



ISUP

Promotion 2009



Mémoire présenté devant

**L'institut de Statistique de l'Université
Pierre et Marie Curie**

Pour l'obtention du

**Diplôme de Statisticien
Mention Actuariat**

Assurance ☐

Finance ☐

Par

M. Damien PEREZ

Sujet

**Modélisation et Etude d'un Produit Variable
Annuity**

Entreprise d'accueil : BNP Paribas Assurance

Responsable : Badis ZEGHMAR

Encadrant ISUP : Jean-David FERMANIAN

Confidentialité : Oui



**BNP PARIBAS
ASSURANCE**

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps toute l'équipe pédagogique de l'Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie ainsi que les intervenants professionnels responsables de la formation en troisième année, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je souhaite ensuite témoigner ma gratitude à Monsieur Jean-David Fermanian, mon professeur encadrant et responsable du stage à l'Institut de Statistique, pour sa disponibilité, son aide et ses conseils concernant le déroulement de mon stage et la rédaction de ce mémoire.

Je tiens enfin tout particulièrement à remercier et à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'elles m'ont fait vivre durant ces six mois au sein de la Direction Epargne Monde de BNP Paribas Assurance :

Monsieur Badis Zeghmar, actuariaire, mon responsable de stage au sein de l'entreprise, pour m'avoir intégré rapidement au sein de l'équipe et m'avoir accordé sa confiance, pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette période, sachant répondre à toutes mes interrogations, sans oublier sa participation active au cheminement de ce mémoire et sa sympathie.

Monsieur Chandrasekaram Sanjeevan, stagiaire assistant en gestion financière, et Monsieur Serge Werle, gestionnaire actif passif au sein de l'équipe de Recherche en Allocation d'Actifs de la Direction de Gestion des Actifs (DGA), pour leur collaboration efficace et l'aide reçue de leur part pour la calibration.

Monsieur Romain Fitoussi, responsable ALM International, pour m'avoir apporté son expérience dans le domaine du CPPI ainsi que ses remarques concernant l'ensemble de ce mémoire.

Madame Estelle Adam et Monsieur Sebastien Ibanez, ingénieurs financiers, pour leur aide précieuse lors de la récupération des données financières et la réactivité dont ils ont fait preuve pour répondre à mes interrogations.

L'ensemble des membres de l'équipe de la Direction Epargne Monde, pour leurs conseils et leur soutien concernant le cheminement de ce mémoire, ainsi que pour leur sympathie et les moments de détente partagés.

Résumé

Mots clés : Variable Annuities, Dupire, Hull et White, Pricing, Hedge Cost, Sensibilité, Value at Risk, CPPI

Les Variable Annuities sont des produits d'assurance en unités de compte assortis de garanties portant sur le capital, très populaires sur le marché Nord-Américain et à fort potentiel sur le marché européen. Comme pour tout produit dans lequel l'épargne du client est investie sur les marchés financiers, la modélisation des Variable Annuities implique l'utilisation de modèles financiers stochastiques. En effet, ces modèles sont destinés à simuler l'évolution des différents supports sur lesquels le client décide de répartir son épargne (actions, obligations, monétaire).

Il existe à l'heure actuelle une multitude de modèles financiers disponibles et plus ou moins bien documentés pour chacun de ces marchés. Mais bien souvent les services utilisent des modèles classiques et faciles d'accès (Black et Scholes et Vasicek notamment). Or certains de ces modèles se basent sur des hypothèses simplificatrices qui ne sont pas toujours en adéquation avec le marché, parfois même de manière assez grossière. L'étude des modèles financiers est donc un vecteur important de l'amélioration des méthodes de pricing et de suivi des risques.

Lorsque le choix des modèles est effectué, l'actuaire en charge de la tarification est en mesure de simuler l'évolution des actifs du produit. Il lui reste néanmoins à proposer une méthode de pricing des garanties à partir de ces différents scénarios de l'évolution de l'épargne (Monte-Carlo). Surtout il est primordial pour lui de savoir comment le prix de la garantie évolue en fonction des hypothèses (actuarielles et financières) qu'il prend.

Avec l'avènement prochain des directives européennes de Solvabilité 2, des problématiques de provisionnement, et donc de suivi du risque, se posent également. Il est donc légitime de se poser la question de la méthode à adopter pour mettre suffisamment en réserve pour faire face aux pertes potentielles liées à ce type de contrat.

Enfin, il serait difficile dans le contexte actuel de ne pas aborder les impacts de la crise financière et de la chute conséquente des marchés financiers sur la dernière année écoulée. Les Variable Annuities proposant des garanties financières, elles ont engendré d'importantes pertes pour de nombreux assureurs qui cherchent depuis à réduire leur exposition au risque de marché. Il existe différentes manières de réduire ce risque et nous en évoquerons une particulière en guise de sujet d'ouverture : la structuration de l'actif via les fonds de type CPPI.

Abstract

Key words : Variable Annuities, Dupire, Hull and White, Pricing, Hedge Cost, Sensitivity, Value at Risk, CPPI

In the field of insurance, Variable Annuities belong to the large family of Unit Linked products, and benefit in addition from guarantees on the capital. Variable Annuities are very popular in the United States and are really likely to expand on the european market. As in any Unit Linked product, actuaries needs some financial models to simulate the path of client's savings. These models are designed to evaluate the evolution of several markets (equity, bond, money).

Nowadays there is a large range of stochastic models available for each market. All these models are not equally described in the financial literature, but most of the time we use the traditional models as Black and Scholes or Vasicek. These ones are built on assumptions which are sometimes really far from the market reality. So studies on financial models are essential in order to improve pricing and risk management methods.

When models are chosen, the actuarial pricing team is able to simulate several paths of all assets of the product. Nevertheless actuaries have to propose a pricing method to evaluate the cost of the guarantee from these patterns using the Monte-Carlo method. Especially it is essential for them to be aware of evolutions of the Hedge Cost when financial or actuarial assumptions vary.

In the close future under the european laws of Solvency 2, some questions and problems are bound to rise, mainly in the field of reserving and risk management. So it is logic to wonder which method has to be chosen by the insurer in order to put enough money in its reserves.

Anyway in the current economic situation it should be difficult to occult the consequences of the global financial crisis due to the fall of markets last year. Since Variable Annuities provide financial guarantees, these products have been sources of important losses and insurers are now searching for different ways to reduce the market risk. Several methods already exist to cut this risk and we will evoke one of these methods in the end of the report : the asset's structuring in CPPI funds. The aim of this part is just to propose an outbreak topic.

Table des matières

I	Introduction et contexte	11
1	Présentation du sujet	13
2	Présentation de l'entreprise	15
	Le groupe BNP Paribas	15
	BNP Paribas Assurance	17
	La Direction Epargne Monde (DEM)	19
3	Les Variable Annuities	21
3.1	L'environnement	21
3.2	Les différentes garanties	23
3.2.1	Guaranteed Minimum Death Benefit - GMDB	23
3.2.2	Guaranteed Minimum Accumulation Benefit - GMAB	24
3.2.3	Guaranteed Minimum Income Benefit - GMIB	25
3.2.4	Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit - GMWB	25
3.3	Contexte de l'étude	27
II	Etude de modèles financiers	29
4	Les modèles actuels et leurs limites	31
4.1	Le modèle de Black et Scholes	31
4.1.1	La théorie du modèle	31
4.1.2	La volatilité	32
4.1.2.1	Volatilité historique et volatilité implicite	33
4.1.2.2	Le Skew et le Smile	34
4.1.3	Les limites du modèle	36
4.2	Le modèle de Vasicek	37
4.2.1	La théorie du modèle	37
4.2.2	Les courbes de taux	38
4.2.2.1	Généralités sur les courbes de taux	39
4.2.2.2	Les différentes formes de la courbe des taux	39
4.2.3	Les limites du modèle	40
4.3	Les objectifs des nouveaux modèles	41
4.3.1	Modèle Actions	41
4.3.2	Modèle Taux	41
5	Le modèle de Dupire	43
5.1	Les modèles de volatilité locale	43
5.1.1	Le contexte	43
5.1.2	Les différents modèles	44
5.1.2.1	Le modèle de Dupire (1994)	44

5.1.2.2	Les modèles de Derman et Kani (1994)	44
5.1.2.3	Les modèles de Rubinstein (1994) et Jackwerth (1997)	44
5.1.3	Le choix d'un modèle	45
5.2	La théorie du modèle	45
5.3	Les différentes approches	46
5.3.1	Les données	47
5.3.2	La méthode des Calls	48
5.3.3	La méthode des volatilités implicites	51
5.3.4	La combinaison des deux méthodes	55
5.4	Choix d'une méthode et tests	58
5.4.1	Etude des rendements du modèle de Black et Scholes	59
5.4.2	Etude des rendements du modèle de Dupire	59
5.4.3	Comparaison des queues de distribution	60
5.5	Conclusion	61
6	Le modèle de Hull et White	63
6.1	Généralités sur les taux	63
6.2	Les modèles de type Ho et Lee ou Hull et White	64
6.2.1	Leur intérêt	64
6.2.2	Le modèle de Ho et Lee	64
6.2.3	Le modèle généralisé de Hull et White	65
6.2.4	Le choix d'un modèle	65
6.3	La théorie du modèle	66
6.4	La calibration des paramètres	68
6.5	Les différentes approches	69
6.5.1	Les données	69
6.5.2	La méthode continue	70
6.5.3	La méthode discrète	72
6.6	Conclusion	76
7	Conclusions sur les modèles	77
III	Modélisation et résultats	79
8	Les problématiques du pricing	81
8.1	Les hypothèses actuarielles	81
8.1.1	Les frais	81
8.1.2	La mortalité	82
8.1.3	Les rachats	83
8.1.3.1	Rachats déterministes	83
8.1.3.2	Rachats dynamiques	84
8.1.4	Le niveau de la garantie	85
8.1.5	Le portefeuille	85
8.2	Les hypothèses financières	85
8.2.1	Les corrélations	85
8.2.2	Les obligations	86
8.2.3	Les actions et le monétaire	87
8.2.4	Le facteur d'actualisation	87
8.3	Calcul du Hedge Cost	88
8.3.1	Pertes liées à la garantie en cas de vie	88
8.3.2	Pertes liées à la garantie en cas de décès	89

8.3.3	La VAP des engagements de l'assuré	89
8.3.4	Moyenne sur les simulations et Hedge Cost	89
9	Pricing avec les nouveaux modèles	91
9.1	Le(s) produit(s)	91
9.2	Les données	92
9.3	Pricing par les formules fermées	93
9.3.1	En absence de Ratchet	93
9.3.2	En présence de Ratchet	95
9.3.3	Résultats	95
9.4	Les résultats du pricing	95
9.4.1	Black et Scholes combiné à Vasicek	96
9.4.2	Dupire combiné à Hull et White	96
9.5	Conclusions	96
10	Tests de sensibilité et étude de VaR	99
10.1	Tests de sensibilité	99
10.1.1	Variations des hypothèses actuarielles	99
10.1.1.1	La présence du cliquet	99
10.1.1.2	La mortalité	100
10.1.1.3	Les rachats	102
10.1.2	Variations des hypothèses financières	104
10.1.2.1	L'allocation d'actifs	104
10.1.2.2	La corrélation	105
10.1.2.3	Impact sur la nappe de volatilité	105
10.1.2.4	Impact sur la courbe des taux	106
10.1.3	Conclusions	107
10.2	Etude de VaR	107
10.2.1	Le besoin en fonds propres sous Solvabilité 2	108
10.2.2	Choix de la probabilité	108
10.2.3	Les mesures de risque	110
10.2.3.1	La Value at Risk (VaR)	110
10.2.3.2	La Tail Value at Risk (TVaR)	110
10.2.4	Choix d'un critère	110
10.2.5	Calculs de VaR	111
10.2.6	Conclusions	112
11	Conclusions sur la modélisation	113
	Conclusion générale	115
	Bibliographie	117
	 Annexes	 120
A	Rappels, théorèmes et méthodes	121
A.1	Généralités sur les processus stochastiques	121
A.2	Théorèmes importants	123
A.3	Méthodes utilisées	124
A.4	Détails sur l'algorithme de Newton-Raphson	126

B	Modèle de Dupire : Démonstrations	129
B.1	Formule fondamentale : La volatilité locale en fonction du prix de l'option	129
B.2	Formule : La volatilité locale en fonction de la volatilité implicite	131
B.3	Dérivées partielles de la volatilité implicite	131
C	Modèle de Hull et White : Démonstrations	133
C.1	Fonctionnelle des taux zéro-coupon	133
C.2	Dérivées partielles du modèle de Nelson-Siegel	134
C.3	Formule discrétisée pour θ	135
D	Ouverture sur le CPPI	141
D.1	Définition	141
D.2	Fonctionnement	141
D.3	Le risque de Gap	142
D.4	Les avantages et inconvénients du CPPI	143

Première partie

Introduction et contexte

Chapitre 1

Présentation du sujet

Dans le cadre de la troisième année de formation à l'Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie (ISUP) et pour l'obtention du diplôme de Statisticien mention Actuariat, j'ai effectué mon stage de fin d'études pendant 6 mois chez BNP Paribas Assurance à Rueil Malmaison (92). Au sein du service Actuariat Finance du département Direction Epargne Monde (DEM), le but principal de ma mission était d'étudier plusieurs modèles financiers dans le but de les utiliser pour tarifier des produits en unités de comptes avec garanties en cas de vie (Variable Annuities).

Pour tarifier et suivre les risques associés à ce genre de produits, il est nécessaire de disposer de modèles stochastiques d'évolution des actifs financiers. Cela permet de simuler les différents scénarios possibles concernant l'épargne du client, qui est investie sur les marchés financiers.

A l'heure actuelle, le service utilise des modèles financiers classiques et parfois jugés inadéquats dans certaines conditions, comme le modèle de Vasicek par exemple, qui ne permet pas de reproduire toutes les courbes de taux existantes (notamment la courbe inversée). Dans le même temps, des modèles plus récents apparaissent, comprenant des innovations importantes. La théorie sur les modèles financiers évolue et il est important pour les actuaires de rester à la pointe dans ce domaine.

C'est pourquoi il fallait étudier de nouveaux modèles, plus récents et plus robustes. L'idée sous-jacente était que les modèles étudiés dans le cadre du stage soient meilleurs que ceux utilisés jusqu'à présent et, par ailleurs, qu'ils puissent s'adapter à plusieurs marchés à l'international. Par « meilleurs » on entend que ces nouveaux modèles doivent être plus complets et plus consistants par rapport au marché (reproduire toutes les courbes de taux par exemple, et tenir compte de l'état actuel du marché).

Ce mémoire retrace le travail effectué durant ces 6 mois et se divise donc en deux parties distinctes mais intimement liées. La première partie représente le véritable travail de recherche que j'ai été amené à effectuer pendant le stage, la seconde est quant à elle une application des résultats sur un cas pratique.

La première partie traite donc de l'étude des modèles financiers à proprement parler et constitue la partie théorique du stage. Les problématiques de calibration, d'implémentation et de consistance des modèles y sont précisément abordées. Toutes les démonstrations sont par ailleurs fournies dans les annexes B et C. Les deux modèles étudiés n'ayant pas encore été utilisés au sein du service, l'essentiel de mon travail s'est fait à partir de notes internes et d'articles originaux des auteurs de ces modèles.

La seconde partie est quant à elle consacrée à la modélisation d'un produit de type Variable Annuity. On y étudie notamment les problématiques et les techniques de tarification des garanties. L'idée sous-jacente de cette seconde partie étant d'abord de tester la consistance des modèles étudiés en terme de pricing (modèles « market consistant »). On souhaitait ensuite étudier la sensibilité du prix de la garantie aux différents paramètres actuariels et financiers. Elle se termine en abordant la problématique des réserves pour couvrir ces garanties. On pourra alors conclure et évoquer au passage une possibilité de sujet d'ouverture.

Ce sujet m'a permis de mettre en application une grande partie des connaissances théoriques acquises pendant la formation sur les modèles financiers, ce qu'il me semble indispensable de maîtriser pour un actuair. J'ai également pu apprendre considérablement sur les difficultés d'ordre pratique que l'on peut rencontrer lorsque l'on travaille sur la modélisation des actifs, notamment lors de la calibration ou de l'implémentation.

D'autre part il me semblait préférable pour un mémoire d'actuariat de pouvoir concilier une partie étude profonde et détaillée sur les modèles ainsi qu'une application pratique, en l'occurrence une modélisation d'un produit d'assurance utilisant cette étude.

Enfin, les produits de type Variable Annuities, bien que moins en vue pendant ces derniers temps de baisse des marchés financiers, n'en demeurent pas moins des produits d'avenir. A posteriori, une expérience significative dans ce secteur me semblait donc incontournable et j'ai pu constater mon attrait pour ce type de sujets.

Chapitre 2

Présentation de l'entreprise

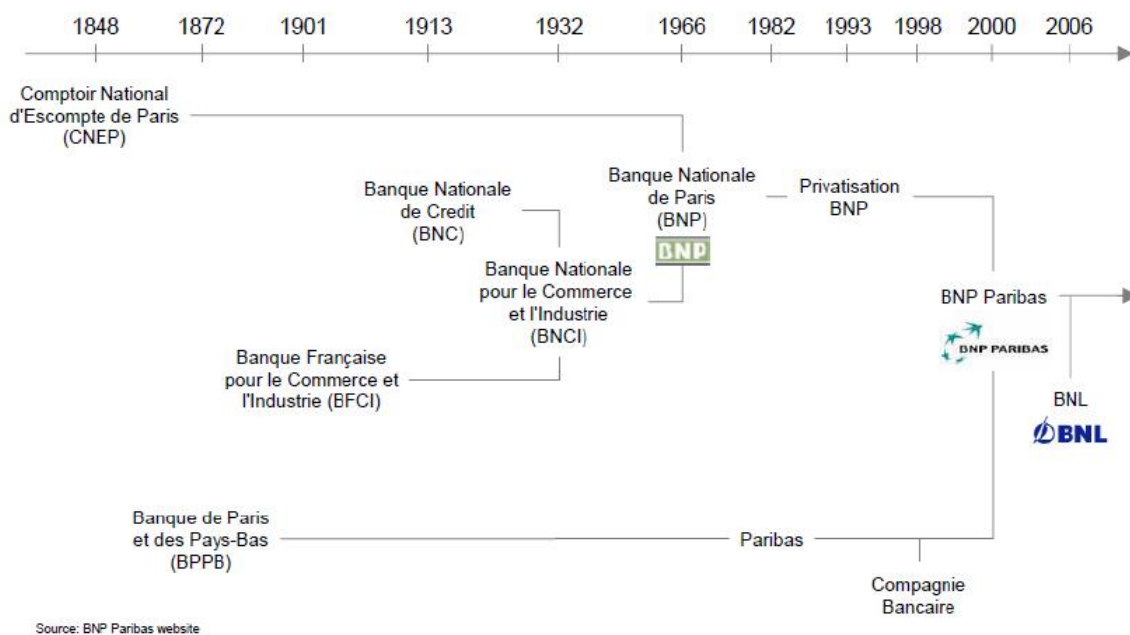
Le groupe BNP Paribas

BNP Paribas, né le 23 mai 2000 de la fusion de la Banque Nationale de Paris (BNP) et de Paribas, est un **leader européen des services bancaires et financiers**, avec une présence significative et en croissance aux Etats-Unis et des positions fortes en Asie. Le groupe possède l'un des plus grands réseaux internationaux, avec une présence dans plus de 85 pays et 173 200 collaborateurs : 132 700 en Europe, dont 19 400 en Italie et 64 200 en France et Dom Tom ainsi que 15 200 en Amérique du Nord et 9 500 en Asie.

L'essentiel de son activité se trouve dans :

- La banque de détail,
- La banque de financement et d'investissement,
- L'Asset Management et Services.

L'historique du groupe est résumé dans le graphique suivant :



Historique du groupe BNP Paribas

BNP Paribas est la première entreprise française et la cinquième banque mondiale, mais également la première banque de la zone Euro d'après le classement *Forbes Global 2000*¹ de 2008. C'est aussi la banque mondiale de l'année 2008 d'après le magazine *The Banker*, la septième marque bancaire mondiale par sa valeur (*Brand Finance* - Février 2009) et la huitième banque la plus sûre au monde (*Global Finance* - Février 2009).


En Juin 2009, BNP Paribas possède une capitalisation boursière de 50 milliards d'euros. C'est aussi la troisième banque de la zone euro au regard des dépôts (avec 400 milliards d'euros de dépôts), et si l'on considère BNP Paribas et Fortis, elle passe au premier rang avec 540 milliards d'euros de dépôts.


Les notations relatives au crédit à long termes sont actuellement les suivantes :

- Standard & Poor's : AA avec prévision négative (notation revue le 28 janvier 2009),
- Moody's : Aa1 avec prévision négative (prévision revue le 16 janvier 2009),
- Fitch : AA avec prévision négative (prévision revue le 3 février 2009).

Les résultats financiers du groupe, en forte progression depuis plusieurs années, sont en baisse en 2008 en raison de la crise financière mais dans des proportions moindres que la plupart de ses concurrents :

2008 : Chiffres clés			
	2008	2007	2008/2007
● Produit net bancaire	27 376 M€	31 037 M€	-11,8%
● Frais de gestion	-18 400 M€	-18 764 M€	-1,9%
● Résultat brut d'exploitation	8 976 M€	12 273 M€	-26,9%
● Coût du risque	-5 752 M€	-1 725 M€	x3,3
● Résultat avant impôt	3 924 M€	11 058 M€	-64,5%
● Résultat net part du groupe	3 021 M€	7 822 M€	-61,4%
● ROE après impôt	6,6%	19,6%	
● Dividende *	1,00 €	3,35 €	


Un résultat net de 3 milliards d'euros en dépit d'une aggravation de la crise financière sans précédent depuis septembre


BNP PARIBAS

Résultats 31.12.2008 : 4
* Soumis à l'approbation de l'AG

Résultats de BNP Paribas pour 2008

1. Forbes Global 2000 est un classement annuel des 2000 plus grandes entreprises mondiales publié par le magazine américain Forbes. Le classement est fondé sur quatre critères : les revenus, le résultat d'exploitation, l'actif comptable et la valeur boursière

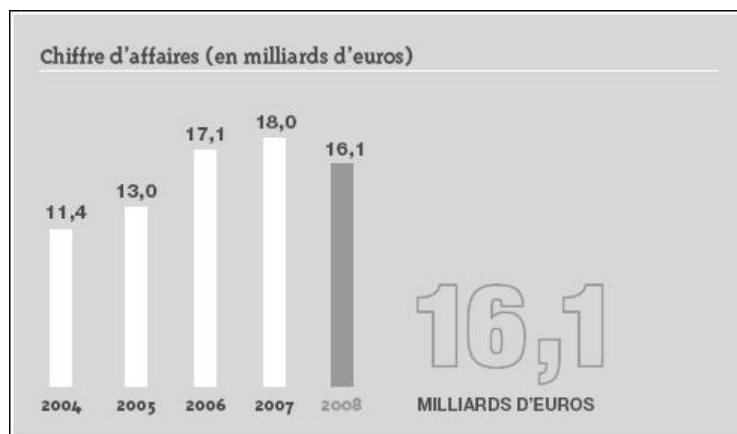
BNP Paribas Assurance

BNP Paribas Assurance, filiale de BNP Paribas, conçoit et commercialise dans 41 pays ses produits et services sous deux marques :

- BNP Paribas pour les produits distribués par le réseau des agences BNP Paribas en France,
- Cardif pour les autres réseaux et partenaires distributeurs, en France comme à l'international.

En janvier 2009, *Standard & Poor's* a attribué la notation AA aux deux entités opérationnelles de BNP Paribas Assurance. BNP Paribas Assurance se positionne en France comme le **quatrième groupe** d'assurance vie et comme un acteur significatif dans l'assurance dommages. Il est **leader mondial** en assurance des emprunteurs.

Son chiffre d'affaire suit la progression suivante :



Chiffre d'affaire de BNP Paribas Assurance

BNP Paribas exerce son activité dans trois grands métiers :

- En **épargne**, BNP Paribas Assurance commercialise des contrats d'assurance vie aux particuliers dans onze pays. En France, il propose également des contrats collectifs de retraite, d'indemnités de fin de carrière ou de préretraite aux entreprises. En épargne individuelle, BNP Paribas Assurance propose à des particuliers des contrats d'assurance vie multi-supports et multi-gestionnaires régulièrement cités par la presse économique et financière. Le chiffre d'affaire de l'épargne pour 2008 est de 12.7 milliards d'euros.
- En **prévoyance**, BNP Paribas Assurance propose une large gamme de produits : assurance des emprunteurs, assurance des factures, protection des moyens de paiement, extension des moyens de garantie, gap et prévoyance individuelle. En France, il offre des contrats collectifs standards et personnalisés aux grandes entreprises comme aux PME. Le chiffre d'affaire de la prévoyance pour 2008 est de 3.4 milliards d'euros.
- En **assurance dommages**, BNP Paribas Assurance offre en France des produits multi-risques habitation, automobile, assurance scolaire, assistance voyage, protection juridique au travers de Natio Assurance, détenue à parité avec Axa.

La répartition du chiffre d'affaire en terme de métier et de situation géographique est la suivante :



Répartition du chiffre d'affaire de BNP Paribas Assurance entre l'Épargne et la Prévoyance

Cardif est présente dans 41 pays, dont cinq en Amérique latine et sept en Asie. Elle assure plus de 50 millions de personnes dans le monde. Dans les prochaines années, la part de l'international dans le chiffre d'affaires global devrait continuer à croître. Le graphique suivant représente toutes les implantations de BNP Paribas dans le monde, au travers de BNP Paribas Assurance et de Cardif.



Les implantations de BNP Paribas Assurance dans le monde

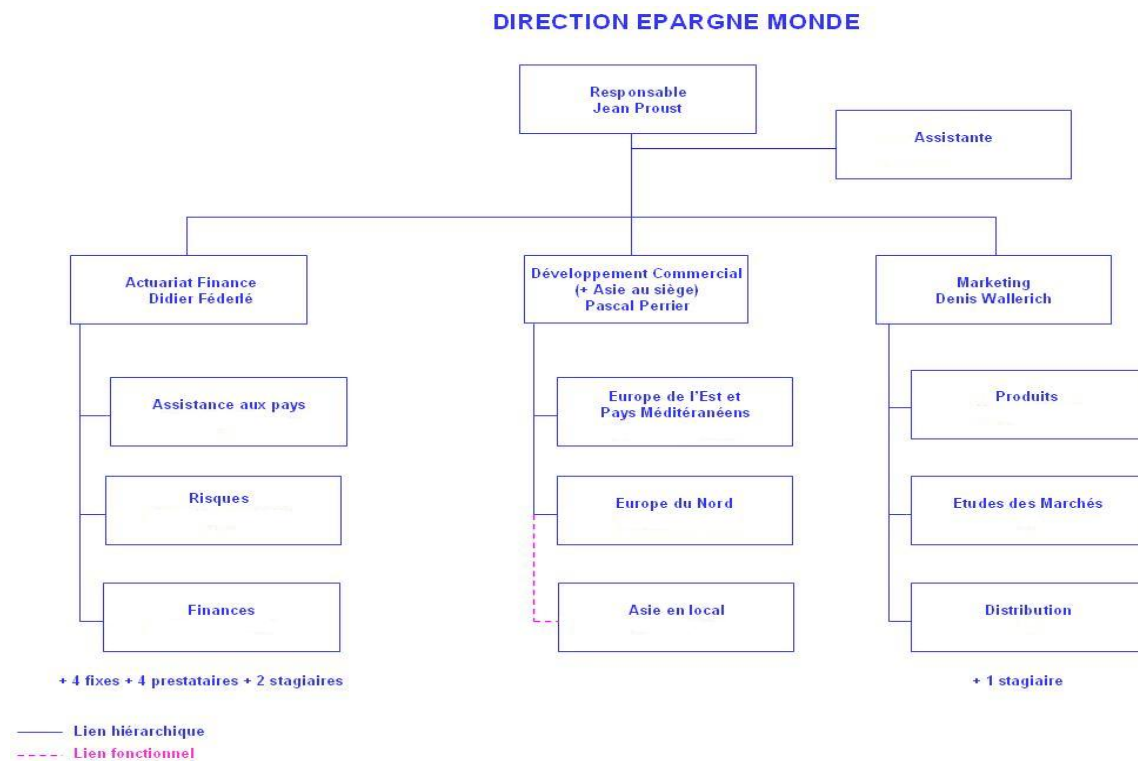
La Direction Epargne Monde (DEM)

La Direction Epargne Monde (DEM) sert d'intermédiaire entre la Direction Générale de Cardif et les différents pays pour traiter l'ensemble des sujets relatifs à l'épargne, en lien avec les équipes d'actuariat locales, y compris celle de la France.

La DEM est divisée en trois services distincts :

- **Marketing** : Chargé du développement marketing à long terme, du suivi de l'action commerciale, de la conception des produits et du suivi des partenaires,
- **Développement Commercial** : Chargé du développement des réseaux de distribution,
- **Actuariat Finance** : Chargé du support technique des partenaires et de l'identification des risques à priori (tarification), du provisionnement, du suivi des risques à posteriori (reporting), et enfin du suivi des résultats (suivi de la rentabilité).

La disposition hiérarchique du département est donnée ci-dessous :



Organigramme de la Direction Epargne Monde (DEM)

Chapitre 3

Les Variable Annuities

3.1 L'environnement

Dans le cadre de l'assurance vie, les contrats en euros sont des contrats d'épargne proposant une rémunération annuelle garantie des sommes investies quelles que soient les performances des marchés financiers. En d'autres termes, en investissant sur un contrat en euros, l'épargne ne peut jamais baisser.

Contrairement aux contrats en euros, un contrat en unités de compte est un contrat proposant plusieurs supports d'investissement sur lesquels le souscripteur répartit son épargne en fonction de ses objectifs en terme de rentabilité, de risque et de disponibilité. La valeur de l'épargne est donc dépendante de l'évolution des marchés financiers.

Un produit Variable Annuity (VA) est un produit en unités de compte, permettant donc de bénéficier de rendements du marché potentiellement élevés, combiné à des garanties visant à « sécuriser » l'investissement.

Produits phares du marché nord-américain, les Variable Annuities sont des produits d'avenir dans de nombreux pays, notamment dans le domaine de l'épargne-retraite ou simplement pour répondre au besoin croissant de garanties pour l'investisseur. En effet à l'heure actuelle et dans de nombreux pays, l'environnement de l'épargne-retraite se caractérise par :

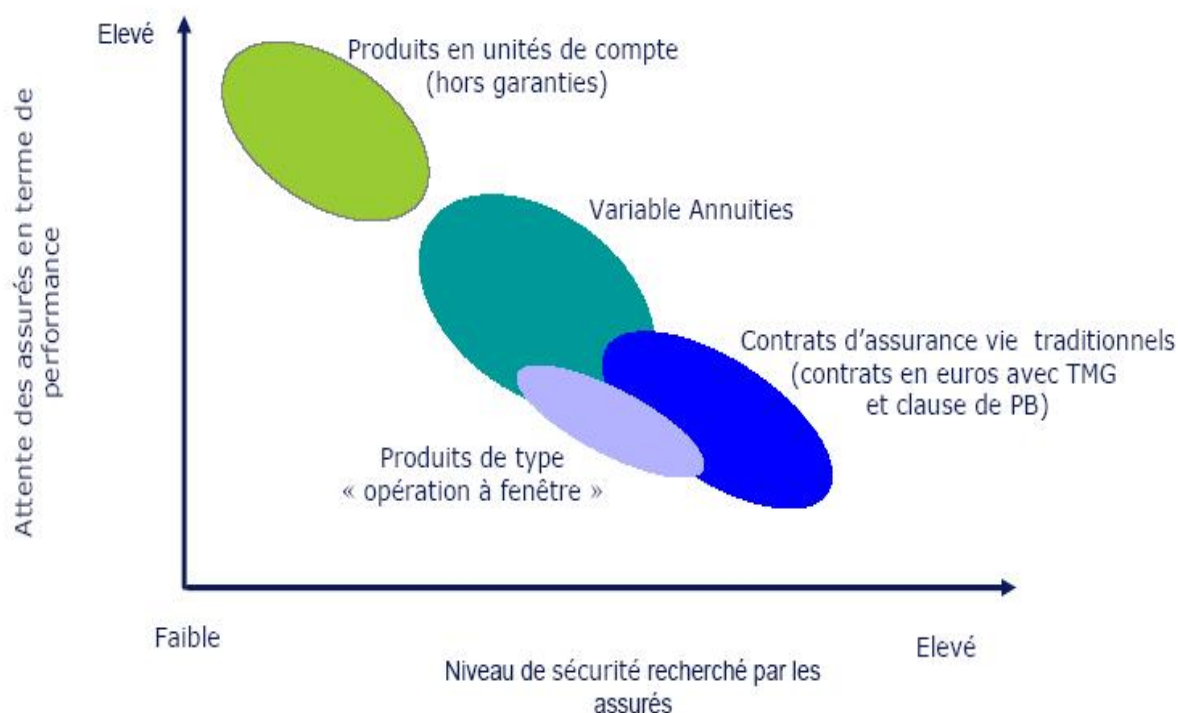
- des réformes des retraites et un allongement général de la durée de vie qui rendent nécessaire la constitution d'un complément de retraite par capitalisation,
- des marchés financiers en période de fortes turbulences qui rendent nécessaire de bénéficier de garanties financières.

Dans ce contexte, les clients désireux d'épargner peuvent avoir différentes attentes vis-à-vis des assureurs et, dans tous les cas, les Variable Annuities peuvent répondre à ces besoins :

- se constituer une épargne afin de financer leur retraite en raison de l'allongement de la durée de celle-ci,
- se prémunir contre les mouvements défavorables des marchés financiers, contrairement aux produits en Unités de Comptes purs,
- obtenir de meilleurs rendements que les produits en Euros classiques ou que les produits en Unités de Comptes à dominante obligataire,
- avoir des produits souples et modulables selon leurs besoins.

Du point de vue de l'assureur, tout incite à favoriser la vente de contrats en Unités de Compte car le risque est porté par l'assuré, l'exigence de fonds propres est moindre (les contraintes réglementaires sont différentes : les fonds propres doivent représenter au moins 4 % des provisions mathématiques dans le cas des contrats en euros et 1 % des provisions mathématiques dans le cas des contrats en unités de compte) et la rentabilité est meilleure. L'ajout des différentes garanties permet d'attirer la clientèle des marchés les plus conservateurs.

En terme de positionnement sur le marché par rapport aux attentes des assurés, la situation des Variable Annuities et des autres grandes familles de produits est donnée dans le graphique suivant (source : Deloitte) :



Positionnement des Variable Annuities sur le marché

Bien qu'initialement développés sur le marché nord-américain, les produits Variable Annuities ne sont pas totalement nouveaux pour le marché européen de l'assurance puisque des initiatives récentes ont été prises par certains assureurs au Royaume-Uni, en Espagne et en France notamment (exemple : Axa Accumulator).

Ces produits sont également en plein développement sur les marchés asiatiques avec une croissance moyenne à trois chiffres sur la période 2001-2006 au Japon, favorisée notamment par la faiblesse des taux d'intérêts.

Il est donc nécessaire de perfectionner les méthodes de tarifications des produits de type Variable Annuities, notamment par le biais des modèles, et ce même si la conjoncture actuelle est peu propice à la vente de ces produits. En effet, les récents déboires des marchés financiers ont poussé les épargnants à privilégier les supports en euros, classiques et moins risqués. Cependant, la plupart des assureurs continuent de développer leurs méthodes de tarification en attente d'une reprise qui commence peu à peu à se profiler.

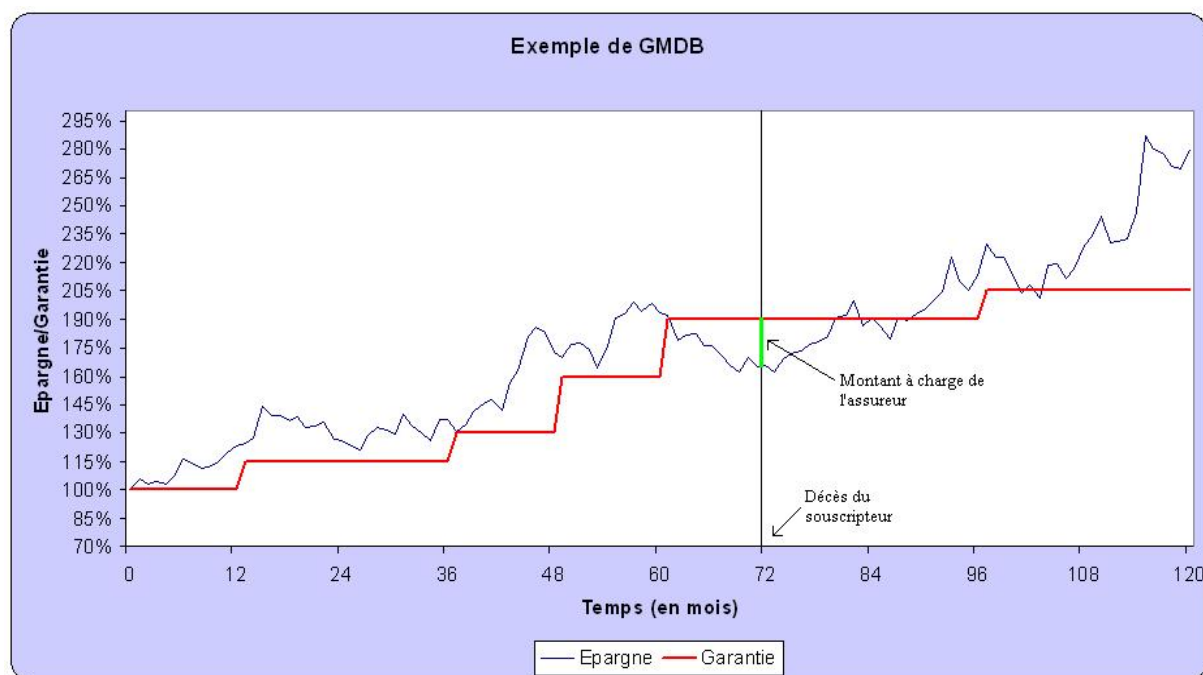
3.2 Les différentes garanties

Il existe principalement 4 types de garanties, connues sous les noms de GMxB (Guaranteed Minimum x Benefit) ou GLB's (Guarantee Living Benefits), et que l'on se propose de détailler dans un premier temps.

3.2.1 Guaranteed Minimum Death Benefit - GMDB

Il s'agit de la seule garantie qui se déclenche au décès du souscripteur. Il en existe plusieurs variantes :

- **Premium Return** : Le capital versé est égal au maximum entre la somme des primes versées et la valeur du fond.
- **Roll-Up** : Cette fois le capital versé est égal au maximum entre la somme des primes versées revalorisée à un taux fixe prédéterminé et garanti et la valeur du fond.
- **Ratchet** : Le capital versé est égal au maximum entre le niveau le plus haut atteint (en général à une date anniversaire) par le fond et la valeur du fond.
- **Mix** : Il s'agit du niveau maximum entre le Ratchet et le Roll-Up.



Exemple de GMDB

Commentaires :

L'exemple ci-dessus est celui d'une GMDB avec Ratchet annuel de 15 % plafonné à 205 %.

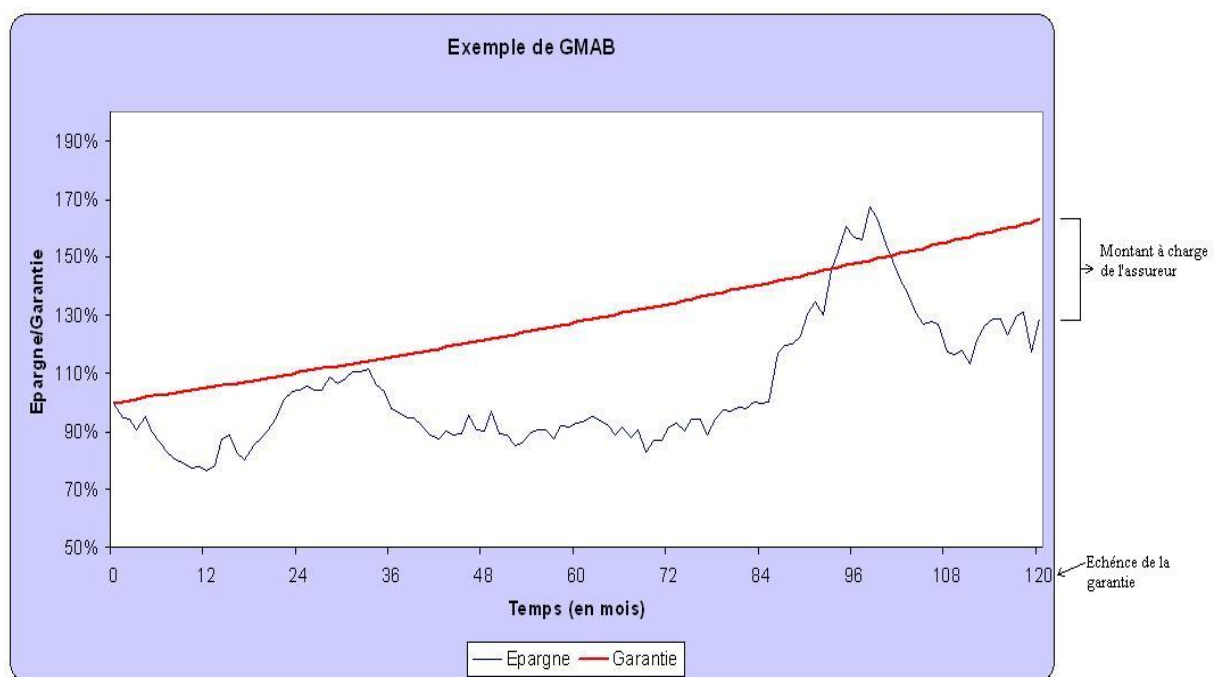
On peut y observer les augmentations par paliers du niveau de la garantie. A chaque anniversaire du contrat, si le niveau du fond a augmenté de 15 %, le niveau de la garantie est automatiquement réhaussé de 15 % également. Si une situation particulièrement favorable entraînant une hausse du niveau du fond de plusieurs paliers se présente, le niveau de la garantie est également réévalué du même nombre de paliers (sur cet exemple, cela se produit notamment

aux quatrième et cinquième anniversaires), sauf si cela implique le dépassement du plafond. On remarque qu'entre 8 et 10 ans, le niveau du fond augmente de plus de 15 %, néanmoins le plafond de 205 % empêche la garantie d'être réhaussée à un niveau supérieur.

Si l'assuré décède après 6 ans, la valeur de son épargne est inférieure au niveau de la garantie : c'est un cas défavorable pour l'assureur qui devra prendre en charge le différentiel.

3.2.2 Guaranteed Minimum Accumulation Benefit - GMAB

Il s'agit d'une garantie de capital minimum en cas de vie. Elle garantit au souscripteur un plancher sur son investissement sur une période donnée. De la même façon que pour la GMDB, ce plancher peut prendre différentes formes (Prime Return, Roll-Up, Ratchet).



Commentaires :

Le graphique précédent est un exemple de GMAB avec Roll-Up au taux de 5 % l'an. Le niveau de la garantie évolue donc de manière constante pendant toute la durée de vie du contrat. Ce niveau demeure totalement indépendant de l'évolution de l'épargne du client, et donc indépendant des fluctuations observées sur les marchés financiers.

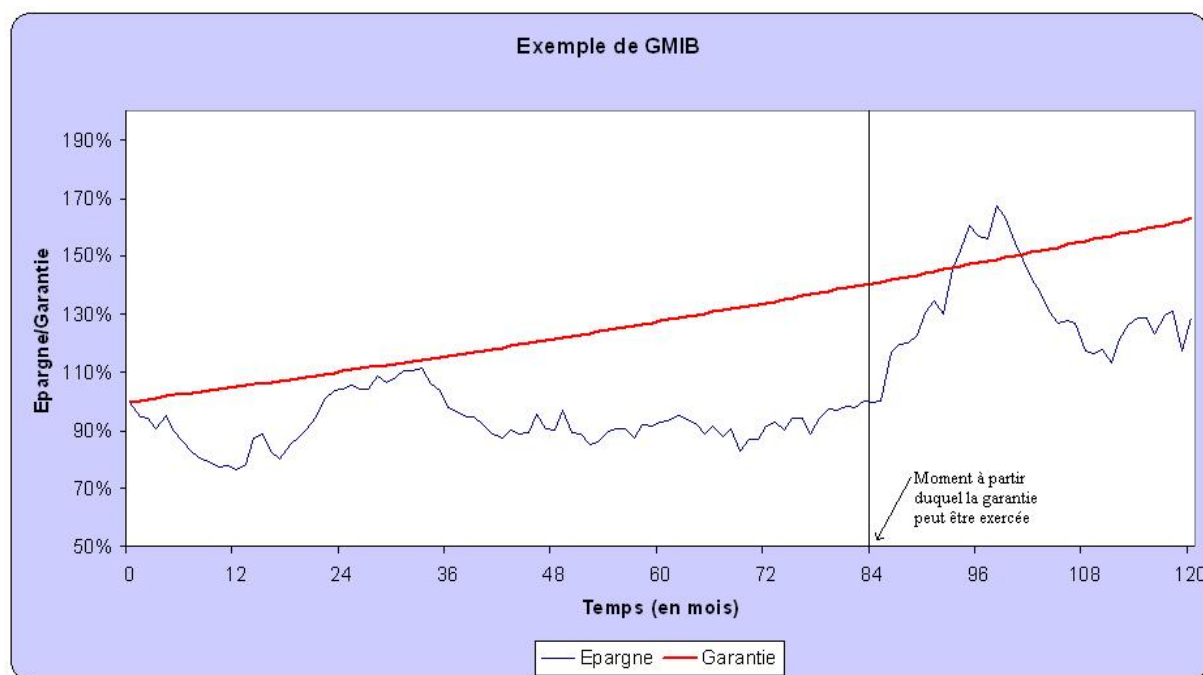
A échéance (après 10 ans dans cet exemple), le niveau de la garantie est d'environ 163 %. Or le niveau du fond est inférieur à ce seuil. Il s'agit là aussi d'un cas défavorable pour l'assureur qui enregistre une perte car il doit prendre le différentiel à sa charge.

3.2.3 Guaranteed Minimum Income Benefit - GMIB

Il s'agit de la garantie de revenu minimum en cas de vie. Ce contrat garantit au souscripteur une rente viagère indépendamment de la performance des marchés. L'option peut être exercée après un certain nombre d'années après la souscription (par exemple 10 ans) ou après un certain âge (par exemple 70 ans).

Le capital constitutif pour le calcul de la rente est le maximum entre la valeur du fond et le niveau de la garantie à l'instant où l'assuré demande le début du paiement de sa rente.

La base de la rente peut être garantie en Roll-Up, en Ratchet, ou encore le plus élevé des deux.



Commentaires :

Sur le graphique précédent, la base de la rente est garantie en Roll-Up, toujours à 5 %. Il s'agit donc du même scénario que pour la GMAB précédente. Ici la date clé du contrat n'est plus l'échéance, mais une date à priori inconnue par l'assureur.

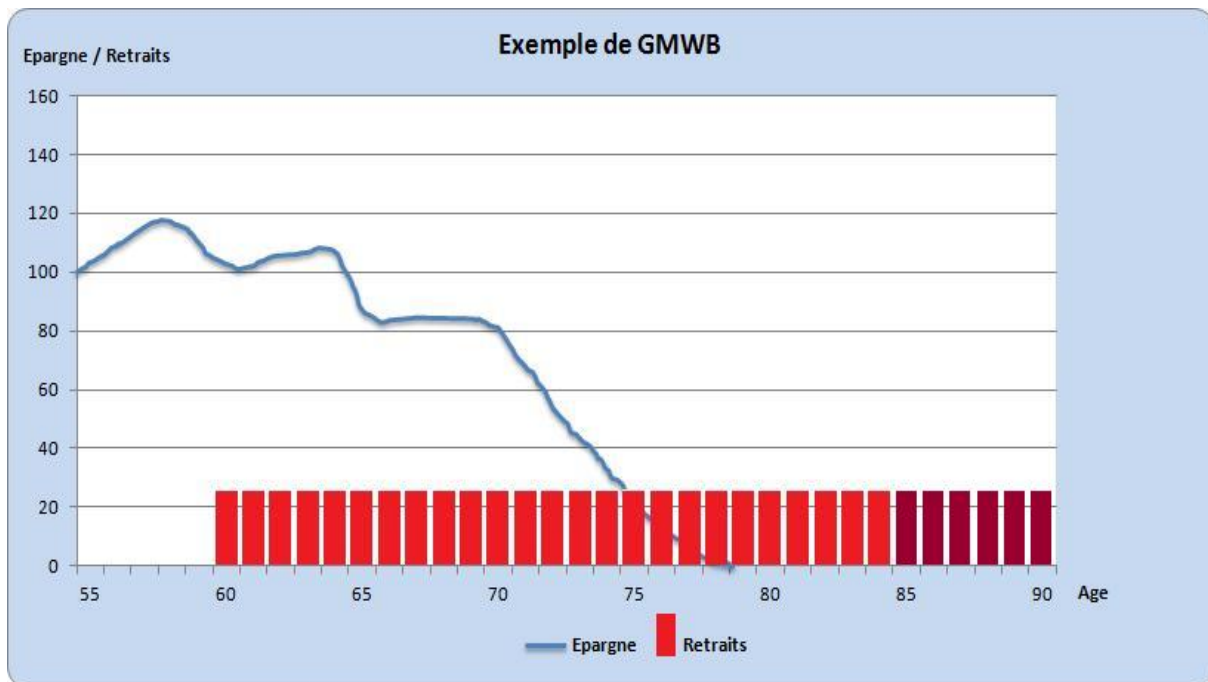
Supposons que l'assuré peut exercer sa garantie après 7 ans. S'il l'exerce immédiatement, le niveau de la garantie est nettement supérieur à la valeur de l'épargne. Or l'assureur est engagé à verser au client une rente calculée sur le maximum. C'est donc de nouveau un cas défavorable pour l'assureur.

3.2.4 Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit - GMWB

Il s'agit de la garantie de retraits minimums en cas de vie. Elle donne la possibilité de retirer x % des sommes versées par an quelles que soient les performances des marchés financiers. Ce pourcentage x est fixé mais il est possible pour l'assuré de retirer un pourcentage y supérieur à x , néanmoins il s'expose dans ce cas à des pénalités de rachat portant sur le différentiel $y-x$.

La garantie est limitée dans le temps et il existe différentes variantes (par exemple il existe parfois une période d'attente avant l'entrée en vigueur de la garantie).

Il existe aussi une garantie de retrait qui n'est plus limitée dans le temps, on parle alors de **GMWB for Life**. Il existe en France des produits GMWB proposés par Axa (Accumulator) ou Allianz.



Exemple de GMWB

Commentaires :

Sur le graphique précédent, on représente un exemple simplifié du fonctionnement d'une GMWB. On remarque que quelles que soient les performances des marchés financiers, l'assuré peut retirer le pourcentage x des sommes investies. Dans cet exemple, la garantie n'est pas limitée dans le temps puisqu'elle permet à l'assuré de retirer le pourcentage x à partir de 60 ans et jusqu'à son décès.

De 55 à 60 ans, on se trouve dans la phase d'accumulation. La seconde phase est la mise à disposition du complément de retraite de l'assuré. Celle-ci se termine lorsque la provision mathématique du contrat s'annule. On passe alors dans une phase de rente viagère.

3.3 Contexte de l'étude

Lorsqu'il tarifie un produit de type Variable Annuity, l'actuaire est amené à faire plusieurs hypothèses. Certaines d'entre elles sont des hypothèses actuarielles portant sur la mortalité, la répartition de la population ou les rachats. Mais il est aussi amené à choisir des modèles financiers pour simuler l'évolution des actifs sur lesquels le client investit son épargne.

Il existe en réalité plusieurs méthodes pour pricer des Variable Annuities. Les deux principales et qui seront abordées dans ce mémoire sont la méthode de Monte Carlo d'une part, et la méthode par formules fermées d'autre part. Dans les deux cas l'actuaire utilise une approche stochastique en univers risque neutre pour simuler l'évolution du cours du sous-jacent (Monte Carlo) ou simplement calculer des prix d'options européennes (formules fermées). On ne cherche pas à déterminer la dynamique historique du cours du sous-jacent comme cela est traditionnellement effectué en gestion du risque.

En effet nous verrons que la tarification des garanties revient en réalité à un pricing d'option(s) de vente (nous verrons par la suite qu'il peut s'agir d'un Put ou d'une somme de Puts pondérés par des probabilités de survie ou de décès selon le cas). Ce pricing s'effectue nécessairement sous probabilité risque neutre sous l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA). Nous verrons par la suite que la méthode de Monte-Carlo permet de pricer toutes les garanties, contrairement aux formules fermées.

Concernant les investissements du client, il sont généralement alloués dans les trois marchés suivants :

- Le marché **Actions** (Equity)
- Le marché **Obligataire** (Bond)
- Le marché **Monétaire** (Money)

Pour mener à bien la modélisation d'un produit de type Variable Annuity, il est donc primordial, dans un premier temps, de disposer de plusieurs modèles financiers consistants et robustes pour chacun de ces marchés. Autrement dit, il est nécessaire d'avoir à disposition des modèles de type **Actions**, pour modéliser l'évolution de la part investie en actions, et des modèles de type **Taux** pour modéliser l'évolution de la part investie en obligations ou monétaire ainsi que pour calculer le facteur d'actualisation.

Ces modèles doivent également être faciles d'implémentation et flexibles pour pouvoir s'adapter à différents marchés à l'international.

L'objectif de la première partie du mémoire est donc d'étudier deux modèles financiers qui permettront de générer des trajectoires d'évolution des actifs financiers qui seront utilisées lors du pricing par la méthode de Monte-Carlo. On se place donc en univers risque-neutre.

Habituellement, lorsque le service tarifie ce type de produits, les modèles utilisés sont les suivants : le modèle de **Black et Scholes** pour les actions, et le modèle de **Vasicek** pour les taux. Pour différentes raisons que nous aborderons par la suite, on ne peut pas se contenter uniquement de ces modèles. Les deux modèles, plus évolués, qui seront étudiés dans cette première partie sont : le modèle de **Dupire** pour les actions, et le modèle de **Hull et White** pour les taux.

Une fois que les modèles financiers auront été étudiés et testés, on pourra considérer qu'une partie des hypothèses aura été traitée. La seconde partie du mémoire traitera des autres problématiques de la modélisation d'un produit d'assurance de type Variable Annuities. On y abordera les différentes étapes du pricing et on proposera une analyse des résultats obtenus sur le coût de

la garantie selon les modèles utilisés.

Une analyse de sensibilité sur ce coût en fonction des différents paramètres des hypothèses actuarielles et financières ainsi qu'une étude de Value at Risk (VaR), toujours sur le coût de la garantie, seront également pratiquées. Le but de l'étude de VaR étant de s'intéresser aux problématiques de provisionnement relatives aux garanties des Variables Annuities, et non pas à la gestion du risque de celles-ci.

Notons qu'un rappel sur toutes les notions relatives aux modèles financiers et à leur étude est fourni dans l'annexe A. On y rappelle notamment les généralités ainsi que les méthodes qui ont été utilisées dans le mémoire. Les théorèmes les plus importants sont également énoncés.

Deuxième partie

Etude de modèles financiers

Chapitre 4

Les modèles actuels et leurs limites

Dans la pratique, différents modèles sont utilisés pour la tarification et la couverture. Le plus souvent il s'agit du modèle de Black et Scholes pour les actions, et du modèle de Vasicek pour les taux. Il est important de les expliquer pour comprendre les nouveaux modèles et les améliorations que ces derniers peuvent apporter.

Il est donc intéressant de faire quelques commentaires sur chaque modèle (Black et Scholes d'un côté et Vasicek de l'autre) et d'établir leurs limites en termes d'utilisation ou d'adéquation au marché.

4.1 Le modèle de Black et Scholes

4.1.1 La théorie du modèle

Le modèle de F.Black et M.Scholes est un modèle financier d'évolution des actifs de type actions datant de 1973, dans lequel le prix de l'actif est un processus stochastique qui obéit à l'équation suivante, sous la probabilité historique \mathbb{P} :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q) dt + \sigma dW_t$$

avec :

- μ la dérive constante du modèle,
- q est le taux de rendement continu et constant des dividendes,
- σ la volatilité constante du cours du sous-jacent,
- W_t est un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbb{P}).

Par application du lemme d'Ito, on obtient la trajectoire suivante pour l'actif sous-jacent sous la probabilité historique \mathbb{P} :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

Par application du théorème de Girsanov, on peut passer à la probabilité risque neutre \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} . Puis, par application du lemme d'Ito, on obtient finalement la trajectoire suivante pour l'actif sous-jacent sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \overline{W}_t \right)$$

avec :

- r le taux sans risque,
- \overline{W}_t est un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbb{Q}).

La formule de Black et Scholes, quant à elle, est la célèbre formule de pricing pour les options européennes déduite du modèle. Elle peut être démontrée à partir du processus de l'actif sous-jacent sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , sous certaines hypothèses :

– **des hypothèses de marché :**

1. Le marché est en AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage),
2. il n'y a pas de frais de transaction, ni sur le sous-jacent, ni sur les options,
3. le marché est continu, tant sur le sous-jacent que sur les options,
4. les ventes à découvert sont possibles,
5. On peut emprunter ou prêter toute somme au taux sans risque, qui est supposé connu et constant sur la durée de l'option,
6. l'option est européenne.

– **des hypothèses sur le sous-jacent :**

1. Le cours du sous-jacent suit un Mouvement Brownien Géométrique,
2. la volatilité est connue à l'avance et est constante,
3. le sous-jacent est parfaitement divisible.

On peut alors obtenir une formule fermée pour le prix des options européennes, évalués en t et de maturité T :

$$C(S_0, K, r, t, T, \sigma, q) = S_0 e^{-q(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$P(S_0, K, r, t, T, \sigma, q) = -S_0 e^{-q(T-t)} \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)$$

avec :

$$- d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$- d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$- \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

4.1.2 La volatilité

Le concept de volatilité est une notion fondamentale qui constitue l'un des principaux outils de gestion d'un portefeuille d'options. Dans la pratique, la cotation d'options se fait de plus en plus en indiquant un chiffre de volatilité plutôt qu'une prime. Ceci démontre l'importance accordée à ce facteur par les opérateurs qui « font » le marché (« market makers »). Les intervenants sur le marché s'échangent alors des anticipations de volatilité.

Surtout, la volatilité est un paramètre primordial dans l'évaluation de la prime d'une option. Il est important de bien avoir à l'esprit les principes relatifs à la volatilité sur les marchés d'options pour aborder les limites du modèle de Black et Scholes.

4.1.2.1 Volatilité historique et volatilité implicite

On peut distinguer deux types de volatilité, qu'il est nécessaire de ne pas confondre :

- **La volatilité historique** : Elle correspond au niveau de volatilité atteint dans le passé. Elle se calcule sur l'historique de l'évolution des cours du sous-jacent par des formules statistiques. On la définit comme la mesure de l'écart type de la rentabilité de l'actif sur une période élémentaire passée, que l'on ramène habituellement à une base annuelle.

Il est donc nécessaire de disposer d'une base de cours périodiques de l'actif en question afin de pouvoir estimer empiriquement sa volatilité historique.

Posons :

- n le nombre d'observations (on disposera donc de $n - 1$ rendements),
- S_t le cours de l'actif à la date t ,
- $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ le rendement logarithmique associé,
- $\overline{R_t}$ la moyenne de la série des rendements.

Auquel cas, on peut estimer l'écart type des R_t par la formule classique :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^{n-1} (R_t - \overline{R_t})^2}$$

En général, la base est annuelle, il faut donc multiplier par la racine carrée du nombre de jours (ou de mois ou de semaines) d'observations.

- **La volatilité implicite** : Elle reflète le « prix du risque » attaché à une option. Sa valeur est « estimée » par le marché car elle représente les anticipations du marché sur les variations futures du support. Généralement, sur le marché d'actions, les mouvements baissiers sont accompagnés d'une volatilité implicite forte (pessimisme), et à l'inverse pour les mouvements haussiers (optimisme). La volatilité implicite permet au trader d'apprécier si il paye cher ou non son option.

Elle s'obtient à partir de la valeur de la prime, en inversant la formule d'évaluation de l'option. La méthode la plus répandue est d'utiliser la formule de Black et Scholes et l'algorithme de Newton-Raphson (approximations successives) dont le détail est donné dans l'annexe A.4.

Ainsi, à toute prime est associée un niveau de volatilité implicite. On notera que les options à la monnaie (ATM) et les options en dehors de la monnaie (OTM) sont plus sensibles aux variations de volatilité que les options dans la monnaie (ITM)¹. D'autre part, toute augmentation (diminution) de la volatilité implicite entraîne une augmentation (diminution) du prix de l'option, qu'il s'agisse d'un Call ou d'un Put (une volatilité accrue implique qu'une fluctuation plus forte du sous-jacent est attendue, augmentant la probabilité de PayOff favorable à échéance).

Dans la pratique, pour comparer le prix des options, on n'utilise que ces deux volatilités. On associe au chiffre de volatilité historique un prix d'option théorique. On peut donc comparer la volatilité implicite et la volatilité historique pour constater les sur-évaluations et les

1. Call ITM : $K < S_t$, Put ITM : $K > S_t$, Call/Put ATM : $K = S_t$, Call OTM : $K < S_t$, Put OTM : $K > S_t$

sous-évaluations des primes des options. Néanmoins il n'existe pas de formule mathématique permettant de lier ces deux volatilités.

En résumé, si l'on se place à une date quelconque, la volatilité historique mesure la volatilité passée du cours du sous-jacent sur une période donnée (par exemple 6 mois), et la volatilité implicite est la volatilité attendue sur la durée de vie de l'option par les « market makers ».

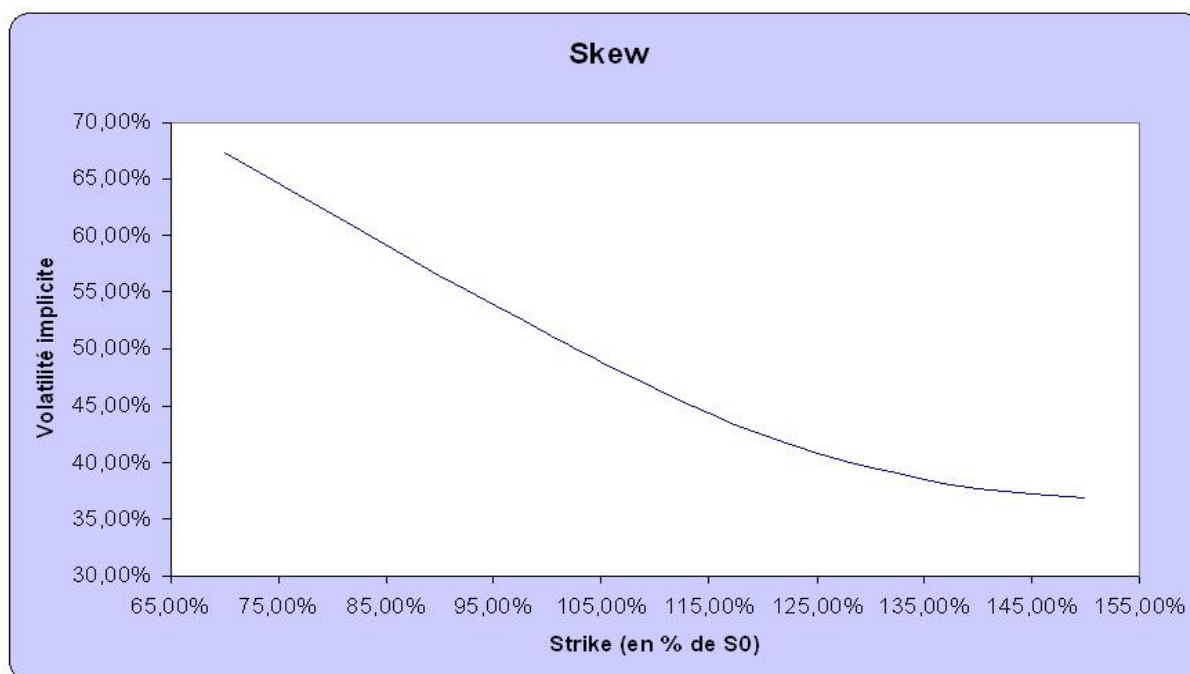
4.1.2.2 Le Skew et le Smile

On s'intéresse souvent à la valeur de la volatilité implicite en fonction du strike et de la maturité de l'option. Cela permet de construire une surface (ou nappe) de volatilité implicite. Cette surface est généralement fournie sous forme de matrice sur les plateformes d'informations financières.

Jusqu'au crash de 1987, la surface de volatilité implicite était plate, la volatilité étant supposée constante quels que soient la maturité et le strike de l'option. Depuis cette chute d'un grand marché de plus de 20 % (Dow Jones) en une seule séance, les traders ont commencé à s'intéresser à la dépendance de la volatilité au strike et à la maturité.

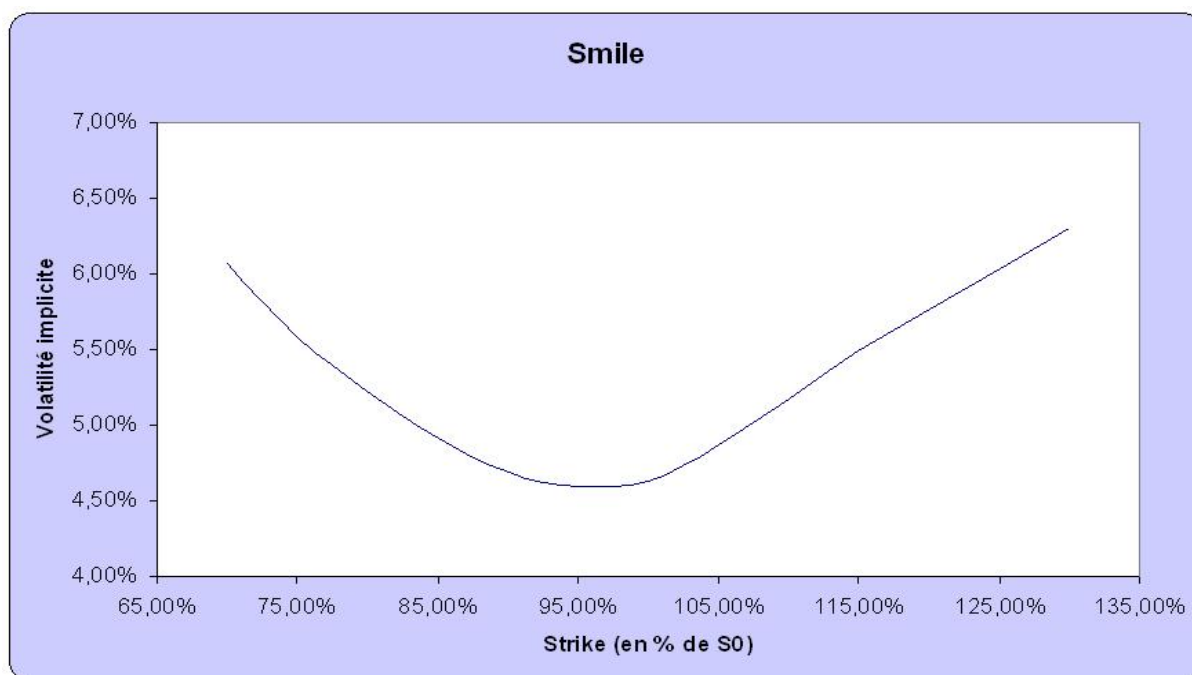
En pratique, la surface de volatilité n'est pas plate. Plus généralement, la volatilité implicite n'est pas la même pour différents strikes, et elle est également différente entre un Call et un Put. A maturité fixée, lorsque l'on trace la courbe de volatilité implicite en fonction du strike, on observe deux types de courbes, représentées par les graphiques suivants :

- Un Skew : la volatilité implicite est plus forte pour les Call « deep » ITM (largement dans la monnaie) et les Put « deep » OTM (largement en dehors de la monnaie), donc pour les options de strike très faible, et elle décroît lorsque le strike augmente.



Courbe au 24/12/2008 pour les Calls sur S&P500 de maturité 3 mois

- Un Smile : la volatilité implicite est minimale pour les options ATM (à la monnaie), et augmente pour les options dans la monnaie ainsi que pour les options en dehors de la monnaie, formant ainsi une courbe en forme de sourire.



Courbe au 28/04/03 pour les Puts sur Bund 10 ans d'échéance 22/08/03

En réalité, que l'on utilise le terme de Skew ou celui de Smile, l'idée est de décrire le phénomène général de dépendance de la volatilité implicite au strike de l'option. La plupart du temps les auteurs utilisent le terme de « Smile » pour faire référence à ce phénomène et il sera fait de même dans la suite du mémoire.

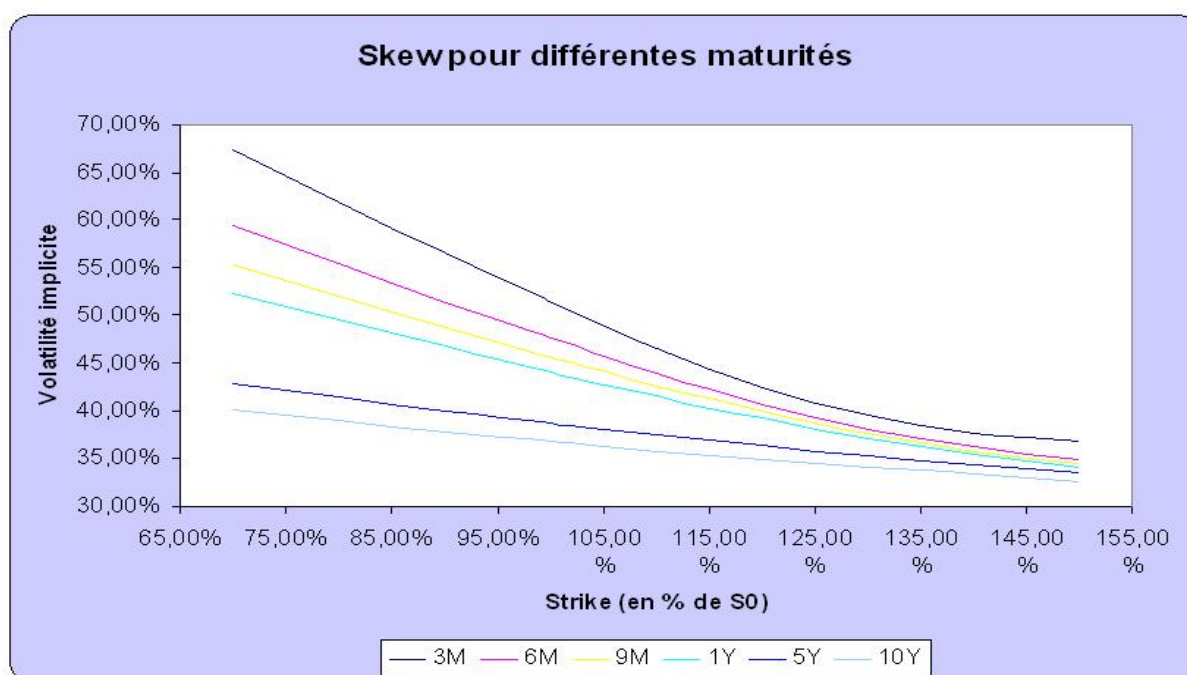
Ces dernières années, les courbes en smile ont majoritairement disparu, et l'on observe le plus souvent des courbes en Skew. On continue d'observer un Smile pour les options sur taux de change, tandis que les options sur actions présentent des courbes de volatilité en Skew la plupart du temps.

Dans notre cas on s'intéresse aux options sur actions, on se concentrera donc sur les courbes de type Skew, même si les interprétations du Smile sont semblables à celles du Skew. Commençons par les différentes observations relatives au Skew :

- Pour les Calls, la volatilité implicite décrit typiquement un Skew où elle est maximale pour les options fortement dans la monnaie et décroît lorsque le strike augmente. Cela s'explique par le fait que les investisseurs sont très intéressés à l'idée d'acheter une option qui, en cas de hausse du marché, leur permettra d'acheter le sous-jacent à un prix faible et donc de maximiser leur gain. Dans le cas où ils anticipent une hausse du marché, leur espérance de gain n'est pas limitée. Cette attirance rend ces options particulièrement chères et leur volatilité est donc élevée.
- Pour les Puts, la volatilité implicite décrit typiquement un Skew où elle est maximale pour les options fortement en dehors de la monnaie et décroît lorsque le strike augmente. Ceci est logique car les investisseurs sont prêts à payer relativement cher pour une option qui les couvre contre un crash boursier. En effet les Puts de ce type fournissant un PayOff positif si le cours du sous-jacent descend en dessous du strike, les investisseurs les voient comme une couverture contre le risque de forte chute du cours du sous-jacent. Le prix élevé de ces options augmente leur volatilité.



- Ces observations sont tout de même plus marquées du côté des Puts que du côté des Call car les investisseurs sur les marchés actions sont nettement plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse du cours du sous-jacent.
- Plus la maturité est grande et moins l'effet du Skew est important comme nous pouvons le voir sur le graphique suivant. Ceci peut s'expliquer assez simplement : pour l'exemple des Puts fortement en dehors de la monnaie, les investisseurs sont moins craintifs d'une baisse du cours du sous-jacent sur le long terme que sur le court terme. Ils espèrent en effet que sur un horizon lointain, une chute éventuelle du cours sera compensée et sont donc moins enclins à payer un prix élevé pour leur protection.



Courbes au 24/12/2008 pour les Calls sur S&P500 de différentes maturités

La surface de volatilité évolue également dans le temps. Les acteurs du marché la réévaluent sans cesse, modifiant leur anticipation de la probabilité, pour chaque prix d'exercice et chaque maturité, qu'une option ne finisse pas dans la monnaie.

4.1.3 Les limites du modèle

Le modèle de Black et Scholes repose, comme nous venons de le voir, sur un certain nombre d'hypothèses. Cependant, ces hypothèses ne sont pas toutes vérifiées sur les marchés. Plus particulièrement certaines d'entre elles sont inadéquates lorsque les marchés sont agités ou subissent de fréquentes discontinuités de cours.

Prenons pour commencer l'hypothèse portant sur le processus aléatoire suivi par le sous-jacent. Le modèle d'évolution du cours du sous-jacent utilisé par Black et Scholes suppose que, dans un court intervalle de temps, les rendements du sous-jacent sont distribués selon une loi normale. Si les rendements du cours du sous-jacent suivent une loi normale, alors cela implique que les cours suivent une loi log-normale.

L'évolution normale des rendements constitue un biais puisque cela sous-estime très nettement la survenance des événements rares et extrêmes. On peut alors montrer que les prix des options incluant ce type d'événements ont un prix supérieur aux options évaluées par le modèle Black et

Scholes.

En effet, la distribution des rendements des actifs financiers se caractérise par un Skewness différent de zéro, ce qui signifie que la distribution des rendements n'est pas symétrique, et par un Kurtosis supérieur à 3, ce qui signifie que la distribution possède une queue épaisse.

La valeur des options hors de la monnaie ou dans la monnaie est particulièrement sensible aux événements rares (rendements extrêmes du cours du sous-jacent) et, si ces événements sont plus fréquents que ne le suppose une distribution normale, alors le prix de ces options sera plus élevé que ne le prévoit le modèle.

En particulier, la formule de Black et Scholes ne reproduit pas le prix de marché des options de maturités faibles qui sont en dehors de la monnaie et dans une moindre mesure, des options dans la monnaie, du fait de l'hypothèse de normalité du rendement de l'actif sous-jacent, combinée à l'hypothèse de volatilité constante. Dans tous les cas, ces erreurs sont fortement non négligeables.

Enfin et surtout, dans la pratique, l'hypothèse de volatilité constante n'est pas adéquate non plus. Nous venons de voir qu'au contraire, la volatilité est largement dépendante du strike et de la maturité. Le prix de l'option étant une fonction croissante de la volatilité (pour un Call comme pour un Put), il est clair que le phénomène de smile implique une sous-évaluation des options qui ne sont pas à la monnaie.

L'hypothèse de constance de la volatilité est clairement inappropriée, les traders sont constamment obligés de s'éloigner de cette hypothèse pour obtenir des prix cohérents avec ceux du marché. Le besoin de modèles intégrant des mouvements de volatilité est donc évident et essentiel.

Néanmoins, le modèle de Black et Scholes a été, et reste aujourd'hui très utilisé par les opérateurs pour sa simplicité et pour sa flexibilité. Fisher Black lui même ironisait sur le sujet : *« Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et les variantes. Ils l'utilisent tellement bien que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important. . . »*

De plus, lorsque l'on utilise le modèle pour la couverture, les biais induisent généralement une sur-couverture, ce qui n'est pas catastrophique.

Les faiblesses du modèle de Black et Scholes sont mises en évidence par ce concept de volatilité, qui est devenu l'un des plus importants dans le monde des options. A tel point qu'on ne parle plus aujourd'hui de trader d'option mais de trader de volatilité.

4.2 Le modèle de Vasicek

4.2.1 La théorie du modèle

Le modèle de Vasicek est un modèle à un facteur. Le concept principal de ces modèles est de supposer que l'ensemble de la courbe des taux n'est fonction que du taux court : r_t , parfois appelé taux court instantané, il s'agit du taux qui s'applique en t pour une période infinitésimale.

Le premier modèle de taux était le modèle de Merton dans lequel le processus du taux court suit un Mouvement Brownien Géométrique suivant l'équation différentielle stochastique suivante. Ce modèle était très vite dépassé dès lors que la forme de la courbe des taux s'éloignait de sa forme habituelle.

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

En 1977, O.Vasicek a proposé un modèle plus évolué et possédant une innovation majeure : la prise en compte du phénomène de retour à la moyenne. Dans ce modèle, le taux court r_t suit un processus de type Ornstein-Uhlenbeck, sous la probabilité historique \mathbb{P} :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

avec :

- $a > 0$ et $b > 0$ les paramètres constants du modèle,
- σ la volatilité constante du taux court,
- W_t un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbb{P}).

Les paramètres du modèle ont par ailleurs une signification :

- b est la moyenne de long terme du taux court r_t ,
- a est la vitesse de retour à la moyenne.

En effet, ces deux paramètres impliquent le phénomène de retour à la moyenne de la manière suivante : lorsque le taux court est supérieur à sa moyenne de long terme, alors le drift du processus $a(b - r_t)$ est négatif et dans ce cas le taux court aura tendance à diminuer, donc à se rapprocher de sa moyenne. Dans le cas contraire où le taux court est inférieur à sa moyenne de long terme, ce drift est positif et conduira à faire remonter le taux court vers sa moyenne de long terme. Le taux court est donc ramené vers b à la vitesse a . Cette évolution du taux court est à priori en adéquation avec ce que l'on observe sur le marché.

Par application du théorème de Girsanov avec la prime de risque λ , on obtient l'équation différentielle stochastique suivante, sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$dr_t = a \left(\left(b - \frac{\sigma\lambda}{a} \right) - r_t \right) dt + \sigma d\bar{W}_t$$

avec : \bar{W}_t un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbb{Q}).

Le modèle de Vasicek permet en outre de déterminer les courbes des taux zéro-coupon futures grâce à la trajectoire du taux court ainsi obtenue. Soit $R(t, T)$ le taux zéro-coupon en date t et de maturité $T - t$. La fonctionnelle des taux zéro-coupon est la suivante :

$$R(t, T) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} \quad R_\infty = b - \frac{\sigma\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} = cste$$

4.2.2 Les courbes de taux

Le terme de « Courbe des Taux » (en anglais « Yield Curve ») désigne la représentation graphique de la fonction mathématique du taux d'intérêt effectif à un instant donné d'un zéro-coupon en fonction de sa maturité.

C'est une notion fondamentale dans l'univers des modèles de taux et nous verrons que ceux-ci se différencient par leur faculté à prendre en compte la structure de la courbe des taux. Il est donc important de développer ce concept pour aborder les limites du modèle de Vasicek.

4.2.2.1 Généralités sur les courbes de taux

Aux Etats-Unis et dans la zone Euro, ainsi que, dans une moindre mesure, au Japon et en Grande Bretagne, il existe en permanence deux marchés de référence des taux d'intérêts de 0 à 30 ans, voire 50 ans, d'une bonne liquidité (cette liquidité est néanmoins moindre en général au delà de 10 ans) :

- Celui des principaux emprunts d'Etat à taux fixe,
- Celui des Swaps contre IBOR.

Le niveau de taux d'intérêt fluctue donc en fonction de la maturité de l'opération. On parle alors de structure par termes des taux d'intérêts (STTI). Les courbes de taux issues de cette structure font donc apparaître le taux d'intérêt en ordonnée et la maturité en abscisses.

Il existe une multitude de courbes des taux. Néanmoins, on peut dégager trois grandes catégories :

- Les courbes du trésor (courbes d'Etat) : ce sont des courbes « sans risques » pour certains pays sensés ne jamais faire défaut (G8),
- Les courbes interbancaires : elles régissent les opérations financières entre les banques. ce ne sont pas des courbes sans risques car le « rating » des banques est variable car le risque de solvabilité financière existe,
- Les courbes corporate : elles caractérisent les entreprises du secteur privé.

La forme la plus classique est une courbe croissante et concave. Les taux courts sont inférieurs aux taux longs et la courbe est plus pentue sur sa partie courte (maturités faibles) que sur sa partie longue (maturité élevée). Il s'agit du cas « standard » : plus l'emprunt se fait sur du long-terme, plus les intérêts sont élevés (voir graphique ci-dessous).

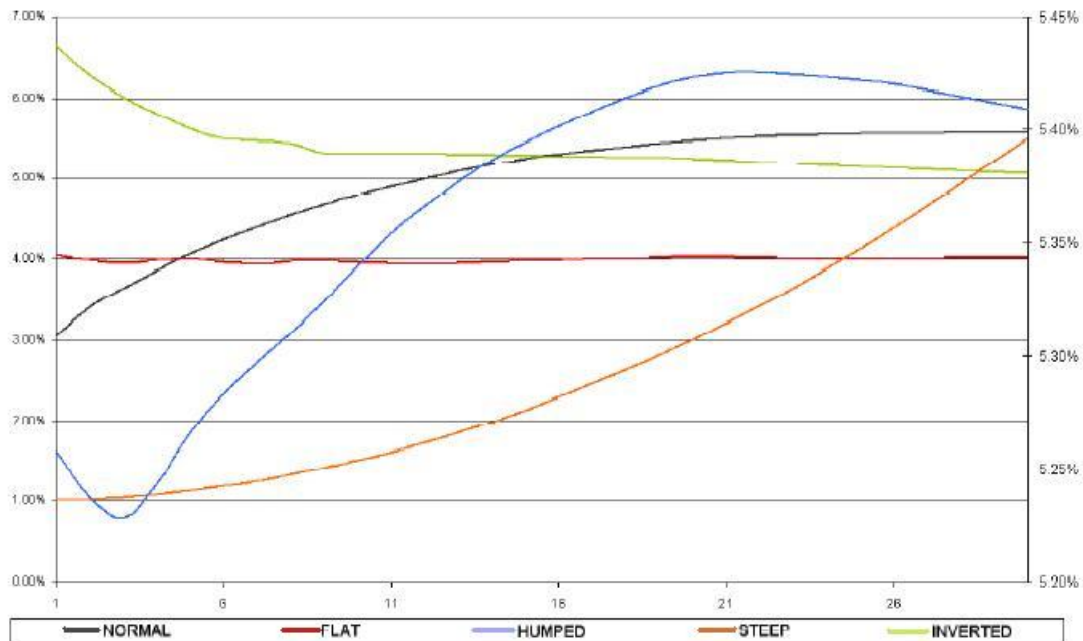
Cependant nous verrons par la suite qu'il existe d'autres formes pour la courbe des taux, ce que nous cherchons justement à prendre en compte dans le nouveau modèle.

4.2.2.2 Les différentes formes de la courbe des taux

Comme cela a été expliqué précédemment, l'un des buts du nouveau modèle est qu'il puisse prendre en considération la structure initiale des taux d'intérêts pour évaluer les courbes de taux futures. En effet, chaque morphologie est représentative de l'état actuel du marché et des anticipations économiques faites sur le marché. Il est donc nécessaire de présenter les différentes formes connues. Historiquement, on a observé 5 types de courbe de taux :

- La « **Normal Curve** » (courbe usuelle) : Il s'agit de la courbe la plus fréquente, croissante et concave. Les taux augmentent avec la maturité, mais de manière de plus en plus lente. Cette forme de courbe reflète l'anticipation des investisseurs d'une hausse de la croissance ainsi que d'une poursuite de l'inflation. Le marché anticipe donc un durcissement de la politique monétaire des banques centrales, avec une hausse des taux court-terme visant à calmer les pressions inflationnistes.
- La « **Humped Curve** » (courbe bossue) : Il s'agit d'une courbe concave croissante puis décroissante pour laquelle on observe un maximum pour les taux moyen-terme. Il arrive également que l'on observe une légère incurvation de la partie courte de la courbe. Elle est souvent causée par la forte demande en obligations long-terme qui cause la baisse de la partie longue d'une normal curve. Elle peut signaler le début d'une récession, car elle évolue souvent en courbe inversée.

- La « **Flat Curve** » (courbe plate) : Elle se caractérise par des taux constants quelle que soit la maturité. Economiquement, elle est le reflet d'une incertitude plus ou moins forte sur la situation future. Le plus souvent on observe par la suite un retour à une courbe normale ou à une courbe de type humped.
- La « **Steep Curve** » (courbe raide) : Cette courbe est croissante et convexe. Les taux sont donc croissants avec la maturité mais de plus en plus fortement croissants au fur et à mesure que la maturité augmente. Les taux courts étant très bas, l'économie concernée est sensée se développer très fortement à l'avenir. On observe généralement ce type de courbes avant un boom économique ou en fin de récession. On attend alors une forte hausse des taux sur le court-terme. Historiquement néanmoins, cette courbe reste extrêmement rare.
- La « **Inverted Curve** » (courbe inversée) : La courbe inversée est une courbe clairement anormale dans laquelle les taux longs sont inférieurs aux taux courts. Le spread² est donc négatif. Dans pareil cas, les investisseurs anticipent un affaiblissement de la conjoncture économique et pensent que l'inflation va rester faible. Elle peut également s'expliquer par d'autres facteurs techniques ou une situation économique particulière.



Les différentes formes de la courbe des taux

4.2.3 Les limites du modèle

Le modèle de Vasicek, malgré les améliorations qu'il apporte au premier modèle de Merton, possède certaines lacunes. Dans un premier temps, la probabilité d'obtenir des taux négatifs est non nulle, ce qui est particulièrement gênant. Notons que ce cas de figure se produit le plus souvent pour des économies où les taux sont relativement bas et où la volatilité est élevée, comme le Japon par exemple.

On peut également relever le fait que le taux long R_∞ est constant et une fois les paramètres du modèle connus, toutes les courbes de taux futures possèdent la même limite lorsque la maturité tend vers l'infini (R_∞).

Enfin, un inconvénient majeur est que la moyenne de long terme du taux court est également constante. Donc la procédure de calibration et la spécification du modèle ne permettent pas

2. Spread = Taux Long - Taux Court

toujours de retrouver les taux longs termes anticipés par le marché. Or nous venons de voir que selon la forme de la courbe des taux que l'on observera sur les marchés, les perspectives économiques ne sont pas les mêmes et les futures courbes de taux devraient en tenir compte.

D'une manière plus générale, les modèles de type Vasicek ou CIR (Cox-Ingersoll-Ross) ne s'ajustent pas **automatiquement** à la structure par terme observée sur le marché aujourd'hui. Par un calibrage judicieux, ils permettent de retrouver la plupart des structures observées en pratique. Cependant, l'ajustement aux observations n'est pas exact et, dans certains cas, des erreurs significatives apparaissent. La majorité des utilisateurs (notamment les traders) ne sont donc pas satisfaits de ces modèles.

4.3 Les objectifs des nouveaux modèles

4.3.1 Modèle Actions

Concernant le modèle actions, l'un des objectifs du nouveau modèle à mettre en place est donc de prendre en compte le caractère non-constant de la volatilité. Il serait également judicieux que ce modèle appréhende de manière plus précise la survenance des événements rares et extrêmes afin de réduire les biais observés dans le modèle de Black et Scholes sur les options dans la monnaie et hors de la monnaie.

4.3.2 Modèle Taux

Pour le modèle taux, l'objectif principal est de permettre une meilleure prise en compte des différentes formes de la courbe des taux initiale. Comme nous venons de le voir, la forme de la courbe des taux reflète les perspectives économiques du pays concerné et par conséquent cette forme aura un impact fortement non négligeable sur les formes futures de la courbe des taux. Il faudra donc que le nouveau modèle puisse tenir compte de la structure initiale des taux. Il serait également judicieux de conserver la facilité d'implémentation des modèles monofactoriels tout en supprimant le caractère constant du retour à la moyenne du taux court.

Bien entendu, ces deux modèles devront être « Market Consistent », ce qui signifie que l'on doit pouvoir retrouver des prix de marché en les calibrant, puis en les utilisant correctement.

Chapitre 5

Le modèle de Dupire

Pour des raisons qui seront expliquées par la suite, le choix du modèle actions s'est arrêté sur le modèle de Dupire. Après une description du concept fondamental de volatilité locale, ce chapitre s'attache à décrire le modèle le plus précisément possible. Les principes fondamentaux sur lesquels il repose, ainsi que les problématiques de calibration et d'implémentation y sont abordés.

On y détaille aussi les différentes approches envisagées pour utiliser le modèle. Chacune est testée sur des données de marché afin de dégager la plus consistante.

5.1 Les modèles de volatilité locale

Dans la suite de ce mémoire, nous allons aborder la notion de volatilité locale. Ce terme est utilisé pour désigner la volatilité de l'actif sous-jacent en fonction de la valeur de ce même actif et du temps. En effet, lorsque l'on ne supposera plus que la volatilité est constante dans l'équation différentielle stochastique du modèle, on parlera d'une volatilité « locale » car celle-ci évoluera constamment.

5.1.1 Le contexte

Une fois le phénomène du smile de volatilité intégré, les financiers ont commencé à s'intéresser aux améliorations à apporter au modèle de Black et Scholes. La question était de savoir si il était possible de construire un processus d'évolution du sous-jacent qui soit compatible avec le smile observé, quelle que soit la maturité, et qui conserve la complétude du modèle.

Les modèles de volatilité locale ont alors succédé, sans les remplacer, aux modèles paramétriques qui spécifiaient par avance la forme de la diffusion. Après avoir estimé le paramètre de diffusion, on pouvait calculer des prix d'options et juger de leur adéquation avec le « smile » de volatilité.

Les modèles cohérents au smile renversent la logique en utilisant le marché des options comme input servant à inférer le processus de diffusion. En clair, on peut évaluer des options à partir du smile observé contrairement à précédemment où l'on cherchait les spécifications qui collaient le mieux au smile observé. Cela suppose aussi que l'on n'ait pas à déterminer en avance la forme de la diffusion, mais plutôt à l'inférer numériquement grâce à des prix d'options européennes.

Un aspect important de cette classe de nouveaux modèles est qu'ils maintiennent le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage et en outre, contrairement aux modèles incluant un saut, une volatilité stochastique ou une friction, ils ne rajoutent aucune source de risque additionnelle de nature à faire basculer l'évaluation en univers incomplet. En effet en situation d'incomplétude

des marchés, nul ne peut prétendre calculer des prix d'options par arbitrage puisqu'une multitude de prix existent, et donc la couverture d'une quelconque position va s'avérer fausse.

L'apport significatif de ce type de modèles est d'être parvenu à proposer une alternative au modèle de Black et Scholes sans accroître dans le même temps la dimension d'incertitude.

5.1.2 Les différents modèles

Il existe plusieurs modèles basés sur ce principe de volatilité locale. On se propose d'en présenter certains des plus connus dans cette partie, sans chercher à entrer dans les détails. Une approche succincte devrait nous permettre de faire apparaître les premiers éléments de choix d'un modèle pour la suite.

5.1.2.1 Le modèle de Dupire (1994)

En 1994, Bruno Dupire a proposé de recomposer la totalité de la diffusion à partir des prix d'options en posant un processus risque neutre de la même forme que celui du modèle de Black et Scholes mais en supposant que la volatilité est locale et donc dépendante du strike et du temps.

Ce simple modèle est à l'origine du concept de volatilité locale. Dupire ne cherchait pas réellement à créer une nouvelle classe de modèles de volatilité en supposant un processus sans dérive pour générer une formule analytique pour la volatilité. L'idée était davantage de calculer des prix d'options qui soient cohérents avec les prix observés sur le marché.

5.1.2.2 Les modèles de Derman et Kani (1994)

Le cours du sous-jacent obéit à la même équation différentielle stochastique que dans le modèle de Dupire. Contrairement à Dupire, Derman et Kani ont développé un modèle en temps discret où la volatilité locale $\sigma(S_t, t)$ est déduite numériquement à partir du prix des options pour coller au mieux au smile de volatilité. Il s'agit d'un modèle à arbre binomial comme dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1976) avec pour différence que les nœuds sont obtenus à partir des prix d'options avec une volatilité non constante puisqu'elle est fonction du temps et du cours du sous-jacent.

Le modèle est néanmoins connu pour son manque de stabilité et de flexibilité. Des améliorations lui ont été apportées par Dupire, Derman, Kani, Chriss et Said pour passer à un arbre trinomial à une ou plusieurs dimensions.

Dans notre étude ce modèle n'est pas intéressant car nous cherchons avant tout un modèle en temps continu, qui se traduit par une meilleure implémentation dans la pratique, et qui est plus approprié à la tarification des garanties des produits d'assurance.

5.1.2.3 Les modèles de Rubinstein (1994) et Jackwerth (1997)

Rubinstein a étendu le modèle standard de Cox, Ross et Rubinstein (1976) en proposant un arbre implicite binomial en utilisant uniquement l'induction rétroactive contrairement à ce que faisaient Derman et Kani. L'arbre ne fonctionne qu'avec des options européennes expirant en date T , ce qui signifie qu'il ne capture pas la structure par terme de la volatilité implicite contrairement au modèle de Derman et Kani.

Jackwerth a étendu l'arbre implicite de Rubinstein en permettant à l'arbre de coller aux maturités intermédiaires pour des options européennes. Comme pour Rubinstein, les transitions de probabilités sont contraintes à rester entre 0 et 1 pour éviter les opportunités d'arbitrage.

5.1.3 Le choix d'un modèle

A priori il était plus intéressant dans le cadre de mon étude de s'intéresser au modèle de Dupire, qui est le modèle à l'origine du concept de volatilité locale, pour différentes raisons :

- Lorsque l'on rentre dans le détail, on s'aperçoit de sa relative facilité d'implémentation,
- Il s'agit du seul modèle qui n'utilise pas d'arbre de transition parmi ceux évoqués, il est donc le plus flexible,
- Le modèle est théoriquement capable de reproduire le prix des options de type « Plain Vanillas » européennes,

5.2 La théorie du modèle

Dans cette partie, nous allons donc nous intéresser exclusivement au modèle de Dupire pour l'évolution des actifs financiers de type action. Après avoir défini clairement le modèle d'un point de vue théorique en se basant sur la démarche de Dupire, nous aborderons les différentes méthodes pour le mettre en application de manière pratique. Il sera alors intéressant de choisir l'une de ces méthodes et de tester sa consistance sur des données de marché.

Le pricing des options consiste en général à déterminer les prix après avoir spécifié un modèle et estimé ses paramètres. Dans le modèle de Black et Scholes par exemple, on obtient les prix en fonction de la volatilité et lorsque l'on inverse l'équation, on est à même de calculer la volatilité implicite à partir des prix des options, comme nous l'avons vu dans la partie précédente.

Si le modèle était correct, la volatilité implicite serait la même quel que soit le prix de marché de l'option. Or ceci n'est pas le cas comme nous l'avons dit précédemment : la volatilité implicite dépend non seulement du strike, mais aussi de la maturité de l'option. La question que se pose alors Dupire est la suivante : Que faire lorsqu'une option à la monnaie sur un sous-jacent quelconque possède une volatilité implicite de 20 % pour une maturité de 6 mois, et 18 % pour une maturité de 1 an ?

L'idée première est de permettre à la volatilité d'être dépendante du temps, comme l'a fait Merton. Mais cela ne règle pas le problème de la dépendance de la volatilité implicite au strike de l'option, le fameux smile de volatilité. Finalement, Dupire a cherché à construire un modèle qui :

- soit compatible avec le smile de volatilité observé,
- conserve la complétude du modèle.

Le processus suivi par le cours du sous-jacent sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} est le suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q(t)) dt + \sigma(S_t, t) d\overline{W}_t \quad (5.1)$$

avec :

- $r(t)$ le taux d'intérêt sans risque,
- $q(t)$ le rendement continu des dividendes,
- \overline{W}_t est un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbb{Q}).
- $\sigma(S_t, t)$ la volatilité locale, comme étant **une fonction déterministe du cours du sous-jacent et du temps.**

On pourra donc remarquer que la forme de la diffusion du modèle de Dupire est la même que pour le modèle de Black et Scholes. Par conséquent la normalité des rendements est conservée.

La discrétisation du modèle fournit l'équation suivante :

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(\left(r(t) - q(t) - \frac{\sigma^2(S_{t-1}, t)}{2} \right) \Delta_t + \Phi_t \sigma(S_{t-1}, t) \sqrt{\Delta_t} \right) \quad (5.2)$$

avec : $(\Phi_t)_{t \geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi normale centrée et réduite.

Le résultat fondamental du modèle est la relation permettant de calculer la fonction de volatilité locale à partir du prix des options, du strike et de la maturité. Initialement, Dupire avait supposé que le taux sans risque et le rendement des dividendes étaient nuls, néanmoins la démonstration fournie en annexe B.1 prend en compte ces deux éléments. Le résultat est le suivant :

$$\sigma(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r(T) - q(T)) K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T) C}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \quad (5.3)$$

avec :

- K le strike de l'option,
- T sa maturité,
- C le prix de l'option d'achat (Call).

Cette formule présente un intérêt certain pour ses utilisateurs. En effet, chaque élément peut être estimé soit directement (pour le taux et le rendement des dividendes), soit indirectement à partir des prix des options (pour les dérivées partielles).

L'idée fondamentale du modèle de Dupire est donc que l'on peut utiliser les prix observés des options pour spécifier une fonction déterministe de volatilité locale qui soit consistante avec ces prix.

Comme cela a été évoqué lors du choix du modèle, l'avantage considérable du modèle de Dupire est qu'il permet théoriquement de reproduire le prix des options « Plain Vanillas » (catégorie d'options ayant des composantes standards, par opposition aux options exotiques). Dans le cadre de notre étude ceci est particulièrement important car, comme nous l'évoquions en début de mémoire, le pricing des garanties se traduit par le pricing d'un ou plusieurs Puts pondérés.

5.3 Les différentes approches

L'utilisation du modèle s'effectue en deux étapes : la première consiste en la calibration à partir des prix d'options, et la seconde consiste en la génération de scénarios stochastiques d'évolution du sous-jacent.

On peut maintenant s'intéresser aux différentes manières d'implémenter et d'utiliser le modèle. En effet, pour diffuser le prix du sous-jacent, il faut connaître la fonction de volatilité locale. Les trois approches que nous proposons de présenter ne diffèrent donc que par la méthode utilisée pour obtenir cette fonction, c'est à dire la calibration.

Pour chacune des méthodes développées, on tâchera de donner les avantages et les inconvénients, ainsi que les résultats obtenus sur un jeu de données particulier.

5.3.1 Les données

Pour tester ces trois méthodes, on va utiliser la surface de volatilité implicite fournie par Barclays pour la date du 13/06/2005 concernant les options de vente (Put) européennes portant sur le sous-jacent S&P 500. La raison pour laquelle on utilise ces données et non un échantillon plus récent est que nous disposons d'une note d'un cabinet d'actuariat concernant le modèle de Dupire. Cette dernière contenant les résultats des tests effectués par ce dernier à partir de ces données, il était particulièrement intéressant de pouvoir comparer nos résultats avec ceux dudit cabinet.

Pour cette date, on dispose des éléments suivants :

- Le prix du sous-jacent : $S_0 = 1196,71$ (noté S dans les matrices suivantes),
- Le rendement continu des dividendes est constant et égal à 1,9%,
- Les maturités s'étendent de 1 à 10 ans avec un pas annuel, et les strikes s'étendent de 75 % à 125 % de S_0 avec un pas de 5 %. La matrice contient donc 110 valeurs,
- La courbe des taux est la suivante :

Maturité :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux :	3,86%	3,89%	3,98%	4,03%	4,08%	4,13%	4,18%	4,22%	4,26%	4,31%

- La matrice des volatilités implicites observées sur le marché est la suivante :

Volatilité implicite observée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	21,99%	21,77%	22,13%	22,56%	22,98%	23,44%	23,95%	24,43%	24,93%	25,41%	
80%	20,38%	20,52%	21,04%	21,58%	22,06%	22,59%	23,14%	23,67%	24,20%	24,72%	
85%	18,82%	19,30%	19,98%	20,62%	21,19%	21,77%	22,37%	22,94%	23,51%	24,06%	
90%	17,32%	18,12%	18,97%	19,71%	20,35%	21,00%	21,64%	22,25%	22,85%	23,43%	
95%	15,91%	17,01%	18,01%	18,85%	19,56%	20,26%	20,94%	21,59%	22,22%	22,83%	
100%	14,57%	15,96%	17,10%	18,03%	18,80%	19,55%	20,27%	20,96%	21,61%	22,25%	
105%	13,40%	14,96%	16,23%	17,24%	18,07%	18,87%	19,62%	20,35%	21,03%	21,70%	
110%	12,69%	14,17%	15,43%	16,49%	17,38%	18,22%	19,01%	19,77%	20,47%	21,16%	
115%	12,20%	13,61%	14,82%	15,84%	16,73%	17,60%	18,41%	19,20%	19,93%	20,65%	
120%	11,90%	13,17%	14,35%	15,33%	16,18%	17,03%	17,84%	18,66%	19,41%	20,15%	
125%	11,89%	12,84%	13,96%	14,92%	15,74%	16,55%	17,34%	18,15%	18,91%	19,66%	
K/S											

On peut donc en déduire la matrice de prix des options grâce à la formule de Black et Scholes :

Prix des Puts par B&S (en % de S_0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	0,68%	1,84%	2,95%	3,92%	4,75%	5,46%	6,10%	6,64%	7,11%	7,48%	
80%	1,01%	2,42%	3,66%	4,72%	5,58%	6,34%	6,98%	7,54%	8,01%	8,38%	
85%	1,49%	3,15%	4,50%	5,62%	6,53%	7,30%	7,95%	8,51%	8,98%	9,34%	
90%	2,19%	4,07%	5,51%	6,68%	7,59%	8,37%	9,01%	9,56%	10,02%	10,36%	
95%	3,24%	5,25%	6,72%	7,89%	8,79%	9,54%	10,17%	10,69%	11,12%	11,44%	
100%	4,74%	6,73%	8,16%	9,28%	10,13%	10,84%	11,42%	11,91%	12,30%	12,58%	
105%	6,90%	8,59%	9,86%	10,87%	11,63%	12,27%	12,77%	13,22%	13,55%	13,79%	
110%	9,91%	10,95%	11,87%	12,68%	13,31%	13,83%	14,25%	14,62%	14,89%	15,05%	
115%	13,62%	13,85%	14,28%	14,77%	15,17%	15,54%	15,83%	16,11%	16,30%	16,40%	
120%	17,84%	17,20%	17,08%	17,18%	17,28%	17,43%	17,55%	17,71%	17,80%	17,81%	
125%	22,38%	20,94%	20,21%	19,89%	19,66%	19,53%	19,43%	19,42%	19,38%	19,28%	
K/S											

5.3.2 La méthode des Calls

Cette première méthode consiste à utiliser directement la formule de la volatilité locale (5.3) en calculant numériquement les dérivées partielles des prix d'options par la méthode des différences finies expliquée en annexe A.3.

La mise en place de cette méthode repose sur les étapes suivantes :

- Pour le type d'option considéré, il faut collecter un panel de prix en fonction de la maturité et du strike. En pratique ces prix sont obtenus sur les plateformes d'informations financières classiques soit directement, soit indirectement à partir des volatilités implicites grâce à la formule de Black et Scholes,
- Ensuite, il faut calculer les dérivées partielles pour chaque couple (K, T) de strike et de maturité, en utilisant la méthode des différences finies. Le schéma de discrétisation de la méthode est le schéma d'Euler implicite, pour les raisons qui sont évoquées dans l'annexe A.3 relative.
- Pour chacun des couples (K, T) , on peut alors calculer la volatilité locale à l'aide de la formule (5.3) car r et q sont connus. On dispose alors d'une matrice de volatilité locale. On rappelle ci-dessous la formule :

$$\sigma(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r(T) - q(T)) K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T) C}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

- On peut alors fitter cette surface de volatilité locale par une fonction du strike K et de la maturité T . Pour cela, différentes formes analytiques ont été proposées et la meilleure est celle de Dumas, Fleming et Whaley (1998). Ils supposent que la forme analytique de la volatilité est la suivante :

$$\sigma(K, T) = \alpha + \beta_1 K + \beta_2 K^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 KT$$

Auquel cas, en utilisant la méthode des moindres carrés, on obtient un jeu de six paramètres $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ permettant d'exprimer la volatilité locale pour tout couple (K, T) de strike et de maturité, même ceux non représentés dans l'échantillon initial, ce qui est nécessaire pour la génération des scénarios.

- On utilise alors l'équation de discrétisation du modèle (5.2) et la fonction de volatilité locale σ précédemment estimée. Il est très important de noter la chose suivante : **on a calibré la fonction σ sur K et T lors des étapes précédentes, or l'équation de discrétisation du modèle fait apparaître la volatilité locale comme une fonction de S_{t-1} et de t . Pour implémenter le modèle de manière correcte, il faut remplacer le strike K par le dernier cours du sous-jacent S_{t-1} et la maturité T par le temps t .**

Pour calculer le prix des options, on utilise la méthode de Monte-Carlo. Dans le cadre de notre exemple sur le jeu de données fourni, on génère 10 000 trajectoires du sous-jacent avec un pas de temps mensuel.

Sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , le prix d'une option est donné par les formules suivantes, ou C et P représentent respectivement le Call et le Put. Ici S_T représente le cours du sous-jacent à maturité, K représente le strike de l'option et $r(T)$ est le taux sans risque utilisé pour la maturité T .

$$C = E_{\mathbb{Q}} \left[\text{Max} (S_T - K; 0) e^{-r(T)T} \right]$$

$$P = E_{\mathbb{Q}} \left[\text{Max} (K - S_T; 0) e^{-r(T)T} \right]$$

Pour chacune des 10 000 trajectoires de S_t simulées, on va calculer le PayOff à échéance $\text{Max} (K - S_T; 0)$ que l'on actualise ensuite au taux sans risque $r(T)$. En calculant ensuite la moyenne de ces PayOff actualisés sur les 10 000 simulations, on obtient la valeur de l'option.

La première matrice représente les prix des Puts simulés de cette manière. La seconde représente la différence entre les prix simulés et les prix observés. La troisième représente l'écart en pourcentage e entre les prix de Puts observés et les prix de Puts simulés :

$$e = \frac{|\text{Prix observé} - \text{Prix simulé}|}{\text{Prix observé}}$$

 Prix des Puts simulés (en % de S_0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	0,59%	1,71%	2,64%	3,57%	4,21%	4,83%	5,41%	5,79%	6,30%	6,67%	
80%	0,99%	2,40%	3,41%	4,43%	5,13%	5,76%	6,36%	6,76%	7,28%	7,66%	
85%	1,60%	3,26%	4,32%	5,41%	6,14%	6,78%	7,38%	7,79%	8,32%	8,71%	
90%	2,49%	4,32%	5,41%	6,53%	7,27%	7,91%	8,49%	8,91%	9,43%	9,83%	
95%	3,78%	5,63%	6,69%	7,81%	8,52%	9,14%	9,69%	10,11%	10,62%	11,01%	
100%	5,53%	7,23%	8,20%	9,26%	9,91%	10,49%	11,01%	11,40%	11,90%	12,26%	
105%	7,82%	9,18%	9,95%	10,92%	11,46%	11,99%	12,45%	12,80%	13,29%	13,59%	
110%	10,70%	11,51%	11,98%	12,79%	13,19%	13,64%	14,03%	14,30%	14,76%	15,00%	
115%	14,14%	14,25%	14,31%	14,91%	15,12%	15,45%	15,74%	15,93%	16,34%	16,52%	
120%	18,12%	17,40%	16,99%	17,26%	17,26%	17,44%	17,60%	17,69%	18,03%	18,12%	
125%	22,49%	20,98%	19,99%	19,89%	19,63%	19,62%	19,62%	19,57%	19,82%	19,83%	
K/S											

 Différences par rapport aux prix observés (en % de S_0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-0,09%	-0,13%	-0,31%	-0,36%	-0,53%	-0,64%	-0,69%	-0,85%	-0,81%	-0,81%	
80%	-0,02%	-0,02%	-0,25%	-0,29%	-0,46%	-0,58%	-0,63%	-0,78%	-0,74%	-0,72%	
85%	0,11%	0,11%	-0,18%	-0,21%	-0,39%	-0,52%	-0,57%	-0,72%	-0,66%	-0,63%	
90%	0,30%	0,25%	-0,10%	-0,15%	-0,33%	-0,46%	-0,52%	-0,65%	-0,59%	-0,53%	
95%	0,54%	0,36%	-0,03%	-0,08%	-0,27%	-0,40%	-0,47%	-0,59%	-0,50%	-0,43%	
100%	0,79%	0,50%	0,03%	-0,02%	-0,22%	-0,35%	-0,41%	-0,51%	-0,39%	-0,32%	
105%	0,93%	0,59%	0,09%	0,05%	-0,18%	-0,28%	-0,32%	-0,42%	-0,27%	-0,20%	
110%	0,79%	0,56%	0,11%	0,11%	-0,12%	-0,19%	-0,22%	-0,32%	-0,12%	-0,05%	
115%	0,53%	0,40%	0,03%	0,14%	-0,05%	-0,09%	-0,09%	-0,18%	0,04%	0,12%	
120%	0,28%	0,20%	-0,09%	0,08%	-0,03%	0,01%	0,06%	-0,02%	0,23%	0,32%	
125%	0,11%	0,04%	-0,22%	0,01%	-0,03%	0,09%	0,19%	0,15%	0,44%	0,55%	
K/S											

Remarquons dès lors que l'écart maximal est égal à 0,93 % de S_0 , et que l'écart minimal est égal à -0,85 % de S_0 . En terme de qualité, cette méthode semble donc intéressante car les écarts sont relativement faibles entre les prix observés sur le marché et les prix simulés.

On remarque aussi que les prix des Puts sont dans leur plus large partie sous-évalués (parties encadrées en bleu). Cependant il ne se dégage aucune tendance de la sur-évaluation ou de la sous-évaluation en fonction du strike ou de la maturité, ce qui est étonnant. En effet on pourrait s'attendre à une meilleure précision lorsque l'on s'approche des options à la monnaie, or ici cela semble aléatoire.

Notons tout de même que les prix des Puts (et donc les écarts de prix) sont largement dépendants des strikes et des maturités. Il n'est donc pas recommandé de ne se baser que sur les

écarts simples entre les valeurs observées et simulées (il est en effet difficile de comparer entre elles les valeurs de cette matrice) pour apprécier la méthode. c'est pourquoi on regarde les écarts absolus en pourcentage.

Ecarts absolus en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	13,55%	7,15%	10,45%	9,06%	11,22%	11,68%	11,28%	12,78%	11,42%	10,84%	
80%	2,07%	0,73%	6,86%	6,16%	8,15%	9,10%	9,00%	10,40%	9,18%	8,63%	
85%	7,30%	3,57%	3,98%	3,77%	6,01%	7,09%	7,22%	8,42%	7,39%	6,72%	
90%	13,57%	6,23%	1,85%	2,21%	4,28%	5,50%	5,82%	6,84%	5,88%	5,14%	
95%	16,75%	7,30%	0,45%	1,07%	3,12%	4,23%	4,64%	5,49%	4,53%	3,77%	
100%	16,70%	7,38%	0,41%	0,22%	2,21%	3,24%	3,55%	4,30%	3,21%	2,54%	
105%	13,45%	6,87%	0,89%	0,44%	1,51%	2,29%	2,51%	3,19%	1,98%	1,46%	
110%	7,96%	5,10%	0,96%	0,90%	0,91%	1,40%	1,56%	2,16%	0,82%	0,34%	
115%	3,88%	2,88%	0,21%	0,94%	0,36%	0,60%	0,60%	1,11%	0,27%	0,71%	
120%	1,58%	1,18%	0,55%	0,49%	0,16%	0,06%	0,32%	0,13%	1,31%	1,77%	
125%	0,48%	0,20%	1,10%	0,04%	0,15%	0,45%	0,98%	0,78%	2,27%	2,85%	
K/S											

En pourcentage de la valeur observée du Put, on remarque que les écarts absolus sont les plus importants pour les strike les plus faibles. La valeur maximale de ces écarts est de 16,70 %. Dans la plupart des cas les erreurs sont inférieures à 10 %.

A partir de la matrice des prix des Puts simulés, on peut retrouver la matrice des volatilités implicites simulées par inversion de la formule de Black et Scholes et grâce à l'algorithme de Newton-Raphson (le détail de l'équation à résoudre est donné dans l'annexe A.4). La dernière matrice représente les écarts absolus de volatilité en pourcentage calculés avec la même formule que les écarts absolus de prix en pourcentage calculés ci-avant :

Volatilité implicite simulée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	21,23%	21,26%	21,25%	21,71%	21,85%	22,19%	22,68%	22,92%	23,53%	24,04%	
80%	20,26%	20,46%	20,42%	20,97%	21,20%	21,57%	22,08%	22,40%	23,03%	23,59%	
85%	19,30%	19,60%	19,59%	20,22%	20,52%	20,93%	21,48%	21,86%	22,53%	23,15%	
90%	18,36%	18,71%	18,77%	19,46%	19,84%	20,31%	20,89%	21,34%	22,04%	22,70%	
95%	17,49%	17,81%	17,96%	18,72%	19,16%	19,70%	20,31%	20,82%	21,57%	22,28%	
100%	16,64%	16,91%	17,15%	18,00%	18,49%	19,09%	19,76%	20,32%	21,13%	21,86%	
105%	15,79%	16,05%	16,37%	17,31%	17,84%	18,52%	19,23%	19,85%	20,72%	21,46%	
110%	14,95%	15,21%	15,60%	16,65%	17,23%	17,99%	18,75%	19,41%	20,33%	21,10%	
115%	14,14%	14,41%	14,87%	16,03%	16,66%	17,49%	18,30%	19,00%	19,98%	20,78%	
120%	13,42%	13,63%	14,20%	15,44%	16,15%	17,04%	17,90%	18,63%	19,65%	20,48%	
125%	12,85%	12,95%	13,56%	14,93%	15,70%	16,65%	17,55%	18,31%	19,36%	20,22%	
K/S											

Différences par rapport à la volatilité implicite observée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-0,76%	-0,51%	-0,88%	-0,85%	-1,13%	-1,25%	-1,27%	-1,51%	-1,40%	-1,37%	
80%	-0,12%	-0,06%	-0,62%	-0,61%	-0,86%	-1,02%	-1,06%	-1,27%	-1,17%	-1,13%	
85%	0,48%	0,30%	-0,39%	-0,40%	-0,67%	-0,84%	-0,89%	-1,08%	-0,98%	-0,91%	
90%	1,04%	0,59%	-0,20%	-0,25%	-0,51%	-0,69%	-0,75%	-0,91%	-0,81%	-0,73%	
95%	1,58%	0,80%	-0,05%	-0,13%	-0,40%	-0,56%	-0,63%	-0,77%	-0,65%	-0,55%	
100%	2,07%	0,95%	0,05%	-0,03%	-0,31%	-0,46%	-0,51%	-0,64%	-0,48%	-0,39%	
105%	2,39%	1,09%	0,14%	0,07%	-0,23%	-0,35%	-0,39%	-0,50%	-0,31%	-0,24%	
110%	2,26%	1,04%	0,17%	0,16%	-0,15%	-0,23%	-0,26%	-0,36%	-0,14%	-0,06%	
115%	1,94%	0,80%	0,05%	0,19%	-0,07%	-0,11%	-0,11%	-0,20%	0,05%	0,13%	
120%	1,52%	0,46%	-0,15%	0,11%	-0,03%	0,01%	0,06%	-0,03%	0,24%	0,33%	
125%	0,96%	0,11%	-0,40%	0,01%	-0,04%	0,10%	0,21%	0,16%	0,45%	0,56%	
K/S											

Écarts absolus de volatilité en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	3,45%	2,37%	3,99%	3,75%	4,92%	5,33%	5,30%	6,17%	5,62%	5,41%	
80%	0,60%	0,28%	2,94%	2,83%	3,91%	4,51%	4,57%	5,38%	4,82%	4,58%	
85%	2,56%	1,57%	1,93%	1,93%	3,18%	3,84%	3,97%	4,69%	4,15%	3,80%	
90%	6,00%	3,26%	1,03%	1,28%	2,52%	3,27%	3,48%	4,11%	3,54%	3,10%	
95%	9,90%	4,68%	0,30%	0,71%	2,06%	2,77%	3,03%	3,57%	2,94%	2,43%	
100%	14,18%	5,98%	0,32%	0,17%	1,64%	2,36%	2,54%	3,03%	2,24%	1,75%	
105%	17,83%	7,28%	0,84%	0,39%	1,27%	1,86%	1,98%	2,45%	1,49%	1,08%	
110%	17,82%	7,36%	1,13%	0,95%	0,88%	1,27%	1,36%	1,81%	0,67%	0,27%	
115%	15,87%	5,86%	0,31%	1,18%	0,40%	0,62%	0,58%	1,02%	0,24%	0,61%	
120%	12,77%	3,53%	1,07%	0,75%	0,21%	0,08%	0,35%	0,13%	1,26%	1,63%	
125%	8,06%	0,89%	2,86%	0,07%	0,23%	0,61%	1,19%	0,88%	2,39%	2,84%	
K/S											

On remarque logiquement que les observations faites sur les prix des Puts se répercutent sur les volatilités implicites. En effet la tendance est nécessairement conservée car le prix du Put est une fonction croissante de la volatilité dans la formule de Black et Scholes : la sur-évaluation du prix entraîne donc une sur-évaluation de la volatilité et inversement.

D'autre part, la différence maximale vaut 2,39 % et la différence minimale vaut -1,51 %.

En regardant la matrice des écarts absolus en pourcentage, on remarque que la moyenne de ces écarts est d'environ 3,17 %, avec un minimum et un maximum respectivement égaux à 0,07 % et 17,83 %. Dans la même optique que pour les écarts absolus en pourcentage sur les prix, il sera intéressant de comparer ces valeurs à celles obtenues avec les autres méthodes.

En conclusion, cette première méthode offre globalement de bons résultats sur les prix des Puts mais pas sur les volatilités implicites où l'on observe des écarts plus importants et décentrés par rapport à 0. De plus, aucune tendance sur la précision ne se dégage en fonction du strike et de la maturité.

5.3.3 La méthode des volatilités implicites

Cette seconde méthode repose, comme son nom l'indique, sur l'utilisation de la volatilité implicite au lieu du prix de l'option dans la formule de volatilité locale 5.3. En effet on sait que le prix d'une option dépend de sa volatilité implicite et donc il est possible de travailler directement à partir d'une matrice de volatilité implicite récupérée sur le marché.

Pour pouvoir travailler à partir des volatilités implicites, il faut modifier la formule 5.3 de façon à ce que celle-ci fasse référence à la volatilité implicite de l'option. Une démonstration proposée en annexe B.2 permet de déboucher sur la formule suivante :

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{\sigma_I^2(K, T) + 2\sigma_I(K, T)T \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial T}(K, T) + (r(T) - q(T))K \frac{\partial \sigma_I}{\partial K}(K, T) \right)}{\left(1 + Kd \frac{\partial \sigma_I}{\partial K}(K, T) \sqrt{T} \right)^2 + \sigma_I(K, T)K^2T \left(\frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial K^2}(K, T) - d \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial K}(K, T) \right)^2 \sqrt{T} \right)}} \quad (5.4)$$

avec :

- $\sigma_I(K, T)$ la volatilité implicite associée au couple (K, T) ,
- $d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r(T) - q(T) + \frac{\sigma_I^2(K, T)}{2}\right)T}{\sigma_I(K, T)\sqrt{T}}$,
- S_0 le cours initial du sous-jacent.

Dans cette seconde approche, la calibration et l'implémentation du modèle impliquent les étapes suivantes :

- Après avoir récupéré une matrice de volatilités implicites en fonction de différentes valeurs du strike K et de la maturité T , il faut fitter cette surface selon une fonction paramétrique. On utilise de nouveau la méthode des moindres carrés et la forme donnée à la fonction de volatilité implicite est la suivante :

$$\sigma_I(K, T) = \alpha + \beta_1 M + \beta_2 M^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT$$

La fonction M est appelée « Moneyness » et s'écrit :

$$M = M(K, T) = -\frac{\ln\left(\frac{S_0 \exp(rT)}{K}\right)}{\sqrt{T}}$$

- Après l'estimation, on dispose des six paramètres $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ permettant de calculer la volatilité implicite pour tout couple (K, T) de strike et de maturité. On peut alors en revenir à la volatilité locale grâce à la formule 5.4 en calculant les dérivées partielles de la volatilité implicite de manière analytique. Les calculs et formules relatifs aux dérivées partielles sont fournis en annexe B.3.
- On est finalement en mesure de calculer la valeur de la volatilité locale pour tout couple (K, T) de strike et de maturité. Il ne reste alors plus qu'à utiliser l'équation de discrétisation du modèle 5.2 de la même manière que pour la première méthode. A savoir qu'il faut remplacer K par S_{t-1} et T par t .

De nouveau, on va générer 10 000 trajectoires d'évolution du sous-jacents et déterminer le prix des Puts par la méthode de Monte-carlo pour un pas de temps mensuel. Pour cette seconde méthode on donne ci-dessous les mêmes matrices de comparaison que pour la méthode des Calls.

Prix des Puts simulés (en % de S_0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	0,48%	1,53%	2,48%	3,29%	4,07%	4,74%	5,27%	5,83%	6,21%	6,56%	
80%	0,80%	2,15%	3,27%	4,16%	5,01%	5,71%	6,27%	6,83%	7,21%	7,56%	
85%	1,31%	2,95%	4,20%	5,17%	6,07%	6,78%	7,35%	7,92%	8,28%	8,63%	
90%	2,09%	3,98%	5,31%	6,33%	7,26%	7,97%	8,54%	9,09%	9,43%	9,77%	
95%	3,27%	5,29%	6,65%	7,67%	8,59%	9,29%	9,82%	10,35%	10,65%	10,97%	
100%	4,95%	6,94%	8,23%	9,19%	10,08%	10,74%	11,22%	11,70%	11,96%	12,24%	
105%	7,26%	8,99%	10,10%	10,93%	11,75%	12,34%	12,76%	13,16%	13,36%	13,59%	
110%	10,25%	11,45%	12,26%	12,89%	13,60%	14,09%	14,42%	14,72%	14,85%	15,01%	
115%	13,89%	14,34%	14,73%	15,07%	15,64%	16,01%	16,22%	16,40%	16,44%	16,52%	
120%	18,04%	17,64%	17,52%	17,52%	17,89%	18,09%	18,15%	18,19%	18,14%	18,11%	
125%	22,53%	21,30%	20,63%	20,24%	20,35%	20,35%	20,23%	20,12%	19,94%	19,81%	
K/S											

Différences par rapport aux prix observés (en % de S_0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-0,20%	-0,31%	-0,46%	-0,63%	-0,68%	-0,73%	-0,83%	-0,81%	-0,90%	-0,92%	
80%	-0,21%	-0,27%	-0,39%	-0,55%	-0,57%	-0,63%	-0,72%	-0,71%	-0,80%	-0,82%	
85%	-0,18%	-0,20%	-0,31%	-0,45%	-0,46%	-0,51%	-0,60%	-0,59%	-0,70%	-0,71%	
90%	-0,11%	-0,09%	-0,21%	-0,34%	-0,33%	-0,40%	-0,48%	-0,47%	-0,59%	-0,59%	
95%	0,04%	0,04%	-0,08%	-0,22%	-0,20%	-0,28%	-0,35%	-0,34%	-0,47%	-0,47%	
100%	0,21%	0,21%	0,07%	-0,10%	-0,06%	-0,10%	-0,20%	-0,21%	-0,34%	-0,34%	
105%	0,36%	0,40%	0,24%	0,06%	0,12%	0,07%	-0,01%	-0,06%	-0,20%	-0,20%	
110%	0,35%	0,50%	0,39%	0,21%	0,29%	0,26%	0,17%	0,10%	-0,03%	-0,04%	
115%	0,27%	0,50%	0,45%	0,30%	0,47%	0,47%	0,38%	0,29%	0,15%	0,12%	
120%	0,20%	0,44%	0,44%	0,34%	0,60%	0,67%	0,61%	0,46%	0,34%	0,31%	
125%	0,15%	0,37%	0,42%	0,35%	0,68%	0,82%	0,80%	0,66%	0,55%	0,53%	
K/S											

On observe tout d'abord que le modèle semble plutôt sous-évaluer le prix des options en dehors la monnaie ($K < S_0$) et sur-évaluer le prix des options dans la monnaie ($K > S_0$) avec une très légère distinction selon la maturité puisqu'il y a une légère tendance à sous-évaluer davantage pour les maturités élevées. Les meilleurs résultats sont obtenus sur les options proches de la monnaie ($K = S_0$), ce qui semble plus logique car ce sont les options les plus sensibles aux variations de volatilité.

D'autre part les résultats sont légèrement meilleurs que pour la première méthode. En effet l'écart maximal vaut ici 0,82 % (contre 0,93 %) tandis que l'écart minimal vaut -0,92 % (contre -0,85 %).

Ecart absolu en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	29,87%	16,69%	15,65%	16,00%	14,23%	13,28%	13,54%	12,25%	12,66%	12,32%	
80%	20,62%	11,12%	10,66%	11,76%	10,19%	9,89%	10,24%	9,40%	10,00%	9,79%	
85%	12,28%	6,24%	6,81%	8,08%	6,99%	7,02%	7,54%	6,99%	7,78%	7,61%	
90%	4,98%	2,17%	3,75%	5,11%	4,36%	4,74%	5,30%	4,97%	5,88%	5,72%	
95%	1,10%	0,77%	1,14%	2,82%	2,32%	2,71%	3,40%	3,22%	4,25%	4,13%	
100%	4,48%	3,12%	0,83%	1,02%	0,57%	0,95%	1,71%	1,77%	2,76%	2,68%	
105%	5,26%	4,66%	2,40%	0,52%	0,99%	0,61%	0,10%	0,47%	1,44%	1,43%	
110%	3,50%	4,57%	3,31%	1,65%	2,20%	1,90%	1,22%	0,67%	0,22%	0,30%	
115%	1,98%	3,57%	3,13%	2,06%	3,08%	3,01%	2,41%	1,77%	0,90%	0,72%	
120%	1,13%	2,56%	2,57%	1,99%	3,49%	3,82%	3,46%	2,71%	1,91%	1,72%	
125%	0,68%	1,75%	2,08%	1,77%	3,47%	4,21%	4,13%	3,57%	2,86%	2,74%	
K/S											

La même tendance que pour la méthode des Calls se dégage, avec des écarts plus importants pour les strike faibles. Néanmoins, malgré une valeur maximale plus importante (près de 30 % pour un strike de 75 % de S_0 et une maturité de 1 an), les écarts sont dans leur plus large partie plus faibles que dans la méthode des Calls, ce qui tend à accréditer la méthode des volatilités implicites.

De la même manière que pour la méthode des Calls, on peut déduire la matrice de volatilités implicites et les différences avec la matrice de volatilités implicites initiale. On en déduira de nouveau les écarts absolus de volatilité en pourcentage :

Volatilité implicite simulée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	20,24%	20,54%	20,80%	21,05%	21,54%	22,02%	22,42%	22,99%	23,38%	23,85%	
80%	19,10%	19,64%	20,07%	20,41%	20,98%	21,48%	21,94%	22,52%	22,93%	23,43%	
85%	17,98%	18,77%	19,32%	19,76%	20,40%	20,94%	21,44%	22,05%	22,48%	23,03%	
90%	16,93%	17,91%	18,57%	19,13%	19,83%	20,41%	20,95%	21,59%	22,04%	22,62%	
95%	16,01%	17,09%	17,87%	18,50%	19,26%	19,90%	20,47%	21,14%	21,61%	22,22%	
100%	15,12%	16,36%	17,21%	17,89%	18,72%	19,42%	20,02%	20,70%	21,19%	21,84%	
105%	14,34%	15,70%	16,60%	17,32%	18,22%	18,96%	19,60%	20,28%	20,80%	21,47%	
110%	13,70%	15,10%	16,03%	16,78%	17,75%	18,54%	19,21%	19,88%	20,43%	21,11%	
115%	13,22%	14,60%	15,52%	16,25%	17,31%	18,15%	18,84%	19,51%	20,09%	20,78%	
120%	13,01%	14,17%	15,06%	15,80%	16,92%	17,80%	18,51%	19,17%	19,77%	20,47%	
125%	13,20%	13,83%	14,70%	15,42%	16,59%	17,49%	18,21%	18,88%	19,48%	20,20%	
K/S											

Différences par rapport à la volatilité implicite observée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-1,75%	-1,23%	-1,33%	-1,51%	-1,44%	-1,42%	-1,53%	-1,44%	-1,55%	-1,56%	
80%	-1,28%	-0,88%	-0,97%	-1,17%	-1,08%	-1,11%	-1,20%	-1,15%	-1,27%	-1,29%	
85%	-0,84%	-0,53%	-0,66%	-0,86%	-0,79%	-0,83%	-0,93%	-0,89%	-1,03%	-1,03%	
90%	-0,39%	-0,21%	-0,40%	-0,58%	-0,52%	-0,59%	-0,69%	-0,66%	-0,81%	-0,81%	
95%	0,10%	0,08%	-0,14%	-0,35%	-0,30%	-0,36%	-0,47%	-0,45%	-0,61%	-0,61%	
100%	0,55%	0,40%	0,11%	-0,14%	-0,08%	-0,13%	-0,25%	-0,26%	-0,42%	-0,41%	
105%	0,94%	0,74%	0,37%	0,08%	0,15%	0,09%	-0,02%	-0,07%	-0,23%	-0,23%	
110%	1,01%	0,93%	0,60%	0,29%	0,37%	0,32%	0,20%	0,11%	-0,04%	-0,05%	
115%	1,02%	0,99%	0,70%	0,41%	0,58%	0,55%	0,43%	0,31%	0,16%	0,13%	
120%	1,11%	1,00%	0,71%	0,47%	0,74%	0,77%	0,67%	0,51%	0,36%	0,32%	
125%	1,31%	0,99%	0,74%	0,50%	0,85%	0,94%	0,87%	0,73%	0,57%	0,54%	
K/S											

Écarts absolus de volatilité en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	7,98%	5,63%	6,03%	6,69%	6,26%	6,07%	6,38%	5,91%	6,23%	6,15%	
80%	6,30%	4,27%	4,59%	5,43%	4,90%	4,91%	5,20%	4,86%	5,25%	5,20%	
85%	4,46%	2,77%	3,32%	4,16%	3,71%	3,80%	4,15%	3,89%	4,38%	4,30%	
90%	2,25%	1,14%	2,10%	2,96%	2,57%	2,82%	3,17%	2,98%	3,55%	3,45%	
95%	0,65%	0,49%	0,75%	1,86%	1,52%	1,78%	2,22%	2,09%	2,75%	2,66%	
100%	3,80%	2,53%	0,65%	0,78%	0,42%	0,69%	1,23%	1,25%	1,93%	1,85%	
105%	6,98%	4,94%	2,27%	0,46%	0,84%	0,49%	0,08%	0,36%	1,09%	1,06%	
110%	7,95%	6,60%	3,90%	1,73%	2,13%	1,74%	1,06%	0,57%	0,18%	0,24%	
115%	8,33%	7,26%	4,69%	2,60%	3,46%	3,11%	2,34%	1,63%	0,80%	0,61%	
120%	9,36%	7,57%	4,97%	3,05%	4,60%	4,51%	3,75%	2,76%	1,84%	1,59%	
125%	11,05%	7,72%	5,30%	3,34%	5,40%	5,70%	5,04%	4,01%	3,01%	2,74%	
K/S											

De nouveau, les impacts sont amplifiés lorsque l'on regarde la volatilité implicite. Comme cela a été expliqué dans la première méthode, les tendances sont conservées en vertu de la dépendance entre le prix du Put et la volatilité implicite.

Ici les résultats sont nettement meilleurs qu'avant car l'écart maximal est de 1,31 % et l'écart minimal de -1,75 % (contre 2,39 % et -1,51 % pour la méthode des Calls).

En regardant la matrice des écarts absolus en pourcentage, on remarque que la moyenne de ces écarts est d'environ 3,54 %, avec un minimum et un maximum respectivement égaux à 0,08 % et 11,05 %. Ces écarts sont donc légèrement plus élevés en moyenne que pour la méthode des Calls, néanmoins leur étendue est très nettement inférieure, ce qui confirme la robustesse de la méthode des volatilités implicites.

En conclusion, la méthode des volatilités implicites offre de bons résultats, tant sur les prix des options que sur les volatilités implicites. De plus, cette dernière semble plus cohérente que la méthode des Calls car les meilleurs résultats sont obtenus autour de la monnaie.

De plus, l'application de cette méthode entraîne une sur-évaluation des prix des Puts dans la monnaie. Or les Puts dans la monnaie sont les options de vente les plus chères (le strike est élevé, permettant donc au porteur de vendre le sous-jacent à un prix fort quel que soit son cours). Leur sur-évaluation est donc une bonne chose pour la gestion du risque (principe de prudence).

5.3.4 La combinaison des deux méthodes

Cette troisième et dernière méthode de mise en pratique du modèle de Dupire est une approche hybride à partir des deux premières. En effet, elle fait appel aux volatilités implicites et à la méthode des différences finies. Le but est d'utiliser la formule 5.4 sans pour autant donner une forme analytique à la volatilité implicite, mais en calculant numériquement les dérivées partielles. Pour l'appliquer, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- Après avoir récupéré la matrice des volatilités implicites, on calcule les dérivées partielles à partir de la méthode des différences finies pour chaque couple (K, T) .
- La formule 5.4 permet alors de calculer la volatilité locale à partir des dérivées partielles de la volatilité implicite pour chaque couple (K, T) .
- Dès lors on dispose de la matrice des volatilités locales sur laquelle on va pouvoir effectuer la calibration. On utilise la même forme que pour la méthode des Calls, à savoir :

$$\sigma(K, T) = \alpha + \beta_1 K + \beta_2 K^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 KT$$

- Il ne reste plus qu'à utiliser la volatilité locale ainsi calculée dans la formule de discrétisation du modèle 5.2. Notons qu'à nouveau il faut remplacer K par S_{t-1} et T par t .

Pour cette troisième et dernière méthode, on génère également 10 000 scénarios pour calculer les prix des Puts par la méthode de Monte-Carlo. De même on utilise toujours un pas de temps mensuel. On obtient les résultats suivants :

Prix des Puts simulés (en % de S0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	0,60%	1,80%	2,85%	3,72%	4,36%	4,96%	5,46%	5,96%	6,48%	6,88%	
80%	1,01%	2,48%	3,65%	4,58%	5,25%	5,87%	6,40%	6,94%	7,48%	7,89%	
85%	1,62%	3,32%	4,57%	5,54%	6,23%	6,87%	7,42%	7,99%	8,54%	8,97%	
90%	2,50%	4,35%	5,63%	6,64%	7,32%	7,97%	8,53%	9,12%	9,68%	10,12%	
95%	3,72%	5,61%	6,87%	7,88%	8,52%	9,17%	9,73%	10,33%	10,90%	11,34%	
100%	5,41%	7,16%	8,31%	9,28%	9,87%	10,50%	11,02%	11,63%	12,20%	12,63%	
105%	7,65%	9,02%	9,98%	10,86%	11,39%	11,95%	12,43%	13,01%	13,59%	14,01%	
110%	10,48%	11,26%	11,92%	12,66%	13,08%	13,54%	13,97%	14,51%	15,07%	15,48%	
115%	13,89%	13,91%	14,18%	14,69%	14,95%	15,29%	15,64%	16,13%	16,67%	17,03%	
120%	17,85%	17,01%	16,79%	16,97%	17,03%	17,21%	17,46%	17,87%	18,36%	18,68%	
125%	22,23%	20,54%	19,75%	19,56%	19,34%	19,34%	19,45%	19,74%	20,15%	20,42%	
K/S											

Différences par rapport aux prix observés (en % de S0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-0,08%	-0,04%	-0,09%	-0,20%	-0,36%	-0,51%	-0,64%	-0,68%	-0,63%	-0,60%	
80%	0,00%	0,07%	-0,01%	-0,14%	-0,33%	-0,46%	-0,58%	-0,60%	-0,54%	-0,49%	
85%	0,13%	0,18%	0,07%	-0,08%	-0,30%	-0,42%	-0,53%	-0,52%	-0,44%	-0,37%	
90%	0,30%	0,28%	0,12%	-0,03%	-0,27%	-0,40%	-0,48%	-0,44%	-0,34%	-0,24%	
95%	0,49%	0,37%	0,14%	-0,01%	-0,27%	-0,37%	-0,44%	-0,36%	-0,23%	-0,10%	
100%	0,67%	0,42%	0,14%	-0,01%	-0,26%	-0,34%	-0,40%	-0,29%	-0,10%	0,05%	
105%	0,75%	0,44%	0,12%	-0,01%	-0,24%	-0,31%	-0,34%	-0,21%	0,03%	0,22%	
110%	0,57%	0,31%	0,05%	-0,02%	-0,23%	-0,29%	-0,28%	-0,11%	0,19%	0,42%	
115%	0,28%	0,06%	-0,10%	-0,08%	-0,22%	-0,25%	-0,20%	0,02%	0,37%	0,63%	
120%	0,01%	-0,19%	-0,30%	-0,21%	-0,25%	-0,22%	-0,08%	0,16%	0,56%	0,87%	
125%	-0,15%	-0,40%	-0,46%	-0,33%	-0,32%	-0,19%	0,01%	0,31%	0,77%	1,14%	
K/S											

On remarque premièrement que les prix des Puts sont sous-estimés dans la majorité des cas, mais avec une différence notable par rapport aux méthodes précédentes. En effet, il semble que l'impact ne soit pas le même selon la maturité : les prix sont plus souvent sous-évalués à maturités moyennes (de 4 à 7 ans).

En terme de qualité des résultats, cette méthode est légèrement moins performante que les précédentes avec des écarts allant de -0,68 % à 1,14 %. L'étendue de ces écarts est donc plus importante et nettement plus décentrée par rapport à 0.

De plus, comme pour la méthode des Calls, les meilleurs résultats ne sont pas nécessairement obtenus pour les options à la monnaie.

Même si cette méthode paraît légèrement moins performante que les précédentes, on peut regarder les écarts absolus en pourcentage.

Écarts absolu en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	11,36%	2,12%	3,08%	5,19%	8,19%	9,30%	10,46%	10,18%	8,87%	8,06%	
80%	0,01%	2,75%	0,21%	2,95%	5,98%	7,28%	8,35%	7,95%	6,70%	5,87%	
85%	8,65%	5,66%	1,60%	1,45%	4,56%	5,77%	6,68%	6,10%	4,91%	4,00%	
90%	13,70%	6,95%	2,17%	0,52%	3,60%	4,73%	5,37%	4,61%	3,39%	2,34%	
95%	15,10%	6,98%	2,12%	0,15%	3,06%	3,90%	4,29%	3,38%	2,03%	0,89%	
100%	14,20%	6,29%	1,74%	0,09%	2,59%	3,12%	3,46%	2,40%	0,82%	0,42%	
105%	10,89%	5,07%	1,19%	0,08%	2,08%	2,56%	2,65%	1,55%	0,25%	1,63%	
110%	5,76%	2,82%	0,44%	0,15%	1,72%	2,07%	1,99%	0,75%	1,27%	2,80%	
115%	2,03%	0,46%	0,71%	0,55%	1,44%	1,62%	1,24%	0,12%	2,26%	3,85%	
120%	0,08%	1,11%	1,73%	1,19%	1,46%	1,24%	0,47%	0,91%	3,16%	4,90%	
125%	0,65%	1,90%	2,28%	1,67%	1,62%	0,99%	0,08%	1,62%	3,97%	5,89%	
K/S											

Contrairement à ce que l'on pouvait attendre, les écarts absolus sont relativement faibles, puisque la valeur maximale est de 15 %. D'autre part, la tendance qui semble se dégager est qu'il existe des écarts plus importants lorsque le strike ou la maturité sont faibles. Néanmoins en moyenne les écarts absolus sont du même ordre que pour les deux méthodes précédentes.

Regardons enfin les deux matrices relatives aux volatilités implicites : la matrice des volatilités implicites issues des Puts simulés, ainsi que la matrice reflétant les écarts entre les volatilités implicites observées et simulées.

Volatilité implicite simulée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	21,36%	21,62%	21,87%	22,08%	22,16%	22,45%	22,77%	23,23%	23,85%	24,39%	
80%	20,38%	20,73%	21,02%	21,29%	21,43%	21,78%	22,16%	22,70%	23,35%	23,95%	
85%	19,39%	19,78%	20,13%	20,47%	20,68%	21,09%	21,55%	22,16%	22,86%	23,52%	
90%	18,37%	18,78%	19,20%	19,65%	19,92%	20,41%	20,95%	21,63%	22,38%	23,10%	
95%	17,33%	17,77%	18,26%	18,83%	19,17%	19,74%	20,35%	21,11%	21,93%	22,70%	
100%	16,33%	16,77%	17,33%	18,02%	18,44%	19,11%	19,77%	20,61%	21,49%	22,32%	
105%	15,34%	15,76%	16,41%	17,23%	17,75%	18,48%	19,21%	20,11%	21,07%	21,96%	
110%	14,34%	14,75%	15,51%	16,46%	17,09%	17,88%	18,68%	19,65%	20,68%	21,63%	
115%	13,24%	13,74%	14,66%	15,73%	16,46%	17,31%	18,19%	19,22%	20,33%	21,33%	
120%	11,99%	12,73%	13,86%	15,05%	15,87%	16,78%	17,75%	18,83%	20,00%	21,06%	
125%	9,99%	11,66%	13,13%	14,45%	15,34%	16,33%	17,36%	18,48%	19,70%	20,82%	
K/S											

Différences par rapport aux volatilités implicites observées

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	-0,63%	-0,15%	-0,26%	-0,48%	-0,82%	-0,99%	-1,18%	-1,20%	-1,08%	-1,02%	
80%	0,00%	0,21%	-0,02%	-0,29%	-0,63%	-0,81%	-0,98%	-0,97%	-0,85%	-0,77%	
85%	0,57%	0,48%	0,15%	-0,15%	-0,51%	-0,68%	-0,82%	-0,78%	-0,65%	-0,54%	
90%	1,05%	0,66%	0,23%	-0,06%	-0,43%	-0,59%	-0,69%	-0,62%	-0,47%	-0,33%	
95%	1,42%	0,76%	0,25%	-0,02%	-0,39%	-0,52%	-0,59%	-0,48%	-0,29%	-0,13%	
100%	1,76%	0,81%	0,23%	-0,01%	-0,36%	-0,44%	-0,50%	-0,35%	-0,12%	0,07%	
105%	1,94%	0,80%	0,18%	-0,01%	-0,32%	-0,39%	-0,41%	-0,24%	0,04%	0,26%	
110%	1,65%	0,58%	0,08%	-0,03%	-0,29%	-0,34%	-0,33%	-0,12%	0,21%	0,47%	
115%	1,04%	0,13%	-0,16%	-0,11%	-0,27%	-0,29%	-0,22%	0,02%	0,40%	0,68%	
120%	0,09%	-0,44%	-0,49%	-0,28%	-0,31%	-0,25%	-0,09%	0,17%	0,59%	0,91%	
125%	-1,90%	-1,18%	-0,83%	-0,47%	-0,40%	-0,22%	0,02%	0,33%	0,79%	1,16%	
K/S											

Écarts absolus de volatilité en pourcentage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T
75%	2,87%	0,70%	1,16%	2,14%	3,57%	4,23%	4,91%	4,90%	4,35%	4,01%	
80%	0,00%	1,03%	0,09%	1,35%	2,87%	3,60%	4,24%	4,11%	3,51%	3,11%	
85%	3,03%	2,48%	0,77%	0,74%	2,41%	3,12%	3,67%	3,39%	2,76%	2,26%	
90%	6,06%	3,64%	1,21%	0,30%	2,11%	2,81%	3,21%	2,77%	2,04%	1,41%	
95%	8,94%	4,47%	1,39%	0,10%	2,01%	2,56%	2,80%	2,20%	1,32%	0,57%	
100%	12,06%	5,09%	1,36%	0,07%	1,92%	2,27%	2,48%	1,69%	0,57%	0,29%	
105%	14,44%	5,37%	1,13%	0,07%	1,76%	2,08%	2,09%	1,20%	0,19%	1,21%	
110%	12,99%	4,06%	0,51%	0,16%	1,67%	1,89%	1,73%	0,63%	1,03%	2,23%	
115%	8,55%	0,94%	1,07%	0,69%	1,62%	1,67%	1,20%	0,11%	2,01%	3,29%	
120%	0,72%	3,37%	3,38%	1,84%	1,92%	1,46%	0,51%	0,92%	3,05%	4,52%	
125%	16,00%	9,17%	5,93%	3,17%	2,53%	1,34%	0,09%	1,82%	4,19%	5,88%	
K/S											

On remarque que pour cette méthode, l'écart maximal est de 1,76 % et l'écart minimal est de -1,90 %. Il s'agit donc d'écarts supérieurs à la méthode des volatilités implicites et globalement du même ordre que pour la méthode des Calls. Malgré tout, la tendance au décentrage par rapport à 0 est atténuée lors du passage à la volatilité implicite. La tendance marquée à la sous-évaluation est quant à elle conservée.

En regardant la matrice des écarts absolus en pourcentage, on remarque que la moyenne de ces écarts est d'environ 2,82 %, avec un minimum et un maximum respectivement égaux à 0,00 % et 16,00 %. En terme de moyenne cette méthode est donc clairement la meilleure. Néanmoins l'étendue des écarts demeure trop importante pour pouvoir s'y fier véritablement. En effet la méthode des volatilités implicites semble reproduire les volatilités observées avec plus de constante.

En conclusion, la méthode combinée offre des résultats plutôt troublants. En effet, même si la précision est moindre au niveau de la reproduction des prix de Puts, les écarts ne sont pas trop importants, tant sur les prix que sur la volatilité. L'inconvénient notable que l'on pourra retenir est que cette méthode ne dégage pas de tendance logique (ou du moins compréhensible) quant à la sur-évaluation ou à la sous-évaluation des prix de Puts.

5.4 Choix d'une méthode et tests

Au regard des résultats obtenus dans la section précédente, la méthode choisie pour être par la suite implémentée dans les pricers (donc la méthode qui sera utilisée dans le modèle action pour tarifier les garanties) est la méthode des volatilités implicites. En effet, en dépit d'une qualité des résultats sensiblement égale à celle de la méthode des Calls, la méthode des volatilités implicites permet de reproduire les observations avec plus de cohérence : la plus grande précision est observée pour les options à la monnaie, les options dans la monnaie sont légèrement sous-évaluées et les options en dehors de la monnaie sont légèrement sur-évaluées.

De plus, cette méthode est clairement la plus pratique à implémenter car elle ne nécessite pas d'utiliser un schéma de discrétisation des différences finies et réduit par conséquent le temps de calcul informatique et l'imprécision liée au calcul des dérivées partielles.

On notera néanmoins que le modèle ne permet pas de reproduire parfaitement la nappe des prix d'options observée.

Il est maintenant possible de s'intéresser aux améliorations que le modèle de Dupire est supposé apporter au modèle de Black et Scholes. Pour cela, nous allons regarder la distribution des rendements pour les deux modèles. Pour ce faire, on pratique des simulations sur 10 ans avec un pas de temps mensuel.



Il est important de noter que l'on ne souhaite pas comparer ces distributions avec la distribution historique des rendements d'un titre ou d'un indice boursier quelconque. En effet il ne s'agit pas du critère adéquat pour différencier les deux modèles. Il est d'ailleurs notoire que le modèle de Black et Scholes est incapable de reproduire la distribution historique. Surtout, étant dans une problématique de pricing, on se place en univers risque neutre.

5.4.1 Etude des rendements du modèle de Black et Scholes

Pour utiliser le modèle de Black et Scholes, il faut choisir une volatilité constante. Nous prenons la volatilité implicite à 10 ans pour les options à la monnaie. D'après la matrice fournie précédemment, on aura : $\sigma = 22,25\%$. Le taux, constant également, sera le taux 10 ans, soit : $r = 4,31\%$. Rappelons que le rendement continu des dividendes est : $q = 1,9\%$. Avec un pas de temps mensuel, on observe les statistiques suivantes pour la variable du rendement du cours du sous-jacent. Notons qu'il s'agit ici des valeurs mensuelles :

Minimum	-25,20%
Moyenne	0,20142%
Ecart type	6,44%
Maximum	32,11%
Skewness	0,20538142
Kurtosis	0,08203728

La moyenne et l'écart-type donnés ici sont les valeurs mensuelles. Ramenée sur une base annuelle la moyenne des rendements est de 2,42 %, soit très proche de la valeur attendue en moyenne qui est de $r - q = 2,41\%$. De même, la volatilité annualisée vaut 22,30 % contre 22,25 % pour sa valeur attendue en moyenne.

Le skewness, malgré sa valeur de 0,205, reste proche de 0 donc la distribution des rendements n'est que faiblement asymétrique avec une étendue à droite (valeurs positives du rendement) légèrement plus importante. Ceci est confirmé par les valeurs du minimum et du maximum. La valeur attendue du skewness pour une distribution des rendements selon Black et Scholes est 0, néanmoins cet écart s'explique par la finesse du pas de temps. En effet on s'aperçoit que le skewness se rapproche nettement de 0 lorsque le pas de temps est affiné.

De plus l'excès de kurtosis est de 0,082 caractérisant une distribution quasi-normale au niveau de l'aplatissement, avec des queues légèrement plus épaisses que la loi normale. Ce qui signifie que les queues comptent légèrement plus d'observations que dans une loi normale.

5.4.2 Etude des rendements du modèle de Dupire

Dans le modèle de Dupire, l'intégralité de la matrice des volatilités implicites est utilisée, de même que l'intégralité de la courbe des taux. Le tableau suivant reprend également les statistiques de la variable du rendement du cours du sous-jacent. On a utilisé de nouveau un pas de temps mensuel et on a simulé sur 10 ans. Les statistiques sont également données en valeurs mensuelles :

Minimum	-34,26%
Moyenne	0,20195%
Ecart type	6,51%
Maximum	50,39%
Skewness	0,26703984
Kurtosis	1,35233757

De nouveau, en revenant aux valeurs annualisées, on remarque que le rendement moyen vaut 2,42 % et que la volatilité moyenne vaut 22,55 %, on est donc très proche des valeurs attendues. On peut remarquer que l'étalement des données est beaucoup plus important puisque l'étendue

(valeur maximale - valeur minimale) vaut 84,65 % contre 57,31 % pour le modèle de Black et Scholes. Les rendements extrêmes sont donc nettement plus importants. Le skewness confirme par ailleurs l'asymétrie de la distribution : il vaut 0,267 (légèrement supérieur au cas du modèle de Black et Scholes) et témoigne d'une queue plus longue à droite.

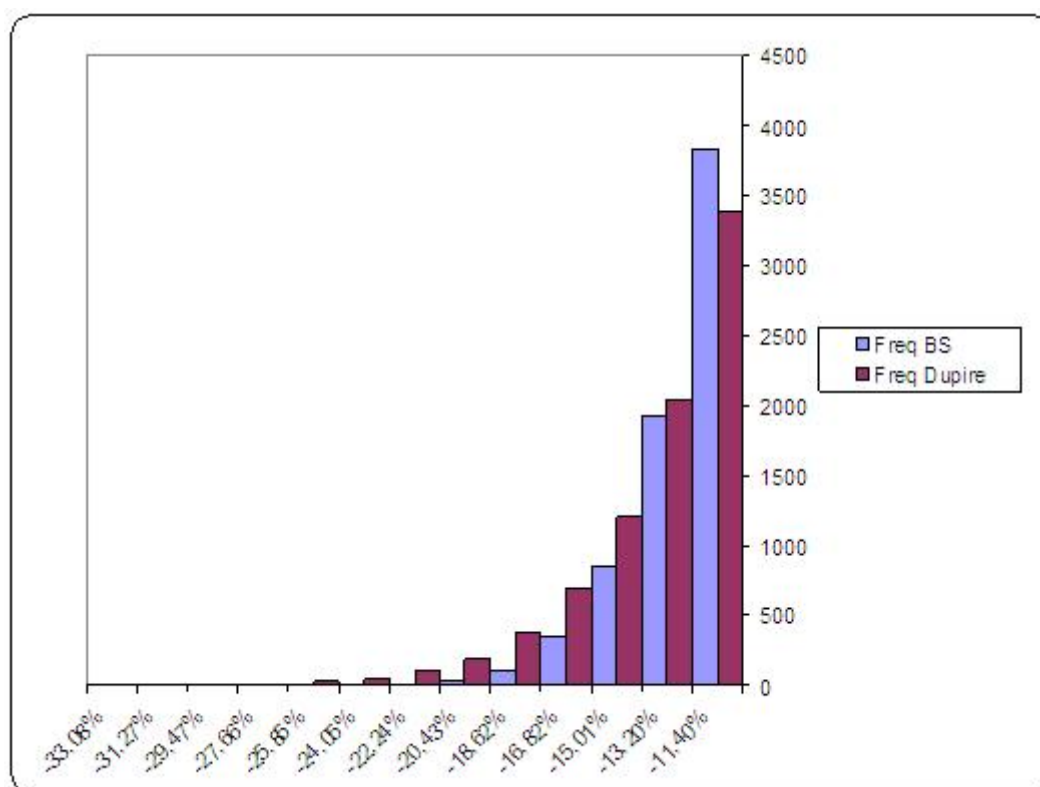
L'excès de Kurtosis de 1,352 témoigne que les queues sont épaisses et comptent nettement plus d'observations que dans une distribution gaussienne.

En conséquence, le modèle de Dupire semble prendre nettement mieux en compte la présence de valeurs extrêmes dans la distribution (excès de Kurtosis supérieur à 1). En effet sous ce modèle, les valeurs extrêmes sont plus marquées que dans celui de Black et Scholes.

De cette manière, en travaillant avec le modèle de Dupire, on sous-estimera moins la survenance des événements rares et extrêmes.

5.4.3 Comparaison des queues de distribution

Ces événements rares et extrêmes sont observés grâce aux queues de distribution des rendements. Pour évaluer les différences entre les deux modèles, on représente ci-après les queues de distribution des deux modèles sur les mêmes graphiques :



Zoom sur les queues de distribution : Rendements négatifs

Concernant les rendements négatifs, on observe que les fréquences d'apparition pour le modèle de Black et Scholes sont d'abord plus importantes que celle du modèle de Dupire, mais cela s'inverse pour les valeurs véritablement extrêmes. Cela confirme les observations faites ci-avant concernant la meilleure prise en compte des événements extrêmes par le modèle de Dupire.

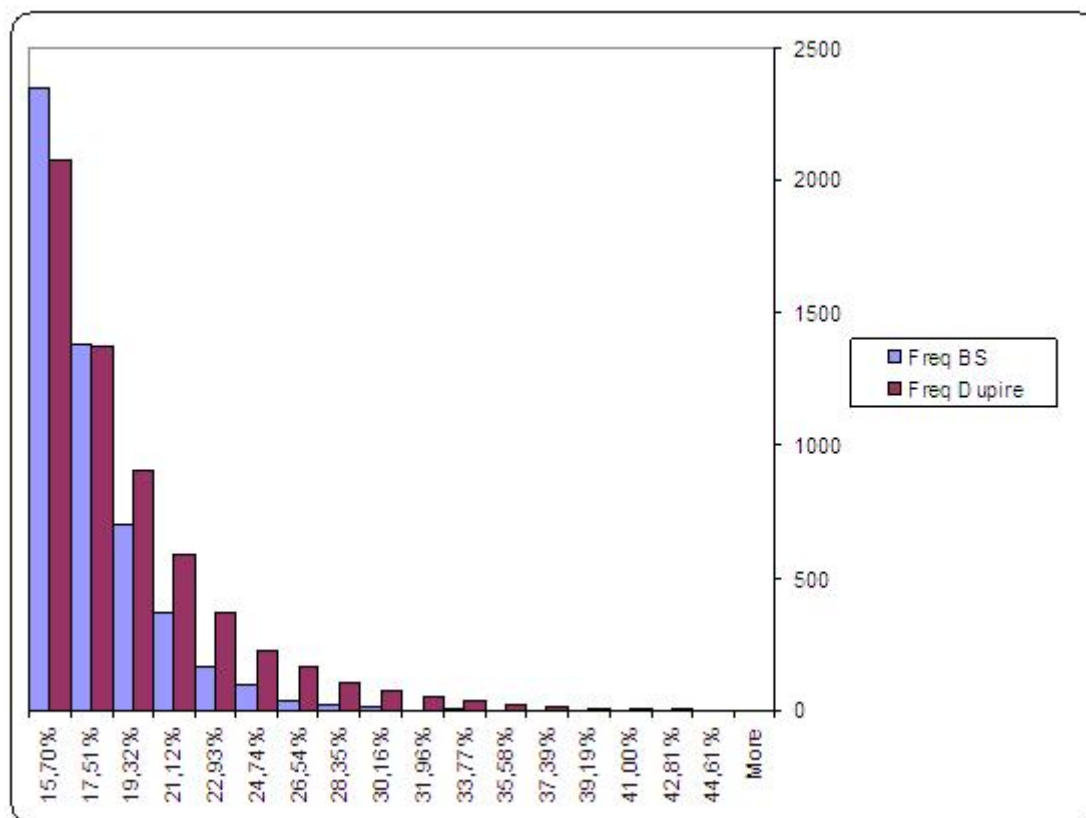
On peut par ailleurs s'intéresser aux valeurs de la Value at Risk (VaR) pour différents seuils :

	VaR(90 %)	VaR(95 %)	VaR(98 %)	VaR(99,5 %)
Black-Scholes	-7,89 %	-10,00 %	-12,34 %	-15,19 %
Dupire	-7,57 %	-10,07 %	-13,22 %	-17,66 %

On observe que dans le modèle de Dupire, les rendements sont inférieurs à -10,07 % avec une probabilité de 5 %, et inférieurs à -13,22 % avec une probabilité de 2 %.

On observe par ailleurs que dans le modèle de Black et Scholes, les rendements sont inférieurs à -10 % avec une probabilité de 5 %, et inférieurs à -12,34 % avec une probabilité de 2 %. Donc plus le niveau de VaR est important et plus l'écart de VaR se creuse entre les deux modèles.

Ceci vient confirmer les observations faites sur l'histogramme, à savoir qu'il y a plus d'événements extrêmes dans le modèle de Dupire.



Zoom sur les queues de distribution : Rendements positifs

On observe la même chose pour les rendements positifs : au-delà d'un certain niveau, le modèle de Dupire présente le plus grand nombre d'occurrence des événements extrêmes.

Le modèle de Dupire est donc plus prudent que le modèle de Black et Scholes lorsque l'on s'intéresse aux queues de distribution, notamment pour les calculs de VaR. En effet, dans ce modèle, il y a beaucoup plus d'événements rares et extrêmes, et ces derniers sont plus marqués et plus forts que dans le modèle de Black et Scholes. Donc, en l'utilisant, on sous-estimera moins la survenance des rendements négatifs extrêmes et cela augmentera la prudence dans une optique de couverture.

De plus le modèle de Dupire permettra d'appliquer des stratégies de Vega hedging, ce que ne permet pas le modèle de Black et Scholes. Le Vega étant la sensibilité du prix de l'option à la volatilité de cette dernière, il n'existe aucune stratégie utilisant le modèle de Black et Scholes qui permette d'obtenir un portefeuille de Vega neutre car on suppose qu'il n'y a aucune variation de volatilité.

5.5 Conclusion

En résumé de ce chapitre, rappelons que la meilleure méthode de calibration du modèle est celle des volatilités implicites. Celle-ci permet en effet d'obtenir les résultats les plus précis en

terme de pricing, bien que l'on ne puisse pas reproduire parfaitement le prix des Puts initiaux. Elle est également la moins gourmande en temps de calcul et n'ajoute pas d'incertitude sur les calculs des dérivées partielles.

On remarque en outre que l'utilisation du modèle de Dupire plutôt que Black et Scholes entraîne une plus grande occurrence des événements extrêmes, ce qui faisait partie des objectifs du modèle.

Chapitre 6

Le modèle de Hull et White

Par la suite, nous expliquerons les raisons pour lesquelles le choix s'est porté sur le modèle de Hull et White à un facteur. D'une manière analogue au chapitre sur le modèle de Dupire, nous traiterons ici de la calibration et de l'implémentation du modèle, après en avoir précisément détaillé les principes.

De même on tâchera de présenter les différentes approches envisagées pour utiliser en pratique le modèle. Ces approches seront ensuite testées sur des données de marché, toujours dans le but de dégager la plus consistante d'entre elles.

6.1 Généralités sur les taux

Le taux court r_t en une date t est le taux qui s'applique à cette date pour une période de longueur infinitésimale. Il est parfois appelé taux court instantané.

C'est essentiellement le processus suivi par r_t sous la probabilité risque neutre qui importe pour l'évaluation des obligations ou des options sur taux. On supposera donc que tous les processus définis par la suite le sont sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} .

- La valeur en t d'un actif dérivé qui engendre un PayOff f_T en date T est donné par :

$$E_{\mathbb{Q}}(e^{-\bar{r}(T-t)} f_T)$$

où \bar{r} est la valeur moyenne du taux court entre les dates t et T .

- On notera $P(t, T)$ le prix en date t d'un zéro-coupon qui paye 1 en date T . D'après l'équation précédente, on a donc :

$$P(t, T) = E_{\mathbb{Q}}(e^{-\bar{r}(T-t)})$$

- Si $R(t, T)$ désigne le taux d'intérêt composé en continu qui prévaut en date t pour une durée $T - t$, on peut écrire :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

- Notons $F(0, t, y - t)$ le taux forward déterminé en 0, démarrant en t et d'échéance y . Les taux forward sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon d'aujourd'hui. Ils représentent les anticipations du marché sur les courbes de taux futures :

$$F(0, t, y - t) = \left(\frac{(1+R(0, y))^y}{(1+R(0, t))^t} \right)^{\frac{1}{y-t}} - 1$$



- Par ailleurs, on notera $F(0, t)$ le taux forward instantané pour l'horizon t , vu en date 0. Il s'agit du taux forward déterminé en 0, démarrant en t et pour une durée $y - t$ infinitésimale. C'est donc la valeur limite de $F(0, t, y - t)$ lorsque y tend vers t^+ . On notera de la même façon $F_t(0, t)$ sa dérivée par rapport à t . Auquel cas, on sait exprimer le taux forward instantané comme ceci :

$$F(0, t) = -\frac{\partial \ln(P(0, t))}{\partial t}.$$

- On peut également définir le facteur d'actualisation $D(t)$, dépendant de la trajectoire suivie par le taux court, de la façon suivante :

$$D(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)$$

6.2 Les modèles de type Ho et Lee ou Hull et White

6.2.1 Leur intérêt

L'inconvénient des modèles de type Vasicek ou CIR est qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement à la structure par termes des taux d'intérêts observés sur le marché aujourd'hui.

Un modèle de type Ho et Lee ou Hull et White est construit de façon à être cohérent avec cette structure. En quelque sorte, la différence essentielle entre les deux approches est que la première fournit la structure par termes des taux, alors que la seconde utilise la structure actuelle (au moment de la calibration) comme un paramètre servant à inférer le processus.

Dans le premier cas (Vasicek ou CIR par exemple), le drift du taux court n'est pas, en général, une fonction du temps, alors qu'il l'est dans les modèles de Ho et Lee ou de Hull et White. Cela s'explique par le fait que la structure des taux initiale détermine la trajectoire moyenne qui sera prise par le taux court dans le futur. Si la courbe des taux est fortement croissante entre deux maturités t_1 et t_2 , alors le taux court r aura un drift positif entre ces deux dates. A l'inverse, si la courbe des taux est fortement décroissante entre ces deux maturités, le drift de r sera négatif entre ces deux dates.

6.2.2 Le modèle de Ho et Lee

Il existe différents modèles cohérents avec la structure actuelle des taux parmi lesquels le modèle de Ho et Lee ainsi que le modèle de Hull et White. Dans cette partie, on se propose d'expliquer brièvement le premier. Une approche succincte de ce modèle devrait permettre de dégager ses limites et donc les premiers éléments pour justifier le choix du modèle de Hull et White.

A l'origine le modèle est en temps discret avec une évolution binomiale de la fonction d'actualisation.

Deux paramètres du modèle sont essentiels : l'écart-type du taux court ainsi que le prix de marché du risque pour ce taux. La version en temps continu du modèle s'écrit de la manière suivante sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$dr_t = \theta(t) dt + \sigma dW_t$$

avec :

- σ la volatilité constante du taux court,
- $\theta(t)$ une fonction du temps calibrée pour que le modèle s'ajuste parfaitement à la courbe ZC initiale. Elle possède la forme analytique suivante : $\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$

Ce modèle est facile à appliquer et donne un ajustement exact de la courbe initiale des taux. Néanmoins un inconvénient est l'absence de retour à la moyenne : à un instant donné, le drift est indépendant du niveau des taux.

6.2.3 Le modèle généralisé de Hull et White

Le modèle de Hull et White généralisé est un modèle dans lequel une fonction quelconque du taux court obéit à un processus de diffusion gaussien de la forme suivante :

$$df(r_t) = (\theta(t) - a(t)f(r_t))dt + \sigma(t)d\overline{W}_t \quad (6.1)$$

La fonction θ est choisie de manière à ce que le modèle soit cohérent avec la structure initiale des taux. Les fonctions a et σ sont des paramètres déterministes de volatilité, calibrés sur des prix de marché.

Ce modèle généralisé contient de nombreux modèles populaires selon ses cas particuliers :

- Lorsque $f(r) = r$, il s'agit du modèle classique de Hull et White (ou modèle de Vasicek généralisé),
- Lorsque $f(r) = \ln(r)$, il s'agit du modèle de Black et Karasinski (1991),
- Lorsque $f(r) = \sqrt{r}$, il s'agit du modèle de Pelsser (1996).

Seuls les deux premiers modèles sont couramment utilisés dans la pratique. Dans la plupart des cas, ces deux modèles présentent des performances voisines dans l'ajustement des données de marché à partir d'instruments liquides.

L'avantage du modèle classique de Hull et White est bien entendu sa simplicité analytique, sa contrepartie est que, comme dans le modèle de Vasicek, la probabilité d'obtenir des taux négatifs est strictement positive. Le plus souvent, la probabilité d'occurrence des taux négatifs est très faible, mais les analystes considèrent souvent cet inconvénient comme rédhibitoire.

Le modèle de Black et Karasinski est beaucoup moins maniable mais les taux obtenus sont toujours positifs. De plus, les traders sont habitués à traiter des volatilités provenant d'un modèle log-normal plutôt que normal.

Le choix d'un modèle est réellement difficile dans une économie où les taux sont très faibles. Le modèle gaussien (classique) n'est pas satisfaisant car la probabilité d'obtenir des taux négatifs n'est plus négligeable. Le modèle log-normal (Black et Karasinski) pose quant à lui des problèmes de flexibilité.

Sur le plan pratique, Hull et White ont développé une technique qui semble bien fonctionner et qui consiste à considérer un modèle log-normal (Black et Karasinski) quand les taux sont inférieurs à 1 %, et un modèle gaussien (Hull et White classique) au-delà de ce seuil.

6.2.4 Le choix d'un modèle

Le premier objectif du nouveau modèle de taux était de permettre une meilleure prise en compte de la structure initiale des taux d'intérêts. Cela est possible, comme nous venons de le voir, dans le modèle de Ho et Lee. De plus, la facilité d'implémentation voulue est disponible dans ce modèle et les formules donnant la fonctionnelle des taux zéro-coupon sont bien connues.

Néanmoins, on souhaitait également pouvoir améliorer le modèle de Vasicek sur le caractère constant du retour à la moyenne. Or dans le modèle de Ho et Lee, il n'existe pas de phénomène de retour à la moyenne. C'est pourquoi le modèle de Hull et White a finalement été choisi. En effet et comme cela sera expliqué par la suite, il prend en compte la structure initiale de la courbe des taux (d'une manière par ailleurs plus fine que dans le modèle de Ho et Lee) et induit un phénomène de retour à la moyenne qui, cette fois, est variable en fonction du temps.

D'autre part, les taux que l'on utilisera dans l'étude sont supérieurs à 1 %, ce qui porte le meilleur choix au modèle classique. On conserve donc la facilité d'implémentation du modèle ainsi que la continuité avec le modèle de Vasicek dont il est une extension.

6.3 La théorie du modèle

Dans cette partie, nous allons donc nous intéresser exclusivement au modèle de Hull et White à un facteur pour l'évolution des taux. De la même manière que nous avons présenté le modèle de Dupire dans le chapitre précédent, nous aborderons dans un premier temps le modèle sur le plan théorique, après quoi les différentes approches possibles d'implémentation du modèle seront présentées. Ici encore ces approches seront testées sur des données de marché dans un but de comparaison et pour finalement choisir la plus consistante.

C'est en 1990 que Hull et White analysent des extensions du modèle de Vasicek qui permettraient de respecter la structure initiale des taux. L'une des versions considérées, qui deviendra le modèle de Hull et White, ou modèle de Vasicek généralisé, s'appuie sur le processus suivant, sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t) dt + \sigma d\overline{W}_t \quad (6.2)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$dr_t = a \left(\frac{\theta(t)}{a} - r_t \right) dt + \sigma d\overline{W}_t \quad (6.3)$$

avec :

- r_t le taux court,
- $\theta(t)$ une fonction du temps utilisée pour tenir compte de la structure initiale des taux d'intérêts,
- a un paramètre constant,
- \overline{W}_t un Mouvement Brownien Standard (sous \mathbf{Q}).
- σ la volatilité constante du taux court.

Il s'agit donc bien d'une extension du modèle de Ho et Lee incorporant un retour à la moyenne. D'après l'équation précédente, on voit qu'à l'instant t , le taux est attiré vers $\frac{\theta(t)}{a}$ à la vitesse a . Le modèle de Ho et Lee correspond au cas où a est nul.

La fonction $\theta(t)$ se déduit de la structure initiale des taux par la formule suivante, où les notations sont celles définies précédemment :

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \quad (6.4)$$

La discrétisation du modèle fournit l'équation suivante :

$$r_t = r_{t-1} + (\theta(t-1) - ar_{t-1}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \Phi_t \quad (6.5)$$

avec : $(\Phi_t)_{t \geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi normale centrée et réduite.

Par ailleurs, Hull et White ont démontré (voir annexe C.1) que l'on pouvait écrire le prix du zéro-coupon en t et de maturité $T - t$ de la manière suivante :

$$P(t, T) = \exp(A(t, T) - r(t) B(t, T)) \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{1 - \exp(-a(T-t))}{a} \\ A(t, T) = \ln\left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)}\right) - B(t, T) \frac{\partial \ln(P(0, t))}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1) \end{cases}$$

Il est important de noter que les taux obtenus par la formule 6.5 ne sont pas directement utilisables dans la formule 6.6. En effet, le taux r_t ainsi simulé est en réalité le taux forward de maturité Δ_t et non un taux instantané. Afin de pouvoir l'utiliser en tant que tel, il est nécessaire de l'ajuster de la manière suivante :

$$r(t) = \frac{r_t \Delta_t + A(t, t + \Delta_t)}{B(t, t + \Delta_t)} \quad (6.7)$$

On peut finalement déduire la fonctionnelle des taux zéro-coupon grâce à la formule donnée en début de chapitre et mettant en relation le prix du zéro-coupon et son taux. Dans notre cas, on aura :

$$R(t, T) = \frac{r(t) B(t, T) - A(t, T)}{T - t} \quad (6.8)$$

En outre, il est assez facile de vérifier la consistance et l'implémentation du modèle. Il existe en effet deux tests simples et fiables :

- On peut commencer par vérifier que le prix en 0 d'un zéro-coupon rapportant 1 en t est égal au facteur d'actualisation en t . En d'autres termes, il faut vérifier que :

$$P(0, t) = E[D(t)]$$

- D'autre part, pour $s < t$ on peut montrer facilement que l'espérance conditionnelle du taux court s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbb{E}_s(r_t) = r_s e^{-a(t-s)} + g(t) - g(s) e^{a(t-s)}$$

$$\text{où } g(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})^2$$

Ensuite, en constatant que le dernier terme de $g(t)$ est la plupart du temps négligeable devant le reste de la formule, on a :

$$\mathbb{E}_s(r_t) = F(0, t) + e^{-a(t-s)} (r_s - F(0, s))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_s(r_t) = F(0, t)$$

Donc en moyenne le taux court suit la pente de la courbe du taux forward instantané.

6.4 La calibration des paramètres

La première étape d'implémentation du modèle de Hull et White est la calibration. Celle-ci se fait uniquement sur les paramètres de volatilité que sont a et σ . La calibration du modèle de Hull et White peut se faire à partir de dérivés de taux tels que les Caps ou les Swaptions. Dans cette étude, c'est le marché des Caps qui a été choisi, bien que la calibration demeure inchangée en travaillant sur les Swaptions. La calibration du modèle n'a pas été effectuée dans le cadre du stage, c'est le service Recherche en Allocation d'Actifs de la DGA (Direction de Gestion des Actifs) qui a calibré et fournit les paramètres.

Les Caps et les Floors font partie de la grande variété de produits dérivés que sont les options de taux d'intérêt. Comme leur nom l'indique, ces instruments sont dépendants du niveau des taux d'intérêt.

Un Cap est un contrat d'option de gré à gré entre deux contreparties qui permet à son acheteur de se couvrir contre une hausse des taux au delà d'un niveau prédéterminé (strike), moyennant le paiement immédiat d'une prime. A chaque date de constat, si le niveau du taux variable constaté est supérieur au strike, l'acheteur reçoit du vendeur le différentiel de taux, appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt.

Un Floor permet à son acheteur, toujours moyennant le paiement d'une prime, de se couvrir ou de tirer profit d'une baisse des taux en deçà d'un certain niveau (strike). A chaque date de constat, si le niveau du taux variable constaté est inférieur au strike, l'acheteur reçoit du vendeur le différentiel de taux, appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt. Le plus souvent, le taux d'intérêt variable sur lequel porte le contrat est le taux EURIBOR ou LIBOR.

La calibration s'effectue sur les Caps plutôt que sur les Floors car le marché des Caps est nettement plus liquide que celui des Floors. La plupart du temps, les calibrations ont été pratiquées à l'aide de Caps possédant un strike de 4 % sur des horizons allant de 2 à 10 ans. Le ténor (maturité de sous-jacent) étant généralement de 6 mois (par exemple lorsque le sous-jacent était l'Euribor 6 mois).

Notons enfin que les prix utilisés pour la calibration ne sont pas les prix exacts de marché. En effet, les prix de marché des Caps ne sont fournis par l'opérateur du marché que lorsque l'on désire traiter. Dans le cas contraire, les prix fournis sont des prix dits « composites », ce qui signifie qu'ils sont calculés à partir de plusieurs prix de marchés issus des derniers achats et ventes.

Soit $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ les dates de paiements des Caps, puis $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les temps correspondants (donc t_i est la différence en années entre d_i et la date de calcul t). On notera par ailleurs τ_i la fraction d'année allant de d_{i-1} à d_i . Le strike du Cap est noté X et la valeur nominale du Cap est notée N . La formule d'évaluation d'un Cap pour $t < t_0$ dans le modèle de Hull et White est la suivante :

$$Cap(t, \tau, N, X) = N \sum_{i=1}^n \left(P(t, t_{i-1}) \phi(-h_i + \sigma_p^i) - (1 + X\tau_i) P(t, t_i) \phi(-h_i) \right)$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_p^i = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t_i - t)}}{2a}} B(t_{i-1}, t_i) \\ h_i = \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \left(\frac{P(t, t_i)(1 + X\tau_i)}{P(t, t_{i-1})} \right) + \frac{\sigma_p^i}{2} \end{cases}$$

On utilise pour la calibration la méthode des moindres carrés. Pour un ensemble de prix observés sur le marché, on va estimer les paramètres a et σ qui donnent les prix les plus proches

à partir des formules ci-dessus au sens des moindres carrés (minimisation de la somme des carrés résiduels).

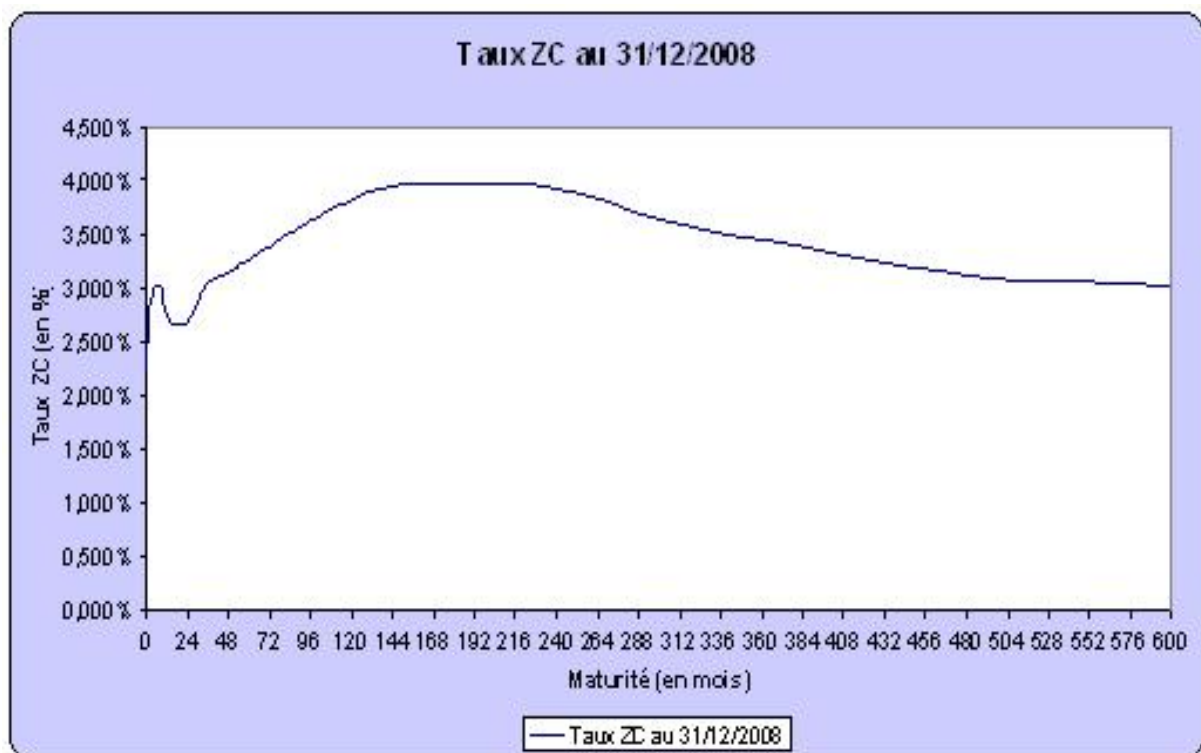
6.5 Les différentes approches

Après avoir calibré les deux paramètres du modèle que sont a et σ , il faut être en mesure de calculer les valeurs de la fonction $\theta(t)$ afin de pouvoir réellement implémenter le modèle. C'est donc sur la méthode de détermination de cette fonction que vont différer les deux approches suivantes.

Comme le prévoit la formule 6.4, il faut connaître le taux forward instantané ainsi que sa dérivée par rapport au temps. Les deux méthodes envisagées sont présentées dans la suite de cette section.

6.5.1 Les données

Pour tester ces deux méthodes, on utilisera la courbe des taux zéro-coupon de la zone Euro récupérée le 31/12/2008 pour être en accord avec les valeurs des paramètres a et σ , elles mêmes obtenues à cette date. Cette courbe des taux prend les valeurs suivantes. On donne également sa représentation graphique :



Courbe des taux ZC en zone euro au 31/12/2008

Il s'agit d'une courbe de type « Humped Curve ».

Maturité (mois)	ZC
0	2,228%
1	2,578%
2	2,784%
3	2,934%
6	3,022%
9	3,008%
12	2,751%
15	2,677%
18	2,655%
21	2,668%
24	2,682%
27	2,751%
30	2,853%
33	2,956%
36	3,035%
39	3,080%
42	3,101%
45	3,114%
48	3,132%
51	3,159%
54	3,194%
57	3,232%
60	3,267%
63	3,297%
66	3,323%
69	3,350%
72	3,379%
75	3,411%
78	3,445%
81	3,480%
84	3,514%
87	3,546%
90	3,574%
93	3,601%
96	3,628%
102	3,678%
108	3,728%
114	3,776%
120	3,820%
144	3,944%
180	3,978%
240	3,931%
300	3,642%
360	3,447%
480	3,122%
600	3,013%

Courbe des taux ZC en zone euro au 31/12/2008

6.5.2 La méthode continue

La méthode dite « continue » consiste à fitter la courbe des taux zéro-coupon initiale à l'aide d'un modèle de reconstitution de la courbe, de façon à obtenir une forme analytique pour les taux zéro-coupon initiaux qui soit deux fois différentiable. En effet la définition de θ au travers de la formule 6.4 impose cette condition.

Une fois les calculs de dérivées effectués, on obtiendra une forme analytique pour la fonction $\theta(t)$.

Il existe principalement deux grandes familles de modèles de reconstitution de la courbe des

taux, dont on donne ci-dessous les avantages et inconvénients :

- **La famille des modèles de Vasicek :** Ces modèles s’inspirent de la fonctionnelle des taux zéro-coupon du modèle de taux de Vasicek présenté précédemment. Il en existe trois différentes versions plus ou moins complexes. Néanmoins ils ne permettent pas de reconstituer les courbes de taux avec autant de précision que la seconde famille.
- **La famille des modèles de Nelson-Siegel :** Elle présente l’avantage de pouvoir reproduire la quasi-totalité des courbes de taux observables. De plus, les paramètres qui entrent en compte sont tous associables à des caractéristiques financières.

La modèle de reconstitution utilisé sera donc le modèle de Nelson-Siegel Augmenté (dit aussi Nelson-Siegel-Svensson). La fonctionnelle des taux zéro-coupon de maturité θ dépend de 6 paramètres à estimer selon la forme suivante :

$$R(\theta) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau_1}\right)}{\frac{\theta}{\tau_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau_1}\right)}{\frac{\theta}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau_1}\right) \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau_2}\right)}{\frac{\theta}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau_2}\right) \right]$$

Le set de paramètres à estimer $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$ peut s’interpréter financièrement de la manière suivante :

- β_0 symbolise le taux de maturité infinie, c’est donc un facteur de niveau,
- β_1 symbolise le spread (taux court - taux long), c’est donc un facteur de rotation,
- β_2 est un facteur de courbure,
- β_3 est un second facteur de courbure (agissant sur la partie courte des taux),
- τ_1 est un paramètre d’échelle,
- τ_2 est un second paramètre d’échelle.

Dans notre cas, on cherche à fitter la courbe des taux initiale $R(0, t)$ présentée ci-avant. On s’intéresse par ailleurs à la fonctionnelle du taux forward instantané et à sa dérivée par rapport au temps. Auquel cas, on a :

$$\begin{cases} F(0, t) = -\frac{\partial \ln(P(0, t))}{\partial t} \\ P(0, t) = \exp(-tR(0, t)) \end{cases}$$

Et on en déduit :

$$\begin{cases} F(0, t) = R(0, t) + t \frac{\partial R(0, t)}{\partial t} \\ F_t(0, t) = 2 \frac{\partial R(0, t)}{\partial t} + t \frac{\partial^2 R(0, t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Finalement, on est en mesure d’exprimer la forme analytique de la fonction $\theta(t)$ en utilisant les dérivées de la fonctionnelle des taux du modèle de Nelson-Siegel-Svensson qui sont fournies dans l’annexe C.2. La formule 6.4 devient :

$$\theta(t) = aR(0, t) + (at + 2) \frac{\partial R(0, t)}{\partial t} + t \frac{\partial^2 R(0, t)}{\partial t^2} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \quad (6.9)$$

Il ne reste alors plus qu’à utiliser la fonction $\theta(t)$ dans la formule de discrétisation du modèle 6.5 pour générer la trajectoire du taux court. Pour cela on utilise un pas de temps mensuel sur

une période de 30 ans.

On obtient donc une valeur du taux forward de maturité 1 mois pour chaque mois t sur 30 ans qu'il est nécessaire d'ajuster par la formule 6.7 pour obtenir le taux court. Ce taux court est ensuite utilisé dans la formule 6.8 pour obtenir la courbe des taux zéro-coupon en t estimée aujourd'hui par le modèle.

Après différents tests, cette méthode a présenté des résultats insatisfaisants. Le premier inconvénient de cette approche est que la fonctionnelle des taux du modèle de Nelson-Siegel Augmenté n'est pas définie en $t = 0$. Ceci est problématique dans la mesure où l'on ne pourra donc pas calculer la fonction θ en $t = 0$ alors que celle-ci est nécessaire pour générer la trajectoire du taux court. L'alternative visant à estimer une valeur de $\theta(0)$ n'est pas recommandée car elle rajoute une dimension d'incertitude au modèle.

Ensuite, il s'avère que, malgré la flexibilité du modèle de Nelson-Siegel Augmenté, ce dernier ne permet pas un ajustement convenable de toutes les courbes de taux, notamment sur la partie courte des taux (maturités faibles). De ce fait une partie de l'information contenue dans la courbe initiale est perdue et ne sera pas reflétée dans la génération des scénarios futurs.

Enfin, la formule permettant d'obtenir $\theta(t)$ à partir de $P(0, t)$ n'est valable que dans le cadre continu et peut engendrer des erreurs non négligeables lors de son utilisation dans le cadre discret.

Pour ces différentes raisons, cette méthode n'a pas été retenue. Il fallait plutôt adopter une approche discrète qui soit consistante avec les prix des zéro-coupon donnés.

6.5.3 La méthode discrète

La méthode dite « discrète » consiste non plus à la détermination d'une forme analytique et continue de la fonction $\theta(t)$, mais en un calcul itératif des valeurs utiles de cette fonction. On va donc calculer les $\theta_i = \theta(t_i)$ à partir des prix observés des zéro-coupon $P_i = P(0, t_i)$.

Pour cela il est nécessaire de connaître un maximum de P_i et donc d'interpoler les prix manquants dans l'échantillon de taux constituant la courbe initiale.

Cette interpolation se fait à l'aide de la méthode classique des splines polynomiaux. Cette méthode, détaillée en annexe A.3, consiste à raccorder plusieurs morceaux de courbes polynomiales pour fitter au mieux les observations.

On utilise ensuite le schéma de discrétisation suivant, dont on trouvera la démonstration dans l'annexe C.3, pour calculer itérativement les θ_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = -\frac{\ln(P_1)}{\Delta_t} \\ P_{n+1} = \exp \left(-\Delta_t r_0 C_{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \left((\Delta_t)^2 C_{n-j} \theta_j - \frac{\sigma^2 (\Delta_t)^3 C_{n-j}^2}{2} \right) \right) \\ C_i = \frac{1-b^i}{1-b} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 1+b \\ b = 1 - a\Delta_t \end{array} \right.$$

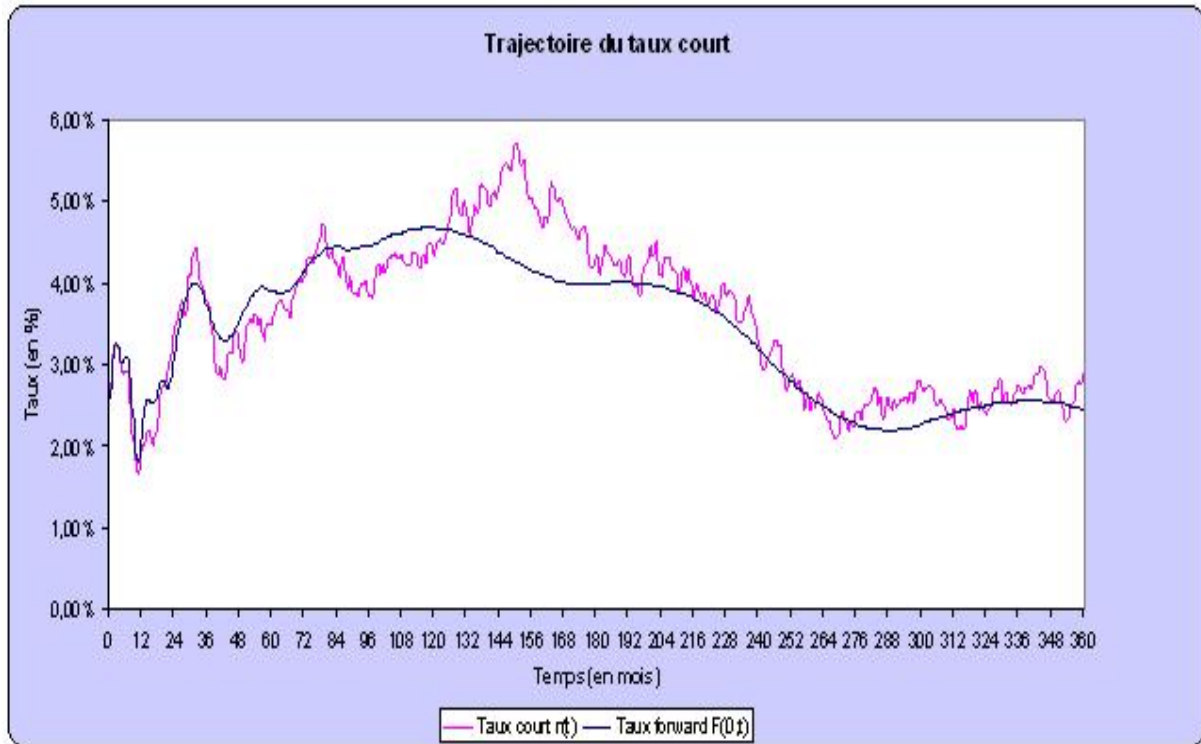
On peut alors retravailler cette formule pour obtenir directement une expression de récurrence sur les θ_i sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta_0 = -\left(\frac{r_0(2-a\Delta_t)}{\Delta_t} + \frac{\sigma^2\Delta_t}{2} + \frac{\ln(P_2)}{(\Delta_t)^2}\right) \\ \theta_{n+1} = \frac{\sigma^2}{2a^2\Delta_t} \sum_{j=0}^{n+1} (1-b^{n+2-j})^2 - \frac{r_0(1-b^{n+3})}{a(\Delta_t)^2} - \frac{\ln(P_{n+3})}{(\Delta_t)^2} - \frac{1}{a\Delta_t} \sum_{j=0}^n (1-b^{n+2-j}) \theta_j \end{cases} \quad (6.10)$$

De la même manière que pour la première approche, on utilise ensuite les valeurs ainsi déterminées des θ_i pour simuler la trajectoire du taux court et déduire une courbe des taux zéro-coupon estimée en toute date.

Cette méthode est à priori beaucoup plus consistante que la première, car elle n'utilise que des formules valables dans le cadre discret. De plus, la méthode des splines est aisée à mettre en place et elle permet de ne perdre aucune information sur la courbe des taux initiale.

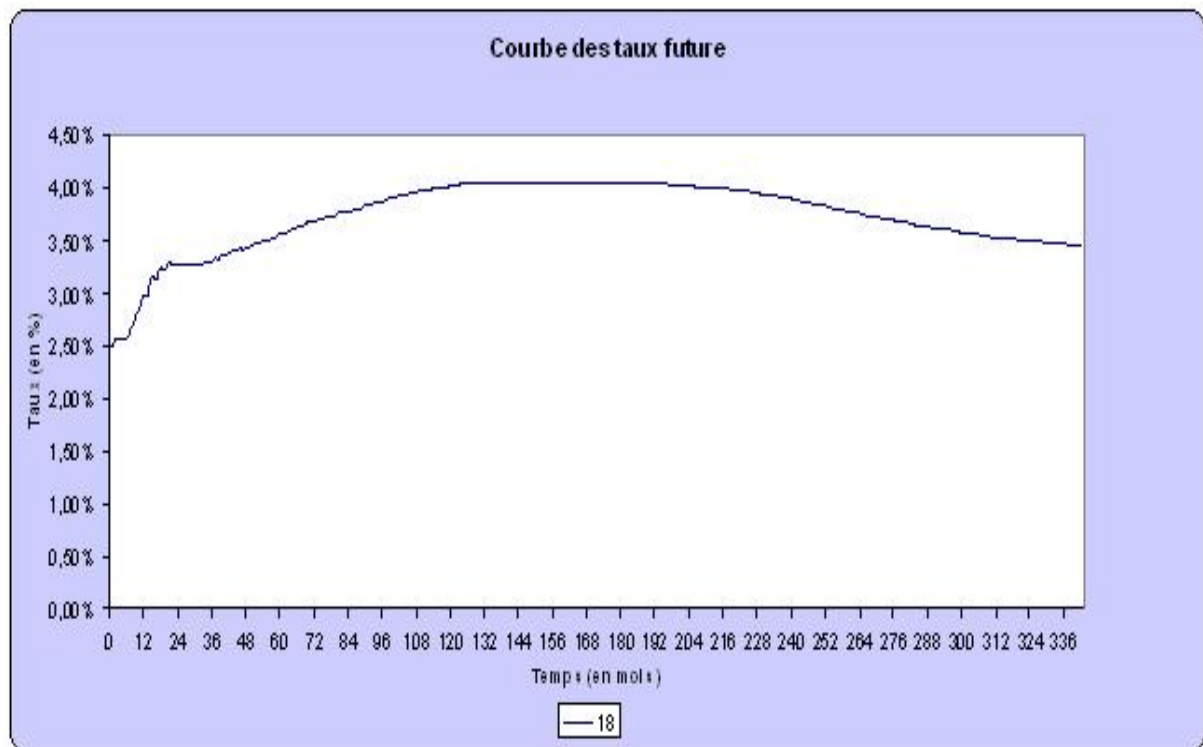
Les paramètres utilisés sont ceux déterminés lors de l'étape de calibration, soit $a = 0,1473375$ et $\sigma = 0,4381\%$. Dans notre exemple, on génère la trajectoire du taux court sur 30 ans avec un pas de temps mensuel. Il est donc nécessaire d'interpoler la courbe des taux zéro-coupon initiale par la méthode des splines pour disposer d'un taux zéro-coupon pour chaque mois pendant 30 ans. Sur le graphique suivant, on a représenté la trajectoire simulée ainsi que la courbe du taux forward instantané :



Exemple de trajectoire du taux court dans le modèle de Hull et White

Dans un premier temps, on peut remarquer que la trajectoire du taux court semble suivre la même tendance que celle du taux forward instantané. Ce n'est qu'une observation, et la consistance du modèle devra être testée en moyenne par la suite.

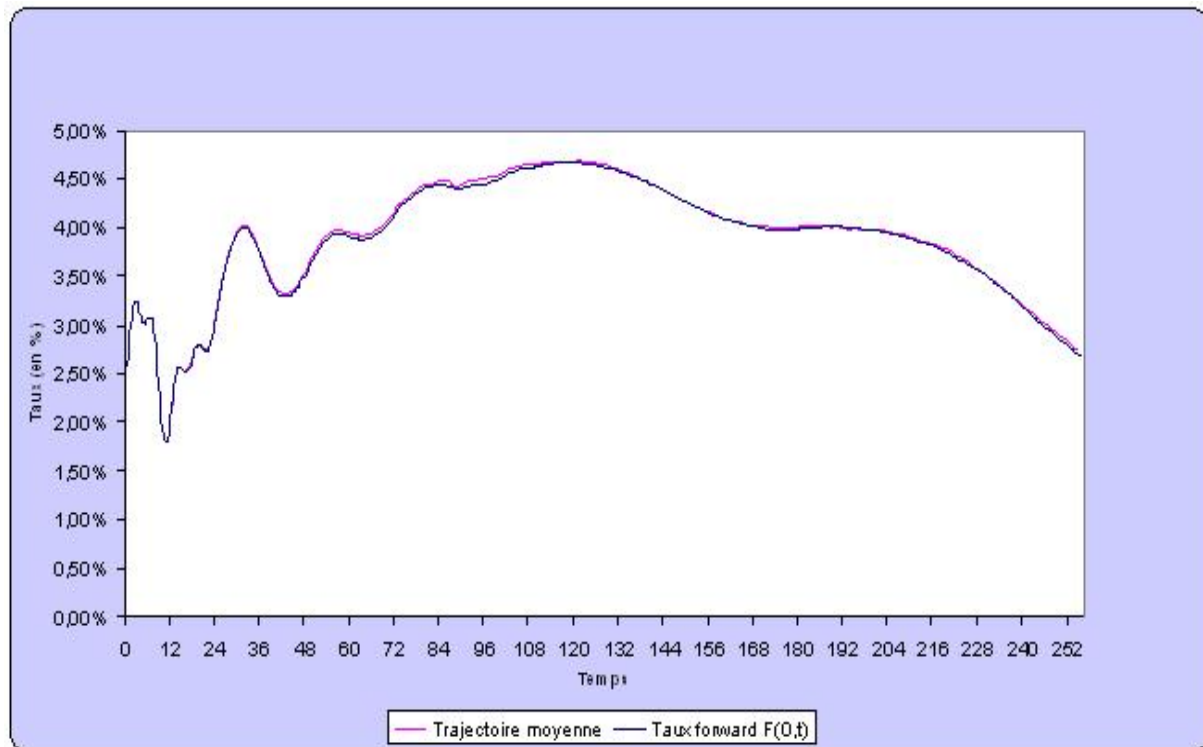
La formule 6.8 permet ensuite de déterminer la courbe des taux zéro-coupon en t telle que l'estime le modèle. Par exemple, on représente ci-dessous la courbe des taux zéro-coupon dans 18 mois, pour les différentes maturités :



Courbe des taux future (18 mois)

On pourra remarquer quelques irrégularités sur la courbe. Il est malheureusement impossible de passer outre avec un pas de temps mensuel.

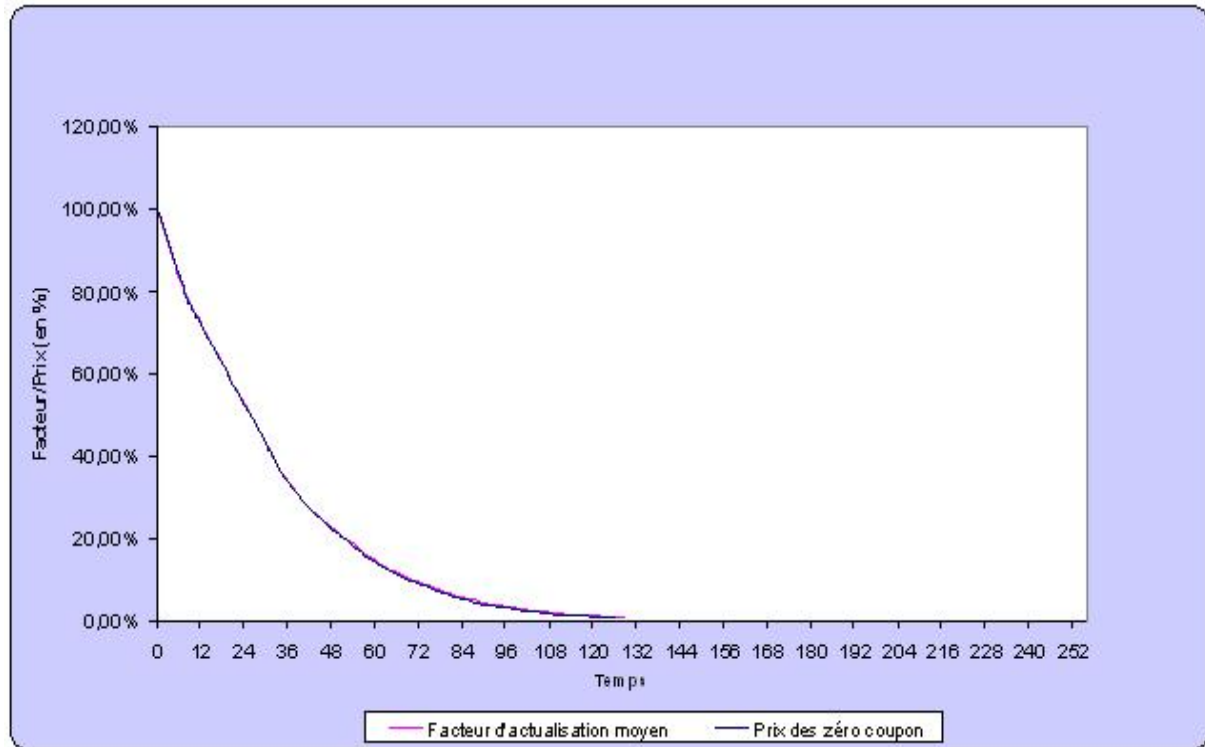
Enfin, on peut tester la consistance du modèle à l'aide des deux observations faites précédemment. Rappelons que la première consistait à générer une trajectoire moyenne du taux court et de la comparer à la courbe du taux forward instantané sur laquelle le taux court est supposé s'ajuster. On obtient les courbes suivantes pour 1000 simulations :



Test de consistance numéro 1

On observe alors une excellente adéquation entre la courbe du taux forward instantané et la trajectoire moyenne du taux court sur 1000 scénarios. En effet les deux courbes sont quasi-superposées, avec un très léger écart lorsque la maturité devient élevée (au delà de 15 ans). Les paramètres ainsi que la méthode de mise en pratique du modèle semblent donc consistantes à la vue des résultats de ce premier test.

Le second test, quant à lui, consistait à comparer une trajectoire moyenne du facteur d'actualisation $D(t)$, défini précédemment, avec la courbe des prix des zéro-coupon initiale. En théorie le prix du zéro-coupon de toute maturité évalué en 0 est égal au facteur d'actualisation en cette même date. Toujours sur une base de 1000 simulations, on obtient les courbes suivantes :



Test de consistance numéro 2

Le résultat est tout aussi satisfaisant que pour le premier test puisque les deux courbes sont parfaitement superposées. Ceci tend à confirmer la consistance du modèle de Hull et White ainsi calibré et implémenté.

6.6 Conclusion

Au regard des résultats obtenus dans ce chapitre, il est possible de conclure sur la consistance du modèle de Hull et White classique à un facteur lorsque celui-ci est calibré à partir de dérivés de taux de type Caps, et implémenté à l'aide de la méthode discrète précédemment expliquée. En effet nous observons que les deux principaux tests qu'il est possible de pratiquer sur le modèle sont très satisfaisants. De plus les hypothèses relatives à la discrétisation sont respectées puisque le pas de temps est suffisamment petit pour permettre l'approximation exponentielle.

Chapitre 7

Conclusions sur les modèles

Ce mémoire étant consacré à la modélisation d'un produit Variable Annuity, il était primordial de traiter en profondeur la problématique majeure des modèles financiers. Comme cela a déjà été évoqué, le choix des modèles est au coeur du travail de l'actuaire lors de la tarification de ces produits.

Néanmoins, le travail de l'actuaire ne s'arrête pas à la détermination d'un prix pour le produit. Il est également de toute première importance de suivre le risque d'un contrat d'assurance, particulièrement pour les produits en unités de comptes avec des garanties. La consistance des scénarios financiers générés est donc extrêmement importante, et le choix des modèles doit tenir compte de cela.

La théorie évoluant également, des modèles plus robustes et performants apparaissent et se développent. Dès lors les modèles classiques, à défaut de devenir obsolètes, montrent leurs limites dans certains cas particuliers.

Dans cette optique, nous venons d'étudier un nouveau modèle Actions, le modèle de Dupire, et un nouveau modèle Taux, le modèle de Hull et White, de manière théorique. Le modèle de Dupire a été abordé dans l'idée d'améliorer certaines limites du modèle de Black et Scholes, notamment l'incohérence au smile de volatilité. De plus, ce modèle est issu d'une approche radicalement différente qui vise à inférer le processus à partir des prix d'options. Le modèle de Hull et White a lui aussi été abordé pour ses améliorations : il s'agissait d'abord de permettre au modèle de tenir compte de la structure actuelle des taux, qui est source d'informations sur le marché, mais aussi de supprimer le caractère constant du retour à la moyenne.

En fonction des méthodes pratiques de calibration et d'implémentation, ces deux modèles se sont avérés consistants :

- Le modèle de Dupire nous a permis de pricer à posteriori les Puts sur lesquels le modèle avait été calibré, avec plus ou moins de succès selon la méthode employée. A ce titre le choix de la meilleure méthode s'est portée sur la méthode des volatilités implicites, qui est à la fois la plus précise en terme de résultats, et la plus simple en terme de calibration.
- Concernant le modèle de Hull et White, les différents tests effectués sur une date quelconque de calibration ont permis de valider la méthode discrète de calcul itératif de la fonction de retour à la moyenne. De plus, la calibration à partir des prix de Caps donne des paramètres satisfaisants et cohérents.

Néanmoins, si les modèles semblent fonctionner d'un point de vue théorique, il reste à voir ce que ceux-ci donnent lors du pricing en pratique. C'est un des sujets qui seront abordés dans la seconde partie, qui est entièrement consacrée à la modélisation d'un produit GMXB ($X=A$ ou $X=D$) et aux résultats obtenus.

Troisième partie

Modélisation et résultats

Chapitre 8

Les problématiques du pricing

Comme cela a été évoqué en introduction, le choix des modèles est une étape importante de la tarification d'une garantie. Néanmoins ces seules hypothèses ne suffisent pas et l'actuaire est amené à travailler avec de nombreux paramètres, tant actuariels que financiers, pour obtenir le coût de la garantie. Cette seconde partie est consacrée à la modélisation totale d'un produit Variable Annuity. On y aborde la technique du pricing et les hypothèses autres que les modèles financiers avant de travailler sur un produit fictif¹ de type GMAB/GMDB. A l'aide de ce produit on testera la consistance des nouveaux modèles implémentés dans un premier temps. Ensuite, on pratiquera une étude qualitative de sensibilité sur les paramètres de la tarification ainsi qu'une étude de Value at Risk. Enfin on proposera d'étendre le champ de l'étude en abordant pour finir une technique de réduction du risque, un sujet d'actualité pendant la crise financière.

Ce premier chapitre est consacré aux différentes étapes sur lesquelles l'actuaire est amené à travailler dans le cadre de la tarification du produit. Il s'agira pour l'essentiel d'hypothèses actuarielles, mais nous serons malgré tout amenés à faire de nouvelles hypothèses financières en plus du choix des modèles.

Le but de cette section est d'assimiler tous les paramètres qui entrent en considération lors du pricing, et ce dans le but de mieux comprendre par la suite les résultats des tests de sensibilité sur ces paramètres.

Dans notre cas, on ne s'intéressera qu'aux garanties GMAB et GMDB. De plus on s'attachera à d'aborder le cas de la présence du Ratchet (clicquet) sur l'évolution de la garantie. Pour plus de précision, on séparera toujours le coût lié à la garantie en cas de décès d'une part, et celui lié à la garantie en cas de vie d'autre part.

8.1 Les hypothèses actuarielles

8.1.1 Les frais

Il existe en assurance différents types de frais sur les contrats en unités de compte. Les contrats en unités de compte sont constitués d'un certain nombre d'unités de compte et les frais ne sont pas pris sur l'encours mais sur le nombre d'unités de compte.

A titre d'exemple, prenons un contrat dont le souscripteur possède n unités de compte du sous-jacent de valeur S . Il possède donc le capital investi $N = nS$. Si l'assureur prélève 5 % de frais, il disposera de 95 % des n unités de compte qui auront toujours pour valeur chacune S .

Il existe donc différents types de frais : les frais d'entrée, les frais de gestion du contrat, les frais de gestion des actifs, les frais de couverture de la garantie.

1. Pour des raisons de confidentialité, certains paramètres ont été modifiés.

- **Les frais d'entrée** : Dans le cas d'un contrat avec prime unique (la prime est versée en une seule fois à l'origine du contrat), les frais d'entrée, également appelés frais d'acquisition sont appliqués en une seule fois sur la prime. Dans le cas d'un contrat avec primes périodiques, les frais d'entrée réduisent le montant du capital investi lors de chaque versement. Ils sont destinés à couvrir les coûts de commercialisation du contrat, notamment les frais relatifs au partenariat permettant de proposer le contrat.
- **Les frais de gestion du contrat** : Ils sont payés en fin d'année et retenus sur une base annuelle sur le montant de l'épargne gérée, et sont destinés à couvrir les coûts de gestion du contrat.
- **Les frais de gestion des actifs** : Ils sont également retenus en base annuelle sur les performances des différents actifs. On définit en général des frais de gestion différents pour les actions, pour les obligations ainsi que pour le monétaire. Ils rémunèrent le gestionnaire pour son travail et l'administration du fond, mais une partie peut être reversée au distributeur via une retrocession de commission.
- **Les frais de couverture de la garantie** : Ils représentent ce qui doit être prélevé au client, en base annuelle, pour lui permettre de bénéficier de la garantie que lui propose l'assureur. C'est en fait le coût de l'option, converti en points de base, et prélevé à l'assuré tous les ans. Tarifier une garantie de type GMAB/GMDB revient donc à déterminer ce taux de chargement sur l'encours, appelé le Hedge Cost (HC).

Il est important de noter que le Hedge Cost peut être vu à la fois comme un prix, dans le sens où il s'agit du taux de chargement que l'assureur va prélever à l'assuré au titre de la garantie qu'il lui offre, et comme une perte. En effet le Hedge Cost est calculé de façon à couvrir en moyenne les pertes de l'assureur liées aux garanties du contrat. La perte moyenne est donc étroitement liée au Hedge Cost.

A ce titre le Hedge Cost peut être utilisé pour le calcul de Value at Risk. On pourra de cette façon estimer le Hedge Cost nécessaire pour couvrir différents niveaux de perte de l'assureur. De plus, le risque financier étant le risque principal pour la GMAB ou la GMDB, il est essentiel de calculer une VaR sur le Hedge Cost, et c'est d'ailleurs ce qui intéresse le management lors de la mise en place d'un tel produit.

8.1.2 La mortalité

En général, la modélisation de la mortalité est effectuée par la spécification d'un taux de hasard $\mu(x, t)$, qui est en réalité le taux de décès instantané à la date t pour un individu d'âge x à cette date. La connaissance de ce taux de hasard permet ensuite de calculer la probabilité de survie entre deux dates t et T (avec $T > t$) pour un individu âgé de x années en t :

$$S(x, t, T) = \exp \left(- \int_t^T \mu(x + u - t, u) du \right)$$

Donc, dans le cas particulier où le taux de décès instantané ne dépend que de l'âge ($\mu(x, t) = \mu(x)$), on retrouve la formule classique suivante, où $S(x) = \exp \left(- \int_0^x \mu(u) du \right)$ est la fonction de survie :

$$S(x, t, T) = \frac{S(x + T - t)}{S(x)}$$

Dans le cas où le taux instantané de décès est une fonction déterministe et bien spécifiée, le risque de mortalité se mutualise. En effet, la loi des grands nombres s'applique et assure que sur un portefeuille de taille importante, les fluctuations d'échantillonnage sont faibles.

A ce risque mutualisable s'ajoute un risque d'erreur de spécification : si la mortalité observée dans le futur est différente de celle prévue par le modèle, l'écart n'est pas mutualisable car toutes les têtes sur lesquelles porte le contrat sont affectées dans le même sens (écart entre la prévision et la réalisation). Dans l'approche standard de la mortalité, la manière de se prémunir contre ce risque consiste à retenir une modélisation prudente intégrant une prime de risque. Par exemple pour assurer un risque viager, on retient une table de mortalité féminine quelle que soit la proportion de femmes dans la population du contrat, car les femmes ont une durée de vie supérieure à celle des hommes. Une autre possibilité est d'appliquer à la mortalité un coefficient d'abattement f , ce qui signifie que l'on va prendre en compte uniquement la portion $1 - f$ de la mortalité. Pour un coefficient d'abattement de 25 %, cela revient à supposer que la mortalité réelle est en réalité égale à 75 % de la mortalité prévue par la table. De cette façon on garde une marge de prudence quand à la précision du modèle (table de mortalité) utilisé.

Notons que l'on peut être conduit à rechercher une modélisation capable de tenir compte des fluctuations de la mortalité autour de sa valeur tendancielle. C'est l'objectif des modèles de mortalité stochastique, qui considèrent le taux de décès instantané comme un processus stochastique.

Différents modèles existent (lissages bayésiens, modèle de Kimeldorf et Jones, modèle de Lee et Carter notamment), mais il n'est pas utile de les détailler ici. En effet, le but de cette partie est simplement de lister les différentes hypothèses actuarielles du pricing. Les choix des modèles, aussi variés et spécifiques soient-ils, sont au jugement de l'actuaire.

8.1.3 Les rachats

La majorité des contrats d'assurance vie prévoit la possibilité pour le souscripteur de racheter le contrat, c'est-à-dire de retirer tout (rachats totaux) ou partie (rachats partiels) des sommes placées. En cas de rupture du contrat, la valeur de rachat est la somme que l'assureur devra verser à l'assuré (la totalité de l'épargne disponible dans certains cas, mais le plus souvent il existe des pénalités de rachat). Notons que l'assureur a la possibilité de prévoir une indemnité en cas de rachat qui sera alors retranchée à la valeur versée.

Pour tarifier le produit, il est donc nécessaire de faire une hypothèse concernant le nombre de rachats que subira le portefeuille. Pour cela deux possibilités se présentent.

La première est d'utiliser un taux de rachat « déterministe » pour chaque année, qui pourra être différent selon l'année, mais qui devra être prédéterminé. Autrement dit, le nombre de rachats est indépendant de l'évolution de l'épargne du client.

L'autre possibilité est d'utiliser des lois de rachat dites « dynamiques », ce qui signifie que la probabilité que le client rachète son contrat est fonction de l'évolution de la valeur de son épargne investie. Les taux de rachats appliqués sont donc différents pour chaque scénario.

8.1.3.1 Rachats déterministes

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les taux de rachats à appliquer chaque année. Le plus souvent, il s'agit d'une étude préalable sur l'historique des contrats du pays concerné : on regarde les contrats du portefeuille par année d'ancienneté, puis sur chaque année d'ancienneté on détermine le nombre de contrats exposés au rachat et le nombre de contrats ayant été rachetés. Le quotient de ces deux valeurs fournit alors le taux de rachat sur l'année. Cette approche en nombre de rachats est surtout effectuée pour les rachats totaux tandis que pour les rachats partiels, la même approche se fera sur les montants. Lorsque l'historique n'est pas entièrement

connu, le taux peut être estimé à l'aide de benchmarks (produits similaires avec plus d'historique par exemple, mais on peut également calibrer une loi statistique sur les rachats).

Une autre possibilité est d'utiliser la méthode de Kaplan-Meier. Il s'agit d'une méthode non paramétrique d'estimation de la survie s'appuyant sur le calcul des probabilités conditionnelles. Il faut également être conscient que différents paramètres peuvent influencer les rachats. En effet, en France, on observe le plus souvent un pic de rachats à 8 ans, notamment pour des raisons de fiscalité. L'âge de l'assuré, sa situation ou l'évolution de celle-ci, ainsi que la conjoncture économique ont un impact sur les rachats.

8.1.3.2 Rachats dynamiques

Le but est de pouvoir anticiper les rachats importants (« massifs ») lorsque les scénarios sont haussiers et les rachats faibles dans le cas contraire. Pour cela il faut faire une hypothèse sur le comportement des clients, à savoir que l'on va supposer qu'un client est rationnel si il ne rachète son contrat que lorsque la valeur de son épargne est supérieure à sa garantie. Un client ayant un comportement différent de cela est considéré irrationnel. Dans toute l'étude préalable à la détermination de la loi de rachat dynamique, il faudra alors distinguer la part de clients rationnels de celle des clients irrationnels.

On aura alors :

$$\text{TRD} = \text{TRS} \times \text{Ajustement Dynamique}$$

où :

- TRD est le Taux de Rachat Dynamique,
- TRS est le Taux de Rachat Structurel et correspond à un taux de rachat de base, calculé à partir de statistiques, car quelle que soit l'évolution de l'épargne, il existe toujours un pourcentage de clients qui rachètent leur contrat (irrationnels). Le TRS se calcule sur la base des clients irrationnels, car ce sont les seuls à racheter un contrat malgré un très faible niveau de réserve (épargne).
- L'Ajustement Dynamique est une fonction du rapport de l'épargne sur la garantie (noté dans la suite $\frac{R}{G}$), lequel évolue selon la trajectoire des actifs.

Avant de choisir la forme de l'Ajustement Dynamique, il est nécessaire de définir, en plus du Taux de Rachat Structurel, quelques paramètres qui seront utilisés dans la loi de rachat :

- **Le Taux Minimum** τ_{min} : Il s'agit du plus petit taux observé sur l'historique, il servira de borne inférieure pour l'utilisation de l'Ajustement Dynamique,
- **Le Taux Maximum** τ_{max} : Il s'agit du plus grand taux observé sur l'historique, il servira de borne supérieure pour l'utilisation de l'Ajustement Dynamique,

Il ne reste plus qu'à déterminer la forme et les paramètres de l'Ajustement Dynamique. Celui-ci peut être de différentes formes :

1. **Exponentielle** :
2. **Linéaire** :
3. **Par morceaux** :
4. **Autres** : Quadratique, Arctangente

Pour des raisons de confidentialité quant aux méthodes internes de détermination des lois de rachats dynamiques, il n'a pas été possible de retranscrire les formules des différentes lois dans le présent mémoire. Pour la suite de l'étude, nous avons utilisé une loi de rachats linéaire.

8.1.4 Le niveau de la garantie

Il faut ensuite être en mesure de connaître à chaque pas de temps le niveau de la garantie dont bénéficie le client. Dans notre cas, s'agissant d'une GMAB couplée à une GMDB, le niveau sera le même pour les deux garanties. Dans le cas classique, la garantie est égale à 100 % des primes investies par le client, indépendamment de la valeur de son épargne au cours du temps. Ce n'est plus le cas lorsque la garantie comporte un Ratchet, car l'on garantit au client le maximum entre la valeur du fond et la valeur maximum préalablement atteinte par le fond à une date anniversaire. Le niveau de la garantie est donc lié à l'évolution des marchés financiers.

Prenons l'exemple d'une garantie avec Ratchet réévalué mensuellement avec des pas de p %, plafonnée à m %. Cela signifie que tous les mois, le niveau de la garantie est réhaussé de p % de sa valeur initiale (notée $G(0)$) si la valeur de l'épargne a, elle même, dépassé 100 % + p %. Notons toujours R le niveau de l'épargne du client, on a alors :

$$G(t) = \begin{cases} \text{Min} \left(m ; \left\lceil \frac{\frac{R(t)}{G(0)} - 1}{p} \right\rceil \times p - 1 \right) \times G(0) & \text{si } R(t) > G(t-1) \\ G(t-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $[\cdot]$ la fonction partie entière.

Un exemple était par ailleurs donné graphiquement en début de mémoire dans la partie consacrée aux Variable Annuities, pour l'exemple de la GMDB (page 19).

8.1.5 Le portefeuille

Pour finir avec les hypothèses actuarielles, il faut connaître les caractéristiques principales du produit à tarifier et de la population visée. Il s'agira donc de choisir une répartition entre clients des différents sexes et un âge à la souscription pour évaluer les probabilités de décès de la manière la plus précise possible. Concernant le produit, il faut faire un choix entre un contrat à prime unique et un contrat à prime périodique. Dans notre cas il s'agira d'un contrat à prime unique.

8.2 Les hypothèses financières

Grâce aux modèles financiers, on est en mesure de générer des scénarios d'évolution du rendement pour les actifs de type actions ainsi que pour les taux. Néanmoins cela n'est pas suffisant pour modéliser entièrement la valeur de l'épargne du client.

En effet, il faut pouvoir déduire de la trajectoire du taux court l'évolution du rendement de l'actif de type obligation (gouvernementale) ainsi que le facteur d'actualisation et le rendement de la part investie sur le marché monétaire nécessaires au pricing de la garantie. Il faut également pouvoir tenir compte des éventuelles corrélations entre les actifs (corrélations entre le taux court, le taux long et les actions).

8.2.1 Les corrélations

Pour tenir compte des corrélations entre les différents actifs, il est nécessaire d'utiliser la décomposition de Cholesky. Le théorème de Cholesky stipule que pour toute matrice symétrique et définie positive A , il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que $A = LL^t$. En imposant la condition que tous les éléments de la diagonale soient positifs, la décomposition est alors unique.

Supposons donc que $Correl$ soit la matrice de corrélation entre les actions, le taux court et le taux long, alors la décomposition de Cholesky fournit la matrice triangulaire supérieure C telle que $Correl = CC^t$. Auquel cas, lors de la génération des variables aléatoires utilisées pour simuler la trajectoire de chacun des actifs, il suffit de corrélérer les Browniens de la façon suivante :

Si $B = (B_1 \ B_2 \ B_3)$ est un vecteur de trois Browniens indépendants, alors le vecteur B' tel que $B' = CB$ est un vecteur de trois Browniens corrélés.

Dans la pratique, les corrélations sont estimées de façon historique. Dans ce cas la période de temps est variable selon l'étude réalisée, elle peut donc être plus ou moins longue selon les cas. On peut par exemple travailler à partir d'une moyenne glissante sur 20 à 40 jours, ou bien prendre une moyenne sur 10 ans. Tout dépend des objectifs et donc du cas de figure dans lequel on se place.

Lors d'un pricing, on pourrait par exemple utiliser un historique de 10 ans sur lequel on calculerait les corrélations sur une période de 30 jours. La corrélation estimée serait alors la moyenne de ces corrélations sur l'ensemble de l'historique.

8.2.2 Les obligations

Pour obtenir le rendement de la partie de l'épargne investie en obligations, on utilise le taux long (10 ans) ainsi que la formule de Taylor. On utilise le taux 10 ans car le Benchmark habituel du produit le plus proche de notre produit fictif est un ensemble d'obligations long terme (10-15 ans). La formule de Taylor permet d'exprimer la variation du prix d'une obligation en fonction de sa duration et de sa convexité. Cette formule étant essentielle, il est préférable de détailler ci-dessous les calculs nécessaires à son obtention.

Posons P le prix de marché d'une obligation, les variables r et t représentent respectivement le taux long et le temps. Dès lors, on sait qu'une variation du prix de marché de l'obligation obéit à l'équation suivante :

$$\partial P = \frac{\partial P}{\partial r} \partial r + \frac{\partial P}{\partial t} \partial t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \partial r^2$$

Avec :

- ∂P la variation du prix de l'obligation,
- ∂r la variation du taux long,
- ∂t le pas de temps.

On s'intéresse au rendement, donc à la variation en pourcentage. Il est donc préférable de diviser chaque partie de l'équation précédente par le prix de marché de l'obligation P :

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \partial r + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} \partial t + \frac{1}{2P} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \partial r^2$$

On peut alors définir la duration modifiée ainsi que la convexité de l'obligation, qui seront utilisées dans la formule précédente. L'intérêt d'utiliser ces valeurs est qu'elles sont fournies par les plateformes d'informations financières (Bloomberg, etc.)

- **la duration modifiée** : Dérivée de la duration, la duration modifiée notée MD mesure la sensibilité du prix d'une obligation aux variations de taux d'intérêt, mais en pourcentage. Pour obtenir le changement de cours de l'obligation, il suffit de multiplier la valeur de la duration modifiée par la variation des taux. Cette duration modifiée s'exprime de la manière suivante : $MD = -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r}$.

- **La convexité** : La convexité est également un indicateur du risque de taux, elle vient en complément de la sensibilité et de la duration. C'est une mesure de second ordre de la sensibilité du prix de l'obligation aux variations de taux. Elle est notée C et évaluée grâce à la formule suivante : $C = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$.

De plus, lorsque l'on dérive par rapport à t la formule du prix de l'obligation à coupons, on obtient : $\frac{\partial P}{\partial t} = r \times P$, donc $r = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t}$. On peut alors réécrire la formule en tenant compte de ces apports :

$$\frac{\partial P}{P} = -MD\partial r + r\partial t + \frac{1}{2}C\partial r^2$$

En d'autres termes, on a :

$$\frac{P(r + \Delta r)}{P(r)} = 1 - MD\Delta r + \frac{1}{2}C(\Delta r)^2 + r\Delta t$$

C'est cette formule qui est utilisée pour déduire du taux long la trajectoire de la partie investie en obligations. Le pas de temps utilisé (Δt) sera le plus souvent le mois, tandis que Δr correspond à la variation de taux long observé sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

8.2.3 Les actions et le monétaire

Pour modéliser le rendement des actions, on utilise directement les résultats issus du modèle d'actions utilisé. Une fois que la trajectoire du sous-jacent est générée, il est aisé de calculer les rendements.

Pour modéliser le rendement de la part investie sur le marché monétaire, on utilise le taux 1 an issu du modèle de taux utilisé. En effet, sur le marché monétaire, les opérateurs placent leurs avoirs à court terme pour se procurer des financements courts. Par « court », on entend, généralement moins d'un an, parfois moins de deux ans.

Une fois que l'on est en mesure de simuler l'évolution de la part investie en actions, de la part investie en obligations et de la part investie en monétaire, il est possible de connaître l'évolution de la totalité de l'épargne investie en pondérant chaque rendement (actions, obligations et monétaire) par l'allocation choisie.

8.2.4 Le facteur d'actualisation

Pour évaluer l'impact des pertes futures (liées aux garanties) pour en dégager un coût de garantie à priori, il est nécessaire de pouvoir actualiser ces pertes. Pour cela il faut connaître le facteur d'actualisation. De cette manière, en multipliant le flux futur par le facteur d'actualisation correspondant à la date de survenance dudit flux, on connaîtra la Valeur Actuarielle Nette (VAN) du flux.

Posons $F(T)$ le facteur d'actualisation pour un flux survenant à l'horizon donné T , sa valeur se déduit directement de la trajectoire du taux court $r(t)$. On supposera que le temps, exprimé en fraction d'année, est divisé en intervalles $[t_{i+1} - t_i]$, que $t_0 = 0$ et que $t_n = T$:

$$F(T) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + r(t_{i+1}))^{t_{i+1}-t_i}}$$

8.3 Calcul du Hedge Cost

Afin de calculer le Hedge Cost, qui rappelons-le, est le taux de chargement sur l'encours (frais) au titre de la garantie fournie au client, il suffit en réalité d'égaliser la Valeur Actuelle Probable (VAP) des engagements de l'assureur ainsi que la VAP de l'assuré. La VAP des engagements de l'assuré est proportionnelle au Hedge Cost comme cela sera expliqué ci-dessous, il est donc possible d'obtenir le Hedge Cost simplement par quotient.

On procède par la méthode de Monte-Carlo : on va générer un nombre important de scénarios d'évolution de l'épargne investie, puis pour chacun de ces scénarios, on va calculer la VAP de l'assuré et la VAP de l'assureur. Après avoir calculé la moyenne de chacune d'elles sur l'ensemble des simulations et égalisé ces deux moyennes, on sera en mesure de dégager un Hedge Cost moyen, qui sera celui retenu dans le pricing.

La VAP de l'assureur représente la somme de ses engagements (actualisés) envers l'assuré. Il s'agit donc des éventuelles pertes actualisées au titre de la garantie GMAB ou au titre de la garantie GMDB. Ces pertes ne se produisent que si le niveau de l'épargne est inférieur à la garantie, et ne sont affectés qu'aux survivants (GMAB) ou aux décès (GMDB).

La VAP de l'assuré représente la somme de ses engagements (actualisés) envers l'assureur. Donc cela correspond au paiement du Hedge Cost pendant toute la durée du contrat.

8.3.1 Pertes liées à la garantie en cas de vie

Dans un premier temps, il faut évaluer pour chaque scénario la perte totale liée à la garantie GMAB. Comme cela a été expliqué dans la première partie de ce mémoire, la GMAB est une garantie de capital minimum **en cas de vie** à échéance du contrat. Les pertes potentielles pour l'assureur ne peuvent donc survenir qu'au terme de ce contrat.

A échéance, si la valeur de l'épargne est inférieure à la garantie, l'assureur est engagé à prendre à sa charge la différence. Néanmoins, si la garantie est inférieure à la valeur de l'épargne, l'assureur n'enregistre pas de pertes. Il faut par ailleurs tenir compte du fait qu'à échéance, un certain nombre de contrats n'existent plus (mortalité, rachats). Enfin il est nécessaire d'actualiser ce flux potentiel à échéance :

$$\text{Pertes GMAB} = \text{Max}(G(T) - R(T); 0) \times CR(T) \times F(T)$$

Où les notations précédentes sont conservées, à savoir :

- T est l'échéance du contrat (déclenchement de la garantie),
- $G(T)$ est le niveau de la garantie en T ,
- $R(T)$ est la valeur de l'épargne en T ,
- $CR(T)$ est le pourcentage de contrats restants en T ,
- $F(T)$ est le facteur d'actualisation pour un flux survenant en T .

Notons par ailleurs que le pourcentage de contrats restants à tout instant t dépend non seulement du taux de décès, mais aussi du taux de rachat. Auquel cas si l'on considère l'assuré « moyen » du contrat (dont la mortalité est une moyenne pondérée entre la mortalité masculine et la mortalité féminine selon les proportions d'hommes et de femmes dans le contrat) d'âge x , on calcule ce pourcentage de la manière suivante :

$$\begin{cases} CR(0) = 1 \\ CR(t) = CR(t-1) [1 - q_{x+t-1} - \tau_{rachat}(t-1) + q_{x+t-1} \times \tau_{rachat}(t-1)] \end{cases}$$

Où :

- q_{x+t-1} la probabilité de décès entre $t - 1$ et t ,
- $\tau_{rachat}(t - 1)$ le taux de rachat entre $t - 1$ et t .

8.3.2 Pertes liées à la garantie en cas de décès

Dans un second temps, il faut évaluer pour chaque scénario la perte totale liée à la garantie GMDB. Comme cela été expliqué précédemment, la GMDB est une garantie de capital minimum **en cas de décès** sur toute la durée du contrat. Les pertes potentielles pour l'assureur peuvent donc survenir à n'importe quel moment.

Le mode de fonctionnement est similaire à celui de la GMAB. A décès du souscripteur, si la valeur de l'épargne est inférieure à la garantie, l'assureur est engagé à prendre à sa charge la différence. Néanmoins, si la garantie est inférieure à la valeur de l'épargne, l'assureur n'enregistre pas de pertes. Il faut également tenir compte du nombre de contrats restants et de la probabilité de décès à chaque étape de la vie du produit. Dans le cas de la GMDB aussi, il faut évidemment tenir compte de la date du décès (et donc de la potentielle perte) via un facteur d'actualisation :

$$\text{Pertes GMDB} = \sum_{t=1}^T \text{Max}(G(t) - R(t); 0) \times CR(t - 1) \times q_{x+t-1} \times F(t)$$

Où :

- t est un instant du contrat,
- T est l'échéance du contrat,
- q_{x+t-1} est la probabilité de décès entre $t - 1$ et t .

8.3.3 La VAP des engagements de l'assuré

Pour un scénario particulier, la Valeur Actuelle Probable des engagements de l'assuré est par définition l'actualisation des flux futurs pondérés par la probabilité que ces flux surviennent :

$$\text{VAP Assuré} = \sum_{t=1}^T \text{Hedge Cost} \times R(t) \times CR(t) \times F(t)$$

8.3.4 Moyenne sur les simulations et Hedge Cost

Supposons que l'on génère n scénarios d'évolution de l'épargne investie, indexés par l'indice i . Alors les VAP moyennes pour les engagements de l'assureur et de l'assuré s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{VAP Assureur}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Pertes GMAB}_i + \text{Pertes GMDB}_i) \\ \overline{\text{VAP Assuré}} = \frac{\text{Hedge Cost}}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T R(t) \times CR(t) \times F(t) \right)_i \end{array} \right.$$

Donc, en égalisant les VAP moyennes, on obtient :

$$\text{Hedge Cost} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{Pertes GMDB}_i + \text{Pertes GMDB}_i)}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T R(t) \times CR(t) \times F(t) \right)_i}$$

Chapitre 9

Pricing avec les nouveaux modèles

Le but de ce nouveau chapitre est de tester la consistance des modèles financiers étudiés en terme de tarification des garanties. Comme nous l'avons vu dans la première partie, le modèle de Dupire et le modèle de Hull et White sont consistants pour retrouver des prix de marché. Néanmoins il reste à apprécier leurs apports en terme de pricing. On calculera donc des Hedge Cost pour différentes combinaisons de modèles, les autres paramètres restant inchangés.

Pour effectuer cette comparaison, on se basera sur un ou plusieurs produits de base que l'on définira préalablement. Pour des raisons de confidentialité, il est impossible d'utiliser un produit réellement tarifé par le service afin de ne pas divulguer les prix obtenus et proposés aux clients. Le pricing se fera donc sur un produit « proche », dans sa structure, de ceux tarifés par le service. Habituellement la tarification est effectuée par le service en utilisant conjointement les modèles de Black et Scholes et de Vasicek. Néanmoins comme il ne s'agira pas d'un produit réel, on ne dispose pas des prix obtenus par le service. L'idée est donc de comparer nos prix avec ceux obtenus à l'aide de formules fermées. Cette autre méthode de pricing, qui sera expliquée par la suite, est parfois utilisée en comparaison des résultats issus de la méthode de Monte-Carlo.

9.1 Le(s) produit(s)

Comme cela vient d'être évoqué, il est impossible d'utiliser autre chose qu'un produit fictif. On va donc utiliser deux produits, tous deux contenant à la fois une garantie GMAB et une garantie GMDb de même niveau. Pour le produit A, la garantie sera constante à 100 %, tandis que le produit B comprendra un Ratchet (cliquet) mensuel sur le niveau des garanties. Les caractéristiques des deux produits A et B sont résumées dans le tableau suivant.

D'autre part, on supposera que le produit est tarifé en Dollars (USD). En effet, pour se rapprocher le plus possible du produit réel, on se place dans un pays asiatique dans lequel les produits sont tarifés en dollars. On utilise donc la table de mortalité relative à ce pays.

Caractéristique	Produit A	Produit B
Maturité	10 et 15 ans	
Frais d'entrée	3 %	
Frais de gestion	1,5 %	
Frais sur les actions	1 %	
Frais sur les obligations	0,5 %	
Allocation en actions	50 % (10 ans) et 70 % (15 ans)	
Cliquet	Non	Oui
Pas du cliquet	Non	10 %
Plafond du cliquet	Non	200 %
Abattement	0 %	
Age	40 ans	
Répartition Hommes/Femmes	50 % - 50 %	
Corrélation Actions-Taux	0	

NB : Il est important de noter que la dernière ligne du tableau précédent constitue une hypothèse hautement irréaliste. Néanmoins celle-ci est conservée par simplicité et l'impact de la corrélation Actions-Taux sera évoqué ultérieurement.

9.2 Les données

Pour effectuer cette comparaison, il faut choisir une date de référence. Le pricing sera donc effectué sur la date du 25/07/2008 car nous disposons déjà de la plupart des données financières (courbe de taux, duration, convexité) nécessaires pour réaliser les calibrations et les simulations avec tous les modèles.

Les différentes données nécessaires pour effectuer le pricing sont toutes celles que l'on utilise soit pour calibrer les modèles, soit pour générer les scénarios.

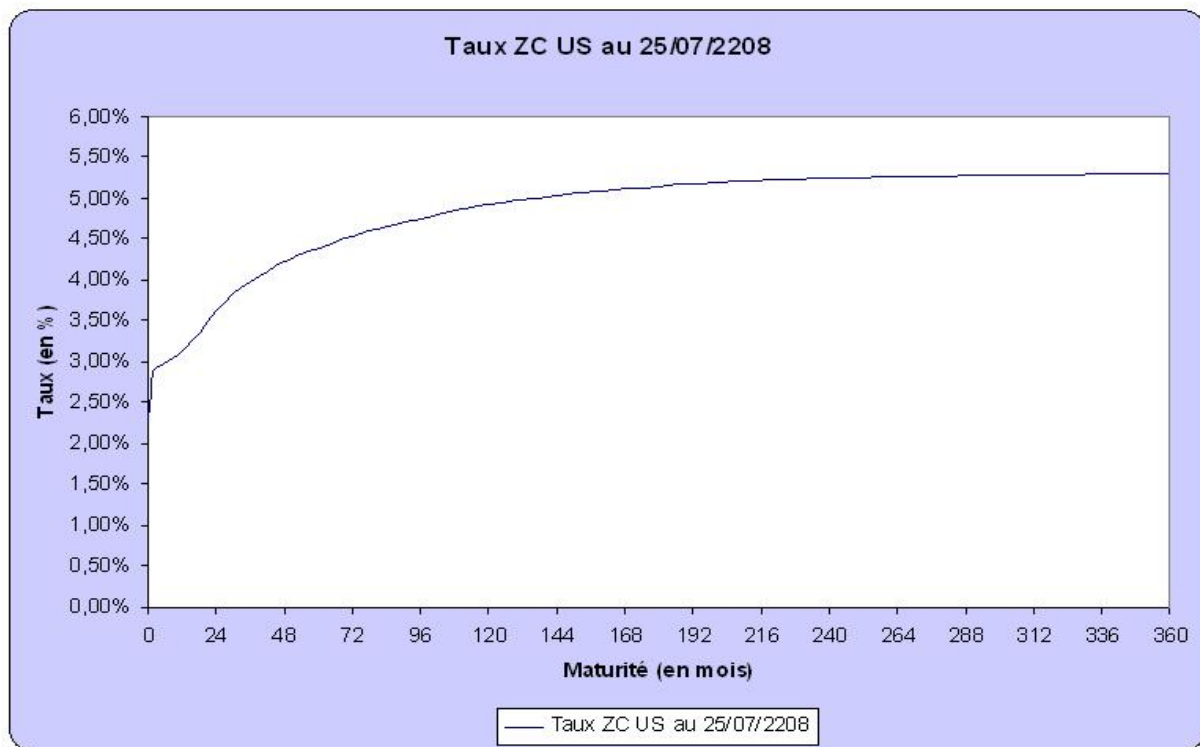
Pour calibrer et générer les scénarios financiers par le modèle de Dupire, il faut tout d'abord une matrice de volatilité implicite pour la calibration. Pour rester cohérent avec le marché sur lequel on tarifie, on utilise la volatilité implicite portant sur le sous-jacent S&P500. La matrice en question est fournie ci-dessous, et la valeur de la première cellule correspond au cours du S&P500 à la date de calcul :

1260,31	3M	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	Maturité
70%	35,67%	31,29%	29,72%	27,85%	27,36%	27,56%	27,59%	28,00%	28,52%	28,86%	29,12%	29,26%	
80%	31,75%	28,42%	27,07%	25,99%	25,87%	26,31%	26,50%	27,02%	27,61%	28,08%	28,45%	28,69%	
90%	27,34%	25,22%	24,42%	24,13%	24,39%	25,06%	25,42%	26,04%	26,70%	27,29%	27,76%	28,10%	
100%	22,41%	21,67%	21,77%	22,27%	22,91%	23,81%	24,33%	25,06%	25,79%	26,48%	27,04%	27,47%	
105%	19,89%	19,87%	20,47%	21,36%	22,17%	23,19%	23,78%	24,57%	25,33%	26,07%	26,67%	27,14%	
110%	17,47%	18,12%	19,22%	20,47%	21,45%	22,57%	23,24%	24,08%	24,88%	25,66%	26,30%	26,81%	
115%	15,16%	16,46%	18,03%	19,63%	20,75%	21,97%	22,71%	23,59%	24,42%	25,24%	25,92%	26,47%	
120%	12,95%	14,87%	16,89%	18,82%	20,09%	21,40%	22,19%	23,12%	23,97%	24,82%	25,53%	26,13%	
125%	10,88%	13,34%	15,80%	18,04%	19,46%	20,85%	21,70%	22,66%	23,53%	24,40%	25,14%	25,77%	
130%		11,88%	14,75%	17,30%	18,85%	20,32%	21,23%	22,22%	23,11%	23,99%	24,74%	25,41%	
135%			13,74%	16,58%	18,26%	19,81%	20,77%	21,79%	22,70%	23,59%	24,36%	25,04%	
140%				15,89%	17,70%	19,32%	20,34%	21,38%	22,31%	23,21%	23,98%	24,69%	
145%					17,15%	18,85%	19,91%	20,99%	21,93%	22,84%	23,62%	24,34%	
150%						18,39%	19,51%	20,61%	21,56%	22,49%	23,28%	24,00%	
K/S													

Matrice de volatilité implicite du S&P500 au 25/07/2008

Pour obtenir les paramètres de la calibration du modèle de Dupire, générer les scénarios par le modèle de Hull et White ou encore calibrer le modèle de Vasicek, il faut également connaître

la courbe des taux. On utilise à ce titre la courbe des taux zéro-coupon USD pour le 25/07/2008, laquelle est donnée ici :



Au final, une fois toutes les calibrations effectuées selon les méthodes exposées dans la partie précédente, on obtient les paramètres suivants pour nos 4 modèles financiers. On utilisera ensuite ces jeux de paramètres pour comparer les résultats du pricing et juger de la consistance des modèles sur le plan pratique.

Modèles	Black et Scholes	Dupire	Vasicek	Hull et White
Paramètres	$r = 4,92 \%$ $\sigma = 27,47 \%$	$\alpha = 0,2107$ $\beta_1 = -0,2399$ $\beta_2 = -0,0544$ $\beta_3 = 0,0001$ $\beta_4 = 0,0002$ $\beta_5 = -0,0021$	$a = 0,44$ $b = 5,66 \%$ $\sigma = 2,93 \%$ $r_0 = 2,66 \%$	$a = 0,427$ $\sigma = 2,79 \%$

9.3 Pricing par les formules fermées

En général, la méthode de Monte-Carlo est utilisée lorsque l'on ne dispose pas de formules fermées pour le pricing. C'est notamment le cas pour la garantie GMWB qu'il est impossible de tarifier par des formules fermées. La méthode de Monte-Carlo permet de tarifier les produits les plus complexes. De plus elle ne se limite pas au pricing, elle permet également l'étude des risques (étude de VaR, analyse des scénarios et de la distribution). Dans le cas d'une garantie de type GMAB ou GMDB, on peut calculer le Hedge Cost via des formules fermées de la manière suivante.

9.3.1 En absence de Ratchet

Comme nous l'avons vu précédemment, les pertes liées à la garantie GMAB s'expriment de la manière suivante :

$$\text{Pertes GMAB} = \text{Max} (G(T) - R(T); 0) \times CR(T) \times F(T)$$

Où :

- T est l'échéance du contrat (déclenchement de la garantie),
- $G(T)$ est le niveau de la garantie en T ,
- $R(T)$ est la valeur de l'épargne en T ,
- $CR(T)$ est le pourcentage de contrats restants en T ,
- $F(T)$ est le facteur d'actualisation pour un flux survenant en T .

Auquel cas, lorsque l'on calcule la moyenne sur l'ensemble des simulations de ces pertes, cela revient à prendre l'espérance (en univers risque neutre) en terme de probabilités :

$$\text{Pertes GMAB} = \underbrace{\mathbb{E} [\text{Max} (G(T) - R(T); 0) \times F(T)]}_{\text{PayOff d'un Put}} \times CR(T)$$

En effet, on remarque que la perte moyenne liée à la garantie en cas de vie est en réalité équivalente à un Put européen de maturité T et pondéré par le nombre de contrats restants à maturité. Les caractéristiques de ce Put sont les suivantes :

- $G(T)$ est le strike, qui vaut ici 100 % de la prime investie (pas de Ratchet),
- le sous-jacent est l'épargne investie,
- le Put est européen car la garantie ne se déclenche qu'à maturité.

D'autre part, lorsque l'on s'intéresse à la garantie GMDB, le raisonnement est le même, si ce n'est qu'on observe en réalité une somme de PayOff de Puts. En effet, lorsque l'on reprend la formule de la perte, on a :

$$\text{Pertes GMDB} = \sum_{t=1}^T \text{Max} (G(t) - R(t); 0) \times CR(t-1) \times q_{x+t-1} \times F(t)$$

La moyenne sur l'ensemble des simulations permet, de manière analogue à la garantie en cas de vie, d'écrire la perte moyenne à partir de l'espérance :

$$\text{Pertes GMDB} = \sum_{t=1}^T \underbrace{\mathbb{E} [\text{Max} (G(t) - R(t); 0) \times F(t)]}_{\text{PayOff d'un Put}} \times CR(t-1) \times q_{x+t-1}$$

On reconnaît alors qu'il s'agit d'une somme de PayOff de Puts européens de maturités t pondérés par le nombre de décès sur la période considérée. Les caractéristiques (sous-jacent et strike) sont les mêmes que pour la garantie précédente.

Dans les deux cas, on peut évaluer les prix de ces Puts par la formule de Black et Scholes pour obtenir le prix de la couverture. Connaissant pour chacun des Puts la maturité, le strike et le cours du sous-jacent, il suffit de connaître également la courbe des taux (pour le facteur d'actualisation) ainsi que le rendement moyen et la volatilité moyenne des actifs. Dans notre cas, on pratique 5000 simulations avec l'un ou l'autre de nos modèles de taux et ces valeurs sont résumées dans le tableau suivant :

	Actions	Obligations
Rendement 10 ans	4,92 %	5,07 %
Rendement 15 ans	4,92 %	5,31 %
Volatilité 10 ans	27,47 %	5,29 %
Volatilité 15 ans	27,47 %	5,30 %

9.3.2 En présence de Ratchet

Lorsque la garantie comporte un Ratchet (cliquet), cela change légèrement le principe car le strike des Puts n'est plus nécessairement le même quel que soit l'instant auquel on se place. En effet la valeur de la garantie évolue au gré des marchés financiers.

La conséquence est l'utilisation d'option à barrières en lieu et place des options classiques. Si l'on s'intéresse par exemple à la garantie GMAB, on ne peut plus voir la perte à maturité comme une variante du PayOff d'un Put classique. On remplace ce Put par une succession de Put à barrières : chaque fois qu'un pas du cliquet est atteint, un Put disparaît et un nouveau Put apparaît avec pour strike la nouvelle valeur de la garantie. Pour la garantie GMDB, la méthode est la même sur toute la somme de Put.

9.3.3 Résultats

Sur nos deux produits fictifs, on obtient les prix suivants pour le Hedge Cost en utilisant cette méthode. Ces prix serviront de première base de comparaison pour les prochaines combinaisons de modèles.

NB : Les tableaux suivants expriment le Hedge Cost en points de base, en tant que taux de chargement sur l'encours prélevé au titre de la garantie dont bénéficie l'assuré. Les colonnes GMAB et GMDB représentent respectivement la part dans le Hedge Cost total représentée par la garantie en cas de vie et par la garantie en cas de décès.

Garantie	GMAB	GMDB	Total
Produit A 10 ans	45	2	47
Produit A 15 ans	39	4	42
Produit B 10 ans	111	4	114
Produit B 15 ans	89	7	97

9.4 Les résultats du pricing

Pour chacun des produits (A et B) ainsi que pour chacune des maturités, on a effectué un pricing par la méthode de Monte-Carlo sur 5000 simulations avec chaque combinaison de modèles Action-Taux. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant, il s'agit des Hedge Cost pour chaque combinaison, donnés en points de base. On sépare pour chaque cas le coût de la garantie selon la garantie.

Important : Le Hedge Cost total n'est jamais réellement égal à la somme de ses composantes en GMAB et en GMDB. En effet lorsque l'on calcule les trois Hedge Cost avec un pas mensuel, on utilise les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{HC}_{\text{GMAB}} = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n \text{Pertes GMAB}_i}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T R(t) \times CR(t) \times F(t) \right)_i} \right)^{12} - 1 \\ \text{HC}_{\text{GMDB}} = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n \text{Pertes GMDB}_i}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T R(t) \times CR(t) \times F(t) \right)_i} \right)^{12} - 1 \\ \text{HC}_{\text{Total}} = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n \text{Pertes GMAB}_i + \text{Pertes GMDB}_i}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^T R(t) \times CR(t) \times F(t) \right)_i} \right)^{12} - 1 \end{array} \right.$$

Auquel cas il est évident que l'on n'a pas $\text{HC}_{\text{Total}} = \text{HC}_{\text{GMAB}} + \text{HC}_{\text{GMDB}}$, même si l'écart est très faible. Néanmoins les valeurs sont très proches et le plus souvent l'arrondi au point de base le plus proche ne permet pas de s'en apercevoir.

9.4.1 Black et Scholes combiné à Vasicek

Garantie	GMAB	GMDB	Total
Produit A 10 ans	48	2	50
Produit A 15 ans	42	4	46
Produit B 10 ans	112	4	116
Produit B 15 ans	96	8	104

9.4.2 Dupire combiné à Hull et White

Garantie	GMAB	GMDB	Total
Produit A 10 ans	51	2	53
Produit A 15 ans	46	4	50
Produit B 10 ans	112	3	115
Produit B 15 ans	103	7	110

9.5 Conclusions

Dans un premier temps, on pourra remarquer la consistance des deux nouveaux modèles pour le pricing. En effet, quel que soit le produit ou quelle que soit la maturité, les prix obtenus ne sont pas aberrants mais ils sont au contraire de l'ordre de grandeur attendu par le pricing par les formules fermées.

On remarquera néanmoins qu'en utilisant le modèle de Dupire et le modèle de Hull et White, les Hedge Costs sont légèrement plus élevés pour les deux produits et les deux garanties qu'avec la méthode des formules fermées ou avec les modèles de Black et Scholes et de Vasicek. Cela peut s'expliquer grâce aux observations faites précédemment sur la plus grande prudence du modèle

de Dupire. Au premier abord, il n'est pas aisé de voir les améliorations apportées par le modèle de Hull et White sur le pricing. En effet nous n'avons pas dégagé préalablement des observations permettant de juger l'impact de son utilisation sur les résultats du pricing.

Néanmoins il est nécessaire de rappeler qu'à la date de calibration, **la courbe des taux zéro-coupon utilisée est parfaitement standard** (croissante et concave, de type Normal Curve). Ce genre de courbe est aisément répliquable avec le modèle de Vasicek également et les apports du modèle de Hull et White sont minimes. Par contre, le modèle de Vasicek est parfaitement incapable de répliquer une courbe de type Humped Curve par exemple, ce que le modèle de Hull et White est théoriquement capable de faire. Auquel cas le véritable apport du modèle de Hull et White pour le pricing est qu'il est le seul à pouvoir fournir des prix lorsque la courbe de taux ne présente pas une forme standard, comme cela a pu être le cas pendant les plus fortes turbulences de la crise financière (août et septembre 2008 notamment).

Le seconde chose que l'on peut remarquer est que le Hedge Cost diminue systématiquement lorsque la maturité augmente. Cela est logique pour les raisons suivantes : les pertes liées à la garantie GMAB sont plus faibles pour une maturité élevée, car la valeur de l'épargne est en moyenne plus forte au bout de 20 ans que de 10 ans. De plus les pertes liées à la garantie GMDB n'augmentent que faiblement : en effet les pertes potentielles additionnelles (décès entre 10 et 20 ans de contrat par exemple) sont de plus en plus faibles en raison de l'augmentation de la valeur de l'épargne et de la diminution du nombre de contrats restants.

Un autre observation importante à faire est que la part du Hedge Cost relative à la garantie en cas de décès est très largement inférieure à la part relative à la garantie en cas de vie, et ce dans tous les cas de figure. Le coût total de la garantie est donc très proche du coût de la garantie GMAB, comme on pouvait s'y attendre. En effet pour des individus de 40 ans, le taux de décès est extrêmement faible sur 10 ou 15 ans, les pertes liées à la garantie GMDB sont donc faibles. Et dans le même temps le nombre de contrats restants à maturité est élevé, d'où des pertes importantes pour la garantie GMAB.

Enfin, on peut remarquer que la présence du cliquet influence le résultat du Hedge Cost de manière non négligeable. Le coût de la garantie est largement supérieur lorsque celle-ci comporte un cliquet. Cette observation s'explique assez facilement : lorsque la garantie comporte un cliquet, le niveau de cette dernière est supérieur (ou égal dans le pire des cas) à celui d'une garantie sans cliquet, et ce quel que soit l'instant auquel on se place. Auquel cas, à évolution égale de l'épargne (donc des marchés), l'assureur enregistre plus de pertes lorsque la garantie comporte un cliquet, tandis que la VAP de l'assuré reste inchangée. Le Hedge Cost sera donc plus important pour un contrat avec garantie comprenant un cliquet que pour un contrat avec garantie standard, toutes choses égales par ailleurs.

Chapitre 10

Tests de sensibilité et étude de VaR

10.1 Tests de sensibilité

Le but de cette seconde section est tout d'abord de comprendre comment évolue le Hedge Cost en fonction des différentes hypothèses actuarielles et financières. En effet il est primordial pour l'actuaire d'être conscient des paramètres qui ont un réel impact sur la valeur du Hedge Cost, ainsi que des paramètres qui, eux, n'influencent en réalité que très peu le coût de la garantie. Notons que le but n'est pas nécessairement de quantifier l'impact d'une variation mesurée de chaque paramètre, mais de dégager la tendance globale issue de cette variation. On se place donc dans une approche plus qualitative que quantitative.

Pour effectuer les tests de sensibilité à ces paramètres, on se concentrera uniquement sur une combinaison de modèles et une maturité, les impacts n'ayant aucune raison d'être différents selon la combinaison ou la maturité du contrat.

Dans le cadre de l'étude sur l'amélioration des modèles financiers, il paraît plus logique de pratiquer les tests en utilisant Dupire pour les actions et Hull et White pour les taux. D'autre part on choisira la maturité 10 ans.

Notons que pour effectuer les tests de sensibilité, il est indispensable que les paramètres soient modifiés un à un « toutes choses égales par ailleurs ». Par conséquent le scénario central pour les tests de sensibilité est celui combinant le produit A pour la maturité de 10 ans avec les modèles de Dupire et de Hull et White, **soit un Hedge Cost de 53 points de base**.

10.1.1 Variations des hypothèses actuarielles

10.1.1.1 La présence du cliquet

Comme nous l'avons vu précédemment, la présence du cliquet sur la garantie augmente le coût de cette dernière. Néanmoins cette seule observation n'est pas étonnante et il est également possible d'agir sur les paramètres du cliquet.

On testera donc différents pas et différents plafonds pour le cliquet, afin de déterminer si ces paramètres influencent de manière significative le coût de la garantie. La fréquence de constatation du cliquet a potentiellement un impact également. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Pas/Plafond/Fréquence	GMAB	GMDB	Total
10 %/200 %/Mensuel	112	3	115
10 %/250 %/Mensuel	118	3	121
20 %/200 %/Mensuel	101	3	104
10 %/200 %/Annuel	90	2	92



On remarque clairement que le pas et le plafond du cliquet jouent également un rôle : lorsque le pas augmente, le Hedge Cost diminue, tandis que lorsque le plafond augmente, le Hedge Cost augmente également.

L'augmentation du plafond entraîne une hausse des pertes pour l'assureur car le niveau maximal de la garantie est augmenté : l'écart à payer par l'assureur entre la garantie et la réserve est donc plus élevé en cas de mauvaise performance du marché.

L'augmentation du pas produit l'effet inverse : les performances du marché sur un mois sont souvent trop faibles pour déclencher le cliquet si le pas est élevé, et le niveau de la garantie augmente donc moins, d'où des pertes minimisées pour l'assureur et une diminution du Hedge Cost.

Pour les mêmes raisons, plus le cliquet est constaté fréquemment, et plus les pertes pour l'assureur seront importantes car la garantie sera plus souvent revalorisée, donc le Hedge Cost augmentera également et inversement.

En conclusion, la seule présence du cliquet influence fortement le Hedge Cost. Surtout, chaque paramètre du cliquet est susceptible de faire évoluer le coût de la garantie de manière significative.

10.1.1.2 La mortalité

Concernant les hypothèses de mortalité, il est possible de faire varier plusieurs paramètres. En premier lieu on peut modifier l'âge à la souscription qui, intuitivement, devrait avoir un impact majeur sur le résultat. Ensuite, on peut penser à modifier la marge de prudence qu'est le coefficient d'abattement. Pour finir, la mortalité étant différente entre les hommes et les femmes, il est également intéressant de faire varier la répartition de la population dans le contrat entre hommes et femmes.

Le scénario central est basé sur une population âgée de 40 ans à la souscription. Lorsque l'on fait passer cette âge à l'entrée à 60 ans (notons que l'on conserve la même prime que pour l'assuré de 40 ans), on obtient un Hedge Cost de 56 (45 pour la GMAB et 11 pour la GMDB). Comme on pouvait s'y attendre, l'augmentation de l'âge à l'entrée entraîne très logiquement une augmentation du coût de la garantie en cas de décès et une diminution du coût de la garantie en cas de vie. En effet le taux de décès sur 10 ans d'une population de 60 ans est nettement supérieur à celui d'une population de 40 ans. Il y a donc plus de décès sur la période de validité du contrat et moins de contrats restants à maturité.

Globalement le Hedge Cost augmente avec l'âge à la souscription car les deux phénomènes précités ne se compensent pas parfaitement.

Concernant l'abattement, on prendra deux exemples en plus du scénario central, dans lequel il n'y a pas de marge de prudence sur la mortalité (abattement nul) : une marge prudente de 25 % et une marge encore plus prudente de 35 %. Concernant la répartition de la population, qui était de 50 % d'hommes et 50 % de femmes dans le scénario central, on testera les répartitions suivantes : 0 % - 100 % et 100 % - 0 %. Les résultats sont résumés dans les deux tableaux suivants :

Sensibilité à l'abattement			
Abattement	GMAB	GMDB	Total
0 %	51	2	53
25 %	52	2	54
35 %	52	1	53

Sensibilité à la répartition			
Proportion d'hommes	GMAB	GMDB	Total
0 %	52	1	53
50 %	51	2	53
100 %	51	3	54

On remarque que l'impact d'une modification du coefficient d'abattement ou de la répartition entre hommes et femmes est extrêmement faible, et même pratiquement insignifiant. En effet, entre un contrat composé uniquement de femmes et un contrat composé uniquement d'hommes, la différence de Hedge Cost n'est que d'un seul point de base. Il en est de même pour une modification de 25 % de l'abattement.

Ce résultat est relativement étonnant, on pouvait s'attendre à des écarts plus importants. Cela pourrait s'expliquer par le fait qu'à 40 ans, les écarts de q_x entre hommes et femmes sont faibles, il serait donc intéressant de regarder les mêmes tests de sensibilité avec une population âgée de 60 ans à la souscription. En effet, plus l'âge augmente et plus les écarts de mortalité entre hommes et femmes sont importants. Les résultats de ce second test sont donnés dans les tableaux suivants :

Sensibilité à la répartition			
Proportion d'hommes	GMAB	GMDB	Total
0 %	46	8	54
50 %	45	11	56
100 %	43	14	57

On remarque alors une légère différence avec le test précédent puisque cette fois les Hedge Costs sont nettement plus éloignés. On observe une augmentation du coût de la garantie au fur et à mesure que la part d'hommes augmente. Si cette augmentation demeure légère et difficilement explicable de manière globale, un autre point est à souligner : on peut observer que le coût de la garantie en cas de vie diminue lorsque la proportion d'hommes augmente, contrairement au coût de la garantie en cas de décès qui augmente. Si bien qu'au final ces deux effets se contrent et le Hedge Cost n'augmente que faiblement. Ceci est logique car les femmes décèdent « moins » que les hommes. Auquel cas plus il y a de femmes dans la population et plus il reste de contrats à maturité, donc le Hedge Cost augmente pour sa part GMAB. A l'opposé, il y a moins de décès durant la période et le Hedge Cost, pour sa part GMDB, est moins important.

Les mêmes tests de sensibilité concernant le coefficient d'abattement sur une population âgée de 60 ans à la souscription fournissent les Hedge Costs suivants :

Sensibilité à l'abattement			
Abattement	GMAB	GMDB	Total
0 %	48	11	59
25 %	47	8	55
35 %	47	7	54

L'impact de la modification du coefficient d'abattement est légèrement plus marqué qu'avec la population de 40 ans. On remarquera que le coût de la garantie diminue lorsque l'abattement augmente. La part liée à la garantie en cas de vie tend à baisser, à l'inverse de la part liée à la garantie en cas de décès qui augmente avec l'abattement. Ceci semble également logique car en augmentant l'abattement, on suppose qu'il y a moins de décès, d'où une baisse du Hedge Cost pour sa part GMDB.

En conclusion, lorsque l'on s'intéresse aux paramètres de mortalité, le facteur déterminant reste l'âge de la population. Celui-ci provoque en lui-même un impact

important sur le coût de la garantie, mais surtout, il influence grandement l'impact des autres paramètres que sont l'abattement et la répartition de la population.

10.1.1.3 Les rachats

Concernant les rachats, deux approches sont possibles pour les tests de sensibilité. La première est de modifier le taux de rachat dans le cadre de rachats déterministes : le scénario central prenant en compte des rachats déterministes au taux de 5 % l'an, on peut augmenter ce taux pour passer à 8 % par exemple, tout en restant dans le cadre déterministe. La seconde possibilité est de constater l'impact d'une loi de rachat dynamique en conservant un taux de base (structurel) de 8 %.

Pour cette dernière option, il est nécessaire de choisir une loi de rachat parmi celles évoquées précédemment (exponentielle et linéaire notamment), qu'il convient ensuite de calibrer correctement. Dans notre cas on se limitera à une loi de rachat linéaire, bien que la loi exponentielle ne soit nullement plus compliquée à calibrer.

Pour calibrer la loi de rachat linéaire, il est nécessaire de disposer d'une chronique de rachat « cohérente » en fonction du rapport réserve sur garantie. Le but étant simplement de constater l'impact d'une telle loi et non de le quantifier, les valeurs des paramètres ne sont pas essentielles. C'est pourquoi la loi n'a pas été calibrée à partir d'une chronique de rachats réelle observée, mais simplement en créant une chronique de rachats cohérente. De manière générale, cette chronique présente les caractéristiques suivantes :

- Pour un niveau de $\frac{R}{G}$ inférieur à 70 %, le taux de rachat est de 3 % (clients irrationnels),
- de 70 % à 140 % de $\frac{R}{G}$, le taux de rachat est croissant, s'étalant de 3 % à 20 %,
- au delà, les rachats sont plafonnés à 20 %.

Les paramètres obtenus sont les suivants :

F_{min}	0,375
F_{max}	2,5
D	0,681
M	3,539

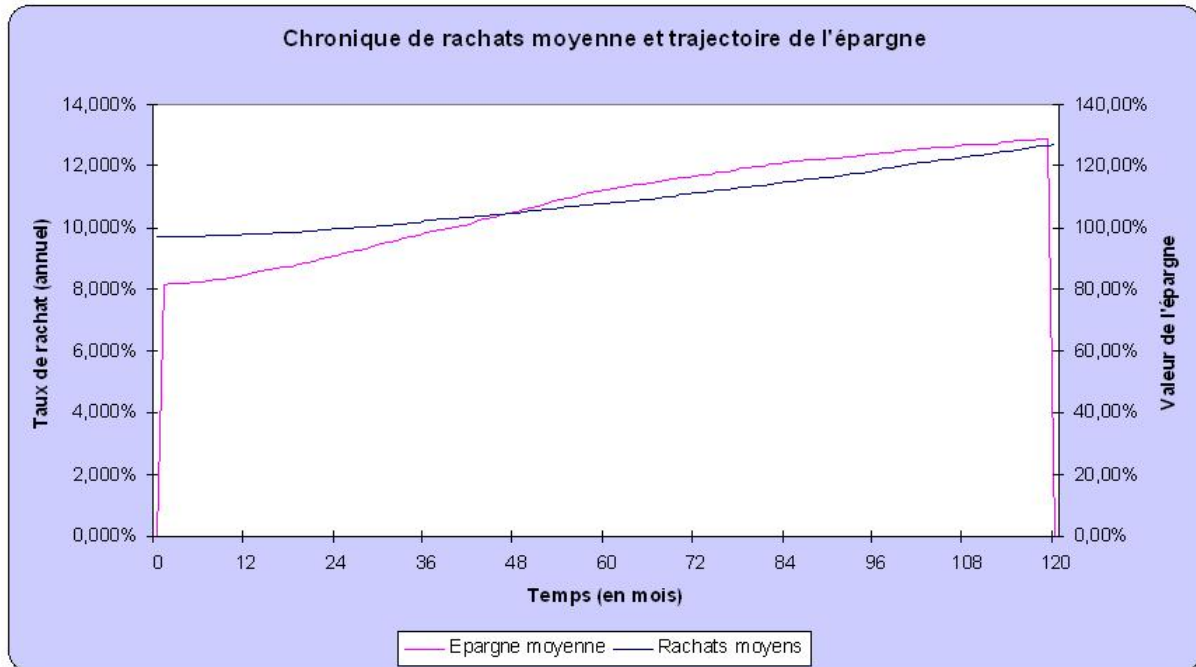
Au final, les résultats obtenus en faisant varier les hypothèses de rachat sont résumés dans le tableau suivant. Pour l'hypothèse de rachats dynamique, les résultats seuls ne sont pas facilement explicables, c'est pourquoi on donne ensuite un graphique contenant la chronique de rachat moyenne sur les simulations, ainsi que la trajectoire moyenne de l'actif du client :

Sensibilité aux rachats			
Taux de rachat	GMAB	GMDB	Total
Déterministe 5 %	51	2	53
Déterministe 8 %	43	2	45
Dynamique 8 %	58	2	60

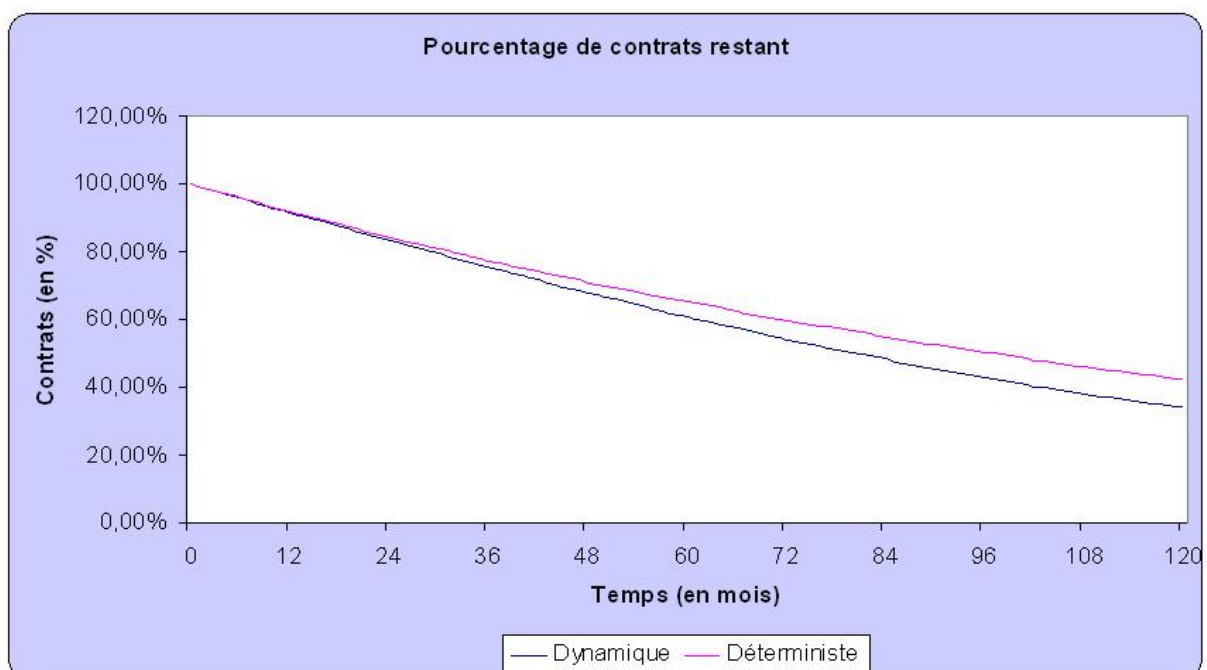
La première chose à remarquer est que le taux de rachat déterministe influence très nettement le coût de la garantie. En effet le Hedge Cost diminue de 8 points de base en augmentant le taux de rachat de 3 %. Surtout, l'impact observé est uniquement sur la part relative à la garantie GMAB. Cela s'explique simplement : lorsque les rachats augmentent, il y a moins de contrats à maturité, d'où une baisse du coût de la garantie GMAB. Dans le même temps les taux de décès ne sont pas modifiés, il n'y a donc pas d'impact sur le coût de la GMDB.

D'autre part, le passage à la loi de rachat dynamique entraîne quant à lui une hausse très nette du coût de la garantie. Pour tenter d'expliquer le phénomène, on peut s'intéresser à la

courbe de rachats moyens sur la simulation ainsi qu'à la trajectoire moyenne de l'épargne qui est donnée ci-dessous (ici la garantié est de 100 %, donc il n'est pas nécessaire de regarder le rapport $\frac{R}{G}$ qui est égal à R).



On remarque alors que la trajectoire moyenne de l'épargne est croissante jusqu'à 127 %, et les rachats le sont également de 8 % à 13 %, ce qui est en accord avec la chronique. En effet, le niveau de l'épargne se situe en permanence dans une zone où les rachats sont supérieurs à 8 % (niveau de $\frac{R}{G}$ dans notre chronique initiale). En moyenne, les rachats sont plus importants dans le cas dynamique. On le confirme en regardant le pourcentage moyen de contrats restants dans les deux cas (rachats dynamiques et rachats déterministes à 8 % l'an), on obtient le graphique suivant :



A maturité, il reste en moyenne 42,5 % des contrats dans le cas déterministe, contre 34,12 % dans le cas dynamique. Quand on regarde la formule du calcul de la perte relative à la GMAB, on s'aperçoit que celle-ci dépend directement du nombre de contrats restants, ce qui semble incohérent avec le résultat que nous observons.

L'augmentation du coût de la garantie en cas de vie s'explique en différenciant le comportement des clients selon l'évolution du fond.

Dans le cas déterministe, le nombre de contrats à maturité est le même quel que soit le niveau de l'épargne. Dans les cas favorables (lorsque la garantie est inférieure au niveau de l'épargne), l'assureur n'enregistre aucune perte. Dans les cas défavorables (lorsque la garantie est supérieure au niveau de l'épargne), l'assureur doit payer le différentiel pour tous les contrats restants.

Dans le cas dynamique, les rachats sont fonction de la valeur de l'épargne. Dans les cas favorables, l'assureur n'enregistre toujours pas de pertes. Dans les cas défavorables, les clients rachètent très peu (moins que 8 % par an) et il reste un nombre de contrats supérieur au cas où les rachats sont déterministes. Les pertes sont donc plus importantes pour l'assureur et dans le même temps la VAP des engagements de l'assuré augmente car il reste plus de contrats. Cela entraîne une augmentation du coût de la garantie également.

En conclusion, le taux de rachat annuel influence considérablement la valeur du Hedge Cost, principalement en raison de la garantie en cas de vie. La modélisation des rachats a également un impact majeur : le choix d'appliquer ou non une loi de rachat dynamique ainsi que ses paramètres jouent un rôle important dans la tarification.

10.1.2 Variations des hypothèses financières

Bien que le choix des modèles utilisés soit fait, il reste différentes hypothèses financières susceptibles de faire évoluer le prix de la garantie. Notamment, il est possible de jouer sur la part allouée au marché actions et qui aura probablement un impact. Il est également intéressant de regarder ce qui résulterait d'un choc (à la hausse par exemple) sur les taux et/ou sur la volatilité. Enfin, dans le scénario central, on ne supposait pas de corrélation entre les actifs, il pourrait donc être pertinent de tester la sensibilité du coût de la garantie à la valeur du coefficient de corrélation.

10.1.2.1 L'allocation d'actifs

Dans le scénario central (produit A 10 ans), l'allocation d'actifs est faite équitablement entre les actions et les obligations. Pour tester l'impact de cette hypothèse, on prendra l'allocation suivante : 70 % en actions et 30 % en obligations et inversement. On obtient les résultats suivants :

Sensibilité à l'allocation d'actifs			
Part Actions	GMAB	GMDB	Total
30 %	19	1	20
50 %	51	2	53
70 %	85	3	88

Le coût de la garantie est donc largement dépendant de l'allocation choisie. Plus la part actions est importante et plus le Hedge Cost l'est également. On remarque par ailleurs que cela est quasi-exclusivement dû à la part relative à la GMAB.

Intuitivement ce résultat n'est pas surprenant car en réduisant la part obligataire (non risquée) au profit des actions (actif risqué) dans l'épargne, la volatilité moyenne des actifs est augmentée. De ce fait son évolution est plus aléatoire et le risque pour l'assureur d'enregistrer

des pertes augmente, ce qui se répercute sur le coût de la garantie.

Comme cela a été vu dans le pricing, le rendement des actions et des obligations est relativement proche sur 10 ans avec nos deux modèles (respectivement 4,92 % et 5,07 %), par conséquent le rendement moyen est proche de 5 % quelle que soit l'allocation choisie. Une augmentation de la volatilité moyenne entraînant une dispersion plus forte des scénarios autour du rendement moyen, la probabilité d'obtenir des valeurs de l'épargne à maturité inférieures à la garantie augmente.

10.1.2.2 La corrélation

Historiquement, les taux d'intérêt étaient inversement corrélés au prix des actions. Une baisse des taux était en général favorable à l'augmentation du prix des actions. Bien que cela ait duré jusqu'à la fin du siècle dernier (1997-1998), la tendance est inversée depuis. On observe, dans des conditions normales de marché, que lorsque les taux montent, les actions montent également et inversement. En effet, la hausse des taux longs traduit une croissance plus forte de l'économie, ce qui est favorable aux actions. On assiste malgré tout épisodiquement à des décorrélations, voire à des corrélations inversées.

Dans le scénario central, on supposait les actions et les taux parfaitement décorrélés, ce qui est une hypothèse hautement simplificatrice comme nous venons de le voir. Pour se donner une idée de l'impact que peut avoir ce paramètre sur le coût de la garantie, on prendra un coefficient de corrélation de 100 % entre les actions et les taux. A titre indicatif, on prendra également en compte le cas, plus rare, de la corrélation inverse totale (- 100 %). En effet, comme on ne cherche pas à quantifier les impacts, on préfère tester les coefficients susceptibles d'avoir le plus d'impact.

Ces modifications entraînent des écarts dans le Hedge Cost, qui sont donnés dans le tableau suivant :

Sensibilité à la corrélation			
Coefficient de corrélation	GMAB	GMDB	Total
100 %	54	2	56
50 %	52	2	54
0 %	51	2	53
-50 %	49	2	51
-100 %	46	2	48

On remarque dans un premier temps que l'impact sur le coût de la garantie est léger. La corrélation négative tend à faire diminuer le Hedge Cost, à l'inverse de la corrélation positive. On remarquera aussi que l'impact est légèrement plus important lorsque l'on suppose la corrélation négative.

Ces observations s'expliquent relativement facilement : lorsque la corrélation est négative, la baisse (ou la hausse) d'un actif sera accompagnée de la hausse (ou de la baisse) de l'autre actif. Les sur-performances et les sous-performances de l'épargne investie seront donc atténuées, et le Hedge Cost aussi par conséquent. Dans l'autre cas, les actifs auront la même évolution et la baisse (ou la hausse) de l'un ne sera plus compensée par l'autre, il y aura donc plus de cas où l'épargne à maturité est inférieure à la garantie et le Hedge Cost sera donc plus important.

10.1.2.3 Impact sur la nappe de volatilité

Afin de constater si la date de calibration est réellement influente sur les résultats, on peut s'intéresser à la nappe de volatilité implicite sur laquelle le modèle de Dupire est calibré. Pour simplifier, on supposera simplement que la nappe de volatilité implicite peut subir une variation uniforme de p % (quelle que soit la maturité et quel que soit le prix d'exercice).

Or si l'on se remémore la forme de la fonction analytique sur laquelle s'effectue la calibration, à savoir :

$$\sigma(K, T) = \alpha + \beta_1 M + \beta_2 M^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT$$

On remarque que tout impact uniforme sur la nappe se traduit par un impact équivalent sur le paramètre α : le paramètre α sera donc modifié de p % dans notre test. On testera parallèlement une hausse et une baisse uniforme de 2 % sur la nappe de volatilité. Les résultats obtenus sont les suivants :

Sensibilité à la volatilité implicite			
Impact uniforme	GMAB	GMDB	Total
2 %	58	2	60
0 %	51	2	53
-2 %	43	2	45

On remarque immédiatement que l'impact est important sur le Hedge Cost : il augmente assez nettement (exclusivement la part liée à la GMAB) lorsque la volatilité implicite est augmentée et inversement lorsque celle-ci est diminuée. On peut donner à cela le même type d'explication que pour l'augmentation de la part action. En effet, en augmentant de manière uniforme la volatilité implicite, on augmente subséquemment la volatilité locale (il suffit pour s'en convaincre de regarder la formule donnant la volatilité locale en fonction du paramètre α). Donc la volatilité du modèle de Dupire est plus importante et cela augmentera la volatilité moyenne des actifs, quelle que soit l'allocation choisie. On retombe alors sur les explications données précédemment.

10.1.2.4 Impact sur la courbe des taux

De la même manière, on peut supposer un impact sur la courbe des taux. Ici également on supposera que cet impact est uniforme quelle que soit la maturité, on le fixera ici aussi à plus ou moins 2 %. Il est néanmoins important de noter la chose suivante : il est possible de tester ces impacts sur la courbe de taux à deux étapes différentes :

- Lors de l'utilisation de la courbe zéro-coupon pour la calibration des paramètres a et σ ,
- Après la calibration, lors du calcul itératif des coefficients θ_i .

Il ne paraît pas cohérent d'utiliser la première solution. En effet, la calibration s'effectue sur les Caps qui sont des produits de taux. Si l'on modifie la courbe des taux tout en gardant les mêmes Caps pour la calibration, cette dernière perd tout son sens. On supposera donc que l'impact sur la courbe des taux intervient uniquement au moment du calcul itératif des θ_i et non lors de la calibration.

Auquel cas, les résultats obtenus après ces deux impacts de plus ou moins 2 % sur la courbe des taux initiale sont les suivants :

Sensibilité à la courbe des taux			
Impact uniforme	GMAB	GMDB	Total
2 %	35	2	37
0 %	51	2	53
-2 %	73	2	75

Le Hedge Cost diminue fortement lorsque l'on pratique cette augmentation des taux zéro-coupon, et inversement lors de la diminution. De plus, l'impact est quantitativement équivalent. L'explication de ce phénomène est assez simple : en augmentant la courbe des taux zéro-coupon, on augmente également la courbe des taux forward sur laquelle le taux instantané du modèle de Hull et White s'ajuste en moyenne. Donc le taux instantané est en moyenne plus fort avec

cette augmentation des taux zéro-coupon, ce qui se répercute sur le taux court et sur le taux long. Le rendement des obligations (et des actions car on se trouve en univers risque neutre) augmente par conséquent (7,26 % contre 5,16 % avec la courbe initiale). A terme, et ce quelle que soit l'allocation choisie, la valeur de l'épargne du client est en moyenne supérieure, et comme la garantie est fixée à 100 %, l'assureur enregistre des pertes inférieures, d'où la diminution du Hedge Cost.

En conclusion concernant les hypothèses financières, on a vu que l'allocation d'actifs joue un rôle majeur dans le résultat du Hedge Cost, tout comme la nappe de volatilité implicite initiale et la courbe des taux. A une moindre échelle, le coefficient de corrélation est également de nature à influencer le coût de la garantie.

10.1.3 Conclusions

Au travers de ce chapitre, nous avons pu mettre en avant les paramètres ayant un impact non négligeable sur le coût final de la garantie, ainsi que ceux dont les variations influencent peu ou pas le résultat. Il s'est avéré que les paramètres financiers, autres que les choix des modèles, ont tous un impact important sur le Hedge Cost, qu'il s'agisse de la corrélation ou de l'allocation entre les actifs, tout comme les données de marché utilisées pour les modèles. A ce titre, il a été constaté que des chocs sur la courbe de taux ou sur la nappe de volatilité implicite ont des conséquences considérables sur le coût de la garantie.

A contrario, les hypothèses actuarielles n'ont pas toutes la même influence sur le Hedge Cost. Les marges de prudence sur la mortalité ont en réalité très peu d'impact sur une population « jeune », que ce soit le coefficient d'abattement ou la répartition de la population. L'âge de la population, les hypothèses de rachats et la présence d'un cliquet sur la garantie sont quant à elles des hypothèses fortes, très influentes sur le résultat du Hedge Cost.

Ces observations permettent de savoir, lors de la tarification, quelles sont les paramètres fondamentaux et au contraire quels sont ceux dont le choix ne doit pas requérir une étude approfondie. Il en résulte qu'une fois les caractéristiques précises du contrat déterminées (âge et répartition de la population, présence ou non d'un cliquet sur la garantie et choix de ses paramètres, allocation entre actions et obligations), ce sont les hypothèses financières qui déterminent réellement le coût de la garantie, ainsi que les caractéristiques de la population (rachats, mortalité) dans une moindre mesure.

Cela vient confirmer a posteriori l'importance des modèles financiers dans le pricing des Variable Annuities. Plus particulièrement on peut insister sur le caractère primordial des données de marchés utilisées et sur la calibration.

10.2 Etude de VaR

L'objectif de cette seconde partie du chapitre est l'étude de **la mise en place d'une provision** concernant le produit Variable Annuity étudié, **et non l'étude du risque**. Nous avons vu à quel point les hypothèses financières peuvent influencer le coût de la garantie, on peut en outre comparer le Hedge Cost calculé avec différents scénarios, notamment des scénarios catastrophiques. De plus, comme nous l'avons notamment vu lors de l'étude du modèle de Dupire, l'utilisation de tel ou tel autre modèle n'est pas équivalente en terme de suivi du risque.

La tarification du produit se fait, comme nous venons de le montrer, sur un scénario moyen. Donc lorsque le coût de la garantie est arrêté et le produit lancé, l'assureur n'est pas à l'abri d'encaisser des pertes importantes en cas de mauvaises performances financières, du fait des garanties octroyées aux clients qui l'engagent à payer éventuellement le différentiel (garantie - niveau du fond) au décès ou à maturité par exemple. Avec la crise financière de 2008 et les

déboires des marchés financiers, ces garanties ont d'ailleurs déjà coûté très cher à de nombreux assureurs et la question du provisionnement se pose plus que jamais.

Les hypothèses du pricing peuvent varier, nous avons par exemple vu qu'un impact sur la courbe de taux peut avoir une influence importante sur le coût de la garantie. L'assureur doit être en mesure d'encaisser les pertes qui en découlent, et doit donc mettre de côté une provision (en prélevant un pourcentage supplémentaire sur l'encours).

Différentes questions se posent alors : Comment l'assureur doit-il procéder pour constituer ces réserves ? Faut-il provisionner la moyenne estimée des coûts ? Faut-il de préférence ajouter de la prudence en provisionnant le coût d'un scénario « catastrophe » ? Peut-il encore procéder d'une autre manière ? Un groupe de travail de l'Institut des Actuaire se réunit d'ailleurs régulièrement pour travailler sur cette question, d'autant plus importante qu'avec l'arrivée prochaine des directives de Solvabilité 2, le besoin en fonds propres sera nettement plus contrôlé.

10.2.1 Le besoin en fonds propres sous Solvabilité 2

Le premier pilier du projet de directives européennes a pour objectif de définir des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Ces seuils deviendront des seuils réglementaires. Deux niveaux de fonds propres seront définis :

- Le MCR (Minimum Capital Requirement : Capital Minimum Requis) qui représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique,
- Le SCR (Solvency Capital Requirement : Capital de Solvabilité Requis) qui représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle.

Les modalités de calcul exactes du MCR et du SCR sont actuellement en cours de définition, mais il apparaît clairement que le SCR devrait être l'outil principal des autorités de contrôle. En effet, le SCR est le seul à être basé sur l'exposition aux risques, en incorporant tous les risques liés à l'activité de la compagnie (souscription, crédit, opérationnel, liquidité, marché). Une compagnie qui ne serait pas en mesure de démontrer que son niveau de fonds propres est suffisant pour couvrir ces risques devra soumettre à son autorité de contrôle pour approbation un plan précisant comment et quand elle pourra concrètement respecter ces critères.

Pour déterminer le SCR, les assureurs et réassureurs sont contraints de mesurer leurs risques et de s'assurer qu'ils ont suffisamment de fonds propres pour les couvrir. Il existe toujours un débat sur le niveau de prudence (probabilité d'être solvable à un an) qui sera requis. **Le niveau de probabilité retenu pour le SCR est de 99,5 %.**

Les compagnies devraient avoir le droit entre deux options : soit adopter une approche standard, soit un modèle interne. L'approche standard est actuellement en cours de définition au travers de QIS (Etudes Quantitatives d'Impact). La commission européenne a par ailleurs affirmé à plusieurs reprises que ceux ayant opté pour l'approche standard se verront imposer une exigence de capital complémentaire par rapport à ceux ayant opté pour le modèle interne. L'approche par modèle interne, bien que plus contraignante, est la seule à apporter des éléments permettant une meilleure maîtrise de l'activité de la société.

10.2.2 Choix de la probabilité

En général, lorsque l'on cherche à calculer des risques, la mesure de probabilité utilisée est la probabilité historique. Dans cette approche, cela ne sera pas le cas et on utilisera la probabilité risque neutre pour les raisons suivantes.

Le calcul de Value at Risk que l'on s'apprête à effectuer a pour but le provisionnement et non la gestion du risque à proprement parler, comme cela vient d'être évoqué. La finalité recherchée est la mise en place d'une réserve liée aux garanties. Lorsque c'est ce but de « reserving » qui est poursuivi, l'approche se veut la plus prudente possible.

Or si l'on se place sous la probabilité risque neutre, le rendement des actifs est **généralement** plus faible que sous la probabilité historique. Bien évidemment ceci n'est pas toujours vrai et tout dépend des périodes passées que l'on considère (par exemple il est fort probable que la dernière année passée contredise cette généralité) mais on souhaite ici se placer dans le cas le plus général possible. Or un rendement plus faible pour les actifs aura pour effet d'augmenter le coût de la garantie et ajoute donc de la prudence dans la démarche de provisionnement.

Notons tout de même qu'en règle générale, pour calculer les risques, on utilise des paramètres reflétant la réalité (l'historique). La probabilité risque neutre est une mesure purement théorique valable pour le pricing (théorie des options) ou pour le reserving (principe de prudence). Il est dénué de sens de vouloir calculer un évaluer un risque (notamment pour le reporting des risques) avec une mesure théorique. Les scénarios des actifs devront donc être tirés sous la probabilité historique.

Contrairement à ces risques, les Variable Annuities sont valorisées sous la probabilité risque neutre. Non seulement le risque financier (risque de marché) est la principale source de risque impactant ces produits, mais aussi la valorisation sous la probabilité risque neutre est la seule à fournir une valeur « objective » (« Fair Value »¹) de ce risque financier. La valorisation sous la probabilité risque neutre est conforme à l'approche économique dictée par la directive Solvabilité 2, notamment pour le provisionnement et l'utilisation de la formule standard.

NB : Dans le cas du modèle interne, ce n'est pas forcément le cas car on ne peut pas raisonner avec la fonction empirique obtenue sous la probabilité risque-neutre, la vision des extrêmes étant altérée. Il faut alors simuler la situation économique en univers réel puis ensuite, pour établir le bilan économique, il est possible de raisonner en risque-neutre, le Best Estimate étant une moyenne espérée.

Enfin, on peut voir une justification de ce choix dans la théorie économique en environnement incertain. La théorie de l'utilité de Von Neumann et Morgenstern ont en effet pour hypothèses fondatrices que :

- Les agents préfèrent strictement plus de revenus que moins,
- Les agents sont averses au risque.

En d'autres termes, entre deux jeux d'espérance de gain identique, l'agent choisira le moins risqué. Cependant il pourrait accepter de modifier son choix si un gain supplémentaire (appelé prime de risque) lui était proposé.

Il faudra donc toujours bien distinguer la VaR en univers historique, qui correspond à une perte potentielle liée au produit, et la VaR en univers neutre au risque, utilisée pour les problématiques de reserving. Dans les deux cas, la VaR repose sur l'étude d'une variable (le Hedge Cost, la perte résiduelle, le profit, etc.) pour donner un niveau de risque en adéquation avec la volonté de l'assureur au lancement du produit.

Comme nous l'évoquions en début de chapitre, le seul but de cette partie est de proposer un Hedge Cost critique dans l'optique du reserving. L'étude est faite en risque neutre pour les raisons évoquées ci-dessus.

1. La Fair Value d'un actif ou d'un passif est la valeur pour laquelle deux agents, identiquement informés, accepteraient de s'échanger cet actif ou ce passif

10.2.3 Les mesures de risque

Le choix de la « bonne manière » de mesurer les risques est au centre des problématiques de Solvabilité 2. En effet ce choix impacte à la fois l'évaluation des provisions et celle du capital cible (SCR). Il existe plusieurs mesures de risque acceptables dans le contexte de Solvabilité 2, notamment la VaR et la TVaR.

10.2.3.1 La Value at Risk (VaR)

Si X est une variable aléatoire (un risque) et $0 \leq \alpha \leq 1$ une probabilité, la VaR de X au niveau α est le quantile d'ordre α de X , soit en posant F_X la fonction de répartition de X :

$$\text{VaR}(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR a le mérite de reposer sur un concept simple et directement justifiable : $\text{VaR}(X, \alpha)$ est le montant qui permettra de couvrir le montant des sinistres engendré par le risque X avec une probabilité α . Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société dispose de ressources égales à $\text{VaR}(X, \alpha)$ et assure un unique risque X , sa probabilité de ruine est égale à $1 - \alpha$.

L'utilisation de cette mesure de risque s'est développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans les problématiques assurantielles.

10.2.3.2 La Tail Value at Risk (TVaR)

L'idée de la Tail Value at Risk est d'obtenir une information sur ce qui se passe lorsque la VaR est dépassée. Son expression est donnée de la manière suivante, où X et α sont toujours respectivement le risque et le seuil :

$$\text{TVaR}(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}(X, s) ds$$

De cette manière, pour un seuil fixé, la TVaR est systématiquement supérieure ou égale à la VaR.

10.2.4 Choix d'un critère

Au moment de choisir un critère entre VaR et TVaR, on pourra se référer aux points suivants :

- La VaR n'apporte pas d'information sur la queue de la distribution,
- La TVaR contient toujours un chargement de sécurité : $\text{TVaR}(X, \alpha) \geq \mathbb{E}(X)$,
- L'ordre associé à la TVaR a une interprétation naturelle en assurance,
- Mais les préférences associées à la VaR sont plus stables que celles associées à la TVaR.

En pratique, Solvabilité 2 donne des indications pour guider le choix, et on doit considérer les deux approches comme complémentaires et non exclusives. Ces deux mesures ne fournissent pas la même information : La VaR nous indique la charge de sinistres au delà de laquelle il y a ruine avec la probabilité α , tandis que la TVaR nous renseigne sur l'ampleur de la ruine au delà de ce seuil (une fois atteint).

L'objectif essentiel de la solvabilité est de contrôler la probabilité de ruine : la VaR est un outil naturel pour le faire. La TVaR fournit alors une mesure de l'intensité de la ruine lorsque celle-ci survient. **Dans notre cas, on ne s'intéressera néanmoins qu'à la VaR.**

Il existe trois différentes méthodes de calcul de la VaR : la méthode analytique, la méthode historique et la méthode de Monte-Carlo. Notons que les deux premières citées font appel aux

données du passé et reposent donc sur la continuité entre le passé et le futur. Nous utiliserons la VaR de Monte-Carlo (ou VaR aléatoire).

Cette méthode consiste simplement à simuler les facteurs de risque et à calculer le quantile correspondant. Il s'agit de la plus juste intuitivement mais elle nécessite à la fois des moyens informatiques conséquents (temps de calcul) et un effort accru de modélisation (trajectoires des facteurs de marchés utilisés pour le calcul de la VaR).

10.2.5 Calculs de VaR

Pour effectuer les calculs de Value at Risk, on ne se base que sur le produit fictif A de maturité 10 ans. En effet il n'est pas nécessaire de le faire pour les deux produits et les deux maturités car on n'attend pas de résultats foncièrement différents.

Notons que nous n'avons pas utilisé de modèle de mortalité stochastique. Dans la pratique, on préfère prendre des hypothèses prudentes et, de plus, nous avons abordé l'impact des lois de rachat dynamique dans la section précédente. En théorie la VaR que nous calculons ici est donc légèrement inférieure à celle qui serait obtenue en modélisant la mortalité de manière stochastique.

En générant 5000 scénarios, on obtient les résultats suivants sur la distribution des Hedge Cost en scindant la garantie GMAB et la garantie GMDB :

GMAB		GMDB		GMAB-GMDB	
VaR		VaR		VaR	
50,00%	0,00	50,00%	0,58	50,00%	0,75
55,00%	0,00	55,00%	0,81	55,00%	1,16
60,00%	0,00	60,00%	1,12	60,00%	1,84
65,00%	0,00	65,00%	1,53	65,00%	3,48
70,00%	9,06	70,00%	2,08	70,00%	11,63
75,00%	60,87	75,00%	2,94	75,00%	62,44
80,00%	121,59	80,00%	4,02	80,00%	124,95
85,00%	186,44	85,00%	5,73	85,00%	191,47
90,00%	263,26	90,00%	8,19	90,00%	269,46
95,00%	388,54	95,00%	12,06	95,00%	400,49
96,00%	419,16	96,00%	13,30	96,00%	430,94
97,00%	451,35	97,00%	14,45	97,00%	465,05
98,00%	506,74	98,00%	17,05	98,00%	523,81
99,00%	617,50	99,00%	21,19	99,00%	639,87
99,10%	630,45	99,10%	21,72	99,10%	648,14
99,20%	651,77	99,20%	22,32	99,20%	668,60
99,30%	682,32	99,30%	23,17	99,30%	705,29
99,40%	693,06	99,40%	23,55	99,40%	716,17
99,50%	705,92	99,50%	24,65	99,50%	725,15
99,60%	774,42	99,60%	25,03	99,60%	793,26
99,70%	807,50	99,70%	25,34	99,70%	834,46
99,80%	844,26	99,80%	27,91	99,80%	869,23
99,95%	953,42	99,95%	32,85	99,95%	986,32
99,97%	966,35	99,97%	33,68	99,97%	1000,76

Rappelons également que le Hedge Cost moyen était de 51,49 points de base pour la part relative à la garantie en cas de vie et de 1,93 points de base pour la part relative à la garantie en cas de décès, pour un Hedge Cost total de 53,46 points de base.

Pour la garantie GMAB, le Hedge Cost de 51,49 points de base correspond à une VaR de niveau 74,04 %. Cela signifie que dans environ 74 % des 5000 scénarios simulés, le Hedge Cost est inférieur à celui retenu dans le pricing.

Pour la garantie GMDB, le Hedge Cost de 1,93 points de base correspond à une VaR de niveau 68,84 %, donc dans près de 69 % des cas on obtient un Hedge Cost inférieur à celui retenu dans le pricing.

Au global, le Hedge Cost du produit étant de 53,46 points de base : Ce Hedge Cost est suffisant dans 74,12 % des cas.

On peut alors se demander si l'assureur peut se contenter de provisionner ce pourcentage. A priori cela dépend de ses objectifs en terme de prudence et de rentabilité. Le niveau de VaR de 65 % est couramment retenu dans les optiques de reserving, le niveau actuel semble donc particulièrement prudent.

De ce fait, on peut soulever la question de l'intérêt de l'univers risque neutre pour évaluer les réserves. En effet un excès de prudence aura nécessairement pour impact de réduire la rentabilité du produit.

10.2.6 Conclusions

Dans cet ultime chapitre, on se proposait d'aborder la problématique de provisionnement dans le cadre des Variable Annuities. En effet, selon les performances des marchés financiers, les assureurs s'exposent à des pertes potentiellement élevées. Dans cette optique, la mise en place d'une provision se fait selon les objectifs de l'assureur.

Pour mettre en place cette provision, plusieurs possibilités s'offrent à l'assureur. Nous avons présenté ci-dessus l'utilisation de la VaR calculée sur le Hedge Cost et soulevé les principales questions sur lesquelles l'actuaire en charge du provisionnement est amené à travailler. Le choix d'une mesure de risque et d'une mesure de probabilité est notamment important.

Chapitre 11

Conclusions sur la modélisation

Dans cette seconde partie du mémoire, nous avons pu aborder toutes les étapes de modélisation d'un produit Variable Annuity de type GMAB-GMDB.

Dans un premier temps, en abordant les différentes problématiques relatives au pricing, nous avons pu mettre en avant deux méthodes de calcul du Hedge Cost. La première, par les formules fermées, nous a servi par la suite de point de comparaison. Tandis que la seconde, qui requiert la génération de scénarios stochastiques de l'épargne investie et l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo, possède l'avantage de fonctionner pour toutes les garanties. C'est cette méthode qui nous intéressait le plus car elle permettait aussi d'utiliser les modèles financiers étudiés dans la première partie du mémoire.

Nous avons abordé la problématique de modélisation de la mortalité et des rachats en proposant deux approches (déterministe et dynamique), ainsi que les hypothèses financières (corrélations, rendements).

En imaginant des produits GMAB-GMDB fictifs, nous avons pu tester les modèles de Dupire et de Hull et White en terme de tarification. Pour cela nous avons comparé les résultats obtenus avec la méthode des formules fermées pour constater que le couple de nouveaux modèles permettait d'obtenir des prix satisfaisants : les ordres de grandeurs attendus sont respectés et la tendance prudente observée sur le modèle de Dupire se retrouve sur les Hedge Costs. De plus le modèle de Hull et White offre la possibilité de tarifier quelle que soit la forme de la courbe des taux sans perdre d'information sur l'état du marché.

Ensuite, nous avons réalisé une étude de sensibilité sur le coût de la garantie en faisant varier tous les paramètres, actuariels et financiers, pour pouvoir apprécier les impacts que des modifications de ces hypothèses peuvent avoir sur le Hedge Cost. A ce titre nous avons pu constater que la plupart de ces paramètres ont un impact non négligable sur le coût de la garantie. Surtout nous avons pu proposer une explication financière à chaque test de sensibilité. Cette étude permet surtout de voir à quel point un changement dans l'environnement financier (baisse ou hausse des taux par exemple) peut remettre en cause la stratégie de provisionnement mise en place par l'assureur.

Enfin, nous avons terminé cette seconde partie du mémoire en proposant une étude de VaR dans une optique de provisionnement. Cette dernière sous partie a été abordée plutôt dans le but de soulever les questions essentielles du provisionnement.

Conclusion générale

Les modèles financiers utilisés par le service jusqu'ici n'étaient pas toujours cohérents avec ce que l'on observe sur le marché.

Le modèle de Black et Scholes fait défaut par son hypothèse de volatilité constante. Les marchés d'options présentent depuis 1987 un phénomène de Smile de volatilité que ce modèle ne prend pas en compte, induisant des biais dans l'évaluation des options.

Le modèle de Vasicek n'est quant à lui pas en accord avec le marché pour deux raisons. Premièrement toutes les courbes de taux futurs simulées possèdent la même limite, et deuxièmement il ne prend pas en compte la structure actuelle de la courbe des taux, alors que celle-ci reflète les anticipations faites sur le marché et contient donc une information importante.

En étudiant les deux nouveaux modèles que sont le modèle de Dupire et le modèle de Hull et White, nous avons pu résoudre ces problèmes d'adéquation avec le marché.

Le modèle de Dupire permet de prendre en compte le phénomène du Smile de volatilité que l'on observe aujourd'hui sur tous les marchés d'options. Nous avons vu qu'il permettait aussi de retrouver des prix d'options tout en améliorant la prise en compte des événements rares et extrêmes.

Le modèle de Hull et White quant à lui, nous a permis une meilleure cohérence car il s'ajuste automatiquement sur la structure des taux. Auquel cas les informations sur le marché contenues dans la courbe des taux ne sont plus oubliées mais servent au contraire à inférer le processus du taux court.

Pour chacun des modèles nous avons mis en avant les méthodes de calibration et de génération des scénarios qui se sont avérées cohérentes.

Une fois que l'on dispose de modèles financiers fiables et robustes, on est en mesure de simuler l'évolution de l'épargne du client dans le cadre des Variable Annuities. Nous avons d'ailleurs explicité une méthode de tarification des garanties GMAB et GMDB, en reprenant précisément tous les paramètres et toutes les étapes du pricing.

Enfin nous avons cherché à comprendre de quelle manière chaque paramètre influence le coût final de la garantie. Pour cela des tests de sensibilité ont été pratiqués sur le Hedge Cost et ont révélé la prépondérance de certaines hypothèses par rapport à d'autres, comme par exemple l'âge, les rachats ou encore les hypothèses financières. Cette partie permet d'être plus conscient des impacts que peuvent avoir de légères modifications des conditions financières par exemple, et donc d'apprécier à quel point ce genre de garanties peut entraîner des pertes pour l'assureur, particulièrement ces derniers mois d'agitation des marchés.

Ces pertes potentielles soulèvent les questions du provisionnement ainsi que de la gestion du risque de marché inhérents aux Variable Annuities. Le chapitre sur l'étude de Value at Risk a été abordé dans ce but, pour proposer une méthode de provisionnement. Nous avons pu voir que le Hedge Cost moyen calculé pour la tarification permettait de couvrir près de 75 % des cas. Surtout, plusieurs problématiques sont à aborder dans l'optique du provisionnement des Variable Annuities.

Puisqu'il s'agit d'évaluer au mieux ces risques pour mettre en place une réserve, il est primordial de pouvoir les réduire pour que le provisionnement ne se fasse pas en dépit de la rentabilité du produit. De plus, avec les récents déboires des marchés financiers, il a souvent été demandé aux actuaires de mettre en place des stratégies de réduction du risque.

A ce titre, on peut évoquer la stratégie de structuration de l'actif via les fonds CPPI, une méthode classique de réduction du risque de marché et qui pourrait être un sujet d'ouverture particulièrement intéressant dans le cadre des Variable Annuities. Une description rapide de la stratégie, de ses avantages et de ses inconvénients est proposée en annexe D, se basant sur le mémoire ISUP de M. Romain Fitoussi (cf. Bibliographie [19]).

Bibliographie

Ouvrages

- [1] Black, F., and M. Scholes, 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81
- [2] Breeden, D.T., and R.H. Litzenberger, 1978, “Price of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices”, *Journal of Business*, Vol. 51
- [3] Brigo, D., and F. Mercurio, 2006, “Interest Rate Models - Theory and Practice”, *Springer Finance*, Edition 2
- [4] Derman, E., and I. Kani, 1994, “Ridding on a Smile”, *Risk Magazine*, Vol. 7
- [5] Derman, E., I. Kani, and N. Chriss, 1996, “Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile”, *Journal of derivatives*, Vol. 3
- [6] Dumas, B. , J. Fleming, and R.E. Whaley, 1998, “Implied Volatility Functions : Empirical Tests”, *Journal of Finance*, Vol. 53
- [7] Dupire, B., 1993, “Pricing and Hedging with Smiles”, *Proceedings of AFFI Conference*, La Baule
- [8] Dupire, B., 1994, “Pricing with a Smile”, *Risk Magazine*, Vol. 7
- [9] Haug, E.G., 2007, “The Complete Guide to Option Pricing Formulas”, *Mc Graw Hill*, Edition 2
- [10] Hull, J., and A. White, 1990, “Pricing Interest Rate Derivative Securities”, *Review of Financial Studies*, Vol. 3
- [11] Hull, J., and A. White, 1993, “One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28
- [12] Hull, J., and A. White, 1997, “Taking Rates to the Limits”, *RISK*, Décembre 1997
- [13] Hull, J., and A. White, 2000, “The General Hull-White Model and Super Calibration”, *Joseph L. Rotman School*, Toronto, Ontario, Canada
- [14] Hull, J., 2004, “Options, Futures et Autres Actifs Dérivés”, *Pearson Education*, Edition 5

- [15] McIntire, M.L., 2001, "Performance of Dupire's Implied Diffusion Approach Under Sparse and Incomplete Data ", *Journal of Computational Finance*, Vol. 4
- [16] Miltersen, K., K. Sandman, and D. Sondermann , 1997, "Closed Form Solutions for Term Structures Derivatives with Log-Normal Interest Rates", *Journal of Finance*, Vol. 52
- [17] Vasicek, O., 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 5

Mémoires

- [18] Bayazit, D., 2004, "Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model", *Thesis submitted to The Graduate School of Applied Mathematics*, The Middle East Technical University
- [19] Fitoussi, R., 2007, "Etude de la technique du CPPI et des options sur fonds - Application à une problématique assurantielle de Variable Annuity", *ISUP-ESSEC*, Mémoire d'actuariat
- [20] Werlé, S., 2007, "Modélisation de la courbe des taux d'intérêt - Générateur de scénarios", *Mines - ISFA*, Rapport de stage d'application
- [21] Yolcu, Y., 2005, "One-Factor Interest Rate Models : Analytic Solutions and Approximations", *Thesis submitted to The Graduate School of Applied Mathematics*, The Middle East Technical University

Cours

- [22] Chevalier, J., 2006-2008, "Mathématiques financières", *ISUP*, Cours
- [23] Chevalier, J., 2008-2009, "Finances stochastiques", *ISUP*, Cours
- [24] Planchet, F., 2007, "Modèles financiers en assurance", *ISFA*, Support de cours
- [25] Priaulet, P., and M. Mrad, 2005, "Modélisation de la courbe des taux", *ENSAE*, Support de cours
- [26] Tankov, P., 2009, "Calibration de Modèles et Couverture de Produits Dérivés", *Ecole Polytechnique*, Support de cours

Notes

- [27] Nandi, S., 2005, "Local Volatility Model", *Milliman*, Note interne
- [28] Nandi, S., T. Burden, and K. Mungan, 2005, "Equity Return Process within MG-Hedge", *Milliman*, Note interne
- [29] Zeghmar, B., 2009, "Construction d'une loi de rachat dynamique pour les produits VA Coréens", *BNP Paribas Assurance*, Note interne

Annexes

Annexe A

Rappels, théorèmes et méthodes

Avant d'étudier les modèles, il semble important de faire quelques rappels de finance stochastique pour pouvoir résoudre les Equations Différentielles Stochastiques (EDS) rencontrées. D'autre part, certaines formules fondamentales que nous démontrerons par la suite reposent sur des théorèmes parfois moins bien connus qu'il est judicieux d'énoncer dans cette annexe. Pour finir, des méthodes statistiques classiques sont utilisées dans la calibration ou l'implémentation des modèles, et méritent donc d'être définies ou expliquées.

A.1 Généralités sur les processus stochastiques

Processus, Filtration et Martingales

Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires.

Une filtration est une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est à dire vérifiant $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$.

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .

Soit $s \leq t$. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ \mathcal{F}_t -adapté tel que $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ est :

- Une sur-martingale si $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$,
- Une sous-martingale si $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$,
- Une martingale si $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$.

Mouvement Brownien

On dit que $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un Mouvement Brownien (MB) si c'est un processus à trajectoire continue tel que :

1. $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, $t \geq 0$, où σ est une constante strictement positive,
2. (W_t) est à accroissements indépendants.

Par conséquent, un Mouvement Brownien vérifie $W_0 = 0$, est à accroissements stationnaires et à la covariance :

$$C(s, t) = Cov(W_s, W_t) = \sigma^2 \min(s, t) \quad \text{avec} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^+$$

Un Mouvement Brownien est dit « Standard » (MBS) si il vérifie : $\sigma^2 = 1$

Dans la suite, W_t sera toujours un Mouvement Brownien Standard sur une filtration naturelle.

Processus de diffusion

Un processus de diffusion X_t est un processus qui obéit à une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$dX_t = m(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$$

Formules d'Itô

Fonction aléatoire d'Itô

(X_t) est une fonction aléatoire d'Ito si : $X_t = X_0 + \int_0^t \psi(s) ds + \int_0^t \varphi(s) dW_s$

C'est à dire : $dX_t = \psi(t) dt + \varphi(t) dW_t$

où ψ et φ sont des fonctions aléatoires appartenant à $M^2 = \left\{ f / \mathbb{E} \left(\int_0^t f^2(s) ds \right) < +\infty, \forall t \right\}$

Isométrie d'Itô

Pour deux fonctions f et g de M^2 , on a :

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b f(t) dW_t \right) = 0$$

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_a^b f(t) dW_t \right) \left(\int_a^b g(s) dW_s \right) \right) = \int_a^b \mathbb{E}(f(t) g(t)) dt$$

Lemme d'Itô

Supposons que X_t est la fonction aléatoire d'Itô précédente, alors pour toute fonction Φ deux fois continuellement différentiable et bornée (les dérivées partielles sont également bornées), on a :

$$\begin{aligned} \Phi(X_t, t) &= \Phi(X_0, 0) + \int_0^t \left(\psi(s) \Phi'_X(X_s, s) + \Phi'_t(X_s, s) \right) ds + \int_0^t \Phi'_X(X_s, s) \varphi(s) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''_{X^2}(X_s, s) \varphi^2(s) ds \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$d\Phi(X_t, t) = \left(\psi(t) \Phi'_X(X_t, t) + \Phi'_t(X_t, t) + \frac{1}{2} \Phi''_{X^2}(X_t, t) \varphi^2(t) \right) dt + \Phi'_X(X_t, t) \varphi(t) dW_t$$

Théorème de Girsanov

Soit $(\theta(t))_{t \geq 0}$ un processus \mathcal{F}_t -adapté tel que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(t) dt \right) \right) < +\infty$ (condition suffisante de Novikov), alors il existe une probabilité \mathbb{Q} tel que :

- \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P}
- $\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \theta(t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(t) dt \right)$
- $(\overline{W}_t)_{t \geq 0}$ tel que $\overline{W}_t = W_t + \int_0^t \theta(s) ds$ est un MBS sous \mathbb{Q}

Probabilité risque neutre

La probabilité risque neutre est une mesure de probabilité sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. Son existence découle de l'Absence d'Opportunités d'Arbitrage (AOA) et son unicité découle de la complétude du marché. Dans toute la suite du mémoire, on se placera sous la probabilité risque neutre, les actifs rapportent donc en moyenne le taux sans risque.

A.2 Théorèmes importants

Equation de Fokker-Planck

L'équation de Fokker-Planck (aussi appelée équation forward de Kolmogorov) est une équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la densité de probabilité de transition d'un processus de Markov.

Un processus de Markov est tel que la probabilité d'appartition d'un état du système à un instant donné ne dépend que de son histoire la plus récente.

Supposons que l'on parte de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t$$

Alors la densité de probabilité $p(t, X_t)$ vérifie l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial f(t, X_t)p(t, X_t)}{\partial X_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^2(t, X_t)p(t, X_t)}{\partial X_t^2}$$

Théorème de Leibniz

Le théorème de Leibniz est un théorème fondamental d'analyse numérique, plus souvent appelé « Théorème de dérivation sous intégrale ».

Soient \mathcal{A} et \mathcal{I} deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction de $\mathcal{A} \times \mathcal{I}$ dans \mathbb{R} .

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in \mathcal{A}, t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathcal{I} ,
- $\forall x \in \mathcal{A}, t \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ existe et est continue par morceaux sur \mathcal{I} ,
- $\forall t \in \mathcal{I}, x \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ est continue,
- si il existe $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in \mathcal{A} \times \mathcal{I}, \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \phi(t)$.

Alors la fonction F telle que $F(x) = \int_{\mathcal{I}} f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et $F'(x) = \int_{\mathcal{I}} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$

Théorème de Breeden et Litzenberger

A la fin des années 1970, en marge d'une littérature spécifiquement dédiée au problème de l'évaluation des prix d'options, Breeden et Litzenberger démontrent que, dans un monde neutre au risque, on peut lire dans le prix des options la probabilité associée par le marché à différents états du futur.

Autrement dit, l'existence d'options à différents prix d'exercice permettrait de lire complètement la distribution du prix futur telle qu'elle est perçue par le marché.

Ils montrent qu'on peut extraire la densité de probabilité risque neutre à partir des prix des options en dérivant ceux-ci deux fois par rapport au strike.



A.3 Méthodes utilisées

Les moindres carrés

Lors des différentes calibrations que l'on sera amené à faire pour l'étude des modèles financiers, on utilisera la méthode classique des Moindres Carrés Ordinaires (MCO). Il s'agit de la méthode d'ajustement statistique par régression la plus intuitive.

On considère un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ que l'on désire ajuster au mieux par une courbe mathématique de type $x \rightarrow y = f(x)$ dont on devra choisir le type de façon pertinente eu égard au phénomène étudié.

On recherche les paramètres de f en minimisant la somme des carrés des distances entre y_i et $f(x_i)$. On cherche donc à minimiser :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

Les générateurs de nombres aléatoires

La génération de réalisations de variables aléatoires suivant une loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ ou une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est une étape indispensable des simulations pour les modèles financiers. Il est donc primordial d'utiliser un générateur qui permet de répliquer au mieux ces lois.

Dans notre cas, il s'agira surtout de générer des nombres aléatoires issus d'une loi normale centrée et réduite. Pour cela on utilisera le générateur aléatoire d'Excel-VBA ainsi que la méthode de Box-Muller.

Le générateur aléatoire d'Excel-VBA est en fait un générateur pseudo aléatoire de type congruentiel donc la suite de nombre est prévisible. La suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ est générée selon la relation suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{N} \\ X_{n+1} = (kX_n + p) \bmod m \quad \text{avec } (k, p, m) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La valeur de la variable aléatoire uniforme est alors générée par : $U_n = \frac{X_n}{m}$

La méthode de Box-Muller permet d'obtenir des variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ à partir de variables aléatoires de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$ en se basant sur le postulat suivant :

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Alors les variables aléatoires Z_0 et Z_1 suivantes sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{cases} Z_0 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\ Z_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

L'algorithme de Newton-Raphson

En analyse numérique, la méthode de Newton-Raphson est un algorithme efficace pour trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. L'algorithme consiste à linéariser une fonction f en un point et de prendre le point d'annulation de cette linéarisation comme approximation du zéro recherché. On réitère alors cette procédure en prenant cette dernière valeur approximée comme valeur de départ.

Dans les cas favorables, les approximations successives obtenues convergent avec une vitesse quadratique. de manière informelle, le nombre de décimales correctes double à chaque étape.



Pour pratiquer cette méthode, il faut partir d'une valeur initiale x_0 de préférence proche du zéro de la fonction. Elle requiert également que la fonction f soit dérivable. On fait alors l'approximation au premier ordre de la fonction, on considère donc qu'elle est égale à sa tangente en ce point : $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Auquel cas la recherche du zéro de la fonction donne $x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On obtient donc un point x_1 qui a, en général, de bonnes chances d'être plus proche de la vraie racine de f que x_0 et on réitère la procédure.

Formellement, à partir du point x_0 , il suffit de construire la suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tout en spécifiant un critère d'arrêt (minimum de précision).

Dans le cadre de cette étude, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour obtenir la volatilité implicite contenue dans le prix d'une options grâce à la formule de Black et Scholes. La description de ce cas particulier est donnée ci-dessous.

La méthode des différences finies

En analyse numérique, la méthode des différences finies est la méthode la plus simple d'accès pour déterminer la solution d'une équation aux dérivées partielles. En effet, elle ne repose que sur la discrétisation intuitive des opérateurs de dérivation.

Dans le cadre de l'étude, cette méthode sera utilisée lorsque l'on disposera d'un échantillon de prix d'options en fonction du strike et de la maturité, et que l'on cherchera à en déduire les dérivées partielles du prix par rapport à l'une ou l'autre de ces variables.

Supposons que l'on dispose d'une fonction f de deux variables : le temps t et le cours d'un actif S . On suppose par ailleurs que les deux variables sont divisibles en un certain nombre d'intervalles d'amplitudes respectives δt et δS . Elles forment alors une grille de discrétisation où le point (i, j) correspond à la date $i\delta t$ et au cours $j\delta S$. Notons $f_{i,j}$ la valeur de la fonction en ce point. Il existe principalement trois schémas de calculs :

- Le schéma implicite
- Le schéma explicite
- Le schéma de Crank-Nicolson

En règle générale, le schéma de Crank-Nicolson donne les meilleurs résultats car il calcule les dérivées partielles avec plus de précision. Néanmoins il est plus gourmand en temps de calcul informatique et il ne permet pas d'effectuer le calcul en autant de points que les autres schémas. Dans le cadre de cette étude, il est plus intéressant de choisir le schéma implicite car il faudra implémenter le modèle financier et que l'on ne souhaite pas réduire la taille de l'échantillon de points disponibles si celui-ci est déjà faible.

On donne ci-après les formules relatives à ce schéma, les formules des autres schémas ne sont pas retranscrites ici pour ne pas surcharger le document avec des formules que l'on n'utilisera pas :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta S} & \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta S} & \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t} & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{(\delta S)^2} & & \end{array} \right.$$



La méthode de Monte-Carlo

La méthode de simulation de Monte-Carlo est une technique numérique pour solutionner des problèmes mathématiques en simulant des variables aléatoires. Dans notre étude, elle est utilisée pour obtenir le prix d'une option (européenne) lorsque l'on ne dispose pas d'une formule fermée comme cela est le cas dans le modèle de Black et Scholes. La méthode de Monte-Carlo pour l'évaluation des options repose notamment sur le caractère neutre au risque de l'univers dans lequel on se place. En effet, la valeur d'une option est définie comme l'espérance sous probabilité risque neutre de son PayOff à échéance, actualisé au taux sans risque.

Auquel cas, pour obtenir le prix d'une options, on va simuler un grand nombre de trajectoires du sous-jacent. On va ensuite déduire, pour chaque simulation, la valeur du PayOff terminal de l'option. On actualise alors ce PayOff au taux sans risque (la méthode de Monte-Carlo pour l'évaluation des options repose notamment sur le caractère neutre au risque de l'univers dans lequel on se place) et l'on calcule la moyenne pour l'ensemble des simulations.

La méthode des splines

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, une spline est une fonction définie par morceaux par des polynômes. Dans les problèmes d'interpolation, la méthode des splines est très souvent préférée à l'interpolation polynomiale, car on obtient des résultats similaires en se servant de polynômes ayant des degrés inférieurs, tout en évitant le phénomène de Runge (l'augmentation du nombre de points d'interpolation ne constitue pas nécessairement une bonne stratégie d'approximation de la fonction).

Dans notre cas on utilise le plus souvent des splines cubiques. Il est possible de construire des interpolateurs polynomiaux qui passent par une série de points $((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$. Mais il est possible que ce type d'interpolateur oscille beaucoup. Pour en fabriquer un meilleur, il faut permettre la courbure entre les différents points. Pour cela, les dérivées premières et secondes doivent être continues sur l'intervalle $[x_0, x_n]$. L'interpolateur qui lie les points (x_k, y_k) et (x_{k+1}, y_{k+1}) est de forme polynomiale du troisième ordre :

$$S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x - x_k) + S_{k,2}(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x - x_k)^3 \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

et est soumis aux contraintes :

$$\begin{cases} S_k(x) = y_k \\ S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \\ S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \\ S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \end{cases}$$

A.4 Détails sur l'algorithme de Newton-Raphson

Dans le cadre de la détermination de la volatilité implicite dans le modèle de Black et Scholes, on utilise l'algorithme de Newton-Raphson de la manière suivante. On prendra l'exemple d'un Put Européen, mais le fonctionnement est le même pour un Call et seules les formules sont légèrement modifiées en conséquence.

Supposons que l'on connaisse les éléments suivants :

- S_0 la valeur du sous-jacent,

- r le taux sans risque,
- q le rendement des dividendes,
- T la maturité,
- K le strike,
- P_{obs} le prix observé du Put sur le marché.

On cherche à déterminer la volatilité σ qui donne le prix observé du Put grâce à la formule de Black et Scholes :

$$P(\sigma) = -S_0 e^{-qT} \phi(-d_1) + K e^{-rT} \phi(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation en σ : $P(\sigma) - P_{obs} = 0$. Pour cela on peut poser les variables suivantes :

$$\mu = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - q) T \quad \text{et} \quad \rho = \sigma \sqrt{T}$$

Auquel cas on obtient : $P(\sigma) = P(\rho) = S_0 e^{-qT} \left(-\phi\left(-\frac{\mu}{\rho} - \frac{\rho}{2}\right) + e^{-\mu} \phi\left(-\frac{\mu}{\rho} + \frac{\rho}{2}\right) \right)$ et on applique la méthode à la fonction $f(\rho) = P(\rho) - P_{obs}$.

L'utilisation des variables ρ et μ permet d'obtenir une forme relativement simplifiée de la dérivée, et l'algorithme est alors très aisé à implémenter :

$$f'(\sigma) = S_0 e^{-qT} \phi' \left(\frac{\mu}{\rho} + \frac{\rho}{2} \right)$$

Annexe B

Modèle de Dupire : Démonstrations

B.1 Formule fondamentale : La volatilité locale en fonction du prix de l'option

Comme évoqué dans le chapitre sur le modèle de Dupire, le processus suivi par le cours du sous-jacent est le suivant, sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q(t)) dt + \sigma(S_t, t) d\bar{W}_t$$

En utilisant des arguments standards (complétude du marché), on peut montrer que les options sont tarifées comme si l'actif sous-jacent suivait ce processus. De manière équivalente, cela signifie qu'un Call est tarifé selon l'équation suivante :

$$C(t) = B(t, T) E_t^{\mathbb{Q}}(S(T) - K \mid S(T) > K)$$

$B(t, T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon qui paye 1 en T .

Définissons Φ la densité de $S(T)$ conditionnellement à $S(t)$ sous la probabilité \mathbb{Q} . Alors l'équation précédente peut s'écrire comme :

$$C(t) = B(t, T) \int_K^\infty (S(T) - K) \Phi(S(T)) dS(T)$$

Le théorème de Leibniz permet alors de dériver deux fois par rapport à la variable K pour obtenir :

$$\Phi(S(T)) \mid_{S(T)=K} = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} B(t, T)^{-1}$$

Cette dernière équation est une version, pour K et t continus, du théorème de Breeden et Litzenberger. On utilise en fait l'expression pour la densité de $S(T)$ évaluée en K dans l'équation forward de Kolmogorov.

Rappel :

L'équation forward de Kolmogorov, détaillée dans la première annexe, déclare que la densité $\Phi(x(T) \mid x(t))$ d'une variable aléatoire $x(T)$ de valeur initiale $x(t)$ suivant la diffusion : $dx(t) = \mu(x(t), t) dt + a(x(t), t) d\bar{W}_t$ est définie par une équation aux dérivées partielles qui, après suppression du conditionnement à la valeur initiale $x(t)$, prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial T} + \frac{\partial \mu(x(T), T) \Phi(x(T))}{\partial x(T)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x(T), T)^2 \Phi(x(T))}{\partial x(T)^2} = 0$$

Cette dernière équation peut alors être réappliquée à notre cas. Ce qui signifie que l'on va l'adapter au problème en faisant la différenciation selon K :

$$\frac{\partial \Phi(K)}{\partial T} + \frac{\partial (r(T) - q(T)) K \Phi(K)}{\partial K} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(K, T)^2 K^2 \Phi(K)}{\partial K^2} = 0$$

Si l'on remplace alors $\Phi(K)$ par son expression obtenue précédemment grâce au théorème de Leibniz et à la double dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial B(t, T)^{-1} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}{\partial T} + \frac{\partial (r(T) - q(T)) K \Phi(K)}{\partial K} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(K, T)^2 K^2 \Phi(K)}{\partial K^2} = 0$$

On peut alors développer cette dernière expression en effectuant les dérivations nécessaires par rapport à T , puis en inversant l'ordre des dérivées partielles restantes. On obtient finalement, en intégrant par rapport à K :

$$B(t, T)^{-1} \frac{\partial \frac{\partial C}{\partial T}}{\partial K} + r(T) B(t, T)^{-1} \frac{\partial C}{\partial K} + (r(T) - q(T)) K \Phi(K) - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(K, T)^2 K^2 \Phi(K)}{\partial K} + \alpha(T) = 0$$

Avec $\alpha(T)$ la constante d'intégration. On utilise de nouveau l'expression obtenue de $\Phi(K)$, puis on multiplie par $B(t, T)$. On termine en intégrant de nouveau par rapport à K pour obtenir :

$$\frac{\partial C}{\partial T} + (r(T) - q(T)) K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T) C - \frac{1}{2} \sigma(K, T)^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \alpha(T) K + \beta(T) = 0$$

Avec $\beta(T)$ la constante d'intégration de cette seconde intégration.

Pour déterminer les constantes d'intégration, il suffit de faire tendre K vers l'infini. Dans ce cas toutes les dérivées partielles du prix du Call tendent vers 0. Auquel cas les constantes d'intégrations sont nulles et on peut finalement écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} + (r(T) - q(T)) K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T) C - \frac{1}{2} \sigma(K, T)^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = 0$$

Ce qui est équivalent au résultat fondamental suivant :

$$\sigma(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r(T) - q(T)) K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T) C}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

B.2 Formule : La volatilité locale en fonction de la volatilité implicite

Cette seconde formule, qui est utilisée dans la méthode des volatilités implicites, découle de la formule précédente par dérivation. En effet, il suffit d'utiliser cette formule conjointement aux dérivées partielles du prix du Call par rapport au strike et à la maturité. Les calculs ne seront pas donnés entièrement ici pour ne pas ajouter inutilement des pages au mémoire, mais on donne ci-dessous les formules de dérivées partielles à utiliser :

$$C(S_0, K, r, T, \sigma_I, q) = S_0 e^{-qT} \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d)$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma_I^2}{2}\right)T}{\sigma_I \sqrt{T}}$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = S_0 e^{-qT} \left[\frac{\partial d}{\partial T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} - q \Phi(d) \right] - K e^{-rT} \left[\left(\frac{\partial d}{\partial T} - \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} \sqrt{T} - \frac{\sigma_I}{2\sqrt{T}} \right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(d - \sigma_I \sqrt{T})^2}{2}} - r \Phi(d - \sigma_I \sqrt{T}) \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = S_0 e^{-qT} \frac{\partial d}{\partial K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} - e^{-rT} \left[\Phi(d - \sigma_I \sqrt{T}) + K \left(\frac{\partial d}{\partial K} - \sqrt{T} \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d - \sigma_I \sqrt{T})^2}{2}} \right]$$

$$\frac{\partial d}{\partial T} = -\frac{\partial \sigma_I}{\partial T} \sqrt{T} + \frac{\left(r - q - \frac{\sigma_I^2}{2}\right)}{\sigma_I \sqrt{T}} - d \sigma_I \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} T - \frac{d \sigma_I^2}{2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial K} = -\frac{1}{K} \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \sqrt{T} - \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \frac{d}{\sigma_I}$$

B.3 Dérivées partielles de la volatilité implicite

Rappelons dans un premier temps la forme de la volatilité implicite proposée dans l'étude :

$$\sigma_I(K, T) = \alpha + \beta_1 M + \beta_2 M^2 + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 M T$$

La fonction M est appelée « Moneyness » et s'écrit :

$$M = M(K, T) = -\frac{\ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right)}{\sqrt{T}}$$

Commençons donc par donner les formules des dérivées partielles de la Moneyness par rapport à K et T :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial K} = \frac{1}{K\sqrt{T}} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial K^2} = -\frac{1}{K^2\sqrt{T}} \\ \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right)}{2T\sqrt{T}} \end{cases}$$

Auquel cas on est en mesure de donner les mêmes dérivées partielles concernant la volatilité implicite, lesquelles sont utilisées dans la formule donnant la volatilité locale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} = \frac{\beta_1 + 2\beta_2 M + \beta_5 T}{K\sqrt{T}} \\ \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial K^2} = \frac{2\beta_2}{K^2 T} - \frac{1}{K} \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \\ \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} = (\beta_1 + 2\beta_2 M + \beta_5 T) \frac{\ln\left(\frac{S_0 e^{-rT}}{K}\right)}{2T\sqrt{T}} + \beta_3 + 2\beta_4 T + \beta_5 M \end{array} \right.$$

Annexe C

Modèle de Hull et White : Démonstrations

C.1 Fonctionnelle des taux zéro-coupon

On donne ici la démonstration complète et générale du modèle de Hull et White, également appelé modèle de Vasicek généralisé en raison de l'extension qu'il constitue au modèle de Vasicek originel.

Dans le modèle de Hull et White, on prend le taux court comme variable d'état. Grâce à l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage (AOA), on peut déduire tous les taux termes-terms.

En posant α , β et γ des fonctions déterministes de la variable t , le modèle généralisé est s'écrit de la manière suivante :

$$dr_t = (\alpha(t) - \beta(t) r_t) dt + \gamma(t) dW_t$$

Posons $g(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s) ds\right)$, on peut alors définir le processus $H_t = \frac{r_t}{g(t)}$. On obtient alors :

$$dH_t = \frac{\alpha(t)}{g(t)} dt + \frac{\gamma(t)}{g(t)} dW_t$$

Auquel cas, on obtient la trajectoire suivante pour le processus du taux court :

$$\begin{cases} r_t = g(t) \left(r_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{g(s)} dW_s \right) \\ r_u = g(u) \left(\frac{r_t}{g(t)} + \int_t^u \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds + \int_t^u \frac{\gamma(s)}{g(s)} dW_s \right) \quad \text{si } u > t \end{cases}$$

Comme cela est indiqué dans le chapitre sur les modèles de taux, on travaille en univers risque neutre, donc le prix du zéro-coupon en t qui paye 1 et T est donné par : $P(t, T) = E(e^{-I(t, T)} | r_t)$, avec $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$

En utilisant la transformée de Laplace, on peut réécrire le prix du zéro-coupon en fonction de l'espérance et de la variance de $I(t, T)$, de la forme suivante :

$$P(t, T) = \exp \left(-E(I(t, T) | r_t) + \frac{1}{2} V(I(t, T) | r_t) \right)$$

Les valeurs de la variance et de l'espérance se déduisent des isométries d'Itô détaillée précédemment, ainsi que du théorème de Fubini :

$$\begin{cases} E(I(t, T) | r_t) = r_t \int_t^T \frac{g(u)}{g(t)} du + \int_t^T \left(\int_t^u g(u) \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds \right) du \\ V(I(t, T) | r_t) = \int_t^T \left(\int_s^T g(u) \frac{\gamma(s)}{g(s)} du \right)^2 ds \end{cases}$$

On peut enfin utiliser la dernière forme de $P(t, T)$ et les deux expressions précédentes pour montrer que l'on peut écrire $P(t, T) = \exp(A(t, T) - r_t B(t, T))$ avec les fonction A et B suivantes :

$$\begin{cases} A(t, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \left(\int_s^T g(u) \frac{\gamma(s)}{g(s)} du \right)^2 ds - \int_t^T \left(\int_t^u g(u) \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds \right) du \\ B(t, T) = \int_t^T \frac{g(u)}{g(t)} du \end{cases}$$

Dans notre étude, on peut simplifier les expressions littérales de ce cas général. En effet dans le modèle qui a été étudié dans ce mémoire, le processus suivi par le taux court est le suivant :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t) dt + \sigma d\overline{W}_t$$

On peut donc adapter au cas général en posant simplement :

$$\begin{cases} \alpha(t) = \theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \\ \beta(t) = a \\ \gamma(t) = \sigma \end{cases}$$

Auquel cas, la fonction g est telle que $g(t) = e^{-at}$, et les fonctions A et B se retrouvent, après calculs des intégrales, modifiées de la façon suivante :

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\ A(t, T) = \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) - B(t, T) \frac{\partial \ln(P(0, t))}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1) \end{cases}$$

C.2 Dérivées partielles du modèle de Nelson-Siegel

Rappelons la forme de la fonctionnelle des taux zéro-coupon initiale dans le modèle de Nelson, Siegel et Svensson (t est ici la maturité) :

$$R(0, t) = \beta_0 + \underbrace{\beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} \right]}_A + \underbrace{\beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right]}_B + \underbrace{\beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)}{\frac{t}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right]}_C$$

Auquel cas, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial R(0, t)}{\partial t} = (\beta_1 + \beta_2) A' + \beta_2 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1} + \beta_3 C' \\ \frac{\partial^2 R(0, t)}{\partial t^2} = (\beta_1 + \beta_2) A'' - \beta_2 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1^2} + \beta_3 C'' \end{cases}$$

On donne enfin les dérivées partielles des trois fonctions A , B et C :

$$\begin{cases} A' = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}(t + \tau_1) - \tau_1}{t^2} \\ B' = A' + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1} \\ C' = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}(t + \tau_2) - \tau_2}{t^2} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2} \\ A'' = -\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1 t} - 2\frac{A'}{t} \\ C'' = -\frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 t} - 2\frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}(t + \tau_2) - \tau_2}{t^3} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2^2} \end{cases}$$

C.3 Formule discrétisée pour θ

Dans cette partie, on s'intéresse à la discrétisation du modèle pour le calcul des θ_i de manière itérative.

L'équation différentielle stochastique satisfaite par le modèle, une fois intégrée, fournit l'explicitation suivante pour r_u :

$$r_u = r_0 e^{-au} + e^{-au} \int_0^u e^{as} \theta(s) ds + \sigma e^{-au} \int_0^u e^{as} dW_s$$

On peut de nouveau intégrer cette relation pour obtenir :

$$\int_0^t r_u du = r_0 \frac{1 - e^{-at}}{a} + \int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} \theta(s) ds \right) du + \sigma \int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} dW_s \right) du$$

On remarque donc que la fonction $I(0, t)$ déjà évoquée précédemment suit une loi normale. Posons $\mu(t)$ son espérance et $\nu(t)$ sa variance. Les fonctions μ et ν peuvent se déduire de la démonstration précédente, cependant la forme obtenue ne serait pas celle voulue. On donne ci-dessous les calculs relatifs à ces deux fonctions :

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= E \left[\int_0^t r_u du \right] \\
 &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} \theta(s) ds \right) du + \underbrace{\sigma \int_0^t e^{-au} E \left[\int_0^u e^{as} dW_s \right] du}_{= 0 \text{ (Ito)}} \\
 &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} \theta(s) ds \right) du \\
 &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_{u=0}^t \int_{s=0}^u e^{-au} e^{as} \theta(s) ds du
 \end{aligned}$$

Or par le théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre des intégrales, en prenant soin de ne pas perdre le domaine d'intégration. En effet on a $0 \leq u \leq t$ et $0 \leq s \leq u$, donc cela équivaut à $s \leq u \leq t$ et $0 \leq s \leq t$. Auquel cas, on peut continuer les calculs et se débarrasser de la double intégrale au profit d'une intégrale simple :

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_{s=0}^t \left(\int_{u=s}^t e^{-au} e^{as} \theta(s) du \right) ds \\
 &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_{s=0}^t e^{as} \theta(s) \left(\int_{u=s}^t e^{-au} du \right) ds \\
 &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \int_0^t e^{as} \theta(s) \frac{e^{-as} - e^{-at}}{a} ds \\
 \mu(t) &= r_0 \frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{1}{a} \int_0^t \theta(s) \left(1 - e^{-a(t-s)} \right) ds
 \end{aligned}$$

On peut ensuite passer au calcul de la variance ν :

$$\nu(t) = E \left[\left(\int_0^t r_u du \right)^2 \right] - \mu(t)^2$$

Pour plus de simplicité, on adopte les notations suivantes :

$$\int_0^t r_u du = \underbrace{r_0 \frac{1-e^{-at}}{a}}_A + \underbrace{\int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} \theta(s) ds \right) du}_B + \underbrace{\sigma \int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} dW_s \right) du}_C$$

Dans ce cas, il est plus aisé de réécrire ν :

$$\begin{aligned}
 \nu(t) &= E \left[\left(\int_0^t r_u du \right)^2 \right] - \mu(t)^2 \\
 &= A^2 + B^2 + E[C^2] + 2AB + 2A \times E[C] + 2B \times E[C] - (A+B)^2 \\
 &= E[C^2] + 2A \times \underbrace{E[C]}_0 + 2B \times \underbrace{E[C]}_0 \quad (\text{Ito}) \\
 &= \sigma^2 E \left[\left(\int_0^t e^{-au} \left(\int_0^u e^{as} dW_s \right) du \right)^2 \right] \\
 &= \sigma^2 E \left[\left(\int_{u=0}^t \int_{s=0}^u e^{-au} e^{as} dW_s du \right) \left(\int_{u=0}^t \int_{s=0}^u e^{-au} e^{as} dW_s du \right) \right] \\
 &\text{Et donc, de la même manière que précédemment} \\
 &= \sigma^2 E \left[\left(\int_{s=0}^t \left(\int_{u=s}^t e^{-au} e^{as} du \right) dW_s \right) \left(\int_{s=0}^t \left(\int_{u=s}^t e^{-au} e^{as} du \right) dW_s \right) \right] \\
 &= \sigma^2 \int_{s=0}^t \left(\int_{u=s}^t e^{-au} e^{as} du \right)^2 ds \quad \text{Par la seconde isométrie d'Ito} \\
 \nu(t) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^t \left(1 - 2e^{-a(t-s)} + e^{-2a(t-s)} \right) ds
 \end{aligned}$$

On peut ensuite passer au calcul du prix du zéro-coupon. Par définition, et comme nous l'avons expliqué dans le mémoire, on a $P(t, T) = E \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \right]$. Auquel cas, on peut déterminer $P_{n+1} = P(0, t_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= E \left[\exp \left(- \int_0^{t_{n+1}} r_u du \right) \right] \\
 &= \exp \left[-\mu(t_{n+1}) + \frac{\nu(t_{n+1})}{2} \right] \\
 &= \exp \left[\underbrace{-r_0 \frac{1 - e^{-at_{n+1}}}{a}}_D - \underbrace{\frac{1}{a} \int_0^{t_{n+1}} \theta(s) \left(1 - e^{-a(t_{n+1}-s)} \right) ds}_E \right] \\
 &\quad \times \exp \left[\underbrace{\frac{\sigma^2}{2a^2} \int_0^{t_{n+1}} \left(1 - 2e^{-a(t_{n+1}-s)} + e^{-2a(t_{n+1}-s)} \right) ds}_F \right]
 \end{aligned}$$

On peut alors calculer et discrétiser les intégrales pour les trois fonctions D , E et F afin d'obtenir la formule finale. Pour cela on supposera la discrétisation de pas uniforme Δ_t , donc $t_i = i\Delta_t$. De plus, le pas de temps est supposé suffisamment petit pour permettre l'approximation suivante : $e^{-a\Delta_t} \approx 1 - a\Delta_t$. Enfin, on définit les variables suivantes pour simplifier les notations :

$$b = 1 - a\Delta_t \approx e^{-a\Delta_t} \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1 - b^i}{1 - b}$$

$$\begin{aligned} D &= r_0 \frac{1 - e^{-at_{n+1}}}{a} \\ &= \frac{r_0}{a} (1 - e^{-a(n+1)\Delta_t}) \\ &= \frac{r_0 \Delta_t}{1 - b} (1 - (e^{-a\Delta_t})^{n+1}) \\ &= \frac{r_0 \Delta_t}{1 - b} (1 - b^{n+1}) \end{aligned}$$

$$D = r_0 \Delta_t C_{n+1}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{a} \int_0^{t_{n+1}} \theta(s) (1 - e^{-a(t_{n+1}-s)}) ds \\ &= \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n+1} \Delta_t \theta_{j-1} (1 - e^{-a((n+1)\Delta_t - j\Delta_t)}) \\ &= \frac{(\Delta_t)^2}{1 - b} \sum_{j=1}^{n+1} \theta_{j-1} (1 - b^{n+1} \times b^{-j}) \\ &= (\Delta_t)^2 \sum_{j=1}^{n+1} \theta_{j-1} C_{n-j+1} \\ &= (\Delta_t)^2 \sum_{j=0}^n \theta_j C_{n-j} \\ E &= (\Delta_t)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j C_{n-j} \quad \text{Car } C_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_0^{t_{n+1}} \left(1 - 2e^{-a(t_{n+1}-s)} + e^{-2a(t_{n+1}-s)} \right) ds \\
 &= \frac{\sigma^2}{2a^2} \sum_{j=1}^{n+1} \Delta_t \left(1 - 2e^{-a(n+1)\Delta_t} \times e^{j\Delta_t} + e^{-2a(n+1)\Delta_t} \times e^{2aj\Delta_t} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3}{2(1-b)^2} \sum_{j=1}^{n+1} \left(1 - b^{n-j+1} + (b^{n-j+1})^2 \right) \\
 &= \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1 - b^{n-j+1})^2}{(1-b)^2} \\
 &= \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3}{2} \sum_{j=1}^{n+1} C_{n-j+1}^2 \\
 &= \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3}{2} \sum_{j=0}^n C_{n-j}^2 \\
 F &= \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3}{2} \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-j}^2 \quad \text{Car } C_0 = 0
 \end{aligned}$$

Finalement en remplaçant ces dernières expressions dans la formule de P_{n+1} , on obtient la formule annoncée :

$$P_{n+1} = \exp \left(-\Delta_t r_0 C_{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \left((\Delta_t)^2 C_{n-j} \theta_j - \frac{\sigma^2(\Delta_t)^3 C_{n-j}^2}{2} \right) \right)$$

D'autre part, par définition on avait : $P_1 = P(0, t_1) = \exp(-t_1 R(0, t_1))$. Or $t_1 = \Delta_t$ dans la discrétisation, et r_0 comme nous l'avons défini est bien le taux forward en 0 de maturité Δ_t , qui selon notre schéma (pas de temps mensuel) est bien égal au taux zéro-coupon $R(0, t_1)$. Donc finalement $r_0 = -\frac{\ln(P_1)}{\Delta_t}$.

Annexe D

Ouverture sur le CPPI

Habituellement les assureurs conservaient la totalité du risque associé aux Variable Annuities, ou bien en cédaient une partie à des réassureurs. Néanmoins depuis les années 2000, ces derniers se sont progressivement éloignés de ce type de produits. Dans le même temps, les autorités régulatrices (en Europe comme aux Etats-Unis) pressent les assureurs d'accroître leurs réserves pour couvrir les pertes éventuelles. Les banques ont identifié une opportunité d'aider les assureurs en réduisant les risques de marché de ces contrats, leur permettant par la même occasion de réduire leurs réserves et de concentrer leur expertise sur les seuls risques actuariels.

D.1 Définition

CPPI est l'abréviation de Constant Proportion Portfolio Insurance, il s'agit d'une stratégie de gestion dynamique d'un fond, également appelée « méthode du coussin » visant à fournir une garantie minimale de capital à maturité, et qui permet aux investisseurs de participer aux performances des marchés d'actions.

La structure de base d'un CPPI fait varier l'allocation entre un actif « sans risques » (obligations et monétaire) et un actif « performant » (actions ou autres actifs risqués) selon les performances du marché. Le gérant du fond ajuste de façon régulière et dynamique l'exposition entre ces deux types d'actifs de manière à assurer la protection du capital investi. Lorsque la valeur du portefeuille atteint un plancher, la position en actif risqué est totalement liquidée et le portefeuille est uniquement investi en actif non risqué (monétisation).

Le CPPI présente un certain nombre d'intérêts pour le fournisseur du produit. La méthode est en effet connue pour sa flexibilité pour la gestion du risque. De plus le CPPI permet d'utiliser une gamme étendue d'actifs financiers.

D.2 Fonctionnement

De manière synthétique, si l'actif risqué surpasse l'actif sans risque, le gérant du fond augmente l'allocation en actifs risqués. Inversement, si la valeur de l'actif risqué décroît, le gérant réduit l'allocation en actif risqué. Le CPPI est totalement réglementé et n'est donc en aucun cas discrétionnaire. Pour expliquer avec précision le fonctionnement du CPPI, on définit les termes suivants :

- **Le Bond Floor** : Valeur actuelle de la garantie à fournir à maturité,
- **La NAV** : Net Asset Value, donc la valeur du portefeuille,

- **Le Coussin** : $\frac{NAV - \text{Bond Floor}}{NAV}$, il s'agit de la perte en pourcentage que le portefeuille est en mesure d'absorber,
- **Le Multiplicateur m** : Il correspond au levier du CPPI, il détermine la part de l'allocation en actif risqué et est fonction de la volatilité de ce dernier (plus la volatilité est importante et plus le multiplicateur est faible). Dans le CPPI, le multiplicateur est constant, sa valeur est inférieure à 5 et 2,5 est souvent considéré comme la valeur optimale,
- **Le Plancher et le Plafond** : Il s'agit de l'allocation minimale et de l'allocation maximale en actifs risqués,
- **La fréquence rebalancement** : Elle peut être régulière ou dépendante de la survenance de certains événements.

Auquel cas, l'allocation en actifs risqués et l'allocation en actifs sans risques sont déterminées par les formules suivantes :

$$\text{Allocation en actifs risqués} = \text{Max}(\text{Plancher}, \text{Min}(m \times \text{Coussin}, \text{Plafond}))$$

$$\text{Allocation en actifs sans risques} = NAV - \text{Allocation en actifs risqués}$$

D.3 Le risque de Gap

Une entité fournissant un CPPI souscrit par la même occasion un risque appelé le risque de Gap (en français « trou », « fossé ») et garantit de fournir le minimum prédéterminé quelles que soient les performances des marchés financiers. C'est donc le risque que la valeur de l'actif risqué chute rapidement d'un niveau à un autre sans qu'un rebalancement ne puisse être effectué et que la valeur du portefeuille passe en dessous du Bond Floor. A cet instant, les actifs ne sont plus en mesure de fournir la protection voulue. Le risque concerne uniquement le gérant du fond et non l'assuré. Typiquement, ce genre de mouvement se produit dans les cas suivants :

- Lorsque des déclarations ou des résultats défavorables paraissent, entraînant une chute brutale du cours d'une action par rapport à son dernier cours de clôture,
- Lorsqu'il y a un manque de liquidité sur le sous-jacent,
- Lorsque la cotation est suspendue.

Il est également envisageable que, suite à une baisse des taux, le Bond Floor remonte au dessus de la valeur du CPPI. Dans la pratique, l'écart de taux est trop important pour que le fournisseur du CPPI s'en préoccupe, même si la surveillance doit être accrue lorsque le coussin est faible. Par ailleurs, il existe un lien direct entre la valeur du multiplicateur et le risque de Gap car, sous certaines hypothèses, on peut exprimer la perte à partir de laquelle il y aura un événement de Gap en fonction du multiplicateur.

La plupart du temps les entités non-bancaires achètent une protection contre le risque de Gap à un tiers. Il existe différentes manières de réduire le risque de Gap : il est possible de vendre le risque à une compagnie de réassurance, de sélectionner uniquement des actifs liquides, d'utiliser un multiplicateur plus faible, ou encore supprimer l'effet de levier avant que la valeur du coussin ne devienne nulle.

D.4 Les avantages et inconvénients du CPPI

Les avantages

Pour l'assureur, le fait d'utiliser la stratégie du CPPI présente différents avantages intéressants. Il y a pour commencer des avantages en terme de transparence : le client peut être aisément conscient de la performance du fond car la méthode d'allocation est fixée dans le contrat, et il en va de même pour les frais qui sont prédéfinis lors de la signature du contrat entre l'assureur et la banque qui fournit le CPPI. Enfin, en cas de revente avant maturité, la valeur de revente sera définie au contrat (valeur du portefeuille éventuellement amputée de frais de sortie) tandis que dans une stratégie en OBPI, la valeur de l'option avant maturité dépend de la volatilité du sous-jacent.

D'autre part, cette stratégie apporte une grande flexibilité de par le choix du sous-jacent et son interchangeabilité. En effet, comme cela a été évoqué précédemment, il est possible d'utiliser une large gamme d'actifs sous-jacents et non seulement ceux pour lesquels il existe un marché d'options. On peut aussi changer, au cours de la durée de vie du CPPI, de fond pour un autre (sous-jacent) à condition que les risques de Gap pour les deux fonds soient équivalents. Le choix de la structure ajoute également de la flexibilité car il existe de nombreuses variantes du CPPI qui ne présentent pas plus de risque pour la banque les unes que les autres.

Les inconvénients

Néanmoins, il subsiste quelques inconvénients majeurs à l'utilisation des fonds CPPI. Le premier est le risque de monétisation dont nous parlions en début de chapitre : si la performance du fond s'effondre et que sa valeur atteint le plancher, le CPPI est alors uniquement investi en actif sans risques pendant toute la durée restante du contrat (le risque est accru en cas de forte volatilité du sous-jacent).

Le second inconvénient est le suivant : si l'on regarde le processus d'allocation du CPPI, on remarque que lorsque la valeur du fond augmente, le sous-jacent est acheté, et lorsque le fond baisse, le sous-jacent est vendu. Ce qui signifie que le sous-jacent est toujours acheté à un prix fort et vendu à un prix faible, ce qui ne semble pas la meilleure des stratégies.

Enfin lorsque le CPPI s'est rapproché très près du plancher et que l'actif risqué performe de nouveau, le CPPI est peu réactif à cette augmentation (coussin très faible) et tarde avant de se réallouer totalement en actif risqué. En d'autres termes si le sous-jacent baisse et remonte rapidement, le client ne bénéficiera pas de la remontée car celle-ci ne sera que faiblement captée par le CPPI.