

Sommaire

INTRODUCTION	4
PARTIE 1 SOLVABILITE 2 ET LE PORTEFEUILLE DE CONTRATS GARANTIE OBSEQUES	6
CHAPITRE 1 LE PROJET SOLVABILITE 2	7
1.1 Les règles de solvabilité actuelles : état des lieux.....	7
1.1.1 Présentation	7
1.1.2 Portée et limites	10
1.2 L'historique et l'état d'avancement du projet	12
1.3 Les principes du projet	13
CHAPITRE 2 LE PORTEFEUILLE DE CONTRATS GARANTIE OBSEQUES	15
2.1 Description de la garantie	15
2.2 Description du portefeuille considéré	16
CHAPITRE 3 L'APPROCHE RETENUE PAR LE QIS 3 POUR UN PORTEFEUILLE DE CONTRATS GARANTIE OBSEQUES	18
3.1 Les provisions	18
3.1.1 La provision best estimate.....	19
a. La définition de la provision best estimate.....	19
b. Le calcul de la provision best estimate	19
c. Les recommandations générales du CEIOPS.....	19
d. Le traitement des options et garanties cachées.....	22
3.1.2 La marge de risque	23
a. Présentation de la méthode du coût du capital.....	25
b. Limites	27
3.2 Les exigences de capital : le SCR et le MCR	27
3.2.1 L'exigence de capital cible d'un portefeuille de contrats garantie obsèques (SCR)	28
a. Exigence de capital liée à l'activité d'assurance vie	29
b. Exigence de capital liée au risque de marché	33
c. Exigence de capital liée au risque opérationnel.....	37
d. Exigence de capital globale d'un portefeuille de contrats garantie obsèques.....	37
3.2.2 L'exigence de capital minimal pour un portefeuille de garanties obsèques (MCR)	38
a. Structure du MCR et corrélation des risques.....	39
b. Calcul du RPS	40
c. Calcul du $MCR_{\text{marché}}$	40
d. Calcul du MCR_{vie}	42
e. Calcul du AMCR	42
3.3 Les limites des hypothèses retenues par le QIS 3	42

PARTIE 2 LE CALCUL DU BESOIN EN CAPITAL DU PORTEFEUILLE DANS UN CADRE DETERMINISTE 44

CHAPITRE 1	LA MODELISATION DETERMINISTE DU PORTEFEUILLE	45
1.1	La modélisation des décès	45
1.2	La modélisation des rachats	48
1.3	La modélisation des frais	52
1.4	La modélisation de la participation aux bénéfices.....	53
1.5	La modélisation du taux de rendement comptable de l'actif	54
CHAPITRE 2	LA MISE EN ŒUVRE DES CALCULS	55
2.1	La provision best estimate	55
2.2	Le MCR.....	56
2.2.1	Le RPS.....	56
2.2.2	Le $MCR_{\text{marché}}$	57
2.2.3	Le MCR_{vie}	57
2.2.4	Le MCR global.....	57
2.3	Le SCR.....	58
2.3.1	Les risques d'assurance vie	58
2.3.2	Les risques de marché	60
2.3.3	Le BSCR	63
2.3.4	Le risque opérationnel.....	63
2.3.5	Le SCR global du portefeuille de contrats garantie obsèques.....	64
2.4	La marge de risque : mise en œuvre de la méthode du coût du capital	64
CHAPITRE 3	LA SENSIBILITE AUX DIFFERENTS PARAMETRES DU MODELE.....	66
3.1	Sensibilité au taux de rendement des actions.....	66
3.2	Sensibilité au taux de rachat	69
3.3	Sensibilité au montant unitaire des frais.....	71

PARTIE 3 LE CALCUL DU BESOIN EN CAPITAL DU PORTEFEUILLE DANS UN CADRE STOCHASTIQUE 73

CHAPITRE 1	LA MODELISATION STOCHASTIQUE DU PORTEFEUILLE	74
1.1	La modélisation stochastique de la mortalité.....	74
1.1.1	Un bref survol de la littérature	74
1.1.2	Le modèle de Lin et Cox (2006).....	76
a.	Présentation du modèle	76
b.	Calibrage du modèle	78
c.	Limites du modèle.....	79
1.2	La modélisation stochastique de l'actif	80
1.2.1	La modélisation du cours des actions.....	80
a.	Présentation du modèle	80
b.	Limites du modèle	81
1.2.2	La modélisation du taux court	81
a.	Présentation du modèle	81

b. Calibrage du modèle	82
c. Limites du modèle	84
1.2.3 La corrélation des deux processus.....	84
1.2.4 La discrétisation des deux processus	86
1.2.5 Les taux de rendement stochastiques obtenus	87
CHAPITRE 2 LA MISE EN ŒUVRE DES CALCULS ET LA COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DU SCENARIO DETERMINISTE MOYEN	88
2.1 La méthodologie générale.....	88
2.2 La provision best estimate	90
2.3 Le MCR.....	90
2.4 Le SCR.....	91
2.5 La marge de risque	95
CONCLUSION	96
BIBLIOGRAPHIE.....	98
ANNEXE 1 : LA COURBE DES TAUX SANS RISQUE DU QIS 3.....	101
ANNEXE 2 : LES CHOCS SUR LES TAUX DANS LE CALCUL DU BESOIN EN CAPITAL ASSOCIE AU RISQUE DE TAUX	102
ANNEXE 3 : ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE DES PARAMETRES DU MODELE DE MORTALITE STOCHASTIQUE DE LIN ET COX	103

Introduction

Une société d'assurance doit être en mesure de respecter l'ensemble des engagements qui la lient aux assurés et/ou bénéficiaires de contrats. Elle se doit d'être solvable. De nombreux dispositifs réglementaires ont été successivement élaborés en France pour répondre à cet impératif de solvabilité. Cela a abouti à un ensemble d'éléments composites parmi lesquels on peut citer l'exigence de marge de solvabilité, les règles d'allocation d'actifs, l'état T3 de gestion actif passif, etc.

La réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance a justement pour but de proposer un nouveau système de règles de solvabilité plus cohérent intégrant tous les risques auxquels les assureurs sont confrontés. Cette réforme prudentielle, nommée Solvabilité 2, devrait aboutir à un système plus lisible et plus adapté aux risques de chaque assureur. La Commission Européenne a confié au Comité européen des contrôleurs des assurances et des pensions professionnelles (CEIOPS) la réalisation d'études d'impact quantitatif (QIS) auprès des entreprises d'assurance leur permettant de tester différents modèles et paramètres pour le calcul de leur besoin en capital selon les règles provisoires proposées. L'objectif de cette démarche est de juger de la crédibilité et de la faisabilité de cette réforme provisoire.

Dans le cadre du renouvellement du système de solvabilité des compagnies d'assurance, nous nous intéressons au cas des garanties frais d'obsèques. Ces garanties exposent l'assureur à différents risques tels que le risque de mortalité, le risque de rachat, les risques de marché. Elles relèvent de l'assurance vie. Que cette garantie se décline sous forme de contrat autonome ou d'extension de garantie, les exigences de fonds propres sont les mêmes. Il s'agira donc pour nous de mesurer l'impact de cette réglementation en devenir sur le besoin en capital d'un portefeuille de garanties frais d'obsèques.

Cette étude s'articulera autour de trois points :

- La présentation du projet Solvabilité 2 et les caractéristiques du portefeuille de garanties frais d'obsèques selon les règles proposées par le QIS 3.
- Une modélisation déterministe de l'actif et du passif du bilan afin de calculer les provisions best estimate, la marge de risque et le besoin en capital de notre portefeuille et d'étudier la robustesse du nouveau modèle proposé par le QIS 3.
- Le troisième point introduira l'aléatoire dans la modélisation des différents paramètres. L'actif est rendu stochastique par l'utilisation du modèle lognormal pour les actions et celui de Vasicek (1977) pour les produits de taux. Du côté du passif, la mortalité de notre portefeuille sera modélisée avec le modèle de Lin et Cox (2006). Le but étant de calculer, dans un cadre stochastique, le besoin en capital d'une société proposant exclusivement des garanties obsèques puis de comparer l'évolution du besoin en capital entre les approches Solvabilité 1 et QIS 3.

Partie 1

Solvabilité 2 et le portefeuille de contrats garantie obsèques

Chapitre 1 Le projet Solvabilité 2

1.1 Les règles de solvabilité actuelles : état des lieux

1.1.1 Présentation

Les fondements des règles de solvabilité actuelles dans le secteur de l'assurance vie datent de 1979. Elles ont été refondues dans les années 2000. Cette refonte de la législation a donné naissance à la Directive 2002/83/CE, connue sous la dénomination Solvabilité 1. Cette réglementation est basée sur la prudence : prudence dans le calcul des provisions, prudence sur les actifs admissibles, prudence dans le calcul de l'exigence de marge de solvabilité.

Concrètement, elle s'articule autour de trois piliers :

A. La constitution de provisions techniques suffisantes calculées selon des hypothèses prudentes

Les provisions techniques apparaissent au bilan de l'assureur. Leur montant est déterminé de manière à ce que la société soit en mesure de régler les sinistres et les prestations.

Les principales provisions en assurance vie sont les provisions mathématiques (PM).

Parmi les autres provisions destinées à se prémunir contre certains risques spécifiques, on citera notamment :

- les provisions relatives aux actifs financiers¹ ;

¹ Il s'agit des provisions suivantes :

- La provision pour dépréciation durable (PDD) (article R 332-20 du Code des Assurances)

- la provision pour égalisation, qui permet de faire face aux fluctuations de sinistralité (contrats d'assurance de groupe couvrant le risque décès) ;
- la provision pour participation aux excédents (PPE), correspondant à la part de participation aux bénéfices non encore distribuée aux bénéficiaires de contrats ;
- la provision globale de gestion (PGG), destinée à compenser des charges de gestion non prises en compte par des chargements ou prélèvements sur produits financiers ;
- la provision pour frais d'acquisition reportés.

En assurance vie, la prudence préconisée dans le calcul des provisions se matérialise par :

- l'utilisation d'une table de mortalité réglementaire ou certifiée ;
- l'utilisation de taux garantis ne pouvant excéder 75 % du TME sur les 8 premières années du contrat et le minimum entre 3,5% et 60% du TME au-delà de 8 ans.

B. Des actifs sûrs, diversifiés, liquides et rentables

Du fait du décalage temporel entre le moment où l'assureur perçoit les primes et celui où il paie les sinistres ou prestations, l'assureur dispose de sommes importantes qu'il peut placer sur les marchés financiers.

Il ne serait pas prudent pour une entreprise d'investir toutes les primes dans des obligations risquées d'une même société ou dans une devise autre que celle de ses engagements. En effet, cela l'exposerait à des risques de change, de contrepartie ou de concentration trop importants d'un point de vue prudentiel.

-
- La provision pour risque d'exigibilité (PRE), « destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R 332-20 du code des assurances » ;
 - La provision pour aléas financiers (PAF), « destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif ».

C'est pour cette raison que des règles viennent encadrer ces placements qui doivent être :

- dans la même monnaie que les prestations ;
- dispersés entre les différentes classes d'actifs ;
- dispersés géographiquement.

C. Une exigence de marge de solvabilité calculée de manière forfaitaire

Depuis la directive « Solvabilité 1 », toutes les sociétés d'assurance européennes doivent disposer d'un montant de fonds propres, la marge de solvabilité, supérieur à un niveau minimal appelé exigence de marge de solvabilité (EMS).

En assurance vie, l'exigence de marge de solvabilité est calculée à partir d'une formule faisant référence aux provisions mathématiques (PM) et aux capitaux sous risque (CSR)² :

$$\text{EMS} = 4\% \text{PM} + 0,1\% \text{ à } 0,3\% \text{CSR}$$

La marge de solvabilité correspond à la somme des fonds propres et du poste « plus ou moins values latentes » de l'actif du bilan.

D'autres éléments réglementaires concourent également à assurer la solvabilité de l'entreprise d'assurance ; on peut notamment citer :

- l'état trimestriel T3 de gestion actif-passif ;
- le test d'exigibilité (l'état C6 BIS) ;
- les états C8 et C9 relatifs à la réassurance.

NB : Un tiers de l'exigence de marge de solvabilité constitue le fonds de garantie. Ce montant doit être au minimum de trois millions d'euros.

² Les capitaux sous risque sont définis comme la différence entre le montant garanti en cas de décès et la provision mathématique.

1.1.2 Portée et limites

Le système de solvabilité actuel s'est montré efficace. Au vu des chocs exceptionnels de ces dernières années (effondrement des marchés, réduction de l'activité économique, augmentation de la sinistralité...), peu de compagnies européennes ont fait faillite et les entreprises européennes demeurent solvables.

Contrairement à d'autres marchés sévèrement ébranlés (Japon, Australie), l'industrie européenne a su résister.

Ce bilan favorable peut être en partie expliqué par la conjoncture financière (baisse quasi-continue des taux longs depuis 1982) qui a généré de nombreux surplus (plus-values latentes comptables) dans les pays ayant opté pour une comptabilisation des actifs au coût historique sans revalorisation des passifs en fonction des niveaux de taux.

Il présente néanmoins un certain nombre de limites, qui sont liées aux hypothèses et au contexte.

Concrètement, il s'agit des :

A. Limites liées à des hypothèses simplistes

- Ce système émet l'hypothèse sous-jacente que l'expérience passée est un bon guide pour estimer le futur, sans possible ajustement.
- Il ne distingue pas les réassureurs des assureurs.
- Il ne fait pas de distinction entre les risques souscrits
- Il avantage les sociétés insuffisamment provisionnées et/ou qui sous-tarifent.

En bref, le système de solvabilité actuel est un système de prêt à porter qui n'est pas adapté aux spécificités de chaque compagnie. Il n'encourage pas les compagnies à analyser, gérer et contrôler leurs propres risques.

B.Limites liées au contexte « globalisé »

D'un côté, l'application des directives n'est pas homogène, notamment sur la définition des engagements à provisionner, la prise en compte des créances sur les réassureurs dans la couverture des provisions et la classification de certains contrats UC portant des garanties (EMS à 4% ou à 1% selon les états).

Il n'y a pas de réelle homogénéité du contrôle de la solvabilité des entreprises d'assurance entre les différents membres du marché unique. Par exemple, certains pays comme la Finlande et le Royaume-Uni imposent des contraintes complémentaires à leurs compagnies.

La France a de son côté mis en place des stress-tests de manière à intégrer des éléments prospectifs dans la surveillance des compagnies d'assurance.

Du point de vue de la Commission Européenne, « les marchés d'assurance sont devenus plus concurrentiels, mais aussi plus concentrés et soumis à de nouveaux risques. L'élargissement de l'Europe a aboli progressivement les barrières réglementaires et le manque d'homogénéité entre les systèmes de solvabilité risque d'être un frein à la libre concurrence ».

De l'autre côté, le système actuel de solvabilité n'intègre pas :

- la concurrence du secteur bancaire qui a revu son système de solvabilité avec la Directive Bâle 2 ;
- les évolutions récentes des règles comptables avec les normes IFRS ;
- les problèmes d'accès au marché des capitaux.

1.2 L'historique et l'état d'avancement du projet

Au début de l'année 2000, les services de la Commission Européenne ont commencé, avec les états membres, un examen général des méthodes d'évaluation de la solvabilité d'une entreprise d'assurance.

Le projet Solvabilité 2 a été scindé en deux phases :

- Étude des sujets relatifs à la forme générale du système de solvabilité ;
- Mise au point détaillée des méthodes de prise en compte des différents risques par le nouveau système.

Clôturent la première phase, la Commission Européenne a publié le 3 mars 2003, un document qui expose ses recommandations concernant l'architecture du futur système du contrôle prudentiel.

En 2004, le Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) a été créé pour les mesures les plus techniques.

Depuis lors, le Comité européen des contrôleurs des assurances et des mutuelles professionnelles (CEIOPS en anglais) publie régulièrement des notes sur les discussions en cours (les « Consultation Papers ») et propose à la profession de tester les modèles proposés via les études d'impact quantitatif (les Quantitative Impact Study ou QIS). Concernant les échanges avec la profession, les principales étapes ont été les suivantes :

- QIS 1 : printemps 2005 ;
- QIS 2 : printemps 2006 ;
- Consultations Papers 13 à 20 : été et automne 2006 ;
- QIS 3 : printemps 2007.

Une première rédaction de la directive relative aux piliers 1 et 2 a été publiée le 10 juillet 2007.

Les mesures d'exécution technique et les recommandations interprétatives sont prévues pour 2009 en vue d'une mise en place progressive à partir de 2010.

1.3 Les principes du projet

Tandis que la première réforme (« Solvabilité 1 ») avait pour but de mettre à jour le système européen de solvabilité existant, le projet Solvabilité 2 a une portée beaucoup plus vaste.

Il s'agit d'un exercice de révision plus radical du régime de solvabilité, à la lumière des évolutions actuelles de l'assurance, des techniques de gestion des risques et des techniques financières, des normes comptables ...

L'un des principaux objectifs du projet est d'établir des exigences de solvabilité mieux adaptées aux risques effectivement assumés par les entreprises d'assurance et d'encourager celles-ci à mieux évaluer et contrôler ces risques. L'objectif de « zéro faillite » demeure l'objectif officiel.

Comme les accords Bâle 2 dans le milieu bancaire, le projet Solvabilité 2 repose sur trois piliers.

Pilier 1	Pilier 2	Pilier 3
Exigences quantitatives en termes de capitaux	Surveillance prudentielle par les autorités de contrôle, surveillance du contrôle interne du risque	Information publique en vue d'améliorer la discipline de marché

Pour autant, des différences fondamentales existent entre le contrôle bancaire et le contrôle des compagnies d'assurance.

D'une part, les risques de marché et de crédit sont essentiellement des risques d'actif et il n'existe pas en banque d'équivalent aux risques de passif auxquels sont soumises les sociétés d'assurance.

D'autre part, les accords de Bâle successifs ont pour but de maintenir la stabilité du système bancaire mondial et par conséquent concernant surtout

les grandes banques internationales alors que le contrôle prudentiel en assurance a avant tout vocation à protéger les assurés contre le risque de faillite individuelle d'une compagnie.

Chapitre 2 Le portefeuille de contrats garantie obsèques

2.1 Description de la garantie

La garantie frais d'obsèques permet de couvrir les frais d'obsèques de l'assuré. Lors du décès de celui-ci, un capital est versé aux bénéficiaires du contrat.

Ce capital est revalorisé chaque année au travers de la participation aux bénéfices.

La garantie est viagère. En cas de renoncement, l'adhérent peut racheter son contrat.

La prime est également viagère et payée annuellement à terme d'avance. Son montant est revalorisé chaque année, au regard de la participation aux bénéfices.

En définitive, ce type de garantie peut être considéré comme une *Vie entière*.

Au sein de la famille des assurances en cas de décès, l'assurance *Vie entière* occupe une place bien particulière puisqu'elle comporte une valeur de rachat. La valeur de rachat en question n'est pas des moindres puisqu'elle augmente au fil des années pour atteindre asymptotiquement le montant du capital garanti.

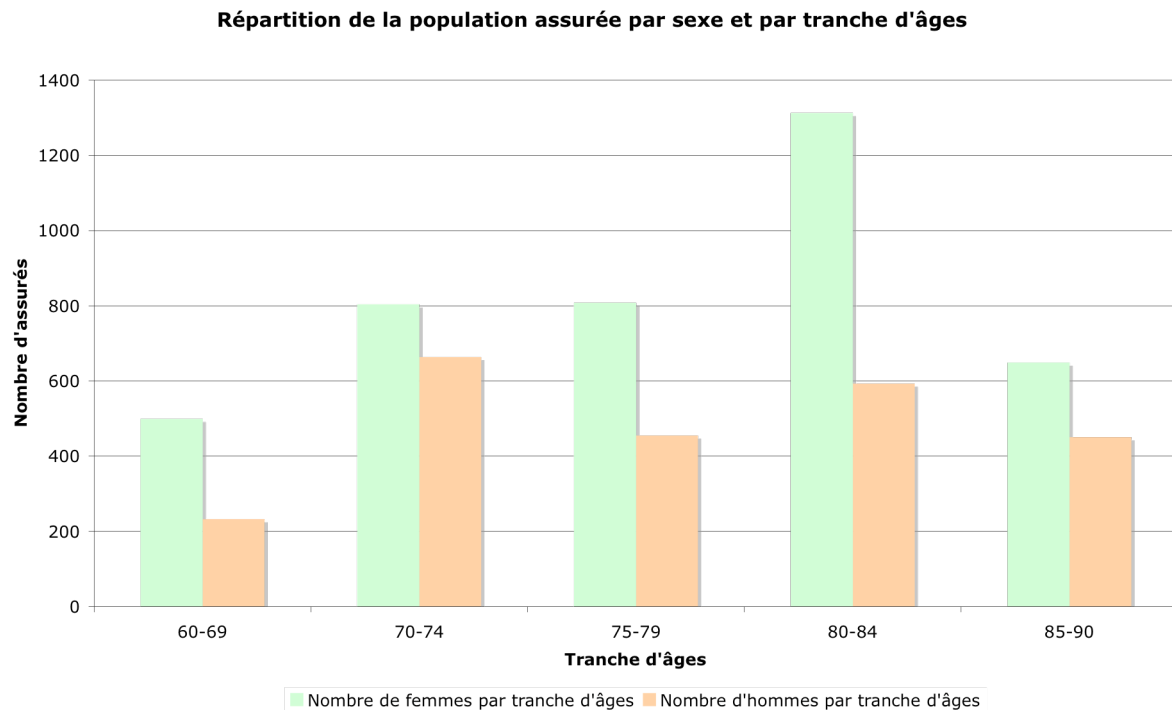
Toute la prime de l'assurance *Vie entière* est affectée à la couverture du risque décès. Cela paraît logique puisque le décès est bien le seul risque couvert par le contrat.

Le contrat n'étant pas limité dans le temps, l'engagement de l'assureur revêt un caractère certain : seule la date de versement du capital décès est indéterminée.

2.2 Description du portefeuille considéré

Notre portefeuille de contrats garantie frais d'obsèques est un portefeuille fermé composé de 6 469 contrats.

La répartition par sexe et par tranche d'âges est la suivante :

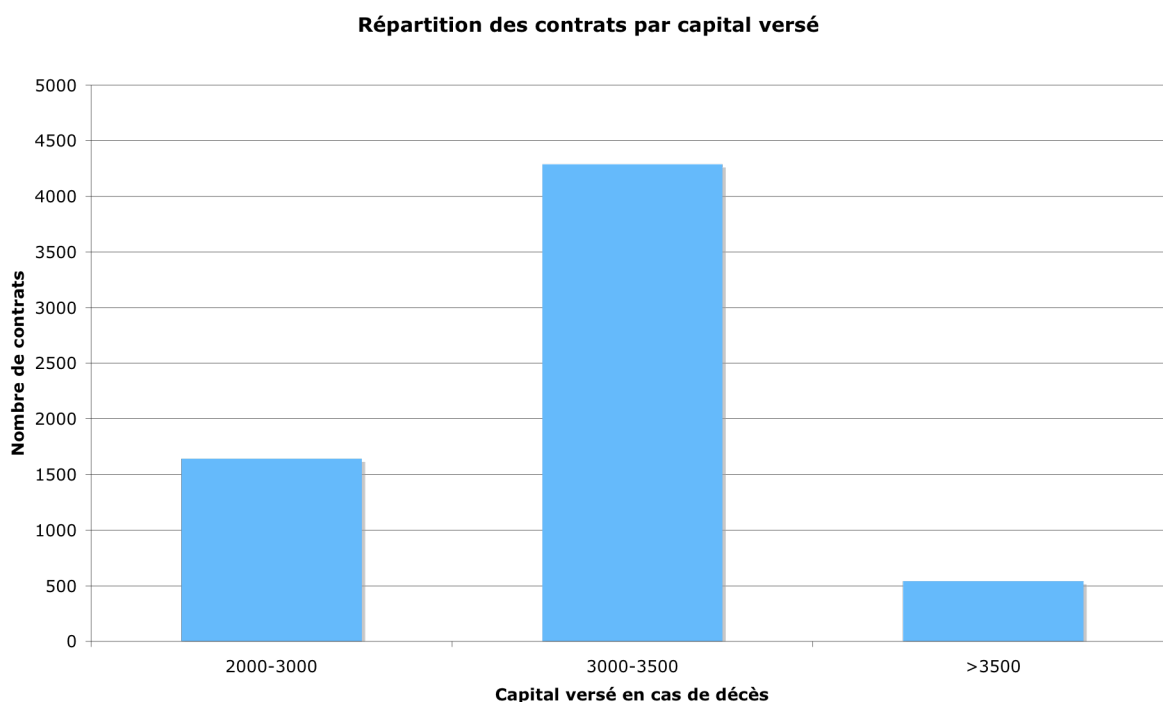


Ce graphique montre que les deux tranches d'âges prépondérantes sont les tranches 70-79 ans et 80-89 ans. La population assurée est donc une population âgée.

D'autre part, les femmes représentent plus de la moitié de la population.

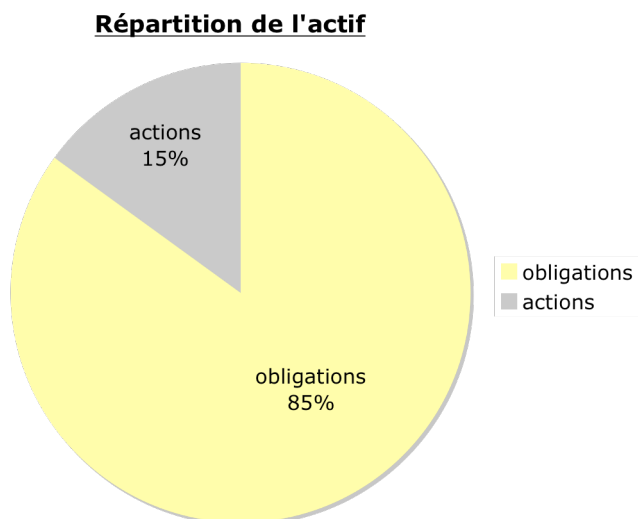
Ces deux observations marquent une des spécificités de notre portefeuille.

Les montants des capitaux versés en cas de décès se répartissent de la manière suivante :



La grande majorité des contrats garantit un capital compris entre 3 000 et 3 500 euros. Du point de vue de l'assureur, il s'agit de montants relativement faibles.

Les placements affectés aux opérations d'assurance de ce portefeuille sont répartis de la manière suivante :



2.2.1 L'approche retenue par le QIS 3 pour un portefeuille de contrats garantie obsèques³

Le QIS 3 est le troisième test d'impact proposé par le CEIOPS. Comme les précédents, il traite du premier pilier du projet.

Le QIS 3 aborde les points suivants :

- le calcul des provisions ;
- les deux niveaux d'exigence de capital : le SCR et le MCR.

Pour le CEIOPS, ce troisième test d'impact a deux objectifs :

- étudier la faisabilité des méthodes et la pertinence des modèles retenus ;
- calibrer le SCR et le MCR.

2.3 Les provisions

L'IAIS⁴ prévoit que les provisions soient suffisantes, fiables, objectives et permettent la comparaison entre les assureurs.

Pour cela, le QIS 3 prévoit que la première étape du calcul des provisions consiste à séparer les provisions qui peuvent être couvertes par des actifs financiers des autres.

Lorsque les risques peuvent être couverts par des actifs liquides ayant une valeur de marché fiable, la valeur du passif doit correspondre à la valeur de marché des actifs concernés. Le risque sur le passif est alors remplacé par le risque de fluctuation des prix et doit être intégré dans le calcul de l'exigence de capital cible.

³ Notre travail se situe dans le cadre du QIS 3 publié en avril 2007. Il ne prend pas en compte le projet de Directive publié le 10 juillet 2007. En cela, il présente déjà un caractère obsolète.

⁴ L'IAIS (International Association of Insurance Supervisors) représente les autorités de contrôle et de réglementation de 180 juridictions différentes.

Pour les risques non couvrables, il convient de valoriser le passif en best estimate et d'y ajouter la marge de risque.

2.3.1 La provision best estimate

a. La définition de la provision best estimate

Le CEIOPS a proposé la définition suivante de la provision best estimate :
« La provision best estimate est égale à la valeur actuelle des cash-flows futurs, actualisés à l'aide d'une courbe de taux sans risque adaptée, calculés à partir d'une information à jour fiable et d'hypothèses réalistes. »

b. Le calcul de la provision best estimate

Les pratiques, en matière de calcul des provisions techniques, aujourd'hui divergent d'un pays à l'autre.

Une part importante des travaux du CEIOPS et du groupe consultatif a donc visé à définir des critères harmonisés et des méthodes appropriées pour calculer le best estimate.

D'un point de vue théorique, la provision best estimate correspond à la moyenne de la loi de distribution de la valeur actuelle probable des cash-flows futurs.

c. Les recommandations générales du CEIOPS

Horizon de projection

Tous les flux futurs potentiels influant sur le passif doivent être identifiés et évalués. Il faut pour cela fixer au préalable un horizon de projection, suffisamment lointain pour tenir compte de tous les flux significatifs.

Actualisation

Les cash-flows futurs sont actualisés au taux sans risque correspondant à la maturité de chaque flux.

Le CEIOPS a fourni une courbe de taux sans risque correspondant à la maturité de chaque flux. Elle est présentée en annexe 1.

Hypothèses et paramètres

Les hypothèses retenues pour la projection des flux futurs doivent être réalistes et raisonnables au regard des données disponibles. Les paramètres doivent être basés sur l'expérience des participants.

Le recours à des données de marché doit intervenir lorsque l'expérience interne est insuffisante (données limitées donnant des résultats peu crédibles).

Les projections doivent prendre en compte les évolutions attendues dans tous les domaines : démographique, légal, médical, technologique, social, économique ... Par exemple, en cas d'allongement prévisible de l'espérance de vie, il convient d'en tenir compte dans les calculs.

Les modélisations doivent intégrer l'évolution attendue de l'inflation en tenant compte du type d'inflation auquel l'assureur est exposé.

Frais

Les dépenses futures nécessaires pour honorer les contrats doivent être provisionnées. Les frais futurs de gestion des sinistres, les frais d'administration, les frais généraux ... sont à intégrer dans le calcul de la provision best estimate.

Les éventuelles augmentations des coûts prévisibles doivent être intégrées dans les hypothèses.

Les frais relatifs à l'encaissement des primes futures doivent également être pris en compte.

L'évolution doit être basée sur l'expérience de l'entreprise et éventuellement sur des données de marché. En revanche, il ne doit pas être introduit d'hypothèse d'économies d'échelle si celles-ci ne sont pas encore réalisées.

Impôts

Les dépenses liées aux taxes et impositions doivent être prises en compte, selon les taux d'imposition applicables au moment de l'évaluation et les pertes et bénéfices projetés.

Réassurance

La provision best estimate doit être calculée en brut et en net de réassurance. Il n'y a pas lieu de supposer un risque de défaut du réassureur (ce risque est compris dans le calcul du besoin en capital).

En revanche, il est proposé de tenir compte du délai de récupération de la réassurance, car il peut y avoir un impact sur la valeur actualisée des flux.

Options et garanties complémentaires

Les options et garanties incluses dans les contrats fournissant des droits supplémentaires aux assurés / bénéficiaires doivent être évaluées et prises en compte dans le calcul.

Prise en compte des primes futures des contrats existants

Les primes futures doivent être probabilisées, à partir de probabilités cohérentes par rapport à celles utilisées pour les autres cash-flows.

Toutes les primes futures ne sont pas à prendre en compte. Les primes correspondant à un engagement contractuel sont à prendre en compte alors que les montants de primes excédant les niveaux contractuels ou les primes correspondant à des contrats à renouveler ne doivent pas être intégrés.

d. Le traitement des options et garanties cachées

La provision best estimate doit tenir compte de la valeur des options et garanties cachées dans les contrats.

La valeur d'une option se scinde en deux composantes :

- la valeur intrinsèque ;
- la valeur temps.

La valeur intrinsèque d'une option d'achat est égale à la différence, si elle est positive entre le cours de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice de l'option. Pour une option de vente, c'est l'opposé.

La valeur intrinsèque d'une option représente le profit qui serait obtenu si l'on décidait d'exercer immédiatement l'option.

La valeur d'une option vaut toujours plus que sa valeur intrinsèque puisqu'il y a toujours une possibilité pour que d'ici l'échéance de l'option, l'évolution du cours du sous-jacent accroisse la valeur de l'option. La valeur temps mesure cette probabilité. Ainsi, même lorsque l'option a une valeur intrinsèque nulle, la valeur de l'option est égale à sa valeur temps. Par contre, à l'échéance, la valeur d'une option est uniquement égale à sa valeur intrinsèque. La valeur temps est nulle.

Les options et garanties financières incluses dans les contrats d'assurance confèrent à l'assuré des droits variés et sont destinées à rendre les contrats plus souples et plus attractifs.

Les options et garanties rencontrées dans les contrats garantie frais d'obsèques sont de deux types :

- l'option de rachat ;
- la participation aux bénéfices.

Pour calculer la valeur temps d'une option générée par une garantie, le recours à des scénarios déterministes est jugé insuffisant.

Le QIS 3 préconise d'utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- si l'option ou la garantie est couvrable, utilisation de la valeur de marché de la couverture ou du portefeuille répliqué ;
- une approche stochastique utilisant une modélisation d'actifs cohérente avec le marché.

La méthode de réplication d'un portefeuille d'actifs consiste à établir une combinaison de produits existants sur les marchés et qui génère les mêmes cash-flows que les garanties accordées par le contrat d'assurance.

Le tableau ci-dessous présente les équivalences entre les garanties et options nommées précédemment et les options financières existant sur le marché.

Assurance Vie	Produit financier équivalent
Participation aux bénéfices	Call européen
Option de rachat	Put américain à la valeur de l'épargne constituée

Notre choix se portera sur la seconde méthode, de façon à mesurer le coût de toutes les options à la fois.

Cette approche doit utiliser une modélisation des rendements d'actifs dynamique adaptée au marché.

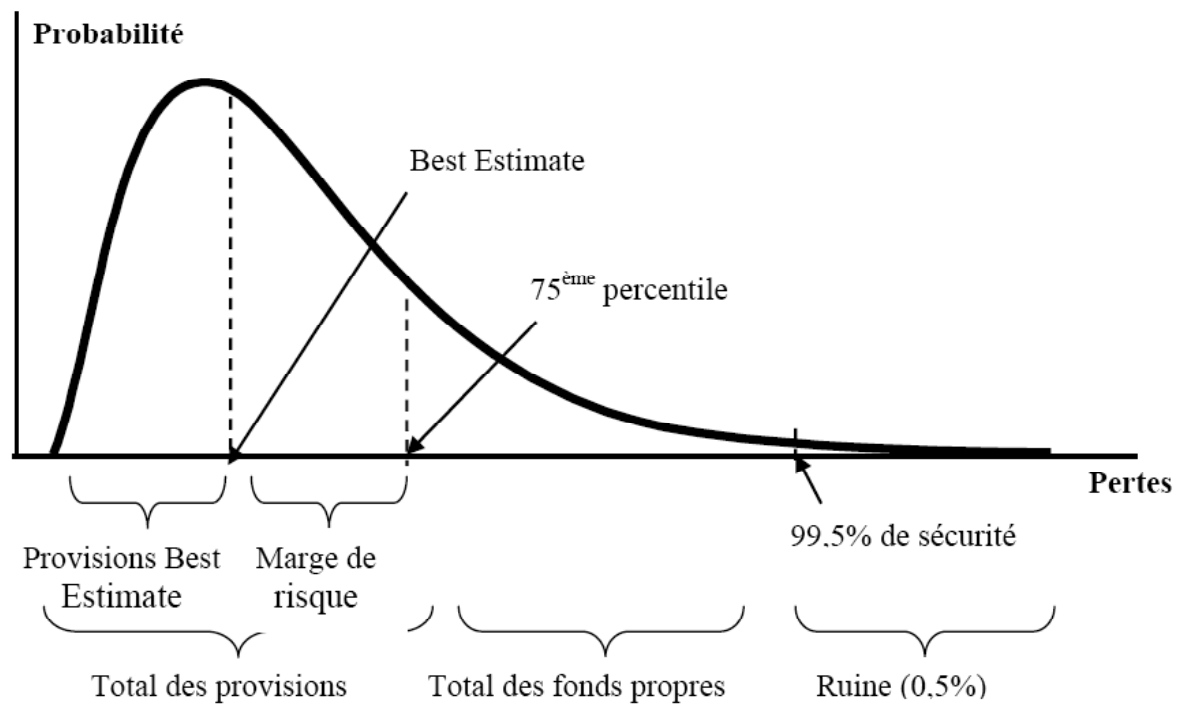
2.3.2 La marge de risque

Les provisions techniques doivent refléter les incertitudes des marchés et doivent donc contenir une marge de risque ayant pour objectifs :

- de garantir la possibilité de transférer le portefeuille à un tiers avec un niveau de confiance suffisant ;

ou

- de recapitaliser la compagnie avec un niveau de confiance suffisant pour couvrir un scénario de run-off préalablement défini. La marge de risque est statistiquement justifiée par l'aléa lié à la liquidation des sinistres ;



Plusieurs logiques sont à l'étude :

- Une approche statistique (méthode des quantiles) : cette approche vise à déterminer à partir de méthodes statistiques les risques inhérents à la liquidation en mali des provisions.
- Une approche économique (méthode du coût du capital) : cette approche vise à déterminer le coût d'immobilisation du capital d'un repreneur du risque en cas de reprise du portefeuille en run-off.
- Une approche de type stress test : cette approche qui ne concerne que l'assurance vie vise à déterminer la marge de risque à partir d'un recalcul des provisions sur la base de stress tests prédéfinis.

Pour des passifs non couvrables, le QIS 3 préconise la méthode du coût du capital.

a. Présentation de la méthode du coût du capital

Cette méthode est directement inspirée de la notion de coût d'immobilisation des capitaux propres utilisée dans les calculs de valorisations de sociétés d'assurance et propose une cohérence avec la notion de juste valeur d'un contrat au sens des normes IFRS.

Il s'agit de mesurer le coût d'immobilisation des capitaux propres nécessaires à la reprise du passif en run-off.

La coût du capital est alors le prix qu'une tierce partie demanderait pour fournir le capital exigé pour financer les passifs jusqu'à leur expiration.

La méthode COC est directement basée sur un concept d'« exit-value » (fondé sur la valeur de sortie qui est le prix auquel un actif pourrait être vendu ou liquidé) pour les provisions techniques.

Par construction, la méthode permet de répondre aux deux exigences principales du CEIOPS : couverture complète d'un scénario de run-off et capacité de transférer à un repreneur potentiel.

Pratiquement, l'objectif est de déterminer le SCR (dont le principe est présenté supra) qui serait immobilisé par le repreneur sur toute la durée de liquidation des provisions.

Les principales hypothèses dans l'application de la méthode concernent le taux de rémunération du capital et la détermination des SCR futurs.

La démarche proposée par le QIS 3 est la suivante :

Étape 1 – Calcul du SCR en $t=1$ et pour chaque année de projection.

La principale difficulté dans la mise en œuvre consiste dans :

- la détermination des différents SCR pour chaque année de projection ;
- leur ventilation par risque.

Le CEIOPS propose les démarches suivantes :

- En $t=1$, le SCR intègre le risque de marché.
- À partir de $t=2$, les SCR sont limités au risque de souscription (vie) et au risque opérationnel.

Étape 2 – Calcul de la rémunération du capital pour chaque année.

Le CEIOPS propose une rémunération du capital immobilisé de 6%.

Étape 3 – Calcul de la valeur actualisée des flux de rémunération du capital.

La marge de risque est calculée en actualisation des flux de rémunération du capital au taux sans risque.

En résumé, la marge de risque vérifie :

$$\text{Marge de risque} = 6 \% \times \sum_t SCR(t) \times v^t$$

où v est le facteur d'actualisation.

La mise en œuvre des calculs de la marge de risque peut s'avérer fastidieuse. Le CEIOPS propose alors d'approximer le SCR par les formules suivantes :

$$SCR(1) = SCR(0) \times \frac{PBE(1)}{PBE(0)}$$

$$SCR'(t) = SCR'(0) \times \frac{PBE(t)}{PBE(0)}, \text{ pour } t \in \{2, 3, \dots\}$$

où :

- $SCR(0)$ est le capital cible à la date $t=0$;
- $SCR'(t)$ est le capital cible calculé sans référence au risque de marché à la date t ;
- $PBE(t)$ est la provision best estimate de la date t .

b. Limites

La méthode du coût du capital correspond à une logique économique de continuité de la liquidation des passifs et de reprise d'activité. Elle part cependant du postulat qu'une entreprise serait intéressée par la reprise du portefeuille.

Or les reprises de portefeuille passent systématiquement par une analyse détaillée de la situation de l'entreprise à reprendre par les éventuels repreneurs.

En cas de sous estimation du best estimate ou en cas de non-adéquation de la prime de risque à la volatilité, il est peu probable que l'on trouve un repreneur car les risques réels sont plus importants que les risques « forfaitaires » couverts par la marge de risque.

2.4 Les exigences de capital : le SCR et le MCR

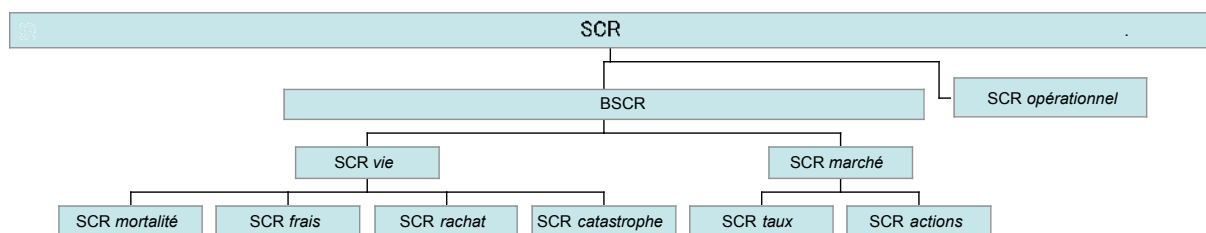
Le QIS 3 propose deux paliers d'exigence de capital :

- **Un seuil minimal obligatoire** (MCR : Minimum Capital Requirement) pour rester dans le marché. Actuellement, le fonds de garantie minimum et la marge de solvabilité réglementaire répondent à cette fonction. Dans le cadre du projet Solvabilité 2, si ce seuil minimal n'était pas atteint, les autorités de contrôle pourraient retirer l'agrément à la compagnie d'assurance.
- **Un capital cible** (SCR : Solvency Capital Requirement) pour faire face aux aléas de l'exploitation, pour maintenir un risque de faillite quasiment nul. Il s'agit d'un capital cible mais pas forcément d'un capital minimum requis. Il doit être plus élevé que le MCR.

2.4.1 L'exigence de capital cible d'un portefeuille de contrats garantie obsèques (SCR)

Les paramètres et hypothèses utilisés pour le calcul du SCR sont destinés à refléter une mesure du risque VaR (calibré selon un niveau de confiance de 99,5%) sur un horizon à 1 an.

Le schéma de décomposition du SCR global d'un portefeuille de contrats garantie obsèques est le suivant :



La formule standard de calcul du SCR est la suivante :

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{\text{op}}$$

Le **BSCR** représente le SCR de base. Il mesure le besoin en capital des deux modules de risques (marché et souscription vie).

Pour le calcul du BSCR, on a besoin de calculer les montants suivants :

- **SCR_{marché}** : le capital requis pour le risque de marché ;
- **SCR_{vie}** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance vie.

Chaque montant est calculé à partir des risques individuels (risque actions, risque de mortalité, ...) : pour chacun, un modèle donné permet de calculer un besoin en capital représentatif du risque. Les besoins des risques individuels d'un même module sont agrégés en appliquant une matrice de corrélation tenant compte des interactions pouvant exister en situation de stress.

Le BSCR est calculé en appliquant une matrice de corrélation aux besoins calculés pour chaque module.

Celui-ci est ensuite ajusté par le module **SCR_{op}** représentant le capital requis pour le risque opérationnel afin d'obtenir le SCR final.

Le BSCR résulte de l'agrégation des risques pris volontairement par l'assureur. Le risque opérationnel, n'étant pas un risque pris volontairement par l'assureur, il occupe une place spéciale dans le calcul du SCR. Il peut être considéré comme un « coût pur ».

a. Exigence de capital liée à l'activité d'assurance vie

Le risque lié à l'activité d'assurance vie d'un portefeuille de contrat garantie obsèques est scindé en plusieurs risques : risque de mortalité, risque de rachat, risque de frais et risque de catastrophe.

Le risque de mortalité (Vie_{mort})

Le risque de mortalité est calculé pour les contrats garantissant des prestations en cas de décès, c'est-à-dire pour les contrats pour lesquels une augmentation des taux de mortalité conduit à une augmentation des provisions techniques.

Il vise à mesurer le risque d'incertitude lié à la mortalité ; ce risque comprend le risque de tendance et le risque de paramètre. L'approche vise à évaluer l'impact d'un scénario d'aggravation de la mortalité, testé sur chaque contrat d'assurance en cas de décès.

$$Vie_{mort} = \sum_i \Delta NAV / choc \text{ de mortalité}$$

où :

- l'indice i représente les polices garantissant des prestations en cas de décès ;

- NAV est la valeur des actifs nette des passifs ;
- choc de mortalité est un choc, supposant une augmentation annuelle des taux de mortalité de 10 % pour chaque âge.

Pour ce risque, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc (${}_bVie_{mort}$) ; l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé (${}_nVie_{mort}$).

L'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices, notée KC_{mort} , se calcule de la manière suivante :

$$KC_{mort} = {}_bVie_{mort} - {}_nVie_{mort}$$

Ce facteur permet de prendre en compte l'absorption des risques par l'effet de la participation aux bénéfices, suite au choc.

Le risque de rachat (Vie_{rachat})

Le risque de rachat désigne le risque de constater un taux imprévu de rachats, de radiations, ou de cessation de paiement de primes. Ce taux imprévu peut être un taux plus élevé ou plus bas que le taux anticipé.

L'approche vise à évaluer l'impact sur l'ensemble des contrats de l'hypothèse la plus favorable chaque année des situations suivantes :

- une augmentation de 50 % des taux annuels de résiliation ;
- pour les contrats dont la valeur de rachat est supérieure aux provisions techniques, une augmentation de 3 % par an des taux de résiliation ; pour les autres contrats, une diminution de 50 % des taux annuels de résiliation.

$$Vie_{rachat} = \sum_i (\Delta NAV \mid \text{variation des taux de rachat})$$

Pour ce risque, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc (${}_bVie_{rachat}$) ; l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé (${}_nVie_{rachat}$) .

L'atténuation par l'effet de participation aux bénéfices, notée KC_{rachat} , se calcule de la manière suivante :

$$KC_{rachat} = {}_bVie_{rachat} - {}_nVie_{rachat}$$

Le risque de frais

Le risque de frais résulte de la variation des frais liés aux contrats d'assurance.

L'approche vise à simuler l'impact d'une hypothèse :

- de niveau de frais futurs supérieur de 10 % aux prévisions best estimate ;
- d'augmentation des frais de 1 % par an de plus que l'augmentation anticipée.

$$Vie_{frais} = \Delta NAV \mid \text{dérive des frais}$$

Pour ce risque, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc (${}_bVie_{frais}$) ; l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé (${}_nVie_{frais}$).

L'atténuation par l'effet de participation aux bénéfices, notée KC_{frais} , se calcule de la manière suivante :

$$KC_{frais} = {}_bVie_{frais} - {}_nVie_{frais}$$

Le risque de catastrophe

Le risque catastrophe désigne des événements extrêmes ou très irréguliers (une pandémie par exemple). Ce risque est scindé en risque biométrique et risque de rachat.

Le montant du capital requis est calculé à partir des montants obtenus pour chacun des sous-risques (biométriques, rachat).

$$Vie_{cat} = \sqrt{Vie_{cat,mort}^2 + Vie_{cat,rachat}^2}$$

- Composante liée au risque biométrique :

$$Vie_{cat,mort} = 0,0015 \times \text{Capitaux sous risque}$$

- Composante liée au risque de rachat :

$$Vie_{cat,rachat} = 0,75 \times |VR - PT|$$

où :

- VR est la valeur de rachat ;
- PT sont les provisions techniques.

Agrégation des risques de souscription vie : calcul du SCR_{vie}

Les besoins en capitaux calculés pour chaque risque sont agrégés à partir d'une matrice de corrélation donnée.

$$SCR_{vie} = \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c} \times Vie_r \times Vie_c}$$

La matrice de corrélation est donnée par :

	Mortalité	Rachat	Frais	Catastrophe
Mortalité	1			
Rachat	0	1		
Frais	0,25	0,5	1	
Catastrophe	0	0	0	1

De la même façon, KC_{vie} est calculé à partir de la matrice de corrélation :

$$KC_{vie} = \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c} \times KC_r \times KC_c}$$

b. Exigence de capital liée au risque de marché

Notre actif étant simplifié, nous supposons qu'il n'est soumis qu'à deux types de risques : le risque de taux d'intérêt et le risque sur les actions.

Le risque de taux d'intérêt (Marché_{taux})

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de taux d'intérêt.

Les actifs concernés sont les investissements à revenu fixe (obligations et OPCVM obligataires), les instruments de financement (capital d'emprunt), les produits dérivés de taux d'intérêt, ... Tous les actifs sont pris en compte, même ceux qui ne font pas face à des provisions.

L'actualisation des provisions techniques aux taux du marché rend ces éléments sensibles au taux. Les provisions techniques interviennent donc dans la détermination du besoin de capital.

Le principe est de calculer la valeur des actifs nette des passifs dans l'hypothèse d'une modification de la totalité de la courbe des taux à partir d'évolutions à la hausse et à la baisse par maturité des flux.

$$\text{Marché}_{\text{taux}} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \Delta \text{NAV} | \text{choc à la hausse} \\ \Delta \text{NAV} | \text{choc à la baisse} \end{array} \right\}$$

où NAV est la valeur des actifs nette des passifs et les chocs testés sont présentés en annexe 2.

Pour ce risque, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc (${}_b\text{Marché}_{\text{taux}}$) ; l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé (${}_n\text{Marché}_{\text{taux}}$).

L'atténuation par l'effet de participation aux bénéfices, notée KC_{taux} , se calcule de la manière suivante :

$$\text{KC}_{\text{taux}} = {}_b\text{Marché}_{\text{taux}} - {}_n\text{Marché}_{\text{taux}}$$

Le risque sur les actions

Le risque sur les actions résulte de la volatilité des prix de marché des actions. L'exposition à ce risque se rapporte à tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de prix des actions.

Le module $\text{Marché}_{\text{actions}}$ vise à mesurer le risque systématique actions, tandis que le risque lié à une mauvaise diversification du portefeuille actions est pris en compte dans le risque de concentration (non pris en compte dans notre étude).

Le modèle est basé sur deux indices et suppose que toutes les actions ont la même exposition au risque que l'un de ces indices, en termes de volatilité et de corrélations ($\beta = 1$).

Les deux indices pris en compte sont les suivants :

1	Global
2	Autres

L'indice 'Autres' désigne les actions des marchés émergents, les actions non cotées, les investissements alternatifs, ...

Notre actif ne comporte pas de couverture.

Étape 1. Stress pour chaque indice

Le besoin en capital alloué à l'indice i est mesuré par la relation suivante:

$$\text{Marché}_{\text{actions},i} = \text{Max}(\Delta NAV / \text{choc actions indice } i ; 0)$$

où le choc pour l'indice i est défini par une baisse de l'indice de :

	Indice	Volatilité
1	Global	32%
2	Autres	45%

Étape 2. Agrégation – Calcul du besoin en capital

Le besoin en capital $\text{Marché}_{\text{actions}}$ est obtenu en appliquant une matrice de corrélation à la matrice $\text{Marché}_{\text{actions},i}$.

Les corrélations à prendre en compte sont les suivantes :

Indice	Global	Autres
Global	1	
Autres	0,75	1

Pour ce risque, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant que les taux de participation sont identiques avant et après le choc (${}_b\text{Marché}_{\text{actions}}$; l'autre supposant que les taux de participation varient du fait du choc testé (${}_n\text{Marché}_{\text{actions}}$).

L'atténuation par l'effet de participation aux bénéfices, notée KC_{actions} se calcule de la manière suivante :

$$KC_{\text{actions}} = {}_b\text{Marché}_{\text{actions}} - {}_n\text{Marché}_{\text{actions}}$$

Agrégation des risques de marché : calcul du $SCR_{\text{marché}}$

Les besoins en capitaux calculés pour chaque risque sont agrégés à partir d'une matrice de corrélation donnée.

$$SCR_{\text{marché}} = \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c} \times \text{Marché}_r \times \text{Marché}_c}$$

La matrice de corrélation est donnée par :

	Taux	Actions
Taux	1	
Actions	0	1

De la même façon, le facteur $KC_{\text{Marché}}$ est calculé à partir de la matrice de corrélation :

$$KC_{\text{marché}} = \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c} \times KC_r \times KC_c}$$

c. Exigence de capital liée au risque opérationnel

Le risque opérationnel est le risque de perte provenant de processus internes inadaptés.

En assurance vie, l'exigence de capital retenue pour le risque opérationnel est la suivante :

$$SCR_{Op} = \min\{Op_{\text{chargement}} \times BSCR ; \max\{0,03 \times Pacq, 0,03 \times PT\}\}$$

où :

- Pacq et PT sont respectivement les montants (bruts de réassurance) des primes acquises pendant l'année précédente et des provisions techniques en assurance vie :
- $Op_{\text{Chargement}}$ est un coefficient fixé entre 25% et 50%.

Le QIS 3 introduit un facteur de charge afin de limiter la part totale du risque opérationnel.

d. Exigence de capital globale d'un portefeuille de contrats garantie obsèques

Le BSCR se calcule de la manière suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{rxc} CorrSCR_{rxc} \cdot SCR_r \cdot SCR_c} - \min(\sqrt{\sum_{rxc} CorrSCR_{rxc} \cdot KC_r \cdot KC_c}; FDB)$$

où les facteurs KC_{module} sont les facteurs de réduction de risque pour la prise en compte des participations aux bénéfices et FDB est le montant total dans les provisions techniques correspondant à la distribution des participations aux bénéfices.

Les coefficients $CorrSCR_{rx}$ sont les coefficients de la matrice de corrélation suivante :

	SCR _{marché}	SCR _{créd}	SCR _{vie}
SCR _{marché}	1		
SCR _{créd}	0,25	1	
SCR _{vie}	0,25	0,25	1

Finalement, nous obtenons le SCR final d'un portefeuille de contrats garantie frais d'obsèques avec la formule suivante :

$$SCR = BSCR + SCR_{op}$$

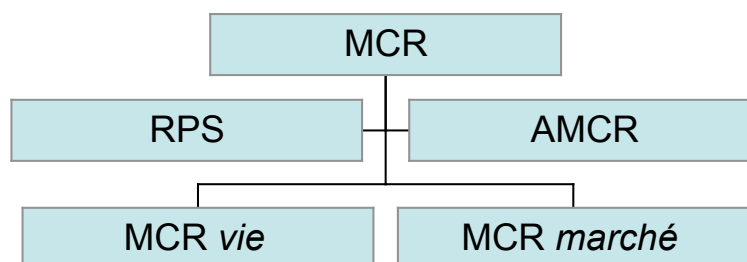
Le facteur de réduction lié à l'effet de la participation aux bénéfices, KC, est calculé à partir de la même matrice de corrélation.

2.4.2 L'exigence de capital minimal pour un portefeuille de garanties obsèques (MCR)

Le MCR est le montant minimum de capitaux propres à détenir. En cas de franchissement de cette limite, il y a un risque de retrait d'agrément de la part de l'ACAM.

A l'instar du SCR, le calibrage du MCR suit un horizon à un an, mais avec un niveau de confiance cible de la VaR de 90%.

Le modèle de calcul du MCR pour un portefeuille de contrats garantie obsèques est plus simple que celui du SCR.



Le calcul du MCR nécessite la détermination des éléments suivants :

- $MCR_{\text{marché}}$: capital minimum requis pour le risque de marché ;
- MCR_{vie} : capital minimum requis pour le risque lié à l'assurance vie ;
- RPS : absorption des risques en assurance vie ;
- AMCR : capital minimum requis absolu.

Deux méthodes sont à tester pour le calcul de $MCR_{\text{marché}}$. Trois planchers ont également été proposés avec un plancher de référence et deux autres choix alternatifs.

a. Structure du MCR et corrélation des risques

Le MCR avant l'application du seuil doit être calculé en prenant en compte les corrélations entre modules de la manière suivante :

$$MCR = \sqrt{\sum_{r,c} \text{Corr}MCR_{r,c} \cdot MCR_r \cdot MCR_c} - RPS$$

où $\text{Corr}MCR_{r,c}$ est l'élément de la matrice de corrélation suivante :

CorrMCR	$MCR_{\text{marché}}$	MCR_{vie}
$MCR_{\text{marché}}$	1	0,25
MCR_{vie}	0,25	1

Le MCR après l'application du seuil est défini de la manière suivante :

$$MCR /_{\text{AMCR}} = \max\{ MCR ; \text{AMCR} \}$$

Dans toute la section concernant le calcul du MCR, le calcul des provisions techniques doit être conforme aux règles exposées dans le QIS3 ; les provisions techniques n'intègrent pas la marge de risque.

b. Calcul du RPS

Le RPS a pour but de tenir compte de l'éventuel effet d'atténuation lié à la participation aux bénéfices future sur la variation de valeur. Il n'impacte pas le module MCR_{vie} puisqu'il vient directement en déduction du besoin en capital minimal.

Pour le calcul du RPS les quantités suivantes sont nécessaires :

- $TP_{wp,i}$: la partie de la provision technique concernant le groupe de contrats i avec clause de participation aux bénéfices. Ceci inclut le rendement garanti contractuel et le rendement lié aux PB futures.
- $TP_{rachat,i}$: Valeur de rachat avec le taux de rendement garanti du groupe de contrats i avec clause de participation aux bénéfices (le rendement lié aux PB futures est exclu).
- $TP_{bénéfices,i}$: la partie de la provision technique représentant la PB future non garantie, pour le groupe de contrats i avec clause de participation aux bénéfices.

Ces quantités doivent être calculées selon les méthodes du QIS3.

Le calcul de RPS s'effectue de la manière suivante :

$$RPS = \sum_i \min[\max(TP_{wp,i} - TP_{rachat,i}; 0); TP_{bénéfices,i}]$$

c. Calcul du $MCR_{marché}$

Deux méthodes ont été proposées pour le calcul de ce module. Pour les deux méthodes, le calcul doit être fait sur la base du bilan complet.

Les quantités suivantes sont nécessaires au calcul de $MCR_{marché}$ pour un portefeuille composé d'actions et d'obligations:

- EQU : la valeur de marché des actions ;
- FI : la valeur de marché des actifs à revenu fixe. (y compris les obligations d'Etat) ;

- FI^* : la valeur de marché des actifs à revenu fixe, à l'exclusion des obligations émises ou garanties par les Etats de l'OCDE ou de l'EEE ;
- D_{FI} : la duration moyenne des flux dégagés par les actifs à revenu fixe ;
- D_{TP} : la duration moyenne des provisions techniques (best estimate) ;
- $r(t)$: la courbe des taux zéro coupon.

NB : Les cash-flows utilisés pour déterminer les durations sont les mêmes que dans le calcul des provisions techniques best estimate.

Méthode 1

Le $MCR_{marché}$ est calculé selon la formule suivante :

$$MCR_{marché\ 1} = \sqrt{(0.12 \cdot EQU)^2 + (0.054 \cdot FI)^2}$$

Méthode 2

$$MCR_{marché\ 2} = \sqrt{(MCR_{action})^2 + (MCR_{sign})^2 + (MCR_{taux})^2}$$

où les sous-composantes représentent respectivement le risque action, le risque de signature et le risque de taux d'intérêt.

Elles sont calculées de la manière suivante :

$$MCR_{action} = 0.12 \cdot EQU$$

$$MCR_{sign} = 0.025 \cdot FI^*$$

$$MCR_{taux} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ FI \cdot D_{FI}^{mod} \cdot r(D_{FI}^{mod}) \cdot s^{up} - TP \cdot D_{TP}^{mod} \cdot r(D_{TP}^{mod}) \cdot s^{up} \\ FI \cdot D_{FI}^{mod} \cdot r(D_{FI}^{mod}) \cdot s^{down} - TP \cdot D_{TP}^{mod} \cdot r(D_{TP}^{mod}) \cdot s^{down} \end{array} \right\}$$

où la duration modifiée⁵ pour les cash-flows vérifie $D_c^{\text{mod}} = \frac{1}{1 + r(D_c)} D_c$ et $s^{\text{up}} = 0.18$, $s^{\text{down}} = -0.20$.

d. Calcul du MCR_{vie}

Dans le cas d'un portefeuille de contrats garantie obsèques, le MCR_{vie} vérifie :

$$MCR_{\text{vie}} = MCR_{\text{mort}} = 0.00025 \times CSR$$

où CSR sont les capitaux sous risque nets de réassurance.

e. Calcul du AMCR

Le principal plancher à tester a été fixé à un million d'euros. Les deux alternatives proposées sont deux et trois millions d'euros.

2.5 Les limites des hypothèses retenues par le QIS 3

Nous avons identifié des limites dans la modélisation retenue par le QIS 3. Elles se situent à trois niveaux.

➤ L'utilisation de formules comportant des paramètres

Les paramètres contenus dans les différentes formules ont été calibrés. Par conséquent, le besoin en capital calculé est fortement dépendant de ces calibrages.

⁵ La duration, D_c , associée aux cash-flows $C(i)$ s'écrit de la manière suivante :

$$D_c = \frac{\sum_i \frac{t(i)C(i)}{(1+r)^{t(i)}}}{\sum_i \frac{C(i)}{(1+r)^{t(i)}}}$$

➤ L'actualisation avec la courbe des taux zéro coupon « déterministe »

Le QIS 3 préconise l'actualisation de tous les flux futurs avec la courbe des taux zéro coupon. Cette courbe est déterministe. Dans un cadre de modélisation stochastique, où les taux d'intérêt ont été modélisés dans un monde sans opportunité d'arbitrage, cette approche peut apparaître aberrante. Pour plus de cohérence, l'utilisation de la théorie des déflateurs pourrait être envisagée. Cette théorie consiste à élaborer un modèle stochastique dans lequel les cash-flows futurs sont projetés puis valorisés par une méthode « market consistent ». La fonction d'actualisation utilisée est alors elle-même stochastique.

➤ MCR, SCR et duration

La formule du MCR associée au risque de taux (méthode 2) apparaît être une fonction croissante de la duration (de l'actif et du passif).

Dans le calcul du SCR associé au risque de taux d'intérêt, les chocs sont plus faibles pour des maturités plus longues. Nous pouvons alors nous attendre à ce que le SCR lié au risque de taux soit une fonction décroissante de la duration.

Le MCR et le SCR variant en sens inverse, cela peut mener à un MCR (méthode 2) supérieur au SCR.

Partie 2

Le calcul du besoin en capital du portefeuille dans un cadre déterministe

Chapitre 1 La modélisation déterministe du portefeuille

1.1 La modélisation des décès

La mortalité est l'élément prédominant dans la modélisation des garanties frais d'obsèques. Pour obtenir une mortalité au plus proche de celle de notre portefeuille, nous appliquons le modèle de Brass (1971) aux tables réglementaires⁶.

Le modèle de Brass fait partie de la famille des méthodes relationnelles. Celles-ci permettent de définir la mortalité étudiée en fonction d'une table de référence. William Brass a suggéré la relation Logit⁷-linéaire qui est considérée comme très efficace. Il s'agit de :

$$\text{Logit}(q_x^{obs}) = \alpha \times \text{Logit}(q_x^{ref}) + \beta$$

L'idée sous-jacente est que la transformation (Logit) absorbe la forme générale de la mortalité, permettant ainsi d'obtenir un modèle de qualité moyennant peu de paramètres à estimer.

Nous utilisons la mortalité réelle de notre portefeuille en 2003, 2004, 2005 et au premier semestre 2006 pour cette étude. La mortalité de référence sera celle des tables TH 00-02 et TF 00-02.

⁶ Les tables réglementaires en vigueur en 2007 sont la table TH 00-02 pour les hommes et la table TF 00-02 pour les femmes.

⁷ $\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$

Nous obtenons les paramètres suivants :

	hommes	femmes
α	0,71	0,79
β	-0,46	-0,29

Le coefficient de corrélation⁸ obtenu est égal à 0,97 pour les hommes et à 0,99 pour les femmes. Nous en déduisons que notre régression linéaire est efficace.

Ce modèle nous permet d'obtenir, pour les âges compris entre 50 et 94 ans, les taux bruts de mortalité présentés à la page suivante :

⁸ Le R^2 ou coefficient de corrélation permet d'apprécier la relation entre les valeurs observées et les valeurs estimées. Plus le R^2 est proche de 1, meilleure est l'estimation. Il vérifie :

$$R^2 = \left(\frac{Cov(y_{obs}, y_{est})}{V(y_{obs})V(y_{est})} \right)^2$$

PARTIE 2 - LE CALCUL DU BESOIN EN CAPITAL DU PORTEFEUILLE DANS UN CADRE
DÉTERMINISTE

âge	qx hommes estimés	qx TH 00-02	qx femmes estimés	qx TF 00-02
50	1,63%	0,58%	0,65%	0,25%
51	1,71%	0,62%	0,68%	0,26%
52	1,79%	0,67%	0,71%	0,28%
53	1,88%	0,72%	0,75%	0,30%
54	1,97%	0,77%	0,80%	0,32%
55	2,07%	0,82%	0,84%	0,35%
56	2,16%	0,87%	0,88%	0,37%
57	2,26%	0,93%	0,93%	0,39%
58	2,37%	1,00%	0,97%	0,41%
59	2,48%	1,07%	1,01%	0,44%
60	2,61%	1,15%	1,07%	0,47%
61	2,75%	1,23%	1,13%	0,50%
62	2,91%	1,34%	1,20%	0,54%
63	3,07%	1,45%	1,28%	0,59%
64	3,26%	1,58%	1,36%	0,64%
65	3,46%	1,72%	1,46%	0,70%
66	3,68%	1,88%	1,56%	0,76%
67	3,91%	2,05%	1,68%	0,84%
68	4,15%	2,23%	1,82%	0,92%
69	4,41%	2,43%	1,96%	1,02%
70	4,69%	2,66%	2,13%	1,13%
71	4,98%	2,90%	2,32%	1,26%
72	5,29%	3,17%	2,52%	1,40%
73	5,62%	3,45%	2,74%	1,56%
74	5,97%	3,77%	3,00%	1,75%
75	6,34%	4,12%	3,29%	1,97%
76	6,75%	4,51%	3,62%	2,23%
77	7,19%	4,94%	3,99%	2,53%
78	7,67%	5,43%	4,41%	2,87%
79	8,22%	5,99%	4,89%	3,28%
80	8,84%	6,66%	5,43%	3,75%
81	9,54%	7,43%	6,04%	4,30%
82	10,30%	8,30%	6,74%	4,96%
83	11,10%	9,25%	7,52%	5,71%
84	11,93%	10,26%	8,38%	6,56%
85	12,79%	11,35%	9,32%	7,52%
86	13,70%	12,53%	10,31%	8,57%
87	14,66%	13,80%	11,35%	9,69%
88	15,65%	15,16%	12,40%	10,87%
89	16,67%	16,58%	13,44%	12,05%
90	17,72%	18,06%	14,48%	13,26%
91	18,80%	19,63%	15,57%	14,55%
92	19,93%	21,29%	16,75%	15,97%
93	21,11%	23,06%	18,02%	17,53%
94	22,34%	24,93%	19,39%	19,23%

Au-delà de 94 ans, les taux de mortalité utilisés sont ceux des tables réglementaires.

Les décès peuvent ainsi être modélisés à partir de ces taux bruts de mortalité obtenus de la manière suivante :

$$Décès_n = \sum_i N_{n,i} \times q_{x_i+n} \times K_{n,i}$$

où :

- $N_{n,i}$ est le nombre probable de vivants au début de l'année n pour le contrat i ;
- q_{x_i+n} est la taux brut de mortalité pour une personne d'âge $x_i + n$;
- x_i l'âge du bénéficiaire du contrat i à la date de calcul ;
- $K_{n,i}$ est le montant du capital versé en cas de décès l'année n pour le contrat i.

1.2 La modélisation des rachats

Les rachats ne semblent pas être un élément central des contrats garanties frais d'obsèques. Néanmoins, il peut être intéressant de les prendre en compte.

Une loi de rachat modélisée pour un portefeuille de garantie frais d'obsèques pourrait prendre en compte des paramètres à plusieurs niveaux :

- Au niveau des conditions contractuelles :
 - taux technique ;
 - échéance officielle du contrat (avant prorogation) ;
 - pénalités de rachat.
- Au niveau de la situation personnelle de l'assuré :
 - âge ;
 - valeur de rachat.

➤ Au niveau de la compétitivité du produit :

- taux de revalorisation servi ;
- taux de marché.

➤ Au niveau du réseau de distribution

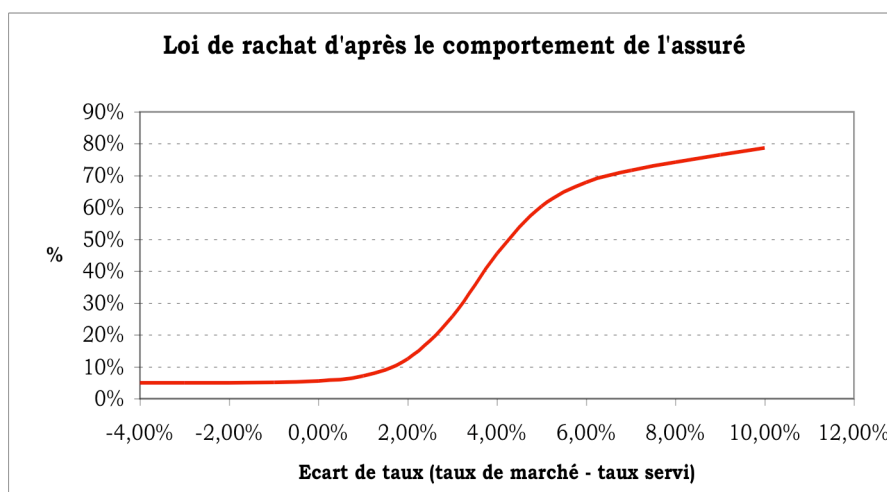
Cela plaide plutôt pour une allure « marche d'escalier incliné », que l'on peut obtenir, soit de façon aisée par trois segments, soit de façon continue.

Ainsi deux options se portent à celui qui souhaite modéliser les rachats de manière dynamique :

- soit fonder la formule sur l'écart entre le taux garanti servi et les taux du marché ;
- soit fonder la formule sur l'écart entre le taux servi et l'espérance de rendement avec rachat, en adaptant les coefficients de la loi aux situations particulières (contrat, client).

Le QIS 3 propose plusieurs modèles de lois de rachat dynamiques, fondées sur l'écart entre le taux servi et le taux du marché. Nous en présentons trois : la fonction arc tangente, la fonction parabolique et la fonction logit.

La fonction logit :



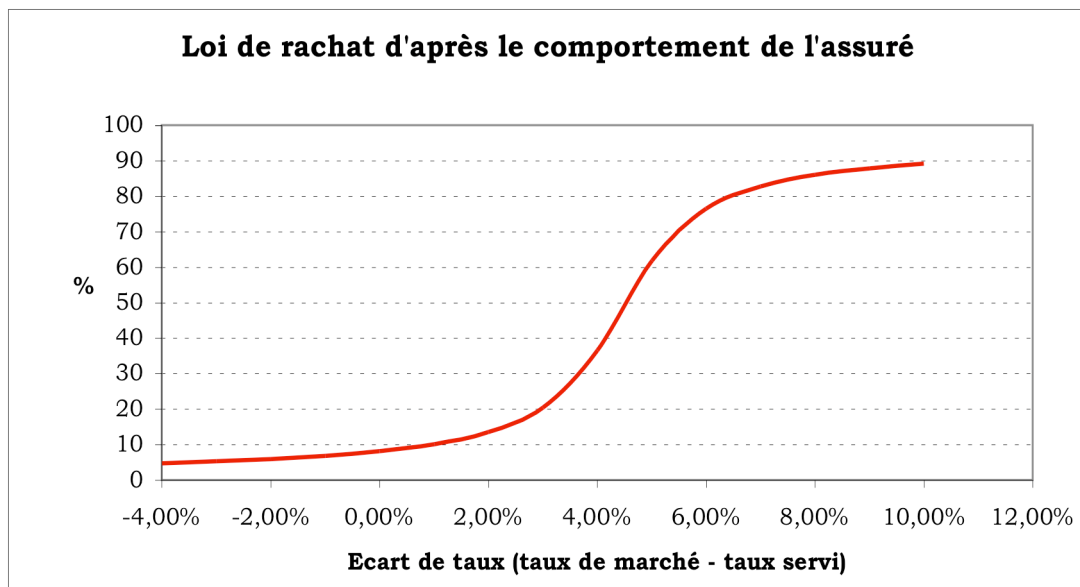
Pour tout âge x ,

$$\text{tauxRachat}_{t,x} = \frac{b_x \cdot \exp(a_x \cdot (txM_t - txS_t))}{c_x + e_x \cdot \exp(d_x \cdot (txM_t - txS_t))}$$

où :

- a_x , b_x , c_x , d_x et e_x sont constants ;
- txM_t est le taux de marché l'année t ;
- txS_t le taux servi l'année t .

La fonction arc tangente :



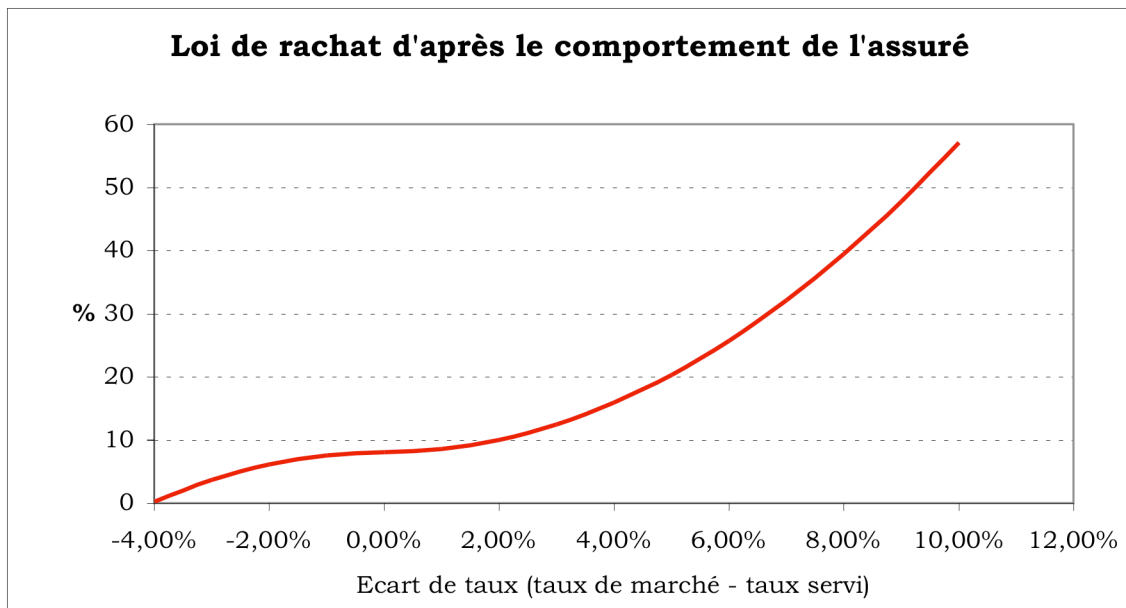
Pour tout âge x ,

$$\text{taux_rachat}_{t,x} = a_x + b_x \cdot \arctan(m_x(txM_t - txS_t) - n_x)$$

où :

- a_x , b_x , m_x , n_x sont constants ;
- txM_t est le taux de marché l'année t ;
- txS_t le taux servi l'année t .

Fonction parabolique :



Pour tout âge x ,

$$\text{taux_rachat}_{t,x} = a_x + b_x \cdot \text{signe}(\text{txM}_t - \text{txS}_t) \cdot (\text{txM}_t - \text{txS}_t)^2$$

où :

- a_x , b_x , m_x , n_x sont constants ;
- txM_t est le taux de marché l'année t ;
- txS_t le taux servi l'année t .

La structure commune de ces modèles est que le taux de rachat est divisé en deux parties :

- une première partie reflétant le comportement irrationnel ;
- une seconde dépendant de facteurs économiques reflétant le comportement économique rationnel de l'assuré.

L'utilisation des lois de rachat dynamiques se heurte aujourd'hui à la quasi-impossibilité de calibrer les paramètres de ces lois sur des données historiques fiables et nombreuses (back testing).

Nous n'avons pas pu obtenir ce type de données. Par conséquent nous avons fixé le taux de rachat à 1% quel que soit l'âge de l'assuré. Le taux a été

retenu à un niveau faible car nous avons supposé que la constitution d'une épargne rachetable n'était pas la motivation des assurés ayant souscrit le contrat obsèques.

Le montant des rachats globaux de l'année n est obtenu de la manière suivante :

$$Rachats_n = \sum_i PM_{n,i} \times taux_rachat_{x_i+n}$$

où :

- $PM_{n,i}$ est la provision mathématique d'ouverture de l'année n du contrat i ;
- $taux_rachat_{x_i+n}$ le taux de rachat à l'âge $x_i + n$;
- x_i l'âge du bénéficiaire du contrat i à la date de calcul.

Nous faisons l'hypothèse implicite que les rachats sont effectués en milieu d'année.

1.3 La modélisation des frais

Nous modélisons les frais comme un coût unitaire inflaté. Ainsi, en faisant l'hypothèse que les frais sont payés en milieu d'année, le montant global des frais pour l'année n est :

$$Frais_n = \frac{(N_n + N_{n+1})}{2} \times F_{unit} \times (1 + taux_inf)^{n-2007+0.5}$$

où :

- N_n représente le nombre de contrats au début de l'année n ;
- F_{unit} le montant annuel de frais par contrat en cours ;
- $taux_inf$ le taux d'inflation annuel des frais.

1.4 La modélisation de la participation aux bénéfices

Le minimum réglementaire de participation aux bénéfices⁹ est la somme de :

- 90% du bénéfice technique (ou 100% de la perte technique) ;
- 85% du bénéfice financier (ou 0% de la perte financière).

La participation aux bénéfices versée à notre portefeuille correspond à ce minimum réglementaire.

Le résultat technique à la fin de l'année n (avant incorporation de la participation aux bénéfices de l'année n) se modélise de la façon suivante :

$$RT_n = (PM_n - PM_{n+1} + Prest_n + IC_n) \times (1 + prod_n) - Frais_n$$

où :

- PM_n représente la provision mathématique d'ouverture de l'année n du portefeuille telle que $PM_n = \sum_i K_{n,i} A_{x_i+n} - \sum_i P_{n,i} \ddot{a}_{x_i+n}$, $P_{n,i}$ étant la prime¹⁰ pure et $K_{n,i}$ le capital garanti du contrat i ;
- $Prest_n$ les prestations versées l'année n de sorte que $Prest_n = Décès_n + Rachat_n$;
- IC_n sont les intérêts crédités (la part financière des provisions mathématiques constituées dans l'année) qui vérifient $IC_n = \tau \times \left(PM_n + P_n - \frac{Prest_n}{2} - \frac{Frais_n}{2} \right)$, τ étant le taux technique et P_n les primes pures totales de l'année n ;
- $prod_n$ est la revalorisation liée à la participation aux bénéfices des années antérieures à l'exercice n .

Le bénéfice financier correspond aux produits financiers. Ceux-ci vérifient :

$$PF_n = r_n \times \left(PM_n + P_n - \frac{Prest_n}{2} - \frac{Frais_n}{2} \right)$$

⁹Articles A-331-3 à A 331-9-1 du Code des Assurances.

¹⁰ Les primes sont supposées versées en début d'année.

où r_n représente le taux de rendement comptable de l'actif l'année n et P_n les primes pures totales de l'année n .

La participation aux bénéfices est intégralement redistribuée aux assurés. Il n'y a pas de constitution de participation aux excédents (PPE).

1.5 La modélisation du taux de rendement comptable de l'actif

Le taux de rendement comptable de l'actif de l'année n , r_n , est calculé de la manière suivante :

$$r_n = \frac{\text{val_comptable_oblig} \times \text{tx_rend_comptable_oblig} + \text{val_comptable_action} \times \text{tx_rend_comptable_action}}{\text{val_comptable_oblig} + \text{val_comptable_action}}$$

Le taux de rendement comptable des actions est supposé constant et égal à 5%.

Le taux de rendement comptable des obligations est calculé en faisant l'hypothèse que les obligations sont détenues jusqu'à leur échéance et que les coupons dégagés sont réinvestis au taux zéro coupon d'échéance 10 ans majoré d'un spread moyen de 20 points de base.

Nous supposons que la provision pour risque d'exigibilité (PRE) est financée sur fonds propres. Il n'y a donc aucun impact de la PRE sur le taux de rendement des actifs.

Nous prenons en compte la provision pour dépréciation durable (PDD). De manière pratique, nous dotons la PDD lorsque la valeur de marché des actions devient inférieure à 80% de la valeur comptable de l'année précédente.

Chapitre 2 La mise en œuvre des calculs

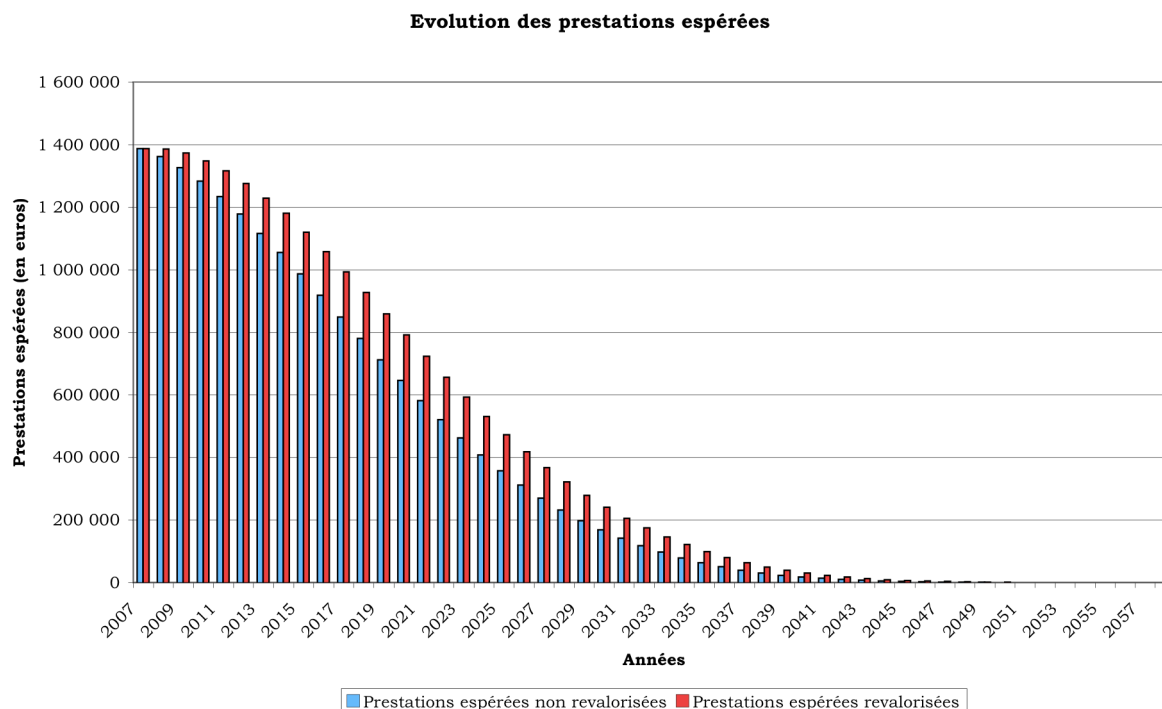
2.1 La provision best estimate

Le calcul de la provision best estimate présuppose la détermination des flux futurs. Dans notre cas, il s'agit des prestations (décès et rachats), des frais et des primes.

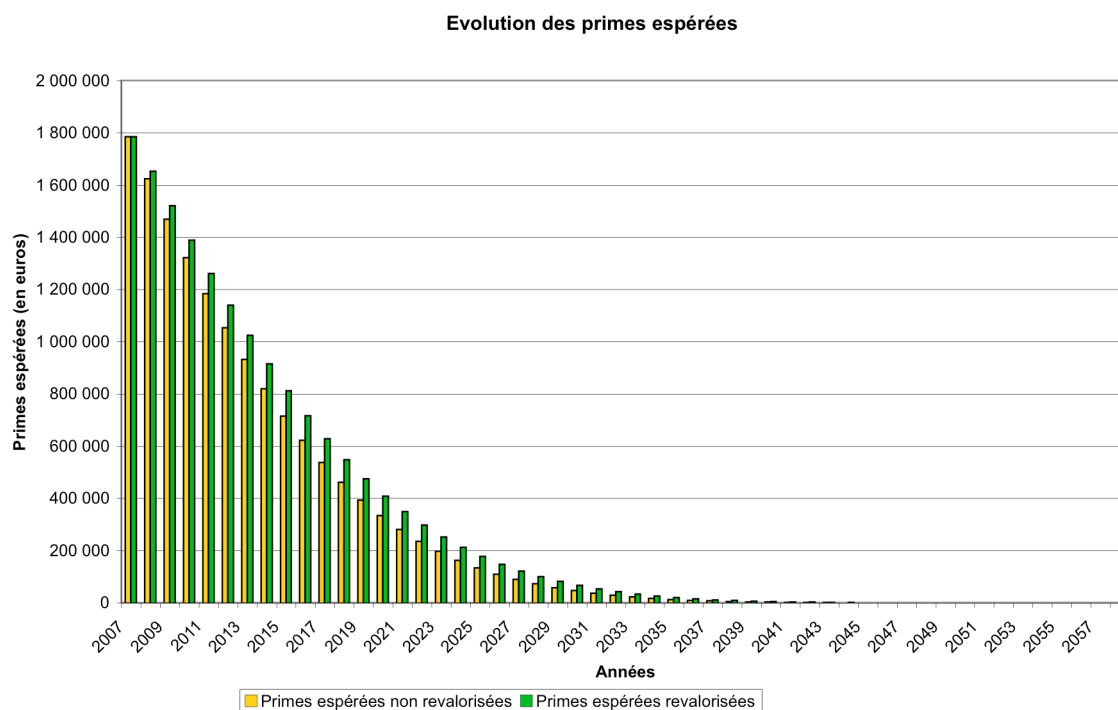
La projection est effectuée jusqu'à l'échéance de la table.

Les prestations, primes et frais (modélisés au chapitre précédent) sont actualisés en utilisant la courbe des taux zéro coupon proposée dans le QIS3 et présentée en annexe 1.

Le graphique suivant présente le montant des prestations estimées versées chaque année, sans et avec revalorisation.



Le graphique ci-dessous présente les primes versées estimées chaque année, sans et avec revalorisation.



La provision best estimate de notre portefeuille s'élève à 3 093 618 euros, contre 3 438 617 euros pour les provisions mathématiques.

2.2 Le MCR

2.2.1 Le RPS

Les tableaux suivants, issus du fichier proposé par le CEIOPS, donnent le montant du RPS :

Reduction for profit sharing		TPwp	TPsurrender	TPbenefits
Provisions	05	3 093 618	3 438 617	560 814

RPS
0

2.2.2 Le $MCR_{\text{marché}}$

Le tableau ci-dessous présente les résultats du calcul du $MCR_{\text{marché}}$ selon les deux méthodes proposées par le QIS 3. Nous rappelons que les deux méthodes sont basées sur la valeur de marché des actifs, la deuxième introduisant en plus la notion de duration.

Market risks component		Inputs	MCR1 factors	MCR2 factors				MCRmkt
Equity and UCITS exposure	10	735 000	12%	12%				Alternative 1 234 782
Property exposure	11		8%	8%				Alternative 2 254 974
Fixed income assets (life)	12	4 029 357	5,4%					
Fixed income assets (non-life)	13		2,7%					
Fixed income assets (total)	14	4 029 357						
Fixed inc. assets (w/out gov't bonds)	15	3 081 486		2,5%				
Technical provisions	16	3 093 618						
Mean duration of fixed inc assets	17	4,043354522						
Mean duration of TP	18	13,88107966						
Alternative 2 market risk sub-components		Equity	Property	Spread	Interest rate shocks results		Interest rates	
sub-risk result		88 200	0	77 037	Up	Down	result	
					-203 841	226 490	226 490	

2.2.3 Le MCR_{vie}

Le MCR_{vie} obtenu est le suivant :

Life underwriting risk component		Input 1530	Factors 1533	Sub result	Sub risk			MCRlife
Net capital at risk	41	17 181 627	0,025%	4 295	Mortality			1532 4 295
Net death benefits	42		0,15%	0	Longevity			
Expenses relating UL business	43		12,00%	0	Unit-Linked			

2.2.4 Le MCR_{global}

Finalement, le MCR_{global} obtenu selon les deux méthodes décrites dans la première partie du présent document est présenté dans le tableau ci-après.

MCR before RPS calculation		Market risks	Underwriting risks			Aggregated result
			Life	Non-Life	Health	
Alternative 1	03	234 782	4 295	0	0	235 893
Alternative 2	04	254 974	4 295	0	0	256 082
correlation with market ris		100%	25%	25%	25%	
correlation with life UW risk		25%	100%	0%	25%	
correlation with non-life UW risk		25%	0%	100%	0%	
correlation with health UW risk		25%	25%	0%	100%	

MCR final calculation		MCR 1.5.5	MCR _{AMCR} 1.5.6	MCR _{AMCR} 1.5.42	MCR _{AMCR} 1.5.42
MCR alternative 1	01	235 893	1 000 000	2 000 000	3 000 000
MCR alternative 2	02	256 082	1 000 000	2 000 000	3 000 000
Absolute minimum (AMCR) (in M€)			1	2	3

Les deux méthodes donnent des résultats semblables.

L'exigence de marge de solvabilité actuelle correspondant à ce portefeuille s'élève à 154 381 euros. Le MCR est alors 1,5 fois plus élevé que l'exigence actuelle.

2.3 Le SCR

2.3.1 Les risques d'assurance vie

Risques de mortalité, de frais, de rachat

Nous supposons que les trois premiers risques d'assurance vie considérés (mortalité, frais et rachat), n'ont aucun impact sur l'actif de notre portefeuille. Par conséquent, la méthodologie de calcul du besoin en capital associé à chacun de ces risques est la suivante :

Étape 1 : détermination de la valeur de marché du passif suite au choc, sans effet de la participation aux bénéfices.

Étape 2 : détermination de la valeur de marché du passif suite au choc, avec effet de la participation aux bénéfices.

Étape 3 : détermination du besoin en capital associé au risque et de l'atténuation par la participation aux bénéfices.

NB : la valeur de marché du passif avant le choc correspond à la provision best estimate.

Étape 1

La valeur de marché du passif est égale à la somme des flux futurs actualisés (prestations, primes et frais), avec la courbe des taux zéro coupon.

Le calcul est effectué sans effet de la participation aux bénéfices : le taux de participation aux bénéfices¹¹ demeure identique à celui obtenu avant l'application du choc.

¹¹ $Taux_{PB_n} = \max\left(\frac{IC_n + PB_n - IC_n \times prod_n}{PM_{n+1} prod_n}; 0\right)$ où $IC_n + PB_n = \max(IC_n; 90\% \times RT_n + 85\% \times PF_n)$ dans

le cas de bénéfices techniques et financiers.

Étape 2

Le calcul est effectué avec effet de la participation aux bénéfices : la participation aux bénéfices permet d'atténuer l'effet du choc sur les résultats.

Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

	Vie_risque	KC_risque
Risque de mortalité	810 342 euros	612 320 euros (76%)
Risque de frais	117 381 euros	98 297 euros (84%)
Risque de rachat	14 649 euros	14 649 euros (100%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la part d'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices (KC) dans le besoin en capital correspondant (SCR).

Le risque de catastrophe

Le tableau intermédiaire, fourni par le CEIOPS et permettant de calculer Vie_{cat} , donne les résultats suivants :

CAT sub risk details		Input
Net technical provisions	04	3 093 618
Sum insured on disability (lump sum)	05	20 275 245
Annualized amount of disability benefit	06	
Average annuity factor	07	
Capital at risk	08	17 181 627
Factor	09	0,15%
Mortality + disability CAT risk	10	25 772
Surrender strain linked	11	344 999
Factor	12	75,0%
Lapse CAT risk	13	258 749

Finalement, $Vie_{cat} = 260\,030$ euros.

Agrégation des risques liés à l'activité vie : calcul du SCR_{vie} et du KC_{vie}

Le tableau ci-dessous récapitule les différents besoins en capitaux associés à chacun des risques souscription vie ainsi que les atténuations par l'effet de la participation aux bénéfices correspondantes.

SCR life calculation		Mortality I3.139..141	Longevity I3.147..149	Disability I3.155..157	Lapse I3.161..163	Expenses I3.167..169	Revision I3.173	CAT I3.182..184	SCR _{life}
NAV post scenario	01	810 342			14 649	117 381		260 030	887 435
correlation with Mortality		100%	0%	50%	0%	25%	0%	0%	
correlation with Longevity		0%	100%	0%	25%	25%	25%	0%	
correlation with Disability		50%	0%	100%	0%	50%	0%	0%	
correlation with Lapse		0%	25%	0%	100%	50%	0%	0%	
correlation with Expenses		25%	25%	50%	50%	100%	25%	0%	
correlation with Revision		0%	25%	0%	0%	25%	100%	0%	
correlation with CAT		0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	
NAV with risk mitigation	02								KC _{life}
Risk mitigating effect of FPS (KC)	03	612 320	0	0	14 649	98 297		0	645 250

2.3.2 Les risques de marché

Pour les risques sur les actions et sur les taux, la méthodologie adoptée est la suivante :

Étape 1 : détermination de la variation de la valeur de marché de l'actif suite au choc.

Étape 2 : détermination de la valeur de marché du passif après le choc, sans effet de la participation aux bénéfices.

Étape 3 : détermination de la valeur de marché du passif après le choc, avec effet de la participation aux bénéfices.

Étape 4 : détermination du besoin en capital en relation avec ce risque et de l'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices.

Le risque sur les actions

Le choc consiste en une baisse des actions de 32% la première année de projection.

Au passif, ce choc impacte le taux de rendement comptable.

La variation de valeur de l'actif, dans le cas d'un choc sur les actions, concerne les actions.

Le risque de taux

Les chocs consistent en une modification de la totalité de la courbe des taux (à la hausse et à la baisse).

Au passif, ces chocs impactent plusieurs paramètres :

- le taux de rendement comptable ;
- le taux d'actualisation des flux futurs.

La variation de valeur de l'actif, dans le cas d'un choc sur le taux d'intérêt, concerne les obligations.

Pour cela, la méthodologie retenue est la suivante :

- Projection des cash-flows jusqu'à l'échéance titre par titre ;
- Calcul du spread implicite pour chaque titre à partir de la courbe des taux zéro coupon et de la valeur de marché à la date d'évaluation

En supposant un spread K constant tout au long de la courbe des taux zéro coupon, nous pouvons déduire K de la relation suivante :

$$\text{Prix de marché} = \sum_{t=0}^T \frac{C}{(1 + r_t + K)^t} + \frac{N}{(1 + r_t + K)^T}$$

où :

- C est le coupon de l'obligation, N son nominal et T son échéance;
- $(r)_t$ est la courbe des taux zéro coupon ;
- Calcul de la valeur de marché après choc à la hausse et à la baisse de la courbe des taux , en supposant que le spread reste inchangé pour chaque titre

La nouvelle valeur de l'obligation après les chocs peut être calculée de la manière suivante :

$$\text{Prix de marché} = \sum_{t=0}^T \frac{C}{(1 + rd_t)^t} + \frac{N}{(1 + rd_t)^T}$$

où $(rd)_t$ est la courbe des taux zéro coupon après l'application des chocs translatée de K.

Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

	Marché_risque	KC_risque
Risque actions	640 000 euros	57 627 euros (9%)
Risque de taux	630 304 euros	467 829 euros (74%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la part d'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices (KC) dans le besoin en capital correspondant (SCR).

Les valeurs du besoin en capital et de l'atténuation par l'effet participation aux bénéfices liés au risque de taux sont obtenues avec une baisse des taux. En cas de hausse des taux, la variation de la valeur des actifs nette des passifs est négative. Cela peut s'expliquer par le fait que l'augmentation des taux de rachat engendrée par la hausse des taux d'intérêt n'a pas été prise en compte.

Agrégation des risques de marché : calcul du $SCR_{\text{marché}}$ et du $KC_{\text{marché}}$

Le tableau suivant récapitule les différents besoins en capitaux associés à chacun des risques de marché ainsi que les atténuations par l'effet de la participation aux bénéfices correspondantes.

SCRmkt calculation		MKTint	MKTeq	MKTprop	MKTsp	MKTconc	MKTfx	SCRmkt
Sub risk value	01	630 304	640 000	0	0	0	0	898 266
correlation with MKTint		100%	0%	50%	25%	0%	25%	
correlation with MKTeq		0%	100%	75%	25%	0%	25%	
correlation with MKTprop		50%	75%	100%	25%	0%	25%	
correlation with MKTsp		25%	25%	25%	100%	0%	25%	
correlation with MKTconc		0%	0%	0%	0%	100%	0%	
correlation with MKTfx		25%	25%	25%	25%	0%	100%	
Risk mitigating effect of FPS (KC)	03	467 829	57 627	0	0		0	471 365
								KCmkt

2.3.3 Le BSCR

Le tableau suivant récapitule les différentes valeurs intermédiaires permettant d'aboutir au calcul du BSCR.

		Market risk	Default risk	Underwriting risks			Aggregation 1326	BSCR 1326
				Life	Health	Non-Life		
Basic SCR and SCR calculation	01	898 266	0	887 435	0	0	1 411 737	522 576
correlation with SCRmkt	03	100%	25%	25%	25%	25%		Future disc
correlation with SCRdef		25%	100%	25%	25%	50%		benefits
correlation with SCRlife		25%	25%	100%	25%	0%		2 491 819
correlation with SCRhealth		25%	25%	25%	100%	0%		BSCR
correlation with SCRnl		25%	50%	0%	0%	100%		reduction
Mitigating effect of FPS (KC)	05	471 365		645 250	0		889 161	889 161
Internal model results	06							

2.3.4 Le risque opérationnel

Le besoin en capital associé au risque opérationnel est égal à 53 526 euros.

Le tableau ci-dessous présente les résultats intermédiaires permettant d'obtenir le besoin en capital associé à ce risque.

Operational risk		Input data	Factors	sub-results
Total earned life gross premiums	01	1 784 184	3,0%	
Total earned non-life gross premiums	02		2,0%	
Total earned health premiums	03		2,0%	
Result based on earned premiums	04			53 526
Life technical provision (w/o unit linked)	05	3 093 618	0,3%	
Total non-life technical provisions	06		2,0%	
Total health provisions	07		0,2%	
Result based on technical provisions	08			9 281
Basic SCR	09	522 576	30,0%	
Ceiling based on Basic SCR	10			156 773

2.3.5 Le SCR global du portefeuille de contrats garantie obsèques

Pour finir, nous obtenons le besoin en capital global. Les résultats intermédiaires permettant le calcul du SCR sont présentés dans le tableau ci-après.

		Market risk	Default risk	Underwriting risks			Aggregation 13.26	BSCR 13.26	SCRop	SCR 13.15
				Life	Health	Non-Life				
Basic SCR and SCR calculation	0.1	898 266	0	887 435	0	0	1 411 737	522 576	53 526	576 101
correlation with SCR _{mt}	0.3	100%	25%	25%	25%	25%		Future disc benefits	16.69	Group adjustment
correlation with SCR _{def}		25%	100%	25%	25%	50%		2 491 819		
correlation with SCR _{life}		25%	25%	100%	25%	0%		BSCR reduction		
correlation with SCR _{health}		25%	25%	25%	100%	0%				
correlation with SCR _{nl}	0.5	25%	50%	0%	0%	100%	889 161	889 161		
Mitigating effect of FPS (KC)		471 365		645 250	0					
Internal model results	0.6									

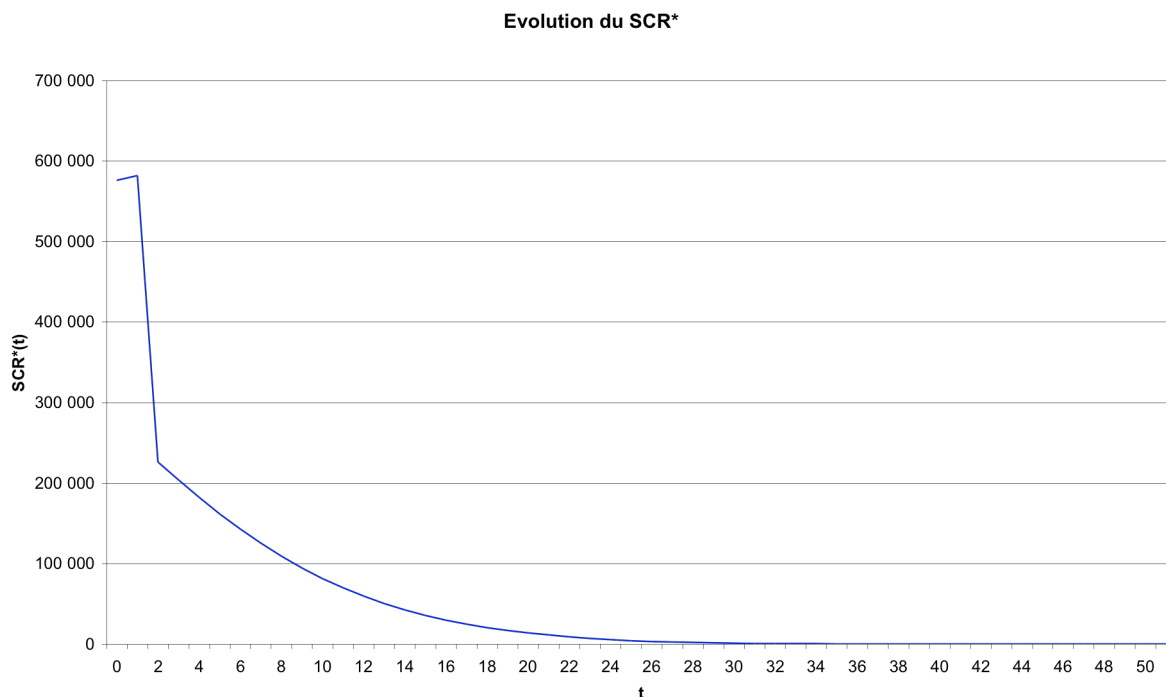
2.4 La marge de risque : mise en œuvre de la méthode du coût du capital

La méthode du coût du capital consiste à calculer les futurs SCR_{vie} , SCR_{op} et KC_{vie} aux différentes années de projections ($t=1, 2, 3, \dots$) ainsi que les $SCR_{marché}$ et $KC_{marché}$ la première année ($t=1$).

Pour les risques de souscription (vie) et opérationnel, la méthodologie de calcul est identique à celle employée pour les calculs l'année de projection 0 et décrite précédemment.

N'ayant aucune information sur la valeur de marché de notre actif à la date $t=1$, nous utilisons l'approximation proposée par le CEIOPS pour obtenir $SCR_{marché}$ et $KC_{marché}$ à la date $t=1$.

Le graphique suivant met en évidence la décroissance des SCR^* . SCR^* représente le besoin en capital associé aux risques vie, de marché et opérationnel les années de projections $t=0$ et $t=1$, et seulement aux risques vie et opérationnel les années suivantes.



La marge de risque obtenue s'élève à 111 641 euros, soit 3,5% de la provision best estimate.

Les provisions techniques globales à constituer, composées de la provision best estimate et de la marge de risque, s'élèvent à 3 205 259 euros.

En utilisant la méthode approximée proposée par le CEIOPS pour calculer la marge de risque, nous obtenons une valeur deux fois plus élevée que la valeur quasi-exacte¹² calculée.

Dans la méthode exacte, les SCR* décroissent à partir de $t=2$.

La méthode approximée se base sur l'évolution de la provision best estimate. Or celle-ci décroît seulement à partir de $t=6$, essentiellement car les primes décroissent plus vite que les prestations.

¹² Il s'agit d'une méthode quasi-exacte car le besoin en capital associé au risque de marché pour la date $t=1$ a été calculé par la méthode approximée.

Chapitre 3 La sensibilité aux différents paramètres du modèle

3.1 Sensibilité au taux de rendement des actions

Nous étudions l'impact d'une variation du taux de rendement des actions sur les provisions techniques et sur les besoins en capitaux du portefeuille. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

	Scénario central : 5%	Hausse de 20% du taux de rendement des actions	Baisse de 20% du taux de rendement des actions
PM	3 438 617	3 438 617 (0%)	3 438 617 (0%)
Provision best estimate	3 093 618	3 170 720 (+2%)	3 028 338 (-2%)
EMS	154 381	154 381 (0%)	154 381 (0%)
MCR (méthode 1)	235 893	235 887 (-0%)	235 897 (+0%)
MCR (méthode 2)	254 974	265 544 (+4%)	248 342 (-3%)
SCR	576 101	542 585 (-6%)	615 119 (+7%)
Best estimate + SCR	3 669 719	3 713 305 (+1%)	3 643 457 (-1%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

L'hypothèse d'une hausse du taux de rendement des actions de 20% entraîne une légère hausse de la provision best estimate et une baisse du SCR de 6%. Globalement, le passif (sans la marge de risque) croît de 1 %.

La hausse de la provision best estimate est due à la hausse des taux de participation aux bénéfices, elle-même provoquée par l'augmentation du taux de rendement des actions.

Une augmentation du taux de rendement des actions cause également une diminution du SCR. D'une part, le besoin en capital associé aux différents risques vie augmente légèrement. D'autre part, les atténuations en capital associées sont augmentées dans une proportion plus importante. Cette dernière remarque s'explique par le fait que les taux de participation aux bénéfices ont crû. L'atténuation peut, par conséquent, être plus importante.

Quant aux MCR, les chiffres observés méritent réflexion. Une hausse du taux de rendement des actions provoque dans un cas une stagnation (méthode 1), dans l'autre une hausse (méthode 2). Il faut, pour tenter de comprendre, revenir aux formules utilisées pour les calculer.

Dans le cas de la méthode 1, une hausse des taux n'impacte que les capitaux sous risque. Une hausse des taux augmente la provision best estimate et donc diminue les capitaux sous risque. Cette diminution n'impacte quasiment pas le MCR (méthode 1).

Dans le cas de la méthode 2, en plus de l'impact sur les capitaux sous risque, il y a un impact direct sur la provision best estimate. Ici, le deuxième l'emporte sur le premier. Cela a pour conséquence d'augmenter le MCR.

Les deux méthodes donnent des résultats quelque peu différents. Et plus inquiétant, elles donnent des résultats qui ne varient pas dans le même sens.

Dans tous les cas, le MCR reste supérieur à l'actuelle exigence minimale de solvabilité.

Plus le taux de rendement des actions est élevé, moins le risque est important. Les SCR et MCR (méthode 1) calculés vérifient ce principe de bon sens.

Impact sur le ratio de solvabilité

Le ratio de solvabilité actuel usuellement calculé est le suivant :

$$\frac{\text{marge de solvabilité}}{\text{exigence de marge de solvabilité}}$$

Celui-ci peut se traduire, dans le cadre de Solvabilité 2 et plus précisément du QIS 3, par :

$$\frac{VM(\text{Actif}) - PBE - \text{marge de risque}}{SCR}$$

où :

- VM(Actif) est la valeur de marché de l'actif ;
- PBE représente la provision best estimate.

L'impact d'une variation du taux de rendement des actions sur le ratio de solvabilité introduit ci-dessus est présenté dans le tableau suivant

:

	Scénario central	Hausse de 20% du taux de rendement des actions	Baisse de 20% du taux de rendement des actions
Ratio de solvabilité	162%	158% (-3%)	163% (+0%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

3.2 Sensibilité au taux de rachat

Nous étudions l'impact d'une variation du taux de rachat sur les provisions techniques et sur les besoins en capitaux du portefeuille. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

	Scénario central : 1%	Hausse de 100% du taux de rachat	Baisse de 100% du taux de rachat
PM	3 438 617	3 438 617 (0%)	3 438 617 (0%)
Provision best estimate	3 093 618	3 116 350 (+1%)	3 067 265 (-1%)
EMS	154 381	154 381 (0%)	154 381 (0%)
MCR (méthode 1)	235 893	235 891 (-0%)	235 894 (+0%)
MCR (méthode 2)	254 974	231 499 (-9%)	284 903 (+12%)
SCR	576 101	548 637 (-5%)	608 731 (+6%)
Best estimate + SCR	3 669 719	3 664 987 (-0%)	3 675 996 (+0%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

Le doublement des taux de rachat entraîne une légère augmentation de la provision best estimate et une baisse plus significative (5%) du SCR. Il n'a quasiment aucun impact sur le passif (sans marge de risque).

Le sens de variation de la provision best estimate dépend de l'écart entre le taux de capitalisation et le taux d'actualisation des flux.

Dans notre étude, le taux d'actualisation est supérieur au taux de capitalisation. Par conséquent, une hausse des rachats, c'est-à-dire le

versement d'une prestation de valeur la valeur de rachat plus tôt, cause une hausse de la provision best estimate.

Impact sur le ratio de solvabilité

L'impact d'une variation du taux de rachat sur le ratio de solvabilité introduit précédemment est présenté dans le tableau suivant :

	Scénario central	Hausse de 100% du taux de rachat	Baisse de 100% du taux de rachat
Ratio de solvabilité	162%	166% (+2%)	156% (-3%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

3.3 Sensibilité au montant unitaire des frais

Nous étudions l'impact d'une variation du montant unitaire des frais sur les provisions techniques et sur les besoins en capitaux du portefeuille. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

	Scénario central : 15 euros	Hausse de 20% du montant unitaire des frais	Baisse de 20% du montant unitaire des frais
PM	3 438 617	3 438 617 (0%)	3 438 617 (0%)
Provision best estimate	3 093 618	3 117 893 (+1%)	3 069 329 (-1%)
EMS	154 381	154 381 (0%)	154 381 (0%)
MCR (méthode 1)	235 893	235 891 (-0%)	235 894 (+0%)
MCR (méthode 2)	254 974	249 057 (-2%)	263 163 (+3%)
SCR	576 101	642 026 (+11%)	534 108 (-7%)
Best estimate + SCR	3 669 719	3 759 919 (+2%)	3 603 437 (-2%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

Une hausse de 20 % du montant unitaire des frais entraîne une hausse de 1% de la provision best estimate (les frais font partie des flux actualisés entrant dans le calcul de la provision best estimate).

Cela implique également une hausse de 11% du SCR. Cette hausse est causée par une légère augmentation des besoins en capitaux associés à chacun des risques mais surtout à une moindre atténuation par l'effet

participation aux bénéfices (les taux de PB étant moindres avant le choc en raison de la hausse des frais).

L'impact sur le passif (hors marge de risque) est faible, de l'ordre de 2%.

Impact sur le ratio de solvabilité

L'impact d'une variation des frais sur le ratio de solvabilité introduit précédemment est présenté dans le tableau suivant :

	Scénario central	Hausse de 20% du montant unitaire des frais	Baisse de 20% du montant unitaire des frais
Ratio de solvabilité	162%	142% (-12%)	179% (+11%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la variation de valeur par rapport au scénario central.

Le montant unitaire des frais est le paramètre qui impacte le plus le ratio de solvabilité.

Partie 3

Le calcul du besoin en capital du portefeuille dans un cadre stochastique

Chapitre 1 La modélisation stochastique du portefeuille

Les techniques stochastiques sont traditionnellement utilisées dans la modélisation de l'actif afin d'estimer au mieux les différents risques et afin de faire face, entre autres aux risques financiers. L'utilisation de techniques stochastiques afin de modéliser le passif est plus récente. Elles apportent des informations intéressantes, notamment pour le contrôle des risques. Alors qu'un modèle déterministe ne fournit qu'une valeur moyenne, un modèle stochastique est capable de nous renseigner sur l'ensemble de la distribution de la quantité étudiée et permet notamment d'en étudier la variance et les quantiles.

1.1 La modélisation stochastique de la mortalité

1.1.1 Un bref survol de la littérature

Les modèles stochastiques proposent de considérer que le taux de mortalité est aléatoire, et donc $\mu(x,t)$ ¹³ devient un processus stochastique.

De nombreux modèles stochastiques de mortalité ont été développés ces dernières années. En nous inspirant d'une revue de la littérature effectuée par Dahl (2004), nous faisons un bref survol des modèles nous ayant paru les plus intéressants.

En premier lieu, il est intéressant de noter que les modèles avancés de construction de tables prospectives, tels que le modèle de Lee et Carter (2000) sont des cas particuliers de modèles stochastiques de mortalité.

¹³ $\mu(x,t)$ est le taux instantané de mortalité. Il vérifie :

$$\mu(x,t) = -\frac{d(\ln(l_x))}{dx}$$

où l_x est le nombre de vivants d'âge x .

Olivieri (2001) suppose que les compagnies d'assurance prennent en compte les tendances de mortalité possibles, en estimant un taux de mortalité, comme une fonction de l'âge et du temps. Par conséquent, elles obtiennent un résultat plus réaliste qu'en utilisant simplement une fonction de l'âge. Cependant, même si la fonction de survie obtenue est de très bonne qualité, il s'agit simplement d'un scénario. Ainsi, Olivieri utilise les taux de mortalité empiriques afin de déterminer deux autres fonctions de survie : la première avec une hypothèse haute de mortalité, la seconde avec une hypothèse basse. A partir de ces trois scénarios, Olivieri illustre l'impact du risque systématique de mortalité en calculant les variances des valeurs actuelles.

Marocco et Pitacco (1998) modélisent les taux de mortalité en fonction de l'âge par la loi de probabilité Bêta, avec des paramètres dépendants du temps.

Les modèles de mortalité précédemment cités sont élaborés indépendamment des marchés financiers. Tous les calculs sont effectués en utilisant un taux d'intérêt constant.

Un modèle traitant de manière symétrique le risque financier et le risque démographique a été présenté en 2001 par Milevsky et Promislow. Les deux auteurs proposent un modèle complet de taux d'intérêt et de taux de mortalité, en temps discret et en temps continu. Leur modèle permet d'évaluer des sinistres futurs dont le risque porte sur les taux de mortalité et sur les taux d'intérêt.

Dalh (2004) s'inspire de la modélisation classique des taux d'intérêt et modélise la mortalité comme un processus de diffusion. Ses résultats montrent comment les réserves du marché dépendent des taux de mortalité anticipés et de l'attitude du marché envers le risque systématique de mortalité.

Ces derniers types de modèles sont intéressants dans l'optique de la valorisation en juste valeur d'engagements comportant à la fois le risque

financier et le risque démographique. Ils sont cependant très difficiles à mettre en oeuvre.

1.1.2 Le modèle de Lin et Cox (2006)

Nous choisissons de modéliser la mortalité en utilisant le modèle de Lin et Cox. Ce modèle présente deux principaux avantages :

- la modélisation de sauts de mortalité ;
- la simplicité de mise en œuvre.

a. Présentation du modèle

L'approche de Lin et Cox combine un mouvement brownien et une chaîne de Markov discrète, avec un saut de distribution log-normale.

La première composante est classique car elle traduit la tendance des taux de mortalité et les petites variations autour de cette tendance. La seconde permet d'introduire le phénomène de saut.

La composante classique : un mouvement brownien géométrique

La dynamique du taux brut de mortalité est celle d'un mouvement brownien géométrique dans le cas où il n'y a pas de saut de mortalité. La dynamique du taux brut de mortalité vérifie :

$$\frac{dq_t}{q_t} = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

où :

- α est l'indicateur espéré du taux de mortalité (dans le cas où il n'y a pas de saut) ;
- σ est la volatilité du taux de mortalité (dans le cas où il n'y a pas de saut) ;
- W_t est un mouvement brownien standard (de moyenne 0 et de variance t).

De manière équivalente, en supposant qu'il n'y a pas de saut de mortalité dans l'intervalle $[t-h, t]$, le taux brut de mortalité s'écrit :

$$q_t = q_{t-h} \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma (W_t - W_{t-h}) \right] \quad (2)$$

Le processus de saut

Il se compose d'une chaîne de Markov et d'un saut de loi log normale.

◇ **La chaîne de Markov**

Celle-ci détermine le nombre d'événements (épidémie, catastrophe,...). Elle s'écrit de la façon suivante : (avec $N_0 = 0$)

$$N_{t+1} = \begin{cases} N_t + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ N_t & \text{avec la probabilité } 1 - p \end{cases} \quad (3)$$

◇ **Le saut de loi log-normale**

Le saut de mortalité de loi log-normale est défini de la manière suivante :

$$Y_t = \exp(m + sU_t) \quad (4)$$

où U_t suit une loi normale centrée réduite.

La loi log-normale a l'avantage de prendre en compte des événements extrêmes puisqu'elle a une queue de distribution importante. Par ailleurs, le saut défini est toujours positif. Ce qui correspond à l'idée que l'on se fait d'un saut de mortalité.

Écriture du modèle

Lorsqu'un saut intervient, le taux brut de mortalité se réécrit de la manière suivante :

$$\bar{q}_t = q_t \times Y_t \quad \text{pour } t=0, h, 2h, 3h, \dots \quad (5)$$

Si nous disposons de données annuelles, $h=1$.

Et donc, $q_t = q_0 \times \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right] \quad (6).$

Finalement, le taux brut de mortalité peut être décrit de la façon suivante :

$$\bar{q}_t = \begin{cases} q_t Y_t & \text{avec la probabilité } p \\ q_t & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases} \quad (7)$$

Indépendance du taux de mortalité aux sauts précédents

Soit \mathcal{F}_t la tribu déterminée par les processus W_s , N_s , Y_t , pour $s \leq t$. Nous appliquons l'équation (7) pour exprimer le taux brut de mortalité à la fin de la période $[t-h, t]$:

$$\bar{q}_{t+h} | \mathcal{F}_t = q_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma (W_{t+h} - W_t) \right] Y_{t+h} \quad (8)$$

Ainsi, un saut de mortalité dans l'intervalle $[t-h, t]$ n'a pas d'impact dans l'intervalle $[t, t+h]$.

b. Calibrage du modèle

Le modèle de Lin et Cox comporte 5 paramètres à estimer : α , σ , p , m et s . Les deux auteurs utilisent la méthode du maximum de vraisemblance. Elle permet d'obtenir l'expression suivante à maximiser :

$$\log L = \sum_{t=1}^{K-1} \log \left[\frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{nn}}{S_{nn}} \right)^2 \right)}{S_{nn} \sqrt{2\pi}} (1-p)^2 + \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{yn}}{S_{yn}} \right)^2 \right)}{S_{yn} \sqrt{2\pi}} p(1-p) \right. \\ \left. + \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{ny}}{S_{ny}} \right)^2 \right)}{S_{ny} \sqrt{2\pi}} (1-p)p + \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{yy}}{S_{yy}} \right)^2 \right)}{S_{yy} \sqrt{2\pi}} p^2 \right] \quad (9)$$

où :

- K est le nombre d'années d'observations dont nous disposons ;
- $Z_t = \log(\bar{q}_{t+h}) - \log(\bar{q}_t)$;

- (Z_t) vérifie :

Événement	$E[Z_t F_t] = M_{\text{évén}}$	$Var[Z_t F_t] = S_{\text{évén}}^2$	Probabilité
Nn	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h$	$\sigma^2 h$	$(1-p)^2$
Yn	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h - m$	$\sigma^2 h + s^2$	$p(1-p)$
Ny	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + m$	$\sigma^2 h + s^2$	$(1-p)p$
Yy	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h$	$\sigma^2 h + 2s^2$	p^2

L'annexe 3 présente les différentes étapes permettant d'aboutir à l'équation (9).

Afin de calibrer le modèle, nous utilisons les taux bruts de mortalité de la population française (hommes et femmes distincts) issues de Human Mortality Database entre 1900 et 2004.

Nous retraits ces données afin d'éliminer les effets des deux guerres mondiales en conservant l'effet de la grippe espagnole¹⁴ de 1918.

Nous calibrons le modèle pour chaque âge (de 60 à 98 ans) et chaque sexe. Ce qui nous permet d'obtenir des taux de mortalité prospectifs par sexe et par âge.

c. Limites du modèle

Afin de simplifier les formules, nous avons fixé l'âge x et cherché à modéliser le taux de mortalité comme seule fonction du temps t . Cette approche est bien entendu restrictive puisqu'elle n'intègre pas explicitement la prise en charge de la surface de mortalité.

¹⁴ La grippe espagnole est une pandémie qui toucha plusieurs pays et continents en 1918. Elle fit plusieurs dizaines de millions de victimes, dont environ 400 000 en France.

D'autre part, notre modèle prend en compte les sauts de mortalité. Ces événements étant rares, il est nécessaire d'avoir des données très importantes.

Notre modèle se base sur le passé pour estimer la mortalité future. L'évolution de la mortalité n'étant pas forcément identique dans le temps, cette hypothèse paraît réductrice.

1.2 La modélisation stochastique de l'actif

1.2.1 La modélisation du cours des actions

a. Présentation du modèle

De manière classique, nous modélisons le cours des actions (ne versant pas de dividende) comme un mouvement brownien géométrique.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, T]$$

où :

- S_t est le cours de l'action à la date t ;
- μ est l'espérance de rentabilité de l'action ;
- σ est la volatilité de l'action ;
- W_t est un mouvement brownien standard¹⁵

En appliquant le lemme d'Itô¹⁶ à l'équation $G = \ln(S)$, nous obtenons :

$$dG_t = \left(\frac{\delta G}{\delta S} \mu S_t + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta S^2} (\sigma S_t)^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta S} \sigma S_t dW_t$$

¹⁵ Un mouvement brownien standard (W_t) est un processus qui possède les caractéristiques suivantes :

- $W_0 = 0$;
- Continuité : la fonction $t \mapsto W_t$ est continue ;
- Indépendance des accroissements : $\forall t, \forall h > 0, W_{t+h} - W_t$ est indépendant de la tribu engendrée par $(W_s)_{s \leq t}$;
- Loi : $\forall t, \forall h > 0, W_{t+h} - W_t$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance h .

¹⁶ La formule d'Itô énonce que si X est solution de l'EDS $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ alors, pour toute

fonction f de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $df(X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dW_t$

Puisque $\frac{\delta G}{\delta S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\delta^2 G}{\delta S^2} = -\frac{1}{S^2}$, $\frac{\delta G}{\delta t} = 0$, $dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW$.

En intégrant entre 0 et t, nous obtenons $\int_0^t dG_s = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds + \sigma \int_0^t dW_s$.

D'où finalement, $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$.

b. Limites du modèle

Ce modèle émet l'hypothèse que le prix des actions suit une loi log-normale et que la volatilité de ce prix est constante.

Ces deux hypothèses sont réductrices puisque imparfaitement corroborées sur le plan empirique.

1.2.2 La modélisation du taux court

a. Présentation du modèle

Nous utilisons un modèle classique pour modéliser le taux court, celui de Vasicek (1977).

Le modèle de Vasicek est un modèle à un facteur : un seul facteur est à l'origine des déformations de la courbe des taux.

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Dans ce contexte, l'unique facteur est le taux court qui est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t^{(2)}$$

où :

- a est la vitesse de retour à la moyenne ;
- b est la moyenne sur le long terme du taux court ;

- $(W_t^{(2)})$ est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre¹⁷
 \mathbb{Q} ;
- v représente la volatilité de r_t .

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt.

Le modèle de Vasicek est un modèle à un facteur, donc simple à comprendre d'un point de vue théorique. Il a également l'avantage de fournir des réponses simples d'un point de vue informatique.

b. Calibrage du modèle

Le calibrage du modèle est effectué à partir de la courbe des taux zéro coupon publiée par l'Institut des Actuaires.

Les taux zéro coupon $R(t,T)$ s'expriment en fonction du taux court r_t de la manière suivante :

$$R(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t} = -\frac{\ln(A(t,T)\exp(-B(t,T)r_t))}{T-t}$$

où :

- $A(t,T) = \exp\left[(T-t)\left(\frac{v^2}{2a^2} - b\right) + \frac{1}{a}(1 - \exp(-a(T-t)))\left(b - \frac{v^2}{a^2}\right) + \left(\frac{v^2}{4a^3}\right)(1 - \exp(-2a(T-t)))\right]$;
- $B(t,T) = \frac{1 - \exp(-a(T-t))}{a}$.

Nous utilisons la méthode des moindres carrés¹⁸ afin d'estimer les paramètres a , b et σ .

¹⁷ L'existence et l'unicité d'une probabilité dite « risque-neutre » est l'une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés financiers. Cette probabilité est telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une [martingale](#) sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre: aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

¹⁸ La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la somme quadratique des différences entre la valeur estimée et la valeur empirique.

Nous avons obtenu les valeurs suivantes :

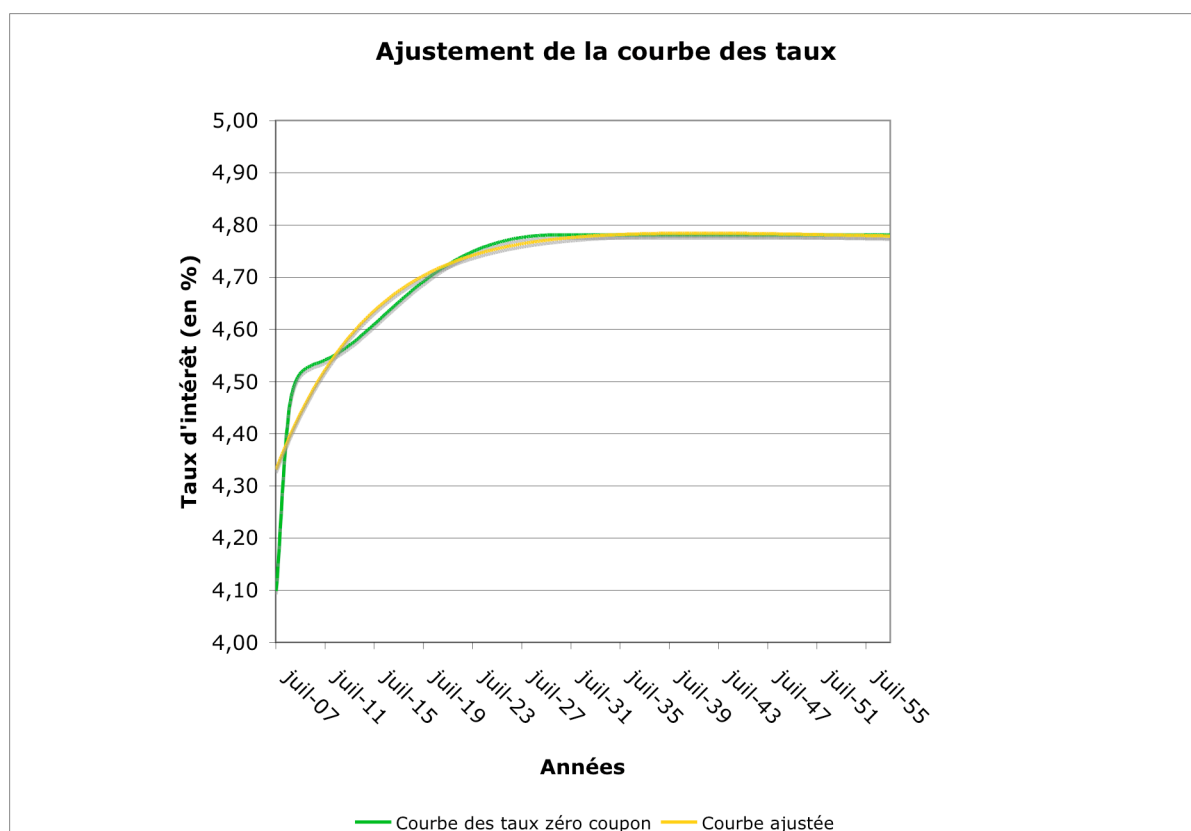
$$a = 0,0784$$

$$b = 0,0590$$

$$\sigma = 0,0120$$

$$r_0 = 0,0433$$

L'ajustement de la courbe des taux zéro coupon obtenu est présenté ci-après.



c. Limites du modèle

Le modèle de Vasicek présente un certain nombre de limites.

Nous pouvons citer les inconvénients suivants :

- les taux sont négatifs avec une probabilité non nulle puisque le taux court suit un processus gaussien ;
- les variations de taux sont parfaitement corrélées entre elles ;
- l'allure de la courbe des taux zéro coupon du marché n'est pas toujours parfaitement reproduite par le modèle.

1.2.3 La corrélation des deux processus

D'après les deux paragraphes précédents, les dynamiques des actions et des taux s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \\ dr_t = a(b - r_t)dt + v dW_t^{(2)} \end{cases}$$

La dynamique des taux d'intérêt se situe dans un univers risque-neutre.

Écrivons également la dynamique des actions dans un univers risque-neutre. Pour cela, nous effectuons un changement de probabilité afin de passer de la probabilité dite historique à la probabilité risque-neutre.

Le théorème de Girsanov¹⁹ nous permet de trouver une mesure de probabilité \mathbb{Q} telle que sous \mathbb{Q} ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma dW_t^{(1)}$$

où $W_t^{(1)}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

¹⁹ Le théorème de Girsanov énonce que, s'il existe un processus (h_t) , $t \leq T$, adapté, intégrable sous la probabilité P et tel que (L_t) , $t \leq T$, défini par $L_t = \exp\left(\int_0^t h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds\right)$, $t \leq T$ soit une vraie martingale, alors le processus (W_t) , $t \leq T$, défini par $W_t^{(1)} = W_t + \int_0^t h(s) ds$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} (où $d\mathbb{Q} = L_T dP$).

Pour cela, il suffit de prendre $h(t) = \frac{\mu - r_t}{\sigma}$, sous réserve d'intégrabilité de h , c'est-

à-dire $E^Q \left(\exp \left(\int_0^t h^2(s) ds \right) \right) < \infty$.

Posons $L_t = \exp \left(\int_0^t h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds \right)$, $t \leq T$, alors $dQ = L_T dP$.

La probabilité Q est la probabilité risque-neutre.

Les deux mouvements browniens, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$, sont corrélés. Nous allons les exprimer en fonction de deux mouvements browniens indépendants. Pour cela, nous allons chercher une matrice A permettant d'obtenir :

$$W = AB$$

où :

- A est la matrice de taille 2×2 cherchée ;
- $W = \begin{pmatrix} W^{(1)} \\ W^{(2)} \end{pmatrix}$, ρ étant le coefficient de corrélation entre les deux composantes;
- $B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix}$, $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ étant indépendants.

Posons $V_W = \begin{pmatrix} \text{Var}(W^{(1)}) & \text{Cov}(W^{(1)}, W^{(2)}) \\ \text{Cov}(W^{(1)}, W^{(2)}) & \text{Var}(W^{(2)}) \end{pmatrix}$ la matrice de variance-covariance de W .

$W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ étant des mouvements browniens, $\text{Var}(W_t^{(1)}) = \text{Var}(W_t^{(2)}) = t$.

Comme $\text{Corr}(W^{(1)}, W^{(2)}) = \frac{\text{Cov}(W^{(1)}, W^{(2)})}{\sqrt{\text{Var}(W^{(1)})} \sqrt{\text{Var}(W^{(2)})}}$, $\text{Cov}(W^{(1)}, W^{(2)}) = t\rho$.

Ainsi, $V_W = t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = t\Sigma$.

V_W est également la matrice de variance-covariance de AB . Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} V_W &= E \left[(AB - E(AB))(AB - E(AB))^T \right] \\ &= E \left[(AB)(AB)^T \right] \\ &= E \left[ABB^T A^T \right] \\ &= A V_B A^T \\ &= A \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} A^T \\ &= t A A^T = t \Sigma \end{aligned}$$

AA^t est une matrice de variance-covariance. Elle est donc symétrique et définie positive. Nous pouvons alors poser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la factorisation de Cholesky²⁰, nous obtenons $A = \begin{pmatrix} \rho & \sqrt{1-\rho^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} W_t^{(1)} &= \rho B_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} B_t^{(2)} \\ W_t^{(2)} &= B_t^{(1)} \end{aligned}$$

Finalement, la dynamique des actifs est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma \rho dB_t^{(1)} + \sigma \sqrt{1-\rho^2} dB_t^{(2)} \\ dr_t = a(b - r_t) dt + v dB_t^{(1)} \end{cases}$$

1.2.4 La discrétisation des deux processus

Afin de simuler les trajectoires de taux et d'actions, il est nécessaire de discrétiser les processus.

Pour cela, nous utilisons le schéma d'Euler avec un pas de discrétisation Δt .

Les dynamiques de taux et d'actions deviennent :

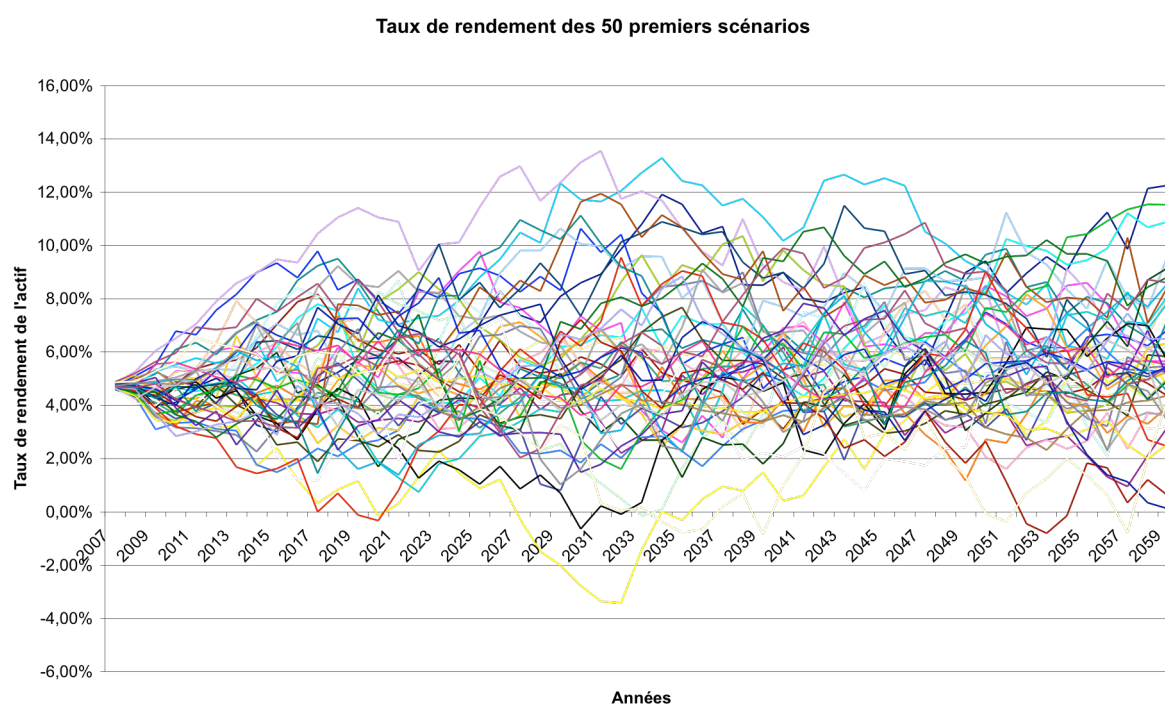
$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} = \exp \left[\left(r_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \left(\rho \sigma \varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2} \sigma \varepsilon_2 \right) \sqrt{\Delta t} \right] \\ r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t) \Delta t + v \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

où ε_1 et ε_2 ont une distribution normale centrée réduite.

²⁰ Le théorème de Cholesky affirme que si M est une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que : $M = LL^T$. Des algorithmes permettent d'en trouver.

1.2.5 Les taux de rendement stochastiques obtenus

A titre d'exemple, le graphique suivant présente les taux de rendement de l'actif obtenus pour les 50 premiers scénarios.



Chapitre 2 La mise en œuvre des calculs et la comparaison avec les résultats du scénario déterministe moyen²¹

2.1 La méthodologie générale

Notre modélisation stochastique prend en compte des taux de mortalité stochastiques ainsi que des taux de rendement de l'actif stochastiques.

Le nombre de scénarios stochastiques simulé est 1 000. Cela paraît assez peu, mais ce nombre nécessite déjà des temps de calculs gigantesques sous Excel / VBA (plusieurs journées sont nécessaires pour obtenir le SCR).

Cette modélisation nous permet de calculer une provision best estimate stochastique et un SCR stochastique. Pour cela, nous utilisons la méthode de Monte Carlo.

Cette méthode permet de calculer numériquement des valeurs approchées d'espérances.

Elle repose sur la génération d'un échantillon de grande taille et sur la loi forte des grands nombres. Ainsi, si $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ est l'échantillon de taille k

généré, alors $\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \rightarrow E(X)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

La précision du résultat se mesure par la probabilité de se tromper.

²¹ Le scénario déterministe moyen est le scénario pour lequel les taux de rendement et taux de mortalité sont égaux aux taux moyens des scénarios stochastiques.

Nous créons un intervalle de confiance dans lequel on est sûr à φ % que se trouve la valeur estimée. Cet intervalle est de la forme $[\bar{X}_k - \varepsilon, \bar{X}_k + \varepsilon]$ où ε vérifie

$$P(|E(X) - \bar{X}_k| > \varepsilon) = 1 - \varphi$$

Or, $\bar{X}_k \sim N\left(E(X), \frac{Var(X)}{k}\right)$.

D'après le théorème limite central, $\sqrt{\frac{k}{Var(X)}}(\bar{X}_k - E(X))$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Ainsi, pour k grand, on obtient l'approximation suivante :

$$P(|E(X) - \bar{X}_k| > \varepsilon) = P\left(\left|\frac{\sqrt{k}(E(X) - \bar{X}_k)}{\sqrt{Var(X)}}\right| > \frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{Var(X)}}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{Var(X)}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Pour $\varphi = 0,95$, $\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{Var(X)}} = 0,96$ (d'après la table des quantiles de la loi normale

centrée réduite). Ainsi, $\varepsilon = 0,96 \times \sqrt{\frac{Var(X)}{k}}$.

On en déduit que l'intervalle de confiance à 95% pour $E(X)$ est donné par :

$$\left[\bar{X}_k - 0,96 \times \sqrt{\frac{Var(X)}{k}}, \bar{X}_k + 0,96 \times \sqrt{\frac{Var(X)}{k}} \right]$$

Lorsque $Var(X)$ est inconnu, on l'approxime par S_k^2 .

2.2 La provision best estimate

La volatilité des actions σ étant fixée égale à 16%, la provision best estimate stochastique est évaluée à 3 334 570 euros.

L'intervalle de confiance à 95% est [3 314 653 , 3 354 487].

La provision best estimate déterministe associée est égale à 3 161 362.

La provision best estimate stochastique est supérieure à la provision best estimate déterministe. C'est cohérent puisque le calcul déterministe ne prend pas en compte la valeur temps des options et garanties financières. Par conséquent, nous estimons la valeur temps des options et garanties financières à la différence entre les deux montants, à savoir 173 208 euros

2.3 Le MCR

Nous nous intéressons à la valeur obtenue par la méthode 1.

Le MCR stochastique obtenu avec cette méthode est 235 876 euros.

Le MCR déterministe obtenu avec la même méthode est 235 888 euros.

Le MCR (méthode 1) est insensible au choix de modélisation.

2.4 Le SCR

Risques vie

Le tableau ci-après met en parallèle les résultats des besoins en capitaux associés aux différents risques de souscription vie dans le cadre déterministe et dans le cadre stochastique :

	Approche déterministe		Approche stochastique		
	SCR	KC	SCR	KC démarche 1 ²²	KC démarche 2 ²²
mortalité	729 885	642 126 (88%)	738 258	529 258 (72%)	507 786 (69%)
rachat	40 070	40 008 (100%)	55 707	37 473 (67%)	34 216 (61%)
frais	412 095	365 564 (89%)	412 139	302 187 (73%)	295 394 (72%)
catastrophe	209 520		82 068		
Souscription vie	956 537	824 353 (86%)	948 585	681 268 (72%)	656 796 (69%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la part d'atténuation par l'effet participation aux bénéfices (KC) dans le besoin en capital correspondant (SCR).

Pour le calcul du SCR, il apparaît clairement que les deux types de modélisation (approche déterministe et approche stochastique) donnent des résultats quasi-identiques, les SCR stochastiques étant légèrement inférieurs.

²² Le KC est plafonné au SCR correspondant. Dans l'approche stochastique, deux démarches peuvent être envisagées : plafonner le KC en moyenne ou plafonner le KC scénario par scénario. Le premier cas correspond à la première démarche et le second à la seconde démarche.

Quant à l'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices, nous remarquons que l'approche déterministe donne des résultats supérieurs.

Le calcul du SCR catastrophe se basant sur l'écart entre valeur de rachat et provision technique (la valeur de rachat est égale à 3 438 617²³), il est normal que le besoin en capital pour le risque de catastrophe soit nettement plus faible dans l'approche stochastique que dans l'approche déterministe.

Par ailleurs, le risque de mortalité constitue le risque de souscription vie prépondérant.

Risques de marché

Le tableau ci-après met en parallèle les résultats des besoins en capitaux associés aux différents risques de marché dans le cadre déterministe et dans le cadre stochastique :

	Approche déterministe		Approche stochastique		
	SCR	KC	SCR	KC démarche 1 ²⁴	KC démarche 2 ²⁴
Taux	907 859	907 859 (100%)	965 842	965 842 (100%)	869 821 (100%)
actions	640 000	90 251 (14%)	640 000	85 391 (13%)	85 391 (13%)
marché	1 110 769	912 234 (82%)	1 158 642	969 609 (84%)	874 003 (75%)

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la part d'atténuation par l'effet participation aux bénéfices (KC) dans le besoin en capital correspondant (SCR).

²³ La valeur de rachat est un concept réglementaire. Il est par conséquent basé sur les tables réglementaires (TH 00-02 et TF 00-02). Elle est donc identique dans les deux approches.

²⁴ Le KC est plafonné au SCR correspondant. Dans l'approche stochastique, deux démarches peuvent être envisagées : plafonner le KC en moyenne ou plafonner le KC scénario par scénario. Le premier cas correspond à la première démarche et le second à la seconde démarche.

Les résultats obtenus dans les deux approches sont comparables.

Cependant, les KC apparaissent soit très importants (risque de taux), soit très faibles (risque actions). Ceci au regard de la clause de participation aux bénéfices retenue (clause réglementaire).

Cela peut s'expliquer en grande partie par le fait que notre modélisation prend assez peu en compte les interactions actif/passif.

En effet, nous aurions pu introduire un lien entre les plus et moins values sur les actions et la distribution de participation aux bénéfices.

Pour le risque sur les taux, une prise en compte des plus values aurait pour conséquence (si la hausse du cours des actions est vérifiée lors de la baisse des taux) d'augmenter les taux de PB après le choc. Cela devrait entraîner une baisse du KC étant donné que l'atténuation par l'effet PB correspond à la différence entre la provision best estimate après le choc sans et avec effet participation aux bénéfices.

Pour le risque actions, la prise en compte des moins values aurait pour conséquence de diminuer les taux de PB après le choc. Cela devrait provoquer une augmentation de l'atténuation par l'effet participation aux bénéfices puisqu'il s'agit de l'écart entre la provision best estimate après le choc sans effet PB et la provision best estimate après le choc avec effet PB.

Nous avons fait le test. Nous avons supposé qu'il existait une approche optimale consistant à ne pas verser de participation aux bénéfices tant que la valeur comptable des actions était supérieure à leur valeur de marché. Le KC associé au risque sur les actions a ainsi été multiplié par 4.

La lecture du tableau précédent permet de constater que l'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices concernant le risque actions est identique dans les deux démarches. L'écart entre la provision best estimate avant le choc et la provision best estimate après le choc sans effet de la participation aux bénéfices étant nul, calculer l'atténuation globalement (par rapport à une moyenne nulle) ou scénario par scénario est donc identique.

Besoin en capital global

Le tableau ci-après met en parallèle les résultats des besoins en capitaux associés aux deux modules de risques impactant notre portefeuille dans le cadre déterministe et dans le cadre stochastique :

	Approche déterministe		Approche stochastique		
	SCR	KC	SCR	KC démarche 1 ²⁵	KC démarche 2 ²⁵
Vie	956 537	824 353 (86%)	948 585	681 268 (72%)	656 796 (69%)
marché	1 110 769	912 234 (82%)	1 158 642	969 609 (84%)	869 821 (75%)
opérationnel	53 526		53 526		
SCR global	316 572		Démarche 1 : 407 370 Démarche 2 : 506 903		

NB : Les chiffres entre parenthèses représentent la part d'atténuation par l'effet participation aux bénéfices (KC) dans le besoin en capital correspondant (SCR).

Nous constatons un écart de l'ordre de 25% entre l'approche déterministe et l'approche stochastique (démarche 1).

Cela paraît assez important mais cela est dû aux mécanismes d'atténuation par l'effet de la participation aux bénéfices. L'atténuation étant plus importante dans l'approche déterministe.

²⁵ Le KC est plafonné au SCR correspondant. Dans l'approche stochastique, deux démarches peuvent être envisagées : plafonner le KC en moyenne ou plafonner le KC scénario par scénario. Le premier cas correspond à la première démarche et le second à la seconde démarche.

Remarque : les résultats précédents ne permettent pas d'obtenir un intervalle de confiance puisque les différentes composantes du SCR ont été calculées globalement.

En calculant le SCR pour chaque scénario, nous obtenons une valeur du SCR stochastique égale à 407 434 euros. L'intervalle de confiance à 95% correspondant est [400 723 , 414 145].

2.5 La marge de risque

Le calcul de la marge de risque par la méthode exacte, c'est-à-dire en calculant les SCR pour les années futures, s'avère être fastidieux pour un seul scénario. Que dire pour 1 000 scénarios...

Nous choisissons alors de calculer la marge de risque stochastique avec la méthode approximée. L'approximation obtenue est 312 782 euros, soit 9% de la provision best estimate. Finalement, les provisions techniques (best estimate + marge de risque) s'élèvent à 3 647 752 euros. Elles sont par conséquent supérieures aux provisions mathématiques (106% des provisions mathématiques).

La marge de risque déterministe obtenue avec la méthode approximée est quant à elle égale à 198 574 euros. Ce qui donne des provisions techniques déterministes égales à 3 359 936.

Le calcul de la marge de risque par la méthode approximée est dépendant de la provision best estimate. La provision best estimate étant plus élevée dans l'approche stochastique, la marge de risque l'est également.

Conclusion

Le projet Solvabilité 2 aborde différemment les problèmes de solvabilité. Les provisions techniques ne sont plus nécessairement aussi prudentes. Les contraintes sur la composition de l'actif (règles de dispersion, de composition, de congruence) disparaissent. En revanche, le capital requis est ajusté de telle sorte à prendre en compte les risques réels.

Le modèle et les paramètres proposés dans le QIS 3 ont pour conséquence sur le portefeuille étudié :

- une exigence minimale de capital requise 1,5 fois plus élevée que l'exigence minimale actuelle ;
- une exigence de capital cible oscillant entre 400 000 et 500 000 euros selon la démarche retenue. Ce qui équivaut à une mobilisation de capital entre 12% et 15% des provisions mathématiques. ;
- une provision best estimate inférieure aux provisions mathématiques ;
- des provisions techniques inférieures aux provisions mathématiques dans le cadre déterministe ; la relation s'inversant dans le cadre stochastique.

Nous relevons également une grande sensibilité des résultats au montant des frais.

Par ailleurs, il convient de souligner que la modélisation stochastique, en prenant en compte la valeur temps des options et garanties financières adossées aux contrats, est nettement supérieure à la modélisation déterministe.

Cela étant, les deux types de modélisations que nous avons présentés souffrent d'une lacune non négligeable : le déficit d'interaction entre l'actif et le passif. Le recours à une modélisation inspirée de l'état C6 bis pourrait permettre de combler cette lacune. Il n'en demeure pas moins que la portée

de nos résultats est globalement significative, même si notre étude ne reflète pas la réalité concrète d'une compagnie d'assurance détenant généralement des portefeuilles de contrats beaucoup plus diversifiés.

Notons pour finir que le QIS 3 sur lequel nous nous sommes basés pour cette étude est en phase d'être complété par une nouvelle étude d'impact quantitatif (QIS 4). Cette dernière devrait être proposée début 2008. Cette future version devrait permettre d'obtenir des formules standard plus cohérentes et calibrées.

Bibliographie

Document de référence

CEIOPS, QIS 3 Technical specifications, 2007

Ouvrages

CORFIAS T., Assurance vie : techniques et produits, Éditions L'argus de l'assurance, 2003

DELWARDE A., DENUIT A., Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives, Economica, 2006

HULL J., Options, futures et autres actifs dérivés, Pearson Education, 5^e édition, 2004

MARTELLINI L., PRIAULET P., Produits de taux d'intérêt, Economica, 2000

PETAUTON P., Théorie et pratique de l'assurance vie, Dunod, 3^e édition, 2004

PIERMAY M., MATHOULIN P., COHEN A., La Gestion Actif-Passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel, Economica, 2002

PLANCHET F., THÉRON P., JACQUEMIN J., Modèles financiers en assurance, Economica, 2005

[B]

Mémoires d'actuariat et rapports de stage

BOURLIER M., Titrisation et validation de provisions, rapport de stage IMA, 2007

LEMAY C., Valorisation des options et garanties financières dans le cadre de Solvency II et du QIS 3, rapport de stage IMA, 2007

SAUVET C., Solvency II – Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non vie ? , Mémoire ISFA, 2006

Cours

BONNEFOI A., Cours de *Mesures de la création de valeur en assurance*, Dauphine, 2007

CABRIGNAC O., Cours de *Démographie et tables de mortalité*, Dauphine 2007

LOOTVOET J. M., Cours d'*Assurance vie*, Dauphine 2007

Articles

DAHL M. Stochastic mortality in life insurance : market reserves and mortality-linked insurance contracts, *Insurance : mathematics and Economy*, 2004

LIN Y., COX S., Securitization of catastrophe mortality risks, *Journal of Risk and Insurance*, 2007

SENDER S., FOULQUIER P., QIS3 : meaningful progress towards the implementation of Solvency II, but ground remains to be covered, EDHEC, 2007

Site internet

www.ceiops.org

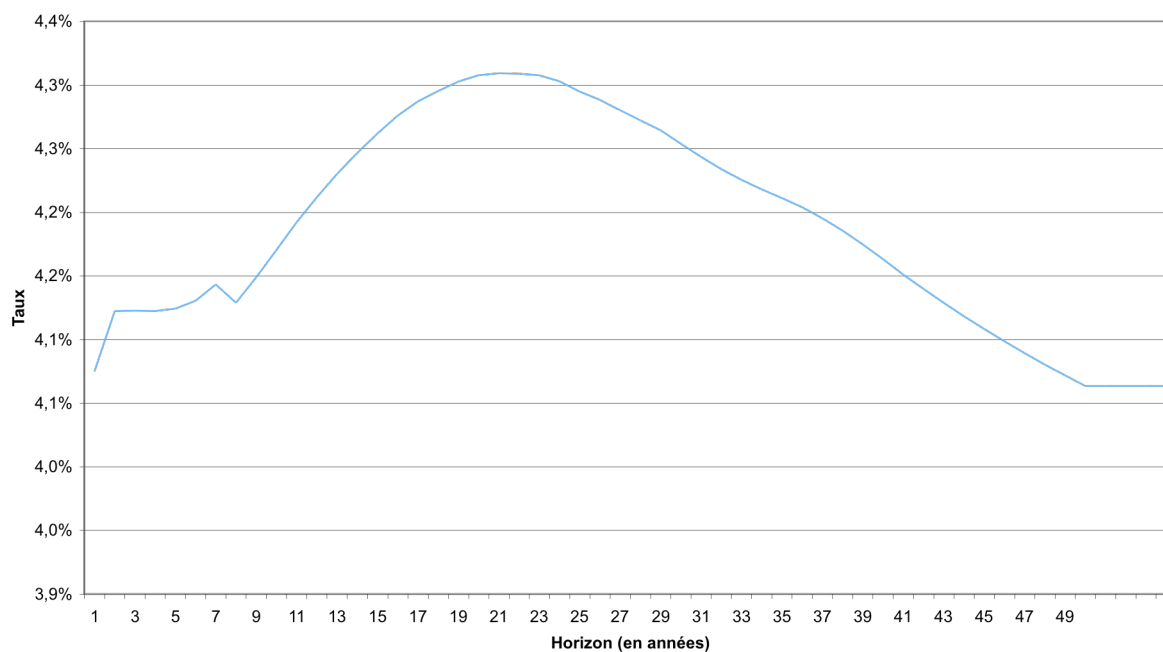
Annexe 1 : La courbe des taux sans risque du GIS 3

échéance	taux
1 an	4,0750%
2 ans	4,1223%
3 ans	4,1228%
4 ans	4,1225%
5 ans	4,1241%
6 ans	4,1303%
7 ans	4,1431%
8 ans	4,1289%
9 ans	4,1489%
10 ans	4,1704%
11 ans	4,1921%
12 ans	4,2116%
13 ans	4,2301%
14 ans	4,2467%
15 ans	4,2618%
16 ans	4,2758%
17 ans	4,2872%

échéance	taux
18 ans	4,2953%
19 ans	4,3028%
20 ans	4,3075%
21 ans	4,3092%
22 ans	4,3088%
23 ans	4,3075%
24 ans	4,3029%
25 ans	4,2949%
26 ans	4,2883%
27 ans	4,2803%
28 ans	4,2723%
29 ans	4,2643%
30 ans	4,2539%
31 ans	4,2434%
32 ans	4,2339%
33 ans	4,2254%
34 ans	4,2179%

échéance	taux
35 ans	4,2111%
36 ans	4,2038%
37 ans	4,1953%
38 ans	4,1856%
39 ans	4,1748%
40 ans	4,1630%
41 ans	4,1511%
42 ans	4,1397%
43 ans	4,1289%
44 ans	4,1184%
45 ans	4,1084%
46 ans	4,0987%
47 ans	4,0893%
48 ans	4,0804%
49 ans	4,0718%
50 ans	4,0634%

Courbe ds taux fournie par le CEIOPS



Annexe 2 : Les chocs sur les taux dans le calcul du besoin en capital associé au risque de taux

Maturité t	1	2	3	4	5	6	7
Variation relative (t) Choc à la hausse	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
Variation relative (t) Choc à la baisse	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37

Maturité t	8	9	10	11	12	13	14
Variation relative (t) Choc à la hausse	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
Variation relative (t) Choc à la baisse	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34

Maturité t	15	16	17	18	19	20 et plus
Variation relative (t) Choc à la hausse	0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37
Variation relative (t) Choc à la baisse	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31

Annexe 3 : Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle de mortalité stochastique de Lin et Cox

En prenant le logarithme de l'équation (8), nous obtenons :

$$\log(\bar{q}_{t+h}) = \log(q_t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma(W_{t+h} - W_t) + \log(Y_{t+h})$$

Notons $Z_t = \log(\bar{q}_{t+h}) - \log(\bar{q}_t)$.

Nous obtenons $Z_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma(W_{t+h} - W_t) + \log(Y_{t+h}) - \log(Y_t)$.

La loi conditionnelle de Z_t sachant \mathcal{F}_t est notée $Z_t | \mathcal{F}_t$.

Nous disposons d'observations du taux de mortalité pour $t=h, 2h, \dots, Kh$.

En considérant les deux intervalles $[t-h, t]$ et $[t, t+h]$, quatre événements peuvent se produire :

- pas de saut dans les deux intervalles (événement nn);
- un saut dans le premier intervalle mais pas dans le deuxième (événement yn);
- un saut dans le deuxième intervalle mais pas dans le premier (événement ny) ;
- un saut dans chaque intervalle (événement yy).

Dans les quatre cas, $Z_t | \mathcal{F}_t$ est gaussienne. Ses moments sont répertoriés dans le tableau ci-après :

Événement	$E[Z_t \mathcal{F}_t] = M_{\text{éven}}$	$Var[Z_t \mathcal{F}_t] = S_{\text{éven}}^2$	Probabilité
nn	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h$	$\sigma^2 h$	$(1-p)^2$
yn	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h - m$	$\sigma^2 h + s^2$	$p(1-p)$
ny	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + m$	$\sigma^2 h + s^2$	$(1-p)p$
yy	$\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)h$	$\sigma^2 h + 2s^2$	p^2

La densité de probabilité de la variable aléatoire (Z_t), notée $f_Z(z)$, peut être écrite en fonction de la densité de probabilité de la variable aléatoire conditionnelle $Z_t | \mathcal{F}_t$, notée $f_Z(z | \mathcal{F}_t)$.

$$\begin{aligned}
 f_Z(z_t) = & f_Z\left(z_t \left| \left\{ N_t - N_{t-h} = 0, N_{t+h} - N_t = 0 \right\} \right. \right) P\left(\left\{ N_t - N_{t-h} = 0, N_{t+h} - N_t = 0 \right\}\right) \\
 & + f_Z\left(z_t \left| \left\{ N_t - N_{t-h} = 1, N_{t+h} - N_t = 0 \right\} \right. \right) P\left(\left\{ N_t - N_{t-h} = 1, N_{t+h} - N_t = 0 \right\}\right) \\
 & + f_Z\left(z_t \left| \left\{ N_t - N_{t-h} = 0, N_{t+h} - N_t = 1 \right\} \right. \right) P\left(\left\{ N_t - N_{t-h} = 0, N_{t+h} - N_t = 1 \right\}\right) \\
 & + f_Z\left(z_t \left| \left\{ N_t - N_{t-h} = 1, N_{t+h} - N_t = 1 \right\} \right. \right) P\left(\left\{ N_t - N_{t-h} = 1, N_{t+h} - N_t = 1 \right\}\right)
 \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
 f_Z(z_t) = & \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_t - M_{nn}}{S_{nn}}\right)^2\right)}{S_{nn}\sqrt{2\pi}} \right) (1-p)^2 + \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_t - M_{yn}}{S_{yn}}\right)^2\right)}{S_{yn}\sqrt{2\pi}} \right) p(1-p) \\
 & + \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_t - M_{ny}}{S_{ny}}\right)^2\right)}{S_{ny}\sqrt{2\pi}} \right) (1-p)p + \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_t - M_{yy}}{S_{yy}}\right)^2\right)}{S_{yy}\sqrt{2\pi}} \right) p^2
 \end{aligned}$$

Nous avons une série de K observations du taux brut de mortalité \hat{q}_t donc le pas $h=1$. Nous en déduisons une série de K-1 observations de la variable aléatoire (Z_t).

Les observations z_t sont décorréliées entre elles, sauf avec les sauts. Lin et Cox ont estimé la corrélation entre les événements catastrophiques et la vraisemblance à -0,005, à partir de données historiques. Ainsi, ils supposent l'indépendance et estiment les paramètres en maximisant la log-vraisemblance, basée sur les observations $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{K-1}$. La vraisemblance est :

$$L = \prod_{t=1}^{K-1} f_Z(z_t)$$

$$\log L = \log \prod_{t=1}^{K-1} f_Z(z_t) = \sum_{t=1}^{K-1} \log(f_Z(z_t))$$

$$= \sum_{t=1}^{K-1} \log \left(\sum_{j=0}^1 \sum_{l=0}^1 f_Z(z_t | N_t - N_{t-h} = j, N_{t+h} - N_t = l) P(N_t - N_{t-h} = j, N_{t+h} - N_t = l) \right)$$

Finalement,

$$\log L = \sum_{t=1}^{K-1} \log \left[\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{nn}}{S_{nn}}\right)^2\right)}{S_{nn} \sqrt{2\pi}} (1-p)^2 + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{yn}}{S_{yn}}\right)^2\right)}{S_{yn} \sqrt{2\pi}} p(1-p) \right. \\ \left. + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{ny}}{S_{ny}}\right)^2\right)}{S_{ny} \sqrt{2\pi}} (1-p)p + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_t - M_{yy}}{S_{yy}}\right)^2\right)}{S_{yy} \sqrt{2\pi}} p^2 \right]$$