



Mémoire d'Actuariat - Promotion 2008

CDO sur Produits Inflation

David Cohen & Oberlain Nteukam Teuguia

MOTS-CLÉS : *CDO, Dérivés inflation, Probabilités de défaut, Copule gaussienne, Notation.*

KEYWORDS: *CDO, Inflation derivatives, Probability of default, Gaussian copula, Rating.*

ENCADREMENT : Fabrice Bidaud (GRO. Credit Agricole)

CORRESPONDANT E.N.S.A.E. : Bruno Bouchard

MEMOIRE NON CONFIDENTIEL

Remerciements

Nous tenons à remercier Benjamin Cavallier, Jean-Marie Dumas, Laurent Gonon, et Isabelle Vic-Philippe pour leurs conseils et les discussions fructueuses que nous avons eues tout au long de notre recherche. Nous remercions également Fabrice Bidaud, qui nous a encadré, pour sa disponibilité.

Table des matières

1	Présentation des Collateralised Debt Obligations	6
1.1	Généralités sur les dérivés de crédit.	6
1.2	Les CDOs : Définition et exemple	7
1.2.1	Définition	7
1.2.2	Le CFXO : un exemple de CDO synthétique sur change	8
1.3	Flux du CDO sur inflation	9
2	Inflation : Marchés et produits	11
2.1	Les indices d'inflation	11
2.2	Les Obligations indexées sur Inflation	11
2.3	Les swaps indexés sur l'inflation	12
2.4	Autres dérivés sur inflation	13
2.5	Les marchés de l'inflation	14
3	Les modèles d'inflation	15
3.1	Le modèle de Jarrow Yildirim	15
3.1.1	Pricing dans le modèle de Vasicek étendu	17
3.1.2	Estimation des paramètres	18
3.2	Les modèles de marché	19
3.2.1	Cadre général modèle	19
3.2.2	Spécification du modèle	20
3.3	Les modèles de taux court	21
3.3.1	Two-Process Hull-White model	21
3.3.2	Le modèle de taux court avec ratio en glissement annuel comme variable d'état	23
3.4	Choix du modèle	25
4	Estimation de la dynamique de l'inflation et des probabilités de défaut	26
4.1	Estimation de la dynamique d'inflation	26
4.1.1	Les estimateurs du MCO	26
4.1.2	Les estimateurs du maximum de vraisemblance	28
4.1.3	Analyse des résultats	29
4.2	Estimation des probabilités de défaut individuel	33

4.2.1	Estimation des "triggers"	33
4.2.2	Probabilités de défaut estimées vs Probabilités de défaut empiriques	38
4.3	Probabilités de défauts joints	40
4.3.1	Les copules	40
4.3.2	La copule gaussienne	42
4.3.3	Calibration de la copule gaussienne sur données historiques	43
4.4	Conclusion : Sélection des indices et construction des tranches	44
5	Pricing des tranches du CDO inflation	48
5.1	Historique des modèles de Pricing CDO	48
5.1.1	Les modèles structurels	48
5.1.2	Les modèles à intensité	50
5.2	Pricing	51
5.2.1	Pricing du CDS digital	51
5.2.2	Pricing des tranches du CDO inflation	52
5.2.3	Calibration	53
5.2.4	Résultats	55
A	Note technique	61
A.1	Le test de Normalité de Jarque-Bera	61
A.2	Les tests d'autocorrelation	61
A.2.1	Le test d'autocorrelation de Ljung-Box	61
A.2.2	Le test d'autocorrelation de Breusch-Godfrey (1988)	62
A.2.3	Correction de l'autocorrelation	63
A.2.4	La correction de Newey-West	63
A.3	Le test de White	63
A.4	Test de stabilité des coefficients estimés	64
B	Compléments sur le pricing des dérivés d'inflation	66
B.1	Démembrement des obligations dans le modèle de Jarrow-Yildirim	66
B.2	Pricing des dérivés d'inflation dans le modèle de taux court de Hull & White	67
B.2.1	Le Year-on-year inflation swap	67
B.2.2	Options sur inflation	68
B.2.3	Caps/Floors	69
Bibliographie		70

Introduction

Le développement accéléré des marchés de produits dérivés inflation amorcé depuis le début des années 2000¹, s'il permet aux agents averses à l'inflation de s'en prémunir, offre également un nouveau champ d'actions aux investisseurs, par exemple désireux de diversifier leur portefeuille. Ce développement est allé de pair avec ceux d'autres marchés, par exemple dans les matières premières. Cependant, l'inflation, accroissement d'un indice des prix à la consommation, a une parution -généralement- mensuelle, et présente de la saisonnalité. Ces deux points induisent une spécificité forte des produits dérivés inflation.

Alors même que de nouveaux domaines devenaient accessibles aux investisseurs, de nouveaux instruments financiers se répandaient, en particulier les dérivés de crédit. Et parmi ces derniers, les Collateralized Debt Obligation (ou CDO), fonds fondés sur une aversion au risque différente de leurs souscripteurs : investisseurs du même produit choisissent alors des profils de risque différents, et rémunérés en conséquence.

Un CDO standard est une structure financière qui rémunère ses souscripteurs jusqu'à la survenance d'événements de crédit prédéfinis. Il peut par exemple être composé de différents actifs soumis au risque de crédit. L'ordre sur l'aversion au risque est mis en oeuvre à travers une division du CDO en tranches. CAAM² a récemment proposé des produits analogues aux dérivés de crédit, mais portant sur le change, comme le CFXO³, avec des produits qui incluent des barrières sur taux de change.

Au croisement de ces deux domaines, notre objectif est la réalisation d'un CDO sur produit inflation. Après une étude des méthodes de construction des CDO, puis des produits dérivés inflation, nous nous proposons de mettre sur pied un tel produit, sans oublier que d'autres contraintes, de taille et de liquidité des marchés financiers, pourront conduire à une réalisation effective ultérieure.

Pour mener à bien notre étude, nous commençons, dans le premier chapitre, par passer en revue les principaux concepts liés aux CDO : les situer au sein des dérivés de crédits et présenter leur fonctionnement, illustré par la présentation du CFXO. Nous terminons ce

¹en volume, le marché mondial de l'inflation représentait environ 70 milliards de dollars, avant le lancement des obligations américaines TIPS en 1998, contre environ 1000 milliards de dollars en 2007

²Credit Agricole Asset Management

³FX pour Foreign Exchange

chapitre en définissant les flux liés aux CDO sur produits inflation que nous souhaitons construire.

Dans un deuxième temps, nous présentons les principaux marchés d'inflation, les produits qui y sont traités et les principales conventions sur ces marchés. Si les modèles macro-économétriques ne sont pas adaptés à l'évaluation des dérivés d'inflation, les modèles stochastiques restent récents. Le chapitre trois sera l'occasion de broser un panorama des modèles stochastiques d'inflation.

Dans le chapitre quatre, nous analysons la dynamique de l'inflation et la structure de dépendance entre les inflations retenues. Au terme de ce chapitre, nous estimons les probabilités de défaut et construisons les tranches du CDO avec les notations associées espérées.

Pour le pricing des tranches, au chapitre cinq, nous retenons une approche similaire aux modèles structurels, dans laquelle nous considérons une structure de dépendance plate ("flat" en anglais) selon la maturité et l'information disponible à l'instant initial. Nous calibrons le modèle sur des Caplets, options les plus liquides sur le marché de l'inflation. Pour les pays ne disposant pas encore de tels produits, nous cherchons une relation entre leur inflation et celle d'un marché de référence (benchmark).

Chapitre 1

Présentation des Collateralised Debt Obligations

Nous présentons dans ce chapitre les dérivés de crédit, dont les CDO, dont nous expliquons le fonctionnement. Nous nous appuyons dans un second temps sur l'exemple du CFXO, produit de change qui s'inspire des CDO.

1.1 Généralités sur les dérivés de crédit.

Le risque de crédit est le risque de perte consécutive au défaut d'un emprunteur dans le remboursement de ses dettes (obligations, prêts bancaires, créances commerciales...).

Les marchés de produits dérivés connaissent une forte croissance depuis le début des années 2000, dans un contexte de mondialisation et de libéralisation des mouvements de capitaux. La gestion du risque de crédit connaît également un développement rapide (voir [30]). Suite à la demande d'institutions financières, le marché du risque de crédit s'est considérablement étendu ces dernières années, tant en taille qu'en instruments disponibles : marché composé d'obligations risquées jusqu'au milieu des années 1990, puis apparition des dérivés de crédits¹, pour atteindre en 2008 un volume de plus de 30 000 milliards de dollars, contre 5 000 en 2004². Ces produits, qui permettent le transfert du risque, sont souvent des produits hors-bilan, et sont utilisés pour diminuer les ratios de fonds propres réglementaires, calculés à partir du bilan.

Deux grandes familles de dérivés de crédit existent. D'une part, les instruments en nom unique (single-name), qui portent sur une seule entité sous-jacente ; d'autre part, les instruments de portefeuille.

Parmi les instruments en nom unique, citons :

1. Les produits dérivés sur risque de défaut : ils permettent à leurs détenteurs de se protéger contre des événements de crédit. Ils comprennent les Credit Default Swap

¹standardisation de certains contrats par l'International Swaps and Derivatives Association en 1999 et 2003

²même si la crise du subprime révèle des lacunes dans l'évaluation des dérivés de crédit

(CDS), les Credits Linked Notes (CLN).

2. Les produits dérivés sur différentiels de taux ou Credit Spread Derivatives : leurs détenteurs se prémunissent contre les mouvements de taux entre obligations selon leur risque. Ces contrats sont principalement des contrats à terme (Credit Spread Forward) , ou des options sur un niveau de différentiel de taux pour une maturité résiduelle donnée (Credit Spread Option).

Deux types d'instruments écrits sur plusieurs noms se distinguent à nouveau :

1. Un premier type d'instrument est l'extension directe à plusieurs noms des CDS. Il peut s'agir de CDS doubles (Two-way CDS) ou de contrats sur panier (Basket Default Swap ou BDS)
2. D'autres instruments résultent d'opérations de titrisation (securitization) : la vente sur le marché des parts d'un portefeuille (pool) de crédits ou de dérivés de crédits après démembrement des flux de remboursements. Ces produits sont généralement appelés Collateralised Debt Obligations, notés CDO dans toute la suite.

Voyons à présent comment fonctionnent les CDO, et quel est leur intérêt.

1.2 Les CDOs : Définition et exemple

1.2.1 Définition

Les CDO sont des titres représentatifs de portefeuilles de créances bancaires ou d'instruments financiers de nature diverse. Ce sont des montages financiers permettant de constituer un portefeuille de dettes ou d'actifs financiers, puis de le titriser afin de créer des instruments de dette ayant une meilleure notation.

1. Une institution financière (parfois appelée la Cédante) construit un portefeuille de référence constitué de créances bancaires, d'instruments financiers ou de dérivés de crédit.
2. Le transfert du risque de crédit du portefeuille à une entité juridique indépendante appelé Special Purpose Vehicle³ (en France, Fonds Commun de Créances : FCC). Le SPV se charge de l'émission des tranches du CDO.
3. La structuration par le SPV du portefeuille en tranches de différents profils rendement / risque qui sont cédées à des investisseurs.

Les tranches constituées sont appelées **Senior**, **Mezzanine** et **Equity**, elles bénéficient d'un rang de priorité clairement défini : elles présentent des niveaux de risque et de rendement croissants. Ainsi, la tranche Senior, la moins risquée, a le plus faible rendement⁴. Alors que les tranches senior et mezzanine ont en général une durée initiale proche de cinq ans et portent une rémunération de type obligataire, le rendement de la tranche equity très variable, dépend du portefeuille sous-jacent. La structuration du CDO en différentes tranches obéit à une répartition précise des pertes subies par

³SPV dans la suite

⁴hors éventuellement la tranche equity

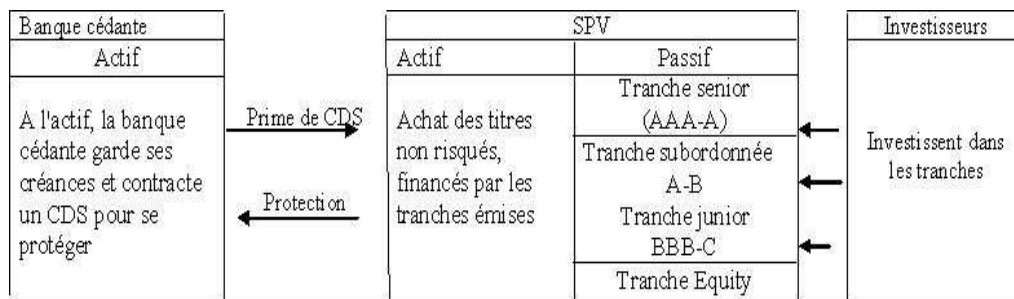


FIG. 1.1 – Exemple simplifié d'un CDO

le portefeuille sous-jacent. La tranche equity absorbe la première des pertes éventuelles. Lorsque les pertes excèdent le montant de cette tranche, c'est au tour de la mezzanine d'être affectée, et ainsi de suite. Le porteur d'une tranche, excepté la tranche equity, est protégé du risque de perte par les tranches de rang inférieur.

S'il existe plusieurs types de CDO, nous nous restreignons dans notre étude aux CDO dits "synthétiques". Ils ont pour sous-jacents des dérivés de crédit, et sont sans transfert de propriété. Leur coût de transaction est réduit, et leur emploi juridique (relativement) simple.

1.2.2 Le CFXO : un exemple de CDO synthétique sur change

Le CFXO ⁵ [15] est une structure initiée par CAAM (Crédit Agricole Asset Management) et Merrill Lynch, et montée par "Prometheus Capital PLC⁶". La figure 1.2 présente sa structure. Le portefeuille sous-jacent est constitué de 30 options européennes sur des taux de change, de maturité 5 ans et les strikes sont des barrières, appelés "Triggers".

Les tranches émises recouvrent 80% du montant du portefeuille de référence. Les 20% restant bénéficient de la subordination de la tranche senior et constituent la partie de la structure la mieux immunisée contre les pertes : c'est la tranche "Super Senior". Cette tranche est conservée par Merrill Lynch qui assure le risque de contrepartie. Merrill Lynch paye une prime au SPV en tant que contrepartie du swap pour le portefeuille sous-jacent et reçoit une prime en échange du portage de la tranche "Super Senior". Le défaut est constaté à maturité, il a lieu lorsque le taux de change dépasse un niveau donné. Chaque défaut a le même poids, et implique une perte de 3.33% de la valeur initiale du portefeuille.

Le SPV émet des tranches de CDO pour 80% du notionnel : ces tranches sont souscrites par des investisseurs ; puis il investit le montant issu de la vente des tranches dans des actifs sans risque -le collatéral- (au sens des réglementations).

CAAM assure la gestion du portefeuille d'actifs risqués (constitué d'options sur le taux de change) et a pour but de maximiser le rendement de l'opération tout en gérant les risques et la notation de la dette dans le respect des contraintes.

⁵FX pour Foreign Exchange

⁶SPV

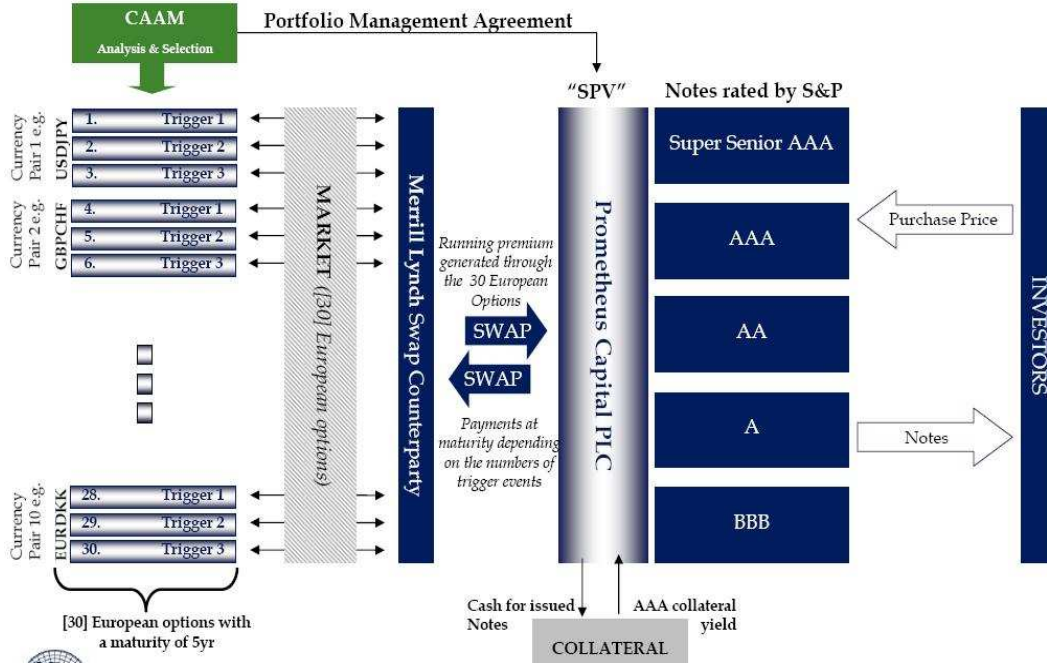


FIG. 1.2 – Structure du CFXO

1.3 Flux du CDO sur inflation

Nous disposons de N_I Indices de prix à la consommation de pays distincts. Pour chaque inflation, nous considérons N_T barrières que nous appellerons dans la suite "triggers".

Nous allons considérer un portefeuille support, composé de $N_I \times N_T$ CDS "digital" sur inflation, de montants initiaux $M_{i,0}; i = 1; \dots; N$ et de maturités identiques T . En cas de défaillance le taux de recouvrement est nul. Nous allons supposer que le portefeuille est homogène c'est-à-dire $M_{i,0} = M_0; i = 1; \dots; N$. La valeur initiale du portefeuille est $M = NM_0$. Avec $N = N_I \times N_T$

La défaillance est constatée à la maturité T , elle a lieu pour la digitale i si le ratio d'inflation en glissement annuel correspondant passe au dessus d'un trigger.

La perte cumulée du portefeuille à maturité s'écrit :

$$L_p(T) = M_0 \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_T} 1_{Y_{oY_i}(T) > Trig_{i,j}}$$

L'espérance de perte est :

$$E^Q(L_p(T)) = M_0 \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_T} P(Y_{oY_i}(T) > Trig_{i,j})$$

Le nombre de défaut est :

$$N_D(T) = \frac{L_p(T)}{M_0} = \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_T} 1_{Y \circ Y_i(T) > Trig_{i,j}}$$

Le taux de perte s'écrit

$$l_p(T) = \frac{L_p(T)}{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_T} 1_{Y \circ Y_i(T) > Trig_{i,j}}$$

Nous allons nous intéresser à la tranche de CDO $[A, D]$. Cette tranche est caractérisée par le taux de perte $l_{[A,D]}(T)$ défini par :

$$l_{[A,D]}(T) = \begin{cases} 0 & \text{Si } l_p(T) \leq A \\ \frac{l_p(T) - A}{D - A} & \text{Si } A < l_p(T) < D \\ 1 & \text{Si } l_p(T) \geq D \end{cases}$$

La fonction de perte de la tranche $[A, D]$, $l_{[A,D]}(T)$ se met sous la forme :

$$l_{[A,D]}(T) = \frac{1}{D - A} \{(l_p(T) - A)^+ - (l_p(T) - D)^+\}$$

Les investisseurs dans cette tranche reçoivent un spread $s_{[A,D]}$ entre 0 et T. A T ils reçoivent la proportion $l_{[A,D]}(T)$ du montant initialement investi.

Chapitre 2

Inflation : Marchés et produits

2.1 Les indices d'inflation

L'inflation, sous-jacent de notre CDO inflation, est calculée à partir de l'évolution du prix d'un panier de biens et services (évolution du CPI pour Consumer Price Index). Calculée généralement par les instituts nationaux de statistiques, sa mesure prête parfois à polémique : polémique d'abord sur la méthodologie utilisée, assaisonnée de doutes sur l'indépendance des différents instituts nationaux de statistiques par rapport à leurs gouvernements. Les réserves émises sur la mesure de l'inflation ne concernent pas les seuls pays en voie de développement, comme l'illustrent les débats sur le pouvoir d'achat.

Comme les indices d'inflations sont mensuels, l'évaluation de l'inflation sur une période différente, ou d'un mois à cheval sur deux mois calendaires¹, repose sur plusieurs méthodes. Comme pour les obligations classiques, des conventions de marché existent pour les produits basés sur les indices d'inflation.

La convention de base fixe considère l'inflation fixée pour le mois entier. Ainsi, pour tout swap débutant au mois j , l'inflation utilisée est celle du mois $j-3$ (en considérant un décalage de trois mois entre l'inflation et sa publication). Au contraire, la convention de base interpolée consiste à interpoler² l'indice de référence à la date de calcul entre les deux dates qui l'encadrent. La première méthode est utilisée pour les inflations européennes et britanniques, tandis que la deuxième méthode est utilisée pour les inflations américaines et françaises. Ces conventions ont par ailleurs été fixées par l'ISDA³.

2.2 Les Obligations indexées sur Inflation

Les obligations indexées sur l'inflation sont des obligations dont les flux sont indexés sur l'indice de référence qui indique le niveau d'inflation. Les coupons sont payés en termes nominaux, apportant une protection contre le risque d'inflation. En effet, les flux futurs de ces obligations ne sont pas connus au moment de l'achat (contrairement aux

¹par rapport à la publication des indices d'inflation

²linéairement par exemple

³International Swaps and Derivatives Association

obligations, à taux fixe, classiques) car ils dépendent des futures valeurs de l'indice de référence aux dates de fixing. Le notionnel de l'obligation augmente proportionnellement à l'indice de référence.

L'investisseur perçoit le coupon réel fixe multiplié par la valeur de l'indice. Généralement, à maturité, l'obligation rembourse le maximum du notionnel inflaté et du par. En termes réels, l'investisseur perçoit toujours le coupon et est donc couvert contre le risque d'inflation.

Une obligation indexée sur inflation est une combinaison de zéros coupons inflation, dont le prix à la date t pour une maturité T s'écrit :

$$P_I(t, T) = E[I(T)e^{-\int_t^T r_u du}]$$

Les obligations indexées sur inflation ont été émises pour la première fois en 1981, au Royaume-Uni.

En 1991, le Canada a émis des obligations indexées dont la structure innovante et le format sont vite devenus des standards sur le marché. Les obligations indexées émises par les États ont convergé vers la même convention de référence définie par le Canada. Les conventions incluent généralement les éléments suivants :

- Mesure de l'inflation au moyen de l'indice des prix de référence pour le pays concerné
- Calcul du fixing de l'indice⁴
- Les coupons constants en termes réels. A la date de paiement, le notionnel est multiplié par le ratio d'indexation⁵
- Plancher⁶ de 100 (au par) à maturité pour le notionnel dans la plupart des pays. Le but est de constituer une protection contre une période prolongée de déflation
- Pas de protection du coupon contre la déflation, sauf en Australie où le notionnel et le coupon sont protégés
- Le paiement des coupons est annuel⁷, semestriel⁸ ou trimestriel⁹

2.3 Les swaps indexés sur l'inflation

Étant donné un ensemble de dates T_1, \dots, T_M , un swap indexé sur l'inflation (Inflation-Indexed Swap, ou IIS) est un swap dans lequel à chaque date de paiement, la partie A paie à la partie B le taux d'inflation sur une période prédéfinie, tandis que la partie B verse à la partie A un taux fixe. Le taux d'inflation est calculé comme le rendement (en pourcentage)

⁴généralement avec un retard de trois mois, les indices d'inflation pour le m-ème mois étant publiés au milieu du mois m+1 suivant

⁵Ce ratio correspond à la valeur à la date de paiement (indice de référence) divisée par la valeur de l'indice à la date d'émission (indice de base)

⁶A l'exception du Canada, du Royaume Uni et du Japon. Le Japon ne prévoit pas de plancher au notionnel en raison de niveaux d'inflation historiquement bas : la mise en place d'un plancher modifierait trop la valorisation de l'obligation.

⁷Allemagne, Grèce, Zone euro et Suède

⁸Royaume Uni, Canada, Italie et États-Unis

⁹Australie

de l'indice d'inflation sur la période considérée. Deux swaps sont principalement échangés sur les marchés financiers : le swap Zéro-Coupon (ZC) et le swap year-on-year (YY). Dans le ZCIIS (zero coupon sur l'inflation), à la maturité T_M , en supposant $T_M = M$ années, la partie B paie à la partie A le montant fixé :

$$N[(1 + K)^M - 1]$$

où K est le taux fixe du contrat et N sa valeur nominale. En échange, la partie B paie à la partie A à la date T_M le montant aléatoire :

$$N[\frac{I(T_M)}{I_0} - 1]$$

Dans le YYIS, à chaque date T_i , la partie B paie à la partie A le montant déterministe :

$$N\phi_i K$$

où ϕ_i est la jambe fixe pour la fraction d'année $[T_{i-1}, T_i]$, et la partie A paie à la partie B le montant aléatoire

$$N\psi_i[\frac{I(T_i)}{I_{T_{i-1}}} - 1]$$

où ψ_i est la jambe flottante pour la fraction d'année $[T_{i-1}, T_i]$.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur à la date t , $0 \leq t \leq T_M$, de la jambe du ZCIIS est :

$$ZCIIS(t, T_M, I_0, N) = NE[\exp\{-\int_t^T r_n(s)ds\}(\frac{I_{T_M}}{I_0} - 1)]|\mathcal{F}_t] \quad (2.1)$$

où \mathcal{F}_t est la tribu engendrée par I_t .

Il existe d'autres types de swaps sur inflation, comme les "Total return swaps" : un taux fixe ou libor, éventuellement minoré d'un spread, est versé en échange d'un rendement de l'inflation sur une période considérée. Le spread dépend de la qualité de crédit de l'émetteur du swap, donnée par sa notation : une mauvaise "notation" conduit à un spread moins élevé, c'est à dire à des versements plus importants. Les "Total return swaps" ont été particulièrement utilisés sur l'indice japonais. En avril 2005, des restrictions à l'acquisition des obligations sur inflation japonaises *JGBi* par les investisseurs étrangers ont été levées. Auparavant, les investisseurs étrangers s'exposaient à l'inflation japonaise via les "Total return swaps".

2.4 Autres dérivés sur inflation

Mentionnons tout d'abord l'existence de contrats futures sur l'inflation américaine, les US CPI futures. Lancés par le Chicago Mercantile Exchange en février 2004, ces produits sont encore peu échangés. Les contrats futurs ont pour prix théoriques p :

$$p = 100 - [400(\frac{CPI_t}{CPI_{t-3}} - 1)]$$

Ces contrats étant cotés, et l'inflation CPI_{t-3} étant connue, CPI_t représente l'inflation anticipée par les marchés pour la date t . Notons enfin que ces contrats peuvent avoir une valeur supérieure à 100 lorsque le marché anticipe de la déflation.

Enfin, des caps et des floors sur inflation existent également sur certains marchés¹⁰, définis de manière analogues aux caps et floors sur produits de taux. Un cap est ainsi la somme de Caplets, un Caplet étant un call sur un YoY futur aléatoire. Les Caplets ou Floorlets sont généralement annuels ou mensuels, et ont le même strike K .

D'autres produits se développent, même s'ils restent encore peu échangés. Ainsi des TIPStions, ou options sur TIPS, sur le marché américain, ou des swaptions sur inflation. Les swaptions payeuses d'inflation (inflation payer swaption) donnent à leur propriétaire le droit d'entrer dans un swap d'inflation à une date donnée en tant que payeur de la jambe fixe, (et donc receveur de l'inflation), tandis que les swaptions receveuses d'inflation (inflation receiver swaption) permettent d'entrer dans un swap comme payeur du fixe (et receveur de l'inflation). Les swaptions peuvent servir de couverture à des compagnies d'assurances qui émettent des contrats d'investissement garantis (guaranteed investment contracts ou GICs), ou à des fonds de pension dont les versements futurs peuvent être liés à l'inflation.

2.5 Les marchés de l'inflation

Après avoir décrit différents produits inflations, intéressons-nous aux marchés sur lesquels ces produits sont vendus. Comme les produits inflations sont récents, les marchés gardent encore des spécificités locales. Le développement du marché américain remonte à septembre 2003. Si les *ZCIIS* sont le produit le plus échangé entre courtiers, le secteur de la vente est plutôt demandeur de *YYIS*. Le marché des swaps inflation européens est aujourd'hui plus actif et liquide que les marchés britanniques et américains, et le produit phare reste le Zéro-Coupon *ZCIIS*, qui est également le produit le plus traité pour l'indice français, le marché européen le plus vieux. D'autres marchés en développement sont les marchés néerlandais, italiens, espagnols, belges, irlandais ou grecs.

¹⁰principalement américains, britanniques et français

Chapitre 3

Les modèles d'inflation

Les modèles macroéconométriques, utilisés dans un but prédictif, et comme aide à la décision politique, ne sont pas adaptés au pricing des dérivées d'inflation. Plusieurs modèles ont alors été développés.

Deux approches au moins -selon les types de produits- sont possibles : une modélisation paramétrique de l'accroissement du CPI¹, ou du Year on Year. Les taux d'intérêt, instrument de politique monétaire qui influe directement sur l'inflation, sont également pris en compte. Notons que les modèles actuellement existants mettent en jeu des variables continues, observées à intervalles réguliers (souvent mensuels). En théorie, dans un marché concurrentiel, la hausse des prix, soit l'inflation, entraîne² une diminution de la demande, d'où une diminution de l'inflation sur la période suivante. Cette diminution provient également de l'action de Banques Centrales décidées à limiter l'inflation. La Banque Centrale Européenne³ (BCE) a en effet pour principale mission de maintenir le pouvoir d'achat de l'euro, et contenir l'inflation dans la zone euro, tandis que la Federal Reserve⁴ (Fed) américaine aide à atteindre des objectifs économiques des Etats-Unis. Même si la réalité peut sembler parfois différente, le raisonnement précédent explique l'usage fréquent des modèles de retour à la moyenne (de type Hull et White⁵).

3.1 Le modèle de Jarrow Yildirim

Jarrow et Yildirim [24] considèrent un modèle proche du modèle Heath Jarrow Morton (HJM) utilisé pour les produits de taux. Leur modélisation, fondée sur une analogie avec le change, permet le pricing d'options sur inflation. Les différents facteurs sont :

- Les taux d'intérêt réels et nominaux r et n
- le prix nominal à la date t d'un zero coupon de maturité T , $P_n(t, T)$
- l'indice des prix à la consommation à la date t , $I(t)$ (connu avec retard)

¹désigne ici l'indice des prix

²sauf les biens de Giffen

³<http://www.ecb.int/ecb/html/index.en.html>

⁴<http://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/fomc.htm>

⁵qui étendent par exemple le modèle de Vasicek

- le prix à la date t d'un zero coupon réel de maturité T en unité d'indices à la consommation, $P_r(t)$
- le taux forward pour T à la date t , $f_k(t, T)$ avec $k \in r, n$, ie $P_k(t, T) = \exp\{-\int_t^T f_k(t, u)du\}$
- le taux spot à la date t : $r_k(t) = f_k(t, t)$, $k \in \{r, n\}$
- $B_k(t) = \exp\{-\int_0^t r_k(v)dv\}$, $k \in \{r, n\}$
- le prix $\mathcal{B}_n(0)$ d'une obligation à coupon, de coupon C , de maturité T , de valeur nominale F . Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) et de marché sans friction :

$$\mathcal{B}_n(0) = \sum_{t=1}^T CP_n(0, t) + FP_n(0, T)$$

- le prix $\mathcal{B}_{TIPS}(0)$ d'une obligation à coupon protégée de l'inflation, de coupon C unités d'inflation, émise à $t_0 \leq 0$ de maturité T , de valeur nominale F unités d'inflation. Sous l'hypothèse d'absence d'arbitrage et de marché sans friction :

$$\mathcal{B}_{TIPS}(0) = \frac{\sum_{t=1}^T CI(0)P_r(0, t) + FI(0)P_r(0, T)}{I(t_0)}$$

- $P_{TIPS}(t, T) = I(t)P_r(t, T)$

Nous considérons à présent l'espace de probabilité (Ω, F, P) et $\{F_t, t \leq T\}$ la filtration standard générée par les trois mouvements browniens issus de zéro $(W_n(t), W_r(t), W_I(t))$, avec les corrélations $dW_n(t)dW_r(t) = \rho_{nr}dt$, $dW_n(t)dW_I(t) = \rho_{nI}dt$, $dW_r(t)dW_I(t) = \rho_{rI}dt$.

La courbe des taux forwards initiaux $f_n(0, T)$ étant connue, la dynamique du taux nominal forward de maturité T est supposée donnée par :

$$df_n(t, T) = \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW_n(t)$$

où $\alpha_n(., T)$ est aléatoire et $\sigma_n(., T)$ est une fonction déterministe du temps régulière. Pareillement, $f_t(0, T)$ étant connu, nous avons :

$$df_r(t, T) = \alpha_r(t, T)dt + \sigma_r(t, T)dW_r(t)$$

L'indice d'inflation a pour dynamique :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I(t)dt + \sigma_I(t)dW_I(t)$$

avec μ_I aléatoire et σ_I déterministe.

Sous l'hypothèse d'AOA et de marché complet, il existe une unique probabilité Q équivalente à P telle que :

$$\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$$

soient des martingales sous Q . D'après le théorème de Girsanov, il existe $(\lambda_n(t), \lambda_I(t), \lambda_r(t); t \leq T)$ tels que :

$$\tilde{W}_k(t) = W_k(t) - \int_0^t \lambda_k(s) ds, k \in \{n, r, I\}$$

soient des mouvements browniens sous Q . Nous allons réécrire les dynamiques des taux sous Q . Jarrow et Yildirim énoncent d'abord le résultat suivant :

$$\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)f(t)}{B_n(t)}$$

sont des martingales sous Q si et seulement si :

$$\alpha_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, s) ds - \lambda_n(t) \right) \quad (3.1)$$

$$\alpha_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \sigma_I \rho_{rI} - \lambda_r(t) \right) \quad (3.2)$$

$$\mu_I(t) = r_n(t) - r_I(t) - \sigma_I(t) \lambda_I(t) \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

Nous avons alors :

$$df_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, s) ds + \sigma_n(t, T) d\tilde{W}_n(t) \right) \quad (3.5)$$

$$df_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left[\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \rho_{rI} \sigma_I(t) \right] dt + \sigma_r(t, T) d\tilde{W}_r(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r_n(t) - r_r(t)] dt + \sigma_r(t, T) d\tilde{W}_r(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} = r_n(t) dt - \int_t^T \sigma_n(t, s) d\tilde{W}_n(t) \quad (3.8)$$

$$\frac{dP_{TIPS}(t, T)}{P_{TIPS}(t, T)} = r_n(t) dt + \sigma_I(t) d\tilde{W}_I(t) - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds d\tilde{W}_r(t) \quad (3.9)$$

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = [r_r(t) - \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds] dt - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds d\tilde{W}_r(t) \quad (3.10)$$

3.1.1 Pricing dans le modèle de Vasicek étendu

Jarrow et Yildirim précisent alors la forme de la volatilité σ_r :

$$\sigma_r(t, T) = \sigma_r \exp\{-a_r(T - t)\}$$

où σ_r et a_r sont constants. Les rendements des obligations vérifient alors :

$$\frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} - [r_r(t) + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds] \Delta t \hookrightarrow N[0, (\int_t^T \sigma_r(t, s))^2 \Delta t] \quad (3.11)$$

Jarrow et Yildirim considèrent d'abord le cas du call européen sur indice d'inflation, de maturité T et de strike K unités de l'indice. Le pay-off de l'option est donné par :

$$C_T = \max[I_T - K, 0]$$

Sous la probabilité risque neutre Q , le prix de l'option à la date t est donné par :

$$C_t = E_T^Q(\exp\{-\int_t^T r_n(s) ds\} \max[I_T - K, 0])$$

En se plaçant alors dans le modèle de Vasicek étendu, nous avons comme valeur de l'option :

$$C_t = I_t P_r(t, T) N\left(\frac{\log\left(\frac{I_t P_r(t, T)}{K P_n(t, T)} + \frac{\eta^2}{2}\right)}{\eta}\right) - K P_n(t, T) N\left(\frac{\log\left(\frac{I_t P_r(t, T)}{K P_n(t, T)} - \frac{\eta^2}{2}\right)}{\eta}\right)$$

où $N(\cdot)$ est la fonction de répartition cumulée de la loi normale $N(0, 1)$,

$$\sigma_k^P = \int_t^T \sigma_k(t, u) du, k \in \{n, r\}$$

et

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \int_t^T \sigma_n^P(u, T)^2 du + 2 \int_t^T \rho_{nr} \sigma_n^P(u, T) \sigma_r^P(u, T) du + \int_t^T \sigma_r^P(u, T)^2 du \\ &+ 2 \rho_{nI} \sigma_I \int_t^T \sigma_n^P(u, T) du - 2 \rho_{rI} \sigma_I \int_t^T \sigma_r^P(u, T) du + \sigma_I^2 (T - t) \end{aligned}$$

3.1.2 Estimation des paramètres

Les données disponibles sur le marché

Jarrow et Yildirim utilisent trois types de données : les obligations du Trésor, les obligations protégées et les indices de prix à la consommation. Si les obligations sont cotées quotidiennement sur les marchés, un indice de prix n'est disponible que pour le mois écoulé qu'après environ deux ou trois mois. Jarrow et Yildirim, comme suggéré par le Département du Trésor, procèdent à des interpolations linéaires mensuelles pour avoir l'évolution journalière de l'indice des prix. Notons enfin que les obligations *TIPS* contiennent une option put : si le principal, après ajustement à l'inflation, est inférieur à la valeur au pair à maturité, alors c'est la valeur au pair qui est reçue. Les obligations protégées contre l'inflation jouent leur rôle en cas d'inflation, et sont neutres en cas de déflation (inflation négative).

3.2 Les modèles de marché

N.Belgrade, E.Benhamou et Koehler [3] partent du fait que dans le modèle de Jarrow-Yildirim, l'évaluation des dérivés d'inflation se base sur des données inobservables, ce qui rend la calibration des paramètres difficile. En plus, le modèle de Jarrow-Yildirim n'étudie pas le lien entre les dérivés d'inflation les plus liquides sur le marché. Le but poursuivi par Belgrade et al. est donc de dériver un modèle sur inflation en utilisant les produits liquides traités sur le marché. A partir d'une stratégie identique à celle d'un modèle de marché sur taux d'intérêt, une relation (en l'absence d'opportunité d' arbitrage) est déduite entre le Zéro-Coupon swap et l' annual swap.

3.2.1 Cadre général modèle

Nous présentons ici le premier modèle de marché⁶.

Les hypothèses concernant l'économie réelle sont abandonnées. Ensuite, au lieu de considérer les fixings du CPI comme une même variable observée à différents moments, les modèles de marché considèrent que chaque fixing est une variable stochastique différente observée à un moment donné . Benhamou et al. (2004) prennent par exemple une série de fixings de CPI et considèrent que chacune suit un processus de diffusion lognormale. Ce modèle prend en compte deux grands types d'incertitude :

1. La courbe nominale : les prix des obligations nominales zéro coupon sont déterminés par un mouvement brownien unidimensionnel. Il s'agit généralement d'une diffusion de type HJM.
2. Une série de forwards CPI : chaque forward CPI est distribué selon une loi lognormale avec sa propre source d'incertitude.

Contrairement au modèle à plusieurs devises de type Jarrow-Yildirim, la courbe réelle n'entre pas en ligne de compte. Il suffit de connaître tous les forwards CPI pour déterminer de façon complète la valeur des dérivés indexés sur l'inflation. Par exemple, les cash flows réels seront toujours valorisés en termes nominaux et multipliés par un ratio d'inflation. Les paramètres du modèle sont également plus restreints :

- La structure par terme des Zéro-Coupons nominaux : calibrée sur le marché monétaire et les prix swaps, comme dans le modèle Jarrow-Yildirim ;
- La structure de volatilité de la courbe nominale : calculée au moyen d'instruments d'option issus des marchés nominaux (swaptions, caps et floors) ;
- La structure de volatilité des fixings de CPI.

Dans ce modèle, la structure de la volatilité du CPI est particulièrement bien adaptée aux instruments disponibles. De manière générale, les options d'inflation sont calculées par un ratio de prix à la consommation. Ce ratio CPI peut être génériquement défini par :

1. La première date de fixing (date de fixing dénominateur), T ;

⁶Le second modèle a pour variable sous-jacente l'inflation forward définie par $\widehat{CPI}(t, T_i) = \frac{P_I(t, T_i)}{P(t, T_i)}$. Où $P_I(t, T_i)$ est le zéro coupon indexé sur l'inflation et $P(t, T_i)$ est zéro coupon dans l'économie nominale.

2. La période de temps entre les deux dates de fixings, δ ;
3. Le prix d'exercice K .

Ces trois éléments forment un cube de volatilité.

Par ailleurs, le modèle de marché présente l'avantage de mettre en évidence le rapport naturel existant entre volatilités implicites du marché en glissement annuel et Zéro-Coupon. La volatilité en glissement annuel dépend des volatilités Zéro-Coupon et d'un terme de covariance, qui lui-même dépend de la fonction locale de volatilité du CPI. Inversement, l'ajustement de la convexité - entre le forward en glissement annuel et le ratio forward CPI est fonction des volatilités nominale et d'inflation et des termes de covariance. Ce modèle présente donc les avantages suivants :

- une définition directement compatible avec les données de marché observables (l'indice des prix à la consommation)
- un rapport direct entre les volatilités ZC et en glissement annuel Toutefois, le rapport entre les volatilités en glissement annuel et ZC dépend :
- de la façon dont la volatilité du CPI est spécifiée
- des corrélations choisies entre les différentes dates de fixing du CPI. L'estimation des ces corrélations est complexe, les fixings n'étant pas connues a priori

Le marché de la volatilité d'inflation est actuellement orienté vers les produits en glissement annuel, le smile étant notamment défini en termes de prix d'options en glissement annuel. Bien que les fixings de CPI soient observables sur le marché, l'indice des prix ne semble pas la variable sous-jacente la plus pertinente. Il serait plus logique d'utiliser le rendement de l'inflation ou le ratio CPI en glissement annuel

3.2.2 Spécification du modèle

Chaque forward CPI suit une diffusion lognormale, avec ses propres mouvements browniens, drifts et processus de volatilité locale :

$$\frac{dCPI(t, T_i)}{CPI(t, T_i)} = \mu(t, T_i)dt + \sigma(t, T_i)dW_t^u$$

Le prix nominal Zéro-Coupon est également distribué de façon lognormale d'après un modèle de type HJM standard :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t^N dt + \Gamma(t, T)dZ_t$$

Tous les mouvements browniens déterminant les diffusions sont corrélés. Il existe deux types de corrélation :

- corrélation nominal/inflation : $\langle dW_t^i, dZ_t \rangle = \rho_{i,N} dt$
- corrélation entre les différents forwards CPI : $\langle dW_t^i, dW_t^j \rangle = \rho_{i,j} dt$

Avec cette approche, les volatilités implicites des instruments de marché les plus courants peuvent être dérivées de la volatilité locale du CPI et les différentes corrélations. De

manière générale, le terminal (volatilité de marché) du modèle et pour tous les ratios est donné par :

$$Vol^2(T, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\int_0^{T_i} \sigma^2(s, T_i) ds + \int_0^{T_i+\delta} \sigma^2(s, T_i + \delta) ds - 2 \int_0^{T_i} \rho_{i,j} \sigma(s, T_i) \sigma(s, T_i + \delta) ds \right)$$

Cette formule de pricing comporte les informations nécessaires pour interpoler tout point du cube de volatilité tel que défini dans le texte. Par ailleurs, dans le cas particulier des options en glissement annuel et Zéro-Coupon, cette formule relie volatilité en glissement annuel et zéro coupon

$$Vol_{YOY}^2(T_i, T_j = T_i+1) = \frac{1}{T_j - T_i} (T_i Vol_{ZC}^2(T_i) + T_j Vol_{ZC}^2(T_j) - 2\rho_{i,j} \int_0^{T_i} \sigma(s, T_i) \sigma(s, T_j) ds)$$

3.3 Les modèles de taux court

3.3.1 Two-Process Hull-White model

Ce modèle part du constat selon lequel le taux d'inflation possède deux sources de d'incertitude : d'une part, le taux d'inflation annuel varie en fonction de la politique monétaire et de la volatilité de l'inflation. D'autre part, l'incertitude comprend une composante idiosyncratique, reflétant l'incertitude quant au fixing de l'indice liée, par exemple, à l'incertitude relative à la saisonnalité.

Un autre facteur déterminant à prendre en compte dans la construction d'un modèle réaliste est la capacité de l'inflation à revenir à la moyenne. En effet, le niveau d'inflation et la politique monétaire des banques centrales sont étroitement liés. Les banques centrales contrôlent l'inflation, pour lesquelles elles définissent des niveaux-cibles. Par exemple, dans la zone Euro, le niveau d'inflation cible fixé par la Banque centrale européenne est de 2%.

La présentation du modèle de taux court suivante est tirée de l'article de M. Dodgson et D. Kainth [16]. Dans ce modèle, l'existence d'une économie "réelle" est ignorée. Sous la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA dans la suite), nous supposons l'existence une mesure sous laquelle les quantités $P(t, T)/B(t)$ et $P_I(t, T)/B(t)$ sont des martingales.

L'indice des prix est distribué de façon lognormale. Son terme de drift correspond aux taux d'inflation et sa volatilité à la composante idiosyncratique. Le taux d'intérêt et le taux d'inflation sont supposés suivre tous les deux un processus de Hull-White à un facteur.

$$I(T) = I(T_0) e^{\int_{T_0}^T i(t') dt'}$$

Avec $i(t)$ le taux d'inflation, de dynamique :

$$di = \alpha_I [\theta_I(t) - i(t)] dt + \sigma_I dW_I$$

Et pareillement pour le taux d'intérêt :

$$dr = \alpha[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma dW$$

Les deux mouvements browniens sont corrélés $\overline{dW(t)dW_I(t')} = \rho\delta(t-t')dtdt'$

La mesure risque neutre

Le prix à la date t d'un Zero-coupon qui paye 1 à la date T s'écrit :

$$P(t, T) = E[e^{-\int_t^T r(t')dt'} \mid r(t)]$$

Le zero-coupon indexé sur l'inflation s'écrit :

$$P_I(t, T) = I(t)E[e^{-\int_t^T i(t')-r(t')dt'} \mid i(t), r(t)]$$

Sous la mesure risque neutre la fonction $\theta(t)$ se déduit de la structure initiale sous la forme :

$$\theta(t) = f(0, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha t})$$

Où $f(t, T)$, le taux forward instantané est défini par :

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

$P(0, t)$ est le prix du zero-coupon observé sur le marché.

De même :

$$\theta_I(t) = f_I(0, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} f_I(0, t) - \frac{\sigma_I^2}{2\alpha_I^2} (1 - e^{-2\alpha_I t}) + \frac{\rho\sigma\sigma_I}{\alpha_I} \left[\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{\alpha_I} (1 - e^{-\alpha_I t}) e^{-\alpha t} \right]$$

Le taux d'inflation instantané est défini par :

$$f_I(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln \hat{I}(t, T)$$

où $\hat{I}(t, T) = P_I(t, T)/P(t, T)$ est l'indice des prix projeté. Le taux d'inflation se met sous la forme :

$$i(t) = i(s)e^{-\alpha_I(t-s)} + \alpha_I \int_s^t \theta_I(t')e^{-\alpha_I(t-t')}dt' + \sigma_I \int_s^t e^{-\alpha_I(t-t')}dW(t')$$

L'évolution du taux court est la suivante :

$$r(t) = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \alpha \int_s^t \theta(t')e^{-\alpha(t-t')}dt' + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-t')}dW(t')$$

Ces deux taux sont normalement distribués. De plus, l'intégrale sur ces deux taux est normale. L'intégrale entre T_1 et T_2 de $i(t)$ avec $t \leq T_1 \leq T_2$ est :

$$\begin{aligned}
 \int_{T_1}^{T_2} i(t') dt' &= i(t) e^{-\alpha_I(T_1-t)} B(\alpha_I, T_2 - T_1) \\
 &+ \alpha_I \int_t^{T_1} \theta_I(t') e^{-\alpha_I(T_2-t')} B(\alpha_I, T_2 - T_1) dt' + \alpha_I \int_{T_1}^{T_2} \theta_I(t') B(\alpha_I, T_2 - t') dt' \\
 &+ \alpha_I \int_t^{T_1} e^{-\alpha_I(T_2-t')} B(\alpha_I, T_2 - T_1) dW_I(t') + \sigma_I \int_{T_1}^{T_2} B(\sigma_I, T_2 - t') dW_I(t')
 \end{aligned}$$

De façon similaire, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \int_{T_1}^{T_2} r(t') dt' &= r(t) e^{-\alpha(T_1-t)} B(\alpha, T_2 - T_1) \\
 &+ \alpha \int_t^{T_1} \theta(t') e^{-\alpha(T_2-t')} B(\alpha, T_2 - T_1) dt' + \alpha \int_{T_1}^{T_2} \theta(t') B(\alpha, T_2 - t') dt' \\
 &+ \alpha \int_t^{T_1} e^{-\alpha(T_2-t')} B(\alpha, T_2 - T_1) dW(t') + \sigma \int_{T_1}^{T_2} B(\sigma, T_2 - t') dW(t')
 \end{aligned}$$

en posant $B(\alpha, \tau) = \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}$.

Remarques

Dogson remarque que, en cas de smile important par rapport au strike, les prix des Caps/Floors issus du modèle ne prennent pas en compte cet effet (c'est aussi vrai pour les modèles de Jarrow-Yildirim et de marché). Une autre limite vient du fait que les modèles de Hull-White à un facteur ne reproduisent pas la structure de la volatilité. Dans ce modèle la volatilité décroît avec la maturité (à cause de l'effet de retour à la moyenne), alors que sur le marché, une "bosse" est observée sur la courbe de volatilité.

La dynamique sous-jacente du modèle précédent est celle de l'indice des prix. Pourtant, les instruments les plus liquides sur les marchés sont les options en glissement annuel, pour lesquelles le smile est défini en termes de glissement annuel. Il est donc naturel de définir un modèle de pricing en termes de ratio en glissement annuel.

3.3.2 Le modèle de taux court avec ratio en glissement annuel comme variable d'état

Cadre général du modèle

L'approche du modèle de taux court peut en particulier s'adapter au ratio en glissement annuel. Notons d'abord qu'il n'existe pas de consensus de marché sur la définition exacte de ce modèle, et que le sujet fait encore l'objet d'études. Comme précédemment souligné, l'inflation suit une tendance historique de retour à la moyenne à prendre en compte. Une fois encore, les hypothèses suivantes sont formulées :

- Le ratio en glissement annuel est distribué selon une loi lognormale. Son drift correspond au taux annuel d'inflation et sa volatilité optionnelle à une composante spécifique.

- Le rendement annuel d'inflation suit un processus de diffusion revenant vers la moyenne (type Vasicek).
- L'économie nominale est modélisée par un modèle étendu de Hull-White à un facteur.
- Le taux d'inflation et le taux nominal de court terme sont corrélés.
- En termes de calibrage, ce modèle est suffisamment flexible pour intégrer les prix du marché
- La volatilité du monde nominal est calibrée sur la structure par termes des swaps vanilla et les prix des swaptions choisis.
- La volatilité de l'inflation est calculée de manière assez simple à partir des prix d'option en glissement annuel. La principale hypothèse est la forme fonctionnelle attribuée à la volatilité du taux d'inflation annuel.
- La corrélation entre les diffusions nominale et d'inflation peut être calculée en termes historiques sur la base des précédents taux d'inflation en glissement annuel et taux de swap.

Spécification du modèle

La dynamique du ratio est glissement annuel est :

$$\begin{aligned}\frac{dY_oY_t}{Y_oY_t} &= i_t dt \\ di_t &= \alpha_I(\beta_I - i_t)dt + \sigma_{I,t}dW_{I,t}\end{aligned}$$

Le taux nominal de court terme peut être défini par un processus de retour vers la moyenne du type Hull-White :

$$dr_t = \alpha_r(\beta_r - r_t)dt + \sigma_{r,t}dW_{r,t}$$

Les deux mouvements browniens sont corrélés : $\langle dW_{I,t}, dW_{r,t} \rangle = \rho dt$.

L'expression du ratio en glissement annuel en fonction des paramètres du modèle est :

$$Y_oY_T = \exp\{i_0 e^{-\alpha_I T} + \beta_I(1 - e^{-\alpha_I T}) + \int_0^T \sigma_{I,t} e^{-2\alpha_I(T-t)} dW_{I,t}\}$$

A partir de cette expression, la valeur espérée du ratio en glissement annuel à l'instant 0 pour la maturité T est définie :

$$F_T^{Y_oY}(0) = E[Y_oY_T] = \exp\{i_0 e^{-\alpha_I T} + \beta_I(1 - e^{-\alpha_I T}) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_{I,t}^2 e^{-2\alpha_I(T-t)} dt\}$$

Le processus suivant peut aussi être introduit :

$$x_T = \int_0^T \sigma_{I,t} e^{-2\alpha_I(T-t)} dW_{I,t}$$

x représente la partie aléatoire du glissement annuel. Le ratio en glissement annuel se réécrit :

$$Y_oY_T = F_T^{Y_oY}(0) \exp(x_T - \frac{1}{2} \text{Var}(x_T))$$

Le modèle est donc entièrement défini par la connaissance du futur ratio en glissement annuel et par un processus de type Hull-White intégré.

Le prix d'un Caplet en glissement annuel de strike K et de maturité T dans ce modèle est donné par la formule Black, avec le forward et la volatilité appropriés :

$$\text{Caplet}_{Y_oY}(K, T, T-1) = B_N(0, T)(F_T^{Y_oY} N(d_1) - KN(d_2))$$

où :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{F_T^{Y_oY}}{K}\right) + \frac{1}{2}\Sigma\sqrt{T} \\ d_2 &= d_1 - \Sigma\sqrt{T} \\ \Sigma^2 &= \frac{1}{T} \text{Var}(x_T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{I,t}^2 e^{-2\alpha_I(T-t)} dt \end{aligned}$$

3.4 Choix du modèle

L'évaluation de produits dérivés inflation s'appuie sur des modélisations paramétriques. Pour les options, le pricing établi sur une stratégie de couverture, comme par exemple dans le modèle de Black-Scholes, n'est plus possible. De même, les notions de sensibilités (les grecques) et d'EDP d'évaluation ne sont plus adaptées.

Le modèle de Jarrow-Yildirim est sur-paramétré pour l'instant, c'est-à dire exige l'estimation d'un nombre important de paramètres compte tenu du niveau relativement faible de développement des marchés d'inflation. C'est toutefois le seul modèle qui propose une définition explicite de l'économie réelle. Tout comme le modèle de Jarrow-Yildirim, les modèles de marché sont construits sur la diffusion du l'indice des prix. Il est difficile d'ajouter un effet de smile à ce modèle, car le marché définit le smile en glissement annuel.

Parmi les deux approches de taux court possibles, la première souffre des mêmes inconvénients que l'approche de modèle de marché, car elle se fonde sur la diffusion du CPI. La deuxième est innovante dans le sens où elle est définie par le ratio en glissement annuel et affiche une variable d'état synthétique. Cette approche peut facilement être élargie pour inclure un effet de smile en glissement annuel. En outre, considerer le ratio en glissement annuel comme variable d'état permet de s'affranchir des contraintes de saisonnalité⁷.

Pour toutes ces raisons, nous retiendrons le modèle de taux court avec ratio d'inflation en glissement annuel.

⁷En effet, dans le cas où la saisonnalité est stochastique, ce qui est très souvent le cas, la loi finale du processus est un mélange de loi (Une loi discrete : la loi de la composante saisonnière. Une loi continue : La loi de série corrigée des variations saisonnières) qui n'est pas toujours aisé de déterminer.

Chapitre 4

Estimation de la dynamique de l'inflation et des probabilités de défaut

La finalité de cette partie est de constituer les tranches du CDO. Nous allons calibrer le modèle sur les données historiques. Ensuite nous déterminerons les triggers, selon le niveau de risque désiré, en utilisant la fonction quantile de l'inflation. Enfin nous construirons les tranches suivants la notation présentée à la figure 4.1.

Note	PD
AAA	0,06%
AA	0,22%
A	0,46%
BBB	2,32%
BB	10,42%
BB-	14,60%
B+	18,57%
B	24,46%
CCC	70,04%
CC	100%

FIG. 4.1 – Notation selon S&P CDOEvaluator

4.1 Estimation de la dynamique d'inflation

4.1.1 Les estimateurs du MCO

Dans cette sous-section nous allons chercher les estimateurs du MCO. Le taux court inflation est supposé suivre la dynamique suivante :

$$di(t) = \alpha_I(\beta_I - i(t))dt + \sigma_I dw(t)$$

Nous disposons de n observations $(i(t_i))_{1 \leq i \leq n}$ sur T années. Les observations sont réalisées à intervalles régulières (mensuelles ici).

$$i(t_i) = \text{Log}(YoY(t_i)) = \text{Log}\left(\frac{I_{i+12}}{I_i}\right)$$

Nous prendrons $t_i = \frac{i*T}{n}$, le pas de discretisation est $h = \frac{T}{n}$. Dans le cadre des données mensuelles, on a évidemment $h = \frac{1}{12}$.

Rappelons que la solution de l'EDS de Vasicek est :

$$\begin{aligned} i(t) &= i(s)e^{-\alpha_I(t-s)} + \alpha_I \int_s^t \beta_I e^{-\alpha_I(t-t')} dt' + \sigma_I \int_s^t e^{-\alpha_I(t-t')} dW(t') \\ \iff i(t) &= i(s)e^{-\alpha_I(t-s)} + \beta_I(1 - e^{-\alpha_I(t-s)}) + \sigma_I \int_s^t e^{-\alpha_I(t-t')} dW(t') \end{aligned}$$

Si on pose $s = t_i$ et $t = t_{i+1} = t_i + h$, avec $h = \frac{1}{12}$.

La discretisation exacte s'écrit :

$$i(t_i + 1) = \beta_I(1 - e^{-h\alpha_I}) + e^{-h\alpha_I}i(t_i) + \sigma_I \left(\frac{1 - e^{-2h\alpha_I}}{2\alpha_I} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon \quad (4.1)$$

ε est une variable aléatoire normale centrée et réduite.

Nous pouvons réécrire le modèle sous la forme suivante :

$$i(t_i + 1) = \alpha + \beta * i(t_i) + \sigma_{est} * \varepsilon$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_I(1 - e^{-h\alpha_I}) \\ \beta &= e^{-h\alpha_I} \\ \sigma_{est} &= \sigma * \left(\frac{1 - e^{-2h\alpha_I}}{2\alpha_I} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les estimateurs du MCO [31] s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (i(t_i + 1) - \overline{I^+})(i(t_i) - \overline{I})}{\sum_{i=1}^n (i(t_i) - \overline{I})^2} \\ \hat{\alpha} &= \overline{I^+} - \hat{\beta}\overline{I} \\ \hat{\sigma}_{est}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (i(t_i + 1) - i(t_i + 1)^*)^2}{n - 2} \end{aligned}$$

Où $\overline{I^+} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i(t_i + 1)$, $\overline{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i(t_i)$ et $i(t_i + 1)^* = \overline{I^+} - \hat{\beta} * (i(t_i) - \overline{I})$

Ces estimateurs sont sans biais et EMV sous l'hypothèse de normalité.

Nous calculons à présent les estimateurs MCO du modèle de Vasicek :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_I &= -\frac{1}{h} * \text{Log}(\hat{\beta}) \\ \hat{\beta}_I &= -\frac{\hat{\alpha}}{\widehat{1 - \beta}} \\ \hat{\sigma}_I^2 &= \frac{1}{h} * \hat{\sigma}_{est}^2 * \frac{2 * \text{Log}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}^2 - 1} \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de normalité des séries, ces estimateurs sont donc EMV¹ et convergents. Remarquons tout de même qu'ils sont biaisés.

4.1.2 Les estimateurs du maximum de vraisemblance

Une approximation de la log-vraisemblance (voir [34]) est donnée par :

$$\ln Q_{h,N}(\beta_I, \alpha_I, \sigma) = \frac{k}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\beta_I - X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) - \frac{h}{2} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\beta - X_{t_{i-1}})^2 \quad (4.2)$$

La maximisation de la log-vraisemblance donne les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_I &= \frac{(X_N - X_0) \sum_{i=1}^N X_{t_{i-1}}^2 - (\sum_{i=1}^N X_{t_{i-1}})(\sum_{i=1}^N X_{t_i}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}))}{(X_N - X_0) \sum_{i=1}^N X_{t_{i-1}} - N \sum_{i=1}^N X_{t_i}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})} \\ \hat{\alpha}_I &= \frac{X_N - X_0}{h(N\hat{\beta} - \sum_{i=1}^N X_{t_{i-1}})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour la volatilité, nous avons comme premier estimateur

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{hN} \sum_{i=1}^N (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

Cet estimateur est celui de volatilité réalisée. Un meilleur estimateur de la volatilité peut être considéré :

$$\hat{\sigma}_2 = \hat{\gamma} + \frac{\alpha_I}{N} \frac{h\hat{\sigma}_0^2}{h} \sum_{i=1}^N X_{t_{i-1}}$$

Où :

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{hN} \sum_{i=1}^N [X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - h\hat{\alpha}_I(\hat{\beta}_I - X_{t_{i-1}})]^2$$

Choix de la méthode d'estimation Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, les MCO fournissent des estimateurs maximum de vraisemblance sous l'hypothèse de normalité. En plus, les hypothèses des MCO sont plus aisées à vérifier que celles du maximum de vraisemblance. Nous choisissons donc les MCO.

¹car transformés par des fonctions C^1 , d'estimateurs EMV

4.1.3 Analyse des résultats

Rappels sur les MCO Rappelons les hypothèses sous lesquelles les estimateurs du MCO sont "BLUE"(Best Linear Unbiased Estimator) :

1. $E(r_i) = 0$ pour tout $i=1..N$. L'espérance du résidu est nulle.
2. $Var(r_i) = \sigma^2$ pour tout $i=1..N$. C'est l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus.
3. $Cov(r_i, r_j) = 0$ Pour tout $i \neq j$. Hypothèse d'absence d'autocorrélation des résidus.
4. $Cov(X_i, r_i) = 0$. Hypothèse d'exogénéité des variables explicatives.

Si ces quatre hypothèses sont vérifiées alors l'estimateur du MCO est "BLUE" c'est-à-dire :

- Sans biais
- de variance minimale (Efficience)
- Convergent

Si les hypothèses 1 (homoscédasticité) et 2 (absence d'autocorrélation) ne sont pas vérifiées, alors l'estimateur reste sans biais et convergent, mais n'est plus efficient.

Préliminaire : Choix de la profondeur d'estimation

Nous disposons des historiques d'inflation en glissement annuel de 21 pays : Canada, US, ROYAUME-UNI, HICPx, FRCPIx, Japan, Brazil, Mexico, South-Africa Danemark Suède, Turquie, Norvège, Espagne Pays-Bas Belgique, Allemagne, Irlande, Italie, Finlande et Islande.

Nous avons longuement débattu de la profondeur adéquate des données à retenir pour l'estimation. En effet, dans la plupart des pays étudiés, le niveau global de l'inflation a énormément changé sur les trente dernières années. L'évolution de l'inflation au cours du temps a été profondément marquée par des changements d'ordre institutionnel qui ont structuellement influencé la formation des prix. En France par exemple, le changement de stratégie de politique monétaire et la politique de désindexation des salaires aux prix sont probablement à l'origine d'une rupture affectant la moyenne de l'inflation au milieu des années quatre-vingt.

Afin de choisir la profondeur adéquate pour nos estimations, nous avons comparé les résultats des regressions de neuf indices (Canada, US, ROYAUME-UNI, HICPx, FRCPIx, Japan, Brazil, Mexico, South-Africa) sur les plages suivantes : 1987-2007 et 1997-2007. Nous avons discuter des résultats des tests suivants sur ces plages de données :

- Normalité des series
- Homoscedasticité des erreurs
- Non autocorrélation des series
- Pouvoir explicatif du modèle sur les plages

Il ressort de cette comparaison que les résultats sont plus pertinents sur la plage 1997-2007.

Nous retiendrons donc la plage 1997-2007 dans toute la suite.

Vérification de la normalité des séries

Le tableau 4.2 résume le test de Jarque-Bera sur les 21 séries.

	ALLEMAGNE	BELGIQUE	BRAZIL	CANADA	DANEMARK	ESPAGNE	FINLANDE
Skewness	1,31	0,39	1,90	0,48	-0,19	-0,18	0,23
Kurtosis	8,2	2,6	9,7	3,5	2,2	2,0	2,7
Jarque-Bera	185	4	320	6	4	6	2
Probability	0,00%	14,13%	0,00%	3,90%	12,38%	4,77%	45,27%
Normalité? Seuil 5%	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Oui
Normalité? Seuil 1%	Non	Oui	Non	Oui	oui	Oui	Oui
	FRCPIX	HICPX	IRLANDE	ISLANDE	ITALIE	JAPAN	MEXICO
Skewness	-0,57	0,05	0,35	0,70	-0,56	1,83	1,02
Kurtosis	2,6	2,7	2,2	3,5	3,8	6,2	2,7
Jarque-Bera	8	1	6	12	10	128	23
Probability	1,71%	70,54%	5,53%	0,24%	0,57%	0,00%	0,00%
Normalité? Seuil 5%	Non	Oui	Oui	Non	Non	Non	Non
Normalité? Seuil 1%	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non	Non
	NORVEGE	PAYS_BAS	SOUTH_AFRICA	SUEDE	TURQUIE	UK	US
Skewness	-0,49	1,40	0,06	0,32	0,12	-0,24	0,28
Kurtosis	3,6	3,9	2,6	2,8	1,5	2,6	2,3
Jarque-Bera	7	47	1	3	13	2	5
Probability	2,85%	0,00%	60,19%	28,24%	0,18%	37,41%	9,55%
Normalité? Seuil 5%	Non	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
Normalité? Seuil 1%	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Oui

FIG. 4.2 – Statistiques de tests de normalité de Jarque-Bera

Nous disposons dans ce tableau :

- du coefficient de Skewness qui mesure la dissymétrie de la distribution
- Du coefficient Kurtosis d'aplatissement
- De la statistique de Jarque-Bera qui, sous l'hypothèse nulle de normalité suit une loi de Khi-deux à deux degrés de liberté.
- De la P-value (Probability) associé à cette statistique.

Rappelons la règle de décision :

1. Au seuil de s %, on accepte l'hypothèse de normalité dès que la valeur de la P-value est supérieure à s %
2. Au seuil de s %, on rejette l'hypothèse de normalité dès que la valeur de la P-value est inférieure ou égale à s %.

Nous avons retenu deux seuils : 5% et 1%.

Au seuil de 5%, seules les 9 variables suivantes sont distribuées selon une loi normale : Belgique, Danemark, Finlande, Indice européen (HICPx), Irlande, Afrique du Sud, Suède, ROYAUME-UNI et US.

Au seuil de 1%, on accepte l'hypothèse de normalité des 13 séries suivantes : Belgique, Canada, Espagne, FRCPIx, Danemark, Finlande, Indice européen (HICPx), Irlande, Norvège, Afrique du Sud, Suède, ROYAUME-UNI et US.

B-Résultats de la régression

Les estimateurs du MCO L'estimation du modèle retenu nous donne les estimateurs du MCO résumé dans le tableau 4.3.

Rappelons que l'estimateur de la volatilité (Sigma) est issu de la correction de Newey-West. La constante de régression (Alpha) est relativement faible pour l'ensemble des pays. Elle est même négative pour la Turquie et le Japon.

	Canada	US	UK	HICPx	FRCPIx	Japan	Brazil
Alpha	0,003	0,003	0,001	0,001	0,002	-0,00003	0,002
beta	0,848	0,901	0,970	0,948	0,895	0,949	0,646
Sigma	0,004	0,004	0,002	0,002	0,003	0,002	0,004
	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvege	Espagne
Alpha	0,001	0,002	0,002	0,002	-0,002	0,002	0,002
beta	0,969	0,967	0,895	0,903	0,995	0,892	0,930
Sigma	0,004	0,007	0,003	0,003	0,020	0,005	0,003
	Pays_Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
Alpha	0,001	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001
beta	0,963	0,823	0,979	0,960	0,886	0,943	0,966
Sigma	0,003	0,004	0,003	0,004	0,002	0,003	0,008

FIG. 4.3 – Estimateurs des MCO

Qualités des ajustements Les statistiques relatives à la qualité de l'ajustement sont résumées dans le tableau 4.4.

	Canada	US	UK	HICPx	FRCPIx	Japan	Brazil
R2	71,7%	78,7%	92,1%	86,6%	78,4%	90,2%	42,3%
R2-ajusté	71,5%	78,5%	92,1%	86,5%	78,2%	90,1%	41,9%
Aikake	-8,0	-8,3	-9,1	-9,6	-9,1	-9,2	-8,4
Schwartz	-8,0	-8,3	-9,1	-9,5	-9,0	-9,1	-8,4
	Mexico	South-Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvège	Espagne
R2	99,4%	93,9%	79,9%	80,6%	99,1%	80,2%	84,7%
R2-ajusté	99,4%	93,9%	79,7%	80,5%	99,1%	80,1%	84,6%
Aikake	-8,2	-7,2	-8,9	-8,5	-5,0	-7,9	-8,8
Schwartz	-8,1	-7,1	-8,9	-8,4	-4,9	-7,8	-8,7
	Pays-Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
R2	92,9%	67,9%	77,5%	90,9%	72,4%	87,2%	89,5%
R2-ajusté	92,8%	67,6%	77,3%	90,9%	72,2%	87,1%	89,5%
Aikake	-8,7	-8,1	-8,5	-8,3	-9,3	-8,7	-6,9
Schwartz	-8,7	-8,1	-8,5	-8,3	-9,2	-8,7	-6,9

FIG. 4.4 – Statistiques d'ajustement

Le modèle explique bien les variations de la plupart des séries. En moyenne 80% (R^2) des variations sont expliquées par le modèle.

Les graphiques présentés dans la figure 4.5 représentent les courbes de l'historique des indices (Courbe rouge, échelle de droite) de l'indice estimé par le modèle (Courbe verte, échelle de droite) et celle des résidus (Courbes bleu, échelle de gauche) de 4 pays : France, ROYAUME-UNI, US et Japon.

C-Tests sur les résidus des régressions

a-Autocorrélation des résidus Nous avons testé l'auto corrélation des résidus à travers les tests du portemanteau de Ljung-box et le test d'autocorrélation de Breush-Godfrey. La règle de décision est toujours la même que pour le test de Jarque Bera.

1. Au seuil de s %, l'hypothèse de non auto corrélation des erreurs dès que la valeur de la P-value est supérieure à " s %" est acceptée
2. Au seuil de s %, rejet de l'hypothèse de non autocorrélation dès que la valeur de la P-value est inférieure ou égale à " s %"

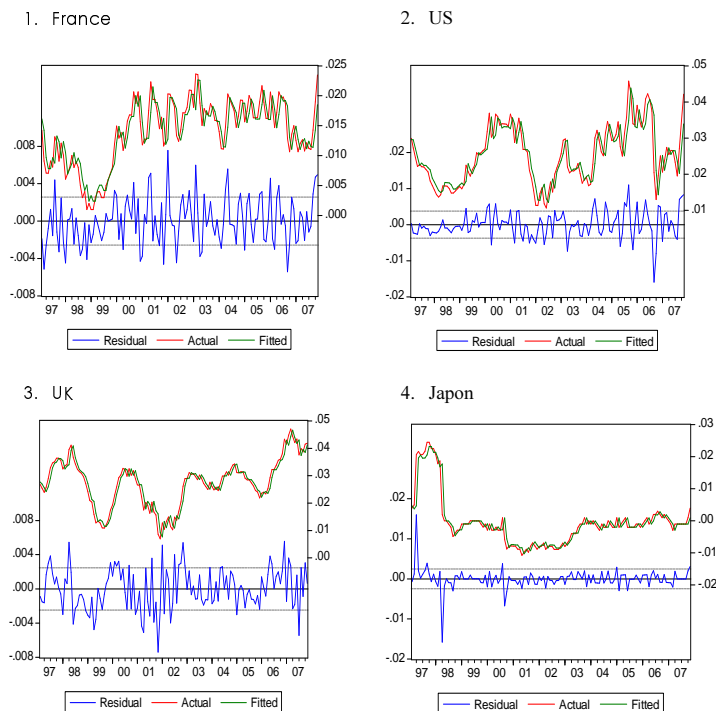


FIG. 4.5 – Inflation estimée, historique et résidus

Nous avons résumé les résultats des tests dans les tableaux des figures 4.6 et 4.7.

Ljung-Box (12 retards)							
	Canada	US	UK	HICPx	FRPCIx	Japan	Brazil
Statistique	51,042	57,816	46,092	25,27	46,7	34,17	22,285
P-value	0,00%	0,00%	0,00%	1,40%	0,00%	0,10%	3,40%
	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvege	Espagne
Statistique	100,41	160,36	29,706	32,939	164,06	33,435	31,085
P-value	0,00%	0,00%	0,30%	0,10%	0,00%	0,10%	0,20%
	Pays Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
Statistique	33,69	30,304	16,6	18,808	16,872	37,146	24,936
P-value	0,10%	0,30%	16,50%	9,30%	15,40%	0,00%	1,50%

FIG. 4.6 – Test d'autocorrélation de Ljung-Box

Le test de Ljung-Box montre qu'au seuil de 5%, les erreurs sont non corrélées (Hypothèse nulle) uniquement pour les régressions de l'Allemagne, de l'Irlande et de l'Italie.

Si on retient plutôt un seuil de 1%, les erreurs sont non corrélées pour les séries : Allemagne, HIPCx, Brésil, Islande, Irlande et Italie.

Par contre, les résultats du test de Breush-Godfrey sont nettement différents.

Au seuil de 5%, 9 régressions ont des erreurs non corrélées. Il s'agit de HIPCx, Japon, Brésil, Danemark, Pays-Bas, Belgique, Allemagne, Italie, Finlande.

En passant au seuil de 1%, alors 14 indices sont retenus : Canada, ROYAUME-UNI, FRPCIx, Norvège, Irlande, HIPCx, Japon, Brésil, Danemark, Pays-Bas, Belgique, Allemagne, Italie, Finlande.

Breusch-Godfrey(12 retards)							
	Canada	US	UK	HICPx	FRCPx	Japan	Brazil
Statistique	7,908782	25,81545	8,30208	3,077401	9,077593	0,187402	2,516289
P-value	1,92%	0,00%	1,57%	21,47%	1,07%	91,06%	28,42%
	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvege	Espagne
Statistique	36,03869	39,66944	0,03014	3,167161	52,98086	9,027178	18,36881
P-value	0,00%	0,00%	98,50%	20,52%	0,00%	1,10%	0,01%
	Pays Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
Statistique	2,587554	3,598266	1,029647	7,68282	1,630938	3,794293	12,36421
P-value	27,42%	16,54%	59,76%	2,15%	44,24%	15,00%	0,21%

FIG. 4.7 – Test d'autocorrélation de Breush-Godfrey

b-Hétéroscedasticité des séries La règle de decision reste inchangée.
Le résumé est présenté au tableau de la figure 4.8.

Le test de White							
	Canada	US	UK	HICPx	FRCPx	Japan	Brazil
Statistique	3,106679	7,421623	6,792163	6,716035	5,264169	6,498702	3,325522
P-value	21,15%	2,45%	3,35%	3,48%	7,19%	3,88%	18,96%
	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvege	Espagne
Statistique	13,99349	0,604058	0,765456	0,384236	8,464694	7,455536	3,22636
P-value	0,09%	73,93%	68,20%	82,52%	1,45%	2,40%	19,93%
	Pays Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
Statistique	2,907419	0,265753	8,518995	1,652268	0,686396	0,795688	0,062873
P-value	23,37%	87,56%	1,41%	43,77%	70,95%	67,18%	96,91%

FIG. 4.8 – Test d'Hétéroscedasticité des séries

Au seuil de 5% , les séries suivantes présentent de l'hétéroscédasticité : US, ROYAUME-UNI, HICPx, Japan, Mexico, Turquie, Norvège et Allemagne. L'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs est acceptée pour les autres estimations.

Au seuil de 1% L'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs est acceptée pour les toutes estimations, seules les erreurs issues du modèle du Mexique sont hétéroscédastiques.

c- Stabilité des coefficients estimés Le test de Cusum de stabilité du modèle nous permet de conclure à l'instabilité des coefficients sur l'historique pour les inflations mexicaine et japonaise.

La figure 4.9 présente le resultat du test pour l'inflation mexicaine. On note qu'entre janvier 1999 et juin 1999, la courbe des résidus récursifs sort de l'intervalle de confiance. Ce qui traduit une instabilité globale du modèle².

d- Coefficients du modèle de Vasicek Nous pouvons maintenant écrire les coefficient du modèle de Vasicek (4.10).

4.2 Estimation des probabilités de défaut individuel

4.2.1 Estimation des "triggers"

Nous nous intéressons, pour une date t , à la probabilité que l'inflation en glissement annuel sorte d'un intervalle à l'horizon $t + T$. Nous définissons la probabilité de défaut

²Cf. Annexe A

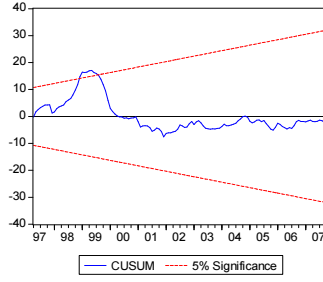


FIG. 4.9 – Resultat du test de Cusum pour l'inflation mexicaine

	Canada	US	UK	HICPx	FRCPIx	Japan	Brazil
Moyenne de long terme	2,06%	2,61%	3,09%	1,95%	1,44%	-0,07%	0,51%
Vitesse de retour à la moyenne	1,98	1,25	0,36	0,64	1,33	0,63	5,25
Volatilité	1,65%	1,36%	0,87%	0,72%	0,94%	0,88%	1,50%
	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvege	Espagne
Moyenne de long terme	3,41%	5,34%	1,87%	1,56%	-50,37%	1,68%	2,96%
Vitesse de retour à la moyenne	0,38	0,41	1,33	1,23	0,05	1,37	0,87
Volatilité	1,41%	2,36%	1,00%	1,26%	6,90%	1,72%	1,07%
	Pays_Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
Moyenne de long terme	2,29%	1,79%	2,59%	3,66%	2,05%	1,76%	2,10%
Vitesse de retour à la moyenne	0,45	2,33	0,26	0,49	1,45	0,70	0,42
Volatilité	1,07%	1,58%	1,18%	1,33%	0,85%	1,08%	2,66%

FIG. 4.10 – Coefficients du modèle de Vasicek

comme :

$$PD(i(t), T, trig_1, trig_2) = Proba\{(YoY(t+T) < 1 + trig_1 \cup YoY(t+T) > 1 + trig_2)/i(t)\}$$

où $trig_1$ et $trig_2$ sont des seuils (aussi appelés triggers) fixés. T est la maturité (en année). La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$PD(i(t), T, trig_1, trig_2) = Proba\{(i(t+T) < \ln(1 + trig_1) \cup i(t+T) > \ln(1 + trig_2))/i(t)\}$$

Pour toute la suite, nous posons $tx_j = \ln(1 + trig_j)$, $j=1,2$. Nous avons déjà vu que :

$$i(t+T)/i(t) \sim N\{i(t)e^{-T*\alpha_I} + \beta_I * (1 - e^{-T*\alpha_I}), \sigma_I^2 * \frac{1 - e^{-2T*\alpha_I}}{2\alpha_I}\}$$

Posons : $m(i(t), T) = i(t)e^{-T*\alpha_I} + \beta_I * (1 - e^{-T*\alpha_I})$ et

$V(T) = \sigma_I^2 * \frac{1 - e^{-2T*\alpha_I}}{2\alpha_I}$. Alors la loi de $i(t+T)$ sachant $i(t)$ est la loi normale de moyenne $m(i(t), T)$ et de variance $V(T)$.

$$Proba\{(i(t+T) < tx_1 \cup i(t+T) > tx_2)/i(t)\} = 1 - Proba\{(i(t+T) \in [tx_1, tx_2])/i(t)\}$$

$$\begin{aligned}
 PD(i(t), T, tx_1, tx_2) &= \text{Proba}\{(i(t+T) < t_1 \cup i(t+T) > tx_2)/i(t)\} \\
 &= 1 - \text{Proba}\{(i(t+T) \in [tx_1, tx_2])/i(t)\} \\
 &= 1 - \text{Proba}\{tx_1 \leq i(t+T) \leq tx_2/i(t)\} \\
 &= 1 - \text{Proba}\left\{\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}} \leq \frac{i(t+T) - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}} \leq \frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}/i(t)\right\} \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) + \Phi\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right)
 \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de repartition de la loi normale centrée réduite.

Analysons le comportement de $PD(i(t), T, tx_1, tx_2)$ suite aux variations de ces paramètres.

D'abord, $\frac{\partial PD}{\partial tx_1} > 0$ et $\frac{\partial PD}{\partial tx_2} < 0$.

La variation de PD relative à une variation de la maturité $i(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial PD}{\partial i(t)} &= \frac{\frac{\partial m(i(t), T)}{\partial i(t)}}{\sqrt{V(T)}} \left(f\left(\frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) - f\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) \right) \\
 &= \frac{e^{-T\alpha_I}}{\sqrt{V(T)}} \left(f\left(\frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) - f\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) \right)
 \end{aligned}$$

où f est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite. $\frac{\partial PD}{\partial i(t)}$ n'a pas de signe particulier. Dans le cas où $f\left(\frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) - f\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) = 0$, la probabilité de défaut ne dépend pas de la valeur de $i(t)$.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) - f\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right) &= 0 \\
 \implies \frac{tx_2 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}} &= -\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}} \\
 \implies tx_2 + tx_1 &= 2 * m(i(t), T)
 \end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$PD(i(t), T, tx_1) = 2 * \Phi\left(\frac{tx_1 - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right)$$

En s'intéressant uniquement à la probabilité que l'inflation passe au dessus du trigger tx , la probabilité de défaut s'écrit :

$$PD(i(t), T, tx) = 1 - \Phi\left(\frac{tx - m(i(t), T)}{\sqrt{V(T)}}\right)$$

Le trigger et la probabilité de défaut sont liés par une bijection.

Résultats Comme dans le CFXO, nous allons retenir une maturité de 5 ans. Nous allons nous intéresser aux triggers correspondants à une probabilité de défaut inférieure à 10%. Les "taux spot" retenus (valeur de $i(t)$) correspondent aux observations de novembre 2007.

Le tableau 4.11 présente les triggers³ selon des probabilités de défaut 1%, 5% et 10%. Ces triggers sont relatifs au ratio d'inflation en glissement annuel.

Par exemple, l'inflation en glissement annuel française à une probabilité de 1% d'être supérieure à 3.8%; le ratio d'inflation en glissement annuel américain a une probabilité de 10% d'être supérieur à 3.8%; et l'inflation en Turquie a une probabilité de 1% de dépasser le seuil de 29.3%.

Probabilité	Canada	US	UK	HICPx	FRCPIx	Japan	Brazil
1%	4,1%	4,7%	5,8%	3,5%	3,8%	1,8%	1,6%
5%	3,5%	4,1%	5,1%	3,1%	3,1%	1,3%	1,3%
10%	3,2%	3,8%	4,7%	2,8%	2,7%	1,0%	1,1%
Probabilité	Mexico	South Africa	Danemark	Suède	Turquie	Norvège	Espagne
1%	7,5%	12,5%	3,4%	3,5%	29,3%	4,2%	5,0%
5%	6,3%	10,5%	2,9%	2,9%	17,9%	3,5%	4,4%
10%	5,7%	9,5%	2,7%	2,6%	12,2%	3,1%	4,1%
Probabilité	Pays-Bas	Belgique	Allemagne	Irlande	Italie	Finlande	Islande
1%	5,0%	3,6%	7,1%	7,1%	3,3%	4,0%	8,6%
5%	4,2%	3,0%	6,0%	6,2%	2,9%	3,4%	6,5%
10%	3,8%	2,8%	5,4%	5,7%	2,7%	3,0%	5,4%

FIG. 4.11 – Triggers

Nous allons analyser l'évolution de la probabilité de défaut estimé dans le temps. Rappelons que les probabilités de défaut obtenues sont pour une maturité de cinq ans.

Nous notons une évolution très constatée de la probabilité de défaut dans le temps selon les pays. Prenons l'exemple du trigger US 4,68%, la probabilité que le ratio d'inflation en glissement annuel passe au dessus de cette barrière est de 1% au terme de cinq ans, cette même probabilité est supérieure à 6% au terme de 6 mois. Nous constatons une incertitude plus grande quant à l'évolution de l'inflation américaine dans le court terme.

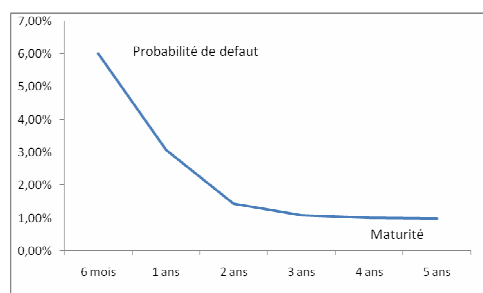


FIG. 4.12 – Evolution de la probabilité de défaut du trigger 4,68% US

Les propriétés du modèle retenu suggèrent que l'inflation aura tendance à se stabiliser

³En réalité $Trigger = 1 + trig$ (respectivement $K = 1 + k$), la plupart du temps lorsque nous parlerons de trigger (respectivement de strike) nous ferons allusion à $trig$ (resp k)

dans le temps. En effet, le modèle suppose que l'inflation est un processus de retour à la moyenne. Dans le cas de l'inflation US, cette moyenne de long terme est de 2,6%.

L'inflation européenne a une évolution analogue. La moyenne de long terme dans la zone euro est de 1,95%. Cette moyenne est très proche de l'objectif d'inflation fixé par le Banque centrale européenne. Nous notons aussi une probabilité de défaut plus forte dans le cours terme pour l'inflation UE.

On pourrait donc s'attendre à une incertitude plus faible de l'inflation dans le long terme pour l'ensemble des pays.

L'analyse de l'inflation britannique contredit ce constat. En effet, la moyenne de long terme de l'inflation UK est de près de 3,2%. La probabilité que l'inflation UK passe au dessus du trigger 5,80% est de 1% au terme de 5 ans. Cette probabilité évolue de façon contrastée dans le temps (Graphique 4.13). Elle est plus faible pour la maturité de 6 mois (0,2%) puis elle croit pour un atteindre 1,2% pour la maturité de 2 ans, enfin décroît faiblement pour se stabiliser au tour de 1% à 5 ans.

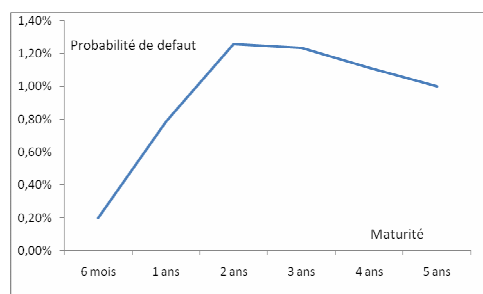


FIG. 4.13 – Evolution de la probabilité de défaut du trigger 5,80% UK

Ces comportements différents des inflations européenne et américaine d'une part, et de l'inflation UK d'autre part, sont dus à l'évolution de la volatilité de l'inflation.

L'analyse des estimations des paramètres du modèle montre une évolution plus forte de la volatilité de l'inflation UK dans le temps, qui va se stabiliser autour de 1,01%, tandis que les volatilités des inflations US et UE varient très faiblement pour rester autour de 0,85% (US) et 0,63% (UE) dans le long terme. Non seulement la volatilité de l'inflation UK croît plus vite que celle de l'US et celle de l'UE, mais elle est aussi plus importante.

Cette évolution plus forte dans le temps de la volatilité est à l'origine de la tendance globale à la hausse de la probabilité de défaut de l'inflation UK.

Enfin, nous notons un impact faible du niveau du taux spot retenu sur les triggers (et donc probabilités de défaut) pour des maturités de plus en plus grandes. Par exemple, pour la maturité de 3 ans l'impact est 0,006% sur le niveau de trigger de l'inflation canadienne, 0,09% pour l'inflation US. Cet impact monte à 1,4% pour l'inflation UK, 2,3% pour l'allemande et dépasse même 6% pour l'inflation turque. Pour une maturité de 5 ans, l'impact est pratiquement nul pour l'inflation canadienne (0,0001%), américaine (0,0073%), mais reste relativement importante pour l'inflation UK (0,65%) et Sud-Africaine (1,08%). A dix ans l'impact est nul pour quasiment tous les pays, excepté la Turquie (4,6%) (dont la moyenne de long terme s'élève à -50% ...)

L'impact de plus en plus faible dans le temps du taux spot retenu est principalement dû à la vitesse de retour à la moyenne, plus cette dernière est faible plus l'impact du niveau du taux spot sur la probabilité de défaut est grand et inversement plus elle est élevée plus le taux spot a un impact faible sur la probabilité de défaut dans le temps.

La probabilité de toucher la barrière à court terme est plus ou moins importante selon la position du taux spot par rapport à la moyenne de long terme.

L'influence du taux spot se dilue donc dans le temps. Cet impact décroît plus vite selon le niveau de retour à la moyenne et le niveau non-extreme du taux spot.

4.2.2 Probabilités de défaut estimées vs Probabilités de défaut empiriques

Comparons à présent les probabilités de défaut estimées pour chaque "trigger" aux probabilités de défaut historiques.

La probabilité théorique peut être différentes de la probabilité empirique pour plusieurs raisons. En effet, le modèle retenu peut ne pas être conforme aux observations dont nous disposons, mais aussi, et surtout, les probabilités théoriques obtenues représentent les probabilités de passer au dessus de la barrière vu d'aujourd'hui. Ce qui évidemment peut ne pas correspondre aux observations passées.

Le tableau 4.14 présente les probabilités historiques relatives aux triggers, représentées ici par leur probabilités de défaut. Nous entendons par probabilité de défaut empirique le nombre d'observation du YoY supérieure au trigger sur le nombre total d'observations sur la période retenue.

	CANADA	US	UK	HICPX	FRCPIX	JAPAN	BRAZIL
1%	3%	1%	0%	0%	0%	8%	2%
5%	5%	5%	0%	1%	0%	9%	6%
10%	8%	7%	1%	4%	0%	9%	9%
	MEXICO	SOUTH AFRICA	DANEMARK	SUEDE	TURQUIE	NORVEGE	ESPAGNE
1%	37%	2%	0%	0%	58%	1%	0%
5%	41%	4%	2%	5%	63%	7%	0%
10%	44%	10%	11%	14%	66%	14%	3%
	PAYS BAS	BELGIQUE	ALLEMAGNE	IRLANDE	ITALIE	FINLANDE	ISLANDE
1%	8%	2%	0%	0%	0%	0%	4%
5%	12%	4%	0%	0%	3%	2%	10%
10%	15%	11%	0%	3%	15%	5%	17%

FIG. 4.14 – probabilités historiques

Aucun défaut n'est survenu sur la période 1997-2007 pour les indices français et allemand, et un nombre très faible de défauts pour les indices anglais, espagnol, irlandais et finlandais.

Le tableau 4.15 compare trois niveaux de triggers à l'historique du taux d'inflation en glissement annuel de la France.

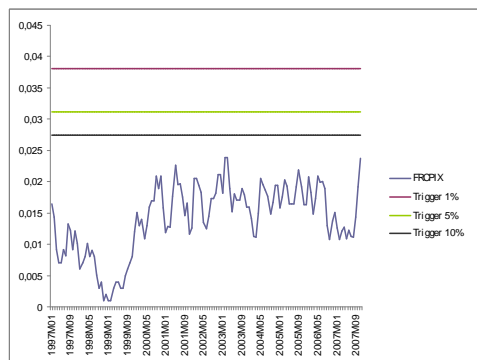


FIG. 4.15 – Triggers et Historiques de l'indice français

Au contraire de la France, et plus généralement des pays de la zone euro, l'inflation des États-Unis a dépassé les deux premières triggers, et presque la troisième. Ce résultat semble conforme à l'image plus souple de la Fed en matière d'inflation. Le Mexique

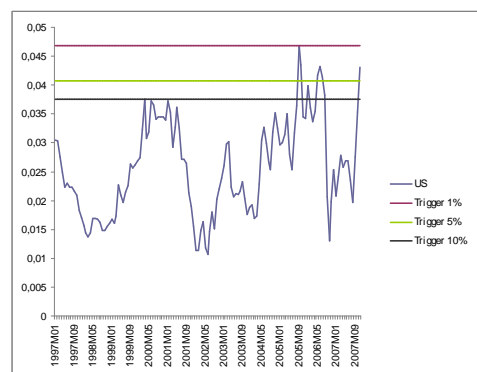


FIG. 4.16 – Triggers et Historiques de l'indice américain

et la Turquie enregistrent les plus forts nombres de défauts sur la période. La Turquie enregistre même en moyenne plus d'un défaut sur deux entre 1997-2007 (4.17).

Ces défauts nombreux s'expliquent en fait par des situations de changements de régime, avec une inflation très forte en début de période, suivie d'une baisse continue dans le temps. Les niveaux actuels sont plus faibles.

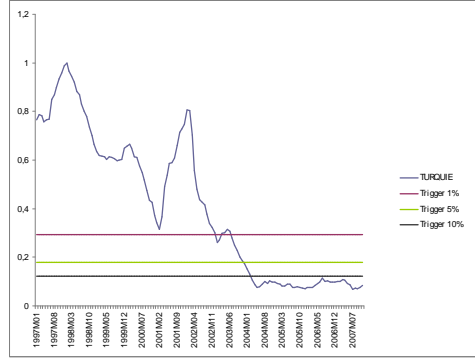


FIG. 4.17 – Triggers et Historiques de l'indice turc

4.3 Probabilités de défauts joints

L'ouverture des économies, la mise en place de l'euro pour les pays concernés, l'essor de la finance ont entre autres rendus les économies mondiales dépendantes les unes des autres (avec un rôle asymétrique particulier joué par l'économie américaine). En particulier, en contexte de crise par exemple, nous nous intéressons au lien entre les inflations de différents pays, ou plus précisément au lien entre les Year-on-Year.

4.3.1 Les copules

L'usage des copules s'est généralisé dans la littérature consacrée aux dérivés de crédits. Deux ouvrages de référence sur les copules sont ceux de Nelsen et Joe. Les copules sont utilisées pour passer des modélisations jointes à des modélisations marginales, et réciproquement. Bien que les copules soient devenus un outil courant, nous en fournissons une présentation, suivant l'ouvrage de Nelsen [29].

Cadre bivarié

Soient S_1 et S_2 des ensembles non vides de \overline{R} , et H une fonction de domaine $DomH = S_1 \times S_2$. Soit $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectangle dont les sommets (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) et (x_2, y_2) appartiennent à $DomH$. Le H -volume de B est donné par :

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

Une fonction réelle de deux variables H est 2-croissante ("2-increasing") si $V_H(B) \geq 0$ pour tous les rectangles B dont les sommets appartiennent à $DomH$. En supposant que S_1 et S_2 ont respectivement un plus petit élément a_1 et a_2 , $H : S_1 \times S_2 \rightarrow R$ est bornée ("grounded") si $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ pour tous (x, y) de $S_1 \times S_2$.

Une sous-copule ("subcopula") bidimensionnelle est une fonction C' telle que :

- $DomC' = S_1 \times S_2$
- C' est 2-croissante et "grounded"

– Pour tout u dans S_1 et v dans S_2 , $C'(u, 1) = u$ and $C'(1, v) = v$
 Une copule ("copula") bidimensionnelle est une sous-copule C de domaine $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$

Théorème Soit C' une sous-copule. Alors pour tous (u, v) dans $Dom C'$,

$$\max(u + v, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v)$$

En notant $M(u, v) = \min(u, v)$ et $W(u, v) = \max(u, v)$, nous avons pour toute copule C : $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$

L' inégalité précédente est connue sous le nom d'inégalité des bornes de Fréchet-Hoeffding, M est la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding et W est la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding. M et W sont aussi des copules.

La notion de copule est ensuite étendue au cas multivarié : nous considérons alors S_1, \dots, S_n des ensembles non vides de \bar{R} et H une fonction réelle de n variables définies sur $dom H = S_1 \times \dots \times S_n$. En considérant B un rectangle de dimension n dont les sommets c sont dans $dom H$, le H -volume de B est à présent défini comme :

$$V_H(B) = \sum_c sgn(c) H(c)$$

ou $|sgn(c)| = 1$, selon que la k -ième composante de c est égale un nombre pair (sgn positif) ou impair (sgn négatif) de fois à la k -ième composante de a le sommet minimum.

Une copule est alors une fonction C de I^n dans I telle que :

- $C(u) = 0$ si l'une des composantes de u est nulle.
- Si toutes les composantes de u sont égales à 1, excepté la k -ième, alors $C(u) = u_k$
- Pour tous a et b de I^n , tels que $a \leq b$ (ie $a_k \leq b_k$) pour tous k , $V_C([a, b]) \geq 0$

Bien sûr, la définition présente est équivalente, en dimension 2, à celle donnée précédemment.

Le théorème de Sklar

La notion de copule peut être étendue au cas multivarié Le théorème de Sklar joue un rôle central dans la theorie des copules : il fait le lien entre les distributions marginales et la distribution multivariée correspondante à travers les copules.

Soit H la loi jointe d'une distribution de marginales F_1, \dots, F_n . Alors il existe une copule C telle que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \bar{R}^n ,

$$H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Si les F_i sont toutes continues, alors C est unique.

Réciproquement, si C est une copule et F_1, \dots, F_n sont des fonctions de répartition, alors la fonction H définie par $H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ est la loi jointe d'une distribution de marginales F_1, \dots, F_n .

Copule de survie

De même que des fonctions de survie \bar{F} peuvent être définis à partir de fonctions de répartitions F , la notion de copule de survie permet de modéliser la survie jointe de variables aléatoires. Dans le cadre du *CDO*, nous nous intéressons précisément aux probabilités jointes du franchissement de barrières ou triggers par les indices Year-on-Year d'inflation.

Une version du théorème de Sklar peut également être donnée pour une copule de survie.

4.3.2 La copule gaussienne

Nous modélisons la distribution jointe des inflation Year on Year par une copule gaussienne. L'hypothèse sous-jacente est la normalité tant des marginales que de la loi jointe. La copule gaussienne a pour expression analytique :

$$C(x_1, \dots, x_n) = N_{\theta}(\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n))$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale multivariée et θ est le paramètre de la copule.

Dans notre cas, nous utilisons le théorème de Sklar dans le sens de l'existence d'une copule C telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Ce qui donne :

$$F(x_1, \dots, x_n) = N_{\theta}(\Phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(x_n)))$$

Dans la formule précédente, nous avons pour chaque maturité i une barrière x_i pour l'ensemble des taux d'inflation (YoY) considérés.

Calculer la probabilité jointe des défauts pour une maturité fixée revient au calcul de la fonction de répartition de la loi normale multidimensionnelle, ie à un calcul d'intégrales. Notons que nous n'utilisons pas exactement le théorème de Sklar, mais une de ses conséquences, qui est la connaissance de la loi jointe des variables aléatoires.

Plusieurs s'approchent sont alors possibles : cependant, comme le domaine d'intégration est de grande dimension, nous adoptons une méthode de type Monte-Carlo. Nous tirons selon la loi N_{θ} , où θ est un paramètre qui peut être estimé de plusieurs façons. Nous comptons alors le nombre de fois où l'inflation simulée dépasse un niveau de barrières donné, et les fréquences obtenues sont utilisées comme estimation des probabilités de défaut.

Pour contrôler la précision de l'estimateur obtenu, nous effectuons en fait M tirages globaux de sous-tirages au cours desquels les probabilités jointes de défaut (ie aussi la fonction de perte) sont estimés. Nous calculons ensuite moyenne et écart-type de ces M tirages.

4.3.3 Calibration de la copule gaussienne sur données historiques

Dans cette sous-section nous présenterons les principales méthodes permettant d'estimer les paramètres de la copule. ([13], [10])

Exact maximum likelihood method Cette méthode consiste à déterminer les paramètres de la copule qui maximise la vraisemblance des observations sur l'ensemble des paramètres (ceux des lois marginales et ceux de la copule).

Pour ce qui est de la copule gaussienne, si on pose $\varsigma = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_{N_I}))$, alors elle se réécrit (Voir [13]) :

$$c(u_1, \dots, u_{N_I}) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \varsigma' (\Sigma^{-1} - I) \varsigma\right]$$

ς est un vecteur aléatoire dont les marginales sont distribuées selon une loi normale. La loi jointe est gaussienne de matrice de variance-covariance Σ , la log-vraisemblance associée s'écrit :

$$l(\Sigma) = -\frac{T}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' (\Sigma^{-1} - I) \varsigma_t$$

Nous allons chercher la valeur de Σ qui maximise la log-vraisemblance. Maximiser $l(\Sigma)$ est équivalent à la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial l(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' \varsigma_t = 0$$

On déduit de cette dernière expression que l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de Variance-Covariance s'écrit :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' \varsigma_t$$

Cette méthode fournit des estimateurs sans biais, convergents et asymptotiquement normaux.

La methode IFM (Inference functions for Margins) La méthode du maximum de vraisemblance nécessite d'estimer conjointement les paramètres des lois marginales et les paramètres de la structure de dépendance. Toutefois, elle peut engendrer des temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension. C'est pour cette raison que *Joe et Xu* (1996), se reposant sur l'idée selon laquelle la vraisemblance des observations d'une seule variable aléatoire peut s'écrire sans avoir à spécifier la copule, ont proposé d'estimer les paramètres de la copule en deux étapes :

1. Dans la première étape, ils proposent d'estimer les paramètres des lois marginales.
2. Dans la seconde, la vraisemblance globale des observations est écrite en remplaçant les paramètres des lois marginales par leurs estimateurs, puis maximisée par rapport aux paramètres de la copule.

Cette méthode aboutit à un estimateur également convergent, asymptotiquement normal et sans biais, mais présente des propriétés asymptotiques différentes de l'estimateur du maximum de vraisemblance. En effet, la variance asymptotique est celle de Godambe([13]).

La méthode CML (canonical Maximom Likelihood) Cette méthode, recommandée par Bouyé et al. [2000], est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Pour cela, les observations Cette méthode présente le grand avantage de procéder à une estimation paramétrique de la copule totalement indépendante de la forme paramétrique des lois marginales. En outre, elle génère des temps de calcul limités. Ce sont deux atouts majeurs qui la rendent très attractive.

D'autres méthodes existent :

- **La méthode des moments** : Cette méthode revient à se donner une mesure de concordance et à considérer que la valeur du paramètre de la copule est celle qui égalise la valeur théorique à la valeur observée. Elle n'assure aucune robustesse de l'estimateur.
- **Les méthodes non-paramétriques.**

Dans notre étude, nous retenons l'approche IFM. En effet, la dynamique de l'inflation étant déjà obtenue à travers le modèle d'inflation retenu, nous transformerons les observations en uniforme en utilisant la fonction de repartition estimée du YoY. Nous écrirons :

$$\varsigma_t = (\Phi^{-1}(F_1(Y \circ Y_1(t))), \dots, \Phi^{-1}(F_{N_I}(Y \circ Y_{N_I}(t))))$$

où F_j est la fonction de repartition de la variable aléatoire $Y \circ Y_j$, $j = 1; \dots; N_I$. Rappelons que $Y \circ Y_j$ est distribuée selon une loi lognormale. La matrice de variance covariance de la copule gaussienne s'écrira :

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varsigma_t' \varsigma_t$$

4.4 Conclusion : Sélection des indices et construction des tranches

A l'issu de cette analyse, rappelons les résultats :

- **Normalité des séries** : Belgique, Canada, Danemark, Espagne, Finlande, France, UE, Irlande, Norvège, Afrique du sud, suède, ROYAUME-UNI, US
- **Non Autocorrélation des erreurs** : Allemagne, UE, Brésil, Islande, Irlande, Italie, Canada, ROYAUME-UNI, France, Norvège, Irlande, Japon, Danemark, Pays-Bas, Belgique, Allemagne, Italie, Finlande
- **Homoscédasticité des erreurs** : problème pour le Mexique
- **Stabilité du modèle** : Problème pour le Japon et le Mexique.

Définissons à présent un pool d'indices dont les corrélations sont les plus faibles possibles, avec l'idée que les défauts ne soient pas simultanés, ie une diversification du

risque d'inflation. Nous retenons les Etats-Unis, le Royaume-Uni et la France comme socle de notre pool. Analysons la corrélation entre ce socle et les autres indices retenus.

USA : L'analyse de la matrice de corrélation montre une faible corrélation (moins de 40%) entre l'indice US et les indices : Royaume-Uni, Brésil, Afrique du Sud, Danemark, Suède, Norvège, Pays-Bas, Allemagne, Irlande, Italie Finlande et Islande.

Royaume-Uni : Pour ce qui est de l'indice britannique, il est décorrélé avec les indices suivants : Canada, US, UE, France, Brésil, Afrique du Sud, Danemark, Suède, Norvege, Espagne, pays-Bas, Belgique, Irlande, Italie, Finlande, Islande,

France : L'indice FRCPIx est faiblement corrélés aux indices : Brésil, Afrique du Sud, Danemark, Norvège, Pays-bas, Allemand, Finlande et Islande.

Nous écartons les pays dont les inflations sont fortement corrélées, ie avec une corrélation supérieure à 65%. Bien sûr, l'indice d'inflation européenne, combinaison des inflations nationales, n'a pas été conservé. Enfin, certains pays dont les profils d'inflation a priori intéressants en terme de corrélation ont été écartés : le Mexique et la Turquie sont dans ce cas. Ces pays, membres de l'OCDE, sont victimes de leur passé : les probabilités historiques de défauts étaient beaucoup plus élevés que ce que la modélisation proposée, du fait des changements structurels survenus dans leur économie. Cependant, les récentes crises (crise mexicaine de 1997, crise turque de 2003) nous ont incité à la prudence. Pour la Turquie, le risque d'inflation peut également provenir des instabilités politiques et géopolitiques. De plus, la modélisation du taux d'inflation de ces pays par le modèle retenu n'est pas satisfaisante.

Au final, les indices retenus s'illustrent par la matrice de correlation présentée au tableau 4.18.

	US	UK	Frcpix	Brazil	South Africa	Suède	Norvège	Pays-Bas	Irlande	Italie	Islande
US	100%										
UK	20%	100%									
Frcpix	54%	11%	100%								
Brazil	1%	-19%	23%	100%							
South-africa	-19%	10%	-13%	25%	100%						
Suède	0%	0%	49%	11%	14%	100%					
Norvège	35%	-9%	-1%	12%	31%	9%	100%				
Pays-Bas	-11%	-45%	24%	22%	26%	63%	17%	100%			
Irlande	20%	11%	47%	22%	20%	35%	7%	44%	100%		
Italie	9%	-30%	52%	27%	-7%	28%	20%	29%	28%	100%	
Islande	-7%	-51%	13%	3%	-13%	34%	13%	51%	2%	40%	100%

FIG. 4.18 – Matrice de corrélations

Nous simulons à présent la fonction de perte pour les onze pays retenus. La simulation est justifiée par le théorème de Sklar, dont nous déduisons la distribution jointe des

défauts. Nous considérons ici comme matrice de variance-covariance celle estimée par IFM. La perte calculée porte sur les trois barrières de 1%, 5%, et 10%. Les barrières correspondantes en terme d'inflation dépendent de deux paramètres : le pays considéré, mais aussi la date choisie. Dans la fonction de perte représentée, un défaut est considéré comme le franchissement d'une barrière.

A partir des probabilités de défauts obtenues (Figure 4.19), nous attribuons une note à chaque niveau de perte (Figure 4.20) telle que définie par Standard & Poor's (Figure 4.1).

Nous déduisons du tableau 4.20 les tranches suivantes :

	Tranche	Notation
<i>SuperSenior</i>	[82%,100%]	AAA
<i>Senior 1</i>	[61%,82%]	AAA
<i>Senior 2</i>	[42%,61%]	AA
<i>Mezzanine 1</i>	[33%,42%]	A
<i>Mezzanine 2</i>	[30%,33%]	BBB
<i>Mezzanine 3</i>	[18%,30%]	BBB
<i>Equity</i>	[0,18%]	Non notée

La taille de la tranche equity est de 18%, elle correspond bien à ce qui est observé sur le marché.

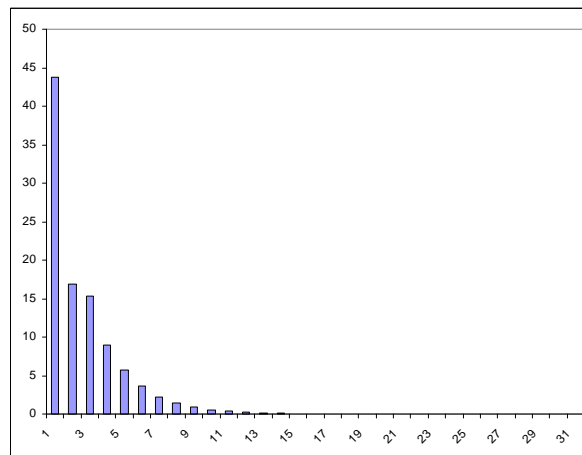


FIG. 4.19 – Distribution du nombre de défaut

Nombre de défauts	Taux de perte	Probabilité	Précision	Notation
1	3%	43,72%	0,157%	CCC
2	6%	16,85%	0,116%	B+
3	9%	15,36%	0,109%	B+
4	12%	8,94%	0,088%	BB
5	15%	5,67%	0,074%	BB
6	18%	3,61%	0,059%	BB
7	21%	2,23%	0,046%	BBB
8	24%	1,40%	0,036%	BBB
9	27%	0,87%	0,031%	BBB
10	30%	0,54%	0,023%	BBB
11	33%	0,33%	0,019%	A
12	36%	0,20%	0,014%	AA
13	39%	0,12%	0,011%	AA
14	42%	0,07%	0,009%	AA
15	45%	0,04%	0,007%	AAA
16	48%	0,02%	0,005%	AAA
17	52%	0,01%	0,004%	AAA
18	55%	0,01%	0,003%	AAA
19	58%	0,00%	0,002%	AAA
20	61%	0,00%	0,001%	AAA
21	64%	0,00%	0,001%	AAA
22	67%	0,00%	0,000%	AAA
23	70%	0,00%	0,000%	AAA
24	73%	0,00%	0,000%	AAA
25	76%	0,00%	0,000%	AAA
26	79%	0,00%	0,000%	AAA
27	82%	0,00%	0,000%	AAA
28	85%	0,00%	0,000%	AAA
29	88%	0,00%	0,000%	AAA
30	91%	0,00%	0,000%	AAA
31	94%	0,00%	0,000%	AAA
32	97%	0,00%	0,000%	AAA
33	100%	0,00%	0,000%	AAA

FIG. 4.20 – Distribution des pertes et notations

Chapitre 5

Pricing des tranches du CDO inflation

5.1 Historique des modèles de Pricing CDO

Deux grandes familles de modèles sont utilisés pour valoriser les CDO (voir [20]), les modèles structurels, fondés sur la valeur de la firme, et les modèles à intensité, qui reposent sur une modélisation du temps de défaut.

5.1.1 Les modèles structurels

Ces modèles sont fondés sur une idée structurelle initialement introduite par Tobin (1958), puis reprise par Black-Scholes (1973) et Merton (1974). Celle-ci suppose qu'il y a défaillance de l'entreprise, lorsque la valeur de l'actif du bilan, A_t , devient inférieure à la valeur des dettes, souvent assimilée au passif du bilan P_t diminué des fonds propres.

Ces modèles sont utilisés non seulement pour prévoir les dates de défaillance des entreprises et construire les notations associées ; prévoir l'importance des taux de recouvrement ou des taux de perte, en cas de défaillance ; mais aussi pour valoriser les derives de crédit (actions, obligations, options sur actions, crédit default swap (CDS), collateralized debt obligations (CDO), etc.) et pour analyser la valeur future d'un portefeuille composé de tels dérivés, en particulier pour déterminer le montant des réserves.

L'idée de base du modèle (Merton (1974)) est de considérer le financement d'un projet bien défini, c'est-à-dire relatif à une ligne spécifique du bilan. On considère deux dates importantes :

- La date t à laquelle la firme emprunte et investit
- La date $t + h$ à laquelle la firme doit contractuellement rembourser sa dette

Le montant emprunté et la somme à rembourser $P_{t;t+h}$ sont fixés à la date de signature du contrat tout comme la date de remboursement. Si nous notons A_τ le montant de l'actif du bilan spécifique de cette ligne pour la date τ .

À toute date intermédiaire $t \leq \tau \leq t + h$, le solde de cette ligne budgétaire peut-être positif ou négatif. Dans le modèle, la défaillance ne peut se produire qu'au moment de

la demande de remboursement de la dette, c'est-à-dire en $t + h$. Il y a défaillance sur la dette en $t + h$, si et seulement si :

$$A_{t;t+h} < P_{t;t+h}$$

Les plus grandes faiblesses de ces modèles concernent le traitement de la dette et les hypothèses sur la dynamique de la valeur de l'actif de la firme . Cette dette est supposée déterminée. En réalité, elle est aussi volatile que la composante actif du bilan. Par exemple, une firme, dont le chef d'entreprise craint une faillite, cherche souvent à emprunter pour des questions de trésorerie, ce qui entraîne des augmentations conjointes de la dette et de l'actif.

Ces modèles sont très gourmands en information : ils exigent en effet la connaissance du bilan de la compagnie sur la période d'étude .

Nous présentons un exemple de modèle structurel proposé par Hull, Predescu et White ([22]). L'idée du modèle de Merton(1974) est reprise. Elle est complétée par celle de Black et Cox (1976). En effet, la valeur de la firme est supposée suivre un processus stochastique, si sa valeur passe en dessous d'une valeur minimale, alors la compagnie fait défaut.

N entreprises sont considérées. Nous notons $V_i(t)$, la valeur de la compagnie i , ($1 \leq i \leq N$), à l'instant t . La valeur de l'entreprise est supposée suivre le processus suivant :

$$dV_i(t) = \mu_i V_i(t)dt + \sigma_i V_i(t)dX_i(t)$$

Où : μ_i est le taux de croissance de la valeur de la firme i , σ_i est la volatilité de cette valeur, X_i est un mouvement brownien standard.

Notons B_i la barrière de la compagnie i . Il y a défaut de la firme i lorsque la valeur $V_i(t)$ de la firme est inférieure à B_i .

$V_i(t)$ est un mouvement brownien géométrique. Il est facile à montrer, par application de la formule d'Ito à $\ln(V_i(t))$, que :

$$X_i(t) = \frac{\ln(V_i(t)) - \ln(V_i(0)) - (\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t}{\sigma_i}$$

Nous pouvons construire la nouvelle barrière B_i^* qui découle de B_i par :

$$B_i^* = \frac{\ln(B_i) - \ln(V_i(0)) - (\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t}{\sigma_i}$$

Le défaut à lieu lorsque $X_i(t) < B_i^*$. Si nous posons $\beta_i = \frac{\ln(B_i) - \ln(V_i(0))}{\sigma_i}$ et $\gamma_i = -\frac{\mu_i - \sigma_i^2/2}{\sigma_i}$, alors $B_i^*(t) = \beta_i + \gamma_i t$

Le prix du CDS digital se déduit de la forme du flux. Nous avons :

$$CDS = e^{-rT} Q_0[X_i(T) < B_i^*(T)] \iff CDS = e^{-rT} \Phi[B_i^*(T)]$$

Où Q_0 désigne la distribution conditionnelle (à $t = 0$) risque-neutre et Φ la fonction de répartition de la loi normale centré réduite.

Le taux sans risque est supposé déterministe et constant entre 0 et T .

Afin de modéliser les corrélations entre les défauts des firmes, Hull et al supposent que le mouvement brownien X_i est une fonction de deux mouvements browniens : Un mouvement brownien M commun à toutes les firmes et Z_i représentant la composante idiosyncratique de la firme i .

La dynamique de X_i est la suivante :

$$dX_i(t) = \rho_i(t)dM(t) + \sqrt{1 - \rho_i^2(t)}dZ_i(t)$$

La variable ρ_i , $-1 \leq \rho_i \leq 1$, sert à contrôler le poids de chacune des composantes M et Z_i . Ces composantes sont supposées indépendantes.

La corrélation entre deux firmes i et j est $\rho_i \rho_j$

Nous notons des similitudes entre ce modèle et le modèle standard du marché de crédit (le modèle à copule gaussienne à un facteur).

5.1.2 Les modèles à intensité

En plus des modèles structurels, les dérivés de crédit peuvent être évalués au travers de modèles dits à intensité.

Ces modèles modélisent l'intensité de défaut : considérons le temps τ de défaut d'un débiteur, $N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$. L'intensité est le processus λ_t tel que $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ est une martingale locale (sous condition que le processus soit non explosif adapté). Nous avons alors :

$$P(\tau > s | G_t) = E[\exp(-\int_t^s \lambda_u du) | G_t] \text{ avec } F_t \subset G_t \text{ et } \lambda_t F_t \text{ prévisible.}$$

Nous avons aussi pour un intervalle de temps $\Delta t > 0$:

$$P(\tau < t + \Delta t | G_t) = E[1 - \exp(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_u du) | G_t]$$

Et, pour Δt petit, nous avons l'approximation $P(\tau < t + \Delta t | G_t)$ proche de $\lambda_t \Delta t$.

Modéliser les temps de défaut revient alors à modéliser le processus $(\lambda_t)_t$. Cette modélisation peut se faire en écrivant λ_t en fonction de processus plus généraux. Par exemple, Zhen Wei [37] pose : $\lambda_t = \Lambda(X_t)$ ou Λ est une fonction de R^d dans R_+ et $(X_t)_t$ le processus solution de

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

où B_t est un mouvement brownien d -dimensionnel G_t prévisible.

D'autres processus de diffusion, incluant par exemple une partie discontinue (ie des sauts, souvent introduits sous forme de processus de Poisson ou Poisson-composés) peuvent également être considérés. Une classe largement étudiée est celle des modèles affines, pour lesquelles Λ est une fonction affine. Au sein de cette classe, les pay-offs de différents dérivés de crédit peuvent alors être calculés analytiquement¹, et c'est cette simplicité relative des calculs qui rend les modèles à intensité si attrayants.

¹souvent après résolution de systèmes d'équation de Riccati

5.2 Pricing

Dans la suite, nous retenons un schéma proche des modèles structurels. L'idée étant de partir de la modélisation de l'inflation, selon le modèle retenu plus haut, sous la probabilité forward neutre. Nous cherchons ensuite à extraire les probabilités de défauts "implicites", c'est à dire telles que perçues par le marché. Enfin nous obtenons les prix des "CDS digitaux"² et le "spread"³ lié à chacune des tranches.

5.2.1 Pricing du CDS digital

Le Credit Default Swap digital peut être défini comme un contrat financier bilatéral entre deux parties. Une des contreparties (l'acheteur de protection) verse un coupon unique en début de période. L'autre contrepartie (le vendeur de protection) s'engage à couvrir les défauts. Le déroulement s'effectue à la maturité.

L'acheteur de protection paye le spread CDS en début de période et reçoit 1 en cas de défaut, c'est-à-dire si le YoY à T est supérieur au trigger.

Nous voulons donc valoriser le produit dérivé : $1_{YoY(T) > trigger}$

Nous considérons le Zéro-Coupon nominal comme numéraire, dans ce cas les arguments standards⁴ de valorisation de produits dérivés [8] permettent d'écrire :

$$CDS = B(0, T)P_Q(YoY(T) > trigger)$$

$B(0, T)$ est le Zéro-Coupon, qui paye 1 à T.

Q est la mesure forward neutre.

La valeur du ratio d'inflation à maturité s'écrit :

$$YoY_T = F_T^{YoY}(0)exp(x_T - \frac{1}{2}Var(x_T))$$

Rappelons que le modèle est entièrement défini par la connaissance du futur ratio en glissement annuel et par un processus de type Hull-White intégré. Ce processus est distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance $T * \Sigma^2$. D'où :

$$CDS = B(0, T)N(d)$$

Où

$$d = \frac{1}{\Sigma\sqrt{T}}Log(\frac{F_T^{YoY}}{Trigger}) - \frac{1}{2}\Sigma\sqrt{T}$$

$N(d)$ est la probabilité de défaut implicite.

²Aussi appelés options digitales

³La différence entre le taux Euribor et le rendement des tranches, c'est le taux supplémentaire versé au détenteur d'une tranche en plus de l'Euribor

⁴Absence d'opportunité d'arbitrage, existence du mesure martingale...

5.2.2 Pricing des tranches du CDO inflation

Le défaut est constaté à la maturité. Le détenteur de la tranche $[A, D]$ (le vendeur de protection) s'engage à couvrir les pertes survenues sur la tranche $[A, D]$, en échange il reçoit un spread $s_{[A,D]}$.

Nous supposons d'abord que les coupons sont payés continûment alors, la jambe fixe s'écrit :

$$\int_0^T s_{[A,D]} * e^{-\int_0^t r_u du} dt$$

la jambe variable quant à elle se met sous la forme :

$$e^{-\int_0^T r_u du} l_{[A,D]}(T)$$

Sous l'hypothèse AOA la jambe fixe est égale à la jambe variable.

L'espérance conditionnelle (à l'information disponible à $t=0$) sous la mesure forward neutre Q est :

$$E_0^Q(e^{-\int_0^T r_u du} l_{[A,D]}(T)) = E_0^Q\left(\int_0^T s_{[A,D]} * e^{-\int_0^t r_u du} dt\right)$$

Nous pouvons déduire que :

$$s_{[A,D]} = \frac{E_0^Q(e^{-\int_0^T r_u du} l_{[A,D]}(T))}{E_0^Q(\int_0^T e^{-\int_0^t r_u du} dt)}$$

En réalité, les versements des coupons sont effectués de façon périodique à intervalle de temps fixé (que nous supposons égale à l'année dans notre étude).

$$E_0^Q\left(\int_0^T e^{-\int_0^t r_u du} dt\right) = \sum_{t=1}^T E_0^Q(e^{-\int_0^t r_u du})$$

Nous avons une somme de zéros-coupons $B(0,t)$ de maturité t , $(B(0,t))_{1 \leq t \leq T}$. Le spread de la tranche $[A, D]$ se met sous la forme :

$$s_{[A,D]} = \frac{E_0^Q(e^{-\int_0^T r_u du} l_{[A,D]}(T))}{\sum_{t=1}^T B(0,t)}$$

Prise en compte du délai de paiement Dans la pratique, les indices d'inflation ne sont pas connus à la date cible, mais publiés deux à trois mois après le mois correspondant, les paiements s'effectueront à Δ après la date effective de maturité. Ce délai supplémentaire doit être valorisé. La jambe fixe doit tenir compte de ce délai supplémentaire.

Finalement, le spread se réécrit :

$$\begin{aligned} s_{[A,D]} &= \frac{E_0^Q(e^{-\int_0^T r_u du} l_{[A,D]}(T))}{\Delta B(0, T + \Delta) + \sum_{t=1}^T B(0, t)} \\ &= \frac{E_0^Q(e^{-\int_0^T r_u du} \frac{1}{D-A} \{(l_p(T) - A)^+ - (l_p(T) - D)^+\})}{\Delta B(0, T + \Delta) + \sum_{t=1}^T B(0, t)} \end{aligned}$$

Sous la mesure forward neutre les flux des produits dérivés actualisés sont des martingales d'où :

$$s_{[A,D]} = \frac{B(0, T)}{N \times D - N \times A} \frac{E_0^Q(\{(l_p(T) - A)^+ - (l_p(T) - D)^+\})}{\Delta B(0, T + \Delta) + \sum_{t=1}^T B(0, t)}$$

Nous supposons sans perte de généralité que $N \times A$ et $N \times D$ sont des entiers naturels. Sous cette hypothèse le spread s'écrit :

$$s_{[A,D]} = \frac{B(0, T)}{N \times D - N \times A} \times \frac{\sum_{j=1}^{N(1-A)} j \times P_Q(N_D(T) = NA + j) - \sum_{j=1}^{N(1-D)} j \times P_Q(N_D(T) = ND + j)}{\Delta B(0, T + \Delta) + \sum_{t=1}^T B(0, t)}$$

Pour connaître ce spread, il suffit de connaître sous la mesure forward neutre la loi du nombre de défaut.

Notons qu'il suffira de connaître la probabilité de défaut implicite pour pricer l'option Digitale et le CDO. En effet, ne disposant de produit sur le marché nous permettant d'extraire les corrélations implicites, nous retenons les corrélations historiques.

5.2.3 Calibration

A partir des différents prix de Caplets cotés sur le marché, nous reconstituons la distribution des anticipations sous-jacente, ou densité forward neutre. Il nous suffit donc de connaître la valeur du forward de maturité 5 ans et la courbe de volatilité implicite.

Rappelons le prix d'un Caplet en glissement annuel de strike K et de maturité T :

$$Caplet_{Y_oY}(K, T, T - 1) = B_N(0, T)(F_T^{Y_oY} N(d_1) - KN(d_2))$$

Où :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{F_T^{Y_oY}}{K}\right) + \frac{1}{2}\Sigma\sqrt{T} \\ d_2 &= d_1 - \Sigma\sqrt{T} \\ \Sigma^2 &= \frac{1}{T} \text{Var}(x_T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{I,t}^2 e^{-2\alpha_I(T-t)} dt \end{aligned}$$

Plusieurs méthodes permettent d'estimer les anticipations d'inflation sur les marchés. Elles peuvent être mesurées soit par l'écart de rendement entre les obligations indexées

et non indexées (dénommé point mort ou break-even point), ou directement comme les taux swap d'inflation.

La première méthode, est la plus utilisée, elle est basée sur l'hypothèse de Fisher(1930) selon laquelle le taux nominale est composée du taux réel et des anticipations de l'inflation.

Selon l'hypothèse de Fisher, l'écart de rendement entre les obligations nominales et les obligations indexées sur l'inflation devrait être un bon indicateur des attentes d'inflation. Toutefois, cette approche souffre de nombreuses limites. I. Christensen et al [14] ont montré, pour le cas du Canada, qu'entre 1992 et 2003 cet écart a été nettement supérieur, en moyenne, aux mesures de l'inflation attendue établies par les enquêtes, et plus variable.

Mais un autre argument fondamental milite en faveur de cette méthode : l'argument standard d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Afin de mieux cerner l'importance du concept de point mort d'inflation, considérons une obligation zéro coupon nominale de maturité T et une obligation zéro coupon indexée sur inflation de même maturité, dont la valeur est celle zéro coupon réel multipliée par le ratio d'inflation. Par définition :

$$\begin{aligned} B_N(0, T) &= e^{-\int_0^T r_u^N du} \\ B_{Inf}(0, T) &= \frac{I_T}{I_0} B_R(0, T) \end{aligned}$$

avec $B_R(0, T) = e^{-\int_0^T r_u^R du}$

La valeur de marché d'une obligation est déduite de son rendement actuariel :

$$\begin{aligned} B_N(0, T) &= \frac{1}{(1 + rdt_N)^T} \\ B_{Inf}(0, T) &= \frac{1}{(1 + rdt_R)^T} \frac{I_T}{I_0} \end{aligned}$$

Considérons à présent deux stratégies d'investissement : acheter l'obligation indexée sur l'inflation et acheter l'obligation nominale. Un investissement de M dans le zéro coupon nominal se traduira par une valeur finale de $M(1 + rdt_N)^T$, tandis qu'un investissement de M dans le zéro coupon indexé sur l'inflation produira une valeur finale de $M(1 + rdt_R)^T \frac{I_T}{I_0}$.

Nous faisons l'hypothèse que le taux forward est constant entre 0 et T , nous pouvons écrire : $\frac{I_T}{I_0} = (1 + i)^T$

Il n'y a pas de possibilité d'arbitrage si :

$$M(1 + rdt_N)^T = M(1 + rdt_R)^T (1 + i)^T \implies 1 + rdt_N = (1 + rdt_R)(1 + i)$$

Nous retrouvons bien l'équation de Fisher. Le taux d'inflation break-even s'écrit :

$$BEIR = (1 + rdt_N)(1 + rdt_R) - 1 \cong rdt_N - rdt_R$$

Le ratio d'inflation est notre variable d'état, le taux forward n'est pas constant. Par un raisonnement analogue, nous montrons que si :

$$\frac{I_T}{I_0} = \prod_{t=1}^T \frac{I_t}{I_{t-1}} \implies \frac{I_T}{I_0} = \prod_{t=1}^T Y_o Y_t$$

alors :

$$\prod_{t=1}^T Y_o Y_t = \left(\frac{1 + rdt_N}{1 + rdt_R} \right)^T$$

Cette dernière expression permet de construire par récurrence la courbe de ratio forward break-even.

On peut maintenant extraire la volatilité implicite. Le prix du Caplet a une forme standard, c'est la formule standard de Black.

Nous extrayons la volatilité implicite par optimisation. L'algorithme utilisé⁵ est issu de la méthode de recherche du simplexe, méthode de recherche directe qui n'utilise pas la dérivée de la fonction objective.

5.2.4 Résultats

Nous effectuons les calculs à partir des prix mid⁶ cotés sur le marché , à la date du premier novembre 2007 pour être cohérent avec les estimations des paramètres d'évolution du YoY précédemment réalisées.

La figure 5.1 compare l'inflation Break-even et les anticipations de l'inflation issues du modèle de Hull et White. La différence est significative.

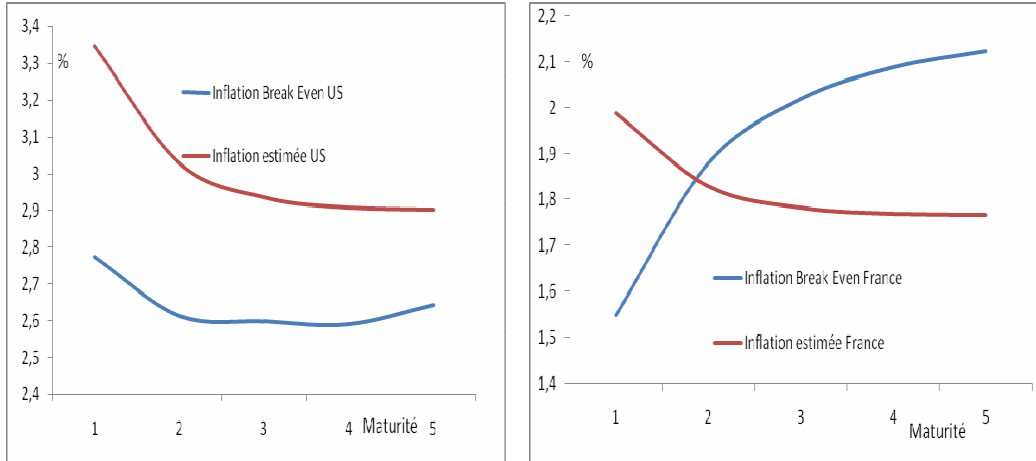


FIG. 5.1 – Forward US et France

⁵déjà implémenté dans MATLAB

⁶mid : moyenne des prix bid et ask

L'inflation break-even US est nettement plus faible que le forward estimé par le modèle. De plus, tandis que l'inflation estimée décroît pour se stabiliser autour de la moyenne de long terme, l'inflation break-even a un comportement plus variable.

On note une différence de variation significative des anticipations de l'inflation française selon l'estimation historique et l'inflation break-even : décroissance de l'inflation estimée par le modèle contre une croissance continue de l'inflation Break-even.

La figure 5.2 présente les volatilités implicites que nous avons estimées pour la France et l'US.

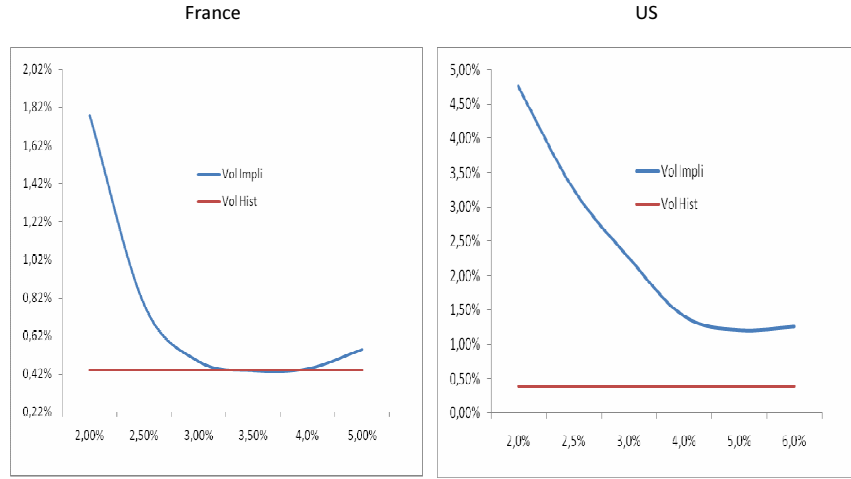


FIG. 5.2 – Volatilités Implicites US et France

On note le smile de volatilité pour les deux graphiques. La volatilité implicite US est nettement supérieure à la volatilité historique. Pour des Strikes comprises entre 3% et 4% on note que la volatilité implicite France est très proche de sa volatilité historique.

La figure 5.3 présente la probabilité de défaut implicite de l'inflation US . Elle est nettement plus forte que la probabilité de défaut historique.

Trigger	Vol Impli	PD Historique	PD Implicite	CDS
4,7%	1,27%	1%	24%	20,53%
4,1%	1,39%	5%	32%	27,52%
3,8%	1,62%	10%	38%	32,09%

FIG. 5.3 – CDS US

L'observation de la figure 5.4 confirme ce constat. La probabilité de défaut implicite est toujours largement supérieure à la probabilité de défaut historique mais elle est nettement plus faible comparée à la probabilité implicite US.

Le marché US étant le plus liquide, nous retenons l'US comme le benchmark. Le rapport entre la volatilité implicite et la volatilité historique US joue le rôle de beta. Nous avons pu obtenir la "volatilité implicite" des autres inflations à partir de l'expression :

Trigger	Vol Impli	PD Historique	PD Implicite	CDS
3,8%	0,44%	1%	15%	12,52%
3,1%	0,43%	5%	26%	21,59%
2,7%	0,64%	10%	35%	28,83%

FIG. 5.4 – CDS France

$$Vol_{impli} = beta \times vol_{histo}$$

Maintenant, nous pouvons calculer le spread de chaque tranche.

Le tableau ci-dessous présente les rémunérations des tranches du CDO, en point de base⁷ au-delà du taux Euribor à trois mois. La probabilité des défauts joints, toujours au moyen de la copule gaussienne, a été à nouveau calculée par une simulation de Monte-Carlo⁸.

Tranche	Nombre de défauts	Taux de perte(en %)	Notation	Rémunération(en bp)
<i>SuperSenior</i>	[28,33]	[82,100]	AAA	-
<i>Senior 1</i>	[21,27]	[61,82]	AAA	18.06
<i>Senior 2</i>	[15,20]	[42,61]	AAA	147.95
<i>Mezzanine 1</i>	[12,14]	[33,42]	AA	397.41
<i>Mezzanine 2</i>	[11]	[30,33]	A	570.77
<i>Mezzanine 3</i>	[7,10]	[18,30]	BBB	863.01
<i>Equity</i>	[0,6]	[0,18]	Non notée	1477.66

Les rémunérations obtenues⁹ semblent d'abord importantes. Une première approximation, bénigne, porte sur les taux Zéro-Coupons utilisés : nous avons considéré un taux actuariel fixe sur les cinq prochaines années, duquel nous avons déduit les taux Zéro-Coupons des années intermédiaires. En revanche, l'estimation des volatilités implicites, à l'exception des Etats-Unis, de la France et du Royaume-Uni, pour lesquels des données de marché étaient disponibles, provient de l'égaleisation, pour chaque pays, du coefficient beta avec celui obtenu pour les Etats-Unis. S'il est vrai que l'inflation américaine, nourrie par la baisse du dollar, est contagieuse, les marchés financiers d'inflation ont bénéficié des anticipations d'inflation liés aux baisses des taux attendues destinées à limiter la crise du subprime. De même, la hausse des matières premières agricoles est imputée aux investissements d'acteurs qui se détournent de l'immobilier et des marchés d'actions : le même phénomène peut jouer pour l'inflation, même si l'échéance de cinq ans en diminue la portée.

Nous présentons dans la figure 5.5 l'évolution de janvier 2007 à avril 2008 du YoY (mensuel) en France et des prix (journaliers) des Caplets en France. Les hausse des prix

⁷basis point ou bp, tel que 0.01=100bp

⁸à partir de 10 millions de tirages

⁹versées tous les trois mois

des Caplets, d'échéance cinq ans, semble avoir une pente moins forte que le YoY. La hausse de l'inflation induit une hausse des anticipations de l'inflation par le marché à 5 ans, mais dans une moindre mesure.

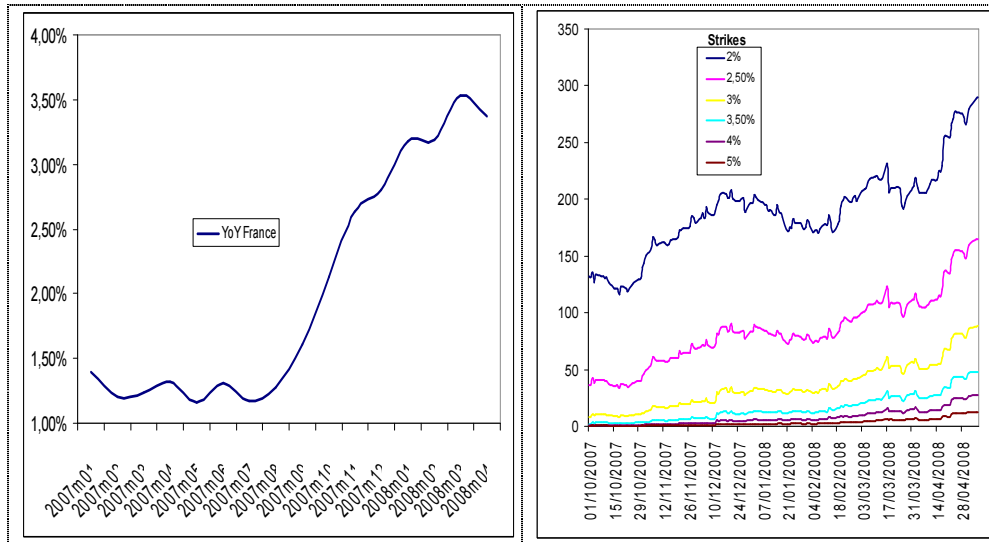


FIG. 5.5 – Evolution des Caplets et du YoY

Finalement, l'éventuelle surévaluation des volatilités implicites américaines, que nous transmettons à tous les pays, débouche sur des probabilités de dépasser les triggers plus ou moins importantes, d'où des rémunérations en conséquence. Le CDO sur inflation, tel que nous l'avons conçu, parie sur des anticipations d'inflation par les marchés supérieures à l'inflation qui sera réalisée.

Conclusion

Au cours de notre mémoire, nous nous sommes intéressés à deux domaines a priori différents, même s'ils restent dans le cadre des techniques financières de couverture du risque. D'une part, le monde des dérivés d'inflation, traités sur des marchés en expansion ; d'autre part, celui des dérivés de crédits, dont certains de plus en plus contestés à mesure que la crise financière de l'été 2007 s'amplifiait...

Nous avons constitué un portefeuille composé d'options digitales sur inflation, que nous avons ensuite titrisé. Nous avons créé différentes tranches, auxquelles les flux issus de ce portefeuille ont été redistribués, selon leur profil de risque . Ce profil a été établi à partir d'une modélisation paramétrique de l'inflation, avec une approche de taux court de type Hull & White. Des inflations d'une vingtaine de pays au départ, nous en avons retenu onze : les mieux modélisées par le modèle retenu, et les moins corrélées, avec une corrélation modélisée par une copule gaussienne, et de paramètre estimé par maximum de vraisemblance. La taille de la tranche equity est de 18%, ce qui concorde avec ce qui est observé sur le marché. Notons toutefois la taille relativement importante de la tranche super-senior, qui s'élève à 30%. Nous avons ensuite évalué ("priced") les produits (Digitales et Tranches), en calibrant le modèle sur des Caplets.

Construire un CDO sur produits dérivés inflation exige une modélisation rigoureuse de l'inflation. Les processus -utilisés- de retour à la moyenne (mean-reverting process) de type Hull & White, permettent d'expliquer une proportion relativement importante (environ 80%) des variations de l'inflation. Implicitement, l'inflation est considérée comme un taux d'intérêt, le "fixing" à une date future dépend non seulement de son niveau à la date précédente, de la force de rappel et de la moyenne de long terme, mais aussi de la volatilité¹⁰.

Cependant, l'inflation reste une variable macroéconomique, influencée par plusieurs autres variables économiques. Les niveaux d'inflation en Europe et aux États-Unis sont aujourd'hui proches de leur plus haut niveau historique depuis dix ans, qui coïncide avec une phase de hausse généralisée des prix des matières premières : le baril de Brent a franchi, le 22 mai 2008, le seuil des 135\$; dans le même temps, l'once d'or a dépassé les 900\$ tandis que les prix du blé, du maïs, du soja et d'autres produits agricoles ne cessent d'augmenter.

Il serait donc intéressant de comparer les résultats de notre analyse à ceux issus d'une modélisation macroéconométrique (du moins pour la construction des tranches).

¹⁰qui incorpore toutes les incertitudes

La copule contient toute l'information pertinente au sujet de la structure de dépendance d'un vecteur de variables aléatoires continues et permet de l'isoler des effets des lois marginales. Pour modéliser la structure de dépendance sous-jacente à nos observations, nous avons émis l'hypothèse que ces données provenaient d'une famille paramétrique de lois normales. Nous avons, par la suite, choisi un membre approprié de cette classe par estimation IFM en supposant une structure de dépendance plate¹¹. Les conclusions obtenues doivent néanmoins être considérées avec précaution. Des conclusions erronées peuvent surgir dans le cas où la vraie copule de l'échantillon n'appartient pas à la famille des lois gaussiennes : X.Burtschell et al [9] montrent la sensibilité des primes versées aux tranches à la copule retenue pour modéliser la structure de dépendance. Afin de choisir la copule adéquate, plusieurs tests d'adéquation ont été développés. L'article de Fermanian [17] et la thèse de Quessy[33] passent en revue une batterie de tests d'adéquation aux copules : faute de temps, nous n'avons pu en approfondir les aspects théoriques et pratiques.

Une autre extension à notre mémoire consisterait à mesurer la qualité de nos barrières, ou "triggers". Comme les VaR (Value at Risk), les triggers sont des réalisations de la fonction quantile, et les tests de validation de la VaR auraient également été pertinents.

¹¹En réalité, le paramètre de la copule dépend de la maturité et de l'information disponible à l'instant initial choisi. On peut parler d'espérance de la structure de dépendance pour une maturité fixée sachant l'information disponible à l'instant initial

Annexe A

Note technique

A.1 Le test de Normalité de Jarque-Bera

Rappelons que l'hypothèse de normalité des series nous permet d'affirmer que nos estimateurs des MCO sont EMV. Aussi, cette hypothèse joue un rôle essentiel car elle va préciser la distribution statistique des estimateurs. c'est grâce à cette hypothèse que l'inférence statistique peut se réaliser. Elle être testée sur les variables du modèle ou sur les termes d'erreur du modèle.

le test d'hypothèses est la suivante :

- H_0 : Suit une loi normale $N(m, \sigma)$
- H_1 : ne Suit pas une loi normale $N(m, \sigma)$

la statistique de Jarque-Bera est définie par :

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right]$$

Où S est le coefficient de dissymétrie (Skewness) et K le coefficient d'aplatissement (Kurtosis). Sous l'hypothèse H_0 , la statistique JB est distribuée selon une loi de Khi-deux à 2 degrés de liberté. On peut donc écrire la P-Value associée à cette statistique par :

$$P - Value(JB) = Pr(\chi(2) > JB)$$

La règle de décision est la suivante :

- Au seuil de s%, on accepte l'hypothèse de normalité des que la valeur de la P-value est supérieure à s%.
- Au seuil de s%, on rejette l'hypothèse de normalité des que la valeur de la P-value est inférieure à s%.

A.2 Les tests d'autocorrelation

A.2.1 Le test d'autocorrelation de Ljung-Box

Le test de Ljung-Box (1978) est un des Tests du "porte-manteau" qu'on appelle aussi tests d'adéquation globale du modèle. Ces tests reposent sur l'idée que la fonction d'auto-

correlation d'un bruit blanc ne doit pas révéler d'autocorrelations non nulles. L'hypothèse H_0 est rejetée au seuil de 5% si la statistique de Ljung-Box est supérieure au quantile 0.95 de la loi du χ^2 correspondant.

Les statistiques, sont définies pour un ordre k ; correspondent à l'hypothèse nulle toutes les corrélations d'ordre inférieure à k sont nulles. Le test de Ljung-Box permet de tester l'hypothèse nulle qu'il n'y a pas d'autocorrelation jusqu'à l'ordre k . La statistique de test est

$$Q(k) = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{\tau_j^2}{T-j}$$

τ_j est la j -ème autocorrelation des résidus du modèle et T le nombre d'observations. Dans le cas où la P-value associée à cette statistique est inférieure à 5% alors on rejette l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrelation à l'ordre k . Sous l'hypothèse nulle, la Q-statistique est asymptotiquement distribuée comme un χ^2 à $k-p-q$ degré de liberté. où p et q sont les ordres d'un processus ARMA(p,q). si $Q(k) < \chi_{0.95}^2(k-p-q)$ alors on accepte l'hypothèse nulle de non autocorrelation des résidus à l'ordre k au seuil de 5%. De même, si la p-value $< 0,05$ alors on rejette H_0 au seuil de 5% et donc les résidus sont autocorrélés à l'ordre k .

A.2.2 Le test d'autocorrelation de Breusch-Godfrey (1988)

Ce test, fondé sur un test de Fisher de nullité des coefficients (F-Statistic) ou du multiplicateur de Lagrange (nR^2) permet de tester une autocorrelation d'un ordre supérieur à 1. L'idée générale de ce test réside dans la recherche d'une relation significative entre le résidu et ce même résidu décalé.

Soit le modèle general à erreur autocorrélées d'ordre p :

$$Y_t = a_1 X_{1,t} + \dots + a_k X_{k,t} + a_0 + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + V_t$$

Ce test est mené en trois étapes :

1. On estime par la méthode des moindres carrés ordinaires les paramètres du modèle ci-dessus et on calcule le résidu e_t , puisque les erreurs ε_t sont inconnues.
2. On estime par la méthode des MCO l'équation intermédiaire :

$$e = a_1 X_{1,t} + \dots + a_k X_{k,t} + a_0 + \rho_1 e_{t-1} + \dots + \rho_p e_{t-p} + V_t$$

3. On effectue des tests d'hypothèses sur l'équation intermédiaire. L'hypothèse H_0 d'absence d'autocorrelation des erreurs est :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$$

Si on rejette l'hypothèse nulle alors il existe au moins un des coefficients ρ_j qui soit différent de zéro, dans ce cas il existe un risque d'autocorrelation des erreurs à l'ordre p .

A.2.3 Correction de l'autocorrelation

Dans le cas où on est confronté à un problème d'autocorrelation des résidus, plusieurs méthodes permettent de corriger les coefficients afin de tenir compte des autocorrelation :

1. La première méthode consiste en l'application de la méthode des moindres carrés généralisés (MCG) dans le cas où l'autocorrelation est connue.
2. La seconde méthode est de consister à appliquer la méthode des moindres carrés quasi-généralisés (MCQG) lorsque le coefficient d'autocorrelation est inconnu. Ce coefficient peut être estimé par la méthode itérative de Cochrane-Orcutt ou celle du "balayage" de Hildreth-Lu.
3. Enfin, la dernière méthode consiste à utiliser la correction de Newey-West (1987) qui propose un estimateur consistant de la matrice des variances-covariances pour l'autocorrelation. On parle également de matrice des variances-covariances cohérents avec l'hétéroscédasticité et l'autocorrelation.

C'est cette dernière approche que nous allons retenir dans notre étude. En effet, Il s'agit d'une extension de l'estimateur convergent de la matrice des variances-covariances pour l'hétéroscédasticité de White (1980). Cette approche présente donc l'avantage de prendre en compte les problèmes d'autocorrelations et d'hétéroscédasticité des résidus.

A.2.4 La correction de Newey-West

Cette méthode peut être utilisée sans qu'on ait besoin de connaître la forme de l'autocorrelation des résidus. Elle consiste à remplacer la Matrice de variance-covariance des résidus par un estimateur compatible avec l'autocorrelation. De plus cet estimateur corrige l'hétéroscédasticité des résidus. Il est appelé l'estimateur de Newey-West. Il s'écrit :

$$\hat{\Sigma}_{NW} = \frac{T}{T-k} (X'X)^{-1} \hat{\Omega} (X'X)^{-1}$$

Où

$$\hat{\Omega} = \frac{T}{T-k} \left\{ \sum_{t=1}^T u_t^2 x_t x_t' + \sum_{v=1}^q \left(\left(1 - \frac{v}{1+q} \right) \sum_{t=v+1}^T (x_t u_t u_{t-v} x_{t-v}' + x_{t-v} u_{t-v} u_t x_t') \right) \right\}$$

Avec

- $X = ((x_t)_{1 \leq t \leq T})$, Les variables explicatives du modèle.
- $((u_t)_{1 \leq t \leq T})$ les résidus de l'estimation.
- q est le paramètre de troncature, il représente le degré d'autocorrelation des résidus retenu.

Newey et West suggère de retenir $q = ENT(4(T/100)^{2/9})$ (Où ENT est la partie entière).

A.3 Le test de White

Le test de White (1980) est un test d'homoscédasticité fondé sur l'existence d'une relation entre le carré du résidu et une ou plusieurs variables explicatives en niveau ou

au carré :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * x_t + \alpha_2 * z_t + \alpha_3 * x_t^2 + \alpha_4 * z_t^2 + \alpha_5 * x_t z_t + u_t$$

où ε_t sont les résidus du modèle, et x_t et z_t sont les variables explicatives du modèle. Si au moins un des coefficient de régression est significatif alors on rejette l'hypothèse nulle d'homoscédasticité en faveur de l'hypothèse alternative d'hétéroscédasticité. Pour effectuer ce test, on utilise la statistique LM $T * R^2$, où T est le nombre d'observations et R^2 est le coefficient de détermination de la régression précédente. Sous l'hypothèse nulle d'homoscédasticité, on a

$$T * R^2 \rightarrow \chi_{1-\alpha}^2(2p)$$

où p est le nombre de régresseurs excluant la constante.

si $T * R^2 < \chi_{0,95}^2(2p)$ alors l'hypothèse nulle d'homoscédasticité est acceptée au seuil de 5%. Aussi, si la p-value $< 0,05$ alors on rejette H0 au seuil de 5% et donc les résidus sont hétéroscédasticité.

Correction de l'hétéroscédasticité Plusieurs méthodes permettent de corriger les problèmes d'hétéroscédasticité : Si la variance du modèle est connue alors on utilise la méthode des moindres carrés pondérés, Dans le cas où la variance du modèle est inconnue alors on utilise la correction de White (1980) qui propose un estimateur convergent de la matrice des variances-covariances, indépendante de la forme de l'hétéroscédasticité.

Nous avons déjà vu plus haut que la correction de Newey-West était une extension de la correction de White.

A.4 Test de stabilité des coefficients estimés

Ces tests permettent de détecter l'instabilité structurelle des équations de la régression au cours du temps. L'idée général est d'étudier l'évolution au cours du temps de l'erreur de prévision normalisée. Cette succession d'erreur de prévision calculée en deux dates consécutives sont appelés : "résidus récursifs" . Ces tests permettent donc d'étudier la stabilité du modèle estimé au cours du temps. Il existe deux versions : le CUSUM fondé sur la somme cumulée des résidus récursifs et le CUSUM-Carré fondé sur la somme cumulée du carré des résidus récursifs. L'expression des résidus récursifs s'écrit :

$$w_t = \frac{y_t - x_t' b}{(1 + x_t'(X_t' X_t)^{-1} x_t)^{1/2}}$$

. Ces résidus sont obtenus pour $t = k + 1, \dots, T$, k est le nombre de variables explicatives. Le test de CUSUM (Brown, Durbin et Evans 1975) se fonde sur le cumul des résidus récursifs. La statistique de test s'écrit :

$$W_t = \sum_{r=k+1}^t w_r / s$$

$t=k+1, \dots, T$. s est l'écart-type des résidus de la regression.

La statistique de test du CUSUM-Carré est :

$$W_t = \left(\sum_{r=k+1}^t w_r^2 \right) / \left(\sum_{r=k+1}^T w_r^2 \right)$$

Le test du CUSUM permet de détecter l'instabilité globale des coefficients tandis que le CUSUM-Carré détecte les instabilités ponctuelles. Notons que ces tests sont des tests graphiques. Dans le cas où la courbe représentant les résidus récurrents sortira de la bande représentant le seuil d'erreur de 5% alors on notera une instabilité structurel du modèle dans le cadre du CUSUM et des instabilités ponctuelles dans le cadre du CUSUM-carré.

Annexe B

Compléments sur le pricing des dérivés d'inflation

B.1 Démembrement des obligations dans le modèle de Jarrow-Yildirim

La première étape est d'établir les courbes de taux forward. Le problème s'écrit :

$$\{f_r^{min}(0, t)\} \sum_{j=0}^m \left[\mathcal{B}_{TIPS,j}(0) - \frac{I(0)}{I(t_0, j)} \left(\sum_{t=1}^{T_j} C_j \exp\left\{-\sum_{i=0}^{t-1} f_r(0, i)\right\} + F_j \exp\left\{-\sum_{i=0}^{T_j} f_r(0, i)\right\} \right) \right]^2$$

où F_j est le principal de l'obligation inflation j , $t_{0,j}$ est la date d'émission de l'obligation inflation j et m le nombre d'obligation inflation des données. Jarrow et Yildirim supposent de plus les taux forwards constants sur les quatre intervalles 0-3 ans, 3 ans-5 ans, 5 ans-10 ans, et 10 ans-30 ans. Ce découpage est pratique pour les données utilisées par Jarrow et Yildirim, au cours du temps d'autres partitions peuvent se révéler plus utiles. Quatre taux forwards sont à estimer, l'estimation (moindres carrés non linéaires) nécessite au moins le même nombre d'obligations inflation. Les prix des Zéro-Coupon sont obtenus en réutilisant :

$$df_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left[\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \rho_{rI} \sigma_I(t) \right] dt + \sigma_r(t, T) d\tilde{W}_r(t)$$

et

$$\frac{P_r(t, T)}{P_r(t, T + \theta)} = \exp\left\{ \int_T^{T+\theta} f_r(t, s) ds \right\} = \exp\{f_r(t, s)\theta\}$$

où θ est la longueur de l'intervalle de temps sur lequel le taux forward est supposé constant (il y a donc quatre θ). Dans un second temps, la même procédure est appliquée pour déterminer les zéro-coupons à partir des obligations.

Une fois les taux forwards réels et nominaux estimés, les paramètres de volatilité sont estimés. Nous avons :

$$\sigma_r(t, T) = \sigma_r \exp\{-a_r(T - t)\}$$

et

$$\frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} - [r_r(t) + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s)ds]\Delta t \hookrightarrow N[0, (\int_t^T \sigma_r(t, s))^2 \Delta t]$$

$[r_r(t) + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s)ds]\Delta t$ est petit devant $(\int_t^T \sigma_r(t, s))\sqrt{\Delta t}$ pour Δt petit, et en prenant $\Delta t = \frac{1}{360}$, Jarrow et Yildirim le négligent. Nous avons :

$$var(\frac{\Delta P_r(t + \Delta, T)}{P_r(t, T)}) = \frac{\sigma_r^2(\exp\{-a_r(T - t)\} - 1)^2 \Delta}{a_r^2}$$

Les paramètres σ_r et a_r sont estimés par des "régressions non linéaires cross sections". Le même modèle de volatilité est employé pour les taux forwards nominaux, et ses paramètres σ_n et a_n sont estimés de la même façon.

Nous avons les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{TIPS}(t, T)}{P_{TIPS}(t, T)} &= r_n(t)dt + \sigma_I(t)dW_I(t) - \int_t^T \sigma_r(t, s)dsdW_r(t) \\ \frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} &= [r_r(t) - \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s)ds]dt - \int_t^T \sigma_r(t, s)dsdW_r(t) \end{aligned}$$

où σ_I est déterministe. Nous choisissons comme fonction de volatilité une fonction constante : $\forall t \sigma_I(t) = \sigma_I$. De même ρ_{rI} , ρ_{nI} et ρ_{rn} sont constants et estimés à partir de :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_I &= \left(\frac{1}{\Delta} var(\frac{\Delta I(t)}{I(t)}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\rho}_{rI} &= cor\left(\Delta_{r_r}(t), \frac{\Delta I(t)}{I(t)}\right) \\ \hat{\rho}_{nI} &= cor\left(\Delta_{r_n}(t), \frac{\Delta I(t)}{I(t)}\right) \\ \hat{\rho}_{rn} &= cor(\Delta_{r_r}(t), \Delta_{r_n}(t)) \end{aligned}$$

Pour ces estimations, Jarrow et Yildirim utilisent des données mensuelles, et $\Delta = \frac{1}{12}$.

B.2 Pricing des dérivés d'inflation dans le modèle de taux court de Hull & White

B.2.1 Le Year-on-year inflation swap

Nous allons chercher la valeur à tout instant t d'un contrat de payoff $\frac{I_{T_2}}{I_{T_1}}$ à T_2 , avec $t < T_1 < T_2$

$$v_{YoY}(t, T_1, T_2) = E[e^{-\int_t^{T_2} r(t')dt'} e^{\int_{T_1}^{T_2} i(t')dt'}]$$

En utilisant le fait que les intégrales de $r(t)$ et $i(t)$ suivent une loi normale dans le cadre du modèle de Hull-White

$$E[e^{-\int_t^{T_2} r(t')dt' + \int_{T_1}^{T_2} i(t')dt'}] = \frac{E[e^{-\int_t^{T_2} [i(t') - r(t')]dt'}]E[e^{-\int_t^{T_1} r(t')dt'}]}{E[e^{\int_t^{T_1} [i(t') - r(t')]dt'}]} e^{Covar[\int_t^{T_1} i, \int_{T_1}^{T_2} r - i]}$$

Au final on trouve que :

$$v_{Y \circ Y}(t, T_1, T_2) = P(t, T_1) \frac{P_I(t, T_2)}{P_I(t, T_1)} e^{C(t, T_1, T_2)}$$

Où

$$C(t, T_1, T_2) = Covar[\int_t^{T_1} i, \int_{T_1}^{T_2} (r - i)]$$

C corrige la corrélation entre les intégrales sur les différentes intervalles.

En utilisant les résultats sur les intégrales de $r(t)$ et de $i(t)$ on trouve que la correction se réécrit :

$$C(t, T_1, T_2) = -\frac{\sigma_I}{2} B^2(\alpha_I, T_1 - t) B(\alpha_I, T_2 - T_1) - \frac{\rho \sigma_I \sigma}{\alpha_I} B(\alpha_I, T_2 - T_1) [B(\alpha_I + \alpha, T_2 - t) - B(\alpha_I, T_1 - t)]$$

On constate que la covariance est negative, la correction de la convexité réduit donc la valeur du Year-on-year.

B.2.2 Options sur inflation

Dans le cadre du modèle de Hull-White, le prix de call sur inflation est :

$$v_{Icall}(t, T, X) = E[e^{-\int_t^T r(t')dt'} (\frac{I(t)}{I(T_0)} e^{\int_t^T i(t')dt'} - X)_+]]$$

Où $I(t)$ est la plus récente valeur publiée de l'indice avant t ,

et $X = (1 + K)^{T-T_0}$

la solution s'écrit :

$$v_{Icall} = \frac{P_I(t, T)}{I(T_0)} \Phi\left[\frac{\ln(\frac{P_I(t, T)}{I(T_0)P(t, T)X}) + \frac{V_I(T-t)}{2}}{\sqrt{V_I(T-t)}}\right] - X P(t, T) \Phi\left[\frac{\ln(\frac{P_I(t, T)}{I(T_0)P(t, T)X}) - \frac{V_I(T-t)}{2}}{\sqrt{V_I(T-t)}}\right]$$

Où la variance V_I et donnée par :

$$V_I(\tau) = Var[\int_t^{t+\tau} i(t)dt] = \frac{\sigma_I^2}{\alpha_I^2} [\tau - B(\alpha_I, \tau) - \frac{\alpha_I}{2} B(\alpha_I, \tau)^2]$$

Le résultat obtenu se rapproche de celui de Black :

$$v_{Icall}(t, T, X) = v_{Black-call}(\frac{\hat{I}(t, T)}{I(T_0)}, X, \sqrt{V_I(T-t)}, T)$$

Où $v_{Black-call}(f, X, \sigma\sqrt{T}, T)$ est le prix d'un call de strike X , de prix forward f , d'échéance T et de volatilité σ . D'après Black, cette fonction est :

$$v_{Black-call}(f, X, y, T) = P(t, T)[f\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)]$$

Où $d_{1,2} = [\ln(f/x) \pm y^2/2]/y$

On en déduit donc le prix du Put sur inflation :

$$v_{IPut}(t, T, X) = v_{Black-Put}(\frac{\hat{I}(t, T)}{I(T_0)}, X, \sqrt{V_I(T-t)}, T)$$

Où :

$$v_{Black-Put}(f, X, y, T) = P(t, T)[-f\Phi(-d_1) + X\Phi(-d_2)]$$

B.2.3 Caps/Floors

Les caps/Floors sont une combinaison de Caplets/Floorlets.

$$\begin{aligned} v_{Icaplet} &= E[e^{-\int_t^{T_2} r(t')dt'} (\frac{I(T_2)}{I(T_1)} - 1 - K_\tau)_+] \\ &= E[e^{-\int_t^{T_2} r(t')dt'} (e^{\int_{T_1}^{T_2} i(t')dt'} - (1 + K_\tau))_+] \end{aligned}$$

on aboutit à

$$v_{Icaplet} = P(t, T_2) [\frac{\hat{I}(t, T_2)e^{C(t, T_1, T_2)}}{\hat{I}(t, T_1)} \Phi(d_+) - (1 + K_\tau)\Phi(d_-)]$$

dans lequel on a posé :

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{V_I(t, T_1, T_2)}} [\ln(\frac{\hat{I}(t, T_2)e^{C(t, T_1, T_2)}}{\hat{I}(t, T_1)}) \pm \frac{V_I(t, T_1, T_2)}{2}]$$

La variance conditionnelle V_I est définie par : $V_I(t, T_1, T_2) = Var[\int_{T_1}^{T_2} i(t')dt' | i(t)]$

$$\begin{aligned} V_I(t, T_1, T_2) &= \frac{\sigma_I^2}{\alpha_I^2} [T_2 - T_1 - B(\alpha_I, T_2 - T_1) - \frac{\alpha_I}{2} B(\alpha_I, T_2 - T_1)^2] \\ &+ \sigma_I^2 B(2\alpha_I, T_2 - T_1) B(\alpha_I, T_2 - T_1)^2 \end{aligned}$$

On constate aussi que le prix du Caplet (resp du Floorlet) peut se mettre sous la forme du prix du call (resp Put) dans le modèle de Black.

Bibliographie

- [1] **Barclays capital, research**, Inflation derivatives a user's guide. Barclays capital, research. january 2005.
- [2] **N. Belgrade. & E. Benhamou**, Smart modeling of the inflation market taking into account the seasonality, CDC IXIS Capital Market Reseach, June 2004.
- [3] **N. Belgrade E. Benhamou, E. Koehler**, A market model for inflation. Cermsem working paper 2004.50 and SSRN Working paper, 2004.
- [4] **N. Belgrade, E. Benhamou Y. khlif.**, Valuation of inflation swap volatility under a market model and pricing of real yield options, Cdc IXIS capital market research & development, October 2004.
- [5] **E. Benhamou**, Pricing convexity adjustment with wiener chaos, DC IXIS Capital Market Reseach, april 2000.
- [6] **R. Bourbonnais & M. Terraza**, Analyse des séries temporelles : applications à l'economie et à la gestion, Dunod, 2004.
- [7] **M. Brière**, Formation des taux d'intérêt anomalies et croyance collectives, Economica, 2005.
- [8] **D. Brigo & F. Mercurio**, Interest rate Models-Theory and Practice with Smile, Springer, 2006.
- [9] **X. Burtschell, J. Gregory and J.-P. Laurent**, A comparative analysis of CDO Pricing Models, December 2007.
- [10] **D. Cadoux & J-M. Loizeau**, Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie, Institut des Actuaire, 2006.
- [11] **G. Causer**, Calibration et tests dans un modèle de taux d'intérêt. Memoire d'actuariat, ENSAE Promotion 2006.
- [12] **U. Cherubini & G. Della Lunga**, Structured finance : the object oriented approach, Wiley Finance, 2007.
- [13] **U. Cherubini**, Copula methods in finance, Wiley finance, 2004.
- [14] **I. Christensen, F. Dion, and C. Reid**, Real return bonds, inflation expectations, and the break-even inflation rate bank of Canada, working paper 2004-43.
- [15] **Merrill Lynch**, Collateralized Foreign EXchange Obligation ("CFXO"), Managed by Crédit Agricole Asset Management, Stricly private and confidential, April 2007.

-
- [16] **M. Dodgson and D. Kainth**, Inflation-Linked Derivatives. Group Market Risk Royal, Bank of Scotland Group 280 Bishopsgate, September 2006.
 - [17] **J-D. Fermanian**, Goodness-of-fit tests for copulas, CREST, September 2004.
 - [18] **Finance grandes ecoles**, n°11 ,Pages 46-47, février 2008.
 - [19] **C. Gouriéroux**, Econometrie de la finance : analyses historiques, Economica, 1997.
 - [20] **C. Gouriéroux & A. Tiomo**, risque de crédit : une approche avancée, Economica, 2007.
 - [21] **C. C. Heyde**, Quasi-likelihood and its application : a general approach to optimal parameter estimation, Springer, 1997.
 - [22] **J. Hull, M. Predescu, and A. White**, The valuation of correlation-dependent credit derivatives using a structural model. Working paper, University of Toronto, November 2006.
 - [23] **C. HURLIN et S. TOKPAVI**, Un test de validité de la Value at Risk, Presses de Sciences Po, Revue économique 2007/3 - Volume 58, 2007.
 - [24] **R. Jarrow & Y. Yildirim**, Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives using an HJM Model, August 31, 2000 and revised February 19, 2002.
 - [25] **J. Kerkhof**, Inflation derivatives explained : markets, products, and pricing. Fixed income quantitative research ,Lehman brothers, July 2005.
 - [26] **S. Lardic & V. Mignon**, Econometrie des séries temporelles et macroeconometriques et financieres, Economica 2002.
 - [27] **J. London**, Modeling derivatives applications in matlab, C++ and Excel, Financial Times Press, 2007.
 - [28] **L. Martellini et P. Priaulet**, Produits de taux d'intérêt, methodes dynamiques d'évaluation et de couverture, Economica, 2004
 - [29] **Roger B. Nelsen**, An introduction to copulas, 2nd ed., Springer, 2006.
 - [30] **Christophe Nicklaus**, Risque de crédit et dérivés de crédit, cours Ensaé "Produits dérivés de crédit" mai 2007.
 - [31] **F. Planchet & P. Therond**, Approche des logiciels DFA, Commission dommages de l'institut des actuaires, février 2004.
 - [32] **O. PRATO**, Les dérivés de crédit, nouvelle source d'instabilité financière? Secrétariat général de la Commission bancaire, Novembre 2002.
 - [33] **J-F. Quessy**, Méthodologie et application des copules : tests d'adéquation, tests d'indépendance, et bornes pour la valeur-à-risque, Thèse PH.D, Faculté des sciences et de génie, Université Laval Québec, mai 2005.
 - [34] **B.L.S. Prakasa Rao**, Statistical inference for diffusion type processes, Arnold (Londres), 1999.
 - [35] **J-P. Redouin**, Intervention Paris Europlace, Stockholm, 29 mars 2007.

- [36] **S. Ungari**, Marché de l'inflation : manuel, Société Générale, Cross Asset Research, Quantitative Strategy, janvier 2008.
- [37] **Zhen Wei**, Valuation of Loan CDS under intensity based model, working paper, 2007.