



Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le 27 Septembre 2010

Par : **DARNE Anthony**

Titre: Rempoter les appels d'offres de retraite supplémentaire grâce au Liability Driven Investment.

Confidentialité : Non

Membre du jury de l'Institut des Actuaire

Mme Brigitte ECARY

Entreprise :

BNP Paribas Assurance

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Jean-Paul LAURENT

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Didier RULLIERE

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Cédric CHAVOT

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels** (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Cédric CHAVOT

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

Anthony DARNE

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

SOMMAIRE

Résumé

Abstract

Remerciements

Introduction

Partie 1.	Techniques de gestion financière des fonds de pension	7
1.1.	<i>Panorama de l'épargne retraite et difficultés de gestion des fonds de pension</i>	7
1.1.1.	L'univers de la retraite en profonde transformation.....	7
1.1.2.	Le marché de l'épargne retraite en France	7
1.1.3.	Disparition des institutions de retraite supplémentaire et réponses aux appels d'offres.	8
1.1.4.	Une gestion d'actifs sous contraintes réglementaires strictes	9
1.1.5.	Plusieurs acteurs et une répartition difficile des rôles et des compétences	10
1.2.	<i>Analyse des risques inhérents à la gestion des fonds de pension :</i>	10
1.2.1.	Les risques liés au passif du bilan	10
1.2.2.	Les risques liés à l'actif du bilan.....	11
1.2.3.	Les risques liés à la gestion coordonnée de l'actif et du passif	13
1.3.	<i>Les techniques d'adossement actif passif fondamentales et leurs limites</i>	14
1.3.1.	Le portefeuille efficient de Markowitz Sharpe et Tint dans un cadre ALM	14
1.3.2.	Principe du <i>Cash Flow Matching</i>	17
1.3.3.	Principe d'immunisation en sensibilité et en convexité aux risques de taux et d'inflation.....	20
Partie 2.	Développement théorique d'une solution ALM : le Liability Driven Investment (LDI)	22
2.1.	<i>Fondement théorique du LDI et théorème de séparation</i>	22
2.1.1.	Le modèle stochastique de Merton Martellini Milhau [2006]	22
2.1.2.	Rapprochement avec la méthode CPPI en assurance de portefeuille.	27
2.1.3.	Raffinement et robustesse théorique du modèle stochastique [2008]	28
2.2.	<i>Analyse quantitative des risques de taux et d'inflation pour le LDI</i>	31
2.2.1.	Evaluation du risque de taux pour les obligations nominales et les swaps	31
2.2.2.	Les produits indexés sur l'inflation et technique de titrisation	40
2.2.3.	Evaluation des risques de taux et d'inflation des titres indexés sur l'inflation	46
2.3.	<i>Travail préliminaire : retraitement des passifs et solution LDI retenue</i>	54
2.3.1.	Etude de cas et retraitement des passifs	54
2.3.2.	Courbe des taux zéro-coupon et valorisation « marked to market » des passifs	56
2.3.3.	Notre solution LDI retenue en pratique	59
Partie 3.	Construction pratique du LDI et analyse comparative sur deux échéanciers de passif	60
3.1.	<i>Notre construction du Liability Hedging Portfolio (LHP) indiciel</i>	60
3.1.1.	Détermination de l'univers de risque et choix des classes d'actifs	60
3.1.2.	Procédé d'adossement actif passif	62
3.1.3.	Amélioration de l'adossement par l'intégration de swaps nominaux et inflation	69
3.1.4.	La puissance du LDI : construction de frontières efficientes Tracking Error- cash libéré.....	72
3.2.	<i>Notre construction du Performance Seeking Portfolio (PSP) indiciel</i>	75
3.2.1.	PSP recommandé par la théorie financière et critiques.....	75
3.2.2.	Notre construction pratique du portefeuille PSP.....	77
3.3.	<i>Le LDI par l'exemple : résultats finaux obtenus pour deux échéanciers de passif</i>	87
3.3.1.	Résultat obtenu pour un échéancier à duration moyenne (corporate B).....	87
3.3.2.	Résultat obtenu pour un échéancier à duration longue (corporate A)	88
3.3.3.	Analyse comparative du LDI avec les méthodes d'adossement traditionnelles améliorées.....	88
3.4.	<i>Robustesse du LDI en temps de crise financière [Août 2007 – Sept. 2009]</i>	92
3.4.1.	Du LHP indiciel au LHP de fonds	92
3.4.2.	L'univers des OPCVM et dégradation de la Tracking Error d'adossement.....	92
3.4.3.	Intérêt des trackers (de première génération) dans une gestion ALM indicielle.....	94
Conclusion		97
Bibliographie		98

Résumé

Dans le cadre de l'application de la loi Fillon de 2003, ce mémoire aide les assureurs à remporter les appels d'offres relatifs à l'externalisation des engagements de retraite supplémentaire en leur proposant des stratégies d'investissement ALM innovantes et à haut rendement. Plus généralement, il donne un panorama des différentes techniques de gestion actif passif applicables aux fonds de pension.

Une bonne méthode d'adossement exige une analyse fine des risques techniques et financiers encourus par la caisse de retraite et une coopération assidue entre les équipes traitant l'actif et celles valorisant le passif.

Les récentes contraintes réglementaires et comptables qui sont imposées aux fonds de pension (projet Solvabilité II et normes IFRS) poussent la recherche actuarielle à améliorer les techniques ALM existantes, comme les méthodes d'adossement en flux ou en duration, et à en développer de nouvelles comme le *Liability Driven Investment* (LDI).

Le LDI apporte une vision nouvelle sur la technique ALM car il met le passif au cœur de son objectif de gestion, utilise des produits financiers très variés lors du processus d'adossement (titres indexés sur l'inflation, swaps etc.) et génère un surplus de performance par la création d'un portefeuille diversifié décorrélé des engagements.

L'objectif de mon mémoire est de montrer l'apport du LDI en matière de qualité de couverture des risques financiers et de potentiel de performance par rapport aux méthodes d'adossement traditionnelles. Mon étude jettera également un regard critique sur cette solution indiciaire en testant sa robustesse en période de crise financière mondiale (août 2007 - septembre 2009).

Mots clés : Solutions structurées en ALM, LDI, Assurance de portefeuille, CPPI, Trésorerie, Gestion des risques de taux et d'inflation, Produits cash et swaps indexés sur l'inflation, Benchmark de passif, Mesures d'adossement actif passif, Allocation d'actifs, Frontières efficientes, Gestion indiciaire et trackers.

Abstract

On the occasion of the application of the Fillon law of 2003, this study helps insurers to win calls for tenders concerning outsourcing of pension plan commitments by putting forward them groundbreaking and efficient ALM strategies. More generally, it gives a panorama of different ALM solutions applicable to pension funds.

A good ALM solution requires a precise analysis of actuarial and financial risks threatening pension funds and a constant cooperation between teams working on assets and those pricing liabilities.

The recent statutory and accounting constraints (Solvability II and IFRS) force actuarial research to improve existing matching methods (like cash flow matching and duration matching) and develop other ones like the Liability Driven Investment (LDI).

Liability Driven Investing brings a different angle of view compared to other matching techniques because liabilities is at the heart of the method, a lot of financial products are used for the hedging (inflation linked bonds, swaps etc.) and a performance surplus can be generated relative to liabilities by creating a non correlated performance seeking portfolio.

The objective of my study is to throw light on the contribution of the LDI to hedge financial risks on the one hand and the potential of performance on the other hand compared to traditional matching methods. We will study the LDI under a critical angle by testing its robustness during the current worldwide financial crisis (August 2007 – September 2009)

Key words: ALM structured solutions, LDI, Portfolio insurance, CPPI, Cash, Interest rate and inflation risks management, inflation indexed cash and swap products, Liability benchmark, ALM Tracking Errors, Asset allocations, Efficient frontiers, Indexed management and trackers.

Remerciements

Je tiens à remercier mon maître d'apprentissage, M. Cédric CHAVOT, actuaire et product manager, pour son professionnalisme, sa bienveillance et son suivi tout au long de mon année passée dans le service Ingénierie Financière et Nouveaux Produits de BNP Paribas Assurance. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur un sujet financier aussi varié que passionnant.

Je remercie Mme Estelle ADAM, actuaire et responsable du service Ingénierie Financière et Nouveaux Produits. Elle m'a prodigué de précieux conseils sur les techniques de gestion financière des fonds de retraite.

Je remercie également tous les collaborateurs avec lesquels j'ai pu travailler, notamment M. Serge WERLE pour sa grande implication ainsi que M. Julien BURGER pour m'avoir fait partager ses connaissances pointues en assurance vie et en finance.

J'adresse mes sincères amitiés au mathématicien Luc VALETTE. Il m'a toujours soutenu dans mes projets et porte un grand intérêt aux travaux actuariels.

Je dédie mon mémoire à mes parents qui m'ont toujours soutenu et aidé durant mes années d'études.

« L'économie, c'est des phénomènes de partage, de rapports de force, d'équilibre »

Bernard Maris

Introduction :

La gestion actif passif (ou ALM) est un outil en plein développement dans les banques, les compagnies d'assurance et les caisses de retraite. Les modélisations ALM permettent de diriger un organisme financier en prenant des décisions coordonnées sur ses actifs et ses passifs. Elles comprennent la formulation, le développement, le pilotage et la révision des stratégies d'adossment dans le but d'honorer des objectifs financiers pour un budget de risque donné. Une gestion ALM efficace exige une attention spécifique et une excellente connaissance des risques encourus de part et d'autre du bilan.

Nous étudierons exclusivement dans ce mémoire les techniques de gestion financière actif passif applicables aux fonds de pension. Cette industrie est très demandeuse de ce type d'expertise car elle subit aujourd'hui de profondes mutations du fait des nouvelles contraintes réglementaires (la directive Solvabilité II), comptables (les normes IFRS) et juridique (la loi Fillon relative à la disparition des institutions de retraite supplémentaire) qui influencent ses stratégies d'investissement.

Au sein des établissements financiers, les études portant sur les risques à l'actif et au passif des fonds de pension s'effectuent habituellement de manière séparée. Un suivi ALM rigoureux nécessite néanmoins de réunir les deux parties du bilan pour éviter une grande probabilité de faillite de la caisse de retraite. En effet, une gestion précise des évolutions conjointes de l'actif et du passif devient nécessaire (et obligatoire) aux vues de la propagation des produits de couverture, du renforcement des contraintes réglementaires et des difficultés structurelles que connaissent les régimes de retraite.

Le principal problème revient à construire l'allocation d'actifs qui réduit significativement la probabilité de défaut d'une caisse de retraite, par une gestion stricte de la totalité de ses risques. Plusieurs modèles stochastiques ont été proposés pour décrire les déformations de l'actif et du passif au cours du temps : les modèles de Boulier [1995] et Cairns [2000] reposent principalement sur l'optimisation des cotisations et sur la part allouée en actifs risqués alors que le modèle de Blake, Dowd et Cairns [2004] utilise des méthodologies plus sophistiquées pour une modélisation plus détaillée des engagements de passif. Dans le même esprit, nous présenterons et développerons dans ce mémoire le modèle de Martellini et Amenc [2007] couramment appelé LDI (*Liability Driven Investment*).

Les techniques LDI ont connu ces dernières années un développement considérable dans le monde car ce sont des méthodes innovantes répondant à une demande forte des fonds de pension en matière d'expertise financière ALM. Ces techniques à haut rendement sont-elles pour autant plus robustes en matière de couverture des engagements que les techniques précédentes?

Partie 1. Techniques de gestion financière des fonds de pension

1.1. Panorama de l'épargne retraite et difficultés de gestion des fonds de pension

1.1.1. L'univers de la retraite en profonde transformation

Les changements démographiques en cours mettent à mal le premier pilier du système de retraite français : les retraites gérées par répartition. Ces mutations vont être la source de difficultés inéluctables pour ces régimes dans la majorité des pays industrialisés et dans plusieurs pays émergents. Le vieillissement de la population a des conséquences sur les comportements d'épargne, la croissance économique, les déficits publics, l'investissement et sur les équilibres courants. Les projections à long terme sur la santé financière des régimes de retraite se veulent alarmistes et montrent combien il est nécessaire de prendre rapidement des mesures de sauvegarde.

De nombreuses réformes sont menées dans plusieurs pays. Elles visent à sauvegarder la retraite par répartition, en allongeant l'âge légal de départ à la retraite et en corrigeant les niveaux de prestations et de cotisations. Le développement des régimes par capitalisation individuels et collectifs est encouragé par des dispositions fiscales avantageuses, dans un cadre réglementaire plus strict.

1.1.2. Le marché de l'épargne retraite en France

Il existe deux sortes de caisses de retraite par capitalisation : les régimes professionnels collectifs par entreprise et les plans d'épargne retraite individuels.

Le plan d'épargne collectif est mis en place par certaines entreprises pour leurs salariés. Il génère des économies d'échelle sur les coûts de commercialisation et de gestion. Le risque de longévité est réparti sur l'ensemble des employés quelque soit leur âge.

Le plan d'épargne individuel permet à son bénéficiaire de se constituer un capital retraite supplémentaire. Les risques ne sont pas mutualisés entre épargnants. Ce plan est plus malléable et encourage la mobilité des salariés mais son coût de fonctionnement est conséquent.

Il existe également deux types d'engagements proposés par l'employeur : les régimes à cotisations définies et les régimes à prestations définies.

Dans un fonds de pension à cotisations définies, l'employeur verse des cotisations à un organisme extérieur. Il ne s'engage pas sur les prestations à payer aux employés. Les montants déboursés par l'entreprise (et accessoirement par l'employé) sont versés dans des comptes individuels. Les prestations seront perçues sous forme de rente viagère au moment du départ à la retraite. Le risque de placement des prestations est supporté par les employés. Nous verrons que les solutions LDI sont bien adaptées pour ce type de fonds de pension, car ce sont des techniques risquées pour les salariés qui proposent une performance plus ou moins intéressante suivant le niveau de risque que ces derniers sont prêts à accepter.

Dans un fonds de pension à prestations définies, l'employeur s'engage à procurer aux employés un niveau de pension décidé en amont. L'employeur étant tenu par une obligation de résultat, il privilégie très souvent des stratégies d'investissement sans risque du type capitalisation des cotisations dans le fonds général où un taux minimum de rendement est garanti sur l'année par l'assureur. Lorsque la gestion de ce régime est externalisée, la société approvisionne le fonds collectif mais perd la propriété et la libre disposition des montants versés. En contrepartie, elle bénéficie d'importants avantages fiscaux. Lorsque la gestion de ce régime est interne, la société s'occupe elle-même du financement et du paiement des prestations. Elle verse alors les prestations aux salariés partant à la retraite.

1.1.3. Disparition des institutions de retraite supplémentaire et réponses aux appels d'offres.

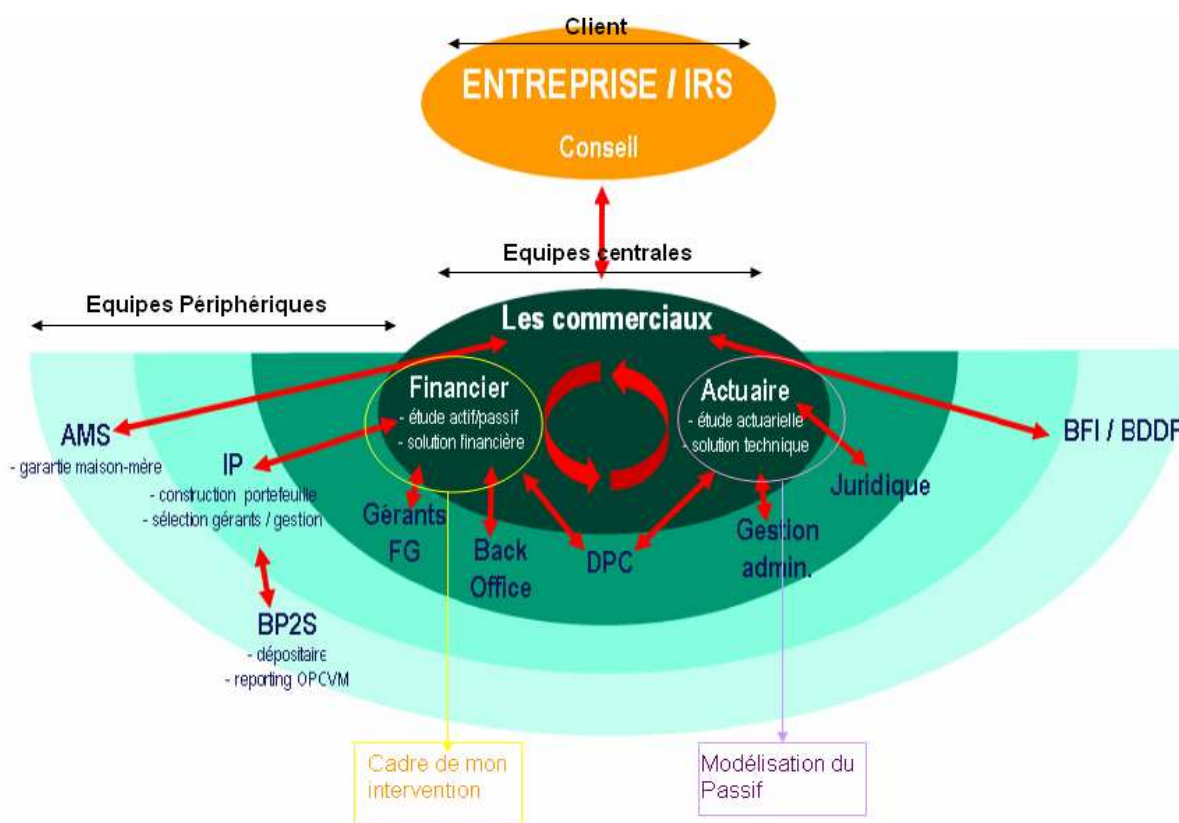
Une institution de retraite supplémentaire (IRS) était une entité créée par une société pour porter son engagement de retraite supplémentaire, mais elle n'avait pas l'obligation de le couvrir. Ainsi, pour protéger la retraite supplémentaire des salariés, la loi Fillon de 2003 a consigné la disparition des IRS déjà existants, pour la fin de l'année 2008. **Ces engagements de retraite devront désormais être transmis aux compagnies d'assurance ou aux institutions de prévoyance. Les fonds de pension qui se créeront dans l'avenir seront soumis de fait à cette directive.**

La Fédération Française des Sociétés d'Assurance (FFSA) a chiffré le potentiel de transfert des engagements des IRS entre 2,5 et 3,2 milliards d'euros, soit une croissance entre 1,9% et 2,3% pour le marché des assurances collectives. BNP Paribas saisit cette opportunité réglementaire pour augmenter sa part de collecte qui avoisine aujourd'hui les 10%.

Aujourd'hui, BNP Paribas est sollicitée pour 2,6 milliards d'euros au titre des engagements des IRS, et les mandats qu'elle a remportés s'élèvent à 440 millions d'euros. Notre banque a décidé de développer sa palette de solutions ALM pour répondre aux mieux aux exigences de ses clients en matière de performance et de gestion des risques. Elle gagnerait ainsi un nombre plus important d'appels d'offres. C'est dans ce cadre que s'inscrit mon intervention : développer une solution ALM nouvelle prénommée *Liability Driven Investment* (LDI), sensée couvrir efficacement les risques financiers et générer de la sur-performance pour une meilleure revalorisation des rentes.

Pour répondre efficacement aux appels d'offres, une task-force regroupant de nombreuses équipes du groupe BNP Paribas (actuariat, finance, juridique, commerciaux, gestion etc.) se constitue :

Graphique 1. (Organisation de la task-force pour une réponse efficace aux appels d'offres)



La réponse aux appels d'offres relatifs à l'externalisation des IRS est une activité nécessitant une grande expertise actuarielle et financière. De plus, une grande transversalité entre les différents départements est nécessaire pour répondre efficacement à nos clients.

1.1.4. Une gestion d'actifs sous contraintes réglementaires strictes

La contrainte réglementaire est un élément capital pour les investisseurs institutionnels et les gestionnaires d'actifs sous mandat. L'application de la directive Solvabilité II oblige les compagnies d'assurance à sécuriser leurs investissements en actions en augmentant leurs fonds propres de manière importante, afin de lutter contre la forte volatilité à court terme de ses actifs. Dans la même optique, Solvabilité II impose de renforcer encore plus significativement les fonds propres des institutionnels souhaitant investir dans des hedge funds. La gestion du risque de volatilité à court terme n'est pourtant pas le principal problème pour les assureurs car ces derniers s'inscrivent dans une démarche de long terme. Néanmoins, elle les contraint fortement sur leurs possibilités en matière d'allocations d'actifs.

La réglementation favorise l'investissement dans des produits obligataires à duration très longue. En investissant principalement dans des produits de taux, les assureurs se constituent des portefeuilles à rendement trop faible pour assurer les revalorisations des rentes de l'inflation. Ainsi, les fonds de pension doivent trouver des sources de performance et des méthodes ALM nouvelles, comme les solutions LDI.

1.1.5. Plusieurs acteurs et une répartition difficile des rôles et des compétences

Au vu du développement important de l'épargne retraite ces dernières années, de nombreux acteurs financiers ont souhaité se positionner sur ce marché, comme les sociétés de gestion d'actifs et les banques d'investissement. Ces derniers proposent des solutions ALM très financiarisées, basées sur des techniques de structuration sophistiquées. L'expertise LDI fait partie de ce type de solutions.

Les investisseurs institutionnels (assureurs, mutuelles etc.) restent dubitatifs quant aux solutions ALM proposées par ces établissements financiers. Ils avancent comme argument que leur métier de gestionnaire actif passif est très différent de celui de gestionnaire d'actifs, car eux seuls connaissent pleinement les engagements de retraite (leur travail consistant à bien modéliser les passifs à l'aide d'outils probabilistes), le cadre réglementaire (Solvabilité II etc.) et comptable (normes IFRS). Les institutionnels remplissent une fonction d'allocataire mais pas de gestionnaire. Ainsi, confier une sorte de manda de gestion actif passif aux asset managers ne leur semble pas opportun. L'histoire leur a donné raison car les gestionnaires d'actifs ont compris trop tardivement que le seul benchmark valable était le passif et qu'une législation lourde en matière de gestion financière s'appliquait aux fonds de pension.

1.2. Analyse des risques inhérents à la gestion des fonds de pension :

1.2.1. Les risques liés au passif du bilan

Les risques inhérents au passif sont de deux ordres : les risques techniques d'une part, et les risques purement financiers d'autre part.

1.2.1.1. Les risques techniques

L'évolution d'un passif est modélisée en effectuant des projections basées sur de nombreuses hypothèses actuarielles :

- ✓ **le départ à la retraite des salariés** : il est indispensable que le fonds de pension fournisse des statistiques relatives aux départs à la retraite avec l'option de rente. Nous pouvons faire l'hypothèse que tous les salariés deviennent rentiers ou disposent du capital à l'âge habituel de départ à la retraite. Il convient également de considérer les départs en retraite anticipée en cas de réorganisation de l'entreprise par exemple.
- ✓ **les démissions** : il est important de déterminer la loi probabiliste de ces départs en fonction de l'âge, de la catégorie socio-professionnelle et de la durée passée au sein de l'entreprise.
- ✓ **les décès et l'invalidité** : comme le fonds de pension est soumis à des engagements de très long terme, il est nécessaire d'effectuer des ajustements sur l'invalidité et la mortalité pour tenir compte de l'évolution de la longévité au cours de la durée d'exposition du fonds.
- ✓ **la progression des rémunérations et des rentes** : la prise en compte de l'évolution des salaires des actifs et la réévaluation des rentes en conséquence, sont des hypothèses importantes à modéliser.

La valeur exacte des engagements ne peut donc être calculée pour les raisons suivantes :

- ✓ l'évaluation d'un passif s'appuie sur des variables et des hypothèses stochastiques comme le taux de mortalité, le roulement des effectifs, la progression des rémunérations, les taux d'intérêt et l'inflation.
- ✓ aucun de ces risques n'est transférable (ie. hedgeable) sur le marché financier. Les assureurs ont pourtant tenté de transmettre le risque de longévité mais ce dernier n'a pu être légué convenablement car les marchés des « mortality bonds » et des « survivor swap », réservés à des initiés, ne sont pas suffisamment profonds. De plus, la crise financière actuelle a provoqué un sévère coup d'arrêt à toutes formes de titrisation. Une titrisation correcte de ces risques aurait contraint les assureurs et les analystes à se prononcer sur leur valeur de marché.
- ✓ l'échéancier des engagements se déforme au cours du temps, suivant les entrées des nouveaux épargnants et les sorties provoquées par les décès et les départs à la retraite. Nous devons par conséquent procéder à des réévaluations régulières des flux d'engagement futurs.

1.2.1.2. Les risques financiers

Nous énumérons les principaux risques financiers que les actuaires appréhendent pour la modélisation des engagements : les risques de taux et d'inflation.

- ✓ **le risque de taux** : les changements réglementaires ont rendu obligatoire la valorisation en valeur de marché des actifs et des passifs des fonds de pension. Nous dirons que les passifs sont valorisés en « marked to market » ou en « fair value ». Ainsi, quand les taux baissent, les passifs augmentent et vice et versa.
- ✓ **le risque inflationniste** : Les fonds de pension font face à des engagements de long terme et l'inflation s'avère être au cours des décennies l'un des risques fondamentaux pour cette industrie. Un fonds de pension pourra faire appel à des produits indexés, comme les obligations indexées sur l'inflation et les swaps liés à l'inflation pour se protéger contre ce risque.

Les risques financiers seront très largement étudiés dans les solutions ALM financiarisées que nous développerons dans ce mémoire.

Conclusion. (La compréhension du passif : une étape essentielle)

L'analyse et la compréhension des risques de passif constituent une étape fondamentale dans la construction d'une approche ALM pour les fonds de pension. Une allocation d'actifs sous contraintes d'engagement, couvrant très efficacement les risques financiers mais assise sur une modélisation incomplète du passif, n'a plus grande valeur dans une optique ALM.

1.2.2. Les risques liés à l'actif du bilan

Une multitude de risques plus ou moins graves affectent l'allocation d'actifs du fonds de pension.

1.2.2.1. Les principaux risques auxquels sont exposés les fonds de pension :

- ✓ **le risque de variation des taux** : lors d'une hausse des taux, le risque de dépréciation des obligations apparaît quand la caisse de retraite est contrainte de vendre ces actifs avant leur terme.

Prenons par exemple le cas d'une hausse du taux actuariel, survenant juste après l'achat d'une obligation, suivie d'une stabilité de celui-ci jusqu'à l'échéance. Mathématiquement, en notant r' tel que $r' \geq r$ le nouveau taux d'intérêt et C_i la valeur du $i^{\text{ème}}$ flux généré, nous obtenons l'inégalité entre l'ancien et le nouveau prix P de l'obligation :

$$P(r') = \frac{C_1}{(1+r')^1} + \frac{C_2}{(1+r')^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r')^T} \leq P(r)$$

Nous présenterons par la suite des outils d'analyse permettant de quantifier le risque de taux comme la sensibilité et la convexité.

- ✓ **le risque de réinvestissement des coupons** : il se présente lorsque le fonds de pension vend des obligations avant leur échéance. En cas de baisse des taux, nous ne pouvons plus réinvestir les coupons au taux actuariel initial.

Prenons par exemple le cas d'une baisse du taux actuariel survenant juste après l'achat d'une obligation, suivie d'une stabilité de celui-ci jusqu'à l'échéance. Mathématiquement, en notant C_i la valeur du $i^{\text{ème}}$ coupon perçu et V_f la valeur finale du réinvestissement des coupons à un taux actuariel r' tel que $r' \leq r$, nous avons :

$$V_f(r') = C_1(1+r')^9 + C_2(1+r')^8 + \dots + C_{10}(1+r')^0 + N \leq V_f(r)$$

Nous remarquons que les deux risques précédents produisent des effets opposés sur une obligation lors d'un mouvement des taux. Pour que l'immunisation du titre soit valable dans le cas d'une hausse des taux par exemple, il faut que la plus-value réalisée sur les coupons reçus et capitalisés à un taux supérieur avant une certaine date à définir compense la moins-value enregistrée sur les flux actualisés postérieurs à cette date. Cette date sera la **duration**, sous l'hypothèse d'une variation du taux avant la date de paiement du premier coupon et d'une stabilité de celui-ci pendant la période comprise entre la date de son mouvement et la duration.

- ✓ **le risque inflationniste sur les obligations nominales** : les obligations nominales ont subi directement le risque inflationniste après les deux chocs pétroliers de 1974 et 1979. Un épargnant qui aurait acheté des obligations d'échéance 10 ans avant le premier choc pour un investissement équivalent à 100 litres d'essence, n'aurait récupéré que moins de 40 litres dix ans plus tard : l'inflation a rongé le pouvoir d'achat plus rapidement que les taux d'intérêts ne se sont composés et le rendement réel, inflation déduite, a été négatif. C'est donc un risque très sérieux pour les institutionnels ayant des engagements de long terme revalorisés de l'inflation.
- ✓ **le risque de liquidité sur les titres détenus** : nous disons que le marché obligataire est liquide lorsque la vente d'une importante quantité d'obligations n'a pas d'influence (ou très peu) sur les variations de cours. Dans ce cadre, nous pouvons vendre nos titres obligataires dans de bonnes conditions. Toutefois, il arrive que le marché ne soit pas suffisamment liquide pour certaines lignes d'obligations. Aux vues des importants placements qu'ils effectuent sur le marché obligataire, les investisseurs institutionnels privilégient des obligations liquides pour ne pas être trop exposés à ce type de risque.
- ✓ **le risque des investissements actions et immobilier** : lorsque les marchés d'actions baissent fortement, les rendements des titres deviennent insuffisants et les répercussions financières négatives sur le fonds de pension sont importantes : ce dernier doit doter les provisions pour dépréciation durable et pour risque d'exigibilité des engagements techniques. D'autres

provisions peuvent également intervenir comme celle pour aléa financier et la provision globale de gestion.

1.2.2.2. Les risques secondaires

Ce sont des risques dont les fonds de pension peuvent se prémunir aisément :

- ✓ **le risque de signature** (appelé aussi *risque de défaut*) : c'est le risque que l'émetteur ne rembourse pas les coupons et le nominal à la date prévue par le contrat d'émission. L'émetteur peut se trouver dans l'incapacité d'honorer ses engagements ou bien refuser volontairement de remplir ses obligations. La répudiation des dettes tsaristes par Lénine en 1918 n'était pas motivée principalement par l'incapacité de payer mais par une volonté politique de faire « table rase du passé » et de rompre avec « l'ordre bourgeois ». Les investisseurs exigent une prime de risque qui soit fonction du risque de signature de l'émetteur. Les fonds de pension français investissent majoritairement dans de la dette d'Etat car le risque de défaut du papier est assez faible.
- ✓ **le risque de change** : ce risque apparaît pour des épargnants français ou investisseurs institutionnels détenteurs d'obligations émises dans une devise étrangère. Le but de cette opération (appelée « carry trade ») est de profiter des périodes durant lesquelles les taux étrangers à long terme sont supérieurs à ceux que nous trouvons en France. Pour exemple, les taux à 10 ans rapportaient en juillet 1999 du 5% en France et du 6% aux Etats-Unis. L'épargnant qui a investi en Treasury bonds percevra 6% au lieu de 5% mais il peut subir un important risque de change. En cas de hausse du dollar par rapport à l'euro, ce dernier réalisera un profit à la fois sur les intérêts et sur le capital. Par contre en cas de baisse du dollar, le gain sur les intérêts est toujours le même mais il va perdre sur le change. Les fonds de pension français, fortement contraints par la réglementation, n'investissent généralement pas dans des devises autres que l'euro.

1.2.3. Les risques liés à la gestion coordonnée de l'actif et du passif

Ce sont des risques fondamentaux inhérents à la gestion ALM qu'il convient de maîtriser impérativement. Nous montrerons que ces risques sont au cœur des préoccupations des solutions d'adossement actif passif modernes comme le LDI.

- ✓ **le risque d'illiquidité** : ce risque se présente lorsque la caisse de retraite ne dispose pas suffisamment de trésorerie pour honorer ses engagements. Une mauvaise anticipation des évolutions économiques, du comportement d'épargne et des dérives démographiques conduit le gestionnaire de fonds à mal provisionner et tarifier ses prestations. Le risque d'illiquidité devient important lorsque les risques à l'actif et au passif ne sont pas bien maîtrisés.
- ✓ **le risque d'effectuer un mauvais diagnostic des véritables risques** : de nombreux gérants de fonds de pension ont cru que le risque résidait essentiellement dans leurs sélections en matière d'allocations d'actifs : les titres obligataires amèneraient une bonne sécurité alors que les actions présenteraient des risques importants. Malheureusement, les risques principaux auxquels ils sont exposés ne résident pas dans la sélection des classes d'actifs.

Les études actuarielles révèlent en effet que le risque principal pour une caisse de retraite (cela vaut également pour une compagnie d'assurance vie ou une banque) provient de la différence de duration entre son actif et son passif. La sensibilité du fonds à un changement de taux est d'autant plus grande que sa duration au passif est longue. Ainsi, des entreprises qui ont des engagements sociaux de 30 ou 40 ans sont profondément sensibles à une faible variation de taux. Si ces dernières

ont acheté des obligations de durations inférieures à celle de son passif, une évolution baissière des taux frappera plus grandement son passif que son actif : leurs valeurs s'apprécieront par actualisation des flux futurs mais avec des intensités différentes.

Prenons l'exemple d'une caisse de retraite payant pour chaque échéance k des pensions l_k qui s'apprécient au taux constant λ (ie. $l_k = l_0(1 + \lambda)^k$). L'actif de la caisse se compose de N obligations perpétuelles payant un taux d'intérêt r supérieur à λ . Lorsque le fonds de pension valorise ses engagements en prenant comme taux d'actualisation r , nous trouvons une valeur du passif égale à $L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k}{(1+r)^k} = \frac{1+\lambda}{r-\lambda} l_0$ et une valeur de l'actif égale à : $A = Np$ avec $p = \frac{1}{r}$

Une diminution du taux r provoque une hausse de la valeur du passif plus importante que celle de l'actif, et le ratio de financement A/P de la caisse de retraite se dégrade. Pour remplir cet objectif de ratio de couverture, une diminution du taux à long terme contraint la caisse à accroître le nombre N de rentes perpétuelles. Le gestionnaire devra acheter une quantité importante de titres obligataires, ce qui conduira à une nouvelle dépréciation des taux.

Les fonds de pension cherchent donc à résoudre deux problématiques apparemment contradictoires : ils cherchent d'une part à diminuer les risques liés à leur passif, et d'autre part à améliorer la performance de leurs actifs.

Conclusion. (Gestion des risques d'un fonds de pension)

Une bonne gestion ALM nécessite non seulement une étude fine des risques intervenant au passif et à l'actif, mais également une analyse approfondie sur la manière dont sont coordonnés l'actif et le passif du fonds de pension. Nous verrons que toutes les méthodes ALM construites en pratique souffrent de ce manque d'expertise dans l'analyse des risques.

1.3. Les techniques d'adossement actif passif fondamentales et leurs limites

L'objectif de ces techniques de couverture est de coordonner les flux d'un portefeuille obligataire avec ceux générés par le passif. Les solutions les plus connues pour répondre au problème d'ajustement actif passif sont les techniques de *Cash Flow Matching* et de *Duration Matching*.

Les méthodes de dédication constituent le socle de nombreuses solutions ALM comme le LDI. De ce fait, il est indispensable de présenter les méthodes de dédication pour bien comprendre la construction du LDI, et sa valeur ajoutée en matière de gestion des risques financiers.

1.3.1. Le portefeuille efficient de Markowitz Sharpe et Tint dans un cadre ALM

L'analyse du portefeuille efficient dans un cadre ALM a été conduite par Sharpe et Tint en 1990.

1.3.1.1. Présentation du montage

Nous considérons un portefeuille P composé de N titres risqués et de l'actif sans risque. Leur rendement est respectivement $\tilde{r}_i$, $i \in [1, N]$ et r_0 . La proportion de l'actif n° $i \in [0, N]$ dans le portefeuille P est noté ω_i et les valeurs du portefeuille en $t=0$ et 1 V_0 et $\tilde{V}_1$.

En $t = 1$, la valeur du portefeuille vérifie :

$$\tilde{V}_1 = (1 + r_0) \omega_0 V_0 + \sum_{i=1}^N (1 + \tilde{r}_i) \omega_i V_0 = ((1 + r_0) \omega_0 + \sum_{i=1}^N (1 + \tilde{r}_i) \omega_i) V_0.$$

En notant $\tilde{r}_p = r_0 \omega_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i \omega_i$ le rendement du portefeuille P , nous obtenons les relations suivantes pour $E(\tilde{r}_p)$ et $Var(\tilde{r}_p)$:

$$\tilde{V}_1 = (1 + \tilde{r}_p) V_0, \quad E(\tilde{r}_p) = r_0 \omega_0 + \sum_{i=1}^N E(\tilde{r}_i) \omega_i \quad \text{et} \quad Var(\tilde{r}_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$$

Les investisseurs recherchent les portefeuilles qui présentent une volatilité minimale pour une espérance de rendement donnée. Ils ont une fonction d'utilité U de la forme :

$$U(E(\tilde{r}_p), Var(\tilde{r}_p)) = A E(\tilde{r}_p) - Var(\tilde{r}_p) \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous imposons maintenant à notre portefeuille une contrainte de passif de rendement aléatoire $\tilde{r}_L$:

$$\tilde{L}_1 = (1 + \tilde{r}_L) L_0.$$

Ses valeurs en $t = 0$ et 1 sont notées L_0 et $\tilde{L}_1$. Le surplus actif passif sera respectivement égal à $\Delta_0 = V_0 - L_0$ et à $\tilde{\Delta}_1 = \tilde{V}_1 - \tilde{L}_1$ en $t=0$ et 1 . Son rendement est égal à :

$$\tilde{r}_S = \tilde{r}_p - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L$$

$$\text{Preuve. } \tilde{r}_S = \frac{\tilde{\Delta}_1 - \Delta_0}{V_0} = \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{L}_1 - V_0 + L_0}{V_0} = \left(\frac{\tilde{V}_1}{V_0} - 1 \right) + \frac{L_0 - \tilde{L}_1}{V_0}. \quad \text{Or, } \tilde{r}_p = \left(\frac{\tilde{V}_1}{V_0} - 1 \right) \text{ et } \tilde{r}_L = \left(\frac{\tilde{L}_1}{L_0} - 1 \right)$$

$$\text{d'où } \tilde{r}_S = \tilde{r}_p - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L$$

Dans un cadre ALM, l'investisseur s'intéresse uniquement au rendement du surplus actif passif car c'est le rendement du portefeuille net des engagements de passif. De ce fait, il recherche les portefeuilles qui, pour une espérance de rendement net de passif donné, présentent une volatilité minimale. Il a une fonction d'utilité de la forme :

$$U(E(\tilde{r}_S), Var(\tilde{r}_S)) = A E(\tilde{r}_S) - Var(\tilde{r}_S)$$

Résultat 1. (Fonction d'utilité U dans un cadre ALM)

Le programme de maximisation de l'investisseur dans un univers actif passif s'écrit :

$$\underset{r_0, r_1, \dots, r_N}{\text{Max}} U(E(\tilde{r}_S), Var(\tilde{r}_S)) = \underset{r_0, r_1, \dots, r_N}{\text{Max}} A E(\tilde{r}_p) - Var(\tilde{r}_p) + 2 \frac{L_0}{V_0} Cov(\tilde{r}_L, \tilde{r}_p)$$

$$\text{Preuve. } U(E(\tilde{r}_S), Var(\tilde{r}_S)) = A \left(E(\tilde{r}_p) - \frac{L_0}{V_0} E(\tilde{r}_L) \right) - Var\left(\tilde{r}_p - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L \right)$$

$$\text{Or, } \text{Var}\left(\tilde{r}_P - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L\right) = \text{Cov}\left(\tilde{r}_P - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L, \tilde{r}_P - \frac{L_0}{V_0} \tilde{r}_L\right) = \text{Var}(\tilde{r}_P) + \frac{L_0^2}{V_0^2} \text{Var}(\tilde{r}_L) - 2 \frac{L_0}{V_0} \text{Cov}(\tilde{r}_L, \tilde{r}_P)$$

$$\text{D'où, } U(E(\tilde{r}_S), \text{Var}(\tilde{r}_S)) = AE(\tilde{r}_P) - \frac{L_0}{V_0} AE(\tilde{r}_L) - \text{Var}(\tilde{r}_P) - \frac{L_0^2}{V_0^2} \text{Var}(\tilde{r}_L) + 2 \frac{L_0}{V_0} \text{Cov}(\tilde{r}_L, \tilde{r}_P)$$

Un terme supplémentaire liant les rendements de l'actif et du passif $2 \frac{L_0}{V_0} \text{Cov}(\tilde{r}_L, \tilde{r}_P)$ est apparu. Son importance dans la fonction d'utilité est directement liée au rapport entre la valeur initiale des engagements et celle du portefeuille d'actifs $\frac{L_0}{V_0}$.

Résultat 2. (Fonction d'utilité dans un cadre ALM)

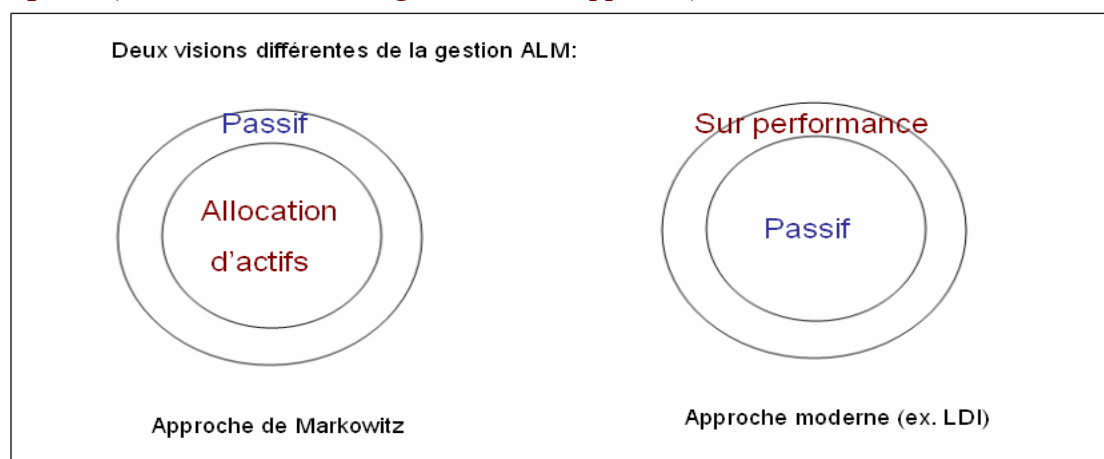
La fonction d'utilité retirée de l'allocation d'actifs P, reflétant le comportement et les préférences de l'investisseur en matière d'allocations d'actifs, s'est profondément modifiée en présence de contraintes d'engagement. Ce modèle, bien que simpliste, montre combien le métier de gestionnaire actif passif est différent de celui de gestionnaire d'actifs : une bonne compréhension et modélisation du passif est indispensable pour fournir des allocations d'actifs de qualité, correspondant aux attentes d'investisseurs soumis à des contraintes ALM.

1.3.1.2. Critiques de l'approche de Markowitz

Les sociétés de gestion ont beaucoup utilisé l'approche du portefeuille optimal de Markowitz pour proposer des allocations d'actifs à leurs clients fonds de pension. Pourtant, ce mode de gestion financière intègre très mal les problématiques du passif car l'approche de Markowitz est à la base une méthode d'allocation d'actifs pure. Dans un cadre ALM, cette méthode se focalise uniquement sur la détermination de l'allocation d'actifs, les engagements de passif étant simplement des contraintes supplémentaires à prendre en compte.

Les nouvelles solutions d'adossement (comme le LDI) adoptent une philosophie de gestion radicalement différente car elles mettent pour la première fois le passif au centre de leur objectif de gestion, la recherche de sur-performance étant étudiée dans un second temps, une fois les risques de passif bien maîtrisés.

Graphique 2. (Deux orientations de gestion ALM opposées)



1.3.2. Principe du Cash Flow Matching

La méthode de *Cash Flow Matching* est la solution la plus intuitive pour assurer le paiement des flux de passif attendus. Elle a été présentée par le mathématicien économiste Tjalling C. Koopmans en 1942.

1.3.2.1. Présentation du montage

Le montage *Cash Flow Matching* est un portefeuille obligataire qui produit, pour chaque date de paiement, des flux futurs égaux aux engagements du fonds de pension envers ses clients.

Nous présentons deux algorithmes permettant la construction d'une solution *Cash Flow Matching*. Nous supposons que le marché financier dispose des obligations à coupons fixes nécessaires à notre adossement.

En prenant les notations suivantes :

- N l'échéance estimée de l'échéancier de passif
- L_n l'engagement de passif de l'échéance n
- Q_n quantité d'obligations couponnées d'échéance n à acheter
- P_n poids des obligations d'échéance n dans notre allocation d'actifs
- C_n coupon donné par l'obligation d'échéance n
- CF_n versement final de l'obligation d'échéance n
- Σ_n cumul des coupons des échéances postérieures à l'échéance n

Nous achetons des obligations d'échéance N pour une quantité égale à $Q_N = \frac{L_N}{CF_N}$. Nous déduisons ensuite des sorties du fonds d'échéances antérieures ($L_n, n \leq N-1$), les coupons de ces obligations. Nous répétons l'algorithme pour l'avant-dernier flux, et ainsi de suite jusqu'à avoir effectué tous les flux des engagements. Mathématiquement, cet algorithme s'écrit :

$$\text{Pour } n=N : \quad \Sigma_N = 0 \quad \text{et} \quad Q_N = \frac{L_N}{CF_N}$$

$$\text{Puis pour } n=N-1 : \quad \Sigma_{N-1} = C_N Q_N + \Sigma_N \quad \text{et} \quad Q_{N-1} = \frac{L_{N-1} - \Sigma_{N-1}}{CF_{N-1}}$$

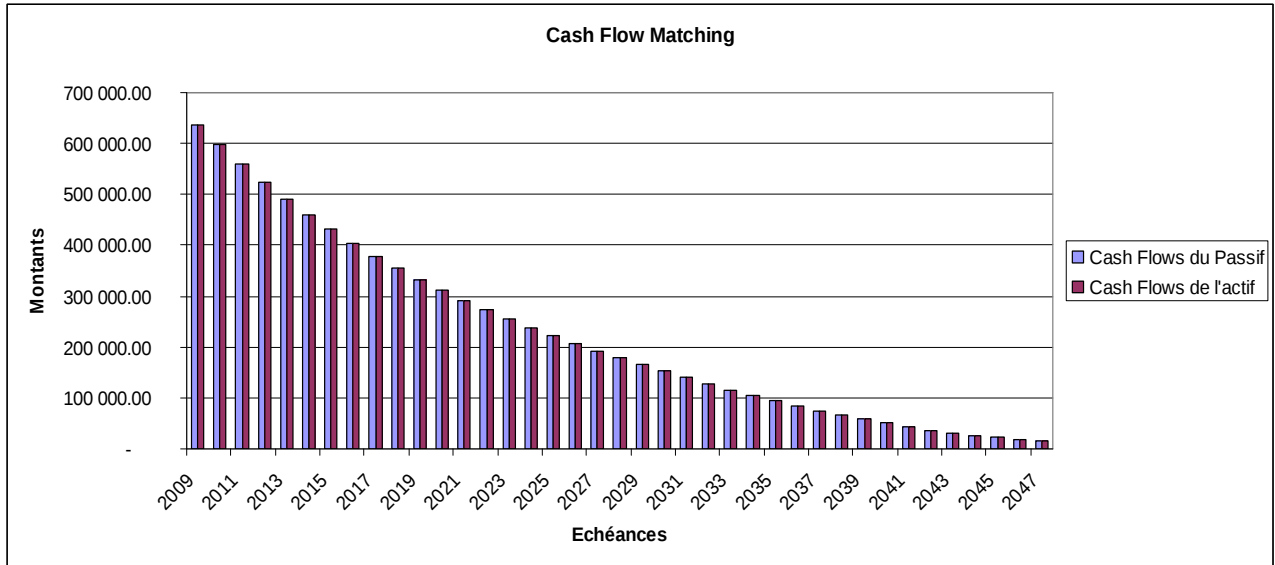
$$\text{Et ainsi de suite pour } n=N-2 \text{ puis } N-3 \text{ etc. : } \Sigma_n = C_{n+1} Q_{n+1} + \Sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad Q_n = \frac{L_n - \Sigma_n}{CF_n}$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^N P_i = 1 \quad \text{et} \quad P_n = \frac{Q_n}{\sum_{i=1}^N Q_i}.$$

Résultat 3. (Adossement parfait des flux de passif)

En supposant que tous les titres obligataires nécessaires à notre adossement soient disponibles sur le marché, nous avons montré l'existence d'un portefeuille permettant de produire les flux futurs attendus. Nous obtenons une réplification parfaite des flux de passif.

Graphique 3. (Implémentation théorique du *Cash Flow Matching*)



Nous optimisons l'algorithme du *Cash Flow Matching* afin de déterminer le portefeuille le moins coûteux qui génère les flux d'engagement futurs du fonds de pension.

En prenant les notations suivantes:

- $n \in [1, N]$ où N est le nombre d'obligations dans le portefeuille
- $t \in [1, T]$ où t est l'échéance de paiement t des engagements
- P_n est le prix de la $n^{\text{ème}}$ obligation
- L_t est le montant de l'engagement de l'échéance t
- x_i est le nombre d'obligations n° i à acquérir
- $CF_{t,n}$ est le montant du versement de la $n^{\text{ème}}$ obligation à l'échéance t
- $x = (x_1, \dots, x_N)$ représente l'allocation du portefeuille d'actifs.
- $P = (P_1, \dots, P_N)$ représente le vecteur des prix des obligations

Le but est de trouver le portefeuille de coût minimal qui respecte les contraintes d'engagement :

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{n=1}^N P_n x_n = {}^t x P \\ & \text{Sc.} \sum_{n=1}^N CF_{t,n} \cdot x_n \geq L_t \quad \forall t \in [1, T] ; x_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, N] \end{aligned}$$

Pour résoudre numériquement ce programme linéaire, nous pouvons utiliser l'algorithme du simplexe de George Dantzig [1947].

1.3.2.2. L' Inflation Indexed Cash Flow Matching par la titrisation

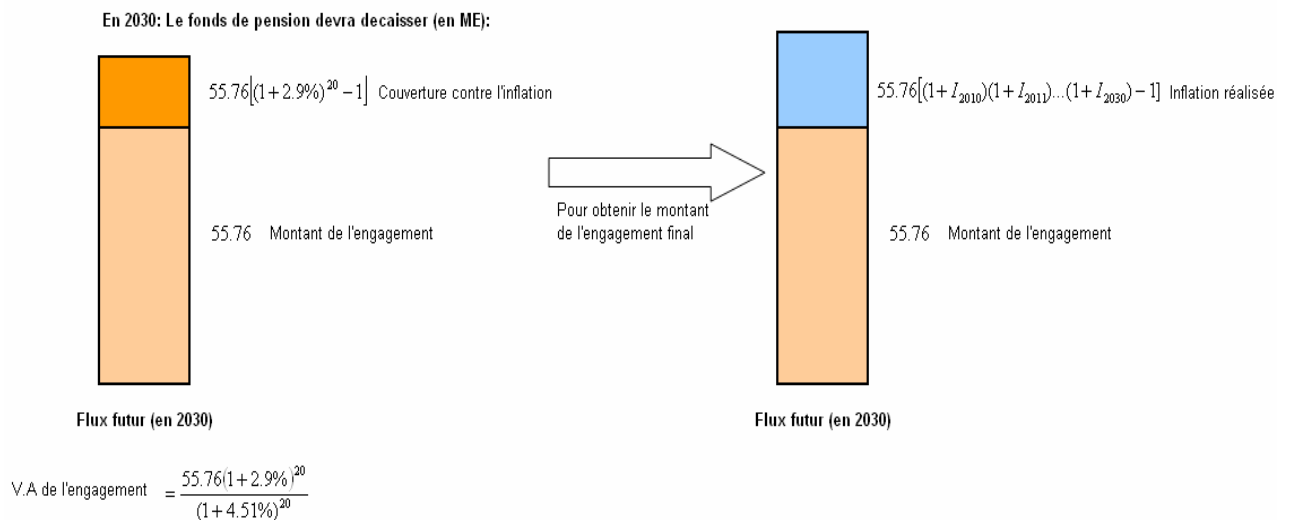
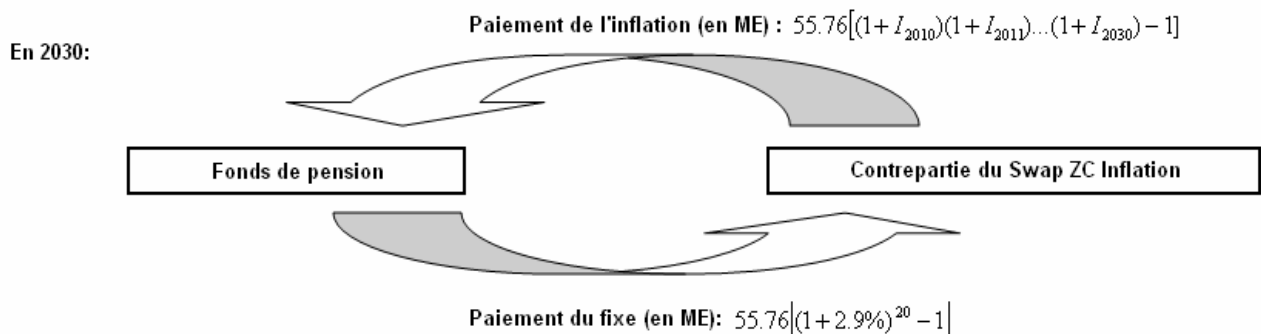
Les swaps zéro-coupon indexés inflation permettent de construire des solutions *Cash Flow Matching* pour des échéanciers d'engagement revalorisés de l'inflation. Nous procédons à une titrisation du risque inflation : nous transférons ce risque du fonds de pension vers les marchés financiers.

Prenons le cas d'un fonds de pension devant honorer un engagement de 55,76 M€ réels dans 20 ans le 1^{er} janvier 2030. Les niveaux du taux nominal et de l'inflation moyenne dans 20 ans le 1^{er} janvier 2010 sont respectivement de 4,51% et 2,5%. Un swap zéro-coupon indexé sur l'inflation à 20 ans est disponible sur le marché et son taux break even inflation (égal à l'inflation moyenne espérée de 2,5% majorée de la prime de risque de 0,4%) est de 2,9%.

Résultat 4. (Titrisation du risque inflation par les swaps indexés)

Déroulement de l'opération de titrisation

En 2010: Le fonds de pension entre dans un swap Z.C Inflation 20 ans



1.3.2.3. Critiques et implémentation retenue pour le Cash Flow Matching

Un échéancier de passif se déforme au cours du temps en fonction des entrées (nouveaux cotisants) et des sorties (décès, départs à la retraite etc.). Ses flux d'engagement doivent être régulièrement réévalués. Ainsi, il est inutile de vouloir adosser de manière précise chaque flux de l'échéancier par un zéro-coupon de même maturité (surtout les flux d'échéances longues où les risques actuariels et l'incertitude sont les plus grands).

Lorsque les niveaux des taux sont bas, les prix des titres obligataires sont élevés et l'investissement dans une solution *Cash Flow Matching* peut s'avérer très coûteux. Le niveau des cotisations exigé en retour par le fonds de pension sera très important, et l'organisme assureur proposant cette technique d'adossement risque de ne pas être compétitif face à la concurrence lors de la réponse aux appels d'offres.

Les obligations zéro-coupon ne constituent pas un marché suffisamment liquide pour la solution *Cash Flow Matching*. Il est impossible de trouver, pour chaque échéance de paiement des prestations, un zéro-coupon de maturité identique (surtout pour les échéances longues). Toutefois, les banques d'investissement peuvent concevoir pour des montants de capitaux apportés très conséquents, des montages à base de zéro-coupons synthétiques de maturités celles attendues. Cela obligerait les assureurs à effectuer des pools de fonds de pension, opération interdite par la réglementation en vigueur.

Nous implémenterons un *Cash Flow Matching* modifié qui aura une allocation en deux fonds basée sur un critère de séparation temporelle court terme/long terme : le premier fonds, l'EMTN, visera à répliquer les flux d'engagement de court terme alors que le second fonds, un OPCVM diversifié, prend progressivement le relais de l'EMTN pour le paiement des engagements de long terme.

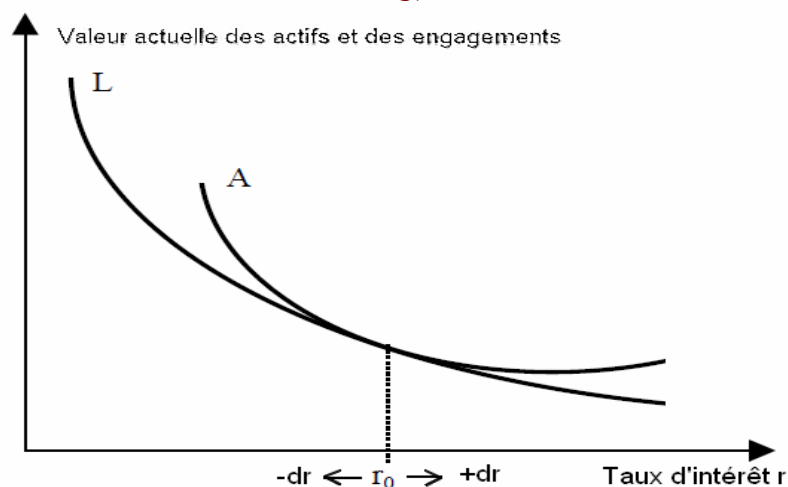
1.3.3. Principe d'immunisation en sensibilité et en convexité aux risques de taux et d'inflation

La technique d'immunisation en duration (ou en sensibilité) a été présentée en 1952 par l'actuaire Franck Mitchell Redington dans le papier « *Review of the Principles of Life-Office Valuations* ».

1.3.3.1. Présentation du Duration Matching

L'idée de ce montage est de structurer un portefeuille d'actifs de manière à ce que la dérivée de sa valeur par rapport au risque de taux d'intérêt soit égale à celle du passif.

Graphique 4. (Immunisation en *Duration Matching*)



Nous notons :

- A la valeur actuelle de notre portefeuille d'actifs,
- L la valeur actuelle du portefeuille d'engagement
- Δ l'opérateur d'écart entre l'actif et le passif : $\Delta(r) = A(r) - L(r)$.

Lorsque nous sommes en présence d'une structure plate des taux d'intérêt, nos deux valeurs A et L sont sensibles aux variations d'un seul taux d'intérêt r . La sensibilité globale de l'actif (ie. du passif) est par conséquent égale à la somme pondérée des sensibilités des titres le constituant.

Nous avons $A(r) = \sum_{i=1}^T \frac{A_i}{(1+r)^i}$ et $L(r) = \sum_{i=1}^T \frac{L_i}{(1+r)^i}$ où $(A_i)_{1 \leq i \leq T}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq T}$ représentent les flux d'actif et de passif sur la période $[1, T]$, pouvant être nuls pour certaines échéances.

Notre bilan étant en équilibre en $t=0$, nous avons $\Delta(r_0) = 0$. Si nous faisons varier notre taux r de δr , nous cherchons les conditions nous permettant d'avoir $\forall \delta r, A(r_0 + \delta r) \geq L(r_0 + \delta r)$ (ie. $\Delta(r_0 + \delta r) \geq 0, \forall \delta r$). Ces dernières sont appelées conditions d'immunisation. Ainsi, la fonction Δ doit être positive et admettre un minimum local en r_0 avec $\Delta(r_0) = 0$. Les conditions nécessaires et suffisantes sont dans ce cas :

$$CN1 : \Delta(r_0) = 0 \Leftrightarrow A(r_0) = L(r_0)$$

$$CN2 : \frac{d\Delta}{dr}(r_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{dA}{dr}(r_0) = \frac{dL}{dr}(r_0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^T \frac{iA_i}{(1+r_0)^i} = \sum_{i=1}^T \frac{iL_i}{(1+r_0)^i} \Leftrightarrow \frac{1}{A(r_0)} \sum_{i=1}^T \frac{iA_i}{(1+r_0)^i} = \frac{1}{L(r_0)} \sum_{i=1}^T \frac{iL_i}{(1+r_0)^i} \Leftrightarrow D_A = D_L$$

$$CN3 : \frac{d^2\Delta}{dr^2}(r_0) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d^2A}{dr^2}(r_0) \geq \frac{d^2L}{dr^2}(r_0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^T \frac{i(i+1)A_i}{(1+r_0)^i} \geq \sum_{i=1}^T \frac{i(i+1)L_i}{(1+r_0)^i} \Leftrightarrow \frac{1}{A(r_0)(1+r_0)^2} \sum_{i=1}^T \frac{i(i+1)A_i}{(1+r_0)^i} \geq \frac{1}{L(r_0)(1+r_0)^2} \sum_{i=1}^T \frac{i(i+1)L_i}{(1+r_0)^i} \Leftrightarrow C_A \geq C_L$$

Résultat 5. (Conditions nécessaires et suffisantes d'immunisation)

Le gestionnaire du fonds de pension devra respecter les contraintes suivantes pour se couvrir contre les risques d'illiquidité et de taux :

CN1 : Les valeurs actuelles de l'actif et du passif doivent être égales

CN2 : Les durations de l'actif et du passif doivent être égales

CN3 : La convexité de l'actif doit être supérieure à celle du passif

1.3.3.2. Critiques et implémentation retenue pour le Duration Matching :

Lorsque nous supposons que la courbe des taux d'intérêt n'est pas plate (ie. les valeurs de l'actif A et du passif L sont sensibles à plusieurs taux de maturités différentes) mais que tous les taux subissent la même variation (ie. nous avons un déplacement parallèle de la courbe des taux), les conditions nécessaires et suffisantes en matière d'immunisation restent encore valables.

Le déplacement parallèle de la courbe des taux demeure une hypothèse très forte. Les taux courts et les taux longs peuvent évoluer avec des amplitudes différentes. Il est habituel d'observer des changements de pente et des déformations non uniformes de la courbe dans le temps. Ainsi, le matching des durations de l'actif et du passif est une méthode relativement approximative. L'expertise LDI cherchera à améliorer cette technique en proposant une analyse beaucoup plus fine du risque de taux.

Nous implémenterons un *Duration Matching* amélioré qui aura une allocation en deux fonds, basée sur un critère de séparation temporelle court terme/long terme : le premier fonds, composé d'obligations, visera à égaliser les durations de l'actif et du passif, alors que le second fonds, un OPCVM diversifié, prendra progressivement le relais pour couvrir les engagements de long terme.

Partie 2. Développement théorique d'une solution ALM : le Liability Driven Investment (LDI)

Lors des réponses aux appels d'offres, BNP Paribas proposait les trois techniques d'adossment actif passif étudiées précédemment : l'approche de Markowitz, le *Cash Flow Matching* et le *Duration Matching*. Dans le but d'étoffer leur palette de solutions et d'acquérir une meilleure expertise ALM, BNP Paribas a souhaité développer une solution actif passif financiarisée proposée au départ par les banques d'investissement et les sociétés de gestion anglo-saxonnes : le LDI. Le but de ce mémoire sera de développer une expertise LDI et de la comparer ensuite aux solutions ALM traditionnelles.

2.1.Fondement théorique du LDI et théorème de séparation

2.1.1. Le modèle stochastique de Merton Martellini Milhau [2006]

Nous modélisons une économie composée de n actifs risqués et d'un actif sans risque sur un intervalle de temps $[0, T_0]$, par un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où la filtration $\mathcal{A} = \{\Gamma_t, t \geq 0\}$ est telle que $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_\infty \subset \Omega$ et $\Gamma_t = \sigma(\{W_t^i; i=1, \dots, n\}) \forall t > 0$. Les n mouvements browniens W^i proviennent des dynamiques des actifs risqués. Si nous notons P^i le prix de l'actif $n^\circ i$, nous modélisons les dynamiques des actifs risqués par :

$$dP_t^i = P_t^i (\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j)$$

et par $dP_t^0 = P_t^0 r dt$ celle de l'actif sans risque.

En adoptant les notations vectorielles suivantes :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} \text{ le vecteur des rendements espérés pour tous les actifs risqués,}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \sigma_{1n} \\ & \dots & \\ \sigma_{n1} & & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \text{ la matrice de variance covariance entre ces actifs,}$$

$$P_t = \begin{pmatrix} P_t^1 \\ \dots \\ P_t^n \end{pmatrix} \text{ et } dP_t = \begin{pmatrix} dP_t^1 \\ \dots \\ dP_t^n \end{pmatrix}, \text{ les vecteurs des prix et des variations des prix des actifs risqués,}$$

$$W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \cdots \\ W_t^n \end{pmatrix} \text{ et } dW_t = \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ \cdots \\ dW_t^n \end{pmatrix}, \text{ les vecteurs des mouvements browniens des actifs risqués.}$$

Nous obtenons l'équation différentielle stochastique (vectorielle) régissant la dynamique des prix des actifs risqués :

$$dP_t = P_t (\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

Le modèle considère que μ et σ sont des processus stochastiques mesurables à variations bornées.

Concernant l'évolution dynamique du passif, nous adoptons le processus stochastique suivant :

$$dL_t = L_t (\mu_L dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{L,j} dW_t^j + \sigma_{L,\varepsilon} dW_t^\varepsilon)$$

où le risque global des engagements se décompose entre W les risques financiers et W^ε les risques non financiers (actuariels, mortalité, turnover du staff etc.). Les risques financiers et les risques non financiers sont supposés indépendants : $W^\varepsilon \perp W^j \quad \forall j=1, \dots, n$. La solution de cette équation différentielle stochastique scalaire est de la forme :

$$L_T = L_t \eta(t, T) \eta_L(t, T)$$

où :

$$\eta(t, T) = \exp\left(\int_t^T (\mu_L(s) - \frac{1}{2} \sigma_L(s) \sigma_L(s)) ds + \int_t^T \sigma_L(s) dW_s\right)$$

$$\eta_L(t, T) = \exp\left(-\int_t^T (\sigma_{L,\varepsilon}^2(s) ds + \int_t^T \sigma_L(s) \sigma_L(s) dW_s^\varepsilon)\right)$$

avec :

$$\sigma_L = \begin{pmatrix} \sigma_{L,1} \\ \cdots \\ \sigma_{L,n} \end{pmatrix} \text{ et } dW_s = \begin{pmatrix} dW_s^1 \\ \cdots \\ dW_s^n \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que $L_t \eta(t, T)$ est l'expression généralisée de Black & Scholes dans le cas où la partie martingale du processus est composée de n browniens corrélés, et que $\eta_L(t, T)$ est la partie dérive-martingale supplémentaire que génèrent les risques non financiers.

Définition 1. (Objectif de gestion financière dans une expertise LDI)

Nous définissons le ratio de financement actif/passif F_t comme le rapport entre la valeur de l'actif global A_t et celle du passif L_t :

$$F_t = \frac{A_t}{L_t}.$$

Notre gestionnaire de fonds de pension cherchera à se protéger contre le risque d'illiquidité. Pour n'importe quel instant T dans l'intervalle de temps $[0, T_0]$, il cherchera à maximiser son ratio de financement F_T en tenant compte de son degré d'aversion pour le risque, modélisé par une fonction d'utilité U :

$$\max_w E[U(F_T)]/\Gamma_t.$$

Nous devons déterminer la dynamique du ratio F_t . Connaissant déjà celle du passif L_t , il convient de déterminer celle de l'actif A_t afin d'appliquer le lemme d'Itô à $\frac{A_t}{L_t}$.

En notant le vecteur $w_t = \begin{pmatrix} w_{1,t} \\ \dots \\ w_{n,t} \end{pmatrix}$ les proportions investis dans les n actifs risqués, on en déduit la

proportion investie dans l'actif sans risque : $1 - {}^t w \mathbf{1}$ où $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous déduisons ainsi la dynamique de A_t :

$$dA_t^w = A_t^w [(1 - {}^t w \mathbf{1}) \frac{dB_t}{B_t} + {}^t w \frac{dP_t}{P_t}] \text{ où } \frac{dP_t}{P_t} = \begin{pmatrix} dP_t^1 / P_t^1 \\ \dots \\ dP_t^n / P_t^n \end{pmatrix} = (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \text{ et } \frac{dB_t}{B_t} = r dt.$$

Il s'ensuit que : $dA_t^w = A_t^w [(r + {}^t w (\mu_t - r \mathbf{1})) dt + {}^t w \sigma dW_t]$

$$dF_t^w = d\left(\frac{A_t^w}{L_t^w}\right) = \frac{1}{L_t} dA_t^w - \frac{A_t^w}{L_t^2} dL_t - \frac{1}{L_t^2} d\langle A_t^w, L_t \rangle + \frac{A_t^w}{L_t^3} d\langle L_t \rangle.$$

Enfin, en utilisant les dynamiques de A_t et L_t établies ci-dessus, nous trouvons celle de F_t :

$$\frac{dF_t^w}{F_t^w} = ((r - \mu_L + {}^t \sigma_L \sigma_L + \sigma_{L,\varepsilon}^2) dt + {}^t w ((\mu - r \mathbf{1}) - \sigma \sigma_L) dt + ({}^t w \sigma - {}^t \sigma_L) dW_t - \sigma_{L,\varepsilon} dW_t^\varepsilon)$$

Comme $W^\varepsilon \perp W^j \quad \forall j=1, \dots, n$, nous pouvons définir un rendement espéré μ_F^w et une volatilité σ_F^w pour notre ratio F_t :

$$\mu_F^w = (r - \mu_L + {}^t\sigma_L\sigma_L + \sigma_{L,\varepsilon}^2) + {}^t w((\mu - r1) - \sigma\sigma_L)$$

$$\sigma_F^{w^2} = {}^t({}^t w\sigma - {}^t\sigma_L)({}^t w\sigma - {}^t\sigma_L) + \sigma_{L,\varepsilon}^2 \text{ en utilisant le théorème de Pythagore.}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{dF_t^w}{F_t^w} = \mu_F^w dt + \sigma_F^w d\tilde{W}_t$$

Le programme de l'investisseur s'écrit : $J(t, F_t) = \max_w E[U(F_T)]/\Gamma_t$

D'après le théorème de Hamilton Jacobi Bellman [1957], J est solution de l'équation différentielle :

$$J_t + \max_w (\Psi_w J) = 0 \text{ où } \Psi_w J = \mu_F^w F \frac{\partial J}{\partial F} + \frac{1}{2} \sigma_F^{w^2} F^2 \frac{\partial^2 J}{\partial F^2}.$$

w^* est tel que $\Psi_{w^*} J = \max_w (\Psi_w J)$ et vérifie $\frac{\partial}{\partial w_i} \Psi_{w^*} J = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Il s'ensuit que w^* est tel que $F \frac{\partial J}{\partial F} \frac{\partial \mu_F^w}{\partial w}(w^*) + \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial^2 J}{\partial F^2} \frac{\partial \sigma_F^{w^2}}{\partial w}(w^*) = 0$

Or, $\frac{\partial \mu_F^w}{\partial w}(w^*) = (\mu - r1) - \sigma\sigma_L$ et $\frac{\partial \sigma_F^{w^2}}{\partial w}(w^*) = 2({}^t w^* \sigma' \sigma - \sigma\sigma_L)$ d'où

w^* vérifie $F \frac{\partial J}{\partial F} ((\mu - r1) - \sigma\sigma_L) + F^2 \frac{\partial^2 J}{\partial F^2} ({}^t w^* \sigma' \sigma - \sigma\sigma_L) = 0$

d'où $w^* = -\frac{\frac{\partial J}{\partial F}}{F \frac{\partial^2 J}{\partial F^2}} (\sigma' \sigma)^{-1} (\mu - r1) + (1 + \frac{\frac{\partial J}{\partial F}}{F \frac{\partial^2 J}{\partial F^2}}) ({}^t \sigma)^{-1} \sigma_L$

En introduisant le concept d'aversion relative au risque $\gamma = -\frac{F \frac{\partial^2 J}{\partial F^2}}{\frac{\partial J}{\partial F}}$, nous trouvons que :

$$w^* = \frac{1}{\gamma} (\sigma' \sigma)^{-1} (\mu - r1) + (1 - \frac{1}{\gamma}) ({}^t \sigma)^{-1} \sigma_L$$

Résultat 6. (Décomposition du portefeuille d'actifs risqués en deux fonds)

L'allocation en actifs risqués se décompose en deux fonds ayant des proportions égales à :

$$\frac{1}{\gamma} {}^t 1 (\sigma' \sigma)^{-1} (\mu - r1) \text{ et } (1 - \frac{1}{\gamma}) {}^t 1 ({}^t \sigma)^{-1} \sigma_L.$$

Le premier fonds est le portefeuille efficient de variance minimale introduit par Markowitz. C'est un portefeuille de performance qui ne tient pas compte de nos contraintes d'engagement : il est décorrélé du passif. Le montant investi dans ce portefeuille est proportionnel au degré de tolérance au risque $\frac{1}{\gamma}$ de l'investisseur. Nous appellerons ce fonds **portefeuille de performance (PSP)**.

Le deuxième fonds est le portefeuille qui minimise la volatilité du ratio de financement σ_F . En effet, nous montrons facilement que la fonction $\sigma_F^2 = {}^t(w\sigma - {}^t\sigma_L)({}^t w\sigma - {}^t\sigma_L) + \sigma_{L,\varepsilon}^2$ atteint un minimum $\sigma_{L,\varepsilon}^2$ en $w^{**} = ({}^t\sigma)^{-1} {}^t\sigma_L$ en utilisant le fait que :

$$({}^t\sigma)^{-1} = \frac{1}{\det(\sigma)} {}^t\text{com}({}^t\sigma) \text{ et } \text{com}({}^t\sigma) = {}^t\text{com}(\sigma).$$

On peut également montrer que ce portefeuille maximise la covariance entre l'actif et le passif $({}^t w\sigma)\sigma_L$ sous la contrainte que $\sigma_A^2 = {}^t({}^t w\sigma)({}^t w\sigma)$. En effet, en maximisant le lagrangien

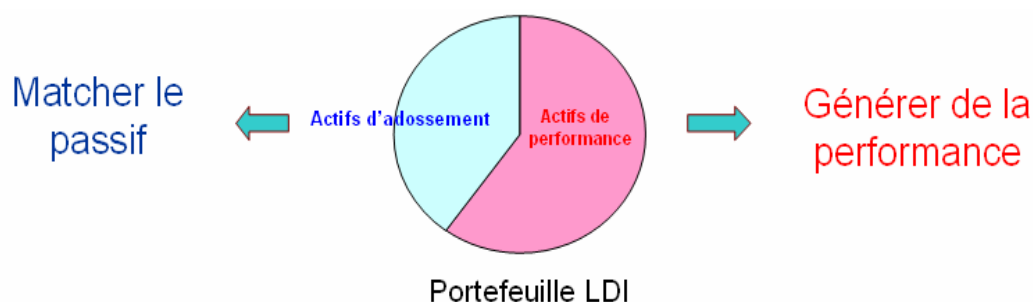
$L = ({}^t w\sigma)\sigma_L - \lambda ({}^t({}^t w\sigma)({}^t w\sigma) - \sigma_A^2)$, nous montrons que $\frac{\partial L}{\partial w}(w^{**}) = \sigma\sigma_L - 2\lambda {}^t\sigma\sigma w^{**} = 0$ d'où $w^{**} \propto ({}^t\sigma)^{-1} {}^t\sigma_L$. Ainsi, ce portefeuille tente de s'adosser le plus possible à nos engagements de passif. Nous appellerons ce fond **portefeuille d'adossment (LHP)**.

Résultat fondamental 7. (le théorème de séparation en deux fonds)

Le théorème de séparation en deux fonds est à la base de toutes solutions LDI :

Fondement du LDI : le théorème de séparation	
Portefeuille de couverture Liability Hedging Portfolio (LHP) Instruments cash (Obligations nominales et indexées...) ou dérivés (Swap de taux et d'inflation)	Portefeuille de performance Performance Seeking Portfolio (PSP) Diversification des classes d'actifs (Actions, Hedge Funds...)

Source : L'Agefi



L'objet de la troisième partie de mon mémoire va être de construire en pratique notre portefeuille d'adossment LHP et notre portefeuille de performance PSP. Chaque société établit ses portefeuilles LHP et PSP avec une méthodologie qui lui est propre. Par exemple, l'équipe d'actuaire de BNP Paribas a souhaité que leur LHP adosse très finement en sensibilité notre échéancier de passif pour les risques de taux et d'inflation.

2.1.2. Rapprochement avec la méthode CPPI en assurance de portefeuille.

Nous intégrons dans notre modèle une contrainte réglementaire contre le risque d'illiquidité : la valeur des actifs A_t doit être supérieure à un multiple k de la valeur actuelle des engagements L_t (ie. $A_t \geq k L_t$). Nous supposons de plus que les paramètres du modèle (μ, σ etc.) sont constants. Nous montrons alors que les solutions *LDI* s'apparentent à la méthode *CPPI* (*Constant Proportion portfolio Insurance*) en assurance de portefeuille :

Le programme du gestionnaire du fond de pension se réécrit : $\max_w E[U(F_T - k) / \Gamma_t]$ et l'allocation optimale devient :

$$w^* = \frac{1}{\gamma} (\sigma^t \sigma)^{-1} (\mu - r1) \left(1 - \frac{k}{F_t} \right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{k}{F_t} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) (\sigma^t \sigma)^{-1} \sigma_L.$$

Ainsi la richesse investie dans le portefeuille de performance s'élève à :

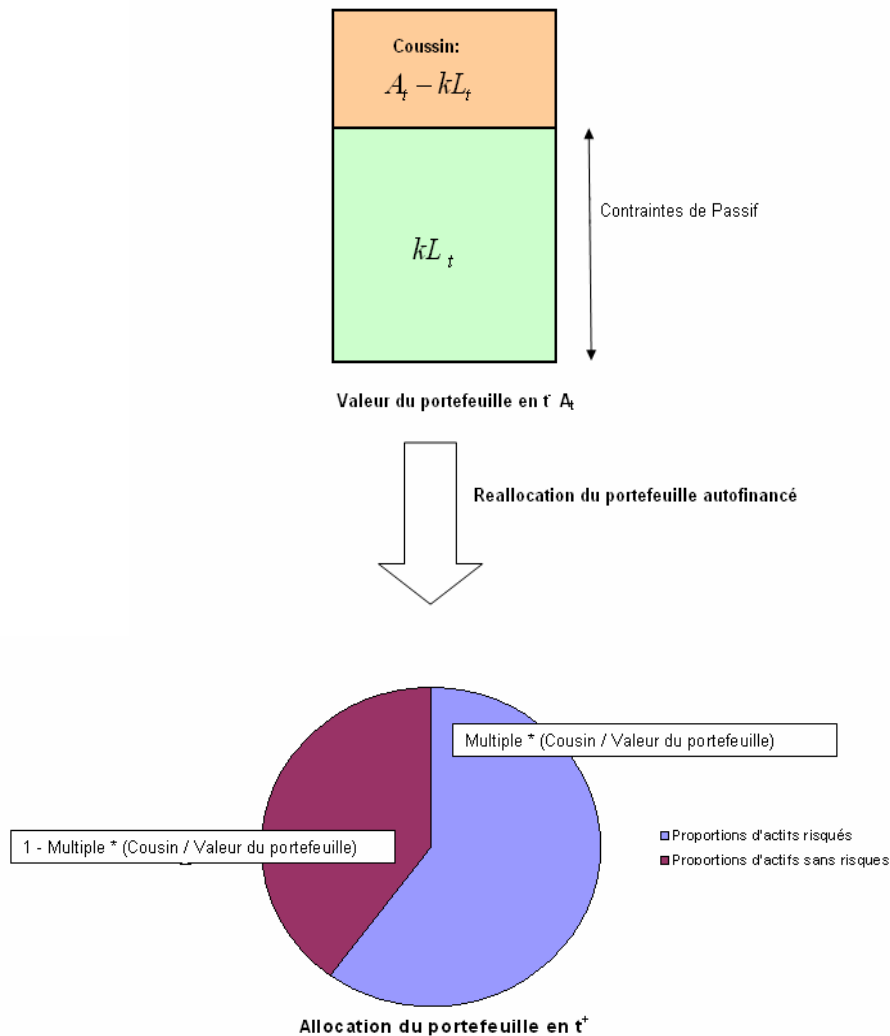
$$\frac{1}{\gamma} {}^t 1 (\sigma^t \sigma)^{-1} (\mu - r1) \left(A_t - \frac{k A_t}{F_t} \right) = \frac{1}{\gamma} {}^t 1 (\sigma^t \sigma)^{-1} (\mu - r1) (A_t - k L_t)$$

Résultat 8. (Montage LDI et assurance de portefeuille)

Le portefeuille *LDI* s'interprète en termes de fonds *CPPI* : $k L_t$ est notre plancher, $A_t - k L_t$ est notre coussin, et le multiple est la quantité $\frac{1}{\gamma} {}^t 1 (\sigma^t \sigma)^{-1} (\mu - r1)$.

La valeur restante à l'actif, une fois déduite la valeur des engagements réglementaires, peut être investie dans un portefeuille de performance qui ne se soucie plus des contraintes *ALM*.

Graphique 5. (Le LDI vu comme un CPPI dans un contexte ALM)



2.1.3. Raffinement et robustesse théorique du modèle stochastique [2008]

Connaissant les principaux risques financiers auxquels sont exposés les fonds de pension, nous pouvons raffiner notre modèle sur sa partie allocation d'actifs. Cette dernière se compose désormais de n actions représentées par un indice synthétique S , d'une obligation zéro-coupon nominale B et d'une obligation zéro-coupon indexée sur l'inflation B^{Infl} .

Sous (Ω, A, P) nous modélisons les dynamiques des taux et de la classe actions par :

- ✓ le taux court nominal par un processus de Vasicek : $dR_t = a(\bar{b} - R_t)dt + \bar{\sigma}_R d\bar{W}_t^R$
- ✓ le niveau de l'inflation par un modèle de Black & Scholes : $dY_t = \bar{\varphi} Y_t dt + \bar{\sigma}_Y Y_t d\bar{W}_t^Y$
- ✓ les valeurs des n actions par un modèle de Black & Scholes : $dS = \mu_S S dt + \sigma_S S d\bar{W}_t^S$

Nous supposons que le nombre d'actifs est identique au nombre de facteurs de risque influant leur rendement, et qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage.

Il existe ainsi une unique mesure de probabilité Q équivalente à P sous laquelle :

- les prix actualisés sont des martingales
- on détermine une unique prime de risque vectorielle λ .

Q est la probabilité risque neutre et il existe un Q - mouvement brownien $n+2$ dimensionnel W fonction des P - mouvements browniens $\bar{W}_t^R, \bar{W}_t^Y, \bar{W}_t^{S_i}$ et de λ .

Sous (Ω, A, Q) , les dynamiques des processus précédents s'écrivent pour :

✓ le taux nominal :
$$dR_t = a(b - R_t)dt + {}^t\sigma_R dW_t \quad \text{où } b = \bar{b} - \frac{1}{a} {}^t\sigma_R \lambda$$

✓ le niveau de l'inflation :
$$dY_t = \varphi Y_t dt + Y_t {}^t\sigma_Y dW_t \quad \text{où } \varphi = \bar{\varphi} - {}^t\sigma_Y \lambda$$

✓ les valeurs des n actions :
$$dS = r S dt + {}^t\sigma_S dW_t$$

Les dynamiques de l'actif global A_t et du passif L_t sont liées par l'équation suivante :

$$dA_t = A_t [R_t + {}^t\omega {}^t\sigma_t \lambda] dt + A_t {}^t\omega {}^t\sigma_t dW_t - dL_t$$

où :

✓ σ_t est le vecteur des volatilités des actifs risqués $\sigma_t = (\sigma_S \quad \sigma_B \quad \sigma_{B^{Infl}})$

✓ ω est le vecteur des poids des actifs risqués $\omega = (\omega_S \quad \omega_B \quad \omega_{B^{Infl}})$

Sous la probabilité risque neutre Q , la valeur actuelle du passif L_t est égale à :

$$L_t = E^Q \left[\int_t^{T_0} e^{-\int_t^s r_u du} dV_s / F_t \right], t \leq T_0$$

Si nous considérons un modèle traitant d'un flux continu d'engagements, la dynamique de V devient :

$$dV_t = l_t dt.$$

Dans le cas d'un flux discret de prestations, cette dynamique s'écrit :

$$dV_t = \sum_{i=1}^N l_{t_i} dH_t^{t_i} \quad \text{avec } H_t^{t_i} = 1_{\{t \geq t_i\}}$$

où t_i représentent l'instant du $i^{ème}$ paiement relatif aux engagements.

Rappel. (Objectif de gestion financière dans une expertise LDI)

Nous souhaitons à nouveau maximiser le ratio de financement F_T en tenant compte du degré d'aversion du gestionnaire du fonds, à un instant quelconque T compris entre t et T_0 :

$$\max_w E[U(F_T)] / \Gamma_t$$

Nous admettons [cf. Karatzas et al.(1987), Cox and Huang (1989) et Van Binsbergen and Brandt (2007)] que la solution optimale w^* à ce problème s'écrit :

$$w_t^* = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (\alpha (T_0 - t) \sigma_t^{-1} \sigma_R + \sigma_t^{-1} \sigma_Y) + \frac{1}{\gamma} \sigma_t^{-1} \lambda$$

Résultat 9. (Décomposition du portefeuille d'actifs risqués en deux fonds)

Nous retrouvons le théorème de séparation en deux fonds LHP et PSP où la proportion d'actifs risqués w_t^* se décompose en :

$$w_t^{LHP} = (\alpha (T_0 - t) \sigma_t^{-1} \sigma_R + \sigma_t^{-1} \sigma_Y) \quad \text{et} \quad w_t^{PSP} = \sigma_t^{-1} \lambda$$

Le théorème de séparation reste toujours valable pour des modélisations plus fines de l'actif et du passif. Dans la théorie, ce résultat démontre la robustesse du montage LDI face à des actifs et des engagements fluctuants.

Remarque fondamentale. (Le risque de modèle en ALM)

La crise financière actuelle nous rappelle toutefois que l'économie réelle est une économie des extrêmes, dans laquelle intervient un « hasard sauvage ». Il est nécessaire d'utiliser des outils stochastiques modélisant cette sorte de hasard pour pouvoir gérer des risques réels avec efficacité. Les méthodes qui se servaient du « hasard sage » de la loi gaussienne (comme le LDI théorique) ont été largement utilisées au XXe siècle, avec les incidents qui en ont découlé (risque de modèle avéré). Dans l'avenir, des méthodes stochastiques performantes feront appel notamment à la théorie des valeurs extrêmes et aux processus stables non gaussiens de Lévy. A l'évidence, une analyse critique devra être effectuée sur ces nouveaux modèles complexes.

Plus généralement, la modélisation ALM est un travail prospectif qui présente des limites car il s'appuie sur des scénarios qui perpétuent généralement les tendances empiriques : la gestion ALM est soumise aux risques de simplification et de mauvaise interprétation, au risque de modèle à l'actif (évoqués ci-dessus) et au passif (comportements clientèle, hypothèses d'écoulement des rentes etc.), et au manque de précision et d'exhaustivité du système d'information de la caisse de retraite.

2.2. Analyse quantitative des risques de taux et d'inflation pour le LDI

2.2.1. Evaluation du risque de taux pour les obligations nominales et les swaps

Nous étudions trois cas possibles :

- ✓ La courbe des taux est plate et subit des translations uniformes dans le temps
- ✓ La courbe des taux est quelconque et subit des translations uniformes dans le temps.
- ✓ La courbe des taux est quelconque et subit des déformations quelconques dans le temps.

Nous prenons les notations suivantes :

- ✓ C le coupon de l'obligation
- ✓ N la valeur de remboursement du principal
- ✓ T la date d'échéance de l'obligation
- ✓ r le taux actuariel de l'obligation.

2.2.1.1. Hypothèse 1 : la courbe des taux est plate

Nous formulons les hypothèses $H1$ et $H2$ suivantes :

$H1$ - La courbe des taux est plate : le prix d'une obligation dépend d'un taux unique r .

$H2$ -La courbe des taux subit une translation uniforme dans son ensemble : quelque soit leur maturité, les taux subissent des variations identiques.

Nous définissons plusieurs outils d'analyse du risque de taux : la sensibilité et la convexité d'un titre obligataire.

Définition 2. (La duration de Macauley d'une obligation) :

La duration D d'une obligation se définit comme la moyenne des échéances de chacun des flux, pondérée par les proportions des flux dans la valeur globale du titre :

$$D = t_1 \times \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} \cdot \frac{1}{P} + t_2 \times \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}} \cdot \frac{1}{P} + \dots + t_T \times \frac{C_T}{(1+r)^{t_T}} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i \cdot C_i}{(1+r)^{t_i}}$$

Résultat 10. (La duration comme date d'immunisation contre le risque de taux)

La duration s'interprète comme la date future à partir de laquelle l'obligation est immunisée contre le risque de taux. Cette définition est valable uniquement dans le cas où se produit une variation du taux avant la date de paiement du premier coupon et que celui-ci conserve sa nouvelle valeur jusqu'à la duration.

Dans le cas d'une unique hausse des taux avant le versement du premier flux, la plus-value réalisée sur les coupons reçus capitalisés à un taux supérieur compensera la moins-value enregistrée sur les flux postérieurs actualisés si le détenteur de l'obligation conserve son titre jusqu'à sa duration. Un scénario de mouvement dynamique des taux conduit à une étude plus complexe et l'immunisation n'est plus valide. Si les taux baissent durant la période de versement des coupons futurs antérieurs à la duration, puis, juste avant la date où l'obligation est évaluée, les taux montent soudainement, le détenteur du titre accusera une double perte, au moment de la capitalisation, à la chute des taux, puis, au moment de l'actualisation, à la montée.

Définition 3. (La sensibilité d'une obligation)

La sensibilité S mesure la variation relative du prix d'une obligation pour une variation de taux d'intérêt de 100 points de base.

$$\frac{dP}{P} = -S dr$$

$$S = -\frac{d(\ln P)}{dr} = \frac{1}{P} \times \frac{-dP}{dr} = \frac{1}{1+r} \times D = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i \cdot C_i}{(1+r)^{t_i+1}}$$

Résultat 11. (Relation fondamentale entre ΔP et S)

Nous obtenons une approximation de la variation ΔP pour une variation de taux infinitésimale Δr :

$$\frac{\Delta P}{P} = -S \cdot \Delta r.$$

Par exemple, le prix d'une obligation ayant une sensibilité de -5 baissera de 5% lorsque les taux augmenteront de 1%.

Nous calculons les sensibilités des obligations utiles pour notre futur montage LDI :

✓ pour une obligation à taux fixe : nous avons $P = \frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times \frac{1}{(1+r)^T}$ et

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{C}{r^2} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) + \frac{T}{(1+r)^{T+1}} \left(\frac{C}{r} - N\right).$$

La sensibilité de ce titre est donc égale à :

$$S = \frac{1}{P} \left(\frac{C}{r^2} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) + \frac{T}{(1+r)^{T+1}} \left(\frac{C}{r} - N\right) \right)$$

✓ pour une rente perpétuelle : en faisant tendre $T \rightarrow \infty$, $\frac{T}{(1+r)^{T+1}} \rightarrow 0$

$$\text{et avec } P = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{C}{(1+r)^i} = \frac{C}{r}$$

nous obtenons une sensibilité égale à :

$$S = \frac{1}{P} \times \frac{C}{r^2} = \frac{1}{r}$$

✓ pour une obligation zéro-coupon : nous avons $P = \frac{N}{(1+r)^T}$, $C = 0$ et nous trouvons une sensibilité égale à :

$$S = \frac{T}{(1+r)}$$

Remarque importante : la sensibilité est indépendante de N . Elle ne capture pas l'« effet poids » du flux de remboursement. **Ainsi, pour comparer les sensibilités de zéro-coupons (ie. d'obligations) composant un portefeuille, il convient d'observer leur sensibilité pondérée par leur poids relatif dans le portefeuille :**

$$S^{Pond} = \frac{P^{Z.C}}{P} \frac{T}{(1+r)}$$

La duration modifiée mesure la sensibilité de la valeur d'un titre aux fluctuations des taux mais seulement pour de petites variations. Si les variations deviennent importantes, sa valeur change. C'est pourquoi, la sensibilité est qualifiée de mesure locale. La convexité va mesurer la variation de cette sensibilité quand les taux varient. A cause de la convexité, la valeur du titre change de manière non linéaire quand les taux se modifient : l'effet d'une baisse des taux de 8 % à 7 % est plus faible que celui d'une baisse de 6 % à 5 %. La sensibilité suffit pour apprécier l'incidence d'une petite variation de taux sur la valeur d'un titre. Pour une variation de taux plus importante, il faudra tenir compte des variations de cette sensibilité, c'est-à-dire de la convexité.

Nous obtenons une approximation plus fine de la variation ΔP pour une petite variation de taux Δr en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 2 lorsque $r \in \mathcal{V}(r_0)$:

$$P(r) = P(r_0) + P'(r_0)(r-r_0) + \frac{1}{2} P''(r_0)(r-r_0)^2 + o((r-r_0)^2) \text{ d'où :}$$

$$dP(r) \equiv P'(r)dr + \frac{P''(r)}{2} dr^2 \text{ et } \frac{dP(r)}{P(r)} \equiv \frac{P'(r)}{P(r)} dr + \frac{1}{2} \frac{P''(r)}{P(r)} dr^2$$

Définition 4. (La convexité d'une obligation)

La convexité C mesure la variation de la sensibilité par rapport aux taux d'intérêt :

$$\frac{dP}{P} = -S \cdot dr + \frac{C}{2} dr^2$$

$$C = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(1+r)^2} \sum_{i=1}^T \frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+r)^{t_i}} \text{ et } \frac{dP(r)}{P(r)} \equiv -S dr + \frac{C}{2} dr^2.$$

Résultat 12. (Relation fondamentale entre ΔP , S et C)

Par un développement de Taylor à l'ordre 2 sur P , nous obtenons une approximation plus fine de la variation ΔP pour une variation de taux Δr :

$$\frac{\Delta P}{P} = -S \cdot \Delta r + \frac{C}{2} \Delta r^2$$

Dans la littérature, nous trouvons d'autres définitions de la convexité comme celle de Macauley

$C_{Macauley} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i^2 C_i}{(1+r)^{t_i}}$ correspondant au temps quadratique moyen de paiement des cash flows pondéré par la valeur actuelle des flux (les $\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, $i = 1, \dots, T$).

2.2.1.2. Hypothèse 2 : la courbe des taux subit une translation uniforme

En notant ${}_0R_i$ le taux actuariel zéro-coupon annualisé d'échéance t_i , nous formulons les hypothèses suivantes :

H1- la courbe des taux ${}_0R_i$ est quelconque : la valeur d'une obligation est sensible à plusieurs taux de maturités différentes.

H2 - La courbe des taux ${}_0R_i$ subit une translation uniforme dans son ensemble : quelque soit leur maturité, les taux subissent des variations identiques.

Une obligation couponnée (ou un échéancier d'engagement) peut être assimilée à un portefeuille de zéro-coupons de maturités différentes. Son prix n'est plus sensible à un unique taux mais à une multitude de taux :

$$P({}_0R_1, \dots, {}_0R_T) = \sum_{i=1}^T \frac{C_i}{(1+{}_0R_i)^{t_i}}$$

Définition 5. (Sensibilité d'un zéro-coupon)

Si nous prenons uniquement l'hypothèse H1 d'une courbe des taux quelconque, nous pouvons définir seulement la sensibilité relativement à un zéro-coupon car cet actif est sensible à un seul taux d'intérêt (de maturité l'échéance de ce dernier) :

$$\frac{\Delta P^{Z.C}}{P^{Z.C}} = - S^{Z.C} \cdot \Delta R^{Z.C}$$

Il est possible toutefois de définir la sensibilité d'une obligation P par rapport à une variation globale des taux, si nous faisons l'hypothèse H2 d'une déformation uniforme de la courbe des taux. En effet, ce titre pouvant être décomposé en un portefeuille de zéro-coupon, nous obtenons dans le cas général :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = \sum_{i=1}^T \left(-S^{Z.Ci} \cdot P^{Z.Ci} \Delta {}_0R_i \right)$$

Or, sous l'hypothèse H2, nous avons : $\Delta {}_0R_1 = \dots = \Delta {}_0R_i = \dots = \Delta {}_0R_T \quad \forall i \in [1, T]$.

Il s'ensuit que :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = \left(\sum_{i=1}^T -S^{Z.Ci} \cdot P^{Z.Ci} \right) \Delta {}_0R_j \text{ et ce, } \forall j \in [1, T]$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = - \left(\sum_{i=1}^T S^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} \right) \Delta {}_0R_j \text{ et ce, } \forall j \in [1, T]$$

Nous remarquons que la quantité $\left(\sum_{i=1}^T S^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} \right)$ reste inchangée quelque soit le taux ${}_0R_i \quad i \in [1, T]$ choisi.

Nous définissons alors la sensibilité d'une obligation couponnée (et plus généralement celle d'un portefeuille obligataire) à une variation globale des taux :

Définition 6. (Sensibilité d'une obligation couponnée)

La sensibilité d'un portefeuille obligataire S_p est égale à la somme des sensibilités pondérées des titres le constituant :

$$S_p = \sum_{i=1}^N \omega_i S_i$$

où S_i est la sensibilité de l'obligation n°i et $\omega_i = \frac{P_i}{P_p}$ le poids de celle-ci dans le portefeuille.

En poussant le raisonnement à l'ordre 2, comme $\Delta_0 R_1 = \dots = \Delta_0 R_T = \dots = {}_0 R_T \quad \forall i \in [1, T]$ et $(\Delta_0 R_1)^2 = \dots = (\Delta_0 R_T)^2 = \dots = ({}_0 R_T)^2 \quad \forall i \in [1, T]$, nous pouvons définir également la convexité d'une obligation couponnée (et plus généralement celle d'un portefeuille obligataire) à une variation globale des taux :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = - \left(\sum_{i=1}^T S^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} \right) \Delta_0 R_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^T C^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} \right) (\Delta_0 R_j)^2 \quad \text{et ce, } \forall j \in [1, T]$$

Définition 7. (Convexité d'une obligation couponnée)

La convexité d'un portefeuille obligataire C_p est égale à la somme des convexités pondérées des titres le constituant:

$$C_p = \sum_{i=1}^N \omega_i C_i$$

où C_i est la convexité de l'obligation n°i et $\omega_i = \frac{P_i}{P_p}$ le poids de celle-ci dans le portefeuille.

Application. Une obligation couponnée, pouvant être assimilée à un portefeuille de zéro-coupons, a une duration D (ie. sensibilité S ou convexité C) égale à la somme des durations (ie. sensibilités ou convexités) des zéro-coupons la constituant. Ainsi, sous l'hypothèse de variations uniformes des ${}_0 R_i$ dans le temps, les duration sensibilité et convexité d'une obligation (ou d'un échéancier d'engagement C_i) sont respectivement égales à:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i \cdot C_i}{(1+{}_0 R_i)^{t_i}}, \quad S = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i \cdot C_i}{(1+{}_0 R_i)^{t_i+1}} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \frac{t_i(t_i+1)C_i}{(1+{}_0 R_i)^{t_i+2}}$$

où t_i est la date de paiement des flux C_i de l'obligation, ${}_0 R_i$ le taux zéro-coupon d'échéance t_i et

$\omega_i = \frac{P^{Z.Ci}}{P} = \frac{C_i}{P(1+{}_0 R_i)^{t_i}}$ le poids relatif du zéro-coupon C_i d'échéance t_i dans l'obligation.

Hypothèse 3: la courbe des taux subit une transformation quelconque

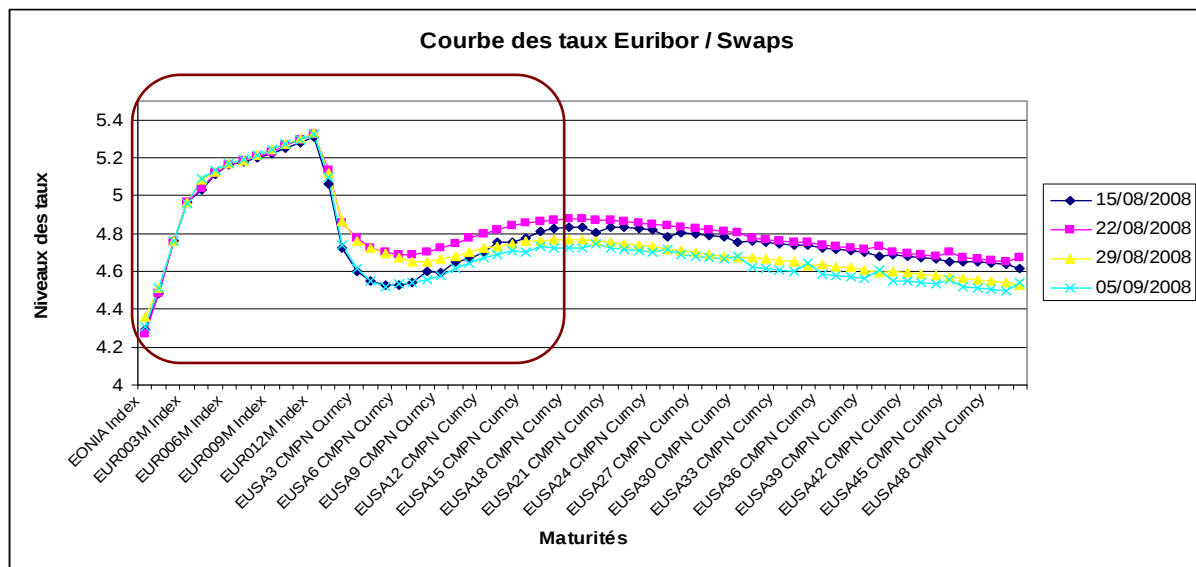
Nous formulons les hypothèses $H1$ et $H2$ suivantes :

$H1$ - La courbe des taux ${}_0R_i$ est quelconque: la valeur d'une obligation est sensible à plusieurs taux de maturités différentes.

$H2$ - La courbe des taux ${}_0R_i$ subit des déformations non uniformes: deux taux de maturités différentes ne subissent pas nécessairement les mêmes variations.

Ce couple d'hypothèses est le plus réaliste au vu des variations historiques des courbes de taux. Au contraire, l'hypothèse de déformation uniforme de la courbe est beaucoup trop restrictive.

Graphique 6. (Déformation de la courbe des taux et interprétations macroéconomiques)



Résultat 13. (Déformation de la courbe des taux Euro dans un contexte de crise de liquidité)

Nous constatons que la courbe des taux Euro ne se déforme pas de manière uniforme au cours du temps, malgré le fait que nous ayons pris un pas temporel de prélèvement des taux « petit » (c'est de l'hebdomadaire) et une durée d'observation réduite (sur un mois). Toutefois, il est important de signaler que notre période d'observation se situe en plein marasme financier : les taux courts sont extrêmement hauts (le pic pour l'Euribor 3M sera atteint un mois plus tard, le 08 octobre 2008, à 5,39 % !) et la courbe a une forme anormale. La partie courte de la courbe n'a pas évolué car elle dépend principalement des directives de la Banque Centrale Européenne qui n'a pas communiqué durant cette période. Cependant, la partie longue de la courbe a été plus volatile car les déterminants des taux longs sont beaucoup plus complexes à appréhender (anticipations sur l'inflation, demande des investisseurs institutionnels pour les produits de taux, etc.).

Le prix d'une obligation est sensible à plusieurs taux zéro-coupon de maturités différentes :

$$P({}_0R_1, \dots, {}_0R_T) = \sum_{i=1}^T \frac{C_i}{(1+{}_0R_i)^{t_i}}$$

Nous avons toujours les expressions générales suivantes :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = \sum_{i=1}^T \left(-S^{Z.Ci} \cdot P^{Z.Ci} \Delta {}_0R_i \right)$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^T \Delta P^{Z.Ci} = - \left(\sum_{i=1}^T S^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} \Delta_0 R_i \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^T C^{Z.Ci} \cdot \frac{P^{Z.Ci}}{P} (\Delta_0 R_i)^2 \right)$$

mais nous perdons les égalités qui permettent de construire les indicateurs de sensibilité et de convexité pour une variation globale des taux :

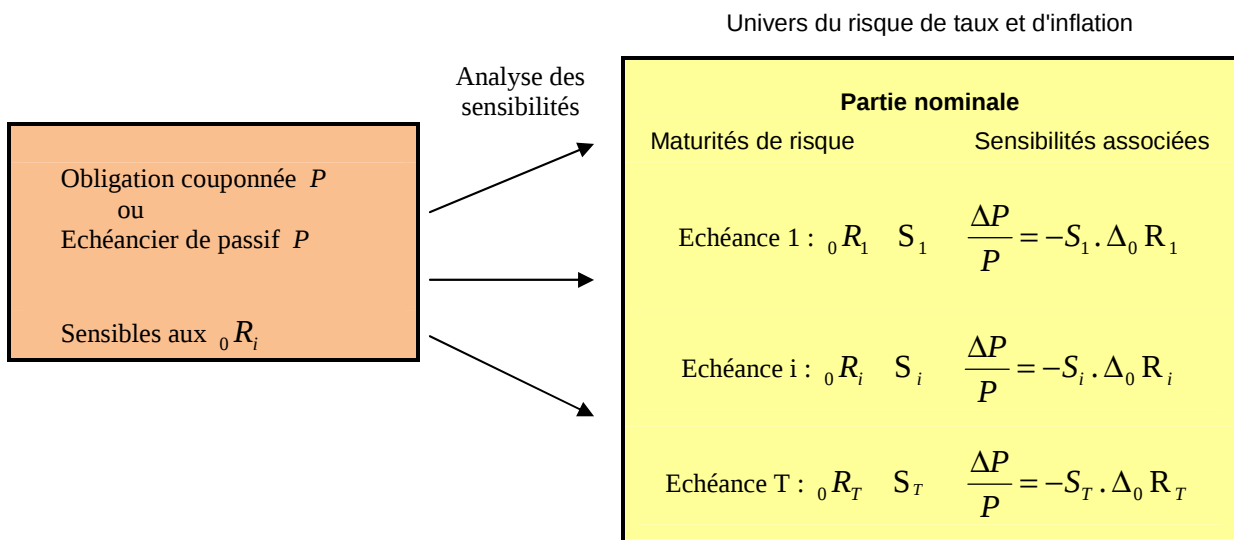
$$\Delta_0 R_1 = \dots = \Delta_0 R_i = \dots = \Delta_0 R_T \quad \forall i \in [1, T]$$

$$(\Delta_0 R_1)^2 = \dots = (\Delta_0 R_i)^2 = \dots = (\Delta_0 R_T)^2 \quad \forall i \in [1, T]$$

Ainsi, sous ces hypothèses réalistes, nous ne pouvons définir une sensibilité et une convexité pour une variation globale de la courbe des taux.

Nous devons alors effectuer une cartographie du risque, en étudiant toutes les sensibilités de P relatives aux taux ${}_0 R_i \quad \forall i \in [1, T]$:

Graphique 7. (Analyse fine du risque de taux sur plusieurs maturités de risque)



Recueil des sensibilités de P : $S_1, S_2, \dots, S_T$

Si nous souhaitons effectuer une immunisation précise du risque de taux, il est indispensable de calculer les sensibilités de l'actif et du passif sur plusieurs maturités. On constitue ainsi une cartographie du risque de taux pour notre actif et notre passif.

La sensibilité ne capturant pas l'« effet poids » des flux de versement (cf. 2.2.1.1), nous devons travailler avec les sensibilités pondérées par leur poids respectif dans le portefeuille :

Résultat fondamental 14. (Une obligation et son vecteur de sensibilités pondérées associé)

Dans un environnement de déformation quelconque des taux, il est fondamental d'associer à un titre obligataire P (ou un échéancier de passif) un vecteur de sensibilités pondérées

$(S_1^{Pond} \quad S_2^{Pond} \quad \dots \quad S_T^{Pond})$ où $S_i^{Pond} = \frac{P^{Z.Ci}}{P} S_i = \frac{P^{Z.Ci}}{P} \frac{t_i}{(1+{}_0 R_i)}$ mesure la sensibilité pondérée du

titre à la variation du taux de maturité $t_i \quad {}_0 R_i$ pour avoir une analyse fine de son risque global de taux.

2.2.1.3. Les swaps et leur sensibilité au risque de taux

Avant d'exposer les caractéristiques d'un swap de taux, il convient au préalable d'analyser l'univers des obligations à taux variable. Les montants d'intérêt de ces titres ne sont pas évalués à partir d'un taux facial fixé dès le départ, mais à partir d'un indice de marché. Certains indices comme l'Euribor par exemple, peuvent être examinés quelques jours avant le commencement de la période sur laquelle s'évalue le coupon, c'est-à-dire avant le versement du coupon précédent. L'obligation est dite à taux révisable avec un coupon prédéterminé. La présentation complète des obligations à taux variables nécessiterait de connaître les indices employés, l'évaluation de la marge actuarielle, le procédé de cotation sur la courbe des taux et les modes d'évaluation des coupons pleins et courus.

La plupart des obligations à taux variable sont telles que la périodicité des versements concorde avec la durée sur laquelle porte l'indice employé, si bien que nous pouvons assimiler la totalité de la structure à une succession d'obligations zéro-coupon en roulement. Tout se déroule comme si, à chaque date de versement, l'obligation arrivait à échéance, les intérêts étant versés au taux indiqué, le capital restitué puis réemprunté à sa valeur nominale au nouveau taux de marché pour une période supplémentaire. Ainsi, l'obligation à taux variable retrouve sa valeur d'origine, habituellement le pair, à chaque date de versement des coupons.

Une étude en terme de projection des taux futurs permet de retrouver analytiquement notre résultat. En notant ${}_tR_T$ le taux actuariel zéro-coupon d'une durée T prélevé à la date t , la valeur en pourcentage d'une obligation à taux révisable annuellement V est, à la date de paiement d'un coupon :

$$P = \frac{{}_0R_1}{1+{}_0R_1} + \frac{{}_1R_1}{(1+{}_0R_2)^2} + \dots + \frac{{}_{n-2}R_1}{(1+{}_0R_{n-1})^{n-1}} + \frac{1+{}_{n-1}R_1}{(1+{}_0R_n)^n}$$
$$P = \frac{{}_0R_1}{1+{}_0R_1} + \frac{{}_1R_1}{(1+{}_0R_1)(1+{}_1R_1)} + \dots + \frac{1+{}_{n-1}R_1}{(1+{}_0R_1)(1+{}_1R_1)\dots(1+{}_{n-1}R_1)}$$

En simplifiant l'expression précédente de droite à gauche, nous obtenons :

$$P = 1$$

L'obligation à taux variable retrouve bien le pair, à chaque date de versement de ses coupons.

Résultat 15. (Analogie et opposition entre les obligations à taux fixe et à taux variable)

A chaque date de versement de coupon :

- le prix de l'obligation à taux fixe s'adapte à la valeur du taux de marché et le coupon reste constant ;
- le coupon de l'obligation à taux variable s'adapte à la valeur du taux de marché et le prix reste constant (le pair habituellement).

Lorsque la date de valorisation n'est pas celle du versement d'un coupon, le résultat précédent reste utilisable : il suffit de se placer à la date du prochain versement pour s'assurer que l'obligation coûtera le pair augmenté de la valeur du coupon. Il suffira alors, pour calculer la valeur du titre, d'actualiser avec le taux actuariel zéro-coupon correspondant à cette maturité, le flux composé du pair et du montant du prochain coupon. Ce flux est toujours connu pour une obligation à taux révisable.

En prenant pour instants $t = 0$ et $t = 1$ les dates de versement du dernier et du prochain coupon de l'obligation, nous obtenons :

$$P_t = \frac{1 + {}_0R_1}{(1 + {}_tR_\tau)^\tau}, t \in]0,1[\text{ et } P_t = 1 \text{ pour } t = 0 \text{ ou } 1.$$

où :

$\tau = 1 - t$ est la période résiduelle entre la date de valorisation t et celle du versement du prochain coupon.

${}_0R_t$ est déjà connu à la date t pour les obligations à taux révisable.

Résultat 16. (Obligation à taux révisable (FRN))

Cette obligation est comparable à un zéro-coupon d'échéance $t = 1$ et de nominal $1 + {}_0R_1$

Corollaire 1. (Duration d'une obligation à taux révisable)

La duration d'un zéro-coupon étant égale à la maturité de ce dernier, celle d'un FRN à la date pied de coupon est donc égale à la période séparant deux versements de coupons. Un FRN versant des coupons semi annuellement a une duration de 6 mois. Lorsque la date de valorisation est différente de celle du versement d'un coupon, la duration est égale à la durée résiduelle jusqu'au versement du prochain coupon.

Corollaire 2. (Sensibilité d'une obligation à taux révisable)

Le prix P n'étant sensible qu'à un seul taux nominal ${}_tR_\tau$, nous définissons la sensibilité S_τ de P par rapport à ce taux :

$$\frac{dP_t}{P_t} = -S_\tau dR_\tau \quad \text{avec } S_\tau = \frac{1}{1 + {}_tR_\tau} \text{ pour } \tau \in]0,1[\text{ et } S_\tau = 0 \text{ pour } t = 0 \text{ ou } 1$$

Nous retrouvons la formule d'un zéro-coupon d'échéance $t = 1$.

Nous rappelons qu'un swap de taux est un contrat par lequel deux contreparties s'engagent à se verser mutuellement des flux financiers (appelés jambes du swap) calculés sur un montant notionnel N , sur une durée déterminée $[0, T]$, suivant une fréquence f , et une base de calcul calendaire.

Définition 8. (Prix d'un swap)

Un swap peut être vu comme un portefeuille composé d'une obligation à taux fixe et d'une obligation à taux variable :

Rentrer dans un swap receveur (le taux variable est reçu et le taux fixe est payé) est équivalent à vendre une obligation à taux fixe P_t^{fixe} et à acheter une obligation à taux variable $P_t^{variable}$. Ainsi, nous avons la relation suivante sur les prix :

$$V_t^{swap} = P_t^{variable} - P_t^{fixe}$$

Rentrer dans un swap payeur (le taux variable est payé et le taux fixe est reçu) est équivalent à vendre une obligation à taux variable et à acheter une obligation à taux fixe. Ainsi, nous avons la relation suivante sur les prix :

$$V_t^{swap} = P_t^{fixe} - P_t^{variable}$$

Définition 9. (Sensibilité d'un swap dans le cas d'une translation uniforme des taux)

La sensibilité du swap se définit comme la différence entre la sensibilité de l'obligation à taux variable et celle de l'obligation à taux fixe :

Pour un swap receveur, la sensibilité d'un swap est égale à la différence entre la sensibilité de l'obligation à taux fixe S_t^{fixe} et celle de l'obligation à taux variable $S_t^{variable}$:

$$S_t^{swap} = S_t^{variable} - S_t^{fixe}$$

Pour un swap payeur, la sensibilité d'un swap est égale à la différence entre la sensibilité de l'obligation à taux variable et celle de l'obligation à taux fixe :

$$S_t^{swap} = S_t^{fixe} - S_t^{variable}$$

Définition 10. (Sensibilité d'un swap dans le cas d'une déformation quelconque des taux)

Dans un environnement de déformation quelconque des taux, nous associons au swap de taux le vecteur de sensibilités suivant :

Pour le swap payeur en t : $(S_1^{Pond}, S_2^{Pond}, \dots, S_T^{Pond}, -S_\tau)$

Pour le swap receveur en t : $(-S_1^{Pond}, -S_2^{Pond}, \dots, -S_T^{Pond}, S_\tau)$

où les S_i^{Pond} ($i = 1, \dots, T$) sont les sensibilités pondérées de P^{fixe} aux variations des taux de maturités $t_i R_i$

S_τ est la sensibilité de $P^{variable}$ à la variation du taux ${}_t R_\tau$

Les expressions analytiques des sensibilités pondérées S_i^{Pond} ($i = 1, \dots, T$) sont celles du paragraphe 2.2.1.2 appliquées au cas d'un zéro-coupon d'échéance t_i .

Un exemple concret de calculs des caractéristiques d'un swap peut être trouvé dans les livres *Mathématiques des marchés financiers* de J-M Delbarade et *Gestion des risques de taux d'intérêt et de change* de M. Bellalah. En pratique, les banques d'investissement et les plateformes financières nous fournissent directement les caractéristiques V_t^{swap} , D_t^{swap} et S_t^{swap} .

2.2.2. Les produits indexés sur l'inflation et technique de titrisation

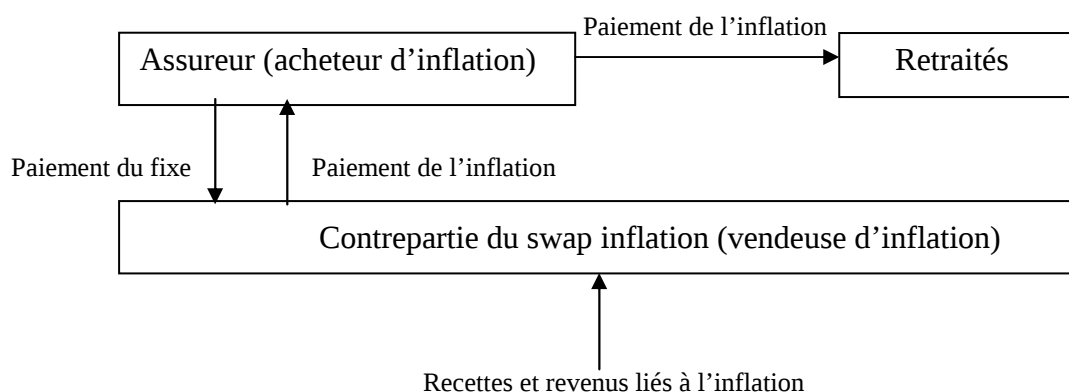
2.2.2.1. Le marché et les déterminants de l'inflation

L'inflation correspond à une hausse globale du niveau des prix, générant une baisse durable du pouvoir d'achat de la monnaie. Elle est calculée à partir des indices des prix à la consommation CPI.

Nous avons assisté, ces dix dernières années, à une forte demande de produits permettant de se couvrir contre le risque inflationniste. Un marché d'acheteurs et de vendeurs d'inflation s'est ainsi créé :

- ✓ Les acheteurs d'inflation sont des institutions qui voient leurs engagements augmenter lorsqu'une hausse de l'inflation survient. C'est le cas notamment des fonds de pension et des assureurs vie qui assurent à leurs clients une pension indexée sur l'inflation.
- ✓ Les vendeurs d'inflation sont des institutions qui voient leurs recettes augmenter lorsqu'une hausse du taux d'inflation survient. C'est le cas des pouvoirs publics récoltant l'impôt, des entreprises de service public et des entreprises immobilières. Exemple original, la BBC, chaîne de télévision publique anglaise financée en grande partie par la redevance, est une vendeuse d'inflation.

Graphique 8. (Le marché de l'inflation)



Le taux d'intérêt nominal est égal au taux d'intérêt réel, quantité de biens qu'un individu désire recevoir avec certitude dans le futur en contrepartie de son accord de prêter une unité de ces biens, corrigé de l'inflation. En termes mathématiques, cela nous donne :

$$(1+R_t) = (1+r_t) (1+ BEI_t)$$

où R_t , r_t et BEI_t sont respectivement le taux d'intérêt nominal, le taux d'intérêt réel et le taux d'inflation brut prévisionnel sur la période t .

Résultat 17. (Formule de Fisher)

En approximant la quantité $(1+r_t) (1+BEI_t)$ par $1 + r_t + BEI_t$, nous obtenons l'approximation de Fisher :

$$R_t = r_t + BEI_t$$

Le taux BEI (ou « point mort inflation » en français) représente le niveau d'inflation moyen anticipé par le marché sur la période considérée. Pour une OATi, le rendement actuariel réel sera égal au taux actuariel nominal de l'OAT de mêmes caractéristiques (même maturité, même fréquence de paiements des coupons, même notation) diminué du BEI correspondant.

Un investisseur qui est d'accord sur les anticipations de l'inflation n'a aucun intérêt à privilégier une OATi plutôt que l'OAT de mêmes caractéristiques et vice et versa : les rendements réels et nominaux sont équivalents pour les marchés. Par contre, si ce dernier prévoit une poussée inflationniste plus importante que celle anticipée par le marché, il a tout intérêt à se tourner vers les obligations indexées : si son scénario se réalise, l'OATi sera plus rémunératrice que l'OAT nominale.

Définition 11. (Le taux *Break Even Inflation* et l'inflation pure)

Le taux BEI est la résultante de l'inflation pure I et d'une prime de risque pr exigée par les investisseurs au titre du risque inflationniste:

$$(1 + BEI_t) = (1 + I_t) \cdot (1 + pr)$$

Le marché travaille exclusivement avec les taux d'inflation bruts BEI car la prime de risque pr est très difficile à appréhender.

Les sociétés de gestion ont recours à une large palette de produits indexés pour développer une solution structurée ALM, notamment les titres obligataires et les swaps indexés sur l'inflation.

2.2.2.2. Les obligations indexées sur l'inflation et le modèle de Jarrow Yildirim

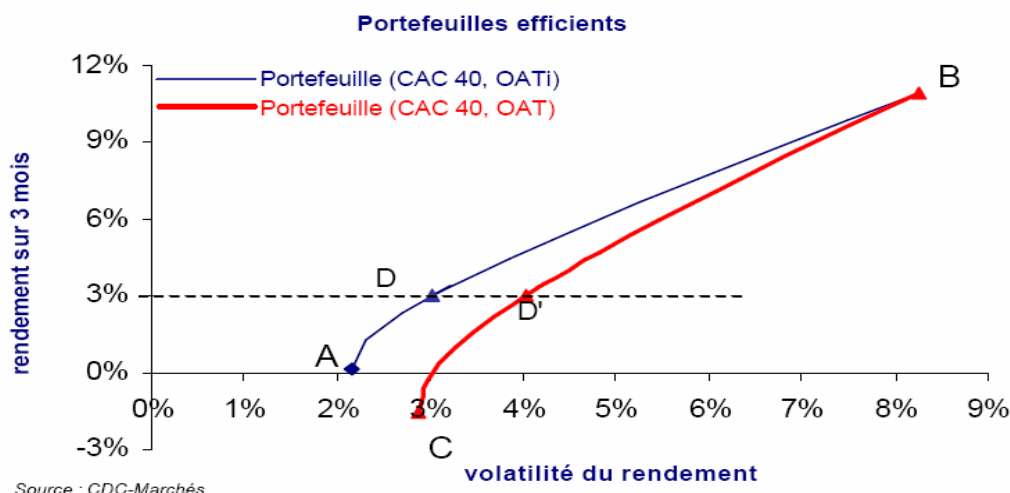
En septembre 1998, l'Etat français a émis pour la première fois une obligation assimilable au Trésor indexée sur l'indice des prix à la consommation. En octobre 2001, il lança une émission d'OAT indexée sur un indice des prix de la zone euro : l'IPCH.

La finalité des OATi (ou OATEi) est de protéger ses détenteurs de la baisse réelle des revenus qu'ils perçoivent (coupons et valeur faciale). Ces produits présentent de nombreux avantages pour l'Etat, comme une gestion plus rigoureuse et une meilleure diversification de la dette publique.

Une étude menée par la Caisse des Dépôts et Consignation [2000] nous enseigne que, outre les qualités protectrices contre l'inflation, les OATi présentent deux autres particularités que nous retrouverons et exploiterons lors de la constitution de notre allocation LDI :

- ✓ Les obligations indexées ont pour caractéristique un rendement historique moins volatil que celui des obligations nominales. Ainsi, le fait d'introduire des obligations indexées inflation dans une allocation permet de réduire sa volatilité globale aux taux réels.
- ✓ Les obligations indexées ont une faible corrélation historique avec d'autres supports d'investissement (actions, obligations d'Etat non indexées, etc.). Elles constituent ainsi un bon outil de diversification pour un portefeuille boursier.

Pour ces deux raisons, l'étude montre que la substitution d'obligations nominales par des titres indexés permet d'atteindre des portefeuilles de meilleur rendement/risque :

Graphique 9. (Frontières efficaces et obligations indexées)

Résultat 18. (Impact des titres indexés sur la frontière efficiente)

Le portefeuille composé d'actions et d'obligations indexées D offre un rendement identique au portefeuille D' pour une volatilité de rendement moins grande. La frontière efficiente s'améliore lorsque nous intégrons dans nos portefeuilles des titres obligataires indexés sur l'inflation.

Les obligations indexées sur l'inflation ont une attitude défensive lorsqu'une hausse des taux se produit. En effet, les taux évoluent généralement en fonction des resserrements monétaires et des anticipations inflationnistes. Or, ces actifs nous protègent contre ce dernier risque par une réévaluation de leurs coupons. C'est pourquoi, ils se déprécient moins fortement que les obligations nominales lorsqu'une hausse des taux est anticipée.

Nous avons rappelé plusieurs grandes caractéristiques du titre obligataire indexé sur l'inflation. Elles font de ce dernier un actif très intéressant dans une optique d'adossé actif passif : il protège les caisses de retraite contre l'inflation, il diversifie son allocation et sauvegarde ses objectifs de long terme.

Nous présentons le célèbre modèle de R. Jarrow et Y. Yildirim [2003] proposant un pricing de zéro-coupon indexé sur l'inflation. Notre solution LDI intégrera dans son allocation des produits obligataires indexés. Le modèle de Jarrow-Yildirim nous permettra d'apprécier leur valeur de marché.

Définition 12. (Relation entre le taux court et les prix d'un zéro-coupon)

$P_n(t, T)$ le prix à l'instant $t > t_0$ d'un zéro-coupon unitaire d'échéance T émis en t_0 en euros courants

$P_r(t, T)$ le prix à l'instant $t > t_0$ d'un zéro-coupon unitaire réel d'échéance T émis en t_0 en euros constants

$f_n(t, \cdot)$ et $f_r(t, \cdot)$ les taux courts (instantanés) forward nominal et réel prélevés en t

La relation liant les prix de ces zéro-coupons avec les taux instantanés forward en t s'écrit :

$$P_n(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_n(t, v) dv\right) \text{ et } P_r(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_r(t, v) dv\right)$$

Si $t = t_0$, alors $f_n(t, \cdot)$ et $f_r(t, \cdot)$ sont les taux courts (instantanés) nominal et réel spot.

Rappel. (Prix en euros courants des obligations nominale et inflation)

Le prix en euros courants des obligations nominales à taux fixe est, en t :

$$B_n(t) = \sum_{j=1}^T CP_n(t, j) + FP_n(t, T),$$

Le prix en euros courants des obligations zéro-coupon indexées (émises en t_0 et versant 1 à l'échéance T) est, en t :

$$P_{\text{infl}}(t, T) = 1 \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, T).$$

Le prix en euros courants des obligations indexées (émises en t_0) est, en t :

$$B_{\text{Infl}}(t) = \sum_{j=1}^T C \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, j) + F \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, T)$$

En notant P la probabilité historique, nous supposons que :

- ✓ les taux nominaux, les taux réels et l'inflation sont mutuellement corrélés :

$$d \langle W_n, W_r \rangle_t = \rho_{n,r} dt, d \langle W_I, W_r \rangle_t = \rho_{I,r} dt \text{ et } d \langle W_I, W_n \rangle_t = \rho_{I,n} dt$$

- ✓ les taux forward suivent les dynamiques suivantes sous P :

$$df_n(t, T) = a_n(t, T) dt + \sigma_n(t, T) dW_n(t)$$

$$df_r(t, T) = a_r(t, T) dt + \sigma_r(t, T) dW_r(t)$$

où $f_n(0, T)$ et $f_r(0, T)$ sont renseignés par une plateforme financière.

- ✓ l'indice inflation suit la dynamique suivante sous P :

$$dI(t) = \mu_I(t) I(t) dt + \sigma_I(t) I(t) dW_I(t)$$

où $I(0)$ est renseigné par une plateforme financière

Lorsque nous faisons l'hypothèse que les marchés sont complets et qu'il y a une absence d'opportunités d'arbitrage, il existe une unique mesure de probabilité Q équivalente à la probabilité historique P telle que $\frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}$, $\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}$ et $\frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$ sont des Q -martingales.

La probabilité Q est appelée probabilité risque neutre et elle est définie par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{F_t} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\sum_{k \in \{n, r, I\}} \lambda_k(s) dW_k(s), \sum_{k \in \{n, r, I\}} \lambda_k(s) dW_k(s) \right) + \sum_{k \in \{n, r, I\}} \int_0^t \lambda_k(s) dW_k(s) \right)$$

Nous déduisons le Q -brownien associé par le théorème de Girsanov :

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{W}_n \\ \tilde{W}_r \\ \tilde{W}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_n - \int_0^t \lambda_n(s) ds \\ W_r - \int_0^t \lambda_r(s) ds \\ W_I - \int_0^t \lambda_I(s) ds \end{pmatrix}$$

Les processus $\frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}$, $\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}$ et $\frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$ étant des Q -martingales, le drift de leur processus sous la probabilité Q doit être nul. Nous en déduisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_n(t, T) &= \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, s) ds - \lambda_n(t) \right) \\ a_r(t, T) &= \sigma_r(t, T) \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \lambda_r(t) - \sigma_I(t) \rho_{rI} \right) \\ \mu_I(t) &= r_n(t) - r_r(t) - \sigma_I(t, T) \lambda_I(t). \end{aligned}$$

Nous déduisons de ces relations, les expressions fondamentales sous Q des dynamiques $P_n(t, T)$, $P_r(t, T)$ et $P_{Infl}(t, T)$. Ces équations permettent d'évaluer des produits cash (obligations indexées sur l'inflation) et dérivés (warrants ayant pour sous-jacent l'inflation) car leur processus de prix actualisé est une martingale sous la probabilité Q :

Résultat 19. (Dynamiques sous Q des prix $P_n(t, T)$, $P_r(t, T)$ et $P_{Infl}(t, T)$)

La dynamique du taux instantané forward s'écrit :

$$df_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left[\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \rho_{rI} \sigma_I(t) \right] dt + \sigma_r(t, T) d\tilde{W}_r(t)$$

La dynamique du niveau de l'inflation s'écrit :

$$dI(t) = [r_n(t) - r_r(t)] I(t) dt + \sigma_I(t) I(t) d\tilde{W}_I(t)$$

La dynamique en euros courants du zéro-coupon unitaire nominal s'écrit :

$$dP_n(t, T) = r_n(t) P_n(t, T) dt - \int_t^T \sigma_n(t, s) P_n(t, T) d\tilde{W}_n(t)$$

La dynamique en euros courants du zéro-coupon unitaire réel s'écrit :

$$dP_{Infl}(t, T) = r_n(t) P_{Infl}(t, T) dt + \sigma_I(t) P_{Infl}(t, T) d\tilde{W}_1(t) - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds P_{Infl}(t, T) d\tilde{W}_r(t)$$

La dynamique en euros constants du zéro-coupon unitaire réel s'écrit :

$$dP_r(t, T) = \left[r_r(t) - \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] P_r(t, T) dt - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds P_r(t, T) d\tilde{W}_r(t)$$

L'idée originale de ce modèle est de considérer l'indice des prix CPI comme un taux de change : les prix réels correspondent à des prix dans une monnaie étrangère alors que les prix nominaux sont comparés aux prix dans la monnaie locale (l'euro). Ce modèle se rapproche de celui de Heath, Jarrow et Morton (HJM) à trois facteurs, qui traite de la structure à terme des taux d'intérêt.

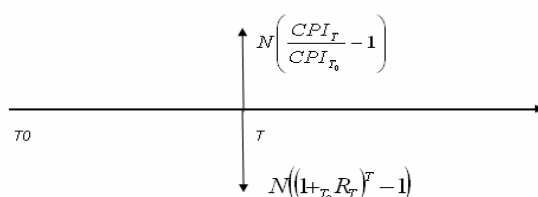
2.2.2.3. Titrisation du risque inflation par l'utilisation des swaps indexés

Nous présentons les swaps indexés sur l'inflation, permettant au gestionnaire de fonds de titriser le risque inflationniste sur les marchés financiers :

Définition 13. (Swap indexé sur l'inflation et relation BEI-CPI)

Le swap indexé est une transaction entre deux parties qui ont convenu de s'échanger des paiements à taux fixe (fixed rate payments) contre des paiements liés à l'inflation inconnus au moment de la signature du contrat.

Pour un swap zéro-coupon receveur de l'inflation en T , nous obtenons l'échange de flux suivant :



où R_T est le taux BEI d'échéance T relevé en T_0 , pour le flux fixe jusqu'à l'échéance.

Les deux jambes du swap sont égales en T_0 car la courbe des taux BEI se déduit des prix à la consommation CPI par la formule suivante :

$$(1 + BEI)^T = \frac{CPI_T}{CPI_{T_0}}$$

Comparés aux obligations nominales et indexés sur l'inflation, les swaps de taux et indexés inflation présentent de nombreux avantages :

- aucune somme d'argent n'est exigée lors de la souscription des swaps : ces derniers peuvent être utilisés à des fins purement spéculatives.
- les swaps sont beaucoup plus liquides que les obligations. Cela est d'autant plus vrai pour les maturités longues (20, 30, 40 voire 50 ans).
- les swaps sont des produits « over the counter » : dans une optique ALM, nous pouvons construire des structures de flux sur mesure pour se rapprocher le plus possible des contraintes d'engagement.

2.2.3. Evaluation des risques de taux et d'inflation des titres indexés sur l'inflation

Nous prenons les notations suivantes :

- ✓ C_i le flux réel de versement en t_i de l'obligation indexée P
- ✓ $R_{t_i,t}$ le taux nominal zéro-coupon d'échéance t_i prélevé en t
- ✓ $r_{t_i,t}$ le taux réel zéro-coupon d'échéance t_i prélevé en t
- ✓ $I_{t_i,t}$ le taux BEI zéro-coupon d'échéance t_i prélevé en t

Définition 14. (le Daily Référence Index (DRI))

Le Daily Référence Index (DRI) est un indice des prix journalier qui se déduit des CPI mensuels par la formule suivante :

$$DRI_t = CPI_{m-3} + \frac{nds-1}{nd_m} (CPI_{m-2} - CPI_{m-3})$$

avec t un jour du mois m , CPI_j l'indice des prix du mois j , nds le nombre de jours du mois m écoulés, nd_m le nombre de jours du mois m .

Soit une obligation zéro-coupon indexée sur l'inflation, émise à l'instant 0 , d'échéance T et de flux terminal F (égal à la somme, exprimée en euros de l'instant 0 , de la valeur faciale et du coupon réel).

Nous pouvons calculer le prix à n'importe quel instant t inférieur ou égal à T :

- ✓ Soit en actualisant le flux terminal F non revalorisé de l'inflation I (exprimé en euros de l'instant t) au taux réel r :

$$P_t = \frac{1}{(1+r_{T,t})^{T-t}} \times (F \cdot \frac{DIR_t}{DIR_0}) = \frac{1}{(1+r_{T,t})^{T-t}} \times (F \cdot (1+I_{0,t})^t)$$

- ✓ Soit en actualisant le flux terminal F revalorisé de l'inflation (il sera par conséquent exprimé en euros de l'instant T) au taux nominal R :

$$P_t = \frac{1}{(1+R_{T,t})^{T-t}} \times (F \cdot \frac{DIR_t}{DIR_0} \cdot \frac{DIR_T}{DIR_t}) = \frac{1}{(1+R_{T,t})^{T-t}} \times (F \cdot (1+I_{0,T})^T)$$

Preuve. L'équivalence de ces deux expressions provient du fait que :

$$\frac{DIR_u}{DIR_t} \stackrel{\Delta}{=} (1+I_{u,t})^{u-t} \text{ et } (1+r_{u,t}) = (1+\delta_{u,t})(1+I_{u,t}) \text{ par la relation de Fisher.}$$

Résultat 20. (Prix d'une obligation indexée sur l'inflation) :

Le prix d'une obligation indexée sur l'inflation s'écrit de deux manières différentes :

$$P_t = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}} \quad \text{ou} \quad P_t = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+R_{t_i,t})^{t_i-t}} \cdot \frac{DIR_{t_i}}{DIR_0}$$

Une obligation indexée sur l'inflation est sensible aux variations des taux et des BEI. Nous allons définir une sensibilité (et une convexité) nominale et une sensibilité (et une convexité) à l'inflation, sous des hypothèses restrictives sur l'évolution des courbes de taux et d'inflation.

2.2.3.1. Hypothèse 1 : les courbes des taux et des BEI subissent des translations uniformes

Nous formulons les hypothèses $H1$ et $H2$ suivantes :

$H1$ - Les courbes des taux ${}_0R_t$ et des BEI sont quelconques : la valeur d'une obligation indexée (ou d'un échéancier de passif indexé) dépend de plusieurs taux d'intérêt et BEI.

$H2$ - Les courbes des taux ${}_0R_t$ et des BEI subissent des translations uniformes au cours du temps : quelque soit leur maturité, les taux et les BEI subissent des variations identiques.

Définition 15. (Sensibilités nominale et inflation d'un zéro-coupon indexé inflation)

Si nous prenons uniquement l'hypothèse H1 des courbes de taux et d'inflation quelconques, nous pouvons définir seulement les sensibilités nominale et inflation relatives à un zéro-coupon indexé car cet actif est sensible à un seul taux et à un seul BEI (de maturité l'échéance du zéro-coupon) :

$$\frac{\Delta P^{Z.C}}{P^{Z.C}} = - S_{nom}^{Z.C} \cdot \Delta R^{Z.C} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta P^{Z.C}}{P^{Z.C}} = - S_{inf}^{Z.C} \cdot \Delta I^{Z.C}$$

Il est toutefois possible de définir la sensibilité d'une obligation indexée P par rapport à une variation globale des taux et des BEI, en faisant l'hypothèse H2 d'une déformation uniforme des courbes de taux et d'inflation. La sensibilité nominale (ie. la sensibilité inflation) d'une obligation indexée est égale à la somme pondérée des sensibilités nominales (i.e. des sensibilités inflation) des zéro-coupons indexés la constituant.

En reprenant les notations précédentes :

Définition 16. (Sensibilité nominale d'une obligation indexée)

Comme pour une obligation nominale, nous définissons la sensibilité nominale S^{nom} de l'obligation indexée par l'égalité vectorielle $\frac{dP_t}{P_t} = - S^{nom} dR_t$. Son expression s'écrit :

$$S^{nom} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{C_i(t_i - t)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+R_{t,t})(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}}}{1}$$

Preuve. $P_t = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+R_{t_i,t})^{t_i-t}} (1+Y_{t_i,t})^{t_i-t}$ d'où $\frac{dP_t}{dR} = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t-t_i)}{(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}} \frac{1}{(1+R)}$

Il s'ensuit que : $\frac{dP_t}{P_t} = - \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t-t_i)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+R_{t,t})(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}} dR$.

Définition 17. (Sensibilité à l'inflation d'une obligation indexée)

La sensibilité à l'inflation S^{Infl} de l'obligation indexée est définie par l'expression vectorielle suivante : $\frac{dP_t}{P_t} = - S^{Infl} dI$. Son expression s'écrit :

$$S^{Infl} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{C_i(t-t_i)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+I_{t,t})(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}}}{1}$$

Preuve. En écrivant $P_t = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+R_{t_i,t})^{t_i-t}} (1+I_{t_i,t})^{t_i-t}$ nous trouvons que :

$$\frac{dP_t}{dI} = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t_i-t)}{(1+R_{t_i,t})^{t_i-t}} (1+I_{t_i,t})^{t_i-t-1} = \frac{DIR_t}{DIR_0} \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t_i-t)}{(1+I_{t_i,t})(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t_i-t)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+I_{t_i,t})(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}} dI$$

Comme pour les obligations nominales, nous pouvons effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 pour $I \in \nu(I_0)$ et $r \in \nu(r_0)$, et définir des convexités nominale et inflation pour une obligation indexée :

Définition 18. (Convexités nominale et inflation d'une obligation indexée)

Les convexités nominale C^{Nom} et inflation C^{Infl} d'un titre indexé se définissent par les équations suivantes : $C^{Nom} = -\frac{\partial}{\partial I} S^{Nom}$ et $C^{Infl} = -\frac{\partial}{\partial I} S^{Infl}$. Leurs expressions s'écrivent :

$$C^{nom} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t_i-t)(t_i-t+1)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+R_{t_i,t})^2(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}}$$

$$C^{Infl} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i(t-t_i)(t-t_i+1)}{(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(1+r_{t_j,t})^{t_j-t}})(1+I_{t_i,t})^2(1+r_{t_i,t})^{t_i-t}}$$

Nous utiliserons ces résultats dans notre nouvelle méthode d'adossement *LDI*, pour analyser les sensibilités de nos allocations d'actifs et de nos échéanciers d'engagement aux risques financiers.

2.2.3.2. Hypothèse 2 : les courbes des taux et des BEI subissent des mouvements quelconques

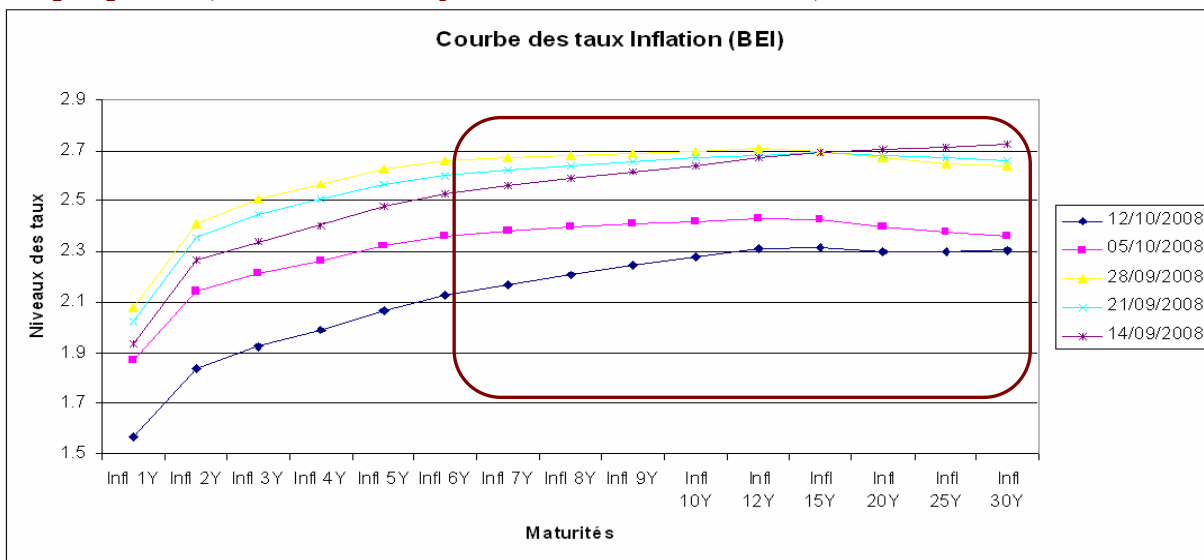
Nous formulons les hypothèses $H1$ et $H2$ suivantes :

H1- Les courbes des taux ${}_0R_i$ et des BEI sont quelconques : la valeur d'une obligation indexée (ou d'un échéancier de passif indexé) dépend de plusieurs taux d'intérêt et BEI.

H2- La courbe des taux ${}_0R_i$ et BEI subissent des déformations quelconques : deux taux (ou deux BEI) de maturité différente ne subissent pas nécessairement les mêmes variations.

Ce couple d'hypothèses très générales est le plus réaliste aux vues des variations historiques des courbes de marché. Au contraire, l'hypothèse de déformation uniforme des courbes est beaucoup trop restrictive :

Graphique 10. (Evolution historique de la courbe des taux BEI)

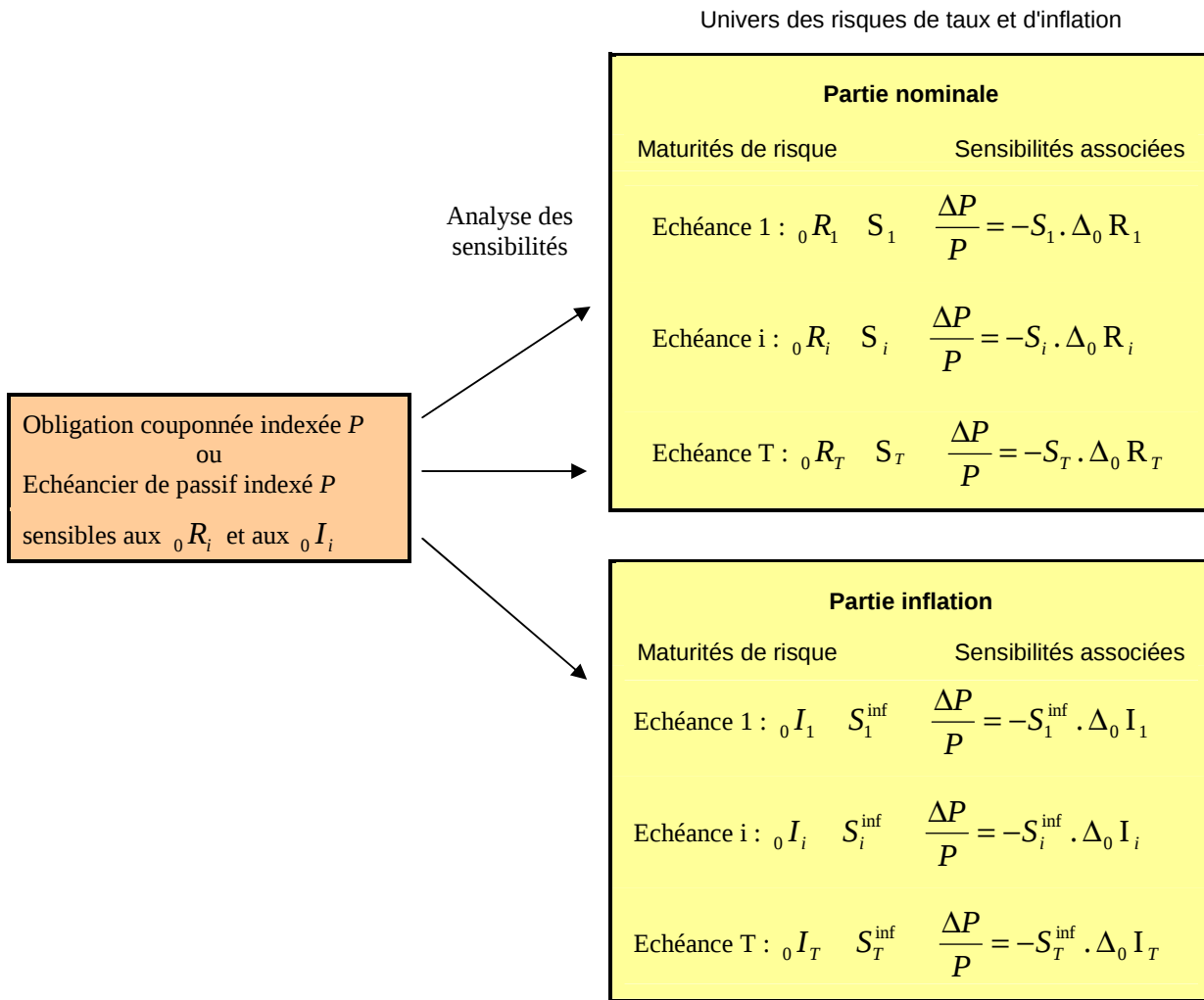


Afin d'effectuer une immunisation précise des risques de taux et d'inflation dans le cadre d'une gestion ALM, il est indispensable de calculer les sensibilités de l'actif et du passif par rapport à plusieurs taux nominaux et BEI. On constitue ainsi une cartographie du risque de taux et d'inflation pour notre actif et notre passif.

En notant :

- ✓ ${}_0R_i$ le taux nominal zéro-coupon d'échéance t_i en 0
- ✓ ${}_0I_i$ le taux BEI zéro-coupon d'échéance t_i en 0
- ✓ $P({}_0R_1, \dots, {}_0R_T, {}_0I_1, \dots, {}_0I_T) = \sum_{i=1}^T \frac{C_i}{(1+{}_0R_i)^i} (1+{}_0I_i)^i$, où C_i est la valeur en euros constants de l'instant 0

Graphique 11. (Univers des risques de taux et d'inflation)



Recueil des sensibilités nominale et inflation : $S_1, \dots, S_T, S_1^{\text{inf}}, \dots, S_T^{\text{inf}}$

La sensibilité ne capturant pas l'« effet poids » des flux de versement (cf. 2.2.1.1), nous devons travailler avec les sensibilités pondérées par leur poids respectif dans le portefeuille :

Résultat 21. (Une obligation indexée et ses vecteurs de sensibilités pondérées associés)

Pour avoir une analyse fine des risques de taux et d'inflation dans un environnement de déformations quelconques, il est fondamental d'associer à un titre obligataire indexé P (ou un échéancier de passif indexé) :

- un vecteur de sensibilités nominales pondérées $(S_1^{\text{Pond}} \ S_2^{\text{Pond}} \ \dots \ S_T^{\text{Pond}})$ où chaque S_i^{Pond} mesure la sensibilité pondérée du titre à la variation du taux de maturité $t_i \ {}_0R_i$.
- un vecteur de sensibilités à l'inflation pondérées $(S_1^{\text{inf Pond}} \ S_2^{\text{inf Pond}} \ \dots \ S_T^{\text{inf Pond}})$ où chaque $S_j^{\text{inf Pond}}$ mesure la sensibilité pondérée du titre à la variation du BEI de maturité $t_j \ {}_0I_j$.

Les sensibilités S_i^{Pond} et $S_i^{\text{inf Pond}}$ ($i = 1, \dots, T$) sont pondérées par les poids suivants : $\omega_i = \frac{P^{\text{Z.Cinf } i}}{P}$ où $P^{\text{Z.Cinf } i}$ est la valeur actuelle de la composante sensible à ${}_0R_i$ et ${}_0I_i$, et P le prix de l'obligation indexée.

2.2.3.3. Caractéristiques des swaps indexés sur l'inflation

Un swap indexé sur l'inflation peut être vu comme un portefeuille composé d'une obligation à taux fixe et d'une obligation indexée sur l'inflation :

Rentrer dans un swap receveur (l'inflation est reçue et le taux fixe est payé) est équivalent à vendre une obligation à taux fixe P_t^{fixe} et à acheter une obligation indexée P_t^{inf} . Ainsi, nous avons la relation suivante sur les prix :

$$V_t^{swap} = P_t^{inf} - P_t^{fixe}$$

Rentrer dans un swap payeur (l'inflation est payée et le taux fixe est reçu) est équivalent à vendre une obligation indexée et à acheter une obligation à taux fixe. Ainsi, nous avons la relation suivante sur les prix :

$$V_t^{swap} = P_t^{fixe} - P_t^{inf}$$

Définition 19. (Sensibilité d'un swap indexé pour une translation uniforme des taux et BEI)

La sensibilité du swap indexé (relative aux taux réels) se définit comme la différence entre la sensibilité de l'obligation indexée et la sensibilité de l'obligation à taux fixe :

Pour un swap receveur, la sensibilité d'un swap est égale à la différence entre la sensibilité de l'obligation à taux fixe S_t^{fixe} et celle de l'obligation indexée S_t^{inf} :

$$S_t^{swap} = S_t^{inf} - S_t^{fixe}$$

Pour un swap payeur, la sensibilité d'un swap est égale à la différence entre la sensibilité de l'obligation indexée et celle de l'obligation à taux fixe :

$$S_t^{swap} = S_t^{fixe} - S_t^{inf}$$

Définition 20. (Sensibilité d'un swap indexé pour une déformation quelconque des courbes)

Dans un environnement de déformation quelconque des taux, nous associons au swap indexé le vecteur de sensibilités suivant :

Pour le swap payeur en t : $(S_1^{nom\ fixe} - S_1^{nom\ inf}, \dots, S_T^{nom\ fixe} - S_T^{nom\ inf}, -S_1^{inf\ inf}, \dots, -S_T^{inf\ inf})$

Pour le swap receveur en t : $(-S_1^{nom\ fixe} + S_1^{nom\ inf}, \dots, -S_T^{nom\ fixe} + S_T^{nom\ inf}, +S_1^{inf\ inf}, \dots, +S_T^{inf\ inf})$

où :

$S_i^{nom\ fixe}$ est la sensibilité nominale pondérée de P^{fixe} aux variations des taux de maturités t_i R_i

$S_i^{nom\ inf}$ et $S_i^{inf\ inf}$ sont les sensibilités nominales et inflation pondérées de P^{inf} aux taux de maturités t_i R_i et I_i

Les expressions analytiques des sensibilités $S_i^{nom\ fixe}$, $S_i^{nom\ inf}$ et $S_i^{inf\ inf}$ ($i = 1, \dots, T$) sont celles des paragraphes 2.2.1.2 et 2.2.3.1 appliquées aux cas des zéro-coupon nominal et inflation d'échéance t_i .

Notre banque d'investissement nous fournit les caractéristiques V_t^{swap} , D_t^{swap} , S_t^{swap} et plus finement, les sensibilités nominale et inflation du swap indexé.

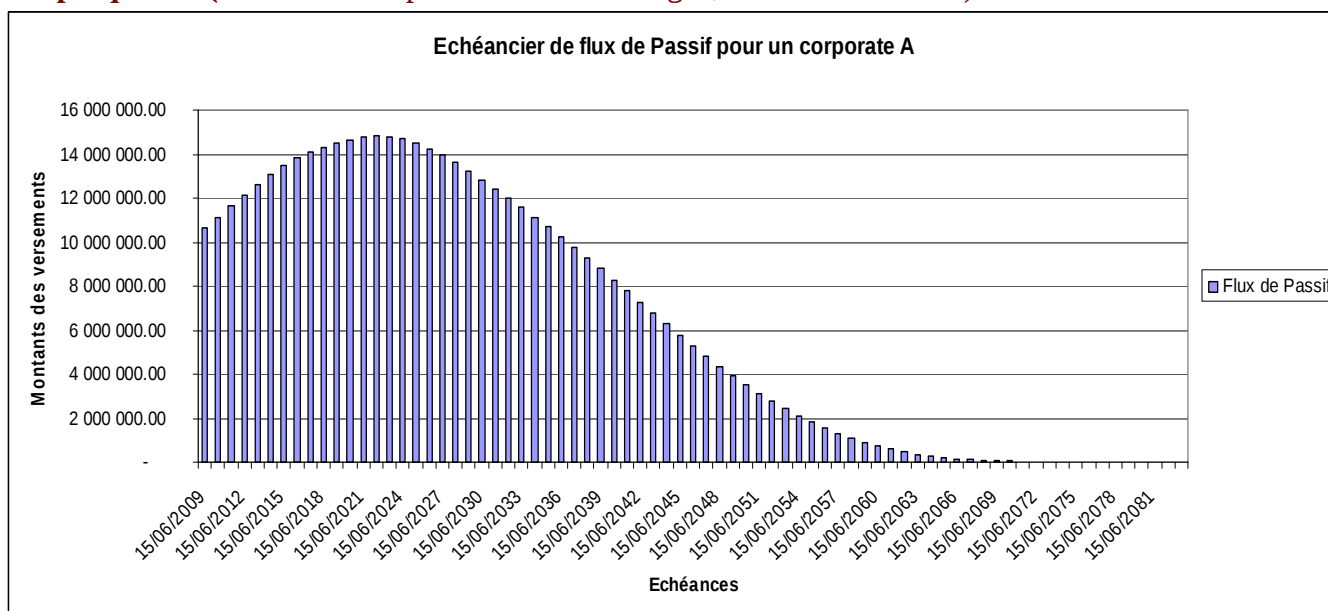
2.3. Travail préliminaire : retraitement des passifs et solution LDI retenue

2.3.1. Etude de cas et retraitement des passifs

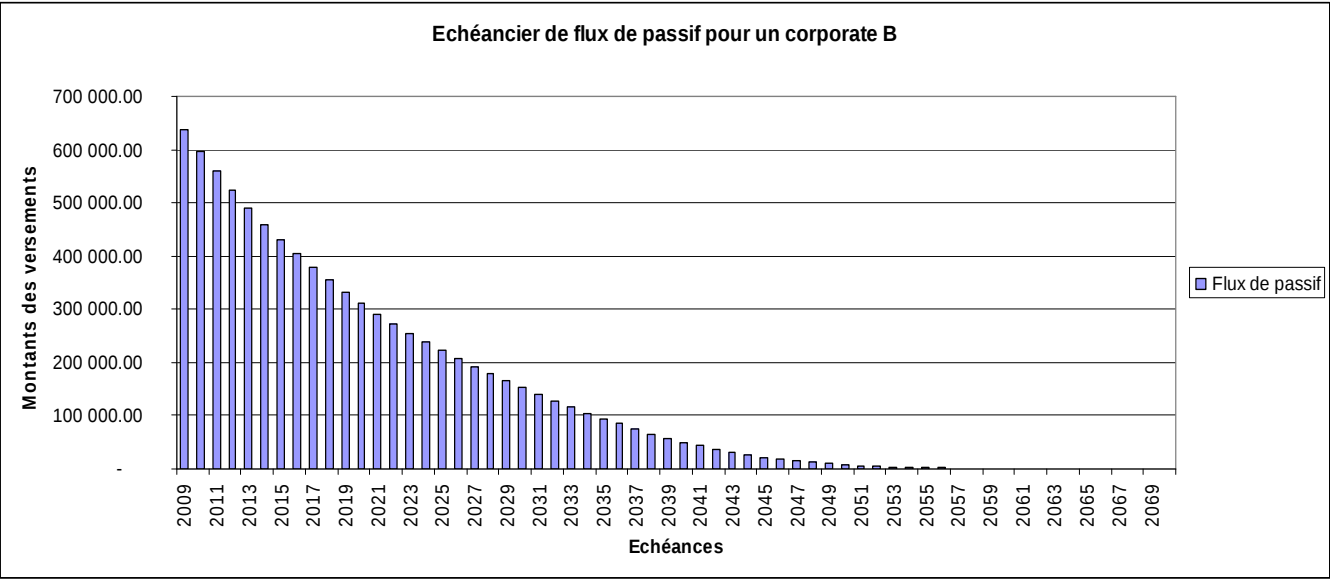
La modélisation des échéanciers de passif est un sujet complexe qui requiert une expertise actuarielle très fine des risques non financiers. Les actuaires prennent en compte l'ensemble des contraintes qu'impose une caisse de retraite ouverte : lois des entrées et sorties des adhérents, lois de survie à partir des tables de mortalité etc. Ce travail d'inventaire et de modélisation nous est ensuite remis pour construire notre portefeuille d'actifs.

Dans le cadre des réponses aux appels d'offres, nous sommes amenés à étudier des échéanciers de passif ayant des profils et des caractéristiques très différents :

Graphique 12. (Echéancier de passif à duration longue, en euros constants)

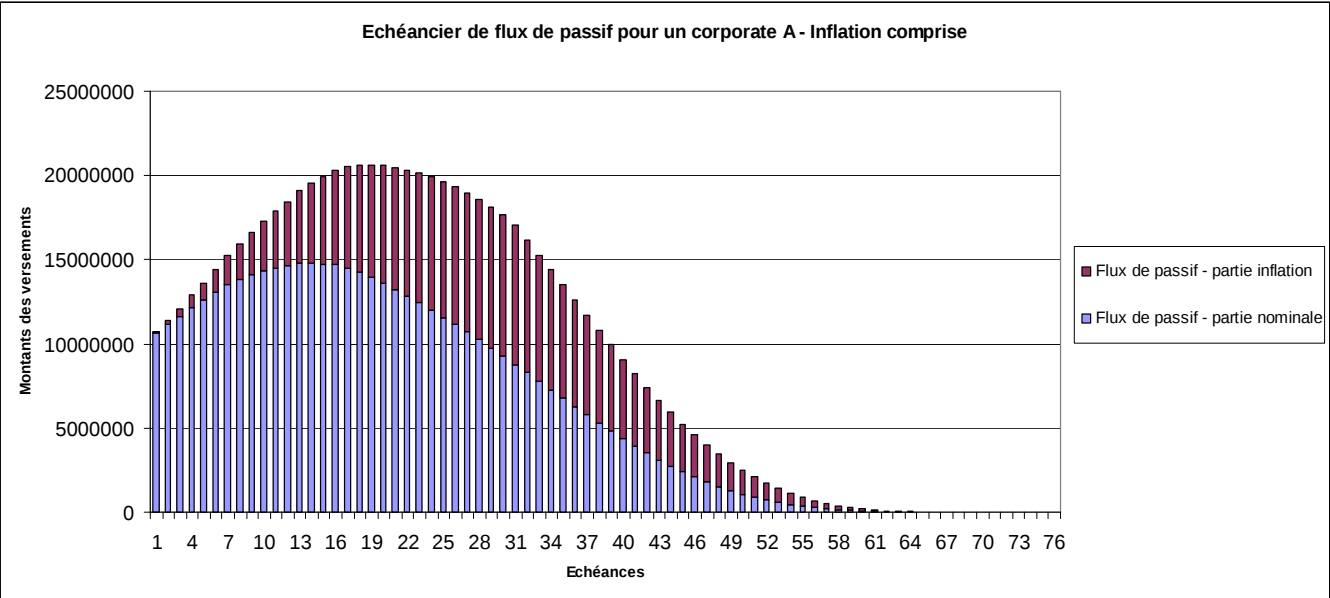


Graphique 13. (Echéancier de passif à durée moyenne, en euros constants)

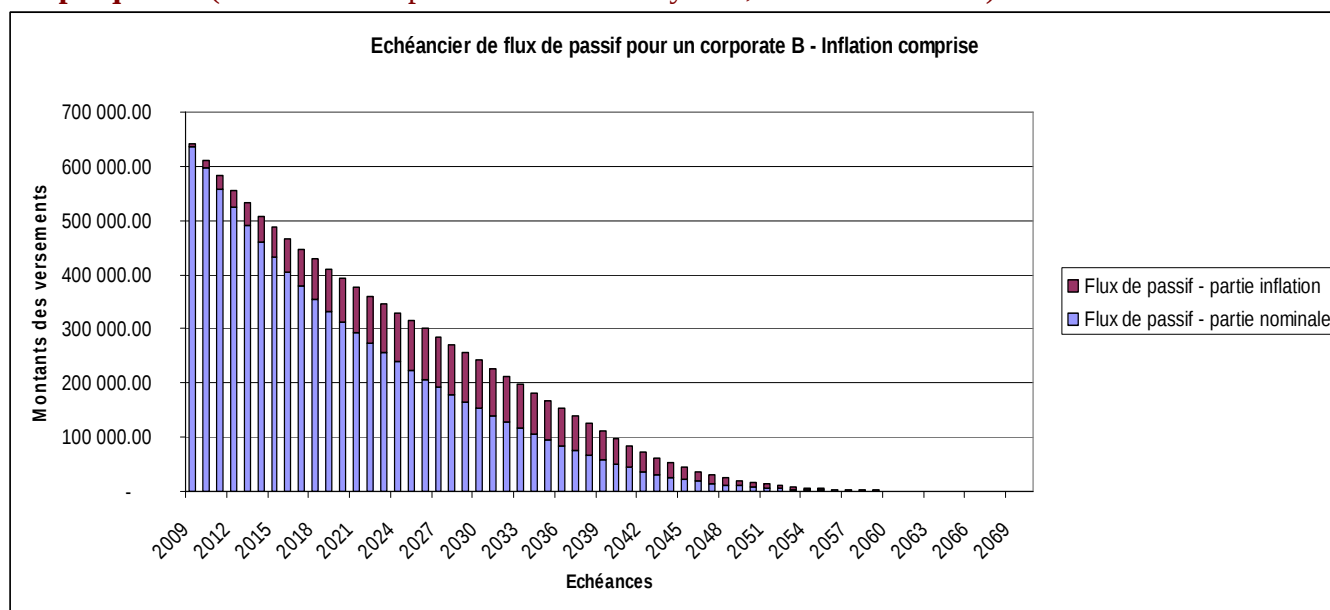


La réglementation nous impose une revalorisation des retraites de l'inflation. Ainsi, à partir de la courbe de taux swap zéro-coupon inflation, nous évaluons les sommes supplémentaires à verser pour chaque flux de passif, au titre de l'inflation cumulée :

Graphique 14. (Echéancier de passif à durée longue, en euros courants)



Graphique 15. (Echéancier de passif à durée moyenne, en euros courants)



Graphique 16. (Echéancier de passif hybride : le cas des préretraites)

Les allocations brutes de préretraite doivent être revalorisées de l'inflation, ce qui n'est pas le cas des cotisations sociales :

Echéancier de flux - Préretraites

Année	Allocation de préretraite	Cotisations sociales
01/01/2010	1 852 021	800 243
01/01/2011	1 645 345	607 578
01/01/2012	1 470 025	541 781
01/01/2013	1 037 718	422 356
01/01/2014	842 369	401 235
01/01/2015	655 598	321 451
01/01/2016	421 784	287 301
01/01/2017	275 584	124 253
01/01/2018	125 368	54 231
01/01/2019	52 124	15 745

Flux revalorisés de l'inflation Flux non revalorisés de l'inflation

2.3.2. Courbe des taux zéro-coupon et valorisation « marked to market » des passifs

Les engagements des fonds de pension devront être valorisés en juste valeur à partir de la courbe des taux zéro-coupon. Ainsi, il convient de construire la courbe des taux zéro-coupon à partir des taux usuels (Eonia, Euribor et swaps) prélevés sur une plateforme financière.

Il doit s'agir de taux zéro-coupon composés, actuariels ou continus. Nous distinguons la partie court terme (où les taux ont des maturités inférieures à 12 mois) et la partie long terme de la courbe.

Première étape : détermination de la partie court terme de la courbe des taux

Pour des échéances inférieures à 12 mois, la majorité des opérations financières de prêts et d'emprunts sont des zéro-coupons. Nous pouvons observer sur le marché interbancaire des taux allant du jour le jour (Eonia) au 1 an (les indices Euribor pour les maturités de 1 à 12 mois). Ces taux monétaires sont des taux zéro-coupon simples. Il convient de les convertir en taux actuariels par la formule suivante :

$$i_a = \left(1 + \frac{d}{360} i_m\right)^{\frac{365}{d}} - 1$$

où : d est le nombre de jours entre la date de calcul et l'échéance du taux

i_m est le taux monétaire (zéro-coupon) simple

i_a est le taux monétaire actuariel équivalent à i_m

Pour les taux Euribor par exemple, $d = \frac{365}{12} n$ où n est le nombre de mois Euribor.

Deuxième étape : détermination de la partie longue de la courbe des taux

Pour des échéances supérieures à 1 an, nous sommes confrontés à une pénurie d'emprunts zéro-coupon (obligations et certificats de coupons). Nous utilisons par conséquent des titres plus liquides, comme les obligations à taux fixe souveraines ou les swaps qui ont des échéanciers comportant plus de 2 flux. L'emploi de ces derniers est techniquement le plus aisé.

Les taux de swap (non zéro-coupon) sont les taux fixes annuels contre lesquels s'échangent des structures variables qui font référence au marché (comme l'Euribor). Nous pouvons considérer ces taux swap C_i , $i \in [1, n]$ comme des coupons d'obligations à taux fixe qui seraient traitées pour les durées annuelles correspondantes. En introduisant les taux à 2 ans, 3 ans, 4 ans... les uns après les autres, nous pouvons déterminer successivement les taux swap zéro-coupon i_j , $j \in [1, n]$:

- ✓ Le 1 an étant un zéro-coupon (car il appartient à la partie court terme), nous avons $i_1 = C_1$
- ✓ L'actualisation des flux du titre obligataire couponné conduit à :

$$1 = \frac{C_2}{1+i_1} + \frac{1+C_2}{(1+i_2)^2}$$

Comme i_1 est connu égal à C_1 , la connaissance de C_2 permet de déterminer i_2 . De même, l'actualisation de l'obligation à 3 ans, de coupons C_3 , permet de déterminer i_3 .

Nous pouvons établir une formule de récurrence explicite entre i_n et i_{n-1} à partir des obligations de maturités $n-1$ et n :

$$i_n = \left(\frac{C_{n-1}(1+C_n)}{C_{n-1} - C_n + C_n/(1+i_{n-1})^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Nous avons déterminé par récurrence, l'ensemble des éléments constitutifs de la courbe des taux swap zéro-coupon. L'utilisation d'obligations de marché, à la place des swaps, génère des difficultés complémentaires liées aux durées non entières.

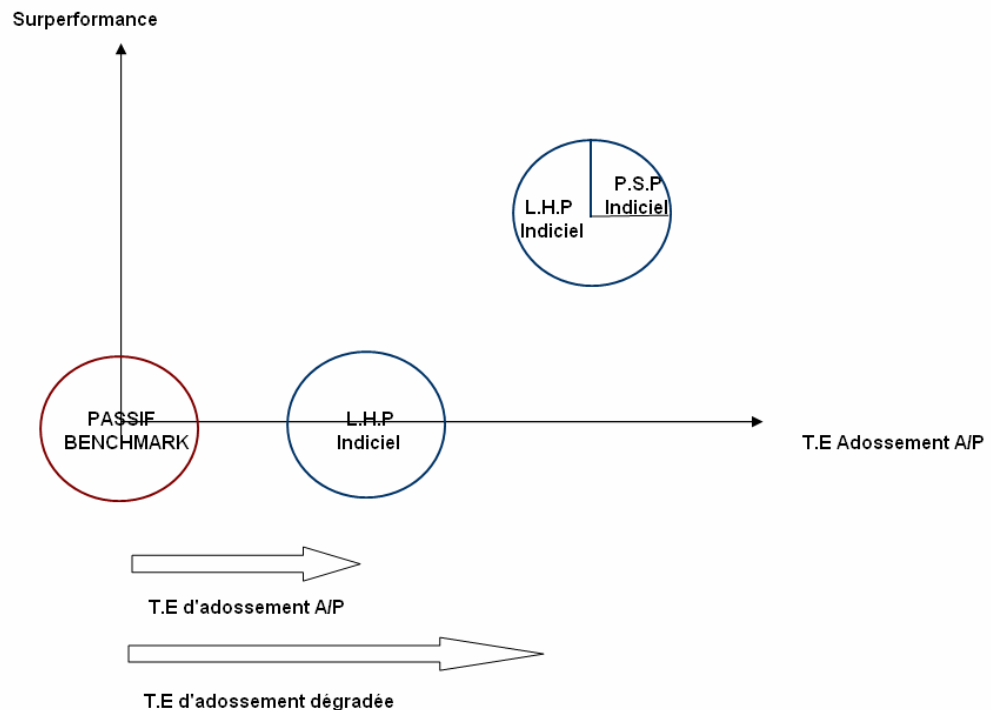
Résultat 22. (Utilité d'une courbe des taux swaps zéro-coupon dans un cadre ALM)

La courbe des taux swaps précédemment construite nous permet de calculer les valeurs actuelles des actifs financiers (obligations non risquées et swaps pour le LDI), par décomposition de ces derniers en des structures d'emprunts zéro-coupon. Concernant le passif, la réglementation nous impose de valoriser nos engagements en juste valeur, c'est-à-dire d'effectuer une évaluation du passif à l'aide d'une courbe des taux zéro-coupon du marché. Ainsi, la courbe des taux swaps zéro-coupon est à la base des valorisations de l'actif et du passif.

2.3.3. Notre solution LDI retenue en pratique

A partir d'une analyse fine de notre échéancier d'engagement, nous élaborerons le portefeuille *LHP* indiciel qui adosse au plus près les risques de passif, au sens d'une mesure de risque bien déterminée. Par la suite, nous intégrerons dans notre solution *LDI* le portefeuille *PSP* indiciel, pour un budget de risque consenti au préalable par le fonds de pension :

Graphique 17. (Etapas de construction du LDI)



Etape 1. Détermination du benchmark de passif

Etape 2. Détermination du portefeuille d'adossment LHP

Etape 3. Construction du portefeuille PSP et du montage LDI global indiciel.

Partie 3. Construction pratique du LDI et analyse comparative sur deux échéanciers de passif

Tous les montages LDI reposent sur le théorème fondamental de séparation en deux fonds LHP et PSP. Toutefois, chaque structureur est libre de construire ces deux portefeuilles suivant ses propres objectifs de gestion. BNP Paribas a privilégié une immunisation en sensibilité contre les risques de taux et d'inflation pour son LHP, ainsi qu'une approche à la Markowitz pour son PSP.

3.1. Notre construction du Liability Hedging Portfolio (LHP) indiciel

3.1.1. Détermination de l'univers de risque et choix des classes d'actifs

Rappels fondamentaux. (Un univers de risque spécifique pour chaque actif indexé)

Pour avoir une analyse fine des risques de taux et d'inflation dans un environnement de déformations quelconques, il est fondamental d'associer à un titre obligataire indexé P (ou un échéancier de passif indexé) :

- *un vecteur de sensibilités nominales $(S_1 \ S_2 \ ... \ S_T)$ où chaque S_i mesure la sensibilité du titre à la variation du taux de maturité $\tau_i \ {}_0R_i$.*
- *un vecteur de sensibilités à l'inflation $(S_1^{inf} \ S_2^{inf} \ ... \ S_N^{inf})$ où chaque S_j^{inf} mesure la sensibilité du titre à la variation du BEI de maturité $\tau_j \ {}_0I_j$.*

Chaque titre obligataire (ou un échéancier de passif) a un univers de risque de taux et d'inflation qui lui est propre car :

- *Chaque titre obligataire indexé (ou. un échéancier de passif indexé) est sensible à des taux ${}_0R_i$ et ${}_0I_j$ de maturité les échéances de paiement de ses coupons.*
- *Plus notre obligation indexée (ou un échéancier de passif indexé) aura une date d'échéance lointaine, plus elle sera sensible à un nombre important de taux et BEI.*

Résultat fondamental 23. (Vers la construction d'un univers de risque synthétique unique)

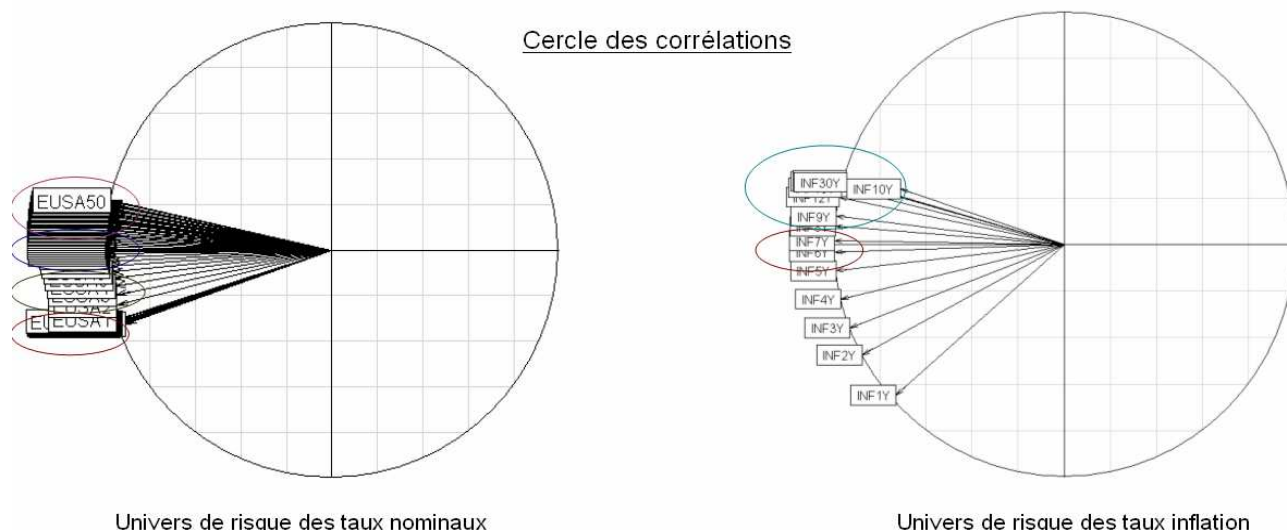
Cette dépendance pose problème dans un cadre de gestion ALM : le passif et l'actif doivent être représentés dans un univers de risque identique, pour pouvoir procéder à leur adossement. Nous devons construire un univers fixe et synthétique des risques de taux et d'inflation, valable pour l'ensemble des titres obligataires et des échéanciers de passif, sans perdre en qualité de représentation des risques.

Nous prenons comme environnement du risque de taux, l'historique des taux nominaux ${}_0R_i$: Eonia, Euribor 1, 2,..., 12 mois et swaps zéro-coupon 1, 2,..., 50 ans. Nous relevons hebdomadairement les valeurs des taux sur les trois dernières années (de juillet 2005 à septembre 2008).

Nous prenons comme environnement du risque inflation, l'historique des taux BEI servis ${}_0Y_i$ par les swaps inflation zéro-coupon d'échéances 1, 2,..., 10, 12, 15, 20, 25 et 30 ans. Nous relevons hebdomadairement les valeurs des BEI sur les trois dernières années.

Nous effectuons des analyses en composantes principales (ACP) sur les environnements nominal et inflation, pour mettre en lumière les corrélations existant entre les différentes maturités de risque. Les individus sont les taux Euro et BEI, et les variables leur valeur au cours du temps. L'inertie expliquée par nos deux premiers vecteurs propres étant supérieure à 85%, les ACP nous incitent à ne conserver que les deux axes principaux les plus représentatifs :

Graphique 18. (Projection des taux et des BEI sur le plan factoriel et corrélations)



Résultat fondamental 24. (Déformation locale uniforme des courbes et univers de risques unique)

Lorsque nous effectuons une ACP, nous constatons que certaines grappes de maturités très proches sont très corrélées entre elles : leur coefficient de corrélation est supérieur à 0,99. Par exemple, les taux swaps nominaux 40, 41,...,50 ans, les taux Euribor1, 2, ...12 mois et les BEI 10, 12, 15, 20, 25, 30 ans sont respectivement très corrélés entre eux.

De ce fait, dans des univers de taux et d'inflation chaotiques (ie. les courbes des taux et BEI subissent des déformations quelconques au cours du temps dans leur ensemble), nous constatons localement des déformations uniformes des courbes puisque des grappes de taux de maturités proches sont très corrélées entre elles. Cet état de fait nous amène à penser que nos deux univers de risque peuvent être synthétisés de façon très convenable en ne conservant que quelques maturités représentatives.

Une analyse plus approfondie de notre ACP nous pousse à retenir les échéances nominales : 1, 3, 6 mois et 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 20, 30, 50 ans, et les échéances inflation : 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 et 30 ans. Nous avons construit un univers synthétique de risque de taux et d'inflation, valable pour la totalité des titres obligataires et des échéanciers de passif, sans perte de qualité de représentation des risques.

3.1.2. Procédé d'adossment actif passif

Notre solution LDI s'applique à partir d'un échéancier de passif d'un corporate, d'un assureur ou d'une mutuelle. Conformément à l'application de la nouvelle réglementation comptable IFRS, les engagements des fonds de pension sont valorisés en valeur de marché (« marked to market ») à l'aide de la courbe des taux swap zéro-coupon. Il convient également de prendre en compte la qualité de la signature du gestionnaire, par l'ajout du spread de signature aux taux swap utilisés.

Première étape : éclatement de l'échéancier de passif, en sensibilités nominale et inflation, sur les piliers de risque représentatifs.

Dans le cadre des préretraites, les fonds de pension ont pour engagement le paiement des cotisations sociales non sujettes à une revalorisation de l'inflation. Ainsi, ces derniers doivent être en mesure de traiter des échéanciers de passif non revalorisés de l'inflation.

Cas n°1 : traitement d'un échéancier de passif non revalorisé de l'inflation

Ce flux de passif est étudié comme une succession d'obligations zéro-coupon nominales de maturité $\tau_i = \frac{(t_i - t)}{365}$ exprimée en années. La valeur actuelle du passif s'écrit donc $L_t = \sum_{i=1}^N \frac{C_{i,t}}{(1 + {}_0R_{i,t})^{\tau_i}}$ où ${}_0R_i$ est le taux actuariel du zéro-coupon de maturité τ_i et N le nombre des flux espérés. ${}_0R_i$ sera déterminé par interpolation linéaire des taux zéro-coupon d'échéances τ_i^- et τ_i^+ , encadrant τ_i renseignés par une plateforme financière.

Résultat 25. (Mapping du passif en sensibilité sur les piliers de risques nominaux)

Un zéro-coupon nominal de maturité τ_i est sensible aux variations du taux ${}_0R_i$ et sa sensibilité nominale pondérée s'écrit $S_i = \frac{\tau_i}{L_t} \frac{C_{i,t}}{(1 + {}_0R_{i,t})^{\tau_i + 1}}$.

Le mapping consiste à répartir S_i sur les piliers de risque nominaux adjacents de maturités $\tau_{l,i}$ et $\tau_{u,i}$:

$$\forall i = 1, \dots, N \text{ nous avons } \tau_{l,i} \leq \tau_i \leq \tau_{u,i}, S_{l,i} = \frac{\tau_{u,i} - \tau_i}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i \text{ et } S_{u,i} = \frac{\tau_i - \tau_{l,i}}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i.$$

La réglementation française impose aux fonds de pension de revaloriser leurs engagements de retraite de l'inflation. Ainsi, le profil de passif le plus couramment traité est un échéancier revalorisé en intégralité de l'inflation :

Cas n°2 : traitement d'un échéancier de passif revalorisé à 100% de l'inflation :

Notre échéancier de passif est étudié comme une succession d'obligations zéro-coupon indexées sur l'inflation de maturité $\tau_i = \frac{(t_i - t)}{365}$ exprimée en années. La valeur actuelle du passif s'écrit donc $L_t = \sum_{i=1}^P \frac{C_{i,t}}{(1 + {}_0r_{i,t})^{\tau_i}}$ où ${}_0r_i$ est le taux zéro-coupon réel déterminé par interpolation des taux réels d'échéance τ_i^- et τ_i^+ encadrant τ_i , déduits des taux nominaux (${}_0R_i$) et inflation (${}_0Y_i$) grâce à la formule de Fisher : ${}_0r_i = \frac{1+{}_0R_i}{1+{}_0Y_i} - 1$.

Résultat 26. (Mapping du passif en sensibilité sur les piliers de risques nominaux et inflation)

Un zéro-coupon indexé de maturité τ_i est sensible aux variations de taux ${}_0R_i$ et à l'inflation ${}_0Y_i$. Ses sensibilités nominale et inflation pondérées s'écrivent :

$$S_i^{nom} = \frac{\tau_i}{(1+{}_0R_{i,t})L_t} \frac{C_{i,t}}{(1+{}_0r_{i,t})^{\tau_i}} \quad \text{et} \quad S_i^{inf} = \frac{\tau_i}{(1+{}_0Y_{i,t})L_t} \frac{C_{i,t}}{(1+{}_0r_{i,t})^{\tau_i}}.$$

Le mapping consiste ensuite à répartir linéairement :

- S_i^{nom} sur les piliers de risque nominaux adjacents de maturité $\tau_{l,i}$ et $\tau_{u,i}$:

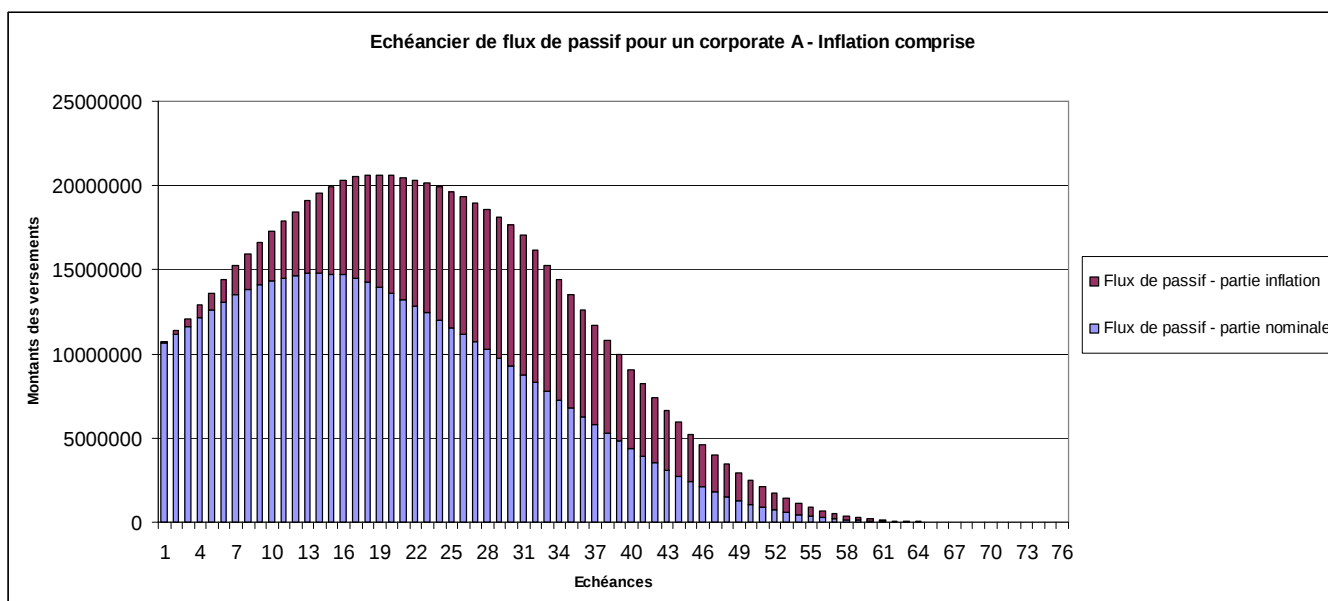
$$\forall i=1, \dots, N, \text{ nous avons } \tau_{l,i} \leq \tau_i \leq \tau_{u,i}, S_{l,i}^{nom} = \frac{\tau_{u,i} - \tau_i}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i^{nom} \quad \text{et} \quad S_{u,i}^{nom} = \frac{\tau_i - \tau_{l,i}}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i^{nom}.$$

- S_i^{inf} sur les piliers de risque inflation adjacents de maturité $\tau_{l,i}$ et $\tau_{u,i}$:

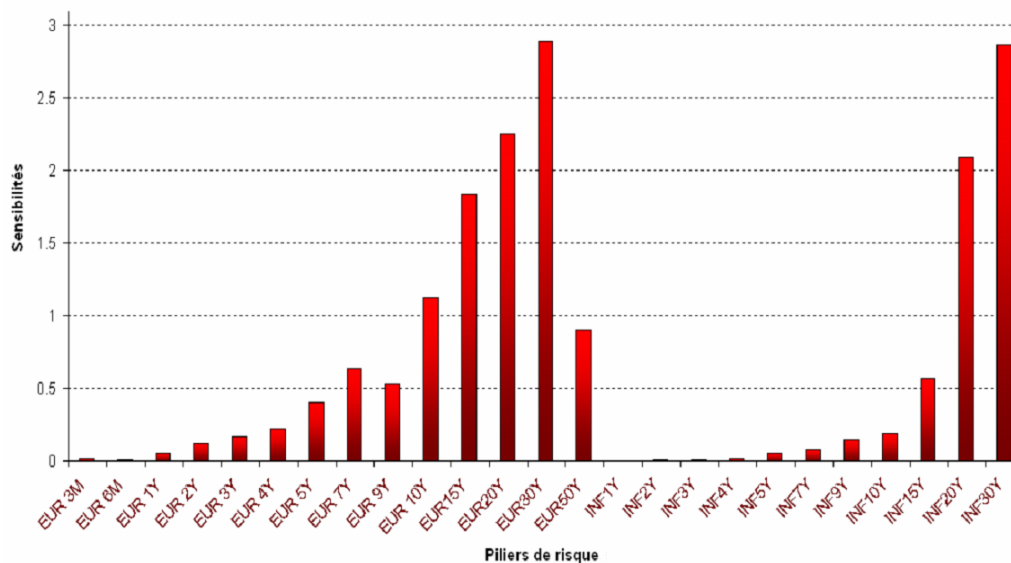
$$\forall i=1, \dots, P, \text{ nous avons } \tau_{l,i} \leq \tau_i \leq \tau_{u,i}, S_{l,i}^{inf} = \frac{\tau_{u,i} - \tau_i}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i^{inf} \quad \text{et} \quad S_{u,i}^{inf} = \frac{\tau_i - \tau_{l,i}}{\tau_{u,i} - \tau_{l,i}} S_i^{inf}.$$

Résultat 27. (Eclatement en sensibilité d'un échéancier de flux de passif)

Nous obtenons un éclatement en sensibilité du passif sur les piliers de risque nominaux et inflation :

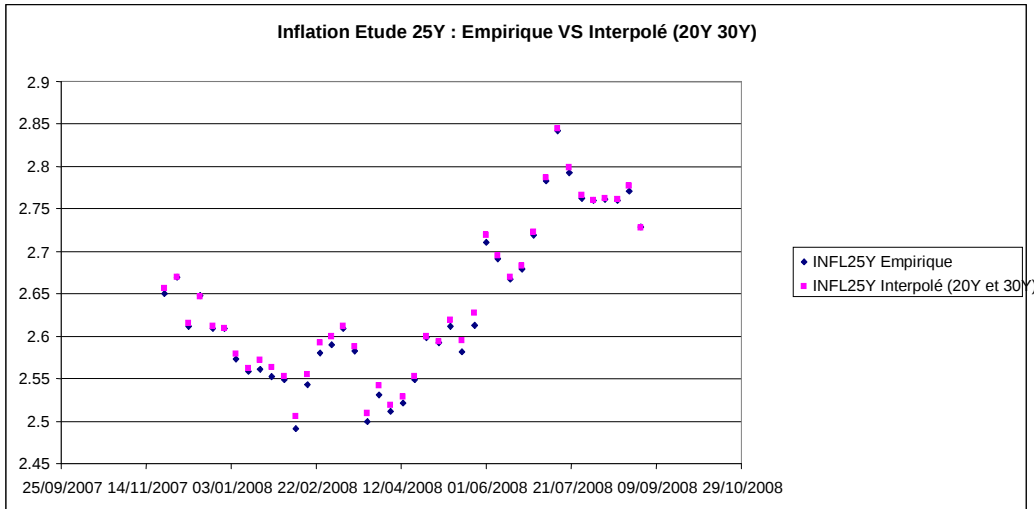


Eclatement du passif en sensibilité nominale et inflation



La construction du *LHP* indiciel s'appuie sur l'interpolation linéaire des taux nominaux et inflation pour déterminer les sensibilités sur chaque pilier de risque. Une petite étude permet de corroborer la validité de cette démarche. Elle consiste à mesurer la dépendance entre un historique de taux d'échéance T et un autre interpolé à partir de deux historiques d'échéances T_1 et T_2 encadrant T (i.e tels que $T_1 < T < T_2$) :

Graphique 19. (Exemple d'interpolations linéaires sur les taux BEI et R^2 d'ajustement)



Nous remarquons que les mouvements de taux interpolés sur les échéances intermédiaires sont correctement évalués. Dans l'exemple traité, le R^2 des interpolations est plus grand que 98%.

Deuxième étape : éclatement de l'actif, en sensibilité nominale et inflation, sur les maturités de risque représentatives.

- ✓ *Choix des fonds nominaux et inflation* : nous avons utilisé six indices de référence nominaux *Merrill*, de maturités 1-3Y, 3-5Y, 5-7Y, 7-10Y, 10-15Y et 15+Y. Chaque indice contient des obligations de maturités comprises dans l'intervalle inscrit dans sa nomination. De même, nous avons choisi six indices inflation de référence *Barclays*, de maturités 1-3Y, 3-5Y, 5-7Y, 7-10Y, 10-15Y et 15+Y. Les banques *Merrill* et *Barclays* étaient celles qui proposaient le plus large choix d'indices nominaux et inflation.
- ✓ *Eclatement des indices obligataires nominaux* : pour éclater notre portefeuille d'actifs sur les piliers de risque, nous réitérons la démarche employée pour notre échéancier de passif. Tout d'abord, nous répartissons linéairement les sensibilités de chaque indice nominal sur les piliers de risque adjacents nominaux. Nous avons donc, pour chaque pilier nominal $n^o i$, un vecteur de sensibilités qui lui est associé :

$$S_i^{indices\ nom} = \begin{bmatrix} S_i^{asset1\ nom} \\ S_i^{asset2\ nom} \\ \dots \\ S_i^{assetN\ nom} \end{bmatrix}$$

Nous calculons ensuite la sensibilité pondérée de l'actif sur le pilier nominal $n^o i$ $S_i^{asset\ nom}$:

$$\langle W^{nom} | S_i^{indices\ nom} \rangle = {}^t W^{nom} S_i^{indices\ nom} \text{ et } W^{nom} = \begin{bmatrix} w_1^{nom} \\ w_2^{nom} \\ \dots \\ w_N^{nom} \end{bmatrix}$$

où W^{nom} est le vecteur des proportions d'actifs nominaux dans l'allocation du portefeuille nominal.

- ✓ *Eclatement des indices obligataires inflation* : nous répartissons linéairement les sensibilités de chaque indice inflation sur les piliers de risque inflation adjacents. Nous avons, pour chaque pilier inflation n°i, un vecteur de sensibilités qui lui est associé :

$$S_i^{\text{indices inf}} = \begin{bmatrix} S_i^{\text{asset1 inf}} \\ S_i^{\text{asset2 inf}} \\ \dots \\ S_i^{\text{assetN inf}} \end{bmatrix}$$

La sensibilité pondérée de l'actif sur le pilier inflation n°i $S_i^{\text{asset inf}}$ est égale à :

$$\langle W^{\text{inf}} | S_i^{\text{indices inf}} \rangle = {}^t W^{\text{inf}} S_i^{\text{indices inf}} \text{ et } W^{\text{inf}} = \begin{bmatrix} w_1^{\text{inf}} \\ w_2^{\text{inf}} \\ \dots \\ w_N^{\text{inf}} \end{bmatrix}$$

où W^{inf} est le vecteur des proportions d'actifs inflation dans l'allocation du portefeuille inflation.

Troisième étape : création d'une mesure de l'adossement actif / passif dans un univers de risque chaotique.

Nous avons montré que le Duration Matching n'est efficace que dans l'hypothèse d'un déplacement parallèle de la courbe des taux car nous calculons les sensibilités globales de l'actif et du passif en sommant les sensibilités pondérées des éléments les constituants. La mesure de l'adossement actif passif : $\| \text{Actif} - \text{Passif} \| = |D_{\text{Actif}} - D_{\text{Passif}}|$ n'est plus valable dans un cadre plus général.

Résultat 28. (Mesure de l'écart d'adossement actif / passif retenue : le passif comme benchmark)

Nous privilégions une gestion indicielle des risques de taux et d'inflation, inspirée par Dupré [1998] que nous adaptons aux sensibilités : nous allons construire une norme mesurant l'écart d'adossement entre notre portefeuille d'indices obligataires et notre échéancier de passif éclaté sur les maturités de risque. Nous l'appellerons par la suite **Tracking Error d'adossement actif passif** car nous prenons comme benchmark notre échéancier de passif éclaté.

Définition 21. (Vecteurs des écarts de sensibilité actif / passif)

Nous définissons le vecteur G des écarts de sensibilité entre l'actif et le passif sur les piliers de

risque nominaux par $G = \begin{bmatrix} (S_1^{\text{liability}} - S_1^{\text{asset}}) \\ (S_2^{\text{liability}} - S_2^{\text{asset}}) \\ \dots \\ (S_N^{\text{liability}} - S_N^{\text{asset}}) \end{bmatrix} ..$

Toutefois, il convient d'amplifier les écarts actif / passif en sensibilité par les volatilités historiques relevées, les maturités de risque présentant des niveaux de risque hétérogènes. Ainsi, en notant σ_i la volatilité du pilier n°i, nous définissons le vecteur X des écarts de sensibilité pondérés par les volatilités :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_N \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} \sigma_1(S_1^{liability} - S_1^{asset}) \\ \sigma_2(S_2^{liability} - S_2^{asset}) \\ \dots \\ \sigma_N(S_N^{liability} - S_N^{asset}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{nom} \\ X^{inf} \end{bmatrix}$$

Définition 22. (Tracking Error d'adossement nominale actif passif)

La Tracking Error statique d'adossement A/P nominale se définit comme la racine carrée de la forme quadratique : $\langle X^{nom} | VCV^{nom} . X^{nom} \rangle = {}^t X^{nom} . VCV^{nom} . X^{nom}$. Nous noterons cette dernière :

$$TE_{adossement}^{nom} = \| \text{Actif} - \text{Passif} \|_{nom} = \sqrt{{}^t X^{nom} . VCV^{nom} . X^{nom}}$$

où VCV^{nom} la matrice des corrélations entre les maturités nominales :

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(\text{Eur3M}) & \dots & \text{Cov}(\text{Eur3M}, \text{Eus50Y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(\text{Eur3M}, \text{Eus50Y}) & \dots & \text{Var}(\text{Eus50Y}) \end{bmatrix}$$

Définition 23. (Tracking Error d'adossement inflation actif passif)

La Tracking Error statique d'adossement A/P inflation se définit comme la racine carrée de la forme quadratique $\langle X^{inf} | VCV^{inf} . X^{inf} \rangle = {}^t X^{inf} . VCV^{inf} . X^{inf}$. Nous noterons cette dernière :

$$TE_{adossement}^{inf} = \| \text{Actif} - \text{Passif} \|_{inf} = \sqrt{{}^t X^{inf} . VCV^{inf} . X^{inf}}$$

où VCV^{inf} la matrice des corrélations entre les piliers inflation :

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(\text{Inf 1Y}) & \dots & \text{Cov}(\text{Inf 1Y}, \text{Inf 30Y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(\text{Inf 1Y}, \text{Inf 30Y}) & \dots & \text{Var}(\text{Inf 30Y}) \end{bmatrix}$$

Les covariances et variances empiriques de la matrice VCV sont calculées à partir de l'historique des taux précédents. Toutefois, nous avons une non stationnarité des rendements obligataires : un nombre important de données contribue à diminuer le risque d'estimation alors qu'un petit échantillon a l'avantage d'utiliser l'information la plus récente. Afin de profiter des deux approches, nous prenons l'ensemble des données de notre historique mais nous affectons des poids exponentiels aux observations, déclinant quand on remonte le temps:

$$\text{Cov}(\text{Taux}_i, \text{Taux}_j) = \sum_{t=1}^T p_t (\text{Taux}_i - \overline{\text{Taux}_i}) . (\text{Taux}_j - \overline{\text{Taux}_j}) \text{ où } p_t = \frac{\lambda^{T-t+1}}{\sum_{t=1}^T \lambda^t}$$

Définition 24. (Le portefeuille d'adossement LHP)

Le portefeuille d'adossement se définit comme l'allocation qui minimise les Tracking Error d'adossement nominale et inflation sous les contraintes suivantes : les écarts actif passif en sensibilité $|S^{actif} - S^{passif}|$ et en convexité $|C^{actif} - C^{passif}|$ doivent être inférieurs à 5%, et la Tracking Error A/P ne doit pas excéder 1%.

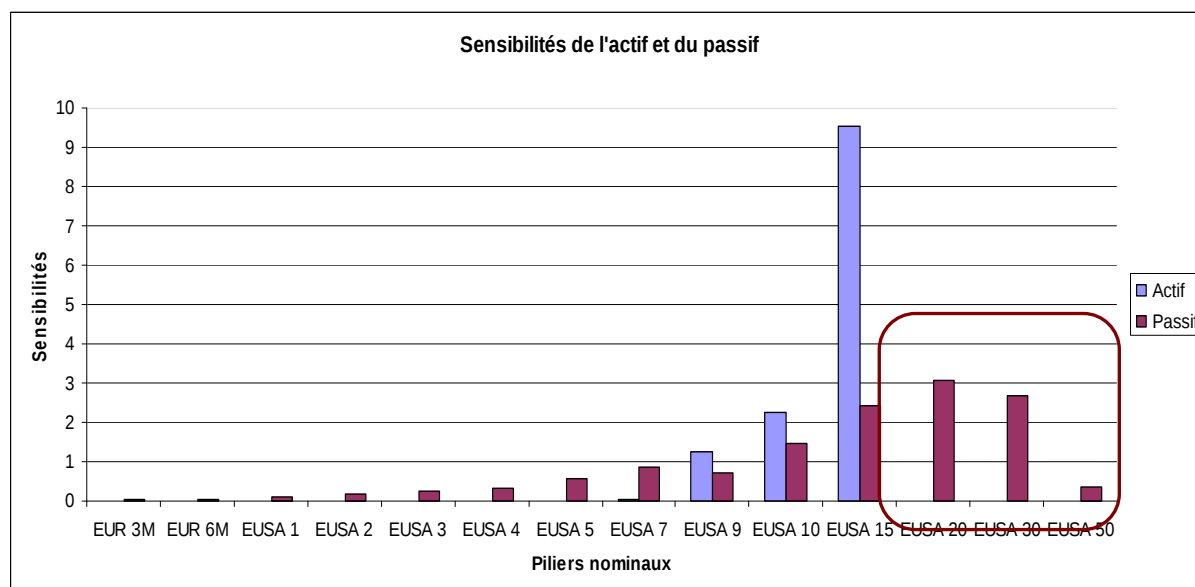
Pour nos deux échéanciers de passif (relatifs aux corporate A et B), nous procédons aux minimisations de leurs Tracking Errors nominale et inflation afin de déterminer leur portefeuille d'adossement. Nous utilisons pour cela un logiciel d'optimisation quadratique.

Résultat 29. (Mapping en sensibilité de l'actif et du passif)

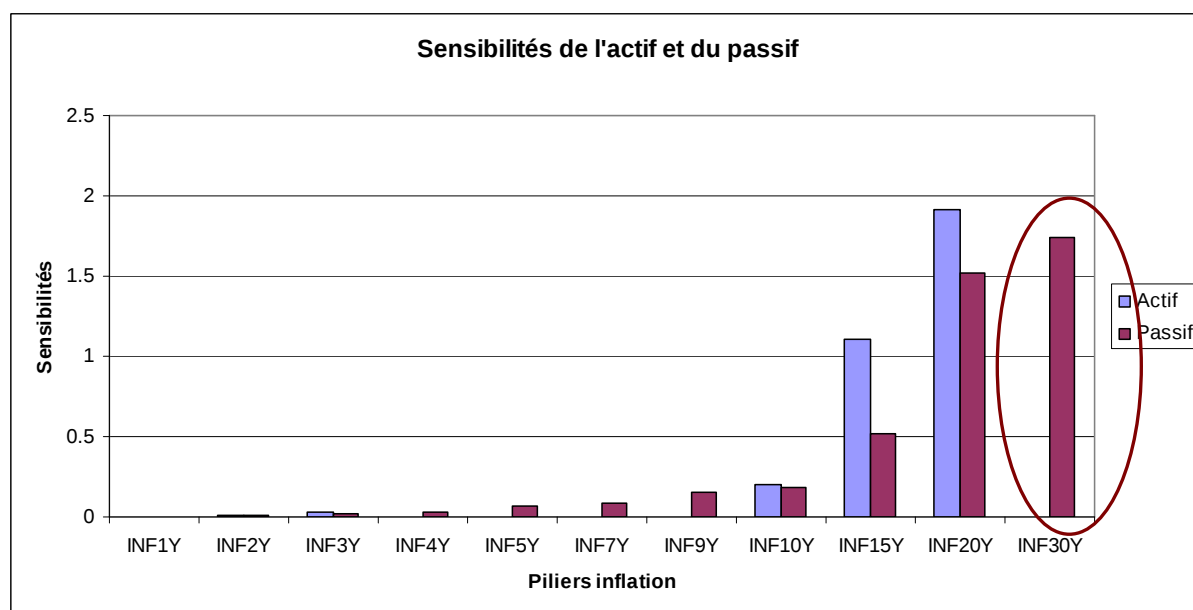
A cause des fortes contraintes imposées à notre adossement, notre logiciel d'optimisation ne trouve pas d'allocations satisfaisantes pour nos deux échéanciers de passif. Ceci s'explique par le fait que les durations de nos indices ne sont pas suffisamment longues. Les flux d'actif ne peuvent adosser les flux de passif sur les piliers de risque d'échéances longues (20, 30 et 50 ans), ce qui crée une dégradation de notre adossement en sensibilité et au niveau de la Tracking Error A/P.

La qualité d'adossement est moins bonne pour l'échéancier A car il présente une durée plus grande que celle de l'échéancier B. En guise d'illustration, nous présentons les résultats obtenus pour le corporate A sur les parties nominale et inflation :

Graphique 20. (Mapping en sensibilité de l'actif sur l'échéancier de passif du corporate A)



Nous remarquons que le passif est très sensible aux taux sur les échéances longues 20, 30 et 50 ans. Pourtant, les flux de l'actif n'adossent pas les flux du passif sur ces échéances. L'échéance la plus longue accessible par l'actif est le 15 ans. De ce fait, une forte sensibilité de l'actif est à noter sur cette échéance pour compenser le non adossement actif/passif sur les échéances plus longues.



Nous remarquons également que le passif est très sensible à l'inflation sur les échéances longues 20 et 30 ans et que les flux de l'actif n'adossent pas ceux du passif sur l'échéance 30 ans. L'échéance la plus longue accessible par l'actif est le 20 ans. De ce fait, une forte sensibilité de l'actif est à noter sur les échéances 15 et 20 ans pour compenser le non adossement actif/passif sur les échéances plus longues.

Afin de remédier à ce problème, nous allons intégrer des swaps de taux et d'inflation zéro-coupon d'échéances longues pour allonger la durée de notre fonds.

3.1.3. Amélioration de l'adossment par l'intégration de swaps nominaux et inflation

Les swaps présentent de nombreux avantages pour les solutions d'adossment de passif :

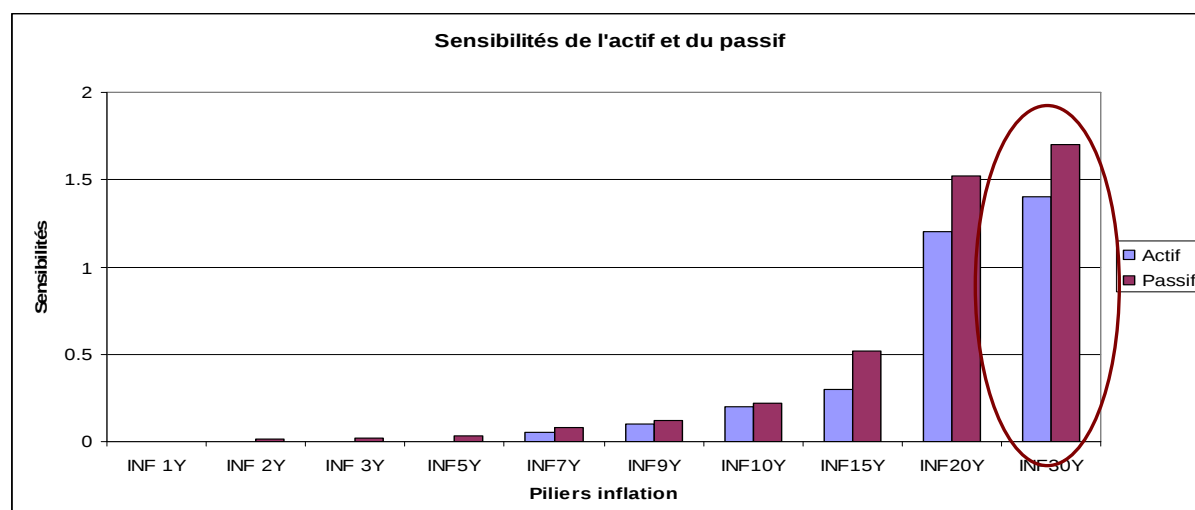
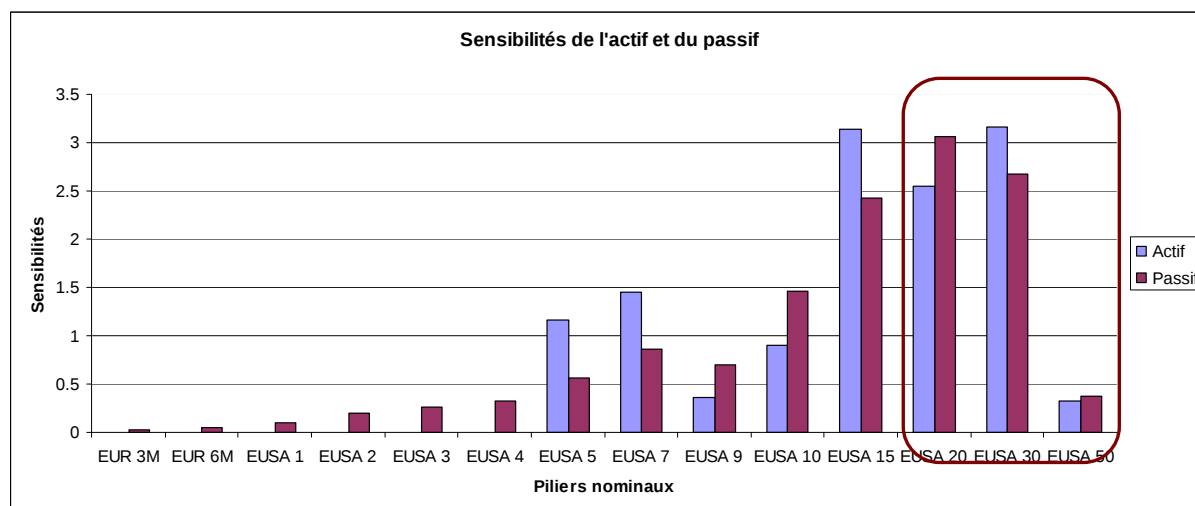
Résultat 30. (Intérêt des swaps dans un montage ALM)

Dans une optique ALM, les swaps permettent :

- d'allonger la durée du fonds
- de réduire l'investissement en cash
- d'apporter une plus grande flexibilité (ce sont des produits « over the counter »)
- d'avoir une très bonne liquidité, en particulier sur les échéances longues.

Dans notre solution LDI, les swaps nous permettent d'adosser les flux d'actif et de passif sur les piliers de maturité longue et de diminuer notre Tracking Error A/P :

Graphique 21. (Mapping de l'actif sur l'échéancier du corporate A en faisant appel à des swaps)

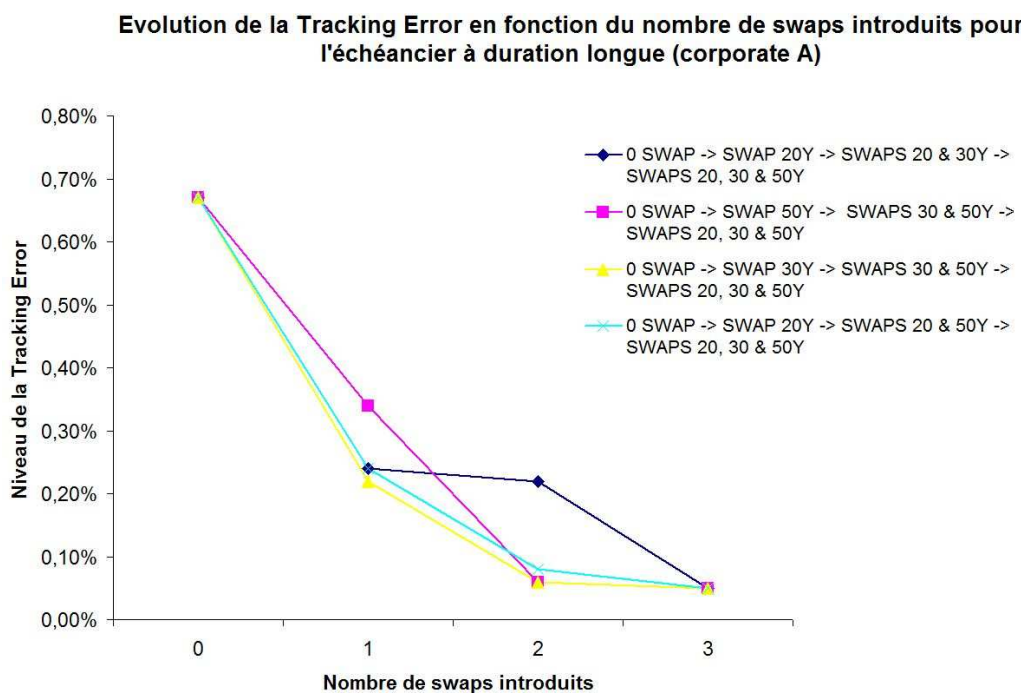


Analyse comparative et résultats. (Meilleur adossement A/P après introduction de swaps)

Pour tout type d'échéanciers (à duration courte, moyenne ou longue), nous avons montré que l'introduction de swaps dans nos allocations améliore naturellement l'adossement actif / passif car les sensibilités du passif sont mappées sur les échéances longues. A présent, les contraintes d'adossement sur les niveaux de Tracking Error A/P, de sensibilité et de convexité sont respectées.

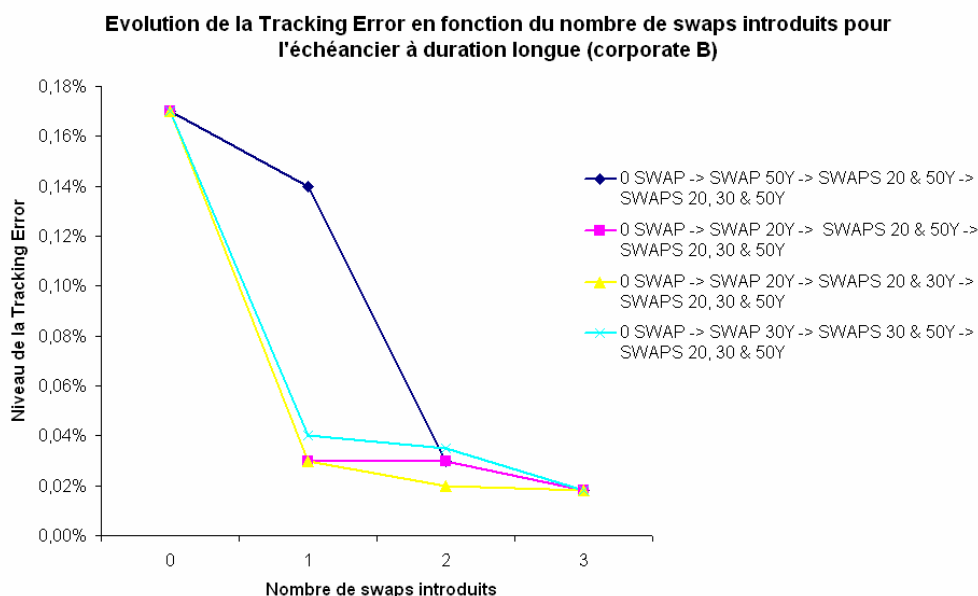
La question est de savoir combien de swaps participent significativement à la diminution de la Tracking Error A/P, afin de ne conserver que ces derniers dans nos allocations. Cet exercice est à mener sur les Tracking Error nominale et inflation. En guise d'illustration, nous présentons les résultats obtenus pour les corporate A et B sur la partie nominale.

Graphique 22. (Evolution de la Tracking Error pour un passif à duration longue (corporate A))



Pour des passifs longs, l'introduction d'un swap de maturité longue (20, 30 ou 50 ans) provoque une diminution importante de la Tracking Error. L'introduction de deux maturités très longues distinctes (par ex. 30 et 50 ans) génère une diminution encore plus significative de la Tracking Error. Dans cet exemple, nous introduirons deux swaps d'échéances 30 et 50 ans.

Graphique 23. (Evolution de la Tracking Error pour un passif à duration moyenne (corporate B))

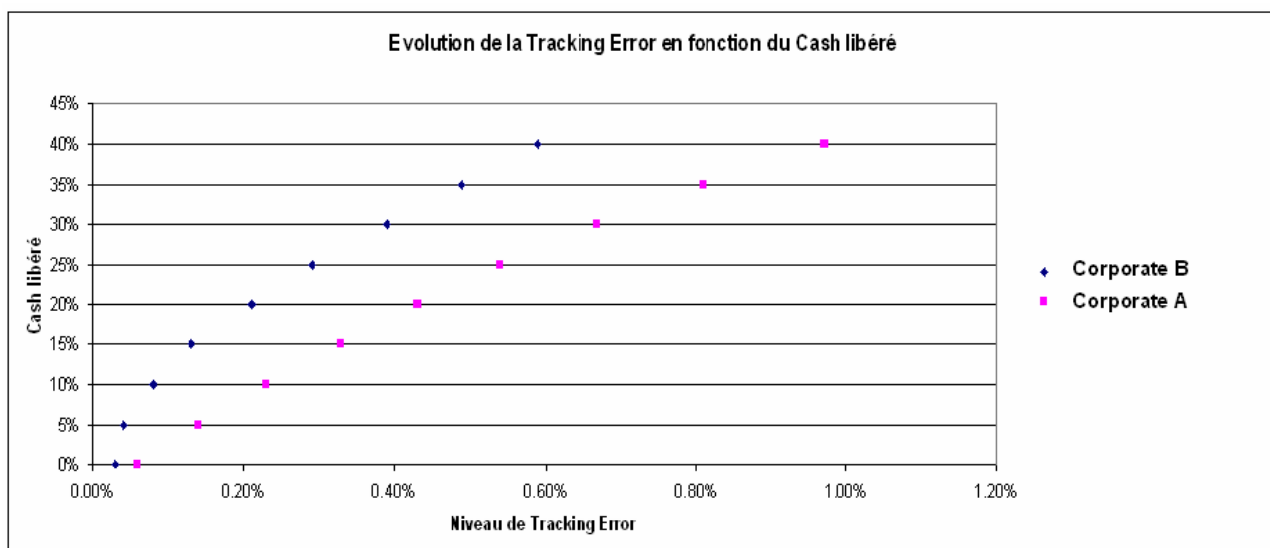


Pour des passifs courts, la sensibilité sur le pilier 50 ans est très faible. Ainsi, l'introduction d'un swap 50 ans ne génère pas une forte diminution de la Tracking Error. Au contraire, l'introduction d'un swap 20 ans ou 30 ans provoque une diminution significative de cette dernière. L'ajout d'un deuxième swap zéro-coupon en complément du premier (swap 20 ans ou 30 ans) n'apporte pas une diminution importante de la Tracking Error. Dans cet exemple, nous introduirons seulement un swap 20 ans.

3.1.4. La puissance du LDI : construction de frontières efficaces Tracking Error-cash libéré

Après avoir sélectionné le nombre de swaps à conserver, nous allons souspondérer notre allocation d'actifs afin de libérer une poche de cash destinée à alimenter notre portefeuille PSP indiciel. Pour chaque niveau de cash libéré, nous déterminons le LHP indiciel qui minimise la Tracking Error d'adossement A/P.

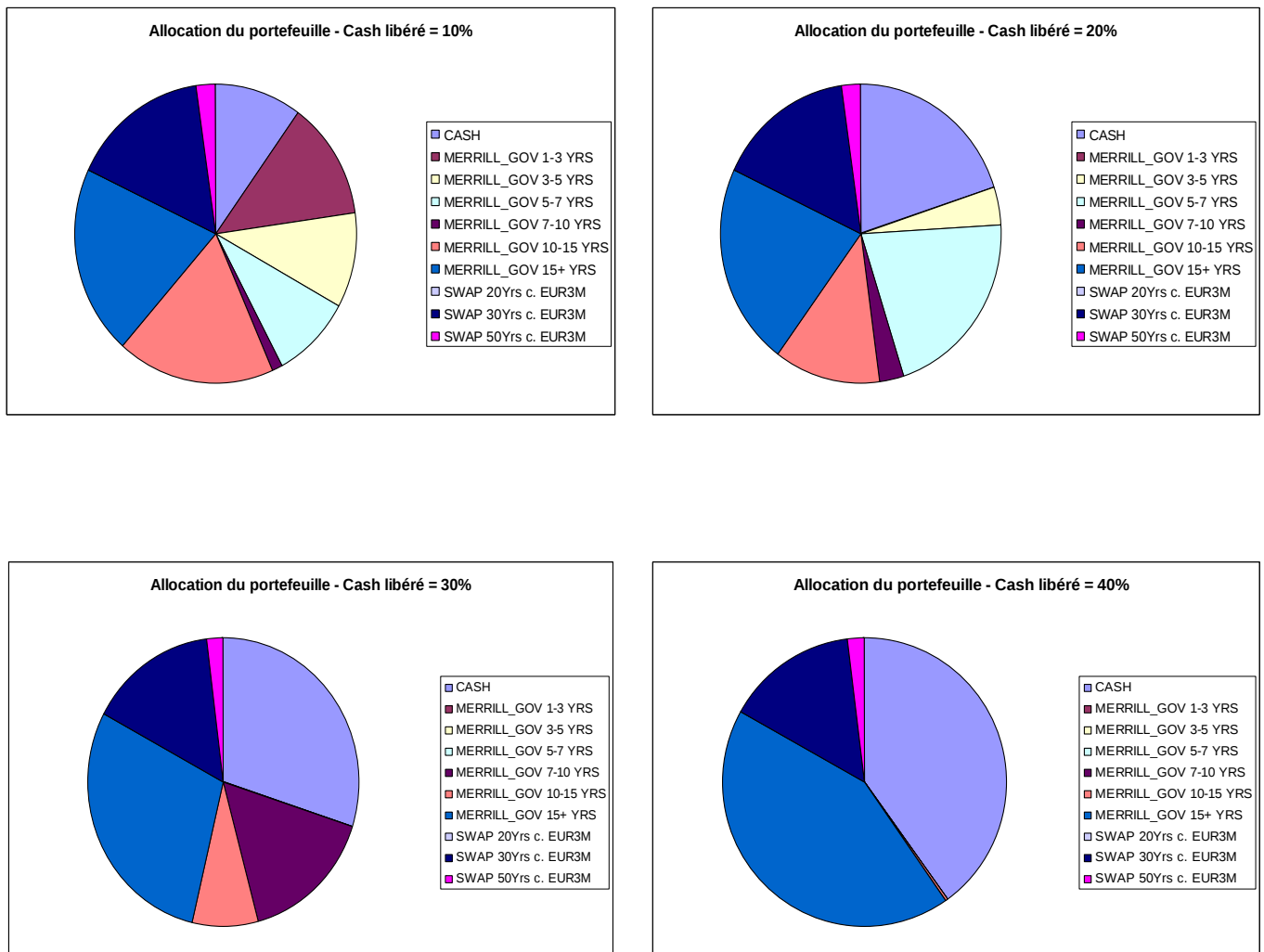
Graphique 24. (Frontière efficace - Evolution de la Tracking Error en fonction du cash libéré)



Résultat fondamental 31. (Frontières efficaces dans le plan cash libéré - Tracking Error A/P)

Plus nous libérons une poche de cash importante dans notre LHP, plus la Tracking Error d'adossement A/P se dégrade. Nous sommes capables de tracer des frontières efficaces de LHP dans le plan cash libéré - niveau de Tracking Error A/P. Ainsi, le gestionnaire libère des capitaux dans le cadre du budget de risque défini par son client.

Nous nous intéressons aux allocations du LHP indiciel en fonction du niveau de cash libéré. En guise d'illustration, nous analysons les résultats obtenus pour les allocations nominales du corporate A :

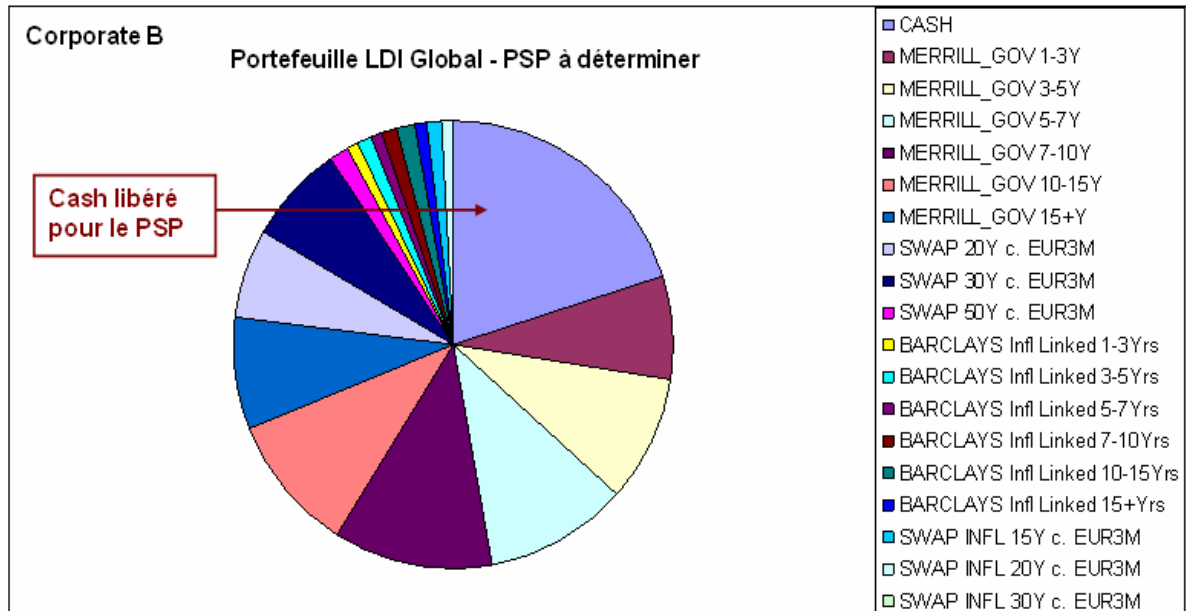


Résultat 32. (Allocation d'actifs par niveau de Tracking Error)

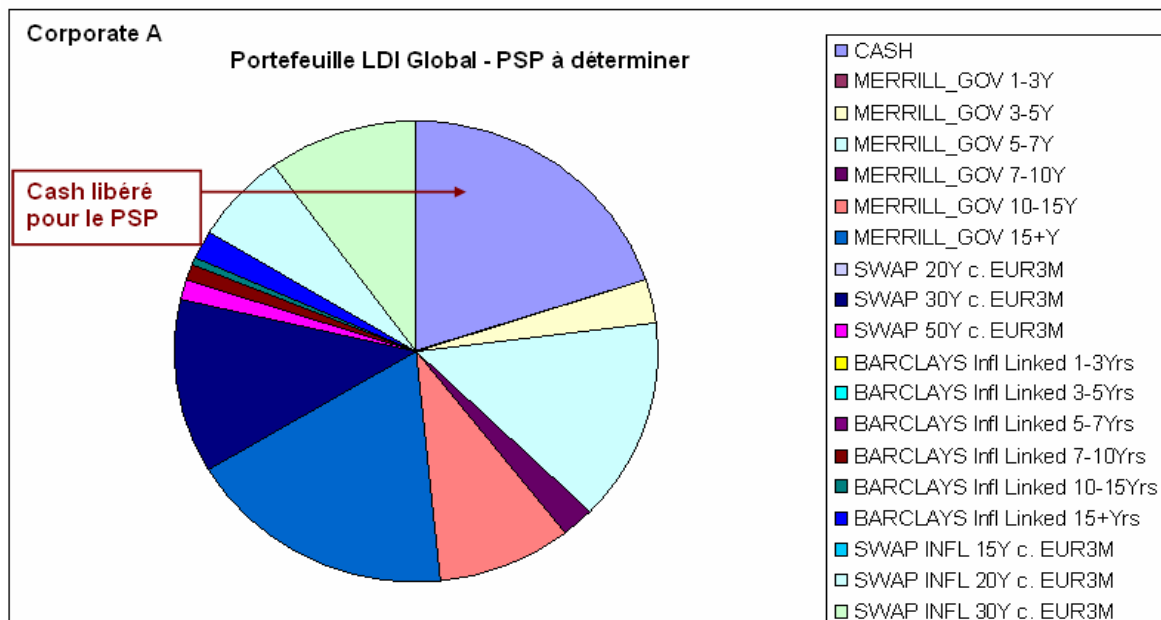
Plus le niveau de cash libéré est important, plus l'allocation se concentre sur les actifs qui mappent les maturités de risque à grande sensibilité, afin de contenir au mieux la dégradation inéluctable de la Tracking Error A/P. Le revers de la médaille est une perte importante de diversification dans notre LHP.

Concernant nos deux échéanciers d'engagement, notre montage LDI propose pour nos LHP les allocations diversifiées suivantes, avec un cash libéré de 20% et une Tracking Error A/P contenue à moins de 1% :

Résultat 33. (Analyse comparative entre les corporates A et B)



Pour un niveau de cash libéré de 20%, nous trouvons un portefeuille LHP très diversifié, avec un mapping en sensibilité sur les maturités de risque nominale et inflation très convenable puisque la Tracking Error globale d'adossement est inférieure à 1%.



Pour un niveau de cash libéré de 20%, nous obtenons également un LHP diversifié, avec un mapping en sensibilité sur les maturités de risque nominale et inflation satisfaisant puisque la Tracking Error globale d'adossement est inférieure à 1,5%.

Résultat 34. (Puissance des swaps dans une solution d'adossement)

Les solutions LDI sont des méthodes d'adossement actif / passif qui utilisent abondamment les swaps. Grâce à ces produits, elles sont capables de traiter les passifs à duration longue avec autant d'aisance et d'efficacité que les passifs à duration moyenne ou courte : les swaps apportent un effet de levier nous permettant d'économiser du cash lors de la couverture des maturités les plus longues. Ce cash sera ensuite utilisé pour trouver de la performance sur les marchés actions, hedge funds et taux.

3.2. Notre construction du Performance Seeking Portfolio (PSP) indiciel

3.2.1. PSP recommandé par la théorie financière et critiques

D'après le théorème de séparation, le PSP doit avoir une corrélation très faible avec le LHP. Les recherches académiques, travaillant à partir d'indices globaux actions taux et hedge funds, nous encouragent à investir dans des actions et des classes d'actifs décorréliées du marché comme la gestion alternative (hedge funds et private equity). L'intérêt est de se détacher le plus possible du LHP qui porte les risques de taux et d'amortir la volatilité implicite du portefeuille global, tout en créant une réserve de plus-value à long terme.

En pratique, il nous est impossible de suivre scrupuleusement les recommandations académiques pour les raisons suivantes :

- ✓ La réglementation assurantielle nous interdit d'allouer plus de 8% de notre allocation en hedge funds. Cette contrainte réglementaire sera prise en compte lors de la construction de la frontière efficiente de notre PSP.
- ✓ De surcroît, Solvabilité II impose de renforcer significativement les fonds propres des institutionnels souhaitant investir dans les hedge funds et les actions. Cette mesure représente un coût de provisionnement non négligeable qui influencera les décisions du gestionnaire pour son allocation d'actifs.
- ✓ Nos clients, principalement des entreprises et des mutuelles, ont des profils averses au risque. Par conséquent, ils ne sont pas très enclins à accepter des solutions adossées au passif faisant appel à de la gestion alternative et actions.

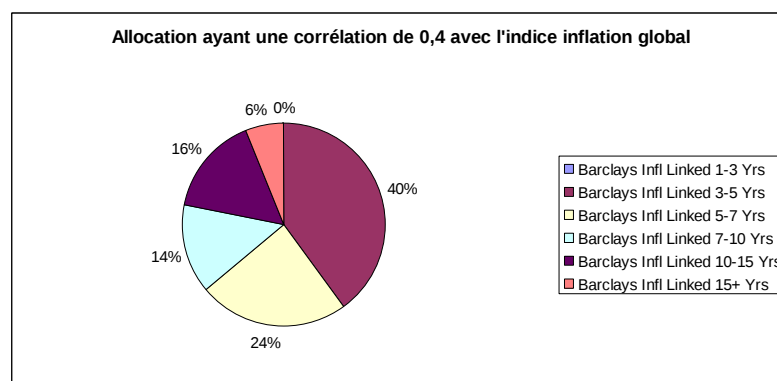
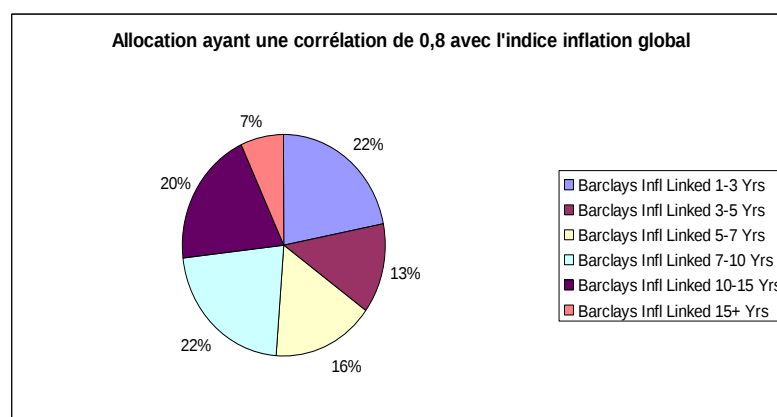
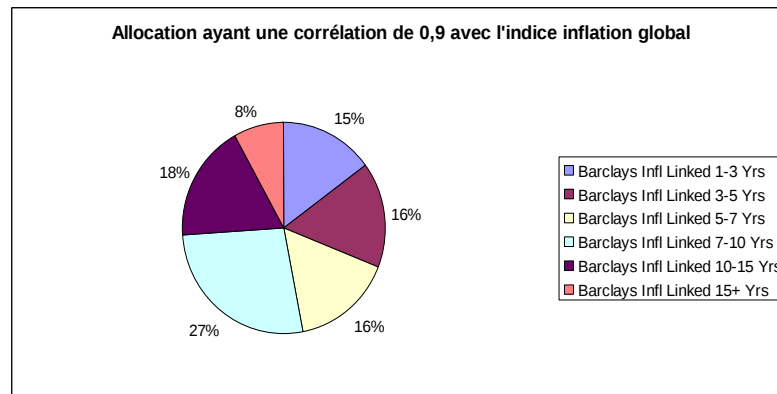
Il convient alors de déterminer pour le PSP, les classes d'actifs qui respectent toutes ces contraintes.

Lors de la construction du LHP, nous avons fait le choix de diversifier le plus possible notre portefeuille, afin de couvrir avec précision les risques de taux et d'inflation auxquels est soumis notre passif. En effet, nos allocations LHP sont très diversifiées puisque elles font appel à six indices nominaux Merrill Eur. Government, six indices inflation Barclays Infl. Linked et à des swaps nominaux et inflation.

Résultat 35. (Effet de la diversification sur les corrélations)

Un portefeuille suffisamment diversifié et composé d'indices obligataires nominaux (ie. inflation) peut avoir, suivant son allocation, une corrélation très faible avec l'indice de référence global Merrill Euro (ie. Barclays Infl. Linked).

Exemple. (Corrélations entre des allocations d'indices obligataires inflation et l'indice obligataire inflation global)



Résultat 36. (Le monétaire et l'obligataire ne sont pas écartés pour le PSP)

Il est trompeur de croire qu'intégrer du monétaire et de l'obligataire dans le PSP contribue à corréliser ce dernier au LHP. En effet, nos portefeuilles LHP et PSP seront suffisamment diversifiés pour ne pas être forcément :

- ✓ corrélés avec les indices obligataires globaux
- ✓ corrélés entre eux

Par conséquent, nous retiendrons les quatre classes d'actifs suivantes pour la construction du PSP indiciel :

- ✓ l'indice global actions EuroStoxx50 Total Return
- ✓ l'indice global hedge funds HFRI Global Index
- ✓ l'indice global taux JP Morgan EMU All Maturities
- ✓ l'indice monétaire Eonia

L'objet de notre étude va être de déterminer une allocation d'actifs *PSP* pour la partie cash libéré de notre portefeuille *LDI*. Nous nous appuyons sur un portefeuille *LHP* fictif pour décrire la construction de notre *PSP*. Nous déterminerons ensuite les *PSP* pour nos deux exemples de passif à durations moyenne et longue.

3.2.2. Notre construction pratique du portefeuille PSP

Nous nous basons sur l'approche du portefeuille efficient de Markowitz. Nous utilisons un générateur de scénarios prenant en compte les moments statistiques des séries chronologiques des classes d'actifs.

Notre objectif de gestion retenu pour le *PSP* est le suivant :

- ✓ Gestion alternative absolute return *Eonia* + *X%* (Choix de *BNP Paribas*)
- ✓ Le *PSP* doit être décorrélié au *LHP* (Contrainte fondamentale du *LDI*)

Ainsi, le portefeuille *PSP* aura un rendement quasi-linéaire comme l'*Eonia* (i.e. une volatilité très contenue) et une surperformance par rapport à l'*Eonia* de *X%* (à déterminer).

3.2.2.1. Etude statistique des séries historiques de chaque classe d'actifs

A partir de l'historique des rendements du *LHP* et des indices constituant le *PSP*, nous calculons les principaux indicateurs statistiques de ces séries temporelles : rendement moyen, volatilité, corrélations, skewness, kurtosis et auto corrélation.

Définition 25. (La skewness d'une densité de probabilité)

La skewness *S* mesure l'asymétrie de la densité d'une variable aléatoire définie sur les nombres réels. L'asymétrie d'une distribution est positive si la queue de droite (à valeurs hautes) est plus longue ou épaisse. Elle est négative si la queue de gauche (à valeurs basses) est plus longue ou épaisse. Mathématiquement, la skewness est le moment centré d'ordre 3 de notre distribution probabiliste :

$$S = \frac{E((X - E(X))^3)}{\sigma^3}$$

Un estimateur non biaisé de la skewness est :

$$S_n = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \right)^3$$

où $\hat{\sigma}$ est un estimateur non biaisé de l'écart type.

Définition 26. (Le kurtosis d'une distribution probabiliste)

Le kurtosis *K* est une mesure de l'aplatissement, ou à contrario de la « pointicité », de la distribution d'une variable aléatoire réelle. Mathématiquement, la kurtosis est le moment centré d'ordre 4 de notre distribution probabiliste :

$$K = \frac{E((X - E(X))^4)}{\sigma^4}$$

Un estimateur non biaisé de l'excès de Kurtosis est :

$$K_n = \frac{(n+1)n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \right)^4 - 3 \frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Définition 27. (Le coefficient d'auto corrélation d'ordre n)

Le coefficient d'auto corrélation γ d'ordre n est le coefficient de corrélation calculé entre une série temporelle et elle-même décalée de n crans. Nous verrons que certaines classes d'actifs, comme l'immobilier et le monétaire, sont très auto-corrélées à l'ordre 1 et 2. Son expression mathématique est :

$$\gamma(n) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-n})}{\text{Var}(X)}$$

Nous calculons les indicateurs statistiques précédents sur les rendements du LHP et les indices constituant le PSP :

Exemple. Caractéristiques historiques d'un portefeuille LHP fictif

Caractéristiques statistiques :

Caractéristiques	HFRI	Monétaire	Obligations	Actions	LHP
Moyenne	12.31%	3.16%	5.57%	8.92%	5.98%
Volatilité	7.17%	3.47%	4.46%	6.73%	4.66%
Skewness	-0.74	0.04	0.03	-0.55	2.01
kurtosis	2.67	-0.75	0.11	0.50	8.00
Auto-corrélation	0.32	0.97	0.16	0.18	-0.11

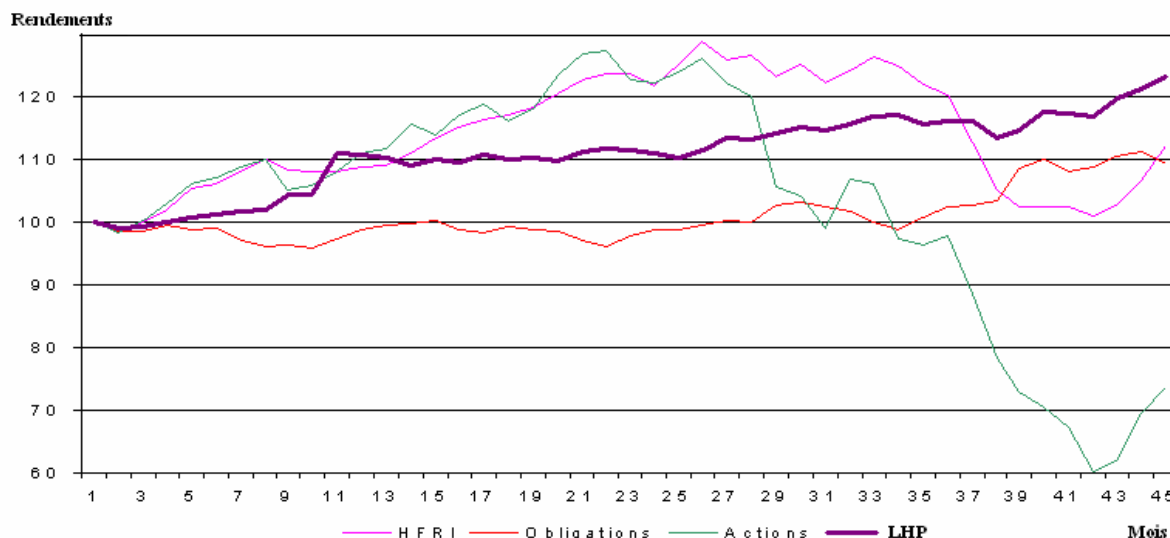
Matrice des corrélations :

Caractéristiques	HFRI	Monétaire	Obligations	Actions	LHP
HFRI	1.00	-0.23	-0.24	0.68	0.23
Monétaire	-0.23	1.00	0.08	-0.24	-0.20
Obligations	-0.24	0.08	1.00	-0.31	0.09
Actions	0.68	-0.24	-0.31	1.00	0.22
LHP	0.23	-0.20	0.09	0.22	1.00

Résultat 37. (Analyse statistique des rendements et des corrélations entre les actifs)

Nous constatons que le portefeuille LHP présente une skewness et un excès de kurtosis importants. L'indice monétaire étant une classe d'actifs assez prédictible à court terme, nous trouvons une auto-corrélation à l'ordre 1 très proche de 1. L'indice hedge funds présentant des rendements non normaux, il est classique de trouver un excès de kurtosis important. Ainsi, pour améliorer la qualité de nos modélisations des rendements futurs, nous utiliserons un générateur de scénarios qui respecte la skewness, la kurtosis et les auto-corrélations.

Graphique 25. (Etude des rendements mensuels historiques sur 45 mois)



Le LHP présente une évolution historique de ses rendements assez proche de celle de l'indice taux de référence. Ce résultat paraît logique puisque le LHP est composé essentiellement d'indices obligataires. Nous avons vu précédemment que ce raisonnement n'est pas juste au sujet des corrélations, à cause de l'effet diversification du portefeuille.

3.2.2.2. Génération de scénarios par le modèle amélioré de GARCH

Nous présentons deux modélisations stochastiques utilisées pour la génération de scénarios :

Définition 28. (Modélisation des rendements par une loi normale – Black & Scholes [1973])

La dynamique des rendements $\tilde{r}_t$ des actifs vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$d\tilde{r}_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$dW_t \sim N(0, dt)$ (il s'ensuit que $\tilde{r}_t \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$)

μ est le rendement moyen historique constaté (ou le rendement espéré dans le futur)

σ est la volatilité moyenne historique constatée (ou la volatilité espérée dans le futur)

Résultat 38. (Modèle de Black & Scholes et limites)

Ce modèle permet d'effectuer des scénarios qui respectent les niveaux de rendement μ et de volatilité σ souhaités. Malheureusement, il ne tient pas compte des moments d'ordre supérieur skewness et kurtosis.

Définition 29. (Modélisation des rendements par un GARCH(1,1) – Bollerslev [1986])

Dans le modèle GARCH(1,1), la dynamique des rendements $\tilde{r}_t$ des actifs vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$d\tilde{r}_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t$$

avec : $dW_t \sim N(0, dt)$

μ est le rendement moyen historique constaté (ou le rendement espéré dans le futur)

σ_t suit l'équation $\sigma_t^2 = a r_{t-1}^2 + b \sigma_{t-1}^2 + c \sigma^2$ où $r_t \sim N(\mu, \sigma_t)$

σ est la volatilité historique (ou espérée)

a, b et c sont des réels positifs et $a+b+c=1$.

Résultat 39. (Modèle GARCH(1,1) – prise en compte des moments statistiques supérieurs)

Ce modèle permet d'effectuer des simulations qui respectent les niveaux de rendement μ , de volatilité σ et d'excess kurtosis EK renseignés : pour plusieurs triplets (a, b, c) , nous générons N simulations et calculons la moyenne des rendements moyens, des volatilités et des kurtosis de nos scénarios. Nous choisissons le triplet (a^*, b^*, c^*) qui se rapproche le plus des caractéristiques de la série historique. Malheureusement, il produit des simulations de rendements symétriques : la skewness des rendements simulés est nulle.

Des améliorations (Glosten, Jagannathan et Runkle [1993]) ont été apportées à ce modèle pour prendre en compte une skewness non nulle :

σ_t suit désormais l'équation $\sigma_t^2 = a r_{t-1}^2 + b \sigma_{t-1}^2 + c \sigma^2 + d 1_{r_{t-1} < 0} \sigma_{t-1}^2$ où le dernier terme $d 1_{r_{t-1} < 0} \sigma_{t-1}^2$ apporte l'asymétrie attendue.

Résultat 40. (Modèle GARCH(1,1) amélioré)

Le modèle de Glosten, Jagannathan et Runkle [1993] permet de générer des simulations respectant les contraintes de rendement moyen, de volatilité, de skewness et de kurtosis historiques (ou espérés) : pour plusieurs quadruplets (a, b, c, d) , nous générons N simulations et calculons la moyenne des rendements moyens, des volatilités et des kurtosis de nos scénarios. Nous choisissons le quadruplet (a^*, b^*, c^*, d^*) qui se rapproche le plus des caractéristiques de la série historique.

Définition 30. (La méthode de Cholesky pour la prise en compte des corrélations entre les actifs).

Le procédé de Cholesky génère une variable aléatoire gaussienne centrée en dimension n $X \sim N(0, K)$ où K est la matrice de variance covariance. Cette matrice étant symétrique réelle positive, il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que $K = L^t L$.

Avec $X^{indep} = \begin{pmatrix} N(0,1) \\ \dots \\ N(0,1) \end{pmatrix}$ aux composantes indépendantes, on montre alors que $X = L X^{indep} \sim N(0, K)$

Les coefficients de la matrice L se déduisent de l'algorithme de factorisation :

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Pour $i = 1$, nous déterminons la première colonne de L :

$$k_{11} = l_{11} l_{11} \text{ d'où } l_{11} = \sqrt{k_{11}}$$

$$k_{1j} = l_{11} l_{j1} \text{ d'où } l_{j1} = \frac{k_{1j}}{l_{11}}, 2 \leq j \leq n$$

Nous déterminons la $i^{ème}$ colonne de L ($2 \leq i \leq n$), après avoir calculé les $(i-1)$ premières colonnes :

$$k_{ii} = l_{i1} l_{i1} + \dots + l_{ii} l_{ii} \text{ d'où } l_{ii} = (k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{1/2}$$

$$k_{ij} = l_{i1} l_{j1} + \dots + l_{ii} l_{ji} \text{ d'où } l_{ji} = \frac{k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}}, i+1 \leq j \leq n$$

Résultat 41. (Générateur de scénarios retenu)

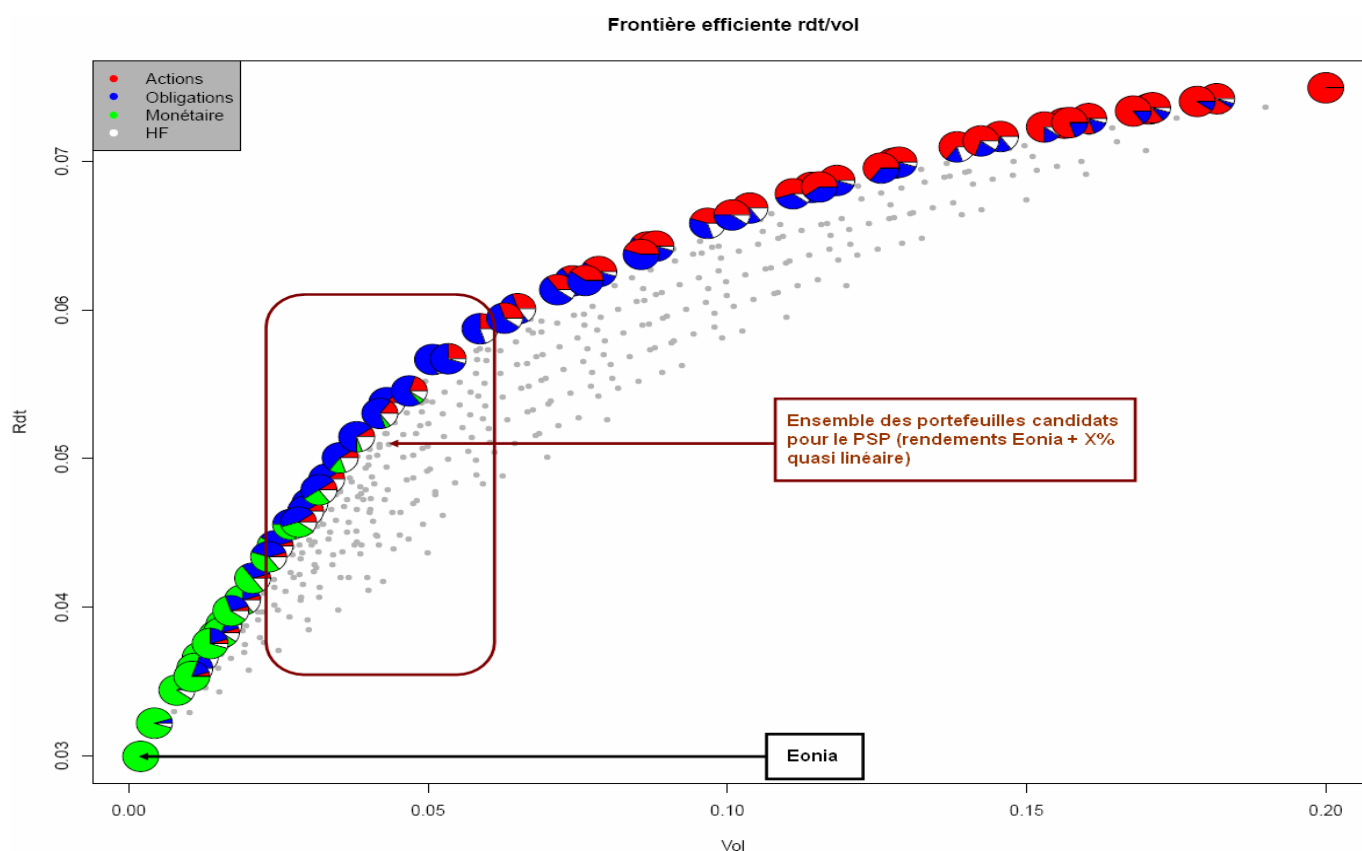
L'utilisation conjointe de la méthode de Cholesky et du modèle amélioré de GARCH (1,1) nous permet de simuler des classes d'actifs en respectant leurs caractéristiques historiques (rendement moyen, volatilité, skewness et kurtosis) et leurs corrélations.

3.2.2.3. Frontières semi-efficientes dans l'espace rendement - volatilité - corrélation

Représentation n° 1 : frontière efficiente des portefeuilles candidats dans le plan rendement X% - volatilité

A partir de notre générateur de scénarios (Werlé [2008]), nous simulons et déterminons les rendements et les volatilités annuels moyens sur 40 ans de tous les portefeuilles composés des poches actions, monétaire, obligations et hedge funds, en prenant un pas de 5%. Nous traçons ensuite la frontière efficiente dans le plan rendement X% - volatilité :

Graphique 26. (Frontière efficiente rendement X% – volatilité des portefeuilles candidats au PSP)



Résultat 42. (Portefeuilles candidats pour le PSP dans le plan rendement X% -volatilité)

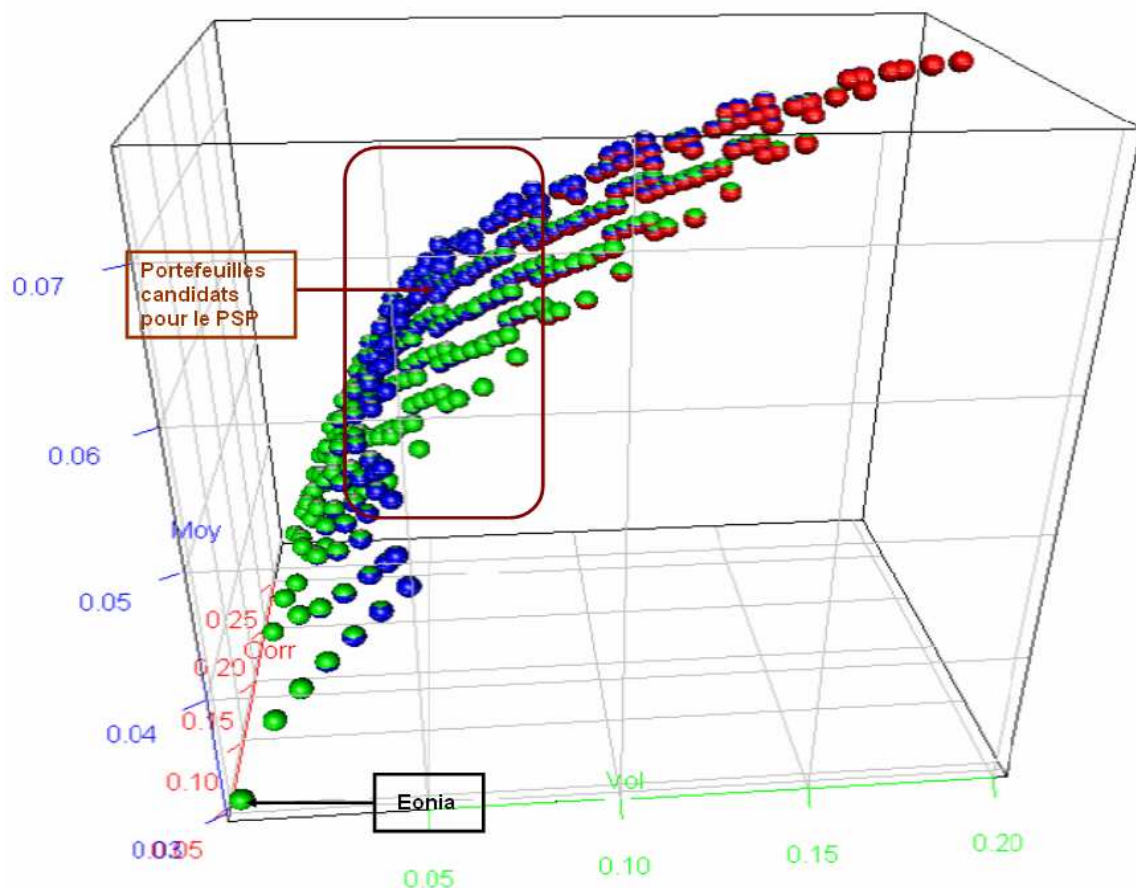
Si nous nous en tenons aux deux seuls critères de rendement et de volatilité, les portefeuilles efficients situés dans l'encadré rouge du graphique pourraient convenir pour notre PSP : pour une volatilité très contenue, ils proposent un rendement bien meilleur que l'Eonia.

Cependant, le PSP doit être décorrélié au LHP : la prise en compte des corrélations entre les portefeuilles candidats et le LHP est primordiale.

Représentation n° 2 : portefeuilles candidats dans l'espace rendement X% - volatilité - corrélation avec le LHP

Nous représentons dans le plan rendement - volatilité - corrélation au LHP, l'ensemble des portefeuilles composés des poches actions, monétaire, obligations et hedge funds, en prenant un pas de 5% :

Graphique 27. (Espace rendement X% – volatilité – corrélation et portefeuilles candidats au PSP)



Résultat 43. (Portefeuilles candidats pour le PSP dans l'espace rendement - volatilité - corrélation)

Dans l'espace rendement X% – volatilité – corrélation au LHP, il est impossible de trouver des portefeuilles efficaces qui seraient à la fois meilleurs en rendement moyen, en corrélation et en volatilité. Nous constatons que de nombreux portefeuilles pourraient convenir pour notre PSP car ils présentent un rendement bien meilleur que l'Eonia, une assez bonne décorrélation avec le LHP et une volatilité très faible.

Toutefois, la démarche classique de représentation des portefeuilles dans un espace n'est pas très adaptée pour déterminer notre portefeuille PSP : il est très difficile de faire son choix dans ce conglomérat de portefeuilles candidats. Nous allons définir la notion de portefeuilles semi-efficaces qui sera un bon outil d'aide à la décision dans le choix du PSP.

Représentation n° 3 : frontière semi-efficiente des portefeuilles candidats dans l'espace rendement réel du LDI - volatilité - corrélation avec le LHP.

Nous avons sélectionné le portefeuille PSP sur ses caractéristiques financières propres : son rendement *Eonia* + *X%*, sa volatilité et sa corrélation au LHP. Cependant, notre démarche oublie le fait que le PSP est intégré dans une solution globale LDI. Dès lors, ce n'est pas le rendement du PSP qui nous intéresse au final, mais celui du rendement de notre solution LDI au global.

Nous allons ainsi déterminer notre portefeuille PSP dans un nouvel espace plutôt original : rendement réel (i.e. net de l'inflation) du portefeuille global LDI, volatilité du PSP et corrélation du PSP avec le LHP.

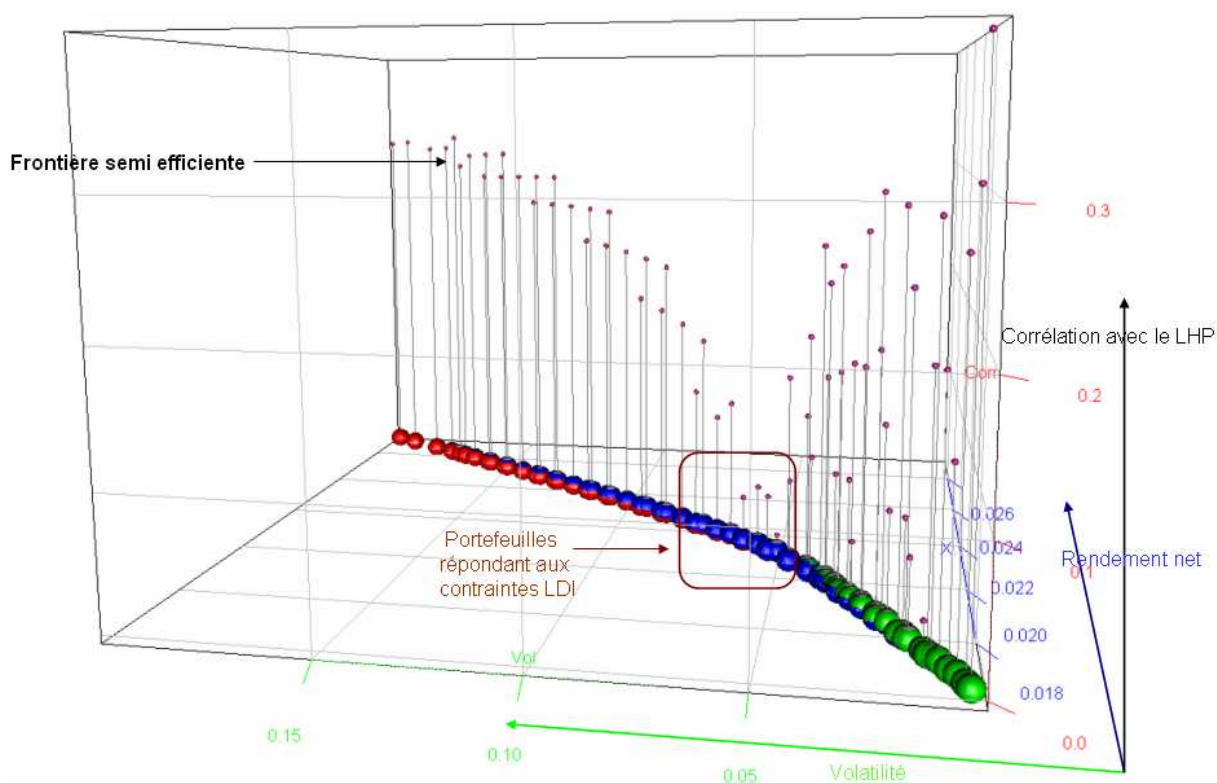
Comme dans l'espace rendement *X%* - volatilité - corrélation au LHP, il est impossible de déterminer un portefeuille efficient à la fois meilleur en rendement réel du LDI, en volatilité et en corrélation au LHP. Afin de rester dans l'approche des portefeuilles efficients au sens de Markowitz, nous définissons la notion de semi-effcience d'un portefeuille en dimension 3 :

Définition 31. (Semi-effcience dans l'espace rendement réel -volatilité-corrélation, Darné [2009])
Un portefeuille est semi-effcient dans notre espace lorsque :

- ✓ Il est efficient dans le plan rendement et volatilité
- ✓ parmi les portefeuilles efficients (dans le plan rendement et volatilité) de même rendement et volatilité, il présente la plus faible corrélation avec le LHP

On se ramène ainsi dans un « plan » rendement - volatilité et corrélation au LHP. Nous pouvons ainsi construire une frontière semi-effciente dans l'espace rendement – volatilité - corrélation.

Graphique 28. (Frontière semi-effciente dans le plan rendement – volatilité – corrélation au LHP)

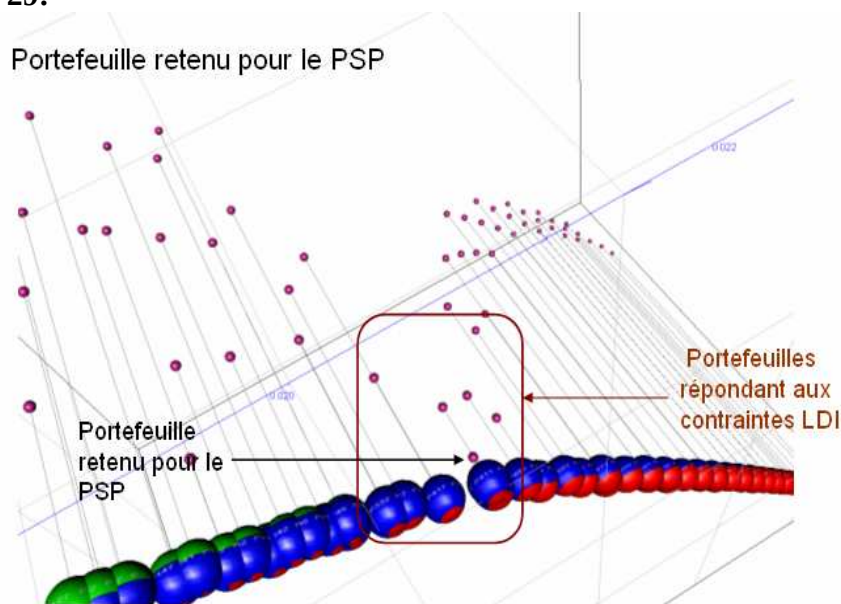


Résultat 44. (Analyse de la frontière semi efficiente)

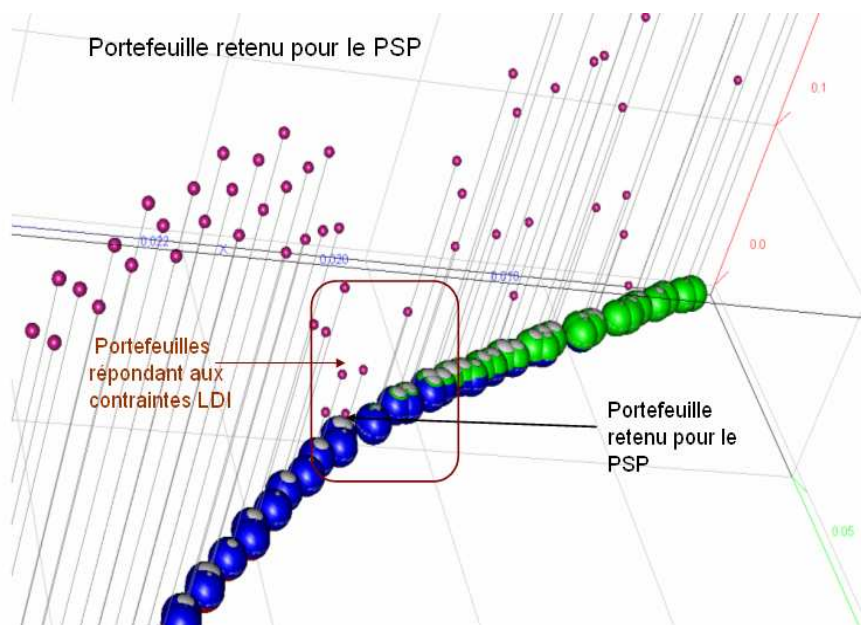
La frontière semi-efficiente se compose des portefeuilles représentés par des boules roses. Elle présente en tous points des discontinuités. Cela est dû au fait que deux portefeuilles semi-efficients très proches dans l'espace (leurs rendements et leurs volatilités sont très proches) n'ont pas pour autant des allocations similaires. Or, nous avons montré que l'allocation avait une influence majeure sur le niveau des corrélations, d'où ces discontinuités sur l'axe vertical des corrélations. Les portefeuilles situés dans l'encadré répondent aux contraintes imposées par le LDI : ils ont une volatilité très contenue, un rendement réel positif, et ils sont décorrélés du LHP.

Nous devons choisir parmi les portefeuilles candidats situés dans l'encadré, celui qui sera retenu pour le portefeuille PSP :

Graphique 29:



Graphique 30 :



Résultat 45. (Choix du portefeuille PSP)

Notre choix s'est porté sur le portefeuille diversifié présentant l'allocation suivante : 20% d'actions, 20% de hedge funds et 60% d'obligations. Il présente une corrélation extrêmement faible avec le LHP, une volatilité très maîtrisée, et le montage LDI composé de ce portefeuille présente un rendement réel très satisfaisant. Il ne comporte pas de monétaire car cette classe d'actifs pénalise fortement le rendement réel du LDI. Le rendement réel du portefeuille LDI obtenu avec ce PSP est de 2,09%.

3.2.2.4. Approfondissement

Une étude plus fine des différentes classes d'actifs peut être menée dans un second temps. Par exemple, une étude menée par l'institut EDHEC-Risk montre que, suivant la stratégie de gestion alternative retenue (Long/Short Equity, Convertible Arbitrage, Event Driven, etc.), l'indice obligataire global a une corrélation avec cette dernière bien différente :

	<i>Convertible arbitrage</i>	<i>CTA Global</i>	<i>Equity Market Neutral</i>	<i>Event Driven</i>	<i>Long/Short Equity</i>
<i>MSCI World Bonds</i>	-0,12	0,34	0,01	-0,13	-0,05
<i>MSCI World Equity</i>	0,22	-0,23	0,42	0,69	0,77

Coefficient de corrélation entre rendements de hedge funds (Edhec Alternative Indexes) et rendements d'actions (MSCI World Equity) / obligations (MSC World Bonds) pour la période 01/1997 - 08/2004

Le Private Equity est une classe d'actifs intéressante pour notre portefeuille PSP car elle est sensée être décorrélée des marchés boursiers et offrir un rendement à deux chiffres.

Nous pouvons également étudier les effets des diversifications géographiques et sectorielles sur les classes d'actifs actions et obligations.

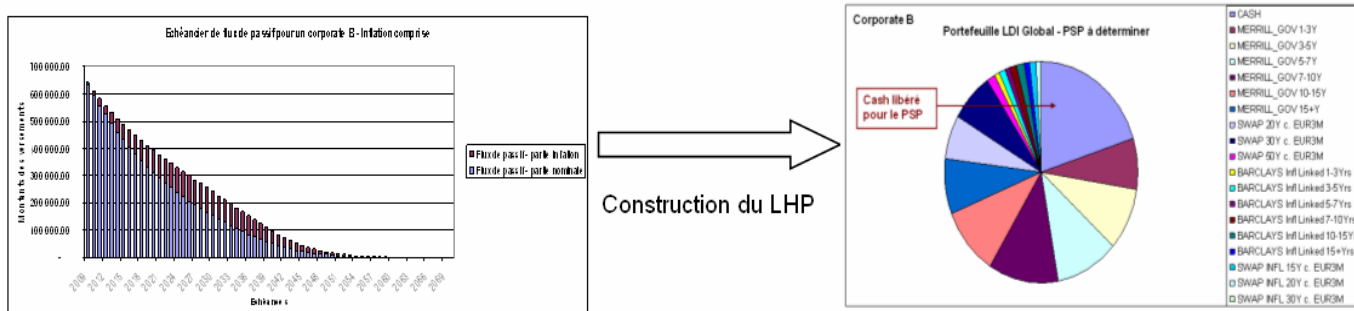
3.3. Le LDI par l'exemple : résultats finaux obtenus pour deux échéanciers de passif

Nous reprenons nos deux échéanciers de passif, à durations moyenne et longue, et nous construisons leur montage LDI. Nous effectuerons une analyse comparative de ce montage avec les méthodes d'adossement traditionnelles.

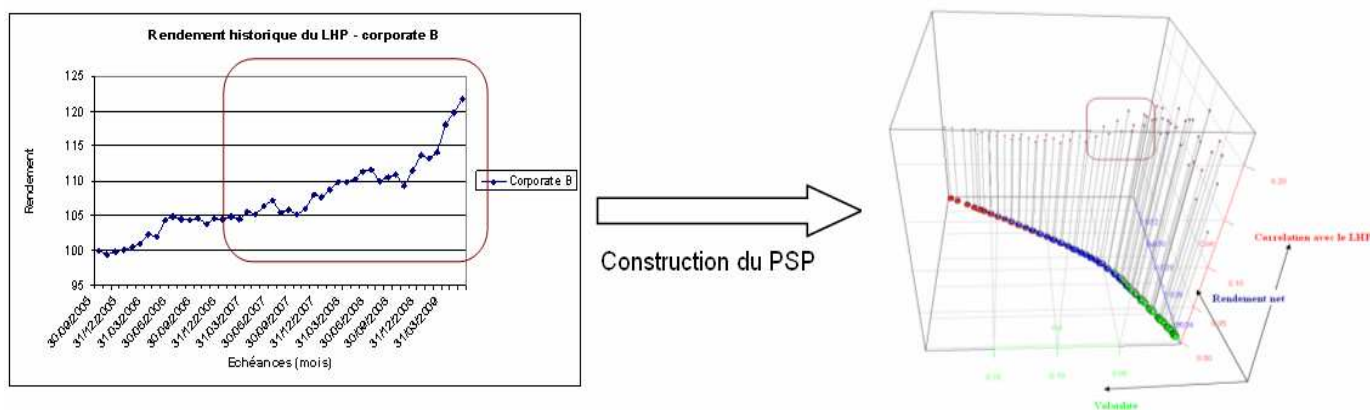
3.3.1. Résultat obtenu pour un échéancier à duration moyenne (corporate B)

Nous mettons en œuvre notre solution d'adossement LDI pour l'échéancier de passif à duration moyenne :

Première étape. Détermination du LHP



Deuxième étape. Détermination du PSP et performance finale du LDI



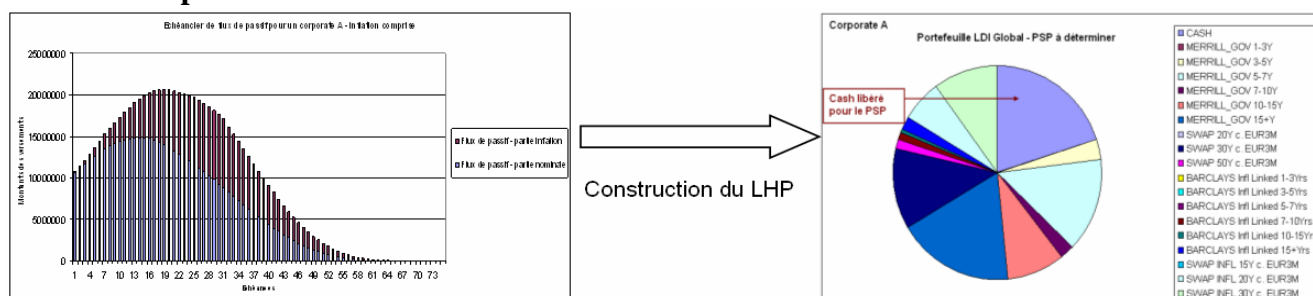
Résultat final 46. (Performance de la solution LDI)

Pour un niveau de cash libéré de 20%, nous obtenons un LHP très diversifié avec une qualité d'adossement très convenable car la Tracking Error globale d'adossement est inférieure à 1%. En choisissant un PSP composé de 35% d'actions, 30% d'obligations, 15% de taux et 20% de HFRI, nous obtenons un portefeuille global LDI de rendement annuel espéré égal à l'inflation + 2,8%.

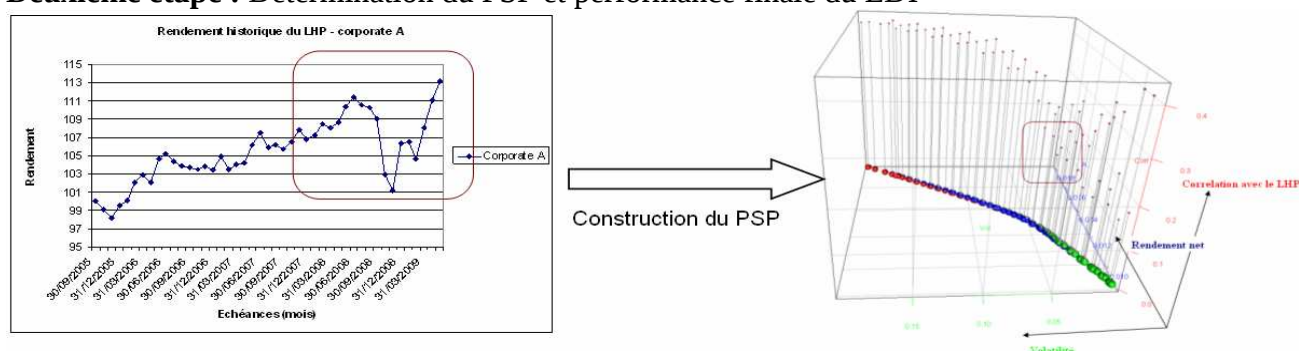
3.3.2. Résultat obtenu pour un échéancier à duration longue (corporate A)

Nous mettons en œuvre notre solution d'adossement LDI pour l'échéancier de passif à duration longue :

Première étape : Détermination du LHP



Deuxième étape : Détermination du PSP et performance finale du LDI



Résultat final 47. (Performance de la solution LDI)

Pour un niveau de cash libéré de 20%, nous obtenons un LHP très diversifié avec une qualité d'adossement convenable car la Tracking Error globale d'adossement est inférieure à 1,5%. En choisissant un PSP composé de 70% d'actions, 20% d'obligations et 10% de hedge funds, nous obtenons un portefeuille global LDI de rendement annuel espéré égal à l'inflation + 1,6%.

Conclusion. (Performance réelle du portefeuille LDI)

Le rendement annuel espéré du portefeuille LDI dépend fortement de l'historique des rendements de son LHP car ce dernier occupe un poids très important dans le montage LDI global. Les mauvais rendements observés pour le LHP du corporate A impactent le résultat net de l'inflation du montage LDI (il s'élève à 1,6% alors qu'il est de 2,8% pour le corporate B).

La grande force du LDI : grâce aux swaps, ce montage traite tous les types de passif (à duration courte, moyenne et longue) avec autant d'aisance et d'efficacité.

3.3.3. Analyse comparative du LDI avec les méthodes d'adossement traditionnelles améliorées.

3.3.3.1. Présentation des méthodes traditionnelles implémentées par l'entreprise

Nous implémentons les techniques de dédication afin d'effectuer une analyse comparative du LDI. Nous améliorons les techniques de *Cash Flow Matching* et de *Duration Matching* en intégrant un OPCVM diversifié (composé d'actions, de hedge funds, d'obligations et de monétaire) pour traiter les passifs de grande maturité.

Définition 32. (Le Cash Flow Matching amélioré)

Le Cash Flow Matching amélioré est un montage en deux fonds basé sur un critère de séparation temporelle court terme/long terme : le premier fonds, l'EMTN, vise à répliquer les flux d'engagement de court terme alors que le second fonds, un OPCVM diversifié, prend progressivement le relais de l'EMTN pour le paiement des engagements de long terme.

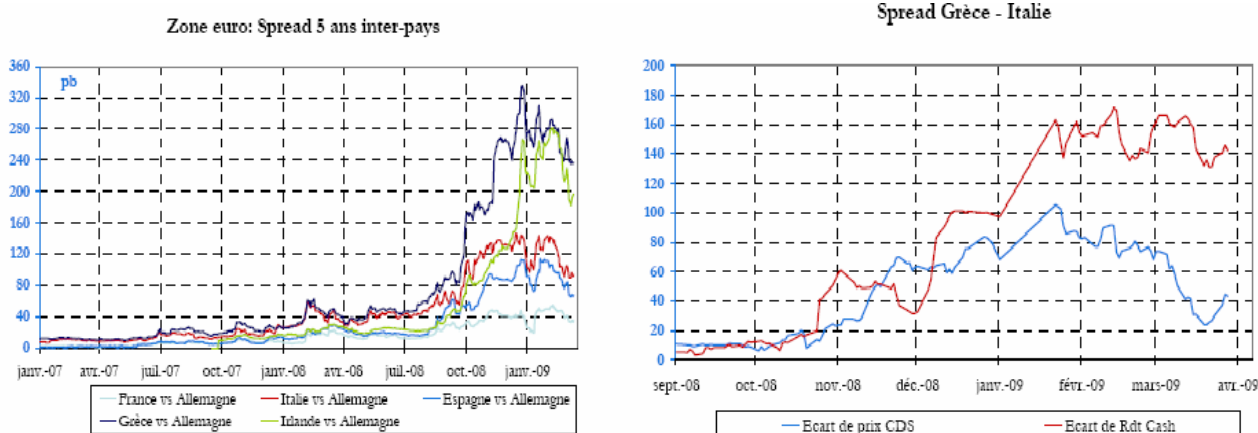
Définition 33. (Le Duration Matching amélioré)

Le Duration Matching amélioré est un montage en deux fonds basée sur un critère de séparation temporelle court terme/long terme : le premier fonds, composé d'obligations, vise à égaliser les durations de l'actif et du passif, alors que le second fonds, un OPCVM diversifié, prend progressivement le relais de ce premier pour le paiement des engagements de long terme.

Résultat 48. (Choix des classes d'actifs dans nos montages de dédication)

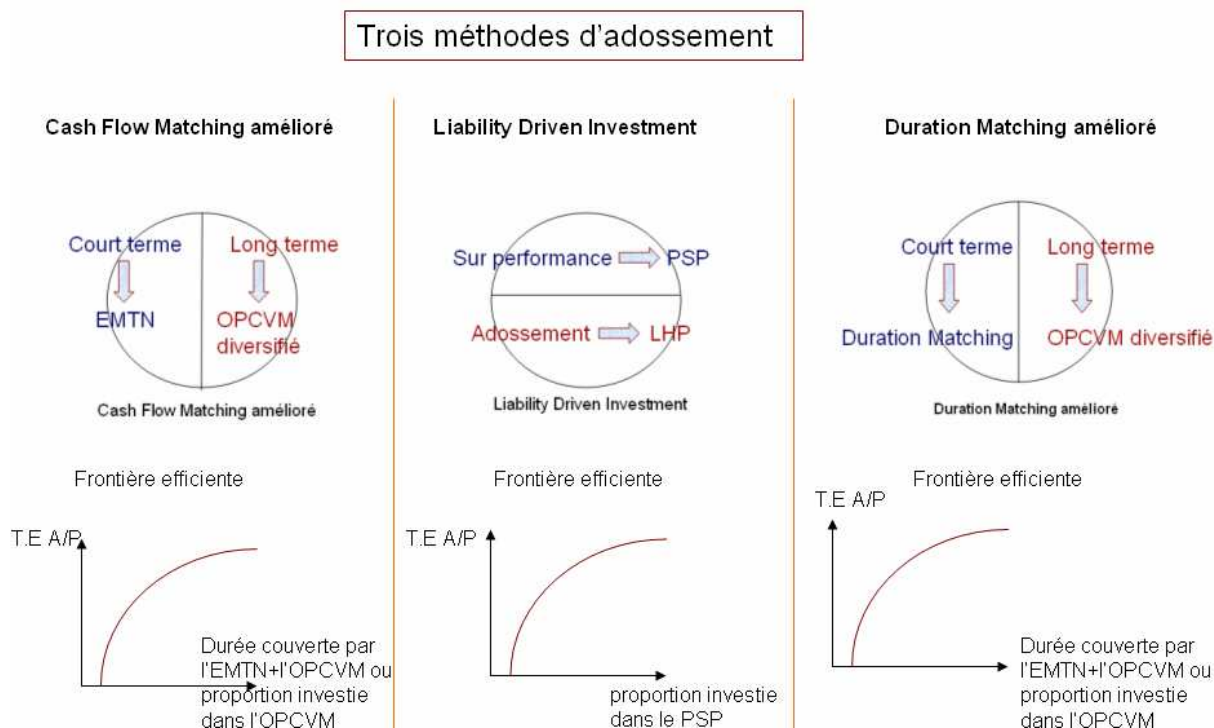
Nos méthodes de dédication se composent d'obligations Euro Govies (France, Autriche, Portugal, Italie et Grèce) et d'obligations corporate (France Telecom, Morgan Stanley, Royal Bank of Scotland etc.). Nous profitons ainsi des spreads actuels qui offrent des rendements élevés avec des signatures de bonne qualité. Avant la crise financière, les obligations souveraines présentaient un faible risque de défaut et proposaient des rémunérations mauvaises comparées aux titres obligataires d'entreprises plus risquées. Aujourd'hui, les Etats, écroulés sous leur dette publique, voient leur note se dégrader. Les spreads de crédit et les rendements des papiers souverains s'écartent entre les pays de la zone euro. Ainsi, des arbitrages peuvent être effectués au sein des obligations souveraines européennes pour profiter de ces écarts de rendement.

Graphique 31. (Fort écartement des spreads de crédit (CDS) en temps de crise financière)



Comme pour le LDI, ces solutions d'adossement sont des méthodes ajustées au profil du client : le gestionnaire devra arbitrer entre le niveau de couverture actif/passif sur la période d'adossement court terme et la proportion investie dans l'OPCVM. En effet, plus la dégradation de la « Tracking Error A/P » sera importante sur la phase court terme, plus le gestionnaire de fonds libèrera du cash qui sera investi dans l'OPCVM diversifié destiné à traiter les flux de long terme. Nous construisons ainsi des frontières efficaces « Tracking Error A/P » – Cash libéré pour l'OPCVM diversifié.

Graphique 32. (Construction des trois montages ALM)



3.3.3.2. Puissance du LDI comparée aux autres techniques d'adossement

Nous effectuons une analyse comparative du LDI sur la base de trois critères fondamentaux :

- ✓ la performance annuelle espérée de chaque montage
- ✓ le nombre de risques financiers maîtrisés
- ✓ la qualité de gestion des risques financiers.

Nous reprenons pour cela nos deux échéanciers de passif de durations moyenne (corporate B) et longue (corporate A) :

- ✓ Résultat obtenu pour un échéancier de duration moyenne (corporate B)

ANALYSE COMPARATIVE DES TROIS METHODES D'ADOSSEMENT			
	Duration Matching Amélioré	Liability Driven Investment	Inflation Indexed Cash Flow Matching amélioré
Performance	INFLATION +2,17 %	INFLATION +2,8 %	Performance médiocre*
Gestion des risques financiers	RISQUE DE TAUX	RISQUES DE TAUX ET D'INFLATION	RISQUES DE TAUX ET D'INFLATION
Qualité de la gestion des risques	APPROXIMATIVE	TRES PRECISE	RIGIDE ET APPROXIMATIVE

* Solution inenvisageable commercialement car trop coûteuse

✓ Résultat obtenu pour un échéancier de duration longue (corporate A)

ANALYSE COMPARATIVE DES TROIS METHODES D'ADOSSEMENT			
	Duration Matching Amélioré	Liability Driven Investment	Inflation Indexed Cash Flow Matching amélioré
Performance	INFLATION +1,31 %	INFLATION +1,6 %	Performance médiocre*
Gestion des risques financiers	RISQUE DE TAUX	RISQUES DE TAUX ET D'INFLATION	RISQUES DE TAUX ET D'INFLATION
Qualité de la gestion des risques	APPROXIMATIVE	TRES PRECISE	RIGIDE ET APPROXIMATIVE

* Solution inenvisageable commercialement car trop coûteuse

Résultat global fondamental 49. (Puissance du LDI comparée aux autres méthodes d'adossment)

Le LDI offre une performance nette de l'inflation plus grande que les méthodes de dédication traditionnelles : cela est dû au fait que le deuxième fonds (le PSP) est destiné exclusivement à générer de la sur-performance. Concernant les méthodes de dédication, le deuxième fonds n'a pas vocation à générer de l'alpha. Il est construit « par défaut » pour pallier les carences en adossment sur les maturités très longues. Le LDI n'a pas cette lacune car l'introduction de swaps dans son LHP lui permet de bien adosser les échéances les plus lointaines. Ainsi, nos trois méthodes d'adossment paraissent très proches dans leur construction mais leur mode de gestion est bien différent.

Les trois montages ALM profitent des mécanismes de réallocations dynamiques qui tiennent compte des évolutions des marchés et des engagements. Ces réallocations doivent être fréquentes pour avoir un montage « suffisamment » immunisé dans le temps à cause de la forte volatilité des taux. Ainsi, les performances moyennes de nos trois stratégies seront réévaluées par la même occasion. Néanmoins, toutes les réallocations du LDI auront une performance moyenne supérieure à celles des montages concurrents pour les raisons précédemment citées.

Le LDI propose une analyse extrêmement fine des risques de taux et d'inflation puisque il fait intervenir un univers de risque dans lequel les sensibilités de l'actif et du passif sont calculées par rapport à des taux de maturités différentes. N'étant efficace que pour une déformation uniforme de la courbe des taux, le montage Duration Matching est beaucoup moins performant en matière de gestion des risques.

Le montage LDI est sans contexte une solution innovante car elle améliore la gestion des risques financiers des fonds de pension et propose des allocations d'actifs à plus haut rendement.

3.4. Robustesse du LDI en temps de crise financière [Août 2007 – Sept. 2009]

Nous jetons maintenant un regard critique sur notre montage LDI en testant sa robustesse en période de crise financière majeure (août 2007 - septembre 2009). Nous supposons que notre solution LDI indicielle a été retenue lors d'une réponse à un appel d'offres. Nous devons alors proposer un montage LDI de fonds à notre client.

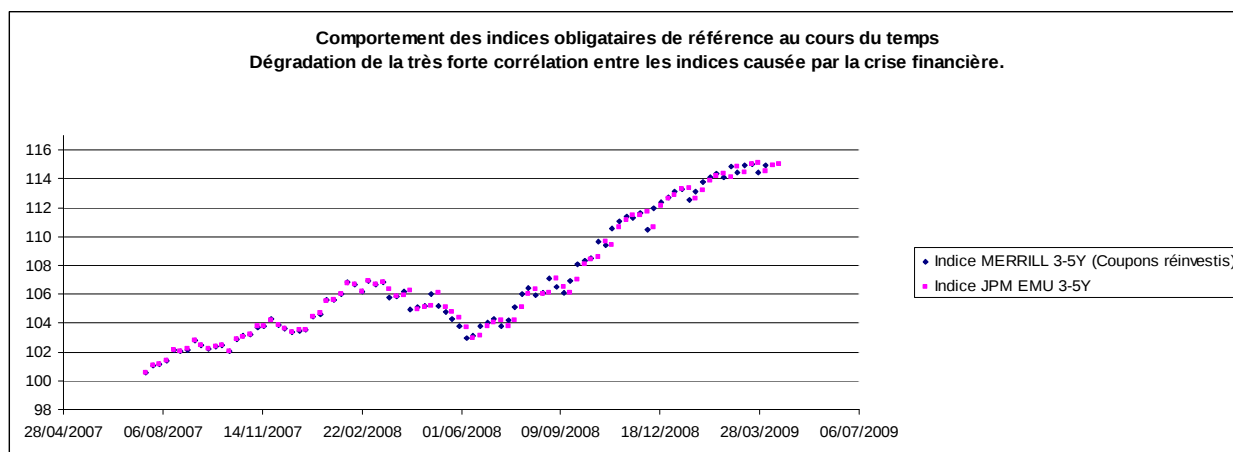
Seul le passage du LHP indiciel au LHP de fonds nous préoccupe en terme d'adossement A/P car le PSP (d'indices ou de fonds) est construit indépendamment des contraintes ALM.

3.4.1. Du LHP indiciel au LHP de fonds

Jusqu'à présent, nous avons construit nos LHP à partir d'indices obligataires nominaux et inflation qui ne sont pas directement investissables. Ainsi, nous devons répliquer nos indices par de véritables actifs indiciels. Le portefeuille constitué de fonds s'appellera le LHP de fonds.

3.4.2. L'univers des OPCVM et dégradation de la Tracking Error d'adossement

Nous souhaitons investir dans des OPCVM qui ont pour objectif de suivre au plus près nos indices nominaux Merrill et inflation Barclays, sans chercher à les surperformer. Toutefois, les OPCVM proposés par notre société de gestion suivent d'autres indices de référence tels que Euro MTS, JPM EMU, Lehman Infl. etc. Heureusement, les constructions de ces indices, consultables à partir d'une plateforme financière, sont très proches. Ainsi, les indices de même maturité (1-3Y, 3-5Y etc.) évoluent de manière très semblable dans le temps. Le fait de choisir des OPCVM assis sur des indices différents de même maturité n'est donc pas pénalisant pour notre adossement A/P.



Résultat 50. (Dégradation de la corrélation des indices obligataires de référence)

Nos deux indices obligataires connaissent des évolutions très similaires au cours du temps : le R^2 d'ajustement glissant reste au dessus de 98% sur toute la période d'observation. Cependant, nous constatons une légère dégradation de leur corrélation à partir de l'année 2008, provoquée par la très forte volatilité des marchés en cette période de crise économique.

Le passage du LHP d'indices au LHP de fonds va toutefois provoquer une dégradation importante de l'adossement entre l'actif et le passif. Les deux principales raisons sont la

difficulté de trouver des OPCVM passifs pour les intervalles de maturité traités d'une part, et l'impossibilité aux gérants de suivre correctement les indices de référence à cause des turbulences boursières. Nous suivons dans le temps l'erreur d'adossement du fonds indiciel au moyen de la Tracking Error annualisée.

Définition 34. (Mesure de risque du fonds par rapport à son indice)

La Tracking Error annualisée se définit comme l'écart type de la performance logarithmique relative du fonds par rapport à son indice de référence. Elle est calculée généralement sur la base d'écarts de performance mensuelle, à compter de la création du fonds ou sur 52 semaines glissantes. L'annualisation de la Tracking Error se fait en multipliant l'écart type de la performance relative par la racine carrée de 12. Aucune Tracking Error n'est calculée sur une période inférieure à un an.

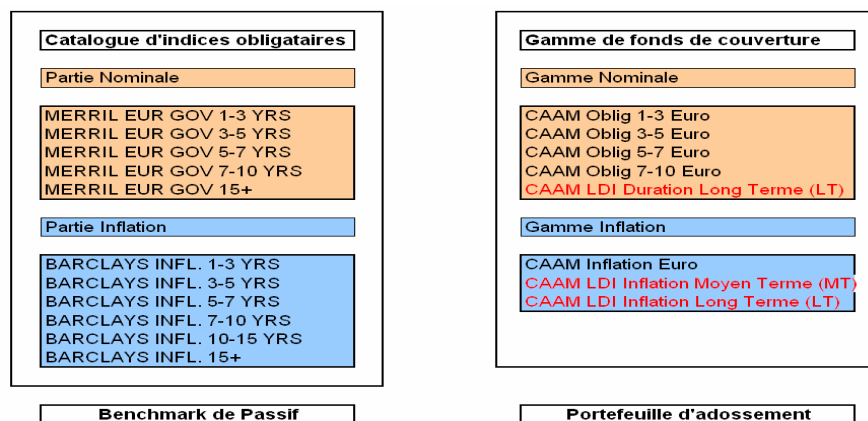
$$TE_{(fonds, indice)} = \sqrt{12} \times EcartType\left(\ln\left(\frac{Fonds_{i+1}}{Fonds_i}\right) - \ln\left(\frac{Indice_{i+1}}{Indice_i}\right)\right)$$

Nous remarquons que la Tracking Error est un indicateur de risque qui généralise la volatilité puisque cette dernière est égale à la Tracking Error du fonds lorsque l'indice de référence est le taux sans risque EONIA.

Résultat 51. (Premier inconvénient des OPCVM pour une gestion ALM indicielle)

Il est très difficile de trouver des OPCVM obligataires nominaux pour l'ensemble des intervalles de maturité étudiés (1-3Y, 3-5Y etc.). Par exemple, notre société de gestion nous propose que quelques fonds possédant des intervalles de maturité similaires à ceux de nos indices : BNP Paribas Oblig CT Barclays Euro Aggregate 1-3Y , BNP Paribas Oblig MT Barclays Euro Aggregate 3-5Y etc. Toutefois, elle peut créer des fonds répondant à nos exigences LDI.

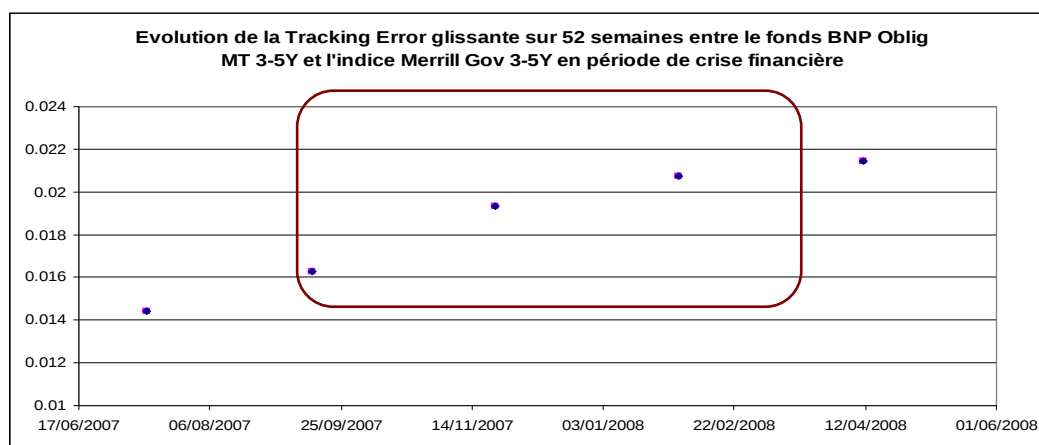
Le catalogue de fonds le plus étoffé sur le marché reste celui de la société de gestion Crédit Agricole Asset Management puisque cette dernière a lancé trois fonds spécialement conçus dans le cadre d'une approche LDI, l'objectif de gestion étant d'adosser les engagements à long terme des fonds de pension en créant un effet de levier généré par les swaps :



Nous constatons que l'offre LDI s'est industrialisée sous la forme de gamme de fonds ayant des maturités parfois très longues (plus de dix ans).

Résultat 52. (Deuxième inconvénient des OPCVM pour une gestion ALM indicielle)

Les gérants d'OPCVM passifs éprouvent des difficultés à suivre convenablement l'indice de référence à cause de l'extrême volatilité que subissent les marchés en ces temps de crise majeure :



3.4.3. Intérêt des trackers (de première génération) dans une gestion ALM indicielle

Les portefeuilles LHP et PSP sont constitués d'indices de référence. Les trackers sont des actifs susceptibles d'intéresser les financiers pour le montage du LDI de fonds.

Définition 35. (Les trackers ou ETF de première génération)

Un tracker est un produit financier ayant pour but de suivre la valeur d'un indice ou d'un panier de référence. Nous trouvons des trackers sur des indices de marché, de matière première et de stratégie. Dans la mesure où les gérants n'interviennent pas dans le choix des valeurs, les trackers sont gérés de manière passive, par opposition à un OPCVM classique guidé par des analystes qui réallouent son allocation en fonction de leurs convictions.

Les ETF se négocient sur Euronext Paris aussi aisément qu'une action ordinaire. La cotation se fait en continu de 9h à 17h25. Pour beaucoup d'investisseurs, la passivité des trackers est un atout. En effet, l'expérience montre que sur le long terme, il est difficile à un OPCVM indiciel de surperformer son indice, frais de gestion déduits.

Résultat 53. (Intérêts des trackers)

Le grand intérêt des trackers pour une solution LDI est de :

- ✓ *chercher simplement à reproduire le cours de son indice de référence sans chercher à le surperformer. Ainsi, la tracking error entre le tracker et son indice sera toujours plus petite que celle d'un OPCVM assis sur ce même indice. Ainsi, l'utilisation de trackers permet de minimiser la dégradation de tracking error A/P provoquée lors du passage du LHP composé d'indices au LHP composé de fonds.*
- ✓ *proposer une large diversification afin d'optimiser les performances et d'atténuer les risques sur la partie nominale. En effet, nous pouvons trouver des trackers obligataires nominaux pour l'ensemble des intervalles de maturité traités. Pour exemple, la société Lyxor AM propose les produits financiers suivant :*

Catalogue d'indices obligataires	Catalogue de fonds de couverture Trackers
Gamme Nominale	Gamme Nominale
MERRILL EUR GOV 1-3 YRS MERRILL EUR GOV 3-5 YRS MERRILL EUR GOV 5-7 YRS MERRILL EUR GOV 7-10 YRS MERRILL EUR GOV 10-15 YRS MERRILL EUR GOV 15+ YRS	Lyxor ETF EuroMTS 1-3 YRS Lyxor ETF EuroMTS 3-5 YRS Lyxor ETF EuroMTS 5-7 YRS Lyxor ETF EuroMTS 7-10 YRS Lyxor ETF EuroMTS 10-15 YRS Lyxor ETF EuroMTS 15+ YRS
Gamme Inflation	Gamme Inflation
BARCLAYS INFL. 1-3 YRS BARCLAYS INFL. 3-5 YRS BARCLAYS INFL. 5-7 YRS BARCLAYS INFL. 7-10 YRS BARCLAYS INFL. 10-15 YRS BARCLAYS INFL. 15+ YRS	Lyxor ETF EuroMTS Inflation Linked

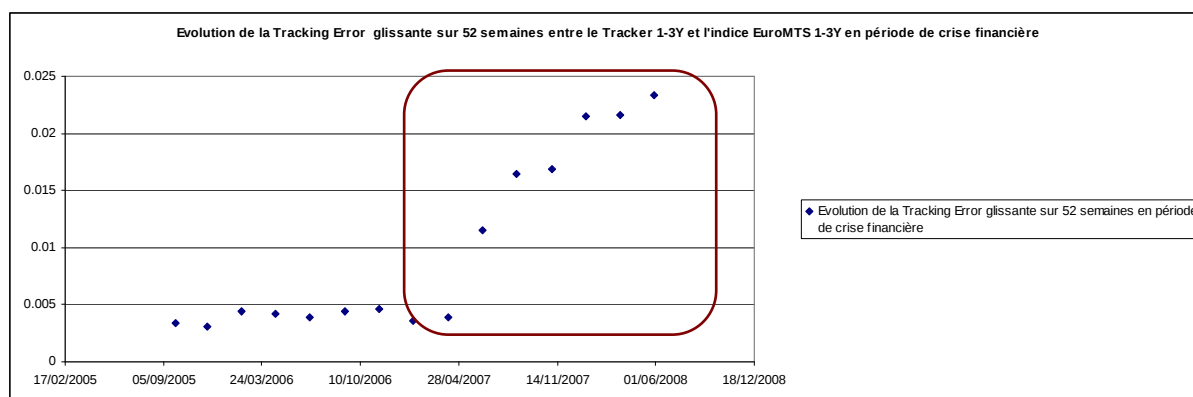
- ✓ Leurs frais de gestion sont très faibles car il suffit aux gérants de reconstituer la composition (fixe dans le temps) des indices.

Résultat 54. (Inconvénients des trackers)

Les inconvénients des trackers pour une solution LDI :

- ✓ Pour l'heure, il n'existe qu'un seul tracker dans la gamme inflation. Il est assis sur un indice inflation global : EuroMTS inflation linked. Toutefois, des trackers inflation assis sur des plages de maturité plus réduite (1-3Y, 3-5Y etc.) sont en cours de commercialisation.
- ✓ Comme pour les fonds, les gérants ont beaucoup de difficulté à suivre convenablement l'indice de référence, à cause de la grande volatilité actuelle des marchés.

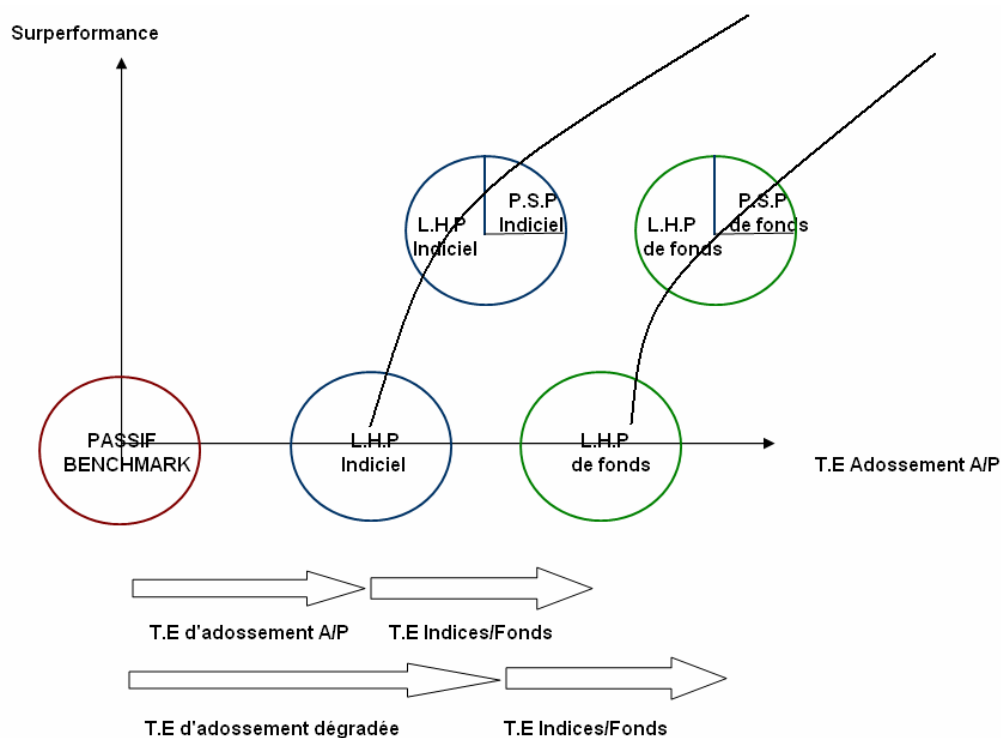
Graphique 33. (Dégradation notable de la tracking error indicielle en période de crise)



Résultat 55. (Choix d'investissement entre les OPCVM et les trackers)

Les trackers obligataires, dont l'objectif est de reproduire le plus fidèlement possible la composition des indices de référence, sont les produits financiers les plus adaptés aux méthodes d'adossement de passif. Toutefois, la gamme inflation des trackers n'est, pour l'heure, pas assez étoffée pour obtenir une dégradation maîtrisée de la tracking error A/P. Aujourd'hui, une bonne politique d'investissement serait d'investir dans la gamme des trackers Lyxor pour la partie nominale, et dans la gamme de fonds LDI CAAM pour la partie inflation.

Graphique 34. (Synthèse du procédé de construction du portefeuille LDI final)



Résultat final 56. (Robustesse du LDI de fonds en période de forte volatilité des marchés)

Le gestionnaire ALM connaît le niveau de tracking error d'adossesment A/P entre son benchmark de passif et sa solution indicielle théorique. S'il le désire, il peut dégrader la qualité de son adossesment A/P pour libérer du cash. Il a le contrôle total sur le niveau de tracking error A/P indicielle. Malheureusement, cela n'est pas du tout le cas pour la tracking error indices/fonds : le gestionnaire subit l'instabilité des marchés qui dégrade les indicateurs de risque de ses fonds. Ainsi, cette dernière composante de la tracking error A/P globale est très difficilement appréhendable, ce qui rend notre LDI de fonds vulnérable à la volatilité actuelle des marchés.

Le montage LDI profite d'un mécanisme de réallocations dynamiques qui tient compte des évolutions des marchés et des engagements de passif. Les réallocations doivent être suffisamment régulières pour avoir un montage raisonnablement immunisé sur l'horizon de gestion, à cause de la forte volatilité des taux.

Les montages ALM concurrents connaissent également de grandes difficultés d'adossesment : la chute des marchés actions pénalise lourdement les rendements des allocations, la forte volatilité des taux d'intérêt rend caduque le *Duration Matching* (valable pour de faibles variations uniformes des taux) et le risque de défaut sur certains papiers obligataires corporate (voire souverains comme la Grèce, l'Espagne, l'Islande etc.) menacerait l'ensemble des stratégies.

Conclusion :

Nous avons présenté plusieurs stratégies financières en réponse aux appels d'offres relatifs à l'externalisation des engagements de retraite supplémentaire. Désormais, tous les acteurs financiers (assureurs, sociétés de gestion et banques d'investissement) prennent part à cette activité, ce qui rend le marché de la retraite extrêmement concurrentiel. Ces derniers cherchent à améliorer sans cesse leur expertise financière pour se positionner en leader du marché de l'épargne retraite.

Une large gamme de solutions financières est proposée aux clients, comme les stratégies s'inspirant de l'approche de Markowitz et les méthodes d'adossesment en flux ou en duration. Ces montages ont fait l'objet d'une étude comparative approfondie en matière de rendement et de gestion des risques financiers. De nouvelles solutions d'adossesment plus financiarisées ont vu le jour ces dernières années dans le monde anglo-saxon. Ces techniques innovantes, prénommées LDI, se targuent d'être plus performantes car elles intègrent des produits à fort effet de levier comme les swaps.

Mon entreprise a souhaité développer une expertise LDI de qualité afin de proposer à ses clients un panel plus étoffé d'expertises ALM. Notre stratégie LDI comporte un portefeuille de couverture qui adosse finement en sensibilité les risques financiers et un portefeuille de performance qui se base sur la construction d'allocations semi-efficientes inspirées de Markowitz. Les profils d'échéanciers d'engagement nous sont fournis par les équipes d'actuaire travaillant sur les valorisations du passif et des engagements sociaux.

Nous avons montré que le LDI apporte une expertise nouvelle par rapport aux techniques d'adossesment traditionnelles car il met en œuvre une analyse très fine des risques financiers du passif, emploie une gamme très large de produits financiers (swaps, obligations indexées sur l'inflation etc.) et génère un gain de performance important grâce à son portefeuille décorrélé du passif. Contrairement aux techniques traditionnelles, le LDI est capable de traiter avec autant d'aisance des passifs à durations courte, moyenne et longue.

Une analyse comparative effectuée sur nos montages ALM fait ressortir que le LDI est la meilleure stratégie en termes de rendement espéré et de gestion des risques de taux et d'inflation. Comme ses montages concurrents, le LDI de fonds a montré sa vulnérabilité en période de crise financière à cause de la forte dégradation de la tracking error indices/fonds et une meilleure prise en compte des risques techniques et de modèle serait appréciable.

Les principales cibles des solutions LDI sont les investisseurs institutionnels ayant des engagements futurs sur des horizons pouvant être très longs. Toutefois, ce type de solutions peut également être appliqué aux particuliers. La distribution par les banques privées et les conseillers en gestion de patrimoine indépendants constitue un marché pour lequel les solutions LDI restent encore à développer. En effet, il est possible d'imaginer une multitude de produits centrés sur les objectifs long terme du client dans un budget de risque défini. Il peut s'agir d'une solution retraite sur mesure pour une grande fortune, d'un plan épargne immunisé de l'inflation afin de financer les études des enfants, d'un plan épargne logement dynamique où les risques ne seraient plus les variations de taux mais celles du prix de l'immobilier et des matériaux de construction ou enfin, d'une protection contre la dépendance d'un proche.

Bibliographie :

Livres

- ✚ Bellalah M. (2005) *Gestion des risques de taux d'intérêt et de change*, De Boeck
- ✚ Benaben B. (2005) *Inflation-Linked products A Guide for Investors and Asset & Liability Managers* Edited by Brice Benaben
- ✚ Bennani K. et Bertrand J-C. (1998) *Les Obligations à Taux Variables*, Economica
- ✚ Boulier J-F et Dupré D. (2002) *Gestion Financière des Fonds de Retraite*, Economica
- ✚ Dalbarade J-M. (2005) *Mathématiques des marchés financiers*, Editions ESKA
- ✚ Hull J. (2004) *Options, futures et autres actifs dérivés*. Pearson Education France
- ✚ Kolb W. (2003) *Futures, Options and Swaps*, Blackwell

Mémoires

- ✚ Ghieu G. (2003) *Gestion actif passif : méthodologie et application au livret A*, AFGAP
- ✚ Sarot M-A. (2009) *L'évaluation à la juste valeur des instruments financiers en normes IFRS*, AFTE
- ✚ Werlé S. (2010) *Amélioration du modèle de Black Litterman*, ISFA

Etudes

- ✚ Amenc N., Martellini L. et Sender S. (2009) *The impact of regulations on the ALM of european pension funds*. Edhec Risk and Asset Management Research Centre
- ✚ BNP Paribas (2005) *Liability Driven Investing*, BNP Paribas Fixed Income
- ✚ Coeuré B. (2007) *Mettre les fonds de pension au service la croissance*, Les dossiers thématiques
- ✚ Dupré D. (1998) *La gestion de bilan face au risque d'inflation*. Revue française d'économie, 1998
- ✚ Françoise J-P. (2008) *Optimisation linéaire et la méthode du simplexe*. Université P-M Curie Paris 6.
- ✚ Freoa B. et Ithurbide P. (2005) *Obligations indexées sur l'inflation et gestion ALM : le cas des fonds de pension*, Cross Asset Research Société Générale
- ✚ Jarrow R. et Yildirim Y. (2003) *Pricing Treasury Inflation Protected Securities And Related Derivative Securities using HJM Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis
- ✚ Kerkhof J. (2005) *Inflation Swaps: Valuation and Risk Sensitivities*, Fixed Income Liquid Markets Research
- ✚ Langmeier R. et Dubey A. (2000) *Asset/Liability Management : application aux caisses de pension*, Ecole des HEC Université de Lausanne
- ✚ Martellini L. (2006) *Managing pension assets : from surplus optimisation to liability driven investment*. Edhec Risk and Asset Management Research Centre.
- ✚ Martellini L. et Milhau V. (2009) *Measuring the benefits of dynamic asset allocation strategies in the presence of liability constraints*. Edhec Risk and Asset Management Research Centre
- ✚ Société Générale (2005) *New Investment Solutions for Life Insurance and Pension Plans*, Asset Management and Asset Liability Management Cross Asset Research

- ✚ Tampéreau Y. et Nehls-Obégi S. (2000) *Allocation optimale d'actifs : l'apport des obligations indexées sur l'inflation*, Caisse des dépôts et consignations
- ✚ Wellington Management (2008) *Understanding Duration Trade-offs in LDI Approaches*, Wellington Management

Articles

- ✚ AGEFI et BNP Paribas IP (2008) *Rencontres de la gestion institutionnelle de l'AGEFI*
- ✚ PRMIA et AFGAP (2008) *Les dérivés sur inflation : Modèles de pricing*. Commerzbank
- ✚ Surry F. (2008) *Quelles réponses aux problématiques Asset Liability Management de la clientèle institutionnelle ?*, AGEFI
- ✚ Taffin P. (2007) *LDI management : challenges, solutions & perspectives*, Credit Agricole Asset Management et Calyon
- ✚ Zakhia T. (2008) *Fonds de pension sous contrainte*, AGEFI et EDHEC Institutional Days