

**PROMOTION 2011**

**Mémoire d'actuariat présenté pour l'obtention du  
Diplôme d'Actuaire du CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES**

**Par : Herbert GROSCOT**

**UNE APPLICATION DU CONTROLE STOCHASTIQUE  
SUR DES CONTRATS EN EUROS.**

**Directeur du mémoire : Alain ROBIDEL**

**Membres du Jury : - en rédaction réservée –**

**Invité : Jean BERTHON**



## TABLE DES MATIERES

Note de Synthèse.....	7
Abstract.....	11
Remerciements.....	15
Notations, Sigles .....	17
1 Introduction.....	19
2 Le contrôle stochastique dans le cadre d'une gestion de portefeuille d'assurance vie.....	29
2.1 De la gestion d'actifs sous contrainte de rachats conjoncturels au contrôle stochastique ..	30
2.1.1 Gestion d'actifs et contrôle stochastique.....	30
2.1.2 Les ingrédients du contrôle stochastique.....	31
2.2 Le fermier de Bertsekas illustre les gains économiques possibles grâce aux techniques de contrôle stochastique .....	32
2.3 Une généralisation de l'exemple du fermier de Bertsekas applicable à des objectifs financiers : optimisation dans le cas où les processus évoluent en temps discret .....	36
2.4 Application du contrôle stochastique à la gestion d'actif en temps continu, et avec aptitude aux rachats potentiels .....	45
2.4.1 Les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dans le cas continu .....	45
2.4.2 Un exemple : le modèle présenté par Merton en gestion d'actifs .....	54
2.4.3 Equation HJB dans une extension du modèle de Merton où le taux suit le modèle de Hull White à un facteur. ....	59
2.4.4 Le modèle de Merton dans le cas d'un choc systémique .....	77
2.5 Annexe : Présentation du modèle de Hull-White à un facteur .....	81
3 Un modèle continu : une introduction aux processus avec rachats.....	85
3.1 Une extension du modèle de Merton avec prise en compte des rachats conjoncturels dans un contexte d'assurance-vie. ....	86
3.1.1 Participation aux bénéfices, taux servi.....	86
3.1.2 Dynamique des actifs.....	90

3.1.3	Les comportements de rachats .....	90
3.1.4	La dynamique du portefeuille.....	91
3.1.5	L'attitude face à la ruine de l'assureur .....	92
3.1.6	La fonction d'efficacité .....	93
3.2	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman du problème.....	93
3.2.1	Formulation de l'équation .....	93
3.2.2	Exploitation du caractère homogène de J .....	94
3.3	Premières propriété élémentaires .....	96
3.4	Exemple numérique.....	100
4	Utilisation du module de Merton Généralisé dans un cas de gestion de portefeuille d'assurance vie	109
4.1	Un contrat type avec les éléments essentiels pour les calculs.....	109
4.1.1	Gestion du portefeuille dans un modèle collectif.....	109
4.1.2	La PM et la PPB.....	110
4.1.3	Taux minimum garanti .....	110
4.1.4	Frais de gestion, participation aux bénéfices, prélèvements sur encours.....	112
4.1.5	Le taux servi aux assurés .....	118
4.1.6	Les comportements de rachats .....	121
4.2	Les variables de contrôle.....	126
4.3	Les critères de performance .....	126
4.3.1	Le choix des critères de performance.....	126
4.3.2	Définition de la fonction de valeur.....	127
4.4	Le déroulement des programmes d'optimisation.....	129
4.5	Les expérimentations.....	133
4.5.1	Les données de base .....	133
4.5.2	Les indicateurs mesurés.....	136
4.5.3	Tests dans le cas nominal .....	137
4.5.4	Variations autour du cas nominal .....	144
4.5.5	Utilité des stratégies .....	149
5	Conclusions.....	151

Bibliographie.....157



## NOTE DE SYNTHÈSE

Populaire, « socle fondateur de l'épargne longue », l'assurance vie représente en France un encours d'environ 1 300 milliards Euros (soit la moitié de l'épargne des ménages). Les contrats en euros, qui constituent environ 80% de l'assurance vie, sont perçus comme offrant de nombreuses garanties, en raison de l'effet cliquet qui les caractérise.

Le taux garanti, souvent publié en début d'année par les assureurs ou les bancassureurs, joue le rôle d'un taux sans risque pour l'assuré, notamment dans le cas d'un rachat anticipé sans pénalité. Dans ce cas, de son point de vue, le contrat devient une boîte magique qui transforme un taux long en un taux court.

En général, les rachats ou les fins de contrats sont équilibrés par la collecte. Toutefois, la baisse de la collecte ou les rachats massifs constituent une menace récurrente pour la profession, même si, en France, la situation n'a jamais été aussi critique que lors de certains épisodes aux Etats-Unis.

Classiquement, la possibilité de rachat est traitée comme une option, approche qui permet d'ajuster les indemnités en cas de rachat à partir du coût de cette option – lorsque ces indemnités sont effectivement prévues.

Au sein de ce mémoire, nous adoptons un autre point de vue, celui d'une « gestion de portefeuille » : La survie de l'entreprise d'assurance, menacée par les garanties offertes aux souscripteurs, est traitée en optimisant l'efficacité du portefeuille associé au contrat.

Nous utilisons pour cela des techniques dites de contrôle optimal, ou encore contrôle stochastique dont un modèle en finance a été proposé dès 1969 par Merton.

A notre connaissance, l'emploi du contrôle stochastique pour la gestion de portefeuille sous contrainte de rachat constitue une nouveauté et l'objectif de ce mémoire est de montrer ce que cette technique apporte, dans le cas de sa gestion dynamique, en prenant en compte des rachats conjoncturels en cas de mauvaise performance.

Nous travaillons sur un « cas d'école » qui permet de poser le problème et laisse l'assureur agir sur des « paramètres de contrôle » en cherchant à optimiser une certaine « valeur », cette dernière faisant elle aussi l'objet d'un choix.

Les paramètres sur lesquels l'assureur peut agir sont les suivants :

- Le taux minimum garanti en début d'année, qui est censé rassurer les souscripteurs mais engage l'assureur avec un risque de perte en cas de mauvaises performances du portefeuille,
- La Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB), qui est distribuable sous 8 ans, mais constitue une sécurité en cas de chute des cours : l'assureur a la possibilité de puiser dans la PPB pour respecter un taux de rendement « de marché » destiné aux assurés,
- La composition du portefeuille (action, obligation, monétaire), comme cela est fait couramment lorsqu'on emploie les techniques de contrôle optimal.

La fonction définissant la valeur à optimiser doit, quant à elle, intégrer les gains potentiels de l'assureur, les gains potentiels de l'assuré, ainsi qu'une attitude face au risque afin d'empêcher un assureur de trop miser sur la volatilité d'actifs risqués. Nous menons au sein de ce mémoire une discussion qui nous amène à choisir le cumul des résultats actualisés de l'assureur. En effet, le système français de clauses de participations aux bénéficiaires entraîne une forte corrélation entre ce résultat et les bénéfices distribués aux assurés. De plus, les rachats diminuent la valeur globale du portefeuille et les résultats afférents en cas de mauvaise performance pour les assurés, confirmant qu'un bon résultat pour l'assureur entraîne un bon résultat pour l'assuré.

Notre problème revient alors à répondre à la question suivante : « quelle est la bonne stratégie à adopter en terme de taux garanti, de PPB et de gestion dynamique de portefeuille en courant d'année de manière à optimiser la valeur choisie ».

Comme nous sommes en environnement incertain, ce n'est pas la valeur elle-même qui est optimisée mais son espérance.

Le contrôle stochastique est une branche des mathématiques employée en ingénierie, qui permet de contrôler des objectifs économiques ou opérationnels dans un environnement incertain. Les applications numériques font appel à une technique de calcul nommée « programmation dynamique ». Contrairement à des méthodes de type Monte Carlo qui donnent des résultats en déroulant un programme « en avant », c'est à dire en suivant le temps, la programmation dynamique fonctionne en « chaînage arrière » et agit en remontant le temps. Le principe général consiste à optimiser l'instant présent en « connaissance du futur » puis de remonter dans le temps. Un raisonnement mathématique permet alors d'en déduire les équations de Bellman et les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman.

En actuariat, le contrôle stochastique est étudié depuis plus d'une décennie, principalement dans le monde germanophone. Les applications les plus concrètes existantes à ce jour ont lieu en réassurance. Historiquement, les fonctions de valeur qui sont optimisées sont issues de la théorie de la ruine de Lundberg. Ce qui est recherché est alors la probabilité maximale de survie à long terme. Ce n'est que plus tard que l'on pense à optimiser des critères financiers (dividendes, mix entre fonds propres et bénéfices distribués aux assurés).

La technique est alors employée en amont des méthodes classiques afin de guider le choix des stratégies, par exemple les paramètres de réassurance (priorité, ...) aussi bien en excédent de sinistre qu'en réassurance proportionnelle. Une fois les stratégies choisies, les méthodes actuarielles classiques sont appliquées.

En raison de la relative nouveauté de la technique, nous lui consacrons un chapitre complet dans ce mémoire (le chapitre 2).

Avant d'aborder un cas concret, nous nous posons, au chapitre 3, dans le cadre d'un modèle en temps continu, la question « Que dire d'une gestion de portefeuille dans un contexte de participations aux bénéficiaires et de menace de rachats en cas de mécontentement des assurés ». Nous sommes confrontés à un phénomène connu : des attitudes qui sont normales (exigences de participation aux bénéfices, menace d'aller voir ailleurs en cas de mauvaises performances)

entraînent, pour l'assureur, une « pression » ou « augmentation de l'aversion au risque », d'où une baisse du rendement espéré pour les souscripteurs par rapport à ce qu'ils auraient initialement pu attendre en appliquant le modèle initial proposé par Merton.

Ainsi, avec un taux sans risque de 2,5%, dans un contexte où les actions rapporteraient 7,5% et où le modèle de Merton permettrait de proposer un rendement espéré de 5%, nous observons une prudence ne permettant d'espérer qu'un rendement de 3,1% à 3,2%.

Le chapitre 4 se situe dans un cadre plus concret. Il se place dans une optique de gestion de portefeuille pour un contrat type dont les mécanismes principaux ont été élaborés spécifiquement avec le mentor du mémoire, Alain Robidel.

Il s'agit d'un contrat en euros avec clause de PB (95% dans notre « cas nominal »), un prélèvement sur encours de 0,5% couvrant les frais de gestion pris à 0,4% de la PM. Les assurés attendent un taux servi calé sur le TME, comme proposé lors des exercices QIS4 et QIS5. Ce dernier est déduit d'un modèle stochastique de taux (Hull-White à un facteur) calibré à partir des données Reuters à fin 2010 pour ses paramètres et calé sur la courbe de taux en euros du QIS5. L'assureur a le droit de placer jusqu'à 50% de ses actifs en actions.

Nous effectuons un net distinguo dans la manière de traiter ce qui est destiné à l'assureur et aux assurés, notamment pour juger de la pertinence de la PPB. Dans cette optique, le résultat de l'assureur est sorti en fin d'année du portefeuille.

Ce chapitre 4 met en musique une extension du modèle de Merton que nous appelons « Module de Merton Généralisé ».

Ce module optimise la gestion dynamique d'un portefeuille en actions et obligations sur la base d'une fonction d'utilité quelconque définie à une échéance T donnée, avec :

- Un modèle stochastique de taux (Hull-White),
- Une borne supérieure pour la composition en actions,
- L'interdiction de vente à découvert et l'interdiction d'emprunter.

Le caractère quelconque de cette fonction d'utilité permet de prendre en considération la baisse des perspectives pour l'assureur due aux rachats.

Les tests sont effectués sur un cas nominal. Dans tests complémentaires sont exécutés pour examiner la sensibilité des résultats aux paramètres et comprendre les effets de lissage apportés par la PPB et le taux garanti. Nous avons observé les points suivants :

Sur la pertinence du taux garanti : Dans les essais qui interprètent le code à la lettre, le taux garanti agit comme un « lissage inversé ». Il oblige l'assureur à sacrifier une partie des résultats pour les distribuer aux assurés, afin que ces derniers ne procèdent pas à des rachats. Il est souvent faible, et inférieur aux bornes données dans le code des assurances. Sur 8 ans sa moyenne est souvent inférieure 1%. Si ce taux devait être interprété comme un taux technique, la possibilité de proposer un taux garanti serait conditionnée à l'existence d'une PPB.

Utilité de la PPB : Nous observons sur la PPB un effet classique de lissage des résultats. Nous voyons qu'elle est nécessaire mais difficile à constituer. Avec une moyenne effective de l'ordre de 0,8%, même si elle est constituée, elle est en général employée rapidement les années suivantes. Dans cette optique, le délai de 8 ans sous lequel elle doit être redistribuée aux assurés n'est pas un obstacle.

Concernant la gestion dynamique du portefeuille, nous observons trois zones dépendant de sa valeur.

Lorsque le portefeuille atteint de grandes valeurs (typiquement, plus de 115% de la PM), ce qui correspond à une bonne performance, il est géré suivant le modèle de Merton.

Lorsque le portefeuille est en situation de perte, le seul moyen de remonter la pente est de jouer sur la volatilité, ce qui implique une forte composante en actions et/ou en obligations de duration longues.

Dans une zone intermédiaire, qui semble être large, de 100% à 115/118% de la valeur de la PM, nous nous trouvons dans une zone risquée où la stratégie consiste à augmenter la part en monétaire par rapport au reste (ou à diminuer fortement la duration des obligations). Qualitativement, cela ressemble à une stratégie de couverture d'option lorsque l'actif sous-jacent descend trop bas. Toutefois, cette zone existe encore lorsque les rachats sont neutralisés : outre les rachats, l'effet cliquet du portefeuille constitue un risque important.

La fonction d'utilité est convertie en Cash Flow Constant Equivalent, et dans les hypothèses que nous testons (qui sont sévères !), un portefeuille dégage couramment un résultat de 0,25 à 0,3% par an. Les rachats conjoncturels varient couramment de 7 à 12%, ruine incluse, rachats structurels exclus.

Ces résultats montrent la sévérité de 3 facteurs que nous avons pris en compte :

- La gestion des obligations en valeur de marché,
- Le temps d'arrêt à la ruine,
- L'absence de collecte pour rééquilibrer les rachats.

Outre les prolongements de l'étude, décrits dans la conclusion (étude mathématique du modèle continu, exploitation d'architectures parallèles pour étendre notre modèle sur un plus grand nombre de paramètres, exploitation du maillage des éléments finis pour la mesure d'indicateurs au lieu de l'emploi de méthodes de Monte Carlo) les deux axes opérationnels qui doivent faire l'objet d'une attention particulière sont :

- L'étude et le calibrage de la collecte en regard des rachats,
- L'optimisation de la gestion en HTM des obligations.

## ABSTRACT

Popular, basic foundation of long-term savings, life-insurance business represents in France a reserve amounting to 1 300 billion Euros, (about half of household savings). The so-called “euro contracts”, which constitute about 80% of this amount, are considered as offering many guarantees because of the ratchet effect that they give rise to.

Insurance companies often publish a so-called “guaranteed rate” at the beginning of the year that has the same effect as a riskless rate from the point of view of the subscriber, for example in case of early surrender without penalty for the contract. The contract becomes a magic box which transforms a long term rate into a short term rate.

Generally, raising of new business and surrenders equilibrate themselves. However, fall of new business or massive surrenders constitute a real threat for life insurance companies, even if the situation in France has never been as critical as at certain periods in the United States.

Historically, the possibility of surrender for a contract is considered as an option. This approach allows the computation of penalties that are adjusted to the price of this option – when such penalties are specified.

In this thesis, we adopt another approach, which is derived from portfolio management. Insurance company survival is treated by means of portfolio optimization, so as to minimize the menace generated by subscriber guarantees.

For this purpose, we use optimal control, or stochastic control techniques the model of which in finance was proposed by Merton as early as 1969.

As far as we know, using stochastic control for portfolio management with surrender constraints is something new and the main objective of this thesis is to show how this technique may help for dynamic portfolio management including surrender due to economic conditions and bad performances from subscriber point of view.

For this purpose, we consider a case-study where the problem is clearly stated and where the insurer is allowed to act on “control parameters” so as to optimize a given “function value”. The choice of the function value is a result from economic considerations.

The insurer is allowed to act on the following parameters :

- Guaranteed rate at the beginning of the year. It will be favorable for the subscriber but it commits the insurer, which is risky in case of bad performances of the portfolio,
- A specific “profit-sharing reserve”, which, by law, has to be given back to subscribers after an 8 years maximum delay, and which constitutes a safety net if short term rates were to fall. The insurer keeps the possibility to use this reserve to respect the “market” performance asked for by subscribers.
- Portfolio composition (shares, bonds) as is usually done in the case of optimal control for portfolio management.

The value function has to take into account potential insurer profit, potential subscriber profit-sharing and insurer behavior with respect to risk so as to prevent the danger of high volatility of shares. In this thesis, we discuss our choice which is to define this function by means of actualized cumulated insurer profits : the French profit-sharing system implies in fact that insurer profit be conditioned upon subscriber portfolio performance. Therefore, good insurer results imply good subscriber portfolio performance.

Our problem is now to answer the following question : “What is the best strategy, in terms of guaranteed rate, profit-sharing reserve and dynamic portfolio management that realizes the optimization of our value function”. As we evolve in an uncertain world, this optimization process is not directly applied to this function but on its expectation.

Stochastic control is a branch of mathematics which is employed in engineering for controlling operational or economic objectives in an uncertain world. Numerical applications use a computational technique called “dynamic programming”. Opposite to Monte Carlo methods which give results by means of a computation process following time, dynamic programming works as a backward process when time is unfold in a reverse order. The mathematical study of this process gives rise to the Bellman equations and the Hamilton-Jacobi-Bellman equations.

In actuarial science, stochastic control has been studied for more than 10 years, mainly in the German speaking world. Operational applications are mainly encountered in reinsurance. Historically, the value function which gives rise to an optimization process is derived from the ruin theory of Lundberg. The main objective is to find an optimal survival probability strategy over a long period of time. Later, actuaries have looked for strategies which optimize the process on financial basis (dividends, own fund, profit for subscribers).

Stochastic process technique is used as a guide for the choice of strategies before using classical actuarial methods. For example, reinsurance parameters (retention ...) are studied in excess of loss or in proportional reinsurance. When the strategies are known, then it is possible to use classical simulation methods.

Since this technique is relatively new, a complete chapter (chapter 2) is specifically devoted for its description.

Before we focus on a concrete case-study, we ask the following question in the context of a continuous time model : “What happens to the dynamic portfolio management process in a French profit-sharing system when subscribers keep on a constant surrender burden in case of bad performances of the portfolio”. We observe a well-known fact in this case : Behaviors which are justified by common sense (profit-sharing requirement, surrender threat) imply, from the point of view of the insurer, a pressure which creates an increasing of risk aversion. In this case, performances are lower if they are to be compared with the Merton model.

For example, with a riskless rate of 2.5%, where shares would yield 7.5% and Merton model would propose a yield of 5%, we observe a mean performance yield of 3.1% to 3.2% with our model.

Chapter 4 is a more concrete case-study. Its main focus is a portfolio management on a contract which was specifically specified with Alain Robidel, the director of the thesis.

The subject is a French euro contract with a profit-sharing clause of 95%, when fees of 0.5% are deducted to cover 0.4% of charges. Subscribers require that performances compare favorably with the French TME rate (a long term constant maturity rate) as specified by the French ACP (Autorité de Contrôle Prudentiel) during QIS4 and QIS5 exercises in France. This TME rate is computed by means of a stochastic model of short term rates (one factor Hull-White), whose parameters are those given by Reuters at the end of 2010 and whose rate curve corresponds to the QIS5 euro curve rate. The insurer is allowed to invest as much as 50% in shares.

In our model, we have chosen to do a clear distinction between the cash-flow for the insurer and the part of profit going into the profit-sharing reserve. For this purpose, insurer cash-flow is written off the portfolio.

Chapter 4 utilizes a Merton model extension implementation that we call “Generalized Merton Model”.

This module aims at optimizing dynamic portfolio management between shares and bonds with respect to an arbitrary utility function defined at a specified time T and taking into account :

- A short rate stochastic model,
- A maximum proportion allowed for shares,
- The forbidness of borrowing or short selling of shares.

The arbitrary character of this function allows us to take into account the fact that surrenders could generate a fall of results for the insurer.

Tests are done on a typical case. Complementary tests are performed to examine the sensitivity of results to parameters and to understand smoothing effects implied by the use of profit-sharing reserve and guaranteed rate. We did observe the following facts :

About the real usefulness of guaranteed rate : When we interpret French law literally, guaranteed rate acts as an inverted smoothing. The insurer may be obliged to sacrifice present results for the benefit of subscribers so as to avoid surrenders. This guaranteed rate, when it is used, is often very low and much lower than the upper bound defined by French law. On an 8 years period of time, its average value is often less than 1%. When we perform tests where this rate is understood as a French technical rate, the possibility to propose a guaranteed rate depends on the existence of the sharing-profit reserve.

Usefulness of the profit sharing reserve : we observe a classical effect of result smoothing. Indeed, this reserve is a necessity but is difficult to build. With an average value of 0.8%, even if it exists, it is rapidly reemployed during the following years. Thus, keeping this in mind, the 8 year delay defined by law is not so restrictive.

When we focus on dynamic portfolio management, we observe 3 zones depending on the values of the portfolio.

When the portfolio reaches large values, (typically more than 115% of the reserve), which means good performances, it is managed in the same way as in the Merton model.

When the portfolio puts the insurer into a loss situation, the only means to reach an acceptable value for the portfolio is to use volatility. Therefore, in this case, we observe a large proportion of shares or long duration bonds.

In between, we observe a zone that seems to be relatively wide (from 100% to 115/118% of reserves). This is a risky zone where the strategy is to increase the proportion invested in money market account or in bonds with very low duration. It compares with hedging strategies of options where the underlying asset gets to low. This zone still exists if there are no more surrenders : the ratchet effect on the contract constitutes by itself an important risk.

The value function is transformed into a Constant Equivalent Cash-Flow so as to compare it with a monetary unit. In our situation, which is a harsh one because of our hypothesis, a portfolio yields a cash-flow of 0.25 to 0.3% a year. Surrenders due to economic conditions usually have a value between 7% and 12% a year, including ruin, and excluding “structural” surrenders (end of contract, household investment, ...).

These results show the seriousness of 3 factors that were included in our hypothesis :

- Bond management in mark to market value,
- Stopping time at ruin,
- No raising of new business with regards to surrenders.

Our conclusion proposes some continuations. Meanwhile two operational matters have to be cared for :

- Study and calibration of new business,
- Optimization of bond management in a Held To Maturity approach.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Andrea Brignone, Catherine Hammelle et Joël Lebidois qui m'ont entraîné dans cette aventure ainsi que Piere Cellot, Daniel Blanchard et Yann Landreau.

La teneur de ce mémoire doit beaucoup à Christian Robert qui a eu la patience d'en lire les nombreuses versions, à Alain Robidel, mon mentor, qui m'a aidé à construire le sujet, Donatien Hainaut pour ses conseils sur le Contrôle Stochastique et Olivier Le Courtois pour ses encouragements sur le choix du sujet et le choix du modèle de taux.

Je souhaite aussi remercier les nombreuses personnes qui m'ont reçues et m'ont donné leur point de vue (*par ordre alphabétique*) : Jean Berthon, Hervé Bouclier, Jérôme Cornu, Jean-Paul Guillou, Christophe Izart, Bernard Lebras, Frédéric Planchet, Christian Roze, ainsi que Bruno Sarrant pour la fourniture des données de taux.

S'agissant d'un sujet de recherche et développement, j'en profite pour lancer un clin d'œil aux responsables que j'ai connu et ont agi dans le sens de l'innovation au sein de l'industrie française Luc Demian d'Archimbaud, Yves Véret et Benoît Faller ; ainsi qu'à d'anciens professeurs Norbert Cot, Michel Waldschmidt et Jean Giraud.

Sans oublier la famille et les nombreux amis.



## NOTATIONS

$Af$  : Générateur infinitésimal de  $f$ .

$A^u f, \mathcal{D}^u f, \dots$  : Générateur infinitésimal et opérateur de Dynkin suivant des stratégies

$\mathcal{D}f$  : Opérateur de Dynkin de  $f$ .

$(dX_t)_{end t}$  : Coefficient en  $dt$  dans l'écriture de  $dX_t$ . Cette écriture est commode pour calculer un générateur infinitésimal à l'aide du lemme d'Itô.

$\mathbb{E}(X)$  : Espérance d'une variable aléatoire  $X$ .

$J, J(t, x), J(t, x, r), \dots$  : Fonction de valeur (respectant la meilleure stratégie).

$J_t, J_x, J_{xx}, J_r, \dots$  : Notation des dérivées partielles en indice, ici :  $\frac{\partial J}{\partial t}, \frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}, \frac{\partial J}{\partial r}$ .

$\mathcal{U}$  : Ensemble regroupant les paramètres de contrôle.

$U_t, u_t, (\alpha_t, \beta_t)$  : Une stratégie, en fonction des paramètres utilisés.

$V^{\underline{u}}, V^U, \dots$  : Valeur de la fonction  $V$  lorsque les processus stochastiques impliqués dans sa définition suivent une stratégie  $\underline{u}$  ou  $U, \dots$  donnée.

$x_+$  : La quantité  $\max(x, 0)$ .

$X_t^U$  : Processus  $X_t$  suivant une stratégie  $U$  donnée.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$  : Espace probabilisé filtré.

## SIGLES

ACP : Autorité de Contrôle Prudentiel.

HTM : Held To Maturity.

OAT : Obligations Assimilables du Trésor.

ONC : Orientations Nationales Complémentaires (publiées lors des QIS4 et QIS5).

PB : Participation aux Bénéfices.

PPB : Provision pour Participation aux Bénéfices.

QIS4, QIS5 : Quantitative Impact Study, n°4 ou n°5.

TME : Taux Moyen des Emprunts d'Etat.



## 1 INTRODUCTION

Dans un article paru en janvier 2010 sur le site de France Info, le journaliste Patrick Lelong explique à ses lecteurs « *La plupart des contrats d'assurance vie sont ce que l'on appelle des « multisupports ». ... Si les primes sont versées dans le fonds en euros, l'assureur doit garantir que le capital constitué ne pourra pas diminuer. ... Si la compagnie fait de mauvais choix, elle devra les assumer. C'est elle le gestionnaire. A aucun moment, la prime nette versée, c'est-à-dire une fois les frais de fonctionnement déduits, ne doit diminuer. Non seulement pour l'année de versement mais aussi pour toutes les autres années. Les gains dégagés sont aussi garantis.*»

Cet article est un exemple de ce que la presse généraliste explique à ses lecteurs. A l'insistance de l'auteur sur la prise de risque par la compagnie d'assurance nous comprenons que les contrats d'assurance vie, notamment les contrats en euros sont populaires en France.

Ainsi, l'assurance vie représente en France un encours d'environ 1 265 milliards d'euros fin février 2010 soit 10 à 12% du patrimoine des ménages (le montant total des placements de l'assurance s'élève à 1 617 milliards d'Euros – chiffre 2009 – soit l'équivalent de 85% du PIB). Le rapport 2009 de la FFSA, publié en 2010, précise : « *Plus de la moitié de ces placements irriguent directement les entreprises (via les investissements en actions et obligations) et un tiers finance la dette obligataire des états, en particulier les plans de relance décidés par les différents gouvernements. Sur ce montant, quelques 22 milliards d'euros soutiennent les PME à fort potentiel.* » Toujours selon ce même rapport « *le socle fondateur de l'épargne longue, c'est l'assurance vie qui représente plus de la moitié des placements à moyen et long terme des français (2 400 milliards d'euros). C'est un produit **attractif et rassurant** dans lequel les épargnants ont, à juste raison, confiance.* » Le rapport 2008 de la FFSA précise : « *La motivation étant, une fois la résidence principale acquise, de préparer un complément de revenu pour la retraite* ».

Les encours fluctuent en fonction de la collecte (souscriptions, versements). Ces dernières s'élèvent à environ 140 milliards d'euros de souscriptions annuelles (66% du CA de l'assurance en France). Les encours représentent ainsi environ 8,5 années de souscriptions. Ce nombre est à rapprocher des avantages fiscaux liés aux contrats d'assurance vie, qui encouragent les ménages à attendre 8 ans avant de retirer leurs fonds. Toutefois, le montant des sorties annuelles est du même ordre de grandeur, soit environ 11,8% des encours. Ceci explique les fluctuations à la baisse en cas de crise ou de rachats importants. Il y a eu quelques baisses de la collecte ces dernières années et une baisse importante au premier semestre 2011. A noter que, dans son rapport 2009, la FFSA plaide pour une fiscalité plus incitative : « *... La fédération a ainsi proposé d'exonérer d'impôts sur le revenu les produits des contrats d'assurance vie et de capitalisation d'une durée égale ou supérieure à 12 ans* ».

En raison de la concurrence, une communication abondante existe dans la presse sur les rendements des différents contrats d'assurance vie. Les taux servis aux assurés sont ainsi accessibles sur internet, telle « Le Guide Indépendant de l'Épargne » qui permet d'observer les données suivantes (Tab 1.1) de la profession pour les années 2009 et 2010.

**Les deux dernières années confirment une diminution des rendements en assurance vie.**

Année	Minimum	Quantile 25%	Moyenne	Médiane	Quantile 75%	Maximum
2009	3,30%	4%	4,19%	4,10%	4,50%	5,01%
2010	2,85%	3,50%	3,82%	3,90%	4,10%	4,51%

*Tab 1.1 : Les taux servis en assurance vie en 2009 et 2010.*

Il peut être intéressant de comparer ce taux servi au TME, nous obtenons la statistique suivante sur 2009 et 2010 (Tab 1.2). Au premier janvier 2009, le TME était de 3,64%, et au premier janvier 2010, il valait 3,60%.

**En 2010, une part importante de la profession a des difficultés à servir le TME.**

Année	≈TME						
	<3,30%	De 3,30% A 3,50%	De 3,50% A 3,70%	De 3,70% A 3,90%	De 3,90% A 4,10%	De 4,10% A 4,30%	> 4,30%
2009	0%	3,6%	7,31%	7,32%	36,14%	11,42%	34,15%
2010	7,21%	21,62%	8,11%	13,51%	39,64%	8,11%	1,8%

*Tab 1.2 : Comparaison avec le TME.*

Un article paru sur le site de l'hebdomadaire l'Express le 4 février 2011 est encore plus dur et mentionne un rendement moyen de 3,30% pour 2010.

L'assureur peut publier en début d'année un taux garanti pour ses contrats. Ce taux procure à ses assurés un « effet de cliquet » sur les contrats en cours. Comme l'annonce notre journaliste, c'est bien l'assureur qui prend un risque en publiant un tel taux en raison de mauvaises performances possibles des actifs.

Le taux garanti fournit aux assurés un rendement minimum sur l'année en cas de rachat anticipé de la part des souscripteurs. Par ailleurs, il participe à la collecte de la Société d'assurance vie et une

société qui ne publie pas ses taux garantis risque de voir sa collecte diminuer. L'âge de la Société ainsi que l'âge du contrat auraient aussi des effets sur cette collecte.

Les taux minimum garantis en début d'année font aussi l'objet de communications, mais certains établissements sont plus discrets. Il est ainsi possible d'observer certains établissements effectuer une promotion et communiquer en gras les conditions promotionnelles qui s'appliquent à de nouveaux souscripteurs, et rappeler en plus petits caractères le taux garanti pour les souscripteurs déjà présents. D'après les données du « Guide Indépendant de l'Épargne », sur 100 contrats présentés début 2011, seuls 40 faisaient l'objet d'une communication concernant le taux garanti à cette date, avec les caractéristiques résumées dans le tableau suivant :

**En 2011, la communication sur les taux garantis reste discrète.**

**Sur 97 contrats, 36,08% ont communiqué sur le taux garantis contre 63,92%**

<b>Minimum</b>	<b>Médiane</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Maximum</b>
<b>1,85%</b>	<b>2,63%</b>	<b>2,50%</b>	<b>3%</b>

*Tab 1.3 : Les taux garantis publiés début 2011.*

Là encore, cette statistique est effectuée sur les contrats et non sur les encours, de plus il existe des contrats avec des taux encore plus bas qui ne figurent pas dans les publications.

Les taux garantis sont encadrés par la loi. Celle-ci vise non seulement à délimiter le taux en fonction des possibilités réelles de l'assureur, mais aussi à règlementer les taux garantis sur des périodes très courtes employés à des fins promotionnelles pour attirer de nouveaux souscripteurs. Cette loi a été revue récemment par un arrêté publié le 7 juillet 2010. A noter que le montant total autorisé pour la somme des intérêts techniques et des intérêts garantis correspond désormais à 80% (au lieu de 85%) du taux de rendement moyen des actifs des deux dernières années.

En cas de promotion, le taux garanti doit couvrir une période minimale de 6 mois, et, désormais, ce taux est plafonné en fonction, d'une part, des taux obligataires (150% de 75% du TME) et d'autre part des taux moyens servis aux assurés sur les deux derniers exercices.

Cette disposition sert à limiter des taux alléchants pour les futurs versements au détriment des taux servis aux contrats plus anciens. Toutefois, l'assureur garde toujours une enveloppe globale de participation aux bénéfices à répartir entre les différents produits. Il peut favoriser une génération de contrat par rapport à une autre.

Les souscripteurs sont réputés exigeants. Outre des rachats dits structurels liés au cycle de vie normal d'un contrat (fiscalité, objectifs patrimoniaux, préparation de la retraite, ...); la société d'assurance doit aussi compter sur des rachats conjoncturels liés aux conditions économiques du moment. L'Autorité de Contrôle Prudential (ACP) a publié au moment des études d'impacts Solvabilité 2 des comportements de rachats conjoncturels à prendre en compte dans le cadre de ces

exercices. Ils correspondent à des rachats qui sont motivés lorsque les rendements servis par les assureurs se comparent défavorablement avec les taux longs. Le risque de rachat a déjà provoqué des faillites aux Etats-Unis suite à des rachats massifs associés à une remontée brutale des taux obligataires (ce fait est mentionné sur le site du cabinet Winter, à la page de Frédéric Planchet), ce qui motive des études particulières à ce sujet.

Il faut toutefois rester prudent sur le danger réel que représentent les rachats en France en raison d'une part de la fiscalité dont bénéficie l'assurance vie et d'autre part des lignes de défense dont dispose l'assureur face à une menace de rachat.

La fiscalité (en début 2011) est en effet conçue pour que l'assuré reste plus de 8 ans dans son contrat (même si les avantages de l'assurance vie s'estompent au fil des réformes). De plus, un système d'abattement encourage un assuré à étaler ses rachats sur plusieurs années après 8 ans. Enfin, les plus-values, objet de la fiscalité, sont réparties en juste proportion entre le capital restant dans le contrat et le montant racheté.

**La fiscalité encourage les souscripteurs à rester plus de 8 ans.**

	<b>De 0 à 4 ans</b>	<b>De 4 à 8 ans</b>	<b>Plus de 8 ans</b>
<b>Imposition des plus-values</b>	<b>35%</b>	<b>15%</b>	<b>7,50%</b>
<b>Prélèvements sociaux</b>	<b>12,3%</b>	<b>12,3%</b>	<b>12,3%</b>
<b>Existence d'abattements</b>	<b>non</b>	<b>non</b>	<b>oui</b>

*Tab 1.4 : Fiscalité de l'assurance vie.*

L'assureur dispose de trois lignes de défense pour faire face à des rachats.

La première est constituée de la collecte. En « moyenne », la collecte représente, en effet, un montant comparable à celui des rachats. Il s'agit d'une moyenne, mais ce fait est suffisamment important pour être souligné. L'assureur dispose par ailleurs du paiement des coupons de ses obligations, lui apportant un surcroît de liquidité en cas de besoin. Enfin l'assureur peut aussi compter sur une liquidité complémentaire avec les obligations en cours de remboursement.

Avant de vendre une obligation sur le marché secondaire, il est nécessaire pour l'assureur d'avoir « enfoncé » ces trois lignes de défense.

S'il le souhaite, et s'il en a les moyens, l'assureur peut de ne pas distribuer immédiatement l'ensemble de la participation aux bénéficiaires à ses assurés. Il peut choisir d'en garder une petite proportion pour les années suivantes. Il s'agit d'une Provision pour Participation aux Bénéfices, ou encore Provision pour Participation aux Excédents. Cette provision doit, toutefois, être distribuée sous 8 ans aux assurés. Un article, communiqué à l'auteur par Frédéric Planchet [DAI], montre l'intérêt de ce type de lissage, aussi bien pour l'assureur que pour les assurés.

En moyenne, pondéré par la provision mathématique, la PPB représentait en 2009 environ 1,6% des provisions mathématiques sur les sociétés ayant une PM supérieure à 1 milliard d'euros (de manière à écarter quelques cas atypiques). Sur ces sociétés, nous avons la statistique suivante (Tab 1.5) :

**La PPB représente couramment un faible pourcentage de la PM.**

Tranche (PPB par rapport à la PM)	0 à 0,5%	0,5 à 1%	1 à 1,5%	1,5 à 2%	2 à 2,5%	plus de 2,5%
Pourcentage	14,89%	19,15%	27,66%	8,51%	6,38%	23,40%

*Tab 1.5 : Statistique sur la PPB en 2009, (sociétés à plus de 1 Mds € de PM).*

Ainsi, le marché de l'assurance vie met en œuvre des montants considérables, et ses acteurs se rémunèrent avec de faibles marges ; une « petite perte » est ainsi fortement amplifiée lorsqu'on la compare aux fonds propres de l'entreprise d'assurance ou de la mutuelle.

Par ailleurs, le taux garanti devient un taux sans risque pour l'assuré. Un rachat anticipé sans pénalité devient, du point de vue de l'assuré, une boîte magique qui transforme un taux long en un taux court.

Classiquement, la possibilité de rachat est traitée comme une option et de nombreux articles sont déjà parus sur le sujet [DEN]. Cette approche permet d'ajuster les indemnités en cas de rachat avec le coût de cette option – lorsque ces indemnités sont effectivement prévues.

Nous proposons dans ce mémoire d'adopter un autre point de vue, celui d'une « gestion de portefeuille » : La survie de l'entreprise d'assurance, menacée par les garanties offertes aux souscripteurs, est traitée en optimisant l'efficacité du portefeuille associé au contrat.

La gestion dynamique de portefeuille fait appel à des techniques dites de contrôle optimal, ou encore contrôle stochastique dans la mesure le gestionnaire doit gérer ses fonds dans un environnement incertain (en raison notamment de la volatilité des actifs). Les principes en sont connus depuis 1969 avec les travaux de Merton.

A notre connaissance, toutefois, la gestion de portefeuille sous contrainte de rachats n'a pas encore été effectuée. L'objectif de ce mémoire est de montrer ce que cette technique de contrôle optimal, ou encore contrôle stochastique apporte à la gestion d'un portefeuille en euros sous contrainte de rachats, incluant des rachats conjoncturels en cas de mauvaises performances.

Nous nous intéressons ainsi au cas de figure où l'assureur conserve un risque qu'il ne fait pas payer : la possibilité de rachat sans pénalité sur des contrats en euro. (Nous rappelons que, dans les contrats en UC c'est le souscripteur qui conserve les risques en cas de baisse de la valeur des portefeuilles).

Pour cela, nous laissons l'assureur agir sur les paramètres suivants :

- Le taux minimum garanti en début d'année, qui est censé rassurer les souscripteurs mais engage l'assureur avec un risque de perte en cas de mauvaises performances du portefeuille,
- La Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB), qui est distribuable sous 8 ans, mais constitue une sécurité en cas de chute des cours : l'assureur a la possibilité de puiser dans la PPB pour respecter un taux de rendement destiné aux assurés,
- La composition du portefeuille (action, obligation, monétaire), comme cela est fait couramment lorsqu'on emploie les techniques de contrôle optimal.

Plus précisément, nous proposons de répondre à la question suivante concernant la prise en compte de ces paramètres : « quelle est la bonne stratégie à adopter en terme de taux garanti, de PPB et de gestion dynamique de portefeuille en courant d'année ».

Pour mesurer les stratégies, et choisir les meilleures, nous sommes amenés à choisir une fonction de « valeur » qui en reflète les efficacités. Cette fonction intègre les gains potentiels de l'assureur, les gains potentiels des assurés, ainsi qu'une attitude face au risque qui doit empêcher un assureur de trop miser sur la volatilité d'actifs risqués et le prémunir contre des risques de pertes trop importants.

Le problème revient alors pour l'assureur à optimiser, de manière dynamique, cette fonction de valeur. Comme nous sommes en environnement incertain, ce n'est pas la fonction elle-même qui est mesurée mais son espérance. La solution du problème revient à décrire la stratégie qui permet de réaliser cet optimum, c'est à dire la manière d'agir sur les paramètres décrits plus haut.

L'une des premières applications du contrôle stochastique en finance a été proposée par Merton en 1969 et est présentée plus bas [PHA]. Le problème posé est celui de l'équilibre dans la composition d'un portefeuille entre actifs risqués et non risqués de manière à optimiser sa performance sur un horizon fini donné, tout en prenant en compte l'aversion au risque des investisseurs.

Dans un autre exemple présenté par Boulier et al. [BOU1, BOU2], se pose une question analogue dans le contexte de la constitution d'un fonds de pension. Ici, les pensions sont fixées et augmentent d'un taux d'inflation supposé connu. Des cotisations sont versées et sont ajustables. La question posée est de savoir comment respecter l'engagement de verser les pensions avec, en moyenne, un minimum de cotisation. Deux scénarios sont envisagés : l'un où les cotisations peuvent être ajustées

à volonté, un autre où les cotisations sont plafonnées. Les actifs sont alloués entre actifs risqués et actifs non risqués.

Dans ces deux exemples, les auteurs ont pu tirer des conclusions qu'ils ont exprimées en faisant appel au bon sens commun, dans un langage compréhensible par tous. Dans le premier cas, Merton a mis en évidence une pondération, constante dans le temps, entre les actifs risqués et les actifs non risqués, en fonction de l'attitude face au risque des investisseurs. Dans l'exemple de Boulier et dans le cas où les cotisations sont bornées supérieurement, Boulier et al. montrent [BOU1, BOU2] :

- si on ne part de rien, cette borne supérieure des cotisations est largement suffisante pour verser les pensions, le reste étant placé en actifs non risqué,
- lorsque la richesse du fonds augmente, il est possible de diminuer les cotisations, et de commencer à placer une partie du fonds en actifs risqués,
- lorsque la richesse atteint un seuil optimal, il est possible de baisser, voire annuler les cotisations. Le portefeuille bascule alors complètement en actifs non risqués, la prise de risque devenant inutile à ce stade.

Donatien Hainaut s'intéresse à des portefeuilles d'assurance vie dans un contexte où la participation aux bénéfices est à la discrétion de l'assureur (ce qui semble être le cas dans certains pays nordiques). Il adopte aussi une approche économique par l'intermédiaire du contrôle stochastique plutôt que l'approche par un pricing d'option [HAI]. Ses calculs lui permettent de prendre en compte une politique de participation aux bénéfices respectant les caractéristiques des contrats (contrats avec taux technique garanti vs. contrats sans taux technique garanti) et de définir une politique optimale de participation aux bénéfices pour un assureur devant servir plusieurs types de contrats. Son article montre en plus que, dans le contexte où les provisions sont évaluées en « fair value » il est optimal de placer ces dernières en obligations et d'équilibrer le restant entre actif risqué et non risqué dans une proportion analogue à celle rencontrée dans le modèle de Merton.

En mars avril 2011, H. Albrecher a donné une session de cours à l'ENSAE sur le contrôle optimal en assurance.

Historiquement, les processus stochastiques employés en assurance sont issus des travaux de Lundberg et de sa théorie élaborée de la ruine. C'est pourquoi, en actuariat, l'un des critères donnant lieu à optimisation est la probabilité de ruine, ou plutôt, la probabilité de survie. La question est « comment agir dans un environnement risqué de manière à résister le plus longtemps possible aux aléas ».

Dans cet esprit, de nombreux travaux ont été publiés dans le monde germanophone. L'optimisation de la réassurance occupe une place importante dans ces publications. Par exemple, pour le choix de la priorité dans le cas d'un traité en excédent de sinistre en situation non catastrophique (distribution sans queue épaisse), en fonction des réserves de l'assureur, nous voyons apparaître au moins trois zones :

- une zone où les réserves sont faibles et doivent être reconstituées au moyen des primes. Il n'est pas optimal, dans ce cas, de faire appel à un traité,

- une zone où il est optimal de faire appel à un traité de réassurance avec une priorité qui augmente progressivement avec les réserves,
- enfin, quand les réserves sont importantes, il y a un seuil optimal à ne pas dépasser.

Entre les deux dernières zones, des phénomènes exotiques d'oscillation peuvent exister.

H. Albrecher a aussi présenté dans son cours un exemple d'optimisation en réassurance proportionnelle où l'assureur peut placer ses actifs en les répartissant entre actifs risqués et non risqués (comme dans le modèle de Merton). Son exemple bat en brèche l'intuition qui suggère qu'en cas de montant important des actifs, une proportion de ceux-ci peut être placée en actifs risqués (afin de bénéficier de plus forts rendements). Dans cet exemple, c'est un montant constant – à ne pas dépasser – qui doit être placé en actifs risqués, tout le reste étant placé en actifs non risqués.

Il est aussi possible d'optimiser les dividendes que peuvent dégager une activité – comme dans toute activité financière. En assurance, cette idée est venue bien plus tard que celle inspirée par les processus de Lundberg. C'est De Finetti qui en aurait été l'initiateur à la fin des années 50. Dans des cas simples, les deux approches sont similaires : optimiser la survie d'une activité entraîne le même type de comportement qu'optimiser les dividendes de l'activité.

En assurance-vie, la situation peut devenir beaucoup plus complexe avec des phénomènes anti-intuitifs de palier : l'assureur ne distribue aucun dividende au-dessous d'un certain seuil de réserves, puis apparaissent des zones où il est possible de distribuer des dividendes. L'intuition ne permet pas de deviner ces zones.

Nous pouvons aussi noter que l'évaluation d'options peut se ramener à un problème de contrôle stochastique. Établir la couverture d'une option revient en effet à minimiser la différence (en valeur absolue) entre la valeur du portefeuille « répliquant » l'option et la valeur de l'engagement induit par le sous-jacent (avec une bonne surprise dans le cas brownien : cette différence est nulle). Des articles sont parus sur le sujet dans les années 90, nous en citons un dans la bibliographie pour mémoire [JEN].

Toutefois, une différence essentielle demeure :

Dans le cas d'une option, l'engagement dépend de la valeur d'un actif sous-jacent.

Dans le cas d'une gestion de portefeuille, l'engagement dépend de l'objectif d'un client et est en général indifférent aux actifs qui composent ce portefeuille (j'ai besoin de 100 000 € pour préparer ma retraite, savoir si un assureur gère un portefeuille en obligations, en actions technologiques ou en actions plus classiques m'indiffère « à priori »).

En raison de sa complexité et des moyens de calculs qui sont demandés, la technique du contrôle stochastique ne peut être employée actuellement pour des simulations complètes de bilans. Elle est utilisée plutôt dans le cadre d'études amont pour obtenir une description de stratégies optimales afin d'atteindre un objectif économique donné.

Comme la technique du contrôle stochastique est relativement nouvelle dans l'univers de l'actuariat, nous démarrons le mémoire par un chapitre consacré entièrement aux équations de Bellman (temps discret) et de Hamilton-Jacobi-Bellman (temps continu). Ce chapitre contient, pour certains

de ses exemples, l'ensemble des outils qui sont employés dans les chapitres suivants (centrés sur le modèle de Merton, et que nous appelons le Module de Merton Généralisé). Le Module de Merton Généralisé permet d'étudier les principes d'une gestion de portefeuille dans l'optique du modèle de Merton, en considérant en plus une fonction d'utilité (continue) quelconque à un horizon (typiquement 1 an) donné, un taux variable respectant un modèle monofactoriel, ainsi que des contraintes concernant la composition du portefeuille en actions et obligations (interdiction d'emprunter, interdiction de vente à découvert, respect d'une borne supérieure pour les actions).

Avant d'aborder un cas concret, nous nous posons, au chapitre 3, la question « Que dire d'une gestion de portefeuille dans un contexte de participation aux bénéfiques et de menace de rachats en cas de mécontentement des assurés ». Nous sommes confrontés à un phénomène connu : des attitudes qui sont normales (exigences de participation aux bénéfiques, menace d'aller voir ailleurs en cas de mauvaises performances) entraînent, pour l'assureur, une « pression » ou « augmentation de l'aversion au risque », d'où une baisse du rendement espéré pour les souscripteurs par rapport à ce qu'ils auraient initialement pu attendre en appliquant le modèle initial de Merton.

Le chapitre 4 se situe dans un cadre plus concret. Il se place dans une optique de gestion de portefeuille pour un contrat type dont les mécanismes principaux sont décrits. Une discussion est aussi donnée sur le choix de la fonction d'utilité à adopter. A noter que ce mémoire ne traite pas en tant que tel des problèmes liés à Solvency 2.

Au lieu de prendre un bilan, incluant au passif les fonds propres et les provisions, nous effectuons un net distinguo dans la manière de traiter ce qui est destiné à l'assureur et aux assurés, notamment pour juger de la pertinence de la PPB.

Ce chapitre 4 met en musique ce que nous avons présenté et baptisé au chapitre 2 « Module de Merton Généralisé ».

Nous terminons ce chapitre par des expérimentations en commentant les résultats obtenus. Les points les plus saillants sont la nécessité de constituer une PPB pour obtenir un effet de lissage des résultats, même si celle-ci est difficile à obtenir. Par ailleurs, un effet de « lissage inversé » des résultats existe sur le taux garanti, pour un taux souvent nul et de toutes façon en deçà du code des assurances. La stratégie de balancement du portefeuille dépend du montant de ce dernier. Trois zones apparaissent. La zone intermédiaire, que nous nommons « zone optionnelle » ou « zone de prudence », est relativement large. Lorsque le portefeuille atteint une valeur au dessus de cette zone, il est géré suivant le modèle de Merton, lorsqu'il est en dessous, l'assureur est en situation de perte et doit « jouer » sur la volatilité des actifs pour remonter la pente. Dans la zone de prudence nous sommes dans une zone à risque, donc à faible volatilité où le portefeuille rapporte peu.

Etant une opération de recherche et développement, l'auteur se permet de signaler que certains résultats n'étaient pas prévisibles au démarrage des travaux. Un effort de test important a été réalisé.

Nous proposons au lecteur qui n'est pas familiarisé avec les techniques de contrôle stochastique de commencer pas le chapitre 2 dès le début. L'exemple du fermier de Bertsekas en 2.2 peut être lu

indépendamment du reste. La compréhension des équations de Bellman et des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), est expliquée dans les sections 2.3 et 2.4.

Les chapitres 3 et 4 sont indépendants. Le chapitre 3 utilise les équations HJB de la section 2.4 et fait référence au modèle de Merton de cette même section ; il utilise de plus la « recette intuitive » présentée en fin de section 2.4. Le chapitre 4 utilise les outils présentés dans la section 2.4, notamment la sous section 2.4.3. Le Module de Merton Généralisé y est employé comme une « boîte noire ». La sous-section 2.4.5 n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite. La section 2.5 sur le modèle de Hull-White à un facteur est donnée comme annexe à titre de référence.

## 2 LE CONTROLE STOCHASTIQUE DANS LE CADRE D'UNE GESTION DE PORTEFEUILLE D'ASSURANCE VIE

Le contrôle stochastique est une branche des mathématiques employée en ingénierie, qui permet de contrôler des objectifs économiques ou opérationnels dans un environnement incertain. Les applications numériques font appel à une technique de calcul nommée « programmation dynamique ». Depuis peu, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, cette branche commence à avoir des applications dans le domaine de l'actuariat, notamment dans le monde germanophone.

Afin de situer cette technique par rapport au sujet de notre mémoire, nous commençons par présenter l'intérêt du contrôle stochastique pour une gestion de portefeuille où une aptitude au rachat (dit conjoncturel) existe en fonction de ses performances.

Nous continuons avec un exemple simple (que nous nommons le fermier de Bertsekas) qui illustre quelques caractéristiques importantes du contrôle stochastique et l'importance des gains économiques qu'il est possible d'effectuer avec cet outil.

Pour employer nos outils en gestion d'actif, nous avons besoin dans un premier temps de généraliser l'exemple précédent au cas où le temps est une variable discrète.

Nous poursuivons, avec une gestion d'actif en temps continu. Merton a proposé en 1969 un modèle de gestion d'actif où le taux sans risque est constant. Nous sommes amené à généraliser ce modèle de la manière suivante : nous prenons en compte un taux variable (suivant une dynamique de Hull-White à un facteur) parce que les comportements de rachats conjoncturels – selon les ONC Solvency 2 – font intervenir ce taux à travers la comparaison des performances du portefeuille en regard d'un taux long ; de plus, nous interdisons les ventes à découvert et bornons supérieurement la proportion en actions du portefeuille ; enfin nous intégrons l'impact des comportements de rachats dans les fonctions d'efficacité économique.

Les équations qui résolvent les problèmes d'optimisation via un contrôle stochastique se nomment équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), du nom des mathématiciens Hamilton et Jacobi qui ont introduit la mécanique Hamiltonienne ainsi que les équations différentielles associées au 19<sup>ème</sup> siècle et de Bellman qui a introduit la programmation dynamique dans les années 50. Elles sont non linéaires et font l'objet d'études mathématiques poussées quant à l'existence et la régularité des solutions. Certains travaux ont valu la médaille Field à leurs auteurs en 1994.

Nous ne prétendons pas reprendre ces travaux. Notre objectif est de permettre aux actuaires qui le souhaitent de pouvoir employer les équations HJB lorsqu'elles se présentent et de mettre en place les techniques de programmations dynamiques appropriées pour des évaluations numériques.

## 2.1 De la gestion d'actifs sous contrainte de rachats conjoncturels au contrôle stochastique

### 2.1.1 Gestion d'actifs et contrôle stochastique

Tout au long de ce mémoire, nous serons amenés à étudier un portefeuille en euros d'assurance vie « géré au mieux » et prenant en compte le fait que, si les assurés ne sont pas satisfaits des performances, ils procèdent à des rachats.

Que signifie « géré au mieux » dans un univers probabiliste ? Nous imaginons bien qu'une telle gestion est jugée par rapport à un objectif donné. En mécanique, pour conduire un voyageur vers une destination au moyen d'un véhicule, l'une des méthodes consiste à étudier les forces en présence, à bien en comprendre leur bilan et à maîtriser l'interaction du véhicule avec son environnement. Nous en déduisons la vitesse du véhicule à chaque instant ainsi qu'un bilan énergétique. Quoique complexes (les calculs pour un satellite sont différents de ceux pour un véhicule terrestre) nous sommes dans un univers « certain » où les notions de force, de vitesse et d'énergie ont un sens.

Dans le cas de la gestion d'un portefeuille, l'objectif est évident : des gains pour tous les partenaires (l'assureur qui souhaite un profit, le souscripteur attentif au rendement). Toutefois, comme nous nous situons dans un univers probabiliste, il n'y a aucune raison d'atteindre exactement un objectif donné : nous serons, au moment du bilan, au dessus ou en dessous.

La notion qui pourrait s'approcher le plus de celle de vitesse est celle de tendance : A défaut d'être en droit d'attendre que notre gestionnaire atteigne exactement son objectif, nous lui demanderons de maîtriser, à chaque instant, la meilleure « tendance » du moment, ainsi que la volatilité autour de cette tendance.

La notion de force est plus difficile à appréhender, mais, si nous lui associons la notion de « pression » de la thermodynamique, nous comprenons que notre gestionnaire agit « sous pression » : en effet, il prend des risques ! Pour cela, nous allons mettre un peu de « pression » sous forme « d'aversion au risque » afin de limiter des ambitions inconsidérées du gestionnaire.

La notion d'énergie est encore plus difficile à appréhender. Nous n'effectuons pas, pour notre gestionnaire, un bilan énergétique qui se mesure en joules ou en calories, mais un bilan en fonction d'un nombre que nous aurons défini nous même et qui est censé représenter notre objectif. Ce n'est pas la mécanique, mais la microéconomie, avec le concept « d'utilité », qui vient à notre rescousse.

Les équations de Hamilton-Jacobi sont effectivement utilisées en mécanique et en thermodynamique depuis le 19<sup>ème</sup> siècle. Bellman, a, dans les années 50, apporté la touche finale qui permet de les adapter à un objectif économique en environnement incertain.

En actuariat, les objectifs économiques susceptibles d'une optimisation prennent en compte les intérêts de deux familles d'agents. Les compagnies d'assurances ou les mutuelles doivent être capables de dégager un profit de leur activité (même une association à but non lucratif doit respecter une gestion saine de son activité). Les souscripteurs demandent quant à eux, à minima, le respect des conditions contractuelles qui leurs sont garanties. Pour les contrats d'assurance vie, les

performances des placements font l'objet d'une attention particulière, soit à travers des conditions contractuelles (ex : taux technique, effets de cliquet), soit par le moyen de mécanismes de participations aux bénéficiés.

En pratique, nous définissons un objectif économique à optimiser, nous commençons par nous placer du point de vue des assurés, et à vérifier que la modélisation effectuée respecte bien les engagements contractuels et prend bien en compte des intérêts particuliers tels que les participations aux bénéficiés. Il est alors possible de choisir une fonction de valeur prenant aussi en compte les objectifs des assureurs, par exemple dépendant de cash-flows effectivement générés par l'activité.

La protection des assurés est un souci permanent de la profession, et implique la maîtrise de la survie des sociétés qui souscrivent les contrats. Au niveau des comptes des compagnies sont définis des critères de solvabilité ; au niveau des processus stochastiques interviennent des temps d'arrêt liés à la « ruine de l'assureur ».

Ce chapitre est consacré aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman ainsi qu'au « débroussaillage » de notre problème : les outils nécessaires y sont décrits et nous y faisons fréquemment référence dans la suite du document.

### 2.1.2 Les ingrédients du contrôle stochastique

Dans les problèmes de contrôle stochastique, nous rencontrerons les éléments suivants :

Un système dont l'évolution dépend de plusieurs processus stochastiques. Il s'agit dans notre cas de l'évolution stochastique des taux et de l'évolution des actifs. Les comportements de rachats des souscripteurs sont aussi pris en compte et dépendent des taux pour leur partie conjoncturelle.

Des variables de contrôles sur lesquelles l'assureur peut agir. Comme dans toute gestion de portefeuille, il s'agit tout d'abord de la possibilité d'agir en continu sur la composition du portefeuille entre actifs risqués et actifs non risqués. Nous nous efforçons aussi de contrôler le taux garanti ainsi que la provision pour participation aux bénéficiés en fonction de notre objectif économique.

Cet objectif économique correspond à une fonction d'efficacité correspondant à une mesure de la performance du portefeuille tant du point de vue des assurés que du point de vue de l'assureur.

S'agissant d'un contexte actuariel, nous devons choisir d'une attitude face à la « ruine » de l'assureur. Pour cela, nous introduisons un temps d'arrêt dans une comme cela est couramment fait dans l'ouvrage de Schmidli [SCH].

Une fois ces ingrédients spécifiés, le problème revient alors à maximiser la fonction de valeur choisie et à étudier la meilleure stratégie associée.

## 2.2 Le fermier de Bertsekas illustre les gains économiques possibles grâce aux techniques de contrôle stochastique

L'exemple suivant est dû à Bertsekas [BER]. Il s'agit d'un fermier qui cherche le bon compromis, lors de chaque récolte d'une céréale, entre la proportion de la récolte qui est stockée et destinée à la vente et celle qui est réensemencée pour accroître la production des années suivantes. Nous allons montrer sur cet exemple que les techniques de contrôle stochastique permettent d'obtenir des gains supérieurs à ceux qui sont imaginables sur la base du seul bon sens.

Un fermier produit chaque année,  $k$ ,  $X_k$  unités d'une certaine céréale (il démarre avec une quantité  $X_0$  et les  $X_k$  sont des variables aléatoires pour  $k > 0$ ). Il stocke  $X_k(1-u_k)$  unités dans un but de commercialisation, où  $0 \leq u_k \leq 1$ . Il investit le restant de cette production  $u_k X_k$ , afin d'accroître la production de l'année suivante à un niveau  $X_{k+1}$  donné par

$$X_{k+1} = X_k + W_k u_k X_k. \quad (2.1)$$

Les  $W_k$  sont des variables aléatoires positives, bornées, indépendantes, de même loi vérifiant :

$$\mathbb{E}(W_k) = \bar{w} > 0. \quad (2.2)$$

La production totale stockée sur  $N+1$  années, de 0 à  $N$  inclus, vaut :

$$\sum_{k=0}^{N-1} (1-u_k) X_k + X_N$$

et elle dépend du choix des  $u_k$ .

Nous souhaitons aider le fermier à maximiser cette production et lui proposer une stratégie optimale sur les  $u_k$ , c'est à dire à maximiser l'espérance de cette production, soit la somme suivante, où  $\underline{u} = (u_k)_{k \in \{0 \dots N-1\}}$  :

$$\text{Max}_{\underline{u}} \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (1-u_k) X_k + X_N \right).$$

Expliquer au fermier dès le début des opérations comment choisir les  $u_k$  implique à ceux-ci d'être « prévisibles » à chaque instant  $k$ . Plus précisément, nous demandons aux  $u_k$  d'être markoviens : il s'agit, pour chaque  $u_k$ , d'être calculable dès que  $X_k$  est connu. Ainsi, le fermier, au moment de réaliser sa stratégie, est capable de prendre sa décision à chaque instant  $k$  sur  $u_k$  en fonction de la seule donnée  $X_k$ .

Soit  $\underline{u}$  une stratégie donnée, et, pour un instant  $k$  soit  $V_k^{\underline{u}}(x)$  la valeur moyenne de la production obtenue à partir de l'instant  $k$  lorsque  $x_k = x$  :

$$V_k^{\underline{u}}(x) = \mathbb{E} \left( \sum_{p=k}^{N-1} (1-u_p) X_p + X_N \mid X_k = x \right). \quad (2.3)$$

Soit  $J_k(x)$  la meilleure valeur moyenne possible, c'est-à-dire celle obtenue à partir de la meilleure stratégie possible. C'est cette quantité, ainsi que les  $\underline{u}$  optimaux associés, que nous cherchons à calculer :

$$J_k(x) = \underset{\underline{u}}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( \sum_{p=k}^{N-1} (1-u_p) X_p + X_N \mid X_k = x \right).$$

Dans cet exemple, à l'étape  $N$ , nous avons évidemment  $J_N(x) = x$  car, en fin de période, il est inutile d'investir pour les années suivantes. Ensuite, nous procédons par récurrence en remontant dans le temps. Pour  $k$  fixé, nous supposons les  $J_p$  connus pour  $p > k$  et essayons d'en déduire la valeur de  $J_k$ . Il est naturel de supposer que la production optimale est proportionnelle à la quantité de départ pour la céréale, c'est à dire que, pour tout  $x$ ,  $J_p(x) = a_p \cdot x$ , où  $a_p$  est une constante. Au départ,  $a_N = 1$ . Dans notre récurrence, nous supposons avoir montré l'identité sur  $J_p$  pour  $p > k$ .

Soient alors  $k$  donné,  $x_k = x$  et  $\underline{u}$  une stratégie optimale à partir de  $k+1$ , ce qui signifie que le principe de calcul des  $u_{k+1}, \dots$  est connu et qu'il reste à définir un principe de calcul pour  $u_k$ .

Un calcul direct d'espérance donne, à partir de (2.1), (2.2) et (2.3) :

$$\begin{aligned} V_k^{\underline{u}}(x) &= (1-u_k)x + \mathbb{E}(J_{k+1}(x + u_k W_k x)) \\ &= (1-u_k)x + a_{k+1}(x + \bar{w}u_k x) \\ &= \{(1+a_{k+1}) + (a_{k+1}\bar{w}-1)u_k\} x. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cette expression est affine en  $u_k$ . Elle atteint son maximum aux bornes 0 ou 1 de l'intervalle « autorisé » pour les  $u_k$ , en fonction du signe de  $a_{k+1}\bar{w}-1$ .

Une stratégie optimale doit donc vérifier :

$$\text{Si } a_{k+1}\bar{w}-1 < 0, \text{ alors } u_k = 0 \text{ et } a_k = 1+a_{k+1},$$

$$\text{Si } a_{k+1}\bar{w}-1 > 0, \text{ alors } u_k = 1 \text{ et } a_k = (1+\bar{w})a_{k+1}.$$

Sans détailler les calculs, nous voyons qu'un contrôle optimal  $\underline{u}$  peut être défini ainsi :

$$1. \text{ Si } \bar{w} > 1, \text{ alors } u_0 = \dots = u_{N-1} = 1.$$

2. Si  $0 < \bar{w} < 1/N$ , alors  $u_0 = \dots = u_{N-1} = 0$ .

3. Si  $1/N \leq \bar{w} \leq 1$ , alors  $u_0 = \dots = u_{N-\bar{k}-1} = 1$  et  $u_{N-\bar{k}} = \dots = u_{N-1} = 0$ , où  $\bar{k}$  est l'entier qui vérifie  $1/(\bar{k} + 1) \leq \bar{w} \leq 1/\bar{k}$ .

La formule (2.4) devient alors :

$$a_k = (1 + a_{k+1}) + (a_{k+1}\bar{w} - 1)u_k. \quad (2.5)$$

Elle permet de calculer de proche en proche les  $a_k$ .

**Le fermier maîtrise chaque année la production moyenne obtenue avec la meilleure stratégie**

Date	Proportion réinvestie	Récolte espérée à la date ( $a_k$ )
0	1	44,27
1	1	31,62
2	1	22,59
3	1	16,13
4	1	11,52
5	1	8,23
6	1	5,88
7	1	4,20
8	0	3,00
9	0	2,00
10		1,00

*Tab 2.1 : Description de la stratégie optimale en termes de proportion de la récolte réinvestie et meilleure moyenne possible.*

Prenons un exemple et fixons  $N = 10$ , et  $\bar{w} = 0.4$ , (garder 100 unités pour l'année suivante augmente, en moyenne, de 40 unités le gain des années suivantes), alors  $\bar{k} = 2$  et :

- $u$  vaut 1 entre 0 et 7 : ce qui signifie que durant les 8 premières années l'intégralité des récoltes est réinvesti en production,
- $u$  vaut 0 en suite : à partir de la 9<sup>ème</sup> année, la récolte est intégralement stockée et destinée à la vente.

Cumulée sur les 10 années, cette stratégie montre qu'il est possible d'obtenir une production moyenne stockée qui vaut 44,27 fois la quantité  $X_0$  disponible au démarrage comme le montre le tableau ci-dessus (*Tab 2.1*).

Examinons maintenant l'intérêt de cette stratégie et comparons-la à une approche naïve. Demandons-nous ce qui se passe, si, plein de bon sens, notre fermier comprend qu'il doit garder une partie de sa production pour la réinvestir l'année suivante. Il est alors naturellement tenté de choisir une proportion constante à réinvestir, que nous notons  $\hat{u}$ . La reprise des calculs précédents (2.5) permet aussi de calculer de proche en proche les  $a_k$  c'est à dire la production moyenne stockée dans ce cas de figure en fonction de  $\hat{u}$ , et nous donnons, dans le tableau qui suit (*Tab 2.2*), quelques valeurs de cette production moyenne stockée en fonction de  $\hat{u}$ .

**Avec une politique de réinvestissement constant, nous sommes loin du rapport 44,27 obtenu avec la stratégie optimale.**

$\hat{u}$	0%	20%	40%	60%	80%	100%
<b>Production Moyenne</b>	11	13,75	17,20	21,25	25,47	28,93

*Tab 2.2 : Valeur moyenne stockée en fonction de la proportion réinvestie chaque année.*

Nous remarquons que le cas  $\hat{u} = 0\%$  correspond à la quantité disponible à 0 puis à la production des 10 années suivantes, qui reste constante. Le cas  $\hat{u} = 1$  correspond à un réinvestissement systématique de toute la production pour l'année suivante et vaut  $(1 + \bar{w})^{10}$ . Dans tous les cas, nous sommes bien loin du rapport 44,27 qu'il est possible d'obtenir avec une stratégie optimale.

En examinant ce tableau, notre fermier peut comprendre qu'il doit tout réinvestir les premières années, puis garder sa production pour la vendre à partir d'une certaine date. Si le fermier décide d'arrêter de réinvestir sa production la dernière année, la production moyenne obtenue permet d'atteindre un rapport de 41,32. S'il décide d'arrêter à la huitième année (au lieu de la neuvième), le rapport obtenu vaut 42,17. S'il arrête encore avant, ce nombre diminue ensuite rapidement. Là encore, nous sommes en dessous de ce que permet une stratégie optimale (*Cf. Tab 2.3*).

Cet exemple montre l'intérêt de l'étude des stratégies optimales et souligne que ces dernières ne coïncident pas forcément avec ce que peut inspirer l'intuition. C'est une illustration simple de ce qui est communément appelé la programmation dynamique. Notre objectif économique a été matérialisé par une fonction de valeur  $J$  définie à toute étape (intermédiaire et finale) du processus étudié. Nous avons cherché à optimiser cette fonction en partant de la fin puis, par induction, en remontant dans le temps. Dans cet exemple, nous remarquons que chaque étape s'est ramené à un

problème d'optimisation sur une seule des valeurs  $u_k$  de la famille  $\underline{u}$ , nous avons ainsi évité la complexité qui aurait été inhérente à un travail sur un grand nombre de variables.

**C'est bien à partir de la 8<sup>ème</sup> année que le fermier doit garder intégralement sa production pour la revente.**

Date de la première décision de tout garder	Récolte espérée
7	42,17
8	44,27
9	41,32

*Tab 2.3 : Cas où le fermier réinvestit tout dans un premier temps puis destine tout à la vente*

En effet, la relation (2.4), que nous reformulons ici en passant au maximum et en prenant en compte la définition de  $J$ , est un cas particulier de l'équation de Bellman rencontrée à la section suivante :

$$J_k(x) = \underset{u}{\text{Max}} \mathbb{E} \{ (1-u)x + J_{k+1}(x + uW_k x) \}.$$

À chaque instant, la stratégie optimale a été obtenue en effectuant les calculs appropriés pour cet instant, puis en suivant les stratégies optimales déjà calculées pour les instants suivants.

Le caractère discret du temps nous a aidés car il a permis la récurrence présentée plus haut. Nous généralisons cet exemple en temps discret dans la section suivante avant de passer au cas où le temps est une variable continue, et qui permet de traiter la gestion d'actif en continu durant une année.

### **2.3 Une généralisation de l'exemple du fermier de Bertsekas applicable à des objectifs financiers : optimisation dans le cas où les processus évoluent en temps discret**

Nous pouvons maintenant préparer les outils du contrôle stochastique qui sont utilisés dans la suite de ce mémoire. Pour ce faire, nous commençons par étudier les optimisations économiques dans le cas où les processus évoluent en temps discret. Nous utilisons les résultats de cette section de la manière suivante :

- L'équation de Bellman que nous présentons dans cette section se prête à une généralisation pour des processus en temps continu. Nous parlons alors, ce qui est l'objet de la prochaine

section, d'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Cette approche est indispensable pour une gestion dynamique d'actifs où le gestionnaire se pose en permanence la question de la pertinence de la composition de son portefeuille ;

- Cette équation permet aussi de se poser en début d'année la question du taux garanti à publier par un assureur. En effet, nous choisissons de prendre un taux garanti qui optimise notre critère économique.
- Enfin, cette approche est employée pour guider l'assureur dans la manière de lisser ses résultats. En fin d'année il choisit le taux servi pour l'année ainsi que la proportion de la participation aux bénéfices qu'il ne distribue pas immédiatement, et cela en fonction de notre critère économique.

Dans cette section, le temps est représenté par l'ensemble  $\llbracket 0, T \rrbracket = \{0, \dots, T\}$ . Ce temps peut aussi bien correspondre à des intervalles de temps discrétisés qu'à des étapes successives dans un processus sans considération sur l'unité de temps employée. C'est ce qui se produit plus bas au moment du choix du taux servi en fin d'année et du taux garanti en début d'année suivante (cf. la fin de la section).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}, P)$  un espace probabilisé filtré. Nous rappelons que  $\mathcal{F}$  est une tribu permettant de rassembler l'ensemble des événements aléatoires étudiés dans notre modèle (des parties de  $\Omega$ ). Par ailleurs,  $\mathcal{F}_t$  est une tribu qui rassemble les événements de  $\mathcal{F}$  qui ne dépendent que de l'information disponible jusqu'à l'instant  $t$  inclus.

Nous étudions un système dont l'état est décrit, à chaque instant, par un processus stochastique  $(X_t)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  où  $X_0$  est donné et représente l'état initial du système. Nous supposons que  $X_{t+1}$  dépend de :

- La valeur précédente du processus  $X_t$ , à valeur dans un espace  $\mathbb{R}^{N_x}$  pour un entier  $N_x$ .
- Une variable de « contrôle »  $u_t$ , dans un certain ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{N_u}$  pour un entier  $N_u$ . Un agent doit pouvoir régler à chaque instant les valeurs de  $u_k$  en fonction de ses objectifs.
- Une variable aléatoire  $Z_t$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^{N_z}$  pour un entier  $N_z$ , qui rassemble les informations sur l'aléa intervenant dans l'évolution de  $X_t$  à  $X_{t+1}$ . Nous supposons de plus que les variables aléatoires  $Z_t$  sont indépendantes et de même loi. Certains auteurs adoptent une autre présentation, ils mettent toutes les variables (description de l'état du modèle et éléments aléatoires) dans  $X_t$ .

En réalité, nous supposons que, pour une fonction mesurable  $\mathcal{P}$  (qui décrit la progression de  $X$ ),

$$X_{t+1} = \mathcal{P}(X_t, u_t, Z_t).$$

Nous ne faisons pas dépendre  $\mathcal{P}$  explicitement du temps, comme le font certains auteurs.

Dans ce mémoire,  $X_t$  rassemble les informations qui décrivent notre système : il s'agit du montant du portefeuille géré, ainsi que, comme nous le verrons plus bas, de la provision mathématique et du taux court. Les variables  $Z_t$  rassemblent les informations qui modélisent l'évolution des éléments aléatoire : actifs et taux. Les variables  $u_t$  représentent les éléments sur lesquelles peut agir un assureur : composition de portefeuille, taux garanti en début d'année et taux servi.

Nous supposons qu'à chaque instant  $t$ , l'activité peut dégager une valeur (ex : profit), et que cette valeur est calculable dès l'instant où son connu  $X_t$  et  $u_t$ .

Pour mesurer l'efficacité de l'activité à l'instant  $t$ , il est traditionnel de ne pas prendre directement la valeur du « profit » généré par l'activité mais de mesurer son « efficacité » ou son « utilité », ainsi mesurée par une fonction à deux variables  $F(X_t, u_t)$ . A l'instant  $T$ ,  $u_t$  n'a plus de sens et la valeur terminale est mesurée à travers une autre fonction  $F_T(X_T)$ .

Lorsque cette efficacité est mesurée à un instant  $s < t$ , elle est couramment actualisée avec un coefficient  $e^{-\delta(t-s)}$ , où  $\delta$  est une constante positive donnée. Nous ne discutons pas ici du choix de cette constante (taux d'actualisation, prime de risque, importance relative du court terme et du long terme).

La valeur actualisée à  $t = 0$  de l'efficacité du processus – et du contrôle – intervenant à  $t$  vaut donc :

$$e^{-\delta t} F(X_t, u_t).$$

Il est habituel de considérer des fonctions d'utilité séparables dans le temps. Ceci revient à considérer que l'utilité globale d'un flux de cash-flows dans le temps est la somme des utilités de chaque élément du flux à chaque instant.

L'efficacité globale du processus se mesure alors par la somme des valeurs actualisées et vaut :

$$\sum_{t=0}^{T-1} e^{-\delta t} F(X_t, u_t) + e^{-\delta T} F_T(X_T). \quad (2.6)$$

Nous souhaitons savoir comment agir sur le contrôle  $u_t$  pour que cette efficacité globale soit « optimale ».

Pour cela, nous considérons, comme dans l'exemple du fermier de Bertsekas, qu'une stratégie  $\underline{u}$  est admissible si elle est markovienne, c'est à dire si chaque  $u_t$  ne dépend que de  $X_t$ . Cette hypothèse est moins contraignante qu'il n'y paraît. Øksendal [OKS, Théorème 11.2.3] montre que les stratégies markoviennes sont au moins aussi bonnes que des stratégies plus générales (dites adaptées). Nous revenons sur ce point au chapitre suivant.

Pour une stratégie  $u_t$  donnée, il est possible de considérer la valeur moyenne de l'efficacité globale du processus, c'est à dire l'espérance de l'expression (2.6) :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{T-1} e^{-\delta i} F(X_i, u_i) + e^{-\delta T} F_T(X_T) \right).$$

Notre problème est le suivant :

Quelle est la meilleure stratégie admissible qui permet de réaliser l'optimum suivant :

$$\underset{\underline{u}}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( \sum_{i=0}^{T-1} e^{-\delta i} F(X_i, u_i) + e^{-\delta T} F_T(X_T) \right).$$

Pour répondre à cette question, nous introduisons, comme dans l'exemple du fermier de Bertsekas, une fonction qui représente cette meilleure stratégie à partir d'un instant donné  $t$ , comme suit :

$$J(t, x) = \underset{\underline{u}}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( \sum_{s=t}^{T-1} e^{-\delta(s-t)} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-t)} F_T(X_T) \mid X_t = x \right). \quad (2.7)$$

Cette fonction dépend de deux variables, le temps  $t$  et la valeur  $x$ , représentant l'information connue du système à l'instant  $t$ .

À l'instant  $T$ , cette fonction a pour valeur la valeur terminale de la fonction  $F_T$  en  $x$  :

$$J(T, x) = F_T(x).$$

Nous allons remonter le temps et supposer avoir montré qu'à partir de  $t+1$ , pour  $t$  donné inférieur à  $T$ , une stratégie optimale existe. Soit alors  $\underline{u}$  une telle stratégie optimale à partir de  $t+1$ .

Nous réécrivons  $J(t, x)$  ainsi, en séparant l'instant  $t$  des instants suivants :

$$\begin{aligned} J(t, x) &= \underset{u_t, u_{t+1}, \dots}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( F(x, u_t) + \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(s-t)} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-t)} F_T(X_T) \mid X_t = x \right) \\ &= \underset{u_t, u_{t+1}, \dots}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( F(x, u_t) + e^{-\delta} \left[ \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(s-(t+1))} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-(t+1))} F_T(X_T) \right] \mid X_t = x \right). \end{aligned}$$

Comme  $\underline{u}$  est optimal à partir de  $t+1$ , le terme entre crochets correspond à  $J(t+1, X_{t+1})$  :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(s-(t+1))} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-(t+1))} F_T(X_T) \mid X_{t+1} \right) = J(t+1, X_{t+1}).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left( \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(s-(t+1))} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-(t+1))} F_T(X_T) \mid X_t = x \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(s-(t+1))} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(T-(t+1))} F_T(X_T) \mid X_{t+1} \right) \mid X_t = x \right) \\ &= \mathbb{E} \left( J(t+1, \mathcal{P}(x, u_t, Z_t)) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$J(t, x) = \underset{u}{\text{Max}} \mathbb{E} ( F(x, u) + e^{-\delta} J(t+1, \mathcal{P}(x, u, Z_t)) ). \quad (2.8)$$

À chaque étape, nous sommes donc ramenés à une optimisation sur une seule des variables  $u = u_t$ , sur la base d'un calcul d'espérance faisant intervenir la distribution d'une seule variable aléatoire  $Z_t$ , ce qui est illustré dans la figure 2.1 suivante :

**Dans le cas discret, l'équation de Bellman est intuitive et permet de travailler en remontant le temps.**

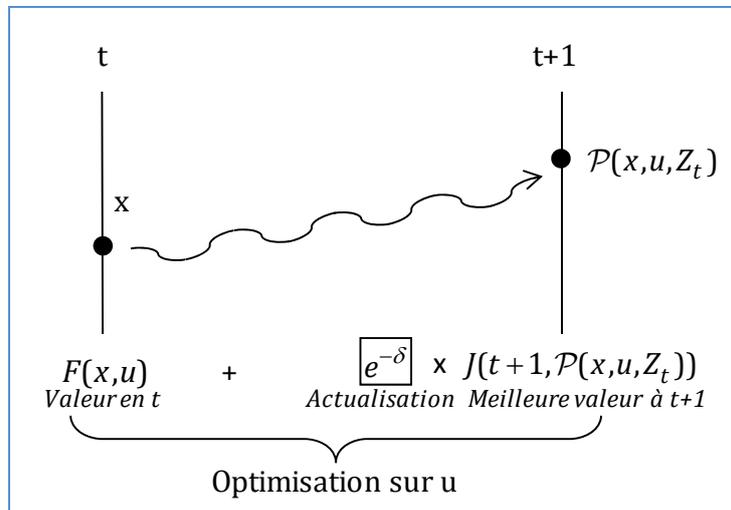


Fig 2.1 : Principe de l'équation de Bellman en temps discret.

L'équation précédente (2.8) est appelée équation de Bellman de notre problème. Elle permet de calculer de proche en proche l'ensemble des valeurs de la fonction  $J$ ,  $J(t, x)$ .

Remarque : Le raisonnement s'applique encore si le facteur d'actualisation est aléatoire. Soit  $\rho_t$  un taux d'actualisation aléatoire entre  $t$  et  $t+1$ . Posons :

$$\delta(t, s) = \sum_{u=t}^{s-1} \rho_u.$$

La définition de  $J(t, x)$  s'écrit alors :

$$J(t, x) = \underset{u_t, u_{t+1}, \dots}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( F(x, u_t) + \sum_{s=t+1}^{T-1} e^{-\delta(t, s)} F(X_s, u_s) + e^{-\delta(t, T)} F_T(X_T) \middle| X_t = x \right).$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, nous obtenons la forme suivante de l'équation de Bellman :

$$J(t, x) = \underset{u}{\text{Max}} \mathbb{E} ( F(x, u) + e^{-\rho t} J(t + 1, \mathcal{P}(x, u, Z_t)) ). \quad (2.9)$$

**L'équation de Bellman permet de calculer J de proche en proche à toute étape.**

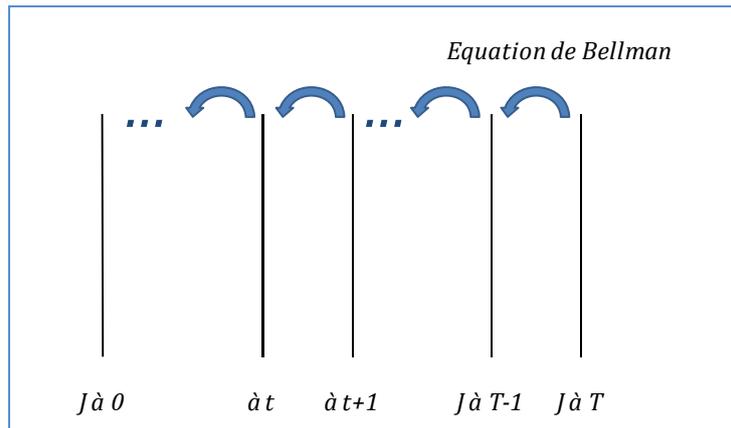


Fig 2.2 : Principe de l'utilisation de l'équation de Bellman.

Voici comment nous appliquons les résultats de cette section dans le mémoire :

### **Le choix du taux servi en fin d'année.**

Notre objectif est de proposer un taux qui optimise l'objectif économique brièvement présenté dans la première section de ce chapitre, et défini au chapitre 4. Cela revient à garder une proportion de la provision mathématique en PPB en vue d'un lissage des résultats. (Servir un taux élevé se fait au détriment de la PPB, éventuellement en prélevant sur la PPB existante, garder un petit pourcentage de PPB diminue automatiquement le taux qui peut être servi).

Ce choix est effectué en fin d'année en préparation de l'étape suivante de notre processus, qui est le commencement d'une nouvelle année. Ici, nous considérons donc la fin de l'année et le début de l'année suivante comme deux étapes distinctes.

Une fois ce taux choisi, il n'y a plus rien d'aléatoire, le contrat (participation aux bénéfices, prélèvement sur en cours, ...) permettant de déterminer tous les autres paramètres (ce point est présenté plus bas au chapitre 4). L'équation (2.8) s'écrit :

$$J(\text{fin d'année}, \text{Infos sur le portefeuille}, PM, \dots) = \underset{\text{taux servi}}{\text{Max}} ( J(\text{début d'année suivante}, \text{Passage de la fin d'année}(\text{Infos} \dots, \text{taux servi})) ).$$

**En fin d'année, lorsque les performances du portefeuille le permettent, nous faisons le bon compromis entre le taux servi et le montant de la PPB.**

Au premier janvier : **PM = 100**

Au 31/12, après déduction des frais et du résultat de l'assureur : **Portefeuille = 105**

Exemple n° 1 :  $\Rightarrow$  servir 5%,  
 $\Rightarrow$  aucune marge de manœuvre pour l'année suivante.

Exemple n° 2 :  $\Rightarrow$  servir 3,5%,  
 $\Rightarrow$  une marge de manœuvre,  
 Avec une PPB de 1,5%.

*Fig 2.3 : Le taux servi en fin d'année*

### **Le choix du taux garanti en début d'année.**

Là encore, nous raisonnons sur deux étapes successives qui se déroulent toutes les deux au début de l'année :

- Le tout début d'année, que nous notons  $t_{debut}$ , lorsque le taux servi vient d'être connu,
- Puis le moment en début d'année que nous notons  $t_{depart}$ , qui sert de point de départ pour la gestion du portefeuille, où une hypothèse de taux garanti a été choisie par l'assureur avec possibilité de communication aux assurés ou de publication par voie de presse. Comme nous le verrons plus bas, la difficulté vient de l'engagement à servir ce taux, même en cas de mauvaise performance du portefeuille.

Comme aucun autre paramètre ne change durant cette étape (potentiellement infiniment courte), nous avons ici :

$$J(\text{Tout début d'année } t_{debut}, \text{Infos sur le portefeuille, PM, ...}) = \underset{\text{taux garanti}}{\text{Max}} ( J(\text{point de départ } t_{depart}, \text{Infos..., taux servi connu}) ).$$

### La gestion du portefeuille dans le courant de l'année.

Entre l'étape que nous avons appelée le point de départ en début d'année et celle que nous avons nommée la fin de l'année, l'assureur doit gérer ses fonds de la manière la plus astucieuse possible. Il dispose pour cela du moyen de contrôler ses actifs (dans le cadre de ce mémoire, un actif risqué, des obligations et du monétaire).

La technique de contrôle optimal que nous présentons dans la section suivante explique comment répartir le portefeuille entre ces différents types d'actifs à partir d'une fonction d'efficacité calculée en fin d'année. Il s'agit d'un « module » que nous nommons « **Module de Merton Généralisé** » car il est directement inspiré du modèle de Merton. Il est positionné dans le schéma suivant (*Fig 2.4*) présentant le fonctionnement de notre système.

**Le Module de Merton Généralisé est employé dans un contexte où le taux servi, la PPB et le taux garanti sont connus.**

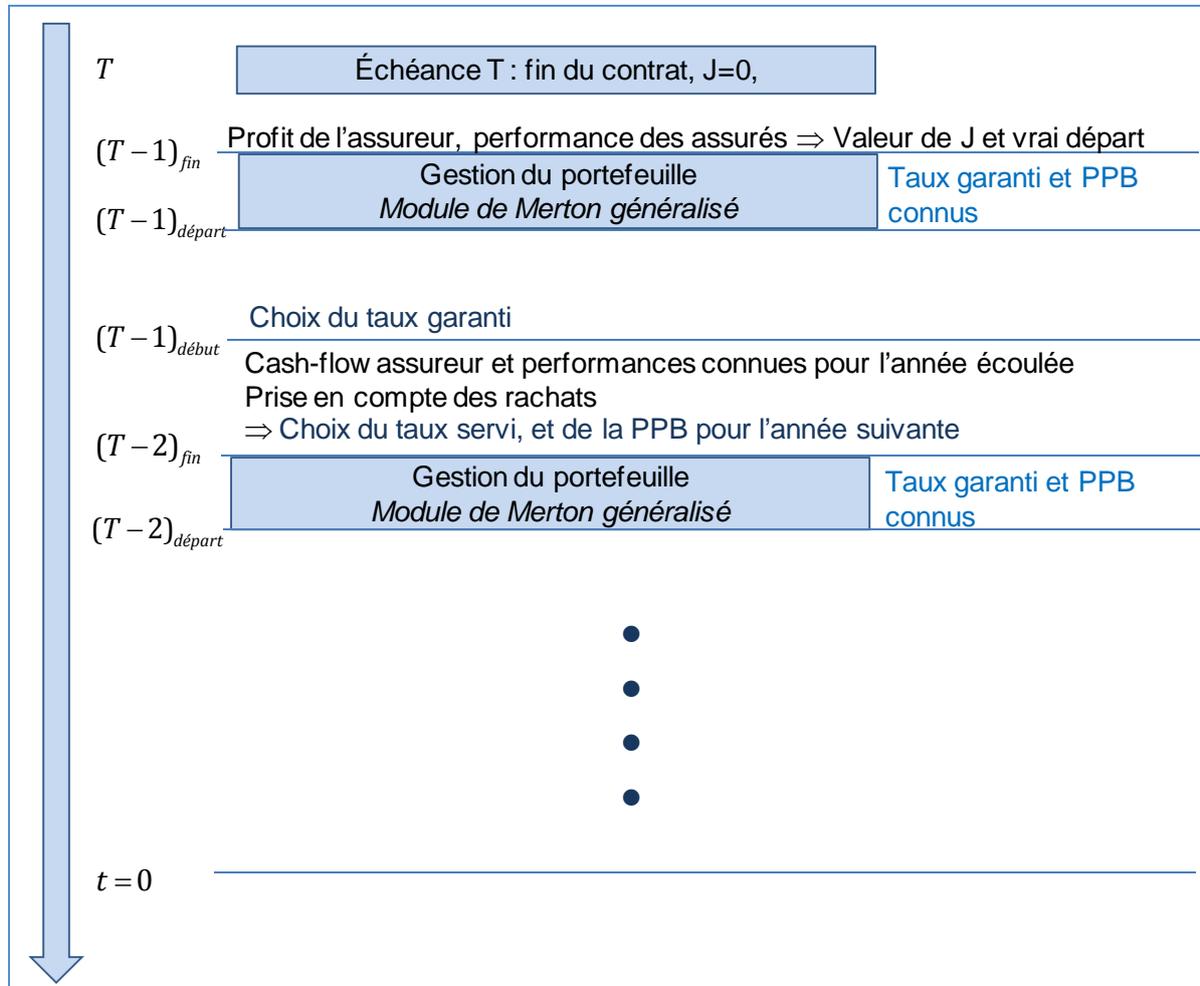


Fig 2.4 : Le fonctionnement d'ensemble du système

## 2.4 Application du contrôle stochastique à la gestion d'actif en temps continu, et avec aptitude aux rachats potentiels

Maintenant que nous savons utiliser l'équation de Bellman en temps discret, nous pouvons aborder les outils permettant d'étudier une gestion d'actifs en temps continu. L'outil mathématique de base est le sujet central de cette section, il s'agit de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Cette équation fait l'objet d'un traitement particulier dans la sous-section qui suit.

C'est cet outil qui est employé pour ce que nous avons nommé plus haut le « **Module de Merton Généralisé** » qui s'occupe de la gestion d'actifs sur une année dans les conditions de notre mémoire alors que le taux garanti vient d'être publié et qu'éventuellement une portion du portefeuille est réservé en PPB. Il est adapté au contexte de l'assurance vie : prise en compte d'un taux variable, interdiction de vente à découvert sur les actifs, interdiction d'emprunter, optimisation d'une fonction d'efficacité quelconque – notamment pour la prise en compte de l'impact des rachats. Ce modèle est une extension d'un modèle introduit par Merton en 1969. Après avoir présenté les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, nous décrivons donc le modèle de Merton dans une sous-section particulière puis présentons dans une autre sous-section l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman adaptée au « Module de Merton Généralisé ».

Nous terminons par une sous-section qui présente une généralisation du modèle de Merton lorsque les actifs peuvent être soumis à un choc systémique.

### 2.4.1 Les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dans le cas continu

Nous supposons donné un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$  où l'intervalle  $I$  est soit  $\mathbb{R}^+$ , soit  $[0, T]$ .

#### 2.4.1.1 Présentation intuitive de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Nous étudions l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman dans le cas d'un processus stochastique qui se déroule sur un horizon de temps  $T$  déterminé. Ce processus peut être contrôlé par un agent et produit en continu un « cash-flow » ou « profit » ayant une « utilité ». Il possède à l'horizon de temps défini une « valeur de liquidation » ou « valeur terminale » ayant elle même une « utilité » (cf. Fig 2.5).

Plus précisément, soit  $X_t$  un processus stochastique. Nous supposons que notre agent peut contrôler le déroulement de  $X_t$  en agissant sur des paramètres situés à chaque instant dans un ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Les ensembles  $\mathcal{U}$  et  $\mathbb{R}^n$  ne coïncident pas forcément. Les paramètres peuvent par exemple être bornés (ex : interdiction de vente à découvert). A chaque instant, l'agent doit choisir une valeur  $U \in \mathcal{U}$  de ces paramètres en fonction de ses objectifs.

**Le problème général : optimiser le bon compromis entre la valeur finale et le cash flow dégagé en continu.**

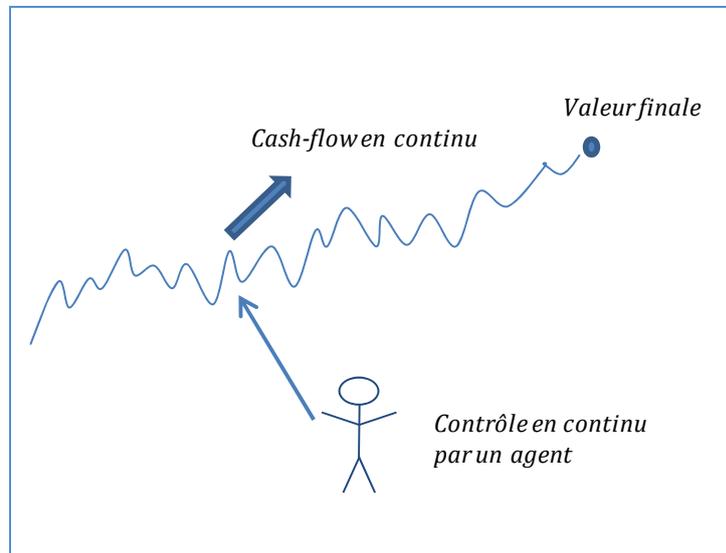


Fig 2.5 : Le contexte de notre optimisation

Nous appelons stratégie l'application  $t \rightarrow U_t$ . A priori cette application est adaptée par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ . Nous notons alors  $X_t^U$  l'évolution du processus respectant cette stratégie. Comme dans la section précédente, nous travaillons avec des stratégies markoviennes.

Nous travaillons dans un environnement économique où nous supposons de plus que le taux d'intérêt est variable et suit un comportement stochastique,  $r_t$ .

Pour une réalisation donnée du processus  $X_t$ , et une stratégie  $U$ , la valeur à étudier prend en compte

- Un flux  $g(X_t^U, r_t, U_t)$  à chaque instant, (l'utilité ou l'efficacité du cash-flow présenté dans la figure plus haut) dont la valeur est impactée par le contrôle  $U_t$ ,
- Une valeur  $f(X_T^U)$  de liquidation,
- Une actualisation en continu à un taux  $\zeta r_t + \delta$  qui prend en compte à la fois le taux spot  $r_t$  ainsi qu'un facteur complémentaire  $\delta$ .

Formulé mathématiquement, cette valeur est composée de l'intégrale du flux  $g$  actualisé, à laquelle nous ajoutons la valeur de  $f$  elle-même actualisée.

$$\int_0^T \exp\left(-\int_0^t (\zeta r_s + \delta) ds\right) \cdot g(X_t^U, r_t, U_t) dt + \exp\left(-\int_0^T (\zeta r_s + \delta) ds\right) f(X_T^U), \quad (2.10)$$

Nous introduisons comme dans la section précédente la valeur moyenne prise en  $t$  par cette quantité. En plus de la variable  $t$ , elle dépend de la valeur  $x$  en  $t$  du portefeuille, de la valeur  $r$  en  $t$  du taux  $r_t$ , ainsi que de la stratégie suivie  $U$  :

$$V^U(t, x, r) = \mathbb{E} \left( \int_t^T \exp\left(-\int_t^{t_1} (\zeta r_s + \delta) ds\right) \cdot g(X_{t_1}^U, r_{t_1}, U_{t_1}) dt_1 + \exp\left(-\int_t^T (\zeta r_s + \delta) ds\right) f(X_T^U) \middle| X_t^U = x, r_t = r \right).$$

Nous reprenons le raisonnement de la section précédente afin d'étudier la fonction de valeur qui doit représenter la « meilleure » stratégie possible à partir de l'instant  $t$ , lorsque la valeur du portefeuille du portefeuille vaut  $x$ , et que la valeur du taux vaut  $r$ . Cette fonction est définie ainsi :

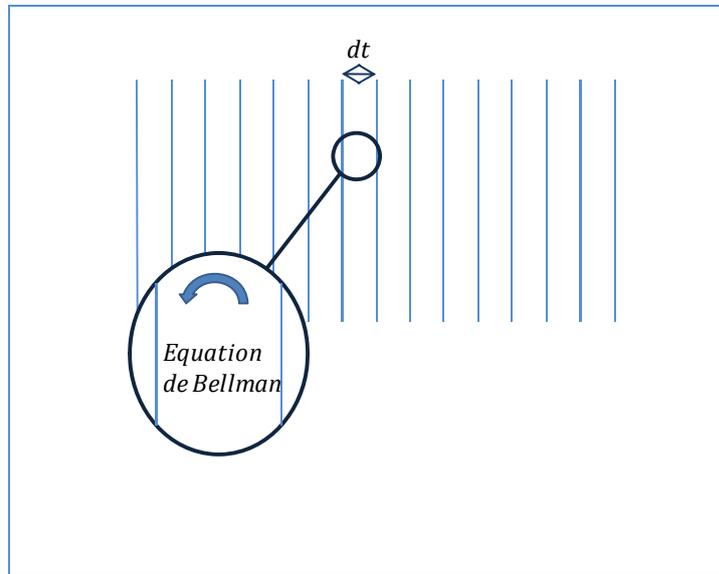
$$J(t, x, r) = \text{Max}_{U \in \mathcal{U}} V^U(t, x, r).$$

Afin d'employer les résultats de la section précédente et de nous « ramener » au cas en temps discret, nous considérons que l'intervalle de temps  $[0, T]$  est découpé en un « grand » nombre d'intervalles « infinitésimaux » de largeur  $dt$ . La fonction  $\mathcal{P}$  de la section précédente représente alors la dynamique de  $X_t$  sur un court intervalle de temps  $dt$ . Le principe consiste donc à examiner ce que devient l'équation de Bellman appliqué à cette fonction  $J$ , mais en tenant compte, cette fois, d'un intervalle de temps « infinitésimal »  $[t, t + dt]$ , (cf. Fig 2.6).

La généralisation du raisonnement de la section précédente est possible pour un grand nombre de processus. (Dans la littérature, cette généralisation est traitée de manière très technique et plus rigoureuse sur un plan purement mathématique). En effet, et c'est cela qui nous permet de travailler, pour une fonction « suffisamment régulière » à une variable  $g$ , il est connu que le comportement de la quantité  $g(X_{t+dt})$  ne varie pas considérablement, en moyenne, pour de nombreux processus stochastiques (processus de diffusions, processus à sauts) autour de la valeur  $x = X_t$  prise à l'instant  $t$ . Au processus  $X_t$  est associé ce qu'on appelle un « générateur infinitésimal » que nous notons pour le moment  $\mathcal{D}$  associant à tout  $g$  une autre fonction  $\mathcal{D}g$  vérifiant :

$$\mathbb{E}(g(X_{t+dt}) | X_t = x) = g(x) + \mathcal{D}g(x)dt.$$

**Comment l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman se déduit de l'équation de Bellman en temps discret.**



*Fig 2.6 : Passage du temps discret au temps continu.*

Ainsi, même si  $g(X_t)$  a un comportement aléatoire, en moyenne, il évolue suivant une « tendance » qui peut être calculée.

Par exemple, lorsque  $X_t$  est un processus de diffusion monodimensionnel dépendant d'un mouvement brownien standard  $W_t$  :

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

nous avons, avec  $X_t = x$  et en employant le lemme d'Itô :

$$g(X_{t+dt}) = g(x) + \left( \mu(x).g'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x).g''(x) \right) dt + \sigma(x).g'(x).dW_t.$$

Nous rappelons que :

$$\mathbb{E}(dW_t) = 0.$$

Il s'ensuit :

$$\mathbb{E}(g(X_{t+dt})|X_t = x) = g(x) + \left( \mu(x) \cdot g'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \cdot g''(x) \right) dt.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{D}f(x) = \mu(x) \cdot g'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \cdot g''(x).$$

**Ce qui rend possible notre optimisation : le fait, qu'en moyenne, pour une fonction  $g$ ,  $g(X_t)$  évolue avec une tendance qui est calculable.**

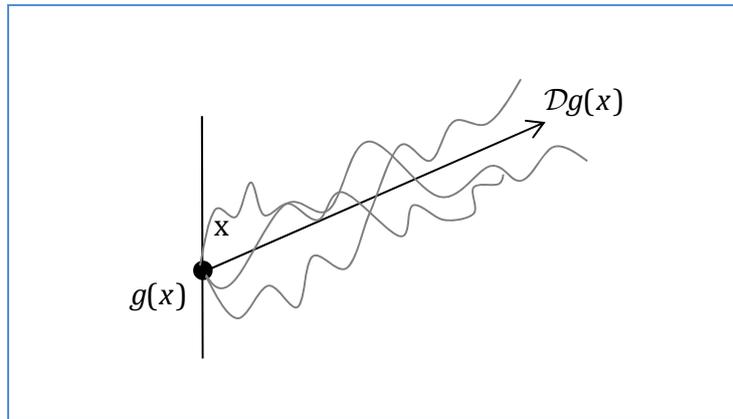


Fig 2.7 : Le générateur infinitésimal de  $g$ .

Un autre exemple que nous utilisons constamment est le cas où le processus est de la forme

$$t \rightarrow (t, X_t),$$

ce qui permet de considérer des fonctions  $g(t, X_t)$  où le temps intervient directement. Dans ce cas, un calcul analogue montre que :

$$\mathcal{D}g(t, x) = g_t(t, x) + \mu(x)g_x(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(x)^2 g_{xx}(t, x).$$

Dans la littérature nous rencontrons quelquefois une distinction entre « générateur infinitésimal » noté au moyen de la lettre  $A$  (dérivation par rapport à toutes les variables à l'exception du temps) et « opérateur de Dynkin » (dérivation par rapport à toutes les variables, *y compris le temps*). Désormais, nous effectuons cette distinction et nous notons :

$$\mathcal{D}g = g_t + Ag.$$

Ici,  $Ag$  est le générateur infinitésimal de  $g$  -  $t$  est supposé « constant » - et  $\mathcal{D}g$  est l'opérateur de Dynkin de  $g$ .

Les formules précédentes se généralisent en appliquant le lemme d'Itô à plusieurs variables lorsqu'il y a plusieurs processus stochastiques ( $X_t$  et  $r_t$  dans notre cas) et que les fonctions ont plusieurs variables, lorsque celles-ci représentent des processus de diffusion.

Lorsque l'évolution de  $X_t$  dépend aussi d'une stratégie  $U$ , nous employons l'une des notations  $\mathcal{D}^U, \mathcal{D}^u, \mathcal{D}^u, A^U, \dots$  suivant le contexte, pour l'opérateur de Dynkin et le générateur infinitésimal de  $X_t^U$ . Nous avons alors, dans le cas d'un seul processus stochastique :

$$\mathbb{E}(g(X_{t+dt}^U) | X_t = x) = g(x) + \mathcal{D}^U g(x)dt = g(x) + (g_t(x) + A^U g(x))dt,$$

Et, dans le cas de deux processus stochastiques  $X_t, r_t$  :

$$\mathbb{E}(J(t+dt, X_{t+dt}, r_{t+dt})) = J(t, x, r) + \mathcal{D}^U J(t, x, r)dt = J(t, x, r) + (J_t(t, x, r) + A^U J(t, x, r))dt. \quad (2.11)$$

Nous pouvons maintenant reprendre un raisonnement analogue à celui de la section précédente.

L'équation de Bellman (2.9) de la section précédente prenant en compte un taux stochastique s'écrit, en rassemblant tout ce qui est aléatoire en  $dZ_t$  (un ou plusieurs mouvements browniens, sauts, ...) :

$$\begin{aligned} J(t, x, r) &= \text{Max}_u \mathbb{E} \left\{ g(x, r, u)dt + e^{-(\zeta r_t + \delta)dt} J(t+dt, \mathcal{P}(X_t, u, dZ_t), r_{t+dt}) \mid X_t^u = x, r_t = r \right\} \\ &= \text{Max}_u \mathbb{E} \left\{ g(x, r, u)dt + [1 - (\zeta r_t + \delta)dt] J(t+dt, X_{t+dt}^u, r_{t+dt}) \mid X_t^u = x, r_t = r \right\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons développer à l'aide de l'opérateur de Dynkin  $\mathcal{D}^u J$  en reprenant (2.11) et en regroupant les termes en  $dt$ .

$$\begin{aligned} J(t, x, r) &= \text{Max}_u J(t, x, r) + \left\{ g(x, r, u) - (\zeta r_t + \delta)J(t, x, r) + \mathcal{D}^u J(t, x, r) \right\} dt \\ &= J(t, x, r) + \text{Max}_u \left\{ g(x, r, u) - (\zeta r_t + \delta)J(t, x, r) + \mathcal{D}^u J(t, x, r) \right\} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne montre que  $J$  va s'éliminer et que ce qui compte est d'obtenir le maximum d'un terme en  $dt$ .

Par conséquent, nous obtenons une relation qui s'écrit de manière très compacte à l'aide de l'opérateur de Dynkin  $\mathcal{D}$  :

$$\text{Max}_u \left\{ g(x, r, u) - (\zeta r + \delta)J(t, x, r) + \mathcal{D}^u J(t, x, r) \right\} = 0.$$

Quand nous avons écrit le générateur infinitésimal de  $J$ , l'équation HJB de notre problème d'optimisation devient intuitive : le maximum de la somme des 3 quantités de ce schéma représente le meilleur gain possible, avec une bonne stratégie, par unité de temps, c'est à dire la meilleure tendance pour  $J$ .

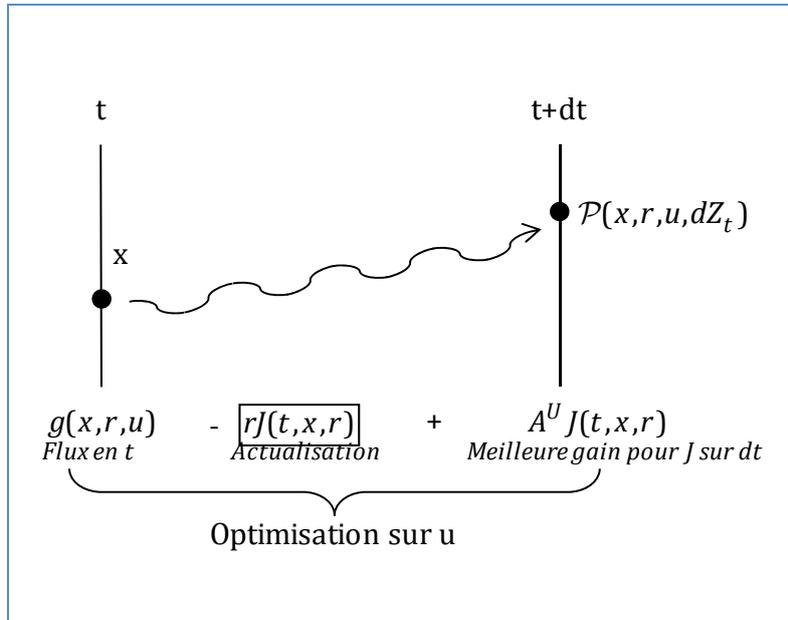


Fig 2.8 : Idée maîtresse derrière l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

En développant  $\mathcal{D}$ , nous obtenons l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante de notre problème :

$$\text{Max}_u \{ J_t(t, x, r) + g(x, r, u) - (\zeta r + \delta) J(t, x, r) + A^u J(t, x, r) \} = 0. \quad (2.12)$$

Nous la réécrivons :

$$J_t(t, x, r) = -\text{Max}_u \{ g(x, r, u) - (\zeta r + \delta) J(t, x, r) + A^u J(t, x, r) \}. \quad (2.13)$$

Cette équation appelle les commentaires suivants :

La connaissance de la valeur de  $J$  à un instant  $t$  permet, en appliquant (2.13), de déduire la dérivée partielle  $J_t$ , puis de « remonter » dans le temps en déduisant la valeur à  $t - dt$ . Cette façon de voir est employée dans les calculs numériques (si nous souhaitons être plus rigoureux sur un plan mathématique, la situation est plus complexe).

Dans un contexte où  $f$  et  $g$  sont positifs (ce qui correspond à un flux positif et une valeur de liquidation positive) et où il n'y a pas d'actualisation, alors, à l'instant  $t$ , nous disposons du court intervalle de temps supplémentaire  $dt$  pour réaliser notre stratégie par rapport à l'instant  $t + dt$ . Il est donc normal d'avoir, pour  $x, r$ , fixés :

$$J(t, x, r) > J(t + dt, x, r).$$

La différence est constituée d'un petit gain, grâce à l'opportunité de cette courte période. En écrivant :

$$\begin{aligned} J(t, x, r) &= J(t + dt, x, r) + \text{"gain"} \cdot dt \\ &= J(t, x, r) + J_t(t, x, r)dt + \text{"gain"} \cdot dt, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$J_t(t, x, r) = -\text{"gain"}.$$

En comparant cette relation avec l'équation HJB (2.13),  $J_t$  est l'opposé du petit gain maximal par unité de temps qu'il est possible d'acquérir sur  $J$  avec la meilleure stratégie.

De manière générale (avec un signe quelconque pour les fonctions et une actualisation éventuelle), les éléments constituant ce « gain » prennent en compte, de manière « naturelle » :

- Le flux de valeur dégagé durant le court intervalle de temps  $g(x, r, u)dt$ ,
- La décote due à l'actualisation  $-(\zeta r + \delta)J$ ,
- La « meilleure opportunité stochastique », ou encore la meilleure tendance, obtenue grâce à  $A^u J$ , calculée en faisant intervenir les dérivées partielles par rapport à toutes les variables sauf le temps (dans le cas où les processus sont des processus de diffusion).

En réalité, cette équation représente une condition nécessaire que doit satisfaire la fonction  $J$ . Dans la littérature, nous rencontrons d'une part des situations avec des solutions fermées ou explicitement accessibles au calcul numérique, d'autre part des démonstrations mathématiques concernant l'existence de solutions « régulières ». L'équation HJB est alors présentée comme une condition nécessaire devant être satisfaite par les fonctions de valeur  $J$ . Viennent après des « théorèmes de vérification » qui précisent les hypothèses techniques assurant que les solutions des équations HJB répondent bien au problème d'optimisation. La situation est suffisamment complexe pour obliger à définir ce qu'on entend par « régulier », ce qui sort du cadre de ce mémoire.

#### 2.4.1.2 *Prise en compte de la ruine de l'assureur*

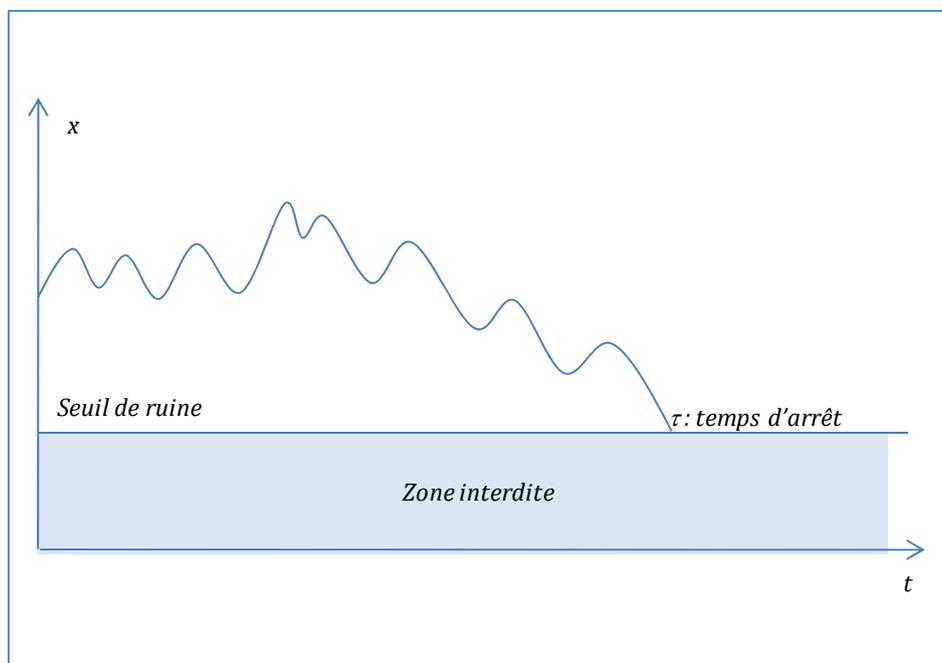
Il y a deux moyens de traiter la ruine :

- une pénalisation des pertes,
- l'introduction d'un temps d'arrêt dans les processus stochastiques.

Dans le premier cas, la ruine est « autorisée » par le modèle mais lourdement pénalisée par le changement de la fonction de valeur à optimiser, en lui assignant une valeur fortement négative en cas de pertes. Ceci a pour but d'orienter les stratégies vers des trajectoires qui les évitent.

Dans le deuxième cas, le plus souvent rencontré dans la littérature et que nous adoptons dans ce mémoire, nous modifions le domaine où les processus stochastiques sont autorisés à évoluer et nous introduisons des temps d'arrêt dès que les processus cherchent à en sortir. Cela revient à définir le domaine où le processus a le droit d'évoluer. Au moment de l'écriture des équations HJB, en plus des conditions initiales, il faut définir les conditions au bord de ce domaine.

**La ruine de l'assureur se traduit par une zone interdite dans l'évolution des processus.**



*Fig 2.9 : Prise en compte de la ruine de l'assureur*

### 2.4.1.3 En conclusion : la recette pour écrire une équation HJB

Bien que la littérature sur le sujet s'adresse à un public mathématicien, la recette permettant d'écrire l'équation HJB d'un problème d'optimisation est intuitive. Avant de poursuivre notre exposé, nous la résumons ici en nous appuyant sur les ingrédients du contrôle stochastique présentés en 2.1.2.

- Nous devons d'abord écrire la dynamique des processus en faisant apparaître les paramètres de contrôle,
- Dans notre cas, nous avons comme variable le temps  $t$ , la valeur du portefeuille à gérer  $X_t$  ainsi que le taux spot  $r_t$ . La fonction de valeur qui fait l'objet de notre étude est donc une fonction à trois variables  $J(t,x,r)$ . Lorsque la dynamique des processus  $X_t$  et  $r_t$  a été spécifiée, l'étape suivante consiste à écrire le générateur infinitésimal  $A^u J$  pour une fonction  $J$  à priori quelconque ;
- Nous spécifions ensuite le « flux d'utilité » dégagé par le processus à l'instant  $t$ , en faisant bien ressortir la dépendance en  $u$ , soit ici  $g(x,r,u)$ .
- Nous spécifions la « décote » qui représente le taux d'actualisation en  $t$  « choisi » pour la fonction  $J$ . Rappelons que cette décote ne dépend pas seulement de  $r_t$  mais qu'il peut aussi y avoir une préférence du court terme sur le long terme. Nous notons cette décote  $\zeta r_t + \delta$ .
- Une fois que nous avons effectué ces étapes, l'équation HJB signifie qu'il est possible de remonter le temps en exprimant la dérivée partielle  $J_t$  en fonction du meilleur compromis en  $u$  des trois quantités que nous venons de spécifier :

$$J_t + \text{Max}_u \{ g - (\zeta r + \delta)J + A^u J \} = 0.$$

Bien entendu, une fois l'équation HJB écrite, nous n'oublions pas les conditions terminales (valeur de liquidation à l'instant terminal  $T$ ) ainsi que les conditions aux bords liées à la ruine.

La section suivante nous fournit l'occasion d'appliquer ce principe dans un cas simple.

#### 2.4.2 Un exemple : le modèle présenté par Merton en gestion d'actifs

Cet exemple a été proposé par Merton en 1969. Nous le présentons car notre problème utilise une généralisation de ce modèle. Dans ce modèle, nous supposons qu'un investisseur se fixe comme objectif à un horizon fini  $T$  de mesurer l'efficacité d'un portefeuille  $X_t$  à travers une fonction d'efficacité  $f$ .

Nous supposons de plus que l'investisseur ne retire pas de fonds entre 0 et  $T$ .

Nous supposons que le portefeuille est composé de deux types d'actifs :

- Un actif « risqué » avec un rendement espéré de  $m$  et une volatilité  $\sigma$ , dans une proportion  $\alpha_t$  de l'actif total,
- Un actif sans risque ayant un rendement constant  $r$ , dans une proportion  $1 - \alpha_t$ .

Nous supposons que l'investisseur peut, à tout moment, contrôler la valeur de  $\alpha_t$ .

Le processus  $X_t$  suit alors l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = (r + \alpha_t(m-r))X_t dt + \alpha_t \sigma X_t dW_t.$$

Notre problème est le suivant : calculer la fonction de valeur et la stratégie optimale permettant, en moyenne, de maximiser la valeur de  $f$  à l'instant  $t$  :

$$J(t, x) = \text{Max}_{\alpha_t} \mathbb{E} \left( f(X_T^\alpha) \mid X_t^\alpha = x \right),$$

Pour écrire l'équation HJB du problème, nous utilisons la « recette » de la section précédente. Nous avons besoin de connaître le « flux d'utilité » dégagé à chaque instant par notre processus, la décote qui sert à actualiser  $J$  ainsi que le générateur infinitésimal de  $J$ . Comme nous sommes dans un cas où nous optimisons une utilité mesurée en fin de période, nous n'avons aucun flux à prendre en compte dans l'intervalle de temps. Par ailleurs, la définition précédente n'implique aucune décote avec le temps, par conséquent il nous reste à écrire le générateur infinitésimal de  $J$  qui se séduit du lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} A^\alpha J &= \frac{1}{2} J_{xx} (dX_t)^2_{en dt} + J_x (dX_t)_{en dt} \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + (r + (m-r)\alpha)x J_x. \end{aligned}$$

L'équation HJB pour ce problème s'écrit alors, à partir de (2.13) :

$$J_t = -\text{Max}_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 x^2 J_{xx} + (r + (m-r)\alpha)x J_x \right\}, \quad (2.14)$$

et sa solution doit respecter la condition terminale :

$$J(T, x) = f(x).$$

Lorsque la fonction  $f$  est de la forme  $x^\gamma$ , (il s'agit d'une fonction d'utilité qui est couramment employée lorsque  $\gamma \in ]0, 1]$  car elle reflète un degré d'aversion au risque pour les agents), nous pouvons vérifier directement qu'il existe une solution à cette équation de la forme :

$$J(t, x) = e^{\mu(T-t)} x^\gamma,$$

En effet, en calculant les dérivées partielles et remplaçant dans l'expression (2.14) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mu &= \text{Max}_{\alpha} \left\{ (r + (m-r)\alpha)\gamma + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 \gamma(\gamma-1) \right\} \\ &= \gamma \text{Max}_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} (\gamma-1) \sigma^2 \alpha^2 + (m-r)\alpha + r \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le problème revient à optimiser un polynôme du second degré à coefficients constants. Le terme en  $\alpha^2$  vaut  $\frac{1}{2}(\gamma-1)$  et est négatif, l'accolade de la formule précédente a l'aspect d'une parabole inversée en  $\alpha$ .

**Dans le modèle de Merton, la stratégie optimale est au sommet d'une parabole.**

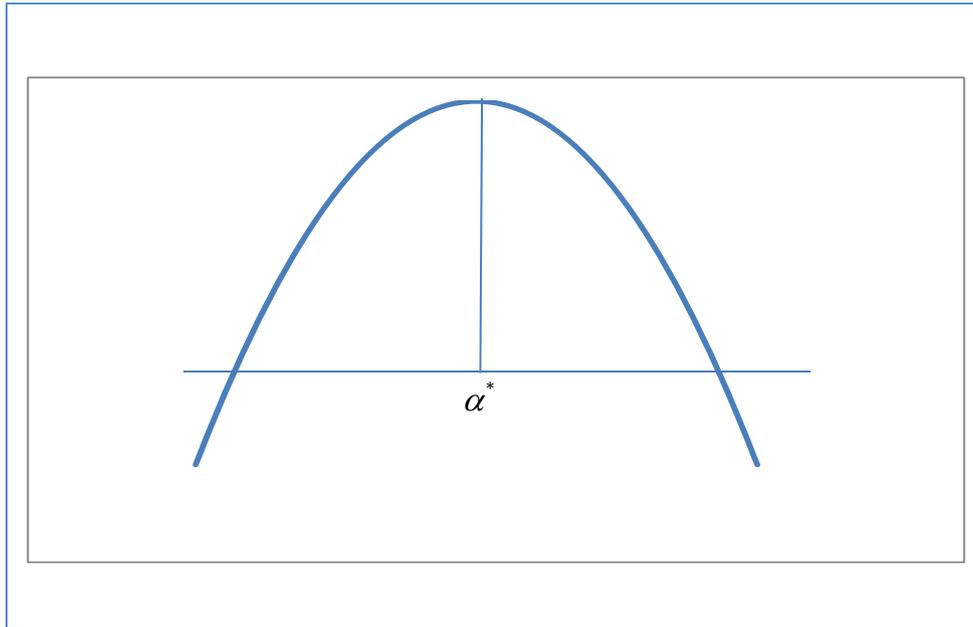


Fig 2.10 : Recherche de  $\alpha^*$  dans le modèle de Merton.

Si nous supposons que les ventes à découvert sont autorisées pour les actifs risqués, et que  $\alpha$  peut éventuellement être négatif, nous trouvons pour les optima  $\alpha^*$  et  $\mu$  :

$$\alpha^* = \frac{m-r}{(1-\gamma)\sigma^2} \quad (2.16)$$

$$\mu = \gamma \left\{ r + \frac{1}{2(1-\gamma)} \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} \right\}. \quad (2.17)$$

Prenons maintenant l'exemple numérique suivant où  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $m = 7\%$ , et  $\gamma = 0,2$ , alors :

$$\alpha^* = 0,9375, \mu = 1,08\%.$$

Ainsi, dans ce modèle, le coefficient  $\alpha^*$  est une constante. Les paramètres du modèle ainsi que le l'aversion au risque se traduisent par une « juste » proportion entre actifs risqués et non risqués dans le portefeuille. A priori, le modèle ainsi présenté n'impose pas de contrainte sur la valeur de cette constante  $\alpha^*$ . Elle peut, éventuellement, être supérieure à 1, ce qui implique d'emprunter dans un actif non risqué pour acquérir des actifs risqués. Dans notre cas,  $\alpha^*$  est légèrement inférieur à 1 et, dans ce cas, pour prendre en compte l'aversion au risque de l'investisseur matérialisé par la constante  $\gamma$ , ce dernier n'investit pas la totalité de son portefeuille en actifs risqués. Il accepte pour ce portefeuille un rendement (ici légèrement) inférieur à ce qu'il aurait pu obtenir en investissant la totalité de son portefeuille en actif risqué. En revanche, la volatilité du portefeuille – donc le risque de perte - s'en trouve diminué. Le rendement espéré de son portefeuille est de 6.8125% environ et la volatilité de 18.75%.

Sur 8 ans, en partant de 100 aujourd'hui l'investisseur a une espérance de valeur sur le montant du portefeuille de :

$$100.\exp(6,8125\% \cdot 8)=172,46.$$

Malheureusement, cette quantité n'est pas suffisamment parlante pour l'investisseur car, dans ce modèle, la distribution du portefeuille au bout de 8 ans est lognormale.

**Dans le cas d'une distribution lognormale, la valeur moyenne d'un portefeuille ne reflète pas fidèlement le risque de mauvaises performances.**

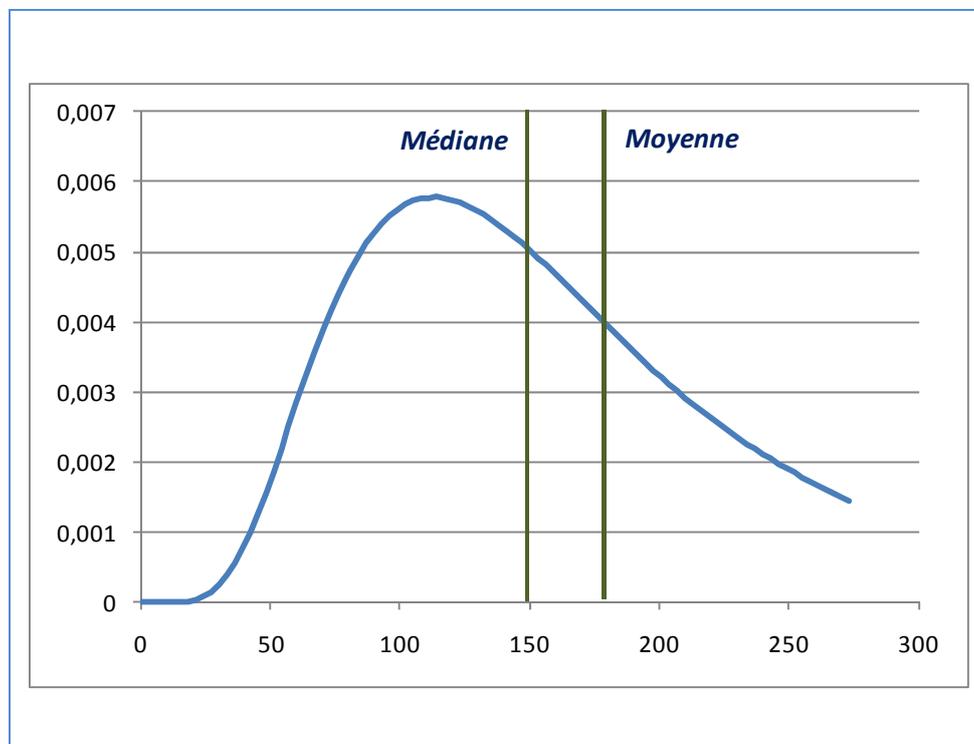


Fig 2.11 : Médiane et moyenne sur une distribution Log Normale

La forte probabilité de se trouver avec une performance inférieure à la moyenne implique une valeur médiane de 149,84 nettement inférieure à la moyenne de 172,46.

Avec notre coefficient d'aversion au risque, nous pouvons nous demander quelle valeur  $a$ , au bout de 8 ans, la même utilité que la valeur 100 aujourd'hui. Le calcul montre que c'est 154,11.

Ainsi, le choix du coefficient d'aversion au risque, avec sa fonction d'utilité associée, nous envoie deux messages :

- Le premier message est l'invitation à une certaine prudence en gardant une proportion du portefeuille en actif non risqué,
- Le deuxième message consiste à ne pas bercer d'illusion l'investisseur et à corriger une valeur moyenne qui a de forte chance de ne pas être atteinte (on atteint très souvent une valeur inférieure et quelquefois une valeur nettement inférieure) par un montant « équivalent constant » qui représente mieux la sensibilité de l'investisseur (via ce coefficient d'aversion au risque), ici 154,11 au lieu de 172,46.

Dans le tableau 2.4 qui suit, nous donnons, pour quelques valeurs de  $\gamma$ , la valeur  $\alpha^*$  correspondante, le rendement moyen ainsi que la volatilité du portefeuille, la valeur moyenne au bout de 8 ans en partant de 100, la valeur médiane et la valeur « équivalent constante » ayant la même utilité que 100 aujourd'hui dans 8 ans.

Ainsi, nous voyons que, si  $\gamma$  s'approche de 1,  $\alpha^*$  devient (rapidement dans notre exemple) supérieur à 1, ce qui implique d'emprunter des actifs sans risques pour acquérir des actifs risqués et correspond au comportement d'un acteur aimant prendre des risques.

Dans notre problème, l'attitude face au risque représentée par  $\gamma$  est une constante et la volatilité du portefeuille solution de notre problème a aussi une valeur constante :

$$\alpha^* \sigma = \frac{1}{1-\gamma} \frac{m-r}{\sigma}.$$

Une « demande de risque » correspond à une volatilité élevée, et une aversion au risque une volatilité faible du portefeuille. La valeur  $\alpha^*$  est souvent rencontrée dans la littérature, et nous l'appellerons « constante de Merton » dans ce mémoire. Nous reviendrons sur cette constante dans le chapitre suivant sur notre modèle continu.

Il est possible de reprendre les calculs précédents en interdisant des ventes à découvert sur les actifs risqués et des emprunts sur les actifs non risqués. Cela revient à imposer l'intervalle  $[0, 1]$  pour la valeur prise par  $\alpha^*$  et à reporter cette valeur dans la formule (2.15). Nous obtenons des formules analogues, où  $\alpha^*$  est compris entre 0 et 1 et  $\mu$  est corrigé en conséquence directement dans la formule (2.15).

Augmenter le goût du risque (diminuer  $\gamma$ ) revient à augmenter le rendement du portefeuille au prix d'une volatilité plus grande, et risque d'augmenter les possibilités de mauvaises performances.

Coefficient $\gamma$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4
Coefficient $\alpha^*$	0,833	0,9375	1	1,07	1,25
Rendement moyen	6,50%	6,81%	7,00%	7,21%	7,75%
Volatilité	16,67%	18,75%	20,00%	21,43%	25,00%
Moyenne / 8 ans	168,20	172,46	175,07	178,09	185,89
Médiane	150,51	149,84	149,18	148,21	144,77
Equivalent Constant	152,20	154,11	155,27	156,61	160,00

Tab 2.4 : Impact de l'aversion au risque sur le comportement de l'investisseur.

Nous pouvons maintenant passer à la généralisation de ce modèle avec un taux variable, l'ajout d'un portefeuille d'obligations, l'interdiction de vente à découvert et la possibilité de borner le pourcentage d'actifs risqués, ainsi qu'à l'outil permettant d'étudier notre « **Module de Merton Généralisé** ».

### 2.4.3 Equation HJB dans une extension du modèle de Merton où le taux suit le modèle de Hull White à un facteur.

#### 2.4.3.1 *Les motivations du Module de Merton Généralisé*

Dans la section précédente, nous avons traité le cas du modèle de Merton ou la fonction d'utilité en  $x^\gamma$  à l'aspect de la figure ci-dessous (Fig 2.12).

Dans notre situation, le fait de prendre en compte les gains des assureurs et des assurés doit plutôt lui donner l'aspect de la figure 2.13, qui prend en compte le fait que les gains ne peuvent exister qu'à partir d'une valeur minimale du portefeuille.

Dans le modèle de Merton, même les petites valeurs du portefeuille ont une utilité.

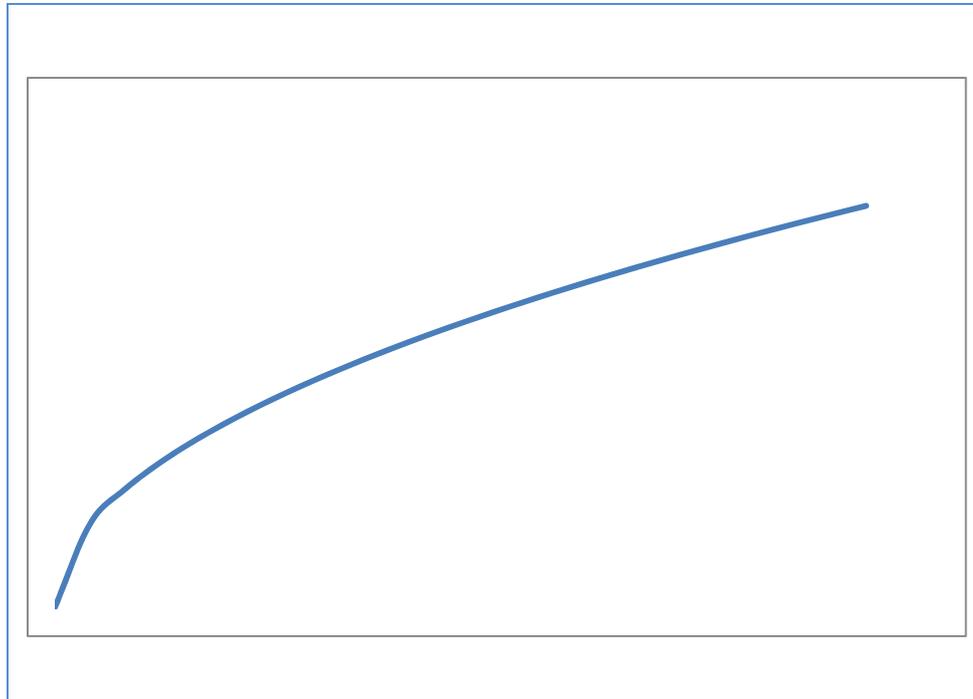


Fig 2.12 : Fonction d'utilité dans le cas du Modèle de Merton.

Par ailleurs, la menace de rachat en cas de mauvaise performance du portefeuille va encore diminuer l'utilité dans une zone qui ne permet pas de servir un taux satisfaisant aux assurés. En effet, dans cette zone, les rachats vont provoquer une diminution de la richesse gérée par l'assureur, et, par conséquent, une diminution des gains et profits possibles. La fonction d'utilité aura l'aspect de la figure 2.14.

Nous devons donc, à présent travailler en prenant en compte le fait que les fonctions d'utilités sont continues mais n'ont pas de forme analytique. Nous employons dans le chapitre 4 des méthodes numériques pour traiter cette situation.

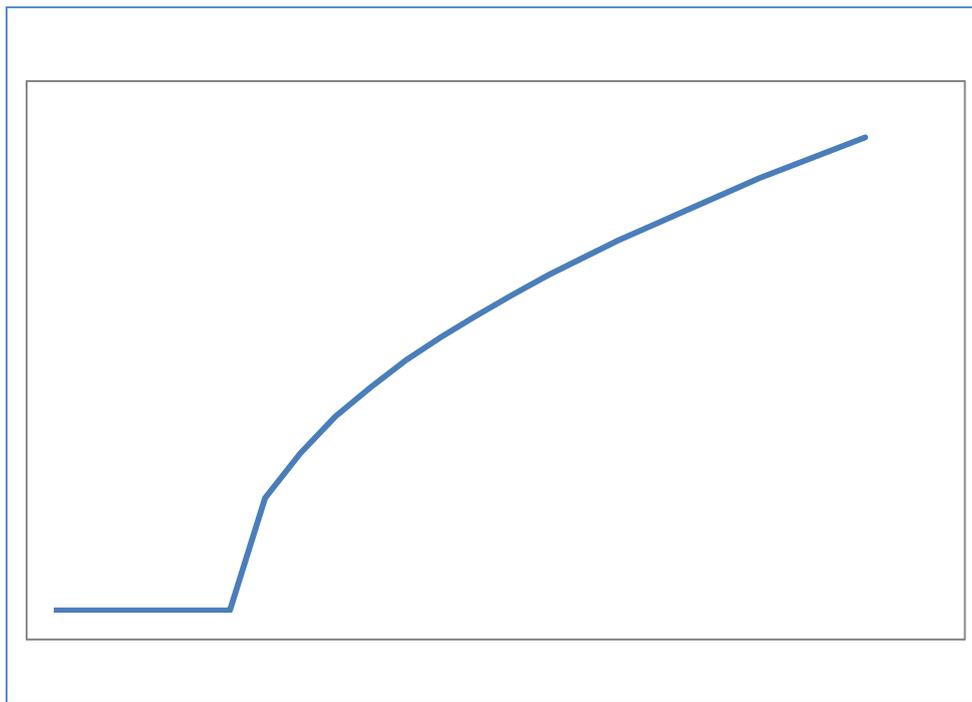
Les rachats dépendent – pour leur partie conjoncturelle – de la comparaison entre le taux qui peut être servi aux assurés au vu de la performance du portefeuille avec un taux que les assurés estiment être en droit d'attendre, ici un taux long. Pour cela, nous ne pouvons nous contenter d'une seule variable  $x$  représentant le montant de notre portefeuille mais devons aussi prendre en compte la capacité qu'ont ces taux à varier. Nous adoptons donc un modèle stochastique de taux dans nos calculs.

Nous sommes ainsi en présence d'un modèle analogue au modèle de Merton de la section précédente avec toutefois les variantes suivantes :

- Le taux est variable et suit une dynamique stochastique,

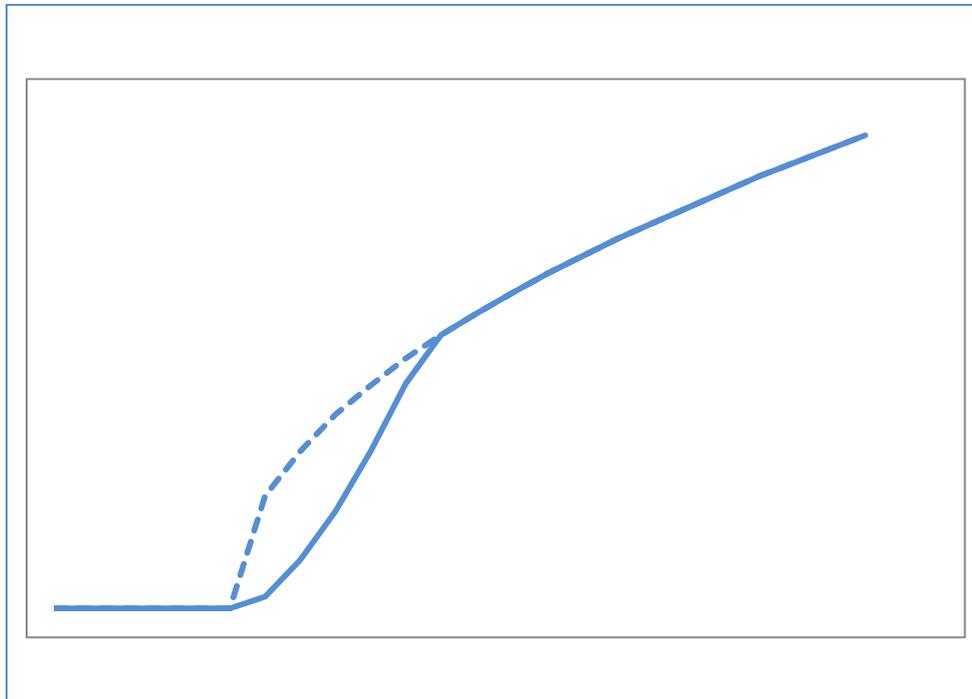
- La fonction d'utilité, ou plutôt d'efficacité à prendre en compte en fin de période n'est pas donnée sous forme de formule fermée, en raison de la présence des comportements de rachats de la part des assurés.

**Dans la gestion d'un portefeuille d'assurance vie, l'utilité de la gestion n'intervient qu'à partir du moment où il y a des gains par rapport aux placements initiaux des souscripteurs.**



*Fig 2.13 : Fonction d'utilité dans le cas de la gestion de portefeuille d'assurance vie.*

**Les comportements de rachats vont diminuer l'utilité en cas de performances moyennes et créer une zone de risque supplémentaire pour l'assureur.**



*Fig 2.14 : Fonction d'utilité dans le cas de la gestion de portefeuille d'assurance vie avec comportements de rachats.*

Cette sous-section décrit le « Module de Merton Généralisé » employé au chapitre 4 pour la modélisation discrète de notre problème.

#### **MODULE DE MERTON GENERALISE**

**Soit  $t$  un entier représentant une date en début d'année.**

**Nous supposons connu la valeur d'une fonction d'utilité ou d'efficacité  $f$ , à l'instant  $t + 1$ .**

**Nous supposons que nous disposons d'un portefeuille pouvant être géré en suivant les hypothèses de cette section, décrites plus bas.**

**Le « Module de Merton Généralisé » calcule la valeur de  $J$  à l'instant  $t$ .**

Les calculs sont effectués en les variables  $x, r$  présentées plus haut et utilisent l'équation HJB (2.19).

#### *2.4.3.2 Les hypothèses du Module de Merton Généralisé et l'équation HJB*

Dans le cadre du mémoire, et pour ce module, nous adoptons pour le taux spot une dynamique adaptée à une problématique de gestion de risque : le modèle de Hull-White à un facteur. Ce modèle

a l'avantage de pouvoir se caler sur une courbe de taux de marché et possède, de plus, une description analytique abordable (prix des zéros coupons, calcul du TME, valeur moyenne et écart type à un instant donné pour le taux, ...) qui est présenté plus bas (en annexe à ce chapitre).

Dans ce modèle, le taux d'intérêt suit la dynamique suivante de Hull-White à un facteur :

$$dr_t = a(b(t) - r_t)dt + \eta dW_t^1,$$

où  $b(t)$  est une fonction déterministe du temps qui se déduit de la courbe des taux,  $W_t^1$  un mouvement brownien. De plus, nous supposons  $q$  une prime de risque constante.

Le portefeuille peut contenir des actions et des obligations. Le théorème des 3 fonds [POR] justifie que, dans toute la suite du document, notre portefeuille peut être vu comme composé des 3 éléments suivants :

- Une partie en monétaire,
- Une obligation appelée « sliding bond » correspondant à chaque instant à un zéro coupon de duration constante et donnée,  $\Theta$ .
- Un actif risqué unique, avec une espérance de rendement et une volatilité constante.

Stricto sensu, le théorème des 3 fonds ne s'applique pas avec l'interdiction d'emprunter et l'interdiction de vente à découvert. Nous gardons toutefois cette hypothèse.

La dynamique de la partie en monétaire,  $M_t$  correspond à une progression au taux spot et vaut :

$$dM_t = r_t M_t dt.$$

Soit  $P_t$  le montant investi en « sliding bonds » et soit  $\Theta$  sa duration à l'instant  $t$ .  $P_t$  a alors une volatilité  $\tau_\Theta$ . Dans la dynamique que nous présentons et qui est la suivante :

$$dP_t = (r_t + q\tau_\Theta)P_t dt - \tau_\Theta P_t dW_t^1,$$

avec, pour le modèle de Hull-White :

$$\tau_\Theta = \frac{\eta}{a}(1 - e^{-a\Theta})$$

Nous exprimons le fait que :

- Le rendement moyen de  $P_t$  vaut le taux spot auquel s'ajoute une rémunération du risque lié à la volatilité de l'obligation,
- L'obligation et le taux spot sont anticorrelés, une augmentation liée à la composante brownienne du taux spot doit entraîner une diminution de la valeur de l'obligation,
- Cette augmentation de valeur ne correspond pas forcément à la valeur d'un sliding bond à l'instant  $t + dt$ , un « petit coupon » venant, dans la plupart des cas, s'y ajouter.

En fait, cette expression représente l'augmentation en valeur de marché de  $P_t$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Tout se passe alors comme si à l'instant  $t + dt$  l'obligation ainsi que les coupons étaient vendus sur le marché secondaire pour l'acquisition d'un nouveau zéro coupon de durée  $\Theta$  à l'instant  $t + dt$ . (Le sliding bond, en tant que tel, n'est pas et ne peut pas être un produit proposé par les marchés financiers [RUT]).

Le portefeuille en actions se comporte comme un actif risqué avec la dynamique suivante:

$$dA_t = (r_t + \lambda\sigma)A_t dt + \sigma A_t dW_t^2$$

Ici aussi, dans le rendement espéré de  $A_t$  nous faisons ressortir le taux spot et une prime de risque constante liée à la volatilité de l'actif.

Nous faisons, dans cette relation, intervenir un deuxième mouvement brownien  $W_t^2$ . Nous supposons que les deux mouvements browniens sont corrélés et que cette corrélation est constante :

$$dW_t^1 \cdot dW_t^2 = \rho dt$$

Nous imposons que le portefeuille soit constitué, en proportion, de  $\alpha$  obligations et  $\beta$  actions dans un domaine vérifiant :

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \bar{\beta} < 1, \quad \alpha + \beta \leq 1. \quad (2.18)$$

Ainsi, il n'y a pas de vente à découvert sur les actifs risqués, pas d'emprunts et une borne supérieure est imposée sur la proportion en actions admissible dans le portefeuille. Nous supposons que les marchés sont suffisamment liquides pour permettre un rebalancement en continu du portefeuille en respectant ces contraintes.

Comme dans la section précédente, nous actualisons l'utilité avec un taux  $\zeta r_t + \delta$ .

Nous nous plaçons à un horizon  $T$  fixé pour lequel une fonction d'utilité  $f(x, r)$  est définie pour cet horizon (en pratique, l'horizon est de 1 an et la fonction  $f$  correspond à  $J$  à cette date).

Cette fois, une stratégie consiste, à chaque instant, à établir la composition du portefeuille, soit la donnée de  $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ .

Nous notons ici  $Z_t$  le processus décrivant la valeur du portefeuille. La fonction de valeur que nous étudions est la suivante :

$$J(t, z, r) = \underset{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}{\text{Max}} \mathbb{E} \left( \exp \left( - \int_t^T (\zeta r_s + \delta) ds \right) f(Z_T, r_T) \middle| Z_t = z, r_t = r \right).$$

En raison de l'emploi des éléments finis (équivalent aux arbres trinomiaux) adoptés pour les estimations numériques, nous travaillons sur le logarithme de  $Z_t$  et nous posons  $X_t = \log(Z_t)$ , ce qui donne, comme dynamique, pour ces deux processus stochastiques :

$$dZ_t = (r_t + \alpha_t q \tau + \beta_t \lambda \sigma) Z_t dt - \alpha_t \tau Z_t dW_t^1 + \beta_t \sigma Z_t dW_t^2$$

$$dX_t = (r_t + \alpha_t q \tau + \beta_t \lambda \sigma - \frac{1}{2}(\tau^2 \alpha_t^2 - 2\rho \sigma \tau \alpha_t \beta_t + \sigma^2 \beta_t^2)) dt - \alpha_t \tau dW_t^1 + \beta_t \sigma dW_t^2$$

Nous interprétons alors  $J$  comme une fonction de  $t, x$  et  $r$ .

Pour écrire l'équation HJB de notre problème, nous utilisons la recette que nous avons présentée en 1.4.1.3.

Comme nous optimisons une fonction d'utilité estimée en fin de période, il n'y a pas de flux d'utilité ici.

En revanche, nous devons prendre en compte une actualisation au taux  $\zeta r_t + \delta$  d'où un terme en  $-(\zeta r_t + \delta)J$  dans l'équation HJB.

Enfin, nous devons écrire le générateur  $A^{\alpha, \beta} J$ .

Le lemme d'Itô nous donne :

$$A^{\alpha, \beta} J = \frac{1}{2} J_{xx} (dX_t)_{end t}^2 + J_{xr} (dX_t \cdot dr_t)_{end t} + \frac{1}{2} J_{rr} (dr_t)_{end t}^2 + J_x (dX_t)_{end t} + J_r (dr_t)_{end t}.$$

La mention « en  $dt$  » en indice est là pour rappeler que, dans le calcul des éléments  $dX_t, \dots$  nous ne conservons que les facteurs des termes en  $dt$ .

En développant, nous obtenons :

$$A^{\alpha, \beta} J = \frac{1}{2} (\tau^2 \alpha^2 - 2\rho \sigma \tau \alpha \beta + \sigma^2 \beta^2) (J_{xx} - J_x) + (qJ_x - \eta J_{xr}) \tau \alpha + (\lambda J_x + \rho \eta J_{xr}) \sigma \beta$$

$$+ r_t J_x + a(b(t) - r_t) J_r + \frac{1}{2} \eta^2 J_{rr}$$

L'équation HJB s'écrit alors :

### EQUATION HJB DU MODULE DE MERTON GENERALISE

$$J_t + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (\tau^2 \alpha^2 - 2\rho \sigma \tau \alpha \beta + \sigma^2 \beta^2) (J_{xx} - J_x) + (qJ_x - \eta J_{xr}) \tau \alpha + (\lambda J_x + \rho \eta J_{xr}) \sigma \beta \\ & + r_t J_x + a(b(t) - r_t) J_r + \frac{1}{2} \eta^2 J_{rr} - (\zeta r_t + \delta) J \end{aligned} \right\} = 0$$

(2.19)

Cette équation est reprise au chapitre 4 pour notre exemple d'application prenant en compte les comportements des assurés. Elle sert aux calculs associés au « Module de Merton Généralisé » rencontrée dans les chapitres plus bas.

Nous pouvons remarquer que si nous posons :

$$\begin{aligned}\sigma^{*2} &= \tau^2 \alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2 \beta^2 \\ \rho^* &= \frac{-\tau\alpha + \rho\sigma\beta}{\sigma^*} \\ r^* &= r + q\tau\alpha + \lambda\sigma\beta - \frac{1}{2}\sigma^{*2}\end{aligned}$$

L'équation (2.19) peut aussi s'écrire :

$$J_t + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^{*2} J_{xx} + \rho^* \sigma^* \eta J_{xr} + \frac{1}{2} \eta^2 J_{rr} + r_t^* J_x + a(b(t) - r_t) J_r - (\zeta r_t + \delta) J \right\} = 0. \quad (2.20)$$

Cela correspond au fait que la volatilité de l'actif est  $\sigma^*$ , son rendement espéré vaut  $r^*$ , et son coefficient de corrélation avec le taux spot est  $\rho^*$ .

Pour employer les éléments finis, Hull [HUL] propose de « centrer »  $r_t$  avec une nouvelle variable  $r_t^o$ , telle que :

$$r_t = r_t^o + \varphi(t)$$

où (cf. annexe en fin de chapitre):

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(r_t | r_0) = r_0 \cdot e^{-at} + a \cdot e^{-at} \int_0^t b(s) e^{as} ds.$$

Dans ce cas, l'équation HJB (2.19) s'écrit ainsi :

$$J_t + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} (\tau^2 \alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2 \beta^2) (J_{xx} - J_x) + (qJ_x - \eta J_{xr}) \tau \alpha + (\lambda J_x + \rho \eta J_{xr}) \sigma \beta \\ &+ (r_t^o + \varphi(t)) J_x - a r_t^o J_r + \frac{1}{2} \eta^2 J_{rr} - (\zeta r_t^o + \zeta \varphi(t) + \delta) J \end{aligned} \right\} = 0$$

Dans nos évaluations numériques, nous employons ce changement de variable afin d'éviter les évaluations sur des valeurs de  $r_t$  trop éloignées de la moyenne.

#### 2.4.3.3 Un cas particulier avec des formules semi-fermées.

Il y a des cas particuliers où nous pouvons, comme dans le modèle de Merton, donner des formules fermées ou semi-fermées. Ces cas particuliers correspondent à des valeurs terminales de la forme :

$$f = z^\gamma e^{\bar{k}r} = \exp(\gamma x + \bar{k}r).$$

Elles nous ont permis de tester les algorithmes utilisés pour la programmation dynamique relative au Module de Merton Généralisé.

**PROPOSITION :**

*Soit  $r_t$  le taux spot, suivant une dynamique correspondant au modèle de Hull-White à un facteur :*

$$dr_t = a(b(t) - r_t)dt + \eta dW_t^1,$$

*soit  $A_t$  un actif risqué ayant la dynamique suivante :*

$$dA_t = (r_t + \lambda\sigma)A_t dt + \sigma A_t dW_t^2,$$

*soit  $P_t$  un portefeuille d'obligations « sliding bond » de duration constante ayant la dynamique suivante – étant entendu que les coupons sont réinvestis en obligations :*

$$dP_t = (r_t + q\tau)P_t dt - \tau P_t dW_t^1,$$

*soit  $Z_t$  un actif composé de la manière suivante :*

- Une proportion  $\alpha_t$  en obligations  $P_t$ ,
- Une proportion  $\beta_t$  en actif  $A_t$ ,
- Le reste  $1 - \alpha_t - \beta_t$  en monétaire.

*Nous supposons qu'à chaque instant, le couple  $(\alpha_t, \beta_t)$  reste dans un ensemble  $\mathcal{E}$ , qui est soit fermé, borné et convexe dans  $\mathbb{R}^2$  (par exemple un ensemble délimité par des segments de droites), soit égal à  $\mathbb{R}^2$ .*

*Soit  $\rho$  la corrélation des deux mouvements browniens :*

$$dW_t^1 \cdot dW_t^2 = \rho dt.$$

*Soit  $f$  la fonction dont nous souhaitons optimiser la valeur. Nous supposons que cette fonction a la forme suivante :*

$$f(z, r) = z^\gamma e^{\bar{k}r} = e^{\gamma x + \bar{k}r},$$

*Pour deux constantes réelles  $\gamma, \bar{k}$ , avec  $0 < \gamma < 1$ .*

*Soit  $J$  la fonction de valeur suivante :*

$$J(t, z, r) = \text{Max}_{(\alpha_t, \beta_t) \in \mathcal{E}} E \left( \exp\left(-\int_t^T (\zeta r_s + \delta) ds\right) f(Z_T^{\alpha, \beta}) \middle| Z_t = z, r_t = r \right).$$

Alors  $J$  est une solution de l'équation HJB (2.19) et peut être donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} J(t, z, r) &= z^\gamma \exp(\mu(t) + \kappa(t)r) \\ &= \exp(\mu(t) + \gamma x + \kappa(t)r), \end{aligned}$$

où

$$\kappa(t) = \frac{\gamma - \zeta}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \bar{\kappa} e^{-a(T-t)},$$

et

$$\mu(t) = \int_t^T \Psi(b(s), \kappa(s)) ds,$$

Où  $\Psi$  désigne une fonction auxiliaire définie ainsi :

$$\Psi(b, k) = \underset{(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}}{\text{Max}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) (\tau^2 \alpha^2 - 2\rho\tau\sigma\alpha\beta + \sigma^2 \beta^2) \\ + (q - \eta k) \gamma \tau \alpha + (\lambda + \rho \eta k) \gamma \sigma \beta \\ + abk + \frac{1}{2} \eta^2 k^2 - \delta \end{array} \right\}.$$

Remarque : Dans le cas du modèle de Vasiček, nous obtenons des formules fermées. Il en est de même pour certaines valeurs de  $\bar{\kappa}$ . Dans les autres cas, la fonction auxiliaire  $\Psi$  se calcule aisément lorsque  $\mathcal{E}$  est une forme simple délimitée par des segments de droites, et son intégrale se calcule alors numériquement avec les logiciels mathématiques du marché (cf. aussi 2.4.3.4). Cela permet de tester les algorithmes issus de l'emploi des éléments finis sur ces cas particuliers.

La démonstration consiste à « deviner » une solution, en les variables  $t, x, r$  de la forme :

$$J(t, x, r) = \exp(\mu(t) + \gamma x + \kappa(t)r),$$

Nous écrivons les dérivées partielles de  $J$  :

$$J_t = (\mu'(t) + \kappa'(t)r)J,$$

$$J_x = \gamma J,$$

$$J_{xx} = \gamma^2 J,$$

$$J_r = \kappa J,$$

$$J_{xr} = \gamma \kappa J,$$

$$J_{rr} = \kappa^2 J.$$

L'équation HJB (2.19) du problème s'écrit alors :

$$\mu'J + \kappa'rJ + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}(\tau^2\alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2\beta^2)(\gamma^2 - \gamma)J + (q\gamma - \eta\kappa\gamma)\tau\alpha J + (\lambda\gamma + \rho\eta\gamma\kappa)\sigma\beta J \\ & + r\gamma J + a(b(t) - r)\kappa J + \frac{1}{2}\eta^2\kappa^2 J - (\zeta r + \delta)J \end{aligned} \right\} = 0.$$

Nous simplifions par  $J$  d'une part. D'autre part, nous rassemblons les termes en  $\alpha, \beta$  et mettons à part les termes ayant le facteur  $r$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mu' + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)(\tau^2\alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2\beta^2) + (q - \eta\kappa)\gamma\tau\alpha + (\lambda + \rho\eta\kappa)\gamma\sigma\beta \right\} \\ + a\kappa.b(t) + \frac{1}{2}\eta^2\kappa^2 - \delta \\ + \{\kappa' - a\kappa + \gamma - \zeta\}r = 0. \end{aligned}$$

Comme  $r$  peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, nous avons en fait deux équations différentielles. La première annule le facteur accompagnant  $r$  :

$$\kappa' - a\kappa + \gamma - \zeta = 0. \quad (2.21)$$

La deuxième équation est alors :

$$\begin{aligned} \mu' + \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)(\tau^2\alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2\beta^2) + (q - \eta\kappa)\gamma\tau\alpha + (\lambda + \rho\eta\kappa)\gamma\sigma\beta \right\} \\ + a\kappa.b(t) + \frac{1}{2}\eta^2\kappa^2 - \delta = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'équation différentielle (2.21) se résout directement, ce qui permet de trouver la fonction  $\kappa$  de la proposition. En s'aidant de la fonction auxiliaire  $\Psi$  de la proposition, l'équation (2.22) se réécrit :

$$\mu'(t) + \Psi(b(t), \kappa(t)) = 0. \quad (2.23)$$

Avec nos hypothèses sur l'ensemble  $\mathcal{E}$ , les valeurs possibles prise par  $\gamma$ , la forme quadratique intervenant dans (2.22) est définie négative non dégénérée, son maximum est bien défini et il n'est pas difficile de voir que  $\Psi$  est continue par rapport à ses deux variables.

Comme, d'après les conditions finales,  $\mu(T) = 0$ , nous avons :

$$\mu(t) = -\int_T^t \Psi(b(s), \kappa(s)) ds = \int_t^T \Psi(b(s), \kappa(s)) ds.$$

Cela permet de conclure.

#### 2.4.3.4 Description des stratégies en $\alpha$ et $\beta$

Dans la démonstration précédente, nous n'avons pas décrit la stratégie en  $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ . En effet, nous sommes passé directement par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire  $\Psi$ . Il peut être intéressant d'effectuer les mêmes calculs que dans le modèle de Merton. Par ailleurs, nous avons besoin, au chapitre 4, de calculer numériquement  $\alpha$  et  $\beta$ .

C'est pourquoi nous expliquons maintenant comment calculer les stratégies en  $\alpha, \beta$ . Nous abordons deux cas de figure, premièrement lorsqu'il n'y a aucune contrainte sur ces quantités comme dans le modèle de Merton ( $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ ), deuxièmement lorsque nous contraignons ces quantités à rester dans l'ensemble  $\mathcal{E}$  décrit par (2.18) de manière à effectuer les calculs numériques du chapitre 4 pour le Module de Merton Généralisé.

Dans le premier cas, il faut maximiser l'expression entre accolades dans la formule (2.22), soit le polynôme (après simplification par  $\gamma$ ) :

$$Q(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}(1-\gamma)(\tau^2\alpha^2 - 2\rho\sigma\tau\alpha\beta + \sigma^2\beta^2) + (q - \eta\kappa)\tau\alpha + (\lambda + \rho\eta\kappa)\sigma\beta.$$

Les termes du second degré formant une forme quadratique définie négative en  $\alpha, \beta$ , cela revient à annuler les dérivées partielles de ce polynôme, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} -\tau\alpha + \rho\sigma\beta = -\frac{q - \eta\kappa}{1 - \gamma} \\ \rho\tau\alpha - \sigma\beta = -\frac{\lambda + \rho\eta\kappa}{1 - \gamma} \end{cases}$$

et la solution :

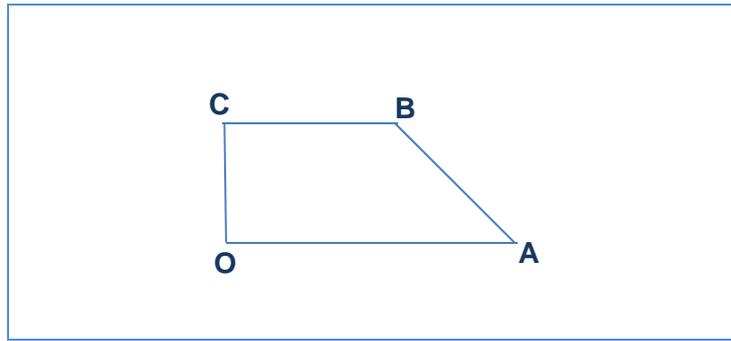
$$\begin{cases} \tau\alpha = \frac{q + \rho\lambda}{(1 - \gamma)(1 - \rho^2)} - \frac{\eta\kappa}{1 - \gamma} \\ \sigma\beta = \frac{\rho q + \lambda}{(1 - \gamma)(1 - \rho^2)} \end{cases}.$$

Dans le cas où  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ , ( $\mathcal{E} \neq \mathbb{R}^2$ ), le calcul des arguments  $\alpha^*, \beta^*$  réalisant le maximum pour l'équation HJB (2.19) est effectué de manière « géométrique ». Nous l'explicitons dans le cas où  $\mathcal{E}$  correspond aux hypothèses du Module de Merton Généralisé. Dans ce cas,  $A^{\alpha, \beta} J$  est une forme quadratique en  $\alpha, \beta$  que nous notons encore  $Q(\alpha, \beta)$  où  $\alpha, \beta$  vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq \bar{\beta} < 1 \\ 0 \leq \alpha + \beta \leq 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Le problème revient à rechercher le maximum de cette forme quadratique sur le domaine suivant :

**Notre problème d'optimisation se ramène à la recherche d'un point dans un quadrilatère.**



*Fig 2.15 : Quadrilatère où se situe le couple  $(\alpha, \beta)$ .*

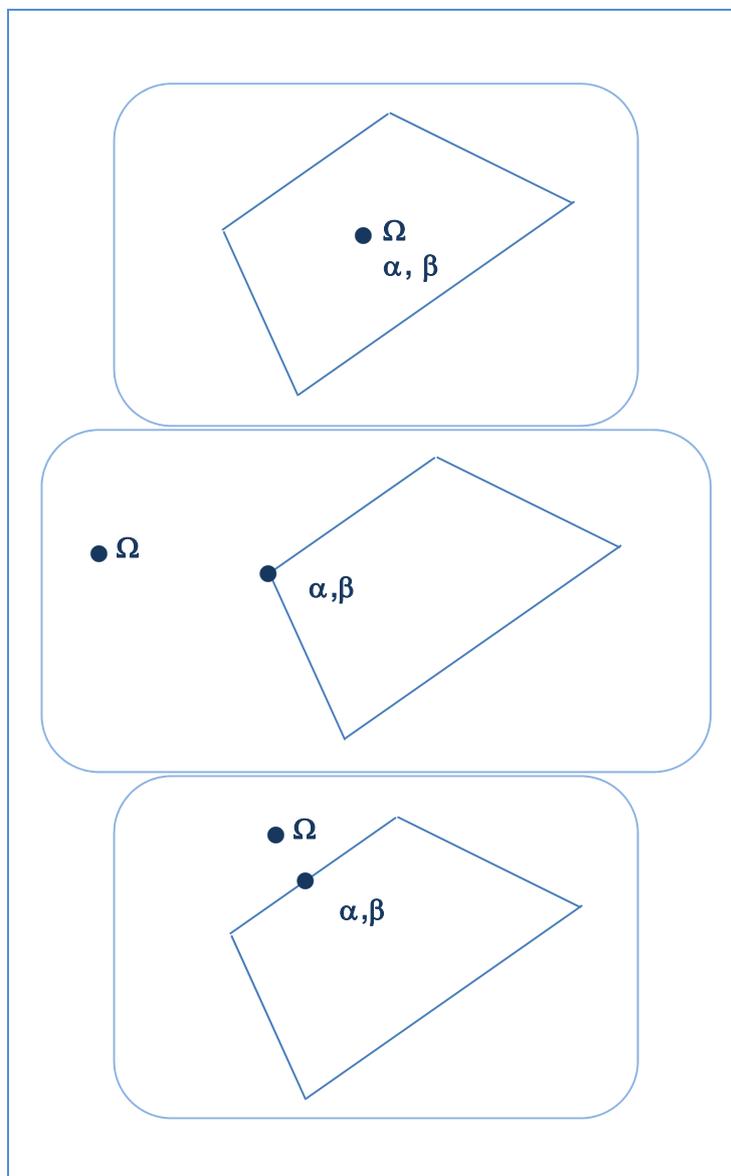
Le cas dégénéré correspond à  $J_{xx} - J_x = 0$  car les volatilités  $\tau$  et  $\sigma$  sont strictement positives. Dans ce cas,  $Q(\alpha, \beta)$  est affine et atteint son maximum en l'un des quatre points  $O, A, B, C$  du quadrilatère ci-dessus.

Le cas non dégénéré correspond à  $J_{xx} - J_x \neq 0$  et dépend du signe de cette expression. Dans le cas où cette expression est strictement positive,  $Q(\alpha, \beta)$  - sans les termes constants - est une forme définie positive dont le graphe a l'aspect d'un paraboloïde. Elle atteint son maximum en l'un des quatre points  $O, A, B, C$  du quadrilatère ci-dessus.

Dans le cas contraire, le maximum de  $Q$  correspond au minima de  $-Q$  qui est alors une forme définie positive (modulo une constante) et correspond au carré de la distance euclidienne d'un point  $\Omega$  au point de coordonnées  $(\alpha, \beta)$  à une déformation linéaire près du plan. (Les logiciels mathématiques du marché disposent des primitives matricielles pour effectuer ces calculs sans difficulté).

Trois cas de figures sont possibles et représentés ci-après (cf. Fig 2.16), la déformation linéaire ci-dessus ayant été prise en compte.

La recherche de la composition du portefeuille revient à trouver la distance minimale entre un point  $\Omega$  et un quadrilatère.



*Fig 2.16 : Description géométrique de la composition du portefeuille.*

Ils permettent de conclure.

### 2.4.3.5 Emploi des éléments finis pour les évaluations numériques

Pour les calculs effectués dans le chapitre 4, nous faisons appel aux éléments finis, plus précisément à une méthode explicite. Deux variables, le taux  $r$  et la valeur  $x$  du logarithme du portefeuille, évoluent en fonction du temps  $t$ .

Le principe des éléments finis consiste alors à discrétiser ces variables. Nous travaillons sur un maillage de pas  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta r$ . Nous assimilons alors les dérivées partielles aux quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 J_x &\approx \frac{J(t, x + \Delta x, r) - J(t, x - \Delta x, r)}{2\Delta x} \\
 J_r &\approx \frac{J(t, x, r + \Delta r) - J(t, x, r - \Delta r)}{2\Delta r} \\
 J_{xx} &\approx \frac{J(t, x + \Delta x, r) + J(t, x - \Delta x, r) - 2J(t, x, r)}{\Delta x^2} \\
 J_{rr} &\approx \frac{J(t, x, r + \Delta r) + J(t, x, r - \Delta r) - 2J(t, x, r)}{\Delta r^2} \\
 J_{xr} &\approx \frac{J(t, x + \Delta x, r + \Delta r) - J(t, x - \Delta x, r + \Delta r) - J(t, x + \Delta x, r - \Delta r) + J(t, x - \Delta x, r - \Delta r)}{4\Delta x \Delta r}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dans ces conditions, pour déduire la valeur de  $J$  en  $t - \Delta t$  en fonction de sa valeur à  $t$ , nous commençons par examiner les neuf valeurs

$$J(t, x + \varepsilon_1 \Delta x, r + \varepsilon_2 \Delta r), \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 0, 1\}^2.$$

Nous les utilisons pour estimer les dérivées partielles en  $t$  suivant (2.25), et nous résolvons alors l'équation HJB (2.19) où l'une de ses variantes en remplaçant les dérivées partielles par leurs estimations. Nous en déduisons la stratégie en  $\alpha$ ,  $\beta$ , puis nous en déduisons la volatilité  $\sigma^*$  du portefeuille ainsi que sa corrélation  $\rho^*$  avec les taux. Ecrire alors :

$$J(t - \Delta t, \dots) = J(t, \dots) - J_t \Delta t$$

revient à effectuer une combinaison linéaire des neuf valeurs précédentes avec les coefficients suivants, où  $\varepsilon = \frac{\sigma^*}{\sigma}$  :

$x + \Delta x$	$-\frac{\rho^* \varepsilon}{12}$	$\frac{\varepsilon^2}{6}$	$\frac{\rho^* \varepsilon}{12}$
$x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2 - \varepsilon^2}{3}$	$\frac{1}{6}$
$x - \Delta x$	$\frac{\rho^* \varepsilon}{12}$	$\frac{\varepsilon^2}{6}$	$-\frac{\rho^* \varepsilon}{12}$
	$r - \Delta r$	$r$	$r + \Delta r$

Il faut toutefois corriger ces coefficients pour prendre en compte les dérives, mais cela ne pose pas de problème.

Un tel processus ne converge pas forcément, en raison des coefficients négatifs dans la matrice précédente. En principe, il faut des coefficients de probabilité. A noter que Lamberton et Lapeyre [LAM] citent des conditions plus générales de convergence ; ces conditions sont exigeantes en moyen de calcul en raison de la finesse exigée sur le maillage des éléments finis.

Nous avons adopté le maillage suivant :

$$\Delta x = \max(\sigma, \tau) \sqrt{3\Delta t}$$

$$\Delta r = \eta \sqrt{3\Delta t}.$$

Nous avons de plus adapté la matrice précédente de manière à éviter « au maximum » les coefficients négatifs, en fonction du signe de  $\rho^*$  (cf. (2.20) qui est une autre formulation de l'équation (2.19)).

Par exemple, dans le cas où  $\rho^*$  est positif, cette matrice vaut (hors correction sur les dérives):

$x + \Delta x$	0	$\frac{\varepsilon(\varepsilon - \rho^*)}{6}$	$\frac{\rho^* \varepsilon}{6}$
$x$	$\frac{1 - \rho^* \varepsilon}{6}$	$\frac{2 - \varepsilon^2}{3}$	$\frac{1 - \rho^* \varepsilon}{6}$
$x - \Delta x$	$\frac{\rho^* \varepsilon}{6}$	$\frac{\varepsilon(\varepsilon - \rho^*)}{6}$	0
	$r - \Delta r$	$r$	$r + \Delta r$

La matrice se déduit par symétrie dans le cas où  $\rho^* \leq 0$ .

Dans le cadre de ce mémoire, nous prenons  $\Delta t = \frac{1}{52}$ . Le domaine d'évolution de  $x$  est représenté sur la figure suivante :

**Le domaine d'évolution de  $x$  ressemble à un arbre trinomial.**

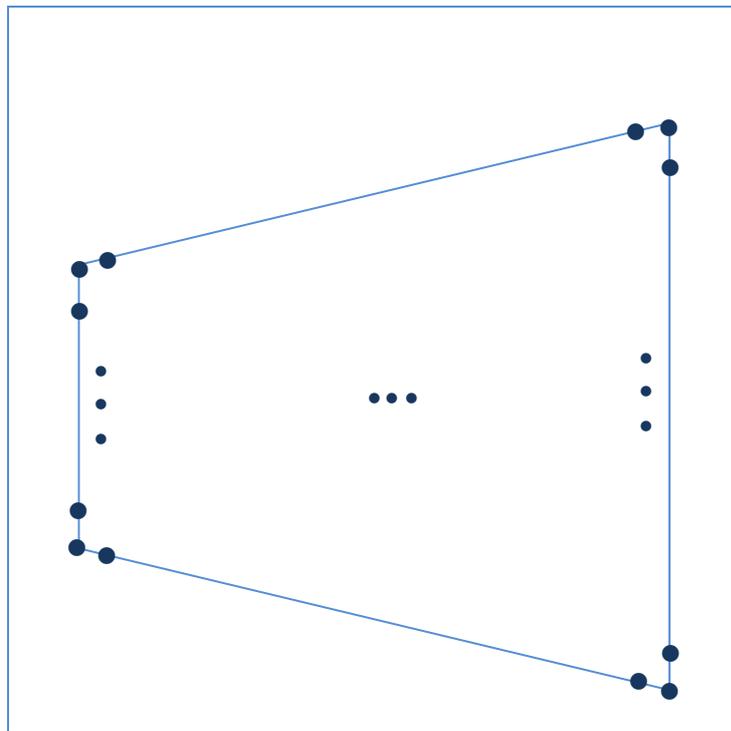


Fig 2.17 : Domaine d'évolution de  $x$

Le domaine d'évolution du taux  $r_t$  a été réduit par rapport à l'orthodoxie de Hull, de manière à ne pas grever les temps d'exécution ; au bord, les formules (2.25) ont été adaptées dans l'esprit de ce qui est fait chez Hull [HUL].

En l'état, l'implémentation du Module de Merton Généralisé qui a servi aux essais doit être vue comme un prototype expérimental. Bien que testé avec une bonne précision sur les formules semi-fermées de la proposition 1, des imprécisions restent possibles pour des fonctions discontinues ou dans le cas de fortes corrélations entre le portefeuille et les taux.

Nous utilisons aussi les éléments finis pour estimer des « indicateurs » en lieu et place de ce qui pourrait être effectué avec des méthodes de Monte Carlo. Soit par exemple  $W(x, r)$  une fonction de deux variables représentant un indicateur (taux de croissance du portefeuille, pourcentage moyen en PPB, ...) défini en  $t + 1$ , il est possible de calculer à travers le maillage la quantité suivante :

$$W_-(x, r) = \mathbb{E}(W(X_{t+1}, r_{t+1}) | X_t = x, r_t = r).$$

Dans la partie du chapitre 4 consacrée aux essais, il est couramment fait usage de ces indicateurs pour apporter un complément d'interprétation sur les valeurs trouvées pour  $J$ .

#### 2.4.4 Le modèle de Merton dans le cas d'un choc systémique

Bien que cette section ne soit pas essentielle à la compréhension du mémoire, nous la présentons car elle présente une généralisation du Modèle dans un cas abordable : un choc systémique sur un portefeuille d'actifs considéré comme ayant une dérive et une volatilité constante. Il est connu que les modèles browniens ne représentent pas fidèlement les évolutions financières d'actifs. Les modèles à sauts sont de plus en plus pris en compte en finance. Nous examinons un cas simple ici : un choc systémique sur un actif risqué. Notre actif est modélisé comme dans le modèle de Merton, mais peut, en plus, connaître des sauts. Nous supposons que le nombre de sauts suit un processus de Poisson  $N_t$  d'intensité  $\nu$ . Nous supposons que les amplitudes des sauts, prise en proportion de l'actif étudié, sont indépendantes et de même loi  $Q$ . Nous notons « improprement »  $dq_t$  un saut à l'instant  $t$  : il suit la loi de  $Q$  si  $N_t - N_{t-}$  vaut 1, et 0 sinon. Avec cette notation, la dynamique de l'actif est la suivante :

$$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t dq_t.$$

Comme dans le modèle de Merton, nous supposons le taux sans risque constant et égal à  $r$  dans le cadre de cette section.

Soit  $X_t$  un portefeuille composé en proportion  $\alpha_t$  de l'actif risqué  $S_t$  et  $(1 - \alpha_t)$  de l'actif sans risque.

Alors :

$$dX_t = (r + \alpha_t(m - r))X_t dt + \alpha_t \sigma X_t dW_t + \alpha_t X_t dq_t.$$

Pour examiner le modèle de Merton dans le cas où le portefeuille suit cette dynamique, nous devons nous intéresser à une équation HJB, donc calculer l'opérateur  $\mathcal{D}^\alpha J$  pour une fonction de deux variables  $J(t, x)$ . Une fois cet opérateur calculé, l'équation HJB s'obtient de la même manière que l'équation (2.14). La différence avec les calculs précédents vient du fait que  $X_t$  peut connaître un saut dont la taille n'est plus négligeable car sa moyenne reste égale à  $\mathbb{E}(Q)$  « immédiatement après »  $t$ . Il est connu que sur un intervalle de la forme  $[t, t + \Delta t]$ , le nombre de sauts suit une loi de Poisson de paramètre  $\nu \Delta t$ . Il est aussi connu que, presque sûrement les sauts se produisent en une étape à la fois. Sur un intervalle de temps très petit,  $[t, t + dt]$ , il y a 0 ou 1 saut, et la probabilité d'avoir un seul saut est de  $\nu dt$ . Dans ce qui suit, nous désignons par  $\mathbb{I}_{t, dt}$  le nombre de saut du processus  $X_t$  sur l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$ .

$$\mathbb{I}_{t, dt} = N_{t+dt} - N_t.$$

Ce nombre vaut 0 ou 1, et :

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{t, dt}) = \nu dt.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
J(t+dt, X_{t+dt}) &= \left\{ J(t, x) + J_t dt + J_x dX_t + \frac{1}{2} J_{xx} (dX_t)^2 \right\} (1 - \mathbb{I}_{t, dt}) \\
&\quad + J(t, x(1 + \alpha Q)) \mathbb{I}_{t, dt} \\
&= J(t, x) + \left\{ J_t + (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + \dots dW_t \right\} (1 - \mathbb{I}_{t, dt}) dt \\
&\quad + \{ J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x) \} \mathbb{I}_{t, dt} \\
&= J(t, x) + \left\{ J_t + (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + \dots dW_t \right\} dt \\
&\quad + \{ J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x) \} \mathbb{I}_{t, dt}.
\end{aligned}$$

Dans cette écriture,  $(1 - \mathbb{I}_{t, dt})$  signifie « dans le cas où il n'a pas de saut ».

Comme d'habitude, dans ce type d'écriture, nous avons négligé les termes en  $dt^2$ , de même que  $dt \cdot \mathbb{I}_{t, dt}$ . Par ailleurs, nous ne détaillons pas les termes en  $dW_t$ , ceux-ci étant d'espérance nulle. En passant à l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J(t+dt, X_{t+dt})) &= \mathbb{E} \left\{ \begin{aligned} &J(t, x) + \left\{ J_t + (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + \dots dW_t \right\} dt \\ &+ \{ J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x) \} \mathbb{I}_{t, dt} \end{aligned} \right\} \\
&= J(t, x) + \left\{ J_t + (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} \right\} dt \\
&\quad + \mathbb{E} \{ J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x) \} v dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha J &= J_t + (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + v \mathbb{E}(J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x)), \\
A^\alpha J &= (r + \alpha(m-r))xJ_x + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + v \mathbb{E}(J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x)).
\end{aligned}$$

Nous nous replaçons maintenant dans le modèle de Merton et nous supposons qu'un investisseur se fixe comme objectif à un horizon finit T de mesurer l'efficacité d'un portefeuille  $X_t$  à travers une fonction d'efficacité  $f(x)$  de la forme  $x^\gamma$ .

L'équation HJB du problème ressemble à l'équation (2.14) dès l'instant où est pris en compte le terme supplémentaire correspondant aux sauts. Elle est donc la suivante :

$$J_t = -\text{Max}_\alpha \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 x^2 J_{xx} + (r + \alpha(m-r))xJ_x + v \mathbb{E}(J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x)) \right\}. \quad (2.26)$$

Comme plus haut, nous allons chercher et « deviner » une solution de la forme :

$$J(t, x) = \exp(-\mu(T - t))x^\gamma.$$

Calculons tous les termes qui interviennent dans cette équation. D'une part, le calcul des dérivées partielles est le suivant :

$$\begin{aligned} J_t &= -\mu J \\ xJ_x &= \gamma J \\ x^2 J_{xx} &= \gamma(\gamma - 1)J. \end{aligned}$$

D'autre part, les termes liés aux sauts donnent :

$$\begin{aligned} J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x) &= ((1 + \alpha Q)^\gamma - 1)J, \\ \mathbb{E}(J(t, x(1 + \alpha Q)) - J(t, x)) &= \mathbb{E}((1 + \alpha Q)^\gamma - 1)J. \end{aligned}$$

Comme dans le modèle de Merton, l'équation HJB peut se simplifier par  $J$  ce qui donne cette fois-ci :

$$\mu = \text{Max}_\alpha \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 \gamma(1 - \gamma) + (r + \alpha(m - r))\gamma + \nu \mathbb{E}((1 + \alpha Q)^\gamma - 1) \right\}.$$

Il est possible de conclure en cherchant une valeur  $\hat{\alpha}$  réalisant ce maximum et de lui associer la valeur  $\mu$  correspondante.

Nous ne discutons pas ce calcul ici et nous passons directement à un exemple numérique. Nous reprenons les valeurs de la section 2.4.2. Nous supposons de plus un choc de 20%, en moyenne tous les 10 ans. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q &= -0,2 \text{ p.s.} \\ \nu &= 0,1. \end{aligned}$$

Nous avons vérifié numériquement que, pour des valeurs de  $\gamma$  comprises entre 0 et 1, la valeur de  $\mu$  était comparable à celle que nous aurions obtenue avec le modèle de Merton en corrigeant le rendement espéré ainsi que la volatilité de l'actif risqué, selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= m + \nu \mathbb{E}(Q), \\ \hat{\sigma}^2 &= \sigma^2 + \nu \mathbb{E}(Q^2). \end{aligned}$$

Ces formules intègrent dans le rendement espéré et la volatilité les contributions qui sont dues aux sauts.

Nous donnons dans le tableau suivant (*cf. Tab 2.5*) les valeurs de  $\alpha^*$  et  $\mu$  dans chacun des deux cas (calcul avec un choc systémique, calcul avec une dérive et une volatilité prudente). Le fait que tout se passe à peu près comme si les actifs risqués avaient une croissance moyenne de  $\hat{m}$  au lieu de  $m$  suggère de garder en provision la différence quand c'est possible (cette différence est en moyenne croissante avec le temps) pour faire face aux chocs. Nous retrouverions ainsi, avec des principes de

mathématiques financières modernes, une provision qui ressemblerait à une réserve de capitalisation ... pour les actions !

**Le modèle de Merton « simple » (sans prélèvement) dans le cas d'un actif pouvant connaître un choc systémique est comparable à l'adoption d'une volatilité « prudente » et d'une dérive « prudente ».**

<b>Coefficient <math>\gamma</math></b>	<b><math>\alpha^*</math></b>	<b><math>\alpha^*</math> prudent</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\mu</math> prudent</b>
<b>0,1</b>	<b>0,25138</b>	<b>0,25253</b>	<b>0,0041</b>	<b>0,0041</b>
<b>0,2</b>	<b>0,28271</b>	<b>0,28409</b>	<b>0,0083</b>	<b>0,0083</b>
<b>0,3</b>	<b>0,32296</b>	<b>0,32468</b>	<b>0,01249</b>	<b>0,01249</b>
<b>0,4</b>	<b>0,37658</b>	<b>0,37879</b>	<b>0,01675</b>	<b>0,01676</b>
<b>0,5</b>	<b>0,45154</b>	<b>0,45455</b>	<b>0,02113</b>	<b>0,02114</b>
<b>0,6</b>	<b>0,56373</b>	<b>0,56818</b>	<b>0,0257</b>	<b>0,0257</b>
<b>0,7</b>	<b>0,75005</b>	<b>0,75758</b>	<b>0,03063</b>	<b>0,03065</b>
<b>0,8</b>	<b>1,11994</b>	<b>1,13636</b>	<b>0,0365</b>	<b>0,03655</b>
<b>0,9</b>	<b>2,20128</b>	<b>2,27273</b>	<b>0,04603</b>	<b>0,04623</b>

*Tab 2.5 : Comparaisons pour le Modèle de Merton dans le cas d'un choc systémique.*

Nous avons présenté dans ce chapitre les outils qui sont rencontrés dans les problèmes de contrôle optimal : les équations de Bellman dans le cas discret et de Hamilton-Jacobi-Bellman dans le cas continu. Nous avons présenté le modèle de Merton, ainsi qu'une généralisation pour constituer de ce que nous avons appelé un « Module de Merton Généralisé » et une autre généralisation dans le cas d'un choc systémique.

Le chapitre 3 va s'inspirer du modèle de Merton, le placer dans le contexte français de l'assurance vie et poser la question de l'impact des comportements de rachats des souscripteurs en cas de mauvaise performance du portefeuille. Il s'agit d'un modèle en temps continu qui montre l'impact de ces comportements en termes de risque pour l'assureur.

Le chapitre 4 est plus concret. Il se positionne plutôt dans une approche de R&D (et non de recherche fondamentale) et met en musique le Module de Merton Généralisé pour étudier l'impact

des comportements de rachats sur une stratégie faisant intervenir d'une par la gestion dynamique d'un portefeuille, d'autre part le taux garanti et la PPB.

## 2.5 Annexe : Présentation du modèle de Hull-White à un facteur

Comme nous l'avons déjà signalé, le modèle de Hull-White à un facteur peut être employé pour le pricing de produits dérivés (on lui préfère toutefois le modèle à deux facteurs) et est adapté à une problématique de gestion de risques. Il permet d'étudier un comportement stochastique du taux spot cohérent avec une courbe de taux connue à priori – et déduite du marché. Le site de Reuters propose à ses abonnés un calibrage de ce modèle sur la base des données de marché.

Dans ce modèle (dont on trouve des références dans Hull [HUL], Shreve [SHR], Lamberton [LAM], Brigo & Mercurio [BRI]), le taux spot suit un processus de retour à la moyenne :

$$dr_t = a(b(t) - r_t)dt + \eta dW_t$$

où  $b(t)$  est une fonction déterministe du temps qui permet de respecter une courbe de taux connue à l'instant 0. Nous prenons  $\eta > 0$ .

Dans cette annexe, nous rappelons, sans démonstration, les caractéristiques de ce modèle, en donnant notamment les relations entre les trois éléments suivant, la connaissance de l'un permettant de retrouver les deux autres :

- La courbe des taux, donnant le taux continu entre deux instants donnés (*déduite si nécessaire du taux actuariel*),
- Le taux forward instantané à chaque instant,
- La fonction  $b(t)$ .

Nous commençons par un rappel sur le prix des zéro-coupons.

Soit  $P(r, t, T)$  le prix en  $t$  d'un zéro-coupon valant 1 à la maturité  $T$ , lorsque le taux spot en  $t$  vaut  $r_t = r$ .

Soit  $R(r, t, T)$  le taux continu moyen sur la période dans les mêmes conditions :

$$P(r, t, T) = \exp(-R(r, t, T)(T - t)).$$

Le prix d'une obligation se calcule dans un espace risque neutre. Soit  $q$  la prime de risque associé aux obligations. Nous supposons ici  $q > 0$ , ce qui donne pour une obligation une dynamique, localement en  $t$ , de la forme :

$$dP = (r_t + q \cdot \tau)Pdt - \tau P dW_t.$$

Nous convenons de prendre  $\tau > 0$  ce qui correspond au fait que :

- Une obligation présentant un risque par rapport à du monétaire, celle-ci doit avoir un rendement supérieur reflétant ce risque,
- Une obligation est anticorrélée avec les taux.

Dans l'espace risque neutre, le taux spot suit encore un processus de retour à la moyenne, avec cette fois un coefficient  $b^*(t)$  valant :

$$b^*(t) = b(t) + q \frac{\eta}{a}.$$

Supposons tout d'abord connu la courbe des taux, ainsi que le taux spot en 0,  $r_0$ , c'est à dire la fonction  $R(r_0, 0, T)$ .

Le taux forward instantané en T, dépend de la courbe de taux telle qu'elle est vue en 0 [HUL] :

$$f(T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(r_0, 0, T) = \frac{\partial}{\partial T} (T \cdot R(r_0, 0, T)).$$

Lorsque c'est  $f(t)$  qui est connu, nous en déduisons  $b^*(t)$  [BRI, SHR] :

$$b^*(t) = f(t) + \frac{1}{a} f'(t) + \frac{\eta^2}{2a^2} (1 - e^{-2at})$$

Cela permet d'en déduire la fonction  $b(t)$ .

A ce stade,

- À partir de la courbe des taux, nous déduisons le taux forward instantané et la fonction  $b(t)$ ,
- A partir du taux forward instantané, nous déduisons la fonction  $b(t)$ .

Il reste à donner la courbe des taux à partir du taux forward instantané et la courbe des taux ainsi que ce taux forward connaissant  $b(t)$ , ou  $b^*(t)$ .

La courbe des taux se déduit du taux forward instantané par une intégrale :

$$R(r_0, 0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$

Enfin, supposons que c'est  $b^*(t)$  qui est connu. Pour déterminer la courbe des taux ainsi que le taux forward instantané, nous utilisons les fonctions auxiliaires suivantes :

$$R_\infty(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T b^*(s) ds - \frac{\eta^2}{2a^2},$$

$$S_{\infty}(t, T) = \frac{a}{e^{a(T-t)} - 1} \int_0^{T-t} b^*(t+s)e^{as} ds - \frac{\eta^2}{2a^2}.$$

En posant  $\theta = T - t$ , nous avons une formule analogue à celle donnée par Lamberton [LAM] dans le cas du modèle de Vasiček (les autres ouvrages adoptent une autre présentation mettant en valeur le caractère affine du modèle).

$$R(r_t, t, T) = R_{\infty}(t, T) - \frac{1}{a\theta} \left\{ (S_{\infty}(t, T) - r_t)(1 - e^{-a\theta}) - \frac{\eta^2}{4a^2}(1 - e^{-a\theta})^2 \right\}$$

et :

$$f(t) = S_{\infty}(0, t)(1 - e^{-at}) + r_0 e^{-at} + \frac{\eta^2}{2a^2} e^{-at}(1 - e^{-at}).$$

Cela nous permet de conclure.

Les comportements de rachats présentés dans ce mémoire dépendent du taux des obligations d'état. Nous adoptons le taux OAT 10 ans, qui correspond au taux des obligations sur 10 ans. Soit  $s_{10}$  sa valeur (cf. plus haut le paragraphe sur les comportements de rachats), pour la calculer à un instant  $t$  à partir de  $r_t$ , nous prenons la formule suivante, qui correspond à la valeur actuelle du flux (coupon et remboursement en fin de période) en 0 :

$$1 = s_{10}(P(r_t, t, t+1) + \dots + P(r_t, t, t+9)) + (1 + s_{10})P(r_t, t, t+10)$$

$$s_{10} = \frac{1 - P(r_t, t, t+10)}{P(r_t, t, t+1) + \dots + P(r_t, t, t+10)}.$$

Enfin, il est utile de maîtriser le comportement de  $r_t$  c'est à dire la moyenne et l'écart type dans le temps afin de disposer d'un intervalle de confiance pour ce taux. Dans ce modèle, la loi de  $r_t$  est une loi normale dont la moyenne à l'instant  $t$  vaut :

$$\mathbb{E}(r_t | r_0) = r_0 \cdot e^{-at} + a \cdot e^{-at} \int_0^t b(s) e^{as} ds,$$

La variance valant :

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\eta^2}{2a}(1 - e^{-2at}).$$



### 3 UN MODELE CONTINU : UNE INTRODUCTION AUX PROCESSUS AVEC RACHATS

Nous avons annoncé dans l'introduction que nous étudions le risque de rachat sous l'aspect de la gestion de portefeuille. Existe-t-il un modèle simple qui permette d'en voir les impacts ?

Nous proposons de démarrer notre étude à travers un modèle en temps continu, dont l'objectif vise à répondre à la question suivante : « Quel est l'impact des comportements de rachats sur le modèle de Merton ? ». Nous proposons donc un modèle qui se situe dans le même contexte que le modèle de Merton (contrôle de la composition du portefeuille entre actif risqué et actif non risqué), et qui contient des éléments qui le rapprochent du contexte de l'assurance vie (existence de taux garanti présenté ici en continu, clause de participation aux bénéficiaires, possibilité de lissage des résultats en gardant une partie de la participation aux bénéficiaires dans une provision non distribuable immédiatement). Comme ce sont les rachats conjoncturels qui nous intéressent, nous nous limitons ici à des rachats.

Nous examinons aussi les rendements que peuvent attendre un assuré dans un tel contexte et les comparons à ceux du modèle initial de Merton.

Le modèle proposé a une originalité : il met en œuvre deux agents ayant des intérêts divergents, ce qui le place à la limite de la théorie des jeux.

Nous considérons une société d'assurance qui gère un portefeuille d'actifs  $X_t$  pour un contrat d'assurance vie en euros. Le contrat est vu comme un modèle collectif : l'ensemble des souscripteurs est considéré comme un tout.

Nous sommes dans une situation qui implique deux agents ayant chacun un intérêt dans la bonne gestion du portefeuille :

- La société d'assurance cherche à dégager un profit,
- L'ensemble des souscripteurs est attentif à sa performance.

Il peut toutefois y avoir conflit d'intérêt entre les deux agents : ce qui est destiné aux souscripteurs est automatiquement soustrait des profits dont peut bénéficier la société d'assurance.

Nous allons « jouer » le comportement des deux agents. De nombreuses « règles du jeu » sont envisageables pour les modalités d'utilisation du portefeuille :

- les règles et usages d'un pays donné pour la constitution des provisions mathématiques destinées aux souscripteurs,
- le respect d'un cadre réglementaire,
- Éventuellement des critères de théorie des jeux, en dehors de tout cadre réglementaire, ce qui permet de « jouer » les deux agents l'un contre l'autre par rapport à des objectifs explicitement distincts.

Dans le cadre de ce chapitre, et dans toute la suite du document, nous adoptons un comportement inspiré du contexte français :

- Les assurés connaissent à chaque instant un taux garanti et bénéficient d'une clause de participation aux bénéfices.
- En cas d'insatisfaction, ils procèdent à des rachats.
- L'assureur doit faire face à des frais de gestion. Il peut aussi disposer d'un prélèvement sur encours et du complément sur les bénéfices non destiné aux assurés.

### 3.1 Une extension du modèle de Merton avec prise en compte des rachats conjoncturels dans un contexte d'assurance-vie.

#### 3.1.1 Participation aux bénéfices, taux servi

Dans cette section, nous décrivons les éléments qui différencient notre modèle de celui de Merton afin de prendre en compte des caractéristiques de l'assurance vie, ainsi que les comportements de rachat des assurés.

Au titre du contrat qu'ils ont souscrit, les assurés connaissent à chaque instant  $t$ , le montant de la provision mathématique  $PM_t$  qui leur est due. Elle leur est acquise en cas de rachat, et ceci sans pénalité. Ils disposent de plus d'une provision pour participation aux bénéfices distribuable « plus tard » (en principe sous 8 ans)  $PPB_t$  - mais nous ne considérons pas le délai sous lequel il est distribué dans ce chapitre. Nous posons (*engagement total de l'assureur envers les assurés*) :

$$B_t = PM_t + PPB_t.$$

Dans notre modèle, les montants  $X_t$  et  $B_t$  diffèrent pour deux raisons :

- En l'absence de rachats,  $B_t$  ne peut diminuer. En revanche, les fluctuations de  $X_t$  présentent pour l'assureur un risque de perte si  $X_t$  en vient à être inférieur à  $B_t$ .
- Lorsque  $X_t$  est supérieur à  $B_t$ , nous définissons plus bas un mécanisme de participation aux bénéfices et de prélèvement sur encours qui a pour conséquence que  $B_t$  « rattrape »  $X_t$ .

Les évolutions de  $X_t$ ,  $B_t$  et  $PM_t$  diffèrent a priori : actif, engagement total dû aux assurés, provision mathématique représentant une valeur de rachat

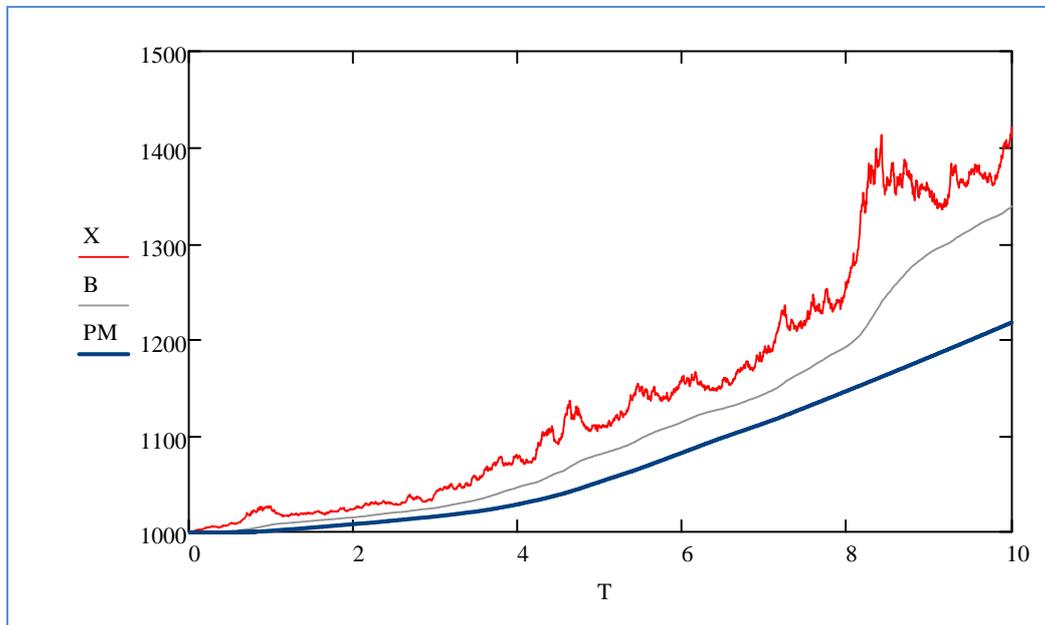


Fig 3.1 : Exemple d'évolution des processus  $X$ ,  $B$  et  $PM$ .

Commençons par considérer l'évolution de la provision mathématique dans le temps. Cette progression de la  $PM$  dépend en premier lieu d'un taux garanti,  $g_t$ , que l'assureur fait connaître à chaque instant (nous imitons en cela une pratique de publication de taux garantis en début d'année en France, avec une différence notable : nous autorisons ici une variation en continu de ce taux). Elle se répercute immédiatement sur  $PM_t$  et apporte la contribution suivante sur un court intervalle de temps :

$$g_t PM_t dt.$$

Lorsque  $X_t$  est supérieur à  $B_t$ , cela signifie que les performances du portefeuille sont réputées bonnes et une participation aux bénéfices est également prévue et distribuée en continu. Pour une constante  $\eta$  comprise entre 0 et 1, la contribution de cette participation aux bénéfices vaut :

$$(1-\eta)(X_t - B_t)_+ dt.$$

Ici,  $(X_t - B_t)_+$  désigne la quantité  $\max(0, X_t - B_t)$ .

Cette participation aux bénéfices est en principe affectée majoritairement à la provision mathématique  $PM_t$  et une partie peut être gardée en provision pour participation aux bénéfices  $PPB_t$ .

Lorsque  $X_t$  est supérieur à  $B_t$ , ce rattrapage est très rapide, ce qui permet de coller à une réalité opérationnelle où la participation aux bénéfices est calculée chaque année.

Par exemple, une PB à 95% correspond à  $\eta = 5\%$ , et si  $X_t = 120$  et  $B_t = 100$ , avec une PB à 95% le mécanisme de rattrapage entraîne pour  $B_t$  une croissance d'environ  $19\% = 95\% \cdot \left(\frac{120}{100} - 1\right)$  en rythme annuel.

Dans les exemples donnés par H. Schmidli [SCH], et dans l'esprit de ce qui a été proposé par De Finetti (cf. introduction), il est naturel d'étudier la performance d'une activité en fonction du cash-flow que celle-ci peut dégager. Classiquement sont concernées des activités qui dégagent des dividendes. Nous discutons toutefois plus en détail ce point de vue au chapitre suivant.

Nous considérons que l'assureur peut prélever un cash-flow à condition que le portefeuille le permette, soit :

$$X_t \geq B_t$$

Dans ce cas, le profit correspond à la partie du bénéfice qui n'est pas réservée aux assurés. Il vaut, en continu (ce qui est une simplification de la réalité en raison des prélèvements sur encours qui sont « fondus » dans cette quantité) :

$$\eta(X_t - B_t)_+ dt \tag{3.1}$$

Revenons à la participation aux bénéfices. Nous effectuons maintenant une simplification importante du modèle et supposons que le rapport  $PPB_t / PM_t$  reste constant et égal à  $\mu$ , et que lors de la distribution de la PB, la portion congrue est gardée en PPB.

Sans cette simplification, nous aurions trois variables d'état dans notre modèle :  $X_t, PM_t, B_t$ . Ce serait trop complexe pour démarrer notre étude.

Ce modèle est défavorable à l'assureur en l'état : le taux garanti entraîne de facto une augmentation de  $B_t$  plus importante que celle de  $PM_t$ , ce qui diminue le cash-flow de l'assureur. D'autre part, la simplification plus haut ne prend pas en compte les prélèvements sur encours. Pour compenser, nous prendrons une valeur de  $\eta$  supérieur aux valeurs usuelles. (Dans le cas d'une clause de PB à 95%, au lieu de prendre  $\eta$  à 5%, nous proposons 8% due à la manière simplifiée de prendre en compte les prélèvements sur encours et compenser notre simplification).

Avec cette convention,  $PPB_t$  est toujours proportionnel à  $PM_t$ , ce qui revient à dire que, dans ce modèle simplifié,  $PM_t$  évolue en fonction du taux garanti et de la participation aux bénéfices, mais

qu'il n'est possible d'envisager de participation supplémentaire aux bénéfices pour les assurés et de cash-flow pour les assureurs qu'à partir du moment où :

$$X_t \geq (1 + \mu)PM_t.$$

A ce stade, avant la prise en compte des rachats, les dynamiques de  $PM_t$  et  $PPB_t$  sont les suivantes :

$$dPM_t = g_t PM_t dt + \frac{1-\eta}{1+\mu} (X_t - (1+\mu)PM_t)_+ dt$$

$$dPPB_t = \mu g_t PM_t dt + \mu \frac{1-\eta}{1+\mu} (X_t - (1+\mu)PM_t)_+ dt.$$

### Les évolutions de $X_t$ , $B_t$ et $PM_t$ dans le cadre de notre simplification

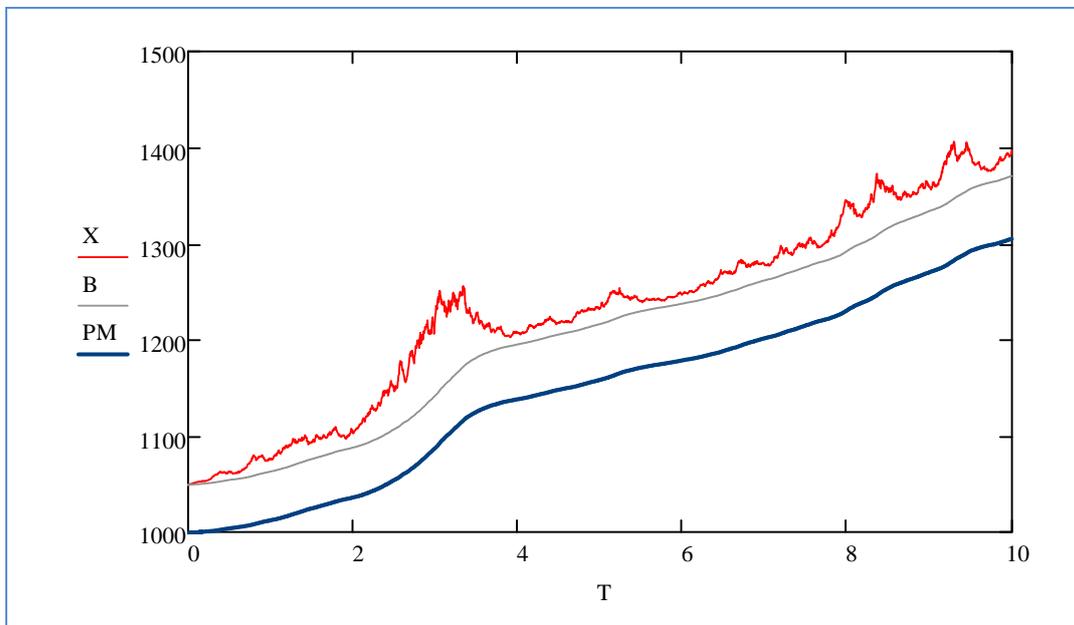


Fig 3.2 : Exemple d'évolution des processus  $X$ ,  $B$  et  $PM$ .

Le taux servi aux assurés intègre le taux garanti et la participation aux bénéfices, soit :

$$s_t = g_t + (1-\eta) \left( \frac{X_t}{(1+\mu)PM_t} - 1 \right)_+ = \frac{dPM_t}{PM_t}.$$

Remarque : nous séparons ici clairement les deux notions de taux garanti et de participation aux bénéfices alors que le code des assurances considère le taux garanti comme un élément de la participation aux bénéfices.

### 3.1.2 Dynamique des actifs

Nous supposons un taux sans risque constant  $r$ , légèrement diminué pour prendre en compte en continu un prélèvement pour frais de gestions. Par ailleurs, une proportion  $\alpha_t$  de l'actif est placé en un actif risqué avec un rendement espéré de  $r_A$  et une volatilité  $\sigma$ .

Comme dans le modèle de Merton, la dynamique de  $X_t$ , (sans la prise en compte d'éventuels rachats) est la suivante :

$$dX_t = (r + \alpha_t(r_A - r))X_t dt + \alpha_t \sigma X_t dW_t.$$

### 3.1.3 Les comportements de rachats

Si les performances ne sont pas au rendez-vous, c'est à dire si le taux servi à la provision  $PM_t$  ne correspond pas aux attentes des souscripteurs, une proportion  $Rdt$  de ceux-ci procède à des rachats. Le montant du portefeuille géré par l'assureur s'en trouve diminué ainsi que son espérance de gains.

Nous adoptons un comportement de rachats inspiré des notes ONC des QIS4 [ONC4] et QIS5 [ONC5], où  $R$  dépend de la différence entre le taux servi et un taux long (ex : le TME à 10 ans). Les notes en questions prennent en compte des rachats structurels et des rachats conjoncturels. Dans le cadre de ce chapitre, comme nous l'avons mentionné au début, nous nous concentrons sur les rachats conjoncturels, afin de mettre l'accent sur une propriété élémentaire observée dans ce cas (cf. Propriété 2 plus bas). Le comportement complet est pris en compte dans le chapitre suivant.

Dans un tel contexte, le taux de rachat  $R$  est une fonction affine par morceau du taux servi  $s$  :

$$R(s) = \begin{cases} R_{\max} & \text{si } s < s_0 \\ 0 & \text{si } s \geq s^* \\ \frac{s^* - s}{s^* - s_0} R_{\max} & \text{si } s_0 \leq s \leq s^* \end{cases}$$

Trois paramètres interviennent dans cette définition :

- Le taux  $R_{\max}$ , qui représente le taux maximal de rachat en cas de mauvaise performance,
- Le taux d'intérêt  $s_0$ , qui représente le taux de rendement au dessous duquel les souscripteurs procèdent aux rachats avec ce taux maximal,
- Le taux  $s^*$  déduit du taux à long terme, à partir duquel les souscripteurs s'estiment satisfait et ne procèdent à aucun rachat.

**Le comportement de rachat se manifeste à travers un taux  $R_{\max}$  de rachat en cas de mécontentement, et à travers une demande d'un taux servi  $s^*$  par les souscripteurs.**

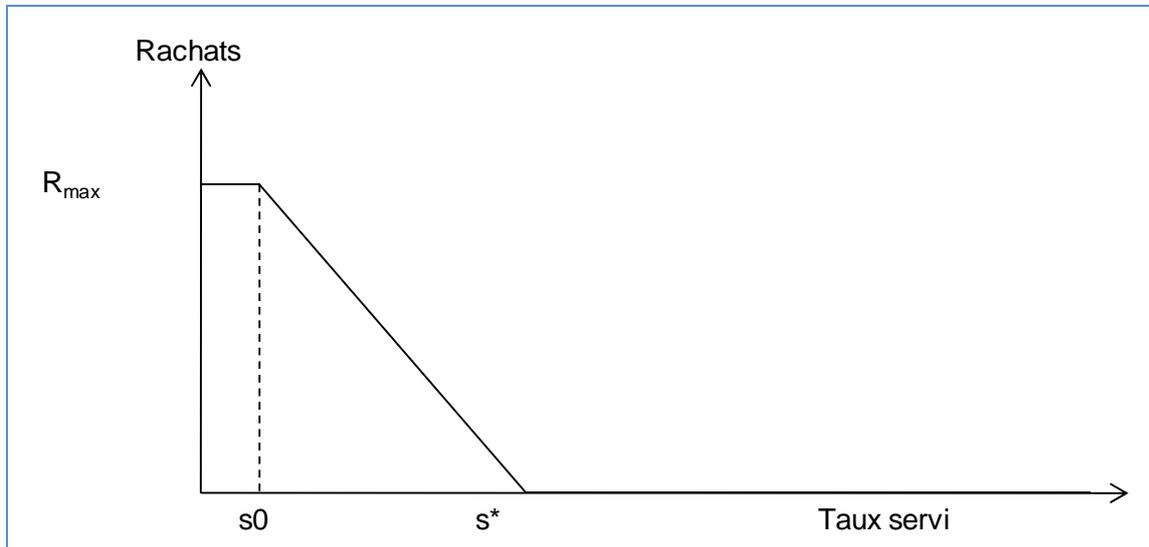


Fig 3.3 : Comportements de rachat.

Le taux  $s^*$  apparaît comme un taux critique de notre modèle. L'assureur pourrait choisir, théoriquement, de ne jamais distribuer plus – ou de tout garder en PPB. Des considérations de bon sens, par rapport aux pratiques de la profession qui ne conserve pas en général de PPB élevée, nous dispense de cette approche.

### 3.1.4 La dynamique du portefeuille

Avec nos hypothèses, les processus  $X_t$ ,  $PM_t$  et  $PPB_t$  possèdent les dynamiques suivantes :

$$dX_t = (r + \alpha_t(r_A - r))X_t dt + \alpha_t \sigma X_t dW_t - \eta(X_t - (1 + \mu)PM_t)_+ dt - R_t \cdot PM_t dt$$

$$dPM_t = g_t PM_t dt + \frac{1 - \eta}{1 + \mu} (X_t - (1 + \mu)PM_t)_+ dt - R_t \cdot PM_t dt$$

$$dPPB_t = \mu dPM_t.$$

L'assureur peut « jouer » sur deux variables de contrôle pour optimiser ses objectifs, que nous définissons plus bas :

- La composition du portefeuille via  $\alpha_t$ ,
- Le choix d'un taux garanti  $g_t$ .

### 3.1.5 L'attitude face à la ruine de l'assureur

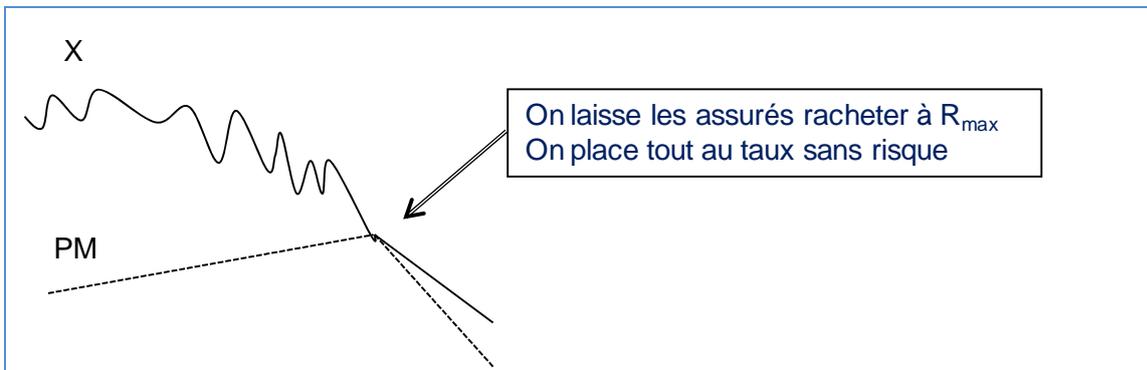
Nous interdisons les situations  $X_t < PM_t$  qui menacent l'assureur. Nous avons toutefois la propriété suivante :

#### **PROPRIETE 1 :**

***Presque sûrement, il n'y a jamais de ruine.***

Si  $X$  descend au niveau de la  $PM$ , il suffit de garantir  $g=0$  et de tout placer dans un portefeuille sans risque. Les souscripteurs rachètent au niveau de  $R_{\max}$  sur la base du montant de la  $PM$ , mais la croissance de  $X$  au taux sans risque permet au portefeuille de décoller de la  $PM$ , puis d'avoir une espérance de cash-flow. Ainsi, il n'y a peut-être pas de ruine, mais le portefeuille de l'assureur fond comme neige au soleil.

**Lorsqu'il n'y a plus de marge, l'assureur communique sur un taux garanti 0, et sert 0%, les souscripteurs rachètent mais le portefeuille continue de bénéficier d'un rendement sans risque au taux  $r$ .**



*Fig 3.4 : Situation au seuil de la ruine.*

Lorsque nous définirons plus bas la fonction d'efficacité à partir de laquelle sont définies les stratégies optimales, nous n'imposerons pas de temps d'arrêt mais définirons des conditions aux bords. Les stratégies admissibles sont donc désormais celles qui vérifient, lorsque  $X_t = PM_t$  :

$$\alpha_t = 0, g_t = 0.$$

Cela signifie que sur le bord  $X_t = PM_t$ , nous interdisons toute volatilité pour le portefeuille ainsi que toute augmentation « intempestive » de la  $PM$  (au grand dam des assurés).

### 3.1.6 La fonction d'efficacité

Nous allons mesurer l'efficacité du processus à travers le cash-flow dégagé en continu : en effet, celui-ci témoigne d'une part d'un profit pour l'assureur et d'autre part d'une distribution de participation aux bénéficiaires pour l'assuré. Par ailleurs, l'existence d'un cash-flow important témoigne aussi de la présence de fonds importants, c'est à dire du faible volume des rachats antérieurs, où encore de la satisfaction relative des souscripteurs. Cette situation est exceptionnelle, en principe nous devrions aussi intégrer une efficacité liée directement aux gains des assurés.

Nous prenons un coefficient d'actualisation constant  $\delta$ , et une constante correspondant à l'aversion au risque  $\gamma$ .

Nous rappelons que d'après (3.1), le cash-flow vaut en continu  $\eta(X_t - B_t)_+ dt$ .

Pour une « stratégie »  $g_t, \alpha_t$  donnée, l'efficacité vaut, pour un horizon fini  $T$  :

$$V(t, x, m) = E \left( \eta^\gamma \int_t^T e^{-\delta s} (X_s - (1 + \mu)PM_s)_+^\gamma ds \mid X_t = x, PM_t = m \right).$$

En raison de la propriété 1, nous n'imposons pas de temps d'arrêt si  $X_t = PM_t$ .

Nous souhaitons étudier la meilleure stratégie, et nous posons :

$$J(t, x, m) = \underset{(g_t, \alpha_t)}{\text{Max}} V(t, x, m)$$

La propriété 1 que nous avons vue plus haut a pour conséquence que sur le bord  $x = m$ , dès que  $t > 0$ , nous pouvons avoir :

$$J(t, x, x) \neq 0.$$

## 3.2 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman du problème

### 3.2.1 Formulation de l'équation

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de notre problème se déduit de la relation (2.13) en appliquant la recette du chapitre précédent :

- Nous avons ici un flux d'utilité qui apporte dans l'équation une contribution :  $\eta^\gamma (X_t - (1 + \mu)PM_t)_+^\gamma$ ,
- L'actualisation au taux  $\delta$  apporte une contribution :  $-\delta J$ ,
- Il reste à calculer le terme  $A^{g, \alpha} J$ .

Les dynamiques de  $X_t$  et de  $PM_t$  permettent de déduire  $A^{g,\alpha}J$  :

$$\begin{aligned}
A^{g,\alpha}J(t,x,m) &= \frac{1}{2}J_{xx}(dX_t^2)_{en\ dt} + J_x(dX_t)_{en\ dt} + J_m(dPM_t)_{en\ dt} \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2x^2J_{xx} + (r + \alpha(r_A - r))xJ_x - \eta(x - (1 + \mu)m)_+ J_x - RmJ_x \\
&\quad + (g - R)mJ_m + \frac{1 - \eta}{1 + \mu}(x - (1 + \mu)m)_+ J_m \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2x^2J_{xx} + \{(r + \alpha(r_A - r))x - \eta(x - (1 + \mu)m)_+ - Rm\}J_x \\
&\quad + \left\{ (g - R)m + \frac{1 - \eta}{1 + \mu}(x - (1 + \mu)m)_+ \right\} J_m.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'équation HJB du problème qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned}
&J_t + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2x^2J_{xx} + \{(r + \alpha(r_A - r))x - \eta(x - (1 + \mu)m)_+ - Rm\}J_x \\
&+ \left\{ (g - R)m + \frac{1 - \eta}{1 + \mu}(x - (1 + \mu)m)_+ \right\} J_m - \delta J + \eta^\gamma(x - (1 + \mu)m)_+^\gamma
\end{aligned} \right\} \quad (3.2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous sommes conscients du caractère exotique de cette équation. Notre objectif n'est pas de l'étudier mathématiquement, mais d'en donner une estimation numérique et d'en tirer quelques conclusions.

### 3.2.2 Exploitation du caractère homogène de J

De par sa définition,  $J$  est homogène de degré  $\gamma$  en  $m$  et  $x$  :

$$J(t, \lambda m, \lambda x) = \lambda^\gamma J(t, m, x).$$

En effet, considérer  $t$  comme nouvel instant initial et multiplier à la fois  $x$  et  $m$  par un coefficient  $\lambda$  revient à multiplier tous les flux par  $\lambda^\gamma$ .

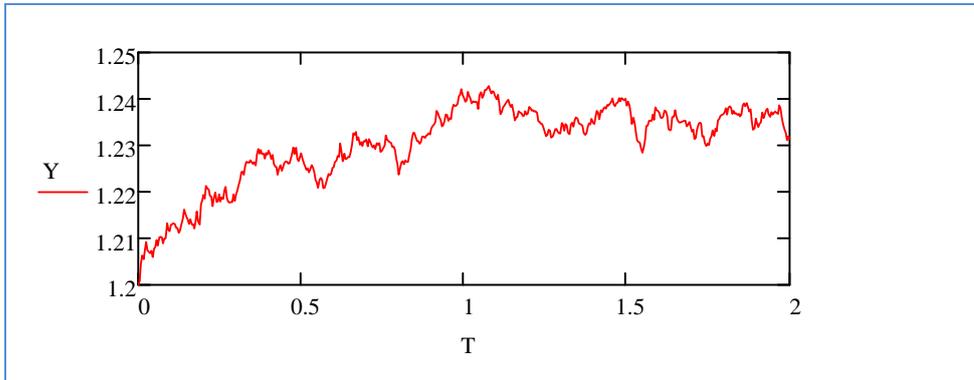
Nous posons donc :

$$Y_t = X_t / PM_t.$$

Le processus  $Y_t$  suit un comportement ressemblant à un retour à une moyenne (mais est « exotique »).

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{1}{PM_t} dX_t - \frac{X_t}{PM_t^2} dPM_t + dX_t \cdot d\left(\frac{1}{PM_t}\right) \\
&= (r + \alpha_t(r_A - r) - g_t)Y_t dt + R_t(Y_t - 1)dt \\
&\quad - \left\{ \eta + \frac{1-\eta}{1+\mu} Y_t \right\} (Y_t - (1+\mu))_+ dt + \alpha_t \sigma Y_t dW_t.
\end{aligned}$$

**Le processus  $Y_t$  ne peut atteindre de grandes valeurs.**



*Fig 3.5 : Une simulation pour  $Y$ .*

Le processus  $Y_t$  peut difficilement atteindre de grandes valeurs car une force de rappel « très élevée » s'exerce dans ce cas, en raison du dernier terme en  $dt$  dans l'équation ci-dessus qui définit  $dY_t$  (cf. Fig 3.5).

Nous allons exploiter le caractère homogène de  $J$  pour transformer cette dernière en une fonction ayant une variable de moins, donc plus simple à étudier. Nous définissons ainsi la fonction  $K$  de la manière suivante :

$$K(t, y) = J(t, y, 1).$$

La connaissance de  $K$  entraîne celle de  $J$  :

$$J(t, x, m) = m^\gamma K\left(t, \frac{x}{m}\right).$$

Il est alors possible de remplacer  $J$  par  $K$  dans l'équation HJB (3.2). Pour cela, nous commençons par calculer les dérivées partielles de  $J$  en fonction de celles de  $K$ , avec  $y = x/m$  :

$$J_t(t, x, m) = m^\gamma K_t(t, y),$$

$$\begin{aligned}
J_x(t, x, m) &= m^{\gamma-1} K_y(t, y), \\
J_{xx}(t, x, m) &= m^{\gamma-2} K_{yy}(t, y), \\
J_m(t, x, m) &= m^{\gamma-1} (\gamma K(t, y) - y K_y(t, y)).
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation précédente et simplifiant par  $m^\gamma$ , nous obtenons une équation HJB pour  $K$  :

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& K_t + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 y^2 K_{yy} + \alpha(r_A - r) y K_y \\
& + g(\gamma K - y K_y) - R(\gamma K - (y-1) K_y) \\
& + \{ \bar{\eta} \gamma K - [\eta + \bar{\eta} y] K_y \} (y - \beta)_+ \\
& r y K_y - \delta K + \eta^\gamma (y - \beta)_+^\gamma
\end{aligned} \right\} = 0 \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Avec

$$\beta = 1 + \mu, \quad \bar{\eta} = \frac{1 - \eta}{1 + \mu}.$$

Cette fonction n'est définie que pour  $y \in [1, +\infty[$ .

Nous remarquons que pour  $t$  et  $y$  fixés, cette expression est affine en  $g$  et  $R$ , résultat que nous exploiterons plus bas car elle entraîne une propriété remarquablement simple sur les stratégies optimales.

### 3.3 Premières propriété élémentaires

**PROPRIETE 2** (Øksendal) : *Les stratégies markoviennes sont au moins aussi bonnes que toutes les autres stratégies adaptées.*

L'argument est le suivant. Soit  $t$  fixé. Le calcul effectué pour l'obtention de l'équation HJB au chapitre précédent montre que, pour obtenir une stratégie optimale, il faut optimiser le comportement du générateur infinitésimal de  $J$  entre  $t$  et  $t + dt$ . Dans une telle situation, la connaissance du passé n'apporte rien (le processus  $X_t$  est en effet lui-même markovien). La démonstration complète se trouve dans l'ouvrage d'Øksendal [OKS, théorème 11.2.3].

Par conséquent, supposons que  $g_t^1, \alpha_t^1$  soit une stratégie où le choix des paramètres de contrôle peut dépendre du passé. Nous rencontrons actuellement de telles stratégies dans le code des assurances qui fait dépendre le taux garanti de la performance passée du portefeuille  $X_t$  sur deux

années. Supposons maintenant que  $g_t^2, \alpha_t^2$  soit une stratégie markovienne optimale déduite de la résolution des équations HJB. Soient respectivement  $J^1$  et  $J^2$  les fonctions d'efficacités obtenues dans chacun des deux cas précédents. Alors :

$$J^2(t, x, m) \geq J^1(t, x, m).$$

Nous ne disons pas que la première stratégie est « mauvaise », toutefois, elle peut être théoriquement améliorée en prenant en compte de manière plus précise la situation au moment où la stratégie est exécutée.

**PROPRIETE 3 : La stratégie optimale consiste à adopter l'un des deux comportements suivants :**

- *On garanti le maximum demandé pour servir le « taux critique »  $s^*$  (donc rien si la distribution de PB suffit à apporter ce taux),*
- *On ne garanti rien du tout,  $g_t = 0$ , et on laisse les souscripteurs racheter sans se soucier du taux de rachat,*

*Dans le premier cas, cela revient à choisir  $g_t$  ainsi :*

$$g_t = \max\left(s^* - (1 - \eta) \left( \frac{X_t}{(1 + \mu)M_t} - 1 \right)_+ ; 0\right).$$

*Dans tous les cas, le coefficient  $\alpha_t^*$  optimal définissant la composition du portefeuille vaut :*

$$\alpha_t^* = \left( \frac{r_A - r}{\sigma^2} \right) \left( \frac{-K_y}{yK_{yy}} \right).$$

Dans l'énoncé précédent, le taux garanti  $g$  vaut donc zéro dans deux zones :

- Une zone où le gestionnaire du fonds décide qu'il vaut mieux laisser racheter (vraisemblablement car nous sommes dans une zone de perte ou une zone à risque),
- Une zone où la distribution de PB suffit à elle seule à satisfaire les souscripteurs (ce qui est possible dans un modèle continu, mais bien entendu peu vraisemblable dans les situations usuelles), en fait dès que :

$$\frac{X_t}{PM_t} = Y_t \geq (1 + \mu) \left( 1 + \frac{s^*}{1 - \eta} \right).$$

A un instant donné, le taux de rachat R est affine par morceaux en fonction de g.

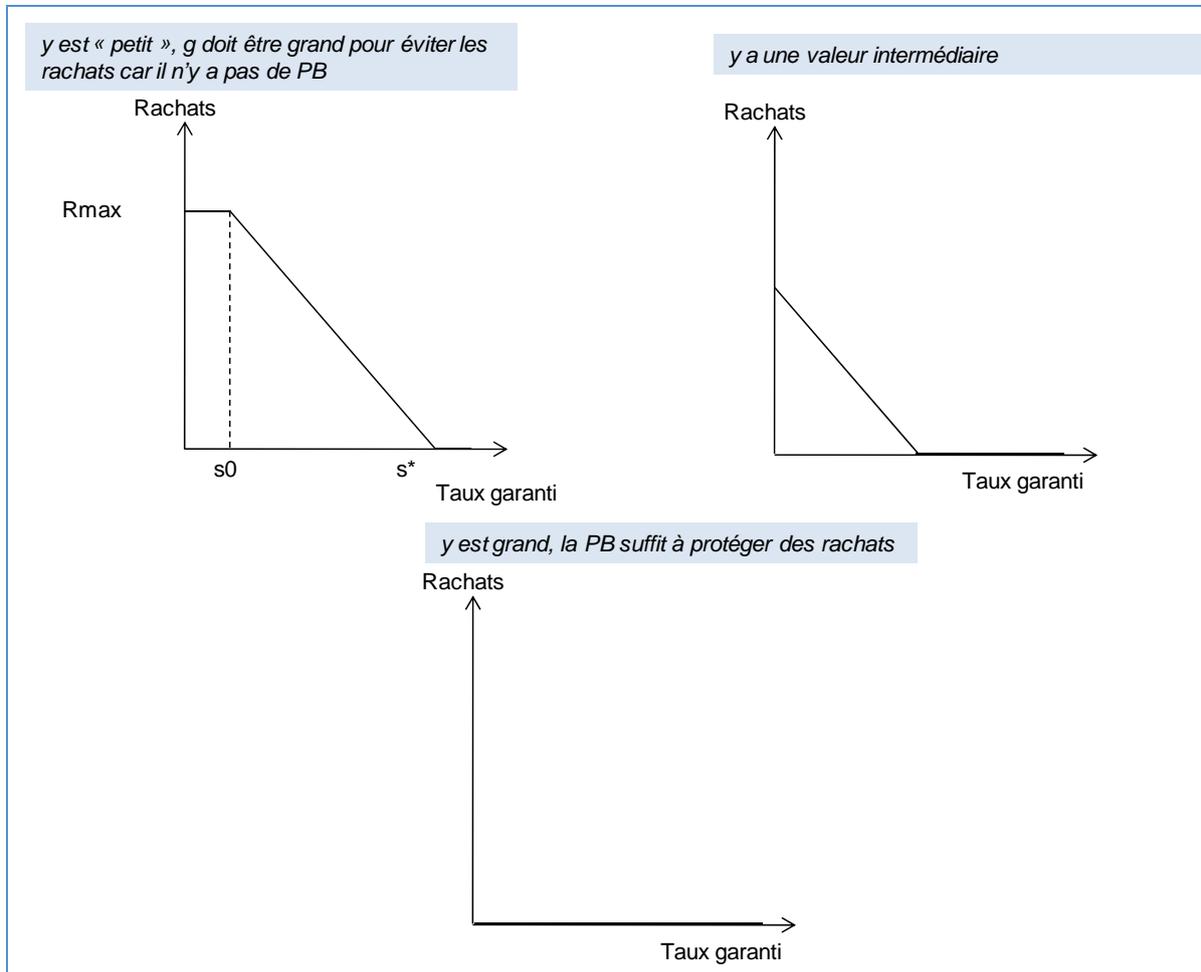


Fig 3.6 : Comportements de rachats.

Nous séparons dans l'équation HJB (3.3) les éléments qui dépendent de  $\alpha$  et de  $g$  des autres termes.

Nous la réécrivons ainsi :

$$\begin{aligned}
 K_t &+ \text{Max}_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 y^2 K_{yy} + \alpha (r_A - r) y K_y \right\} \\
 &+ \text{Max}_g \left\{ +g(\gamma K - y K_y) - R(\gamma K - (y-1)K_y) \right\} \\
 &+ \left\{ \bar{\eta} \gamma K - [\eta + \bar{\eta} y] K_y \right\} (y - \beta)_+ + r y K_y - \delta K + \eta' (y - \beta)_+ \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Nous voyons que  $\alpha$  n'intervient que dans la première accolade. Dans l'exemple numérique présenté plus bas, nous sommes toujours dans une situation où  $K_{yy} < 0$ , et le graphe en  $\alpha$  de cette accolade est une parabole ayant sa pointe en haut. Le maximum présenté plus haut s'en déduit de la même manière que dans l'exemple de Merton.

La quantité  $R$  est affine par morceaux en  $s = g + (1 - \eta) \left( \frac{y}{\beta} - 1 \right)_+$  donc aussi en  $g$ . Le graphe de  $R$  comme fonction de  $g$  a l'allure du schéma présenté ci-dessus (Fig 3.6).

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} A &= \gamma K - yK_y, \\ B &= \gamma K - (y - 1)K_y, \end{aligned}$$

Comme  $A$  est proportionnel à  $J_m$  avec un coefficient de proportionnalité positif  $m^{\gamma-1}$  et comme  $J_m$  est négatif (pour un montant  $x$  donné du portefeuille, augmenter dès le démarrage du processus la PM diminue naturellement le cash-flow à destinations de l'assureur), alors  $A < 0$ . Par conséquent, la fonction :

$$\Phi : g \rightarrow Ag - BR(g)$$

où  $R$  est maintenant interprété comme une fonction affine par morceau de  $g$  a la représentation graphique donnée ci-dessous (Fig 3.7).

Dans le domaine  $g \geq 0$ , il y a deux cas de figure pour le maximum de notre fonction  $\Phi$  suivant la position de la première pointe en bas du graphe si dessous (Fig 3.7).

Si la première pointe se situe dans la zone  $g \geq 0$ ; alors la fonction  $\Phi$  a deux maximums possibles : en  $g = 0$ , ou en  $g = g_1$  correspondant au point  $M_1$  de la figure ci dessous (Fig 3.7).

Si la première pointe se situe en revanche à gauche de l'axe des ordonnées, le seul maximum possible pour  $\Phi$  vaut  $g_1$ .

Dans tous les cas de figures, il n'y a que deux stratégies possibles suivant les valeurs de  $\Phi$ , donc, in fine, les dérivées partielles de  $K$  :

- $g = 0$  : le taux garanti est nul,
- $g = g_1$  : le taux servi vaut  $s^*$ .

Remarque : Ce modèle, bien que simplifié, dénote l'importance des paramètres publiés par l'ACP. S'il s'inspire de ce modèle, le gérant du portefeuille peut être encouragé à suivre une stratégie du « tout ou rien » : s'il pense pouvoir servi le taux  $s^*$ , alors il le fait. Dans le cas contraire, il garantit un taux nul et laisse les souscripteurs effectuer des rachats.

**Il y a au plus deux possibilités pour le taux garanti.**

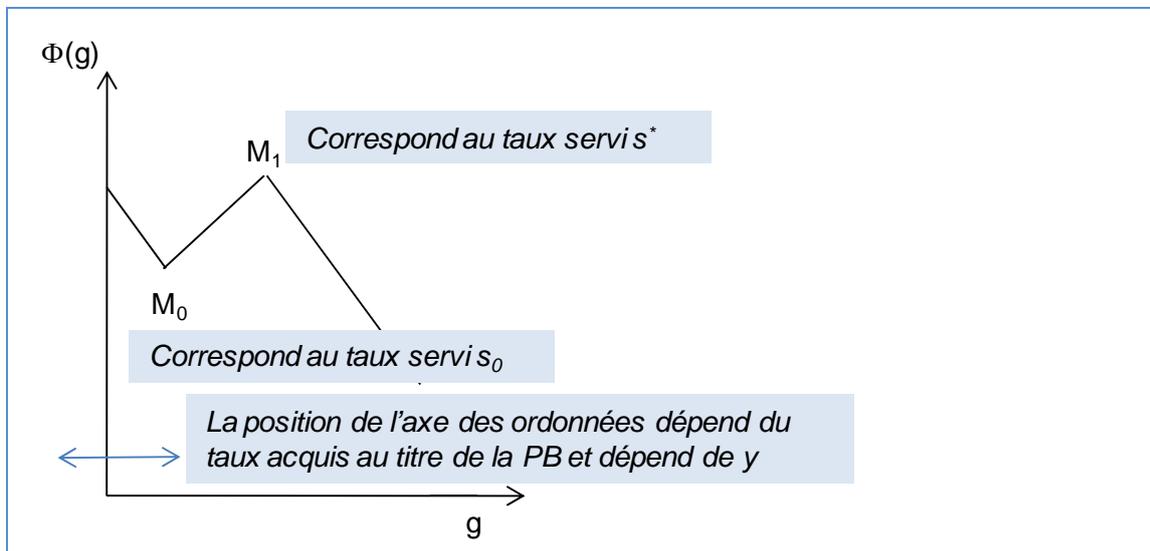


Fig 3.7 : Choix du taux garanti en fonction du maximum de la fonction  $\Phi(g)$ .

### 3.4 Exemple numérique

Nous présentons un exemple numérique destiné à amplifier ce qui se passe lorsque  $y$  se situe dans l'intervalle  $[1, 1 + \mu]$ . Pour cela, nous choisissons une valeur de  $\mu$  supérieure aux valeurs pratiquées par la profession. Les constantes  $r_A$  et  $\sigma$  sont élevées pour la même raison.

Pour les taux et rendements et d'actualisation nous prenons les données suivantes :

- Taux sans risque :  $r = 2,5\%$ , rendement de l'actif risqué :  $r_A = 7,5\%$ , et volatilité :  $\sigma = 50\%$ .
- Actualisation à :  $\delta = 3\%$ .

Nous prenons une PB à 92%, ce qui correspond à  $\eta = 8\%$ .

L'aversion au risque vaut  $\gamma = 0.5$

Le rapport PPB / PM vaut :  $\mu = 20\%$ .

Nous considérons un comportement de rachat avec :  $s_0 = 0,5\%$ ,  $s^* = 3,5\%$ ,  $R_{\max} = 30\%$ .

Nous répondons à la question « Quelle stratégie sur une échéance longue, voire infinie ? ».

Nous avons effectués les calculs à l'aide d'arbres trinomiaux (analogues aux éléments finis du chapitre 2, mais sans le taux stochastique), trois fois sur 30 années, afin de vérifier que la solution obtenue est stable.

Nous illustrons d'abord la représentation graphique de la fonction  $K$  (Fig. 3.8).

**La fonction K ne s'annule pas en 1.**

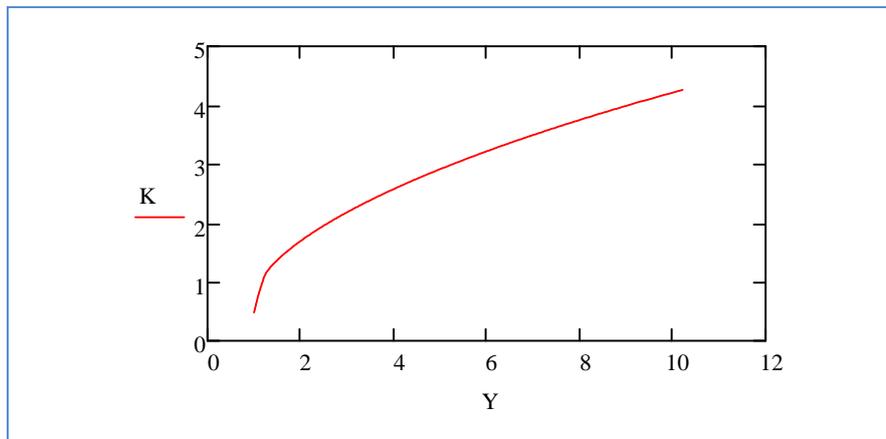


Fig 3.8 : Représentation graphique de la fonction  $K$ .

Nous rappelons que, pour une valeur  $X$  du portefeuille et  $PM$  de la provision mathématique,  $T$  étant une échéance longue, nous avons :

$$J(T, X, PM) = PM^\gamma \cdot K\left(T, \frac{X}{PM}\right).$$

Nous formulons les remarques suivantes :

Les valeurs de la fonction  $K$  ne sont pas élevées pour deux raisons :

- L'actualisation au taux  $\delta$  qui provoque une diminution des perspectives futures,
- Les menaces de rachats qui ont un effet d'entraînement à la baisse pour les processus  $X_t$  et  $PM_t$ .

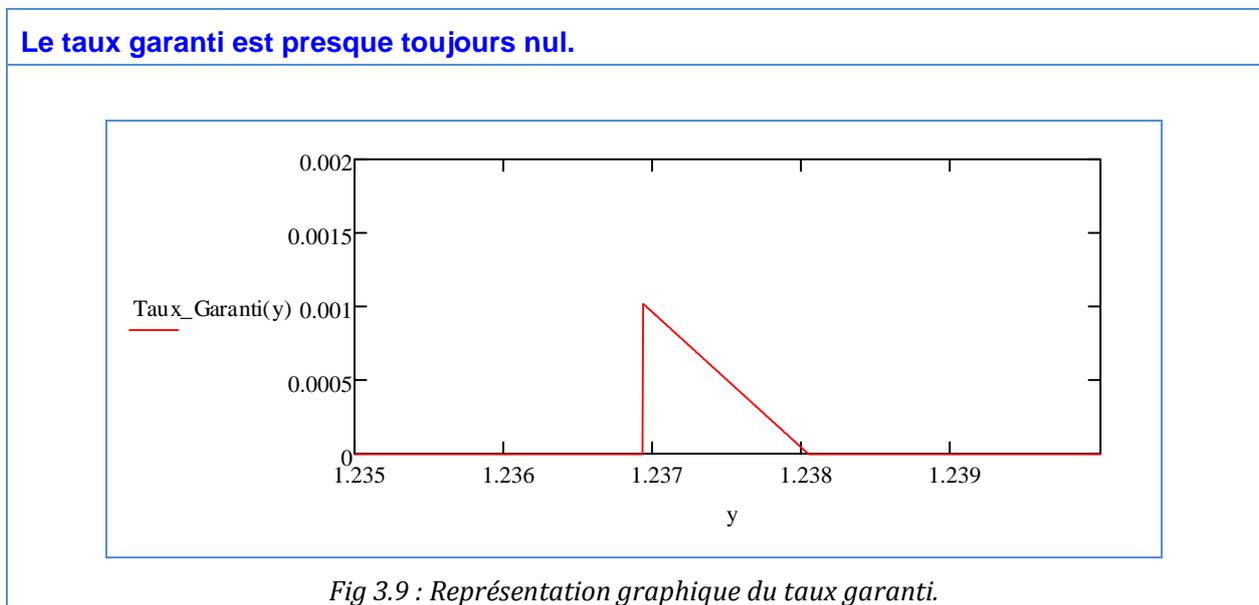
Pour  $Y = 1$ , la valeur n'est pas nulle et vaut environ 0,491.

L'aspect de la courbe en  $y'$  pour les grandes valeurs de  $y$  est normal.

Nous remarquons une légère rupture de pente à  $y = 1 + \mu$ . En effet, si  $X_t$  est en dessous de  $(1 + \mu)PM_t$ , l'assureur est en situation de perte. Tout le temps passé dans cette zone n'apporte

aucun cash-flow. La valeur de la fonction  $K$  représente une espérance d'utilité à partir du moment où la valeur du portefeuille dépasse la valeur de l'engagement total vis à vis des assurés (provision mathématique et PPB). En revanche, dès que  $X_t$  passe au dessus de  $(1 + \mu)PM_t$ , l'assureur dispose de sa partie des bénéfices.

Examinons maintenant les stratégies en  $g$  et  $\alpha$ . Commençons avec le taux garanti  $g$ . Celui ci est presque toujours nul et le graphe est le suivant (Fig 3.9) :



Nous remarquons que, dans notre modèle, le taux garanti est presque toujours nul en dehors d'une zone extrêmement mince :

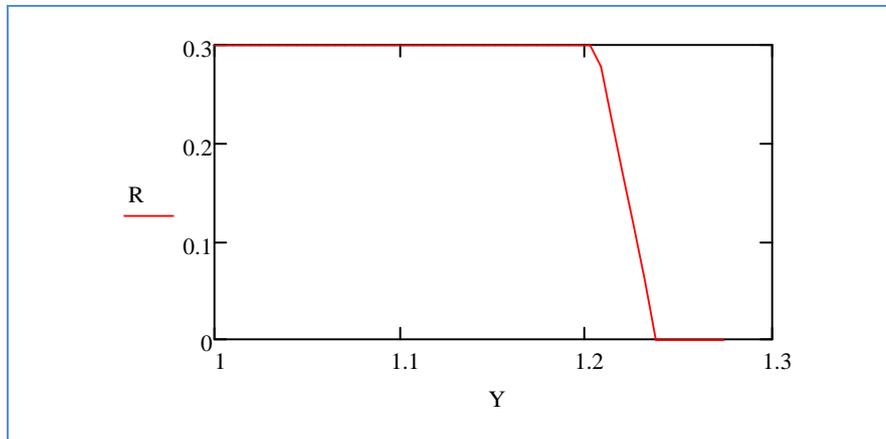
- Lorsque  $y$  est inférieur à 1,23694 l'assureur est soit en situation de perte, soit s'approche de la zone de perte et cherche à l'éviter. Il choisit de laisser les assurés effectuer des rachats et sa stratégie prioritaire est de remonter la valeur de  $y$ .
- Dès que  $y$  passe au dessus de cette valeur, le taux garanti sert à stopper les rachats et il devient nul dès que la participation aux bénéfices suffit à elle seule à satisfaire les assurés (soit  $y = 1,23805$ ). Comme nous l'avons déjà dit précédemment, cela provient du caractère continu de notre modèle. Dans la vie réelle, nous pouvons nous attendre à un intérêt limité du mécanisme du taux garanti (hors prise en compte de la collecte), car nous ne pouvons pas être sûrs en début d'année des performances du portefeuille en fin d'année.

Par conséquent, les rachats en rythme annuel ont l'aspect de la figure 3.10 en fonction de  $y$ .

Passons maintenant à la composition du portefeuille, c'est à dire à la stratégie en  $\alpha_t$ .

Dans cet exemple, la composition du portefeuille (coefficient  $\alpha$ ) est intéressante et représente l'attitude de l'assureur face au risque perçu. Un coefficient  $\alpha$  faible représente une volatilité faible (voire nulle) des actifs, donc une prise de risque faible, un coefficient  $\alpha$  élevé représente une prise de risque plus élevée où il est possible de parier sur un rendement plus élevé des actifs.

**Les rachats ne se produisent que dans la zone de perte ou à son voisinage.**



*Fig 3.10 : Représentation graphique des rachats en fonction de  $y$ .*

En fonction de  $y$ , la représentation graphique de  $\alpha$  est la suivante (Fig 3.11) :

**La volatilité du portefeuille dépend, soit de la nécessité de sortir de la zone de perte, soit de la volonté de l'éviter une fois qu'on en est sorti.**

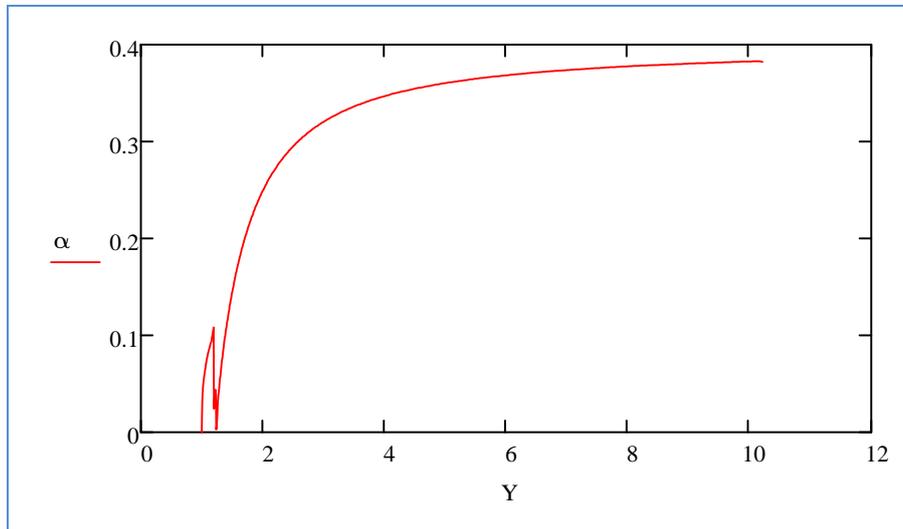


Fig 3.11 : Représentation graphique de  $\alpha$  en fonction de  $y$ .

Lorsque  $Y_t \leq 1 + \mu$ , c'est à dire lorsque  $X_t \leq (1 + \mu)PM_t$ , la valeur de  $\alpha_t$  part de zéro mais décolle rapidement. De cette manière, le rendement de  $X_t$  commence par décoller du taux sans risque, et au fur et à mesure qu'il s'éloigne de la zone interdite ( $y < 1$ ) le rendement moyen peut augmenter ainsi que la volatilité. L'effet de la volatilité, en outre, est de permettre de tenter des sauts en hauteur pour passer dans la zone  $y \geq 1 + \mu$ .

Dès le passage du seuil fatidique  $1 + \mu$  pour  $y$ , nous observons une descente brutale de  $\alpha$ . Comme le suggère une simulation que nous avons effectuée plus bas, la stratégie est faite pour que  $X_t$  reste constamment au dessus de  $(1 + \mu)PM_t$ .

Ensuite,  $\alpha$  augmente progressivement mais reste, dans la zone où  $Y_t$  évolue le plus souvent d'après nos simulations, inférieur à la constante de Merton qui vaut ici 0,4.

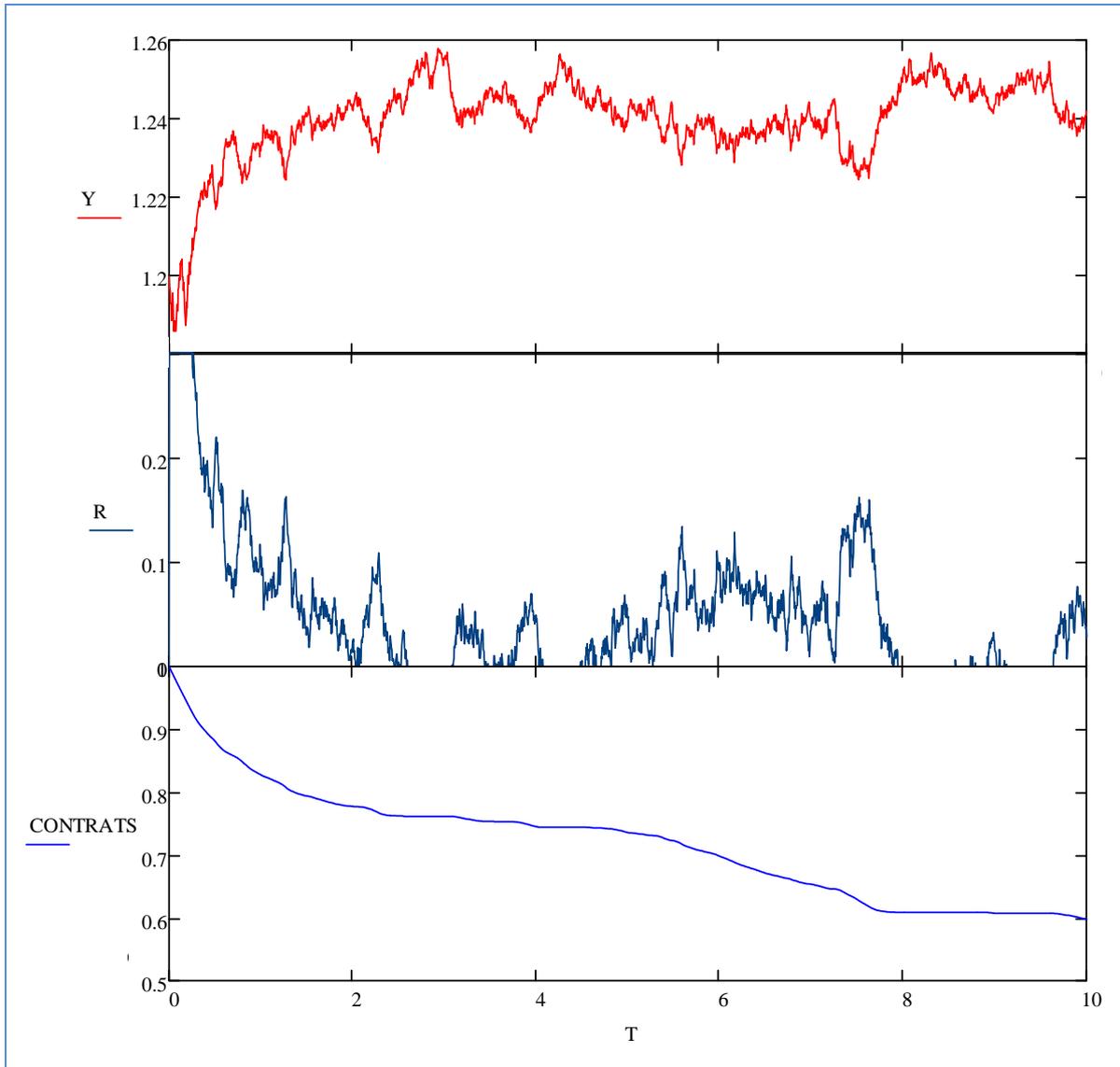
Enfin, pour les grandes valeurs de  $y$ , la valeur de  $\alpha$  est proche de la constante de Merton.

La représentation graphique de  $\alpha$  montre que cette valeur est inférieure à celle qui aurait été obtenue si l'assureur n'avait pas été menacé de rachats dans ses choix et n'était pas astreint en permanence à une distribution de PB ! Cela suggère que la menace de rachat dans un contexte de distribution en permanence de PB « rajoute de l'aversion au risque » et incite l'assureur à plus de

prudence. Le rendement moyen du portefeuille s'en trouve diminué. L'assureur se trouve ainsi tiraillé entre une tendance à la prise de risque pour assurer un rendement permettant de garder ses souscripteurs et une prudence générée par la menace de rachat.

Nous avons présenté plus haut une simulation de  $Y_t$  pour cet exemple. Le processus reste dans une zone de rendement moyen : il ne peut jamais décoller en raison du mécanisme de participation aux bénéfices, et reste dans une zone proche de la menace de pertes. Nous montrons dans le graphe suivant une autre simulation de ce processus avec le comportement de rachat associé, ainsi que le nombre de contrats restants (base 1 à 0). Au bout de 10 ans, il reste 63,27% des contrats en cours, ce qui correspond à un taux de chute conjoncturel annuel moyen de 4,47%.

**Le processus Y évolue dans une bande relativement étroite, des rachats conjoncturels demeurent inévitables.**



*Fig 3.12 : Représentation graphique de Y, des comportements de rachats et des contrats restants.*

Nous terminons par une simulation de  $X_t, PM_t$ .

Dans la simulation, les rachats conjoncturels entraînent une érosion lente du portefeuille.

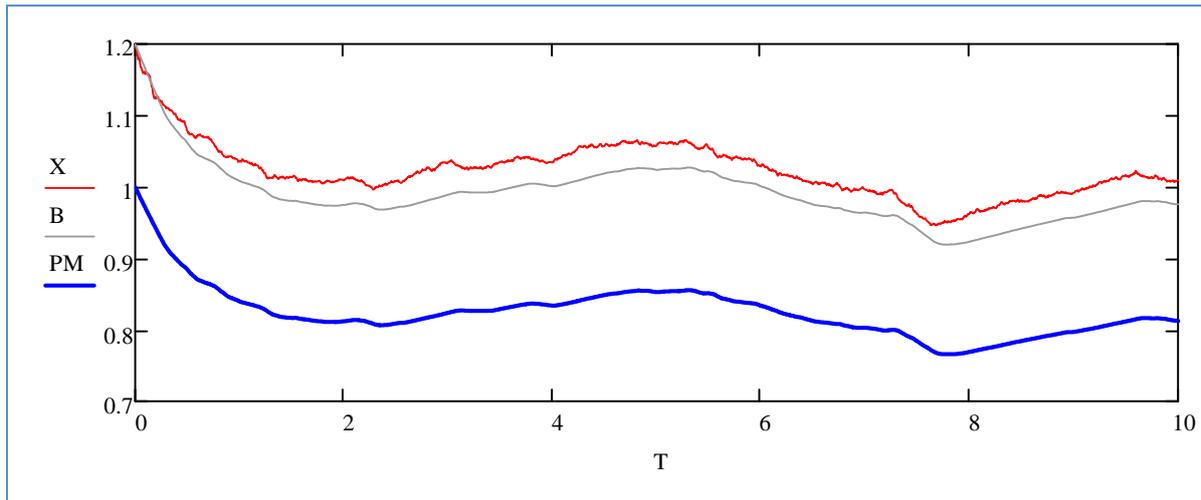


Fig 3.13 : Simulation montrant le montant X du portefeuille ainsi que la PM.

La progression de l'encours pour un assuré, dans cette simulation, est la suivante (Fig 3.14) :

Cette simulation donne à l'assuré qui ne rachète pas un rendement un peu supérieur au taux sans risque.

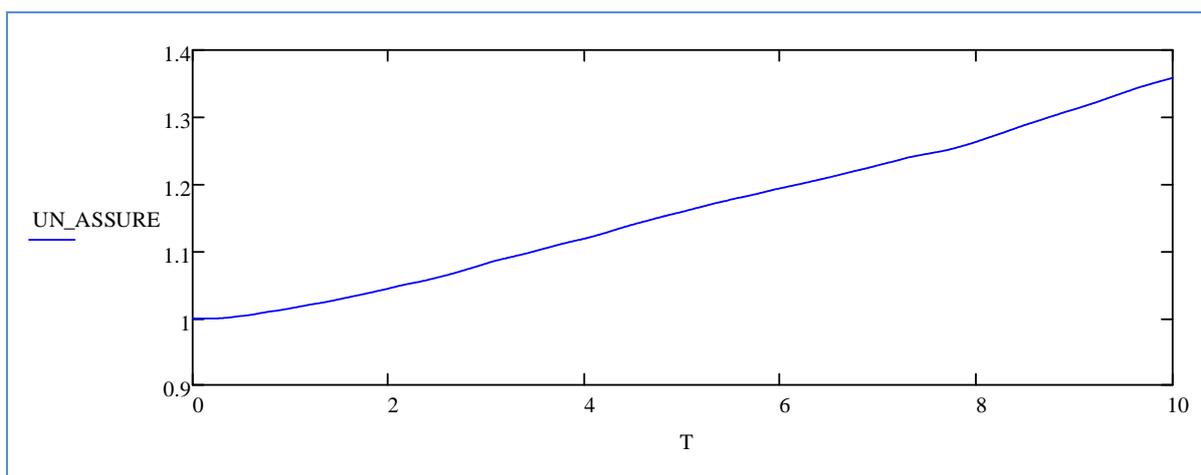


Fig 3.14 : Simulation de l'encours pour un assuré.

Dans cette simulation, le rendement moyen pour l'assuré est de 3,11%.

Ce chapitre a montré une difficulté de l'assurance vie : le mécanisme de protection des assurés (participation aux bénéfices) et du jeu concurrentiel (les rachats conjoncturels) entraîne un surcroît de prudence de la part de l'assureur. Le rendement des assurés s'en trouve diminué par rapport à ce qui aurait été obtenu avec le modèle de Merton, pour les mêmes actifs.

En dehors de la zone de perte (*cf. Fig. 3.11*), lorsque nous examinons la composition du portefeuille, nous observons une « zone de Merton » qui n'est « presque jamais » atteinte, où les rendements sont élevés et une zone intermédiaire que nous aurons aussi l'occasion d'observer au chapitre suivant.

## 4 UTILISATION DU MODULE DE MERTON GENERALISE DANS UN CAS DE GESTION DE PORTEFEUILLE D'ASSURANCE VIE

Nous disposons avec le chapitre 2 des outils qui nous permettent de travailler un cas concret : la gestion d'un portefeuille d'assurance vie avec une aptitude aux rachats de la part des souscripteurs.

Nous commençons par spécifier les caractéristiques d'un contrat type qui fait l'objet de nos calculs. Pour cela nous nous plaçons au 1<sup>er</sup> janvier d'une année  $t$ . Nous nous plaçons dans un modèle collectif et démarrons les calculs à un moment qui ne correspond pas à la date de lancement du contrat. Nous supposons de plus qu'il n'y a pas de collecte sur la période considérée et qu'ainsi nous pouvons prendre des rachats structurels constants. Nous formulons alors nos hypothèses concernant les rachats. Celles-ci prennent directement en compte les notes publiées par l'ACP au moment des exercices QIS4 et QIS5 [ONC4, ONC5].

Nous poursuivons par la description de la fonction d'efficacité que nous optimisons et discutons nos choix par rapports à d'autres possibilités de fonctions.

Nous continuons par une description globale de notre programme d'optimisation, sur la base des outils présentés au chapitre 2.

Nous terminons ce chapitre en décrivant les essais numériques qui sont effectués et en décrivant les résultats obtenus.

### 4.1 Un contrat type avec les éléments essentiels pour les calculs

#### 4.1.1 Gestion du portefeuille dans un modèle collectif

Les caractéristiques que nous présentons ci-après ont été élaborées avec un actuaire, le mentor du mémoire Alain Robidel, ayant joué le rôle d'expert. Dans cette description, nous nous plaçons au premier janvier d'une année  $t_0$  donnée avec un portefeuille dont le montant initial vaut  $X_0$ . Nous illustrons les formules avec un exemple, pour lequel nous prenons

$$X_0 = 100\,000.$$

Afin de mettre l'accent sur des différences qui pourraient exister avec des contrats existants, nous mettons clairement en valeur nos hypothèses en signalant leurs écarts éventuels avec un fonctionnement standard.

Nous commençons par formuler une hypothèse sur le caractère collectif de notre modèle.

#### **HYPOTHESE, CARACTERE COLLECTIF DU MODELE :**

***Le montant  $X_0$  est géré comme un tout, il représente, à la date  $t_0$  l'ensemble des contrats des souscripteurs, indépendamment de leur date de souscription. Cette date initiale ne correspond pas à la date de lancement du contrat.***

*Cette approche est cohérente avec la modélisation des rachats qui est adoptée par la suite et proposée dans les ONC QIS4 et QIS5 [ONC4, ONC5].*

#### 4.1.2 La PM et la PPB

Le montant  $X_0$  du portefeuille est entièrement destiné aux assurés. Il se décompose ainsi :

- Une provision mathématique  $PM$ , constituant un encours visible par les assurés. Il sert de base lors des calculs sur les taux garantis et les taux servis, ainsi que pour les montants acquis en cas de rachat.
- Une provision pour participation aux bénéfices  $PPB$  distribuée aux assurés dans un délai maximum de 8 ans. Elle est définie dans l'article R331-3 du code des assurances.

#### **HYPOTHESE SUR LA PPB :**

***Dans le cadre de ce mémoire, cette PPB est vue comme un tout : elle n'est pas décomposée par millésime***

*En revanche le document ONC du QIS5 demande une décomposition en millésime dans le cadre de simulations liées à Solvabilité 2 [ONC5].*

Nous supposons que le montant  $PPB$  représente, au 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $t$ , une proportion  $\mu$  de  $PM_t$ .

$$PPB = \mu PM$$
$$X_0 = (1 + \mu)PM.$$

*Un article paru dans l'AGEFI le 13 mars 2009 mentionne une PPB de l'ordre de 2.2% de la PM pour l'ensemble des contrats en euros gérés en France. Cette proportion a diminué en 2010, de nombreux assureurs distribuent l'ensemble de leurs bénéfices et ne gardent pas de PPB, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction (cf. Tab. 1.5).*

Par exemple, au 1<sup>er</sup> janvier  $t$ , si  $\mu = 3\%$ , nous avons dans notre cas :

$$PM = 97\ 087$$
$$PPB = 2\ 913.$$

#### 4.1.3 Taux minimum garanti

En début d'année, nous supposons que l'assureur propose et fait connaître un taux minimum garanti pour le contrat. En revanche, nous ne supposons pas de taux technique, cette pratique n'étant plus employée pour les nouveaux contrats.

Nous avons évoqué dans l'introduction que de nombreux assureurs ne publient pas ce taux en début d'année. Par ailleurs, d'autres assureurs considèrent qu'il est normal de garantir aux assurés un taux

minimum en cas de rachat en cours d'année. Par exemple, le taux minimum garanti du contrat AFER est égal à 75% de la moyenne des taux de rémunération du Fonds Garanti sur les deux exercices précédents, soit pour 2010, 3,18%. D'autres assureurs, dans leur publicité sur internet, ont mentionné – en tout petit, un taux garanti de l'ordre de 3,1%. Le code des assurances prévoit qu'il ne peut excéder 80% de la moyenne des taux de rendement des actifs financiers de la compagnie d'assurance calculés sur les deux derniers exercices. Par ailleurs, des taux minimum sont souvent proposés lors de promotions valables sur de courtes périodes, et sont supérieurs au taux minimum garanti destinés aux souscripteurs déjà présents. Afin d'éviter que ces taux promotionnels ne soient effectués au détriment des souscripteurs, un texte de loi, paru en août 2010, encadre l'emploi de ces taux (cf. introduction).

Actuellement, et dans le respect du code des assurances, le taux garanti proposé par un assureur dépend du passé, c'est à dire, des performances passées du portefeuille de l'assureur. Nous avons mentionné, dans le cas de processus continus (cf. le chapitre précédent) que les stratégies fondées sur des critères markoviens sont au moins aussi bonnes que des stratégies qui prennent en compte le passé. Cette remarque s'applique dans notre cas de figure et les stratégies markoviennes sont au moins aussi bonnes que les stratégies qui dépendent de la moyenne des performances passées.

#### **HYPOTHESE MARKOVIENNE :**

***Dans le cadre de ce mémoire, nous faisons les calculs dans un contexte Markovien. Nous n'imposons donc pas que les taux garantis en début d'année dépendent du passé.***

Par ailleurs, nous formulons l'hypothèse suivante :

#### **HYPOTHESE SUR LE TAUX GARANTI :**

***Nous supposons que le taux garanti reste borné dans un intervalle  $I$ . Cet intervalle est de la forme  $[0, g_{\max}]$ . Nous interprétons « à la lettre » l'article A132-3 du code des assurances et nous considérons que ce taux garanti constitue un minimum de la participation aux bénéfices.***

*En pratique, nous prendrons pour cette valeur maximale 4%.*

Soit  $g$  le taux garanti par l'assureur en début d'année. Les assurés « savent » qu'en fin d'année, le montant qui leur est destiné, PPB incluse, se décompose comme suit :

- Une « base » déjà existante  $B = PM + PPB$  qui nous sert de point de départ pour évaluer les bénéfices,
- Un montant minimal garanti de participation aux bénéfices  $g.PM$ .

Cela donne un montant « exigible » (dans un an ou au plus sous 8 ans)  $E$  valant :

$$E = (1 + \mu + g)PM = B + g.PM.$$

Si, en fin d'année, le montant du portefeuille est inférieur à cette somme, l'assureur est en situation de perte.

Supposons que  $g = 3,2\%$ , alors les assurés disposent en fin d'année, au titre de la PM et PPB incluse, d'un montant minimum de :

$$E = 103\,107 = 100\,000 + 3,2\% \cdot 97\,087.$$

Le montant minimal qui leur est garanti au titre de la participation aux bénéfices est de :

$$3,2\% \cdot 97\,087 = 3\,107.$$

#### 4.1.4 Frais de gestion, participation aux bénéfices, prélèvements sur encours

Une gestion saine d'activité doit générer un cash-flow pour l'assureur. Nous spécifions ici son calcul en prenant en compte les engagements envers les assurés ainsi que les divers prélèvements et frais.

Soit  $X_F$  le montant du portefeuille en fin d'année. Le montant destiné aux assurés (PM et PPB) l'année suivante  $t+1$  doit prendre en compte des prélèvements sur encours prévus par le contrat, une participation aux bénéfices ainsi que les frais de gestion.

Nous devrions supposer que les frais de gestion  $FG$  sont prélevés en début d'année, et qu'ils sont proportionnels à l'encours c'est à dire qu'il existe une constante  $\eta_G$  telle que :

$$FG_{théo} = \eta_G PM.$$

Afin de rassembler les calculs en fin d'année, nous les supposons proportionnels à  $X_F$  et nous posons (*la différence est minime*) :

$$FG = \eta_G X_F.$$

Nous supposons dans notre exemple que le rendement du portefeuille a été de 5,923% (*il s'agit d'une illustration qui ne correspond pas à la réalité de 2010 ou 2011*), soit :

$$X_F = 105\,924.$$

Supposons que :

$$\eta_G = 0,4\%.$$

L'assureur calcule la participation aux bénéfices et les prélèvements associés (*après déduction des frais de gestion*) sur la base de :

$$X'_F = (1 - \eta_G) X_F = 105\,500.$$

Ces données sont calculées à partir de l'« excédent » EX dégagé par le contrat, et qui vaut :

$$EX = X'_F - B = X'_F - (1 + \mu) PM.$$

Dans notre exemple, cela donne la valeur suivante :

$$EX = 5\,500.$$

La quasi-totalité des contrats d'assurance vie propose aujourd'hui des clauses de participation aux bénéfices. Les contrats AFER prévoient jusqu'à 100% de clause de PB. Nous supposons que notre contrat type contient une clause de participation aux bénéfices dont le complément vaut  $1 - \eta_B$  ainsi que des prélèvements sur encours de  $\eta_E$ . Pour les contrats en euros, des pourcentages de l'ordre 0,5% sont courants.

### HYPOTHESE SUR LES BENEFICES :

***L'assureur respecte le taux garanti annoncé, même en cas de perte. Si le bénéfice est insuffisant, le prélèvement sur en-cours devient inopérant, un taux minimum garanti pour l'année annoncé par l'assureur devenant contractuel. Eventuellement, dans ce cas, il n'y a pas de résultat pour l'assureur.***

Nous rappelons que nous désignons par  $x_+$  la quantité  $\max(0, x)$ , l'excédent (bénéfice avant prélèvement sur encours) qui sert de base de calcul de la PB vaut :

$$EX_+ = \{X'_F - (1 + \mu)PM\}_+.$$

La PM avant participation aux bénéfices en fin d'année valant  $(1 + g)PM$ , le prélèvement sur encours vaut, s'il est effectivement prélevé :

$$\eta_E(1 + g)PM.$$

La PB vaut, après prise en compte des prélèvements sur encours et du taux minimum garanti :

$$PB = \max(g.PM, (1 - \eta_B)\{X'_F - (1 + \mu)PM\}_+ - \eta_E(1 + g)PM).$$

Dans notre exemple, supposons que :

$$1 - \eta_B = 95\%, \quad \eta_E = 0,5\%.$$

Nous rappelons que l'excédent vaut :

$$EX = 5\,500$$

Nous calculons la participation aux bénéfices comme suit :

$$PB_{\text{avant prélèvement}} = 95\% * 5\,500 = 5\,225$$

$$PEC = -0,5\%.(1 + g)PM = -501$$

$$PB = 4\,724$$

Ce montant couvre largement le taux garanti soit 3 107.

Le montant total destiné aux assurés en début d'année t+1 vaut alors :

$$X_A = (1 + \mu)PM + PB = (1 + \mu)PM + \max(g.PM, (1 - \eta_B)\{X'_F - (1 + \mu)PM\}_+ - \eta_E(1 + g)PM).$$

L'assureur, quant à lui, dégage un résultat (cash flow) de :

$$CF = (X'_F - X_A)_+.$$

Dans notre exemple, cela donne :

$$X_A = 104\,724$$

$$CF = 776.$$

Remarque : Nous n'ajoutons pas d'autres contraintes sur le calcul du résultat, qui auraient pu exister lors de la prise en compte complète d'un bilan. L'aspect de la figure 4.1 ci-dessous est suffisamment général dans le cadre de notre étude.

**PROPRIETE :**

**La quantité  $X_A$  est une fonction linéaire par morceaux de  $X_F$  de même que  $CF$ . Ces fonction sont de plus homogènes de degré 1 par rapport à  $X_F$  et  $PM$ .**

Les formules, que nous ne calculons pas ici, sont résumées dans le tableau suivant (Tab 4.1):

Toutes les formules sont linéaires par rapport au montant du portefeuille et à la provision mathématique.

	$(1 - \eta_G)X_F$ $\leq (1 + \mu + g)PM$	$(1 + \mu + g)PM < (1 - \eta_G)X_F$ $\leq (1 + \mu + \frac{g}{1 - \eta_B} + \frac{1 + g}{1 - \eta_B} \eta_E)PM$	$(1 - \eta_G)X_F \geq$ $(1 + \mu + \frac{g}{1 - \eta_B} + \frac{1 + g}{1 - \eta_B} \eta_E)PM$
<i>CF</i>	0	$(1 - \eta_G)X_F - (1 + \mu + g)PM$	$\eta_B(1 - \eta_G)X_F$ $- \eta_B(1 + \mu)PM$ $+ \eta_E(1 + g)PM$
<i>PB</i>	0	0	$(1 - \eta_B)(1 - \eta_G)X_F$ $- (1 - \eta_B)(1 + \mu)PM$ $- \eta_E(1 + g)PM$
<i>E (dû sous 8 ans max)</i>	$(1 + \mu + g)PM$	$(1 + \mu + g)PM$	$(1 + \mu + g)PM$
$X_A$	$(1 + \mu + g)PM$	$(1 + \mu + g)PM$	$(1 - \eta_B)(1 - \eta_G)X_F$ $+ \eta_B(1 + \mu)PM$ $- \eta_E(1 + g)PM$

Tab 4.1 : Le cash-flow, la participation aux bénéficiaires, l'excédent à distribuer ainsi que le nouveau montant destiné aux assurés.

Le graphique suivant (Fig 4.1) montre l'évolution de *CF* en fonction de  $X_F$ , dans le cadre de notre exemple. Nous voyons que le prélèvement sur encours apporte un profit à l'assureur dès que les conditions le permettent.

Le prélèvement sur en-cours garantit à l'assureur un revenu minimum dès que la performance du portefeuille le permet.

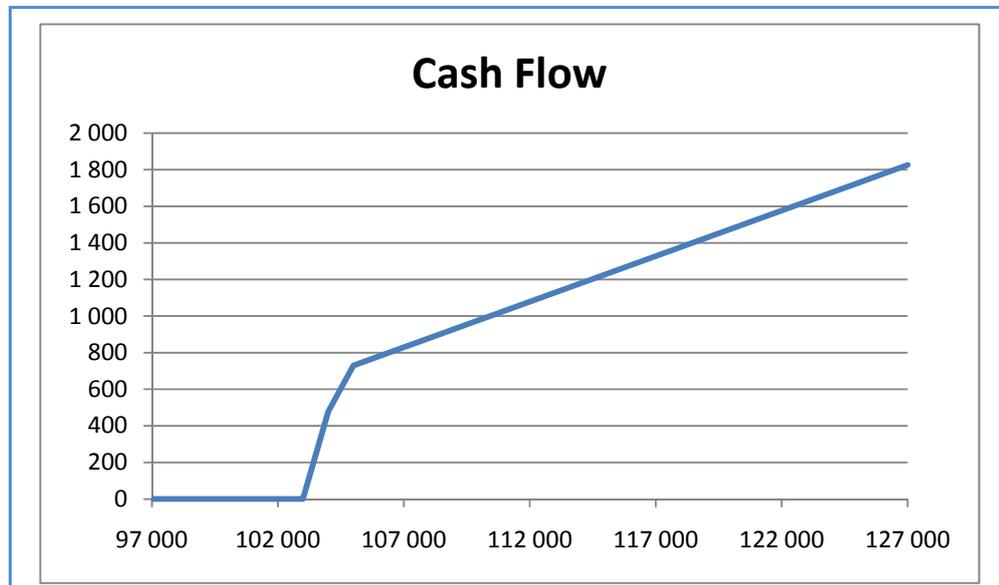


Fig 4.1 : Cash-flow en fonction de  $X_p$ .

#### HYPOTHESE :

*Le résultat est réputé sorti du portefeuille en fin d'année  $t$ . Il est destiné à représenter la performance du portefeuille du point de vue de l'assureur.*

Nous discutons plus bas ce choix. Concrètement, cela signifie que nous avons le schéma ci-dessous (Fig 4.2).

Si nous gardions le résultat dans le portefeuille, celui-ci pourrait être amené à jouer le même rôle que la PPB : servir de tampon en cas de perte. Dans notre choix, nous séparons d'une part un résultat explicitement destiné aux assureurs et d'autre part une PPB explicitement destinée aux assurés.

Dans la discussion que nous menons plus bas, nous montrons de plus que nous sommes dans une situation exceptionnelle où ce cash-flow représente aussi la performance du point de vue des assurés.

Notre approche effectue une séparation nette entre la PPB, qui peut être employée pour les performances futures vis à vis des assurés, et les éléments du résultat, destinés à rester chez l'assureur.

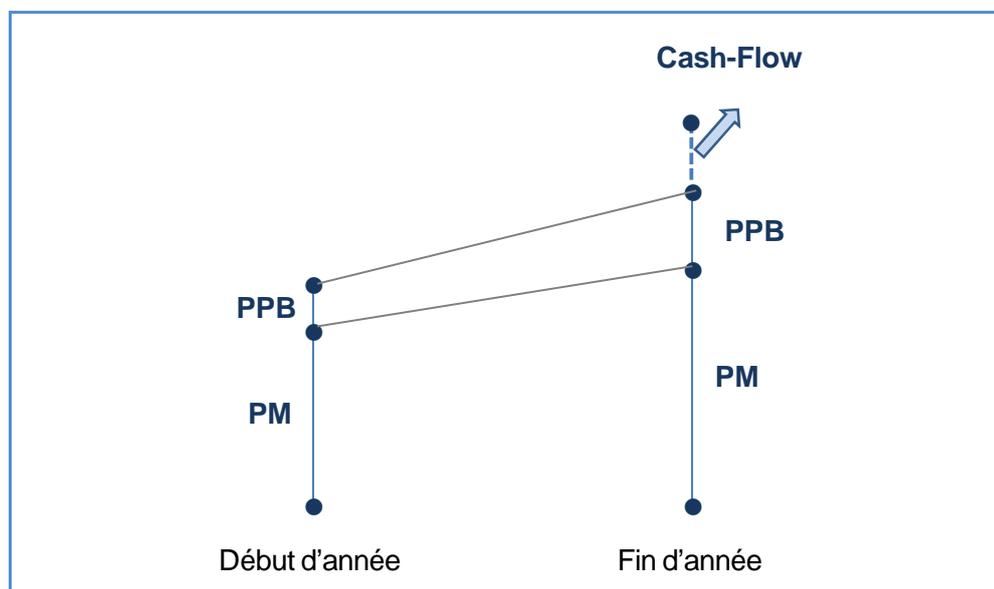


Fig 4.2 : Principe de séparation entre le résultat et la PPB.

#### 4.1.5 Le taux servi aux assurés

Toutes les opérations sont rassemblées en début ou en fin d'année

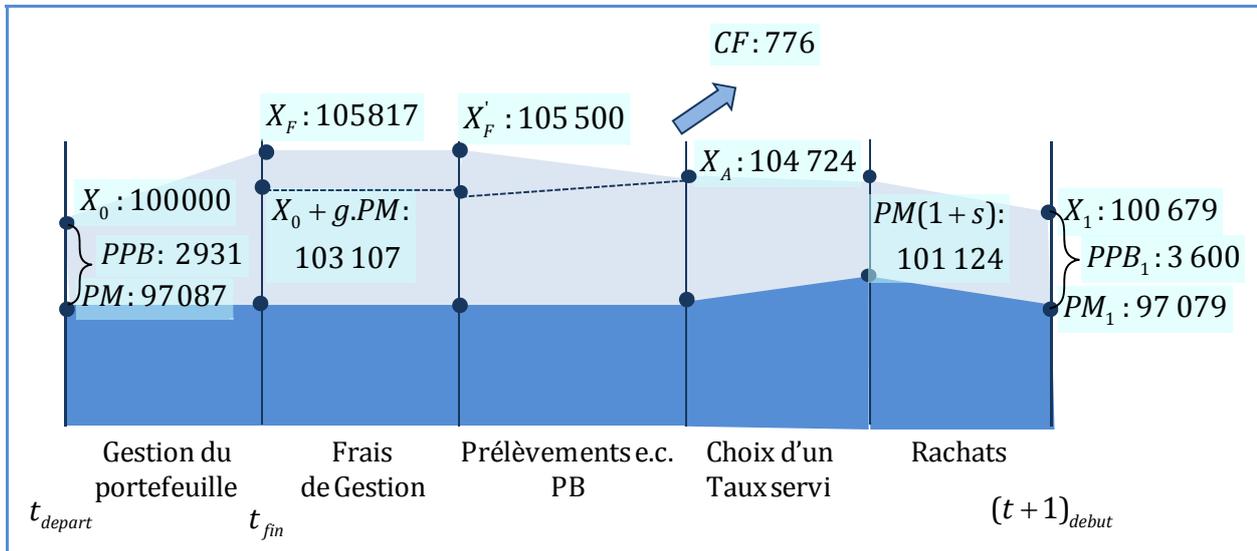


Fig 4.3 : Evolution du portefeuille et de la PM.

Dans le schéma précédent (Fig 4.3), nous avons désigné par  $t_{fin}$  le moment en fin d'année où la performance du portefeuille est connue, mais où toutes les opérations permettant de démarrer le début de l'année suivante doivent encore être effectuées (prélèvement du cash-flow, participation aux bénéfices, choix du taux servi, cf. la section 2.3).

A partir du montant  $X_A$ , l'assureur choisit le montant effectivement affecté à la provision mathématique  $PM_A$ , supérieur ou égal évidemment à  $(1+g)PM$ . La différence avec  $X_A$  constitue la PPB pour la nouvelle année. En fonction de ce nouveau montant, il peut être amené à prélever sur la PPB de l'année précédente.

**En fonction du taux servi, le montant de la PPB varie d'une année sur l'autre.**

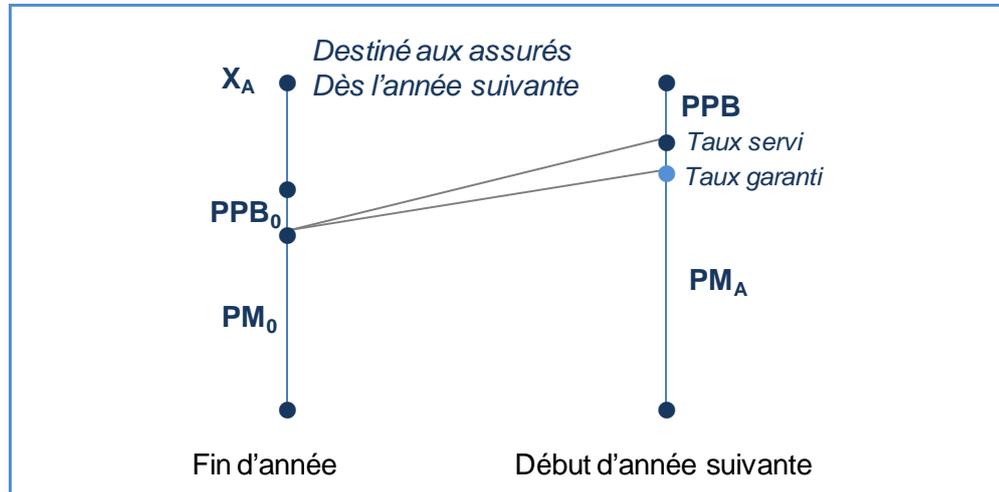


Fig 4.4 : Evolution de la PM et de la PPB.

Le montant  $PM_A$  est connu des assurés et leur permettent de juger de la performance de leur contrat. Le taux servi vaut en effet :

$$s = \frac{PM_A}{PM} - 1.$$

La nouvelle PPB est représentée par un nouveau coefficient  $\mu_A$  qui vérifie :

$$PM_A(1 + \mu_A) = X_A.$$

Deux situations extrêmes et une situation intermédiaire sont présentées, dans le cadre de notre exemple :

- Dans un premier cas, aucune PPB n'est distribuée, le taux servi est le taux minimal.
- Dans un deuxième cas la totalité de la PPB est distribué et la totalité du bénéfice va à la PM.
- Le troisième cas présente une situation intermédiaire.

Ces cas sont résumés dans le tableau suivant (Tab 4.2):

### Trois manières de gérer la PPB et le taux servi aux assurés

	<b>Cas 1 : PPB max</b>	<b>Cas 2 : PPB nulle</b>	<b>Cas 3 : intermédiaire</b>
PM à t	<b>97 087</b>	<b>97 087</b>	<b>97 087</b>
Portefeuille à t+1	<b>104 724</b>	<b>104 724</b>	<b>104 724</b>
Taux servi	<b>3,2%</b>	<b>7,87%</b>	<b>4,16%</b>
PM à t+1	<b>100 194</b>	<b>104 724</b>	<b>101 124</b>
PPB à t+1	<b>4 530</b>	<b>0</b>	<b>3 600</b>
PPB, % de la PM	<b>4,67%</b>	<b>0%</b>	<b>3,71%</b>

*Tab 4.2 : Scénarios de PPB et de taux servis.*

Dans le troisième cas, cela donne les bilans et les comptes de résultats simplifiés suivants, avec une hypothèse de 4% de fonds propres :

### Un bilan simplifié avec un minimum de fonds propres, en début d'année

<b>Placements : 104 000</b>	<b>Fonds propres : 4 000</b>
	<b>PPB : 2 913</b>
	<b>PM : 97 087</b>

*Tab 4.3 : Bilan simplifié en début d'année*

### Un compte de résultats simplifié

<b>Primes, collecte</b>	<b>0</b>
<b>Produits financiers</b>	<b>6 049</b>
<b>Frais de gestion</b>	<b>- 317</b>
<b>Dotation aux PM (taux servi 4,17%)</b>	<b>- 4 037</b>
<b>Dotation à la PPB</b>	<b>- 687</b>
<b>Résultat</b>	<b>1 008</b>

Tab 4.4 : Compte de résultat de l'année en cours

Le résultat de **1 008** s'interprète de la manière suivante dans notre modèle :

Rémunération des fonds propres (non comptés dans le Cash-flow) : **232**

Cash-flow généré par l'activité : **776**

Cette interprétation doit permettre à l'assureur de séparer les contraintes concernant la manière de placer et rémunérer les fonds propres, notamment la marge de solvabilité dans l'optique Solvency 2.

Le bilan simplifié en fin d'année est alors le suivant, s'il n'y a pas de rachats :

### Un bilan simplifié en fin d'année

<b>Placements : 109 732</b>	<b>Fonds propres : 5 008</b>
	<i>Incluant les résultats</i>
	<b>PPB : 3 600</b>
	<b>PM : 101 124</b>

Tab 4.5 : Bilan simplifié en fin d'année

#### 4.1.6 Les comportements de rachats

Dans les contrats d'assurance-vie, les rachats sont de deux types.

- Les rachats structurels,
- les rachats conjoncturels.

Les rachats structurels sont liés au cycle de vie du contrat et sont normaux. Ils correspondent à la réalisation des projets des souscripteurs (immobilier, retraite, ...) ainsi qu'aux fins de périodes concernant les avantages fiscaux. Le calibrage des comportements de rachats est réputé complexe. Il est courant de considérer que, sur une année donnée, les rachats structurels sont constants d'environ 5%.

#### **HYPOTHESE SUR LES RACHATS STRUCTURELS :**

***En fin d'année, les rachats structurels  $R_{STRUCT,t}$  sont constants et dépendent des scénarios qui sont joués (variante : éventuellement négatif dans le cadre d'un développement d'affaire).***

Les rachats conjoncturels dépendent, quant à eux, des conditions économiques. La note [ONC5] propose de modéliser la satisfaction des souscripteurs entre le taux effectivement servi durant une année et le taux long. Pour modéliser ce type de rachat, les spécifications techniques du QIS5 recensent plusieurs modèles [QIS5]. Nous nous appuyons sur les notes ONC publiées dans le cadre des QIS4 et QIS5 qui propose de comparer le taux servi par le portefeuille d'assurance-vie avec le taux des emprunts d'état au moment du rachat potentiel. En exploitant cette différence, l'ACP (alors l'ACAM) a publié dans ces notes des comportements que nous reprenons.

Plus précisément, les rachats conjoncturels  $R_{CONJ,t}$  dépendent de l'écart entre le TME et le taux servi  $s$ .

Le TME est pris comme le taux OAT à 10 ans. Ce dernier, dans le cas de  $r$  variable, peut être déduit de  $r$  dans le modèle de Hull-White à un facteur (cf. l'annexe du Chapitre 2). Notons le  $s_{10}$ .

Le facteur  $R_{CONJ,t}$  est alors calculé selon la note de l'ACP [ONC4, ONC5]. C'est une fonction linéaire par morceaux, dépendant de  $s - s_{10}$  définie ainsi, où  $\alpha_{RC}, \beta_{RC}, \gamma_{RC}, \delta_{RC}, RC_{\min}$  et  $RC_{\max}$  sont des constantes :

$$R_{CONJ,t} = \begin{cases} RC_{\max} & \text{si } s - s_{10} < \alpha_{RC} \\ RC_{\max} \frac{s - s_{10} - \beta_{RC}}{\alpha_{RC} - \beta_{RC}} & \text{si } \alpha_{RC} \leq s - s_{10} \leq \beta_{RC} \\ 0 & \text{si } \beta_{RC} \leq s - s_{10} \leq \gamma_{RC} \\ RC_{\min} \frac{s - s_{10} - \gamma_{RC}}{\delta_{RC} - \gamma_{RC}} & \text{si } \gamma_{RC} \leq s - s_{10} \leq \delta_{RC} \\ RC_{\min} & \text{si } \delta_{RC} < s - s_{10} \end{cases}$$

Les valeurs des constantes sont celles des QIS4 et QIS5.

Les valeurs prise pour le QIS5 encadrent celles du QIS4.

	<b>QIS5 mini</b>	<b>QIS4</b>	<b>QIS5 maxi (le plus sévère)</b>
$RC_{\min}$	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>
$RC_{\max}$	<b>-6%</b>	<b>-5%</b>	<b>-4%</b>
$\alpha_{RC}$	<b>-6%</b>	<b>-5%</b>	<b>-4%</b>
$\beta_{RC}$	<b>-2%</b>	<b>-1%</b>	<b>0%</b>
$\gamma_{RC}$	<b>1%</b>	<b>0,5%</b>	<b>1%</b>
$\delta_{RC}$	<b>2%</b>	<b>3%</b>	<b>4%</b>

Tab 4.6 : Les comportements de rachats conjoncturels des exercices QIS4 et QIS5.

**Les rachats conjoncturels dépendent de l'écart entre le taux servi et le TME.**

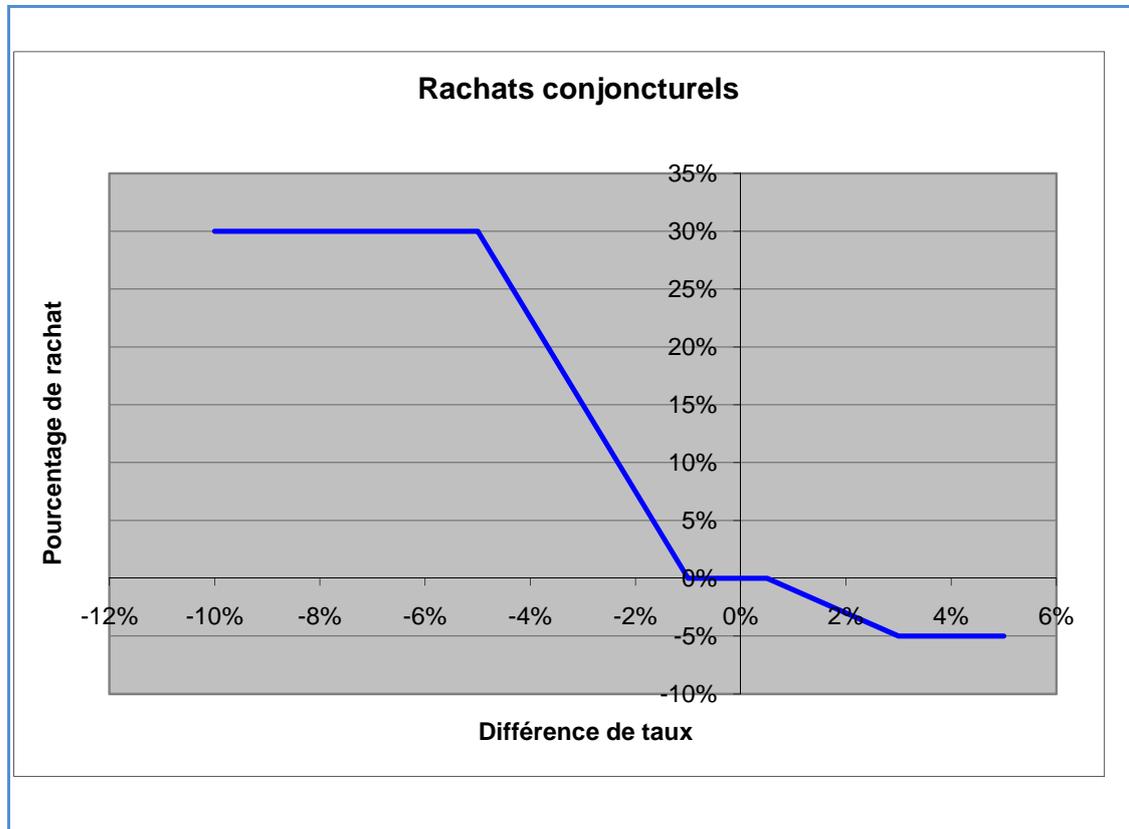


Fig 4.5 : Graphe dans le cadre du QIS4.

Le taux de rachat vaut alors, [ONC5] :

$$R_t = \min(1, \max(0, R_{STRUCT,t} + R_{CONJ,t})).$$

**HYPOTHESE :**

*Dans le cadre du mémoire, nous considérons que les souscripteurs peuvent effectuer ou des rachats sans pénalité « à tout moment », c'est à dire, conformément à la note publiée par l'ACP, que ces rachats sont annuels.*

Ainsi, en fonction du taux servi, les assurés manifestent leur satisfaction ou leur mécontentement en procédant à des rachats sur les contrats. Soit  $R$  ce taux de rachat.

**HYPOTHESE SUR LES RACHATS:**

*Nous supposons que les rachats effectués en fin d'année, après connaissance du taux servi  $s_t$ , sont calculés sur la base de la nouvelle provision mathématique  $PM_A$ . Un assuré qui procède à*

**des rachats ne profite donc pas de la PPB. En revanche nous rappelons qu'il n'y a pas de pénalité lors des rachats.**

Remarque : Cela signifie que nous acceptons le fait que les assurés attendent la fin de l'année et le taux servi pour manifester leur mécontentement ou leur satisfaction. A la limite, un assureur qui se calerait en début d'année sur le taux d'épargne ne serait pas sanctionné par ses clients, pour peu qu'il puisse servir en fin d'année un taux compétitif.

La situation au début de l'année t+1 est alors la suivante :

$$X_1 = X_A - R(1+s)PM,$$

$$PM_1 = (1-R)(1+s)PM,$$

Et  $\mu_1$  vérifie :

$$(1 + \mu_1)PM_1 = X_1.$$

La propriété suivante se déduit immédiatement de ces formules.

#### **PROPRIETE :**

**Les quantités  $X_1$  et  $PM_1$  sont linéaires par morceau, et homogènes de degré 1 par rapport à  $XF$  et  $PM$ . Les coefficients dépendent de  $\mu$ ,  $g$  ainsi que de  $s$  ou  $\mu_1$ .**

Par exemple, plaçons-nous dans la situation intermédiaire du tableau précédent et supposons que les rachats sont de **4%** du montant de la nouvelle **PM** (*montant à priori arbitraire*). Nous avons alors les données suivantes :

<b>Montant racheté :</b>	<b>4 045</b>
<b>Nouveau portefeuille :</b>	<b>100 688 <math>\cong</math> 104 734 - 4 045</b>
<b>PM nouvelle :</b>	<b>97 088 <math>\cong</math> 101 134 - 4 045</b>
<b>PPB (inchangée) :</b>	<b>3 600.</b>

Au 1<sup>er</sup> janvier t+1, l'assureur peut à nouveau annoncer un taux garanti minimal pour l'année t+1.

Nous avons décrits les mécanismes de notre contrat type en rassemblant toutes les opérations soit en début d'année soit en fin d'année de manière à permettre, en cours d'année, la gestion du portefeuille avec ce que nous avons appelé au chapitre 2 le « Module de Merton Généralisé ».

Après avoir rappelé quelles sont les variables de contrôle de notre problème, nous présentons et discutons le choix de la fonction d'efficacité qui est adoptée ici. A noter que nous ne travaillons pas sur un bilan, ce que demanderait une simulation Solvency 2, mais sur un portefeuille ; et que nous effectuons un net distinguo entre les résultats destinés à l'assureur et la PPB – alors que cette dernière pourrait être interprétée comme quasi fonds propres et servir d'amortisseur dans les calculs Solvency 2.

Ensuite, nous présentons le déroulement général des calculs en faisant appel aux outils présentés au chapitre 2 et terminons ce chapitre par une description des essais effectués.

## 4.2 Les variables de contrôle

La section précédente nous montre que par rapport au modèle initial de Merton et indépendamment du critère choisi pour mesurer la performance du portefeuille, l'assureur peut piloter son activité de la manière suivante :

- La gestion du portefeuille, telle que définie au chapitre 2,
- Le choix d'un taux garanti en début d'année,
- Le rapport PPB / PM en début d'année, qui dépend du taux servi.

Si nous reprenons un langage mathématique, une stratégie  $U$  est la donnée :

- De fonctions  $\alpha_s$  et  $\beta_s$  représentant à chaque instant  $s$  la composition des portefeuilles en une obligation de type sliding bond tel que présenté au chapitre 2, et un actif risqué, ces coefficients sont bornés pour interdire les emprunts, interdire les ventes à découvert et borner le pourcentage autorisé en actions (*cf. fig. 2.15*),
- De la donnée de taux garantis  $g_0, \dots, g_{T-1}$ , en début d'année,
- De la donnée de proportions de PPB  $\mu_0, \dots, \mu_{T-1}$  en début d'année, avec  $\mu_0 = 0$ .

## 4.3 Les critères de performance

### 4.3.1 Le choix des critères de performance

Afin de juger les stratégies qui sont adoptées par l'assureur, nous proposons de faire intervenir le cash-flow  $CF_t$  dégagé en fin d'année  $t - 1$  pour mesurer les performances de ces stratégies. En effet, un cash-flow élevé signifie :

- Un bon résultat pour l'assureur,
- une bonne participation aux bénéfices pour les souscripteurs ainsi qu'une bonne performance du portefeuille, ce cash-flow n'étant qu'une partie de la PB,
- une satisfaction relative des souscripteurs, qui n'ont pas procédé à trop de rachats avant cette date et qui ont laissés des fonds permettant le résultat en question (nous avons déjà mentionné ce fait exceptionnel au chapitre 3).

Nous proposons aussi de faire intervenir un coefficient d'aversion au risque  $\gamma$  compris entre 0 et 1.

Nous proposons de prendre en compte la ruine de l'assureur ainsi : En dessous d'un certain seuil  $S_R$  le processus est arrêté et l'efficacité est mise à 0. Nous exigeons en fin de chaque année, après les rachats :

$$X \geq S_R \cdot (1 + \mu) PM.$$

Ce seuil est pris en considérant que la marge de solvabilité doit pouvoir couvrir les pertes. Dans le cadre de Solvabilité 1, cette marge doit être au moins égale à 4% des Provisions Mathématiques. Dans la mesure où de nombreuses Sociétés d'Assurance affichent des marges de solvabilité supérieures, nous tolérons un seuil  $S_R$  à 92%. Nous faisons des essais avec d'autres valeurs de  $S_R$ . Remarquons que, en cas d'insolvabilité les cash-flows futurs sont oubliés.

En cas de ruine,  $t$  devient un temps d'arrêt que nous notons  $T_{ruine}$ .

Il y a deux autres possibilités pour définir notre fonction de valeur, que nous n'adoptons pas, mais que nous présentons ici.

La première possibilité consiste à prendre en compte les gains des assurés avec les gains de l'assureur. Au lieu de prendre  $CF^\gamma$ , nous prendrions une pondération de  $CF^\gamma$  et de  $(s \cdot PM)^\gamma$ , où  $s$  est le taux servi aux assurés. Dans notre cas, si nous ne prenons pas de précaution, en raison de l'existence d'un taux garanti, nous pouvons nous trouver avec une utilité élevée, même en cas de perte. Nous sommes alors contraints, soit de diminuer fortement la pondération afférente aux assurés, soit de pénaliser les pertes, au risque d'inviter les assureurs à un excès de prudence, au détriment des assurés.

La deuxième possibilité est de s'inspirer de l'article de D. Hainaut. Nous démarrerions avec des fonds propres  $FP$ , et laisserions le résultat dans le bilan. Nous aurions dans le bilan la PM, la PPB et les FP.

Pour mesurer la performance du portefeuille, nous prendrions en compte :

- les gains des assurés :  $\sum (s_t PM_t)^\gamma$ ,
- la richesse finale de l'assureur en fin de période :  $FP_T^\gamma$ .

Dans cette approche, nous ne donnons plus de rôle particulier à la PPB car les Fonds Propres peuvent servir de « tampon » pendant les périodes intermédiaires.

#### 4.3.2 Définition de la fonction de valeur

Nous travaillons sur un horizon fini en années  $T$  (typiquement 8 ans).

À l'instant  $t=0$ , un montant  $PM_0$  est placé sur notre contrat type et nous démarrons  $X_0 = PM_0$ .

Juste avant le début de l'année  $t$ , soit à la fin de l'année  $t-1$ , un cash-flow  $CF_t$  est dégagé, avec une efficacité (ou utilité)  $CF_t^\gamma$ . Cette efficacité est actualisée en continu afin d'être mesurée en 0, et nous choisissons d'actualiser au taux  $\gamma r_t$  où  $r_t$  est le taux spot. L'efficacité en 0 de  $CF_t$  vaut donc :

$$\exp\left(-\int_0^t \gamma r_s ds\right) CF_t^\gamma = \left\{ \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) CF_t \right\}^\gamma$$

Cette quantité dépend :

- De la manière dont est géré le portefeuille,
- Des taux garantis  $g_0, \dots, g_{t-1}$  aux débuts des années qui précèdent  $t$ ,
- Des proportions de PPB  $\mu_0, \dots, \mu_{t-1}$  aux débuts de ces mêmes années,

c'est à dire des stratégies définies précédemment.

La quantité qui nous intéresse, et qui constitue la fonction de valeur de notre stratégie, vaut donc :

$$\sum_{t=1}^{T \wedge T_{\text{ruine}}} \exp\left(-\int_0^t \gamma r_s ds\right) CF_t^\gamma.$$

En désignant par  $X_t$  la valeur du portefeuille en  $t$  et  $PM_t$  la valeur de la provision mathématique au début de l'année, la fonction de valeur que nous allons étudier vaut :

$$J(t, x, m, r) = \underset{(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{g}, \underline{\mu}) \in \mathcal{U}}{\text{Max}} E\left(\sum_{u=\inf([t, T] \cap \mathbb{N})}^{T \wedge T_{\text{ruine}}} \exp\left(-\int_t^u \gamma r_s ds\right) CF_u^\gamma \mid X_t = x, PM_t = m, r_t = r\right).$$

Cette fonction doit respecter aussi la condition finale suivante, qui signifie que tous les profits sont générés entre 0 et T :

$$J(T, x, m, r) = 0,$$

Ainsi que la condition initiale suivante, correspondant à une absence de PPB au tout début des opérations :

$$\mu_0 = 0.$$

Nous avons vu au paragraphe 4.1.4 que la quantité  $CF$  est homogène de degré 1 en les variables  $x$  et  $m$ . Par conséquent :

#### **PROPRIETE :**

**La fonction  $J$  vérifie, pour tout  $t, x, m, r$  :**

$$J(t, x, m, r) = m^\gamma J\left(t, \frac{x}{m}, 1, r\right).$$

Soient une stratégie donnée déterminée par  $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{g}, \underline{\mu}$  et une constante  $K$ . Si nous démarrons nos processus avec :

$$X_{0, \text{nouveau}} = K.X_0, \quad PM_{0, \text{nouveau}} = K.PM_0,$$

Alors, à chaque étape, c'est à dire en chaque fin d'année, nous avons :

$$CF_{u, \text{nouveau}} = K.CF_u.$$

Les efficacités sont donc multipliées par  $K^\gamma$  ce qui permet de conclure.

Cela permet de simplifier les procédures de calculs en ne les faisant intervenir que sur l'une des deux variables. De manière pratique, nous effectuons les calculs en fixant à 100 l'engagement total de l'assureur (PM et PPB) envers les assurés à l'instant  $t = 0$ .

Nous venons de spécifier la fonction de valeur que nous étudions ainsi que les règles de calcul qui s'y rapportent – notamment sur les opérations en fin d'année concernant la prise en comptes des frais, prélèvement de la distribution de participation aux bénéfices. Le chapitre 2 a présenté les outils nécessaires pour effectuer les calculs.

Dans la section suivante, nous montrons comment sont déroulés les calculs par un programme informatique.

#### 4.4 Le déroulement des programmes d'optimisation

Le principe du calcul de la fonction d'efficacité consiste à remonter dans le temps, en déroulant les étapes opérationnelles que nous avons présentées au chapitre 2 et que nous rappelons brièvement dans ce schéma suivant (Fig 4.6) inspiré de la figure 2.4 :

**A chaque instant / étape, les choix sont effectués en « connaissance du futur ».**

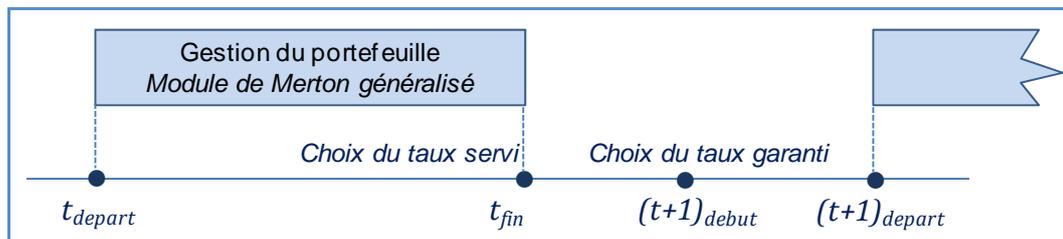


Fig 4.6 : Les grandes étapes des calculs.

Les calculs reviennent à exécuter pour chaque choix d'un taux garanti  $g$ , d'une proportion de PM affectée à la PPB  $\mu$ , et une année  $t$  donnée, le module de Merton Généralisé présenté au chapitre 2.

Comme la fonction  $J$  est homogène, une fois les trois données précédentes fixées, il suffit de dérouler ce module une seule fois, par exemple en fixant à 100 le total  $PM + PPB$  en début de période.

Concrètement, nous discrétisons  $g$  par pas de 0.25% et 0 à 4%, soit 17 valeurs. Pour  $\mu$ , en raison des faibles valeurs pratiquées par une grande partie de la profession, nous travaillons avec 2 valeurs, 0% et 3% et procédons quand il le faut par interpolation linéaire. Dans ce contexte, le module est déroulé 34 fois pour chaque année. Sur 8 ans, le module est déroulé 272 fois.

Pour une année  $t$  donnée, ainsi que  $g$  et  $\mu$  fixés, le schéma suivant montre comment est initialisé le Module de Merton Généralisé – qui suppose que tous les calculs de l'année  $t + 1$  ont été effectués.

**Pour employer le Module de Merton Généralisé, nous supposons connus le taux garanti et la PPB en début d'année et supposons disponibles les éléments permettant le calcul des opérations en fin d'année.**

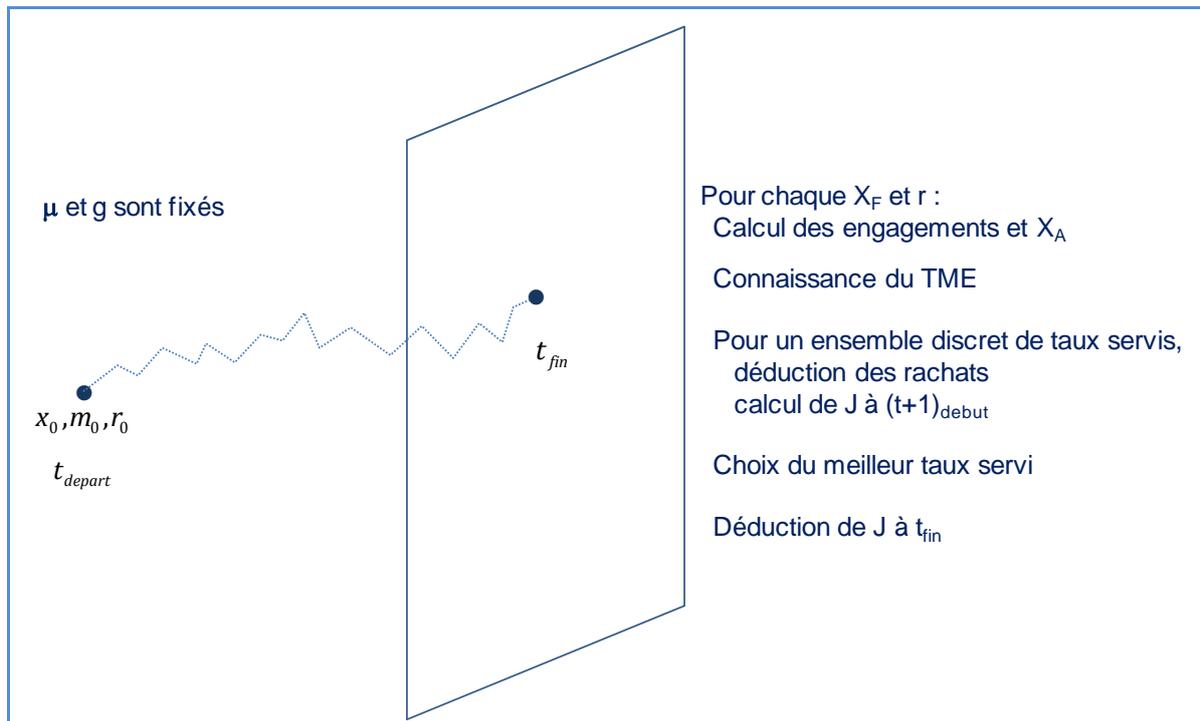
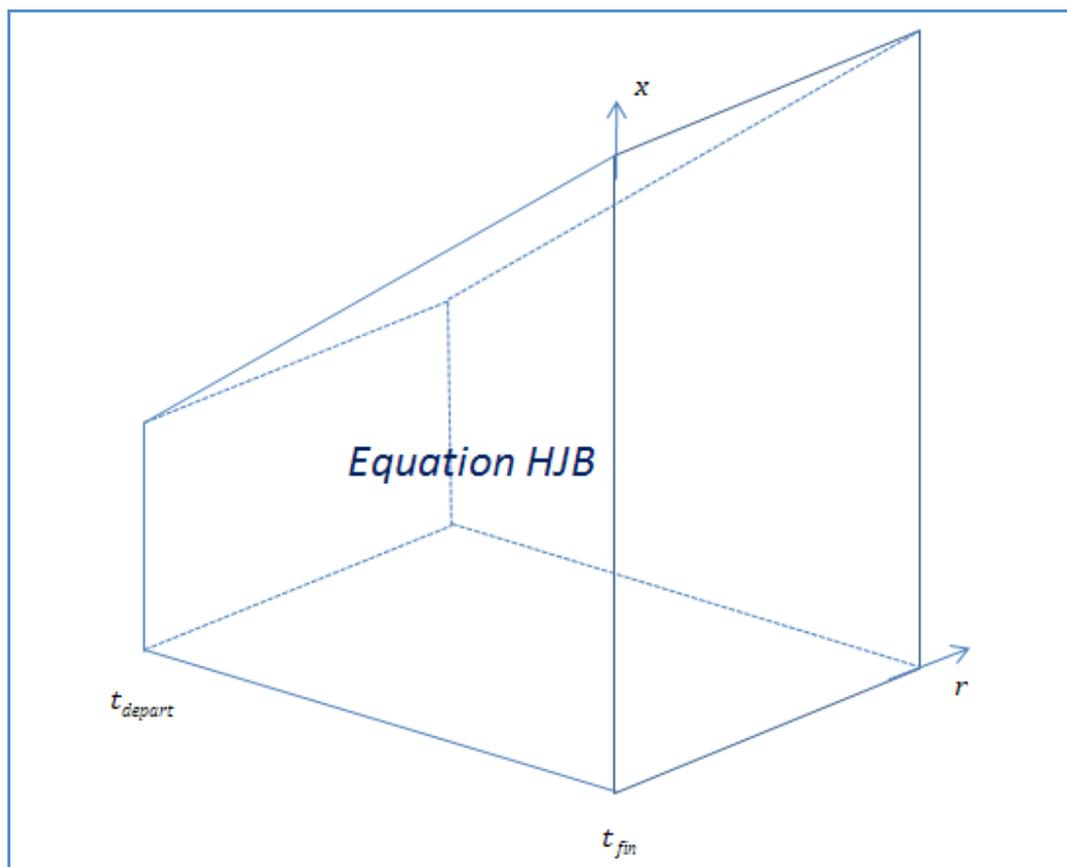


Fig 4.7 : Contexte de l'emploi du Module de Merton Généralisé.

Au démarrage des calculs, c'est à dire en fin de période, l'utilité est initialisée à 0.

Une fois l'initialisation des valeurs effectuées en fin d'année (ce que nous avons appelé  $t_{fin}$ ), nous employons l'équation HJB du module de Merton Généralisé pour en déduire la valeur de  $J$  à  $t_{depart}$  pour notre choix de  $g$  et  $\mu$ .

**Le Module de Merton généralisé emploie un algorithme de type « éléments finis » pour résoudre l'équation HJB.**



*Fig 4.8 : Le Module de Merton Généralisé.*

Comme nous utilisons des éléments finis pour effectuer les calculs, nous obtenons ces valeurs pour un ensemble discrétisé des valeurs du portefeuille et des valeurs du taux spot.

Nous déroulons le module avec le maillage suivant :

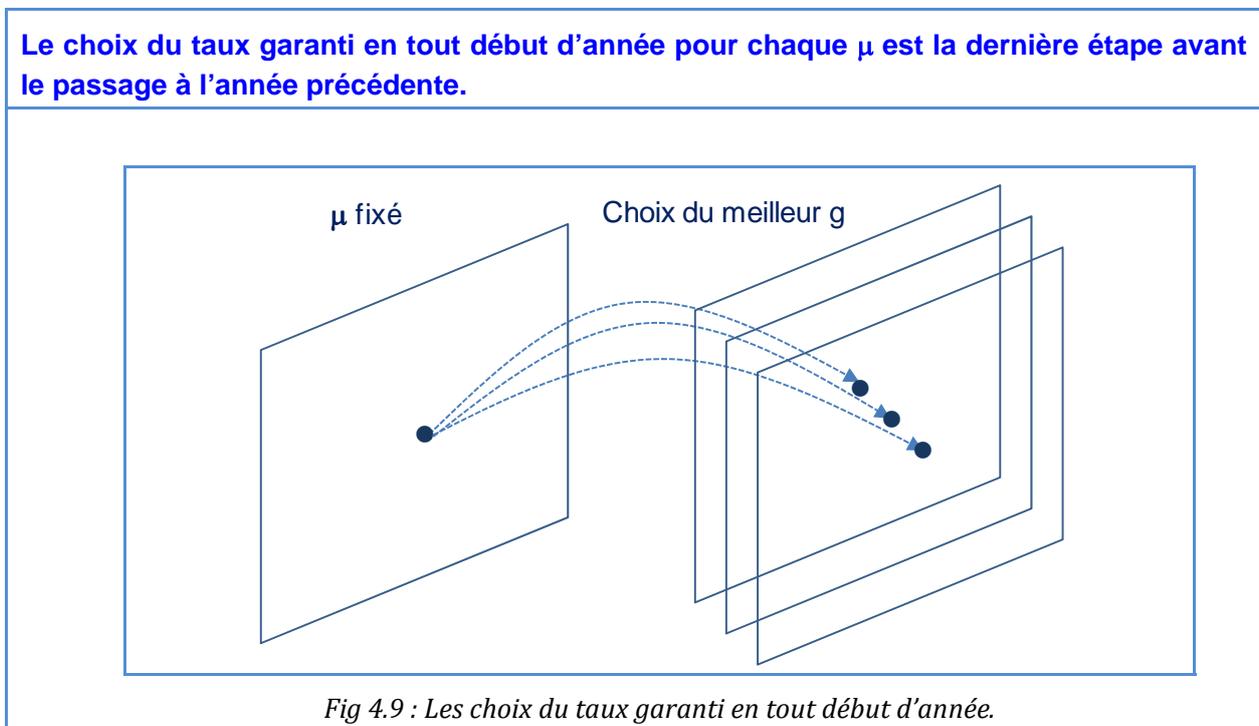
$$\Delta t = \frac{1}{52}$$

$$\Delta x = \max(\sigma, \tau) \sqrt{3\Delta t}$$

$$\Delta r = \eta \sqrt{3\Delta t}$$

A  $t_{depart}$  nous prenons une dizaine de valeur pour  $x$ , et le maillage en  $x$  se poursuit en respectant le principe d'un arbre trinomial. Nous faisons varier  $r$  dans un intervalle de -4% à 16% pour les tests les plus détaillés.

Pour l'année  $t$ , une fois que nous avons déroulé le Module de Merton Généralisé pour notre ensemble discrétisé de  $g$  et  $\mu$ , nous pouvons en déduire, pour chaque  $\mu$ , la valeur de la fonction  $J$  à l'instant que nous avons nommé  $t_{debut}$ , comme le montre le schéma suivant :



Dans cette étape, pour chacun des couples  $(x, r)$  représentant la valeur du portefeuille et le taux spot, ainsi que chaque  $\mu$ , nous choisissons le meilleur taux garanti  $g$  et l'adoptons dans notre stratégie.

Lorsque nous avons fini de calculer les valeurs de  $J$  à  $t_{debut}$ , nous reprenons l'étape précédente pour l'année  $t-1$  qui précède  $t$ , et plus précisément à la date  $(t-1)_{fin}$ , et poursuivons les calculs ainsi de suite jusqu'à l'instant 0.

En considérant que nous déroulons le module 272 fois sur 8 ans, si, de plus, nous discrétisons le temps à l'échelle de la semaine (pour des calculs de produits dérivés en finance quantitative, il faudrait travailler à l'échelle de la journée, voir de la fraction de journée), et si nous faisons varier le taux spot de -4% à 16% (c'est une entorse à l'orthodoxie de Hull, qui demande un intervalle plus large). Nous avons environ 200 000 nœuds par module, soit, en tout, 55 000 000 nœuds qui sont parcourus dans nos calculs. Cela représente sur un outil de prototypage comme MathCad, 65  $\mu$ sec par nœuds pour une exécution en une à deux heures de nos calculs.

## 4.5 Les expérimentations

### 4.5.1 Les données de base

Nous présentons dans cette section les données prises pour effectuer nos tests.

Le portefeuille d'indice est basé sur le comportement du CAC40 des 30 dernières années sur la base des cours de clôture quotidiens. Le taux moyen de rendement observé est de 4.281% et la volatilité de 22.439%. Dans nos tests, nous adoptons, en accord avec A. Robidel et B. Sarrant, Risk Manager chez Barclays, une approche normative. Nous considérons un taux moyen de rendement de 400 pb par rapport au taux spot, certains essais prennent toutefois en compte un indice avec dividendes et nous considérons alors un rendement moyen de 570 pb par rapport au taux spot.

La composition en action du portefeuille est examinée avec les bornes supérieures suivantes : 5%, 20% et 50%.

La courbe des taux est la courbe publiée dans le QIS5 pour l'Euro, sans prime d'illiquidité. Nous prenons toutefois en compte les faibles valeurs du taux spot à  $t = 0$ .

### Courbe des taux du QIS, pour l'Euro, sans prime d'illiquidité.

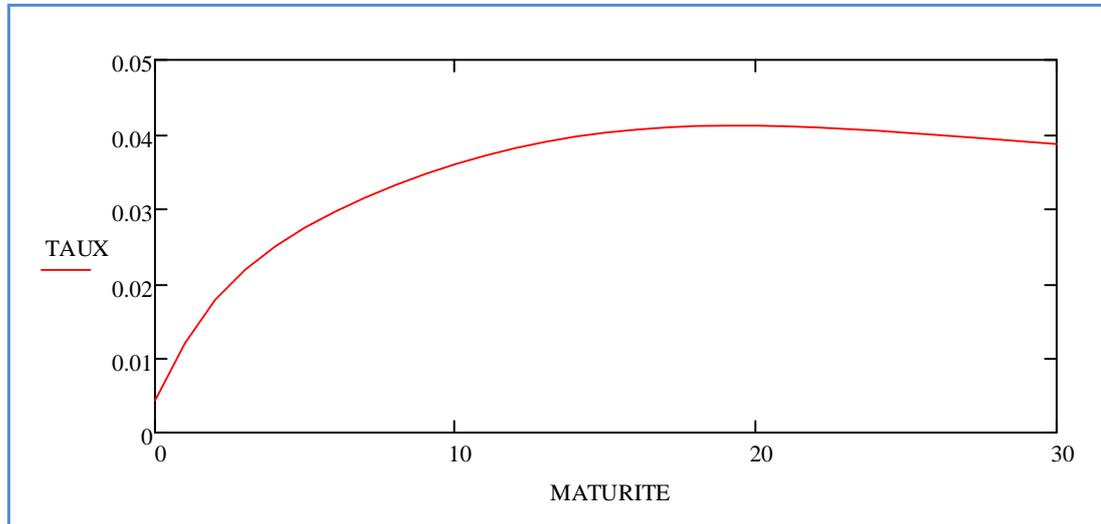


Fig 4.10 : Courbe des taux des expérimentations.

Le calibrage des coefficients intervenant dans le modèle de Hull-White est issu des données Reuters au 31/12/2010, ce qui donne :

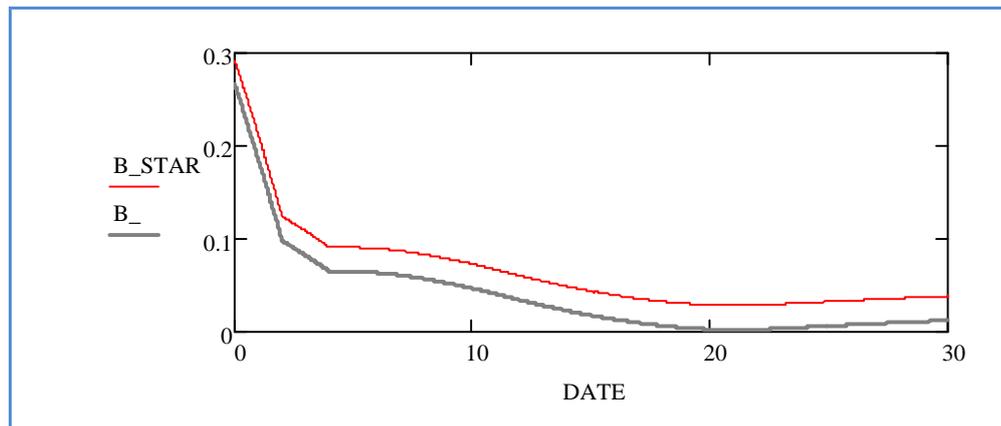
$$a = 5.9556\%$$
$$\eta = 1.1140\%.$$

Nous employons le formulaire donné en 2.5 pour calculer  $b(t)$  en interpolant la courbe des taux avec une méthode de spline. Nous ajustons le taux spot de manière à retrouver la courbe du QIS5 à  $10^{-6}$  près, ce qui donne un taux spot « implicite » de 0,44268%, à comparer avec 0,423% obtenu en consultant les sites internet.

La prime de risque pour les obligations est prise à 14% Cela correspond aux valeurs usuelles d'environ 15% rencontrée sur internet. Nous l'avons légèrement diminuée de manière à ce que la fonction  $b(t)$  ne soit jamais négative. A noter que la prime de risque pour une obligation serait, à volatilité comparable, légèrement inférieure à la prime de risque sur les actions.

La représentation graphique de  $b(t)$  (ainsi que de  $b^*(t)$ ) est la suivante :

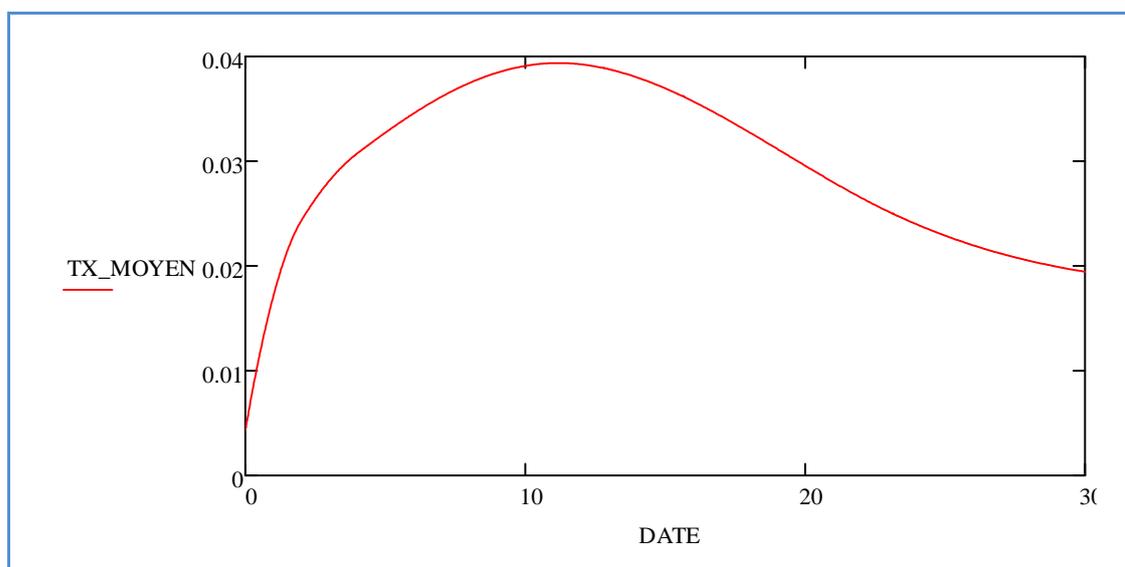
**Le marché anticipe une force à la hausse des taux sur les deux prochaines années.**



*Fig 4.11 : Les forces de rappel dans le modèle de Hull-White.*

En partant de  $r_0 = 4,268\%$ , la valeur moyenne de  $r_t$  est donnée sur le graphique suivant :

**Ce qui se manifeste aussi en examinant la progression moyenne du taux spot**



*Fig 4.12 : Progression moyenne du taux spot.*

Le coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens  $W_t^1$  et  $W_t^2$  est déduite de celle entre le prix des actions et des obligations qui a été communiquée oralement à l'auteur : -11% en temps normal et -22% en temps de crise. Sur une durée de 8 ans, nous prenons -11%, ce qui donne, le prix des obligations étant anticorrélé avec les taux,  $\rho = 11\%$ .

Globalement, nous considérons que le montant du portefeuille ne doit pas descendre en dessous de 92% du montant exigible par les assurés, soit  $S_{ruine} = 92\%$ . En raison de la forte volatilité des obligations prises en valeur de marché, cette condition est sévère et certains tests sont effectués avec  $S_{ruine} = 80\%$ .

Les comportements de rachats sont issus des notes ONC publiées pour les QIS4 et QIS5, ce qui donne les trois comportements présentées plus haut (cf. Tab 4.6).

L'impact de la suppression des avantages fiscaux est abordé en considérant que les comportements de rachats sont plus sévères en cas de mauvais rendement du portefeuille.

Concernant le contrat type, nous considérons des frais de gestion à 0,4% du montant du portefeuille et des prélèvements sur encours de 0,5% de la provision mathématique. Nous effectuons des tests avec une PB à 95% pour le cas nominal et de 85% à 100% pour certains tests.

Actuellement, la profession pratique une PPB entre 0% et 2% pour la plupart des acteurs (cf. Tab 1.5), nous effectuons des tests avec une PPB comprise en 0 et 3%. Comme précisé plus haut, nous procédons par interpolation linéaire entre ces deux valeurs.

Nous considérons des taux garantis compris dans un intervalle de 0 à 4%, certains tests optent pour une discrétisation par pas de 0.25%.

Les rachats structurels sont considérés comme valant 5%, toutefois, des tests sont effectués avec des rachats structurels à 0% pour examiner l'impact de comportements conjoncturels « purs », d'autres tests sont effectués avec des rachats structurels à -5% pour simuler un développement d'affaire.

Le coefficient d'aversion au risque est pris à 0.5.

#### 4.5.2 Les indicateurs mesurés

Le premier indicateur mesuré lors des essais est l'utilité  $J$ . Toutefois, nous convertissons cette valeur en « Cash Flow Constant Equivalent mesuré en fair value » (CFCE), ce que nous expliquons plus bas.

Nous mesurons aussi le rendement moyen du portefeuille pendant 8 ans, après avoir pris en compte les frais de gestion et le résultat de l'assureur.

Enfin nous mesurons le taux moyen de rachats annuels, en examinant le nombre de contrats en cours au bout de 8 ans.

### 4.5.3 Tests dans le cas nominal

Ce que nous appelons le cas nominal correspond à une PB de 95%, des rachats structurels de 5% par an, un seuil  $S_{ruine}$  de 92% et une durée maximale des obligations de 20 ans. Le taux garanti varie de 0 à 4% par pas de 0,25%. Le taux spot a la valeur donnée plus haut : 0,44268%.

Lorsque nous effectuons ce test, nous trouvons la valeur suivante de la fonction  $J$  à  $t=0$  : 3,165.

Examinons à quoi cela correspond en termes de Cash Flow Constant Equivalent (CFCE).

Nous mesurons le nombre moyen de souscripteurs qui restent 8 ans, sans rachat et sans arrêt à la ruine. Nous n'effectuons pas de simulation de Monte Carlo pour cette mesure, mais nous exploitons les éléments finis pour « remonter » les valeurs en chaînage arrière comme expliqué au §2.4.3 en traitant ce nombre comme un indicateur. Nous le convertissons en un taux de chute moyen. Nous obtenons 11,265% pour le taux de chute incluant les rachats conjoncturels et l'arrêt à la ruine. Rappelons à ce propos que nos contraintes sont plus sévères que les contraintes opérationnelles (pas de collecte et obligations intégralement gérées en valeur de marché). Le taux de chute total vaut  $r_{CH} = 15,702\%$  en incluant les rachats structurels.

Nous mesurons de la même manière le taux d'augmentation moyen du portefeuille d'une année sur l'autre et nous obtenons  $r_p = 3,564\%$ . Ce taux est calculé sans prendre en compte les rachats et le temps d'arrêt à la ruine. Toutefois, dans notre modèle, la première année, ce taux est beaucoup plus faible, de l'ordre de 1,6%. Cela est dû à trois facteurs :

- Une modélisation du rendement des actions en fonction du taux spot, sur la base des performances passées du CAC40, lequel taux spot est très bas début 2011,
- Un phénomène décrit plus bas (cf. la « zone de prudence » ou la « zone optionnelle ») qui a pour conséquence que la composition du portefeuille au début est essentiellement en monétaire ou en obligations de durations courtes,
- La courbe des taux elle-même, qui démarre avec une forte force de rappel les deux premières années (cf. Fig. 4.11 et 4.12). Toutefois, cet effet ne semble pas considérable. Nous avons fait un essai avec une courbe des taux « gentille » (un modèle de Vasiček) qui laisse à penser que la contribution à la baisse est de l'ordre de 0,2%.

Cette remarque laisse à penser que le TME est difficile à servir en 2011. Il faut la prendre avec la plus grande prudence car elle est d'abord due à la spécificité des conditions dans lesquelles nous effectuons nos essais.

Si le cash-flow était constant et valait  $CF_1$  la première année, en progressant suivant les deux taux mentionnés plus haut (progression de la valeur du portefeuille et chutes), nous aurions :

$$J = \sum_{t=1}^8 \mathbb{E} \left( \exp \left( - \int_0^t \gamma r_s ds \right) \middle| r_0 \right) CF_1^\gamma \left[ (1+r_p)(1-r_{CH}) \right]^{\gamma(t-1)}.$$

Avec le modèle de Hull-White à un facteur, l'espérance de la formule précédente se calcule de manière analogue au calcul qui correspond au prix d'un zéro coupon, la différence étant que nous sommes ici dans un espace historique et que nous calculons sur  $\gamma r_s$ .

Cela permet de déduire  $CF_1$ . Le Cash Flow Constant Equivalent, calculé en fair value est déduit de la manière suivante :

$$CFCE = \sum_{t=1}^8 P(r_0, 0, t) CF_1 [(1+r_p)(1-r_{CH})]^{t-1}.$$

Nous trouvons :

$$CFCE = 1,282$$

$$CF_1 = 0,271.$$

Ces valeurs sont en principe inférieures à des espérances car elles prennent en compte le coefficient d'aversion au risque mais elles montrent les faibles marges qui sont réalisées en assurance vie sur les contrats en euros.

Examinons maintenant les stratégies qui sont mises en œuvre.

Nous nous intéressons d'abord au taux garanti en début de chaque année en fonction du taux spot, autour de la valeur moyenne de ce taux. Dans cet essai, le taux garanti est nul les 3 premières années, ce qui explique que nous ne proposons pas de barème comme nous le faisons pour la PPB (cf. plus bas). Cela est dû à la sévérité du critère d'arrêt à la ruine (avec la forte volatilité induite non seulement par les actions mais aussi par les obligations gérées en valeur de marché). Il a toutefois une influence, le même test effectué avec un taux garanti toujours nul donne une valeur de J égale à 3,007 au lieu de 3,165.

En prenant un critère d'arrêt à 80% au lieu de 92%, nous observons mieux la pertinence du taux garanti, qui donne un effet de « lissage inversé » (cf. plus bas).

Par ailleurs, l'effet réel du taux garanti sur l'utilité est relativement faible comme le montre le graphique suivant, un taux garanti de 1,5% pouvant diminuer la valeur de la fonction d'utilité de 1,5% environ, soit le résultat de 3% en raison de l'exposant  $\gamma$  :

Avec la « sévérité » de nos essais, le taux garanti optimal est nul et a peu d'effets tant qu'il garde des petites valeurs.

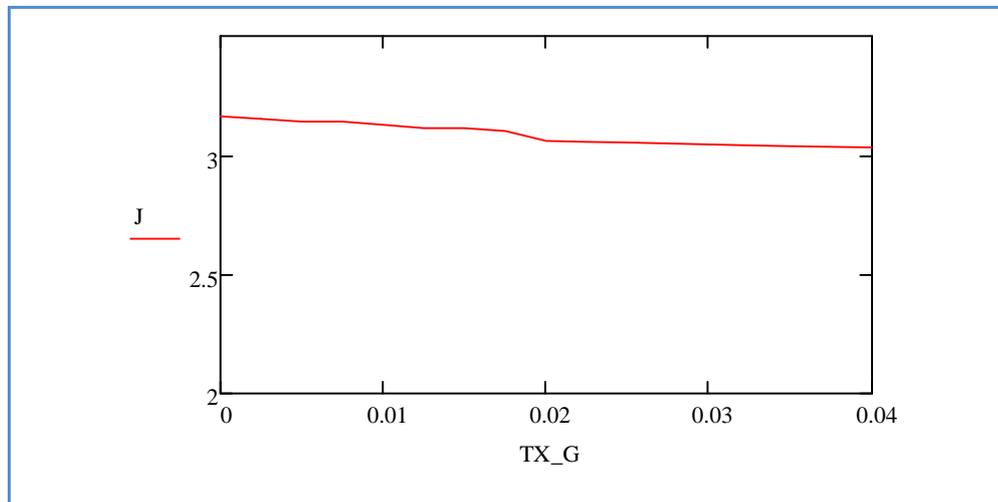


Fig 4.13 : L'influence du taux garanti sur la fonction de valeur.

Examinons maintenant la stratégie concernant la PPB.

Si nous démarrons en  $t=0$  sans PPB, il faut pouvoir la constituer. Il est nécessaire que les performances du portefeuille soient suffisamment bonnes en fin d'année pour servir un taux correct et alimenter la PPB.

Nous donnons dans le graphe plus bas (Fig. 4.14) la PPB qu'il est possible d'alimenter en fonction de la performance du portefeuille au bout d'un an, quand le démarrage se fait sans PPB.

Si la PPB avait déjà été constituée à 3%, nous observerions qu'elle pourrait servir en cas de performances médiocres. Il semble de plus que, dès que le montant du portefeuille dépasse légèrement la PM, il est optimal de garder une « petite » PPB et de ne pas tout « consommer » à des fins de lissage des résultats (Fig. 4.15).

La dotation à la PPB dépend d'un barème, donc des performances du portefeuille.

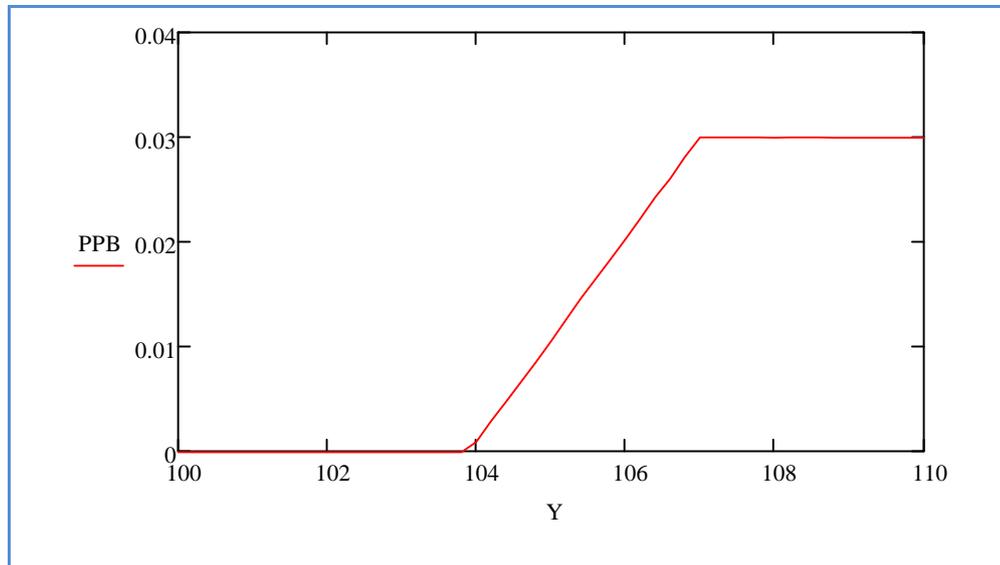


Fig 4.14 : Barème de dotation de PPB, quand il n'y a pas de PPB à 0.

Lorsqu'une PPB est déjà constituée à 3% en début d'année, elle est employée pour améliorer les résultats quand nécessaire, et n'est consommée entièrement qu'en cas de nécessité absolue.

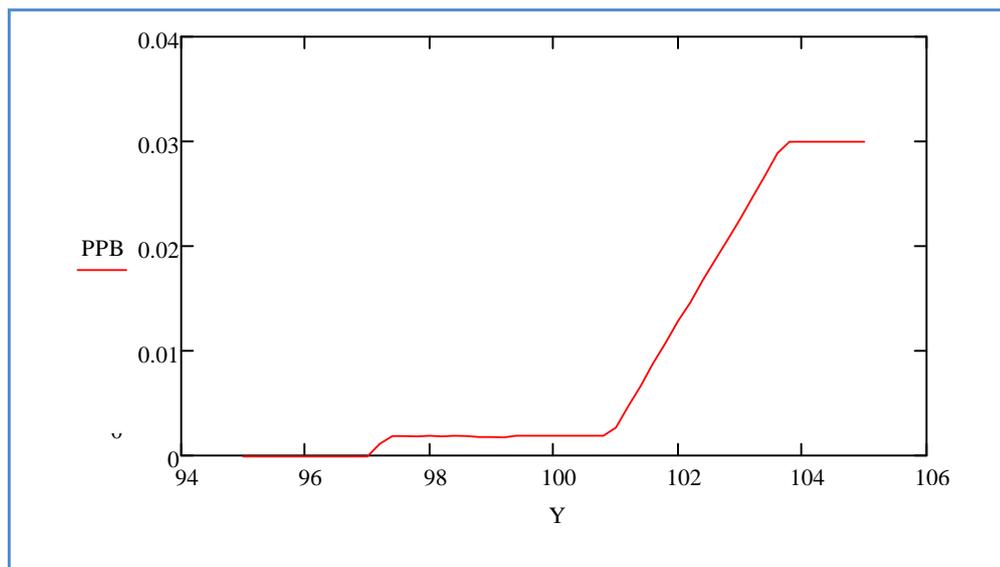


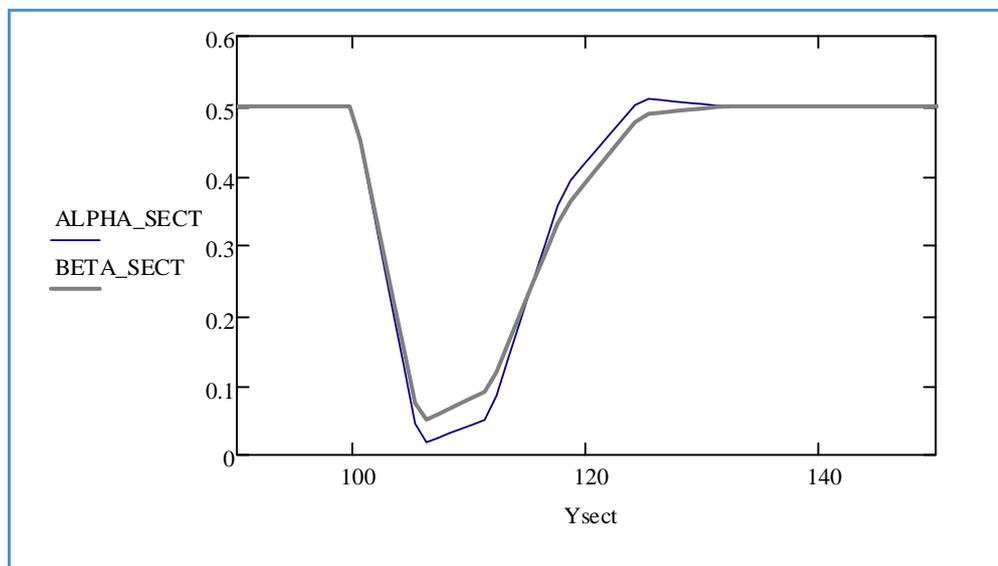
Fig 4.15 : Barème de dotation de PPB, quand la PPB vaut 3% en début d'année.

Ces tests montrent toutefois l'importance de garder de la PPB, message trivial lorsque l'on consulte les archives de l'Argus de l'Assurance, mais moins trivial suite à des conversations privées. Par rapport aux stratégies mentionnées dans un mémoire d'actuariat récent [DUB], nous observons que nous ne prenons pas de décision à priori sur une stratégie consistant à constituer ou ne pas constituer de PPB, en effet celle-ci dépend d'un barème : il est important de constituer une PPB, mais il est tout aussi important de servir un taux satisfaisant aux assurés ! Un test présenté plus bas montre l'effet de lissage des résultats que la PPB peut apporter. Par ailleurs, cette PPB est difficile à constituer. Avec le maximum de 3% que nous nous sommes fixé, nous mesurons grâce à un indicateur spécifique que nous constituons en moyenne une PPB de 0,8% de la PM. Si nous partons d'une PPB déjà constituée de 3%, le même indicateur donne une PPB moyenne de 1,6%. Cela suggère qu'une fois constituée, elle sert rapidement à lisser des résultats. La contrainte réglementaire de distribuer la PPB au bout de 8 ans n'est pas gênante dans notre cas.

Examinons maintenant la stratégie en termes de balancement du portefeuille.

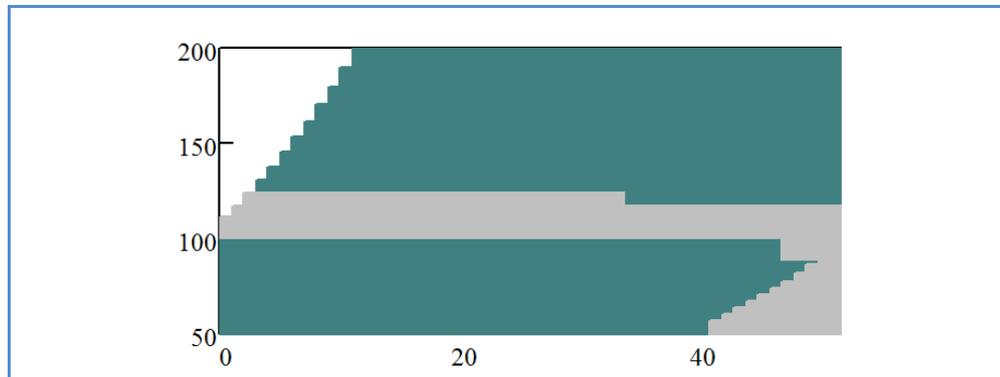
Nous illustrons ce qui se passe en montrant dans le graphique suivant une section prise au bout de 26 semaines, à la valeur moyenne du taux spot à cette date, soit 1,153%, montrant la composition du portefeuille en fonction de son montant.

**La composition du portefeuille fait apparaître une zone de prudence.**



*Fig 4.16 : Composition du portefeuille en fonction de son montant.*

**La zone de prudence « principale » forme une bande tout au long de l'année.**



*Fig 4.17 : Zone de prudence ou zone « optionnelle ».*

Dans le courant de l'année, trois zones apparaissent :

- Une zone de perte,
- Une zone de prudence que nous baptisons aussi zone « optionnelle »,
- Une zone « de Merton ».

Dans la zone de perte, le montant du portefeuille est faible (mauvaise performance des actifs). Les rendements sans risque ne permettent pas d'assurer un bon rendement en fin d'année. La seule manière d'en sortir est de « jouer » sur la volatilité. Dans cette zone, nous rencontrons donc soit des obligations sur une durée maximale (en espérant jouer sur les taux !) soit des actions. A noter, toutefois, comme le montre la figure 4.16 une « zone claire » qui correspond au cas où il n'y a plus d'espoir d'atteindre les objectifs de fin d'année !

Dans la zone de Merton, le montant du portefeuille est suffisamment élevé pour que la fonction d'utilité  $J$  soit perçue comme étant de la forme en  $x^\gamma$ . La composition du portefeuille correspond à la formule fermée de Merton dans notre modèle généralisé. Avec les bornes que nous nous sommes imposées, cela donne 50% en actions et 50% en obligations.

Pour les valeurs élevées du portefeuille, nous retrouvons une courbe en  $x^{\gamma}$  pour J.

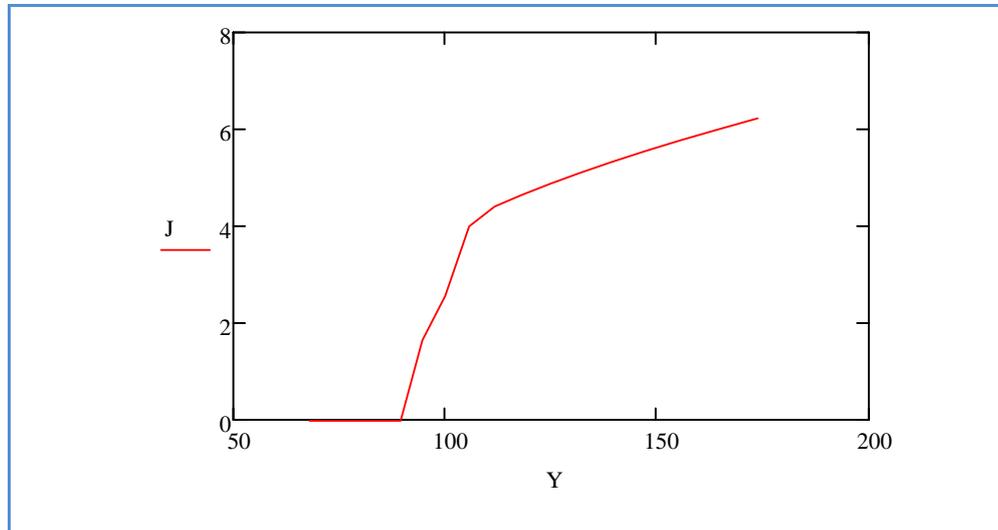


Fig 4.18 : Fonction de valeur en fonction du montant du portefeuille.

Nous baptisons la zone intermédiaire « zone optionnelle » ou « zone de prudence ». Cette zone est relativement large (100% à 115%/118%) ce qui s'explique par la volatilité des obligations de duration longue lorsqu'elles sont prises en valeur de marché. La stratégie consiste à éviter de tomber dans la zone de perte, donc à adopter une faible proportion d'actions et d'obligations de duration longue, le modèle prévoit une forte proportion en monétaire (ou en obligations de faibles duration).

Ce comportement ressemble à celui qui aurait pu être rencontré dans le cas d'une couverture d'option (un call dans une couverture delta neutre). Ainsi, dans le cas où nous n'effectuons pas une tarification du risque de rachat, nous sommes confronté au même problème opérationnel que celui rencontré dans une couverture d'option : à celui de la liquidité des actifs, tout au moins sur le marché secondaire, de manière à passer rapidement d'un portefeuille composé en actif risqué vers un portefeuille en monétaire ou en obligations de duration courte.

Remarquons aussi que le mécanisme de participation aux bénéfices fait que, en début d'année, l'assureur démarre systématiquement en zone optionnelle.

Nous pouvons nous demander quel serait l'impact des fonds propres sur la zone optionnelle. Idéalement, nous aimerions pouvoir nous placer en début d'année dans la zone de Merton pour permettre aux rendements d'avoir une espérance maximale. Il faut toutefois garder à l'esprit que cela signifie l'adoption d'une procédure souple de distribution des produits financiers en fin d'année de manière à ce que la « remise à zéro » effectuée en début d'année avec la distribution de PB ne constitue pas un facteur de risque dans la gestion du portefeuille.

#### 4.5.4 Variations autour du cas nominal

Ces tests sont faits pour voir l'influence des paramètres sur les résultats. En raison du temps d'exécution du test nominal, nous effectuons ces tests avec des scénarios simplifiés (taux garanti de 0 à 0,5% par pas de 0,25%), voire pas de taux garanti pour certains scénarios. Pour amplifier certains effets, comme les effets de lissages dus aux taux garanti ou à la PPB, nous assouplissons le seuil d'arrêt à la ruine de 80% au lieu de 92% dans certains cas.

##### 4.5.4.1 Variation du taux de PB

Nous faisons varier le taux de PB de 85% à 100% par pas de 5%. Ces tests sont effectués avec un taux garanti de 0 à 0,5% et un coefficient  $S_{ruine}$  de 92%. Une PB basse entraîne naturellement un résultat plus important pour l'assureur au détriment de l'assuré, mais aussi une augmentation des rachats conjoncturels. C'est ce que montre le graphique suivant, où nous donnons aussi le « rendement moyen » du portefeuille sur 8 ans :

**Augmenter le taux de PB dans le contrat diminue le résultat de l'assureur, mais lui permet de garder des assurés.**

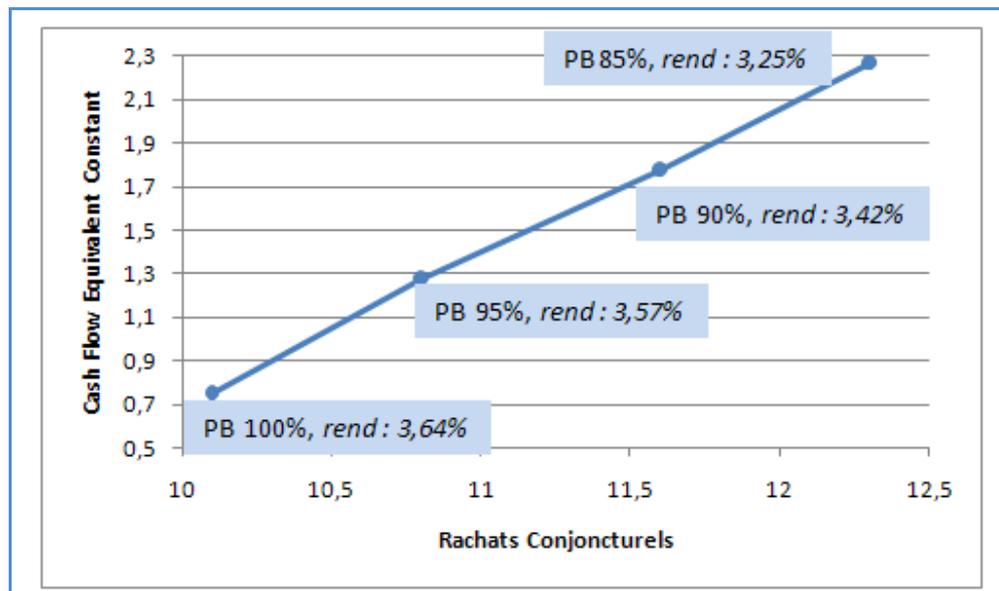


Fig 4.19 : Effet de la variation du taux de PB.

Le taux garanti en début d'année reste peu élevé. Toutefois, dans le cas d'une PB à 100%, il est employé plus souvent. La PPB reste aussi difficile à constituer que dans le test nominal avec une moyenne de l'ordre de 0,8%.

#### 4.5.4.2 Influence des comportements de rachats

En dehors du comportement issu du QIS4, nous effectuons ici trois autres tests. L'un avec le comportement de rachat « sévère » issu du QIS5, l'autre avec un comportement de rachat « souple » du QIS5, et un dernier avec le taux rachat maximal du QIS5 porté à 60% comme conséquence « possible » de la suppression des avantages fiscaux. Ces tests sont effectués avec un taux garanti de 0 à 0,5% et un coefficient  $S_{ruine}$  de 92%.

**Ici, durcir les comportements de rachats oblige l'assureur à augmenter ses rendements, mais entraîne une augmentation des rachats conjoncturels**

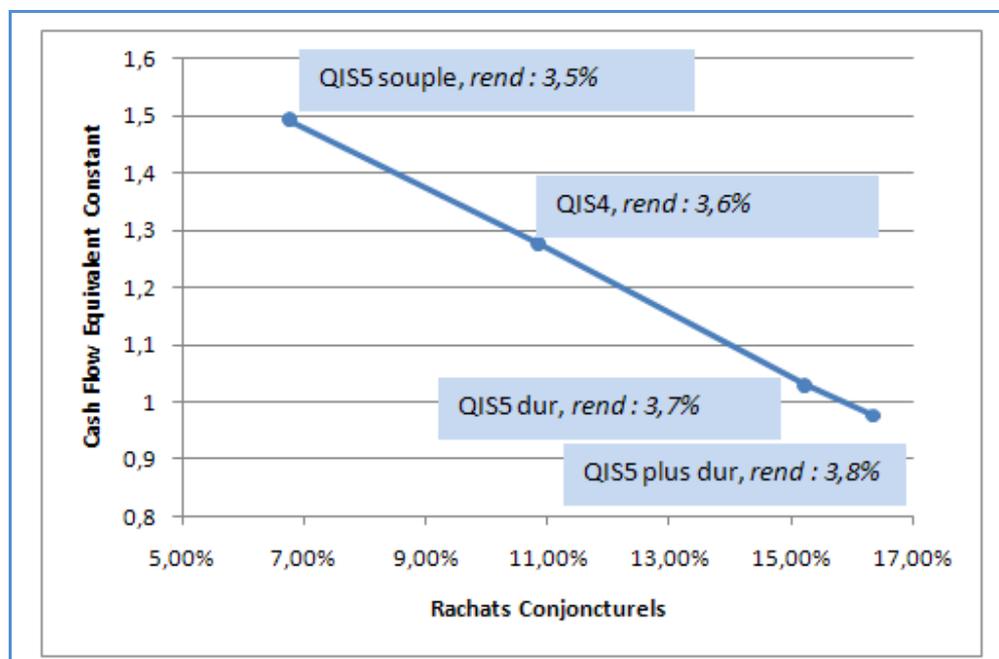


Fig 4.20 : Influence des comportements de rachats.

Dans le cas du QIS5 sévère et durci le taux garanti est plus souvent employé que dans les autres cas : l'assureur choisit délibérément, dès le début de l'année, de sacrifier des résultats. Par ailleurs, dans ce cas, la PPB est plus difficile à constituer avec une moyenne de l'ordre de 0,7% au lieu de 0,8%.

Concernant la fiscalité, il n'est pas évident dans les tests que la suppression des avantages fiscaux se fait « directement » au détriment des assurés. Contrairement à ce que nous avons observé dans le modèle continu, le durcissement de la fiscalité oblige l'assureur à « viser » un plus fort rendement et à prendre plus de risques. Dans nos tests, l'assureur doit distribuer un rendement légèrement supérieur. En revanche, il semble certain que cela va augmenter la vitesse de circulation entre les différents contrats. La légère augmentation de plus-value obtenue grâce au jeu de la concurrence, ne devrait pas être suffisante pour neutraliser la fiscalité. Nous rappelons toutefois que ces conclusions

sont données à titre indicatif, une véritable étude (économique) de l'impact de la fiscalité sur les contrats en euros sortant du cadre de notre mémoire.

#### 4.5.4.3 Influence des rachats structurels

Nous avons effectué des essais sur 3 scénarios de rachats structurels, à 0%, 5% et 8%. Nous avons aussi essayé un développement d'affaire où la collecte dépasse les rachats structurels avec une augmentation de 5% par an. Les rachats structurels ont une influence évidente sur le résultat de l'assureur. Nous avons un écart de 26% entre les Cash Flow Constants Equivalents correspondant à des rachats structurels de 0% et 8%.

L'absence de rachat structurel permettrait aussi de constituer une PPB un peu plus élevée, de l'ordre de 0,9% en moyenne au lieu de 0,8%. Les autres indicateurs ne semblent pas être modifiés significativement.

Dans le cas du développement d'affaire, les rachats conjoncturels diminuent un peu à 9,4%. Dans les autres cas, ils sont autour de 11% avec une légère diminution autour de 5%, en raison de la partie négative du barème du QIS4 (cf. Fig 4.5 plus haut).

**Les rachats structurels ont surtout une influence sur les résultats de l'assureur.**

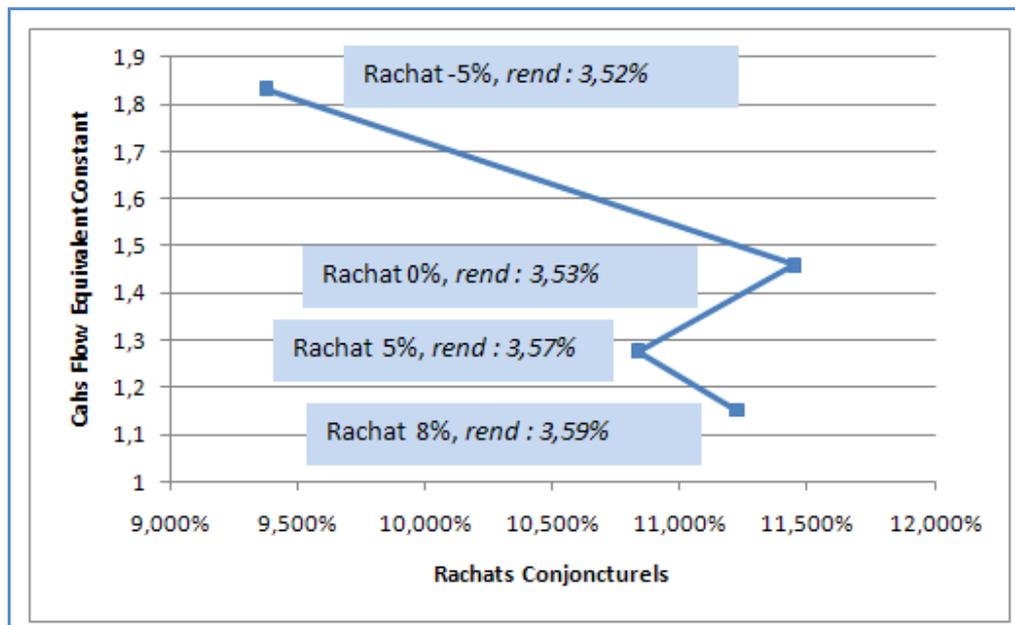


Fig 4.21 : Influence des rachats structurels.

Nous avons aussi testé le cas où la collecte neutralise TOUS les rachats, et où le critère d'arrêt à la ruine est très souple (60% au lieu des 92% ou 80% des tests précédents). Dans ce cas, la valeur de  $J$  augmente jusqu'à 4,654, correspondant à un Cash Flow Equivalent Constant de 2,664. Dans ce dernier cas, les règles de distribution de PB font que la zone optionnelle ou zone de prudence est

toujours présente dans la stratégie de composition du portefeuille en cours d'année. Le rendement moyen du portefeuille vaut 3,59%. Paradoxalement, le système ne juge pas utile de constituer une PPB importante dans ce cas, et elle vaut en moyenne 0,22% au lieu des 0,8% obtenus dans les autres cas.

Ce dernier test montre aussi que les règles de distribution de PB suffisent à créer un risque important.

#### 4.5.4.4 Influence des paramètres actions

Pour ces tests, nous prenons  $S_{ruine} = 80\%$ . Par ailleurs, nous effectuons ces tests sans PPB et sans taux garanti, afin de ne pas alourdir les temps d'exécution.

Nous avons autorisé dans le test nominal un portefeuille comportant jusqu'à 50% en actions. Si ce pourcentage baisse (à 20% puis 5%), le rendement global ainsi que le cash-flow de l'assureur diminuent. Les baisses ne sont pas spectaculaires en raison de l'existence de la zone de « prudence » ou « optionnelle » où la composition en actions est, de toute façon, faible.

En revanche, si les actions rapportent 570 bp en plus du taux spot (par exemple, si nous prenons un indice incluant les dividendes), nous observons un meilleur rendement pour les assurés.

A rendement équivalent, une augmentation de la volatilité a une influence positive sur le rendement, au détriment du risque de volatilité qui entraîne une forte augmentation des rachats conjoncturels, puis une baisse des résultats de l'assureur.

**Influence des actions : amélioration globale des performances si la proportion en action augmente. A noter le risque que fait peser la volatilité.**

Max Action	Volatilité	Rendement / taux spot	CFCE	Rendement	Rachats Conj.
50%	23%	+400 bp	1,454	3,66%	9,37%
20%	23%	+400 bp	1,237	3,22%	10,84%
5%	23%	+400 bp	1,167	3,06%	11,62%
50%	23%	+570bp	1,69	4,20%	8,19%
50%	50%	+400 bp	1,131	3,88%	18,05%
50%	50%	+570bp	1,249	4,43%	17,10%

Fig 4.22 : Influence des paramètres action.

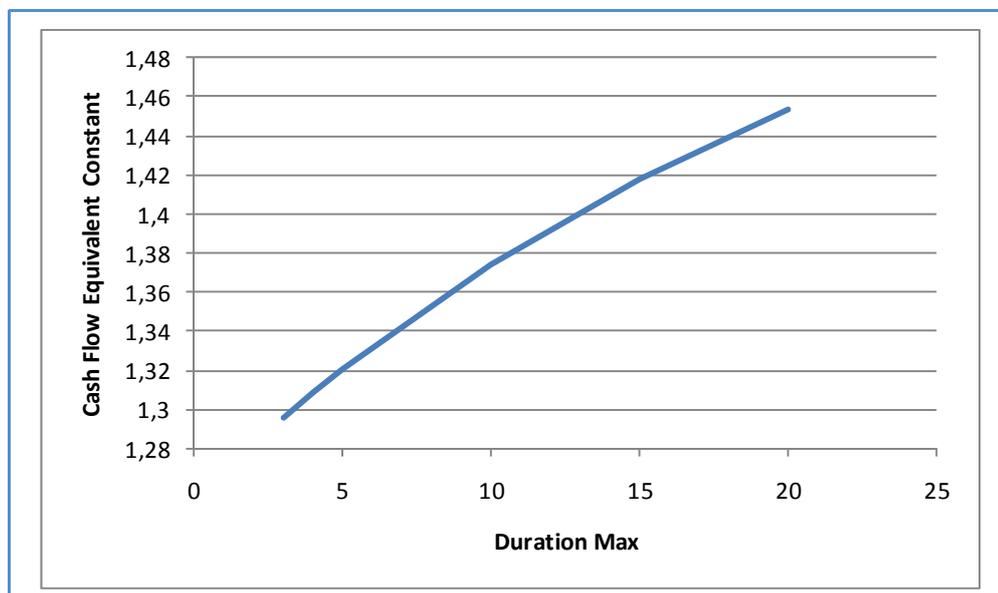
#### 4.5.4.5 Influence de la durée maximale des sliding bonds

Que se passe-t-il si nous faisons varier la durée maximale des sliding bonds, ou encore, si nous obligeons l'assureur à composer son portefeuille avec des obligations de durée plus courtes ?

Pour répondre à cette question, nous effectuons des tests dans les mêmes conditions plus souples que pour l'influence des actions.

Pour cela, nous examinons le Cash-flow Equivalent Constant en fonction de cette duration. Le résultat donne une courbe concave, qui reflète le fait que, d'une part, en raison de la zone de prudence, ce sont surtout les durations courtes qui ont une influence, d'autre part que dans les modèles stochastiques de taux (notamment notre modèle de Hull-White) les volatilités sur les obligations varient peu dans le domaine des durations longues.

**L'influence de la duration maximale des obligations est la plus forte dans le domaine des durations courtes.**



*Fig 4.23 : Influence de la duration maximale des obligations.*

C'est l'occasion de signaler que l'une des conditions sévères des tests de ce mémoire réside dans la gestion des obligations en valeur de marché. Dans la mesure où, dans nos tests, 25% des souscripteurs au moins restent 8 ans et plus, il semble raisonnable de suggérer de garder au moins cette proportion en obligation en HTM (Hold To Maturity) de manière à diminuer la volatilité d'un portefeuille contenant des obligations de duration longue. Toutefois, cette proportion doit faire l'objet d'une étude qui sort du cadre de ce mémoire.

#### *4.5.4.6 Influence de l'aversion au risque*

Nous avons effectués quelques tests en faisant varier le coefficient  $\gamma$  représentant l'aversion au risque. L'effet le plus notable est l'écrasement des résultats de l'assureur lorsque ce coefficient a de petites valeurs. Ainsi, avec  $\gamma = 0,2$ , le Cash-flow Equivalent Constant diminue à 0,182, ce qui correspond à une division par presque 10 des résultats de l'assureur.

#### 4.5.5 Utilité des stratégies

Nous testons dans cette section l'utilité des stratégies mises en œuvre. Une première série de tests s'attarde sur l'utilité de la PPB et du taux garanti. Une deuxième série examine l'utilité de la gestion dynamique du portefeuille durant une année.

##### 4.5.5.1 Effet de lissage de la PPB et de « lissage inversé » du taux garanti

Dans ces tests, nous assouplissons les conditions du test nominal en prenant  $S_{ruine} = 80\%$ , de manière à « amplifier » l'utilité du taux garanti en diminuant la menace que constitue l'arrêt à la ruine.

Nous effectuons quatre tests :

- Taux garanti toujours nul, pas de PPB,
- Taux garanti variant de 0 à 4%, cette fois par pas de 1% en raison des temps de calcul, sans utilisation de la PPB,
- Utilisation possible de la PPB, sans taux garanti,
- Taux garanti variant de 0 à 4%, par pas de 1%, avec utilisation de la PPB.

Nous avons observé les résultats donnés dans le tableau suivant :

**Lorsque le critère d'arrêt à la ruine est « souple », l'effet de lissage des résultats ressort avec la PPB et le taux garanti, chaque facteur ayant un effet de 7% à 9% sur les résultats.**

	Pas de PPB		Avec PPB	
Sans taux garanti	1,454		1,568	+ 7,8%
	3,66%		3,65%	
	9,4%		7,5%	
Avec taux garanti	1,583	+ 8,9%	1,672	+ 15%
	3,69%		3,67%	
	6,5%		5,3%	

Légende	CFCE
	Rendement
	Rachats conjoncturels

Fig 4.24 : Effets de lissages de la PPB et de lissage inversé du taux garanti.

Nous observons que les rendements du portefeuille varient peu. Ce sont bien les effets de lissage sur la PPB et le taux garanti qui permettent d'améliorer les résultats.

#### 4.5.5.2 Composition constante du portefeuille

Nous examinons ici ce qu'apporte la gestion dynamique du portefeuille pendant une année. Pour cela, nous effectuons des tests où les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont constantes. Les tests sont effectués avec  $S_{ruine} = 80\%$ , sans prise en compte de la PPB et du taux garanti pour ne pas alourdir les temps d'exécution. Le tableau suivant montre que, dans le meilleur des cas, le résultat pour l'assureur est quasiment divisé par 2.

**Avec des compositions en proportions constantes (actions, obligations) du portefeuille, le résultat de l'assureur est nettement diminué.**

Oblig. \ Actions	0%	25%	50%
0%	0,34	0,63	0,714
25%	0,263	0,623	0,775
50%	0,309	0,576	0,805

Fig 4.25 : Effets de stratégies de composition constante du portefeuille.

Nous voyons ici apparaître l'utilité d'une gestion dynamique du portefeuille : elle consiste, à chaque instant, à réaliser le meilleur compromis entre le rendement espéré et le risque qui est pris. Lorsque les paramètres restent constants, nous « ratons » des opportunités dans des zones présentant peu de risques et « dérapons dans le décors » dans les zones à risque.

## 5 CONCLUSIONS

Nous avons étudié les contrats en euros avec possibilité de rachat sans pénalité. Pour cela, nous avons adopté le point de vue apporté par le contrôle stochastique plutôt que celui des options. Il s'est agit d'optimiser un portefeuille d'assurance vie en étudiant des stratégies faisant intervenir la composition du portefeuille, le taux garanti ainsi qu'une proportion de la provision mathématique gardée au sein de la provision pour participation aux bénéfices.

Une première approche simplifiée sur une modélisation en temps continu a montré que les règles de distributions régulières de bénéfices (ce qui se passe annuellement en France) ainsi que la menace de rachats en cas de mauvaises performances entraînent un comportement de prudence de la part des assureurs. Dans notre exemple numérique, avec un taux sans risque de 2,5% et un rendement espéré de 7,5% pour les actions, nous avons en fait un rendement moyen de l'ordre de 3,1% pour le portefeuille d'assurance vie. La sécurité a un prix qui se manifeste à travers un rendement attendu inférieur au rendement possible calculé avec un modèle du à Merton (4,5%).

Ce modèle met aussi en évidence le fait que les meilleures stratégies sont des stratégies markoviennes, qui s'approchent d'un principe de tout ou rien : soit l'assureur a les moyens de servir le taux « exigé » par le marché et il le fait, sinon il choisit de ne rien distribuer et de laisser les souscripteurs mécontents procéder à des rachats. Si les stratégies markoviennes sont les « meilleures », il ne faut pas oublier qu'elles dépendent de la modélisation stochastique des actifs et des taux, et, à ce titre, elles comportent un risque de modèle.

Le fait que les meilleures stratégies soient markoviennes implique aussi que, si dans quelques années les taux montent, il est possible que les textes soient amenés à évoluer.

Comme nous nous sommes appuyés sur les comportements de rachats conjoncturels publiés à l'occasion des exercices QIS4 et QI5, le calibrage de ces paramètres est un élément important : il contient, dans ses constantes, le taux de marché attendu de la part des souscripteurs, taux qui est défini relativement au TME.

Nous avons ensuite effectué une modélisation en temps discret, et, pour ce faire, nous nous sommes placés dans un contexte « sévère » :

- Gestion des obligations en valeur de marché, impliquant une volatilité importante sur des durations longues,
- Temps d'arrêt à la ruine inspiré des critères de Solvabilité 1 ou 2,
- Non compensation des rachats par la collecte.

En plus d'autoriser une gestion dynamique du portefeuille dans l'établissement des stratégies, nous avons examiné l'intérêt de garder une partie des résultats au sein d'une provision pour participation aux bénéfices et l'intérêt de publier un taux garanti en début d'année.

Pour cela, nous avons mis en musique un module spécifique que nous avons nommé « Module de Merton Généralisé », et qui est décrit au chapitre 2. Ce module correspond à une extension d'un

modèle de Merton. Il recherche l'optimisation des performances d'un portefeuille en prenant en compte une aversion au risque, sans prélèvements intermédiaires et :

- Un modèle stochastique de taux, le modèle de Hull-White à un facteur,
- L'interdiction de vente à découvert et l'interdiction d'emprunter,
- Une borne supérieure pour la composition en actions,
- L'optimisation d'une fonction continue à priori quelconque à l'échéance.

Nous avons effectué les observations suivantes :

L'importance de la PPB comme moyen de lissage des résultats. Nous avons donné un exemple de barème à appliquer en fin de première année au chapitre 4, qui montre qu'à partir d'un certain seuil de performances, il est optimal de garder en PPB une partie de la participation aux bénéficiaires. Une telle stratégie permettrait d'augmenter de plus de 7% les résultats de l'assureur. Toutefois, en mesurant la PPB moyenne sur une durée de 8 ans, pour un plafond défini à 3% de la PM, nous observons une moyenne de l'ordre de 0,8%. Cela suggère que la constitution de PPB est difficile dans notre contexte « sévère » et qu'il est illusoire de vouloir garder cette PPB pendant 8 ans.

Le taux garanti intervient quant à lui comme un « lissage inversé » des résultats. L'assureur a intérêt à proposer un taux garanti s'il est convaincu – dès le début de l'année – qu'il vaut mieux sacrifier une partie des résultats de l'année pour garder des souscripteurs.

Dans ce contexte, le barème de taux garanti qui peut être appliqué est très sensible au critère de temps d'arrêt à la ruine (donc au volume des fonds propres) ainsi qu'à une éventuelle prise en compte de la collecte. Ce taux dépasse rarement 0,5% et il est quasiment nul pour notre essai nominal.

Il est à noter que le code des assurances est, à posteriori, permissif vis à vis des stratégies que nous proposons. Bien que nous travaillions dans un contexte markovien, donc que nous ne prenons pas en compte le passé, nous n'avons (presque) jamais rencontré de situation où le taux garanti en début d'année dépasse 80% du TME.

Le taux garanti en début d'année dépend aussi des « règles du jeu » qui sont associées à ce taux. Si nous avons suivi pour ce taux les règles d'un taux technique, des essais en marge de ce mémoire donnent des résultats différents. Ils suggèrent, dans ce cas, de constituer une PPB puis de proposer un taux équilibré par la présence de cette PPB. En fait, dans notre modèle, le taux garanti devient presque inutile lorsque les critères d'arrêt à la ruine sont « sévères ». Cela suggère de diminuer la volatilité du portefeuille en gérant une partie des obligations en HTM !

Il semble que certains assureurs font dépendre la collecte du taux garanti. Pour approfondir les essais, il serait intéressant de disposer d'un calibrage de la collecte en fonction du taux garanti.

Concernant la gestion du portefeuille en cours d'année, trois contraintes entraînent une grande prudence du côté de l'assureur :

- Le quasi remise à zéro des compteurs en début d'année : nous avons effectués des essais avec une PPB plafonnée à 3% de la PM. En cas d'excellentes performances, une part

importante des produits financiers est distribuée immédiatement aux assurés, laissant une marge relativement faible aux assureurs ;

- Un critère d'arrêt à la ruine en cas de mauvaises performances des actifs, particulièrement sévère lorsque les obligations sont gérées en valeur de marché ;
- Une menace de rachats de la part des souscripteurs en cas de performances insatisfaisantes en fin d'année.

Nous distinguons alors 3 zones concernant le montant dans lequel évolue le portefeuille.

Lorsque le portefeuille atteint de grandes valeurs, ce qui correspond à une bonne performance, il est géré suivant le modèle de Merton. Dans notre contexte de participation aux bénéficiaires et de menace de rachats, il semble que ces « grandes valeurs » soient rarement atteintes.

Lorsque le portefeuille est en situation de perte, le seul moyen de remonter la pente est de jouer sur la volatilité, ce qui implique une forte composante en action et/ou en obligations de durée longue.

Dans une zone intermédiaire, qui semble être large, de 100% à 115/118% de la valeur de la PM, nous nous trouvons dans une zone risquée où la stratégie consiste à augmenter la part en monétaire par rapport au reste (ou à diminuer fortement la durée des obligations). Qualitativement, cela ressemble à une stratégie de couverture d'option lorsque l'actif sous-jacent descend trop bas. Toutefois, cette zone existe encore lorsque les rachats sont neutralisés : outre les rachats, l'effet cliquet du portefeuille constitue un risque important.

Nous avons aussi quelques observations complémentaires, pour lesquelles, toutefois, la plus grande prudence s'impose :

- La prise en compte de la collecte permet, de manière évidente, d'augmenter les résultats de l'assureur et de diminuer les risques. Cette prise en compte ne fait pas disparaître la « zone optionnelle » de nos stratégies.
- Le durcissement de la fiscalité oblige l'assureur à augmenter légèrement le rendement pour les assurés (au détriment de ses résultats), mais cette augmentation semble trop faible pour compenser l'imposition supplémentaire sur les plus-values. Ce point demande toutefois une étude économique complémentaire hors du cadre de ce mémoire.

Nous présentons maintenant des directions dans lesquelles l'étude pourrait se prolonger.

A propos du modèle continu du chapitre 3, il serait intéressant de l'étudier sous un angle plus orthodoxe sur le plan mathématique (ex : solutions de viscosité). En effet, nous nous sommes contentés d'évaluer les solutions de manière algorithmique et intuitive.

Ce modèle continu mériterait aussi d'être étendu en insérant la PPB parmi les paramètres à optimiser. Il y aurait 3 variables d'état : la provision mathématique due immédiatement aux assurés, le montant PM+PPB incluant la PPB distribuable à terme et le montant réel du portefeuille. Ce modèle devrait permettre de confirmer ou d'infirmer la difficulté qu'il y a à constituer une PPB, même quand on le décide.

Il serait aussi intéressant de se poser la question de la rationalité des comportements de rachats publiés lors des exercices QIS4 et QIS5 dans un cadre de théorie des jeux. Cela reviendrait à poser la

question « En jouant l'assureur « contre » l'assuré, quel est le comportement de rachat optimal ? ». Il semble que des techniques dites de minimax permettent d'aborder le problème.

Nous avons employé le Module de Merton Généralisé avec une méthode explicite d'éléments finis sur un maillage du temps de l'ordre de la semaine. Il pourrait être intéressant de l'améliorer en prenant mieux en compte sa spécificité : une corrélation potentiellement élevée entre la variable de taux et la variable représentant les actifs lorsque ces derniers sont essentiellement constitués d'obligations.

Dans notre module, nous avons adopté le modèle de Hull-White à un facteur, en raison notamment de la richesse des formules analytiques qui permettent de le tester. Il serait intéressant de réaliser ce module avec d'autres modèles évitant les taux négatifs (le modèle de Hull White à deux facteurs est employé par certaines banques. Dans notre cas, la fonction d'efficacité s'annule rapidement dans le domaine des taux négatifs et n'apporte pas de perturbations dans nos évaluations).

L'une des innovations de ce mémoire, en dehors du contexte du contrôle optimal, est d'avoir adopté un raisonnement en « chaînage arrière » pour la résolution de notre problème plutôt qu'un raisonnement en « chaînage avant » classiquement rencontré avec les méthodes de Monte Carlo. En fait, ce type de raisonnement est un grand classique de la recherche opérationnelle ou de l'intelligence artificielle.

Dans ce type de raisonnement, il pourrait être intéressant d'exploiter des architectures parallèles de manière à prendre en compte plus de variables d'états (ex : les fonds propres, pour en tester les effets d'amortissement). Supposons qu'un programme optimisé permette d'exécuter en 20 sec. le Module de Merton Généralisé avec un maillage fin et qu'il soit possible de faire travailler en parallèle une centaine d'ordinateurs (de type PC) avec un serveur (pour stocker des données). Exécuter ce module 10 000 fois prendrait moins de 35 minutes.

Une autre innovation semble être la mesure d'indicateurs qui exploitent le maillage des éléments finis. Avec un module suffisamment fin pour permettre l'emploi de fonctions discontinues, il serait possible d'enrichir les informations sur les processus sans faire appel à des méthodes de Monte-Carlo. Par exemple, on mesurerait le nombre de fois que la PPB dépasse en moyenne un certain seuil, des statistiques de moyennes sur les taux garantis, des probabilités de ruine, ...

Une extension importante du modèle serait aussi la prise en compte de la collecte et de sa dépendance vis à vis du taux garanti. Les paramètres à prendre en compte semblent varier d'une société à l'autre : l'auteur a rencontré un directeur faisant dépendre la collecte du taux garanti et de l'âge de la société d'assurance, alors qu'un autre directeur la fait dépendre de l'effort marketing qui est investi.

Dans le contexte actuel de Solvabilité 2, nous préconisons l'emploi du contrôle optimal comme un outil de pilotage amont pour obtenir des indications sur les stratégies à suivre. Une fois les stratégies connues, nous préconisons de reprendre les méthodes classiques pour valider les modèles (ex : avec des méthodes de Monte-Carlo). C'est actuellement dans ce contexte que la technique du contrôle stochastique commence à sortir des laboratoires dans le monde germanophone.

Comme l'ont montré nos exemples, cette capacité de pilotage « par le risque » garde le caractère intuitif du pilote qui accélère sur une route droite mais ralentit dans un virage, et permet des gains conséquents.



## BIBLIOGRAPHIE

- [BER] Dimitri BERTSEKAS (1976) : Dynamic Programming and Stochastic Control, *Academic Press* .
- [BOU1] Jean-François BOULIER, Etienne TRUSSANT, Danièle FLORENS (1995) : A Dynamic Model for Pension Funds Management, *Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium*, pp. 361-384.
- [BOU2] Jean-François BOULIER, Stéphane MICHEL, Vanessa WISNIA (1996) : Optimizing Investment and Contribution Policies of a Defined Benefit Pension Fund, *Proceedings of the 6th AFIR International Colloquium, Vol. 1*, pp. 593-607.
- [BRI] Damiano BRIGO, Fabio MERCURIO (2006) : Interest Rate Models – Theory and Practice, *Springer Verlag*.
- [DAI] Min DAI, Yue Kuen KWOK, Jianping ZONG : Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit in Variable Annuities, *Mathematical Finance, Volume 18, Issue 4*, pages 595–611, October 2008.
- [DEN] Hélène DENIS de CAYEUX et Guillaume AUTIER (2004) : Garanties Implicites d'un Contrat d'Assurance Vie en Euros, *L'année Actuarielle 2003-2004, Institut des Actuaires*, pp. 8-10.
- [DIX] Avinash K. DIXIT, Robert S. PINDYCK (1994) : Investment under Uncertainty, *Princeton University Press*.
- [DUB] Astrid DUBOIS, Sylvain MOLLET (2011) : Pilotage de la Participation aux Bénéfices sur la Durée de Vie d'un Produit, *Mémoire d'Actuariat du CEA*.
- [EDH] Measuring the Benefits of Dynamic Asset Allocation Strategies in the Presence of Liability Constraints, (2008), *An EDHEC Risk and Asset Management Research Center Publication*.
- [GOL] Christian GOLLIER (2007) : Intergenerational Risk-Sharing and Risk-Taking of a Pension Fund, *Journal of Public Economics*, vol. 92, n°5-6, juin 2008, p. 1463-1485.
- [HAI] Donatien HAINAUT (2009) : Profit Sharing : A Stochastic Control Approach, *Bulletin Français d'Actuariat. (CNRS rank 4). December*.
- [HUL] John HULL (2004) : Options, Futures et Autres Actifs Dérivés, 5<sup>ème</sup> édition, *Pearson Education*.
- [JEN] Emmanuel Nicholas BARRON and Robert JENSEN (1990), A Stochastic Control Approach to the Pricing of Options, *Mathematics of Operations Research, Vol. 15, No. 1 (Feb., 1990)*, pp. 49-79.
- [KUS] Harold J. KUSHNER (2000) : Numerical Methods for Stochastic Control problems in Continuous Time, *Springer Verlag*.
- [LAM] Damien LAMBERTON, Bernard LAPEYRE (1997) : Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, *Ellipses*.
- [OKS] Bernt ØKSENDAL (2003) : Stochastic Differential Equations, *Springer Verlag*.

- [ONC4] Orientation Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques (2007), *Dans le cadre du QIS4, ACAM.*
- [ONC5] Orientation Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques (2010), *Dans le cadre du QIS5, Autorité de Contrôle Prudentiel.*
- [PHA] Huyên PHAM (2007) : Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance, *Springer Verlag.*
- [POR] Roland PORTAIT, Patrice PONCET (2008) : Finance de marché, *Dalloz.*
- [QIS5] QIS5 Technical Specifications (2010), *Site internet du CEIOPS.*
- [QUI] François QUITTARD-PINON (2003) : Marché des Capitaux et Théorie Financière, *Economica.*
- [RUT] Marek RUTKOWSKI (1999) : Self-Financing Trading Strategies for Sliding, Rolling-Horizon, and Consol Bonds, *Mathematical Finance, Vol. 9, No. 4, (October 1999), 361-385.*
- [SCH] Hanspeter SCHMIDLI (2008) : Stochastic Control in Insurance, *Springer Verlag.*
- [SHR] Steven E. SHREVE (2004) : Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models, *Springer Verlag.*