



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le 12 juillet 2010

Par : Yi LANG

Titre: Evaluation des programmes de réassurance dans le référentiel Solvabilité II

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaire

M. Jean-Michel EYRAUD

Entreprise :

GENERALI IARD

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Jean-Paul LAURENT

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Didier RULLIERE

Directeur de mémoire en entreprise :

Xavier AGENOS

Invité :

Emmanuel DUBREUIL

*Autorisation de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels (après
expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

RESUME

MOTS CLES

Théorie des valeurs extrêmes - Dépendance - Copule -Value at Risk - Méthode de Monte-Carlo – Risque de souscription Non Vie – Risque de contrepartie d'un réassureur - Modèle à Choc commun - Modèle Vasicek

Les futures règles imposées par Solvabilité II exigent des assureurs une meilleure maîtrise des risques liés à leur activité. La réassurance est un moyen efficace de transférer les risques assurantiels et optimiser l'utilisation du capital : elle fait par conséquent l'objet d'une attention particulière dans ce nouveau contexte.

Ce mémoire a pour objectif principal de proposer un processus permettant d'évaluer la création de valeur générée par un programme de réassurance pour une compagnie d'assurance Non Vie, en tenant compte des nouvelles règles mises en place dans le référentiel Solvabilité II.

La mise en œuvre de ce processus d'évaluation se décline en trois étapes :

- L'estimation précise de la sinistralité brute pour chaque branche d'activité souscrite se trouve au cœur de toute analyse de réassurance. Par conséquent, nous allons consacrer notre première partie aux calibrages des distributions des sinistres futurs, puis à traduire ce profil de risque dans le référentiel de solvabilité II.
- Nous effectuons une analyse comparative des différents traités de réassurance en fonction de leur rentabilités et de leurs impacts sur l'usage du capital, afin d'évaluer leur efficacité et la création de valeur associée.
- En fin, au regard de la crise récente, nous estimons qu'il est également important de prendre en compte l'impact du défaut potentiel des réassureurs dans notre évaluation. Dans cette dernière partie, nous réalisons une estimation du risque de contrepartie par la formule standard, afin de tenir compte de cet aspect dans notre stratégie de réassurance et de réaliser une sélection adéquate des réassureurs.

ABSTRACT

KEY WORDS

Extreme value theory, Dependency, Elliptical copula, Value at Risk, n-dimensional LOBs modelling, Non life underwriting risk, Reinsurer counterparty default risk, Common shock model, Vasicek model

The future Solvency II requires insurers to have a better risk control related to their activities. Reinsurance, an effective way to transfer risk, becomes integral to the risk and capital management strategy of insurers.

This paper aims at presenting a valuation process to estimate the value of a reinsurance program for a non-life insurance company, taking into account the new rules which will be implemented in the Solvency II framework.

The implementation of this evaluation process is divided into three stages:

- An accurate estimation of the underwriting risk is a key factor for any analysis of reinsurance program. We will devote our first section on the calibration of the distributions of future claims. Then we will present the new rules introduced in Solvency II.
- We perform a comparative analysis of various reinsurance treaties based on their profitability and their impacts on the use of capital, to assess their effectiveness.
- Finally, in light of the recent crisis, we believe it is also important to take into account the impact of potential failure of reinsurers in our evaluation. In this last part, we make an estimate of counterparty risk by the standard formula and a stochastic model to take into account its effect in our reinsurance program and achieve an adequate selection of reinsurers.



Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Xavier Agenos pour m'avoir accueilli au sein de son service et guidé tout au long de mon année d'alternance. Son attention, sa patience et ses conseils m'ont permis de mieux appréhender les problématiques liées à l'assurance IARD.

Je souhaiterais également remercier M. Stéphane Loisel pour son suivi pédagogique.

J'ajoute un vif remerciement à M. Alexandre You et à M. Olivier Givaudan pour leurs conseils éclairés.

Je tiens à remercier sincèrement toute l'équipe Generali pour son soutien et son accueil chaleureux, en particulier Mlle Julie Gamonet.

En fin, j'adresse mes remerciements à mes collègues d'Ernst & Young, Mme Blanche de Villette, M. Vincent Bizet et M. Guillaume Chatelet en particulier, pour leurs relectures et leurs conseils avisés.

Sommaire

Université Claude Bernard – Lyon 1	1
Introduction	7
Chapitre I. Modélisation des sinistres	8
I.1 Présentation du portefeuille	8
I.2 Traitement des données	9
I.3 Segmentation	10
I.4 Seuil de distinction et modélisation des sinistres graves	13
I.4.1. Modélisation de sévérité	13
I.4.2. Modélisation de fréquence	19
I.4.3. Charge totale	20
I.5 Sinistres attritionnels	20
I.6 Sinistres catastrophes	22
I.7 Agrégation des risques	24
I.7.1. Théorie de copule	25
I.7.2. Calibrages	31
I.7.3. Limite du modèle	33
I.7.4. Analyses	33
Chapitre II. Risque de souscription Non Vie	35
II.1 Principes de Solvabilité II	35
II.2 Risque de souscription non vie – formules standards	36
II.2.1. Risque de prime	37
II.2.2. Risque de catastrophe	42
II.2.3. Agrégation	43
II.3 Comparaison : formules standard & modèle interne	44
II.4 Coût du capital et transfert des risques	45

Chapitre III. Choix du programme de réassurance	46
III.1 Introduction à la réassurance	46
III.2 Choix de la structure de réassurance - méthodologie de l'évaluation	51
III.2.1 Hypothèses	51
III.2.2 Processus d'évaluation	52
III.3 Applications et comparaisons	55
III.3.1 Programmes de réassurance	55
III.3.2 Résultats technique et financier des programmes	57
III.3.3 Impact de la réassurance sur le SCR souscription	58
III.3.4 Choix du programme de réassurance	61
Chapitre IV. Risque de contrepartie : choix des réassureurs	63
IV.1 Principes	63
IV.2 Formule standard de Solvency II	64
IV.2.1 Paramètres	64
IV.2.2 Proposition QIS 4 : approche Vasicek	66
IV.2.3 Consultations Papers et QIS 5	68
IV.2.4 Applications numériques	73
IV.2.5. Recouvrables ajustés du défaut de contrepartie	76
IV.2.6. Choix des réassureurs	78
Conclusion	81
Annexe 1. Théorie des valeurs extrêmes	83
Annexe 2. Analyse préliminaire des données	88
Annexe 3. Risque de prime	92
Annexe 4. Ajustement de la réassurance non-proportionnelle	94
Annexe 5. Le modèle de Vasicek et le risque de contrepartie	98
Annexe 6. Risque de contrepartie – Modèle stochastique	102
Bibliographies	114

Introduction

La directive Solvabilité II se caractérise par une approche intégrée des risques pour le calcul de la solvabilité d'une compagnie d'assurance. Elle demande aux assureurs de prendre en compte la probabilité de sinistre maximale bicentenaire, ce qui constitue une approche radicalement différente de l'actuel référentiel Solvabilité I. Par conséquent, la forte volatilité présente dans certaines activités d'assurance Non Vie devrait amener, avec la nouvelle réglementation, à accroître les besoins en fonds propres des compagnies concernées. En effet, d'après la dernière étude quantitative d'impact (QIS 4), une majorité d'assureurs Non Vie voient leur ratio de solvabilité et leur surplus de capital baisser dans le cadre de la nouvelle réglementation.

Les fonds propres immobilisés associés aux activités des assureurs ont certains coûts. Par conséquent, ce coût du capital devient une question centrale puisqu'un des objectifs d'une compagnie est d'améliorer le rendement de ses fonds propres. La nouvelle directive donne plus de liberté et encourage les participants à mettre en place un nouveau système d'évaluation du couple risque/capital.

La politique de réassurance est une stratégie importante pour la gestion des risques et l'optimisation des fonds propres car elle consiste à absorber l'impact des sinistres inattendus, et donc à diminuer l'exigence en fonds propres. Afin de mieux évaluer un système de transfert de risque, il est donc nécessaire de prendre en compte, non seulement l'impact direct sur le résultat, mais aussi le coût du capital « économisé ».

Partant d'une entreprise-type possédant des branches IARD classiques, nous nous intéressons d'abord à la modélisation des sinistres futurs du portefeuille tout en mettant l'accent sur le calibrage des sinistres graves par la théorie des valeurs extrêmes et l'agrégation des risques par les copules. Nous présentons ensuite, les calculs associés au risque de souscription dans le cadre de solvabilité II. Ce risque constitue un des problématiques majeures pour une compagnie d'assurance Non Vie.

Après avoir obtenu la distribution globale des sinistres, nous comparons certains traités de réassurance classiques, afin d'évaluer l'impact de la réassurance à la fois sur le résultat d'une compagnie, et sur les besoins en capital. Cette comparaison nous fournit un argument quantitatif pour choisir parmi plusieurs programmes de réassurance, la structure de réassurance qui maximise le résultat ajusté du risque de souscription.

Nous avons constaté, au cours de la crise financière actuelle, que les défauts des contreparties peuvent affecter significativement la solvabilité et les résultats des compagnies. Ils doivent être également pris en compte dans notre évaluation quantitative. Par conséquent, nous traitons en dernière partie de ce mémoire, le risque de contrepartie d'un réassureur. Nous commençons par une analyse des formules standard proposées dans le QIS4 et QIS 5. Nous testons ensuite les sensibilités des différents paramètres qui influencent le risque de contrepartie. A la fin de cette partie, nous incluons le risque de contrepartie dans notre calcul de l'efficacité de la réassurance, afin de connaître l'impact du choix des réassureurs sur notre résultat.

Chapitre I. Modélisation des sinistres

I.1 Présentation du portefeuille

Afin de réaliser les modélisations, nous supposons d'un portefeuille que nous disposons d'une dizaine d'année d'historique d'une compagnie d'assurance. Ce portefeuille est présenté en détails dans la suite:

I.1 Entreprise type : un assureur non vie multi branches ayant des activités classiques :

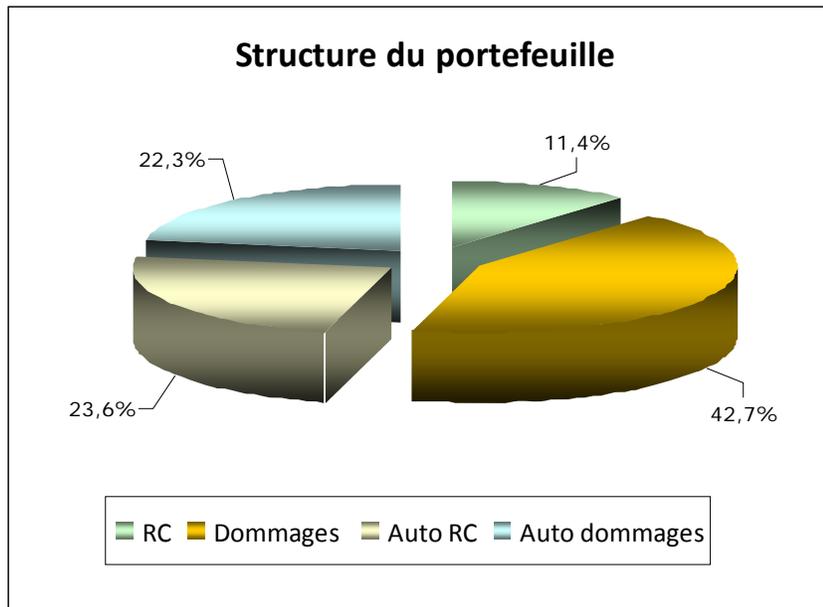


Figure 1: présentation du portefeuille

L'encaissement des primes (prévisionnelles) de l'année suivante se répartit comme suit :

- 653 millions d'euro pour la branche Auto, qui se décompose selon la garantie (RC ou dommage) et la catégorie de client (particulier ou professionnel).

Auto			
RC Automobile particulière	Dommage Automobile particulier	RC Automobile professionnelle	Dommage Automobile professionnel
202,36	194,97	146,35	135,36

En millions €

Tableau 1: portefeuille auto

- 631 millions pour la branche dommage, qui se décompose selon la catégorie de client (particulier ou professionnel).

Dommage aux biens	
Dommage Particulier	Dommage Professionnel
239,25	391,64

En millions €

Tableau 2: portefeuille DAB

- 168.6 millions d'euros pour la branche Responsabilité Civile (RC) générale.

Pour simplifier la modélisation des sinistres, nous n'avons pas choisi des branches particulières comme la construction ou la grêle.

Pour réaliser la modélisation de la sinistralité future de l'entreprise concernée, nous avons à notre disposition un historique de données couvrant une dizaine d'année (les charges totales en valeur annuelle) pour chaque branche et de données détaillées pour les sinistres graves.

Avant la modélisation, les données doivent être disponibles et fiables. Un travail préalable est nécessaire.

I.2 Traitement des données

a) Collection des données

La problématique clé est l'analyse de sinistralités potentielles. La qualité des données sur les sinistres bruts de chaque branche et sous branche souscrite est cruciale, mais c'est ce qui est souvent difficile à obtenir. La collecte des données et le retraitement des anomalies ne seront pas discutés dans ce mémoire. Ici, nous supposons que les données sont disponibles et fiables, et toutes nos analyses se basent sur cette hypothèse.

Hormis la collecte des données, le choix des données est aussi important : nous devons disposer d'une quantité suffisante de données pour estimer les paramètres de façon cohérente.

b) Traitement des données

Les paramètres utilisés dans notre modèle sont estimés à partir de données historiques. Cette approche n'est valide que si toutes les années d'observation historique sont comparables avec l'année de modélisation, ce qui n'est généralement pas le cas en raison de divers facteurs :

- Paramètre économique : inflation
- Paramètres de souscription : garantie, franchise, composition du portefeuille, nouvelles affaires, etc....

Pour constituer des données comparables à l'année de modélisation, deux types d'actualisations peuvent être appliqués:

- Actualisation Verticale :

Cette actualisation consiste à atténuer l'effet inflationniste sur les volumes de sinistres. Avant de procéder à des simulations, il convient dans un premier temps de recalculer les sinistres historiques en tenant compte de cet effet inflationniste.

L'inflation doit varier selon les secteurs, pour mieux estimer le coût réel d'un produit. Différents indices d'inflation peuvent être pris en compte : par exemple, pour la branche « Auto dommage », l'inflation sur le taux horaire de la main d'œuvre, le prix de la peinture et celui des pièces de rechange peuvent être considéré dans l'indice d'inflation.

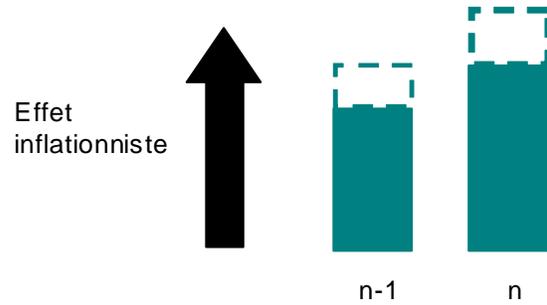


Figure 2: traitement des données – effet d'inflation

Une base de données « as if » peut être construite par l'équation suivante :

$$\text{Sinistre survenu en } i \text{ et vu en } 2009 = \frac{\text{Charge ultime estimée} * \text{Indice}(2009)}{\text{Indice}(i)}$$

- Actualisation Horizontale :

Cette actualisation consiste à atténuer l'effet périmètre sur les volumes de sinistres.

La modification du périmètre, de la politique de souscription, ou de la variation du chiffre d'affaire peut influencer les volumes de sinistres. Pour que les données soient comparables, il faut atténuer cet effet périmètre. Contrairement à l'effet inflationniste, l'effet périmètre est plus difficile à quantifier.

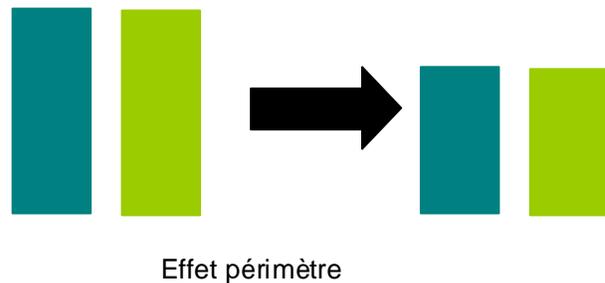


Figure 2 bis: traitement des données – effet de périmètre

Nous supposons que le nombre de contrat est un indicateur sur le risque réel du portefeuille. Nous nous basons plutôt sur le coût moyen d'un sinistre au lieu du coût total.

c) Estimation ultime

Les données dont nous disposons concernent des sinistres déclarés jusqu'au jour d'étude. Mais un sinistre survenu peut être déclaré tardivement. Pour avoir une vision ultime des sinistres pour chaque année calendaire, les sinistres sont projetés par la méthode Chain Ladder ou Bornhuetter-Ferguson. Notre estimation des sinistres futurs se base sur les données projetées. Le nombre de sinistres doit être aussi projeté pour avoir une vision ultime.

I.3 Segmentation

Une fois les données disponibles, nous devons calibrer les paramètres du modèle. Les paramètres doivent être estimés à partir de données homogènes. Par conséquent, des

segmentations plus fines doivent être effectuées au sein du portefeuille. Nous possédons à deux types de segmentation.

a) Segmentation par les activités

Dans notre modèle, les classes de risque sont construites à partir des lignes d'activité. Dans notre portefeuille, il n'y a que des risques classiques : Auto, dommage aux biens (DAB) et responsabilité Civile (RC).

Les marchés particuliers et professionnels présentent des caractéristiques différentes. Par souci d'homogénéité, au sein des branches « Auto » et « DAB », nous devons distinguer les produits particuliers et professionnels.

Nous modélisons ainsi les risques suivants :

- Dommage particulier (DAB particulier)
- Dommage professionnel (DAB professionnel)
- Auto RC particulier
- Auto dommage particulier
- Auto RC particulier
- Auto dommage particulier
- RC générale
- Tempête : c'est un risque multi-branches, il touche simultanément plusieurs lignes d'activité. Ici, nous modélisons ce risque sur les branches de dommage particulier et professionnel.

b) Segmentation par les sinistres

La construction des classes de risque est essentielle pour estimer les risques sur une base de données homogènes. Mais cette homogénéité est perturbée par la présence de sinistres rares et coûteux. Afin de mieux analyser le comportement de chaque branche et de garder la stabilité des indicateurs de risque, nous considérons que chaque ligne d'affaire contient trois types de risques :

- Les sinistres attritionnels : ces sinistres présentent une forte fréquence et un faible coût moyen ; ils correspondent au centre de la distribution. Sur des branches matures comme Auto ou DAB, ce type de sinistres a une volatilité relativement faible.
- Les sinistres graves : comme le nom l'indique, ce type de sinistre est souvent très coûteux à l'assureur, mais avec une fréquence beaucoup plus faible que les sinistres attritionnels. Malgré leur faible nombre, leur poids en montant est loin d'être négligeable. On le définit souvent par un sinistre dont l'indemnisation dépasse un certain seuil. Ils ont un impact plus important sur le résultat de l'assureur et une volatilité accrue par rapport aux sinistres attritionnels. Une étude cas par cas est nécessaire pour estimer l'impact potentiel de ce type de risque. Dans ce contexte, le modèle doit adopter une approche individuelle.

- Les sinistres catastrophiques sont des événements provoquant des dommages simultanés à un grand nombre de biens ou de personnes, avec pour conséquence un montant global de sinistres très élevé. Il s'agit du risque de pointe pour une compagnie d'assurance. On classe ces sinistres par le type de catastrophe.

Comme indiqué précédemment, les sinistres attritionnels et graves ont des caractéristiques différentes. Ils se distinguent par leur intensité/gravité.

Modéliser ces deux types de risque par la même loi ne semble pas raisonnable. Une séparation de ces deux sinistres selon le montant et la volatilité nous permet de mieux calibrer les paramètres.

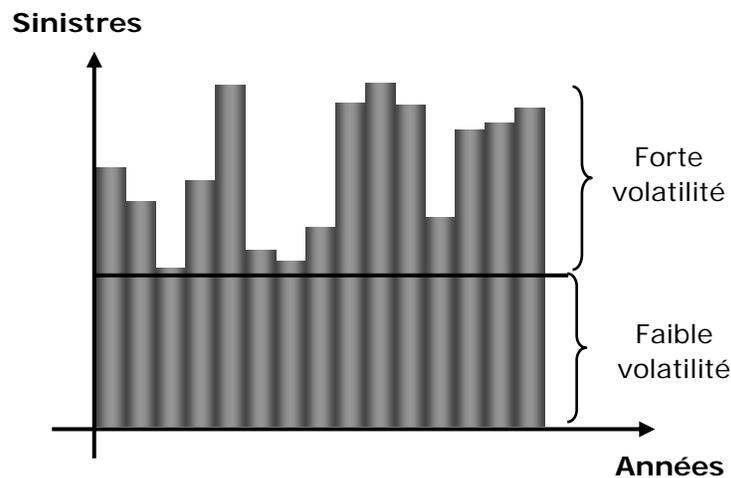


Figure 3: segmentation des sinistres

Nous pouvons fixer le seuil de distinction par l'expérience, puis modéliser les sinistres graves (fréquence et coût) avec des distributions classiques : les lois de poisson ou binomial négative sont souvent choisies pour modéliser la fréquence, et les lois lognormal ou gamma sont utilisées pour calibrer le montant d'un sinistre.

Cependant, notre objectif est de déterminer le mieux possible la queue de la distribution, puisque les sinistres graves à forte volatilité influencent la queue de distribution des sinistres. Il est important de choisir le modèle le plus adapté pour les sinistres graves. La distribution de Pareto Généralisée (GPD) est souvent utilisée pour modéliser des valeurs à partir d'un seuil fixé. La GPD est liée à la théorie des valeurs extrêmes, pour laquelle une démonstration est détaillée en l'annexe. Dans la section suivante, nous rappelons son idée fondamentale et la modélisation des risques graves (larges claims) par cette théorie.

I.4 Seuil de distinction et modélisation des sinistres graves

I.4.1. Modélisation de sévérité

a) Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est particulièrement intéressante dans le cadre de l'assurance et la réassurance. Car elle permet d'étudier le comportement des données sur la queue de distribution, qui est très utile pour connaître le risque potentiel du portefeuille souscrit par le (re)assureur et constituer de fonds propres suffisants afin d'assurer la solvabilité de l'entreprise.

Cette théorie est donnée par le résultat de Gnedenko (1943). Elle décrit les limites possibles de la loi du maximum de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d).

Supposons $\{X_1, \dots, X_n\}$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d. On définit une variable aléatoire M_n , qui représente le maximum d'une réalisation de X_n .

Selon le théorème de Gnedenko (1943), il existe trois paramètres a_n , b_n et γ tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = H_\gamma(x)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} H_\gamma(x) = \exp\left(-1 + \gamma x\right)_+^{\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ H_0(x) = \exp(-\exp(-x)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $x_+ = \max(x, 0)$

L'objectif de cette théorie est d'étudier le comportement du maximum M_n d'une série de données. Si M_n est centralisée et normalisée, elle converge vers certaine distribution en fonction d'un unique paramètre γ . En effet, trois comportements sont possibles :

- Si $\gamma > 0$, il s'agit du domaine d'attraction de Fréchet, c'est l'ensemble de lois « à queue lourde »;
- Si $\gamma = 0$, il s'agit du domaine d'attraction de Gumbel, c'est l'ensemble de lois « à queue légère »;
- Si $\gamma < 0$, il s'agit du domaine d'attraction de Weibull, c'est l'ensemble de lois « à queue finie ».

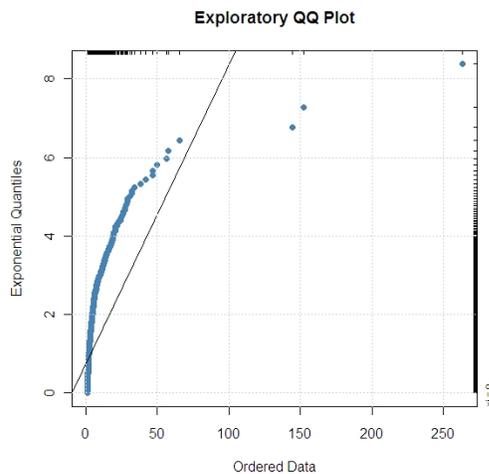
Une analyse plus détaillée de cette théorie est dans l'annexe 2.

b) Détection de queue lourde

Les branches d'assurance sont présumées avoir une distribution de leur sinistralité à queue lourde à droite. Dans une 1^{ère} étape, nous souhaitons tout de même réfléchir que ces données à notre disposition présentent cette caractéristique, afin de déterminer la présence des valeurs extrêmes.

En pratique, des méthodes graphiques nous fournissent une indication de la présence probable d'une queue lourde :

- QQ-Plot (Quantile – to – Quantile Plot)

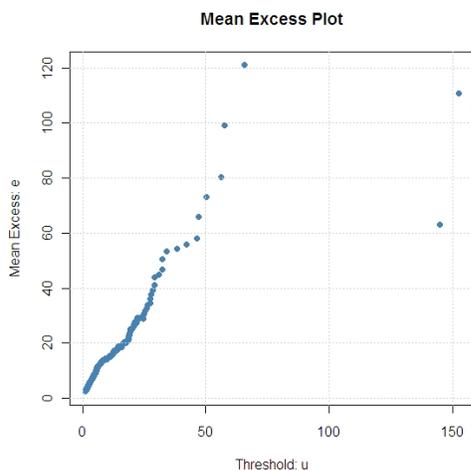


Le QQ-Plot est un outil graphique couramment utilisé pour tester l'adéquation d'un échantillon à une loi paramétrique en utilisant la comparaison entre le quantile théorique et le quantile observée. En pratique, on représente graphiquement les points $\left(F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right), x_{(i)} \right)$ où $x_{(i)}$ est le i^{ème} valeur de l'échantillon observe.

Figure 4: QQ-plot (loi exponentielle)

Dans la théorie des valeurs extrêmes, le QQ- Plot se base sur une loi exponentielle pour mesurer le domaine d'attraction de données. Si les points du graphique sont concaves (convexes), alors les données ont une queue épaisse (fine). S'ils sont globalement alignés, alors il s'agit d'une loi exponentielle.

- Mean Excess Function (la fonction moyenne des excès)



La fonction moyenne des excès (Mean Excess Function: MEF) est la somme des excès dépassant un certain seuil, noté u , rapportée au nombre de données dépassant ce seuil (il s'agit l'espérance conditionnelle empirique) :

$$E_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

Figure 5: mean excess plot

De manière générale, le graphe de la MEF donne une idée du comportement de la queue de distribution de X :

- Si la MEF empirique a une pente positive, les données suivent la distribution GPD, une queue épaisse est présente ;
- Si la MEF empirique est globalement horizontale, alors les données suivent une distribution exponentielle ;
- Si la MEF empirique a une pente négative, alors les données suivent une distribution à queue fine.

L'exemple ci-dessus indique clairement une pente positive. Par contre, les dernières observations semblent instable, c'est difficile d'interpréter le comportement des données sur la queue de distribution.

Cette fonction est souvent utilisée en réassurance car elle permet d'analyser la perte moyenne attendue par un traité de réassurance XS avec la priorité u (la définition de ce traité se trouve dans le chapitre 2).

Application aux données : selon les méthodologies que nous avons décrite ci-dessus, nous appliquons le QQ-Plot de la loi exponentielle et le Mean Excess Plot à nos sept classes de risque. Nous observons alors la présence de queue épaisse dans toutes les classes (Annexe 3).

c) Choix de distribution

La théorie des valeurs extrêmes étudie spécifiquement le comportement du maximum. Dans la pratique, nous n'avons pas seulement besoin de déterminer la distribution du sinistre le plus grave mais également celle des sinistres les plus graves. Nous nous intéressons donc plutôt au comportement d'un groupe des sinistres qui dépassent un seuil suffisamment élevé :

$$F_{\mu}(y) = P(X - \mu < y / X > \mu)$$

Pour les distributions vérifiant le théorème des valeurs extrêmes et pour un seuil μ suffisamment élevé, il existe γ, σ tel que F_{μ} converge vers la distribution de Pareto généralisée, c'est-à-dire :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |F_{\mu}(y) - G_{\gamma, \sigma(\mu)}(y)| = 0 \quad (*)$$

Avec :

$$G_{\gamma, \sigma(\mu)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma(\mu)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma(\mu)}\right) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

Où $\sigma > 0$ est un paramètre d'échelle ;

$\gamma \in \mathfrak{R}$ est un paramètre de forme.

Avec la propriété (*) que nous avons énoncée précédemment, nous savons que si une queue lourde à droite est présente dans la distribution, la loi F_μ converge vers la GPD. En fait, avec un seuil assez élevé et un nombre de données suffisant, l'utilisation de la GPD est justifiée pour modéliser les sinistres graves. Nous décidons donc de choisir la GPD comme la distribution des sinistres graves.

Cependant, le problème pratique est de la détermination du seuil au-delà duquel les sinistres suivent une GPD. Nous allons aborder cette problématique dans la section suivante.

d) Seuil de distinction

La question suivante est alors de définir la frontière entre les observations que nous considérons « normales » et celles associées à des « valeurs extrêmes ». Cela consiste donc à positionner le seuil pour distinguer la sinistralité attritionnelle de la sinistralité grave.

a) Deux objectifs en conflit

Si le nombre de données au-delà du seuil est suffisant, plus la valeur de μ est élevée, mieux la loi de Pareto généralisée (GPD) s'adapte aux données. Dans pratique, le nombre de sinistres graves est souvent réduit : le problème est de déterminer le seuil « suffisamment élevé » tout en gardant un nombre de données significatifs.

- Si μ est élevé, nous disposons de peu d'observations, cela implique alors une grande variance d'estimation, l'estimateur n'est pas « stable ». De plus, nous perdons la possibilité d'observer les quantiles très élevés.
- Si μ est faible, nous risquons de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas extrêmes, l'hypothèse de la loi de Pareto généralisée n'est pas vérifiée, les paramètres estimés ont alors un grand biais.

Par conséquent, notre objectif est de déterminer le seuil le plus petit à partir duquel la GPD devient une approximation raisonnable pour la queue de distribution.

b) Outils graphiques

Pour identifier le seuil optimal, nous utilisons souvent des outils graphiques :

- Mean Excess Plot :

Cet outil est déjà présenté dans la partie précédente. En fait, il nous permet à la fois de vérifier une queue épaisse et de déterminer le seuil de la loi GPD. En fait, si les données empiriques suivent une GPD, alors :

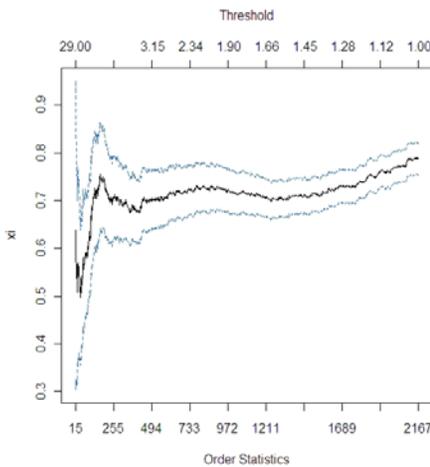
$$E(\mu) = \frac{\sigma}{1-\gamma} + \frac{\gamma}{1-\gamma} * \mu$$

L'idée est de déterminer, à partir du graphique de l'estimateur empirique $E(\mu)$, un intervalle $[\mu, \infty[$ où l'estimateur devient approximativement linéaire.

- Hill plot

En vertu de la propriété de stabilité de GPD, si X suit une GPD $G_{\gamma,\sigma}$, alors la variable $[X - \mu | X > \mu]$ suit une GPD $G_{\gamma,\sigma+\gamma*\mu}$. L'indice de queue γ doit être stable, pour tous les seuils μ .

Le Hill plot se base sur l'estimateur de Hill que nous allons détailler dans la section suivante. Il existe un outil graphique pour positionner l'estimateur γ en fonction du seuil μ .



Il s'agit de sélectionner graphiquement le seuil minimum à partir duquel l'estimation de γ devient stable.

On estime d'après ce graphe que $\gamma = 0,7$.

Figure 6: hill plot

Dans ce graphe, les paramètres γ sont tracés en fonction de « *order statistics* » (qui peut être traduit par le nombre d'excès). C'est-à-dire que chaque γ est calculée en fonction d'un seuil μ fixé.

Les outils graphiques sont simples à utiliser pour visualiser le choix du seuil. Par contre, ils peuvent seulement donner une estimation approximative. Pour obtenir un résultat précis, l'estimation par simulation semble meilleure. Mais l'objectif de ce mémoire n'est pas la modélisation de sinistre grave, donc nous n'utilisons que des outils graphiques pour déterminer le seuil.

Applications numériques

Nous avons utilisé le Hill Plot pour estimer le seuil de distinction pour chaque branche, et nous estimons le seuil pour chaque ligne d'activité. Les résultats sont listés dans le tableau suivant :

	Auto RC Part	Auto MAT	Auto RC Prof	Auto MAT	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Seuil μ	310 000	178 000	310 000	150 000	237 500	275 000	230 000

Tableau 3: seuils de la loi Pareto Généralisée

Une fois le seuil de distinction entre les sinistres attritionnels et graves fixé, il reste à calibrer les paramètres de GPD.

e) Calibrage des paramètres

Pour estimer les paramètres de la GPD, il existe des nombreuses approches. Nous avons calibré ces paramètres à l'aide de R, qui propose deux méthodes d'estimation :

- MLE (Maximum Likelihood Estimation)
- PWM (Probability Weighted Moment)

Par des essais numériques et des simulations, Hosking et Wallis (1987)¹ ont montré que, la méthode PWM est plus efficace que les estimateurs du maximum de vraisemblance pour des petits échantillons avec une taille inférieure à 500 environ. Par contre, cette méthode est contrainte par son domaine de validité : la valeur de forme γ ne doit pas excéder 0,5. Par conséquent, nous choisissons la méthode PWM pour γ inférieur à 0.5 et MLE pour γ supérieur à 0.5.

Après l'application des méthodes précédentes, nous obtenons des paramètres suivants :

Distribution des sinistres graves	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Distribution	GDP	GDP	GDP	GDP	GDP	GDP	GDP
Paramètre d'échelle	242 432	153 242	179 392	119 902	136 874	257 259	190 934
Paramètre de forme	0,36	0,42	0,48	0,47	0,43	0,46	0,45
Seuil	310 000	178 000	310 000	150 000	237 500	275 000	230 000

Tableau 4: paramètres des sinistres graves

f) Test d'adéquation

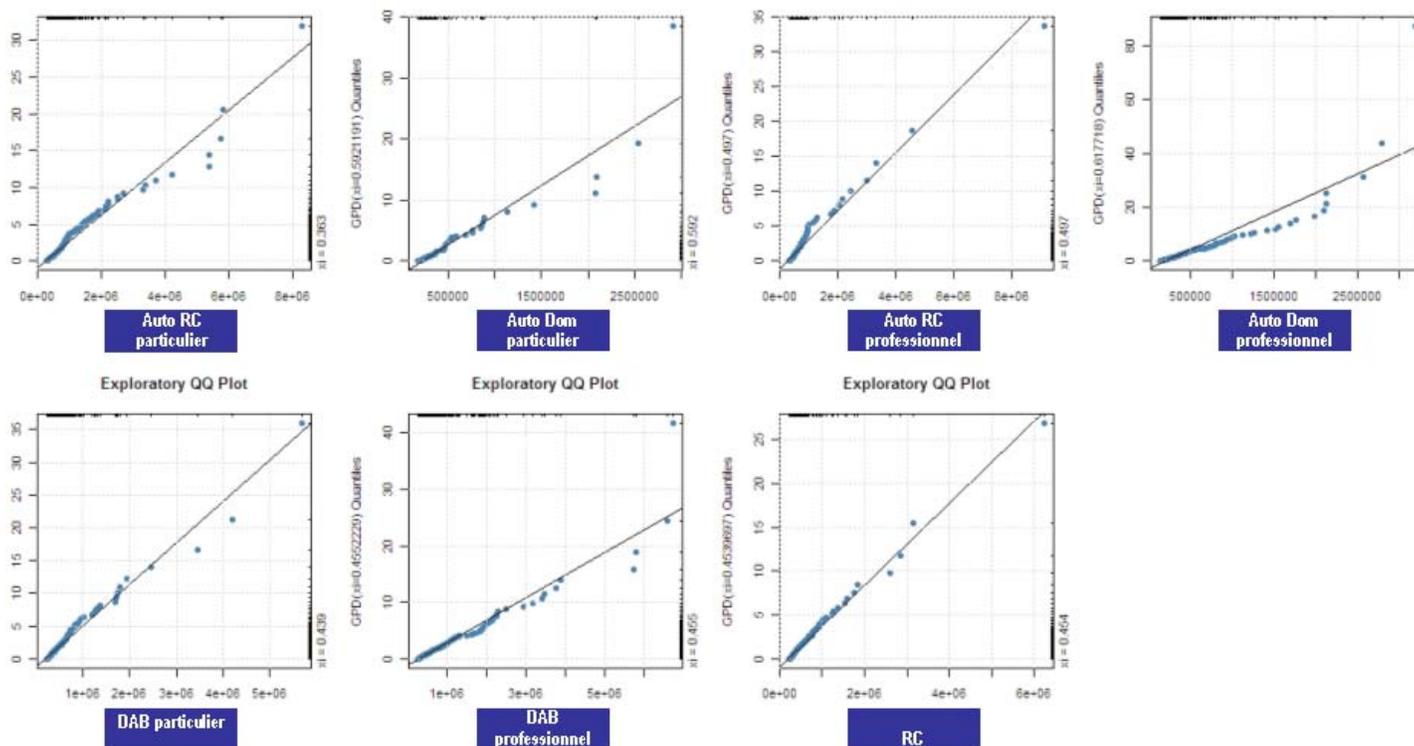
Nous avons testé l'adéquation de la loi GPD par le test Kolmogorov-Smirnov, et puis nous l'avons comparé avec l'utilisation de la loi lognormale (la distribution classique à queue droite couramment utilisée pour modéliser le risque grave) :

Distribution	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Lognormal	<0.005	<0.005	<0.005	<0.005	<0.005	<0.005	<0.005
GPD	0,2419	0,3524	0,4626	0,0995	0,5258	0,3783	0,6323

Tableau 5: test d'adéquation : Kolmogorov-Smirnov p-value

Afin de vérifier notre test d'adéquation de la loi GPD, nous traçons aussi le QQ-Plot entre les observations empiriques et les estimations théoriques.

¹ Hosking, J.R.M. and Wallis, J.R. [1987] Parameter and quintile estimation for the Generalized Pareto distribution, *Technometrics* 29(3) pp. 339-349



A partir des résultats ci-dessus, nous pouvons conclure que même si la loi GPD n'est pas satisfaisante pour toutes les classes, surtout pour les classes auto dommages (par contre, ce résultat n'est pas choquant, car ces branches ont souvent moins de sinistres extrêmes). Selon les p-value de Kolmogorov-Smirnov test, elle semble être mieux adaptée aux données au quantile plus élevé que la loi lognormal. Par conséquent, nous avons intérêt à utiliser la loi GPD pour modéliser les risques graves de notre portefeuille.

Etant donné l'importance du montant, ce type de sinistre doit être modélisé de façon individuelle. Donc nous avons choisi la méthode de fréquence - coût.

Nous allons, dans la section suivante, estimer les paramètres pour le nombre et le coût de sinistre.

I.4.2. Modélisation de fréquence

La fréquence des sinistres est généralement modélisée par une loi de Poisson ou de Binomiale Négative.

En fait², si nous supposons $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n))$, le nombre de dépassement du seuil, a pour loi asymptotique une loi de Poisson de paramètre $\lambda = N(u_n)$. C'est pour cette raison que nous choisissons la distribution de Poisson pour estimer le nombre d'excès de sinistres graves. Le

² DENUIT M., CHARPENTIER [2005] *Mathématiques de l'assurance Non-Vie. Tome 2 : tarification et provisionnement*

paramètre de la distribution est estimé à partir du nombre d'excès en moyenne, sur les exercices observés.

I.4.3. Charge totale

Une fois que nous obtenons une estimation pour le coût et le nombre de sinistre grave, nous déduisons la charge totale à partir du modèle collectif :

$$S = \sum_{i=0}^N X_i$$

Les hypothèses suivantes doivent donc être respectées :

- Les montants individuels sont indépendamment et identiquement distribués,
- Les coûts unitaires X_i et le nombre total de sinistres N sont indépendants,

On suppose que la survenance des sinistres suit une loi de poisson. La simulation des sinistres est donc basée sur la Poisson-GPD.

I.5 Sinistres attritionnels

Pour tous les sinistres qui ne sont pas classés comme grave et qui ne sont pas d'origine d'une catastrophe naturelle, nous les incluons dans la catégorie « sinistres attritionnels ».

Les sinistres attritionnels sont des sinistres courants qui sont peu coûteux mais très fréquents. Nous nous intéressons à la charge totale de tous les sinistres au lieu du coût du sinistre individuel.

Pour optimiser le temps de simulation, on n'a pas besoin de simuler sinistre par sinistre, la modélisation de ce type de sinistre est souvent effectuée par la fréquence-coût moyen ou par la distribution de charge totale. Ici, on utilise ici la transformation de Wilson-Hilferty pour modéliser la distribution de charge totale.

Wilson-Hilferty s'agit d'une méthode de simulation de la charge cumulée des sinistres pour un portefeuille homogène. L'intérêt d'une telle méthode est de permettre de générer directement une réalisation de la charge totale sans passer par la simulation de fréquence-coût, cette méthode a un gain significatif en terme du temps de calcul. Cette méthode est particulièrement adaptée dans notre situation, car la connaissance des montants individuels des sinistres n'est pas requise. La méthode Wilson-Hilferty est une méthode de moment qui approxime la loi de probabilité de la charge cumulée des sinistres. Elle peut se rapprocher d'autres méthodes utilisées en théorie du risque comme les approximations Normale et Normal Power.

Selon le modèle collectif de la théorie du risque, on estime la charge cumulée de sinistres par la fonction suivante :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Avec X_1, X_2, \dots, X_N une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées. Cette suite de variables représente les coûts des sinistres. N est le nombre de sinistres.

On peut calculer les moments de X : le coût individuel du sinistre

$$\mu_X = E(X) \quad \text{L'espérance mathématique de X}$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) \quad \text{La variance de X}$$

$$\gamma_X = \frac{E(X - \mu_X)^3}{\sigma_X^3} \quad \text{Le coefficient d'asymétrie (skewness) de X}$$

Et les moments de N : le nombre de sinistres :

$$\mu_N = E(N) \quad \text{L'espérance mathématique de N}$$

$$\sigma_N^2 = \text{Var}(N) \quad \text{La variance de N}$$

$$\gamma_N = \frac{E(N - \mu_N)^3}{\sigma_N^3} \quad \text{Le skewness de N}$$

Avec les moments de X et N, on peut déterminer les moments de S, la charge cumulée de sinistres.

$$\mu_S = E(S) = \mu_X * \mu_N$$

$$\sigma_S^2 = \text{Var}(S) = \mu_N * \sigma_X^2 + \mu_X^2 * \sigma_N^2$$

$$\gamma_S = \frac{E(S - \mu_S)^3}{\sigma_S^3} = \frac{\mu_N \sigma_X^3 \gamma_X + 3 \sigma_N^2 \mu_X \sigma_X^2 + \sigma_N^3 \gamma_N \mu_X^3}{\sigma_S^3}$$

L'approximation de Wilson-Hilferty est une méthode dite de « symétrisation ». Elle approche la variable aléatoire S par la transformée en une variable aléatoire normale centrée et réduite R. C'est-à-dire :

$$R = g(S)$$

$$\text{Avec } R = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \text{ et } Y = \left(\frac{S}{\mu_S} \right)^h \text{ avec } h = \frac{1}{3}$$

On peut déduire que $S = \mu_S + \sigma_S * \tilde{S}$ où $\tilde{S} = \frac{\gamma_S^2}{108} \left(R - \frac{\gamma_S}{6} - \frac{6}{\gamma_S} \right)^3 - \frac{2}{\gamma_S}$

Pour simuler la charge cumulée S, il suffit de simuler une variable aléatoire suivant une loi normale standard et puis de la transformer selon la formule précédente.

Pour appliquer la méthode de Wilson-Hilferty, nous estimons les paramètres nécessaires par la ligne d'activité :

Détails	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Primes	202 362 122	194 967 144	146 352 374	135 357 805	239 250 878	391 638 947	168 599 236
Espérance(N)	20 541	84 163	13 724	46 821	45 635	72 135	10 536
Variance(N)	20 541	84 163	13 724	46 821	47 635	75 132	10 536
Skweness(N)	0,01796	0,02932	0,01258	0,01876	0,05765	0,07689	0,02920
Espérance(X)	5 583	1 604	5 867	1 871	2 659	3 128	6 150
Variance(X)	3 527 017 669	1 026 429 788	4 062 039 788	1 397 426 912	5 086 802 407	5 742 905 604	7 689 723 043
Skweness(X)	52,13	39,55	43,24	36,77	57,15	68,94	82,97

Tableau 6: paramètres des sinistres attritionnels

I.6 Sinistres catastrophes

Les sinistres catastrophes sont en général des sinistres survenus à cause d'un événement rare et coûteux. Selon leur origine, ils peuvent être classés dans deux sous catégories : les catastrophes naturelles et les catastrophes techniques.

Les catastrophes naturelles sont, par définition, des événements provoqués par les forces de la nature, par exemple une inondation, un séisme ou une tempête.

Les catastrophes « man made », comme le nom indiqué, sont des sinistres liés à des activités humaines : une explosion d'une usine ou un acte terrorisme est inclus dans ce type de sinistre. Par contre, une guerre ou un acte similaire est exclu de la garantie.

La plupart du temps, peu importe leur nature, ces sinistres catastrophes affectent un bien de grande taille, touchent simultanément plusieurs lignes d'activité et un nombre de polices d'assurance considérables. Les montants des sinistres catastrophe ont considérablement augmenté à partir de l'année 90.

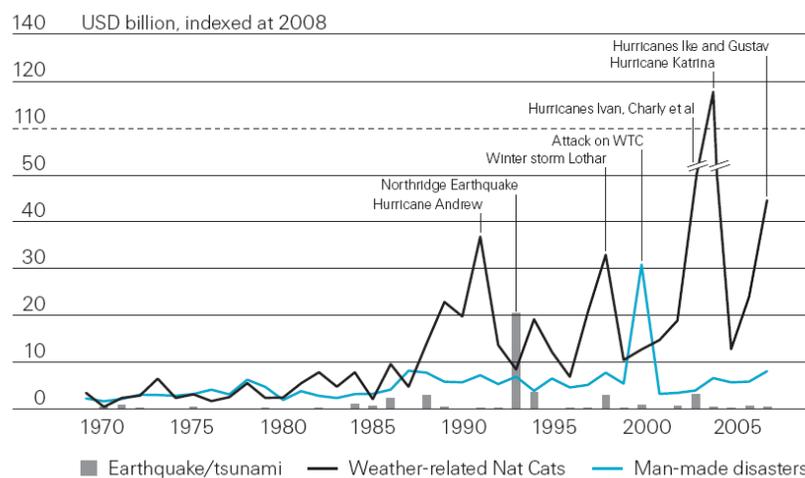


Figure 8: Swiss Re – Sigma No 2/2009 : “Natural catastrophes and man-made disasters in 2008”

Selon le graphe précédent, nous observons une forte augmentation des sinistres catastrophes à partir des années 90. Les sinistres catastrophes naturelles comme Katrina ou Lothar ont causé des pertes le plus importantes dans l'histoire d'assurance.

Parmi les 40 événements les plus coûteux des 30 dernières années, l'Europe a eu beaucoup moins de sinistres par rapport US. Mais les tempêtes Daria (1990), Lothar (1999), Martin (1999), Klaus (2009), les tempêtes de référence, coûtent environ dizaines milliards de pertes aux marchés d'assurance européenne.

Etant données que les catastrophes naturelles sont souvent plus importantes pour les assureurs/réassureurs au niveau de montant, et que la modélisation de catastrophes « man made » est peu développée jusqu'à nos jours. Dans notre modèle, nous nous intéressons qu'aux catastrophes naturelles.

En France, Le régime des catastrophes naturelles est particulier. La loi n°82-600 du 13 juillet 1982 a instauré un système particulier pour l'indemnisation des dommages matériels causés par les catastrophes naturelles en France. Par conséquent, toutes les catastrophes naturelles **hors tempête** (inondation, etc.) sont prises en charge par l'état. Les assureurs sont assurés ces risques auprès du CCR (Caisse Centrale de Réassurance), une compagnie de réassurance 100% contrôlée par le gouvernement français, les primes de cession et les niveaux de rétention sont fixés. Pour l'assureur, il reste le risque de tempête à couvrir.

Pour modéliser les sinistres de catastrophe, les modèles actuariels ne sont pas adaptés. Différents de ces modèles classiques, les modèles géographiques utilisent principalement la localisation de l'exposition, et non seulement la sinistralité historique, pour déterminer la sinistralité probable d'un portefeuille d'assurance ou de réassurance. Les modèles géographiques est utilisés ici pour modéliser les sinistres de catastrophe.

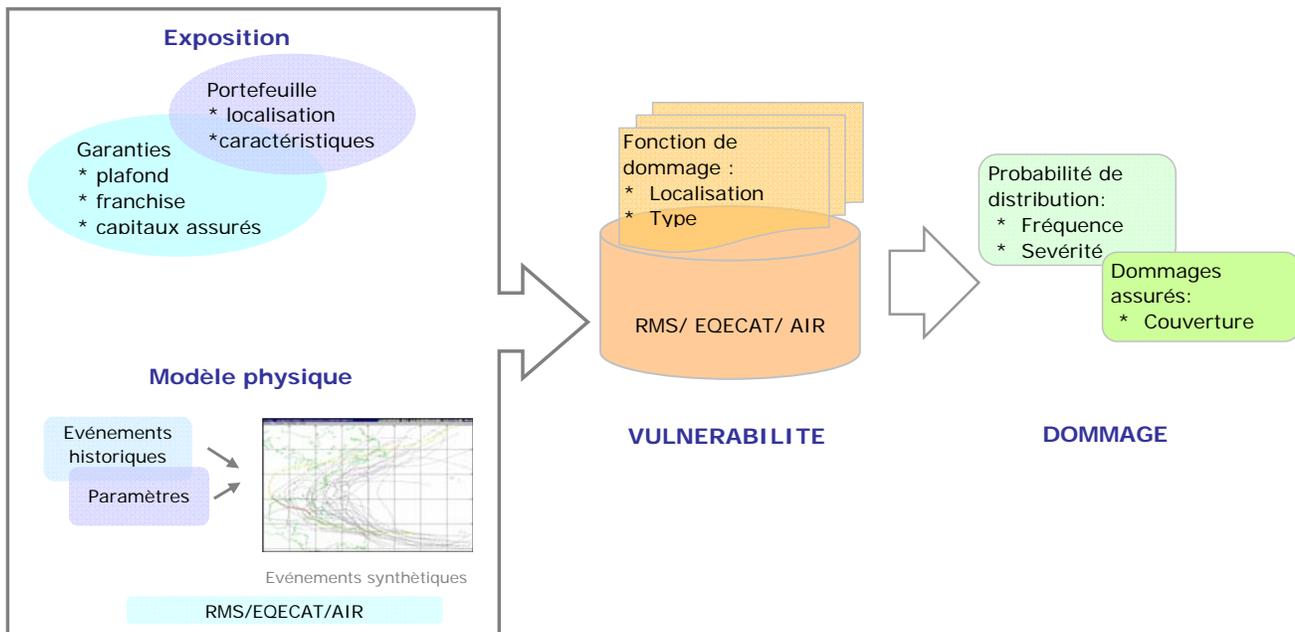


Figure 9: Modélisation géographique

La modélisation géographique se repose en général sur quatre étapes principales :

- L'analyse et la localisation des expositions et la couverture de l'assurance
- La modélisation de l'aléa physique

- La mise en place et l'application de fonctions d'endommagement
- L'application des clauses et conditions d'assurance

Les étapes 2 et 3 sont souvent modélisées dans les logiciels commerciaux : RMS, EQECAT et AIR. Les actuaires se concentrent sur l'estimation d'exposition (les valeurs assurées) du portefeuille.

A la sortie du modèle, nous obtenons une liste des événements éventuels, associés à sa probabilité de survenance et la perte de l'assuré. Nous choisissons aléatoirement le nombre des événements naturels et les pertes associées pour chaque scénario et constituons ainsi les scénarios des pertes liées au risque de catastrophe.

I.7 Agrégation des risques

Comme ce que nous expliquons dans les sections précédentes, les sinistres sont modélisés par la ligne d'activité et le type de risque. Mais ce qui nous intéresse, c'est le comportement de la charge totale des sinistres futurs. Une fois que nous obtenons les distributions, ce qu'il nous reste à faire, c'est la agrégation des sinistres.

L'assureur IARD a souvent des business dans plusieurs domaines : l'habitation, l'auto, la responsabilité civile, la construction, l'aviation etc. La diversification des activités permet l'assureur de ne pas affronter tous les sinistres en même temps, qui déduit ainsi la probabilité de faillite.

Par contre, les événements qui touchent des différents secteurs ne sont pas complètement indépendants : un accident de voiture peut entraîner des sinistres à la fois en l'auto dommage et l'auto RC ; une incendie peut détruire simultanément des biens particuliers et professionnels ; l'auto ou l'aviation sont influencés par le cycle économique : avec la crise financière, la vente de voiture ou le nombre de voyages ont beaucoup chuté aussi; un sinistre catastrophe peut toucher une fois sur plusieurs branches : les immobiliers particuliers ou professionnels, les voitures, l'agriculture, etc.

Par conséquent la dépendance entre les branches diminue la réduction de risque par la diversification, elle doit être pris en compte dans notre modèle pour mieux estimer les sinistres totaux.

2 types de dépendance peuvent nous intéresser dans l'agrégation des sinistres :

- Dépendance des risques

Il s'agit la dépendance entre les différentes catégories de risque : une hausse de sinistre attritionnels peut se traduit par une augmentation de la fréquence. Supposons que la proportion de sinistre grave est constante, cette augmentation de la fréquence entraîne une hausse du nombre de sinistre grave aussi. Il est possible que les sinistres attritionnels et graves ne sont pas complètement indépendants.

Dans notre model, nous retenons une hypothèse d'indépendance pour simplifier la modélisation.

- Dépendance des branches

Avant de commencer l'étude sur la dépendance de branches, nous devons assurer que les données historiques soient homogènes, c'est-à-dire que une dépendance n'est pas liée avec l'effet de « taille de portefeuille », donc nous intéressons ici plutôt sur les indices de sinistre comme S/P au lieu des montants de sinistres. Afin d'interpréter les dépendances entre les lignes d'affaire, nous nous appuyons sur les détails des risques couverts par les différents secteurs d'activité et sur l'expérience des gestionnaires et des experts de la société. En fait, la dépendance de branche peut être expliquée par 2 types d'événements :

- Un événement survenu à un assuré qui a souscrit des contrats concernant plusieurs domaines.

- Un événement impact plusieurs lignes d'affaire, nous avons cité des exemples au début de cette section.

La dépendance des lignes d'affaire est très importante pour estimer la charge totale d'une compagnie d'assurance. Nous allons discuter la méthode de modélisation pour prendre en compte cet effet.

Il est important de se rappeler que la dépendance et la corrélation sont des notions différentes. La corrélation, indicateur classique et linéaire de dépendance, ne constitue en effet qu'un indicateur pour mesurer le degré de dépendance, par contre, il ne décrit pas la totalité de la structure de dépendance. En effet, la corrélation s'agit une valeur moyenne de la dépendance entre deux variables aléatoire, mais ces deux variables peuvent être très dépendantes pour les valeurs élevées ou (et) basses et faiblement pour les valeurs intermédiaires, toute les variantes sont possibles, une seule valeur de la corrélation n'arrive pas à décrire l'intégralité de la dépendance.

La copule est un outil couramment utilisé pour modéliser une structure de dépendance non linéaire. Nous allons d'abord nous rappeler quelques définitions principales.

I.7.1. Théorie de copule

Définition de copule :

Une copule est une fonction de répartition multivariée C définie sur l'hypercube $[0,1]^n$ et dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$.

Théorème de Sklar :

Suppose que F est une fonction de répartition continue de dimension n , avec des marginales F_1, \dots, F_n , alors il existe une unique copule n -dimensionnelle, tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, on a $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(u_1, \dots, u_n)$ où $u_i = F_i(x_i)$.

Ce théorème sert à un outil fondamental pour la modélisation par la copule, il permet de séparer toute distribution jointe en deux parties : les distributions marginales et la copule qui décrit la structure de dépendance entre les composantes.

Mesures de concordance :

Il convient tout d'abord de rappeler la notion de concordance.

Soient (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu (X, Y) , alors (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) sont dites concordantes si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$ et discordantes si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$.

Le tau de Kendall et le Rho de Spearman sont deux mesures de concordance couramment utilisées en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui apprécie la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires. Par contre, comme l'équation que nous avons décrite au dessus, ces mesures de concordance ne permet qu'à estimer une dépendance entre 2 variables.

1) Tau de Kendall :

Pour (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu (X, Y) , le tau de Kendall s'écrit $\tau(X, Y) = \Pr((x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0) - \Pr((x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0)$. Avec une structure de copule C continue, nous pouvons déduire :

$$\tau(X, Y) = 4E[C(U, V)] - 1$$

2) Rho de Spearman :

Le Rho de Spearman est défini par :

$$\rho_s(X, Y) = 3\{\Pr((x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0) - \Pr((x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0)\}$$

Avec une copule continue:

$$\rho_s(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) du dv - 3$$

Rho de Spearman peut être aussi considéré comme un coefficient de corrélation linéaire entre les rangs des variables.

$$\rho_s(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}$$

Où R_i et S_i sont les rangs de la réalisation de (X, Y) .

Dépendance des extrêmes :

1) Dépendance de queue à gauche

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire, le coefficient de dépendance de queue à droite est donnée par

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y < F_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{C(u, u)}{u} \right)\end{aligned}$$

2) Dépendance de queue à droite

Le coefficient de dépendance de queue à droite est donnée par :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}\end{aligned}$$

Copules archimédiennes

Soit φ une fonction convexe, continue, strictement décroissante de $[0,1]$ dans avec $\varphi(1) = 0$, alors $C(\mu) = \varphi^{-1}(\varphi(\mu) + \varphi(v))$ est une copule archimédienne et φ est appelé générateur de copule C. Les copules archimédiennes les plus célèbres sont celles de Gumbel, Frank et Clayton.

Les copules archimédiennes permettent de modéliser la dépendance asymétrique. Les sinistres déclarés ont souvent la propriété de dépendance à droite, donc les copules archimédiennes semblent mieux adaptées en assurance. Mais dans la pratique, ce type de copule n'admet qu'un ou deux paramètres, ce qui marche bien pour modéliser la dépendance entre deux branches. Par contre, si nous voulons l'appliquer à plusieurs branches, le modèle devient rapidement très compliquée pour mettre en place : pour n branches, il faut étudier $\frac{n * (n - 1)}{2}$

combinaisons éventuelles pour établir les relations entre les lignes d'affaires deux à deux. Dans ce mémoire, nous ne nous intéressons pas seulement à l'interaction entre deux branches, mais plutôt à une structure de dépendance multivariée. Nous parlerons donc dans la section suivante des copules elliptiques, qui sont plus simple à implémenter.

Copules elliptiques

- Loi elliptique

Une loi continue est dite « elliptique » de paramètre de position μ et de matrice Σ si sa fonction de densité f peut s'écrire :

$$f(x) = (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} h((x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu))$$

où h est une fonction scalaire positive telle que $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1$ et Σ une matrice symétrique et définie positive :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \dots & \dots & \rho_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$ est le coefficient de corrélation entre deux variables

Les deux plus célèbres exemples sont la Copule Gaussienne et Student. Elles ont des propriétés intéressantes :

- Elles sont symétriques, par conséquent, les coefficients de dépendance de queues à droit et à gauche sont égaux : $\lambda_u = \lambda_l = \lambda$.

Les copules elliptiques sont plus faciles à implémenter pour modéliser une structure de dépendance avec n variables aléatoires. La matrice de forme Σ établit les corrélations de toutes les lignes d'affaires via une structure de dépendance multidimensionnelle. En outre, une seule copule nous suffit pour modéliser la dépendance entre les lignes d'affaire.

Même si les copules elliptiques ont leur limite pour être appliquées en assurance. Mais par des raisons pratiques, nous décidons d'utiliser ce type de copule dans notre modèle pour prendre en compte la dépendance de branche.

Copule Gaussienne

Nous allons d'abord rappeler la définition de la Copule Gaussienne.

La Copule Gaussienne est définie comme suit :

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x\right) dx \end{aligned}$$

Où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de la répartition de la loi gaussienne et (u_1, \dots, u_n) sont les distributions marginales.

Limite de la Copule Gaussienne

Un des inconvénients principaux de la Copule Gaussienne est qu'elle n'a pas de dépendance de queue : $\lambda_u = \lambda_l = 0$. La démonstration théorique se trouve en annexe 3. Une illustration numérique est présentée dans les 2 graphes suivants :

λ_u

λ_l

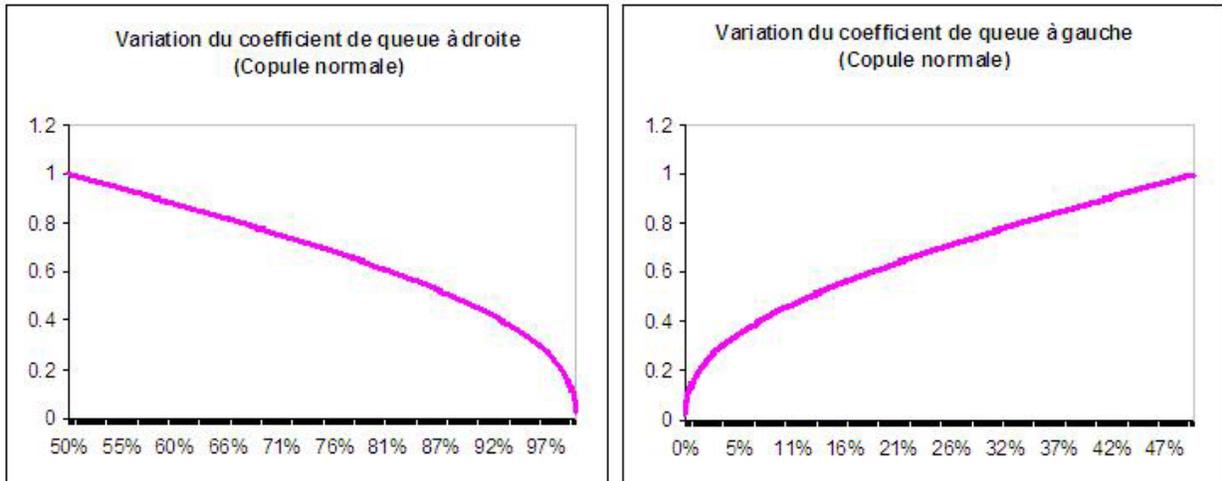


Figure 10: Dépendances de queue - copule Gaussienne avec $\rho = 0.5$

Cette propriété ne convient pas aux événements extrêmes observés réellement dans l'industrie d'assurance. Lorsque nous souhaitons modéliser une dépendance non linéaire entre événements extrêmes, on va faire appel plutôt à la copule Student.

Copule Student

La copule Student est construite de la même manière que la Copule Gaussienne mais à partir de la distribution de Student bivariée. Elle est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 C(u_1, \dots, u_n) &= T_{\Sigma, k} \left(T_k^{-1}(u_1), \dots, T_k^{-1}(u_n) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^n |\Sigma|}} * \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^{T_k^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{T_k^{-1}(u_n)} \left(1 + \frac{1}{k} x^T \Sigma^{-1} x \right)^{-\frac{n+k}{2}} dx
 \end{aligned}$$

Différente de la Copule Gaussienne, la Copule Student possède des dépendances extrêmes positives. En fait cette copule est basée sur la Copule Gaussienne, en ajoutant des dépendances extrêmes sur $[1,1]$ et $[0,0]$. Cet effet est compensé par de légères dépendances négatives entre $[0,1]$ et $[1,0]$. Le graphique suivant illustre la différence entre ces deux copules.

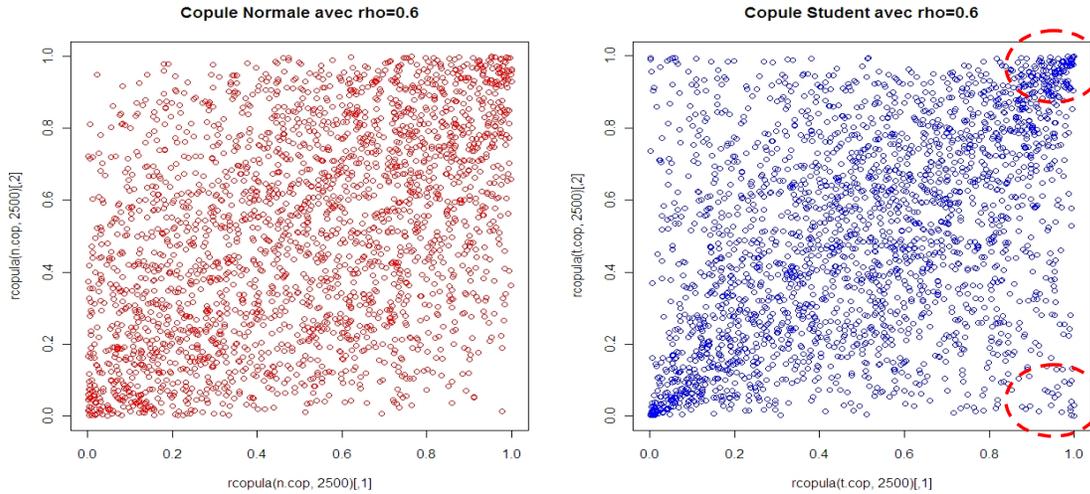


Figure 11 : comparaison entre la copule Gaussienne et la copule Student

Notre objectif est d'étudier nos portefeuilles, d'estimer les pertes potentielles pour déterminer le capital économique et de chercher des solutions pour transférer le risque potentiel. Nous avons donc besoin d'une copule avec une dépendance de queue à droite pour éviter de sous-estimer le risque.

Calibrage des paramètres de la copule

Plusieurs méthodes sont valables pour estimer les paramètres d'une copule :

- Méthode des moments

Nous avons défini le tau de Kendall et le Rhô de spearman. Pour les copules elliptiques, il y a un lien simple entre la matrice de forme Σ , le tau de Kendall et le Rhô de spearman. Ces deux derniers ne dépendent pas des distributions marginales des variables, mais uniquement de la copule. Les relations sont:

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

$$\rho_s(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

Avec ρ le coefficient de corrélation entre X_1, X_2 .

- Méthode du maximum de vraisemblance

Grâce au théorème de SKLAR, nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_n) en fonction de la densité de la copule associée c et de ses marginales.

Supposons que f est la fonction de densité de la distribution conjointe F , alors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Où f_i est la densité de distribution marginale, $c(\cdot)$ est la fonction de densité de la copule.

La fonction de Log vraisemblance s'écrit par :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_n(x_n^t; \theta_n); \alpha) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i^t; \theta_i)$$

Où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha)$ est le vecteur des paramètres à estimer et T est le nombre d'observations.

Nous pouvons déduire l'estimateur θ en maximisant la vraisemblance.

- Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

Cette méthode propose une estimation séparée pour les paramètres des distributions marginales et de la copule. Le processus de calibrage se décompose en deux étapes :

- i) Estimer les paramètres des distributions marginales ;

$$\hat{\theta}_i = \arg \max l^i(\theta_i) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \theta_i)$$

Où l^i est la fonction de log-vraisemblance de la distribution marginale F_i .

- ii) Déduire les paramètres α de la copule, en utilisant l'estimation précédente

$$\hat{\alpha} = \arg \max l^c(\alpha) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t; \hat{\theta}_n); \alpha)$$

Où l^c est la fonction de log-vraisemblance de la copule.

- Méthode CML (Canonical Maximum Likelihood)

La différence entre cette méthode et la méthode IFM est qu'il n'y a pas d'estimation pour les paramètres des distributions marginales. Le processus de calibrage se décompose en deux étapes :

- i) En utilisant la distribution empirique, transformer l'échantillon (x_1^t, \dots, x_n^t) à l'aide des fonctions de répartition univariées $(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t) = (F_1(x_1^t), \dots, F_n(x_n^t))$

- ii) Déduire les paramètres de la copule

$$\hat{\alpha} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t; \alpha)$$

I.7.2. Calibrages

Comme nous l'énoncions précédemment, en utilisant la méthode des moments, il y a une relation simple entre la matrice de forme Σ , le tau de Kendall et le rho de Spearman.

La matrice de forme peut facilement se déduire à partir des mesures de concordances observées.

$$\rho_{i,j} = 2 * \sin\left(\frac{\pi}{6} \rho_{s(i,j)}\right) \quad (*)$$

Les rhôs de Spearman calculé sur les données historiques sans retraitement sont suivants :

Spearman's r	Motor_Part_RC	Motor_Part_MAT	Motor_Pro_RC	Motor_Pro_MAT	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Motor_Part_RC	1	24%	63%	11%	-22%	-6%	27%
Motor_Part_MAT	24%	1	31%	76%	19%	15%	24%
Motor_Pro_RC	63%	31%	1	30%	14%	0%	20%
Motor_Pro_MAT	11%	76%	30%	1	20%	20%	36%
Dom_Part	-22%	19%	14%	20%	1	71%	27%
Dom_Prof	-6%	15%	0%	20%	71%	1	0%
RC	27%	24%	20%	36%	27%	0%	1

Tableau 7: corrélation de rang estimée à partir des données historiques

L'estimation de corrélation dépend fortement de la qualité des données. Dans la pratique, l'avis d'un expert doit être également pris en compte. Mais ici, nous utilisons uniquement le critère quantitatif. Nous enlevons simplement les coefficients de corrélation négatifs pour éviter sous-estimer le risque potentiel. Après retraitement des rhô de Spearman, nous utilisons l'équation précédente (*) pour déduire la matrice de forme de la Copule Gaussienne :

	Motor_Part_RC	Motor_Part_MAT	Motor_Pro_RC	Motor_Pro_MAT	Dom_Part	Dom_Prof	RC
Motor_Part_RC	1	25%	65%	12%	0%	0%	28%
Motor_Part_MAT	25%	1	33%	77%	20%	16%	25%
Motor_Pro_RC	65%	33%	1	31%	14%	0%	21%
Motor_Pro_MAT	12%	77%	31%	1	20%	21%	37%
Dom_Part	0%	20%	14%	20%	1	72%	28%
Dom_Prof	0%	16%	0%	21%	72%	1	0%
RC	28%	25%	21%	37%	28%	0%	1

Tableau 8: matrice de corrélation pour la copule gaussienne & student

Même si les données ne sont pas suffisantes, les coefficients obtenus semblent cohérents.

La Copule Gaussienne et la copule Student possèdent la même matrice de corrélation Σ . Par contre, la copule Student a besoin d'un paramètre supplémentaire : le degré de liberté. L'estimation la plus simple et moins coûteuse en terme de temps est la méthode CML, avec une matrice de corrélation fixée.

La fonction de densité de la copule Student s'écrit:

$$c(u_1, \dots, u_n; k; \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k} y' \Sigma^{-1} y\right)^{-\frac{k+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{y_i^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}}$$

où $y = (y_1, \dots, y_n) = (t_k^{-1}(u_1), \dots, t_k^{-1}(u_n))$, t_k^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition univariées de la loi de Student.

Nous calculons la log-vraisemblance en fonction du degré de liberté k , et nous traçons le graphe suivant :

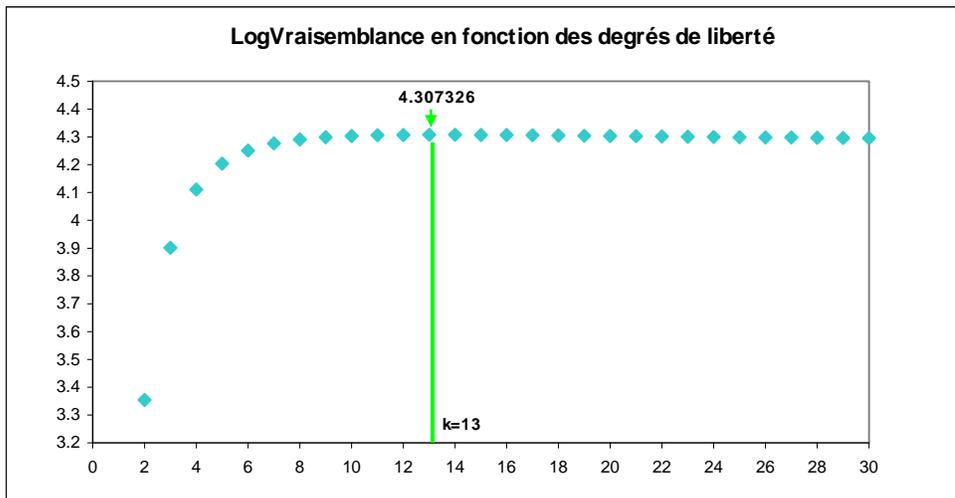


Figure 9 : log-vraisemblance d'une copule student en fonction des degrés de liberté

Nous choisissons la valeur la plus faible qui maximise la log-vraisemblance : $k=13$

I.7.3. Limite du modèle

La difficulté de notre modélisation est que nous ne possédons pas assez de données pour calibrer les paramètres d'une copule. Les données historiques sont en valeur trimestrielle, notre application numérique est basée sur 14×4 observations par branche, ce qui est insuffisantes pour une estimation correcte.

L'objectif ici est plutôt de décrire le processus de calibration de la copule. Car en pratique, l'assureur dispose souvent d'une base plus détaillée : sinistre par sinistre avec le montant et la date de survenance. Il peut construire un échantillon des observations sur une période plus courte qu'1 trimestre (1 semaine, 1 mois, etc.). En appliquant la méthode décrite précédemment, nous pouvons obtenir des résultats plus fiables. Par contre, il peut avoir des problèmes plus importants sur la saisonnalité des données.

I.7.4. Analyses

En appliquant les méthodes que nous avons énoncées précédemment, puis en agrégeant les branches hors CAT grâce à la copule Gaussienne ou celle de Student, nous obtenons des résultats selon la copule utilisée. Le tableau suivant présente le capital économique obtenu en utilisant la copule normal/Student pour agréger les sinistres:

Quantile	Copule Normal	Copule Student	Deviation
99,99%	1 421 470	1 537 914	8,19%
99,95%	1 357 122	1 398 063	3,02%
99,75%	1 238 245	1 259 264	1,70%
99,50%	1 214 560	1 229 366	1,22%
99%	1 196 703	1 203 400	0,56%

k€

Tableau 10 agrégations des sinistres (hors CAT)

La copule Student a une dépendance de queue positive, ce qui entraîne une perte totale plus élevée dans les cas extrêmes: pour la quantile à 99,5%, la perte totale est 1,02% plus élevée avec une copule Student.

Ici, nous décidons d'utiliser la copule Student pour agréger les sinistres simulés, on ajoute les scénarios de CAT en supposant qu'ils sont corrélés à 25% (il s'agit d'une hypothèse du QIS 5 que nous allons préciser dans le paragraphe II.3.1). Nous obtenons des résultats suivants :

Minimum	1er Quantile	Medianne	Moyenne	3e Quantile	Maximum
828 068	1 015 547	1 052 572	1 054 658	1 089 283	1 753 288

k€

Tableau 11 charges totales (y compris CAT)

A partir du tableau précédent, nous observons que les sinistres peuvent atteindre à un niveau très élevé : la survenance de sinistres importants peut faire varier de façon significative le résultat d'une compagnie d'assurance.

Dans le cadre de la nouvelle norme Solvabilité II qui sera mise en place par CEIOPS, cette variabilité du résultat va influencer directement l'exigence en capital économique.

Chapitre II. Risque de souscription Non Vie

II.1 Principes de Solvabilité II

La réglementation en matière de solvabilité au sein de l'UE est en cours de réforme. Le règlement actuel, Solvabilité I ne permet pas de refléter correctement la valeur économique de l'actif et du passif des compagnies d'assurance. Elle ne prend pas suffisamment en compte les risques assurantiels, financiers et les moyens de transfert de risque.

Contrairement au régime de solvabilité actuel, Solvabilité II essaie de corriger ses défauts. Elle est conçue pour refléter une vue économique prospective et fidèle aux risques. Solvabilité II va conduire à une image plus complète d'un assureur sur sa situation de solvabilité et va créer une plus grande transparence.

Un des principaux changements sera l'introduction du coût du capital lié aux risques souscrits, qui pourrait aboutir à une exigence en capital plus élevée pour des produits à forte volatilité.

Le capital économique mentionné ici est une exigence en capital de solvabilité qui « *doit correspondre à un niveau de capital permettant à une entreprise d'assurance d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de donner aux preneurs d'assurance l'assurance raisonnable que les versements seront effectués à leur échéance. Elle doit correspondre aux fonds propres requis pour remplir toutes les obligations à un horizon temporel donné et en fonction d'un niveau de confiance défini* »³.

Pour atteindre cet objectif, le résultat moyen n'est pas suffisant. Il est important de connaître les cas extrêmes. Le capital économique doit couvrir les événements non attendus. Solvabilité II propose de déterminer le capital économique pour chaque risque par la différence entre l'indicateur de risque et la perte moyenne, c'est-à-dire :

$$EC = r(X) - E(X)$$

Où X est le risque qu'on doit mesurer.

$E(X)$ est la valeur moyenne et $r(X)$ est une mesure de risque avec un niveau de confiance fixe. Le capital économique du X est la différence de ces deux valeurs. Il représente le capital nécessaire pour couvrir la perte inattendue. Les choix de l'indicateur et du niveau de confiance déterminent cette exigence en capital.

Mesure de risque:

Une mesure de risque correspond à une fonction qui attribue un capital à une distribution des bénéfices et des pertes économiques. Il y a plusieurs mesures au choix. De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risque donné et mesurent la perte inattendue en fixant un seuil de probabilité.

Trois mesures de risque sont souvent utilisées :

³ CECAPP (2005), P.105

- L'écart type : c'est l'approche la plus simple. Elle mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de sa moyenne. Elle est très simple à calculer. Par contre, il s'agit d'une mesure symétrique, qui s'adapte mal aux cas asymétriques. Elle n'arrive pas à estimer des situations très graves, on l'utilise rarement pour déterminer le capital économique.
- La VaR : C'est l'approche la plus utilisée. Elle correspond au montant de perte qui ne devrait être dépassé qu'avec un certain niveau de confiance sur un horizon temporel donné. Le seuil est souvent fixé à 99.5%. La VaR constitue une mesure de risque benchmark notamment pour la mesure du capital économique et réglementaire. Solvabilité II s'applique sur cette mesure.

$$VaR(\alpha) = \inf \{x \in R | P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Un inconvénient de VaR est qu'elle ne décrit pas la distribution de perte qui dépasse le seuil, donc elle ne donne pas d'information sur le pire scénario.

- La TVaR (Tail VaR) : elle s'appelle aussi ES (Expected shortfall). C'est la moyenne des pertes au-delà de la VaR.

$$ES(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(x) dx$$

Cet indicateur prend en compte la perte maximale probable. Elle mesure aussi la queue de distribution, mais plus strictement que l'indicateur VaR. On utilise cet indicateur dans le cas où on voudrait mettre l'accent sur les conséquences d'une faillite potentielle et non plus sur la probabilité d'insolvabilité.

II.2 Risque de souscription non vie – formules standards

Le risque de souscription est le principal élément générateur de risques pour le capital-risque requis dans le domaine Non-Vie.

Le risque de souscription est un risque assurantiel provenant de la souscription du contrat. Il peut être décomposé en trois composantes :

- Risque de prime (pricing risk) : les primes acquises par l'assureur peuvent être insuffisantes pour faire face à tous ses engagements (hors les événements catastrophiques) vis-à-vis des assurés.
- Risque de réserve (reserving risk) : les provisions peuvent être sous estimées par rapport aux charges réelles.
- Risque de rachat : ce risque est introduit récemment dans le draft du QIS 5. Il sera appliqué dans les contrats ayant option de résiliation unilatérale pour les assurés.
- Risque de catastrophe (CAT risk) : la survenance d'un événement catastrophique peut entraîner des pertes inattendues.

Ici, notre objectif est d'évaluer les sinistres futurs auxquels une compagnie Non-Vie doit faire face dans une période d'un an. Le risque associé est que les charges de ces sinistres survenus dans la période soient supérieures aux primes perçues.

Le risque de provisionnement concerne le risque d'une mauvaise estimation des provisions couvrant les paiements futurs des sinistres survenus dans les exercices précédents. Notre modèle n'évalue pas les sinistres passés, donc le risque de provisionnement ne sera pas pris en compte dans notre modélisation.

II.2.1. Risque de prime

Le chargement en capital au titre des risques combinés de tarification et de provisionnement est calculé comme suit :

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot V$$

Où V est le volume des affaires (donc les primes futures), σ est la volatilité, $\rho(\sigma)$ est la mesure de risque VaR 99.5% d'une distribution lognormal.

La mesure de risque est définie par l'équation suivante :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1$$

La démonstration est détaillée en l'annexe 3.

La formule pour le risque de prime est similaire entre le QIS 4 et le QIS 5. Par contre, plusieurs modifications sont présentées dans le QIS 5.

- **Calibrages**

Dans le QIS 5, CEIOPS a également re-calibré les écarts type des branches d'activité pour le risque de prime.

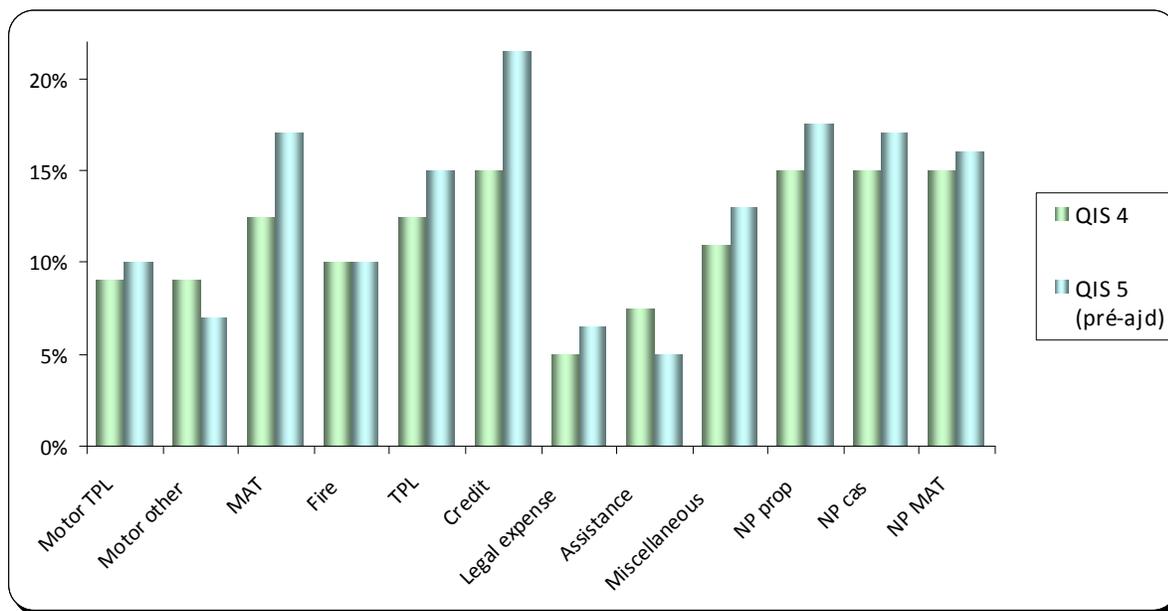


Figure 13 : Comparaison QIS 4 & QIS 5 : écart-type par branche

- **Introduction du « net-gross » ratio**

Contrairement au QIS 4, le QIS 5 essaie de prendre davantage en compte les spécificités de chaque assureur dans le calcul du SCR prime en introduisant un « net-gross » ratio :

$$\sigma = \sigma(\text{pre_adj}) * NP_{lob}$$

- $\sigma(\text{pre_adj})$ est la volatilité de la branche d'activité fixée par CEIOPS
- NP_{lob} est le facteur d'ajustement qui permet de prendre en compte l'effet de la réassurance non-proportionnelle de chaque cédante.

NP_{lob} se base sur le ratio des moyennes et des écart-types de la distribution de sinistres avant et après réassurance. Il est calculé par la formule suivante :

$$NP_{lob} = \sqrt{\frac{1 + (\Omega_{lob}^{net} / M_{lob}^{net})^2}{1 + (\Omega_{lob}^{gross} / M_{lob}^{gross})^2}}$$

Où

- M_{lob}^{brut} et M_{lob}^{net} est la moyenne de la sinistralité brute et nette de réassurance
- Ω_{lob}^{brut} et Ω_{lob}^{net} est l'écart-type de la sinistralité brute et nette de réassurance

L'estimation de l'ajustement NP_{lob} se décline en plusieurs étapes :

1) M_{lob}^{brut} et Ω_{lob}^{brut}

La moyenne et l'écart-type de la sinistralité brute se basent sur les données historiques (notés par \tilde{M}_{lob}^{brut} et $\tilde{\Omega}_{lob}^{brut}$), en appliquant un ajustement S. Les formules sont suivantes :

$$M_{lob}^{brut} = \begin{cases} \tilde{M}_{lob}^{brut} & \text{si } S \geq 1 \\ S * \tilde{M}_{lob}^{brut} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Omega_{lob}^{brut} = \begin{cases} \tilde{\Omega}_{lob}^{brut} & \text{si } S \geq 1 \\ S * \tilde{\Omega}_{lob}^{brut} & \text{sinon} \end{cases}$$

Où

$$S = \sqrt{\frac{n * \sigma_{(prem,brut,lob)}^2 * V_{(prem,brut,lob)}^2}{N * ((\tilde{\Omega}_{lob}^{brut})^2 + (\tilde{M}_{lob}^{brut})^2)}}$$

- n est le nombre d'années d'observation pour estimer les paramètres
- N est le nombre des données utilisées pour estimer les paramètres

2) M_{lob}^{net} et Ω_{lob}^{net}

En supposant que la sinistralité brute suit une distribution lognormale, le sinistre net est obtenu par une loi tronquée. Cela donne les formules suivantes, et une analyse plus détaillée se trouve dans l'annexe.

$$M_{lob}^{net} = M_{lob}^{brut} * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(a+b) + F_{m+\sigma^2, \sigma}(a)] + a * [F_{m, \sigma}(a+b) - F_{m, \sigma}(a)] - b * [1 - F_{m, \sigma}(a+b)]$$

$$\Omega_{lob}^{net} = \left(\begin{aligned} & \left((\Omega_{lob}^{brut})^2 + (M_{lob}^{brut})^2 \right) * [1 - F_{m+2\sigma^2, \sigma}(a+b) + F_{m+2\sigma^2, \sigma}(a)] \\ & + a^2 * [F_{m, \sigma}(a+b) - F_{m, \sigma}(a)] \\ & - 2b * M_{lob}^{brut} * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(a+b)] + b^2 * [1 - F_{m, \sigma}(a+b)] - (M_{lob}^{net})^2 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Où

- a et b correspondent respectivement à la priorité et à la portée de la réassurance XS.
- $F_{m, \sigma}$, $F_{m+\sigma^2, \sigma}$ et $F_{m+2\sigma^2, \sigma}$ sont des distributions lognormale avec des paramètres m et σ .

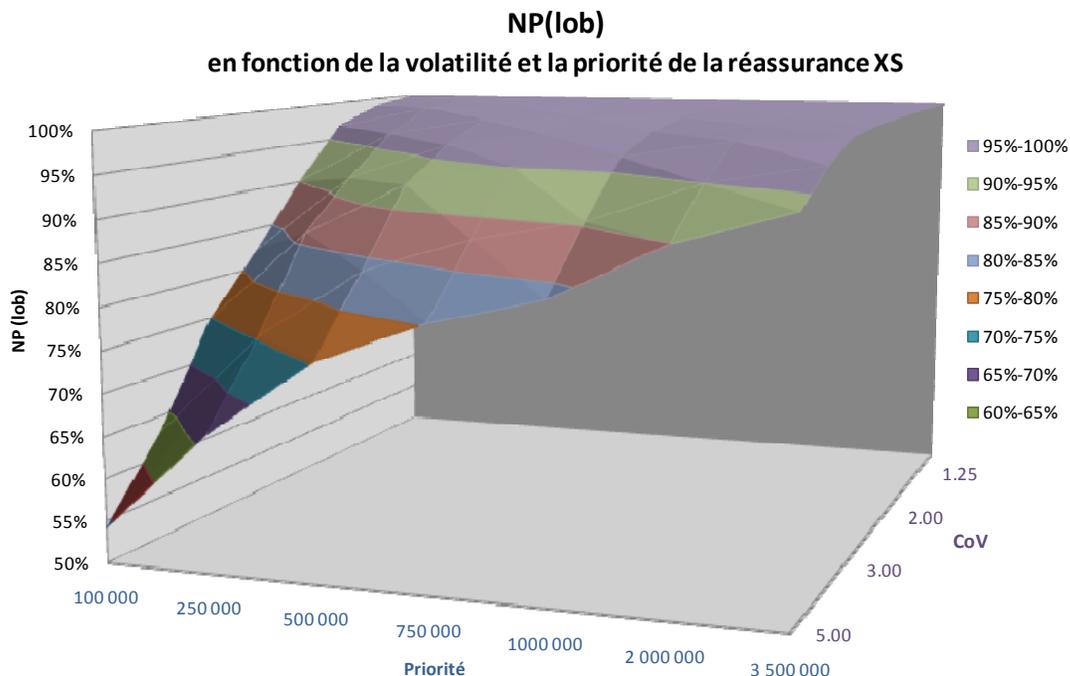
$$- \quad m = \ln M_{lob}^{brut} - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{\Omega_{lob}^{brut}}{M_{lob}^{brut}} \right)^2 \right)}$$

sont les paramètres de la distribution lognormale et sont estimés à partir de la moyenne et l'écart-type de la sinistralité brute.

La cédante peut utiliser le spreadsheet fourni par le CEIOPS pour calculer le facteur d'ajustement pour la réassurance non-proportionnelle, en fournissant 7 variables par branche d'activité :

- La volume de prime future brute de réassurance pour la branche d'activité concernée (le même paramètre que pour calculer le risque de prime) .
- Le nombre d'années d'observation pour estimer les paramètres.
- Le nombre des données utilisées pour estimer les paramètres.
- La moyenne de la sinistralité brute observée à partir des données historiques.
- L'écart-type de la sinistralité brute observée à partir des données historiques.
- La priorité du programme de réassurance de la cédante.
- La portée du programme de réassurance de la cédante.

Avec un portefeuille simplifié, en variant le CoV de 100% à 500% (la moyenne m étant fixée à 5 000) et la priorité du programme de réassurance XS de 100k€ à 3,5M€, l'ajustement de la réassurance NP se trouve dans la graphe suivante :



- L'impact de la réassurance NP est croissant avec la volatilité du portefeuille : plus la CoV est élevé (i.e. le portefeuille est volatil), plus l'impact de la réassurance NP est importante (avec un facteur d'ajustement plus petit).
Par contre, pour un portefeuille peu volatil (par exemple : $CoV = 1$), l'ajustement NP(lob) est égal à 100% : la réassurance NP n'a pas d'impact sur la réduction du SCR de prime.
- L'impact de la réassurance NP est décroissant avec la priorité du traité : le facteur d'ajustement augmente avec une hausse de la priorité, par conséquent, la réduction du SCR grâce à la réassurance diminue.

Le facteur d'ajustement NP(lob) est très sensible à la volatilité du portefeuille et à la priorité de la réassurance car elles déterminent directement le risque transféré aux réassureurs. Quand le portefeuille est très volatil, la cédante a une probabilité plus grande d'avoir des sinistres importants, qui font l'objet d'un transfert à la réassurance. Il en est de même avec la priorité : car plus la franchise est basse, et plus les sinistres sont transférés aux réassureurs. Par conséquent, la réduction du SCR de prime grâce à la réassurance non-proportionnelle est importante.

Par rapport au QIS 4, l'introduction du facteur d'ajustement dans le QIS 5 permet de prendre en compte les traités en excédent de sinistres dans la formule standard. L'impact de ce facteur varie en fonction de la spécificité de la cédante : pour un portefeuille très volatil ou une priorité relativement basse, la réduction du SCR peut être significative.

L'autre avantage de ce facteur est que son calcul est facile à mettre en œuvre : il ne nécessite qu'une quantité limitée de données supplémentaires: mis à part les détails du programme de réassurance, la cédante doit estimer la perte moyenne et l'écart-type des sinistres de son portefeuille.

La demande concernant les données historiques est moins exigeante que celle portant sur l'estimation de l'USP (Undertaking Specific Parameter). Si la cédante possède plus d'1 an historique, elle peut calculer l'ajustement de la réassurance non-proportionnelle, contrairement à l'USP qui réclame 5 années d'historique.

En revanche, cette formule est uniquement appliquée au traité « excédent de sinistre », l'effet des autres réassurances non-proportionnelles (stop loss, aggregate annuelle) ne peut pas être reflété dans la formule standard. Ce facteur d'ajustement ne peut d'être appliquée qu'aux assurance directes, pour les compagnies ayant une activité en acceptation (NP reins), la rétrocession ne peut pas être reflétée dans la formule standard. Le modèle interne reste la seule solution pour prendre en compte l'impact des couvertures dans le calcul du SCR.

De plus, dans la formule, tous les sinistres sont supposés suivre une loi lognormale. Il est difficile de tenir compte de pertes extrêmes avec cette distribution. Comparé à un modèle interne, qui permet de mieux mesurer la queue réelle de la sinistralité, la réduction du SCR grâce à la réassurance peut être sous-estimé.

- **Comparaison QIS 4 & QIS 5**

En utilisant la formule standard du QIS4 et du QIS 5, nous pouvons déduire les résultats (brut de réassurance) suivants :

Branche	Prime acquise attendue	Capital Economique (QIS4)	$\rho(\sigma)$	Capital Economique (QIS 5)	$\rho(\sigma)$	Ecart	Ecart en %
RC Automobile	348 714	89 168	25,6%	100 112	28,7%	10 944	12,3%
Domage Automobile	330 325	84 466	25,6%	64 330	19,5%	-20 136	-23,8%
DAB	630 890	181 122	28,7%	181 122	28,7%	0	0,0%
RC	168 599	62 079	36,8%	76 398	45,3%	14 320	23,1%
Total	1 478 529	289 120	19,6%	291 769	19,7%	2 648	0,9%

En k€

Tableau 12 comparaison QIS 4 & QIS 5 sur le risque de prime

Pour notre portefeuille, l'impact du QIS 5 n'est pas significatif. Nous soulignons qu'il s'agit du SCR de prime en supposant qu'aucune réassurance n'existe. Avec des traités de réassurance non proportionnelle, il est possible que nous obtenons un SCR plus petit dans le QIS 5.

II.2.2. Risque de catastrophe

Le QIS 4 définit le risque de catastrophe comme suit : « *les risques catastrophe résultent d'événements extrêmes ou irréguliers insuffisamment couverts par les chargements au titre des risques de tarification et de provisionnement* ».

Trois types de calcul sont autorisés :

- L'assureur peut évaluer ses risques selon des scénarios régionaux. Nous n'allons pas détailler cette approche ici.
- La méthode par facteur

$$NL_{CAT} = \sqrt{\left(\sum_{t \neq 3,4,10,12} (c_t \times P_t)^2 + (c_3 \times P_3 + c_{12} \times P_{12})^2 + (c_4 \times P_4 + c_{10} \times P_{10})^2 \right)}$$

P_i sont les volumes d'affaires estimés pour la période suivante, et les c_i sont des facteurs fixes.

Comme ce que nous avons expliqué précédemment, nous ne nous intéressons qu'au risque de tempête. Selon notre hypothèse, ce risque n'affecte que la branche DAB. Le facteur correspondant est 75%.

Cette estimation est très conservatrice, puisqu'elle sanctionne beaucoup le besoin en capital. Dans la pratique, cette méthode est rarement utilisée. Deux autres options sont proposées :

- Le modèle interne : le calcul de risque de catastrophe est présenté dans le paragraphe précédent (I.5)

Nous comparons, à titre indicatif, les résultats obtenus par la méthode de facteur et les scénarios personnalisés :

	Capital Economique (méthode par facteur)	Capital Economique (scénarios personnalisés)
Risque catastrophe	476 309	275 352

Tableau 13 risque de catastrophe : méthode par facteur & modèle interne

Comme ce que nous avons mentionné précédemment, la méthode par facteur est rarement utilisée dans la pratique (sauf qu'aucune donnée n'est disponible), dans les parties suivantes, nous n'avons retenus que le résultat du risque de catastrophe selon les scénarios personnalisés.

Dans la récente d'étude quantitative (QIS 5), l'estimation du SCR CAT a beaucoup modifié par rapport à l'étude précédente.

- Le calcul du risque CAT se distingue entre les catastrophes naturelles et les catastrophe « Man Made »
- Pour les catastrophes naturelles, les scénarios personnalisés sont remplacés par des facteurs selon l'exposition géographique du portefeuille de l'assureur (pays et région). Les sous modules sont : la tempête, le tremblement de terre, l'inondation,

la subsidence et le grêle. Le calcul du Sommes Assurés par département devient indispensable pour remplir le spreadsheet du QIS 5.

- Pour les catastrophes « Man Made », les sous modules sont : l'incendie, la RC auto, la RC générale, l'aviation, la marine, le crédit-caution et le terrorisme. Par rapport au SCR CAT NAT, le calibrage des scénarios catastrophes « Man Made » se basent sur des hypothèses moins sophistiquée. Certains résultats obtenus semblent être aberrant.

Etant donnée que le changement radical de la méthodologie de SCR CAT, dans notre mémoire, nous n'avons pas appliqué les règles de QIS 5 sur tout nos périmètres. Nous avons uniquement modélisé le risque Tempête. Les résultats cités ci-dessus ne concerne que ce péril.

II.2.3. Agrégation

Le risque de souscription Non-Vie se base sur l'agrégation des risques de prime/réserve/rachat et le risque CAT.

3 niveaux de corrélation est présentés par CEIOPS :

- Corrélation entre le risque de prime et le risque de réserve est supposée à 50%.
- Corrélation entre les branches d'activité Non-Vie : une matrice de corrélation est fournie par CEIOPS lors de chaque étude quantitative (QIS).
- Corrélation entre le risque de prime/réserve/rachat et le risque CAT est supposée à 25% Il s'agit d'une nouveauté dans le QIS 5, car le QIS 4 suppose une indépendance entre les risque non CAT et le risque CAT.

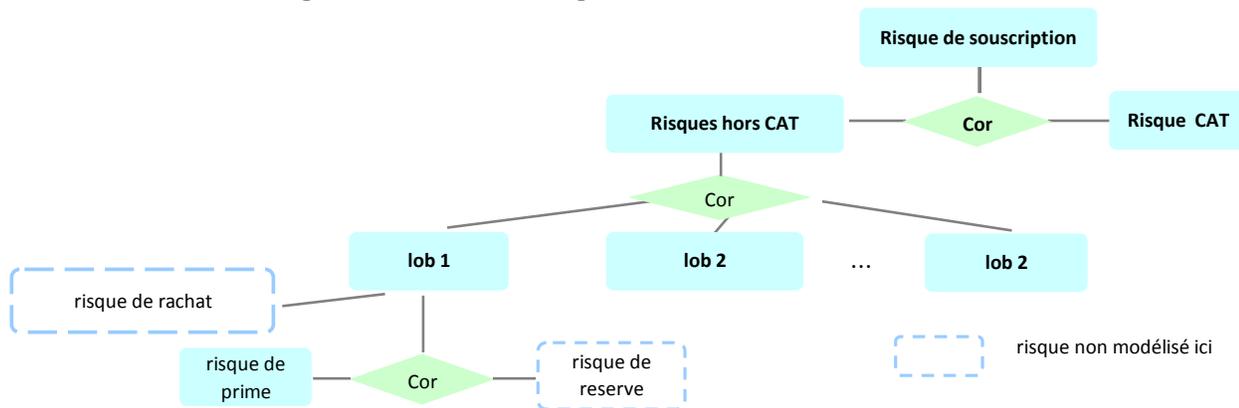


Figure 14 : structure de dépendance dans le QIS 5

- Comparaison QIS 4 & QIS 5

En utilisant les règles du QIS 4 & QIS 5, nous obtenons les résultats suivants :

Risques	QIS 4	QIS 5	Impact QIS 4 ->QIS5
Risque de prime	289 120	291 769	0,9%
Risque de catastrophe	275 352	275 352	0%
Risque de souscription	399 261	448 461	12,3%

En k€

Tableau 14 comparaison QIS 4 & QIS 5 sur le risque de souscription

Nous constatons environ 12% d'augmentation du SCR pour notre portefeuille. Cette hausse est principalement due à l'établissement d'une corrélation positive entre le risque de prime/réserve/rachat et le risque de catastrophe.

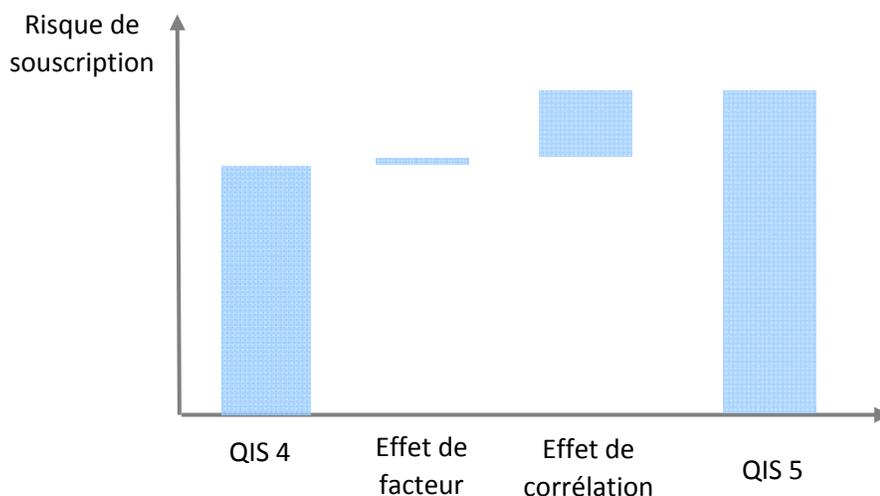


Figure 15 : évolution du SCR souscription du QIS 4 au QIS 5

II.3 Comparaison : formules standard & modèle interne

Dans le paragraphe précédent, nous avons détaillé notre modélisation des sinistres par simulation : les attritionnels, les graves, les catastrophes et l'agrégation.

Le capital économique par notre modèle est déduite par : $EC = VaR(99,5\%) - Moyenne$:

Où $VaR(99,5\%)$ correspond à notre à 0,5% des pires scénarios.

Branche	Primes acquises attendues	QIS 4	QIS 5	Modèle interne
Auto RC	348 714	89 168	100 112	63 281
Auto Dommage	330 325	84 466	64 330	53 630
DAB	630 890	181 122	181 122	139 124
RCG	168 599	62 079	76 398	46 031
Risque de primes		289 120	291 769	203 736
Risque CAT		275 352	275 352	275 352
Risque de souscription		399 261	448 461	376 843

En k€

Tableau 15 comparaisons entre les formules standard et le modèle interne sur le risque de souscription

Nous observons que les résultats obtenus par le modèle interne sont relativement faibles par rapport aux résultats issus des formules standard. Cette diminution peut être expliquée par les raisons suivantes :

- La modélisation des sinistres basée sur le calibrage des paramètres s'adapte mieux à notre portefeuille ; Cela évite une estimation trop prudente proposée par les QIS.
- Par rapport à la segmentation du QIS, la modélisation des risques est faite à un niveau plus fin: nous séparons les activités pour les particuliers et les professionnels pour les branches Auto RC, Auto dommage et dommage aux biens. Les sous branches ne sont pas complètement corrélés, donc un effet de diversification doit être pris en compte dans le calcul du capital économique.
- L'estimation des corrélations entre branches est généralement plus faible que celle proposée par le CEIOPS.

II.4 Coût du capital et transfert des risques

Le risque de souscription est le principal élément générateur de risques pour le capital-risque requis dans le domaine Non-Vie. C'est ce que montrent les résultats de l'étude de Benchmark QIS4, conclue en 2008.

Comme ce que nous avons montré précédemment, l'assureur s'expose à des pertes importantes s'il n'y a aucun transfert des risques. Cela entraîne une instabilité de résultat. Un coût du capital est donc à la charge de l'assureur pour exercer ses activités.

En plus, le capital économique lié au risque de souscription demande d'immobiliser une partie des fonds propres de l'assureur

L'investisseur qui apporte des fonds à une entreprise attend évidemment un retour sur cet investissement. Le coût du capital est le coût que l'entreprise paye pour utiliser les capitaux des actionnaires.

Le coût du capital peut être calculé par le modèle WACC (*Weighted Average Cost of Capital*, donc Coût Moyen Pondéré du Capital). Il consiste à évaluer le rendement attendu par les actionnaires ayant investi des capitaux dans l'entreprise concernée. En d'autres termes, le coût du capital est un type de coût d'opportunité.

Dans notre modèle, nous ne chercherons pas à évaluer le coût du capital de l'entreprise type. Nous utilisons le CoC fourni par le CEIOPS qui est égal à 6%.

La réassurance est considérée comme un outil traditionnel pour gérer les risques d'assurance. Nous allons détailler la méthodologie utilisée pour évaluer un programme de réassurance.

Chapitre III. Choix du programme de réassurance

III.1 Introduction à la réassurance

a) principes de réassurance

La réassurance est l'assurance des sociétés d'assurance. Elle est un arrangement au terme duquel une société, «le réassureur», s'engage à indemniser une société d'assurance, «la cédante», contre tout ou partie du risque qu'elle a souscrit aux termes d'une ou plusieurs polices d'assurance. L'assureur se réassure pour transférer les risques qu'il ne peut pas ou ne veut pas conserver dans son portefeuille. La réassurance est un des principaux outils pour gérer les risques d'une compagnie d'assurance.

L'assureur souscrit des contrats de réassurance pour diverses raisons:

- * Transfert des risques : la réassurance permet à la cédante d'obtenir une réduction de son engagement net sur des risques individuels et une protection contre des pertes multiples ou importantes, elle garantit une meilleure solvabilité des assureurs.
- * Capacité de souscription :
 - L'assureur doit disposer en tout temps des capitaux nécessaires pour faire face à ses engagements. La réassurance diminue cette exigence en capital de la cédante, elle lui permet d'obtenir une capacité de souscription supérieure sans augmenter ses fonds propres et donc de souscrire des polices portant sur des risques plus importants et plus nombreux.
 - La réassurance peut réduire la volatilité du résultat de souscription. Elle permet d'atténuer l'effet d'une augmentation de la fréquence et de la gravité des sinistres sur les résultats de la compagnie.
- * Sécurité financière :
 - le réassureur met à la disposition des assureurs des liquidités importantes en cas de sinistralité grave.
- * Bénéfice & Développement :
 - Le prix de la réassurance est souvent plus avantageux que d'autres ressources financières.
 - Le réassureur partage les frais de souscription avec l'assureur.
 - Le réassureur joue aussi un rôle de conseil auprès de ses cédantes : en cas de manque d'expertise dans certaines lignes d'affaires, l'assureur peut choisir la réassurance pour développer ses affaires dans ces domaines.

B. Formes de réassurance

Les deux principales catégories de couverture en réassurance sont les traités et les facultatives.

Les facultatives :

C'est le mode de réassurance le plus ancien. Dans le cadre d'une affaire facultative, la cédante cède des risques spécifiques. Les risques sont négociés au cas par cas. Comme

le suggère le mot « facultative », la cédante peut choisir le risque ou une partie du risque qu'elle veut céder. En contrepartie, le réassureur est libre de l'accepter. La réassurance facultative est souvent achetée par la cédante pour couvrir des risques individuels qui sont exclus de ses traités de réassurance. La prime est accordée individuellement.

Les traités :

Un traité de réassurance couvre un ensemble de risques sur un portefeuille. La réassurance se matérialise par un contrat de réassurance (donc le traité) qui définit une catégorie de risques ainsi que des conditions ou des exclusions de souscription. Il s'agit de la réassurance dite « obligatoire », la cédante a pour obligation de céder une partie ou la totalité des risques répondant à la condition contractuelle. Le réassureur ne peut aucunement refuser un risque couvert dans le cadre du traité. La prime couvre tous les risques du traité.

C. Types de réassurance

Quelle que soit la catégorie de couverture, la réassurance est souscrite sous forme proportionnelle ou non proportionnelle.

Traité proportionnel :

La proportion est un élément essentiel de ce type de traité. Le réassureur partage un pourcentage équivalent des primes et des sinistres du portefeuille de la cédante. Le réassureur participe aux risques dans les mêmes conditions que l'assureur. Le réassureur partagera les bénéfices de la cédante, mais aussi ses pertes éventuelles. Il existe deux formes classiques de traités de réassurance proportionnelle : le quote-part et l'excédent de plein.

- Quote-part (quota share) :

Dans ce type de traité, le pourcentage est fixe. Il s'applique à tout le portefeuille. La couverture, les primes et les sinistres sont réduits dans les mêmes proportions. En général, le traité de réassurance fixe un calendrier comptable stipulant les dates auxquelles les comptes seront effectués. Le résultat de la cédante est calculé par :

$$\text{Résultat technique} = \text{Primes} - \text{Sinistres} - \text{Commission}$$

Si le résultat est positif, la cédante versera à son réassureur x% de ce résultat, sinon le réassureur devra lui verser x% de la perte.

- Avantages :
 - Le traité par quote-part est très simple à construire ;
 - Il améliore la marge de solvabilité : avec un quote-part à 50%, la cédante peut souscrire 2 fois plus d'affaires tout en maintenant sa marge de solvabilité ;
 - Il permet aussi à la cédante de développer des affaires nouvelles sur le marché où elle a une connaissance limitée.
- Inconvénients :

- Même si le traité par quote-part réduit la volatilité du résultat par la diminution du volume, il ne change pas vraiment le profil de risque, il n'y a aucun lissage de résultat.
- Il ne procure pas de solutions adaptées face aux différents besoins de réassurance d'un portefeuille hétérogène. La cédante est obligée de partager des risques peu importants avec ses réassureurs, alors qu'elle pourrait les assumer seule.

- Excédent de plein (surplus share) :

Ce type de traité permet de différencier les risques d'un portefeuille hétérogène. Il propose des pourcentages variables pour la rétention et pour la cession en réassurance, en fonction du type de risque. En fait, il y a un plein qui correspond à la rétention de l'assureur fixée à l'avance et le réassureur intervient uniquement sur les polices dépassant ce plein. Etant donné que la taille des risques est différente, la cession est déterminée par un pourcentage variable : le taux de cession x_i .

$$x_i = \text{Min} \left\{ \text{Max} \left(\frac{K_i - R}{K_i}, 0 \right), \frac{C}{K_i} \right\}$$

K_i : capital assuré du risque i ;

C : capacité de l'Excédent de Plein ;

R : plein de rétention de la Cédante ;

Lorsque le pourcentage de cession pour un risque est déterminé, la réassurance «excédent de plein » fonctionne comme la réassurance en quote-part. Mais la prestation du réassureur est limitée par la capacité (montant maximal cédé au réassureur). L'excédent de plein permet de réduire la volatilité par la modification du profil de risque, par contre la gestion est lourde. Ce type de traité est approprié pour les nouveaux produits pour lesquels la cédante connaît mieux les risques (que les risques cédés en quote-part) et lorsqu'elle souhaite maximiser sa rétention.

Traité non proportionnel :

Comme son nom l'indique, il n'y a pas de relation de proportionnalité entre la prime cédée et la participation du réassureur dans les sinistres. Ce type de réassurance a pour but de protéger la cédante de la survenance d'évènements graves, voire catastrophiques.

Si une cédante veut équilibrer sa souscription portant sur des polices pour lesquelles il lui est difficile d'estimer ses limites d'engagement, elle utilise les formes non proportionnelles. Ces traités sont plus sophistiqués que les traités proportionnels, mais l'application de ce type de traité exige une bonne connaissance des risques du portefeuille. Si la loi de distribution des sinistres est mal connue, il est impossible de tarifier un traité non proportionnel.

Deux grands types de contrats existent en réassurance non proportionnelle : l'excédent de sinistre (Excess of loss) et l'excédent de perte annuelle (stop loss).

- Excédent de sinistre :

En souscrivant un traité de réassurance en excédent de sinistre, un assureur cherche à se couvrir contre des sinistres avec des montants particulièrement élevés. Ce traité de réassurance repose sur le montant du sinistre et la portée limitée de la couverture. Il fonctionne comme un contrat d'assurance avec franchise déductible. Les principaux objets de ce traité sont :

- La priorité : un seuil au-dessous duquel l'assureur assume la perte totale, il n'y a pas d'intervention du réassureur.

- La portée : l'engagement total d'un réassureur dans un événement.

- La tranche : un montant limite de la couverture, à hauteur duquel le réassureur paie les parts de sinistres qui dépassent la priorité.

Le réassureur ne participe qu'aux sinistres dont le montant dépasse un seuil donné (la priorité). Selon la façon dont est calculé le montant des sinistres, ce type de traité contient trois sous-catégories :

1) WXL/R = Excédent de sinistre par risque (working excess of loss per risk) :

Dans ce cadre, le réassureur examine les sinistres par risque. Si un événement concerne plusieurs risques, la couverture sera appliquée risque par risque. Ce type de traité est approprié pour les risques ou les produits matures, dont la cédante peut mesurer la volatilité.

2) WXL/E = Excédent de sinistre par événement (working excess of loss per event) :

Ce type de traité garantit le règlement des sinistres quel que soit le nombre de risques touchés par cet événement. Les pertes découlant d'un même événement sont regroupées et le réassureur rembourse le montant de la perte globale qui excède le montant pré-établi.

3) CAT/XL = Excédent de sinistre par catastrophe (catastrophe excess of loss): la priorité et la portée sont définies de façon à se protéger d'un cumul des sinistres.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons surtout au traité « excédent de sinistres » par risque (XS), nous le présentons dans la partie suivante.

Traité « excédent de sinistres » par risque (XS)

Les formes de réassurance proportionnelle ne permettent pas à l'assureur de limiter son engagement sur un risque, ils coûtent souvent très chers à l'assureur. Par contre, l'excédent de sinistres permet à l'assureur de transférer sa sinistralité grave à un prix modéré. C'est pour cette raison que l'XS est une des formes principales de réassurance, surtout dans certaines branches où les risques maximaux sont difficilement estimés, par exemple la Responsabilité Civile ou le risque tempête.

La notation la plus couramment utilisée est « Capacité » XS « Priorité ». Le traité « excédent de sinistres » est défini par les paramètres suivants : la priorité, la tranche et la portée.

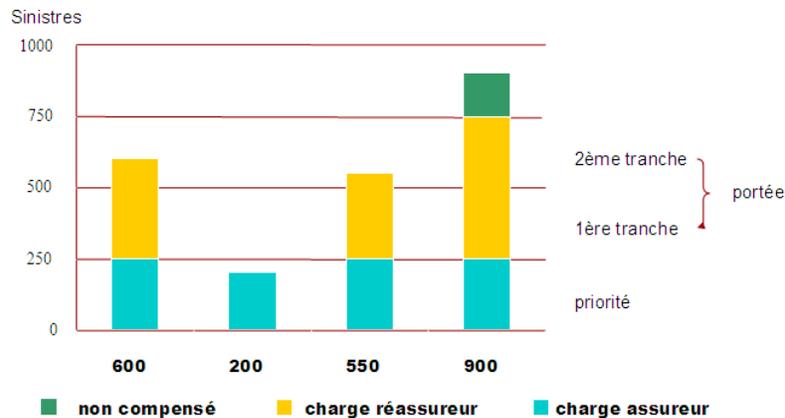


Figure 16 : traité excédent de sinistre

Si la sinistralité dépasse le niveau indiqué par la priorité, le réassureur prend à sa charge la partie qui dépasse ce niveau. Par contre le montant total assuré par le réassureur ne peut pas être supérieur à la portée.

La charge totale du réassureur pour un sinistre est $S = \min(\text{portée}, X - \text{priorité})$ où X est la sinistralité réelle de l'assureur.

La portée peut être décomposée en plusieurs tranches, à chaque tranche, le prix de la réassurance est différent. La somme des prix de réassurance sur chaque tranche constitue le prix total de la réassurance, c'est la prime cédée aux réassureurs.

La clause de reconstitution : la capacité de réassurance est limitée à la fois au montant maximum remboursé et au nombre de sinistres : après la survenance d'un sinistre, la protection de la réassurance sur ce risque est épuisée. Pour se couvrir contre de nouveaux sinistres éventuels, l'assureur doit verser une prime de reconstitution pour continuer de bénéficier de la garantie qui a déjà joué à son profit.

Evaluation de la pertinence d'un programme de réassurance

Pour mieux transférer ses risques, l'assureur préfère avoir un traité avec une priorité basse et une portée élevée, mais compte tenu des contraintes opérationnelles, en particulier du prix de la réassurance, certains arbitrages doivent être faits entre la priorité et la portée.

Priorité : plus la priorité est basse, plus la réassurance est chère. Par contre, pour acheter une réassurance avec une priorité élevée, certaines conditions sont nécessaires:

- La cédante doit disposer de fonds propres (capital + réserves) importants
- Les risques dans le portefeuille sont homogènes.
- Les risques sont en nombre important
- La sinistralité est prévisible.

L'inconvénient d'une priorité élevée est que les sinistres de fréquence élevée sont entièrement supportés par l'assureur.

Portée : pour transférer le risque maximum possible, l'assureur veut avoir une portée élevée. Par contre, le prix de la réassurance augmente avec le niveau de la portée. Certains portefeuilles qui remplissent les conditions suivantes ont une préférence vers une portée élevée :

- Les risques du portefeuille sont plutôt hétérogènes
- Il s'agit d'une sinistralité imprévisible
- Les réassureurs qui offrent cette couverture doivent avoir de solides états financiers pour être solvables.

Les inconvénients d'une portée élevée sont les suivants:

- Une portée élevée a besoin d'une capacité financière importante, un seul réassureur a souvent du mal à assumer seul cet engagement, donc l'assureur est obligé de choisir plusieurs réassureurs, c'est-à-dire la co-réassurance. Cette pratique peut engendrer une hausse de prix à cause des frais de souscription ou d'administration.
- A cause de la capacité financière limitée, un traité de réassurance à portée élevée est souvent accompagné d'une diminution du nombre de reconstitutions. S'il y a une hausse de la fréquence de ce type de sinistres, l'assureur aura des difficultés pour couvrir tous ses sinistres.
- Le prix de réassurance peut être très élevé.
- Avec une couverture haute, l'assureur a plus de chance de ne pas totalement utiliser sa couverture.

- Stop-loss : appelé aussi excédent de sinistre annuel. Cette couverture est souvent fonction du loss ratio de la cédante : elle limite les charges annuelles de la cédante à un ratio pré-établi, l'excédent est pris en charge par le réassureur. Elle procure à la cédante la garantie la plus large sur l'ensemble de ses affaires. Ce type de réassurance offre une couverture idéale pour les portefeuilles où le nombre de sinistres est une problématique pour l'assureur. Par contre, ce type de traité est spécifique et n'est utilisé que dans certaines branches.

Nous avons présenté brièvement les principaux produits de réassurance traditionnelle mais d'autres types de protection sont possibles et envisageables. Cependant, dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons surtout aux traités classiques.

III.2 Choix de la structure de réassurance - méthodologie de l'évaluation

III.2.1 Hypothèses

- Il n'y a pas d'étude sur le risque de réserve : notre modèle permet de calculer le capital économique concernant le risque de prime et le risque de catastrophe. Par contre, le risque de réserve n'est pas pris en compte. Car l'objectif de cette méthodologie est d'évaluer un programme de réassurance pour l'année suivante. Les provisions actuelles sont liées aux sinistres des exercices de survenances antérieures, donc elles devraient être analysées dans les années d'origine de la souscription. Pour évaluer le futur programme de réassurance, on

considère le cas d'une start-up : les sinistres qui nous intéressent sont ceux qui peuvent arriver pendant la période de couverture de ce programme de réassurance.

- En réassurance non proportionnelle, la prime de réassurance est estimée à l'aide des méthodes actuarielles. Lorsque le modèle développé est utilisé pour comparer plusieurs offres provenant des réassureurs du marché, les primes fixes utilisés sont celles fournies par les réassureurs. Etant donné que nous utilisons des données fictives dans notre évaluation, il n'y a pas d'information sur les primes de réassurance à notre disposition. Nous allons utiliser une hypothèse simplificatrice pour estimer la prime de réassurance.
- Pour simplifier les calculs, nous ne traitons pas ici des frais et des commissions liés aux traités de réassurance.
- Les QIS4 et QIS 5 traitent du risque de contrepartie sur les provisions existantes et les sinistres futurs. Par contre le risque de contrepartie des réassureurs estimé dans ce mémoire ne concerne que les capitaux sous risque liés aux sinistres futurs.

III.2.2 Processus d'évaluation

L'analyse du programme de réassurance requiert une base de données fiable. La qualité des données de la sinistralité brute pour chaque branche est cruciale dans toute analyse. Une fois ces données disponibles, à l'aide de simulations, le programme de réassurance peut être testé au regard de son impact sur le résultat et sur l'exigence en capital économique. Cette approche permet de mesurer l'efficacité d'un programme de réassurance, en prenant en compte la probabilité de défaut des réassureurs.

- Nous commençons par la simulation de la sinistralité. Cette étape est détaillée dans la section précédente : nous avons simulé séparément les sinistres attritionnels/graves/catastrophiques par branche, et puis nous les avons agrégés à l'aide d'une copule de Student.
- Dans chaque scénario, les traités de réassurance sont appliqués branche par branche. On calcule les sinistres et les primes cédées, on déduit les résultats techniques de réassurance.
- Du point de vue financier, l'achat de réassurance diminue le rendement financier sur les primes. On doit donc calculer un impact de réassurance sur notre revenu financier.
- Le calcul fiscal est également intégré dans notre processus afin d'évaluer l'impact net d'impôt pour la cédante.
- La réassurance permet à l'assureur de réduire son engagement vis-à-vis des assurés, ainsi le capital économique lié au risque de souscription devrait également diminuer. Le coût du capital pour l'assureur est également réduit grâce à la réassurance. Cette diminution doit être prise en compte.
- Par ailleurs, la cédante doit prendre en compte le risque de contrepartie des réassureurs. Il est donc important d'inclure l'impact du défaut des réassureurs sur l'exigence en capital économique dans notre système d'évaluation.

- Finalement, on peut déduire le résultat de la structure de réassurance en combinant l'aspect du résultat technique/financier avec l'aspect du capital économique.

Le graphe suivant présente le processus d'évaluation :

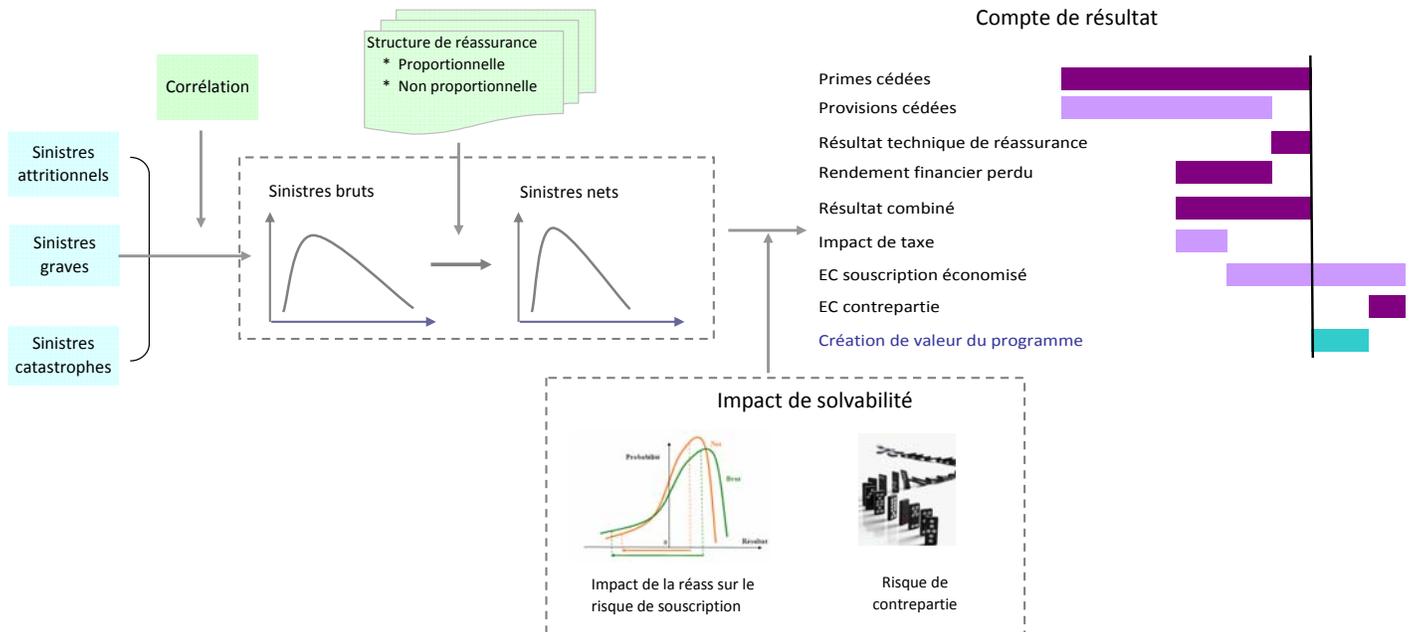


Figure 17 : processus d'évaluation de l'efficacité d'un programme de réassurance

Etape 1 : résultat technique de réassurance

La structure de réassurance est choisie avant la période de couverture. Une fois que nous connaissons de sinistralités, nous cédonns certaines charges de sinistres au réassureur, et nous calculons le résultat technique de cette structure en prenant compte les primes cédées et les sinistres cédés. Dans le pratique, il y a d'autres termes accessoires qui doivent être inclus dans le calcul : la commission reçue, le frais de réassurance, etc. On suppose que ces frais et commissions sont nuls dans notre modèle pour simplifier le calcul.

Le résultat technique de réassurance simplifié s'écrit par :

$$\text{Résultat tech.} = \text{Sinistres cédés} - \text{primes de réassurance}$$

- 1) Les sinistres cédés sont le résultat de nos simulations,
- 2) Pour simplifier le calcul, nous prenons une hypothèse de zéro frais lié aux traités de réassurance. Mais dans la pratique, plusieurs frais impactent le résultat :
 - Commissions: elles représentent la participation du réassureur dans les frais engagés par l'assureur (frais de gestion et d'acquisition du risque) sur les affaires que celui-ci cède en réassurance. La commission s'applique aux traités proportionnels ;

- Participations aux bénéfices: lorsque le résultat de la réassurance est bon, le réassureur peut accepter de verser une participation aux bénéfices (PB) au prorata de sa marge positive ;
- Frais de courtage : frais payés aux courtiers par l'assureur. Les frais de courtage varient selon le type de traité. Le traité non proportionnel coûte souvent plus cher que le traité proportionnel ;
- Frais d'administration et autres frais ;

Une hypothèse de zéro frais facilite nos calculs, et nous jugeons que l'impact de ces frais est limité.

3) Les primes de réassurance :

En réassurance proportionnelle, la prime de réassurance est définie au prorata des primes de la cédante, selon le taux de cession.

En réassurance non proportionnelle, la prime se décompose en deux parties : la prime fixe et la prime variable.

- Prime fixe : elle est définie lors de la conclusion du contrat et son montant est indépendant de la sinistralité a posteriori. Dans la pratique, la prime fixe de réassurance peut être soit un montant forfaitaire, soit exprimée en pourcentage fixe de l'assiette des primes ;
- Prime variable : elle vient généralement de l'application des clauses de réassurance (reconstitution de garantie, prime à l'échelle, ...). Elle dépend de la sinistralité observée sur la période couverte ;

Etape 2 : impacts financiers

La rentabilité définitive d'une compagnie d'assurance ne dépend pas que du résultat technique de souscription. La contribution aux bénéfices provenant des activités de l'assurance est assez faible, autour de 5% en France entre 1994 et 2004 (source : SwissRe). Cette contribution n'est pas suffisante pour couvrir le coût du capital et créer la valeur actionnariale.

L'investissement financier est un revenu important pour l'assureur. Par l'achat de réassurance, l'assureur perd ses rendements financiers sur les primes cédées.

Le calcul des impacts financiers de la réassurance est inclus dans notre modèle. La perte financière liée à la cession des primes et le gain financier sur les sinistres cédés seront calculés pour déduire l'impact financier net de réassurance.

Les paiements des primes cédées et des prestations peuvent varier selon les compagnies. Pour faciliter nos calculs, nous prenons des hypothèses suivantes:

- Les primes cédées sont payées en début de période.

$\text{Coût financier} = \text{Prime cédée} * \text{taux de rendement financier}$

Pour estimer le résultat d'un programme de réassurance, on doit prendre compte l'effet combiné du résultat technique pur et du résultat financier.

La réassurance permet aux assureurs de transférer les risques aux réassureurs, elle diminue le capital économique, et ainsi le coût du capital. Lors de l'évaluation d'un programme de réassurance, cette diminution du coût du capital doit être prise en compte.

Etape 3 : impacts du capital économique

Après avoir calculé le capital économique associé à notre portefeuille, nous nous intéressons à l'impact de la structure de réassurance sur la rentabilité globale de la compagnie et sur l'utilisation de son capital. Cette approche permet de mesurer les avantages relatifs de plusieurs stratégies de réassurance.

La réglementation actuelle, Solvabilité I mesure mal l'impact de certains outils de « risk management » (par exemple la réassurance) sur la solvabilité de la compagnie.

Sous Solvency I, l'impact de la réassurance sur la marge exigée est relativement simple :

- En non vie, les traités proportionnels sont pris en compte jusqu'à 50% du taux de cession.
- Pas d'impact significatif pour les traités non proportionnels.

La Solvabilité II essaie de mieux refléter la réalité économique. Dans le QIS 4, la formule standard admet entièrement l'effet de réassurance proportionnelle, mais elle sous estime l'effet de la réassurance non proportionnelle, surtout pour le risque de prime. Car Le capital économique calculé dépend du volume d'exposition et la volatilité fixée de la branche d'activité. Cela favorise donc les traités proportionnels qui destinent à réduire le volume de prime.

Le CEIOPS a pris conscience de cet inconvénient. Dans le QIS 5, il a modifié le calcul de l'écart type de chaque branche d'activité en introduisant un « net-gross » ratio, pour mieux estimer l'impact de la réassurance non proportionnelle sur le risque de souscription. Nous avons présenté la nouvelle approche dans la section précédente (II.3.1)

Dans la partie suivante, nous examinons l'effet de réassurance sur le besoin en capital dans le cadre de QIS 4, QIS 5 et dans notre modèle interne. Nous déduisons ensuite le coût du capital économisé associé et l'intègre dans notre système d'évaluation.

III.3 Applications et comparaisons

III.3.1 Programmes de réassurance

L'entreprise type possède suffisamment des fonds propres pour engager ses activités souscrites. La réassurance est utilisée plutôt pour stabiliser le résultat opérationnel et diminuer l'exigence en SCR dans le cadre de solvabilité II, pas pour élargir la capacité de souscription. Dans ce cas, le traité de réassurance non proportionnel semble plus adapté au besoin d'entreprise. Nous examinons ici, selon les caractéristiques des branches, trois types de programme de réassurance :

1. Programme 1 – Non proportionnelle (NP) avec des priorités élevées : couvertures non proportionnelles pures avec priorités relativement élevées dans toutes les branches, qui correspondent à un quantile à 99.5% environ selon notre estimation paramétrique.

Non Proportionnelle (priorités élevées)			
RC Auto & RC générale	WXL illimité. xs 3m	DAB	WXL 10m xs 3m
Domage Auto	WXL 10m xs 1m	Tempête	CXL 150m xs 15m

Figure 18 : traités non proportionnels avec des priorités élevées

- CXL: catastrophe excess of loss - excédent de sinistre par catastrophe
- WXL: working excess of loss (per risk) - excédent de sinistre par risque

2. Programme 2 – Non Proportionnelle (NP) avec des priorités relativement faibles : comme le programme précédent, mais ce programme contient des priorités très peu élevées dans toutes les branches, correspondant plutôt à des quantiles autour de 75%. Par contre, le traité CXL du risque tempête reste inchangé.

Non Proportionnelle (priorités basses)			
RC Auto & RC	WXL illimité. xs 2m	DAB	WXL 10m xs 2m
Domage Auto	WXL 10m xs 0,5m	Tempête	CXL 150m xs 15m

Figure 19 : traités non proportionnels avec des priorités basses

3. Programme 3 – quote-part 20% : nous supposons un simple programme de quote-part à 20% pour comparer la création de valeur des différentes structures de réassurance.

Quote Part			
RC Auto & RC générale	QP cession 20%	Domage Auto	QP cession 20%
DAB	QP cession 20%	Tempête	QP cession 20%

Figure 20 : traités proportionnels

Hypothèses retenues

Du côté de l'assureur, la prime de réassurance pour les traités non proportionnels est un facteur plutôt exogène. Elle est déterminée non seulement par les risques sous jacent au portefeuille, mais aussi par une négociation entre l'assureur et le réassureur, et dépend aussi du cycle d'assurance. Ici, nous déterminons la prime de réassurance comme la prime pure augmentée d'un chargement supplémentaire en fonction de la volatilité des branches.

Il s'agit d'une hypothèse très simplificatrice, nous essayons d'éviter des calculs trop complexes, car la tarification des traités de réassurance n'est pas l'objectif de ce mémoire. Et dans la pratique, les primes fixes retenus dans le modèle correspondent aux primes fournies par les réassureurs pour ces traités.

III.3.2 Résultats technique et financier des programmes

D'après les étapes énoncées précédemment, nous pouvons d'abord déduire les résultats technique et financier de ces trois programmes de réassurance :

Compte de résultat	NP (priorités élevées)	NP (priorités basses)	Quote Part 20%
Primes	19 557	26 350	295 706
Charges de sinistres	15 210	20 871	210 514
Frais	0	0	0
Commissions	0	0	0
Résultat technique	-4 347	-5 478	-85 191
Résultat financier	-786	-1 059	-11 887
Résultat combiné (tech. & fin.)	-5 133	-6 538	-97 079
Impact des taxes	1 711	2 180	32 366
Résultat net d'impôt	-3 422	-4 358	-64 713

en k €

Tableau 16 compte de résultat technique et financier

Selon les résultats combinés (technique et financier), le programme « réassurance non proportionnelles avec des priorités élevées » est le plus avantageux, car il permet à l'assureur de céder moins de primes de réassurance (les loss ratios des branches de notre portefeuilles sont inférieurs à 100%). Dans la prochaine étape, nous étudions l'impact de ces programmes sur le capital économique.

III.3.3 Impact de la réassurance sur le SCR souscription

a) par la formule standard QIS 4

Branche	Sans réassurance	$\rho(\sigma)$	NP (priorités élevées)	$\rho(\sigma)$	NP (priorités basses)	$\rho(\sigma)$	Quote Part 20%	$\rho(\sigma)$
RC Automobile Dommage	89,168	25.6%	87,833	25.6%	86,826	25.6%	71,335	25.6%
Automobile	84,466	25.6%	84,162	25.6%	83,874	25.6%	67,573	25.6%
DAB	181,122	28.7%	180,306	28.7%	179,870	28.7%	144,897	28.7%
RC	62,079	36.8%	58,286	36.8%	58,445	36.8%	49,663	36.8%
Total	289,120	19.6%	285,098	19.5%	283,973	19.5%	231,296	19.6%

en k€

Tableau 17 SCR de prime selon le QIS 4

Nous observons que quelle que soit la forme de la réassurance, le chargement en capital $\rho(\sigma)$ reste similaire dans chaque cas, car cette valeur est déterminée par l'écart type σ , fixé par le CEIOPS en fonction de la branche d'activité. Seule le traité Quote Part est effectif pour réduire la besoin en capital, car elle diminue directement la volume de prime, donc l'exposition au risque.

b) par la formule standard QIS 5

Branche	Sans réassurance	$\rho(\sigma)$	NP (priorités élevées)	$\rho(\sigma)$	NP (priorités basses)	$\rho(\sigma)$	Quote Part 20%	$\rho(\sigma)$
RC Automobile Dommage	100 112	28,7%	93 411	26,8%	90 036	25,8%	80 090	28,7%
Automobile	64 330	19,5%	60 134	18,2%	58 015	17,6%	51 464	19,5%
DAB	181 122	28,7%	168 999	26,8%	162 892	25,8%	144 897	28,7%
RC	76 398	45,3%	71 083	42,2%	68 414	40,6%	61 119	45,3%
Total	291 769	19,7%	272 721	18,4%	263 104	17,8%	233 415	19,7%

en k€

Tableau 18 SCR de prime selon le QIS 5

Par rapport au QIS 4, nous observons une nette amélioration sur l'impact de réassurance non proportionnelle. Les traités de réassurances non proportionnelles diminuent effectivement les $\rho(\sigma)$ (ratio du capital économique sur les primes), car les sinistres excédents sont transférés aux réassureurs. Le traité « Quote-part » ne change pas réellement le profil de risque, les mesures de risque $\rho(\sigma)$ restent inchangées.

Par contre, cette méthode est inefficace s'il y a un changement significatif du programme de réassurance pour l'année suivante. Et elle ne peut pas prendre en compte les traités non proportionnelle multi – branches (aggregate loss/limit).

c) par un modèle interne

A partir des scénarios des sinistres simulés dans la section 1, nous appliquons les programmes de réassurance à chaque scénario. Cela nous permet de tracer les distributions du résultat technique avant et après réassurance.

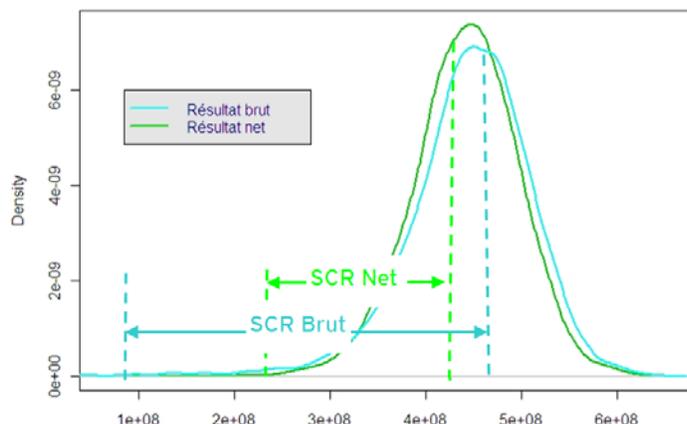


Figure 21 : distribution du résultat brut et net

Nous appliquons, dans notre modèle, les traités de réassurance par scénario. Nous déduisons les SCR de souscription par branches:

Branch	Sans réassurance	NP (priorités élevées)	NP (priorités basses)	Quote Part 20%
RC	63 281	55 963	48 971	50 625
Dommage	53 630	46 479	41 834	42 904
DAB	139 124	121 197	109 453	111 300
RC	46 031	42 146	35 967	36 825
Total	203 736	178 551	167 264	162 989

en k€

Tableau 19 SCR de prime par le modèle interne

Etant donné que les traités de réassurance sont appliqués selon les scénarios des sinistres, nous considérons que c'est l'approche la plus adaptée à notre portefeuille. Nous retenons ces résultats pour notre analyse suivante.

d) l'impact de la réassurance sur le risque de catastrophe

Dans la section précédente (II.3.1.b), nous décidons de ne pas utiliser le résultat de formule standard pour le risque de catastrophe. Donc nous appliquons nos traités de réassurance directement sur les scénarios catastrophes, et nous obtenons le résultat suivant :

	Sans réassurance	NP (priorités élevées)	NP (priorités basses)	Quote Part 20%
Risque tempête	275 352	92 352	92 352	220 281

en k€

Tableau 20 SCR de catastrophe par le modèle interne

Comme indiqué dans le tableau, l'impact de réassurances non proportionnelles est très efficace pour le risque tempête, contrairement à la réassurance Quote part, qui ne réduit automatiquement que 20% des sinistres.

e) impact de la réassurance sur le BSCR

Les besoins en capitaux Solvabilité II ne sont pas seulement la conséquence du risque de souscription. Le capital immobilisé par un assureur est une combinaison des plusieurs risques. L'effet de diversification doit être pris en compte dans notre calcul. Donc nous nous intéressons ici non seulement à l'impact de la réassurance sur le risque de souscription, mais aussi à son impact sur le capital économique agrégé (ici, nous ne traitons que du BSCR : Basic Solvency Capital Requirement, qui n'inclut pas le risque opérationnel).

Le BSCR est le capital de solvabilité requis avant tout ajustement ; c'est l'agrégat des chargements en capital au titre de cinq grandes catégories de risque:

- SCR_{mkt} : le capital économique pour le risque de marché ;
- SCR_{def} : le capital économique pour le risque de contrepartie ;
- SCR_{life} : le capital économique pour le risque de souscription vie ;
- SCR_{health} : le capital économique pour le risque de souscription santé ;
- SCR_{nl} : le capital économique pour le risque de souscription non vie ;

Le BSCR est une agrégation des cinq risques précédents grâce à la formule :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{r,c} CorrSCR_{r,c} \cdot SCR_r \cdot SCR_c}$$

Avec une matrice de corrélation proposée par le QIS4 :

Corrélation	SCRmkt	SCRdef	SCRlife	SCRhealth	SCRnl
SCRmkt	100%	25%	25%	25%	25%
SCRdef	25%	100%	25%	25%	50%
SCRlife	25%	25%	100%	25%	0%
SCRhealth	25%	25%	25%	100%	0%
SCRnl	25%	50%	0%	0%	100%

Tableau 21 matrice de corrélation du QIS 5

Etant donnée qu'il nous manque les informations sur les autres risques, nous supposons que l'entreprise type ne possède pas d'activités en vie et en santé, donc SCR_{life} et SCR_{health} sont nuls. Nous allons traiter le risque de défaut dans la partie suivante, et nous supposons simplement que l'entreprise doit faire face aussi au risque de marché, avec un SCR de 200 millions d'euros.

Ainsi, nous trouvons les résultats combinés dans le tableau suivant :

	Sans réassurance	NP (priorités élevées)	NP (priorités basses)	Quote Part 20%
Risque de prime	203 736	178 551	167 264	162 989
Risque catastrophe	275 352	92 352	92 352	220 281
Risque de souscription	376 843	222 808	210 309	301 474
Risque de marché (hypothèses)	200 000	200 000	200 000	200 000
BSCR	468 716	334 550	324 439	401 291
Réduction du SCR		134 166	144 277	67 426
CoC sur la réduction		8 050	8 657	4 046

en k€

Tableau 22 impacts de réassurance sur le capital économique

f) coût du capital économisé

Comme nous nous avons montré précédemment, les traités de réassurance permettent à la cédante de réduire la volatilité des résultats de souscription, donc ils diminuent l'exigence en capital économique lié à ce risque : pour souscrire le même volume d'activité, l'assureur a besoin de moins de capital nécessaire pour couvrir ses engagements.

Dans le cadre de Solvency II, le coût du capital est au cœur de la stratégie de l'entreprise et devra en particulier être pris en compte dans l'évaluation du tarif de chaque produit. Pour évaluer l'efficacité d'un programme de réassurance, le coût du capital joue un rôle important, et il doit être inclus dans notre système d'évaluation.

$$\text{Impact de la réassurance} = (EC_{\text{brut}} - EC_{\text{net}}) * CoC$$

Où CoC est le coût du capital (Cost of Capital) fixé à 6%.

III.3.4 Choix du programme de réassurance

En combinant le résultat combiné net et la réduction du CoC, nous pouvons déduire la création de valeur de nos programmes de réassurance dans le tableau suivant :

Compte de résultat	NP (priorités élevées)	NP (priorités basses)	Quote Part 20%
Résultat net d'impôt	-3 422	-4 358	-64 713
Réduction SCR souscription	134 166	144 277	67 426
Réduction du CoC	8 050	8 657	4 046
Résultat final	4 628	4 299	-60 667

en k €

Tableau 23 choix du programme de réassurance

Ici, le programme Non Proportionnel avec des priorités élevées est avantageux par rapport aux deux autres programmes : vu qu'il ne transfère que le risque de pointe, les primes de réassurance associée sont plus faibles que les deux autres, la cédante peut réaliser plus de

rendement financier avec les primes qu'elle conserve. L'économie sur le risque de souscription grâce au programme « risque de pointe » est légèrement plus faible que celle obtenue avec le programme du NP, mais bien plus importante que celle réalisée par le programme proportionnel qui ne modifie pas réellement le profil de risque de la cédante.

En combinant tous les aspects du calcul, nous trouvons que le programme Non Proportionnel avec des priorités élevées crée plus de valeur (1,02 millions d'euros selon notre calcul). Donc nous décidons de le choisir pour toutes nos études suivantes.

Limites du modèle :

a) Ici, la structure de réassurance est très simplifiée :

- Il n'y a pas plusieurs tranches au sein d'une protection pour simplifier la détermination de la prime de réassurance. Mais dans la réalité, il y a plusieurs tranches avec des primes de réassurance et un nombre de reconstitutions différent;
- Par le même souci de simplification, nous supposons que le nombre de reconstitution est illimité et que les primes de reconstitution sont identiques. Cette hypothèse n'est pas très réaliste dans la pratique ;
- En pratique, dans un programme de réassurance, plusieurs types de traités peuvent co-exister : pour le dommage automobile, une cédante peut souscrire à la fois un traité d'excédent de sinistre et un traité de quote-part pour couvrir différents risques. Mais le type de traité est identique dans notre modèle, afin de mieux comparer l'effet de la réassurance sur le résultat/risque capital d'une compagnie ;

b) Notre système d'évaluation consiste à estimer la création de valeur d'un programme. Cependant, une optimisation du programme de réassurance n'existe pas, notre objectif est simplement de comparer certains programmes à notre choix en prenant compte différents aspects, mais ne pas chercher la rétention et la capacité optimale.

Conclusion : nous avons montré précédemment que la réassurance peut réduire de façon significative l'exigence en capital économique pour le risque de souscription, à condition qu'elle prenne en charge les sinistres cédés selon les conditions contractuelles. Mais si un réassureur est en faillite, l'assureur doit maintenir ses engagements vis-à-vis des assurés. Par conséquent, l'assureur est exposé au risque de défaut du réassureur. Un capital supplémentaire doit être exigé pour couvrir ce risque, cela entraîne une hausse du capital requis. L'évaluation de ce risque doit être pris en compte dans notre modèle. La modélisation est présentée dans la section suivante.

Causes des faillites

Nous pouvons invoquer trois causes principales pour expliquer la faillite d'un réassureur : la souscription des risques, le transfert des risques (rétrocession) et la politique d'investissement.

Il est difficile, dans notre modèle, de prendre en compte la rétrocession et la politique d'investissement. Nous analysons uniquement le risque de défaut lié à la souscription. Ici, nous nous concentrons sur une dépendance entre les sinistres catastrophes (la raison principale du risque de souscription réassureur) et le défaut des réassureurs (par notre modèle stochastique figuré dans l'annexe 5). Dans un modèle interne plus complet, une dépendance entre la volatilité du marché financier et le risque de contrepartie doit être pris en compte.

Dans un premier temps, nous allons rappeler rapidement la formule standard utilisée dans le QIS 4, puis nous introduisons la nouvelle approche proposée par les Consultations Papers en 2009, qui est utilisée dans la prochaine étude d'impact (QIS 5). Nous comparerons ces deux approches et analyserons les sensibilités de principaux paramètres pour ce risque. Nous étudierons ensuite l'ajustement du défaut pour les créances sur les réassureurs. A la fin, nous intégrerons tous les éléments dans notre système d'évaluation.

IV.2 Formule standard de Solvency II

IV.2.1 Paramètres

a) Probabilité de défaut

La probabilité de défaut du réassureur est un paramètre majeur pour calculer le risque de contrepartie. En revanche, il est difficile d'apprécier la solidité de la créance sur un réassureur sans information fiable sur son état financier, son exposition au risque, et les autres éléments qui peuvent influencer sa solvabilité. Ces informations ne sont pas toujours toutes à la disposition de la cédante.

D'autres difficultés s'ajoutent à l'estimation de la probabilité de défaut des réassureurs, ils se réassurent souvent entre eux (rétrocession). Le porteur final du risque et sa solvabilité ne sont donc pas nécessairement connus.

Dans ce cadre-là, le CEIOPS énonce trois cas pour évaluer les probabilités de défaut de contrepartie :

- Le réassureur est noté par une agence de notation reconnue : la probabilité est fournie avec la notation correspondante;

Notation	Probabilité de défaut
AAA	0,002%
AA	0,01%
A	0,05%
BBB	0,24%
BB	1,20%
B	6,04%
CCC	30,41%

Tableau 24 probabilités de défaut selon la notation

- Le réassureur n'est pas noté mais est soumis à la norme de Solvency II : la probabilité de défaut est fixée par le CEIOPS selon le ratio de solvabilité de réassureur; Si le ratio de solvabilité n'est pas disponible, le réassureur non noté est considéré comme BBB.
- Le réassureur n'appartient pas aux deux catégories précédentes : une probabilité de défaut est fixée par le CEIOPS.

b) Loss Given Default (LGD)

La LGD est le taux de perte relative en cas de défaut de la contrepartie.

Dans la pratique, la taille de la perte potentielle évolue au cours du temps. Le CEIOPS souligne que la LGD doit être déterminée dans une situation stressée. L'exposition au risque doit inclure à la fois le Best Estimate du recouvrement et l'effet d'atténuation du risque grâce à la réassurance (Risk mitigation effect).

Dans le cas du défaut d'un réassureur, la cédante ne perd généralement pas 100% de sa créance, puisqu'une partie de son exposition peut être récupérée : la fraction de cette récupération s'appelle le taux de recouvrement (recovery rate).

Il existe des outils pour atténuer le risque de contrepartie, comme les nantissements⁴ (collateral) de réassureur. Cette garantie va réduire l'exposition au risque de la cédante.

Ainsi le calcul de LGD (un montant de recouvrable) proposé par CEIOPS s'écrit :

$$LGD_i = \max\left((1 - RR_{re}) * (Recoverable_i + RM_{re,i}) - Collateral_i; 0\right)$$

Où RR_{re} est le taux de recouvrement, et $RM_{re,i}$ est l'effet d'atténuation du risque grâce à la réassurance. $RM_{re,i}$ est calculée comme la différence entre le SCR souscription avant réassurance et le SCR souscription après réassurance.

⁴ Le nantissement est un outil qui permet à la cédante d'avoir une certaine garantie en cas de défaut de ses réassureurs.

IV.2.2 Proposition QIS 4 : approche Vasicek⁵

Le modèle de Vasicek a été adopté dans Bâle II (2006) et les QIS3/4 du projet Solvency II. Cette approche, destinée à reproduire le phénomène économique qui conduit à la défaillance de l'entreprise. La compagnie fait défaut si la valeur des actifs A_i tombe au dessous de ses dettes D_i . Alors la probabilité de défaut pour chaque compagnie $i = 1 \dots n$ est :

$$PD_i = P(A_i < D_i)$$

La valeur des actifs de la compagnie se décompose en deux parties :

$$A_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$$

- V est le choc commun pour tous les réassureurs car l'industrie de la réassurance est affectée par certains phénomènes extérieurs : le changement conjoncturel, le cycle du marché, l'évolution démographique, les catastrophes naturelles, ou une crise importante sur les marchés financiers. Ces phénomènes ont des impacts sur la situation financière de tous les réassureurs du secteur.
- ε_i est le risque spécifique à la compagnie i
- ρ est le coefficient de corrélation entre les actifs des entreprises.

Dans cette approche, l'exposition au risque de défaut X est modélisée comme un portefeuille de crédits à risque en utilisant la distribution de probabilité définie par :

$$F(x; PD, \rho) = P[X \leq x] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Où N est la distribution Gaussienne standard. Le modèle ne dépend que la probabilité de défaut P_D et du coefficient de corrélation ρ .

Comme les autres risques traités dans Solvency II, la mesure de risque utilisée pour évaluer le $SCR_{\text{contrepartie}}$ est la VaR à 99.5%. L'équation suivante, basée sur le modèle de Vasicek, est utilisée pour quantifier le risque de contrepartie (la démonstration est en annexe 4):

$$SCR_i = LGD_i * N\left[(1-R)^{-0.5} * N^{-1}(PD_i) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} * N^{-1}(0.995)\right]$$

- $LGD = 50\% * \max(\text{Recouvrements} + SCR_{U/W}^{gross} - SCR_{U/W}^{net} - \text{Collatéral}; 0)$: c'est la perte éventuelle de la cédante en cas du défaut d'un réassureur ;
- $N\left[(1-R)^{-0.5} * N^{-1}(PD_i) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} * N^{-1}(0.995)\right]$ est le pourcentage de LGD exigé pour couvrir le risque de défaut au quantile de 99,5% ;
- R est la corrélation implicite des défauts de réassureur. Elle est calculée à partir de ρ_∞ , où $R = \rho_\infty + H_{re}(1 - \rho_\infty)$, ici on suppose $\rho_\infty = 0,5$.

⁵ Explication détaillée est en annexe 4

$$H_{re} = \frac{\sum_{i \in Re} LGD_i^2}{\left(\sum_{i \in Re} LGD_i \right)^2}$$

est l'indice Herfindahl qui mesure la concentration du portefeuille, plus H est grand, plus le portefeuille est concentré.

Le CEIOPS propose ce coefficient de corrélation modifiée afin de mieux prendre en compte l'insuffisance du nombre de réassureurs.

Nous pouvons déduire facilement le niveau du SCR contrepartie en fonction du pourcentage de LGD :

Risque de contrepartie exprimé en % du LGD (QIS4)									
H (Herfindahl index) \ PD	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,96	0,98	1
0,002%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
0,01%	0,4%	0,3%	0,2%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,0%
0,05%	1,9%	2,0%	1,9%	1,4%	0,4%	0,0%	0,0%	0,0%	5,0%
0,24%	7,9%	9,6%	11,2%	12,4%	11,7%	8,3%	2,8%	0,5%	24,0%
1,20%	26,9%	33,9%	42,6%	54,2%	72%	87%	98%	100%	100%
6,04%	64,9%	75,9%	86,5%	95,4%	100%	100%	100%	100%	100%
30,41%	96,8%	99,0%	99,9%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tableau 25 SCR de défaut en % du Loss given défaut

L'exigence en capital économique explose quand la probabilité augmente. Cet effet est particulièrement important quand il n'y a qu'un seul réassureur (c'est-à-dire que $H = 1$). Selon les calculs, l'assureur risque de perdre 100% de sa créance s'elle cède ses risques à un seul réassureur avec une notation à BB ou inférieur (avec une probabilité de défaut $> 1,2\%$)

Quand le nombre de réassureurs augmente, l'exigence en capital économique diminue généralement, mais cet effet de diversification reste minoritaire par rapport au niveau de notation des réassureurs. La probabilité de défaut des réassureurs est le facteur déterminant.

Néanmoins, cette formule standard est loin d'être parfaite, puisque l'effet de diversification est anormal dans certains cas : l'application de la distribution de Vasicek n'entraîne pas une diminution monotone du risque avec la diversification. Cette incohérence a été signalée par plusieurs participants de QIS4. Elle peut être expliquée par l'inconvénient au l'approche Vasicek.

L'approche Vasicek est basée sur l'hypothèse d'une grande population homogène, ce n'est souvent pas le cas pour les réassureurs, qui sont en général une population hétérogène avec une taille relativement petite.

L'indice Herfindahl, proposé dans le QIS4, est destiné à remédier ce défaut. Il est calculé à partir de la composition du portefeuille des réassureurs de chaque cédante. Mais dans un environnement hétérogène, l'utilisation d'une corrélation universelle entre les entreprises de réassurance est erronée⁶. De plus, la corrélation doit être une propriété d'une population (des réassureurs), et les réassureurs auxquels l'entreprise type cède ses risques sont juste un

⁶ Portfolio modelling of counterparty reinsurance default risk - Peter TER BERG

échantillon fini d'une telle population. Toute concentration observée dans un tel échantillon est une propriété de la méthode d'échantillonnage. Par conséquent, une composition des réassureurs ne devrait pas modifier les caractéristiques de la population, telles que la corrélation. Relier une mesure de concentration comme celle de l'indice Herfindahl avec le coefficient de corrélation n'est pas appropriée. Donc cet indice est conceptuellement imparfait, cela explique pourquoi les résultats observés sont incohérents.

Par conséquent, une autre approche a été proposée par le CEIOPS dans ses Consultations Papers (CP), et sera probablement appliquée dans le QIS 5.

IV.2.3 Consultations Papers et QIS 5

La proposition QIS 5 pour le risque de contrepartie est basée sur deux Consultations Papers : CP28 et CP51. Le CP28 traite du calcul du module lié au risque de contrepartie, les paramètres du modèle sont proposés ensuite dans le CP 51.

Le CP 28 propose de séparer les contreparties en deux types d'exposition :

- Le premier correspond aux risques non diversifiables où la contrepartie couvrant ce risque est notée. Les réassureurs appartiennent à cette catégorie ;
- Le second correspond aux risques diversifiables où la contrepartie couvrant ce risque est rarement notée.

Ici, nous ne nous intéressons qu'au traitement pour l'exposition de type 1. La nouvelle formule de calcul proposée est la suivante :

$$SCR_{def,1} = \min \left(\sum_i LGD_i ; q * \sqrt{V} \right)$$

- LGD de réassureur défini comme suivant :

$$LGD_i = \max \left((1 - RR_{re}) * (Recoverable_i + RM_{re,i}) - Collateral_i ; 0 \right)$$

- q un facteur de risque, qui est fixé dans le CP 51 (§3.109 du CP 51) :

$$q = \begin{cases} 3 & \text{si } \sqrt{V} \leq 3\% * \sum_i LGD_i \\ 5 & \text{si } \sqrt{V} \geq 3\% * \sum_i LGD_i \end{cases}$$

- V représente la variance d'une distribution de la perte liée au risque de contrepartie, qui est déterminée par la formule suivante (SCR.6.7. du draft QIS 5) :

$$V = \sum_j \sum_k u_{jk} y_j y_k + \sum_j v_j z_j$$

Où

$$u_{ij} = \frac{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}{(1+\gamma)(p_i+p_j)-p_i p_j}$$

$$v_i = \frac{(1+2\gamma)p_i(1-p_i)}{2+2\gamma-p_i}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{\alpha} = 0.25$$

$$y_i = \sum_i LGD_i$$

$$z_i = \sum_i (LGD_i)^2$$

Pour déduire l'équation de V, le calcul est composé de trois parties :

1) Choc commun

Nous notons S la variable aléatoire latente représentant un choc commun et prenant ses valeurs dans [0,1]. S s'interprète comme l'indication de la gravité du choc commun, une valeur proche de 1 signifiant qu'un événement catastrophique touche globalement l'industrie de réassurance.

Dans l'article de Peter TER BERG (référence indiquée dans le CP28 du CEIOPS), l'auteur propose de modéliser la variable de choc commun par une distribution Bêta, de densité:

$$f(s|\alpha) = \alpha s^{\alpha-1} \quad 0 < s < 1 \text{ et } 0 < \alpha < 1$$

D'où la fonction de répartition :

$$F(s) = Pr(S \leq s) = s^\alpha$$

2) Probabilité de défaut en fonction du choc commun

Après avoir déterminé la distribution du choc commun, nous nous intéressons à la probabilité de défaut.

Le CP 28 propose d'introduire une probabilité de défaut de base b. Cette valeur explique la probabilité de défaut propre à chaque réassureur, sans prendre en compte le choc commun de l'industrie, nous pouvons la considérer comme une cause interne du défaut du réassureur. La probabilité de défaut observée p est fonction de cette probabilité de base b et du choc commun S :

$$p(b, S) = b + (1-b)S^\gamma$$

δ est un paramètre de puissance qui caractérise l'importance du choc commun sur la solvabilité du réassureur. On suppose qu'il est décroissant avec la probabilité de défaut b, par exemple :

$$\gamma = \frac{\tau}{b}$$

Où τ est un paramètre de forme.

L'idée de l'équation $p(b, S)$ peut être traduite par le fait qu'un réassureur le plus solide (donc avec une probabilité de défaut de base b petite) est peu sensible vis-à-vis des choc extérieurs quand ces derniers ne sont pas extrêmes. En revanche, le réassureur le plus vulnérable est plus sensible à ces chocs. Cette idée peut être illustrée par le graphe suivant qui montre les évolutions de probabilité de défaut du réassureur avec des probabilités de défaut de base (noté b) différents : τ est fixé à 0,2, et b varie entre 0,1% à 30% :

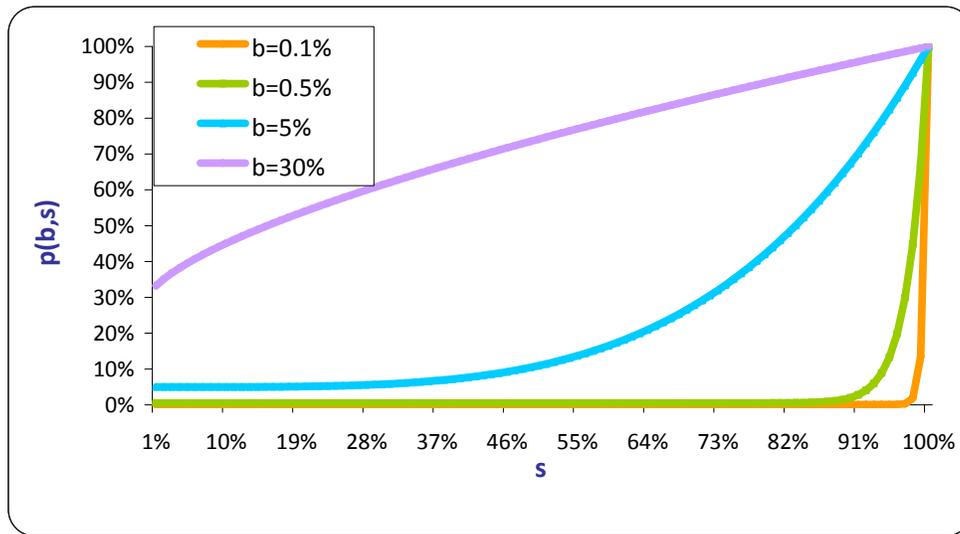


Figure 23 : évolution de la probabilité de défaut $p(b, s)$ en fonction de la probabilité de base b et le choc commun S

A partir de l'équation $p(S) = b + (1 - b)S^\delta$, nous déduisons la moyenne de la probabilité de défaut :

$$\begin{aligned} p &= E[p(s)] = \int_0^1 (b + (1 - b)s^\gamma) f(s) ds \\ &= \int_0^1 \left(b + (1 - b)S^{\frac{\tau}{b}} \right) \alpha S^{\alpha-1} ds \\ &= \left[bS^\alpha + \frac{\alpha b - \alpha b^2}{\tau + \alpha b} S^{\frac{\tau}{b} + \alpha} \right]_0^1 \\ &= \frac{(\tau + \alpha)b}{\tau + \alpha b} \end{aligned}$$

D'après le QIS 5, elle devrait être la probabilité de défaut proposée par l'agence de notation. En inversant cette équation, nous pouvons déduire la probabilité de défaut de base b :

$$b = \frac{p\tau}{\alpha(1-p) + \tau} = \frac{p}{\frac{\alpha}{\tau}(1-p) + 1}$$

Donc

$$p = \frac{\left(\frac{\alpha}{\tau} + 1\right)b}{\frac{\alpha}{\tau}b + 1}$$

Vu que $\partial\left(\frac{p}{b}\right)/\partial\left(\frac{\alpha}{\tau}\right) > 0$, plus le ratio α/τ est élevé, plus la probabilité de défaut observée d'un réassureur dépend des événements extérieurs (car la différence entre p et b est plus importante), donc plus la dépendance entre 2 contreparties est importante.

Dans le tableau suivant, nous déduisons les probabilités de base en fonction des probabilités observées et des différents ratios α/τ :

p	Ratio = 0.5		Ratio = 4	
	b	p/b	b	p/b
0,002%	0,001%	1,5	0,0004%	5,0
0,01%	0,01%	1,5	0,002%	5,0
0,05%	0,03%	1,5	0,010%	5,0
0,24%	0,16%	1,5	0,048%	5,0
1,20%	0,80%	1,5	0,242%	5,0
6,04%	4,11%	1,5	1,269%	4,8
30,41%	22,56%	1,3	8,037%	3,8

Tableau 26 ratio de la probabilité observée/la probabilité de base

En fait, quand $\alpha/\tau = 0,5$, $p \approx 1,5b$, i.e. les deux tiers des défauts peuvent être expliqués par les raisons internes. Si α/τ s'élève à 4, $p \approx 5b$, le plupart de défauts sont dus à une mauvaise conjoncture.

La crise financière a montré que la probabilité de défaut d'une entreprise dépend plutôt de la conjoncture extérieure.

Le CEIOPS propose un ratio très prudent : $\alpha/\tau = 4$.

3) Agrégation

Jusqu'à maintenant, nous avons traité la probabilité de défaut d'un seul réassureur. Mais en pratique, une cédante travaille avec plusieurs réassureurs. L'étape suivante s'attache à modéliser la probabilité de défaut et la perte éventuelle d'un portefeuille de k réassureurs.

Supposons que Z est la perte totale associée au risque de défaut de réassureur, nous pouvons calculer Z avec l'équation suivante :

$$Z = \sum_{i=1}^k w_i y_i = w' y$$

Où $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}$ est un vecteur d'indication de défaut : $w_i = 1$ si défaut et $w_i = 0$ sinon ;

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ est un vecteur de valeur du LGD, qui indique les montants récupérés en case de défaut d'une contrepartie ;

Nous pouvons calculer la variance de la distribution des pertes subies par la cédante:

$$V[Z] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \omega_{ij} y_i y_j$$

Afin de faciliter le calcul, cette variance d'une distribution de la perte liée au risque de contrepartie V est décomposée en deux parties:

$$V = \sum_j \sum_k u_{jk} y_j y_k + \sum_j v_j z_j$$

Où $y_j = \sum_i LGD_i$ est la somme de LGD pour la classe de notation j

$z_j = \sum_i (LGD_i)^2$ est la somme carrée de LGD pour la classe de notation j , la

diversification du nombre des réassureurs ayant la même notation est prise en compte dans le calcul de z_j .

$$u_{jk} = \frac{\rho_j(1-\rho_j)\rho_k(1-\rho_k)}{(1+\gamma)(\rho_j+\rho_k)-\rho_j\rho_k} \quad \text{et} \quad v_j = \frac{(1+2\gamma)\rho_j(1-\rho_j)}{2+2\gamma-\rho_j}$$

fixes qui ne dépendent que la notation.

Une fois la variance de la distribution des pertes est disponible, nous appliquons l'indice de queue q pour déduire le capital économique associé au risque de contrepartie.

Nous avons présenté rapidement l'idée d'estimation du risque de contrepartie dans le QIS 5. Par rapport à l'approche Vasicek du QIS 4, la différence fondamentale est que :

- Dans le QIS 4, la probabilité de défaut est considérée comme constante, le réassureur fait défaut quand ses actifs tombent en dessous du seuil de défaut. Par conséquent, le choc commun dans le QIS 4 influence les valeurs d'actifs ;

- Dans le QIS 5, la probabilité de défaut n'est plus une valeur fixe. Le défaut observé ($p(b,s)$) est en fonction de deux paramètres : le risque de défaut de base (b) et le choc commun (s). Les probabilités de défaut attribuées par l'agence de notation sont considérées comme la moyenne de la distribution du défaut observé ($p(b,s)$).

Dans la partie suivante, nous allons comparer ces deux approches et étudier ensuite l'impact de certains paramètres selon la formule du QIS 5.

IV.2.4 Applications numériques

1) Comparaison entre l'approche QIS 4 et le QIS 5

Selon les formules du QIS 4 et QIS 5 présentées précédemment, nous calculons le risque de contrepartie (exprimé en % du LGD) en fonction de la notation et le nombre des réassureurs. La créance en réassurance est supposée équidistribuée.

Risque de défaut en % du LGD	QIS 4				QIS 5			
Notations/ Nb de contreparties	AAA	AA	A	BBB	AAA	AA	A	BBB
1	0,20%	1,00%	5,0%	24,0%	1,34%	3,00%	6,7%	14,7%
2	0,01%	0,15%	1,7%	11,9%	1,12%	2,51%	5,6%	12,3%
5	0,04%	0,32%	2,0%	9,6%	0,97%	2,16%	4,8%	10,6%
10	0,05%	0,35%	2,0%	8,7%	0,91%	2,03%	4,5%	10,0%
15	0,06%	0,36%	2,0%	8,5%	0,89%	1,99%	4,4%	9,7%
30	0,06%	0,36%	1,9%	8,2%	0,87%	1,94%	4,3%	9,5%
50	0,06%	0,36%	1,9%	8,1%	0,86%	1,93%	4,3%	9,4%

Tableau 27 comparaison QIS 4 & QIS 5 : le risque de contrepartie

Par rapport aux résultats du QIS4 (section III.2.2), nous obtenons des résultats plus cohérents :

- Le besoin en capital est décroissant avec le nombre de contreparties (effet de diversification) ;
- L'écart de SCR entre les réassureurs solides et moins solides semble plus raisonnable par rapport aux résultats du QIS4.

Pour mieux connaître l'impact de la nouvelle approche (QIS 5), nous calculons l'augmentation de SCR par rapport l'exigence en capital QIS 4.

Augmentation du SCR défaut => QIS 5/ QIS 4				
Notations/ Nb de contreparties	AAA	AA	A	BBB
1	6,71	3,00	1,34	0,61
2	128,82	17,23	3,30	1,03
5	23,09	6,74	2,39	1,10
10	17,26	5,81	2,30	1,14
20	15,93	5,58	2,28	1,15
50	14,81	5,38	2,26	1,16
100	14,41	5,31	2,25	1,17

Tableau 28 augmentations du SCR défaut

Le tableau ci-dessus montre une hausse significative du SCR de défaut pour les contreparties ayant une probabilité de défaut faible (AAA – A). Une hausse du capital économique est attendue au QIS 5.

2) Sensibilités

Il existe trois facteurs qui peuvent influencer le risque de contrepartie :

- La probabilité de défaut
- La diversification
- Le nantissement

Un nantissement ou une lettre de crédit permet aux cédantes de se protéger en cas du défaut des réassureurs. Par contre, il est versé quand les sinistres sont connus. Dans ce mémoire, nous ne traitons que le problème de réassurance sur les sinistres futurs. Le nantissement n'a aucun effet sur le risque de défaut associé aux créances de réassurance futures. Par conséquent, nous ne nous intéressons qu'aux impacts de la probabilité de défaut et la diversification sur le risque de contrepartie.

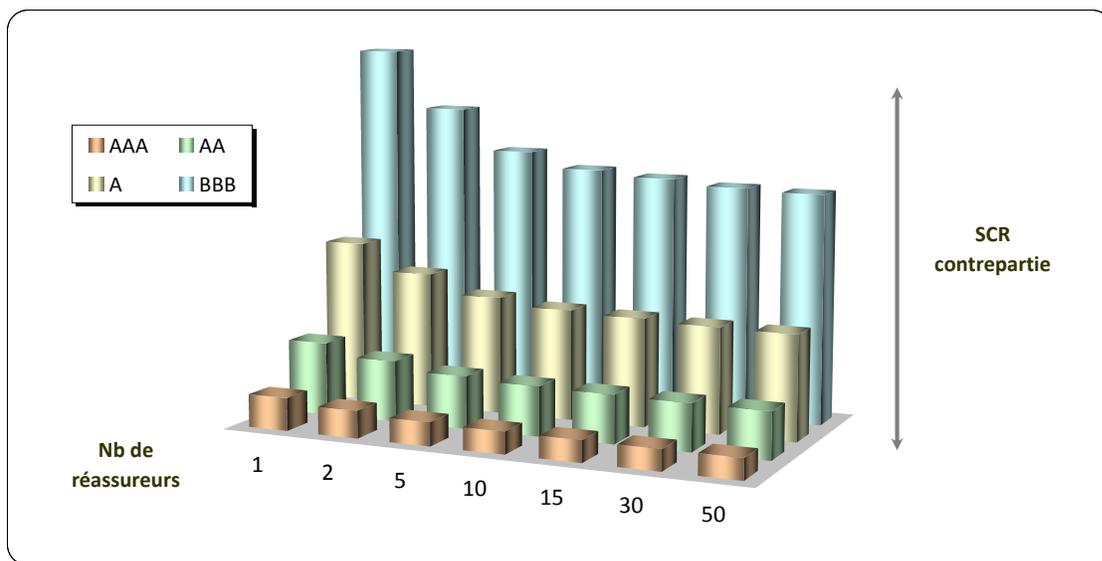


Figure 24 : SCR de contrepartie en fonction de la notation et du nombre de réassureur

A partir du graphe au-dessus, nous observons que la probabilité de défaut est le facteur déterminant pour le risque de contrepartie : quelque soit le nombre de contreparties, le risque de défaut augmente de façon exponentielle quand la notation baisse.

L'effet de diversification est relativement faible par rapport à la probabilité de défaut. Mais il reste un facteur efficace à réduire le risque de contrepartie.

Visuellement, l'effet de diversification semble plus significatif pour les réassureurs ayant une probabilité de défaut élevée, car ils ont un SCR de contrepartie relativement important. Mais le pourcentage de réduction grâce à la diversification est très similaire, quelque soit la notation du réassureur.

Par contre l'impact de la diversification semble significatif quand le nombre de réassureur passe de 1 à 10. Cet impact ralentit quand le portefeuille est suffisamment diversifié (nombre de contrepartie >10).

3) Conclusions

Jusqu'à maintenant, nous calculons le SCR contrepartie grâce aux formules déterministes proposées par le CEIOPS. Cela nous permet de bien connaître l'impact de chaque élément pour le risque de contrepartie. Étant donné que la probabilité de défaut des réassureurs est très faible, le capital économique exigé est peu élevé. Selon l'enquête du QIS4, c'est le risque le moins important au niveau du montant.

Mais une faible probabilité de défaut n'élimine pas pour autant le défaut potentiel : Lehmann Brothers était notée AA avant la crise financière, ce qui correspond à une probabilité de défaut à 0,01% (équivalent à une défaillance tous les 10000 ans), et était donc au-dessus de l'exigence de solvabilité fixée à 0,5% (équivalent à une défaillance tous les 200 ans), mais finalement cette entreprise a fait défaut dans sa 160^e année. En cas de crise, même les entreprises les plus solvables peuvent être en faillite. Par rapport aux autres risques traités par le CEIOPS, le risque de contrepartie est très particulier : il s'agit un risque avec une faible fréquence (surtout pour les réassureurs), mais la conséquence peut être catastrophique.

La formule déterministe nous permet de calculer le besoin en capital pour le risque de contrepartie. Cependant, la VaR à 99.5% n'arrive pas à mesurer la conséquence au delà de ce seuil, nous manquons de connaissance sur la gravité de la perte aux pires scénarios, même si sa survenance est extrêmement rare.

Un modèle stochastique, liant les événements catastrophiques avec le risque de contrepartie, nous permet de mieux estimer la conséquence du défaut du réassureur et de tester les solutions éventuelles pour réduire l'impact de la défaillance des réassureurs sur l'état financier de la cédante.

Étant donné que cette étude s'intéresse plutôt aux pertes au-delà du quantile à 99.5%, elle n'est pas incluse dans notre évaluation finale (qui se base sur le capital économique). Nous préférons mettre cette partie dans l'annexe⁷.

⁷ Annexe 5. Risque de contrepartie – modèle stochastique

IV.2.5. Recouvrables ajustés du défaut de contrepartie

Dans les parties précédentes, nous avons analysé l'impact des probabilités de défaut des réassureurs sur le SCR pour le risque de contrepartie.

Même si l'assureur cède une partie de ses engagements à un ou plusieurs réassureurs, il demeure seul responsable vis-à-vis de ses assurés, et ce indépendamment de l'éventuelle défaillance de tel ou tel réassureur. Il détient donc une créance sur les réassureurs, qui interviennent en cas de sinistre.

Les créances sur les réassureurs représentent en moyenne une partie importante des actifs d'une société d'assurance non-vie et sont essentiellement à long terme. Pour construire un bilan économique, l'assureur doit comptabiliser ses provisions techniques brutes dans le passif. Les sinistres cédés aux réassureurs se trouvent à l'actif en tant que recouvrements. Le calcul des recouvrements doit être ajusté pour tenir compte des pertes potentielles de la contrepartie.

Par conséquent, le CEIOPS demande de prendre en compte aussi le défaut de contrepartie dans l'estimation de ces créances sur les réassureurs. Le risque de contrepartie intervient à la fois sur l'actif et le passif.

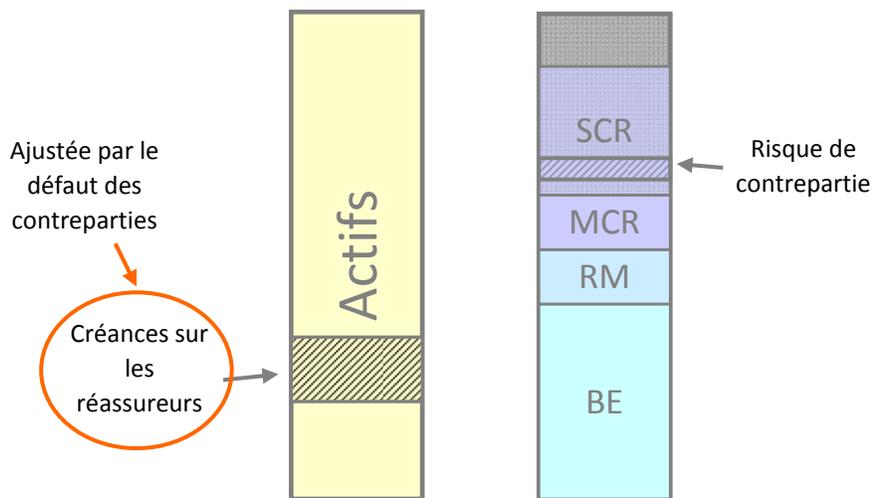


Figure 25 : impact du défaut des réassureurs sur le bilan économique Solvabilité II

La différence entre le risque de contrepartie et l'ajustement du défaut sur les créances est que le risque de contrepartie traite le scénario extrême à 99.5% et l'ajustement du défaut s'intéresse plutôt à la moyenne de perte associée au défaut.

L'ajustement proposé est

$$Adj_{CD} = \sum_{i=1}^n \left(PD_i * RR * \sum_{k=i}^n C_k \right)^8$$

⁸ §3.3-§3.4 du CP 44

Où PD_i est la probabilité de défaut au cours de l'année i

C_k est le cash flow au cours l'année k

RR est le taux de recouvrable = 40%

n est la durée maximale de paiement des prestations

Nous disposons des cadences de paiement pour toutes les branches, elles sont estimées à partir des données historiques.

Année de développement	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
0	33%	71%	33%	71%	51%	51%	12%
1	61%	95%	61%	95%	89%	89%	35%
2	71%	96%	71%	96%	94%	94%	48%
3	78%	97%	78%	97%	99%	99%	57%
4	84%	100%	84%	100%	100%	100%	65%
5	88%	100%	88%	100%	100%	100%	71%
6	94%	100%	94%	100%	100%	100%	77%
7	100%	100%	100%	100%	100%	100%	85%
8	100%	100%	100%	100%	100%	100%	94%
9	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tableau 29 cadence de paiement par branche d'activité

Avec les cadences de paiement, nous pouvons déduire les créances restant dues à chaque année de développement :

Créance restant due	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
1	67%	29%	67%	29%	49%	49%	88%
2	39%	5%	39%	5%	11%	11%	65%
3	29%	4%	29%	4%	6%	6%	52%
4	22%	3%	22%	3%	1%	1%	43%
5	16%	0%	16%	0%	0%	0%	35%
6	12%	0%	12%	0%	0%	0%	29%
7	6%	0%	6%	0%	0%	0%	23%
8	0%	0%	0%	0%	0%	0%	15%
9	0%	0%	0%	0%	0%	0%	6%

Tableau 30 écroulements des créances sur les réassureurs

Les probabilités de défaut multi années ne sont pas fournies par le CEIOPS, nous les estimons à partir probabilités de défaut actuelles et une matrice de transition publiée par S&P.

Les ajustements du défaut de contrepartie selon la notation du réassureur sont détaillés dans le tableau suivant :

	AAA	AA	A	BBB
Ajustement du défaut de contrepartie	-7	-9	-26	-95

en k €

Tableau 31 ajustements du défaut de contrepartie

Pour une cession estimée à 15,2 millions, les ajustements ne sont pas significatifs. Même si la probabilité de défaut croît avec les années, les créances sur les réassureurs diminuent rapidement sur la plupart des branches. Les réassureurs ont des notations élevées, donc l'ajustement sur le défaut attendu est très limité.

IV.2.6. Choix des réassureurs

Nous avons regardé les facteurs principaux pour la détermination du risque de contrepartie. Nous nous intéressons maintenant à l'impact de notre choix du réassureur sur l'évaluation d'un programme de réassurance.

Nous avons présenté un système d'évaluation pour choisir le programme de réassurance. Nous allons maintenant introduire la qualité du réassureur dans notre évaluation. Ayant le même résultat net (avant l'impact du risque de contrepartie), le choix du réassureur peut influencer la création de valeur d'un programme de réassurance: la « qualité » du réassureur doit être prise en compte dans la conception du programme de réassurance.

Nous incluons maintenant le calcul du SCR pour le risque de contrepartie dans l'évaluation du programme de réassurance. Nous obtenons ainsi les BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) avec les différents choix des réassureurs

Dans le tableau ci-dessous, nous calculons le coût du capital économisé grâce au programme de réassurance et déduisons sa création en prenant en compte la qualité de contrepartie.

3 combinaisons des réassureurs sont sélectionnées :

- Les sinistres cédés sont équidistribués aux dix réassureurs notés AAA,
- Les sinistres cédés est à la charge d'un seul réassureur noté A
- Les sinistres cédés sont équidistribués aux réassureurs notés A

En supposant que les autres conditions restent inchangées, nous obtenons le résultat suivant :

Compte de résultat	10 réassureurs notés AAA	1 réassureur noté A	10 réassureurs notés A
Primes de réassurance	19 557	19 557	19 557
Cession en réassurance ajustée de défaut	15 203	15 184	15 184
Résultat technique de réassurance	-4 354	-4 373	-4 373
Coût financier sur les primes cédées	-786	-786	-786
Résultat financier	-786	-786	-786
Résultat combiné (tech. & fin.)	-5 140	-5 159	-5 159
Impact des taxes	1 713	1 720	1 720
Résultat net	-3 427	-3 439	-3 439
Impact sur le BSCR	133 465	129 000	130 663
- SCR souscription	134 166	134 166	134 166
- SCR défaut	-701	-5 165	-3 503
Coût du capital économisé	8 008	7 740	7 840
Total	4 581	4 301	4 400

en k€

Tableau 32 comptes de résultat avec 3 différentes sélections des réassureurs ayant le même prime

Et nous cherchons à déterminer un prix de contrepartie « juste » pour la cédante. Pour maintenir le même résultat, la cédante est prête à payer plus de primes pour un réassureur ayant une bonne notation.

Avec le calcul du risque de contrepartie, la qualité de réassureur influence le capital immobilisé par la cédante et ainsi le résultat d'un programme de réassurance.

Pour maintenir le même résultat, nous nous intéressons aux primes de réassurance correspondantes :

Compte de résultat	10 réassureurs notés AAA	1 réassureur noté A	10 réassureurs notés A
Primes de réassurance	19 557	19 136	19 286
Cession en réassurance ajustée de défaut	15 203	15 184	15 184
Résultat technique de réassurance	-4 354	-3 952	-4 102
Coût financier sur les primes cédées	-786	-786	-786
Résultat financier	-786	-786	-786
Résultat combiné (tech. & fin.)	-5 140	-4 739	-4 888
Impact des taxes	1 713	1 580	1 629
Résultat net	-3 427	-3 159	-3 259
Impact sur le BSCR	133 465	129 000	130 663
- SCR souscription	134 166	134 166	134 166
- SCR défaut	-701	-5 165	-3 503
Coût du capital économisé	8 008	7 740	7 840
Total	4 581	4 581	4 581

en k€

Tableau 32 comptes de résultat avec 3 différentes sélections des réassureurs ayant le même résultat

Supposons que l'assureur cède ses sinistres à dix réassureurs notés AAA. Pour qu'il accepte de remplacer sa sélection actuelle par un seul réassureur noté A en maintenant le même résultat de réassurance, elle a l'intérêt de demander une réduction sur la prime de réassurance de 421 k€. Si le nombre de réassureur augmente d'un à dix, mais la notation reste inchangée (à A), la réduction de la prime de réassurance par rapport à la sélection initiale est réduite à 271 k€.

Notre analyse ici destine à illustrer l'impact du risque de contrepartie sur l'évaluation du programme de réassurance, certaines hypothèses sont utilisées pour simplifier le calcul : nous supposons qu'il n'y a pas de frais de réassurance. Mais en réalité, l'augmentation du nombre de réassureurs croit également le frais associé. Le gain du SCR défaut peut être compensé par le frais supplémentaire payé pour diversifier les créances en réassurance.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de proposer un système d'évaluation d'un programme de réassurance en tenant compte de l'impact de Solvabilité II.

Pour une compagnie d'assurance Non-Vie, le risque de souscription est une des problématiques essentielles. Une modélisation adéquate des sinistres futurs est donc importante pour toutes les études suivantes. Nous avons présenté, dans la première partie du mémoire, les travaux nécessaires pour obtenir une distribution des sinistres totaux bruts du portefeuille : la modélisation des risques homogènes (attritionnels, graves et CAT) et l'agrégation des branches d'activité via une copule de Student.

Dans un deuxième temps, nous avons comparé le risque de souscription calculé via les formules standard du QIS 4/QIS 5 et via notre modèle interne partiel, et en avons déduit le chargement du capital économique pour couvrir le risque de souscription. Notre modèle interne, en utilisant des paramètres calibrés à partir des données, donne un capital économique moins élevé.

Comme toutes les autres sociétés, une compagnie d'assurance a intérêt à maximiser sa rentabilité et optimiser l'utilisation de son capital. La réassurance est un des outils traditionnels et flexibles pour réduire les fonds propres immobilisés par l'assureur. Ayant un choix plus libre entre le financement par le marché des capitaux ou le transfert de risque au réassureur dans le cadre de solvabilité II, l'assureur doit planifier sa stratégie de réassurance en fonction de la réduction du coût du capital associée. Une estimation quantitative du coût du capital est incluse dans notre calcul de la création de valeur d'un programme de réassurance. Nous avons proposé trois programmes de réassurance pour tester leurs efficacités selon notre critère sur leurs résultats techniques, financiers et leur impact sur le capital économique. Dans notre étude, la structure des traités non proportionnels avec des priorités élevés est retenue.

Cependant les réassureurs ne sont pas épargnés par le risque de défaut. Les assureurs doivent aussi estimer un chargement de capital supplémentaire lié à ce risque. Avec la crise financière récente, le CEIOPS va donner plus de poids à la maîtrise du risque de crédit. L'approche Vasicek utilisée dans le QIS4 ne semble pas adaptée au domaine particulier de la réassurance. Une nouvelle approche de modélisation du risque de contrepartie est ainsi proposée dans les récents « Consultation Papers » (CP 28 et CP 51) et retenue dans le QIS 5. Nous avons estimé l'impact de ce changement de méthode sur le capital économique requis au titre du risque de contrepartie et avons observé que ce changement conduit à une exigence plus élevée en fonds propres. Nous avons testé également les sensibilités des certains paramètres : la probabilité de défaut et la diversification. La probabilité de défaut est un facteur déterminant sur la détermination du capital économique.

En plus du risque de contrepartie, le CEIOPS impose de tenir compte du défaut des réassureurs dans le calcul des créances sur les réassureurs. Nous avons étudié rapidement l'ajustement lié au défaut du réassureur dans le calcul de ces créances. L'impact de cette prise en compte semble être limité si la notation du réassureur est supérieure à BBB.

Etant donné que le risque de contrepartie doit être pris en compte dans l'estimation du capital économique de la cédante, la qualité des réassureurs est aussi incluse dans notre système d'évaluation. Pour maintenir la même création de valeur en faisant appel à des réassureurs ayant des notations différentes, la cédante peut négocier des ajustements sur les primes ou les commissions de réassurance.

Dans notre étude, le résultat quantitatif reste le seul critère de la stratégie de réassurance. Dans la réalité, seul le critère quantitatif ne suffit pas. La tradition de l'achat de réassurance, le politique de groupe, l'aversion au risque des cédantes sont des facteurs importants pour déterminer la stratégie en réassurance.

Enfin, ce mémoire propose une démarche pour évaluer de façon quantitative un programme de réassurance. Néanmoins, cette démarche est très simplifiée. Pour préciser les limites de ce mémoire, nous soulignons que :

- A cause de données historiques insuffisantes, certains paramètres utilisés dans notre modélisation sont difficiles à estimer (par exemple, la dépendance entre les défauts des réassureurs, ou entre le défaut et le risque de catastrophe);
- Une compagnie d'assurance doit faire face à divers risques. Pour évaluer correctement un programme de réassurance, nous devons avoir une vision de son impact sur le bilan de l'assureur et le besoin en capital au niveau agrégé. Cela demande une modélisation plus complète que le seul modèle stochastique partiel que nous avons présenté dans ce mémoire;

Pour finir ce mémoire, nous soulignons que la réassurance traditionnelle n'est pas le seul moyen pour transférer les risques assurantiels. Le marché financier peut être une solution alternative. De nouvelles formes de couverture, comme les CAT bonds, les couvertures collatéralisées et les swaps catastrophes commencent à apparaître sur le marché financier. Ces nouveaux outils présentent certains avantages, notamment:

- Diversifier ses moyens de transfert de risque
- Permettre aux assureurs d'accéder aux marchés des capitaux : la capacité d'un réassureur traditionnel est limitée alors que le marché financier peut fournir une capacité financière beaucoup plus grande ;
- Raccourcir la période de « Hard Market » dans le cycle de la réassurance ;
- Augmenter la transparence du prix dans le marché de la réassurance ;
- Atténuer voir éliminer le risque de contrepartie (par certains produits comme l'obligation catastrophe ou le side-car) car la garantie est entièrement collatéralisée ;

Après avoir connu une croissance importante après l'ouragan Katrina, l'émission d'obligations catastrophes a reculé en 2008. Cette baisse d'activité est liée essentiellement aux conditions défavorables du marché en raison de la crise financière. Mais comme ces obligations possèdent certains avantages par rapport à la réassurance traditionnelle, elles restent quand même une alternative intéressante.

Annexe 1. Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est donnée par le résultat de Gnedenko (1943). Elle décrit les limites possibles de la loi du maximum de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d).

Supposons $\{X_1, \dots, X_n\}$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d avec une fonction de répartition F . On définit une variable aléatoire M_n , qui représente le maximum d'une réalisation de X_n . C'est-à-dire : $M_n = \max(X_i)_{1 \leq i \leq n}$.

L'objectif de la théorie des valeurs extrêmes est de déterminer la loi que suit le maximum en fonction de celle de la variable aléatoire X . On peut calculer la fonction de répartition du M_n à partir de celle de X :

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n < x) = P(X_1 < x, \dots, X_n < x) \\ &= P(X_1 < x) \cdots P(X_n < x) \\ &= [F_X(x)]^n \end{aligned}$$

Dans le cas d'un échantillon i.i.d, la loi de maxima est facilement obtenue si la fonction de répartition de X est connue. Mais ce n'est pas souvent le cas, donc sans connaître $F_X(\cdot)$, il est impossible de déterminer la distribution du maximum à partir de l'équation précédente.

Par conséquent, on s'intéresse à la distribution asymptotique du maximum en faisant tendre n vers l'infini.

Selon le théorème de Gnedenko (1943), il existe trois paramètres a_n , b_n et γ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = H_\gamma(x)$$

Avec

$$\begin{cases} H_\gamma(x) = \exp\left(-1 + \gamma x\right)_+^{\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ H_0(x) = \exp(-e^{-x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

H_γ est une loi des valeurs extrêmes, γ est l'indice des valeurs extrêmes, a_n et b_n sont deux paramètres de normalisation :

- a_n est un paramètre de position, jouant le rôle de l'espérance de variable, il indique le centre de distribution.

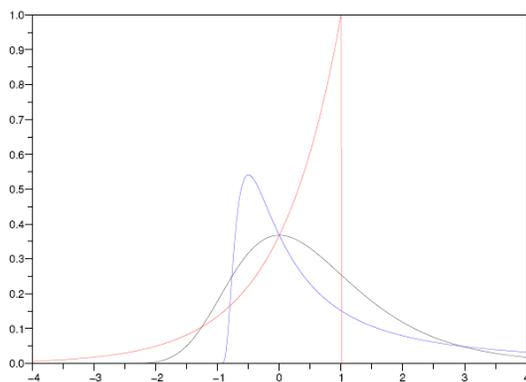
- b_n est un paramètre d'échelle (donc un paramètre de dispersion), jouant le rôle de la volatilité.

Ce résultat implique de façon évidente que le comportement de la queue de distribution dépend d'un unique paramètre γ . Le signe de ce paramètre est un indicateur essentiel sur le comportement de cette queue. En effet, trois comportements sont possibles :

- Si $\gamma > 0$, on dit que la fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de Fréchet, c'est l'ensemble de lois « à queues lourdes » ;
- Si $\gamma = 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel, c'est l'ensemble de lois « à queues légères »
- Si $\gamma < 0$, F appartient au domaine d'attraction de Weibull, c'est l'ensemble de lois « à queue finie ».

Ces trois domaines possèdent les lois caractérisant chacun un comportement spécifiques des valeurs extrêmes :

Fréchet	Weibull	Gumbel
$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^{-\alpha})\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$



Exemple de densités associées à la loi des valeurs extrêmes :

- $\gamma = 0$
- $\gamma = 1$
- $\gamma = -1$

Plus l'indice γ est élevé, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors une distribution avec « queue épaisse ».

Loi d'excès :

Dans notre modèle, nous ne nous intéressons pas seulement le sinistre le plus grave, mais plutôt des sinistres avec un montant significatif qui dépasse un certain seuil fixé en avance. Par conséquent, au lieu de focaliser sur le maximum, nous étudions plutôt les valeurs qui dépassent un seuil donné.

La méthode POT (Peak Over Threshold) a pour l'objectif de déterminer cette loi d'excès. Soit u un réel suffisamment grand appelé le seuil. La méthode des excès s'appuie sur l'approximation de la loi des excès au dessus du seuil u de la variable X est défini par $X - u | X > u$. La fonction de répartition des excès sont définie par :

$$F_u(y) = P(X - u < y / X > u)$$

Alors la fonction de suivie de cette loi conditionnelle s'écrit par :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_u(y) &= 1 - F_u(y) \\
&= P(X - u > y | X > u) \\
&= \frac{P(X - u > y, X > u)}{P(X > u)} \\
&= \frac{\bar{F}_x(u + y)}{\bar{F}_x(u)}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pickands, il y a équivalence entre la convergence en loi du maximum vers une loi de valeurs extrêmes et la convergence en loi d'un excès vers une GPD, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = H_\gamma(x)$$

Si et seulement si,

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{y \in [0, x_F - u]} |\bar{F}_u(y) - \bar{G}_{\gamma, \sigma(u)}(y)| = 0$$

Où x_F est un point terminal de données.

Ce théorème nous permet d'approcher une loi d'excès à une loi de Pareto Généralisée (GPD).

La **fonction de répartition de la loi GPD** est donnée par :

$$\begin{aligned}
G_{\gamma, \sigma}(y) &= 1 - \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0
\end{aligned}$$

$\sigma > 0$ est un paramètre d'échelle ;

$\gamma \in \mathfrak{R}$ est un paramètre de forme.

Et la fonction de suivie est $\bar{G}_{\gamma, \sigma}(y) = 1 - G_{\gamma, \sigma}(y)$.

Selon le théorème de Pickands, on peut déduire :

$$\frac{\bar{F}_x(u + y)}{\bar{F}_x(u)} \approx \bar{G}_{\gamma, \sigma}(y)$$

Supposons que $x = u + y$, on obtient $\bar{F}_x(x) \approx \bar{F}_x(u) * \bar{G}_{\gamma, \sigma}(x - u)$

Estimation des paramètres

Il nous reste à estimer les paramètres u , γ et σ .

On note que $\alpha = \bar{F}_X(u)$ est la probabilité que X dépasse u ,

Alors,

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &\approx \alpha \tilde{G}_{\gamma, \sigma}(x - \bar{F}^{-1}(\alpha)) \\ &\approx \alpha \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \bar{F}^{-1}(\alpha)}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}}\end{aligned}$$

D'où son inverse est

$$\bar{F}^{-1}(p) \approx \bar{F}^{-1}(\alpha) + \frac{\sigma}{\gamma} \left[\left(\frac{p}{\alpha} \right)^{-\gamma} - 1 \right] \quad (*)$$

Dans le pratique, on peut choisir $\alpha = \bar{F}_X(u) = \frac{k}{n}$ où k est le nombre d'excès (c'est-à-dire que le nombre de valeurs qui dépassent le seuil u), alors on estime $\bar{F}_X^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$ par une des observations ordonnées $X_{n-k+1, n}$ (la $n-k+1$ ième plus grande valeur dans l'échantillon).

Pour la distribution GPD, On a $\sigma = \gamma * \bar{F}_X^{-1}(\alpha)$

Une fois le seuil est fixé, il nous reste qu'à estimer le paramètre γ .

On remplace le paramètre σ par son expression précédente, l'équation (*)

déviend $\bar{F}^{-1}(p) \approx \bar{F}^{-1}(\alpha) \left(\frac{p}{\alpha} \right)^{-\gamma}$

Si on passe par logarithme $\log(\bar{F}^{-1}(p)) - \log(\bar{F}^{-1}(\alpha)) \approx \gamma \log\left(\frac{\alpha}{p}\right)$

Posons $p = \frac{i}{n}$ avec $i = 1, \dots, k-1$, alors $\log\left(\bar{F}^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right) - \log\left(\bar{F}^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \approx \gamma \log\left(\frac{k}{i}\right)$

Cela implique :

$$\gamma \approx \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\log(X_{n-i+1}) - \log(X_{n-k+1}))}{\sum_{i=1}^{k-1} \log\left(\frac{k}{i}\right)}$$

Vu que $\sum_{i=1}^{k-1} \log\left(\frac{k}{i}\right)$ tends vers k au voisinage de l'infini.

Ainsi, on peut déduire l'**Estimateur de Hill** :

$$\hat{\gamma}(k) \approx \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log(X_{n-i+1}) - \log(X_{n-k+1}) \right)$$

L'estimateur de Hill est pertinent s'il remplit les deux critères suivants :

- Choix du seuil : nous rappelons que k est le nombre de valeurs qui dépassent le seuil. k dépend de n . l'idée est de choisir un seuil pour que $k \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, mais sans prendre « trop » de valeurs de l'échantillon, ce qui conduit à imposer $\frac{k}{n} \rightarrow 0$
- Choix du niveau de stabilité : l'estimateur de Hill doit converger vers la vraie valeur de $\gamma(k)$

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{P} \gamma(k)$$

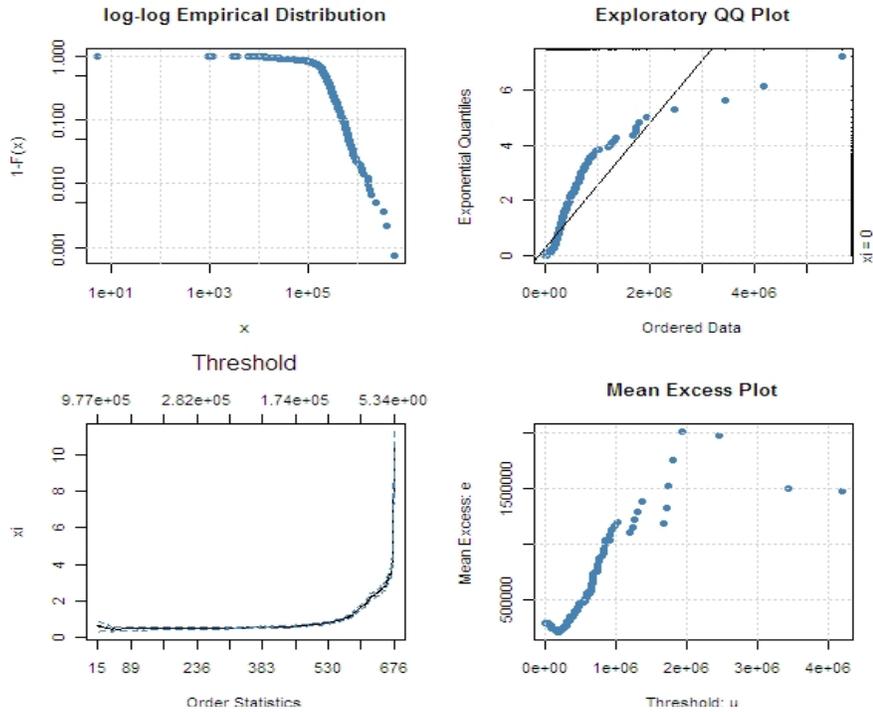
Avec les contraintes mentionnés ci-dessus, le choix de k est difficile :

- Si k est petit, c'est-à-dire le seuil qu'on choisit est grand, $\hat{\gamma}(k)$ utilise peu d'observation, il implique alors une grande variance d'estimation, l'estimateur n'est pas « stable »
- Si k est grand, c'est-à-dire le seuil est petit, on risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas extrêmes, $\hat{\gamma}(k)$ a alors un grand biais.

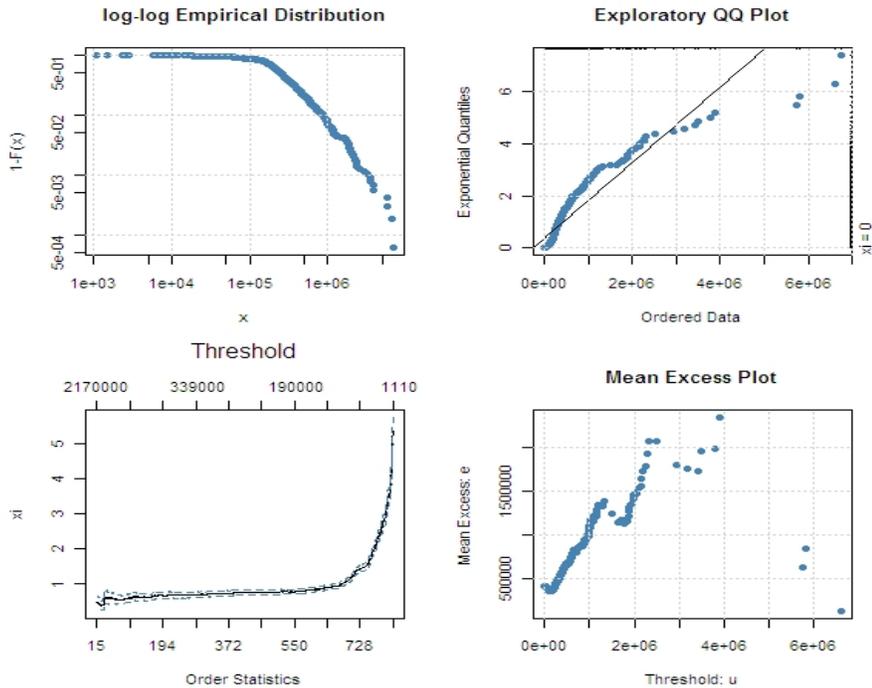
Le k optimal recherché peut être déterminé en minimisant la moyenne du carré des erreurs, mais dans la pratique, on utilise souvent les outils graphique (Mean Excess plot ou Hill plot par exemple) pour positionner le seuil.

Annexe 2. Analyse préliminaire des données

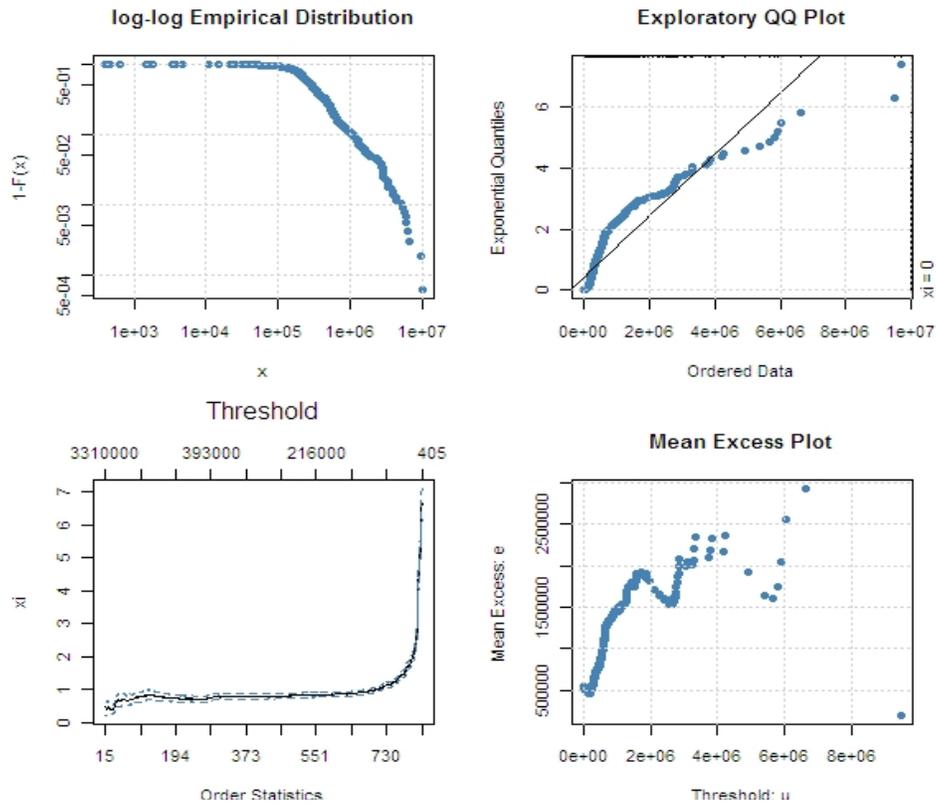
1. Dommage particulier



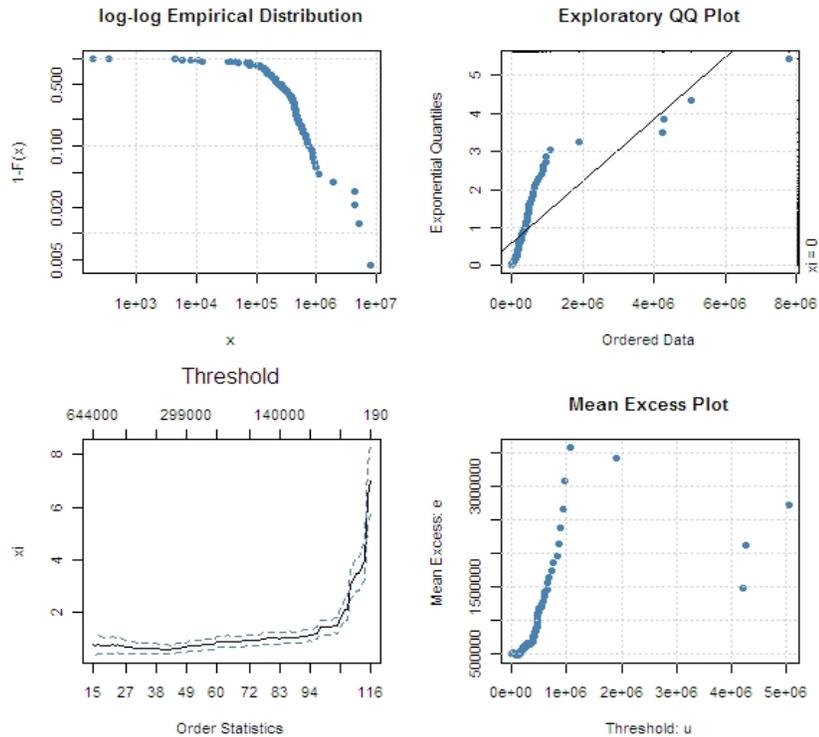
2. Dommage professionnel



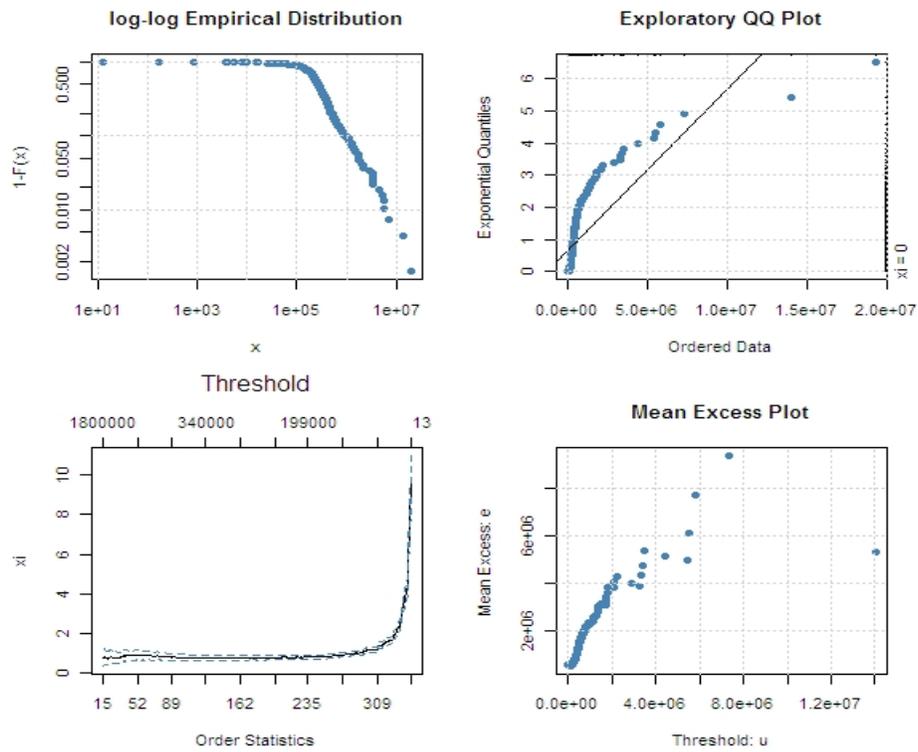
3. Auto RC particulier



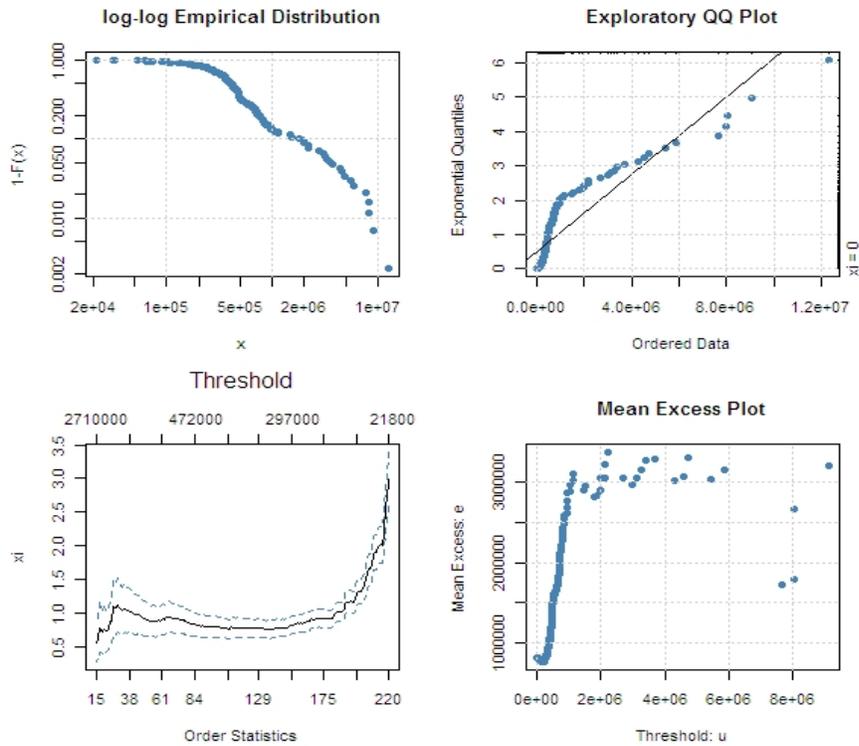
4. Auto dommage particulier



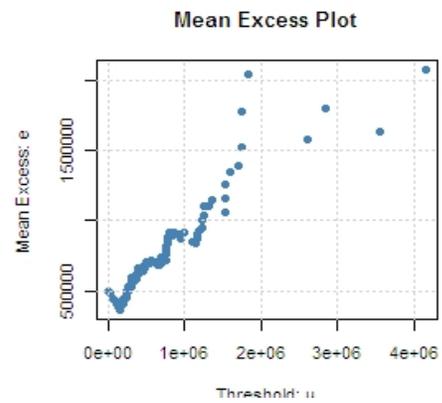
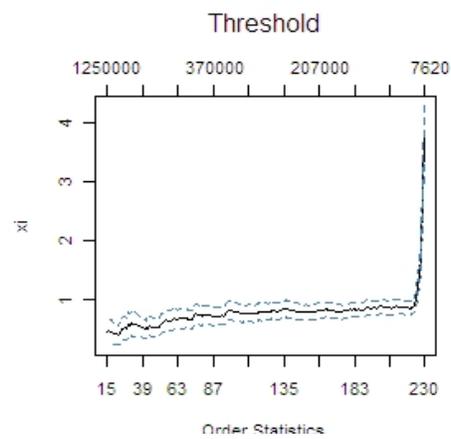
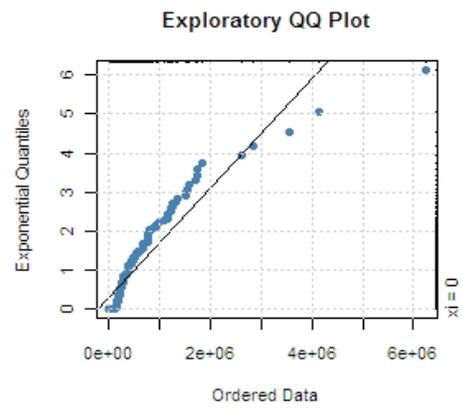
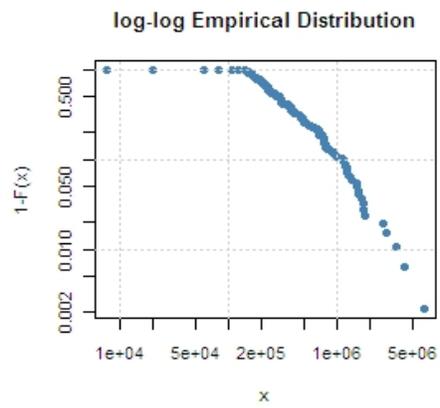
5. Auto dommage professionnel



6. Auto RC professionnel



7. RC générale



Annexe 3. Risque de prime

I. Risque de prime

L'objectif est de calculer le capital économique nécessaire pour couvrir le risque jusqu'au quantile 99,5%.

Supposons un portefeuille d'assurance, pendant une période fixée (i.e. 1 an dans le cadre de Solvabilité II), la perte de portefeuille (L) est la différence entre les sinistres du portefeuille (S) et la prime reçue (P) :

$$L = S - P$$

Notons que :

- Y est le paiement pendant la période observée ;
- $\Delta R = R_1 - R_0$ où R_0 est la provision d'ouverture, et R_1 est la provision à la fin de la période.
- $S = Y + \Delta R$: la sinistralité engagée par un assureur se décompose en les prestations payées au cours de l'année et la variation des provisions.
- Pendant la période fixée, la « richesse » d'une compagnie d'assurance est les primes reçues pendant l'année d'exercice et la provision d'ouverture :

$$V = P + R_0$$

Ce volume V est considéré comme connu au début de la période. Le calcul de V est fixé par CEIOPS.

La capitale économique du risque de souscription au quantile α est supposé de dépendre uniquement la distribution du perte de portefeuille (L) et est désigné par $EC_\alpha(L)$. Dans l'approche standard Solvabilité II, ce capital économique est mesuré par le Value-at-Risk (VaR) au quantile 99,5% :

$$EC_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) \quad (1)$$

Pour résoudre l'équation précédente, nous commençons par isoler la partie constante :

$$\frac{L}{V} = \frac{S - P}{P + R_0} = \frac{Y + R_1 - R_0 - P}{P + R_0} = \frac{Y + R_1}{P + R_0} - 1 = X - 1$$

Avec $X = \frac{Y + R_1}{P + R_0}$ qui représente un ratio « combiné » du portefeuille.

Par la principe de « Fair Value », $E(L) = 0$. Cela implique que $E(X) = 1$.

L'hypothèse sous-jacente du risque de souscription est que X suit une loi log-normale $LN(1, \sigma)$, alors,

$$\mu = E[X] = \exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \text{Var}[X] = \exp(\sigma_x^2) - 1$$

Cela implique

$$\mu_x = -\frac{1}{2}\sigma_x^2 \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \ln(1 + \sigma^2)$$

Revenons sur l'équation (1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} EC_\alpha(L) &= VaR_\alpha(L) = VaR_\alpha\left(\frac{L}{V}\right) * V \\ &= (VaR_\alpha(X) - 1) * V \\ &= (\exp(\sigma_x \Phi^{-1}(\alpha) + \mu_x) - 1) * V \\ &= \left(\exp\left(\sqrt{\log(1 + \sigma^2)} \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{2} \log(1 + \sigma^2)\right) - 1 \right) * V \\ &= \left(\frac{\exp\left(\sqrt{\log(1 + \sigma^2)} \Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1 \right) * V \end{aligned}$$

Dans la formule standard, nous notons $\rho(\alpha) = \frac{\exp\left(\sqrt{\log(\sigma^2 + 1)} * \Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1$, alors

$$EC_\alpha(L) = \rho(\alpha) * V$$

Annexe 4. Ajustement de la réassurance non-proportionnelle

La formule standard du QIS 5 pour le risque de prime est :

$$SCR = V * \left(\frac{\exp\left(N_{0.995} * \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \right) = V * VaR_{99.5\%}(\Psi)$$

Cette formule suppose que $S - E(S)$ a la même distribution que $V * (\psi - 1)$

Où

- $S = \sum_{i=1}^N X_i$, avec X le coût de sinistre et N le nombre de sinistre. X suit une loi lognormale et N suit une loi de poisson $P(\lambda)$.
- ψ est une distribution lognormale, avec $E(\psi) = 1$ et $Var(\psi) = \sigma^2$
- $VaR_{99.5\%}(\psi)$ est la Value at Risk à 99.5% pour la variable $\psi - E(\psi)$

Dans le QIS 5, CEIOPS propose la volatilité avant l'ajustement de la réassurance non proportionnelle σ_{brut} de la distribution ψ^{brut} .

Pour mesurer l'impact de la réassurance non-proportionnelle, il faut déterminer la volatilité après la réassurance σ_{net} de la distribution ψ^{net} .

En supposant que le nombre et le coût de sinistre sont indépendants, la variance de la charge totale S s'écrit en :

$$Var(S) = Var(N) * E^2(X) + Var(X) * E(N) = \lambda * (Var(X) + E^2(X))$$

Le ratio $\frac{Var(S^{net})}{Var(S^{brut})} = \frac{Var(X^{net}) + E^2(X^{net})}{Var(X^{brut}) + E^2(X^{brut})} = \frac{\sigma_{net}^2 + m_{net}^2}{\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2}$ est indépendant du nombre de sinistres N.

La $Var(S^{net})$ est exprimée dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Var(S^{net}) &= Var(S^{brut}) * \frac{\sigma_{net}^2 + m_{net}^2}{\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2} \\ &= Var(V^{brut} * (\psi^{brut} - 1)) * \frac{\sigma_{net}^2 + m_{net}^2}{\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2} \\ &= (V^{brut})^2 * (\sigma^{brut})^2 * \frac{\sigma_{net}^2 + m_{net}^2}{\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2} \end{aligned}$$

La formule standard suppose que les sinistres sont proportionnels aux primes, donc

$$\frac{V^{net}}{V^{brut}} = \frac{m_{net}}{m_{brut}}$$

La variance de S^{net} dévient :

$$\begin{aligned} \text{Var}(S^{net}) &= \left(V^{net} * \frac{m_{brut}}{m_{net}} \right)^2 * \sigma_{brut}^2 * \frac{\sigma_{net}^2 + m_{net}^2}{\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2} \\ &= (V^{net})^2 * \sigma_{brut}^2 * \frac{(\sigma_{net}^2 + m_{net}^2) / m_{net}^2}{(\sigma_{brut}^2 + m_{brut}^2) / m_{brut}^2} \\ &= (V^{net})^2 * \sigma_{brut}^2 * \frac{\text{CoV}^2(X^{net}) + 1}{\text{CoV}^2(X^{brut}) + 1} \end{aligned}$$

Où $\text{CoV}(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$ est le coefficient de variance.

Etant donnée que $S^{net} - E(S^{net})$ a la même distribution que $V^{net} * (\psi^{net} - 1)$,

$$\text{Var}(S^{net}) = \text{Var}(V^{net} \psi^{net}) \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(\psi^{net}) = \frac{\text{Var}(S^{net})}{(V^{net})^2}$$

La variance de ψ^{net} est déduite : $\text{Var}(\psi^{net}) = \sigma_{brut}^2 * \frac{\text{CoV}^2(X^{net}) + 1}{\text{CoV}^2(X^{brut}) + 1}$

Nous déduisons $\sigma_{net} = \sigma_{brut} * \sqrt{\frac{\text{CoV}^2(X^{net}) + 1}{\text{CoV}^2(X^{brut}) + 1}}$

Le facteur d'ajustement de la réassurance non-proportionnelle est :

$$NP_{lob} = \sqrt{\frac{1 + \text{CoV}^2(X^{net})}{1 + \text{CoV}^2(X^{brut})}} = \sqrt{\frac{1 + (\sigma_{net} / m_{net})^2}{1 + (\sigma_{brut} / m_{brut})^2}}$$

Pour déduire ce facteur d'ajustement, il faut déterminer ensuite le comportement de σ_{net} et m_{net} en fonction de σ_{brut} et m_{brut} .

Avant de commencer la démonstration, 2 préambules sont nécessaires :

$$1) \quad \int_p^{+\infty} x * f(x) dx = E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(p)]$$

$$\begin{aligned}
\int_p^{+\infty} x * f(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(p)}^{+\infty} \exp(x) * \exp\left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \\
&= \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(p)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-m-\sigma^2}{\sigma}\right)^2\right) dx \\
&= E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(p)]
\end{aligned}$$

$$2) \int_p^{+\infty} x^2 * f(x) dx = E(X^2) * [1 - F_{m+2\sigma^2, \sigma}(p)]$$

$$\begin{aligned}
\int_p^{+\infty} x^2 * f(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(p)}^{+\infty} \exp(2x) * \exp\left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \\
&= \exp(2m + 2\sigma^2) * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(p)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-m-2\sigma^2}{\sigma}\right)^2\right) dx \\
&= E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(p)]
\end{aligned}$$

En supposant un traité b XS a et le coût du sinistre brut X, la distribution de sinistre net de la réassurance s'écrit par :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq a \\ a & \text{si } a < X \leq a + b \\ X - b & \text{si } X > a + b \end{cases} \quad (*)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X|X \leq a) + a * P(a < X \leq a + b) + E(X - b|X > a + b) \\
&= \int_0^a x * f(x) dx + a * \int_a^{a+b} f(x) dx + \int_{a+b}^{+\infty} (x - b) * f(x) dx \\
&= E(X) - \int_a^{+\infty} x * f(x) dx + a * [F_{m, \sigma}(a + b) - F_{m, \sigma}(a)] + \left(\int_{a+b}^{+\infty} x * f(x) dx - b * \int_{a+b}^{+\infty} f(x) dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2, \sigma}(a + b) + F_{m+\sigma^2, \sigma}(a)] \\
&\quad + a * [F_{m, \sigma}(a + b) - F_{m, \sigma}(a)] - b * [1 - F_{m, \sigma}(a + b)]
\end{aligned}$$

Pour la variance de Y :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \int_0^a x^2 * f(x) dx + a^2 * \int_a^{a+b} f(x) dx + \int_{a+b}^{+\infty} (x-b)^2 * f(x) dx - E^2(Y) \\
&= E(X^2) - \int_a^{+\infty} x^2 * f(x) dx + a^2 * [F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)] + \int_{a+b}^{+\infty} x^2 * f(x) dx \\
&\quad - 2b * \int_{a+b}^{+\infty} x * f(x) dx + b^2 * [1 - F_{m,\sigma}(a+b)] - E^2(Y) \\
&= E(X^2) * [1 - F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a)] + a^2 * [F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)] \\
&\quad - 2b * E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b)] + b^2 * [1 - F_{m,\sigma}(a+b)] - E^2(Y)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= (\text{Var}(X) + E^2(X)) * [1 - F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a)] \\
&\quad + a^2 * [F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)] \\
&\quad - 2b * E(X) * [1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b)] + b^2 * [1 - F_{m,\sigma}(a+b)] - E^2(Y)
\end{aligned}$$

Annexe 5. Le modèle de Vasicek et le risque de contrepartie

Ce modèle a pour objectif de déterminer le montant de capital nécessaire pour couvrir le risque de défaut d'un portefeuille.

Problématique :

Supposons qu'un portefeuille de réassurance contienne n réassureurs de taille identique, de probabilité de défaut égale à p_D pour chaque réassureur et que les valeurs des actifs de ces compagnies soient corrélées avec le même coefficient ρ .

Notons L_i l'indicatrice de défaut de la compagnie i .

Alors $L_i = 1$ si le réassureur i fait défaut et $L_i = 0$ sinon.

Notons L la proportion de défauts sur l'ensemble du portefeuille :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$$

Notre objectif est de calculer la distribution de cette proportion de défauts sur l'ensemble du portefeuille.

Étape 1 :

Pour étudier la probabilité de défaut du portefeuille, on analyse d'abord celle d'une compagnie. Définition du défaut : le défaut survient lorsque la valeur d'actif A_i est inférieure à la valeur de dette B_i .

On modélise la valeur de l'actif par le processus suivant :

$$dA_i = \mu_i A_i dt + \sigma_i A_i dX_i$$

Où X_i est un mouvement brownien dans une mesure de probabilité historique.

En appliquant la formule d'Itô, on peut déduire

$$\log A_i(T) = \log A_i + \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) T + \sigma_i X_i(T) \quad (1)$$

Où $A_i = A_i(0)$.

Pour simplifier les notations, on pose N_i une variable aléatoire suivant une loi normale standard :

$$\log A_i(T) = \log A_i + \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) T + \sigma_i \sqrt{T} N_i \quad (2)$$

On suppose que la probabilité de défaut pour la i ème compagnie est :

$$\begin{aligned}
p_i &= P[A_i(T) < B_i] \\
&= P\left[A_i + \exp\left(\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T\right) + \exp(\sigma_i\sqrt{T}N_i) < B_i \right] \\
&= P\left[\exp(\sigma_i\sqrt{T}N_i) < B_i - A_i - \exp\left(\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T\right) \right] \\
&= P\left[\sigma_i\sqrt{T}N_i < \log\frac{B_i}{A_i} - \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T \right] \\
\\
p_i &= P\left[N_i < \frac{\log\frac{B_i}{A_i} - \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}} \right] \\
&= P[N_i < d_i] \\
&= N(d_i) \\
\\
\text{Où } d_i &= \frac{\log\frac{B_i}{A_i} - \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Dans notre modèle, le portefeuille contient des réassureurs de même notation, donc de même probabilité de défaut p_D pour un horizon d'un an.

Donc $d_i = N^{-1}(p_D)$

Étape 2 :

Comme les réassureurs ne sont pas indépendants, nous supposons qu'ils sont affectés par un choc commun :

Dans ce contexte, la variable A_i dans l'équation (1) qui représente la valeur de la compagnie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$$

où Y représente un facteur commun pour tous les réassureurs, par exemple un indice économique ou financier, ou plus généralement, l'état de l'économie.

ρ est le coefficient de corrélation entre les actifs

ε_n représente le risque spécifique de la n -ième compagnie.

Y et ε_i sont des variables aléatoires normales standards.

Connaissant la valeur de Y , on peut déduire une probabilité de ruine conditionnelle à ce facteur, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
P_{i|Y=y} &= P[L_i = 1 | Y = y] \\
&= P[A_i < d_i | Y = y] \\
&= P[y\sqrt{\rho} + \varepsilon_i\sqrt{1-\rho} < d_i | Y = y] \\
&= P\left[\varepsilon_i < \frac{d_i - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(\rho_D) - y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right]
\end{aligned}$$

Le défaut de chaque individu sachant le facteur commun $[L_i | Y]$ est une variable Bernoulli du paramètre $P_{i|Y}$, alors $E[L_i | Y] = P_{i|Y}$.

$$\begin{aligned}
P_{i|Y} &= \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(\rho_D) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] = q \\
\Rightarrow -Y &= \frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(\rho_D)}{\Phi^{-1}(\rho_D)}
\end{aligned}$$

Étape 3 :

Pour déterminer le SCR contrepartie, nous souhaitons connaître le quantile à 99.5% du défaut de l'ensemble du portefeuille $L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$.

Conditionnellement à Y , les variables L_i sont indépendamment et identiquement distribuées.

Selon la loi des grands nombres, $\left[L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \mid Y\right]$ converge vers $E[L_i | Y]$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi, nous pouvons déduire la probabilité que le pourcentage de perte n'exécède pas q_{EC} :

$$P[L \leq q_{EC}] = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(q_{EC}) - \Phi^{-1}(\rho_D)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Le régulateur exige de l'assureur qu'il détienne un q_{EC} tel que la probabilité de ruine soit inférieure à 0.05%, c'est-à-dire que $P[L \leq q_{EC}] \geq 99.5\%$. Donc le q_{EC} minimum demandé doit être :

$$q_{EC}^* = \min\{q_{EC}, \text{tel que } P[L \leq q_{EC}] \geq 99.5\%$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
P[L \leq q_{EC}^*] &= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(q_{EC}^*) - \Phi^{-1}(\rho_D)}{\sqrt{\rho}}\right) = 0.995 \\
&\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(q_{EC}^*) - \Phi^{-1}(\rho_D)}{\sqrt{\rho}}\right) = 0.995
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(q_{ec}^*) &= \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(0.995) + \Phi^{-1}(\rho_D) \\ q_{ec}^* &= N\left(\frac{\sqrt{\rho}\Phi^{-1}(0.995) + \Phi^{-1}(\rho_D)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \\ &= N\left((1-\rho)^{-0.5} * \Phi^{-1}(\rho_D) + \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} * \Phi^{-1}(0.995)\right) \end{aligned}$$

Le modèle de Vasicek fonctionne bien quand il y a un très grand nombre de réassureurs (au moins une centaine), ce qui n'est pas le cas dans la réalité. Un autre problème crucial est la détermination de ce coefficient de corrélation.

Annexe 6. Risque de contrepartie – Modèle stochastique

Dans cette partie, nous présentons un modèle stochastique pour analyser l'impact du défaut de réassureur sur le résultat de la cédante. La vision de cette évaluation peut varier selon notre objectif :

- Vision à court terme (1 an) : cette vision a pour objectif d'évaluer le capital économique pour le risque de contrepartie lié aux créances de réassurance. Nous nous intéressons à la perte éventuelle liée aux défauts de réassureur pour un horizon d'un an et déduisons le capital réglementaire nécessaire pour couvrir ce risque ;
- Vision à long terme (durée de la créance) : nous nous intéressons aux vrais risques liés à la souscription d'une structure de réassurance. Il existe une cadence de paiement dans les activités d'assurance : les sinistres survenus ne seront pas payés immédiatement, un délai existe entre la survenance, la déclaration et le remboursement des sinistres. Une partie de prestation est transférée aux réassureurs. Supposons que les réassureurs maintiennent une même cadence de paiement que la cédante. La cédante est exposée au risque de contrepartie réassureur quand il détient encore les créances de réassurance.

Modélisations pour la vision à court terme

a) paramètres

- Probabilité de défaut
Nous supposons que tous les réassureurs de l'entreprise type sont notés. Nous utilisons ici les probabilités de défaut du QIS.
- Exposition au risque
Dans notre modèle, nous disposons des scénarios de sinistres futurs. Notre exposition au risque réel est déterminé par :

$$\text{Exposition au risque} = \text{Sinistralité cédée} - \text{Nantissements}$$

b) modélisation de l'événement de défaut

La probabilité de défaut est un facteur essentiel pour estimer le risque de contrepartie. Nous allons utiliser ici, le modèle de Vasicek qui se base sur la valeur de la firme.

Ce modèle est qualifié du modèle structurel car il vise à reproduire le phénomène économique conduisant à la défaillance de l'entreprise.

Comme ce que nous avons énoncé dans l'annexe 4, la formule pour modéliser la valeur des actifs du réassureur est suivante :

$$A_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i$$

Le réassureur fait défaut si la valeur des actifs A_i tombe au dessous de ses dettes D_i . Alors la probabilité de défaut pour chaque compagnie $i = 1 \dots n$ est :

$$p_i = P(A_i < D_i)$$

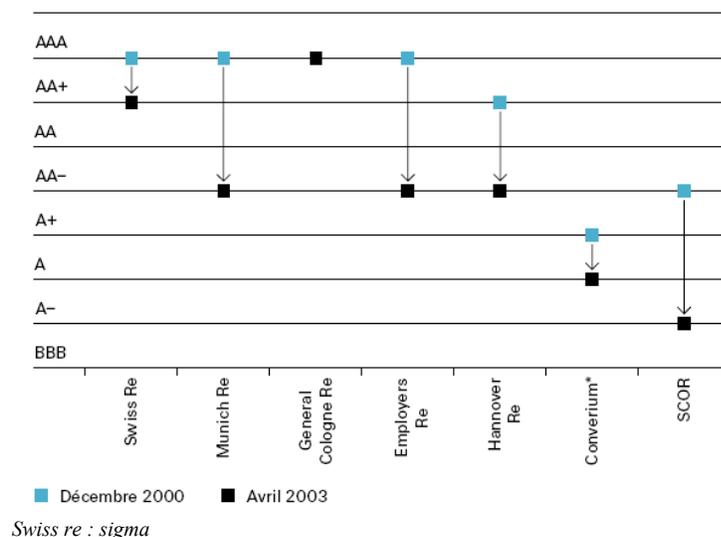
Afin de simuler la distribution des pertes d'un portefeuille, nous suivons les étapes suivantes :

1. Comme tous les réassureurs de notre portefeuille sont notés. Leur probabilité de défaut PD_i est déduite de leur notation. Chaque réassureur ne connaît que deux états : défaut ou non défaut;
2. Nous calculons le seuil de défaut $D_i = \Phi^{-1}(PD_i)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard ;
3. Nous générons deux variables aléatoires V pour l'ensemble du portefeuille et ε_i pour chaque compagnie.
4. Nous calculons la variable A_i selon la formule précédente, puis la comparons avec le seuil de défaut D_i pour vérifier si la compagnie fait défaut dans ce scénario ;

c) dépendances

Avec un marché relativement petit et concentré, la rétrocession et une vague de fusion ces dernières années, les réassureurs sont fortement corrélés entre eux : le défaut d'un réassureur fragilise les autres.

Le graphe suivant décrit le mouvement de notation des principaux réassureurs après l'attentat du 11 septembre, un des sinistres les plus coûteux dans l'histoire de l'assurance.



On peut observer que 6 réassureurs sur 7 qui figurent dans ce graphe ont subi une dégradation de notation entre décembre 2000 et Avril 2003. Les sinistres catastrophiques sont influencés simultanément la solidité financière de l'ensemble des compagnies de réassurance.

Ainsi deux dépendances sont prises en compte dans notre modèle:

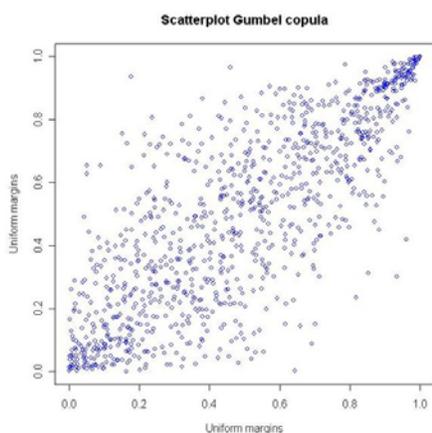
1) Dépendance entre le risque de catastrophe et le marché de la réassurance

Le risque de catastrophe est souvent cédé par l'assureur aux réassureurs. La conséquence financière d'un événement catastrophique est donc essentiellement supportée par ces derniers. Mais comme toutes les autres entreprises, le réassureur a une capacité financière limitée.

Par conséquent, plus le sinistre est grave, plus la probabilité du défaut de réassureur est élevée. Selon la tendance de ces dernières années, le marché de la réassurance est de plus en plus influencé par la survenance d'un événement catastrophique.

Introduisant un indicateur V de l'état du marché de la réassurance (V est une valeur comprise entre 0 et 1, $V=1$ signifie que tous les réassureurs font défaut). La valeur de V est dépendante des sinistres catastrophiques, plus ces derniers sont importants, plus V est proche de 1. Une dépendance de queue à droite existe entre l'indicateur du marché de la réassurance V et le risque de catastrophe. Par contre, il n'y a pas de dépendance de queue à gauche entre les deux, car le risque de catastrophe n'est pas la seule cause de défaut.

Pour modéliser une dépendance asymétrique entre 2 variables, les copules archimédiennes sont en générale mieux adapté que les copules elliptiques. Dans la famille archimédienne, la copule Gumbel est couramment utilisée pour la dépendance extrême. Nous l'avons donc choisie pour construire des scénarios joints entre les événements catastrophiques et la situation du marché de la réassurance.



La copule Gumbel s'écrit :

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

où $\alpha \geq 1$

α est considéré comme une mesure de dépendance, plus α est élevé, plus la dépendance des variables est forte et une valeur positive de α implique une dépendance positive.

Les dépendances à gauche (ou de queue inférieure) et à droite (ou de queue supérieure) de la copule Gumbel sont :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Pr[X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)] = 0$$

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr[X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)] = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$$

$\lambda_L = 0$ signifie qu'asymptotiquement, la copule Gumbel ne présente pas de dépendance de queue inférieure.

Et $\lambda_U > 0$ indique que cette copule présente une dépendance de queue supérieure et positive.

Par conséquent, la copule Gumbel est adaptée pour étudier l'impact des sinistres catastrophiques sur les défauts de réassureurs.

Le calibrage des paramètres est difficile vu qu'il y a peu de données disponible. Nous considérons simplement qu'il y a une forte dépendance entre le risque de catastrophe et le défaut du marché de la réassurance. On fixe ainsi $\alpha = 3$. C'est-à-dire que nous supposons que le Tau de Kendall de cette structure de dépendance est :

$$\tau = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{3}$$

Mais la copule Gumbel n'est pas la seule apte à modéliser la dépendance des valeurs extrêmes, la copule HRT (Heavy Right Tail) peut aussi s'adapter à ce type de modélisation.

2) Dépendance entre les défauts des réassureurs

- Généralité

Le marché de la réassurance est fortement concentré sur certains acteurs majeurs. Les réassureurs ont souvent des lignes d'affaires assez semblables, donc sont exposés aux mêmes risques. De plus, les réassureurs sont liés par des rétrocessions entre eux. Il existe donc une forte dépendance entre les réassureurs.

Pour modéliser cette dépendance, on peut utiliser deux solutions différentes :

- Copule : une analyse fine permet d'estimer la dépendance entre chaque réassureur. Etant donné que jusqu'à ce jour, nous avons constaté peu de défauts de réassureur, le calibrage des paramètres pourra se faire à partir des prix de leurs actions, qui peuvent être considérés comme un indicateur de défaut. Une étude a été faite en 2006 pour les six plus grandes compagnies d'assurance au niveau mondial⁹ pour estimer leur dépendances en fonction de leurs cours d'action. Remarquons que cette analyse demande une base de données importante et qu'elle est de plus très limitée car elle ne s'adapte que pour les grandes entreprises cotés en bourse.

- Modèle choc commun: il s'agit le modèle que nous allons utiliser dans ce mémoire.

On reprend ici l'idée que nous avons énoncé précédemment, on suppose que la valeur des actifs d'un réassureur A_i peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i$$

Où V est identique pour tous les réassureurs, on peut le considérer comme un choc commun.

ρ est la corrélation implicite, nous fixons ici $\rho = 0.5$

V et ε_i sont des variables aléatoires normales standard. Donc A_i est une variable aléatoire normale standard.

Nous supposons que les $(A_i < d_i | V)$ sont indépendants.

⁹ "Are there comovements in the default risk of reinsurance companies" (2006) - Oliver BURKART

d) Loss Given Default:

La loss given default (LGD) se définit comme la perte en cas de défaillance.

La LGD se décompose en deux éléments: le taux de recouvrement et l'exposition au risque :

$$\text{LGD} = (1 - \text{taux de recouvrable}) * \text{exposition au risque}$$

L'exposition au risque est en fonction des scénarios générés dans la partie de réassurance et s'égal à la différence entre les sinistres cédés et les nantissements.

Nous pouvons modéliser le taux de recouvrable de deux façons :

- La première méthode consiste à simuler le taux de recouvrement selon une loi bêta, dont le support est entre $[0,1]$;
- La deuxième consiste à traiter tous les recouvrements comme des valeurs fixes qui sont connus avec la certitude.

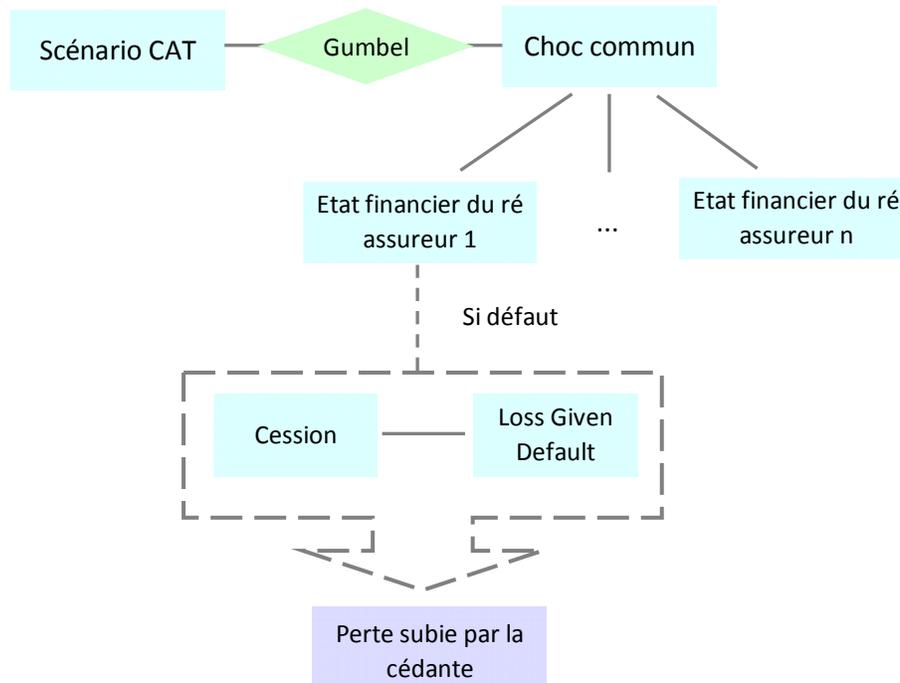
La simplification est raisonnable, car l'incertitude de la valeur de récupération ne contribue pas de manière significative au risque de contrepartie par rapport à la probabilité de défaut. En général, la probabilité de défaut domine le taux de recouvrement sur le calcul de la perte potentielle, donc fixer le pourcentage de recouvrement est commode informatiquement tout en restant réaliste.

Puisque l'impact de taux de recouvrement est assez limité, nous décidons de choisir la deuxième méthode, c'est-à-dire un taux de recouvrable est déterministe, fixé à 50% comme ce qui est proposé dans le QIS4 et le QIS 5.

e) Processus du calcul

Une fois on précise les idées pour modéliser les dépendances, le changement de notation de réassureur, le LGD. On peut les mettre ensemble pour calculer le risque de contrepartie :

- 1) A l'aide d'une copule Gumbel, nous simulons deux variables qui indique le choc commun pour le marché de la réassurance et la gravité des scénarios CAT en prenant en compte la dépendance entre les deux ;
- 2) Nous calculons l'état financier de chaque réassureur selon l'équation énoncée précédemment ;
- 3) En cas de défaut d'un réassureur (c'est-à-dire que l'état financier tombe au dessous du seuil de défaut), nous pouvons calculer l'exposition au risque de la cédante, c'est la sinistralité cédée à ce réassureur.
- 4) Nous calculons la perte subie par la cédante dans ce scénario
- 5) Si nous répétons ce processus, nous obtenons ainsi une distribution de perte liée avec le risque de contrepartie. Nous pouvons calculer le capital économique lié à ce risque avec la formule $EC = r(X) - E(X)$. Où $r(X)$ est une mesure de risque.



Illustrations numériques

A. Mesure de risque

Le choix de la mesure de risque est essentiel pour la détermination du capital économique. Avant de présenter nos résultats numériques, nous examinons et comparons rapidement deux mesures de risque couramment utilisées.

- la VaR : c'est l'approche utilisée dans le QIS4. Elle correspond au montant de perte qui ne devrait être dépassé qu'avec un certain niveau de confiance sur un horizon temporel donné. Le seuil est souvent fixé à 99.5%, c'est la différence entre un résultat défavorable qui survient une fois tous les 200 ans et un résultat attendu.

$$VaR(\alpha) = \inf \{x \in R \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Un inconvénient de la VaR est qu'elle ne décrit pas la distribution des pertes qui dépassent le seuil. Elle ne donne donc pas d'information sur les pires scénarios.

- la TVaR (Tail VaR) : elle s'appelle aussi ES (Expected shortfall). C'est la moyenne des pertes au delà de la VaR.

$$ES(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(x) dx$$

L'avantage de cette mesure de risque est qu'elle prend en compte l'impact des pires scénarios qui dépassent le seuil fixé.

B. Inconvénient de la VaR

a) Cas d'un seul réassureur

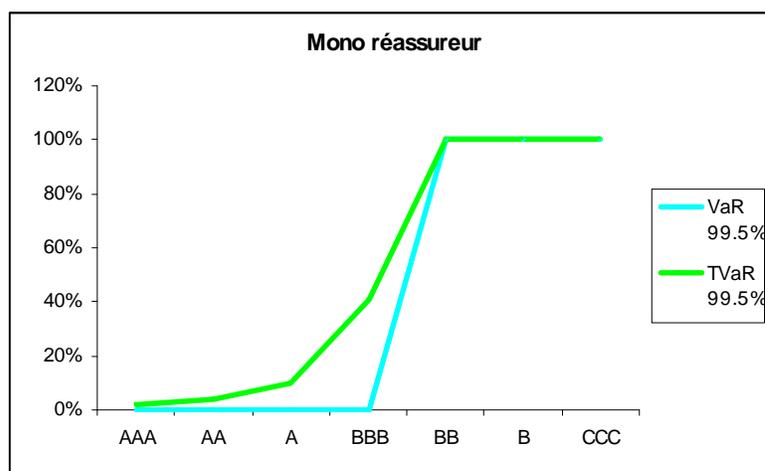
De même que dans le QIS 4 et le QIS 5, nous utilisons la VaR comme mesure de risque. Mais cette mesure présente certains inconvénients dans les simulations pour estimer le capital économique.

Nous supposons ici un cas extrême : l'assureur transfère tous ses risques à un seul réassureur, en cas de faillite de ce réassureur, l'assureur perd toutes ses créances. Le besoin en capital pour le risque de contrepartie est calculé dans le tableau suivant :

Mesure de risque : cas d'un seul réassureur	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
VaR 99.5%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	100%
TVaR 99.5%	1.96%	3.9%	9.8%	41.2%	100.0%	100.0%	100.0%

% en fonction de la LGD

Nous observons les évolutions dans le graphe suivant :



Si nous utilisons la VaR au quantile 99,5%, nous observons que l'exigence en capital est nulle pour un réassureur avec une notation de AAA à BBB. A partir de « BB », l'assureur doit disposer d'un capital économique équivalent à la totalité des sinistres cédés. Cette discontinuité pose un problème.

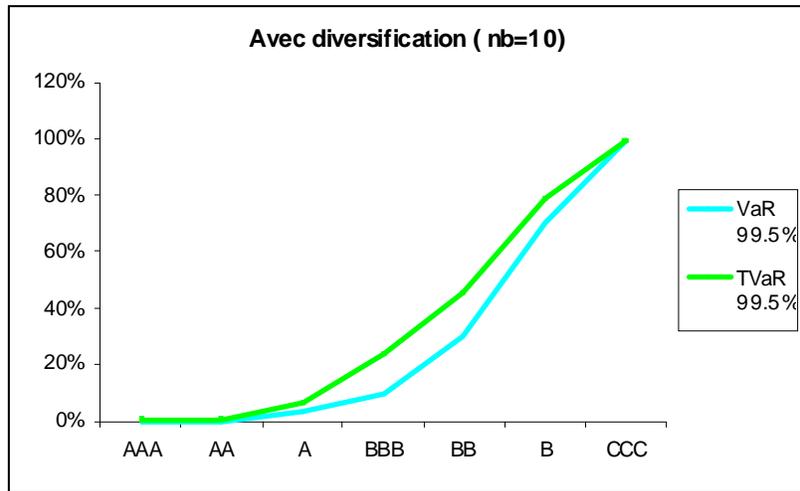
Cette discontinuité peut être expliquée par le modèle de la valeur de firme que nous avons utilisé ici et l'inconvénient de la VaR par la simulation. Car la VaR correspond au scénario situé au quantile de 99,5%, c'est-à-dire à 0,5% des pires scénarios. Étant donné que la probabilité de défaut pour un réassureur avec une notation élevée est très faible : 0,002% pour le « AAA », et jusqu'à 0,24% pour le « BBB ». Ces probabilités de défaut sont toutes inférieures au niveau d'exigence de solvabilité II : 0,5%. Par conséquent, les valeurs simulées avec ces notations sont souvent 0 au quantile de 99,5%, qui donne un capital économique nul.

Mais si la notation du réassureur descend en dessous de « BBB », le réassureur est toujours en faillite au quantile 99,5%. Dans ce cas là, l'exigence en capital économique s'explode, équivalent à la totalité de la LGD.

Les résultats donnés par la TVaR à 99,5% semble être une solution mieux adaptée à la réalité, car la TVaR est la moyenne de tous les pertes potentielles situant au dessus de la quantile à 99,5%, elle prends en compte tous le cas extrêmes, même si la probabilité de survenance est très faible.

b) Cas diversifié

En revanche, dans le cas d'un portefeuille bien diversifié (10 réassureurs de même notation), la VaR semble être mieux adaptée à la situation.



% en fonction de LGD

Mesure de risque : nb de réassureur = 10	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
VaR 99.5%	0%	0%	3%	10%	30%	70%	100%
TVaR 99.5%	0.78%	1.0%	6.7%	23.9%	45.1%	78.4%	100.0%

La TVaR à 99,50% calcule la moyenne de toutes les pertes situées au-dessus du quantile à 99,5%. La VaR ne s'intéresse qu'à la perte au quantile 99,5%. Par définitions, la TVaR est un critère plus strict que la VaR. Notre objectif est d'évaluer le risque de défaut avec 0,5% de probabilité, lorsque le portefeuille s'est bien diversifié, nous pouvons utiliser la VaR pour mesurer notre risque.

C. Analyse des scénarios extrêmes

Nous l'avons vu, la VaR peut donner des résultats incohérents dans nos simulations. Le risque de contrepartie se caractérise par une fréquence très faible, mais une intensité importante en cas de réalisation de l'aléa est présente dans ce risque. Il est donc intéressant de quantifier l'impact de ce risque dans les cas les plus extrêmes, et ainsi que les impacts des certains facteurs comme la diversification et le nantissement.

Etant donné que notre objectif dans cette partie n'est pas de calculer un capital économique réglementaire (qui est déjà déterminé par la formule standard), nous décidons de choisir la mesure de risque TVaR dans notre étude afin d'éviter les inconvénients de la VaR.

Notre approche stochastique n'est ainsi pas comparable avec l'approche déterministe proposée par le CEIOPS, à cause de la mesure de risque choisie. Dans la partie suivante, nous allons quand même indiquer, à titre de référence, les résultats réglementaires.

a) Diversification :

Pour éviter le problème de VaR, nous choisissons deux cas pour comparer l'effet de diversification : quand le nombre de réassureurs égale à 5 ou 10.

Effet de diversification	Nb de réassureurs = 5			Nb de réassureurs = 20			Effets de diversification		
	VaR	TVaR	TVaR	VaR	TVaR	TVaR	VaR	TVaR	TVaR
	99.5%	99%	99.5%	99.5%	99%	99.5%	99.5%	99%	99.5%
AAA	0	128	795	0	115	601		10,2%	24,4%
AA	0	236	1 076	0	206	786		12,5%	27,0%
A	2 546	3 171	7 318	2 311	2 735	5 160	9,2%	13,7%	29,5%
BBB	8 403	10 002	25 896	7 602	8 506	17 714	9,5%	15,0%	31,6%

Nous observons que la diversification peut être effective dans les cas extrêmes.

Modélisations au long terme

Le processus de calcul est identique qu'à la modélisation au court terme, sauf qu'au lieu de simuler des scénarios pour une durée d'un an, ce processus va se répéter jusqu'à la fin du paiement des créances en réassurance. Les estimations de paramètres sont différentes dans cette modélisation.

A. Exposition au risque :

A la fin de la période de couverture, les sinistralités qui ne sont pas encore réglées ou déclarées seront comptabilisés comme des provisions. Le réassureur ne paiera pas immédiatement la totalité des sinistres cédés. Ses paiements de prestation suivent une cadence de règlement déterminé selon la branche d'activité.

Dans notre modèle, nous supposons que la cadence de règlement de réassureur est identique que celui de l'assureur. L'exposition au risque diminue au fur à mesure quand le réassureur verse la prestation à la cédante, si nous supposons que les collateral diminue proportionnellement des provisionnement cédés, nous déduisons:

$$\begin{aligned}
 \text{Exposition}_n &= \text{provisionnement cédé}_n - \text{collatéraux}_n \\
 &= (\text{Sinistres cédés}_0 - \text{collatéraux}_0) * \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \text{cadence}_i \right) \\
 &= \text{Exposition}_0 * \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \text{cadence}_i \right)
 \end{aligned}$$

Sinistres cédés_0 et collatéraux_0 sont des sinistres cédés (aux réassureurs) et les collateral à l'année de couverture, $\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \text{cadence}_i \right)$ est la pourcentage de charges réglées jusqu'à

l'année n-1. L'exposition au risque de chaque réassureur à l'année n est les prestations qui ne sont pas encore versées.

La cadence de paiement est déduite à partir des triangles de paiement pour chaque branche. Selon nos historiques, nous obtenons les cadences de paiement suivantes :

Année de développement	Auto RC Part	Auto MAT Part	Auto RC Prof	Auto MAT Prof	Dom_Part	Dom_Prof	RC
0	33%	71%	33%	71%	51%	51%	12%
1	61%	95%	61%	95%	89%	89%	35%
2	71%	96%	71%	96%	94%	94%	48%
3	78%	97%	78%	97%	99%	99%	57%
4	84%	100%	84%	100%	100%	100%	65%
5	88%	100%	88%	100%	100%	100%	71%
6	94%	100%	94%	100%	100%	100%	77%
7	100%	100%	100%	100%	100%	100%	85%
8	100%	100%	100%	100%	100%	100%	94%
9	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Nous supposons que la cadence de paiement pour les sinistres « tempêtes » est la même que celle de « dommage aux biens »

B. Probabilité de défaut :

Etant donnée que la cédante détient une créance vis-à-vis de son réassureur pendant toute la période du paiement des sinistres. Au lieu d'un défaut à court terme, nous nous intéressons maintenant la probabilité de défaut jusqu'à la fin de la créance correspondante. Cependant, la notation de réassureur peut évoluer au fil de temps, sa probabilité de défaut change en fonction de sa future notation

Dans ce cas là, nous devons évaluer la future notation du réassureur période par période. A la fin de chaque année, nous nous intéressons non seulement à sa probabilité de défaut, mais également à la probabilité qu'il passe à une autre notation. La dégradation de la notation du réassureur augmente son risque de défaut, cette variation devrait être prise en compte dans le calcul du risque de contrepartie.

Le mouvement de la notation du réassureur peut être modélisé à l'aide d'une matrice de transition publiée régulièrement par les agences de notation, le tableau suivant est une matrice publiée par S&P, qui évalue le changement de notation entre 1981 et 2008.

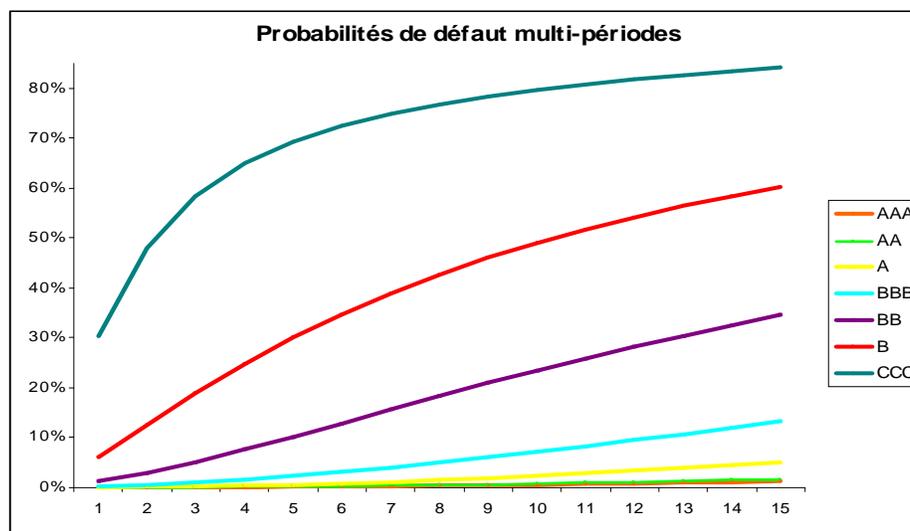
Global Corporate Average Transition Rates, 1981-2008 (%)

From/To	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
One year									
AAA	88.39	7.63	0.53	0.06	0.08	0.03	0.06	0.00	3.23
	(5.21)	(4.92)	(0.86)	(0.18)	(0.27)	(0.19)	(0.38)	(0.00)	(2.42)
AA	0.58	87.02	7.79	0.54	0.06	0.09	0.03	0.03	3.86
	(0.52)	(4.44)	(3.72)	(0.76)	(0.27)	(0.26)	(0.08)	(0.08)	(1.83)
A	0.04	2.04	87.19	5.35	0.40	0.16	0.03	0.08	4.72
	(0.14)	(1.13)	(3.50)	(2.12)	(0.50)	(0.37)	(0.07)	(0.11)	(1.98)
BBB	0.01	0.15	3.87	84.28	4.00	0.69	0.16	0.24	6.60
	(0.07)	(0.24)	(2.33)	(4.54)	(1.83)	(1.07)	(0.25)	(0.27)	(1.86)
BB	0.02	0.05	0.19	5.30	75.74	7.22	0.80	0.99	9.68
	(0.06)	(0.17)	(0.40)	(2.43)	(5.00)	(4.82)	(0.94)	(1.08)	(2.94)
B	0.00	0.05	0.15	0.26	5.68	73.02	4.34	4.51	12.00
	(0.00)	(0.13)	(0.39)	(0.34)	(2.56)	(5.29)	(2.53)	(3.17)	(3.11)
CCC/C	0.00	0.00	0.23	0.34	0.97	11.84	46.96	25.67	14.00
	(0.00)	(0.00)	(0.75)	(1.07)	(1.35)	(7.93)	(12.27)	(12.15)	(7.72)

D représente le défaut, NR représente le non rating

A partir de la matrice de transition et les probabilités de défaut attribuées à chaque classe de notation, nous pouvons déduire les probabilités de défaut multi périodes.

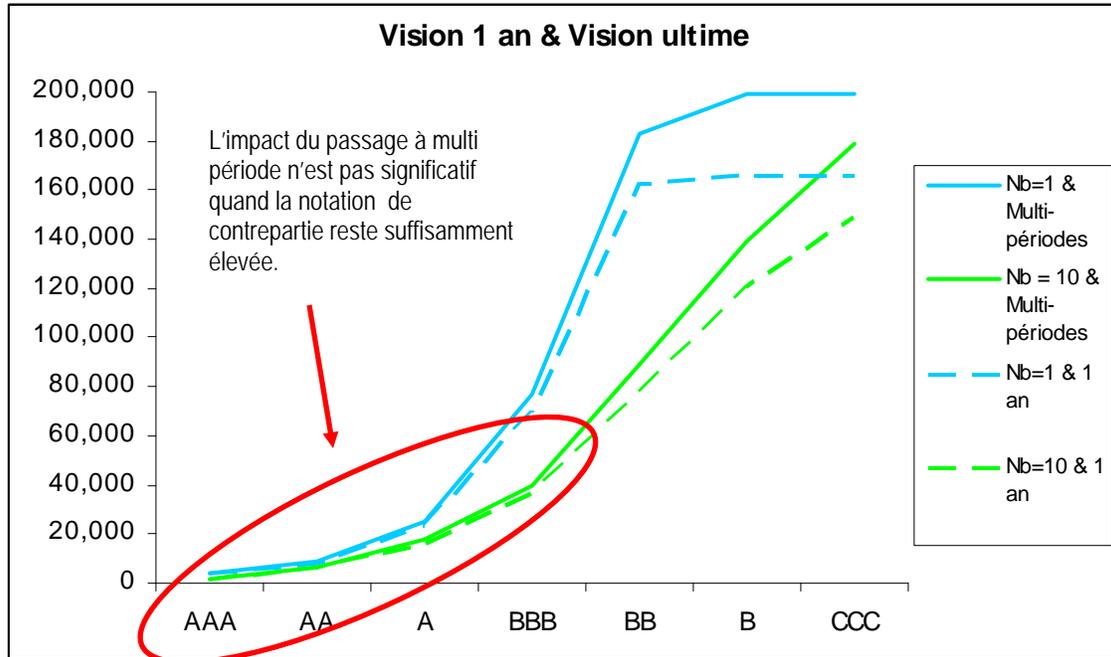
Le graphe suivant montre l'évolution de probabilité de défaut pendant 15 ans :



Les probabilités de défaut augmentent avec la durée. Mais pour les compagnies avec une notation élevée, leur probabilité de défaut reste quand même très faible.

C. Comparaison numérique

Nous modélisons le risque de défaut avec une vision ultime. Pour mesurer l'impact du changement de la durée de modélisation, nous comparons les TVaR à 99,5% obtenus avec une modélisation à un an et à l'ultime, le graphe suivant illustre cette comparaison :



Les augmentations détaillées sont listées dans le tableau suivant :

Table: Augmentation du risque de contrepartie dû au passage à la multi période (TVaR 99.5%)

Notations/diversification	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Nb = 1	426	753	2 139	6 975	20 477	32 784	33 527
Nb = 10	297	437	1 077	3 685	11 972	18 168	30 134

en k€

Nous constatons que l'impact du passage d'une vision d'un an à une vision multi période est limité quand la probabilité de défaut de contrepartie est suffisamment faible.

Malgré une augmentation de probabilité de défaut au fils de temps, la faillite d'un réassureur avec une notation élevée arrive plutôt vers la fin de période. Etant donnée que la créance correspondante diminue rapidement, même en cas de faillite, la perte de la cédante est limitée, donc l'augmentation du capital économique dans une vision multi période n'est pas significative.

Bibliographies

- [1] BAGARRY Marc, «Economic capital: a plea for the Student Copula »
- [2] BENLAGHA Nouredine & GRUM-REHOMME Michel, « Application de la théorie des valeurs extrêmes en assurance automobile »
- [3] BURKART Oliver, 2007, « Are there comovements in the default risk of reinsurance companies? »
- [4] CEBRIAN. Ana C, DENUIT M. & LAMBERTY P., 2003, « Generalized Pareto fit to society of actuaries' large claims database »
- [5] CEIOPS, 2010, « Solvency II Calibration Paper »
- [6] CEIOPS, 2010, « QIS5 Technical Specification »
- [7] Consultation Paper No. 28, 2009, « SCR standard formula – Counterparty default risk module »
- [8] Consultation Paper No. 44, 2009, « Counterparty default adjustment to recoverables from reinsurance contracts and SPVs »
- [9] Consultation Paper No. 51, 2009, « further advice on the counterparty default risk » module (Complementary to CEIOPS' Consultation Paper no. 28)
- [10] CORRADIN Stefano & VERBRIGGHE Benoit, 2001, « Economic Risk Capital and Reinsurance: an Application to Fire Claims of an Insurance Company»
- [11] DEPNEY Emilie & GODZINSKI Alexandre, 2007, « Problématique de seuil dans la modélisation du la sinistralité en Réassurance Non Vie»
- [12] Dr. RAINER SACHS, 2007, « Solvency II - Reinsurance Credit Risk »
- [13] HOSKING, J.R.M. & WALLIS, J.R., 1987, « Parameter and quintile estimation for the Generalized Pareto distribution, Technometrics 29(3) pp. 339-349 »
- [14] PLANCHET Frédéric, « Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le contexte de Solvabilité II »
- [15] MIEHE Pierre, ARNAL Pierre et DURANG Romain, 2008, « Solvabilité II va-t-elle bouleverser les stratégies de réassurance? »
- [17] Munich RE, 2008, « Impact de la réassurance sur le capital-risque : un exemple pratique »
- [18] Standard & Poor's, Default, 2009, «Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study and Notation Transitions»

[19] Swiss Re, « Understanding reinsurance: How reinsurers create value and manage risk»

[20] TER BERG Peter, 2009, «Portfolio modeling of counterparty reinsurance default risk»

[21] SARRAIL.J et VESSELINOFF.C, 2007, «Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie»