - (T.V.1.2)

Nous considérons le programme en stand alone *et un taux de taxation de 20% aussi le coefficient de diversification est-il nul d'où :*

$$IV_{\min} = 5{,}74 + \frac{6\%}{1-20\%} \times 30{,}3 \approx 8{,}02M€$$

La quantité additionnelle étant positive dans (V.1.4), nous pouvons remarquer que l'Iso Value est supérieure à la prime pure, ce qui est logique, l'économie de capital permettant à la cédante de payer plus que la moyenne.

Dans le cas d'une prime de réassurance déterministe, l'Iso-Value ($IV_{\min}$) se déduit par une formule fermée simple dépendant des récupérations et de la diminution en capital requis.

Toutes les primes étant payées d'avance, nous remarquerons que la répartition par programmes et traités de la prime de la structure est mathématiquement indifférente : en pratique, la pluralité des réassureurs et la logique de marché rendent inadmissibles la plupart des répartitions (une tranche de prime nulle et l'autre surévaluée par exemple).

1.2. Programme XS avec reconstitutions payantes

Dans le cadre des reconstitutions payantes, l'économie de STEC de Primes dépend des primes de réassurance et (V.1.3) devient :

$$(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E[PR]+\rho_d VaR_{99.5\%}(PR+S-Réc)=(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E[Réc]+\rho_d\left(VaR_{99.5\%}(S)+\Delta^{réserve}_{Capital}\right)$$

(V.1.5)

Il n'existe *a priori* aucune garantie quant à l'existence ou l'unicité des solutions de l'équation (V.1.5).

En intégrant des reconstitutions payantes le comportement du montant des primes de réassurance sur chaque ligne est différent en fonction de sa probabilité d'être touchée, ce qui rend nécessaire la décomposition ligne à ligne de l'Iso Value :

Soit L le nombre de lignes d'un programme XS. Pour chaque ligne i (i entre 1 et L) nous nommons respectivement :

- P_i la prime commerciale initiale attachée à la ligne
- M_i le montant des primes de reconstitutions liées à la ligne normalisé par la prime initiale.

Alors le montant total des primes de réassurance versées vaut :

$$PR = \sum_{i=1}^{L} M_i P_i$$

L'objectif est donc de trouver $\left(P_1^{IV},..., P_L^{IV}\right)$ tel que : $\sum_{i=1}^{L} M_i P_i^{IV} = PR^{IV}$ vérifie (V.1.5).

<u>Encadrement des solutions de (V.15)</u> :

La prime de chaque tranche i du programme XL doit être comprise dans l'intervalle suivant :

$$PP_i \leq P_i^{IV} \leq P_i^{\max} \quad \text{(test.V.1.1)}$$

Avec :

$$\begin{cases} PP_i = Réc_i \\ P_i^{\max} = \dfrac{AAL_i}{\max(M_i)} \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe (A.V.2).

Exemple : Soit une tranche de traité XL 5 xs 10, de programme de reconstitutions : 2@0,1@50,1@100, soit quatre reconstitutions.

$AAL = (4+1) \times 5 = 25$ *et* $\max(M) = 1 + 2 \times 0 + 1 \times 0{,}5 + 1 \times 1 = 2{,}5$ *d'où :*

$$P^{\max} = \frac{25}{2{,}5} = 10$$

Nous supposerons que la prime pure vaut 3,7. Alors nous obtenons l'encadrement suivant pour la prime initiale de la tranche :

$$3{,}7 \leq P \leq 10$$

<u>Simplification du problème : recherche de solutions dans un sous-espace</u>.

Soit : $p^* = (p_1, ..., p_L) \in [0;1]^L, \sum_{i=1}^{L} p_i = 1$ un L-uplet de coefficients de pondérations. Alors nous allons dans un premier temps rechercher une solution dans l'espace :

$$E_{p^*} = \left\{(P_1, ..., P_L) \in (\Re^+)^L / \forall i \in \{1, ..., L\}, P_i = p_i \Pi; \Pi \in \Re^+\right\}$$

Les primes de chaque ligne sont donc toujours de même proportions comparativement les unes aux autres dans cet espace. p* peut être donné par exemple par la répartition par tranche de la prime technique payée d'avance.

Exemple : Nous reprenons le programme de (T.V.1.1) en rendant les reconstitutions payantes à 100% :

Tranches	Reconstitutions	AAD	AAL
2 500 000 XS 2 500 000	2@100	0	Infini
5 000 000 XS 5 000 000	1@100	0	Infini

Programme XS à deux tranches et reconstitutions payantes (€) - (T.V.1.3)

Nous obtenons alors la tarification suivante :

Tranches	Prime Pure	Prime Technique
2 500 000 XS 2 500 000	1 713 954	2 255 848
5 000 000 XS 5 000 000	1 409 874	2 078 007

Total	3 123 828	4 333 855

Primes initiales de chaque tranche du programme (€) - (T.V.1.4)

Les primes initiales sont logiquement plus faibles. Leurs montants globaux peuvent être répartis entre chaque tranche :

Tranches	Prime Pure	Prime Technique
2 500 000 XS 2 500 000	54,87%	52,05%
5 000 000 XS 5 000 000	45,13%	47,95%
Total	100,00%	100,00%

Répartition des primes entre chaque tranche du programme (€) - (T.V.1.5)

Muni de cette répartition (par exemple celle de la prime technique de T.V.1.5 : 52% pour la première tranche, 48% pour la seconde), (V.1.4) peut alors être transformée en une équation à une seule inconnue déterministe Π:

$$\begin{cases}(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E\left[\sum_{i=1}^{L} p_i M_i\right]\Pi+\rho_d VaR_{99.5\%}(\Pi\sum_{i=1}^{L} p_i M_i+S-Réc)=Cste \\ Cste=(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E\left[Réc\right]+\rho_d\left(VaR_{99.5\%}(S)+\Delta_{Capital}^{réserve}\right)\end{cases} \quad \text{(V.1.6)}$$

Π représente le montant total des primes initiales. En reprenant les contraintes les primes de chaque tranche, sa valeur doit être comprise dans l'intervalle suivant :

$$\Pi_{\min}=\max\left(\frac{PP_i}{p_i}\right)_{i\in\{1,\ldots,L\}}\leq\Pi\leq\min\left(\frac{P_i^{\max}}{p_i}\right)_{i\in\{1,\ldots,L\}}=\Pi_{\max} \quad \text{(test.V.1.2)}$$

Nous pouvons montrer que chaque ensemble Ep* (c'est-à-dire chaque décomposition relative de la prime de programme initiale par ligne) accouche d'une solution unique ou d'aucune, formant ainsi l'ensemble des solutions admissibles pour l'Iso Value.

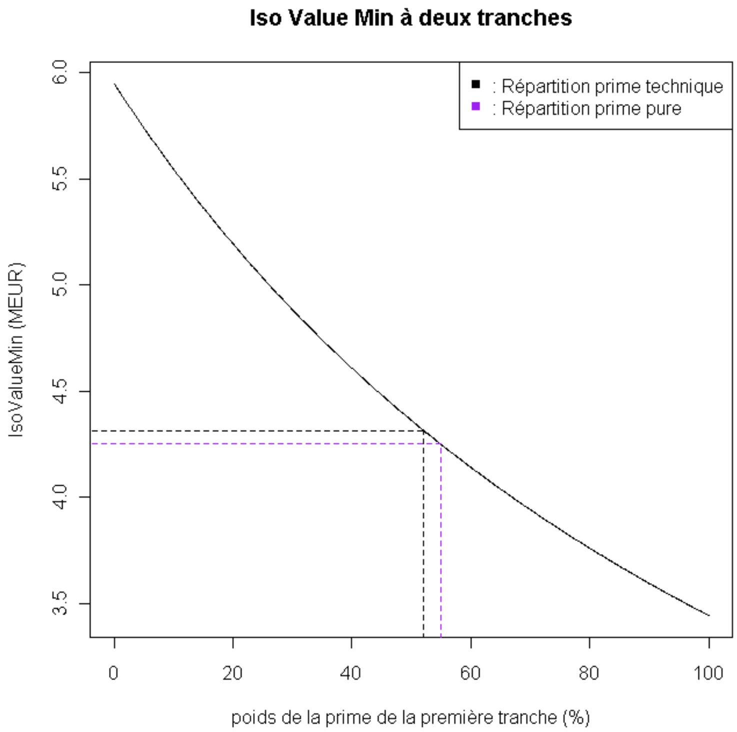
Une explication plus détaillée concernant cette décomposition en sous-espaces des primes se trouve en annexe (A.V.3).

Exemple : reprenons le portefeuille précédent et le programme XS défini par (T.V.1.2).

La somme des parts valant 1, la part de la prime initiale de la deuxième tranche dans la prime initiale totale peut être déduite de la part de la première tranche (17,04% = 100% - 82,96% pour la prime pure, par exemple, cf. T.V.1.5).

L'ensemble des répartitions peut ainsi être décrit par la part de la première tranche, comprise entre 0% et 100%.

Pour chacune des répartitions possibles, avec un pas de 0,1% nous avons recherché le montant d'Iso Value associé :

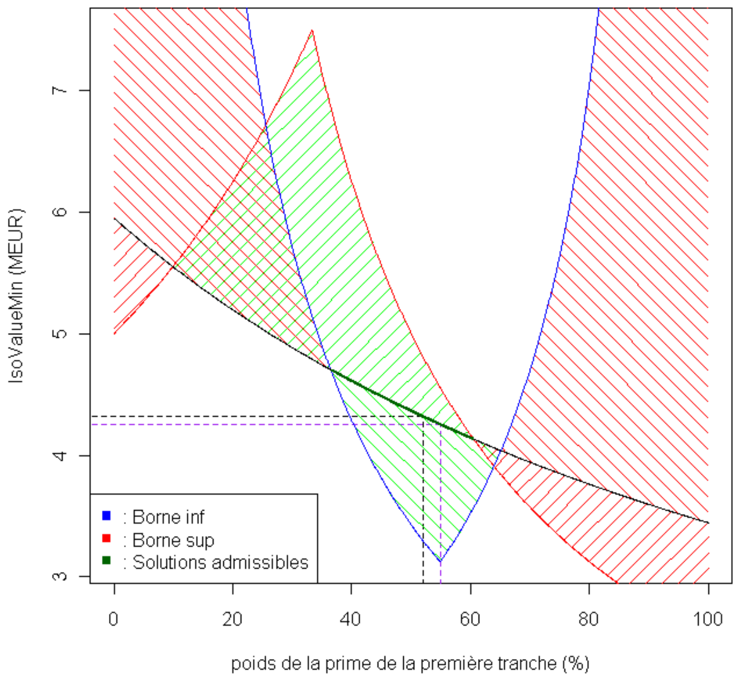


Ensemble des solutions pour l'Iso Value - (G.V.1.1)

Dans cet exemple, le montant total de l'Iso Value varie de manière importante (de 3,5M€ à 6M€). Si la prime est bien modélisée dans HERMES, il semble probable que la prime commerciale obtenue après négociations n'ait pas une répartition trop éloignée de celles des primes pures et techniques calculées par HERMES. Soit ici une Iso Value de montant total d'environ 4,3M€, répartie à 50% environ entre chaque tranche.

Parmi l'ensemble des solutions proposées, nous pouvons supprimer celles qui accouchent de primes par tranche trop grande ou trop faibles, soit les solutions qui ne vérifient pas (test.V.1.2), en traçant les deux courbes de contraintes (borne supérieure et borne inférieure) :

Iso Value Min à deux tranches



Retrait des solutions inadmissibles - (G.V.1.2)

L'Iso Value devant être à la fois inférieure à la borne supérieure (courbe en rouge sur le graphe) et supérieure à la borne inférieure (courbe en bleu), il ne reste qu'une part limitée des solutions, indiquée en vert foncée sur (G.V.1.2).

Une explication détaillée sur la suppression des autres solutions est donnée en annexe (A.V.4).

Dans cet exemple particulier les solutions obtenues avec les répartitions fournies par les exemples de la prime technique et de la prime pure sont incluses dans l'espace des solutions admissibles, ce qui n'est pas forcément le cas en général.

L'avantage de cette décomposition par espaces de répartition uniforme des primes (E_{p*}) est qu'elle réduit le nombre d'inconnues de l'équation (V.1.5) de L à un seul, ce qui permet des mises en œuvres numériques beaucoup plus rapides.

Il est théoriquement possible de tester tous les sous-espaces voulus, ce qui assure de trouver la totalité des solutions de (V.1.5), comme l'a montré l'exemple avec deux tranches.

Il est parfaitement possible d'obtenir un cas théorique où les contraintes dues à (test.V.1.1) sont si fortes que l'ensemble des solutions admissibles est vide. Par rapport à une recherche numérique directe où planera toujours le doute d'une faille de l'algorithme de recherche, cette méthode peut montrer de manière beaucoup plus fiable l'inexistence de solutions.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que le temps d'implémentation nécessaire permettant d'opérer une recherche de solutions sur un maillage suffisamment dense des sous-espaces croît exponentiellement avec le nombre de tranches.

L'Iso Value s'exprime de manière ambiguë dans le cadre des reconstitutions payantes. Le montant cumulé des primes initiales importe, mais également leur répartition selon les tranches. Cette ambivalence dans la définition (l'Iso Value est-elle caractérisée par le L-uplet des primes initiales ou bien par leur montant cumulé ?) ainsi que la pluralité ou l'inexistence de solutions viables sont autant d'obstacles à une lecture simple de cet indicateur.

Dans la mesure où nous sommes théoriquement capables d'explorer l'ensemble des solutions possibles grâce à la décomposition en sous-espaces de répartition uniforme des primes initiales, l'Iso Value reste un indicateur pertinent, dont l'évaluation peut cependant se heurter à des difficultés de recherche numérique des solutions.

En pratique la recherche de solutions pourra s'effectuer sur des sous-espaces de répartition proche de celles des primes pures et techniques afin d'accélérer le processus, en espérant que l'ensemble des solutions admissibles comprises dans cette poche ne soit pas vide.

2. Calcul de l'Iso Value Max

Le but de l'Iso Value Max, comme dit dans l'introduction, est de prendre en compte l'incertitude liée à la modélisation du risque. Le principe est le suivant : Si nous nous étions trompés de 10% dans l'estimation des probabilités de notre modèle (c'est-à-dire que notre modèle est 10% moins sévère que la réalité), alors que vaudrait l'Iso Value ?

Cette Iso Value « choquée » à la hausse par les 10% d'incertitude du modèle est l'Iso Value Max. Pour quantifier ainsi l'incertitude, ce principe repose sur celui des distorsions de probabilités, déjà exposé dans le cadre de l'estimation de la prime HERMES, en utilisant une forme particulière : la transformée PH (*Proportional Hazard*).

Nous allons donc, après avoir développés certains concepts utiles de la transformée PH, calculer une Création de Valeur sous transformée PH, puis chercher à l'annuler, exactement comme pour l'Iso Value Min.

2.1. Transformée PH

Une transformée PH est une forme particulière de distorsion de probabilité usant des fonctions de distorsions de la forme :

$$g_u : x \mapsto x^{1-u}$$

Où r, compris entre 0 et 1, est le paramètre d'incertitude (en l'occurrence les 10% évoqués en introduction).

g vérifie les conditions pour définir une distorsion de probabilité. La « moyenne PH » (*PH-mean*) d'incertitude r d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F supposée continue et de survie S = 1-F est donnée par :

$$PH_u(X) = \int_0^\infty S(x)^{1-u}.dx$$

$S_u : x \mapsto S(x)^{1-u}$ définit une nouvelle fonctions de survie, continue si S l'est.

Alors la Value-at-Risk (PH-VaR) de niveau α vaut, sous cette nouvelle distribution et pour un risque décroissant :

$$VaR_\alpha^{u,décr}(X) = VaR_{\alpha^{\frac{1}{1-u}}}(X) \quad \text{(V.2.1)}$$

Avec u = 10% et α = 0.5% nous obtenons:

$$\alpha_u = \alpha^{\frac{1}{1-u}} \approx 0.27\% \quad \text{(V.2.2)}$$

2.2. Calcul de la création de valeur sous distorsion de probabilité

La formule de la Création de Valeur, sous une incertitude u, se transforme de la manière suivante :

$$CV^u = (1-\tau_{taxe}) \times PH_u\left(R_{Réass}\right) + \rho_d \times \Delta_{Capital}^u \quad \text{(V.2.3)}$$

Où:

$$\Delta^u_{Capital} = \Delta^u_{\Pr imes} + \Delta^u_{Réserves}$$

$$\begin{cases} \Delta^u_{prime} \approx PH_u(R_{brut}) - VaR_{\alpha_u}(R_{brut}) - PH_u(R_{brut} + R_{Réass}) + VaR_{\alpha_u}(R_{brut} + R_{Réass}) \\ \Delta^u_{réserve} \approx \sum_{i=2}^{n} \frac{VaR_{1-\alpha_u}(Réserves(1/1/i)) - PH_u(Réserves(1/1/i))}{(1+r)^i} \end{cases} \quad \text{(V.2.4)}$$

Dans l'expression (V.2.3) les espérances sont donc remplacées par des moyennes PH et les VaR par desVaR sous transformée PH, les VaR étant toutes à risque décroissant.

Dans la pratique nous ne disposons que de simulations numériques pour estimer les intégrales. Nous les approcherons donc par la méthode des trapèzes, documentée en annexe (A.V.6).

Reprenant les mêmes raisonnements que pour l'Iso Value en première partie, le capital devenant indépendant de la prime, nous obtenons en l'absence de reconstitutions payantes :

$$IV_{\max} = PH_{10\%}(Réc) + \frac{\rho_d}{1-\tau_{taxe}} \times \Delta^{10\%}_{Capital} \quad \text{(V.2.5)}$$

Exemple : en reprenant le programme (T.V.1.1) nous obtenons les résultats suivants, comparables à ceux correspondant pour l'Iso Value Min :

$PH_{10\%}(Réc)$	$PP_{structure}$	$\Delta^{10\%}_{Capital}$	$\Delta_{Capital}$	Iso Value Max	Iso Value Min
6 171 913	5 742 879	47 951 906	30 321 140	9 768 306	8 016 964

Comparaison Iso Values Min et Max - (T.V.2.1)

L'utilisation de la transformée PH a donc « gonflé » chacune des composantes de la formule, donnant une Iso Value Max à environ 10M€ là où l'Iso Value était à 8M€.

Sinon il nous faut résoudre une nouvelle équation en PR :

$$\begin{cases} (1-\tau_{taxe}) \times PH_u(PR - Réc) + \rho_d \times \left(PH_u(PR - Réc + S) - VaR_{1-\alpha_u}(PR - Réc + S)\right) - \rho_d\, \Delta^u_{Capital}(réserve) = 0 \\ PR = \sum_{i=1}^{L} M_i P_i \end{cases}$$

(V.2.6)

La résolution de cette équation passant par les mêmes étapes que celle de l'Iso Value.

Le principe de l'Iso Value Max est intéressant en ce qu'il permet de définir un intervalle de confiance pour les primes de réassurance. Sa calibration reste cependant hasardeuse (l'exemple donné avec une prime déterministe donne une hausse de près de 25% de la valeur de' l'Iso Value Max par rapport à l'Iso Value Min. Par recherche numérique, la différence s'aggrave encore et nous pouvons trouver des rapports de 2 à 5 entre les deux indicateurs. Le choix des 10% d'incertitude repose sur une source interne aussi un travail de calibration justifiée serait-il nécessaire avant de mettre complètement en place cet indicateur.

3. Iso Value du réassureur

Exceptionnellement, nous nous placerons dans cette partie du point de vue du réassureur. En effet, AXA Global P&C assure en particulier un rôle de réassureur interne pour la branche IARD du groupe AXA : pour ces opérations intra groupe il est donc nécessaire d'avoir des indicateurs calculés du point de vue du réassureur afin de ne pas favoriser exagérément une entité au profit d'une autre au sein du groupe.

En acquérant une affaire, le réassureur voit son résultat affecté de deux manière : dans un premier temps, il s'enrichit du résultat de réassurance (en principe de moyenne positive de son point de vue, pour peu qu'il ait négocié avec bon sens). Dans un second temps, il doit allouer un capital règlementaire correspondant aux risques qu'il a accepté par l'acquisition de cette affaire.

Nous pouvons donc, en comparant ces deux effets, formuler un indicateur de création de valeur pour le réassureur, noté $CV_{Ré}$:

$$CV_{Ré} = (1-\tau_{taxe}) \times E\left[R_{Réassureur}\right] - \rho \times Capital_{Ré} \quad \text{(V.3.1)}$$

Avec :

$$\begin{cases} R_{Réassureur} = PR - Réc = -R_{Réass} \\ Capital_{Ré} = STEC^{Ré}_{\text{Primes}} + STEC^{Ré}_{Réserves} \end{cases} \quad \text{(V.3.2)}$$

Le taux d'économie de capital (ρ = 6%) est le même que pour la cédante, en référence aux spécifications techniques du QIS 5. Dans ce mémoire nous supposerons que le taux de taxation est également le même, même s'il est tout à fait envisageable et courant que réassureur et cédante ne soient pas soumis au même impôt sur les sociétés.

L'éventuel coefficient de diversification lié au réassureur est en revanche différent de celui de la cédante, et a priori beaucoup plus fort (le réassureur mutualisant les risques des assureurs). Un coefficient de diversification particulier lié au réassureur est donc défini, et nous notons :

$$\rho_d^{Ré} = \left(1 - coefficient^{Ré}_{diversification}\right) \times \rho \quad \text{(V.3.3)}$$

Nous supposerons dans toute la suite que l'effet de diversification est intégré au capital requis pour le réassureur au moyen de la formule (V.3.3).

$STEC^{Ré}_{\text{Primes}}$ et $STEC^{Ré}_{Réserves}$ se calculent de la même manière que pour la cédante :

$$\begin{cases} STEC^{Ré}_{prime} = E[R_{Réassureur}] - VaR_{0.5\%}(R_{Réassureur}) = E[PR - Réc] - VaR_{0.5\%}(PR - Réc) \\ STEC^{Ré}_{réserve} = \sum_{i=2}^{n} \dfrac{STEC^{Ré}_{Réserves}(i)}{(1+r)^i} \end{cases} \quad \text{(V.3.4)}$$

Ils s'estiment également de la même manière dans HERMES avec pour toute année de paiement i l'approximation :

$$STEC^{Ré}_{Réserves}(i) \approx VaR_{99.5\%}\left(Réserves(1/1/i)^{Ré}\right) - E\left[Réserves(31/12/i)^{Ré}\right]$$

Où les réserves valent la somme des récupérations futures, c'est-à-dire la différence entre les réserves brutes et nettes de réassurance :

$$Réserves(1/1/i)^{Ré}_{simu} \approx \sum_{j=i}^{n} Réc(j)_{simu} = Réserves(1/1/i)^{brut}_{simu} - Réserves(1/1/i)^{net}_{simu}$$

3.1. Iso Value Min

L'Iso Value Min du réassureur vaut simplement, dans le cadre d'une prime déterministe, le coût moyen augmenté du coût en capital :

$$IV_{Ré} = E[Réc] + \frac{\rho_d^{Ré}}{(1-\tau_{taxe})} Capital_{Ré} \quad \text{(V.3.5)}$$

Pour une prime avec reconstitutions payantes, le problème revient à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} (1-\tau_{taxe}-\rho_d^{Ré})E[PR] + \rho_d^{Ré}\left(VaR_{0.5\%}(PR-Réc)\right) - \left((1-\tau_{taxe}-\rho_d^{Ré})E[Réc] + \rho_d^{Ré}\, STEC^{Ré}_{réserve}\right) = 0 \\ PR = \sum_{i=1}^{L} M_i P_i \end{cases}$$

(V.3.6)

3.2. Iso Value Max

Le principe reste le même, avec l'application d'une transformée PH aux distributions aléatoires. Cependant un changement s'opère : là où du point de vue de la Cédante il s'agissait d'alourdir les queues pour intégrer une incertitude « à la hausse » des primes (Iso Value Max supérieure à l'Iso Value Min, signifiant que la Cédante est prête à payer plus cher sous une incertitude de 10%) il faut ici les alléger si nous voulons garder une symétrie des points de vue (le Réassureur est prêt à descendre plus bas sous une incertitude de 10%).

Le choc d'incertitude appliqué sera donc de u = -10% et non de 10%. La valeur du quantile associé pour la VaR est de :

$$\alpha_u = 0.5\%^{\frac{1}{1+10\%}} \approx 0.81\% \quad \text{(V.2.2)}$$

Le quantile est supérieur au quantile bicentenaire : nous allégeons donc bien la queue de distribution.

Cette modification signalée, la formule de l'Iso Value Max du réassureur est la suivante pour une prime déterministe :

$$IV^{Ré}_{\max} = PH_{-10\%}(Réc) + \frac{\rho_d}{1-\tau_{taxe}} \times Capital^{-10\%}_{Ré} \quad \text{(V.3.7)}$$

Avec :

$$Capital^{-10\%}_{Ré} = STEC^{Ré,-10\%}_{prime} + STEC^{Ré,-10\%}_{réserve}$$

$$\begin{cases} STEC^{Ré,-10\%}_{prime} = VaR_{1-\alpha_{-10\%}}(Réc) - PH_{-10\%}(Réc) \\ STEC^{Ré,-10\%}_{réserve} \approx \sum_{i=2}^{n} \frac{VaR_{1-\alpha_{-10\%}}\left(Réserves(1/1/i)^{Ré}\right) - PH_{-10\%}\left(Réserves(1/1/i)\right)}{(1+r)^i} \end{cases}$$

Pour une prime aléatoire il s'agira de résoudre l'équation:

$$\begin{cases}(1-\tau_{taxe}-\rho_d)\times PH_{-10\%}\left(PR-Réc\right)+\rho_d VaR_{\alpha-10\%}\left(PR-Réc\right)-\rho_d STEC_{réserve}^{Ré,-10\%}=0=0 \\ PR=\sum_{i=1}^{L} M_i P_i\end{cases}$$

(V.3.8)

Exemple : la reprise des deux programmes décrits respectivement par (T.V.1.1) et (T.V.1.3) donne les résultats suivants pour les indicateurs d'Iso Value du réassureur, avec un taux de taxation toujours à 20% :

$E[Réc]$	$Capital_{Ré}$	coeff. diversification	Création de valeur	Prime Technique	Iso Value Min
5 742 879	75 662 170	70%	339 577	7 769 749	7 445 278

Iso Value Min du réassureur (€) - (T.V.3.1)

La valeur de l'Iso Value Min obtenue est cohérente avec la prime technique estimée et la Création de Valeur calculée sur sa base. L'effet de diversification est ici indispensable : le coût en capital à immobiliser serait sinon bien trop important au regard du résultat espéré.

$PH_{-10\%}(Réc)$	$Capital_{Ré}^{-10\%}$	Iso Value Max
5 365 838	84 056 865	7 257 117

Comparaison Iso Values Min et Max - (T.V.3.2)

Nous pouvons observer que si la transformée PH d'incertitude -10% est effectivement plus faible que l'espérance (5,35M€ contre 5,75M€) le capital, lui, à augmenté (84M€ contre 75,7M€). Cela est du à la même raison qui entrainait des diminutions négatives de capital de réserve dans le chapitre IV : ce capital est constitué de la différence entre deux grandeurs (transformée PH et VaR sous incertitude) qui diminuent toutes les deux. En l'occurrence ici la première diminue plus au global que la seconde, entrainant une hausse du tout.

Cependant, avec l'effet de diversification, l'Iso Value Max du réassureur est légèrement plus faible que son Iso Value Min (7,26M€ contre 7,45M€).

Si le calcul de l'Iso Value Min du réassureur, bien qu'il soulève avec encore plus d'acuité que du point de vue de la Cédante le problème de l'évaluation de l'effet de diversification, peut se révéler pertinent, du moins pour les structures avec primes payées d'avance, celui de l'Iso Value Max n'est que peu souvent utile, la valeur trouvée étant bien souvent supérieure à celle de l'Iso Value Min, ce qui est contraire aux attentes.

Il sera donc nécessaire de mieux calibrer l'estimation de l'indicateur Iso Value Max avant de pouvoir l'utiliser.

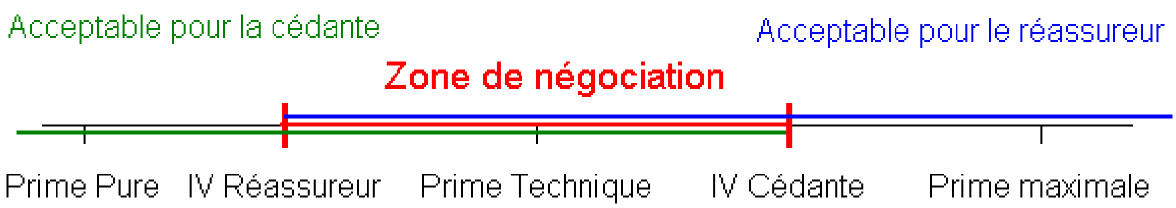
Nous allons maintenant laisser de côté les indicateurs Iso Value Max, côté Cédante comme côté Réassureur, et nous intéresser à la comparaison des deux Iso Value Min.

4. Comparaison des Iso Values de la Cédante et du Réassureur

La signature d'un contrat de réassurance, pour qu'elle ait un sens, doit être bénéfique à la fois à la Cédante et au Réassureur. Muni du critère de la Création de Valeur, nous pouvons traduire cela par le fait que la Création de Valeur des deux parties doit être positive.

Encore autrement dit, cela signifie que l'Iso Value de la Cédante doit être supérieure à l'Iso Value du Réassureur : la Cédante doit être prête à monter plus haut que le Réassureur n'est prêt à descendre. Entre ces deux bornes se dégage ainsi une zone de négociation.

Nous pouvons schématiser cela sur un axe :



Axe des primes idéal pour la souscription d'un contrat de réassurance - (G.V.4.1)

L'exemple du programme (T.V.1.1) illustre parfaitement ce graphe puisque l'ordre présenté par (G.V.4.1) est respecté :

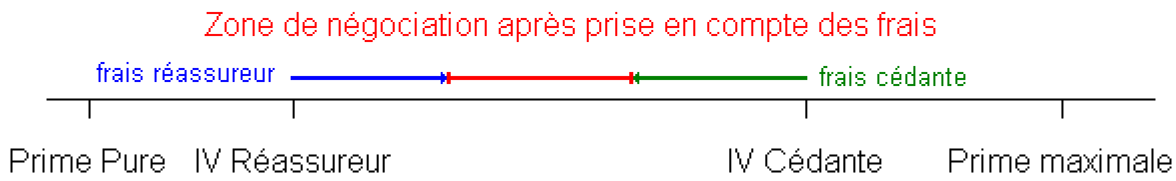
Prime Pure	Iso Value Réassureur	Prime Technique	Iso Value Cédante	Prime maximale
5 742 879	7 445 278	7 769 749	8 016 964	17 500 000

Résumé des primes caractéristiques du programme (T.V.1.1) (€) - (T.V.4.1)

Le prix de ce programme peut donc se négocier, d'après l'outil HERMES, entre 7,5M€ et 8M€.

Il n'est pas nécessaire que la prime technique appartienne à la zone de négociation. Cela est tout de même un gage de fiabilité de la cotation de cette dernière

Lorsque la zone de négociation est réduite il peut être important de se poser la question des frais additionnels du contrat (obtention, suivi, gestion,…), souvent mal maîtrisés par le Réassureur comme par la Cédante et dont la prise en compte diminue l'Iso Value de la Cédante tandis qu'elle augmente celle du Réassureur, réduisant la zone comme peau de chagrin :



Pressions des frais sur la zone de négociation - (G.V.4.2)

La comparaison des Iso Values Max de la Cédante et du Réassureur peut ajouter à la zone de négociation un intervalle de confiance :

Axe des primes idéal avec intervalle de confiance - (G.V.4.3)

L’utilisation combinée des Iso Values du Réassureur et de la Cédante, si elles sont bien estimées, permet de confronter de manière objective les situations respectives des deux parties. Cette confrontation permet d’écarter les structures de réassurance ne donnant lieu à aucune zone de négociation.

Elle permet aussi la Cédante de choisir entre deux réassureurs celui qui lui fournira la plus grande marge de négociation.

Cette méthode est cependant limitée pour le moment par les fragilités de l’estimation de la Création de Valeur, comme nous l’avons vu aux chapitres III et IV.

Ce dernier chapitre sur les Iso Values est un exemple de l’utilisation concrète qui peut être faite du critère de la Création de Valeur. Leur grand avantage est leur capacité d’être définies symétriquement du point de vue de la Cédante comme de celui du Réassureur.

Le développement du concept d’Iso Value Max permet d’intégrer à l’Iso Value la notion d’incertitude et de créer des intervalles de confiance autour des Iso Values. Le calibrage de ces indicateurs ne semble cependant pas encore au point. L’exposé fait dans cette partie sur leur mode de calcul est néanmoins généralisable pour n’importe quel niveau d’incertitude, ce qui permet d’éventuels ajustements futurs.

L’utilisation des Iso Values Min et Max permet la prise en compte du point de vue du Réassureur dans le choix de la structure, ce qui permet d’assurer qu’elle pourra être placée sur le marché tout en définissant une zone de négociations pour son prix.

Conclusion

Nous nous sommes interrogés au début de ce mémoire sur ce qu'était une structure de réassurance optimale.

Au sein d'un cadre restreint, nous avons pu apporter une réponse à cette question. La première partie a évoqué la grande diversité des formes de réassurances, puis nous a limité à quelques structures : traités en quote-part (QP) ou en excédent de sinistre (XS).

La seconde nous a défini les attentes liées à l'emploi de la réassurance (transfert du risque, souscription, économie en capital, conseil), et nous a focalisé sur l'économie en capital en proposant un critère associé : la Création de Valeur.

Ce critère intégrant entre autres le prix d'une structure de réassurance, l'évaluation de ce dernier a fait l'objet de la troisième partie. Celle-ci a contribué à montrer que si l'actuaire ne saurait maîtriser avec ses seuls outils l'entièreté du sujet de la tarification d'un contrat d'assurance, et de réassurance en particulier, il lui est néanmoins possible d'obtenir un substitut raisonnablement pertinent du prix d'une structure en l'absence de toute cotation extérieure.

L'adaptation de la Création de Valeur aux portefeuilles des branches longues a donné l'occasion d'élaborer des méthodes de déroulement dans le temps des sinistres et des capitaux requis, et de reconsidérer le postulat du *stand alone*, soulevant la question de l'intensité de l'effet de diversification.

La construction du critère de la Création de Valeur pour les portefeuilles à branche longue comme courte permet la recherche d'une structure de réassurance le maximisant, structure qui est donc optimale au regard de la Création de Valeur.

L'optimalité d'une structure de réassurance dépend cependant de nombreux paramètres, dont une grande partie ne relève pas forcément du choix de l'actuaire : appétit au risque et budget de la cédante, appétit au risque du réassureur,... Une structure optimale au regard de l'actuaire pourra ainsi être rejetée, parce qu'elle induit une rétention trop élevée et donc une prise de risque trop grande pour la Cédante, ou encore parce qu'il sera impossible de la placer sur le marché de la réassurance.

Dans ces conditions une structure de réassurance optimale serait une structure permettant la rencontre des intérêts de la Cédante et du Réassureur (par le biais des intervalles d'Iso Values). A défaut de pouvoir trouver « la » structure de réassurance optimale, nous pouvons ainsi supprimer les mauvaises.

A chacune des parties de ce mémoire nous avons pu constater un resserrement du cadre. A travers ce phénomène nous pouvons cependant voir le comportement normal d'une étude partant d'un sujet très vaste pour s'affiner peu à peu. Ici cet affinement a abouti à la construction d'un critère d'optimisation simple (la Création de Valeur) permettant de comparer rapidement plusieurs structures de réassurance entre elles, ainsi que la définition d'un indicateur pertinent (l'Iso Value) permettant la confrontation des points de vue entre Cédante et Réassureur à propos d'une structure de réassurance.

Si ce mémoire ne constitue en aucun cas une étude exhaustive sur le sujet de l'optimisation des structures de réassurance, il a pour vocation de servir de repère à de futures études et travaux portant sur cette problématique.

Parmi ces pistes d'études possibles nous pouvons citer l'étude des chargements de prime par distorsion de probabilité, l'élaboration de méthodes d'estimation du résultat de réserve et du coefficient de diversification d'une entité ou d'un réassureur, ainsi que la dominance stochastique dans l'étude de la Création de Valeur.

Bibliographie

- IGUZQUIZA Enrique (2010) Gestion globale des risques – VaR
- KALTWASSER Perrine, DAMAS Vincent (2006) L'enquête sur les traités de réassurance finite souscrits par les organismes soumis au contrôle de l'ACAM
- MATA Ana J. (2000) Pricing excess-of-loss reinsurance with reinstatements
- PATRIK Gary S. (?)Reinsurance
- PIERRE-LOTI-VIAUD Daniel (2009) Base des méthodes actuarielles
- RUHM David L., BREHM Paul J. (2007) Risk Transfer Testing of Reinsurance Contracts, A Summary of the Report by the CAS Research Working Party on Risk Transfer Testing
- WALHIN Jean-François (2005) On the Optimality of Multiline Excess of Loss Covers
- WANG Shaun (1997) Implementation of PH-Transforms in Ratemaking
- YOUNG Virginia R. Premium Principles

<u>Sources internes :</u>

- AUBRY Olivier (2009) Short Term Economic Capital Methodology
- AXA Global P&C (2010) Hermes User Guide
- COHIGNAC Thierry (2009) Calcul des Iso Values
- DIVET François (2006) Tarification de réassurance
- DUBOIS Diane (2009) Optimisation d'un programme de réassurance
- LAGACE Jean-Sébastien (2011) Le domaine de la Réassurance
- MOMAYEZ SEFFAT Christian (2011) Chargements en Réassurance P&C – Etude Economique - Etude Technique
- ZGHAL Thammeur. (2010) HERMES 2.0 – Harp Exercise for Reinsurance Modelling and Efficiency Search

<u>Autres sources</u> :

- CEIOPS (2010) QIS5 Technical Specifications
- EIOPA (2011) EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II

Annexes

Les annexes sont réparties en chapitres et référencées dans leur ordre d'utilisation au sein de chaque chapitre. Elles viennent appuyer, par un calcul détaillé ou par la présentation de données les résultats présentés dans le corps du mémoire.

Annexe – Chapitre I : Lexique

Les mots ou concepts définis dans ce lexique sont classés par ordre alphabétique.

Actualisation : L'actualisation de deux flux monétaires est le fait de les rapporter à une date similaire afin de les comparer. En effet le marché financier considère l'existence d'un taux de placement dit « sans risque » (taux que nous pourrions comparer en France à celui du Livret A) et qui dilate la valeur de l'argent au cours du temps.

Par exemple, supposons que le taux sans risque soit de 2,25%, et qu'un agent désire disposer dans un an jour pour jour d'un capital de K = 100 000€.

Alors la valeur de ce capital aujourd'hui est la somme d'argent qu'il faut placer au taux sans risque de sorte à obtenir K dans un an :

$$(1+2{,}25\%)\times \tilde{K} = K \quad \text{(I.1.1)}$$

$$\tilde{K} = \frac{K}{1+2{,}25\%} \approx 97{,}8K€$$

La valeur actualisée d'un capital de 100 000€ dans un an est donc de 97 800€.

Assiette de prime : ou plus brièvement GNPI (*Gross Net Premium Income*). Il s'agit du montant cumulé des primes collectées par un assureur relativement à un portefeuille donné. La prime de réassurance pour un portefeuille est généralement donnée en pourcentage de ce montant.

Attritionnel/Atypique : Lorsqu'elle fait appel à la réassurance (et notamment la réassurance non proportionnelle), la cédante cherche à se prémunir contre ses risques les plus importants. Ceux-ci sont également les moins fréquents et les plus difficiles à prédire. C'est pourquoi une division est communément faite au sein des sinistres d'un portefeuille :

- d'une part les sinistres « attritionnels », composés de sinistres fréquents et de faible coût, dont le montant cumulé varie peu d'une année sur l'autre, et qui est souvent conservé par la cédante plutôt que transféré à un réassureur (par exemple un bris de glace).
- D'autre part les sinistres « atypiques », de faible fréquence mais de montant potentiellement très élevés (par exemple l'incendie d'une usine pétrochimique). Ce sont ces sinistres qui sont étudiés le plus souvent dans le cadre de la réassurance.

Branche d'activité : l'assurance est divisée en plusieurs secteurs d'activités qui, par leurs caractéristiques propres, nécessitent l'application d'une législation spécifique.

Il existe deux branches d'activité principales : l'assurance vie (où l'exécution du contrat d'assurance dépend du fait qu'une personne soit en vie ou non à une date définie par le contrat), et l'assurance non vie, ou assurance dommage, définie par opposition à l'assurance vie.

Celle-ci est subdivisée en trois sous-branches que sont la santé (*health*), l'IARD (Incendies, Accidents et Risques Divers, *property*) et la responsabilité civile (*casualty*).

Branches courtes/Branches longues ou en anglais *Short Tail/Long Tail*. Parmi les branches d'activités une distinction s'opère entre celles qui donnent lieu à des sinistres qui sont rapidement déclarés et dont le montant est rapidement connu (typiquement : un dommage sur une voiture) et celles dont la date de déclaration peut être très éloignée de la date de survenance (par exemple un vice de construction, décelé et déclaré sept ans plus tard) et/ou dont le montant final n'est pas connu rapidement (par exemple un sinistre en responsabilité civile, dont le montant serait suspendu à une décision de justice).

La gestion des sinistres dans une branche longue est plus complexe que dans une branche courte du fait de la dimension temporelle et de l'évolution de la charge ultime. Elle engendre des problématiques de risques particulières qui seront traitées dans ce mémoire en partie IV.

Ratio de perte : ou plus couramment son équivalent anglais, *Loss Ratio*. Il s'agit, relativement à un portefeuille, du rapport entre les sinistres payés et les primes collectées. C'est un indicateur utile de la qualité de la tarification d'un portefeuille : supérieur à 1, il signifie que l'année a été particulièrement prodigue en sinistres, ou bien que le portefeuille est sous-tarifé.

Ratio combiné : ou *Combined ratio*. Cet indicateur reprend le ratio de pertes en ajoutant aux sinistres payés les frais de fonctionnement de l'assureur. C'est donc plus simplement le rapport entre charges et produits, hors opérations financières, de l'assureur. Un ratio combiné inférieur à 1 signifie un résultat technique positif.

Rétention : relativement à un traité de réassurance (en général non proportionnel), c'est le montant limite d'un risque à partir de duquel le traité entre en vigueur. La part du montant d'un sinistre en-deçà de la rétention reste à charge de l'assureur (comme une franchise pour une police liant l'assuré à l'assureur).

Solvabilité : Un assureur est dit « solvable » lorsqu'il est capable de faire face à ses engagements, présents comme futurs (principalement ses prestations auprès de ses assurés). Un assureur insolvable ne peut poursuivre son activité, aussi la solvabilité d'un assureur est-elle sa préoccupation principale.

Annexes – Chapitre II

(A.II.1) et (A.II.2) présentent deux critères fondés sur la Création de Valeur.

(A.II.1) : Volatilité du résultat de réassurance

Le critère de création de valeur présente l'inconvénient d'être fondé sur le coût moyen de la réassurance, sans tenir compte de sa volatilité.

La création de valeur est une quantité déterministe qui est la moyenne d'une variable sous-jacente, nommée ici création de valeur observée :

$$CV_{Obs} = (1-\tau_{taxe}) \times R_{Réass} + spread \times \Delta_{Capital} \quad (1.1)$$

La volatilité de cette variable peut-être mesurée par son écart-type :

$$\sigma_{CV} = (1-\tau_{taxe}) \times \sigma(R_{Réass}) \quad (1.2)$$

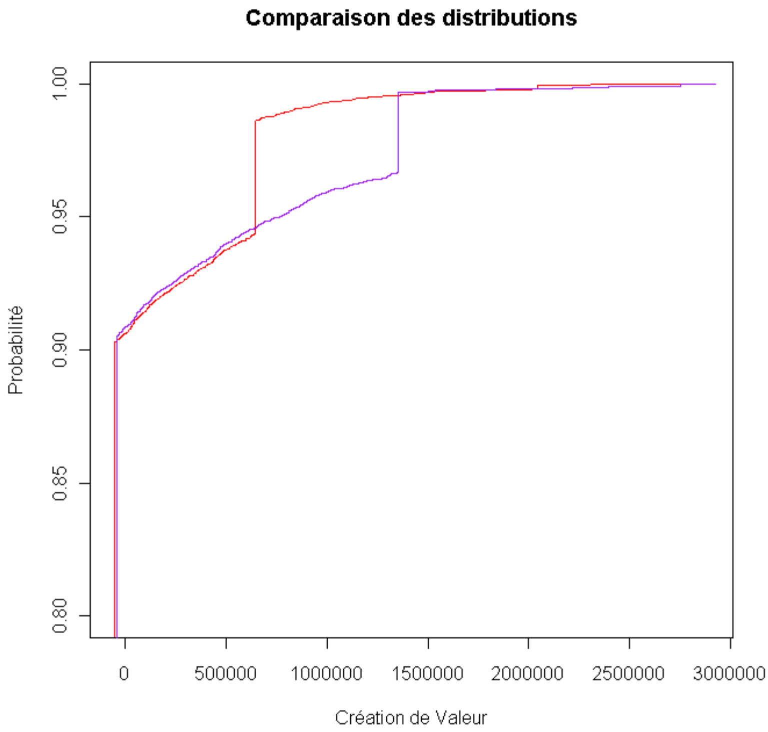
Cet écart-type est proportionnel à celui du résultat de réassurance de la cédante. L'un comme l'autre peuvent donc définir un second critère de volatilité associé à la structure de réassurance.
A une structure de réassurance engendrant une création de valeur forte, mais avec une volatilité du résultat également élevée, la cédante pourra ainsi choisir de préférer une autre structure de réassurance induisant une création de valeur plus modeste mais aussi plus stable.

Afin d'illustrer ces propos, nous avons étudié, pour un même portefeuille, deux traités XS aux caractéristiques suivantes :

	Portée (M€)	Priorité (M€)	Reconstitutions	AAD (M€)
Traité 1	2	1	2@0	1
Traité 2	2	2	2@0	0

Traités XS de réassurance – (T.1.1)

A l'aide de HERMES nous avons pu simuler une distribution de la création de valeur observée en fonction de chacun de ces traités. Nous pouvons tracer leurs fonctions de répartition (le traité 1 correspond à la courbe en rouge, le 2 à celle en violet):



Distribution de la création de valeur observée de deux programmes – (G.1.1)

Les indicateurs obtenus pour chaque traité sont reportés dans le tableau suivant :

	Création de Valeur (€)	Volatilité (€)
Traité 1	3 900	221 186
Traité 2	36 580	308 971

Tableau de comparaison des critères d'optimalité – (T.1.2)

Comme nous pouvons le constater, au regard de la stricte création de valeur, le traité 2 est plus intéressant que le traité 1 (36K€ contre 4K€). En revanche sa volatilité est supérieure (300K€ contre 200K€).

Il ne nous est donc pas possible, avec ces seuls indicateurs, de déterminer lequel de ces deux traités est préférable.

(A.II.3) : rendement de réassurance.

Dans une optique où une cédante étudie l'impact de la réassurance sur son activité à partir de son résultat, elle peut assimiler une opération de réassurance à une opération financière : investissement d'un montant en primes contre économie de capital et récupérations. Vue ainsi, l'efficacité de cette opération peut alors être caractérisée par un rendement.

Ce rendement est donné par le rapport entre gains et dépenses. En notant PR le montant total de primes de réassurance et F celui des frais d'acquisition et de gestion de la structure de réassurance nous obtenons :

$$\rho_{Réass} = \frac{CV_{Obs}}{PR + F} \quad (2.1)$$

Nous supposerons à partir de maintenant et pour toute la suite que les frais d'acquisition et de gestion de la structure de réassurance sont approximativement les mêmes quelque soit la structure de réassurance adoptée par la cédante. Alors la comparaison du rendement (comme de la création de valeur) de deux structures de réassurance sera indépendante des frais, qui ne sont donc pas pris en compte :

$$\rho_{Réass} = \frac{CV_{Obs}}{PR} \quad (2.2)$$

Une étude jointe de la moyenne et de la volatilité de son rendement peut alors permettre de tester l'efficience d'une structure de réassurance.

L'avantage de cette vision est qu'elle permet en théorie de comparer l'opération de réassurance à des opérations financières classiques menées par la cédante.

Sous le postulat du *stand alone* toutefois nous devons rappeler que les montants, notamment d'économie de capital, ne reflètent pas forcément bien la réalité, dans le cadre global de la comptabilité de l'entité notamment. Il devient alors malaisé de comparer le rendement de réassurance avec des opérations étrangères à la réassurance.

Ce mémoire ne développera donc pas plus loin les critères de rendement d'une structure de réassurance. Leur présentation permet néanmoins de donner une vision plus large de la mesure de l'impact de la réassurance sur une cédante, et peut servir de point de départ à d'autres travaux.

(A.II.3) : En ne prenant en compte que les facteurs économiques (primes et prestations pour sinistres) nous pouvons montrer qu'un traité vérifiant la règle 10-10 vérifie toujours la règle ERD.

Preuve : En notant R = $\text{Résultat}_{\text{Réassureur}}$ et en supposant qu'il est de densité f_R:

$$ERD = -\frac{P(R<0)\dfrac{\int_{-\infty}^{0} x\, f_R(x).dx}{P(R<0)}}{PR} = -\frac{\int_{-\infty}^{0} x\, f_R(x).dx}{PR} \quad (3.1)$$

$$PR \times ERD = -\int_{-\infty}^{-10\%PR} x\, f_R(x).dx - \int_{-10\%PR}^{0} x\, f_R(x).dx$$

$$-\int_{-10\%PR}^{0} x\, f_R(x).dx \geq 0 \Rightarrow PR \times ERD \geq -\int_{-\infty}^{-10\%PR} x\, f_R(x).dx$$

$$PR \times ERD \geq -\int_{-\infty}^{-10\%PR} (-10\%PR) f_R(x).dx = 10\%PR \int_{-\infty}^{-10\%PR} f_R(x).dx$$

$$ERD \geq 10\% \times P(R \leq -10\%PR) \quad (3.2)$$

Si l'opération vérifie la règle 10-10 nous avons :

$$P(R \leq -10\%PR) \geq 10\%$$

D'où :

$$ERD \geq 10\% \times 10\% = 1\% \,\square$$

Annexes – Chapitre III

(A.III.1) : il s'agit de résoudre en P l'équation (III.1.9) suivante relative au chargement d'un traité XL :

$$P = \frac{PP + \alpha.\sigma(Réc - PR)}{1-\beta} = \frac{PP + \alpha.\sigma(Réc - P.M)}{1-\beta} \quad (1.1)$$

Avec :

- PP prime pure du traité
- Réc variable aléatoire modélisant le montant des récupérations
- M variable aléatoire modélisant la prime finale (montant cumulé des primes de reconstitutions) normalisée par la prime initiale
- α coefficient de chargement de l'écart-type du résultat de réassurance (positif)
- β coefficient de chargement des coûts fixes, compris entre 0 et 1.

En réorganisant (1.1) comme il suit et en faisant apparaitre la variance du résultat, nous obtenons :

$$(1-\beta)P - PP = \alpha\sqrt{\sigma^2(Réc - P.M)} \quad (1.2)$$

Nous pouvons remarquer :

$$(1-\beta)P - PP \geq 0 \quad (1.3)$$

Nous passons au carré dans (1.2) en développant la variance, ρ valant la corrélation entre M et Réc quand elle existe et 0 sinon. Ce faisant l'information (1.3) est perdue :

$$(1-\beta)^2P^2 - 2(1-\beta)P.PP + PP^2 = \alpha^2(\sigma^2(Réc) + P^2\sigma^2(M) - 2P\rho\sigma(Réc)\sigma(M))$$

Ce qui donne alors une équation polynômiale du second degré en P :

$$((1-\beta)^2 - \alpha^2\sigma^2(M))P^2 + 2(\alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M) - (1-\beta)PP)P + PP^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc) = 0 \quad (1.4)$$

Soit :

$$aP^2 + bP + c = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} a = (1-\beta)^2 - \alpha^2\sigma^2(M) \\ b = 2(\alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M) - (1-\beta)PP) \quad (1.5) \\ c = PP^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc) \end{cases}$$

Le discriminant associé à cette équation vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4(\alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M) - (1-\beta)PP)^2 - 4\left((1-\beta)^2 - \alpha^2\sigma^2(M)\right)\left(PP^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc)\right) \quad (1.6)$$

Nous posons Δ' tel que Δ = 4 Δ'. Alors nous pouvons développer puis simplifie l'expression de Δ' :

$$\Delta' = \alpha^4 \rho^2\sigma^2(Réc)\sigma^2(M) - 2\alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M)(1-\beta)PP + (1-\beta)^2PP^2 - (1-\beta)^2PP^2$$
$$+ (1-\beta)^2\alpha^2\sigma^2(Réc) + \alpha^2\sigma^2(M)PP^2 - \alpha^4\sigma^2(M)\sigma^2(Réc)$$

$$\frac{\Delta'}{\alpha^2} = (\rho^2 - 1)\sigma^2(Réc)\sigma^2(M) - 2(1-\beta)\rho PP\sigma(Réc)\sigma(M) + (1-\beta)^2\sigma^2(Réc) + PP^2\sigma^2(M) \quad (1.7)$$

Récupérations et primes de reconstitutions sont toutes deux croissantes en fonction de la sinistralité (cf. III.1.6 et III.1.7). Réc et M sont donc corrélées positivement d'où :

$$0 \le \rho \le 1$$

Il s'ensuit que nous pouvons déduire l'inégalité suivante de (1.7) :

$$\frac{\Delta'}{\alpha^2} \ge -\alpha^2\sigma^2(Réc)\sigma^2(M) - 2(1-\beta)PP\sigma(Réc)\sigma(M) + (1-\beta)^2\sigma^2(Réc) + PP^2\sigma^2(M)$$

$$\frac{\Delta'}{\alpha^2} \ge ((1-\beta)\sigma(Réc) - PP^2\sigma^2(M))^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc)\sigma^2(M) \quad (1.8)$$

Alors nous avons la relation :

$$((1-\beta)\sigma(Réc) - PP^2\sigma^2(M))^2 \ge \alpha^2\sigma^2(Réc)\sigma^2(M) \Rightarrow \left(\frac{\Delta'}{\alpha^2} \ge 0 \Leftrightarrow \Delta \ge 0\right) \quad (1.9)$$

Nous supposerons l'inégalité incluse dans (1.9) vérifiée, aussi existe-t-il une ou deux solutions réelles à l'équation (1.1) :

$$r(1) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r(2) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.10)$$

Dans le cas d'un montage à reconstitutions payées d'avance : $\sigma^2(M) = 0$ d'où il s'ensuit que ρ est nul aussi. Alors :

$$\begin{cases} a = (1-\beta)^2 \\ b = -2(1-\beta)PP \\ c = PP^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc) \end{cases}$$

D'où en injectant dans la formule de r(1) :

$$r(1) = \frac{PP - \alpha.\sigma(Réc)}{1-\beta}$$

La quantité $\alpha.\sigma(Réc)$ étant strictement positive (sinon il n'y aurait pas d'aléa) nous avons :

$$r(1) < \frac{PP}{1-\beta}$$

Ce qui contredit (1.3) qui est l'information perdue par le passage au carré plus haut.

La prime technique dans le cadre des reconstitutions s'exprime donc selon la formule de r(2), soit en remplaçant par les valeurs :

$$\boxed{P = \frac{(1-\beta)PP - \alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M) + \sqrt{(\alpha^2\rho\sigma(Réc)\sigma(M) - (1-\beta)PP)^2 - ((1-\beta)^2 - \alpha^2\sigma^2(M))(PP^2 - \alpha^2\sigma^2(Réc))}}{(1-\beta)^2 - \alpha^2\sigma^2(M)}}$$

(1.11) □

(A.III.2) : il s'agit de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le résultat de réassurance $R_{Réass}$ soit une fonction croissante de la sinistralité touchant la tranche d'un traité XL avec reconstitutions payantes.

Définissons les fonctions qui permettent de passer respectivement de X à Réc et de X à M.

$$Réc = \Phi_{Réc}(X),\ \Phi_{Réc} \text{ de } R^+ \text{ dans } R^+.$$

$$M = \Phi_M(X),\ \Phi_M \text{ de } R^+ \text{ dans } R^+.$$

Nous dressons alors le tableau suivant définissant $\Phi_{Réc}$ et Φ_M :

X	$\Phi_{Réc}(x)$	$Im(\Phi_{Réc})$	$\Phi_M(x)$	$Im(\Phi_M)$
$I_0 = [0,m]$	x	[0,m]	$1+\frac{x}{m}c_1$	$[1,1+c_1]$
$I_k = [km,(k+1)m]$, $k \in [1, K-1]$	x	[km,(k+1)m]	$1+\sum_{i=1}^{k} c_i + \frac{(x-km)}{m} c_{k+1}$	$[1+\sum_{i=1}^{k} c_i, 1+\sum_{i=1}^{k+1} c_i]$
$I_K = [Km,(K+1)m]$	x	[Km,(K+1)m]	$1+\sum_{i=1}^{K} c_i$	$\{1+\sum_{i=1}^{K} c_i\}$
$I_{K+1} = [(K+1)m,+\infty[$	(K+1)m	{(K+1)m}	$1+\sum_{i=1}^{K} c_i$	$\{1+\sum_{i=1}^{K} c_i\}$

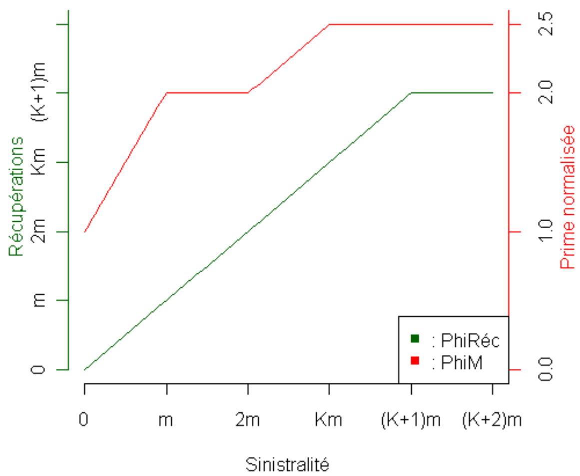
Tableau de caractérisation des fonctions $\Phi_{Réc}$ et Φ_M – (T.2.1)

Exemple : Nous considérons le traité XS suivant.

Tranche	Programme de reconstitutions
5 000 000 xs 5 000 000	1@100,1@0,1@50

Exemple de traité de réassurance XS (€) – (T.2.2)

Alors les représentations graphiques de $\Phi_{Réc}$ et Φ_M sont les suivantes :



Graphe des fonctions $\Phi_{Réc}$ et Φ_M pour la tranche (T.2.2) – (G.2.1)

Il s'agit de deux fonctions croissantes continues. Le résultat de réassurance est donné par :

$$R_{Réass} = \Phi_{Réc}(X) - P.\Phi_M(X)$$

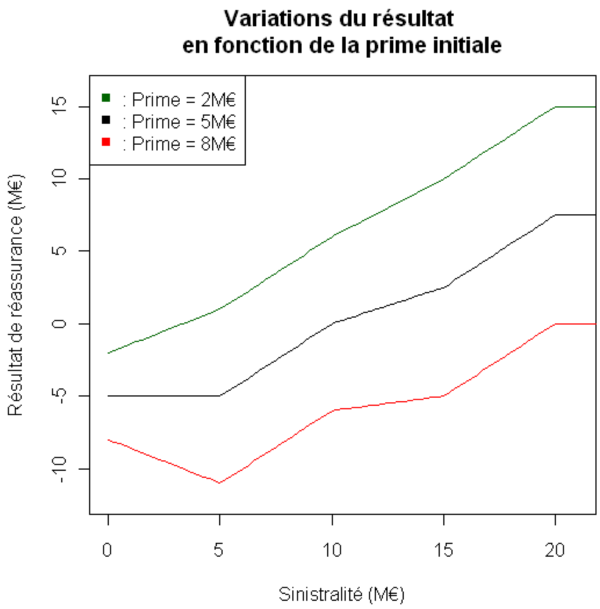
$$R_{Réass} = \Phi_{Résultat}(X)$$

Avec : $\Phi_{Résultat} : x \mapsto \Phi_{Réc}(x) - P.\Phi_M(x)$. D'où, en reprenant le tableau ci-dessus :

X	$\Phi_{\text{Résultat}}(x)$	$\text{Im}(\Phi_{\text{Résultat}})$
$I_0 = [0,m]$	$(1 - c_1 \frac{P}{m})x - P$	$(-P, m-(1+c_1)P)$
$I_k = [km,(k+1)m]$, $k \in [1, K-1]$	$(1 - c_{k+1}\frac{P}{m})x - (1 + \sum_{i=1}^{k} c_i - kc_{k+1})P$	$(km - (1+\sum_{i=1}^{k} c_i - kc_{k+1})P)$, $(k+1)m - (1+\sum_{i=1}^{k} c_i - (k+1)c_{k+1})P)$
$I_K = [Km,(K+1)m]$	$x - (1+\sum_{i=1}^{K} c_i)P$	$[Km - (1+\sum_{i=1}^{K} c_i)P, (K+1)m - (1+\sum_{i=1}^{K} c_i)P]$
$I_{K+1} = [(K+1)m, +\infty[$	$(K+1)m - (1+\sum_{i=1}^{K} c_i)P$	$\{(K+1)m - (1+\sum_{i=1}^{K} c_i)P\}$

Tableau de caractérisation de la fonction $\Phi_{\text{Résultat}}$ – (T.2.3)

Exemple : en reprenant l'exemple ci-dessus et en supposant que la prime de cette tranche vaut successivement : P = 2M€, 5M€ et 8M€ alors nous obtenons les graphes de $\Phi_{Résultat}$ associés :



Graphe de la fonction $\Phi_{Résultat}$ – (G.2.2)

$\Phi_{\text{Résultat}}$ est une fonction continue qui se décompose en fonctions affines. Ses variations dépendent donc des signes des coefficients directeurs sur chaque tronçon :

Intervalle	Dérivée	Variation de $\Phi_{\text{Résultat}}$

I_0 = [0,m]	$(1-c_1\frac{P}{m})$	Croissante si $P \leq \frac{m}{c_1}$, décroissante sinon
I_k = [km,(k+1)m], $k \in [1, K-1]$	$(1-c_{k+1}\frac{P}{m})$	Croissante si $P \leq \frac{m}{c_{k+1}}$, décroissante sinon
I_K = [Km,(K+1)m]	1	Strictement croissante
I_{K+1} = [(K+1)m,+∞[	0	Constante

Tableau de variations de la fonction $\Phi_{\text{Résultat}}$ – (T.2.4)

$\Phi_{\text{Résultat}}$ est donc une fonction croissante sur [0,+ ∞ [si et seulement si :

$$P \leq \frac{m}{\max(c_k)}, k \in \{1...K\} \quad (2.2) \square$$

Dans l'exemple employé, la prime limite est de 5M€. En observant le graphe (G.2.2) nous constatons que le résultat avec une prime inférieure est croissant (courbe verte) tandis que qu'avec une prime supérieure il devient par endroits décroissant (courbe rouge).

(A.III.3) : en supposant la condition (C.III.1.1) réalisée nous allons résoudre (III.1.11) :

$$P = \frac{PP + \gamma VaR_{99.5\%}(\Phi_{Résultat}(X))}{1-\beta} = \frac{PP + \gamma \Phi_{Résultat}(VaR_{99.5\%}(X))}{1-\beta} \quad (3.1)$$

En x = $VaR_{99.5\%}$(X) nous pouvons remarquer :

$$\Phi_{Résultat}(VaR_{99.5\%}(X)) = \Phi_{Réc}(VaR_{99.5\%}(X)) - P.\Phi_M(VaR_{99.5\%}(X)) \quad (3.2)$$

L'injection de ce résultat dans (3.2) donne :

$$P = \frac{PP + \gamma(\Phi_{Réc}(VaR_{99.5\%}(X)) - P.\Phi_M(VaR_{99.5\%}(X)))}{1-\beta}$$

$$(1-\beta)P - PP = \gamma(\Phi_{Réc}(VaR_{99.5\%}(X)) - P.\Phi_M(VaR_{99.5\%}(X)))$$

$$\left(\frac{1-\beta}{\gamma} + \Phi_M(VaR_{99.5\%}(X)\right)P - \left(\frac{PP}{\gamma} + \Phi_{Réc}(VaR_{99.5\%}(X)\right) = 0$$

$$P = \frac{\frac{PP}{\gamma} + \Phi_{Réc}(VaR_{99.5\%}(X)}{\frac{1-\beta}{\gamma} + \Phi_M(VaR_{99.5\%}(X)}$$

$$\boxed{P = \frac{PP + \gamma\Phi_R(VaR_\alpha(X))}{1-\beta+\gamma\Phi_M(VaR_\alpha(X))}} \quad (3.3) \ \square$$

(A.III.4) : nous allons chercher les coefficients de l'équation polynomiale de degré deux en P correspondant à l'équation (III.1.9) suivante relative au chargement d'un traité XL :

$$P = \frac{PP + \alpha\sigma(R_{Réass}) + \gamma VaR_{99.5\%}(R_{Réass})}{1-\beta} \quad (4.1)$$

En posant : $VaR_{99.5\%}(R_{Réass}) = aP+b$ avec $a= -\Phi_M(VaR_{99.5\%}(X))$ et $b= \Phi_R(VaR_{99.5\%}(X))$ nous obtenons, ρ valant la corrélation entre M et Réc quand elle existe et 0 sinon:

$$P = \frac{PP + \alpha\sqrt{\sigma^2(R) + P^2\sigma^2(M) - 2P\rho\sigma(R)\sigma(M))} + \gamma(aP+b)}{1-\beta}$$

$$(1-\beta-\gamma a)P - (\gamma b + PP) = \alpha\sqrt{\sigma^2(R) + P^2\sigma^2(M) - 2P\rho\sigma(R)\sigma(M))} \quad (4.2)$$

Nous pouvons remarquer :

$$(1-\beta-\gamma a)P - (\gamma b + PP) \geq 0 \quad (4.3)$$

Nous passons au carré dans (4.2) en développant la variance. Ce faisant l'information (4.3) est perdue :

$$(1-\beta-\gamma a)^2P^2 - 2(1-\beta-\gamma a)(\gamma b + PP)P + (\gamma b + PP)^2 = \alpha^2(\sigma^2(R) + P^2\sigma^2(M) - 2P\rho\sigma(R)\sigma(M)))$$

Nous aboutissons alors à une équation polynomiale de degré deux :

$$[(1-\beta-\gamma a)^2 - \alpha^2\sigma^2(M)]P^2 + 2[\alpha^2\rho\sigma(R)\sigma(M) - (1-\beta-\gamma a)(\gamma b + PP)]P + [(\gamma b + PP)^2 - \alpha^2\sigma^2(R)] = 0$$

Soit :

$$A*P^2 + B*P + C = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} A = (1-\beta-\gamma a)^2 - \alpha^2\sigma^2(M) \\ B = 2[\alpha^2\rho\sigma(R)\sigma(M) - (1-\beta-\gamma a)(\gamma b + PP)] \\ C = (\gamma b + PP)^2 - \alpha^2\sigma^2(R) = 0 \end{cases} \quad (4.4) \ \square$$

Sous réserve que cette équation admette des solutions réelles positives, nous pouvons calculer numériquement les racines de ce polynôme, la contrainte (4.3) nous permettant alors de sélectionner la solution en P de (4.1), puis de tester sa conformité avec la condition (C.3.1.1).

(A.III.5) : cette annexe reporte le tableau de répartition des traités de la base de données par entité et par branche d'activité de l'étude du III.2 :

Nombre de Client	LoB				
Client	DAB	MARIT	RCA	RCG	Total
(SOUTHERN EUROPE)		8	48		56
AXA ASS. MAROC	45				45
AXA BELGIUM	136	4	5	18	163
AXA CANADA /CA	26	20		5	51
AXA CHINA REGION		4			4
AXA CS ASS /FR	51			18	69
AXA CS SPECIALITY MARKETS /FR		12			12
AXA FRANCE ASS	71		5	6	82
AXA GULF	16		2		18
AXA INS PLC/UK	16		14	6	36
AXA INSURANCE /GR	13			1	14
AXA IRELAND			21		21
AXA ITALIE	22			14	36
AXA KYOBO /KR			14		14
AXA LUXEMBOURG	13		2	6	21
AXA MEXICO /MX	22	35	6	9	72
AXA NON-LIFE/JP			11		11
AXA POJISOVNA A.S. /CZ	2		6		8
AXA Portugal	2			3	5
AXA SEGUROS /ES	21			5	26
AXA SIGORTA	21				21
AXA SWITZERLAND	26		7	2	35
AXA UKRAINE /UA	8				8
AXA VERSICHERUNG /DE	63	46	32	19	160
BHARTI AXA \IN	6	3			9
DIRECT ASS IARD	8		10		18
GULF OYAK LEB ORIENTAL REGION		44			44
NATIO ASSURANCE	9		29	17	55
Total	597	176	212	129	1114

Tableau d'effectif des cotations de traité (T.5.1)

(A.III.6) : minoration de la commission de réassurance par la règle 10%-10% dans le cadre d'un traité en quote-part :

Notations :

- q : quote-part du traité
- c : commission de réassurance, exprimée en pourcentage de la prime de réassurance
- PR : prime de réassurance
- P : assiette de prime (GNPI) du portefeuille réassuré en quote-part
- S : montant total de la sinistralité du portefeuille réassuré en quote-part
- $R_{Réassureur}$: Résultat du réassureur sur le traité en quote-part considéré.

Alors nous traduisons la règle 10%-10% donnée par (II.4.1) :

$$P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow P\left(q\left((1-c)GNPI - S\right) \leq -10\% q(1-c)GNPI\right) \geq 10\% \quad (6.1)$$

$$P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow P\left(S \geq 110\%(1-c)GNPI\right) \geq 10\%$$

En supposant : $P\left(S = 110\%(1-c)GNPI\right) = 0$ (ce qui est vrai si nous supposons que S est à densité) :

$$P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow 1 - F_S\left(110\%(1-c)GNPI\right) \geq 10\%$$

$$P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow F_S\left(110\%(1-c)GNPI\right) \leq 90\%$$

$$\boxed{P\left(R_{Réassureur} \leq -10\% PR\right) \geq 10\% \Leftrightarrow c \geq 1 - \frac{VaR_{90\%}(S)}{1.1 \times GNPI} = c_{10-10}} \quad (6.2) \ \square$$

(A.III.7) : Minoration de la commission de réassurance par la règle de l'ERD dans le cadre d'un traité en quote-part :

$$ERD = -\frac{P\left(R_{Réassureur} < 0\right)\times E\left[R_{Réassureur} / R_{Réassureur} < 0\right]}{E\left[PR\right]} = -\frac{\int_{-\infty}^{0} x\, f_R(x).dx}{q(1-c)GNPI} \quad (7.1)$$

Où f_R est la densité de $R_{Réassureur}$. Le résultat du réassureur est une fonction bijective décroissante de la sinistralité :

$R_{Réassureur} = h(S)$ avec $h : x \mapsto q\left((1-c)GNPI - x\right)$ d'où la fonction inverse :

$$h^{-1} : y \mapsto (1-c)GNPI - \frac{y}{q} \quad (7.2)$$

Alors : $f_R(x) = \left(F_R(x)\right)' = (P(R \le x))' = (P(h(S) \le x))' = (P(S \ge h^{-1}(x)))' = \left(1 - F_S\left(h^{-1}(x)\right)\right)'$

$$f_R(x) = -\frac{1}{h'(h^{-1}(x))} f_S(h^{-1}(x)) \quad (7.3)$$

D'où :

$$ERD = \frac{\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{h'\left(h^{-1}(x)\right)} f_S(h^{-1}(x)).dx}{q(1-c)GNPI} \quad (7.4)$$

Par changement de variable, en posant : $t = h^{-1}(x)$, nous obtenons :

$$ERD = -\frac{\int_{(1-c)GNPI}^{+\infty} h(t)\, f_S(t).dt}{q(1-c)GNPI} \quad (7.5)$$

$$ERD = \frac{\int_{(1-c)GNPI}^{+\infty} t\, f_S(t).dt}{(1-c)GNPI} - \int_{(1-c)GNPI}^{+\infty} f_S(t).dt \quad (7.6)$$

D'où l'équation vérifiée par c_{ERD}, la commission minimale au regard de la règle de l'ERD :

$$\frac{\int_{(1-c_{ERD})GNPI}^{+\infty} t\, f_S(t).dt}{(1-c_{ERD})GNPI} - P\left(S > (1-c_{ERD})GNPI\right) = 1\%$$

$$P\left(S > (1-c_{ERD})GNPI\right)\left(\frac{E\left[S / S > (1-c_{ERD})GNPI\right]}{(1-c_{ERD})GNPI} - 1\right) = 1\% \quad (7.7) \ \square$$

Annexes – Chapitre IV

(A.IV.1) : le résultat de réserve d'une année est égal à la différence entre els estimations de charge ultime du début et de la fin de l'année.

Nous repartons de la définition du résultat de réserve :

$$Résultat_i^{Réserves} = Réserves(1/1/i) - Paiements(i) - Réserves(31/12/i) \; (1.1)$$

$$Résultat_i^{Réserves} = \sum_{j=i}^{n} \hat{P}_i(j) - P(i) - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{P}_{i+1}(j)$$

$$Résultat_i^{Réserves} = \sum_{j=1}^{i-1} P(i) + \sum_{j=i}^{n} \hat{P}_i(j) - P(i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(i) - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{P}_{i+1}(j)$$

$$Résultat_i^{Réserves} = \hat{U}_i - \sum_{j=1}^{i} P(i) - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{P}_{i+1}(j)$$

$$Résultat_i^{Réserves} = \hat{U}_i - \hat{U}_{i+1} \; (1.2) \; \square$$

(A.IV.2) : approximation du STEC de réserve d'une année de paiement i par méthode des réserves.

Nous nous plaçons au premier janvier de l'année i. A cette date les paiements des années 1,…,i-1 sont connus. Nous supposons que nous avons :

$$P(1) = p_1, \ldots, P(i-1) = p_{i-1}$$

Alors au premier janvier de chaque année i, les réserves sont établies selon la formule suivante :

$$Réserves(1/1/i) = E\left[\sum_{j=i}^{n} P(j) / P(1) = p_1, \ldots, P(i-1) = p_{i-1}\right] \quad (2.1)$$

Par commodité nous noterons pour tout i entre 1 et n l'information :

$$\Pi_i = \left(P(1) = p_1, \ldots, P(i) = p_i\right)$$

Alors en utilisant la définition (2) le résultat de réserves vaut :

$$Résultat_i^{Réserves} = \sum_{j=1}^{i-1} p_j + E\left[\sum_{j=i}^{n} P(j) / \Pi_{i-1}\right] - \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j + P(i) + E\left[\sum_{j=i+1}^{n} P(j) / \Pi_{i-1}; P(i)\right]\right)$$

$$Résultat_i^{Réserves} = E\left[P(i)/\Pi_{i-1}\right] - P(i) + \sum_{j=i+1}^{n} E\left[E\left[P(j)/\Pi_{i-1}\right] - P(j)/P(i)\right] \quad (2.2)$$

L'espérance du résultat de réserve, les paiements étant connus jusqu'au premier janvier de l'année i, est alors nulle :

$$E\left[Résultat_i^{Réserves} / \Pi_{i-1}\right] = E\left[E\left[P(i)/\Pi_{i-1}\right] - P(i)/\Pi_{i-1}\right] + \sum_{j=i+1}^{n} E\left[E\left[E\left[P(j)/\Pi_{i-1}\right] - P(j)/P(i)\right]/\Pi_{i-1}\right]$$

$$E\left[Résultat_i^{Réserves} / \Pi_{i-1}\right] = \sum_{j=i+1}^{n} \left(E\left[P(j)/\Pi_{i-1}\right] - E\left[E\left[P(j)/P(i)\right]/\Pi_{i-1}\right]\right) = 0$$

Le STEC Réserves de l'année i vaut donc simplement, en réutilisant (IV.3.1) :

$$STEC_{Réserves}^{i} = -VaR_{0.5\%}\left(Résultat_i^{Réserves} / \Pi_{i-1}\right) = VaR_{99.5\%}\left(P(i) + Réserves(31/12/i) - Réserves(1/1/i) / \Pi_{i-1}\right) \quad (2.3)$$

Au premier janvier de l'année i, Réserves(1/1/i) est connu, donc cette quantité peut être sortie de la VaR dans (2.3) :

$$STEC_{Réserves}^{i} = VaR_{99.5\%}\left(P(i) + Réserves(31/12/i) / \Pi_{i-1}\right) - Réserves(1/1/i) \quad (2.4)$$

Nous posons maintenant l'approximation suivante :

$$VaR_{99.5\%}\left(P(i) + Réserves(31/12/i) / \Pi_{i-1}\right) = VaR_{99.5\%}\left(P(i) + E\left[\sum_{j=i+1}^{n} P(j)/\Pi_{i-1}; P(i)\right] / \Pi_{i-1}\right)$$

$$VaR_{99.5\%}(P(i)+Réserves(31/12/i)/\Pi_{i-1})\approx VaR_{99.5\%}\left(E\left[P(i)/\Pi_{i-1}\right]+E\left[\sum_{j=i+1}^{n}P(j)/\Pi_{i-1}\right]\right)$$

$$VaR_{99.5\%}(P(i)+Réserves(31/12/i)/\Pi_{i-1})\approx VaR_{99.5\%}\left(Réserves(1/1/i)\right)\quad\text{(App.2.1)}$$

D'où la formule approchée du STEC :

$$STEC^{i}_{Réserves}\approx VaR_{99.5\%}\left(Réserves(1/1/i)\right)-Réserves(1/1/i)\quad(2.5)$$

Le STEC de réserves de l'année i est alors totalement déterminé par les lois conditionnelles des paiements des années futures (P(j), j allant de i à n) par les paiements des années passées (Π_{i-1}).

La détermination de cette loi conditionnelle de manière empirique entraînerait de trop lourds calculs aussi une nouvelle approximation est faite, en négligeant l'information Π_{i-1} :

$$STEC^{i}_{Réserves}\approx VaR_{99.5\%}\left(Réserves(1/1/i)\right)-E\left[Réserves(1/1/i)\right]\quad(2.6)\ \square$$

Pour chacune des N=10.000 simulations effectuées les réserves au premier janvier de l'année i vaudront exactement les paiements futurs de la simulation :

$$Réserves(1/1/i)_{simu}\approx\sum_{j=i}^{n}P(j)_{simu}$$

Annexes – Chapitre V

(A.V.1) : formule de l'Iso Value Min pour une prime de réassurance déterministe.

Nous rappelons l'équation (V.1.2) annulée par la Création de Valeur :

$$(1-\tau_{taxe})\times E\left[Réc - IV_{\min}\right] + \rho_d \times \left(\left(VaR_{0.5\%}(Réc - S - IV_{\min}) - VaR_{0.5\%}(-S) - E[Réc - IV_{\min}]\right) + \Delta^{réserve}_{Capital}\right) = 0$$
(1.1)

Sous l'hypothèse des primes de réassurance déterministes (c'est-à-dire hors cadre des reconstitutions payantes) $\Delta_{Capital}$ est indépendant de la prime (cf. chapitre II). L'équation (V.1.2) annulant la création de valeur s'écrit alors :

$$(1-\tau_{taxe})\times E\left[Réc - IV_{\min}\right] + \rho_d \times \Delta_{Capital} = 0 \quad (1.2)$$

$$IV_{\min} = E\left[Réc\right] + \frac{\rho_d}{1-\tau_{taxe}} \times \Delta_{Capital}$$

$$IV_{\min} = PP_{structure} + \frac{\rho_d}{1-\tau_{taxe}} \times \Delta_{Capital} \quad (1.3)\ \square$$

Où $PP_{structure}$ est la prime pure de la structure de réassurance (espérance des récupérations).

(A.V.2) : encadrement des primes d'un traité XL.

En reprenant (V.1.1) avec la Création de Valeur nulle nous avons :

$$(1-\tau_{taxe})\times E[PR^{IV}] = (1-\tau_{taxe})\times E[Réc] + \rho_d \times \Delta_{Capital}$$

$$E[PR^{IV}] = E[Réc] + \frac{\rho_d}{(1-\tau_{taxe})}\Delta_{Capital} \quad (2.1)$$

Sachant que la diminution en capital est positive nous obtenons :

$$E[PR^{IV}] \geq E[Réc] \quad (2.2)$$

$Réc_i$ étant le montant total des récupérations pour la tranche i et M_i la prime de réassurance totale de la tranche normalisée par la prime initiale nous en déduisons :

$$\sum_{i=1}^{L} E[M_i]P_i^{IV} \geq \sum_{i=1}^{L} E[Réc_i] \quad (2.3)$$

Pour des raisons de cohérences (il n'y a pas de sens commercialement à sur tarifer exagérément une tranche au profit d'une autre) nous imposons que cette inégalité est vraie en particulier sur chacune des tranches. Alors nous obtenons pour tout i entre 1 et L :

$$P_i^{IV} \geq \frac{E[Réc_i]}{E[M_i]} = PP_i \quad (2.4)$$

D'autre part nous devons respecter la propriété de risque maximal :

$$\max(M_i)P_i^{IV} \leq AAL_i$$

$$P_i^{IV} \leq \frac{AAL_i}{\max(M_i)} = P_i^{\max} \quad (2.5)$$

La prime Iso-Value d'une tranche, comme toute prime d'une tranche avec reconstitutions payantes, est donc comprise dans l'intervalle :

$$PP_i \leq P_i^{IV} \leq P_i^{\max} \quad (2.6) \; \square$$

(A.V.3) : recherche d'Iso Values dans un sous-espace pour un traité XS à reconstitutions payantes :

Rappel de l'équation à annuler (V.1.5) :

$$(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E[PR]+\rho_d VaR_{99.5\%}(PR+S-Réc)=(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E[Réc]+\rho_d\left(VaR_{99.5\%}(S)+\Delta_{Capital}^{réserve}\right)$$
(3.1)

Soit : $p^*=\left(p_1,...,p_L\right)\in[0;1]^L, \sum_{i=1}^{L} p_i=1$ un L-uplet de coefficients de pondérations. Alors nous allons dans un premier temps rechercher une solution dans l'espace :

$$E_{p^*}=\left\{\left(P_1,...,P_L\right)\in\left(\Re^+\right)^L / \forall i\in\{1,...,L\}, P_i=p_i\Pi;\Pi\in\Re^+\right\}$$

Les primes de chaque ligne sont donc toujours de même proportions comparativement les unes aux autres dans cet espace.

(3.1) peut alors être transformée en une équation à une seule inconnue déterministe Π:

$$\begin{cases}(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E\left[\sum_{i=1}^{L}p_iM_i\right]\Pi+\rho_d VaR_{99.5\%}(\Pi\sum_{i=1}^{L}p_iM_i+S-Réc)=Cste \\ Cste=(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E[Réc]+\rho_d\left(VaR_{99.5\%}(S)+\Delta_{Capital}^{réserve}\right)\end{cases} \quad (3.2)$$

La fonction:

$$\Phi:\Pi\mapsto(1-\tau_{taxe}-\rho_d)E\left[\sum_{i=1}^{L}p_iM_i\right]\Pi+\rho_d VaR_{99.5\%}(\Pi\sum_{i=1}^{L}p_iM_i+S-Réc)-Cste$$

est croissante. En reprenant les conditions d'encadrement données par (test.V.1.1), nous allons en déduire les bornes de l'ensemble de définition de Φ :

$$\begin{cases}PP_1\le P_1^{IV}=p_1\Pi\le P_1^{\max} \\ ... \\ PP_i\le P_i^{IV}=p_i\Pi\le P_i^{\max} \\ ... \\ PP_L\le P_L^{IV}=p_L\Pi\le P_L^{\max}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{PP_1}{p_1}\le\Pi\le\frac{P_1^{\max}}{p_1} \\ ... \\ \frac{PP_i}{p_i}\le\Pi\le\frac{P_i^{\max}}{p_i} \\ ... \\ \frac{PP_L}{p_L}\le\Pi\le\frac{P_L^{\max}}{p_L}\end{cases}$$

D'où en unifiant les contraintes :

$$\Pi_{\min}=\max\left(\frac{PP_i}{p_i}\right)_{i\in\{1,...,L\}}\le\Pi\le\min\left(\frac{P_i^{\max}}{p_i}\right)_{i\in\{1,...,L\}}=\Pi_{\max} \quad \text{(test.V.1.2)}$$

Alors Φ est définie sur $[\Pi_{\min};\Pi_{\max}]$ et son image est incluse dans l'intervalle $[\Phi(\Pi_{\min});\Phi(\Pi_{\max})]$ avec :

$$\begin{cases} \Phi(\Pi_{\min}) = (1 - \tau_{taxe} - \rho_d) E\left[\sum_{i=1}^{L} p_i M_i\right] \Pi_{\min} + \rho_d VaR_{99.5\%}\left(\Pi_{\min} \sum_{i=1}^{L} p_i M_i + S - Réc\right) \\ \Phi(\Pi_{\max}) = (1 - \tau_{taxe} - \rho_d) E\left[\sum_{i=1}^{L} p_i M_i\right] \Pi_{\max} + \rho_d VaR_{99.5\%}\left(\Pi_{\max} \sum_{i=1}^{L} p_i M_i + S - Réc\right) \end{cases}$$

En garantissant : $(1 - \tau_{taxe} - \rho_d) > 0$ et sachant : $\sum_{i=1}^{L} p_i M_i \geq \sum_{i=1}^{L} p_i = 1$ nous pouvons en déduire pour le cas où $\Pi_{\max}$ est infinie :

$$\lim_{\Pi \to +\infty} \Phi(\Pi) = +\infty$$

Dans un cas pratique, nous pourrons aisément tester :

$$Cste \in [\Phi(\Pi_{\min}); \Phi(\Pi_{\max})] \quad \text{(test.V.1.3)}$$

Si (test.V.1.3) n'est pas vérifié, cela signifie qu'il n'existe aucune solution à (V.1.6), et donc aucune Iso Value se décomposant sur chaque ligne par p*.

Supposons que (test.V.1.3) est vérifié. Alors, en imposant que la loi de sévérité des sinistres est continue, S, Réc et $M_1,\ldots,M_L$ sont continues par morceaux, avec une quantité dénombrable de points de discontinuités (les multiples de portées), donc Φ l'est également.

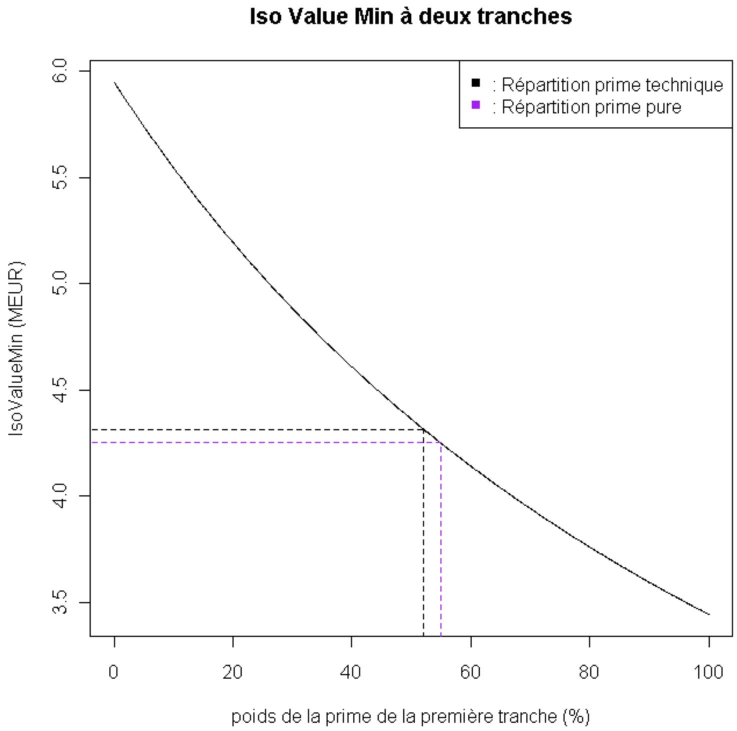
L'absence d'hypothèses de continuité et de stricte croissance sur Φ nous empêche d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui garantirait l'existence et l'unicité d'une solution de (V.1.5) appartenant à E_{p^*}. Néanmoins la continuité par morceaux sur des intervalles dénombrables constitue une bonne approximation de l'hypothèse de continuité, aussi considèrerons-nous que, sous réserve de (test.V.1.3), il existe au moins une prime initiale de programme Π vérifiant (V.1.6) et donc au moins une solution associée : $(P_1,\ldots,P_L) \in E_{p^*}$ vérifiant (V.1.5).

Φ étant croissante, l'ensemble des solutions Π de (V.1.6), s'il n'est pas vide, est un intervalle, éventuellement dégénéré en un singleton. Le principe de l'Iso Value (appelée aussi Iso Value Min) étant de définir un seuil inférieur à un intervalle de confiance (cf. introduction de cette partie) nous sélectionnerons la borne inférieure $\Pi_{\min}$ de l'intervalle des solutions de (V.1.6) comme seul candidat Iso Value admissible généré par E_{p^*}.

Chaque ensemble Ep* (c'est-à-dire chaque décomposition relative de la prime de programme initiale par ligne) accouche ainsi d'une solution unique ou d'aucune, selon que (test.V.1.3) est vérifié ou non sur chaque tranche, formant l'ensemble des solutions admissibles pour l'Iso Value.

(A.V.4) : suppression des solutions non admissibles d'Iso Value.

Rappel : ensemble des solutions calculées pour chaque répartition de prime possible selon le programme donné par le tableau (T.V.1.1) :



Ensemble des solutions pour l'Iso Value - (G.4.1)

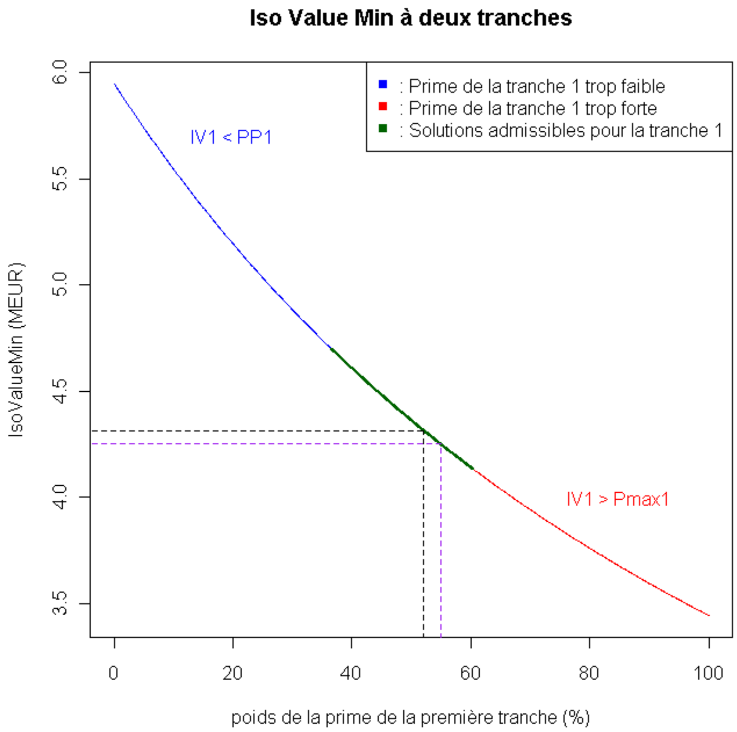
Parmi l'ensemble des solutions proposées, nous pouvons supprimer celles qui ne vérifient pas (test.V.1.1) : une répartition 100% / 0% notamment, ne peut être admissible, car engendrant une prime nulle strictement inférieure à la prime pure de la tranche.

Pour chacune des tranches de l'exemple nous calculons les bornes admissibles de la prime :

Tranches	Prime Pure (minimale)	Prime maximale
2 500 000 XS 2 500 000	1 713 954	2 500 000
5 000 000 XS 5 000 000	1 409 874	5 000 000

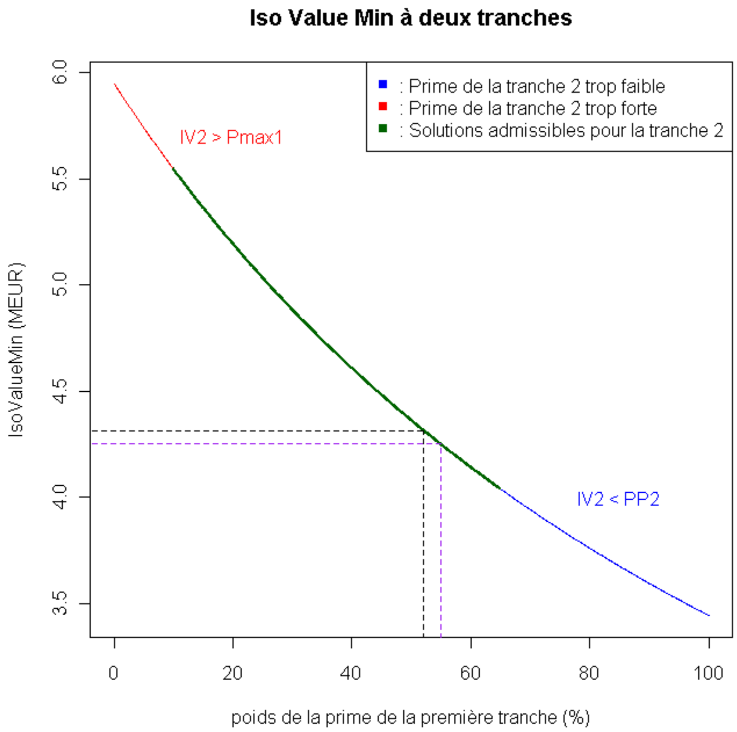
Borne des primes admissibles pour chaque tranche du programme (€) - (T.4.1)

Du graphe (G.V.1.1) nous retirons ainsi les solutions inadmissibles pour la première tranche (2,5 xs 2,5) :



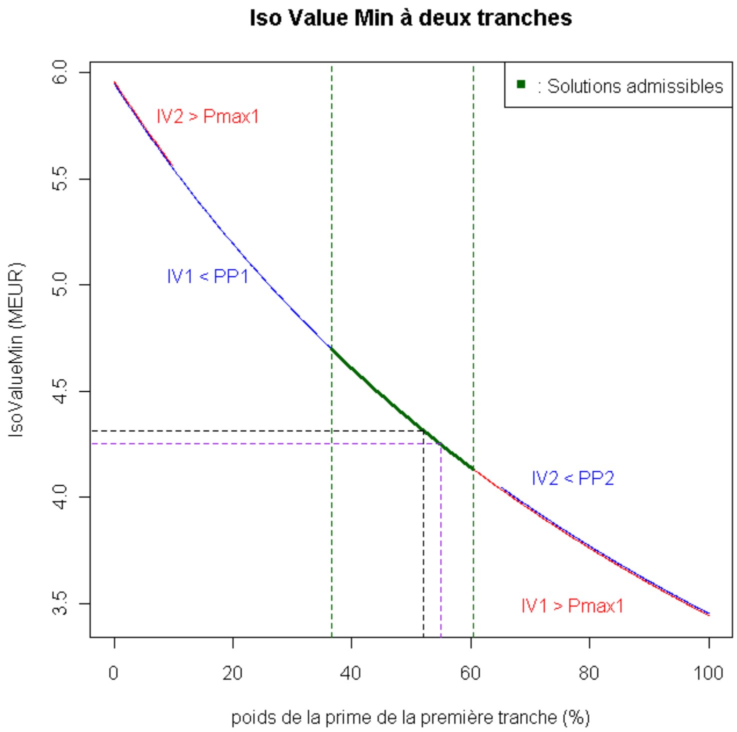
Retrait des solutions inadmissibles au regard de la tranche 1 - (G.4.2)

Et celles inadmissibles pour la seconde (5 xs 5) :



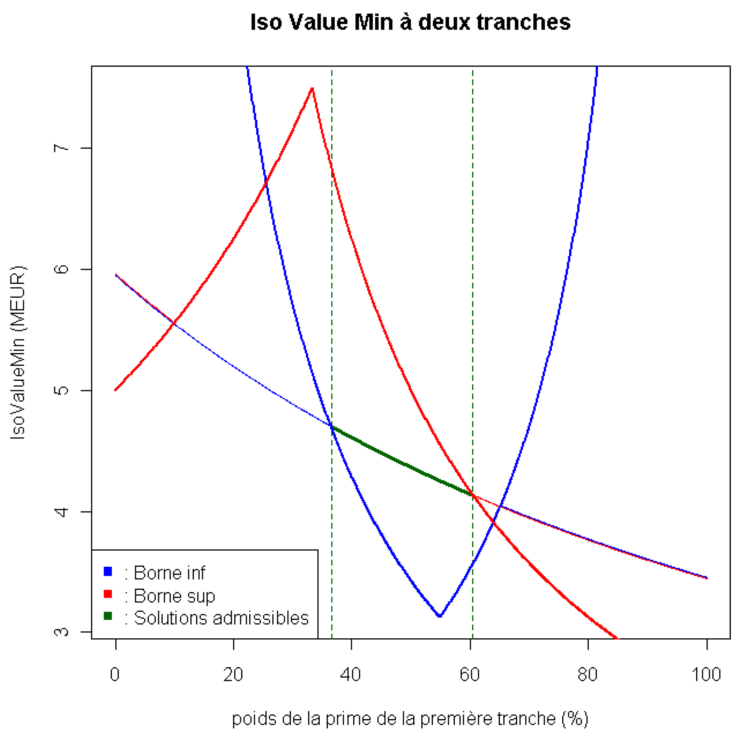
Retrait des solutions inadmissibles au regard de la tranche 2 - (G.4.3)

D’où en couplant les deux contraintes nous trouvons les solutions générales admissibles du problème :



Solutions admissibles sous les contraintes de toutes les tranches - (G.4.4)

Cet ensemble de solutions est bien le même que celui décrit par (G.V.1.1) :



Solutions admissibles – comparaison des méthodes - (G.4.5)

(A.V.5) : Value-at-Risk sous transformée PH.

$S_u : x \mapsto S(x)^{1-u}$ définit la fonctions de survie d'une variable aléatoire de fonction de survie S par transformée PH d'incertitude u.

Nous allons chercher à savoir ce que vaut PH_u-$VaR_\alpha(X)$, une Value-at-Risk de niveau α compris entre 0 et 1, sous cette nouvelle distribution.

Nous notons F_u la fonction de répartition associée à S_u :

$$F_u(x) = 1 - (1 - F(x))^{1-u} \quad (5.1)$$

F_u est continue aussi. L'inverse F_u^{-1} de la fonction de répartition F_u est calculé pour tout p entre 0 et 1 comme suit :

$$p = 1 - (1 - F(x))^{1-u}$$

$$F(x) = 1 - (1 - p)^{\frac{1}{1-u}}$$

$$x = F^{-1}\left(1 - (1 - p)^{\frac{1}{1-u}}\right)$$

D'où, pour tout p entre 0 et 1 :

$$F_u^{-1}(p) = F^{-1}\left(1 - (1 - p)^{\frac{1}{1-u}}\right) \quad (5.2)$$

D'où PH_u-$VaR_\alpha(X)$ est donnée par :

$$VaR_\alpha^u(X) = F_u^{-1}(\alpha) = F^{-1}\left(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-u}}\right) = VaR_{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{1-u}}}(X) \quad (5.3) \ \square$$

<u>Remarque</u> : la fonction $u \mapsto 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-u}}$ est croissante. L'utilisation de la formule (5.3) dans le cadre d'une VaR à risque décroissant (par exemple du résultat) conduit alors à une augmentation du montant de la VaR par la transformée PH, alors que c'est une diminution qui est attendue.

Cette relation n'est donc valable que dans le cadre d'une VaR à risque croissant.

Néanmoins nous pouvons aisément l'adapter en utilisant la propriété suivant qui nous permet de passer du risque croissant au risque décroissant :

$$VaR_\alpha^{décr}(X) = -VaR_{1-\alpha}^{cr}(-X)$$

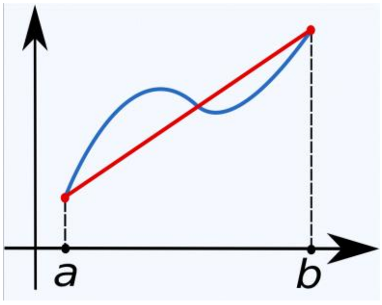
$$VaR_\alpha^{u,décr}(X) = -VaR_{1-\alpha}^{u,cr}(-X) = -VaR_{1-\alpha^{\frac{1}{1-u}}}(-X) = VaR_{\alpha^{\frac{1}{1-u}}}(X) \quad (5.4) \ \square$$

(A.V.6) : Méthode des trapèzes.

Pour toute fonction f définie entre a et b, son intégrale sur le segment [a,b] est approchée par :

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (6.1)$$

Ce qui peut s'illustrer par le graphe suivant :



Approximation de l'intégrale par méthode des trapèzes (source : T. COHIGNAC, calcul des Iso Values) – (G.6.1)

La décomposition de [a,b] en plusieurs sous-segments permet d'améliorer la précision de l'approximation. Ici nous avons N-1 sous-intervalles (N=10.000) ce qui assure une bonne précision de l'intégrale.

L'application de la méthode des trapèzes à une transformée PH de niveau u, avec une distribution empirique triée de X : (x_1,…, x_N), donne :

$$PH_u(X) = \int_0^\infty S(x)^{1-u}.dx \approx \sum_{i=1}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)\frac{\left(1-\frac{i}{N}\right)^{-u}+\left(1-\frac{i+1}{N}\right)^{-u}}{2} \quad (6.2) \ \square$$

(A.V.7) : Création de Valeur et Iso Value d'un traité en Quote-part.

Nous supposons pour l'instant que le traité est un *short-tail,* donc que le capital de réserve est nul. La prime de réassurance d'un QS est une fraction des primes de la cédante. Elle est donc supposée déterministe. Alors l'économie de capital vaut :

$$\Delta_{Capital} = STEC_{\mathrm{Prime}}^{brut} - STEC_{\mathrm{Prime}}^{net}$$

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}(Réc - S) - VaR_{0.5\%}(-S) - E[Réc]$$

Dans le cadre d'un traité QS de quote-part unique q (un seul générateur ou plusieurs aux mêmes quote-parts) et de commission également unique C nous obtenons:

$$\begin{cases} Réc = qS \\ PR = q(1-C)GNPI \end{cases} \quad (7.1)$$

D'où :

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}(qS - S) - VaR_{0.5\%}(-S) - qE[S]$$

$$\Delta_{Capital} = (1 - q - 1)VaR_{0.5\%}(-S) - qE[S]$$

$$\Delta_{Capital} = q\big(E[-S] - VaR_{0.5\%}(-S)\big)$$

$$\Delta_{Capital} = q\, STEC_{prime}^{brut} \quad (7.2)$$

L'intégration de cette relation à la formule de création de valeur donne :

$$CV = (1-\tau_{taxe}) \times E\big[qS - q(1-c)GNPI\big] + \rho \times q\, STEC_{prime}^{brut}$$

$$CV = \Big((1-\tau_{taxe})\big(E[S] - (1-c)GNPI\big) + \rho \times STEC_{prime}^{brut}\Big) \times q \quad (7.3)$$

La création de valeur s'exprime donc comme une fonction affine de q. Sa maximisation dépend du signe du discriminant D_q :

$$D_q = (1-\tau_{taxe}) \times \big(E[S] - (1-c)GNPI\big) + \rho \times STEC_{prime}^{brut} \quad (7.4)$$

Si celui-ci est positif alors la création de valeur est maximisée pour : q = 1, s'il est négatif pour : q = 0.

$$D_q \geq 0 \Leftrightarrow (1-\tau_{taxe})E[S] + \rho\, STEC_{prime}^{brut} \geq (1-\tau_{taxe})(1-c)GNPI$$

$$D_q \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1 - \frac{(1-\tau_{taxe})E[S] + \rho\, STEC_{prime}^{brut}}{(1-\tau_{taxe})GNPI}$$

$$D_q \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1 - LR - \frac{\rho}{(1-\tau_{taxe})}\frac{STEC_{prime}^{brut}}{GNPI} \quad (7.5)$$

Où LR est le *Loss Ratio*. 1-LR est donc la marge bénéficiaire technique tandis que le second terme représente la « commission Solvabilité II » d'acquisition du portefeuille (c'est-à-dire le rapport entre le coût d'immobilisation du capital relatif à un portefeuille et le montant en prime (détaxé) que rapporte ce même portefeuille).

En rappelant que la marge du réassureur peut être calculée par la formule :

$$M = 1 - LR - c \quad (7.6)$$

Nous en déduisons que (7.5) peut s'interpréter par le fait que la marge du réassureur doit être supérieure au « coût Solvabilité II » du portefeuille réassuré.

<u>Iso Value</u> :

La commission de réassurance annulant la Création de Valeur pour tout quote-part est la commission Iso Value C_{IV} :

$$C^{IV} = 1 - LR - \frac{\rho}{(1-\tau_{taxe})} \frac{STEC_{prime}^{brut}}{GNPI} \quad (7.7)$$

<u>Cas avec plusieurs traités QP</u> :

La formule des récupérations et des primes est modifiée :

$$\begin{cases} Réc = \sum_{g=1}^{G} q_g S_g \\ PR = \sum_{g=1}^{G} q_g (1 - C_g) P_g \end{cases} \quad (7.8)$$

Avec S_g et P_g respectivement la sinistralité et les primes liées au sous-portefeuille g. La somme des S_g vaut S, celle des P_g P.

Alors nous obtenons :

$$\Delta_{Capital} = E[-S] - VaR_{0.5\%}(-S) - E\left[\sum_{g=1}^{G} q_g S_g - S\right] + VaR_{0.5\%}\left(\sum_{g=1}^{G} q_g S_g - S\right)$$

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}\left(-\sum_{g=1}^{G}(1-q_g)S_g\right) - VaR_{0.5\%}\left(-\sum_{g=1}^{G} S_g\right) - E\left[\sum_{g=1}^{G} q_g S_g\right]$$

$$\Delta_{Capital} = VaR_{0.5\%}\left(-\sum_{g=1}^{G}(1-q_g)S_g\right) - VaR_{0.5\%}\left(-\sum_{g=1}^{G}(1-q_g)S_g - \sum_{g=1}^{G} q_g S_g\right) - E\left[\sum_{g=1}^{G} q_g S_g\right] \quad (7.9)$$

Il n'y a aucun rapport entre les variables aléatoires $-\sum_{g=1}^{G}(1-q_g)S_g$ et $-\sum_{g=1}^{G} q_g S_g$, aussi la non additivité de la VaR empêche-t-elle de poursuivre analytiquement.

La formule de la création de valeur est alors :

$$CV = (1-\tau_{taxe}) \times E\left[\sum_{g=1}^{G} q_g S_g - \sum_{g=1}^{G} q_g (1-C_g) P_g\right] + \rho \times \Delta_{Capital}$$

$$CV = (1-\tau_{taxe}) \times \sum_{g=1}^{G} q_g \left(E[S_g] - (1-C_g) P_g\right) + \rho \times \Delta_{Capital}$$

$$CV = (1-\tau_{taxe}) \times \left(\sum_{g=1}^{G} q_g P_g C_g + \sum_{g=1}^{G} q_g \left(E[S_g] - P_g\right)\right) + \rho \times \Delta_{Capital} \quad (7.9)$$

<u>Iso Value avec plusieurs traités QP</u> :

Il s'agit de résoudre en $\left(C_1^{IV}, ..., C_G^{IV}\right)$ l'équation :

$$\sum_{g=1}^{G} (q_g P_g) C_g^{IV} = \sum_{g=1}^{G} q_g \left(P_g - E[S_g]\right) - \frac{\rho}{(1-\tau_{taxe})} \times \Delta_{Capital} \quad (7.10)$$

Nous pouvons observer que si G vaut 1 nous retrouvons la formule (7.7).

Les solutions de (7.10) définissent un hyperplan affin de dimension G-1. L'intersection de cet hyperplan avec l'espace admissible de solutions $[0\,;1]^{\times G}$ fournit l'ensemble des solutions (éventuellement vide) au problème de l'Iso Value de plusieurs traités en quote-part.