



UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Département MIDO^(*)

MASTER MIDO
MENTION MMD^(**)

SPÉCIALITÉ ACTUARIAT

Année Universitaire : 2009-2010

Mémoire d'actuariat présenté en novembre 2010 devant l'université Paris
Dauphine et l'Institut des Actuaire

Par : **Stéphane Le Mer**
Sujet : **Calcul du capital économique en assurance vie**

Tuteur : **Claude Chassain**
Entreprise d'accueil : **Deloitte**

NON CONFIDENTIEL

JURY

Membres du Jury

Jean Marie Nessi
Olivier Wintenberger
Lionel Gabet

Fonction/Entreprise

Institut des actuaires
Université Paris-Dauphine
Ecole Centrale Paris

(*) MIDO : Mathématiques, Informatique, Décision, Organisation

(**) MMD : Mathématiques, Modélisation, Décision

Capital économique en assurance vie

Méthodes et optimisation du calcul

Stéphane Le Mer

Limites

Ce mémoire d'actuariat a été rédigé afin de présenter une méthode de calcul du capital économique en Assurance Vie. En raison des particularités et opportunités de chaque compagnie, les constats et conclusions présentés dans ce mémoire ne peuvent se substituer à une analyse d'un cadre particulier. En raison des incertitudes inhérentes à toute information relative au futur, certaines hypothèses peuvent ne pas se vérifier et des événements se produire.

L'ensemble des résultats est valable dans le seul cadre des hypothèses définies dans ce mémoire.

Résumé

Le 1^{er} janvier 2013 entrera en vigueur la nouvelle directive européenne Solvabilité II. Solvabilité II impose aux assureurs et aux réassureurs de disposer d'un montant minimal de fonds propres : le SCR (*Solvency Capital Requirement*). Le SCR est un capital économique, calculé sur les risques propres à la compagnie, et vise à réduire la probabilité de ruine à 1 an à 0,5%.

Chaque compagnie d'assurance devra estimer elle-même son SCR avec la formule standard ou un modèle interne. Avec un modèle interne, l'estimation est problématique pour les sociétés d'assurance vie en raison des options cachées et garanties financières intégrées aux contrats.

Ce mémoire expose une méthode d'estimation du SCR en assurance vie à deux niveaux de simulations : les « *simulations dans les simulations* » (SdS). Pour tester la méthode SdS, un modèle interne simplifié a été développé et intègre un modèle ALM couplé à un générateur de scénarios économiques.

Nous illustrons la méthode SdS sur l'exemple d'un contrat d'épargne en euros. Sur cet exemple, nous montrons, dans une étude ALM, qu'un choix d'allocation d'actifs non optimal implique un SCR important. Nous montrons ensuite que ce SCR peut être réduit en se couvrant du risque de hausse des taux avec des dérivés de taux : les caps.

En raison d'un temps de calcul important, la mise en œuvre pratique du SdS est impossible. A ce titre, nous avons intégré, au modèle interne, et testé l'accélérateur SdS Loisel-Devineau. Les résultats obtenus attestent de l'efficacité de la méthode réduisant de plus de 65% le temps d'exécution par rapport au SdS.

Abstract

The new European directive Solvency II is due to be implemented on 1st January 2013. Solvency II requires that insurers and reinsurers respect a minimal level of own funds: the SCR (*Solvency Capital Requirement*). The SCR is an economic capital – calculated on company own risks – and aims to reduce the 1 year ruin probability at 0.5% level.

Each insurance company will have to estimate its SCR by using the standard formula or an internal model. With an internal model, the estimation is complex for life insurance industry due to embedded options and financial guarantees included in life insurance contracts.

This actuarial thesis presents a SCR estimation method in life insurance with two levels of simulations: « *Nested Simulations* » (NS). To test the NS approach, we have developed a simplify internal model which includes an ALM model coupled with an Economic Scenario Generator.

We illustrate Nested Simulations on the example of a whole life insurance contract in euros. On this example, we prove – with an ALM study – that a poor assets allocation leads to a substantial SCR. Then, we demonstrate that SCR can be reduced by hedging against high interest rates thanks to an interest rate derivate: the cap.

Due to its important computing time, the operational implementation of Nested Simulations is impossible. That is why we have included and tested in our internal the Loisel-Devineau accelerator to speed up calculation. The results show the efficiency of the accelerator that reduces computing time of 65%.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le professeur Christian Hess, directeur du Master 2 Actuariat à l'Université Paris-Dauphine, le professeur Lionel Gabet, directeur de l'option Mathématiques Appliquées à l'Ecole Centrale, ainsi que Valérie Ferreboeuf, directrice de la filière Stratégie-Finance à l'Ecole Centrale Paris. Ils m'ont permis de suivre le premier cursus actuariat en partenariat entre l'Ecole Centrale Paris et l'Université Paris-Dauphine. Grâce à leurs enseignements de qualité et leurs conseils, j'ai pu découvrir un métier passionnant, celui d'actuaire, et un secteur à forts enjeux, l'assurance.

Je tiens à remercier Eric Meistermann, associé au cabinet Deloitte, pour m'avoir accueilli dans son cabinet dynamique et m'avoir accordé toute sa confiance. Je remercie Claude Chassain pour m'avoir proposé ce sujet passionnant et m'avoir fait profiter de sa grande expérience de l'assurance.

Dans ces remerciements, j'accorde une mention toute particulière à Frédéric Voyer qui m'a accompagné tout au long de ce mémoire en me prodiguant des conseils de la plus grande qualité.

Enfin, je remercie tous les collaborateurs du cabinet Deloitte qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire notamment Pierre, Frédéric S. et Ismaël.

Sommaire

LIMITES	5
RESUME	6
ABSTRACT	7
REMERCIEMENTS	8
INTRODUCTION	13
1 LA NOUVELLE DIRECTIVE EUROPEENNE SOLVABILITE II	14
1.1 Solvabilité I : Présentation et limites du système actuel	14
1.2 Une nouvelle réglementation européenne : la directive Solvabilité II	15
1.3 Méthode de travail	17
1.3.1 Processus « Lamfalussy »	17
1.3.2 Avancement des travaux.....	18
1.4 Zoom sur Pilier 1	19
1.4.1 Les exigences quantitatives du Pilier I.....	20
1.4.2 Bilan comptable et bilan économique	31
2 L'ASSURANCE VIE	33
2.1 Typologie de l'assurance vie	33
2.1.1 Une définition de l'assurance vie.....	33
2.1.2 Plusieurs types d'assurance vie	33
2.2 Options cachées et garanties financières d'un contrat d'assurance vie individuelle.....	35
2.2.1 Taux minimum garanti	35
2.2.2 Les rachats.....	36
2.2.3 Versements libres	36
3 CALCUL DU SCR EN ASSURANCE VIE PAR MODELE INTERNE	37
3.1 Valeur économique des garanties financières et options cachées.....	37
3.1.1 Option de TMG avec participation aux bénéfices.....	37
3.1.2 Option de rachat total.....	38
3.1.3 Evaluation pratique du coût des options sous la probabilité risque neutre.....	38
3.2 Calcul de la distribution des fonds propres économiques à 1 an	40

3.3	Formalisation du SdS	41
3.3.1	Bilan économique	42
3.3.2	Evaluation du bilan économique en $t = 0$	42
3.3.3	Distribution du bilan économique en $t = 1$	43
3.3.4	Calcul du SCR à partir de la distribution des fonds propres en $t = 1$	44
3.4	Complexité du calcul	45
3.5	Modèle interne en assurance vie	45
3.5.1	Générateur de scénarios économiques	46
3.5.2	Modèle ALM	46
4	GENERATEUR DE SCENARIOS ECONOMIQUES	48
4.1	Simulation de suites de nombres aléatoires	49
4.1.1	Loi uniforme	49
4.1.2	Loi normale.....	50
4.2	Modèle d'actif risqué	52
4.2.1	Dynamique sous probabilité historique	52
4.2.2	Dynamique sous probabilité risque neutre	53
4.2.3	Simulation	54
4.3	Modèles de taux	54
4.3.1	Généralité sur les modèles monofactoriels.....	54
4.3.2	Modèle de Vasicek.....	55
4.3.3	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	58
4.4	Caps	59
4.4.1	Définition.....	59
4.4.2	Estimation du prix.....	60
4.5	Modèles de dépendance	60
4.5.1	Corrélation linéaire	61
4.5.2	Copules.....	62
4.6	Calibration et sorties de l'ESG	67
4.7	Limites de l'ESG construit	69
5	MODELE ALM	72
5.1	Actifs modélisés	73
5.1.1	Obligations	73
5.1.2	Actions	74
5.1.3	Trésorerie.....	74
5.1.4	Caps.....	74
5.2	Contrat modélisé	75
5.2.1	Options et garanties contractuelles	75
5.2.2	Marge de gestion.....	75
5.3	Éléments dynamiques modélisés	76
5.3.1	Rachats dynamiques	76
5.3.2	Participation aux bénéfices	78
5.3.3	Plus ou moins values.....	80

5.3.4	Impôts	82
5.4	Allocation d'actifs	83
5.5	Retraitement de fin de projection.....	84
6	MISE EN ŒUVRE DU SDS	85
6.1	Hypothèses	85
6.1.1	Structure du bilan comptable	85
6.1.2	Porteuille d'actifs	86
6.1.3	Passif	87
6.2	Analyse de la convergence.....	87
6.2.1	Estimation des fonds propres économiques à 1 an	88
6.2.2	Estimation du capital économique	90
6.3	Temps de calcul	91
6.4	Application du SdS : Optimisation du SCR à l'aide de caps	93
6.4.1	Présentation des résultats.....	93
7	OPTIMISATION DU TEMPS DE CALCUL.....	97
7.1	Théorie	97
7.1.1	Caractérisation des situations adverses	97
7.1.2	Algorithme.....	99
7.1.3	Résultats.....	99
	CONCLUSION	102
8	ANNEXES	103
8.1	Liste des acronymes.....	103
8.2	Exemple du SCR marché.....	105
8.2.1	Contexte.....	105
8.2.2	Présentation de la compagnie	105
8.2.3	Hypothèses.....	105
8.2.4	Résultats.....	107
8.3	Pricing de caps par formule fermée dans le modèle de Vasicek	108
8.4	Algorithme de composition Cholesky.....	111
8.5	Approximation numérique de $N - 1$	113
8.6	Rachats	114
8.6.1	Modélisation des rachats structurels.....	114
8.6.2	Modélisation des rachats conjoncturels	114
8.6.3	Lois de rachat maximales et minimales.....	114
8.7	Retraitement de fin de projection.....	116
8.7.1	Horizon de projection des cash flows	116
8.7.2	Réserve de capitalisation	116

9 BIBLIOGRAPHIE.....117

Introduction

Le 1^{er} janvier 2013 entrera en vigueur la nouvelle directive européenne Solvabilité II. Solvabilité II impose aux assureurs et aux réassureurs de disposer d'un montant minimal de fonds propres : le SCR (*Solvency Capital Requirement*). Le SCR est un capital économique, calculé sur les risques propres à la compagnie, et vise à réduire la probabilité de ruine à 1 an à 0,5%.

Chaque compagnie d'assurance devra estimer elle-même son SCR via la formule standard ou via un modèle interne (partiel ou intégral). Avec un modèle interne, l'estimation est problématique pour les sociétés d'assurance vie en raison des options cachées et garanties financières intégrées aux contrats. En effet, Solvabilité II impose une valorisation économique du bilan intégrant le coût de ces options et garanties. En raison de la complexité des passifs de l'assureur, il n'existe pas de formule analytique pour évaluer ce coût.

Une des méthodes les plus précises est celle des « *simulations dans les simulations* » (SdS) nécessitant deux niveaux de simulations. Cependant le temps de calcul associé est trop important et pose des problèmes opérationnels (utilisation du modèle interne dans le cadre de la gestion actif-passif, reporting financier, prise de décisions par l'organe directionnel).

Ce mémoire s'organise en trois grandes parties et vise à présenter toutes les étapes nécessaires au calcul d'un capital économique en assurance vie :

1. Compréhension de l'environnement réglementaire et fonctionnement de l'assurance vie,
2. Développement informatique du modèle de calcul,
3. Etudes de sensibilités et optimisation.

La première partie se compose des trois premiers chapitres. Cette partie décrit le contexte réglementaire exigeant de Solvabilité II tout en apportant un point de vue critique et introduit la notion de SCR. Ensuite, après avoir exposé le fonctionnement de l'assurance vie nous formalisons la méthode de calcul du SCR par SdS.

La seconde partie se compose des chapitres 4 et 5. Elle expose les aspects théoriques et pratiques du modèle interne développé. Ce dernier intègre un modèle ALM couplé à un ESG implémentés respectivement en Excel/VBA et C++.

Enfin la dernière partie, composée des chapitres 6 et 7, présente une application du SdS et un algorithme d'optimisation du temps de calcul. Nous avons appliqué la méthode SdS pour étudier l'impact sur le SCR et la VIF d'une couverture contre la hausse des taux, avec des caps. Enfin, pour optimiser le temps de calcul nous testons l'algorithme d'accélération du SdS imaginé par Loisel et Devineau.

1 La nouvelle directive européenne Solvabilité II

1.1 Solvabilité I : Présentation et limites du système actuel¹

Les normes européennes actuelles en matière de solvabilité des assurances ont été mises en place, pour l'essentiel, à la fin des années 1970. Le système actuel de solvabilité, appelé dans la suite « *Solvabilité 1* », ne prend pas en compte de manière explicite l'appréciation qualitative des risques sous jacents.

Les règles quantitatives de « *Solvabilité I* » se présentent sous la forme de trois fondamentaux :

1. *Evaluer correctement ses dettes au sens le plus large.*

Ce volet couvre principalement les provisions techniques qui doivent être suffisantes, c'est-à-dire être supérieures au montant probable des prestations (Solvabilité I impose un taux d'actualisation faible et des tables de mortalité prudentes).

2. *Couvrir ses engagements réglementés avec des placements sûrs, liquides et rentables.*

Les engagements réglementés englobent l'ensemble des provisions techniques, les dettes privilégiées comme l'impôt ou les dettes envers les salariés, les dépôts de garantie et les réserves pour l'amortissement des emprunts. Tous ces engagements doivent être couverts à l'aide d'actifs sous la contrainte de règles d'admissibilité (article R. 332-2 du Code des Assurances), de congruence (article R. 332-1-1 du Code des Assurances), de limitation (article R. 332-3 du Code des Assurances) et de dispersion (article R. 332-3-1 du Code des Assurances)

3. *Détenir plus d'actifs réels que de dettes et d'engagements.*

Ce dernier volet définit une marge de solvabilité minimale que doit détenir l'assureur afin de pouvoir supporter des pertes futures.

De nombreuses critiques peuvent être faites sur « Solvabilité I ». La principale d'entre elles est que le système actuel utilise des formules se basant uniquement sur les montants de provisions de l'année

¹ Voir Sauvet [28] et Dourneau [39] pour une étude exhaustive des limites du système actuel.

courante. Cette approche de calcul est intégralement statique et non prospective. L'effort de simplicité des formules et l'absence de techniques financières (e.g. modèles internes, simulations stochastiques) lors du développement de « Solvabilité I » peuvent expliquer ces lacunes.

La simplicité des formules ne permet pas de prendre en compte tous les risques auxquels les assureurs sont soumis. Par exemple, la marge de solvabilité en assurance vie sous « *Solvabilité I* » se calcule comme un pourcentage fixe² des provisions techniques et des capitaux sous risques. La vision est donc statique. Or, il est clair que les assureurs vie sont soumis à des risques de taux, des risques de crédit, des risques opérationnels ou encore des risques actif-passif. Ces risques ne sont pas intégrés aux capitaux sous risques ou dans le calcul des provisions techniques et, donc, ne sont pas pris en compte sous « *Solvabilité I* ». En effet, imaginons l'exemple de deux sociétés dont les passifs sont identiques mais dont l'actif est investi à 65%³ en actions, 35% en obligations pour la première et à 100% en obligations pour la seconde. Ces deux sociétés ont le même besoin en capital sous Solvabilité I alors qu'il est clair que la première est plus exposée au risque de marché.

De plus, les systèmes prudentiels nationaux sont très hétérogènes au niveau européen. Les bases de calcul des provisions techniques peuvent différer fortement d'un pays à l'autre à cause du niveau de prudence requis par l'autorité nationale. Ces disparités de calculs ne permettent pas de comparer facilement deux compagnies et peuvent donner lieu à des avantages concurrentiels (ou opportunités d'arbitrage) entre deux pays .

L'harmonisation européenne, un marché unique et concurrentiel en assurance, les exigences des actionnaires et des marchés financiers en matière de communication financière ou encore la crise financière en 2008⁴ constituent un contexte qui nécessite de moderniser la réglementation des compagnies d'assurance. C'est pourquoi la Commission Européenne a élaboré une nouvelle directive : Solvabilité II.

Cette modernisation a déjà commencé dans le secteur bancaire avant la crise financière survenue en 2008 avec les accords Bâle II. Comme Solvabilité II, Bâle II place la gestion des risques au centre du système de gouvernance de l'entreprise. Le secteur bancaire continue d'évoluer et une nouvelle réglementation Bâle III est déjà en cours de discussion.

1.2 Une nouvelle réglementation européenne : la directive Solvabilité II

Dans l'esprit de Bâle II régulant les activités bancaires, la Commission Européenne souhaite améliorer l'évaluation et le contrôle des risques dans le secteur de l'assurance. Dans ce contexte, la directive Solvabilité II (*Solvency II*) est un projet de réglementation prudentielle s'appliquant à l'ensemble des compagnies⁵ d'assurance de l'Union Européenne.

² Identique pour toutes les sociétés, par exemple en assurance vie il est de 0,3% des capitaux sous risque et 4% des provisions mathématiques sauf pour les contrats en unités de compte où il est de 1% des provisions mathématiques.

³ Proportion maximale d'actions admise en couverture des engagements de l'assureur d'après les règles de répartition Solvabilité I.

⁴ La crise de 2008 est survenue après le début des réflexions sur Solvabilité II par la Commission Européenne, mais elle justifie d'autant plus la nécessité d'une nouvelle réglementation.

⁵ Nous désignons par « compagnie » l'ensemble des organismes d'assurance entrant dans le champ d'application de Solvabilité II : sociétés d'assurance, mutuelles, institutions de prévoyance et entreprises de réassurance.

Rappelons qu'une directive est une décision de droit communautaire visant à favoriser l'harmonisation des législations nationales des États membres de l'Union Européenne. Contrairement au règlement européen qui s'impose directement aux ressortissants de l'Union, la directive n'a pas vocation à s'appliquer directement aux entreprises ou aux particuliers et nécessite une transposition.

Solvabilité II porte deux grands objectifs. Le premier est de créer un marché de l'assurance unique, compétitif et ouvert à la concurrence à l'échelle européenne. Le second est de protéger davantage les assurés et les contreparties des compagnies.

Le premier objectif découle du caractère européen de la réforme et de l'uniformisation des contraintes prudentielles au sein de chaque pays membre. L'harmonisation de la réglementation supprime les inégalités de référentiels réglementaires et permet la construction d'un marché unique et libre.

Le second objectif est porté par l'idée qu'un assureur doit mieux gérer, connaître et évaluer ses risques. Dans une logique similaire à Bâle II, Solvabilité II se construit autour de trois piliers :

1. Exigences financières quantitatives,
2. Autorités de contrôle et système de gouvernance,
3. Discipline de marché.

Chacun des trois piliers aborde un ensemble de thèmes synthétisés dans la Figure 1.

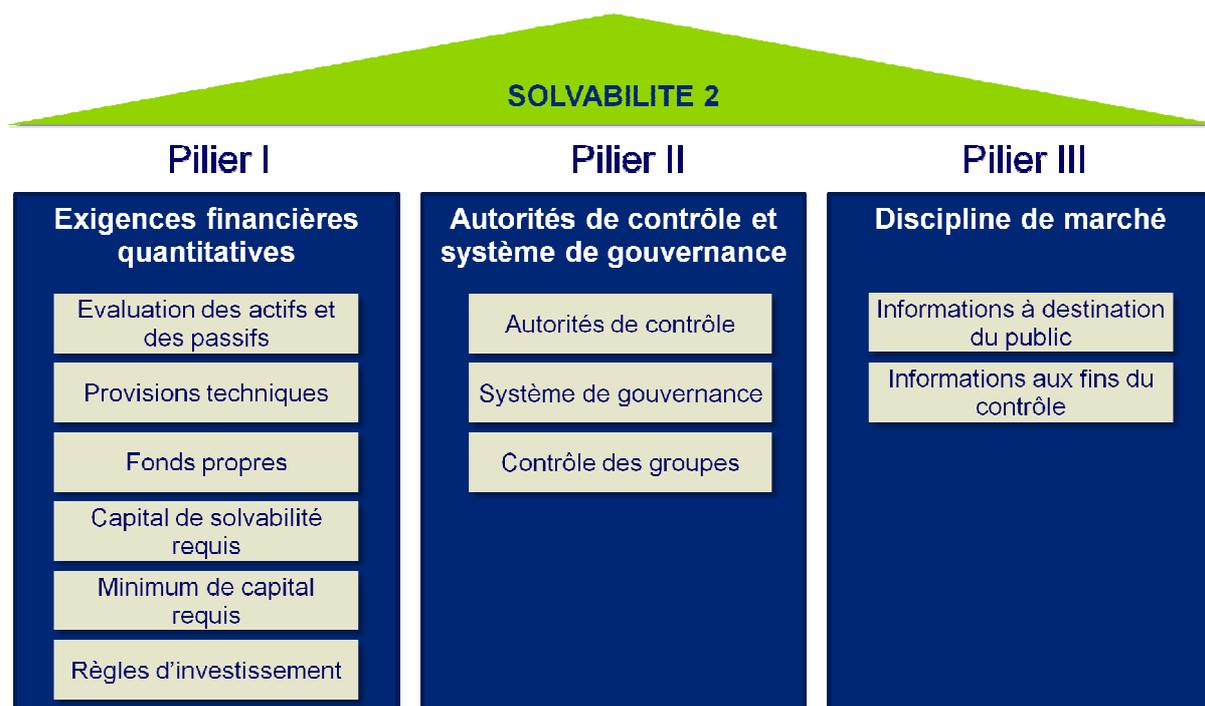


Figure 1 : Structure de Solvabilité II

Le projet Solvabilité II s'inscrit dans une démarche qui n'est pas toujours en ligne avec la réforme comptable actuelle des IFRS (*International Financial Reporting Standards*) encore en cours de discussion. D'une manière générale, les normes IFRS ont pour objectif d'harmoniser, au niveau international, la présentation et la clarté des états financiers d'une entreprise. En juillet 2010, l'exposure draft de la Phase II de l'IFRS 4 relatif au secteur de l'assurance a été publié par l'IASB (*International Accounting Standards Board*) et est soumis aux commentaires avant finalisation du texte par le Board. Cette nouvelle norme risque d'impacter fortement les états financiers des assureurs.

Aux IFRS se rajoute un troisième référentiel de calcul déjà utilisé: la MCEV. Dès lors, lorsque l'IFRS 4 phase II et Solvabilité II seront effectives, les assureurs devront jongler avec ces trois référentiels quantitatifs différents. Le challenge pour les assureurs sera de maintenir des délais de communication courts tout en intégrant la diversité et la complexité des référentiels quantitatifs.

Le principe fondateur de ces nouvelles normes est l'évaluation au plus juste de la valeur économique de l'activité encore appelée « *fair value* ». Nous pouvons définir la *fair value* comme le prix contre lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre deux parties dans un marché parfait (parties consentantes, pas d'asymétrie d'informations et situation de concurrence).

Compte tenu de l'urgence du besoin et du nombre important de parties concernées (compagnies d'assurance, autorités de contrôle nationales, gouvernements des pays membres de l'Union Européenne, etc.), un cadre de travail rigoureux a été utilisé pour mener à bien la réforme Solvabilité II. Il s'agit du processus « Lamfalussy ».

1.3 Méthode de travail

1.3.1 Processus « Lamfalussy »

Le processus « Lamfalussy » est la méthode de travail adoptée par la Commission Européenne pour concevoir les réglementations du secteur financier. Il a été conçu en 2001 par le comité Lamfalussy dénommé d'après son président, le baron belge Alexandre Lamfalussy. Ce comité a été chargé de réfléchir à l'amélioration de la structure de régulation des marchés financiers. Cette approche est appliquée pour la première fois au secteur de l'assurance dans l'élaboration de Solvabilité II.

L'intérêt du processus est d'accélérer l'adoption, la mise en œuvre et le contrôle de l'application de la législation ainsi que les mesures d'exécution. Pour cela, les institutions européennes consultent les parties intéressées, compagnies d'assurance et régulateurs nationaux, tout au long du processus législatif. Dès lors, les acteurs intervenant dans l'élaboration de la directive Solvabilité II sont nombreux :

- Commission Européenne,
- CEIOPS : *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*, représentant les autorités de contrôle des Etats membres,
- Acteurs de l'industrie et experts : CEA (*Comité Européen des Assurances*), CRO Forum (regroupement de *Chief Risk Officer*, directeurs de gestion des risques, des principaux assureurs européens), AMICE (*Association of Mutual Insurers and Insurance Cooperatives in Europe*), instituts des actuaires nationaux, groupes de consultations, etc.

Le processus Lamfalussy est caractérisé par quatre niveaux qui s'organisent sous Solvabilité II de la manière suivante et synthétisé par la Figure 2 :

1. Au **niveau 1**, la Commission Européenne adopte une proposition formelle de directive contenant les principes cadres, en accord avec le parlement et le conseil.
2. Au **niveau 2**, la Commission, après consultation du Comité de réglementation des assurances (EIOPC), demande l'avis du CEIOPS sur les mesures techniques de mise en œuvre. Le CEIOPS prépare cet avis en consultation avec les participants du marché, les utilisateurs finaux et les consommateurs.
3. Au **niveau 3**, le CEIOPS élabore des recommandations interprétatives communes, des lignes directrices cohérentes avec des standards communs et organise des échanges bilatéraux pour évaluer les mesures. Ces échanges se font notamment via deux canaux :
 - Les *call for advice* qui sont des demandes d'avis sur un sujet spécifique,

- Les QIS (Quantitative Impact Study) visant à évaluer les impacts des propositions des normes quantitatives.
4. Au **niveau 4**, la Commission vérifie le respect de la législation de l'Union Européenne par les Etats membres.

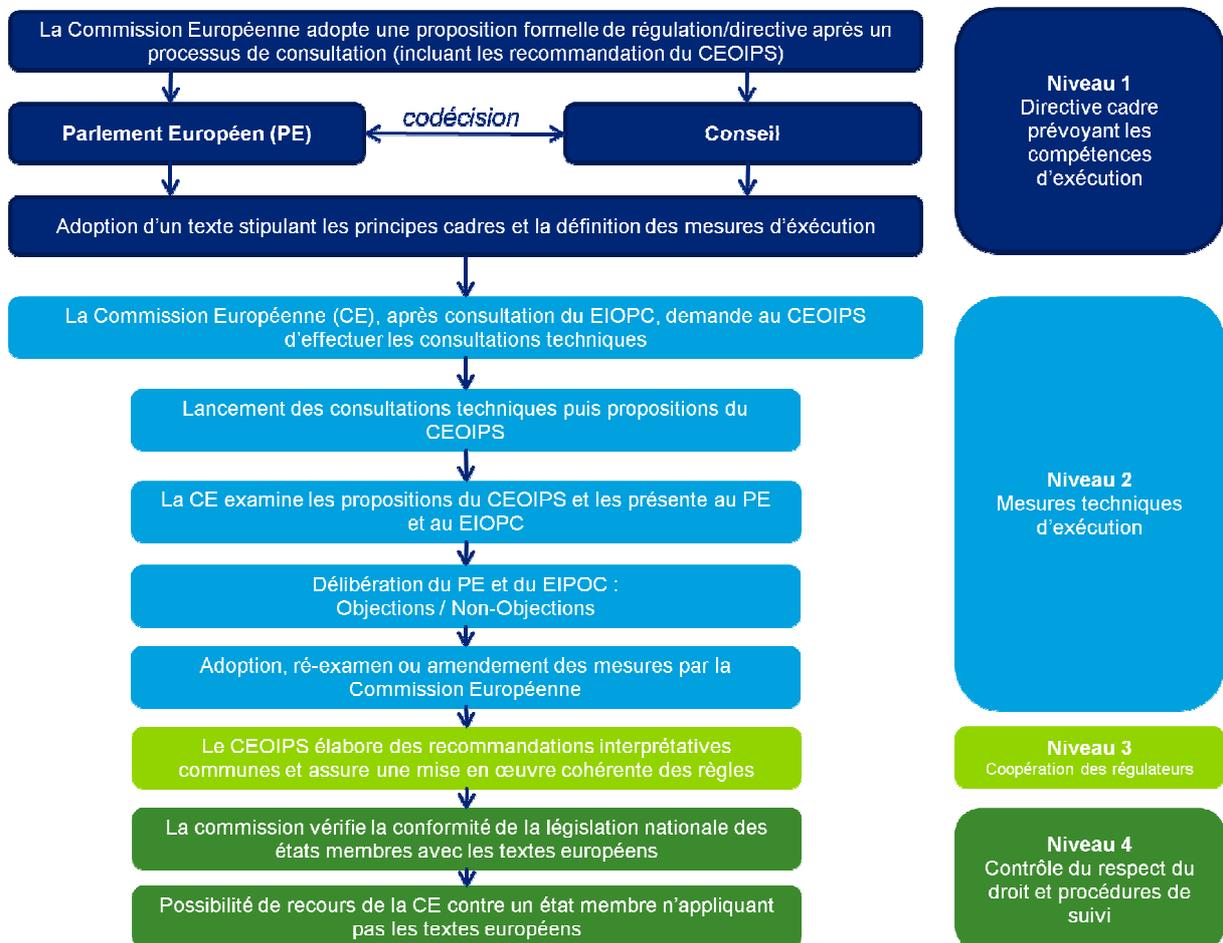


Figure 2 : Approche "Lamfalussy"

1.3.2 Avancement des travaux

La Figure 3 présente le calendrier rétrospectif et prévisionnel de l'avancement des travaux Solvabilité II.

L'année 2010 est marquée par la cinquième étude quantitative d'impact (QIS 5). Cette étude quantitative, spécifique à la formule standard, est réalisée par l'ensemble des acteurs du secteur de l'assurance et vise à mesurer concrètement l'impact de la directive européenne. Depuis 2005, les QIS se concentrent surtout sur les exigences quantitatives de Solvabilité II, le pilier I, et plus précisément sur le *Solvency Capital Requirement* (SCR) ou capital de solvabilité requis.

Avant la publication des spécifications techniques finales par la Commission Européenne, il y a eu de nombreux aller-retour entre le marché et le CEOIPS (par *Consultation Papers* : CP). Les spécifications techniques de cette cinquième et a priori dernière étude quantitative d'impact ont été publiées au début de mois de juillet 2010. Les résultats du QIS 5 doivent être remontés à l'organisme

prudentiel national, l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP) pour la France, avant le 31 octobre 2010 pour les entités solo et avant le 15 novembre 2010 pour les groupes.

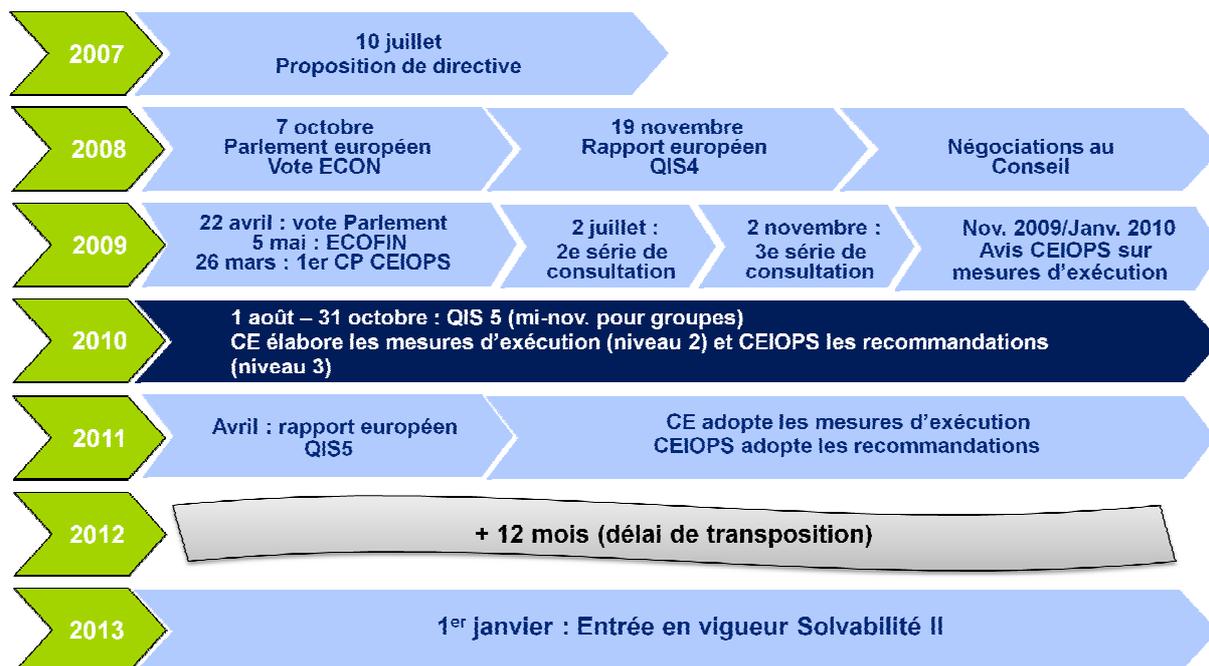


Figure 3 : Calendrier rétrospectif et prévisionnel Solvabilité II

Dans la suite de ce document, nous présenterons plus en détails les exigences quantitatives de la directive, soit le Pilier 1. Les deux autres piliers ne seront pas détaillés et nous renvoyons le lecteur à la directive européenne votée le 22 avril 2009 [1].

1.4 Zoom sur Pilier 1

Le Pilier 1 de Solvabilité II caractérise les exigences quantitatives de la directive. Ces exigences quantitatives sont plus complexes que celles décrites par Solvabilité I puisque qu'elles ont pour objet de refléter une évaluation des besoins de capitaux selon une approche économique.

Comme l'indique la Figure 1, le Pilier édicte des règles sur les six sujets suivants :

1. Evaluation des actifs et des passifs,
2. Provisions techniques,
3. Fonds propres,
4. Capital de solvabilité requis,
5. Minimum de capital requis,
6. Règles d'investissement.

Nous présentons succinctement les six sujets cités ci-dessus afin de comprendre le contexte réglementaire exigeant dans lequel s'inscrivent les travaux présentés dans ce document.

1.4.1 Les exigences quantitatives du Pilier I

1.4.1.1 Evaluation des actifs et des passifs

Les actifs et les passifs des entreprises d'assurance et de réassurance doivent être évalués à leur valeur économique, appelée encore fair value (notion définie au §1.2). Cette évaluation comptable économique permet de construire un bilan économique qui sera présenté au §1.4.2.

L'évaluation des passifs n'autorise aucun ajustement visant à prendre en compte la qualité de crédit propre à une entreprise donnée.

Dans le référentiel comptable français actuel, les passifs sont évalués en utilisant des hypothèses prudentes et les actifs sont évalués à leur coût historique. Par exemple, le prix d'un titre détenu en portefeuille sera comptabilisé à son prix d'acquisition. Ainsi à chaque clôture d'exercice, la valeur comptable brute du titre ne varie pas. En référentiel Solvabilité II, la valeur de ce titre est réévaluée chaque année à sa valeur de marché ; si le titre est coté, il s'agit de sa cotation au jour de l'évaluation.

1.4.1.2 Provisions techniques

Les provisions techniques se décomposent en *Best Estimate* (meilleure estimation) et en *Risk margin* (marge de risque).

$$\text{Provisions techniques} = \text{Best Estimate} + \text{Risk margin}$$

Le *Best Estimate* se définit comme la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs bruts de réassurance⁶ sans intégrer de marge de prudence. Autrement dit, le *Best Estimate* est la somme actualisée et probabilisée des prestations et des frais futurs adossés aux engagements de l'assureur. Il est à noter que le *Best Estimate* doit reposer sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes.

Dans le contexte de l'assurance vie, le *Best Estimate* est particulièrement complexe à évaluer car, de par sa définition économique, il intègre aussi la valeur temps des garanties financières et des options cachées définies dans les contrats d'assurance vie. Ces notions sont abordées au §2.2.

L'évaluation du *Best Estimate* est obtenue par les techniques de provisionnement couramment utilisées mais n'intègrent pas de marge pour risque, la *Risk margin*, qui fait l'objet d'un calcul distinct. Nous rappelons ci-dessous les quatre grandes familles de méthodes de provisionnement :

1. Les *techniques de simulations aléatoires* comme le Monte-Carlo et le calcul stochastique, le bootstrap, méthodes bayésiennes, etc.
2. Les *formules analytiques* comme par exemple la formule de Black-Scholes pour l'évaluation d'options et garanties ou les nombres de commutation en assurance vie.
3. Les *méthodes déterministes* nécessitant un historique de sinistres comme le chain ladder ou Bornhuetter-Ferguson souvent utilisés en assurance non-vie.
4. Provisionnement à la valeur de rachat.

La *Risk margin* correspond au montant requis supplémentaire par rapport au *Best Estimate* pour que les engagements puissent être transférés à un autre unique assureur. Cette marge complétant le *Best*

⁶ Les créances de réassurance sont évaluées en Best Estimate à l'actif (avec prise en compte de la probabilité de défaut et des montants recouvrables).

Estimate permet de rendre compte du coût engendré par l'immobilisation du capital chez l'assureur repreneur⁷. La *Risk margin* est interprétée par le CEIOPS comme une marge pour risque supplémentaire. Les assureurs interprètent aussi la *Risk margin* comme le montant des risques financiers non couvrables et des risques non financiers.

D'après le QIS 5, le calcul de la *Risk margin* se fait par la méthode « coût du capital ». Nous renvoyons le lecteur aux spécifications techniques du QIS 5 (TP 5.1) [2] pour plus de précisions.

1.4.1.3 Fonds propres

La Commission Européenne précise que les fonds propres doivent être évalués à leur valeur économique. Elle distingue chaque élément en fonds propres de base et en fonds propres auxiliaires puis les classe en niveau 1, 2 ou 3.

Une fois classés, ces fonds propres devront être mis en couverture des marges de solvabilité (MCR et SCR définis ci-après) en respectant des limites en proportion dépendant de leur nature. Ainsi, l'*éligibilité* d'une classe de fonds propres se traduit par sa capacité à être mise en regard des seuils de solvabilité.

Les différentes notions décrites ci-dessus ainsi que les valeurs numériques associées sont synthétisées sur la Figure 4.

⁷ Si le repreneur du portefeuille ne comptabilisait que le Best Estimate à son passif il devrait avoir un SCR en fonds propres associé à ces nouveaux contrats. Immobiliser du capital est coûteux car la rentabilité des actifs (x%) est moindre que celle attendue par l'actionnaire (y%). La méthode coût du capital de la *risk margin* se propose d'estimer x-y (~6%).



Figure 4 : Fonds propres sous Solvabilité II

1.4.1.4 Capital de solvabilité requis

Le capital de solvabilité requis est un des principaux indicateurs du pilier 1 de la directive européenne. Avant de le définir tel que présenté par Solvabilité II, il est nécessaire d'introduire la notion de *ruine économique* ainsi que celle du *capital économique*.

Une société est en situation de **ruine économique** à l'instant t si ses fonds propres économiques sont négatifs en t : $Fonds\ propres(t) < 0$. Dans cette définition et dans la suite de cette partie, les fonds propres seront entendus à leur valeur économique et seulement constitués des fonds propres de base tel que présenté au §1.4.1.3. Nous en déduisons la notion de capital économique :

Définition : Le **capital économique** à l'horizon T et au niveau de risque α correspond au montant :

$$\underset{X \in \mathbb{R}}{\text{Argmin}}(P(\text{ruine en } t = T | Fonds\ propres(t = 0) = X) \leq \alpha)$$

Ou encore en explicitant la définition de la ruine économique:

$$\underset{X \in \mathbb{R}}{\text{Argmin}}(P(Fonds\ propres(t = T) < 0 | Fonds\ propres(t = 0) = X) \leq \alpha)$$

Où nous avons noté $P(x|y)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement x sachant l'évènement y .

Autrement dit, le capital économique est le montant minimal de fonds propres dont doit disposer la société pour que sa probabilité de ruine à l'horizon T soit inférieure à α . De manière équivalente en utilisant la *Value-at-Risk* au niveau de risque α , le capital économique se définit comme la plus petite solution de l'inéquation :

$$VaR_{\alpha}(Fonds\ propres(t = 1)|Fonds\ propres(t = 0) = Capital\ économique) \geq 0$$

Où $Fonds\ propres(t = 1)|Fonds\ propres(t = 0) = Capital\ économique$ est la variable aléatoire correspondant au montant de fonds propres en $t = 1$ sachant que le montant de fonds propres en $t = 0$ s'élève à *Capital économique*.

A l'aide de ces deux notions économiques, Solvabilité II présente sa directive le capital de solvabilité requis de la manière suivante :

Définition : Le **capital de solvabilité requis** (Solvency Capital Requirement : SCR) correspond au capital économique à horizon 1 an et à un niveau de risque de 0,5% (ou seuil de confiance à 99,5%).

La directive (section 4 articles 100 à 125) ajoute les hypothèses sur lesquelles doivent reposer les calculs du SCR. Son calcul se fonde sur l'hypothèse de continuité d'exploitation de l'entreprise concernée. Par ailleurs, le SCR doit être calibré de telle manière à ce que tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance soient pris en considération. Le SCR doit couvrir le portefeuille en cours (stock) ainsi que les affaires nouvelles (new business) dont les souscriptions sont attendues dans l'année à venir. Pour ce qui est du portefeuille en cours, il couvre uniquement les pertes non anticipées.

Il est par ailleurs précisé dans l'article 101 de la section 4 complété du QIS 5 que le SCR doit couvrir au minimum les risques suivants :

1. Le risque de souscription en non-vie,
2. Le risque de souscription en vie,
3. Le risque de souscription en santé,
4. Le risque de marché,
5. Le risque de crédit : défaut des contreparties dans le cadre d'un système d'atténuation des risques (par exemple réassurance),
6. Le risque opérationnel (à l'exclusion des risques de réputation et des risques découlant de décisions stratégiques) dont, entre autres, le risque juridique,
7. Le risque d'actifs intangibles (incorporels).

Solvabilité II exige que le SCR soit calculé au moins une fois par an et qu'il soit notifié aux autorités de contrôle compétentes. Toutefois, le SCR doit être continuellement surveillé par les sociétés d'assurance et de réassurance. Dès lors, si le profil de risque de la société s'écarte significativement des dernières hypothèses sous-jacentes au calcul, SCR doit être réévalué sans délai et son résultat doit être notifié aux autorités de contrôle.

A travers ces fortes exigences qui viennent d'être exposées, nous voyons que Solvabilité II place le suivi des risques, dont le SCR est une mesure imposée, au cœur du système de pilotage des entreprises d'assurance.

La directive propose deux méthodes de calcul du SCR dont le choix est laissé à la discrétion de la compagnie : la formule standard ou le modèle interne. Si le modèle interne est choisi par la compagnie, un deuxième calcul du SCR par la formule standard sera néanmoins obligatoire pendant 2 ans. En outre, le modèle interne doit être homologué par le régulateur.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Correlation(i,j)SCR_iSCR_j} + SCR_{incorporel}$$

Enfin, l'ajustement *Adj* et le SCR opérationnel SCR_{op} sont calculés séparément sans agrégation.

Le SCR global est donné par :

$$SCR = BSCR + SCR_{op} + Adj$$

Afin d'avoir une vision opérationnelle de la formule standard, nous illustrons l'intérêt de l'ajustement et le calcul d'un SCR marginal avec l'exemple du module action et nous finissons par présenter quelques critiques à son égard.

1.4.1.4.1.1 L'ajustement

Quel est le fonctionnement de l'ajustement ?

L'ajustement permet d'intégrer dans le calcul du SCR la capacité d'absorption des pertes des provisions techniques et des impôts différés. La valeur de l'ajustement dépend notamment des *management actions* modélisées en termes de participation aux bénéfices.

Le CEOIPS isole cet effet de réduction du SCR marginal dans le module *ajustement Adj*.

1.4.1.4.1.2 Exemple du Calcul du SCR par module : l'approche ΔNAV dans le cas du risque actions

Le sous-module actions se situe au sein du module de marché. Le SCR actions est déterminé par variation de *NAV* (*Net Assets Value*, cf. définition ci-dessous) suite à l'application de chocs. Il est important de noter que la l'approche *delta NAV* décrite est une méthode d'estimation du SCR par simulations.

La *NAV* est la différence entre actifs réels sur les passifs réels, une représentation du calcul de la *NAV* grâce au bilan économique est proposée en Figure 6. Les actifs réels sont l'ensemble des actifs valorisés à leur valeur de marché. Les passifs réels correspondent au seul *Best Estimate*.

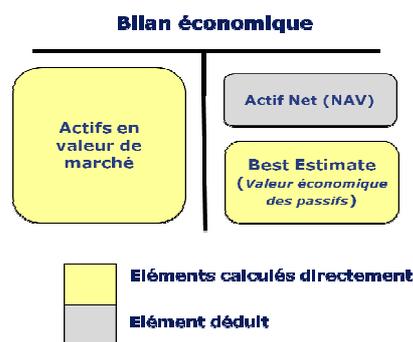


Figure 6 : Bilan économique Solvabilité II et NAV

Dans les spécifications techniques du QIS 5, les chocs actions sont de :

- -39% plus un ajustement (calibré à +9%) sur les actions cotées en EEA ou dans l'OCDE et sont dites *global*,

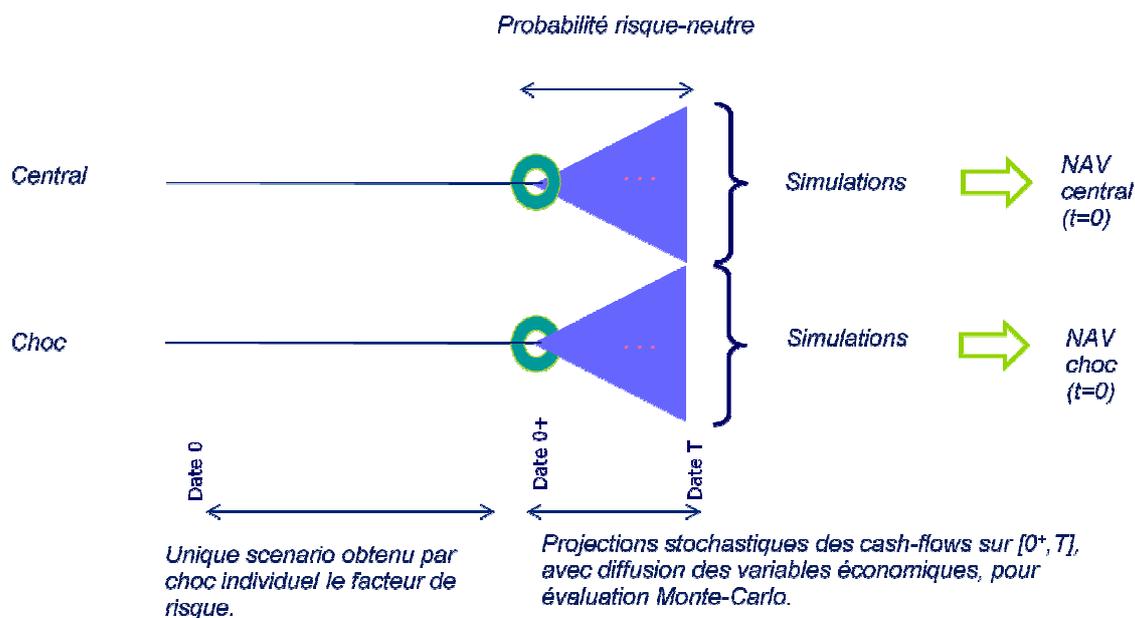
- -49% plus un ajustement (calibré à +9%) sur les actions *other* (marchés émergents, private equity, hedge funds, commodities non cotés, investissements alternatifs, ...).

Cet ajustement symétrique est une mesure contra-cyclique (*dampener* Pilier 1) rendant compte de la position du marché dans le cycle. Ce coefficient, positif ou négatif, est ajusté à la hausse ou la baisse en fonction de la différence entre le taux spot de l'indice (e.g. CAC 40) et sa moyenne mobile. L'interprétation de l'action de ce coefficient par l'ACP est la suivante : « *Le choc est d'autant plus fort que le marché des actions est en haut de cycle et plus faible quand le marché est en bas de cycle.* »

Par exemple, si un assureur détient des actions *global* valant 100 sur le marché, le scénario de choc correspond au scénario de baisse de 30% de leur valeur. La NAV choquée est la NAV obtenue avec le bilan économique réévalué sur la base un actif de marché initial égal à 70.

Le premier choc sur les actions *global* conduit à un premier SCR. Le second choc sur les actions *other* conduit à un second SCR. Puis les deux SCR sont agrégés par corrélation pour obtenir le SCR actions.

Le calcul du SCR marginal par variation de NAV est schématisé sur la Figure 7 et la Figure 8 pour un assureur vie et sur la Figure 9 pour un assureur non vie. Il est important de préciser que le calcul d'un Best Estimate peut se faire sans simulations Monte Carlo (notamment chez les assureurs non vie).



$$SCR = \max\{ NAV \text{ central } (t=0) - NAV \text{ choc } (t=0) ; 0 \}$$

Figure 7 : Calcul d'un SCR par approche delta NAV

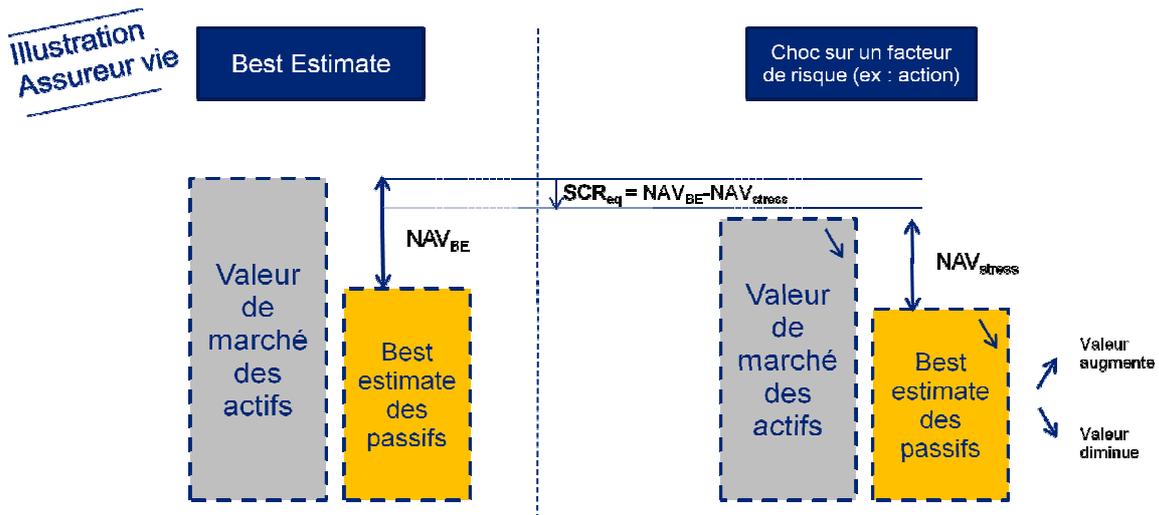


Figure 8 : Illustration de la méthode delta NAV en assurance vie

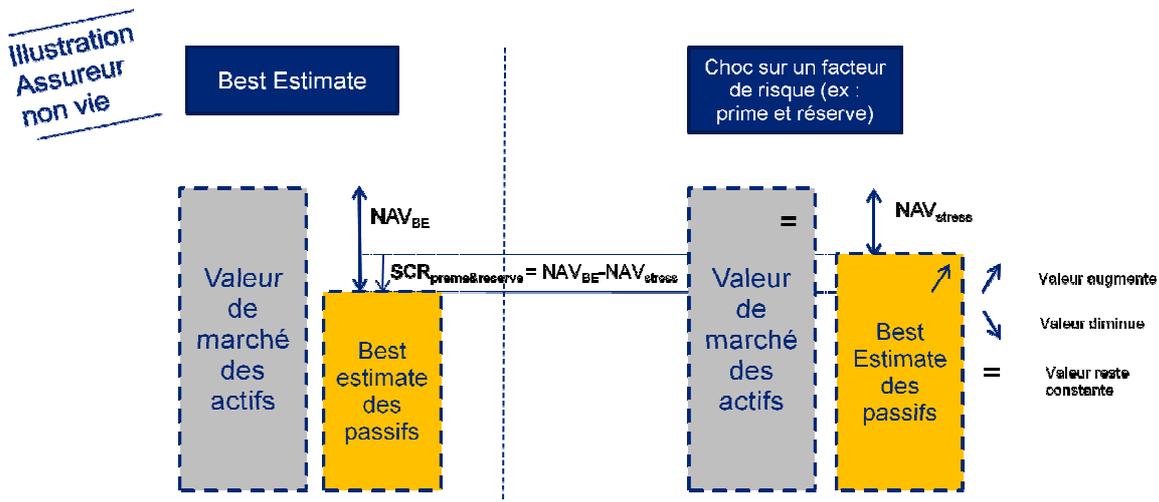


Figure 9 : Illustration de l'approche delta NAV chez un assureur non vie

Afin d'illustrer ce calcul de manière plus opérationnelle, un exemple réel est proposé en annexe §8.2 avec le calcul partiel du SCR marché pour un assureur vie.

1.4.1.4.1.3 Quatre critiques de la formule standard

La première critique que portent les assureurs sur la formule standard est sa forte complexité alors qu'elle a pour objectif propre d'être aisée à mettre en œuvre. Sa structure s'est enrichie, au fur et à mesure des études quantitatives d'impact, en intégrant de nouveaux modules dans le QIS 5 comme le risque de prime d'illiquidité⁸, le risque de rachat en non-vie ou encore le développement du module

⁸ Risque relatif à la volatilité de la prime de liquidité.

santé. Il faut garder à l'esprit que, malgré son nom, la formule standard nécessite l'implémentation d'un modèle de projection utilisant des techniques de simulations avancées.

La deuxième critique, souvent mise en avant, est plus profonde et touche à l'essence même de la formule standard. L'hypothèse fondamentale de la formule standard est que la perte dans tous les scénarios peut s'exprimer comme une somme agrégée, par matrice de corrélation, de risques élémentaires. Or Shaw, Smith et Spivak [3] montrent que cette hypothèse est mise en défaut en cas de *Wrong Way Risk* (*WWR*) encore appelé *effet d'interaction* ou *non-linéarité*. Le *WWR* apparaît quand l'occurrence d'un risque amplifie un second risque. Considérons le cas des modules de Catastrophes Naturelles et risque de défaut. Dans un scénario où se produit une importante catastrophe naturelle, la probabilité de défaut du réassureur augmente fortement. C'est le *WWR*. Alors, une perte sur la créance du réassureur doit-elle être classée en tant que risque de défaut ou en tant que risque de Catastrophes Naturelles ? Cet exemple montre qu'il est impossible de considérer des risques marginaux dans ces natures de dépendances extrêmes. De ce fait la structure de corrélation utilisée dans la formule standard n'est pas valable.

Une troisième critique remet en cause les matrices de corrélation utilisées pour l'agrégation des SCR ainsi que les chocs proposés. Le CEOIPS suppose que la *corrélation externe* est identique à la *corrélation interne*. La corrélation externe est la corrélation entre les facteurs de risque vue en moyenne sur les acteurs du marché. La corrélation interne est la corrélation entre les facteurs de risque vue sur une compagnie en particulier. Les compagnies d'assurance ont des structures semblables donc cette égalité est généralement vérifiée. Cependant on peut imaginer un contre exemple fictif mettant cette hypothèse en défaut. Supposons deux assureurs **A** et **B** ayant un passif identique mais un actif différent. L'assureur **A** a investi 100% de son actif en actions⁹. L'assureur **B** a investi 100% de son actif en calls. **A** et **B** sont exposés au marché actions. Puisque le QIS 5 n'impose que des chocs à la baisse sur les actions **B** a un SCR actions nul (car exposé seulement à la hausse) et **A** un SCR actions élevé (car très exposé à la baisse). Ainsi, la formule standard ne rend pas bien compte du risque marché pour **B** qui est pourtant très exposé à la hausse des actions. Elle présuppose que, comme la majorité des assureurs, **B** est exposé au risque de baisse du marché actions ; or ce n'est pas le cas. L'exemple présenté n'est certes pas réaliste mais illustre l'insuffisance de la formule standard.

Enfin, la dernière critique que nous présentons concerne la structure de dépendance utilisée pour l'agrégation des SCR : les matrices de corrélations. Dietmar Pfeifer et Doreen Strassburger [4] montrent que certaines dépendances entre risques ne peuvent se modéliser par corrélation. Ils en déduisent que la formule standard, dans sa structure actuelle, peut produire un capital économique inférieur à celui calculé par modèle interne. Pour pallier ce manquement, ils montrent qu'en gardant cette structure de dépendance, l'unique calibration raisonnable est de prendre des coefficients de corrélations tous égaux à 1 menant ainsi à l'agrégation des SCR suivante :

$$SCR_{agrégé} = \sqrt{\sum_{i=1}^n SCR_i^2 + 2 \sum_{i < j} SCR_i SCR_j} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n SCR_i\right)^2} = \sum_{i=1}^n SCR_i$$

1.4.1.4.2 Le modèle interne

Le modèle interne est un modèle propre à l'entreprise d'assurance ou de réassurance soumis à l'approbation des autorités de contrôle, il peut être total ou partiel. La définition donnée par le CEA dans *Solvency II Glossary* [5] est la suivante :

⁹ Contrairement à Solvabilité I, Solvabilité II n'impose pas de règles de répartition.

“Système de gestion des risques d’un assureur visant à analyser la situation complète des risques de la société, de quantifier les risques et/ou de déterminer le capital requis sur la base du profil de risque spécifique à la société”

L’idée sous-jacente au modèle interne est de réaliser une modélisation personnalisée du portefeuille de l’assureur : actifs détenus, dettes et engagements contractés et surtout les interactions mutuelles. De ce fait, les *SCR* et *MCR* évalués sont fonction des risques réellement portés par l’assureur et non plus sur la base forfaitaire de la formule standard.

Dans le reste de ce document, nous utiliserons le terme de *modèle interne* pour désigner le seul outil de calcul inhérent à la définition du CEA. Ainsi, dans la suite, le terme *modèle interne* n’inclut pas, entre autres, la gouvernance.

Les avantages du modèle interne sont largement reconnus¹⁰ :

- Intérêts opérationnels : aide au pilotage de la société par les risques,
- Intérêts organisationnels : étude et maîtrise transversale des risques,
- Intérêts concurrentiels : outil de communication à destination de la communauté financière et des agences de notation.

Avec un modèle interne, l’assureur projette ses cash flows en intégrant l’ensemble des risques auxquels sa société est confrontée. Les projections s’effectuent au sein du modèle interne (moteur de calcul). De ces projections il en déduit la distribution de ses fonds propres économiques à 1 an. Enfin, en identifiant le quantile à 0,5% il obtient le montant de capital économique (voir §3.3.4).

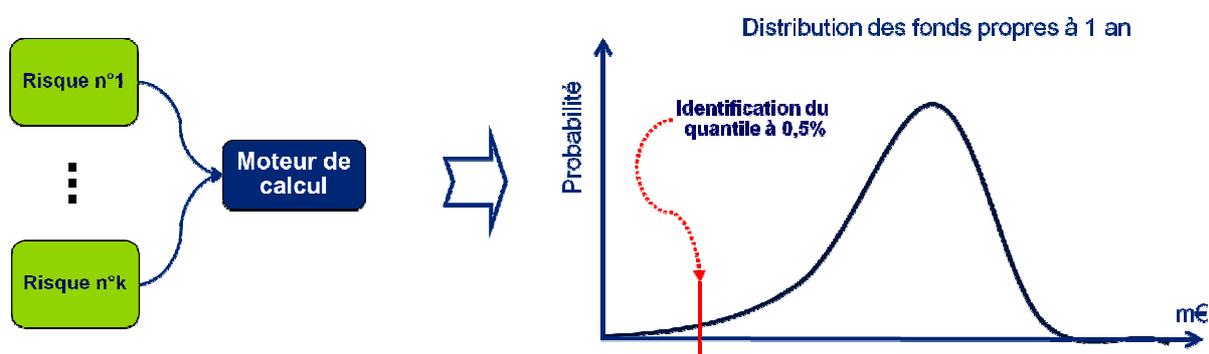


Figure 10 : Fonctionnement d’un modèle interne

En pratique, peu d’assureurs projettent la totalité des facteurs de risques. A minima, les acteurs du marché projettent les risques de marché via des ESG. La projection de certains facteurs de risques comme la mortalité stochastique¹¹ est difficile et est implémentée par un nombre restreint d’assureurs.

C’est pourquoi la directive européenne propose aux assureurs la possibilité d’implémenter un modèle interne partiel ou intégral. Dans le modèle interne intégral, tous les risques sont modélisés par le moteur de calcul de l’assureur. Dans le modèle interne partiel, seule une partie des risques est prise

¹⁰ Source : Congrès annuel des actuaires 29 juin 2009.

¹¹ Le modèle de mortalité stochastique le plus connu est celui développé par Lee et Carter en 1992. Il permet la modélisation de vie aléatoire des assurés par rapport à une loi donnée et rend compte d’un possible effet de non mutualisation. Cela est particulièrement vrai sur les portefeuilles de petite taille où la mortalité constatée peut sensiblement s’écarter de la table utilisée.

en compte par le moteur de calcul de l'assureur, le reste du calcul étant complété par l'approche de la formule standard.

Le modèle interne partiel est un compromis qui présente deux avantages. D'abord, les acteurs voulant implémenter un modèle interne intégral peuvent se contenter de n'en réaliser qu'une partie d'ici le 1^{er} janvier 2013 et d'en poursuivre l'intégration après la mise en œuvre de Solvabilité II. Le modèle interne représente un investissement et des coûts importants, le modèle interne partiel permet donc un étalement des charges. Ensuite, un assureur peut considérer que seuls quelques modules de la formule standard ne sont pas adaptés à son profil de risque. Dans ce cas, grâce au modèle interne partiel, il peut utiliser une démarche alternative à la formule standard sur des modules particuliers.

Quelque soit le type de modèle interne choisi, il doit être homologué par les autorités de contrôle compétentes. L'homologation passe par la constitution d'un dossier complet reflétant la pertinence du modèle pour l'entreprise. Le Consultation Paper 56 (2 juillet 2009) « *Tests and Standards for Internal Model Approval* » [6] précise les grands principes énoncés par le CEIOPS concernant la validation du modèle interne dont notamment :

- Article 120 : Démonstration du use test,
- Article 120 : Gouvernance du modèle interne,
- Article 121 : Normes de qualité statistique,
- Article 122 : Normes de calibrage,
- Article 123 : Attribution des profits et des pertes,
- Article 124 : Normes de validation,
- Article 125 : Normes de documentation,
- Article 126 : Modèles et données externes.

1.4.1.4.3 Formule standard ou modèle interne ?

Le modèle interne constitue un investissement important pour l'assureur d'autant plus que le processus d'homologation est un réel défi à relever. Une des conséquences éventuelles de l'utilisation d'un modèle interne est la diminution des exigences quantitatives (*SCR* et *MCR*) de par la personnalisation des risques. Toutefois, cette opportunité que présente le modèle interne n'a pas été décrite comme un avantage. En effet, la réduction du capital ne doit pas être un pré-requis mais une conséquence de la correcte adéquation du modèle au profil de risques de la société.

Dans une étude réalisée par le CEA, il a été constaté que la taille de société est un facteur déterminant dans le choix de l'implémentation d'un modèle interne comme l'illustre le Tableau 1.

Approche	Taille des entreprises				
	Petite	Moyenne / Petite	Moyenne	Moyenne / Grande	Grande
Modèle interne	5%	20%	26%	40%	52%
Modèle interne partiel	19%	42%	38%	32%	30%
Formule standard	77%	38%	36%	27%	18%

1.4.1.5 Minimum de capital requis

Le Minimum Capital Requirement (*MCR*), que nous pouvons traduire par minimum de capital requis, correspond au niveau de fonds propres en deçà duquel le risque pour les preneurs et bénéficiaires est inacceptable. Certains acteurs du marché interprètent le *MCR* comme le capital nécessaire pour ne pas être en ruine à horizon 1 an avec une probabilité comprise entre 80 et 90%.

Les spécifications techniques du QIS 5 donnent une formule analytique¹³ pour le calcul du *MCR*. Cette formule comprend un corridor forçant le montant du *MCR* entre 25% et 45% du *SCR* (calculé par la formule standard ou par un modèle interne). Par ailleurs, le CEOIPS impose au *MCR* d'être supérieur à des seuils planchers, en euros, fonction de la ligne d'activité de l'assureur.

Ainsi le *MCR* doit être au moins égal à 2,2 millions d'euros pour les activités d'assurance non-vie et au moins égal à 3,2 millions d'euros pour les activités d'assurance vie.

1.4.1.6 Règles d'investissement

La directive fixe les principes selon lesquels les investissements doivent être réalisés, sans contraindre les entreprises d'assurance et de réassurance par des règles sur la nature des investissements et sur la composition du portefeuille.

Nature des investissements

Les investissements doivent se faire dans des actifs et instruments que les entreprises d'assurance et de réassurance peuvent gérer. Aussi, les actifs doivent être investis de façon à garantir la sécurité, la qualité, la liquidité et la rentabilité de l'ensemble du portefeuille, notamment lorsqu'ils couvrent le *SCR* et le *MCR*. Enfin, lorsqu'ils couvrent les provisions techniques, les actifs doivent être investis en fonction de la nature et de la durée des engagements.

Composition du portefeuille

La Commission Européenne n'a fixé aucune règle d'investissement contraignante en matière de catégorie d'actifs investis ou de notification/soumission des décisions d'investissement aux autorités de contrôle. En revanche, la directive impose une contrainte géographique sur la localisation des actifs. Ainsi, pour les risques d'assurance situés dans la Communauté Européenne, les actifs détenus pour couvrir les provisions techniques afférentes à ces risques doivent être situés dans la Communauté Européenne.

1.4.2 Bilan comptable et bilan économique

Grâce aux notions introduites dans les sections précédentes nous pouvons désormais présenter le bilan économique Solvabilité II : voir Figure 11. Ce nouveau bilan devra compléter la communication financière des acteurs du marché de l'assurance.

¹² Source : CEA – Result and discussion on the Impact assessment of the future solvency II framework on insurance products and market / Mars 2007.

¹³ Le calcul du *MCR* est défini dans la section 4 du QIS 5.

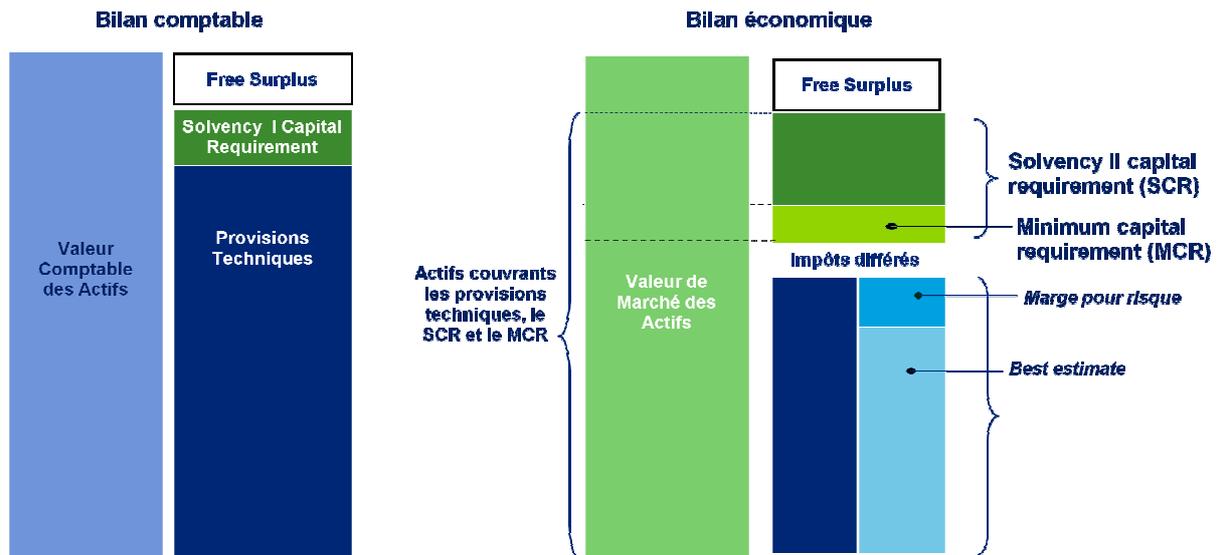


Figure 11 : Bilan comptable versus bilan économique Solvabilité II

En conclusion de cette première partie, nous rappelons quelques éléments fondamentaux développés précédant concernant le bilan économique. Les éléments de l'actif et du passif doivent être évalués à leur valeur économique. Une marge pour risque doit être ajoutée de manière explicite à la fair value du passif (*Best Estimate*) pour donner les provisions techniques

2 L'assurance vie

L'assurance vie est souvent désignée comme le placement préféré des français. En 2009, le montant des encours placés sur des contrats d'assurance vie s'élève à plus de 1 250 milliards d'euros¹⁴. Aussi, malgré le contexte économique actuel maussade, en 2009, les français ont versé plus de 150 milliards d'euros sur des supports d'assurance vie.

2.1 Typologie de l'assurance vie

2.1.1 Une définition de l'assurance vie

L'*assurance vie* est un contrat à prime unique ou à prime périodique régi par le Code des Assurances. Il bénéficie du régime fiscal de l'assurance vie (voir §5.3.1.1).

Le contrat d'assurance vie est un moyen de constituer un capital en effectuant des versements libres ou réguliers. En contrepartie des paiements des primes, l'assureur s'engage à verser une somme déterminée, la prestation, au(x) bénéficiaire(s) du contrat.

Le versement de la prestation est conditionné à la survenance de l'un des deux risques selon le type de contrat souscrit :

1. Le risque de décès sur une période donnée,
2. Le risque de survie à une ou plusieurs dates données (risque comprenant les rachats).

2.1.2 Plusieurs types d'assurance vie

L'assurance vie au sens large regroupe plusieurs types d'assurance. Nous avons choisi arbitrairement de présenter au lecteur deux types d'assurance : *l'assurance prévoyance* et *l'assurance vie individuelle*.

2.1.2.1 Assurance prévoyance

La définition de l'assurance prévoyance proposée ici est issue du cours de *Prévoyance 2009/2010* effectué à l'Ecole Centrale Paris.

« La prévoyance est la couverture des actifs financiers ainsi que des flux financiers des familles et des travailleurs indépendants contre tous les événements déplaisants de la vie. Les événements

¹⁴ Source : Rapport annuel de la FFSA 2009 [39].

déplaisants de la vie peuvent être le décès, la maladie, les accidents, l'hospitalisation, les maladies redoutées, les pannes mécaniques, le vol, le chômage, etc.

Ces assurances sont souvent contractées dans le cadre d'un prêt. Ce type d'assurance est obligatoire en cas de décès pour souscrire un prêt immobilier. Elle permet de mettre à l'abri les proches de l'emprunteur s'il décède avant un âge donné.

2.1.2.2 Assurance vie individuelle

La définition de l'assurance vie individuelle proposée ici est issue du cours d'*Assurance Vie 2009/2010* effectué à l'Ecole Centrale Paris.

L'*assurance vie individuelle* désigne les contrats couvrant : le risque de décès sur une période donnée, le risque de survie à une ou plusieurs dates données.

D'après l'enquête « *analyse des souscripteurs des contrats d'assurance vie* » de la FFSA, les motifs de souscription d'un contrat d'assurance vie individuelle sont :

- Protéger les siens,
- Constituer un complément de retraite,
- Bénéficier d'un avantage fiscal,
- Faire un placement intéressant,
- Préparer sa succession,
- Constituer une épargne de précaution.

Ces contrats permettent de s'assurer un complément de retraite ou de transmettre un patrimoine aux bénéficiaires de son choix dans un environnement fiscal attractif. Les produits proposés par l'assurance vie individuelle se déclinent en trois familles de contrats :

1. Contrats monosupports. Ce sont des contrats en euros et sont comparables à un compte d'épargne sur lequel le capital est garanti. L'épargne accumulée est disponible à tout moment mais peut éventuellement être soumise à des pénalités en cas de rachats prématurés.
2. Contrats multisupports. Ces contrats proposent des supports d'investissement à capital variable : les unités de compte¹⁵ (UC). Le souscripteur achète ses UC en fonction du risque qu'il est prêt à prendre et la liquidité souhaitée. Les contrats multisupports intègrent généralement un fonds en euros à taux garanti.
3. Contrats « gouvernementaux ». Parmi ces contrats citons le PERP¹⁶, le contrat Madelin¹⁷, le PEA¹⁸ ou le contrat Sarkozy¹⁹.

¹⁵ Les unités de compte sont des parts d'OPCVM (FCP, SICAV, etc.). L'assuré qui achète une UC n'a pas de garantie sur sa valeur future à l'image de l'achat d'une action.

¹⁶ « Introduit par la loi Fillon du 21 août 2003, décrets d'avril 2004, le Plan d'Epargne Retraite Populaire permet la constitution d'une retraite complémentaire transférable mais non rachetable, avec sortie obligatoire en rente. Les primes sont déductibles à hauteur d'un plafond égal à 8% de la RAB ou rémunération annuelle brute, ce plafond jouant sur la totalité des cotisations de retraite complémentaires de l'assuré. » *Source : Cours Assurance Vie Ecole Centrale Paris 2009/2010*

¹⁷ « Le contrat dit MADELIN permet aux travailleurs non salariés non agricoles de souscrire en franchise d'impôts sur le revenu un contrat de prévoyance ou un contrat de retraite complémentaire non rachetable et à sortie obligatoire en rente. Pour bénéficier d'un contrat Madelin, les cotisants doivent être à jour de cotisations au titre de leurs régimes obligatoires. » *Source : Cours Assurance Vie Ecole Centrale Paris 2009/2010*

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux contrats d'assurance vie individuelle. Ces derniers comportent des options et garanties financières donnant des droits aux assurés et présentant un coup économique pour l'assureur.

2.2 Options cachées et garanties financières d'un contrat d'assurance vie individuelle²⁰

Dans cette section nous précisons les définitions des options cachées et garanties financières d'un contrat d'assurance. Ces dernières rentrent dans le calcul du Best Estimate et leur valeur doit être déterminée. Les options et garanties les plus communément intégrées aux contrats mono et multisupport sont :

- Garantie de taux minimum,
- Option de rachat,
- Option de versement libre,
- Option de conversion en rente,
- Option d'avance,
- Garantie plancher,
- Option d'arbitrage entre fonds en euros et fonds en UC.

Le contrat d'épargne qui sera modélisé comportera, entre autres, les 3 premières options dont nous donnons ici une description succincte.

2.2.1 Taux minimum garanti

2.2.1.1 Définition

Lors de la souscription d'un contrat d'épargne, l'assureur peut s'engager à garantir un taux de rémunération minimum sur toute la durée du contrat. C'est le *TMG* (*Taux Minimum Garanti*). L'assurance vie étant caractérisée par des engagements à long terme, l'assureur doit garantir ce taux de rendement sur une longue période.

Les primes perçues par l'assureur sont investies dans un portefeuille d'actifs. Or, le rendement du portefeuille de l'assureur est soumis aux aléas des marchés financiers. Il lui est impossible de prévoir sur une longue période la rémunération de ce portefeuille alors qu'il s'engage à verser un taux fixe, le *TMG*, à ses assurés.

Ce *TMG* est donc une contrainte forte pour les assureurs. Son montant est encadré par le Code des Assurances²¹ ; ainsi, le taux maximal de *TMG* applicable est :

- 75% du TME pour les contrats à prime unique ou à versements libres de 8 ans au plus,

¹⁸ « Enveloppe fiscale, le PEA ne peut être ouvert en assurance vie que sous la forme d'un contrat de capitalisation en UC. » *Source : Cours Assurance Vie Ecole Centrale Paris 2009/2010*

¹⁹ « Le bon ou contrat « Sarkozy » souscrit à compter du 1er janvier 2005 doit obligatoirement être investi à hauteur de 30% au moins en actions d'origine UE - Islande – Norvège. Les titres à risque doivent représenter au moins 10% de l'actif parmi lesquels les titres non cotés doivent représenter au moins 5% (CGI article 125-0A, I quater). » *Source : Cours Assurance Vie Ecole Centrale Paris 2009/2010*

²⁰ Dans la suite de ce document, par abus de langage, nous utiliserons le terme d'assurance vie pour désigner l'assurance vie individuelle.

²¹ Article A. 132-1 du Code des Assurances.

- Le plus bas des 2 taux suivants : 60% du TME ou 3,5 %, pour les autres contrats.

Ces limites visent à assurer la solvabilité de l'assureur.

Dans les années 1980 – 1990, des contrats de durée illimitée, proposés par les assureurs vie comportent des *TMG* élevés de l'ordre de 5 à 6%. Par ailleurs, certains d'entre eux autorisent les versements libres, c'est-à-dire que l'assuré peut continuer à verser des primes sur son contrat et bénéficier du *TMG* sur ces versements. Or, depuis le milieu des années 2000, les taux disponibles sur les marchés financiers ont chuté et sont au plus bas en 2010. Le rendement du portefeuille des assureurs a donc fortement baissé mais ils continuent de verser le *TMG* élevé sur ces contrats.

Ces anciens contrats encore en portefeuille génèrent des pertes importantes pour les assureurs.

Actuellement, la plupart des contrats d'épargne disponibles sur le marché comportent des *TMG* de 0%.

Afin d'assurer la défense du consommateur un autre aspect de la réglementation édicte que l'assureur est tenu de distribuer aux assurés une partie des bénéfices réalisés. C'est la participation aux bénéfices. La participation aux bénéfices (voir §5.3.2) force l'assureur à redistribuer ses gains financiers et ses gains et pertes techniques. Ceci permet à l'assuré d'avoir une rémunération de son épargne imposée même en cas *TMG* nul.

2.2.2 Les rachats

Le rachat peut être *partiel* ou *total*.

Le **rachat total** consiste en la faculté, pour le souscripteur d'un contrat d'assurance vie, de mettre un terme au contrat avant l'échéance prévue et demander le versement de l'intégralité la provision mathématique constituée.

Le **rachat partiel** permet à l'assuré de ne récupérer qu'une partie de la provision mathématique constituée et ne rompt pas le contrat.

Les rachats sont généralement pénalisés, et ces pénalités de rachat sont variables selon les contrats et les compagnies²².

2.2.3 Versements libres

A la différence des primes périodiques, l'assuré n'est pas tenu d'alimenter régulièrement son contrat. Les versements libres permettent de payer des primes lorsque l'assuré le désire tout en bénéficiant des clauses définies dans le contrat.

Les versements libres constituent une source d'aléa, et donc un risque, pour l'assureur puisqu'il ne peut pas prévoir les versements futurs. Comme présenté au §2.2.1, le risque est particulièrement important pour l'assureur en cas de *TMG* élevé.

²² Selon l'article R. 331-5 du Code des Assurances, les indemnités de rachat sont limitées à 5 % des PM, et deviennent nulles au bout de 10 ans.

3 Calcul du SCR en assurance vie par modèle interne

Comme nous l'avons vu au §1.4.1.4.2, le calcul du SCR par modèle interne nécessite de simuler la distribution des fonds propres économiques à 1 an. Ce calcul est rendu particulièrement complexe en assurance vie du fait des interactions entre l'actif et le passif du bilan et des garanties financières et options cachées existant dans la plupart des contrats proposés sur le marché.

3.1 Valeur économique des garanties financières et options cachées

A la manière des options financières (swap, call, etc.) qui s'échangent sur les marchés, les garanties financières et options cachées ont une valeur temps. Sous Solvabilité II, le *Best Estimate* qui doit être évalué en valeur économique : il contient, entre autres, la valeur temps de ces options et garanties.

Dans cette section nous donnons l'exemple du prix pour l'assureur de l'option de *TMG* sur un contrat d'épargne et celui de l'option de rachat total.

3.1.1 Option de TMG avec participation aux bénéfices

Prenons un contrat d'épargne avec *TMG* et participation aux bénéfices. Cette garantie induira un coût, imputé sur les fonds propres, pour la compagnie l'année t si elle ne peut la satisfaire. Cela se produit lorsque les ressources dont elle dispose en t (revenus des actifs et résultat technique), notées S_t , sont inférieures au montant à verser aux assurés en t (intérêts techniques et participation aux bénéfices), noté K_t .

Le prix de la garantie pour l'année t est donc donné par :

$$\max[0; (K_t - S_t)] = (K_t - S_t)^+$$

La garantie s'apparente à un put (option de vente) européen. Le prix de la garantie en t pour un contractant arrivant à échéance en T est donné par l'espérance, sous la probabilité risque neutre²³ \mathbb{Q} , de la somme actualisée des cash flows futurs. Soit :

$$\text{prix option}_{TMG \text{ avec } PB}(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{u=t}^T \delta_u (K_u - S_u)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

²³ Voir §3.1.3 pour l'explication de l'utilisation de la probabilité risque neutre.

Où nous avons noté :

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, la filtration qui caractérise l'information financière disponible,
- r_u le taux sans risque instantané,
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$ le facteur d'actualisation.

3.1.2 Option de rachat total

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'assureur dispose de fonds cantonnés relatifs aux contrats considérés.

L'option de rachat total donne le droit à l'assuré i de demander le remboursement de la provision mathématique constituée à n'importe quelle date t dont nous notons sa valeur PM_t^i . L'option génère un coût pour l'assureur si la valeur des actifs en représentation de cette provision S_t^i est inférieure au montant qu'il doit verser à l'assuré. Le cash flow représentant le coût en t est donné par :

$$Rachat_t^i * (PM_t - S_t)^+$$

Où nous avons noté $Rachat_t^i$, le processus stochastique qui vaut 1 si l'assuré rachète son contrat et 0 sinon. La garantie s'apparente à un put américain.

Le prix de l'option se déduit en prenant l'espérance sous la probabilité risque neutre de la somme actualisée des cash flows. Soit :

$$prix\ option_{rachat\ total}(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i \in \{assurés\}} \int_{u=t}^T \delta_u Rachat_u^i (PM_u^i - S_u^i)^+ du \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

3.1.3 Evaluation pratique du coût des options sous la probabilité risque neutre

Lorsque ces options sont en dehors de la monnaie, nous pouvons considérer que leur valeur est nulle. Or, l'exemple de l'option de *TMG* développé au §2.2.1 montre que l'option peut engendrer un coût important. C'est pourquoi Solvabilité II impose la prise en compte dans le *Best Estimate* de toutes les garanties financières et options cachées à leur valeur de marché.

Cependant, le prix de ces options est difficile à déterminer analytiquement dès que les modèles de taux sont complexes ou lorsqu'il y a des *management actions* dans la politique de participation aux bénéfices, dans la stratégie d'allocation d'actifs et dans les rachats. Les interactions entre l'actif et le passif sont, de fait, aléatoires et il est impossible d'écrire une formule fermée pour évaluer ces options.

Les assureurs sont alors obligés de recourir aux méthodes Monte Carlo. Pour cela, ils doivent projeter leurs risques. En pratique, seuls les risques marchés sont simulés de manière stochastique, via les ESG, les autres risques sont projetés de manière déterministe puis sont choqués (cf *formule standard*).

3.1.3.1 Méthode Monte Carlo

Pour déterminer la valeur de marché de ces options, il est commode d'écrire les différents modèles sous-jacents au calcul (modèle de taux, modèle d'actifs risqués, etc.) sous la probabilité risque neutre

\mathbb{Q} comme le montrent Black et Scholes pour les options financières[7]. En effet, sous cette probabilité, les **prix actualisés des actifs sont des martingales** ce qui simplifie l'évaluation. C'est-à-dire que :

$$prix\ option(t) = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{u=t}^{\infty} \delta_u \text{ cash flows } (u) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

La méthode Monte Carlo permet d'estimer ce prix en simulant la réalisation d'un nombre fini de trajectoires à horizon donné.

D'un point de vue numérique, on commence par simuler S trajectoires des variables économiques diffusées jusqu'à $t = T$ sous \mathbb{Q} (voir Figure 12). Puis, pour chacune des trajectoires, on calcule la somme actualisée des cash flows générés par l'option. Enfin, l'estimation du prix correspond à la moyenne des sommes :

$$prix\ option(t) \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u=t}^T \delta_u^s \text{ cash flow}^s(u)$$

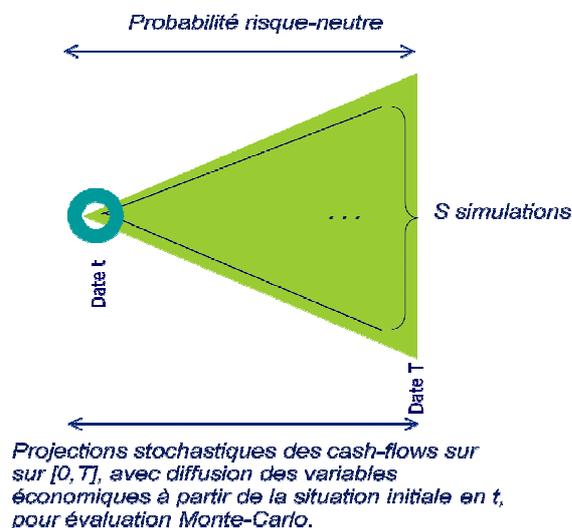


Figure 12 : Diffusion des variables économiques

3.1.3.2 De l'utilisation de la probabilité risque neutre en assurance

Sous la probabilité risque neutre, les agents économiques sont indifférents au risque et, par conséquent, la prime de risque est nulle. Cependant, il convient de préciser que la probabilité risque neutre n'est qu'un artifice de calcul et son utilisation n'est valable que sous les hypothèses suivantes :

- **Marché complet** : tout actif conditionnel peut-être répliqué par un portefeuille autofinçant composé d'actifs du marché,
- **Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)** : Il n'existe pas de stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine à une date future.

Si l'hypothèse d'AOA peut se justifier²⁴, la complétude des marchés n'est pas vérifiée en assurance. En effet, les options (actifs conditionnels) détenues par les assureurs dépendent de facteurs comme la mortalité, la fiscalité ou encore du comportement des assurés. Par conséquent, ces options ne sont pas répliquables par des actifs financiers disponibles et le marché n'est pas complet.

Pourquoi les assureurs font-ils l'hypothèse de complétude des marchés pour évaluer leurs options ?

Sans cette hypothèse, l'existence et l'unicité de la probabilité risque neutre n'est pas assurée. Les prix des options ne sont plus uniques et il existe un ensemble de prix admissibles (par exemple un intervalle de prix). L'évaluation du bilan économique de l'assureur s'en trouve alors compliquée. Pour réaliser de manière pratique leurs calculs, les assureurs font communément l'approximation d'un marché complet pour leurs options. Nous ferons cette même approximation²⁵.

Une dernière limite de l'utilisation faite par les assureurs de la probabilité neutre est que tous les actifs rapportent le taux sans risque alors que les *TMG* pris comme référence sont les taux réels contractuels. Dans cet univers risque neutre, la contrepartie possédant le contrat d'épargne peut disposer d'un actif rapportant plus que le taux sans risque²⁶. Dans la pratique, cela conduit certains assureurs à retraiter leurs actifs. Par exemple, ils « *risquent neutralise* »²⁷ leurs obligations en modifiant leurs caractéristiques : un nouveau coupon fictif est déterminé pour que la somme actualisée (au taux sans risque) des flux futurs corresponde à la valeur de marché initiale de l'obligation.

On notera que ces mêmes approximations pour l'évaluation *market consistent* des options cachées et garanties sont utilisées dans le calcul de la *MCEV*.

3.2 Calcul de la distribution des fonds propres économiques à 1 an

Calculer la distribution des fonds propres économiques à 1 an revient à prédire l'évolution des variables économiques (taux, actions, etc.) entre $t = 0$ et $t = 1$ puis à évaluer le bilan économique conditionnellement à la réalisation de ces variables.

Afin d'avoir un pouvoir prédictif, les modèles de projections des variables économiques entre $t = 0$ et $t = 1$ doivent être écrits sous la probabilité *historique* encore appelée probabilité *physique* ou *real-world*. Les agents n'étant pas indifférents au risque, sous cette probabilité, les modèles intègrent une prime de risque.

L'évolution des variables économiques sous la probabilité *historique* doit refléter leur évolution future réelle.

²⁴ Si une opportunité d'arbitrage survient sur le marché, elle est rapidement détectée et exploitée par les acteurs si bien qu'elle disparaît aussitôt.

²⁵ Kaltwasser et Le Moine [39] présentent dans leurs travaux l'évaluation d'options assurantielles en marché incomplet. Ils considèrent alors que le prix de l'option est la borne supérieure de l'ensemble des prix admissible. Toutefois, ces travaux à l'état de recherche ne sont pas appliqués aujourd'hui en assurance.

²⁶ Valable si l'on suppose que la compagnie ne peut pas faire défaut, ce qui le cas puisque le modèle interne autorise les fonds propres négatifs et interdit les défauts de paiement de l'assureur.

²⁷ Ce processus de risque neutralisation ne serait pas nécessaire si le risque de défaut de la contrepartie était projeté de manière stochastique. Or, ce point de modélisation n'est toujours pas implémenté en pratique du fait de sa complexité.

Numériquement, pour déterminer une distribution empirique, l'assureur va simuler P trajectoires de variables économiques diffusées, sous la probabilité historique, entre $t = 0$ et $t = 1$. Pour chacune de ces trajectoires, l'assureur va évaluer son bilan économique conditionnellement au monde économique simulé entre $t = 0$ et $t = 1$. Cependant, nous avons vu que le *Best Estimate* comporte des options et garanties qui nécessitent un deuxième niveau de simulations pour être évaluées, voir Figure 13.

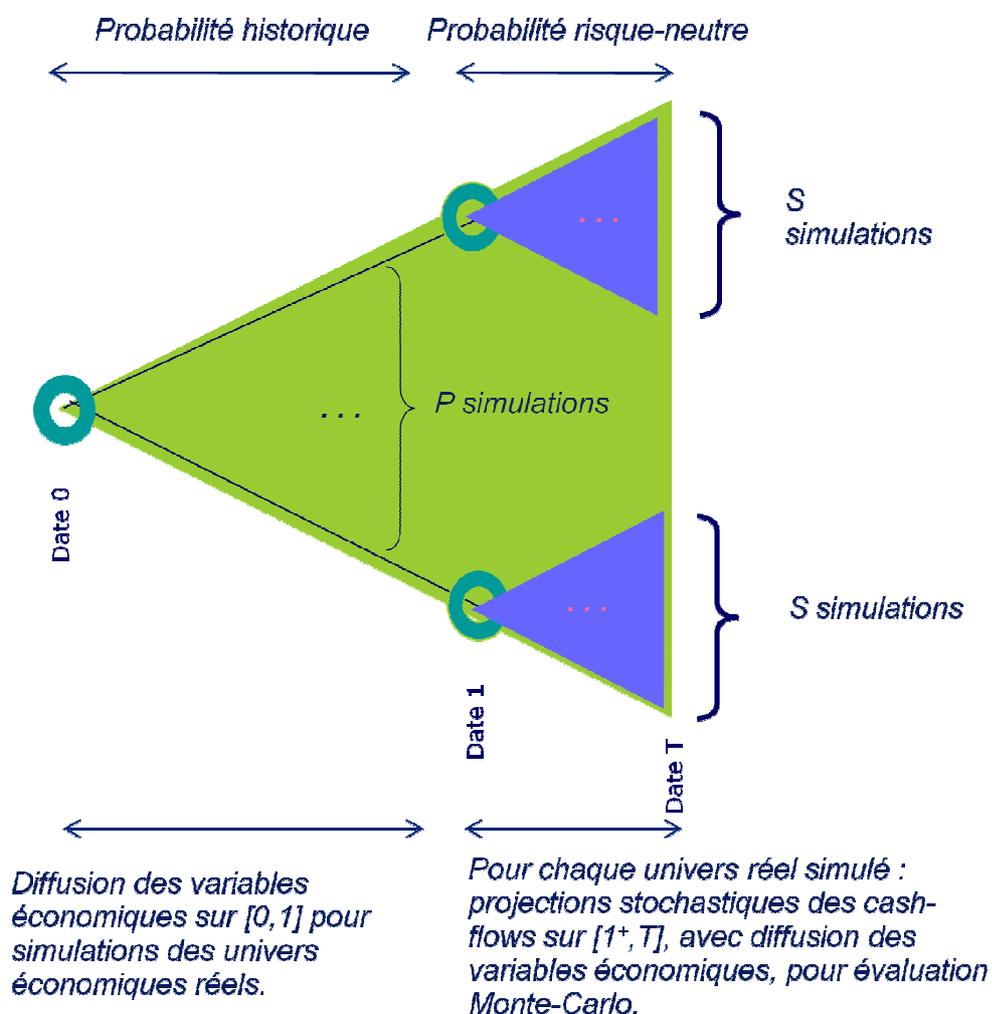


Figure 13 : Simulations dans les Simulations

Cette méthode de calcul est appelée « *Simulations dans les Simulations* » (SdS) ou *nested simulations*. Notons que cette méthode nécessite d'alterner les simulations sous probabilité historique et sous probabilité risque neutre.

Dans la section suivante nous proposons une formalisation de la méthode SdS. Nous verrons aussi comment il est possible d'obtenir le SCR à partir de la distribution des fonds propres économiques à 1 an.

3.3 Formalisation du SdS

La formalisation de la technique des « *Simulations dans les Simulations* » présentée ici est inspirée des travaux de Loisel et Devineau sur le capital économique [8].

3.3.1 Bilan économique

Sous Solvabilité II, le bilan économique se présente comme suit :

Bilan économique en t

A_t	FP_t VEP_t
-------	-------------------

Où nous adoptons les notations :

- A_t : valeur de marché de l'actif en t ,
- VEP_t : valeur économique des passifs (provisions techniques) en t ,
- FP_t : fonds propres économiques en t .

Puisque le bilan est équilibré : $A_t = FP_t + VEP_t$.

3.3.2 Evaluation du bilan économique en $t = 0$

Soient :

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, la filtration qui caractérise l'information financière disponible,
- r_u le taux sans risque instantané,
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$ le facteur d'actualisation,
- P_t les flux de passifs (frais, prestations, commissions, etc) en t ,
- R_t le résultat net de la société en t .

Dans le cadre théorique présenté au §3.1 et d'après les travaux de Loisel et Devineau [8] nous avons :

$$VEP_0 = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 1}^{\infty} \delta_t P_t \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

et,

$$FP_0 = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 1}^{\infty} \delta_t R_t \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Notons X_t^s la valeur prise par le processus aléatoire (X_t) lors de la $s^{\text{ème}}$ simulation. En effectuant S simulations et en projetant les cash-flows sur $[1, T]$, nous évaluons ces deux quantités par des estimateurs Monte-Carlo :

$$\widehat{VEP}_0 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S VPE_0^s = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{t \geq 1}^T (\delta_t^s P_t^s | \mathcal{F}_0)$$

et,

$$\widehat{FP}_0 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S FP_0^s = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{t \geq 1}^T (\delta_t^s R_t^s | \mathcal{F}_0)$$

A_0 se déduit de la valeur de marché des actifs détenus et est donc parfaitement connue²⁸. Le bilan économique est alors estimé par :

$$\begin{array}{c} \text{Bilan économique en } 0 \\ \hline A_0 \quad \left| \quad \frac{\widetilde{FP}_0}{\widetilde{VEP}_0} \right. \end{array}$$

3.3.3 Distribution du bilan économique en $t = 1$

Formellement, nous avons :

$$VEP_1 = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 2}^{\infty} \delta_t P_t \middle| \mathcal{F}_1 \right]$$

et,

$$FP_1 = R_1 + E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 2}^{\infty} \delta_t R_t \middle| \mathcal{F}_1 \right]$$

Pour simuler une réalisation du bilan économique FP_1^p en $t = 1$, nous avons besoin de :

- Simuler un univers économique réel entre $t = 0$ et $t = 1$,
- Evaluer le bilan économique en $t = 1$ sachant la simulation de l'univers économique.

Les simulations de l'univers économique réel se font en diffusant les variables sous la probabilité *historique*. Ce sont les simulations *primaires*. L'évaluation du bilan économique se fait par simulations des projections dans l'univers risque neutre comme décrit précédemment. Ce sont les simulations *secondaires*.

En adoptant les notations :

- $(X_t^p)_{t \geq 0}$ processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ simulé dans l'univers monde réel pour la simulation $p \in \{1, \dots, P\}$, p désigne une simulation *primaire*,
- $(X_t^s)_{t \geq 0}$ processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ simulé dans l'univers risque neutre pour la simulation $s \in \{1, \dots, S\}$, s désigne une simulation *secondaire*,
- $(X_t^{p,s})_{t \geq 1}$ processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 1}$ simulé dans l'univers risque neutre conditionnellement à l'information monde réel simulée en $t = 1$ pour les simulations $p \in \{1, \dots, P\}$ et $s \in \{1, \dots, S\}$.

Nous obtenons P simulations du bilan économique par évaluation Monte-Carlo, pour $p \in \{1, \dots, P\}$:

²⁸ Notons que pour les actifs non cotés les assureurs font des hypothèses sur leur valeur. C'est le cas par exemple de l'immobilier où l'avis d'un expert est demandé. C'est aussi le cas pour certains titres dont la valeur de marché n'est rendue publique qu'à un rythme trimestriel.

$$VEP_1^p = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{t=2}^T \frac{\delta_t^{p,s}}{\delta_1^p} P_t^{p,s}$$

et,

$$FP_1^p = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(R_1^p + \sum_{t=2}^T \frac{\delta_t^{p,s}}{\delta_1^p} R_t^{p,s} \right)$$

3.3.4 Calcul du SCR à partir de la distribution des fonds propres en $t = 1$

3.3.4.1 Théorie

D'après le §1.4.1.4, le montant des fonds propres en $t = 0$ FP_0 doit être suffisant pour avoir une probabilité de ruine à 1 an inférieure à 0,5%. Formellement, cela se traduit par :

$$P^{histo}(FP_1 < 0) \leq 0,5\%$$

Où P^{histo} désigne la probabilité historique.

Théorème :

Le SCR est donné par :

$$SCR = FP_0 - P(0,1).VaR_{99,5\%}(FP_1)$$

Où $P(0,1)$ désigne le prix en $t = 0$ d'un zéro-coupon de maturité 1 an et $VaR_{99,5\%}(FP_1)$ la Value at Risk de FP_1 au seuil de 99,5%.

Démonstration :

Notons A_0^* , A_1^* et FP_1^* les nouvelles variables résultant du changement de FP_0 en $FP_0^* = FP_0 + S$, où $S = P(0,1).VaR_{99,5\%}(FP_1)$.

Montrons alors que $P^{histo}(FP_1^* < 0) = 0,5\%$ sous les deux hypothèses suivantes :

Supposons que le montant $S = -P(0,1).VaR_{99,5\%}(FP_1)$ peut être investi en cash au taux zéro-coupon à 1 an en $t = 0$ sans coûts de friction. Alors $A_0^* = A_0 + S$.

Supposons que l'actif généré par le montant additionnel de fonds propres S n'est pas utilisé en représentation de contrats soumis à l'obligation réglementaire minimale de participation aux bénéfices. Une autre vision consiste à dire que l'actif S appartient au canton de l'assureur et n'est pas soumis à la participation aux bénéfices. Alors $A_1^* = A_1 + \frac{S}{P(0,1)} = A_1 + VaR_{99,5\%}(FP_1)$.

D'où :

$$\begin{aligned} P^{histo}(FP_1^* < 0) &= P^{histo}\left(A_1^* - \frac{VEP_1^*}{VEP_1} < 0\right) \\ P^{histo}(FP_1^* < 0) &= P^{histo}\left(\frac{A_1 - VEP_1}{FP_1} + VaR_{99,5\%}(FP_1) > 0\right) \\ P^{histo}(FP_1^* < 0) &= P^{histo}(FP_1 > VaR_{99,5\%}(FP_1)) = 0,5\% \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

3.3.4.2 Estimation

Notons $\lfloor x \rfloor$, respectivement $\lceil x \rceil$, la partie entière inférieure, respectivement supérieure, de $x \in \mathbb{R}$.

En ordonnant de manière croissante les P simulations $(FP_1^p)_{p \in \{1, \dots, P\}}$, un estimateur de $VaR_{99,5\%}(FP_1)$ est donné par :

$$VaR_{99,5\%}(FP_1) = FP_1^{\lceil 0,05\% * S \rceil}$$

Où $X^{[s]}$ la $s^{ième}$ plus grande valeur simulée de X .

Nous en déduisons finalement un estimateur du SCR :

$$\widetilde{SCR} = \widetilde{FP}_0 - P(0,1).FP_1^{\lceil 0,05\% * S \rceil}$$

D'autres estimations de la VaR sont possibles, paramétriques notamment, la construction d'intervalles de confiance est plus délicate, voir les travaux de Lan et Staum [9]. Dans notre modélisation, la difficulté du calcul du SCR provient de $FP_1^{\lceil 0,05\% * S \rceil}$ qui demande un temps d'exécution important.

3.4 Complexité du calcul

L'inconvénient majeur de la méthode des « *simulations dans les simulations* » (SdS) est sa complexité. En effet, l'estimateur $FP_1^{\lceil 0,05\% * S \rceil}$ introduit au §3.3.4.2 présente une complexité en $P \times S$ qui engendre des temps de calcul trop importants. En général, P est pris égal à 5000, S à 1000 et la durée de projection T de 20 à 50 ans.

Par ailleurs, les portefeuilles des assureurs, actifs et passifs, sont de taille conséquente. En pratique le temps de calcul d'un SdS peut varier de quelques jours à plus d'un mois selon les sociétés. Compte tenu de cette limite, la méthode SdS n'est pas adaptée à la rapidité exigée en terme de reporting financier ou de prise de décision par l'organe directionnel.

Dans la partie §7, ce mémoire se propose d'optimiser le calcul du SCR par modèle interne afin de réduire considérablement le temps d'exécution.

3.5 Modèle interne en assurance vie

La théorie développée jusqu'à présent suppose de disposer d'un modèle interne. En assurance vie, le modèle interne classique se décompose en deux structures :

1. Le Générateur de scénarios économiques (ESG),
2. Le modèle ALM.

3.5.1 Générateur de scénarios économiques

L'ESG est un outil de simulation stochastique permettant de générer des scénarios économiques. Planchet, Thérond et Kamega [10] donnent la définition suivante : « **un scénario économique correspond à une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt** ».

Concrètement, un ESG permet de simuler l'évolution d'un ensemble de variables économiques comme :

- La courbe des taux,
- Le taux d'inflation,
- Le rendement des actions,
- Le taux de chômage,
- L'immobilier,
- Etc.

Les ESG ne sont pas toujours implémentés par les assureurs eux-mêmes. Ces derniers peuvent acheter des tables de scénarios économiques à des fournisseurs spécialisés. Ces tables sont ensuite intégrées dans leur modèle ALM.

3.5.2 Modèle ALM

Le modèle ALM est un outil de **gestion actif-passif**. La gestion actif-passif a été définie en 2002 par Piermay, Mathoulin et Cohen [11] :

« La gestion actif-passif consiste d'une part à analyser la couverture des engagements d'un assureur ou d'un investisseur institutionnel par les actifs dans une perspective de déroulement dans le temps. Elle recouvre d'autre part l'ensemble des moyens d'actions visant à piloter le bilan de l'institution. L'absence de gestion actif-passif aussi bien au sens de l'analyse que de l'action est pour beaucoup dans les difficultés rencontrées par les assureurs et les fonds de pension au cours des quinze dernières années dans différents pays : couverture d'engagements certains par des espoirs de plus-values, prolongation de la tendance passée, absence d'examen de scénarios d'évaluation des actifs et des passifs »

Le modèle ALM modélise l'actif et le passif de l'assureur et surtout leur interaction mutuelle. Il intègre aussi les stratégies dynamiques définies par l'organe décisionnel en termes d'allocation d'actifs, de participation aux bénéficiaires, de réalisation de plus ou moins values, etc.

Ainsi à partir d'une trajectoire simulée par l'ESG le modèle ALM projette sur un horizon donné (20 ans, 30 ans, ...) l'ensemble des flux de l'assureur :

- Produits financiers,
- Charges financières,
- Prestations versées aux assurés : décès, rachats, revalorisation de l'épargne,
- Prélèvements de gestion,
- Frais de gestions,
- Impôts,
- Etc.

Cet ensemble de flux permet de déterminer la projection des résultats futurs de l'assureur. Ainsi, le gestionnaire actif-passif peut mesurer, grâce au modèle ALM, la rentabilité future d'un nouveau produit ou l'impact sur les résultats d'une nouvelle stratégie d'investissement.

En raison des durées importantes des engagements de l'assureur ainsi que de la complexité des contrats d'assurance vie, le modèle ALM est un outil d'aide à la décision puissant et indispensable.

Cet outil permet de quantifier l'exposition de la société aux risques du marché : hausse des taux, baisse des taux, allongement de la durée de vie (portefeulls de rentes), hausse de la mortalité (portefeulle décès)... L'étude de l'exposition aux risques peut permettre de prendre des décisions stratégiques pour la compagnie comme par exemple l'arrêt de la commercialisation d'un contrat générant des pertes ou l'investissement dans des instruments financiers de couverture.

Enfin, les nouvelles normes réglementaires (IFRS, Solvabilité II) et référentiels de calcul (MCEV) ont rendu le modèle ALM indispensable.

4 Générateur de scénarios économiques

Nous avons développé un ESG en C++. Il intègre un modèle d'actif risqué (Black-Scholes), deux modèles de taux (Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross) et deux structures de dépendance (corrélation linéaire, copule de Clayton).

Ainsi notre ESG permet de générer trois types de tables stochastiques utilisées ensuite dans le modèle ALM, voir la Figure 14.

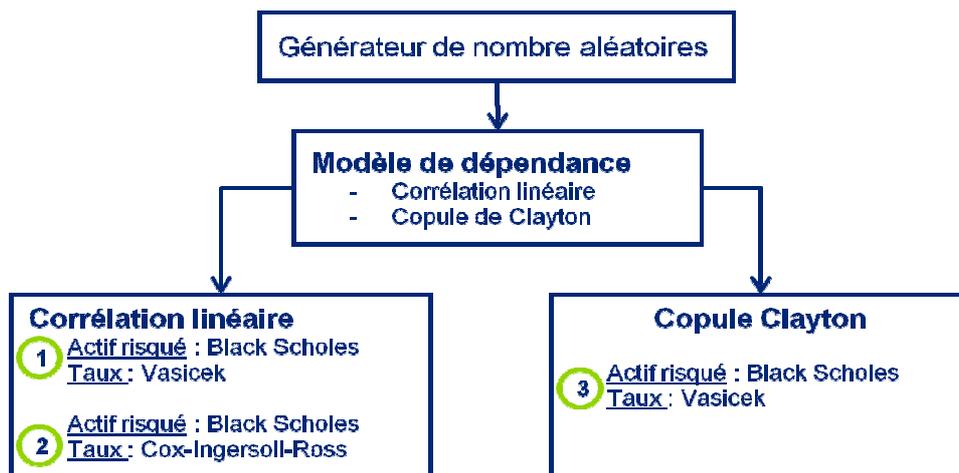


Figure 14 : Trois familles de tables stochastiques

Dans cette section nous exposons la théorie relative à l'ESG ainsi que son fonctionnement. Nous commençons par décrire comment un outil informatique simule des nombres aléatoires. Ces nombres aléatoires, en générant l'aléa, nous serviront de brique de base à la simulation des actifs.

Une fois décrite la simulation algorithmique du mouvement brownien, nous présentons les trois modèles financiers et les deux structures de corrélation.

Enfin nous précisons la calibration qui a été retenue et présentons quelques sorties de l'ESG.

4.1 Simulation de suites de nombres aléatoires

4.1.1 Loi uniforme

Pour générer une suite de nombres aléatoires indépendants et uniformément répartis sur l'intervalle $[0, 1]$, la méthode retenue est la congruence linéaire.

Cette méthode consiste, pour un entier N fixé, à choisir arbitrairement un entier x_0 entre 0 et $N - 1$ puis à définir la suite (x_n) par récurrence en posant $x_{n+1} = a x_n + b \bmod [N]$. Où $\bmod [N]$ désigne l'opérateur modulo N et les nombres a et b sont positifs et x_0 strictement positif.

Si les nombres a , b et N sont judicieusement choisis, on peut alors vérifier que la suite (u_n) avec $u_n = x_n/N$ peut être considérée comme une suite de nombres uniformément répartis et indépendants.

Propriété :

Le coefficient de corrélation entre les variables x_n et x_{n+1} est compris dans l'intervalle :

$$\left[\frac{1}{a} - \left(\frac{6b}{aN} \right) \left(1 - \frac{b}{N} \right) - \frac{a}{N} ; \frac{1}{a} - \left(\frac{6b}{aN} \right) \left(1 - \frac{b}{N} \right) + \frac{a}{N} \right]$$

Démonstration :

Un démonstration de cette propriété peut être trouvée dans les travaux de Greenberger[12].

L'inconvénient de cette méthode est le caractère cyclique des nombres obtenus. En effet, de par sa définition, la suite (x_n) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (au plus N). N doit alors être choisi aussi grand que possible.

Le choix des paramètres a , b et N nous a conduit au générateur *Standard Minimal* développé par Park et Miller [13]. L'algorithme de génération est alors :

- Initialisation de la graine : $x_0 \in \llbracket 0 ; 2^{31} - 2 \rrbracket$
- Boucle : $x_{n+1} = 7^5 x_n \bmod [2^{31} - 1]$

De par la propriété précédente, le coefficient de corrélation entre les variables x_n et x_{n+1} est compris dans l'intervalle $[0,005\% ; 0,007\%]$, soit relativement proche de 0.

Dans leurs travaux Park et Miller [13] montrent que le générateur *Standard Minimal* présente les trois propriétés suivantes :

1. Périodicité complète : la suite (x_n) prend toutes valeurs de l'ensemble $\llbracket 0 ; 2^{31} - 1 \rrbracket$.
2. La séquence d'une période complète (x_1, \dots, x_N) est aléatoire²⁹.
3. Le générateur peut être implémenté facilement avec une arithmétique 32 bits.

Ce générateur présente alors des propriétés statistiques suffisantes pour considérer les nombres générés comme aléatoires. Par ailleurs, il est facilement implémentable sur une arithmétique 32 bits et encore plus facilement implémentable sur une arithmétique 64 bits. En effet, dans le calcul de la suite, les nombres entiers manipulés sont inférieurs à $7^5 * 2^{32}$. Puisque $7^5 * 2^{32} < 2^{46} < 2^{64}$, nous pouvons

²⁹ Le caractère aléatoire est subjectif, il est défini dans les travaux de Park et Miller [13]

facilement stocker tous les nombres manipulés sur 64 bits sans avoir à implémenter un calcul de modulo spécifique.

Les éléments de la suite sont stockés dans des variables type *long long* en C++, codées sur 64 bits, et sont calculés par un processeur 32 bits.

Nous obtenons enfin une suite (u_n) à valeur dans $[0,1]$ que nous pouvons considérer comme uniforme et dont la période de cyclicité est de 2^{32} soit plus de 9 milliards. Ce générateur de nombres pseudo aléatoires est suffisant pour l'utilisation que nous en ferons.

4.1.2 Loi normale

Nous simulons la loi normale à l'aide de l'algorithme de Box-Muller.

Théorème :

Si U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi continue uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, alors les variables aléatoires :

$$\begin{aligned}X_1 &= \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\X_2 &= \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)\end{aligned}$$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration :

Soit $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$ la densité de la distribution jointe de U_1 et U_2 . Notons $x_1 = g_1(u_1, u_2)$ et $x_2 = g_2(u_1, u_2)$. Alors la densité jointe de X_1 et X_2 est donnée par :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{U_1, U_2}(g_1^{-1}(x_1, x_2), g_2^{-1}(x_1, x_2)) * \det(J)$$

Où J est la matrice Jacobienne de la transformation :

$$T: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in [0,1]^2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Avec $u_1 = g_1^{-1}(x_1, x_2)$ et $u_2 = g_2^{-1}(x_1, x_2)$.

En résolvant en u_1 et u_2 le système présenté dans le théorème, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}u_1 &= g_1^{-1}(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right) \\u_2 &= g_2^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\end{aligned}$$

Alors, nous en déduisons la matrice Jacobienne de T :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right) & -x_2 \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right) \\ \frac{-x_2}{x_1} & \frac{-1}{x_1} \\ \frac{1}{2\pi\left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}\right)} & \frac{1}{2\pi\left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}\right)} \end{pmatrix}$$

Puis, nous en déduisons le déterminant :

$$\det(J) = -\frac{\left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right)}{2\pi\left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right)}{2\pi}$$

U_1 et U_2 suivent des lois uniformes indépendantes donc leur distribution jointe est donnée par :

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = 1 * 1_{[0,1]}(u_1) * 1_{[0,1]}(u_2)$$

Où nous avons noté $1_{[0,1]}(\cdot)$ l'indicatrice de $[0,1]$.

Finalement, la distribution jointe $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ de X_1 et X_2 est donnée par :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\right)}{2\pi} 1_{\mathbb{R}}(x_1) * 1_{\mathbb{R}}(x_2)$$

f_{X_1, X_2} correspond à la densité d'une loi normale bivariée $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui achève la preuve du théorème.

Afin de tester cet algorithme, nous avons simulé 5000 réalisations selon la méthode Box-Muller en utilisant la méthode développée au §4.1.1 pour simuler des lois uniformes. L'échantillon obtenu a été soumis à des tests statistiques réalisés sous R.

Ainsi les tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov et de Shapiro-Wilk conduisent aux résultats suivants :

Kolmogorov-Smirnov	Shapiro-Wilk
D = 0.0127, p-value = 0.3954	W = 0.9997, p-value = 0.8229

Ces résultats nous conduisent à accepter l'hypothèse de normalité de l'échantillon. Des confirmations graphiques de la normalité de l'échantillon sont proposées en Figure 15.

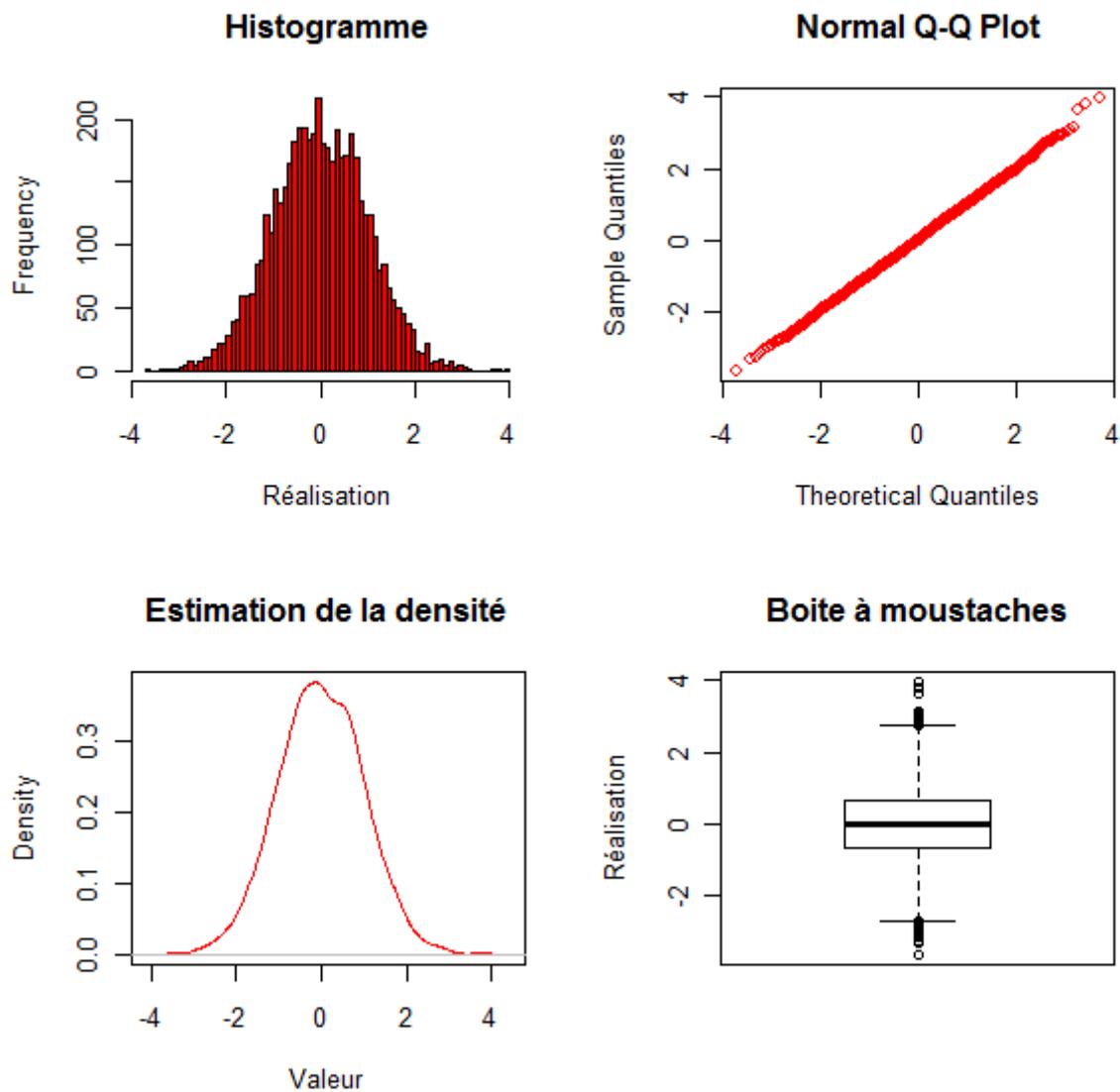


Figure 15 : Analyse de l'échantillon sous R

La simulation de la loi normale nous permettra de simuler les mouvements browniens utilisés dans les modèles financiers.

4.2 Modèle d'actif risqué

Pour le modèle d'actif risqué, nous avons choisi le modèle de Black et Scholes [14] introduit en 1973.

4.2.1 Dynamique sous probabilité historique

Sous la probabilité historique, la dynamique du cours de l'actif risqué en t , noté S_t suit l'équation différentielle stochastique (EDS) (E_1) :

$$(E_1) \quad dS_t = S_t(\mu_{equity}dt + \sigma_{equity}dW_t)$$

Où nous avons noté :

- μ_{equity} la tendance de l'actif risqué,
- σ_{equity} la volatilité de l'actif risqué,
- W un mouvement brownien standard uniforme sous la probabilité historique.

Théorème :

L'unique (au sens de l'égalité presque sûre) solution de l'EDS (E_1) est :

$$S_t = S_0 e^{\left((\mu_{equity} - \frac{1}{2}\sigma_{equity}^2)t + \sigma_{equity}W_t \right)}$$

Démonstration :

Montrons que la forme proposée satisfait l'équation différentielle stochastique (E_1)³⁰. Notons $S_t = S_0 e^{\left((\mu_{equity} - \frac{1}{2}\sigma_{equity}^2)t + \sigma_{equity}W_t \right)} = f(t, W_t)$

Le lemme d'Ito appliqué à f_t donne :

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \underbrace{d\langle W \rangle_t}_{=dt}$$

$$df_t = \left(\mu_{equity} - \frac{1}{2}\sigma_{equity}^2 \right) f_t dt + \sigma_{equity} f_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma_{equity}^2 f_t dt$$

$$df_t = f_t (\mu_{equity} dt + \sigma_{equity} dW_t)$$

Ce qui montre que $S_0 e^{\left((\mu_{equity} - \frac{1}{2}\sigma_{equity}^2)t + \sigma_{equity}W_t \right)}$ est solution de (E_1).

4.2.2 Dynamique sous probabilité risque neutre

Sous la probabilité risque neutre les actifs actualisés sont des martingales, nous appliquons alors le théorème de Girsanov avec le changement de probabilité :

$$\frac{dP^Q}{dP^{histo}} = \exp \left(\int_0^t \frac{r_u - \mu_{equity}}{\sigma_{equity}} du - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{r_u - \mu_{equity}}{\sigma_{equity}} \right)^2 dW_t \right)$$

Nous pouvons montrer que sous la probabilité historique, la dynamique du cours de l'actif risqué suit l'équation différentielle stochastique (E_2) :

$$(E_2) \quad dS_t = S_t (r_t dt + \sigma_{equity} dW_t^*)$$

³⁰ La démonstration de l'unicité consiste à supposer l'existence de deux solutions distinctes presque sûrement U_t et V_t de l'EDS. Puis par Ito nous montrons que $d(U_t V_t^{-1}) = 0$. $U_t V_t^{-1}$ est donc constante et égale à sa valeur initiale, soit 1. Donc $U_t = V_t$ (ps) ce qui contredit l'hypothèse de deux solutions distinctes. Donc la solution proposée est l'unique solution de l'EDS (à l'égalité presque sûre près).

Où nous avons noté :

- r_t le taux court sans risque,
- W_t^* un mouvement brownien standard uniforme sous la probabilité historique.

4.2.3 Simulation

La simulation de l'actif risqué s'obtient en discrétisant le processus continu par un schéma d'Euler. Pour un pas de temps égal à δ , l'algorithme de simulation dans l'univers historique est donc :

$$\widetilde{S}_{t=0} = S_0$$

$$\widetilde{S}_{t+\delta} = \widetilde{S}_t + \widetilde{S}_t(\mu\delta + \sigma_{equity}\sqrt{\delta}\epsilon_{equity}) \quad \text{pour } t + \delta \leq 1$$

Où $\epsilon_{equity} \sim \mathcal{N}(0,1)$ est simulé à l'aide de l'algorithme présenté au §4.1.2.

Pour simuler les prix de l'actif risqué dans l'univers risque neutre, nous utilisons l'algorithme de simulation :

$$\widetilde{S}_{t=1} = \widetilde{S}_1 \text{ simulé en univers historique}$$

$$\widetilde{S}_{t+\delta} = \widetilde{S}_t + \widetilde{S}_t(\widetilde{r}_t\delta + \sigma_{equity}\sqrt{\delta}\epsilon_{equity}) \quad \text{pour } t + \delta > 1$$

Où \widetilde{r}_t est le taux court simulé en t .

4.3 Modèles de taux

Les deux modèles de taux implémentés dans notre ESG sont des modèles mono factoriels. Cette classe de modèles considère que la courbe des taux est une fonction d'une seule variable d'état markovienne : le taux court. L'idée sous-jacente de ces modèles est, qu'en première approximation, les prix des obligations de maturités différentes tendent à évoluer de façon corrélée selon la variation du taux court. Dès lors, nous pouvons assimiler le taux court au rendement d'une obligation de maturité courte.

Par la suite, nous présentons, de manière générale, comment obtenir la courbe des taux spots dans les modèles mono factoriels. Ensuite, nous appliquons ces résultats aux modèles de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross.

4.3.1 Généralité sur les modèles monofactoriels

4.3.1.1 Prix des zéro coupons

Dans un modèle mono factoriel, le taux court est l'unique source d'incertitude et suit, sous la probabilité historique, un processus d'Itô du type :

$$dr_t = \mu_{\text{taux}}(t, r_t)dt + \sigma_{\text{taux}}(t, r_t)dW_t$$

Où $\mu_{\text{taux}}(t, r_t)$ est l'espérance du taux court et $\sigma_{\text{taux}}(t, r_t)$ son écart type.

Notons $P(t, T)$ le prix d'un zéro-coupon d'échéance T à l'instant t . Ce prix dépend de la valeur prise par le taux court en $t : r_t$.

Le prix d'un zéro coupon est donnée par³¹ :

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

4.3.1.2 Courbe des taux spots

On appelle taux sans risque de maturité T à la date t le taux de rendement continûment composé $R(t, T)$. Ce taux correspond en date t à une opération sans risque rapportant 1 euro en T . Or, par définition du zéro coupon, cela revient à acheter une unité de $P(t, T)$ en t donc $R(t, T)$ doit satisfaire la relation :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T) \cdot (T-t)}$$

On appelle courbe des taux spots à l'instant t la fonction :

$$\tau \in [t, T] \mapsto R(t, \tau)$$

Ainsi, pour obtenir une courbe des taux spots, nous devons calculer les prix des zéro coupons desquels nous déduirons la courbe.

4.3.2 Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek [15] a été introduit en 1977 et constitue l'une des premières modélisations stochastiques des taux.

4.3.2.1 Distribution du taux court

La dynamique du taux court est modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous la probabilité historique :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_{\text{taux}}dW_t$$

Le paramètre $b \geq 0$ s'interprète comme une tendance ou un retour à la moyenne et le paramètre $a > 0$ comme une force de rappel ou une vitesse de retour à la moyenne. En effet, plus a est grand, plus r_t aura tendance à se rapprocher de b . Enfin, $\sigma_{\text{taux}} > 0$ correspond à la volatilité du taux court.

³¹ Une démonstration formelle de ce résultat pour les modèles d'équilibre est proposée dans *Produit de taux d'intérêt* [39]

Il est équivalent d'écrire la dynamique du processus sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , qui va nous permettre d'évaluer les zéro coupons. Alors, en notant λ_{taux} la prime du risque du marché nous obtenons :

$$dr_t = a(b^{\mathbb{Q}} - r_t)dt + \sigma_{\text{taux}}dW_t^*$$

Où W_t^* est un mouvement brownien sous \mathbb{Q} et $b^{\mathbb{Q}} = b - \frac{\lambda_{\text{taux}}\sigma_{\text{taux}}}{a}$.

Enfin, montrons que cette dynamique mène à un taux court gaussien. Nous nous servirons de ce résultat dans la construction de dépendances entre taux et actifs risqués.

Posons $Y_t = r_t e^{at}$, d'après le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{at} dr_t + a e^{at} r_t dt \\ dY_t &= a b^{\mathbb{Q}} e^{at} dt + \sigma_{\text{taux}} e^{at} dW_t \end{aligned}$$

En intégrant entre s et t , nous obtenons pour tout $s \leq t$:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_s &= b^{\mathbb{Q}} \int_s^t a e^{au} du + \sigma_{\text{taux}} \int_s^t e^{au} dW_u \\ r_t e^{at} - r_s e^{as} &= b^{\mathbb{Q}} (e^{at} - e^{as}) + \sigma_{\text{taux}} \int_s^t e^{au} dW_u \\ r_t &= r_s e^{-a(t-s)} + b^{\mathbb{Q}} (1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma_{\text{taux}} \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \end{aligned}$$

Nous en déduisons que le taux court r_t est gaussien conditionnellement à \mathcal{F}_s de moyenne $m_{t,s}$ et de variance $v_{t,s}$ donnés par :

$$\begin{aligned} m_{t,s} &= E^{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) \\ v_{t,s} &= \text{Var}^{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) \end{aligned}$$

4.3.2.2 Prix des zéro coupons

A partir de l'expression du taux court, nous pouvons en déduire le prix du zéro coupon par la relation $P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$. Ainsi, en notant $\tau = T - t$, le calcul de l'espérance donne la structure affine suivante pour le prix du zéro coupon :

$$P(t, T) = \exp \left(\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} (R_{\infty} - r_t) - \tau R_{\infty} - \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right) \quad \text{pour } t \leq T$$

Où nous avons noté $R_{\infty} = b - \frac{\lambda_{\text{taux}}\sigma_{\text{taux}}}{a} - \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{2a^2}$.

Une démonstration de cette formule est donnée en [16].

A partir du prix des zéro coupons nous pouvons construire une courbe des taux spots. Pour cela, la relation entre le taux spot continûment composé $R(t, T)$ et le zéro coupon $P(t, T)$ est la suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

$$R(t, T) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} (r_t - R_\infty) + R_\infty + \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2$$

La structure par termes de $R(t, T)$ proposée par Vasicek permet d'obtenir trois formes de courbes des taux qui sont réellement observées sur les marchés :

1. Structure ascendante si $r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{4a^2} = R_{\text{ascendante}}$
2. Structure inversée si $r_t \geq R_\infty + \frac{\sigma_{\text{taux}}^2}{4a^2} = R_{\text{inversée}}$
3. Structure bosselée si $R_{\text{ascendante}} < r_t < R_{\text{inversée}}$

Notons aussi la valeur remarquable lorsque T tend vers l'infini : $R(t, \infty) = R_\infty$.

Puisque les taux sont gaussiens, ce modèle présente l'inconvénient d'autoriser des valeurs du taux spots négatifs avec une probabilité non nulle. Ces taux négatifs n'ont pas de réalité économique. Nous verrons dans la suite que les taux simulés ont dû être retraités pour censurer les taux négatifs générés par le modèle. L'autre inconvénient du modèle est de conserver des paramètres de diffusion constants au cours du temps. Cox, Ingersoll et Ross ont répondu à ces deux insuffisances en proposant une autre dynamique.

4.3.2.3 Simulation

La simulation du taux court s'obtient en discrétisant l'EDS par un schéma d'Euler. Kloeden et Platen [17] montrent que ce schéma de discrétisation présente un ordre de convergence supérieur à 0,5 dans la modèle de Vasicek.

Il est important de comprendre que c'est le taux court qui est simulé en univers risque neutre ou en univers historique. L'évaluation des actifs se fait, quant à elle, en univers risque neutre, artifice de calcul déjà mentionné. Ainsi, nous simulons les prix des zéro coupons en univers historique de la manière suivante :

- Simulation du taux court \tilde{r}_t par l'équation de diffusion discrétisée en univers historique,
- Calcul du prix du zéro coupon par changement de probabilité. L'équation de diffusion est réécrite dans l'univers risque neutre mais en prenant comme condition initiale le taux court simulé sous probabilité historique \tilde{r}_t . Pratiquement, cela se traduit par l'utilisation de la formule des zéro coupons présentée au §4.3.2.2 avec la valeur \tilde{r}_t simulée en univers historique.

La simulation des prix de zéro coupons dans l'univers risque neutre est effectuée de la même manière mais en diffusant le taux court sous la probabilité risque neutre.

Ainsi, pour un pas de temps égal à δ , l'algorithme de simulation du taux court dans l'univers historique est le suivant :

$$\widetilde{r}_{t=0} = r_0$$

$$\widetilde{r}_{t+\delta} = \widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta} \epsilon_{taux} \quad \text{pour } t + \delta \leq 1$$

Où $\epsilon_{taux} \sim \mathcal{N}(0,1)$ est simulé à l'aide de l'algorithme présenté au §4.1.2.

En univers risque neutre, l'algorithme de simulation est donné par :

$$\widetilde{r}_{t=1} = \widetilde{r}_1$$

$$\widetilde{r}_{t+\delta} = \widetilde{r}_t + a(b^{\mathbb{Q}} - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta} \epsilon_{taux} \quad \text{pour } t + \delta > 1$$

4.3.3 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

4.3.3.1 Courbe des taux spots

Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [18], publié en 1985, est un processus de Bessel. Les auteurs ont introduit une racine carrée interdisant au taux court de prendre des valeurs négatives. Dans ce modèle le taux court r_t admet pour dynamique l'équation différentielle stochastique écrite sous la probabilité historique :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_{taux} \sqrt{r_t} dW_t$$

Avec les conditions $\sigma_{taux}^2 > 2ab$, $a > 0$ et $b > 0$.

Sous cette dynamique, les prix des zéro coupons sont donnés par la structure affine suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp[-B(t, T)r_t] \quad \text{pour } t \leq T$$

Où nous avons noté :

$$\tau = T - t$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda_{taux})^2 + 2\sigma_{taux}^2}$$

$$A(t, T) = \left\{ \frac{2\gamma \exp\left[\left(\lambda_{taux} + \gamma + a\right)\frac{\tau}{2}\right]}{(\lambda_{taux} + \gamma + a)[\exp(\gamma\tau) - 1] + 2\gamma} \right\}^{\frac{2ab}{\sigma_{taux}^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2 \exp[\gamma\tau - 1]}{(\lambda_{taux} + \gamma + a)[\exp(\gamma\tau) - 1] + 2\gamma}$$

Comme précédemment, la relation $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$ permet d'aboutir à une structure par termes de la courbe des taux. Comme pour le modèle de Vasicek, trois formes sont possibles pour la courbe des taux : ascendante, inversée et bosselée.

Enfin, la dynamique du taux en univers risque court s'écrit en utilisant un changement de probabilité :

$$dr_t = a^{\mathbb{Q}}(b^{\mathbb{Q}} - r_t)dt + \sigma_{taux} \sqrt{r_t} dW_t$$

Où nous avons noté $a^{\mathbb{Q}} = a(1 + \lambda_{taux})$ et $b^{\mathbb{Q}} = \frac{1}{(1+\lambda_{taux})}$.

4.3.3.2 Simulation

La simulation du taux court s'obtient en discrétisant l'EDS par un schéma de Diop. Diop [19] montre que ce schéma de discrétisation présente un ordre de convergence supérieur à 0,5 pour le processus CIR.

Le principe de simulation est le même que celui pour le modèle de Vasicek. Ainsi, pour un pas de temps égal à δ , l'algorithme de simulation du taux court en univers historique est donné par :

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_{t=0} &= r_0 \\ \widetilde{r}_{t+\delta} &= \left| \widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta * \widetilde{r}_t} \epsilon_{taux} \right| \quad \text{pour } t + \delta \leq 1 \end{aligned}$$

Où $\epsilon_{taux} \sim \mathcal{N}(0,1)$ est simulé à l'aide de l'algorithme présenté au §4.1.2.

Dans l'univers risque neutre, l'algorithme de simulation est donné par :

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_{t=1} &= \widetilde{r}_1 \\ \widetilde{r}_{t+\delta} &= \left| \widetilde{r}_t + a^{\mathbb{Q}}(b^{\mathbb{Q}} - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta * \widetilde{r}_t} \epsilon_{taux} \right| \quad \text{pour } t + \delta > 1 \end{aligned}$$

4.4 Caps

A partir des modèles de taux développés, l'ESG fournit les prix en $t = 0$ d'un produit dérivé de taux : le cap.

4.4.1 Définition

Un cap est un produit dérivé de taux dont la définition et l'utilisation faite en assurance sont données par AXA dans le rapport annuel 2009 [20] :

« Les caps et les floors sont des contrats par lesquels le vendeur s'engage à payer à sa contrepartie la différence (sur une base nominale) entre le taux d'intérêt lié à un indice spécifié et le taux d'intérêt du cap ou floor. Ces produits sont destinés à fournir une couverture en cas de hausse des taux (caps) ou de baisse des taux (floors). Ces caps et ces floors sont principalement utilisés dans le cadre des activités vie, épargne, retraite [...] afin de garantir la participation aux bénéficiaires et de couvrir les variations des taux d'intérêt sur des produits à taux garantis. »

Notons K le strike (« indice spécifié ») du cap, $r(t)$ le sous jacent (« taux d'intérêt lié à un indice spécifié »), N le nominal et $\{t_1; \dots; t_k\}$ l'échéancier (t_k est appelé maturité du cap). Alors le payoff du cap en $t_j \in \{t_1; \dots; t_k\}$ est donné par :

$$payoff(t) = N * (t_j - t_{j-1}) * (r(t) - K)^+$$

L'ESG évalue le prix d'un cap de nominal 1, dans la suite nous posons $N = 1$. Le prix d'un cap de nominal $N \neq 1$ est obtenu en multipliant le prix du cap de nominal 1 par N .

4.4.2 Estimation du prix

Le prix d'un cap peut se calculer de deux manières :

1. Méthode Monte Carlo,
2. Formule analytique pour certains modèles.

La première méthode est applicable à tous les modèles de taux. La seconde méthode utilisant la formule de Black est présentée en annexe et n'est utilisable que lorsque la volatilité du contrat forward sur zéro coupon est déterministe. Dans le modèle de Vasicek cette volatilité est déterministe et une formule fermée peut être trouvée (voir annexe §8.3). Dans un modèle de taux CIR, la volatilité des zéro coupons est stochastique et ne permet pas d'établir de formule analytique.

Dans notre ESG, le strike, la maturité du cap et le taux de référence $r(t)$ sont choisis par l'utilisateur. Le taux de référence $r(t)$ est le taux spot $R(t, T_{ref})$ où la maturité du taux spot T_{ref} est définie par l'utilisateur.

L'évaluation des prix des caps se fait à partir de simulations de taux en univers risque neutre. Formellement, le prix du cap en $t = 0$ est donné par :

$$Cap_{t=0} = E^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^k \underbrace{\exp\left(-\int_0^{t_k} r_u du\right)}_{R(0, t_k)} payoff(t_k) \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

Numériquement, nous estimons ce prix par P simulations de courbe des taux en environnement risque neutre :

$$\widetilde{Cap}_{t=0} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P \left\{ \sum_{i=1}^k R(\widetilde{0}, t_k) * (r(\widetilde{t}) - K)^+ \right\}$$

A titre de complément, nous proposons une méthode de pricing de cap par formule fermée en annexe §8.3.

4.5 Modèles de dépendance

Les modèles de dépendance permettent de rendre compte des interactions entre les variables économiques simulées par l'ESG. Un exemple récent de dépendance extrême est donné par la crise des subprimes survenue en 2007. La crise a montré la forte dépendance entre, d'une part, la capacité des ménages américains endettés à rembourser leur emprunt et, d'autre part, la mise en vente massive de biens immobiliers. La loi de l'offre et de la demande a engendré une baisse significative de l'immobilier aux Etats-Unis entre 2007 et 2008. De cette crise a découlé la crise financière de 2008 dont les conséquences ont été des défauts sur des signatures réputées (Lehman Brothers), la chute des places boursières engendrant, quelque temps après, une hausse du chômage et une baisse de la croissance.

La crise financière de 2008 illustre bien la non indépendance entre différents marchés (taux, actions, immobilier, etc.) et avec les variables macroéconomiques (inflation, chômage, croissance, etc.). Dès lors, une modélisation cohérente des variables économiques passe nécessairement par l'introduction

d'une structure de dépendance. La dépendance permet de rendre compte de manière réaliste la complexité du monde économique.

La littérature vaste sur le sujet a développé trois approches modélisant la dépendance entre deux variables économiques :

1. La corrélation linéaire,
2. Les copules,
3. Les modèles causals.

Dans l'ESG développé, nous avons choisi d'implémenter la corrélation linéaire et un exemple de copule pour lier les évolutions des marchés de taux et actions.

4.5.1 Corrélation linéaire

La dépendance de deux variables gaussiennes X et Y est parfaitement définie par le coefficient de corrélation linéaire calculé par :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Dans cette section nous présentons comment simuler N variables corrélées, puis nous appliquerons la méthode au cas qui nous intéresse c'est-à-dire $N = 2$. La simulation de la corrélation nécessite d'abord d'introduire la décomposition de Cholesky.

4.5.1.1 Décomposition de Cholesky

Cette décomposition permet de calculer la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.

Théorème

Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que $A = LL^T$, où L^T désigne la matrice transposée de L .

De plus, il existe une unique matrice L à coefficients diagonaux positifs telle que $A = LL^T$.

Un algorithme de calcul pratique permettant de construire la matrice L est proposé en annexe §8.4.

4.5.1.2 Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel à composantes corrélées

Soit $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)$ un vecteur de mouvements browniens de dimension n dont les composantes sont indépendantes que nous souhaitons simuler.

Les composantes de ce vecteur sont simulées en utilisant la discrétisation suivante $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\widetilde{W}_{t=0}^i = 0$$

$$\widetilde{W}_{t+\delta}^i = \widetilde{W}_t^i + \sqrt{\delta} \epsilon_i$$

Où $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ est simulé à l'aide de l'algorithme présenté précédemment et δ désigne le pas de temps utilisé.

Soit $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$, le vecteur de mouvements browniens que l'on souhaite simuler et dont la matrice de corrélation est notée M . Soit $LL^T = M$, la décomposition de Cholesky de M .

Formellement, en posant $B_t = L^T W_t$ nous avons :

$$\text{cov}(B_t, B_t) = \text{cov}(L^T W_t, L^T W_t) = L^T \text{cov}(W_t) L = L^T I_n L = M$$

Nous retrouvons bien la matrice de corrélation voulue.

La simulation de B_t revient donc à simuler \widetilde{W}_t et à effectuer le calcul $\widetilde{B}_t = L^T \widetilde{W}_t$.

Cet algorithme permet aussi de simuler des vecteurs gaussiens.

4.5.1.3 Application à l'ESG développé

Dans l'ESG nous souhaitons modéliser la corrélation entre l'actif risqué et la courbe de taux. Soit ρ la corrélation linéaire entre le taux court et l'actif risqué. Cette corrélation traduit la corrélation des mouvements browniens dans les deux modèles. C'est-à-dire que :

$$\text{Correlation}(W_t^{\text{equity}}; W_t^{\text{taux}}) = \rho$$

Introduire un modèle de corrélation linéaire revient à simuler des valeurs de mouvements browniens discrétisés corrélés. Par conséquent, il suffit d'introduire des contraintes sur la simulation de ϵ_{equity} et de ϵ_{taux} .

La matrice de corrélation de notre ESG s'écrit alors $M = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ et admet pour décomposition de Cholevsky :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

Le lecteur pourra vérifier que l'égalité $M = LL^T$ est bien satisfaite.

D'après la théorie développée précédemment, il suffit de simuler un vecteur de mouvements browniens indépendants $W = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ et de calculer les valeurs de ϵ_{equity} et ϵ_{taux} par :

$$\begin{cases} \epsilon_{\text{equity}} = \epsilon_1 \\ \epsilon_{\text{taux}} = \rho\epsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\epsilon_2 \end{cases}$$

4.5.2 Copules

Le coefficient de corrélation est la mesure canonique de la dépendance. Grâce à sa simplicité, son utilisation est très largement répandue en modélisation financière. Par conséquent, d'autres mesures

comme le tau de Kendall ou le rho de Spearman sont moins étudiées par les modélisateurs alors qu'elles sont souvent plus adaptées.

Dans la section §1.4.1.4.1.3, nous avons déjà critiqué la corrélation linéaire comme mesure de dépendance pour le calcul du SCR. Rajoutons trois autres critiques plus théoriques sur l'utilisation du coefficient de corrélation :

1. Le coefficient de corrélation linéaire n'est pas invariant par transformations croissantes non linéaires. Par exemple la corrélation entre X et Y peut être différente³² de celle entre $\ln(X)$ et $\ln(Y)$. Or, l'information transportée par les variables X et $\ln(X)$ est la même. C'est-à-dire que les coefficients de corrélation peuvent être différents alors que le contenu informationnel est le même.
2. Le coefficient de corrélation modélise mal les dépendances de queues. Or, Solvabilité II exige d'estimer le quantile à 0,05% donc la dépendance doit être modélisée au mieux dans les queues de distributions.
3. Un coefficient de corrélation nul entre deux variables aléatoires n'entraîne pas leur indépendance. Prenons par exemple $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors la corrélation entre X et $Y = X^2$ est nulle sans que ces deux variables soient indépendantes.

En effet, nous pouvons calculer :

$$cov(X, X^2) = E \left[\left(X - \underbrace{E[X]}_{=0} \right) \left(X^2 - \underbrace{E[X^2]}_{=1} \right) \right]$$

$$cov(X, X^2) = E[X^3] - E[X] = E[X^3] = 0$$

$$E[X^2] = 1 \text{ car } Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = 1$$

$$E[X^3] = 0 \text{ car le coefficient d'asymétrie d'une loi normale est nul.}$$

L'introduction de copules dans les ESG a été très largement étudiée par Armel [21]. Dans le cadre de ses travaux il montre que la copule la plus adaptée pour modéliser la dépendance entre les variables économiques est celle de Cook-Johnson aussi appelée copule de Clayton.

Dans cette section, nous présentons d'abord une définition des copules puis nous présentons la méthode de simulation implémentée dans l'ESG.

4.5.2.1 Présentation des copules

Copule

Une fonction $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ est une copule si :

1. Il existe des variables aléatoires U_1, \dots, U_n à valeur dans $[0,1]$ telle que C soit leur fonction de répartition
2. C a des marginales uniformes : pour tout $i \in [1, n]$: $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$

Une autre définition possible pour les copules est :

On appelle copule toute fonction de distribution d'un vecteur aléatoire qui a des lois marginales uniformes : $C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 < u_1, \dots, U_n < u_n)$

³² Voir ARMEL [21]

Le théorème introduit ci-dessous est fondamental dans l'utilisation des copules.

Théorème (de Sklar)

Si C est une copule et si X_1, \dots, X_n ont pour distributions marginales F_1, \dots, F_n alors la distribution du vecteur (X_1, \dots, X_n) est donnée par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Parmi les familles de copules couramment utilisées citons les exemples des copules indépendantes, gaussiennes et archimédiennes.

Copules indépendantes

Les copules indépendantes sont définies par

$$C_{ind}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i$$

Copules gaussiennes

Les copules gaussiennes sont définies par

$$C_R(u_1, \dots, u_n) = N_n(N^{-1}(u_1), \dots, N^{-1}(u_n))$$

Avec N_n fonction de répartition d'un vecteur gaussien de matrice de corrélation R donnée et N fonction de répartition d'une loi normale.

Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes sont définies par

$$C_\phi(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \phi(u_i)\right)$$

Avec ϕ bijective de $[0,1]$ dans \mathbb{R}_+ .

La copule de Clayton correspond à $\phi(x) = \frac{x^{-\alpha}-1}{\alpha}$ avec $\alpha > 0$, donc nous avons :

$$\phi^{-1}(x) = [\alpha x + 1]^{-1/\alpha}$$

A titre d'illustration, nous avons représenté dans le carré unitaire $[0,1]$ les couples de 6000 réalisations (X_i, Y_i) de deux variables uniformes X et Y liées par différentes structures de dépendance.

Nous voyons dans le cas d'indépendance que l'ensemble de l'espace est rempli uniformément.

Dans le cas de la corrélation linéaire, une forte tendance se dégage en délaissant les coins nord ouest et sud ouest du carré sans pour autant favoriser l'un des deux autres coins. Le carré est coupé en deux espaces symétriques.

Enfin, la copule de Clayton introduit une dissymétrie dans la dépendance de queue des variables à la différence de la corrélation linéaire, favorisant très nettement le coin sud ouest. Le coin sud ouest représente des situations extrêmes, situées dans les queues de distribution à gauche des deux variables X et Y .

Le choix de Copule de Clayton a été fait d'après les travaux effectués par Armel [21] et d'après nous appréciation. En effet, si nous considérons les risques taux et actions alors le coin sud ouest

représente une chute de ces deux marchés. La copule de Clayton introduit donc une forte dépendance en cas de marchés à la baisse et une dépendance plus faible (nord est) en cas de marchés à la hausse.

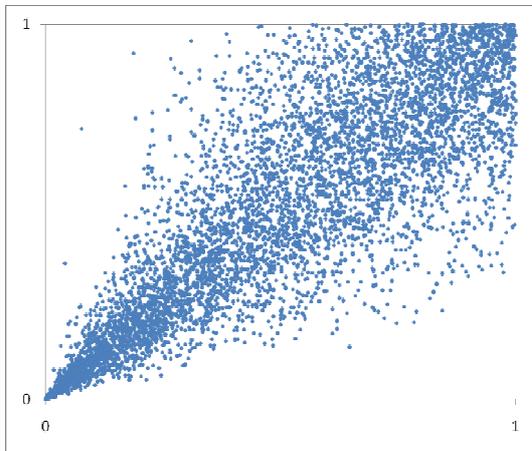


Figure 16 : Clayton alpha = 4

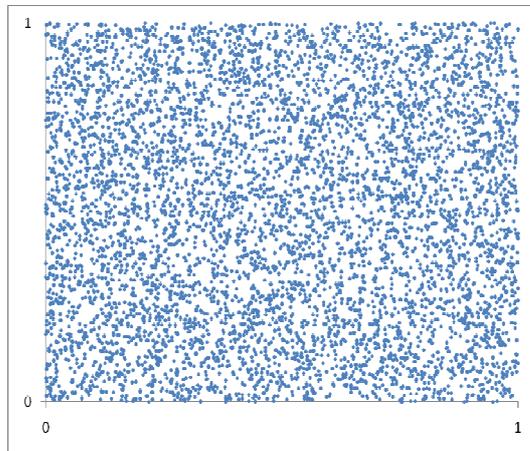


Figure 17 : X et Y indépendantes

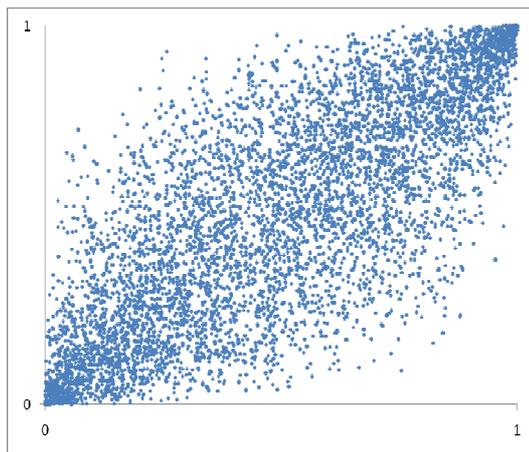


Figure 18 : Corrélation linéaire = 80%

4.5.2.2 Généralités sur la simulation de la copule de Clayton

L'objectif de cette section est de présenter la méthode pour simuler un vecteur (X_1, X_2) où $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ et la structure de dépendance entre X_1 et X_2 est une copule de Clayton. C'est-à-dire, en notant F_1 et F_2 les densités marginales respectives de X_1 et X_2 , F la densité jointe et C la copule de Clayton nous avons d'après le théorème de Sklar :

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

L'approche développée ici est issue de la méthode dite des distributions conditionnelles. La théorie sous-jacente est présentée en [22] et une approche plus pragmatique, généralisée à la dimension $n \in \mathbb{N}^*$, est présentée en [23]. Ainsi, la littérature préconise l'algorithme de simulation suivant :

1. Simuler U_1 et U_2 des variables aléatoires uniformes.

2. Prendre V_1 une nouvelle variable telle que : $V_1 = U_1$.
3. Prendre V_2 une nouvelle variable telle que : $V_2 = \left[1 - U_1^{-\alpha} + U_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} * U_1^{-\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$.
4. Prendre $X_1 = m_1 + \sigma_1 N^{-1}(V_1)$.
5. Prendre $X_2 = m_2 + \sigma_2 N^{-1}(V_2)$.

L'approximation numérique de N^{-1} est proposée en annexe **§8.5**.

4.5.2.3 Implémentation dans l'ESG

La copule de Clayton n'a été implémentée que pour modéliser la structure de dépendance entre l'actif risqué et la courbe des taux simulée par Vasicek. En effet, la discrétisation du taux court dans le modèle CIR rend la mise en œuvre de la copule de Clayton plus complexe.

Nous présentons le cas de la dépendance en univers historique, la méthodologie est identique pour l'univers risqué neutre.

Rappelons la discrétisation des processus de l'actif risqué et du taux court :

$$\widetilde{S}_{t+\delta} = \widetilde{S}_t + \widetilde{S}_t (\mu\delta + \sigma_{equity} \sqrt{\delta} \epsilon_{equity}) \quad \text{pour } t + \delta \leq 1$$

$$\widetilde{r}_{t+\delta} = \widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta} \epsilon_{taux} \quad \text{pour } t + \delta \leq 1$$

Ces discrétisations conduisent à avoir des processus conditionnels $\widetilde{S}_{t+\delta} | \mathcal{F}_t$ et $\widetilde{r}_{t+\delta} | \mathcal{F}_t$ suivant des lois gaussiennes. En effet, il est clair que :

$$\widetilde{S}_{t+\delta} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\widetilde{S}_t + \widetilde{S}_t \mu \delta, \widetilde{S}_t \sigma_{equity} \sqrt{\delta})$$

et,

$$\widetilde{r}_{t+\delta} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta, \sigma_{taux} \sqrt{\delta})$$

Dès lors, la simulation au pas de temps $t + \delta$, intégrant la copule de Clayton en structure de dépendance, s'effectue en simulant les deux lois $X_1 \sim \mathcal{N}(\widetilde{S}_t + \widetilde{S}_t \mu \delta, \widetilde{S}_t \sigma_{equity} \sqrt{\delta})$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta, \sigma_{taux} \sqrt{\delta})$ par l'algorithme décrit au **§4.5.2.2**.

Introduire la copule de Clayton dans le modèle CIR est plus complexe puisque le processus conditionnel discrétisé du taux court ne suit pas une loi gaussienne. Nous proposons toutefois une voie de développement à explorer davantage. Dans le modèle de taux CIR nous avons :

$$\widetilde{r}_{t+\delta} = \left| \widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta + \sigma_{taux} \sqrt{\delta * \widetilde{r}_t} \epsilon_{taux} \right| \quad \text{pour } t + \delta \leq 1$$

Soit :

$$\widetilde{r}_{t+\delta} | \mathcal{F}_t \sim |Y|$$

Où :

$$Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma) = \mathcal{N}(\widetilde{r}_t + a(b - \widetilde{r}_t)\delta, \sigma_{taux} \sqrt{\delta * \widetilde{r}_t})$$

Toute la méthodologie introduite au §4.5.2.2 peut être adaptée en prenant comme fonction inverse de répartition celle de la loi de $|Y|$, notée G^{-1} , à la place de celle d'une loi normale (que nous avons notée N^{-1}).

Nous avons :

$$\text{pour } x > 0 \quad G(x) = P(|Y| < x) = P(-x < Y < x) = P\left(\frac{-x - m}{\sigma} < \frac{Y - m}{\sigma} < \frac{x - m}{\sigma}\right)$$

D'où :

$$G(x) = N\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) - N\left(\frac{-x - m}{\sigma}\right)$$

Des approximations de N par séries de Taylor existent si bien que la dernière expression peut être calculée numériquement une fois les paramètres x , m et σ donnés. Ainsi, déterminer G^{-1} revient à : pour tout $y \in \mathbb{R}^+$ trouver x tel que $G(x) = y$. La solution que nous proposons pour résoudre cette dernière équation est d'utiliser un algorithme de dichotomie ou de Newton Raphson en calculant $G(x_n)$ par approximation numérique.

4.6 Calibration et sorties de l'ESG

La calibration est une des principales limites de l'ESG développé. Elle s'appuie sur des calibrations proposées dans les différentes références citées dans la bibliographie et sur des choix arbitraires.

Concernant les courbes des taux, les modèles utilisés ne permettent pas de restituer la courbe des taux du marché à l'instant initial. La courbe des taux utilisée dans le modèle ALM en $t = 0$ constitue alors une sortie de l'ESG et non une entrée. Aussi, afin d'exposer la société d'assurance modélisée symétriquement à une hausse des taux ou à une baisse des taux, le taux court a été choisi initialement à la valeur du retour à la moyenne. En d'autres termes : $r_0 = b$, ce qui conduit à une structure plate (ou « flat ») de la courbe des taux.

Nous donnons dans les graphiques ci-dessous quelques sorties de l'ESG. Nous portons l'attention du lecteur sur la Figure 20. Sur cette dernière, nous avons représenté une trajectoire du taux court où la variabilité était importante. Il en a résulté que le taux a pris des valeurs négatives. Pour ne pas avoir de taux spots négatifs, les résultats de la simulation sont ajustés dans l'ESG en prenant : $\widetilde{R}(t, T) = \max(R(t, T)_{\text{calculé à partir du taux court simulé}}; 0)$. Cet ajustement fait perdre le caractère martingale du processus, mais le nombre de trajectoires nécessitant un retraitement est faible (environ 2%) et pour toutes ces trajectoires le retraitement n'est que minime (taux court légèrement négatif). Ce retraitement des résultats des simulations Vasicek est illustré par la Figure 20.

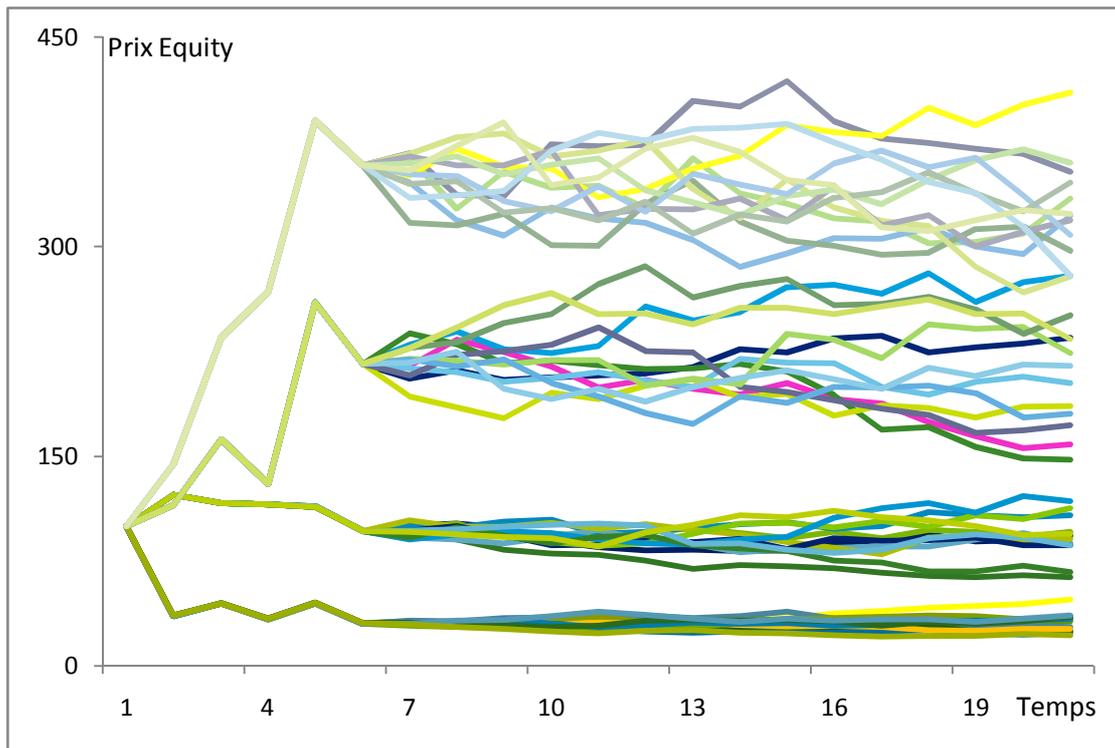


Figure 19 : Simulations dans les simulations d'un indice action en univers historique les 5³³ premières années et neutre ensuite

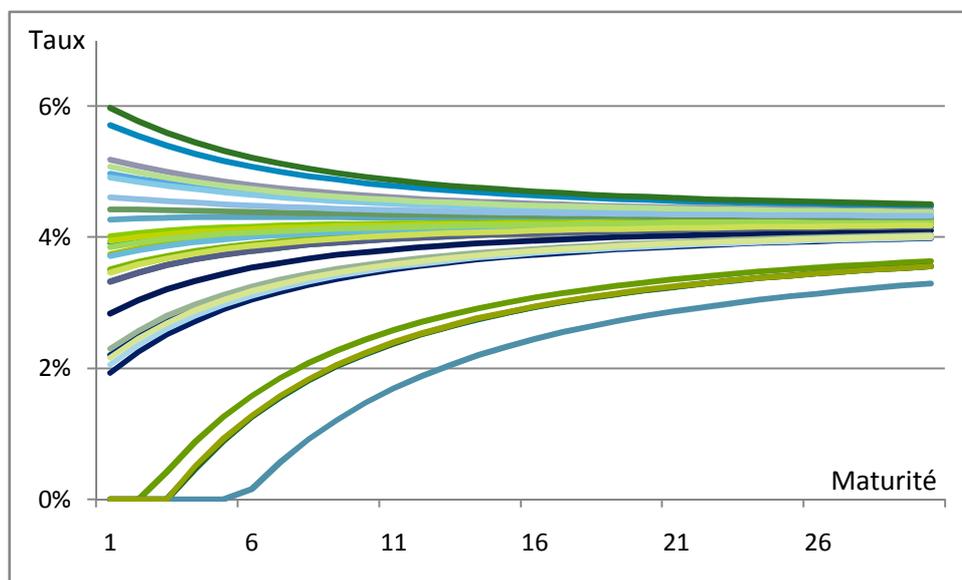


Figure 20 : Simulation de l'évolution de la courbe des taux avec le modèle de Vasicek sur 30 ans

³³ En pratique nous simulons en univers historique seulement la première année, mais pour rendre le graphique plus lisible (à utiliser uniquement à titre illustratif), nous avons diffusé les trajectoires primaires durant 5 périodes de temps.

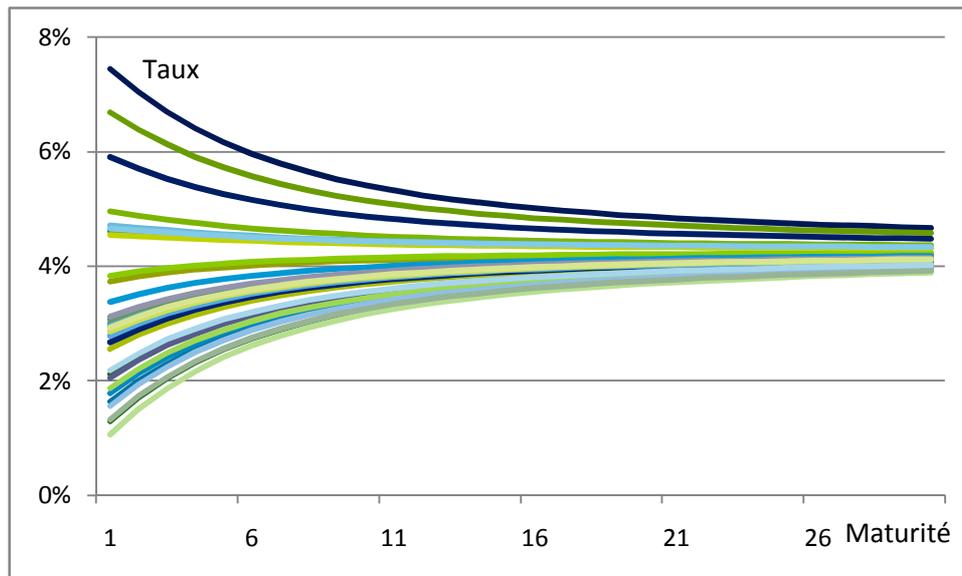


Figure 21 : Simulation de l'évolution de la courbe des taux avec le modèle CIR sur 30 ans

4.7 Limites de l'ESG construit

Les paramètres des trois modèles ainsi que les paramètres des deux structures de dépendance n'ont pas été estimés sur un historique de données et aucun test d'adéquation de modèle n'a été effectué. L'ESG construit est donc un outil R&D dont les résultats doivent être interprétés avec toutes les précautions d'usage. Cependant, son domaine d'application est largement suffisant pour l'étude théorique du SCR en assurance vie. L'objectif du mémoire n'est pas d'obtenir les valeurs exactes des SCR mais d'étudier la méthodologie du calcul.

Un des plus grands défauts de l'ESG qui a été construit est l'impossibilité de reproduire la courbe des taux du marché en $t = 0$. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, la courbe des taux en $t = 0$ en sortie de l'ESG ne peut pas être un input pour les modèles de taux considérés³⁴. La Figure 22 illustre la différence entre les courbes des taux initiales qui sont simulées par l'ESG et la courbe des taux réelle au 31 décembre 2009 qu'il devrait reproduire. Précisons que les courbes des taux Vasicek et CIR sont confondues sur le graphique de la Figure 22.

³⁴ Une calibration restituant la courbe des taux du marché en $t=0$ est envisageable mais elle n'exposerait pas l'assureur symétriquement à une hausse des taux ou à une baisse des taux. En effet, au 31/12/2009 les taux à faibles maturités étaient très bas, forçant un taux court initial faible. Une telle calibration exposerait plus l'assureur à une baisse des taux qu'à une hausse des taux, ce qui n'est pas admissible.

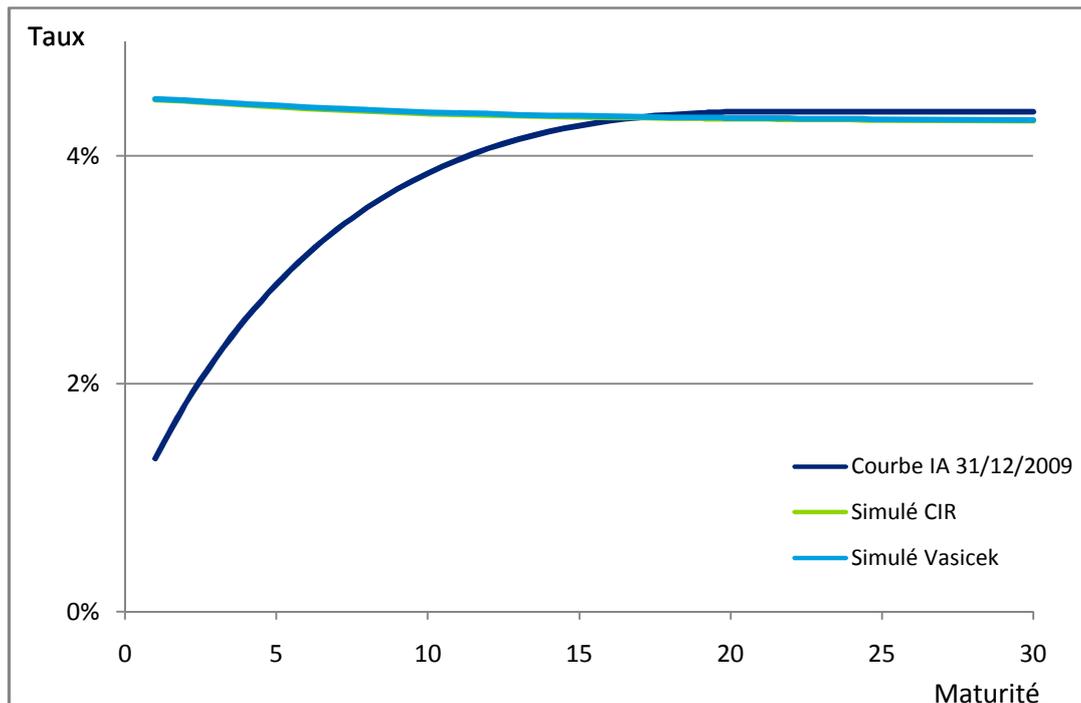


Figure 22 : Comparaison courbe des taux réelle (publiée par l'IA) et courbe des taux initiale simulée

La Figure 23 présente les quatre tests qui sont à effectuer sur l'ESG pour satisfaire à une des exigences de Solvabilité II pour homologuer le modèle interne. L'ESG construit a été testé pour le modèle de taux Vasicek avec une corrélation linéaire en univers risque neutre, il satisfait aux tests n°1, et n°4. Le test n°2 n'a pas été effectué.

Quatre grands tests à effectuer, pour chacune des tables de l'ESG (et souvent pour plusieurs types d'actifs)

- Table projection « monde réel »
- Table « risque neutre » pour évaluer la situation nette de la société pour chaque situation projetée à un an.

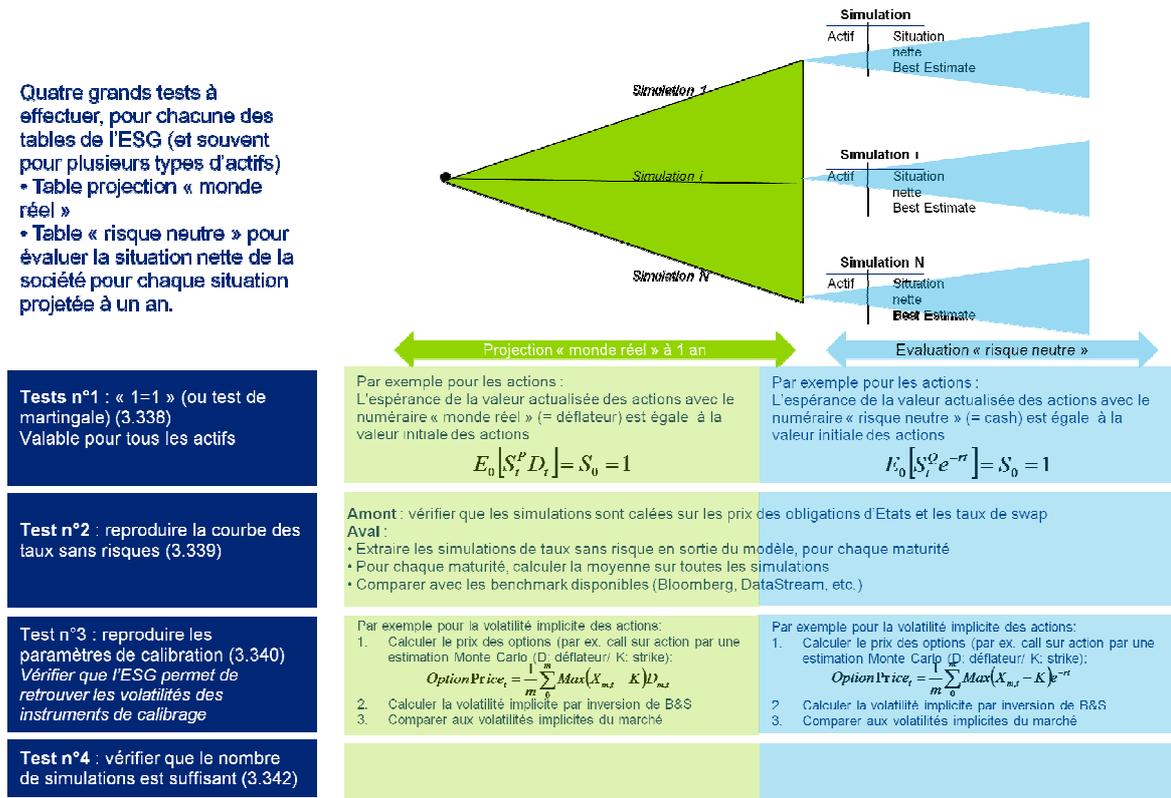


Figure 23 : Use tests Solvabilité II relatifs aux ESG pour l'homologation du modèle interne

Pour le test de martingale, nous avons utilisé 5000 simulations de l'ESG, l'erreur en monde risque neutre est inférieure à 0,5%.

Nous testerons le critère de convergence (test n°4) ultérieurement (voir §6.2) avec la construction d'un intervalle de confiance pour les simulations secondaires et la vérification empirique pour le nombre de simulations primaires.

En revanche, l'ESG développé ne satisfait pas au test n°2 car il ne permet pas de reproduire la courbe de taux du marché à l'instant initial. Cette lacune provient des modèles de taux que nous avons choisi d'implémenter. La motivation du choix a été la simplicité de ces deux modèles. D'autres modèles de taux, dit de modèles de marché, comme ceux développés dans le cadre Heath-Jarrow-Morton permettent de palier cette lacune.

5 Modèle ALM

Le modèle ALM a été développé sous Excel/VBA. Il utilise les tables stochastiques générées par l'ESG comme indiqué par la

Figure 24.

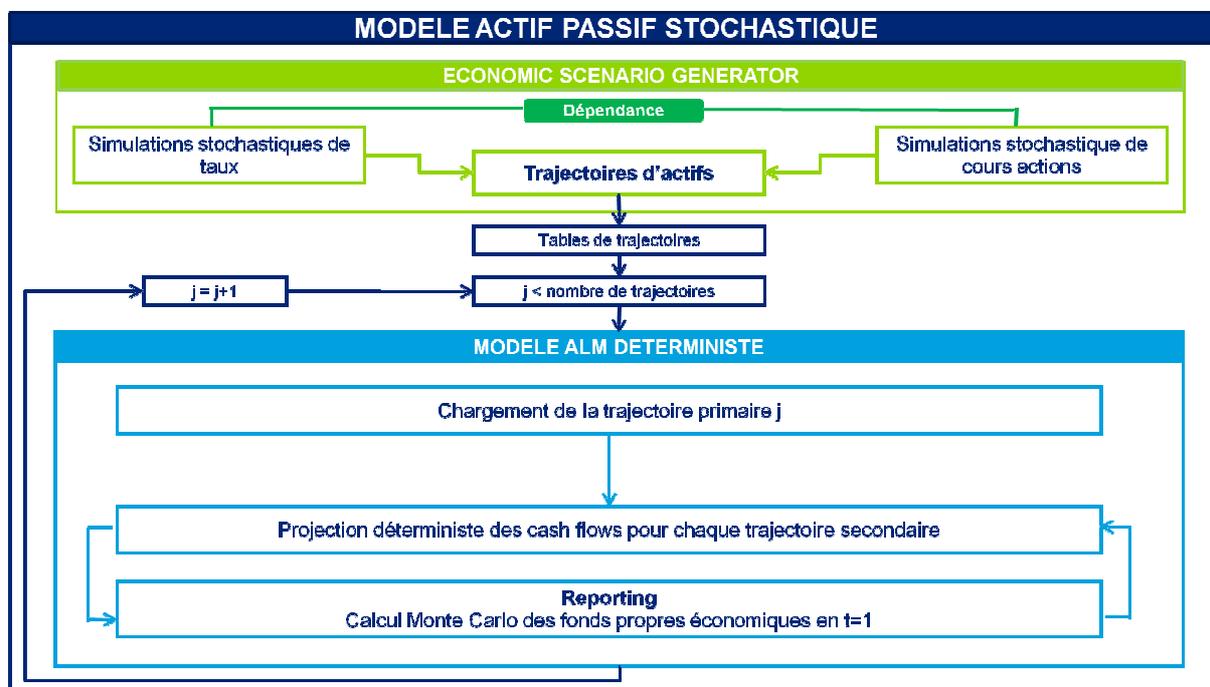


Figure 24 : Structure globale du modèle interne développé

Dans cette section, nous présentons les différents modules du modèle ALM. D'abord nous explicitons la modélisation des actifs à partir des tables stochastiques puis nous expliquons celle du contrat d'épargne en euros. Ensuite, nous donnons les éléments de dynamiques, intégrés au modèle, qui font interagir l'actif avec le passif et réciproquement.

Enfin nous listons les retraitements à effectuer en fin de projection.

5.1 Actifs modélisés

5.1.1 Obligations

5.1.1.1 Modélisation retenue

Les obligations qui sont modélisées sont des obligations d'Etat dont la probabilité de défaut est supposée nulle³⁵ sur toute la durée de la projection. Dans l'économie que nous simulons, nous supposons aussi que toutes les obligations sont émises au pair³⁶ et $V_e = V_N = V_R$ et que le coupon distribué est fixe.

Où V_e désigne la valeur d'émission de l'obligation, V_N son nominal et V_R sa valeur de remboursement à maturité.

Dans cette économie, toutes les obligations émises par le marché ont la même maturité T qui est définie par l'utilisateur. Le seul paramètre de l'obligation O_t , émise en t , qui diffère des paramètres de l'obligation $O_{t'}$ ($t' \neq t$), émise en t' , est son coupon C_t qu'il faut déterminer.

Nous nous plaçons dans un cadre *market consistent* et, par définition, la valeur de marché d'un actif est égale à la somme des flux futurs actualisés à la courbe de taux en vigueur. Puisque la probabilité de défaut de la contrepartie est supposée nulle nous en déduisons que le coupon C_t de l'obligation O_t satisfait l'équation suivante :

$$\text{Valeur de marché}(t) = \sum_{k>t}^{\infty} \text{cash flows}(k) * \exp(-R(t, k))$$

Ce qui donne pour l'obligation considérée :

$$V_e = \sum_{k=1}^T C_t V_N e^{-R(t,k)} + V_R e^{-R(t,T)}$$

Puisque $V_e = V_N = V_R$ nous en déduisons la formule suivante pour le coupon de l'obligation émise en t :

$$C_t = \frac{(1 - e^{-R(t,T)})}{\sum_{k=1}^T e^{-R(t,k)}}$$

Où les termes $(e^{-R(t,k)})_k$ sont simulés par l'ESG.

5.1.1.2 Valeur de marché

Les obligations peuvent être amenées à être revendues par l'assureur qui a besoin de trésorerie afin d'assurer les prestations (décès, rachats). La valeur de revente, notée $VM(O_t, t')$, en $t' \in]t, t + T[$ de l'obligation O_t achetée à l'émission en t est :

³⁵ Cette hypothèse est réaliste pour des Etats ayant une signature de qualité comme l'Allemagne.

³⁶ Prix d'émission = Valeur du nominal

$$VM O_t (t') = V_N \sum_{k>t'-t}^{T-t'} C_t e^{-R(t',k)} + V_R e^{-R(t',T-t')}$$

Puisque nous supposerons par la suite que l'assureur n'achète que des obligations à leur date d'émission, la plus ou moins value réalisée sur la vente en t' de l'obligation O_t est :

$$VM O_t (t') - O_t$$

5.1.2 Actions

Nous supposons que l'assureur détient un ensemble actions dont l'évolution du prix peut être modélisée comme l'évolution d'un indice actions (CAC 40 par exemple). Les variations de l'indice actions sont issues de l'ESG et sont utilisées pour valoriser l'ensemble des actions détenues par l'assureur.

Dans cette modélisation nous supposons que les actions ne génèrent pas de dividendes.

5.1.3 Trésorerie

Nous supposons que l'assureur place sa trésorerie sur des investissements monétaires qui rémunèrent le taux $R(t, 1)$ en t .

5.1.4 Caps

Le modèle ALM offre la possibilité d'introduire des caps, en run-off uniquement et en portefeuille à l'instant $t = 0$, dans le portefeuille de la société d'assurance modélisée.

Pour fonctionner le modèle ALM a besoin du prix du cap et de son payoff à chaque date.

Les caractéristiques du contrat cap sont définies dans l'ESG, sauf le nominal qui est précisé dans le modèle ALM. Ainsi, le prix du cap en $t = 0$ est donné par le prix du cap issu de l'ESG multiplié par le nominal.

L'ESG construit ne permet pas de déterminer la valeur de marché résiduelle du contrat cap en $t > 0$. Ainsi, si nous notons T la valeur de marché du cap, nous avons estimé sa valeur de marché par :

$$Cap_t \approx Cap_0 - t * \frac{Cap_0}{T + 1} \quad \text{pour } t \leq T$$

$$Cap_t = 0 \quad \text{pour } t \geq T + 1$$

Cette décroissance linéaire de valeur de marché nous a paru réaliste. C'est équivalent, d'un point de vue comptable, à l'amortissement linéaire du contrat.

5.2 Contrat modélisé

Le contrat que nous avons choisi de modéliser est un **contrat d'épargne en euro**.

5.2.1 Options et garanties contractuelles

L'utilisateur du modèle peut définir les caractéristiques du contrat. Ainsi, il est possible d'activer ou de désactiver les options ci-dessous et de définir leur(s) paramètre(s) :

1. Option de rachat sans contrainte d'ancienneté

Les pénalités de rachats n'ont pas été modélisées.

2. Participation aux bénéfices contractuelle

Le modèle s'assure que si l'option de participation aux bénéfices contractuelle est choisie alors elle est plus intéressante que la participation aux bénéfices minimale réglementaire. En effet, la compagnie d'assurance modélisée ne dispose que d'un seul contrat et donc le respect de la réglementation implique que la participation aux bénéfices du contrat modélisé doit être au minimum égale au seuil défini par le Code des Assurances.

3. Taux minimum garanti

Notons qu'un taux minimum garanti nul modélise l'*effet cliquet*. L'effet cliquet est une garantie financière qui garantit au souscripteur le montant de son épargne dans le temps. Sauf opération particulière (rachat, avance, etc.) de l'assuré, son épargne ne peut pas baisser.

La modélisation des phénomènes régissant ces options et garanties nécessite des dynamiques en raison de l'interaction actif-passif et est décrite dans la section dédiée à ce propos (§5.3).

5.2.2 Marge de gestion

Nous avons modélisé des chargements sur encours ainsi que des frais de gestion.

Les chargements sur encours sont définis contractuellement par un pourcentage fixe de l'encours moyen de l'assuré sur l'année. Ainsi, la provision mathématique de l'assuré est amputée, chaque fin d'année, de ce prélèvement de gestion.

Les frais sur encours de chaque police sont modélisés comme un montant fixe par police auquel se rajoute un pourcentage de la provision mathématique de l'assuré. Le montant fixe modélise les frais réels unitaires de chaque police qui ne dépendent pas du montant de l'épargne. Ces frais sont généralement les frais généraux (électricité, travaux d'entretien, etc.) et les frais de structure (loyer ou amortissement de l'immobilier si l'assureur est propriétaire des locaux). La partie des frais indexée sur l'encours modélise les frais qui sont proportionnels au montant de l'épargne. Ils reflètent notamment la masse salariale. En effet, il paraît logique qu'un gestionnaire de patrimoine occupe plus son temps avec les assurés disposant d'une épargne conséquente qu'avec les autres. Par ailleurs, un client fortuné est souvent plus exigeant avec son assureur donc consommateur de temps de travail pour les salariés de la société d'assurance.

5.3 Éléments dynamiques modélisés

5.3.1 Rachats dynamiques

Les rachats ont été modélisés par la formule proposée par l'ACP dans les Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques (ONC) du QIS 5 [24]. Pour plus de détails voir l'annexe §8.6.

La loi qui vise à modéliser les rachats opérés par les assurés est composée de deux éléments :

1. Une composante structurelle ou incompressible : RS
2. Une composante rationnelle ou conjoncturelle : RC

Les rachats totaux RT sont donnés par :

$$RT_t(R, TA, a) = \min\{1; \max[0; RS(a) + RC_t(R, TA)]\}$$

Où R est le taux servi aux assurés, TA est le taux attendu par les assurés et t le temps.

5.3.1.1 Rachats structurels

Les rachats structurels sont indépendants de la conjoncture économique. La politique de la compagnie en matière de taux servis aux assurés n'a donc pas d'influence sur cette composante des rachats. Dans la modélisation retenue nous n'avons utilisé que l'ancienneté du contrat comme variable explicative. D'autres variables peuvent aussi expliquer les rachats structurels, notamment l'âge de l'assuré.

Deux phénomènes principaux expliquent ces rachats :

1. **Dégradation de la situation financière de l'assuré.** L'assuré peut avoir besoin de fonds pour subvenir à un besoin financier ponctuel exceptionnel (obsèques, reconstruction d'un bien immobilier détruit et mal assuré, etc.) ou alors conserver un niveau de vie après un retournement de situation professionnelle (licenciement, chômage, invalidité, etc.). Ces rachats notés RS_1 sont indépendants de l'ancienneté du contrat.
2. **Fiscalité de l'assurance vie.** Tous les produits d'épargne sont soumis aux prélèvements sociaux (hors livret Jeune et livret A). Pour les sorties en capital, l'imposition diffère selon l'ancienneté du contrat. Pour les contrats de maturité inférieure à 8 ans, tous les produits sont soumis à l'impôt sur le revenu (35% pour les sorties avant 4 ans et 15% pour les sorties entre 4 et 8 ans). Si la sortie est effectuée après un délai de 8 ans, il y a exonération totale ou partielle d'impôt sur le revenu sur les intérêts en fonction de la date de souscription et du type de contrat. La fiscalité est donc décroissante avec l'ancienneté du contrat. L'Etat incite les français à épargner sur le long terme. De ce fait, les rachats liés à la fiscalité, notés $RS_2(a)$, sont croissants avec l'ancienneté du contrat.

Finalement, nous obtenons $RS(a) = RS_1 + RS_2(a)$ où a désigne l'ancienneté du contrat. La courbe de rachats structurels retenue est représentée en Figure 25. Elle a été obtenue arbitrairement.

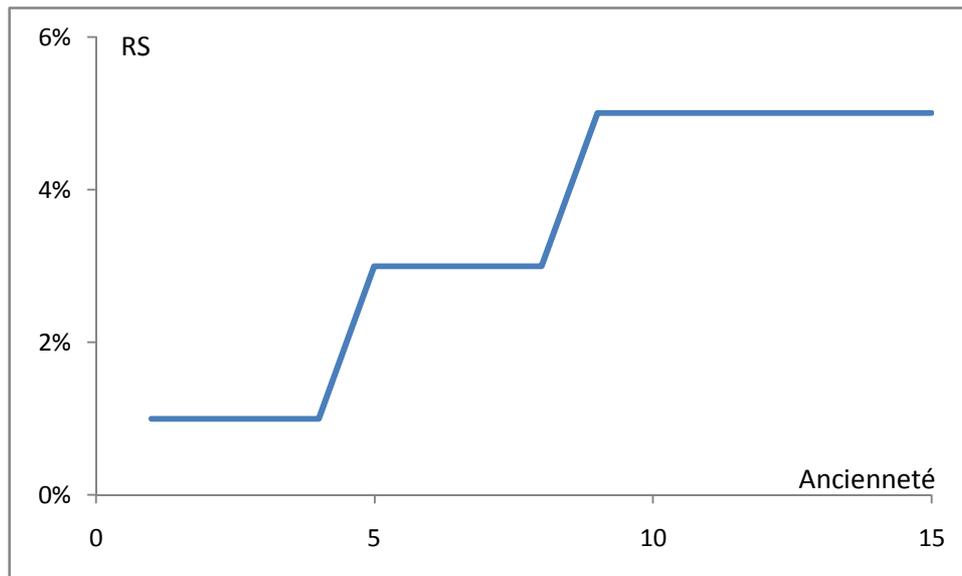


Figure 25 : Rachats structurels en fonction de l'ancienneté

5.3.1.2 Rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels correspondent aux rachats qu'effectuent les assurés en arbitrant entre l'évolution des marchés financiers, en particulier des taux d'intérêts, et les taux servis par l'assureur. En effet, en cas de hausse des taux, une partie des assurés peut se comporter de manière rationnelle et racheter leurs contrats pour accéder aux taux plus compétitifs des nouveaux contrats.

Les rachats conjoncturels ont été modélisés en utilisant les recommandations de l'ACP publiées dans les ONC du QIS 5 [24]. Le taux attendu par les assurés, noté TA a été modélisé en prenant le taux spot 5 ans, c'est-à-dire $TA(t) = R(t, 5)$.

La courbe des rachats conjoncturels est présentée en Figure 26. L'interprétation des différents paramètres est disponible en annexe §8.6. Remarquons que ces rachats peuvent être négatifs. Ces rachats négatifs interviennent lorsque le taux servi par l'assureur est très supérieur au taux attendu par les assurés (ici +3%). Dans ces cas là, les rachats structurels liés, notamment à la fiscalité, sont moins importants car il est intéressant pour l'assuré de conserver son épargne sur un contrat très rémunérateur.

Les rachats totaux, quant à eux, ne peuvent pas être négatifs d'après la formule décrite au §5.3.1.

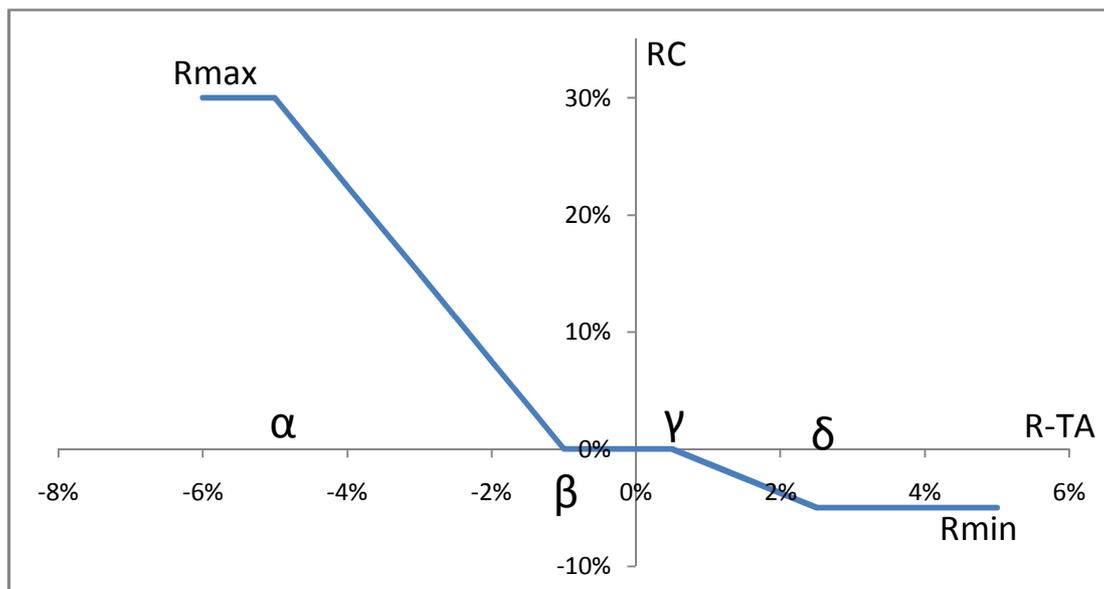


Figure 26 : Rachats conjoncturels en fonction de la différence entre taux servi et taux attendu

5.3.2 Participation aux bénéfices

La participation aux bénéfices peut être contractuelle ou réglementaire.

Le Code des Assurances³⁷ définit la participation aux bénéfices réglementaires minimale comme :

$$PB = \max \left(85\% \text{ des bénéfices financiers} + \begin{cases} 90\% \text{ du résultat technique si bénéfices techniques} \\ 100\% \text{ du résultat technique si pertes techniques} \end{cases} ; 0 \right)$$

Ce montant est ensuite affecté, soit à la Provision pour Participation aux Bénéfices³⁸ (PPAB), soit directement aux provisions mathématiques³⁹.

Dans le mécanisme de participation aux bénéfices que nous présentons, nous avons essayé de rendre compte des *management actions* en matière de politique de taux servis. Notamment, nous avons défini une politique de taux cible et une stratégie de management de la PPAB.

5.3.2.1 Taux servi

Le taux servi correspond au taux de revalorisation de l'épargne de l'assuré en fin d'année nette de chargements. Sa provision mathématique se voit augmenter d'une proportion, le *taux servi* τ_t , déterminée par l'assureur. Cela se traduit par :

³⁷ Article A. 331-4 du Code des Assurances.

³⁸ Voir définition en §5.3.2.

³⁹ Article A. 331-9 du Code des Assurances.

$$PM_t = PM_{t-1} * (1 + \tau_t)$$

Solvabilité II impose d'utiliser des taux servis qui soient cohérents avec le marché. Les hypothèses de projection doivent être représentatives de la concurrence forte donc les taux servis ne peuvent être trop faibles. Dans ce contexte, nous avons choisi une modélisation dynamique du taux servi selon la formule :

$$\tau_t = \max(TMG; \tau_{cible}) + \tau_{PPAB}$$

TMG correspond au taux minimum garanti défini dans le contrat, τ_{cible} est le taux cible de l'assureur défini de manière dynamique et τ_{PPE} est un taux servi exceptionnel dépendant de la PPAB accumulée.

Remarquons que lorsque $TMG = 0$, l'épargne de l'assuré ne peut pas diminuer. Il s'agit de l'effet cliquet déjà mentionné.

Dans la suite, nous exposons la dynamique de τ_{cible} et τ_{PPAB} qui est intégrée dans le modèle ALM.

5.3.2.2 Taux cible

Pour des raisons de confidentialité, la dynamique du taux cible n'est pas explicitée dans ce document. Toutefois la définition retenue permet de modéliser un taux de marché traduisant la concurrence. Il dépend notamment de taux servi l'année précédente et de la variation de la courbe des taux.

5.3.2.3 Taux exceptionnel et gestion de la PPAB

Avant d'introduire la dynamique du taux exceptionnel nous devons définir la Provision pour Participation Aux Bénéfices autrefois appelée Provision pour Participation aux Excédents (PPE).

Définition (Article R331-3 du Code des Assurance)

« [La provision pour participation aux bénéfices est le] montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits. »

Si le Code des Assurances définit une participation aux bénéfices minimale réglementaire, il permet aux assureurs de la redistribuer sous 8 ans. Pratiquement cela permet à l'assureur de lisser les taux servis aux assurés dans le temps. Dans une année où les produits financiers sont importants, l'assureur peut doter sa réserve. Dans une année où les produits financiers sont médiocres, il peut puiser dans cette réserve pour maintenir des taux servis élevés.

La dynamique du taux exceptionnel reflète la politique de la direction en termes de gestion de PPAB. Par exemple, fin 2008 en raison de la mauvaise performance du marché action, les assureurs qui disposaient d'un fonds de PB ont puisé dans leur PPAB pour maintenir des taux servis importants fin 2008 (plus de 4%⁴⁰). Nous avons choisi un pilotage de la PPAB en fonction du rapport PPAB/PM.

⁴⁰ Source : Rapport d'activité 2008 de l'ACAM

PPAB/PM	Corridor
Seuil minimal	0,5%
Seuil maximal	4%

Le modèle ALM intègre des dotations et des reprises de PPAB dynamiques.

Dotation de PPAB

Deux situations conduisent à la dotation de PPAB :

1. Si la participation aux bénéfices réglementaire est supérieure au taux cible, alors l'excédent est doté en PPAB.
2. Si $PPAB/PM < \text{seuil minimal}$, alors la PPAB est dotée d'un montant permettant de ramener le ratio $PPAB/PM$ au niveau du seuil minimal dans la limite du résultat disponible.

Reprise de PPAB

Deux situations conduisent à la reprise de PPAB :

1. Reprise de la PPAB âgée de plus de 8 ans.
2. Si $PPAB/PM > \text{seuil maximal}$, alors l'excédent de PPAB est repris.

Nous définissons le taux exceptionnel comme : $\tau_{PPAB} = \frac{\text{Reprise PPAB}(t)}{PM_t}$.

5.3.3 Plus ou moins values

Les plus ou moins values d'un actif se définissent comme la différence entre le prix d'achat de l'actif et son prix actuel. Le modèle intègre une stratégie d'allocation d'actifs définie au §5.4, cette stratégie permet de réaliser des plus ou moins values en revendant des actifs en portefeuille. Notre modèle ALM intègre la réalisation de plus ou moins values sur trois classes d'actifs⁴¹ : les actions, les obligations et les contrats cap. Dans cette section, nous présentons leurs calculs respectifs.

5.3.3.1 Plus ou moins values sur actions

Le Code des Assurances impose de calculer les plus ou moins values sur actions selon la méthode FIFO : « *First In First Out* ». Pour calculer correctement les plus ou moins values sur actions il faut alors suivre indépendamment chaque groupe d'actions selon leur date d'achat.

Le temps de calcul qui en résulte est important donc nous avons choisi de calculer les plus ou moins values sur actions par la méthode *coût moyen pondéré*.

Nous illustrons ces deux méthodes sur un exemple pratique.

Considérons les deux tableaux présentant l'évolution du prix d'une action et les opérations réalisées par l'assureur :

Temps	0	1	2
Valeur de l'action	100	110	132

⁴¹ Nous considérons qu'il n'y a pas de plus ou moins values sur les investissements monétaires à court terme.

Temps	0	1	2
Actions achetées	10	10	0
Actions vendues	0	0	2

Quelles est la valeur comptable et le produit financier réalisé en fin d'année 2 ?

En début d'année 2, la valeur comptable des actions en portefeuille est de $100 \cdot 10 + 110 \cdot 10 = 2200$.

D'après la méthode FIFO, en année 2, ce sont les actions achetées en année 0 qui sont vendues, donc la plus value réalisée est de $2 \cdot (132 - 100) = 64$ et nous retirons $2 \cdot 100$ du stock d'action pour ramener la valeur comptable à 2000.

D'après la méthode du coût moyen pondéré, le prix moyen d'achat des actions est de $(10 \cdot 100 + 10 \cdot 110) / 2 = 105$. La plus value réalisée en fin d'année 2 se calcule sur le coût soit : $2 \cdot (132 - 105) = 54$. La nouvelle valeur comptable du stock d'actions chute à $2200 - 2 \cdot 105 = 1990$.

Le tableau ci-dessous résume les différences observées dans l'exemple :

	FIFO	Coût Moyen Pondéré
Plus value en 2	64	54
Valeur comptable en 2	2000	1990

Le coût moyen pondéré permet de lisser la réalisation de plus ou moins value dans le temps. En pratique, le portefeuille des assureurs ne comporte que peu d'actions (proportion $< 10\%$), donc l'erreur que nous commettons en utilisant cette approximation n'est pas significative. De plus, c'est une pratique couramment utilisée dans les calculs de *MCEV*.

5.3.3.2 Plus ou moins values sur obligations

Notre modèle ALM intègre la modélisation de la réserve de capitalisation spécifique au système comptable français.

Les plus ou moins values sur obligations sont calculées ligne à ligne sur chaque titre obligataire. Les plus values obligataires sont dotées en réserve de capitalisation. L'excédent de moins values obligataires qui ne peut pas être imputé sur la réserve de capitalisation est comptabilisé en perte.

Définition (Article R331-3 du Code des Assurances)

« Réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu »

La réserve de capitalisation est une provision relative aux seuls titres obligataires. Elle limite la vente d'obligations pour la réalisation de plus values et, par conséquent, incite l'assureur à conserver ses titres obligataires jusqu'à maturité.

5.3.3.3 Caps

Nous considérons les caps comme des titres amortissables. Chaque année, l'amortissement des caps est constaté en charges financières.

Lors de la vente de caps, la réalisation de plus ou moins values est calculée comme la différence entre la valeur de marché et la valeur comptable. Par construction, voir §5.1.4, il ne peut y avoir ni réalisation de plus values ni réalisation de moins values sur la vente de caps.

5.3.4 Impôts

Nous avons modélisé deux types d'impôts : l'impôt sur les sociétés et les prélèvements sociaux sur les produits financiers des assurés.

5.3.4.1 Impôts sur les sociétés

En France, le taux d'impôt sur les sociétés est de 33,1/3%.

Afin d'optimiser la fiscalité de la société modélisée, nous avons modélisé la disposition fiscale⁴² permettant de reporter les déficits en avant. Ainsi, si l'assureur réalise une perte de -10 en année 0 et un bénéfice de +15 l'année suivante, en année 1 le montant d'IS sera calculé sur la base de +5.

L'option de déficits reportables en avant est illimitée dans le temps. Il existe aussi une disposition fiscale permettant d'obtenir une créance d'impôt en reportant les déficits en arrière, c'est le *carry-back*. Le Code des Impôts est plus complexe à ce sujet et cette option n'a pas été modélisée.

D'un point de vue algorithmique, l'option de déficits reportables en avant a été implémentée comme suit :

$$StockDéficits_0 = 0$$

$$RCAI_t = \text{Résultat technique}(t) + \text{Résultat financier}(t)^{43}$$

Où $RCAI_t$ désigne le Résultat Courant Avant Impôts en t .

Puis

$$impôts_t = \begin{cases} 0 & \text{si } RCAI_t + StockDéficits_{t-1} < 0 \\ 33,1/3\% * (RCAI_t + StockDéficits_{t-1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$StockDéficits_t = StockDéficits_{t-1} - A_t$$

Où

$$A_t = \begin{cases} RCAI_t & \text{si } RCAI_t < 0 \\ -RCAI_t & \text{si } RCAI_t > 0 \text{ et } RCAI_t + StockDéficits_{t-1} < 0 \\ StockDéficits_{t-1} & \text{si } RCAI_t > 0 \text{ et } RCAI_t + StockDéficits_{t-1} > 0 \end{cases}$$

⁴² Article 209-I du Code Général des Impôts.

⁴³ RCAI désigne le Résultat Courant Avant Impôts et représente les parts des résultats technique et financiers conservées par l'assureur.

Par construction :

$$\forall t \in \mathbb{N} \quad \text{StockDéficits}_t \leq 0$$

A l'impôt sur les sociétés se rajoute la contribution sociale⁴⁴, juridiquement distincte de l'IS, et qui correspond à 3,3% du montant de l'impôt sur les sociétés.

5.3.4.2 Prélèvements sociaux

Le modèle ALM intègre les prélèvements sociaux sur les intérêts versés aux assurés. Le total des prélèvements s'élève à 12,10% en 2010. Les prélèvements sociaux se décomposent en plusieurs impôts :

Impôt	%
CSG	8,20%
CRDS	0,50%
Prélèvement social	2,00%
Prélèvement social additionnel	0,30%
Prélèvement RSA	1,10%

5.4 Allocation d'actifs

La stratégie d'allocation d'actifs est une stratégie corridor imposant des contraintes sur les proportions d'actions et de trésorerie détenues :

1. La valeur de marché des actions détenues en t rapportée à la valeur de marché de l'actif en t doit être comprise dans un corridor $[Min_{actions}; Max_{actions}]$.
2. Le montant de trésorerie disponible en t rapporté à la valeur de marché de l'actif en t doit être compris dans un corridor $[Min_{cash}; Max_{cash}]$.

En début d'année, nous rebalançons le portefeuille dans l'ordre suivant :

Etape 1 : Si en t la proportion en actifs est supérieure au seuil maximal défini par le corridor, alors l'excédent est investi en obligations émises en t .

Etape 2 : Si en t la proportion en actifs est inférieure au seuil minimal défini, alors le manque est racheté en vendant successivement :

1. Trésorerie générée par la vente d'actions en étape 1,
2. Obligations,
3. Caps.

La vente de cash est réinvestie en obligations émises en t sur le marché.

⁴⁴ Il n'existe pas d'option de carry-back pour la contribution sociale.

En fin d'année, sont payés les frais, les prestations et les impôts. Si les produits financiers sont insuffisants pour subvenir à tous les paiements alors la vente d'actifs se fait selon les priorités suivantes :

1. Cash,
2. Obligations,
3. Actions,
4. Caps.

5.5 Retraitement de fin de projection

L'horizon de projection est défini par l'utilisateur. Pour des raisons évidentes de temps de calcul, le modèle n'autorise pas un horizon de projection supérieur à 30 ans. L'ACP tolère l'utilisation d'un horizon qui ne correspond pas à l'extinction de l'activité mais impose, dans ce cas là, un certain nombre de retraitements qui sont présentés en annexe **§8.7**.

Dans ce contexte, le modèle ALM effectue les opérations suivantes en dernière année de projection :

1. L'épargne accumulée est intégralement rachetée (rachats fixés à 100%),
2. 100% du solde de la PPAB est incorporé aux rachats,
3. La part des plus values latentes réalisées sur la vente d'actif est incorporée aux rachats,

En accord avec les ONC, le modèle réintègre en fonds propres économiques le solde de la réserve de capitalisation⁴⁵ en fin de projection actualisé et net d'impôts.

⁴⁵ Elle est réintégrée en Tier 1.

6 Mise en œuvre du SdS

6.1 Hypothèses

6.1.1 Structure du bilan comptable

Le bilan de la compagnie A est présenté en Tableau 2. Ce bilan s'inspire notamment des données publiques présentées dans le rapport d'activité de l'ACAM 2008 [25] et de divers rapports annuels d'assureurs français.

Bilan comptable compagnie A à t = 0					
Actif	m€	%	Passif	m€	%
Actions	53	9%	Capitaux propres	36	6%
Obligations	522	89%	Réserve de capitalisation	0	0%
Caps	0	0%	PPAB	20	3%
Cash	12	2%	Provisions mathématiques	530	90%
Total actif	586	100%	Total passif	586	100%

Tableau 2 : Bilan comptable de la société A

Par ailleurs, nous supposons que chaque ligne de PPAB est créditée du même montant. C'est-à-dire que les 20 m€ de PPAB sont équirépartis entre les proportions minimales de PPAB à redistribuer d'ici 1 an, 2 ans, ..., 8 ans afin de respecter le délai de redistribution de la participation aux bénéfices.

Afin d'étudier l'optimisation du SCR à l'aide de produits de taux, nous introduisons le bilan comptable de la compagnie B. La seule différence entre ces deux sociétés est que B dispose en actif de 88% d'obligations et de 1% de caps à la place des 89% d'obligations de la société A. Les caps, dont s'est doté B, sont de maturité 3 ans, de strike 5% et le taux de référence est le taux spot 5 ans.

Bilan comptable compagnie B à t = 0					
Actif	m€	%	Passif	m€	%
Actions	53	8%	Capitaux propres	36	6%
Obligations	516	88%	Réserve de capitalisation	0	0%
Caps	6	1%	PPAB	20	3%
Cash	12	2%	Provisions mathématiques	530	90%
Total actif	586	100%	Total passif	586	100%

Tableau 3 : Bilan comptable de la société B

6.1.2 Portfeuille d'actifs

Nous supposons qu'il n'y a pas de plus value latente sur les actions. Par ailleurs nous considérons les cas de deux structures de portefeuilles obligataires 1 et 2 pour chacune des deux sociétés.

Portfeuille 1	
Échéance des obligations 10Y	%
1Y	10%
2Y	10%
3Y	10%
4Y	10%
5Y	10%
6Y	10%
7Y	10%
8Y	10%
9Y	10%
10Y	10%
Total	100%

Tableau 4 : Portfeuille obligataire 1

Portfeuille 2	
Échéance des obligations 10Y	%
1Y	0%
2Y	0%
3Y	0%
4Y	0%
5Y	0%
6Y	20%
7Y	20%
8Y	20%
9Y	20%
10Y	20%
Total	100%

Tableau 5 : Portfeuille obligataire 2

Chaque obligation en portefeuille, à l'instant initial, est supposée verser un coupon de 3,9%, valeur choisie arbitrairement. Compte tenu de la courbe des taux en t=0 qui est simulée par l'ESG développé, le portefeuille obligataire est en légère moins value latente à l'instant initial : -10m€ pour le portefeuille 1 et -13m€ pour le portefeuille 2. Toutefois, ces moins values latentes n'ont pas beaucoup d'influence sur le SCR dans notre modèle puisque les premières plus ou moins values ne sont réalisées qu'au cours de la première année. En effet, le premier rebalancement de portefeuille et la première vente d'actifs n'a lieu qu'au courant de l'année 1. Entre t=0 et t=1 le niveau de plus ou moins values du portefeuille varie selon les simulations.

Dans la suite nous pourrions donc considérer 4 structures de compagnies : bilan A ou B avec une structure de portefeuille obligataire 1 ou 2. L'univers des possibles est donc : A1, A2, B1 et B2.

6.1.3 Passif

Le contrat modélisé est un contrat d'épargne en euros soumis aux règles de participation aux bénéfices définies par le Code des Assurances. Les hypothèses utilisées ont été fixées arbitrairement par l'auteur et ne se veulent pas représentatives du marché français de l'assurance. Les caractéristiques du contrat sont détaillées dans le tableau ci-dessous :

Contrat euro	
Possibilité de rachat ?	Oui
TMG	0%
Chargements de gestion	0,60%
Frais de gestion (%)	0,30%
Frais de gestion par contrat(€)	15€

Les polices ont été modélisées à l'aide de trois *model points*. Un model point représente l'agrégation de plusieurs polices permettant de diminuer le temps de calcul. Notre modèle inclut les trois modèles suivants :

Model point	MP1	MP2	MP3
Ancienneté du contrat (années)	1	5	10
Nombre de police	6000	6000	8000
Age équivalent des assurés (années)	40	50	55
Epargne en t = 0 (m€)	150	200	180

La table de mortalité utilisée est la TH00-02.

Dans les simulations effectuées, nous n'avons pas considéré de primes futures même si le modèle peut les intégrer. Le portefeuille de passifs est donc considéré en run-off.

Pour des raisons de confidentialité, nous ne présentons pas les hypothèses relatives aux *management actions* en matière de participation aux bénéfices.

La durée de projection a été fixée à 20 ans et les calculs effectués intègrent les retraitements présentés au §5.5.

6.2 Analyse de la convergence

Dans cette section, nous analysons la convergence du modèle interne développé sur les deux niveaux de simulations :

1. Convergence du modèle dans l'estimation des fonds économiques à 1 an pour un scénario primaire donné.

2. Convergence du modèle dans l'estimation du capital économique.

Ces deux études vont nous permettre de justifier les nombres de scénarios primaires (5000) et secondaires utilisés (500). Dans toute cette partie nous avons utilisé la compagnie A1 et pour l'ESG un modèle de taux Vasicek avec corrélation linéaire à l'actif risqué.

6.2.1 Estimation des fonds propres économiques à 1 an

Comme décrit précédemment nous avons choisi un scénario primaire en particulier et estimé les fonds propres économiques à 1 an de la compagnie A1. Nous avons représenté sur la Figure 27 et la Figure 28 respectivement l'intervalle de confiance de l'estimateur des fonds propres économiques à 1 an et la valeur de cet estimateur (située au centre de l'intervalle de confiance).

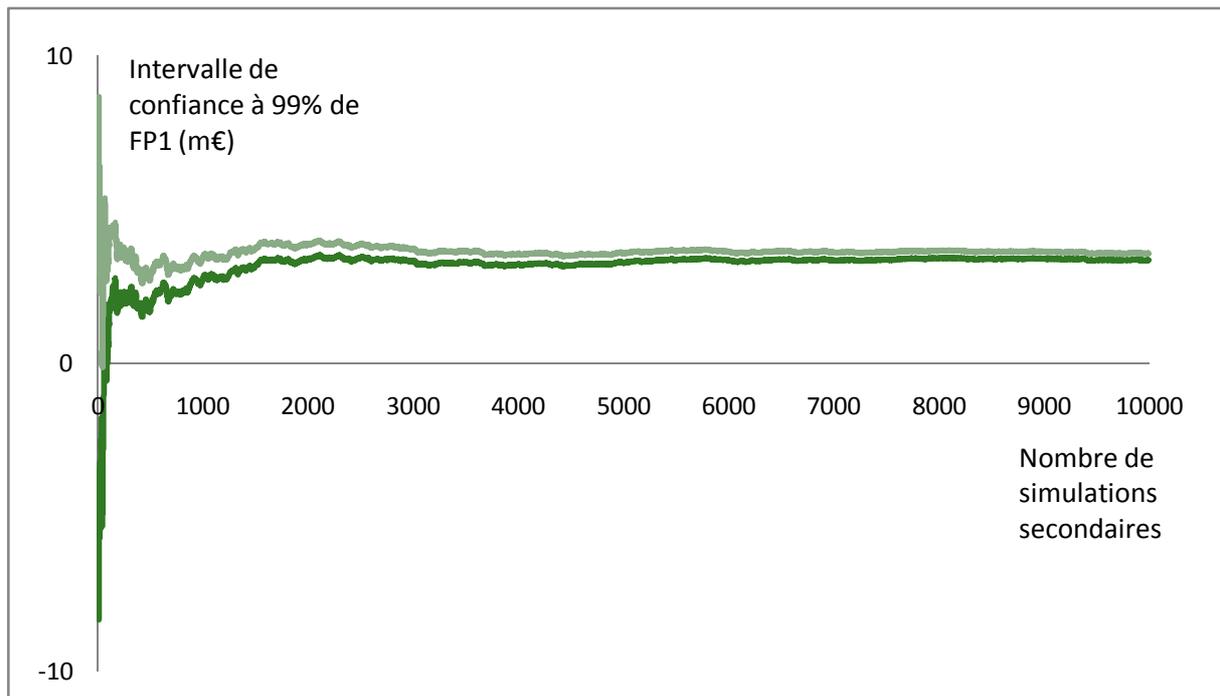


Figure 27 : Intervalle de confiance pour l'estimateur des fonds propres économiques à 1 an en fonction du nombre de simulations secondaires

Notons Y la variable: $Y = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S X^i$ où X^i est une réalisation de la variable aléatoire X et S le nombre de simulations. Nous cherchons à estimer $E(X)$ par le calcul de Y . L'intervalle de confiance, au niveau de confiance α , qui résulte de la méthode Monte-Carlo est donné par l'équation :

$$P\left(Y - \frac{V^*}{\sqrt{S}} t_{\frac{\alpha}{2}(S-1)} < X < Y + \frac{V^*}{\sqrt{S}} t_{\frac{\alpha}{2}(S-1)}\right) = 1 - \alpha$$

Où V^{*2} est l'estimateur non biaisé de la variance, c'est-à-dire que :

$$V^{*2} = \frac{1}{S-1} \sum_{i=1}^S (X^i - X)^2$$

Et où $t_{\frac{\alpha}{2}(S-1)}$ désigne le quantile à α d'une distribution de Student à $S - 1$ degré de liberté.

Sur le graphique de la Figure 27, le niveau de confiance α a été choisi à 1%.

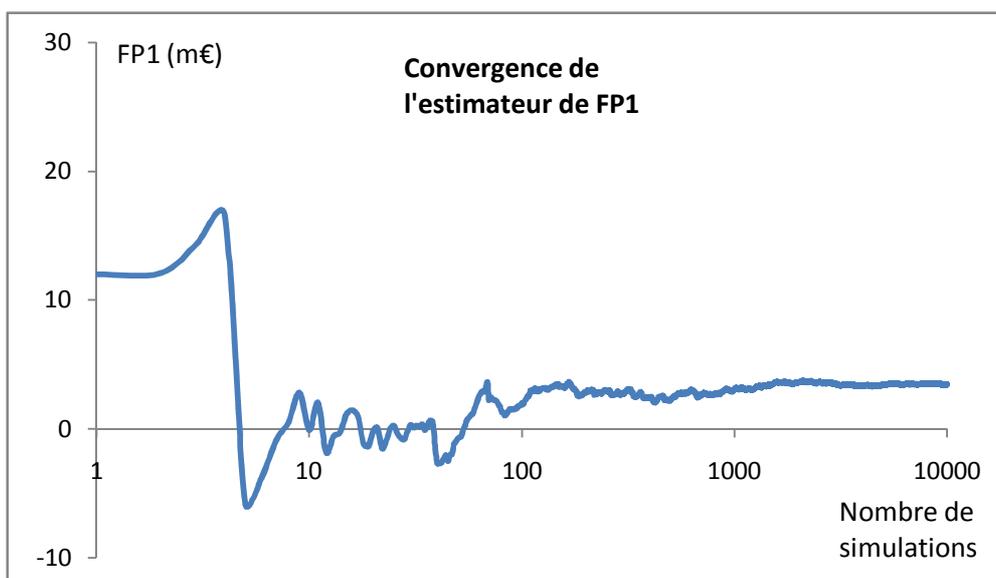


Figure 28 : Valeur de l'estimateur des fonds propres économiques à 1 an en fonction du nombre de simulations secondaires (échelle des abscisses logarithmique)

D'après la Figure 27, nous pouvons supposer que la valeur réelle des fonds propres économiques à 1 an est bien approximée avec 10 000 simulations. En effet, dans l'exemple proposé, la largeur relative de l'intervalle de confiance est de moins de 5% à ce niveau de simulations.

Le tableau ci-dessous présente l'erreur relative de l'estimateur Monte Carlo par rapport à la valeur calculée avec 10 000 simulations.

Nombre de simulations secondaires	Erreur relative absolue
100	45%
250	16%
500	16%
1000	11%
2500	5%
5000	1%

Tableau 6 : Erreur relative en fonction du nombre de simulations secondaires

Dans la pratique, les assureurs utilisent 500 à 1000 simulations secondaires, voir [8], pour estimer les fonds propres économiques à 1 an avec une approche SdS. Rappelons que ces simulations secondaires sont nécessaires à la correcte valorisation des options cachées et garanties financières.

Le Tableau 6 montre que l'erreur relative, dans notre modèle interne, avec 1000 simulations est encore de 11% par rapport à la valeur calculée avec 10 000 simulations. Cette erreur est considérable, mais, en raison des puissances de calcul actuellement disponibles, il n'est pas envisageable d'augmenter ce nombre de simulations secondaires tout en gardant un nombre de simulations primaires convenable.

Enfin, rappelons que l'estimateur Monte Carlo converge à la vitesse de \sqrt{S} où S désigne le nombre de simulations. Ainsi, pour diviser par 10 l'erreur commise sur l'estimation d'une grandeur par Monte Carlo, il faut multiplier par 100 le nombre de simulations.

Dans le cadre du modèle interne développé, il est préférable d'utiliser au moins 5000 simulations secondaires (cf. Tableau 6). Or, nous avons vu que les assureurs utilisent un nombre de simulations secondaires de 500 à 1000. Dans la suite, nous utiliserons un **nombre de simulations secondaires de 500**.

Le nombre de simulations secondaires utilisées constitue une autre limite aux résultats qui seront présentés.

6.2.2 Estimation du capital économique

L'estimateur utilisé pour évaluer le capital économique est celui décrit au §3.3.4.2. Déterminer un intervalle de confiance pour cet estimateur de la Value-at-Risk est plus complexe. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Lan et Staum [9] et à ceux de Chauvigny, Devineau, Loisel et Maume-Deschamps [26].

Le Tableau 7 illustre l'erreur relative absolue de l'estimateur du capital économique par rapport à celle évaluée avec 10 000 simulations primaires et 500 simulations secondaires.

Nombre de simulations primaires	Erreur relative absolue
200	31%
500	8,7%
1000	4,9%
2500	0,45%
5000	0,01%

Tableau 7 : Erreur relative sur l'estimation du capital économique en fonction du nombre de simulations primaires

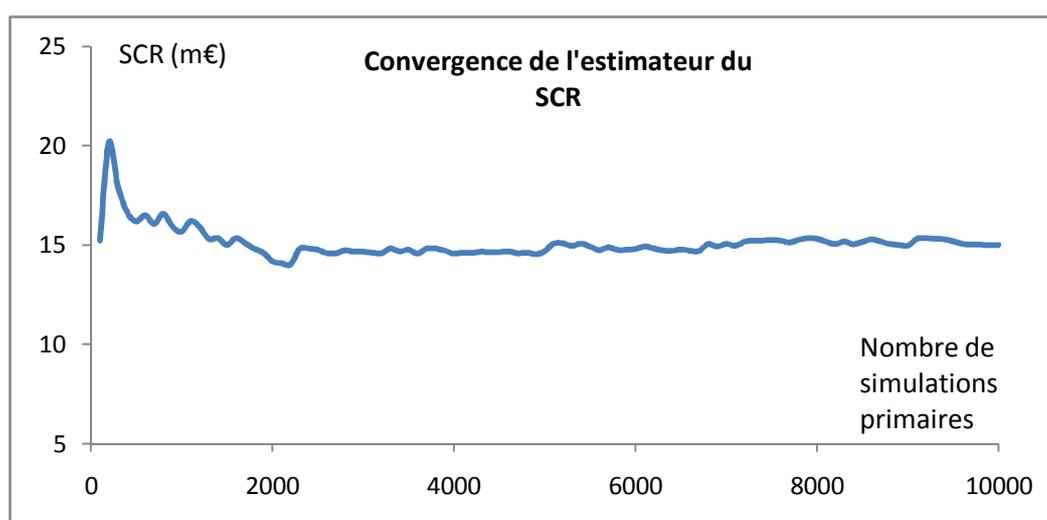


Figure 29 : Convergence de l'estimateur du SCR en fonction du nombre de simulations primaires (500 simulations secondaires ont été utilisées)

Le graphique Figure 29 illustre la convergence rapide de l'estimateur du SCR. Il est clair que les 5000 simulations primaires utilisées par la suite sont satisfaisantes. Dans la suite nous utiliserons **5000 simulations primaires**.

En conclusion de cette section, précisons que toute notre analyse repose sur la convergence d'un modèle ne diffusant que deux facteurs de risque. Or, les écarts types des estimateurs considérés croissent avec le nombre de facteurs de risque simulés. Un modèle interne complet nécessite d'ajouter d'autres facteurs d'aléa comme la mortalité stochastique ou un risque de crédit stochastique. Si ces facteurs étaient ajoutés, il faudrait reconsidérer et augmenter les nombres de simulations primaires et secondaires afin de maintenir la même précision des estimateurs.

6.3 Temps de calcul

Dans cette section nous déterminons une formule générique donnant le temps de calcul nécessaire à l'estimation du capital économique, pour le modèle interne particulier développé, en fonction du nombre de simulations primaires (P) et secondaires (S). Dans le modèle ALM nous avons utilisé le modèle de taux de Vasicek ainsi qu'une corrélation linéaire. Toutefois, les autres paramétrages mènent au même temps de calcul⁴⁶.

L'intégralité des résultats de cette section a été produite sur un ordinateur muni d'un processeur Intel Core 2 duo @ 2.4 GHz et de 4 Go de mémoire vive.

La Figure 30 représente le temps d'exécution nécessaire pour la génération de S trajectoires secondaires par l'ESG pour une trajectoire primaire donnée. D'après la régression linéaire effectuée, le temps de calcul nécessaire pour générer une table stochastique contenant P simulations primaires et S simulations secondaires est de $\gamma_1 \approx 0,0069 * P * S$ (exprimé en secondes).

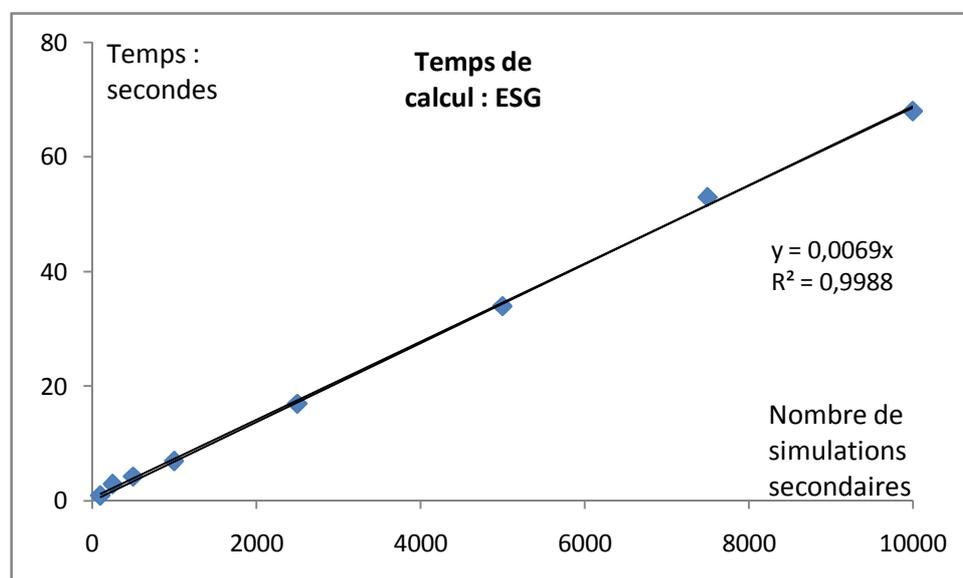


Figure 30 : Temps d'exécution de l'ESG pour le calcul du flow de trajectoires secondaires (pour une trajectoire primaire) en fonction du nombre de trajectoires secondaires

⁴⁶ Dans notre ESG, c'est surtout l'ouverture, la fermeture et l'écriture sur fichier qui est consommatrice de temps de calcul.

La Figure 31 représente le temps d'exécution nécessaire pour le calcul des fonds propres économiques pour une trajectoire primaire donnée en fonction du nombre S de trajectoires secondaires utilisées pour l'estimation. D'après la régression linéaire effectuée, le temps de calcul nécessaire pour calculer P simulations de fonds propres économiques à 1 an avec S simulations secondaires est de $y_2 \approx 0,0164 * P * S$ (exprimé en secondes).

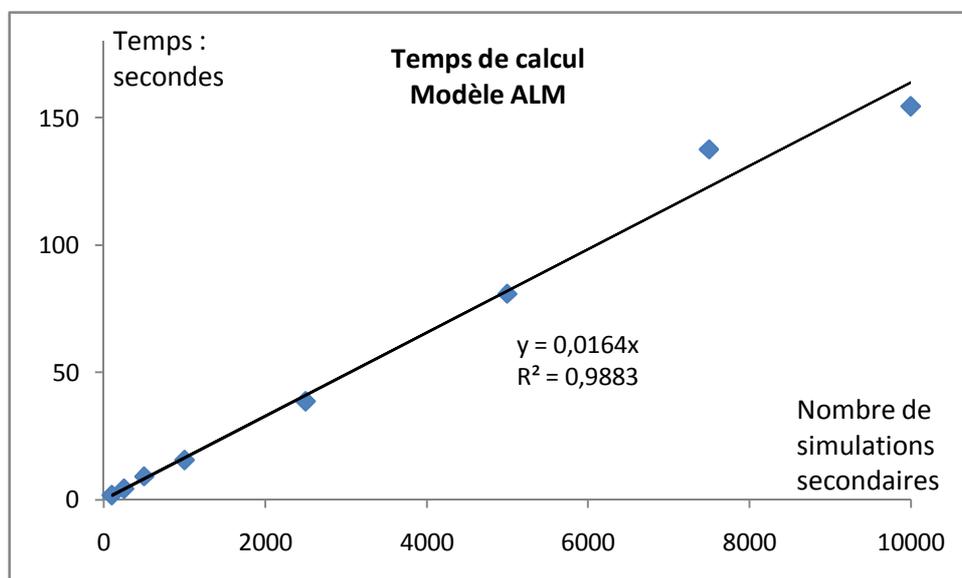


Figure 31 : Temps d'exécution du modèle ALM pour effectuer l'ensemble des projections secondaires (pour une simulation primaire) en fonction du nombre de trajectoires secondaires

Puisque le temps de calcul nécessaire à l'estimation du capital économique à partir de la distribution des fonds propres économiques à 1 an est négligeable par rapport au temps de calcul nécessaire à l'obtention de la distribution, nous pouvons légitimement considérer que le temps de calcul nécessaire à l'estimation du capital économique en fonction de P et S est donné par :

$$y \approx 0,0233 * P * S$$

Où y est exprimé en secondes.

La matrice ci-dessous présente le temps de calcul, exprimé en jours, pour estimer le capital économique en fonction du nombre de simulations primaires et du nombre de simulations secondaires.

S \ P	1000	2500	5000	10 000
250	0,07	0,17	0,34	0,67
500	0,13	0,34	0,67	1,35
1000	0,27	0,67	1,35	2,70
5000	1,35	3,37	6,74	13,48
10 000	2,70	6,74	13,48	26,97

Tableau 8 : Temps de calcul exprimé en jours

L'ESG réalisé sous C/C++ et le modèle ALM réalisé sous Excel/VBA ont été optimisés. Toutefois, d'autres environnements de calcul sont sûrement plus adaptés au nombre important d'opérations. De ce fait, un sujet qu'il serait intéressant d'approfondir est l'utilisation du calcul parallèle avec plusieurs postes ou encore le calcul sur GPU actuellement en fort développement.

Concluons cette section en citant les travaux de Gordy et Juneja [27] qui proposent une approche permettant de déterminer de manière optimale les nombres de scénarios primaires et secondaires. Leur idée est d'optimiser l'erreur commise sur l'estimation du capital économique sous une contrainte donnée de temps de calcul.

6.4 Application du SdS : Optimisation du SCR⁴⁷ à l'aide de caps

Dans cette section, nous proposons une illustration du SdS : l'étude de la réduction du SCR à l'aide de caps. En effet, dans les quatre compagnies modélisées A1, A2, B1 et B2, un risque important pour l'assureur est la celui de hausse des taux.

Une hausse des taux conduit à la baisse de la valeur de marché des obligations détenues et constituant la majeure partie du portefeuille d'actifs de l'assureur. Parallèlement, si l'assureur ne sert pas un taux intéressant aux assurés, alors ceux-ci arbitreront et rachèteront leur contrat pour placer leur épargne chez un autre assureur. Afin de payer ces rachats plus importants qu'en temps normal, l'assureur est amené à vendre ses obligations et, donc, à réaliser des moins values.

Si nous résumons, la conséquence pour l'assureur d'une telle hausse des taux est double :

1. Diminution de l'épargne suite aux rachats plus importants des assurés (si le taux servi n'est pas suffisant),
2. Baisse de la valeur de marché des obligations détenues et réalisation de moins values.

Afin de se prémunir du risque de hausse des taux sur les contrats d'épargne en euros, de nombreux assureurs achètent des caps. Dans la suite, nous calculons le SCR des quatre compagnies mentionnées afin de tester l'impact des caps sur le SCR.

6.4.1 Présentation des résultats

Pour chacune des quatre sociétés, nous présentons la distribution des fonds propres économiques en année 1 ainsi que la valeur du SCR et de la VIF (*Value in Force*). La VIF correspond à la valeur actuelle des affaires actuellement en portefeuille. Concrètement, il s'agit de la valeur actuelle des résultats futurs.

6.4.1.1 Sociétés A2 et B2

Nous considérons les sociétés A2 (pas de caps en portefeuille) et B2 (caps en portefeuille) disposant toutes les deux du portefeuille obligataire 1. Pour chacune de ces deux sociétés nous avons effectué un SdS pour calculer le SCR ainsi que la VIF. Les résultats sont synthétisés dans le Tableau 9.

⁴⁷ Utiliser ici le terme de SCR est un abus de langage, en effet pour avoir le SCR défini par Solvabilité II il faudrait rajouter d'autres risques tel que décrit au §1.4.1.4. Le SCR calculé ici est l'agrégation du SCR taux et du SCR actions. Dans toute la suite nous utiliserons cet abus de langage.

Portefeuille 2	VIF (m€)	VIF (%PM)	SCR (m€)	SCR (%PM)
Sans caps (A2)	2,4	0,4%	34,6	6,5%
Avec caps (B2)	5,7	1,1%	13,5	2,5%
Variation de B2 relative par rapport à A2	+138%		-61%	

Tableau 9 : Comparaison des VIF et SCR des sociétés A2 et B2

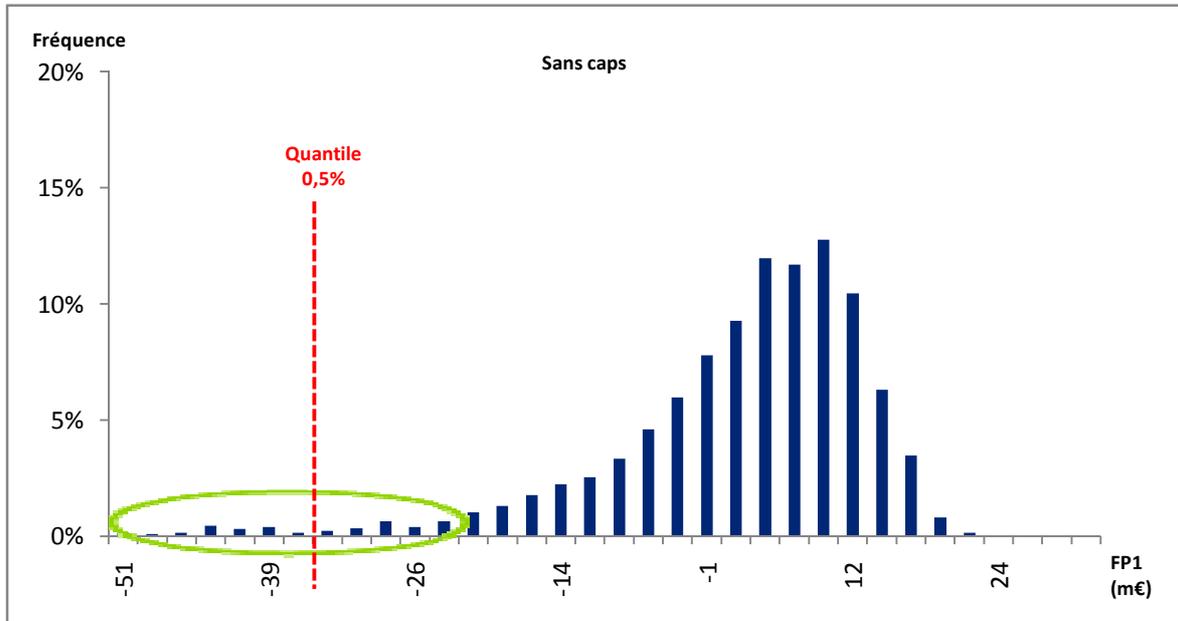


Figure 32 : Distribution des fonds propres économiques à 1 an de la société A2

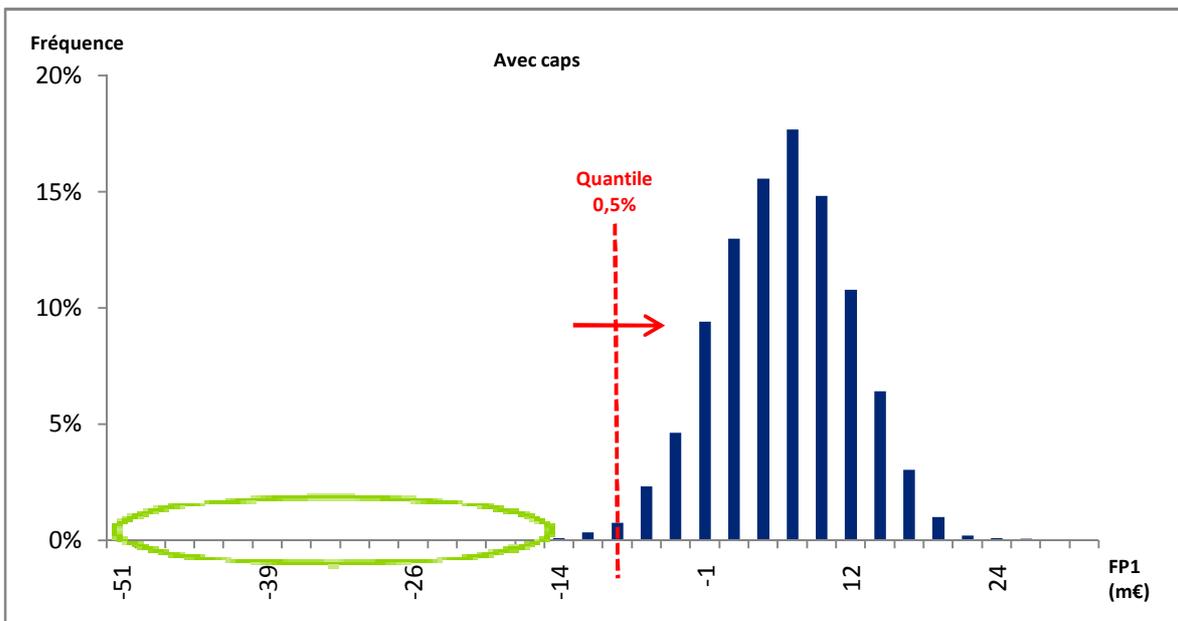


Figure 33 : Distribution des fonds propres économiques à 1 an de la société B2

Le Tableau 9 montre qu'en remplaçant 1% de ses obligations par les caps dont s'est doté B2, la société A2 peut faire augmenter sa VIF de 138% (+3,3m€) et diminuer son SCR de 61% (-21,1m€). Les caps constituent une optimisation efficace du portefeuille d'actifs de A2 vis-à-vis de ses engagements envers ses assurés.

A2 est très exposé à la hausse des taux. Les caps permettent de s'en protéger. En effet, en cas de hausse des taux :

1. De par son portefeuille obligataire, A2 ne dispose pas de remboursement d'obligation en année 1.
2. Les rachats peuvent être plus importants qu'en temps normal (si A2 ne parvient pas à verser un taux suffisant) et alors A2 doit vendre des obligations pour payer les prestations.
3. A2 réalise des moins values sur la vente d'obligations impactant son résultat si la réserve de capitalisation est nulle.
4. A2 ne peut pas réinvestir dans des obligations à taux élevés puisque toute la liquidité disponible a été utilisée pour payer les prestations.

Les caps ont alors un intérêt particulier pour A2 et constituent une couverture contre la hausse des taux. Ils ont pour effet de couper la queue de distribution à gauche (voir ellipses vertes) et ,donc, de déplacer le quantile à 0,05% vers la droite (voir flèche rouge). Cette troncature de la queue de distribution à gauche est illustrée sur la Figure 32 et la Figure 33. La conséquence est l'augmentation de la VIF puisque la société a de meilleurs résultats en cas de hausse des taux, et la baisse du SCR grâce au déplacement du quantile à 0,05%

6.4.1.2 Sociétés A1 et B1

Nous considérons les sociétés A1 (pas de caps en portefeuille) et B1 (caps en portefeuille) disposant toutes les deux du portefeuille obligataire 1. Pour chacune de ces deux sociétés nous avons effectué un SdS pour calculer le SCR ainsi que la VIF. Les résultats sont synthétisés dans le Tableau 10.

Portefeuille 1	VIF (m€)	VIF (%PM)	SCR (m€)	SCR (%PM)
Sans caps (A1)	5,1	1,0%	14,1	2,7%
Avec caps (B1)	7,1	1,4%	13,7	2,6%
Variation de B1 relative par rapport à A1	+39%		-3%	

Tableau 10 : Comparaison des VIF et SCR des sociétés A1 et B1

Sur la Figure 34 et la Figure 35 nous avons représenté la distribution des fonds propres économiques à 1 an pour les deux sociétés.

Sur l'exemple du portefeuille 1, nous voyons que la couverture par caps est moins efficace. En effet, le portefeuille 1 est plus adapté au contrat d'épargne puisque chaque année, 10% du portefeuille obligataire initial arrive à échéance et permet à l'assureur de disposer de trésorerie pour payer les prestations et réinvestir dans de nouveaux actifs.

Le risque principal est aussi celui d'une hausse des taux. En cas de hausse des taux en année 1 :

1. La société peut réaliser des pertes la première année mais n'est pas forcée de vendre des obligations car une partie du portefeuille obligataire arrive à maturité.

- La trésorerie restante est réinvestie dans de nouvelles obligations à coupons élevés. Cet investissement permettra de générer des produits financiers conséquents les années suivantes.

Par conséquent, pour les sociétés A1 et B1, le risque de hausse des taux est moins important que pour les sociétés A2 et B2. C'est pourquoi A1 et B1 ont de meilleurs indicateurs financiers que A2 et B2.

Cet exemple fait ressortir qu'une stratégie d'allocation optimale peut permettre de s'exonérer d'une couverture par instruments financiers.

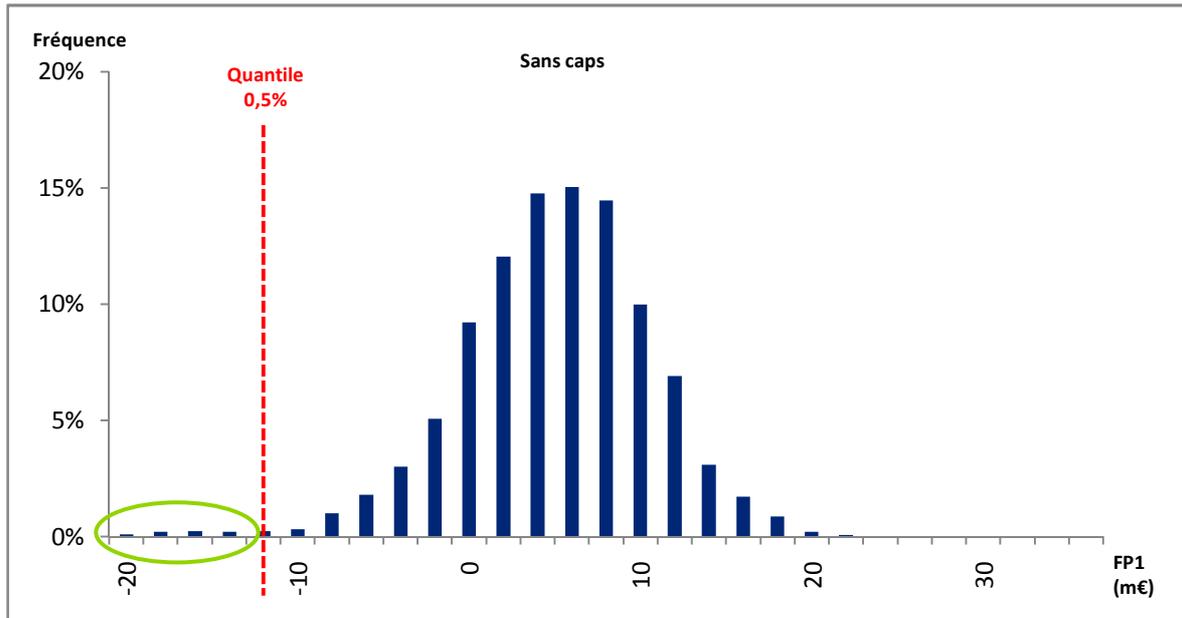


Figure 34 : Distribution des fonds propres économiques à 1 an de la société A1

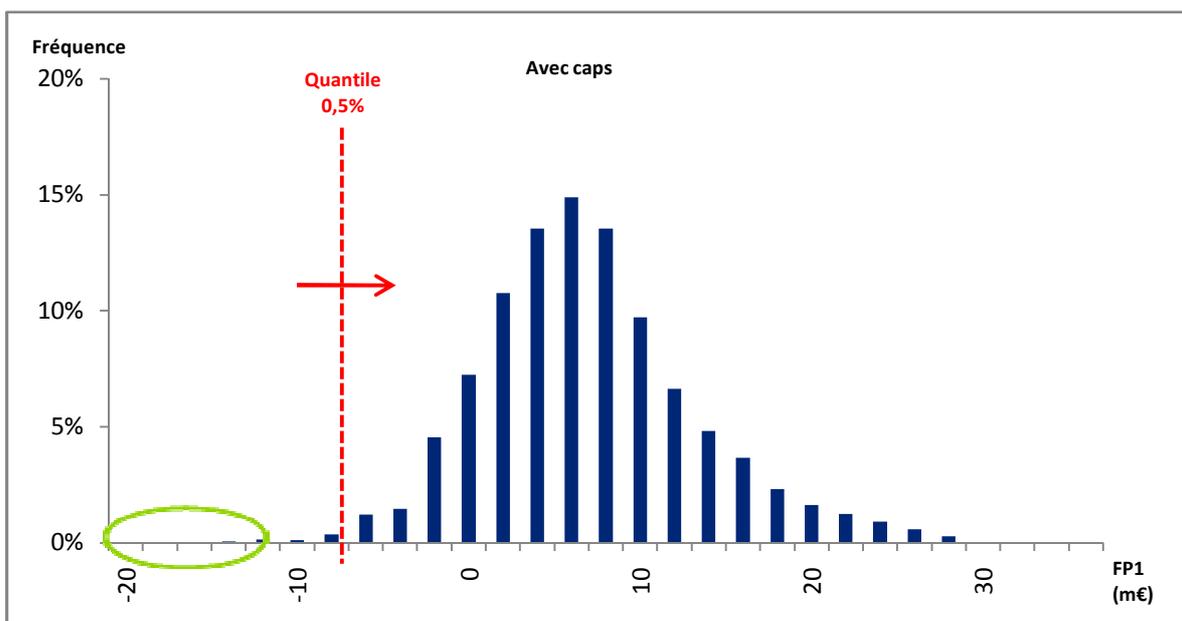


Figure 35 : Distribution des fonds propres économiques à 1 an de la société B1

7 Optimisation du temps de calcul

Avec la mise en œuvre effective prochaine de Solvabilité II, la recherche actuarielle est très active sur les méthodes de réduction du temps de calcul. Nous avons effectué une recherche bibliographique afin de lister les différentes techniques disponibles. Parmi ces méthodes, citons entre autres :

1. Accélérateur SdS Loisel-Devineau ; voir Loisel-Devineau [8],
2. Optimisation SdS Gordy-Juneja ; voir Gordy-Juneja [27],
3. Replicating portfolio ; voir Revelen [28], Grigorov-Phung [29] et Milliman [30],
4. Least Squares Monte-Carlo (LSM) ; voir Bergmann-Bauer [31],
5. Utilisation de déflateurs ; voir Dastarac-Sauveplane [32].

Compte tenu du SdS déjà implémenté et de l'originalité de la méthode 1 proposée par Loisel et Devineau nous avons choisi d'optimiser le calcul grâce à l'accélérateur SdS. L'intégralité des résultats présentés dans cette section ont été produits sur la société A1.

7.1 Théorie

Cette section se propose d'exposer succinctement la théorie sous jacente au fonctionnement de l'accélérateur SdS. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'article original [8] où la convergence de l'algorithme a été montrée empiriquement. Par ailleurs, Chauvigny, Devineau, Loisel et Maume-Deschamps [26] démontrent théoriquement la convergence de l'algorithme sous certaines hypothèses sur l'application donnant la NAC en fonction des facteurs de risque.

La méthode reprend les éléments théoriques du SdS décrits dans le §3.3. L'accélérateur effectue un échantillonnage préférentiel des simulations *primaires*. Sur les P scénarios *primaires* du SdS, seul un faible nombre d'entre eux va être conservé comme base de calcul pour les S scénarios *secondaires*. Concrètement, l'algorithme essaie de simuler en priorité la queue de la distribution de FP_1 .

L'algorithme part du constat que ce sont les situations extrêmes (hausses/baisses importantes des taux, baisse du marché actions, etc.) qui mènent aux fonds propres économiques les plus faibles. L'idée des auteurs est d'identifier ces scénarios extrêmes et de valoriser le bilan économique pour ces seules situations. L'adversité de la situation est caractérisée par une distance introduite par Loisel et Devineau.

7.1.1 Caractérisation des situations adverses

L'accélérateur introduit une distance sur les scénarios primaires à partir des facteurs de risque du modèle ALM (rendements actions, taux). En réutilisant les notations déjà introduites précédemment, la distance du scénario i est donnée dans notre modèle par :

$$d_i = \sqrt{\epsilon_{equity}^i(1)^2 + \epsilon_{taux}^i(1)^2 - 2\rho * \epsilon_{equity}^i(1) * \epsilon_{taux}^i(1)}$$

Où $\epsilon_{equity}^i(1)$ désigne le mouvement brownien généré dans l'ESG pour simuler la trajectoire primaire de l'actif risqué et $\epsilon_{taux}^i(1)$ celle de la courbe de taux.

L'idée est que dans les modèles financiers discrétisés considérés, une réalisation extrême de la variable modélisée est conditionnée par une réalisation extrême du mouvement brownien. Plus les mouvements browniens simulés sont importants, plus la situation est qualifiée d'adverse par l'algorithme.

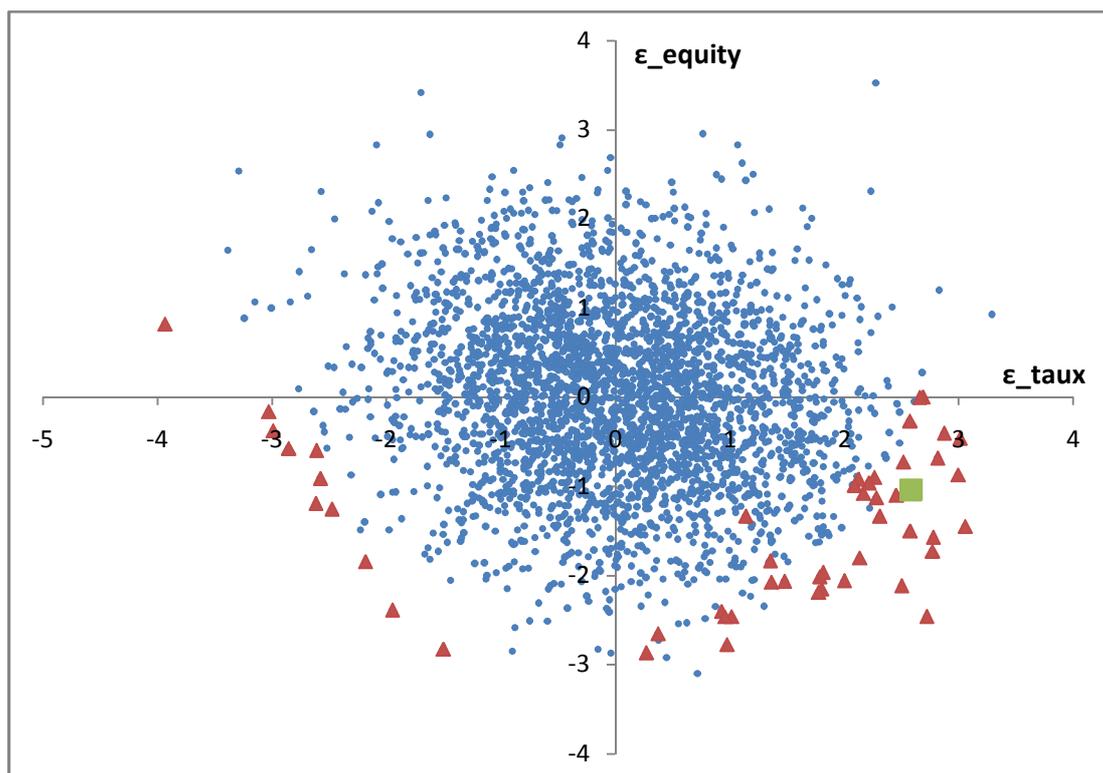


Figure 36 : Distance des trajectoires primaires – Corrélation linéaire

Sur la

Figure 36 nous avons placé dans le plan \mathbb{R}^2 les réalisations de 5000 couples $(\epsilon_{taux}^i(1); \epsilon_{equity}^i(1))$.

Nous avons représenté les 50 situations menant aux fonds propres économiques les plus faibles par un triangle rouge. Le scénario adverse à 0,5% et estimant le SCR a été indiqué par le carré vert. Les autres situations moins adverses sont représentées par un point bleu. Nous constatons empiriquement que les situations les plus adverses sont situées en périphérie confortant l'utilisation de la distance pour la caractérisation des situations adverses.

7.1.2 Algorithme

Grâce à cette distance l'algorithme mesure la distance de chacune des P trajectoires *primaires* de l'univers économique. Il procède ensuite par itérations en :

- Calculant les FP_1^P pour les $[M * 0,05\% * P]$ trajectoires de plus grande distance ($M = 4$ dans [8]) à l'aide de S simulations *secondaires*,
- Calculant les FP_1^P pour les $[M * 0,05\% * P]$ trajectoires de plus grande distance suivantes à l'aide de S simulations *secondaires*.

Après l'itération k , l'algorithme ordonne de manière décroissante les $[M * 0,05\% * P]$ plus petites valeurs des $k * [M * 0,05\% * P]$ FP_1 simulées dans le vecteur V_k .

L'algorithme s'arrête à l'itération k si $V_k = V_{k-1}$. Un estimateur de $VaR_{99,5\%}(FP_1)$ est alors donné par :

$$VaR_{99,5\%}(FP_1) = V_k^{[M * 0,05\% * P]}$$

Où $V_k^{[M * 0,05\% * P]}$ désigne la $[M * 0,05\% * P]$ ^{ième} coordonnée du vecteur V_k .

7.1.3 Résultats

Nous avons testé l'algorithme sur la société A1 avec 5000 simulations primaires et 500 simulations secondaires et pour les trois tables stochastiques suivantes :

1. Actif risqué Black-Scholes, modèle de taux Vasicek et corrélation linéaire.
2. Actif risqué Black-Scholes, modèle de taux CIR et corrélation linéaire.
3. Actif risqué Black-Scholes, modèle de taux Vasicek et copule de Clayton.

Le premier article de Loisel et Devineau ne permettait de traiter que le cas des corrélations linéaires. Nous avons transposé l'algorithme de Loisel et Devineau à la copule de Clayton en utilisant le tau de Kendall pour calculer la distance des scénarios :

$$d_i = \sqrt{\epsilon_{equity}^i(1)^2 + \epsilon_{taux}^i(1)^2 - 2\tau * \epsilon_{equity}^i(1) * \epsilon_{taux}^i(1)}$$

Où (voir[33]) :

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

Il n'y a pas de fondement théorique à ce choix, sa pertinence est montrée empiriquement. Par ailleurs, la Figure 37 montre que les situations les plus adverses sont celles situées en périphérie du nuage (la schématisation est la même que celle décrite en Figure 36). Plus précisément, les situations adverses correspondent en particulier à une hausse des taux, confirmant notre analyse qualitative au §6.4.

Table	1 : Vasicek + Corrélation linéaire	2 : CIR + Corrélation linéaire	3 : Vasicek + Copule de Clayton
Convergence ?	Oui	Oui	Oui
Nombre d'itérations ?	3	3	3
Réduction du temps de calcul	66,1%	66,1%	65%

Tableau 11 : Efficacité de l'accélérateur SdS

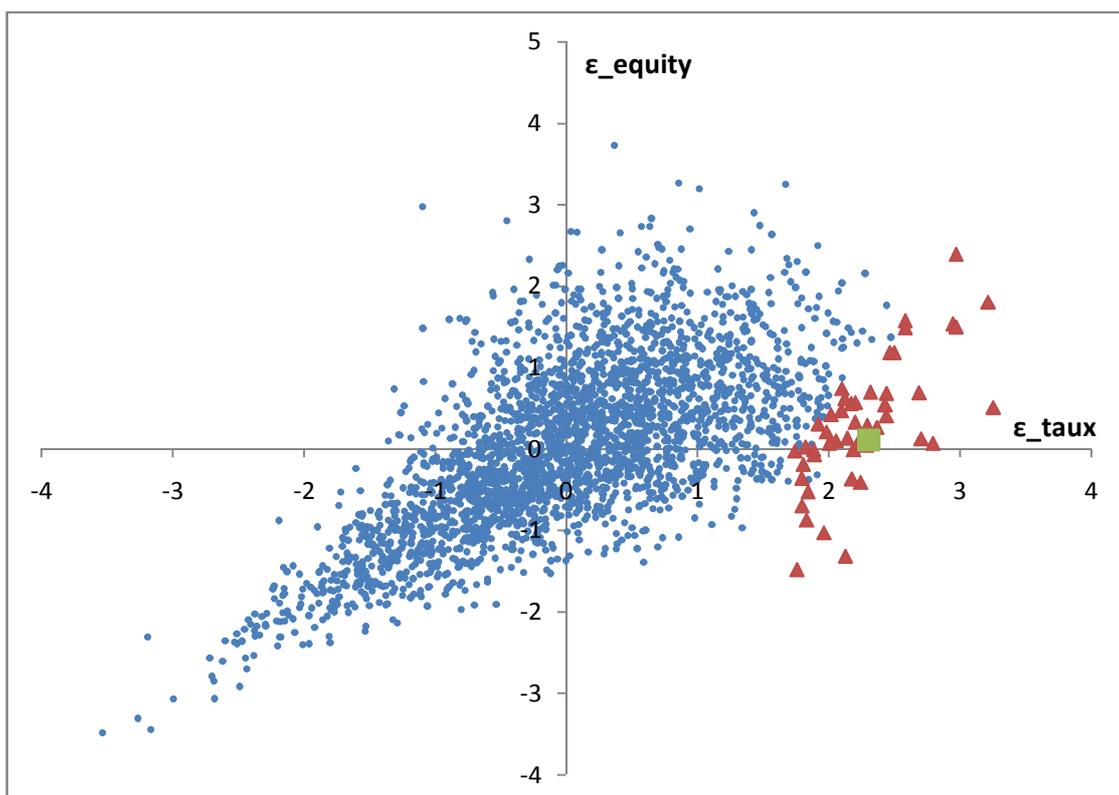


Figure 37 : Facteurs de risque élémentaires - Copule de Clayton

Le Tableau 11 présente les résultats obtenus avec l'algorithme Loisel-Devineau par comparaison avec un SdS complet (5000 simulations primaires avec 500 simulations secondaires) :

1. *Convergence ?* Nous précisons si l'algorithme converge exactement vers la même valeur que la méthode SdS.
2. *Nombre d'itérations ?* Il s'agit du nombre d'itérations nécessaires à l'arrêt de l'algorithme. Dans notre cas, une itération correspond à l'évaluation de $25 \times 4 = 100$ trajectoires primaires.
3. *Réduction du temps de calcul.* Il s'agit de la réduction du temps de calcul évaluée par rapport au temps de calcul du SdS complet.

Le Tableau 11 illustre la grande efficacité de l'algorithme développé par Loisel et Devineau sur notre modèle interne. Dans les trois cas considérés l'algorithme converge vers la même valeur que la méthode SdS. Aussi, la réduction du temps de calcul est supérieure à 65% et rend par conséquent envisageable l'utilisation de deux niveaux de simulations pour l'estimation du SCR.

Le temps de calcul qui a été mesuré comprend celui de la génération des tables stochastiques. Or, l'algorithme n'a été intégré que dans le modèle ALM et pas à l'ESG. Ainsi, l'ESG simule toutes les trajectoires secondaires mêmes celles issues des trajectoires primaires qui ne seront pas chargées par le modèle ALM.

Par conséquent, avec les résultats obtenus, nous estimons que l'implémentation de l'algorithme dans l'ESG permettrait d'obtenir une réduction du temps de calcul d'environ 94%. Toutefois, cette estimation néglige le temps nécessaire à l'interaction dynamique entre le modèle ALM et l'ESG. Par ailleurs, cette interaction dynamique est complexe à mettre en œuvre.

Conclusion

L'estimation du SCR est problématique pour les sociétés d'assurance vie en raison des options cachées et garanties financières intégrées aux contrats. Ce mémoire a exposé une méthode d'estimation du SCR en assurance vie à deux niveaux de simulations : les « *simulations dans les simulations* » (SdS). Nous avons montré, dans le cadre du modèle interne développé, que la méthode SdS convergeait avec un premier niveau de 5000 simulations et un second niveau de 500 simulations.

Un calcul rapide du SCR est indispensable pour une utilisation du modèle interne en gestion actif-passif, reporting financier et prise de décisions par l'organe directionnel, etc. Par exemple, nous avons vu que le SCR peut être réduit à l'aide de caps protégeant du risque du taux. Cependant, la décision d'investissement en caps repose, entre autres, sur des indicateurs économiques estimés avec le modèle interne (SCR, VIF, ratio Solvabilité II, etc.). La valeur de ces indicateurs n'est valable qu'à la date des hypothèses considérées. Par conséquent, leur utilisation dans la prise de décision n'est justifiée que si le calcul est suffisamment rapide.

En raison d'un temps de calcul important, la méthode SdS n'est pas adaptée⁴⁸. A ce titre, nous avons intégré au modèle interne et testé l'accélérateur SdS Loisel-Devineau. Les résultats obtenus attestent de l'efficacité de la méthode réduisant de plus de 65% le temps d'exécution par rapport au SdS. Ce modèle interne amélioré répond aux défauts de la méthode SdS tout en conservant ses avantages.

Pour conclure ce mémoire, n'oublions pas que la directive Solvabilité II ne se limite pas au capital économique et au pilier 1. Les piliers 2 et 3 de la réforme, relatifs aux systèmes de gouvernance et à l'information des marchés, sont tout aussi importants.

Au delà des aspects quantitatifs, Solvabilité II impose un changement culturel.

« Solvency II is not just about capital. It is a change of behaviour »

Thomas Steffen, Chairman, CEIOPS.

⁴⁸ Nous informons le lecteur que le temps de calcul utilisé pour ce mémoire (tests de modèle, production de résultats) est de 4 mois – sur un ordinateur équivalent à celui utilisé en §6.3. Bien entendu, plusieurs ordinateurs ont été utilisés en parallèle tout au long des travaux (5).

8 Annexes

8.1 Liste des acronymes

Liste des acronymes utilisés dans ce document :

ACP	<i>Autorité de Contrôle Prudentielle</i>
ALM	<i>Assets and Liabilities Management</i>
AMICE	<i>Association of Mutual Insurers and Insurance Cooperatives in Europe</i>
AOA	<i>Absence d'Opportunité d'Arbitrage</i>
BSCR	<i>Basic Solvency Capital Requirement</i>
CE	<i>Commission Européenne</i>
CEA	<i>Comité Européen des Assurances</i>
CEIOPS	<i>Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors</i>
CIR	<i>Cox Ingersoll Ross</i>
CP	<i>Consultation Paper</i>
CRDS	<i>Contribution au Remboursement de la Dette Sociale</i>
CRO	<i>Chief Risk Officer</i>
CSG	<i>Contribution Sociale Généralisée</i>
EDS	<i>Equation Différentielle Stochastique</i>
EEA	<i>European Economic Area</i>
EIOPC	<i>European Insurance and Pensions Committee</i>
ESG	<i>Economic Scenario Generator</i>
FCP	<i>Fonds Communs de Placement</i>
FFSA	<i>Fédération Française des Sociétés d'Assurance</i>
FIFO	<i>First In First Out</i>
IASB	<i>International Accounting Standards Board</i>
IFRS	<i>Internal Financial Reporting Standards</i>
IS	<i>Impôt sur les Sociétés</i>
MCEV	<i>Market Consistent Embedded Value</i>
MCR	<i>Minimal Capital Requirement</i>
NAV	<i>Net Assets Value</i>
NS	<i>Nested Simulations</i>
OCDE	<i>Organisation de Coopération et de Développement Economiques</i>
ONC	<i>Orientations Nationales Complémentaires</i>
OPCVM	<i>Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières</i>

PB	<i>Participation aux bénéfices</i>
PE	<i>Parlement Européen</i>
PEA	<i>Plan d'Epargne en Actions</i>
PM	<i>Provisions Mathématiques</i>
PPAB	<i>Provision pour Participation Aux Bénéfices</i>
PPE	<i>Provision pour Participations aux Excédents</i>
ps	<i>Presque sûrement</i>
QIS	<i>Quantative Impact Study</i>
RCAI	<i>Résultat Courant Avant Impôts</i>
RSA	<i>Revenu de Solidarité Active</i>
SCR	<i>Solvency Capital Requirement</i>
SdS	<i>Simulations dans les Simulations</i>
SICAV	<i>Société d'Investissement à Capital Variable</i>
TME	<i>Taux Moyen d'emprunts d'Etat</i>
TMG	<i>Taux Minimum Garanti</i>
UE	<i>Union Européenne</i>
VIF	<i>Value In Force</i>
WWR	<i>Wrong Way Risk</i>

8.2 Exemple du SCR marché

Dans cet exemple, nous nous limitons au calcul du SCR marché. Néanmoins, en assurance vie, la formule standard requiert de calculer aussi les SCR vie, contrepartie, incorporel et opérationnel. Nous avons choisi l'exemple du SCR marché car la difficulté du SdS réside dans les simulations stochastiques générées par l'actif, notamment matérialisées dans le SCR marché.

8.2.1 Contexte

Dans cet exemple, nous calculons une partie du SCR de marché en utilisant la formule standard. Seuls les modules actions et taux ont été calculés. Les informations utilisées pour modéliser la compagnie d'assurance sont inspirées de données réelles.

La détermination des SCR actions et taux se fait par approche *delta NAV*. Elle nécessite donc d'utiliser un modèle ALM. Pour cela, nous avons développé un modèle ALM sous *Prophet* (logiciel actuariel de projection de cash flows) et la librairie *ALS* permettant de réaliser des simulations stochastiques.

Dans cette section, nous présentons les calculs du SCR taux et actions puis nous explicitons comment s'effectue leur agrégation dans le « *SCR marché* ». Pour obtenir le SCR de marché réel proposé par le QIS 5, il suffit de calculer les SCR des autres modules et de les agréger de la même manière que présenté.

8.2.2 Présentation de la compagnie

La compagnie d'assurance simplifiée ne possède qu'un unique produit d'épargne en Euro. Ce produit présente notamment une option participation aux bénéfices de 90% ainsi qu'un taux minimum garanti de 0,60%.

Le bilan comptable de la compagnie est le suivant (en millions d'euros) :

Actif		Passif	
Immobilier	0,0	Fonds propres	3,6
Actions (global)	6,6	Réserve de capitalisation	1,2
Obligations hors coupons courus	73,0	Provision pour participation aux bénéfices	1,4
Coupons courus	1,2	Provisions mathématiques	80,4
Trésorerie	5,8		
Total actif	86,6	Total passif	86,6

Au sein de cette compagnie deux cantons ont été définis permettant de séparer les actifs mis en regard des engagements des actifs propres aux actionnaires. Pour chacun de ces deux cantons une stratégie d'allocation actifs statique a été adoptée. Cette stratégie dépend des scénarios puisque les chocs vont modifier la situation initiale.

8.2.3 Hypothèses

Scénarios stochastiques

Les tables de scénarios stochastiques ont été obtenues à partir d'un générateur de scénarios économiques (ESG) développé par Deloitte LLP UK. Elles sont calibrées d'après les données marché au 31/12/2008.

Simulations

4 scénarios ont été projetés pour déterminer le SCR : central, choc actions, baisse des taux et hausse des taux. La calibration de ces chocs provient du QIS 5 [34]. Pour chaque scénario la NAV a été calculée avec $S = 1000$ simulations et une durée de projection de 20 ans.

Chocs

La compagnie d'assurance modélisée possède des actions de type *global*, le choc à appliquer est un choc à la baisse de 30%.

Les chocs de taux sont plus complexes, l'intégralité de la courbe de taux de référence doit être choquée et le choc à appliquer à chaque taux dépend de la maturité. Aussi, le QIS 5 impose un choc de hausse des taux et un choc de baisse des taux. Ces chocs sont présentés dans le

Tableau 12. Ainsi, si $s(t)$ est le choc à appliquer au taux $r(t)$ de maturité t , le taux choqué aura pour valeur $r_{\text{choc}}(t) = (1 + s(t))r(t)$.

Maturité du taux	Choc à la hausse	Choc à la baisse
0,25	70%	-75%
0,5	70%	-75%
1	70%	-75%
2	70%	-65%
3	64%	-56%
4	59%	-50%
5	55%	-46%
6	52%	-42%
7	49%	-39%
8	47%	-36%
9	44%	-33%
10	42%	-31%
11	39%	-30%
12	37%	-29%
13	35%	-28%
14	34%	-28%
15	33%	-27%
16	31%	-28%
17	30%	-28%
18	29%	-28%
19	27%	-29%
20	26%	-29%
21	26%	-29%
22	26%	-30%
23	26%	-30%
24	26%	-30%
25	26%	-30%

30	25%	-30%
----	-----	------

Tableau 12 : Chocs de taux

Corrélation

Les matrices de corrélation entre les SCR taux et actions ont été extraites de la matrice de corrélation du module marché. Il y a une matrice pour le choc à la hausse des taux et une matrice pour le choc à la baisse des taux.

$correlation_{choc\ baisse}$	SCR action	SCR taux baisse
SCR action	1	0,5
SCR taux baisse	0,5	1

$correlation_{choc\ hausse}$	SCR action	SCR taux hausse
SCR action	1	0
SCR taux hausse	0	1

Le « *SCR marché* » se déduit par la formule :

$$SCR_{marché} = \max(SCR_{choc\ hausse} ; SCR_{choc\ baisse})$$

Où :

$$SCR_{choc\ i} = \sqrt{\sum_{(u,v) \in \{actions ; taux\ i\}^2} correlation_{choc\ i}(u,v) SCR_u SCR_v}$$

$$= \sqrt{SCR_{actions}^2 + SCR_{taux\ i}^2 + 2 correlation_{choc\ i} SCR_{actions}^2 SCR_{taux\ i}^2}$$

Avec $i \in \{hausse ; baisse\}$

La première écriture de $SCR_{choc\ i}$ permet de généraliser l'agrégation de SCR à plus de deux SCR.

8.2.4 Résultats

Dans l'exemple étudié $SCR_{marché} = \max(SCR_{choc\ hausse} ; SCR_{choc\ baisse}) = SCR_{choc\ hausse}$, le résultat était prévisible car le taux minimum garanti du contrat modélisé est faible (0,60%) et, par conséquent, l'assureur est plus exposé à une hausse des taux qu'à une baisse des taux.

Les valeurs numériques, exprimées en millions d'euros, des SCR marginaux ainsi que l'agrégation sont représentées en Figure 38.

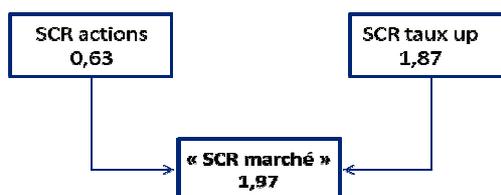


Figure 38 : « *SCR de marché* »

8.3 Pricing de caps par formule fermée dans le modèle de Vasicek

Dans notre modèle, les caps ont pour sous jacent le taux spot de maturité donnée T_{ref} , défini par l'utilisateur, donc $r(t) = R(t, T_{ref})$.

La méthode présentée permet de fournir un prix de marché au cap et de calculer son payoff à chaque date.

Nous proposons une méthode de valorisation du cap par formule fermée dans le cadre du modèle de taux de Vasicek. Il est impossible d'obtenir de formule fermée pour le prix du cap dans un modèle CIR car la volatilité des zéro coupons est stochastique contrairement au modèle de Vasicek où elle est déterministe. Comme nous l'avons précisé précédemment, le cap est une somme de caplets. Nous allons donc d'abord déterminer le prix d'un caplet puis nous en déduisons le prix d'un cap.

Définition

Le caplet est un cap n'ayant qu'une seule date dans son échéancier (sa maturité). Le cap est donc une somme de différents caplets.

Théorème

Soit un caplet arrivant à maturité en T , de nominal N , de strike K , de taux de référence $r(\cdot)$ et soit Δ la période de couverture : les intérêts calculés dans le payoff le sont sur la période $[T - \Delta; T]$. Le prix du caplet en $t < T - \Delta$ est équivalent au prix en t de $(1 + \Delta K)$ puts d'échéance $T - \Delta$ sur un zéro coupon d'échéance T , de strike $\frac{N}{1 + \Delta K}$ en nombre $(1 + \Delta K)$.

Démonstration

Soit $r(T)$ le taux effectif sur la période $[T - \Delta; T]$. Alors le payoff du cap considéré en T est donné par :

$$\begin{aligned} \text{payoff}(T) &= \underbrace{N\Delta(r(T) - K)^+}_{\text{payé en } T} \stackrel{\text{Par AOA}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\frac{N\Delta}{1 + \Delta r(T)}(r(T) - K)^+}_{\text{payé en } T-\Delta} \\ &= \left(N \left\{ \frac{r(T)}{1 + \Delta r(T)} + \frac{1}{1 + \Delta r(T)} - \frac{1}{1 + \Delta r(T)} \right\} - \frac{N\Delta K}{1 + \Delta r(T)} \right)^+ = \underbrace{\left(N - \frac{N(1 + \Delta K)}{1 + \Delta r(T)} \right)^+}_{\text{payé en } T-\Delta} \\ &= \underbrace{(1 + \Delta K) \left(\frac{N}{1 + \Delta K} - \frac{N}{1 + \Delta r(T)} \right)^+}_{\text{payé en } T-\Delta} \end{aligned}$$

$\frac{N}{1 + \Delta r(T)}$: prix en $T - \Delta$ d'un zéro coupon d'échéance T qui paie N en T .

Cette dernière égalité représente le payoff de $(1 + \Delta K)$ puts d'échéance $T - \Delta$ sur un zéro coupon d'échéance T , de strike $\frac{N}{1 + \Delta K}$. Par absence d'opportunités d'arbitrage les prix des puts considérés et du caplet son égaux, ce qui achève la preuve du théorème.

Théorème

Dans le modèle de Vasicek. Le prix d'un call en t , de strike K , de maturité $T \leq T_{ZC}$ sur le zéro coupon $P(t, T_{ZC})$ est donné par :

$$\text{Call}_t(T_{ZC}, K, T) = P(t, T_{ZC})N(d_1) - KP(t, T)N(d_0)$$

Où nous avons noté :

$$d_1 = \frac{1}{\Sigma_{t,T}} \ln \left(\frac{P(t, T_{ZC})}{KP(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_{t,T}$$

$$d_0 = d_1 - \frac{1}{2} \Sigma_{t,T}$$

$$\Sigma_{t,T} = \sqrt{\int_t^T (\sigma^p(s, T_{ZC}) - \sigma^p(s, T))^2 ds}$$

Et $\sigma^p(s, u)$ la volatilité du zéro coupon $P(s, u)$, $u > s$. Dans le modèle de Vasicek, nous avons :

$$\sigma^p(s, u) = \frac{\sigma(1 - e^{-a(u-s)})}{a}$$

Donc nous pouvons en déduire une formule explicite pour $\Sigma_{t,T}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{t,T}^2 &= \int_t^T (\sigma^p(s, T_{ZC}) - \sigma^p(s, T))^2 ds = \int_t^T \left(\frac{\sigma(1 - e^{-a(T_{ZC}-s)})}{a} - \frac{\sigma(1 - e^{-a(T-s)})}{a} \right)^2 ds \\ &= \int_t^T \left(\frac{\sigma(e^{-aT_{ZC}} - e^{-aT})}{a} e^{as} \right)^2 ds = \frac{\sigma^2(e^{-aT_{ZC}} - e^{-aT})^2}{2a^3} (e^{2aT} - e^{2at}) \end{aligned}$$

Démonstration

La démonstration de ce théorème est donnée en [16].

Théorème

Soit un caplet arrivant à maturité en T , de nominal N , de strike K , de taux de référence $r(\cdot)$ et soit Δ le pas de temps de l'échéancier $\{t_1; \dots; t_k\}$. Son prix en $t \leq t_1 - \Delta$ est donné par :

$$Cap_t(r(\cdot), K, T) = \sum_{j=1}^k \left\{ -P(t, t_j) N(d_0^j) + \frac{1}{1 + \Delta K} P(t, t_j - \Delta) N(d_1^j) \right\}$$

Où :

$$d_1^j = \frac{1}{\Sigma_{t, t_j - \Delta}} \ln \left(\frac{P(t, t_j - \Delta)}{P(t, t_j)(1 + \Delta K)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_{t, t_j}$$

$$d_0^j = d_1^j - \frac{1}{2} \Sigma_{t, t_j - \Delta}$$

$$\Sigma_{t, t_j - \Delta} = \frac{\sigma^2(e^{-at_j} - e^{-a(t_j - \Delta)})^2}{2a^3} (e^{2a(t_j - \Delta)} - e^{2at})$$

Démonstration

La démonstration de ce théorème est donnée en [16].

Ce dernier théorème permet d'obtenir une formule fermée pour le prix d'un cap dans le cadre d'un modèle de Vasicek. Sa mise en œuvre permettrait d'optimiser le temps de calcul de l'ESG.

8.4 Algorithme de composition Cholesky

Nous proposons ci-dessous l'algorithme de Cholevsky qui a été implémenté dans l'ESG.

$A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie positive.

$A = LL^T$ d'après le théorème de Cholesky nous avons $\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$:

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^d L_{i,k} L_{k,j}^T \underset{\substack{\equiv \\ L \text{ est triangulaire inférieure}}}{=} \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{i,k} L_{j,k}$$

1. Construction de la première colonne de L :

Avec l'égalité présentée ci-dessus, pour $i = 1$ nous déterminons la première ligne de L en commençant par $j = 1$:

$$A_{1,1} = L_{1,1} * L_{1,1}$$

D'où :

$$L_{1,1} = \sqrt{A_{1,1}}$$

Puis pour $j = 2$ et en réinjectant la valeur calculée ci-dessus :

$$A_{1,2} = L_{1,1} * L_{2,1}$$

D'où :

$$L_{2,1} = \frac{A_{1,2}}{L_{1,1}}$$

Le calcul des $L_{j,1}$ est obtenu par récurrence pour $j > 2$:

$$L_{j,1} = \frac{A_{1,j}}{L_{1,1}}$$

2. Pour le calcul des autres colonnes de la matrice L nous utilisons la boucle suivante :

Initialisation : $j = 2$

Tant que $j \leq d$ faire :

Puisque L est triangulaire inférieure, nous avons :

$$\forall i \in \llbracket 1; j-1 \rrbracket \quad L_{i,j} = 0$$

Puis nous commençons par déterminer le coefficient diagonal $L_{j,j}$.

Par définition :

$$A_{j,j} = \sum_{k=1}^j L_{j,k} L_{j,k} = L_{j,j}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2$$

Or les coefficients $L_{j,k}$ pour $k \in \llbracket 1; j-1 \rrbracket$ ont déjà été déterminés dans les itérations précédentes et nous posons :

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

Nous déterminons ensuite les coefficients restants $L_{i,j}$ pour $i \in \llbracket j+1; d \rrbracket$:

Or, par définition :

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^j L_{i,k} L_{j,k} = L_{i,j} L_{j,j} + \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}$$

Tous les coefficients de l'équation précédente ont déjà été calculés dans des itérations précédentes sauf $L_{i,j}$ donc il vient :

$$L_{i,j} = \frac{A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}}{L_{j,j}}$$

Incrémentation de la boucle : $j \leftarrow j + 1$

8.5 Approximation numérique de N^{-1}

L'approximation numérique de N^{-1} , inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, utilisée dans l'ESG est la suivante :

Pour une erreur $|\varepsilon| < 4.5 \cdot 10^{-4}$ nous pouvons utiliser l'approximation décrite ci-dessous si $x \in]0; 0.5]$ et utiliser des considérations de symétrie de la loi normale pour $x \in [0.5; 1[$:

$$N^{-1}(x) \approx t - \frac{d_0 + d_1 t + d_2 t^2}{1 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3}$$

Avec :

$$t = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

Et :

$$d_0 = 2.515517$$

$$d_1 = 0.802853$$

$$d_2 = 0.010328$$

$$f_1 = 1.432788$$

$$f_2 = 0.189269$$

$$f_3 = 0.001308$$

8.6 Rachats

Le modèle ALM développée utilise la démarche proposée par l'ACP dans les ONC du QIS 5 pour modéliser les rachats. L'extrait du texte publié par l'ACP est proposé ci-dessous :

En plus des rachats structurels que l'assureur peut observer dans un contexte économique « normal » sur les contrats d'assurance-vie épargne euro, l'assureur doit tenir compte de rachats conjoncturels ; ceux-ci interviennent notamment dans un contexte fortement concurrentiel lorsque l'assuré arbitre son contrat d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assuranciers, bancaires ou immobiliers).

8.6.1 Modélisation des rachats structurels

Pour la modélisation des rachats structurels, les participants doivent utiliser des lois d'expérience si celles-ci sont conformes aux observations passées, ou à défaut des données de marché.

Ces lois de rachat peuvent dépendre de nombreux paramètres (âge de l'assuré, ancienneté fiscale, environnement financier, ...). Toutefois pour le QIS5, les organismes participants sont invités à choisir une modélisation appropriée en fonction des contraintes de granularité du portefeuille, de faisabilité des calculs et de validation des hypothèses. Cependant, dans le cadre de la proportionnalité il pourrait être acceptable qu'un organisme considère, sous justification dans le cadre du QIS5, que les taux de rachat structurels soient indépendants des paramètres mentionnés précédemment et utilise un taux moyen unique applicable à tous les contrats du groupe homogène de risque.

8.6.2 Modélisation des rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels sont couramment modélisés par une fonction dépendant uniquement de l'écart entre le taux servi et un taux dépendant de l'environnement économique, souvent appelé taux de rendement espéré par l'assuré.

Compte tenu de leur nature, les rachats conjoncturels ne peuvent pas être estimés à l'aide de lois d'expérience. Les orientations nationales complémentaires du QIS4 avaient donc spécifié en annexe une fonction de rachat unique harmonisée. Pour QIS5, l'approche permet de mieux appréhender les différences de comportement de rachats en fonction de groupes homogènes d'assurés. Il est ainsi proposé deux lois de rachat pour le QIS5 ; l'une correspondant à un plafond maximum de rachats et l'autre correspondant à un minimum de rachats. Les organismes participant sont invités à ajuster leur loi de rachat dynamique afin que celle-ci soit à l'intérieur du tunnel ainsi constitué.

8.6.3 Lois de rachat maximales et minimales

Le taux de rachats conjoncturels RC devra être additionné au taux de rachats structurels RS. Si le taux servi est inférieur au taux attendu (TA) par les assurés, ces derniers auront tendance l'année suivante à racheter plus que ne l'indique la courbe de rachats structurels. A l'inverse, si les assurés se voient offrir un taux supérieur à leurs attentes, ils rachèteront l'année suivante moins que par le passé. Par exemple, les organismes peuvent utiliser le TME observé comme estimateur du taux attendu par les assurés. Le taux de rachats conjoncturels est fonction de l'écart entre le taux servi R et le TA :

$$RC(R) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } R - TA < \alpha \\ RC_{max} \frac{R - TA - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq R - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq R - TA < \gamma \\ RC_{min} \frac{R - TA - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq R - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } R - T \geq \delta \end{cases}$$

	α	β	γ	δ	RC_{min}	RC_{max}
Plafond max	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Plafond min	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

Les différents paramètres peuvent s'interpréter de la façon suivante :

- α est le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à RC_{max} . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.
- β et γ sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces 2 seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié.
- δ est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixée à RC_{min} . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

Le taux de rachat total RT s'exprime alors comme :

$$RT(R, TA, \dots) = \min\{1; \max[0; RS(\dots) + RC(R, TA)]\}$$

8.7 Retraitement de fin de projection

Cette annexe propose quelques extraits des ONC du QIS 5 [24] précisant les retraitements à effectuer en fin de projection :

8.7.1 Horizon de projection des cash flows

Le choix de l'horizon de projection des cash-flows doit être propre au groupe homogène de risque modélisé. Il doit être suffisamment long pour que la différence entre les provisions calculées avec cet horizon et celles calculées jusqu'à extinction totale du portefeuille soit non matérielle.

L'horizon de projection des cash-flows peut être inférieur à la liquidation totale du portefeuille pour limiter les temps de calcul, mais cette hypothèse n'est pas équivalente à l'hypothèse de fin d'activité, ainsi les hypothèses de revalorisation pour la dernière année de simulation doivent être cohérentes avec celles observées les autres années.

A la fin de l'horizon de simulation, l'épargne accumulée est supposée intégralement rachetée par les assurés et le solde de la PPB à cette date sera incorporé à ces rachats (conformément aux dispositions sur le calcul du BE mentionnées plus haut).

Les autres hypothèses retenues doivent être réalistes, en particulier elles devront être compatibles avec les engagements contractuels de l'organisme. En particulier, si à la fin de l'horizon de projection, le rachat total par les assurés induit la réalisation d'une plus value latente, son attribution à chaque groupe homogène d'assuré devra respecter les clauses de participation aux bénéfices contractuelles de ces derniers.

8.7.2 Réserve de capitalisation

Pour les entreprises pratiquant l'assurance-vie et plus généralement les assurances avec participation aux bénéfices financiers, la réserve de capitalisation joue un rôle dans l'évaluation des flux futurs envers les assurés. Les produits financiers utilisés pour évaluer le minimum de participation aux bénéfices réglementaire ou contractuel tiennent compte de la capacité de la réserve de capitalisation à absorber les moins-values obligataires. Ainsi il est nécessaire que les participants évaluent dans leurs projections les mouvements de la réserve de capitalisation et leur impact sur les flux futurs. La politique obligataire de l'organisme dans les modèles actif-passif doit être cohérente avec la politique obligataire pratiquée sous l'hypothèse de continuité d'activité. A la fin de l'horizon de simulation, le solde de la réserve de capitalisation n'est aucunement reversé aux assurés.

9 Bibliographie

- [1] European Commission, *Directive Solvabilité II*. 2009.
- [2] European Commission, *QIS5 Technical Specifications*. 2010.
- [3] Shaw, Smith, and Spivak, "Measurement and Modelling of Dependencies in Economic Capital," 2010.
- [4] Pfeifer and Strassburger, "Solvency II: Stability problems with the SCR aggregation formula," vol. No. 1, 61 – 77, 2008.
- [5] CEA/CG, "Solvency II Glossary," in .
- [6] European Commission, "Consultation Paper 56 « Tests and Standards for Internal Model Approval », " 2009.
- [7] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," vol. Vol. 81, No. 3, 1973.
- [8] Loisel and Devineau, "Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II," *Bulletin Français d'Actuariat (BFA)*, No. 17, Vol. 10, pp. 188-221, 2009.
- [9] Hai and Staum, "A confidence interval for tail conditional expectation via two-level simulation," 2007.
- [10] Planchet, Thérond, and Kamega, *Scénarios économiques en assurance : Modélisation et simulation*. Paris: ECONOMICA, 2009.
- [11] Piermay, Mathoulin, and Cohen, *La Gestion-Passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel*, ECONOMICA, Ed. 2002.
- [12] Greenberger, "Notes on a new pseudo-random number generator," *Journal of the ACM*, vol. vol. 8, n°2, 1961.
- [13] Park and Miller, "Random number generators: Good ones are hard to find," *Communications of the ACM*, vol. vol.31, n°10, 1988.
- [14] Black and Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, vol. Vol. 81, No. 3, 1973.
- [15] Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of financial Economics*, vol. vol. 5, pp. 177-188, 1977.
- [16] Martellini and Priaulet, *Produits de taux d'intérêt - Méthode dynamiques d'évaluation et de couverture*, 2nd ed., ECONOMICA, Ed. 2004.
- [17] Kloeden and Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1995.
- [18] Cox, Ingersoll, and Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, vol. Vol. 53, 1985.
- [19] Diop, "Sur la discrétisation et le comportement à petit bruit d'EDS multidimensionnelles dont les coefficients sont à dérivée singulière," INRIA Thèse, 2003.
- [20] AXA, "Rapport annuel 2009 - Document de référence," 2009.
- [21] Armel, "Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques - Modélisation et Simulation," Mémoire d'actuaire EURIA, 2010.
- [22] Gautier, "Utilisation du calcul d'erreur et des fonctions copules pour le calcul de la sensibilité à l'intensité

de processus de défauts lorsque les défauts sont dépendants," ENSAE Mémoire de stage Crédit Agricole Indosuez Fixed Income - Quantitative research, 2002.

- [23] Roncalli, *Gestion des Risques Multiples ou Copules et Aspects Multidimensionnels du Risque*, C. E. d. 3. année, Ed. 2002.
- [24] Autorité de Contrôle Prudentielle, "Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques Solvabilité 2 – 5ème étude d'impact (QIS5)," 2010.
- [25] ACAM, "Rapport d'activité," 2008.
- [26] Chauvigny, Devineau, Loisel, and Maume-Deschamps, "Fast remote but not extreme quantiles with multiple factors. Applications to Solvency II and Enterprise Risk Management," 2010.
- [27] Gordy and Juneja, "Nested Simulation in Portfolio Risk Measurement," 2008.
- [28] Revelen, « *Replicating Portfolio* » et *capital économique en assurance vie*. Paris: Swiss Life, Ecole Centrale de Lyon, rapport de stage ingénieur, 2009.
- [29] Grigorov and Phung, "Solvency II et modèle interne en assurance vie : utilisation des techniques quantitatives de type «replicating portfolio»," 2010.
- [30] Milliman, "Replicating Portfolios, An Introduction: Analysis and Illustrations," 2009.
- [31] Bauer and Bergmann, "Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach," 2009.
- [32] Dastarac and Sauveplane, "Les déflateurs : quelle utilisation en assurance ?," in *SEPIA n°5*, 2010.
- [33] Frees and Valdez, "Understanding relationship using copula," *North American actuarial journal*, vol. vol. 2, 1998.
- [34] European Commission. (2010) http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/.
- [35] C. Sauvet, "Solvency II - Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non-vie ?," 2006.
- [36] Martellini and Priaulet, *Produits de taux d'intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*. ECONOMICA, 2004.
- [37] FFSA, "Rapport annuel," 2009.
- [38] Kaltwasser and LeMoine, "Modèles de Risques et Solvabilité en assurance Vie," 2004.
- [39] Dourneau, "Solvency II : Du risque de marché au modèle interne de risque," 2008.