

Christelle Riedinger

Modélisation stochastique des produits de prévoyance

➤ **ETABLISSEMENT D'ACCUEIL**



Assurances du Crédit Mutuel
Service Actuariat
34 rue du Wacken
67000 Strasbourg

➤ **MAITRE DE STAGE**

Daniel Bauer, actuaire
BAUERDA@acm.fr
03.88.14.96.48.

➤ **PÉRIODE DE STAGE**

Du 10 avril 2007 au 30 septembre 2007

Sommaire

Sommaire	3
Remerciements.....	5
Résumé	7
Summary	8
Introduction	9
1. Le contexte européen de solvabilité.....	11
1.1. Les facteurs de risque et les causes d'insolvabilité	11
1.2. Le projet Solvabilité 2	12
1.2.1. Les limites de Solvabilité 1	13
1.2.2. Description du projet de Solvabilité 2	14
1.2.3. Les formules standard et les modèles internes.....	17
1.2.4. Différentes approches calculatoires	18
1.2.5. L'ACAM et le contrôle.....	18
1.3. Exemples de modèles européens de solvabilité	19
1.3.1. Le modèle suisse.....	19
1.3.2. Le modèle britannique	19
1.4. Conclusion	20
2. Modélisation déterministe	21
2.1. Construction des tables d'expérience.....	21
2.1.1. La réglementation en vigueur.....	22
2.1.2. Estimation des taux annuels bruts de décès, de passage en incapacité et de sortie.....	24
2.1.3. Lissage des taux bruts	26
2.1.3.1. <i>Lissage par la loi de Makeham</i>	<i>26</i>
2.1.3.2. <i>Lissage par un modèle log-linéaire de type Poisson</i>	<i>27</i>
2.1.4. Résultats obtenus.....	32
2.1.4.1. <i>Les taux de décès</i>	<i>32</i>
2.1.4.2. <i>Les taux de passage en incapacité.....</i>	<i>33</i>
2.1.4.3. <i>Les taux de sortie.....</i>	<i>35</i>
2.2. Assur-Obsèques.....	37
2.2.1. Présentation du produit	37
2.2.2. Projection du stock	39
2.2.2.1. <i>Le nombre de contrats</i>	<i>40</i>
2.2.2.2. <i>Les primes et de commissions.....</i>	<i>40</i>
2.2.2.3. <i>Les sinistres</i>	<i>40</i>
2.2.2.4. <i>Les sorties.....</i>	<i>41</i>
2.2.2.5. <i>Les provisions</i>	<i>41</i>
2.2.3. Projection des affaires nouvelles.....	43
2.2.3.1. <i>Le nombre de contrats</i>	<i>44</i>
2.2.3.2. <i>Les primes et de commissions.....</i>	<i>44</i>
2.2.3.3. <i>Les sinistres</i>	<i>45</i>
2.2.3.4. <i>Les sorties.....</i>	<i>45</i>
2.2.3.5. <i>Les provisions</i>	<i>45</i>
2.2.4. Calcul de la participation aux bénéficiaires	45
2.2.5. Calcul de la valeur de cash-flows futurs.....	47
2.2.6. Les résultats du prévisionnel Assur-Obsèques.....	50
2.3. XL Prévoyance.....	53
2.3.1. Présentation du produit	53
2.3.2. Projection du stock	57
2.3.2.1. <i>Le nombre de contrats</i>	<i>57</i>
2.3.2.2. <i>Les primes et de commissions.....</i>	<i>57</i>
2.3.2.3. <i>Les sinistres</i>	<i>60</i>
2.3.2.4. <i>Les provisions</i>	<i>65</i>
2.3.3. Projection des affaires nouvelles.....	67
2.3.3.1. <i>Le nombre de contrats</i>	<i>68</i>
2.3.3.2. <i>Les primes et de commissions.....</i>	<i>68</i>

2.3.3.3.	Les sinistres	68
2.3.3.4.	Les provisions	69
2.3.4.	Projection des sinistres en cours.....	69
2.3.4.1.	Les sinistres rente éducation en cours	69
2.3.4.2.	Les sinistres en incapacité en cours	69
2.3.4.3.	Les sinistres en invalidité en cours	71
2.3.5.	Les résultats du prévisionnel XL Prévoyance	73
2.3.6.	Limites du modèles.....	76
2.4.	Conclusion	77
3.	Modélisation stochastique	78
3.1.	Introduction à la modélisation stochastique	78
3.1.1.	L'impact de l'agrégation des données.....	78
3.1.2.	La génération de variables aléatoires	82
3.1.2.1.	La génération d'une loi uniforme.....	82
3.1.2.2.	La génération d'une loi normale.....	83
3.1.2.3.	La génération d'une loi de Poisson.....	84
3.1.3.	Les temps de calcul.....	85
3.2.	Assur-Obsèques.....	86
3.2.1.	Le principe adopté	86
3.2.2.	La modélisation de la mortalité.....	87
3.2.2.1.	Les données utilisées.....	88
3.2.2.2.	Le modèle de Lee-Carter	88
3.2.2.3.	La version stochastique du modèle de Lee et Carter	92
3.2.2.4.	Le modèle log-Poisson.....	94
3.2.2.5.	La version stochastique du modèle log-Poisson	97
3.2.3.	La modélisation des taux de rachat.....	102
3.2.3.1.	La détermination des taux de sortie par GENMOD	102
3.2.3.2.	La loi de rachat stochastique	104
3.2.4.	La modélisation des taux d'intérêt court terme	107
3.2.5.	Les résultats de la modélisation stochastique.....	109
3.2.6.	Les limites du modèle.....	115
3.3.	XL Prévoyance.....	116
3.3.1.	Le principe adopté	116
3.3.2.	La modélisation de la mortalité.....	117
3.3.3.	La modélisation des sorties.....	117
3.3.4.	La modélisation de l'incapacité	119
3.3.5.	La modélisation des taux courts.....	120
3.3.6.	Les résultats de la modélisation stochastique.....	121
3.3.7.	Les limites du modèle.....	127
3.4.	Conclusion	127
Conclusion.....		128
Annexes		130
Annexe 1 : Notations utilisées		131
Annexe 2 : Arrêté du 20 décembre 2005.....		134
Annexe 3 : Tables réglementaires		136
Annexe 4 : Tables de mortalité d'expérience		137
Annexe 5 : Comptes techniques vie et non vie		138
Annexe 6 : Paramètres du modèle de Lee-Carter.....		140
Annexe 7 : Paramètres du modèle log-Poisson		142
Bibliographie		144
Abréviations.....		146
Index des figures.....		148
Index des tableaux		150
Glossaire		152

Remerciements

Ce mémoire a été réalisé au sein du service Actuariat des Assurances du Crédit Mutuel à Strasbourg. Je remercie en premier lieu, Messieurs Pierre Reichert, directeur du contrôle de gestion, de la comptabilité, de la réassurance et de l'immobilier, et Daniel Bauer, responsable Actuariat pour m'avoir offert l'opportunité d'accomplir mon stage de fin d'études au sein de leur service.

Je tiens également à remercier Monsieur Olivier Belguise, actuaire, pour sa disponibilité, ses conseils astucieux, ses remarques pertinentes et pour toute l'aide qu'il m'a apporté.

Je remercie d'autre part, toute l'équipe des services actuariat et contrôle de gestion, qui a su m'accueillir dans une ambiance conviviale et sympathique.

Finalement je remercie Monsieur Frédéric Planchet, actuaire consultant et professeur associé à l'Institut de Sciences Financières et d'Assurances, qui m'a guidé et répondu à l'ensemble de mes questions concernant les modèles présentés dans son ouvrage concernant les modèles de durée et ses articles concernant la modélisation stochastique de la mortalité.

Résumé

Modélisation stochastique des produits de prévoyance

Toute compagnie d'assurance doit être capable d'honorer ses engagements envers ses assurés et autres créanciers. La préoccupation du risque et de la solvabilité des entreprises occupe actuellement une place prépondérante. Sur les traces des normes bancaires « Bâle 2 » et d'autres modèles de solvabilité, comme le modèle suisse de solvabilité (« Swiss Solvency Test »), la Commission Européenne en collaboration avec les Etats membres a lancé l'ambitieux projet nommé « Solvabilité 2 ». Ce projet harmonisera au niveau européen les normes de solvabilité, afin que les intérêts des assurés soient protégés de la même manière et que les conditions de concurrence soient égales pour toutes les entreprises d'assurance.

Les normes de Solvabilité 2 définissent deux niveaux d'exigence en capital et proposent deux modes pour leur évaluation : une formule standard ou les modèles internes. C'est d'ailleurs cette seconde alternative qui constitue la problématique de ce stage dont le sujet est la modélisation stochastique des produits de prévoyance. Deux produits de la gamme prévoyance de la compagnie ont été modélisés d'une part de manière déterministe et d'autre part de manière stochastique. Ces modèles pourront par la suite être adaptés aux autres produits de la gamme.

Les modèles internes dans le cadre de Solvabilité 2, utilisent des techniques de simulations et de modélisations stochastiques, c'est-à-dire de tirages aléatoires respectant des lois de probabilité et permettant d'obtenir une distribution des résultats et ainsi de représenter le plus fidèlement possible la réalité des risques. La version déterministe réalisée dans un premier temps permet d'obtenir une vision moyenne des comptes techniques prévisionnels. La seconde version fournit la distribution des résultats.

Ces modèles réalisées sous Microsoft Excel avec l'utilisation de macros Visual Basic, ont été élaborés en quatre étapes, qui sont la projection du stock à la date d'inventaire, la simulation et la projection d'affaires nouvelles, la simulation des taux de rendements futurs et finalement la détermination de la participation aux bénéfices et de la revalorisation. L'ensemble de ces étapes fournissent les comptes techniques prévisionnels.

Mots clés : Compte technique, modèle de Lee et Carter, modèle déterministe, modèle interne, modèles linéaires généralisés, modèle stochastique, prévoyance, régression de Poisson, simulation, Solvabilité 2, table de mortalité d'expérience, taux instantanés de mortalité, variable aléatoire.

Summary

Stochastic modelling of disability and death insurance products

Each insurance company must be able to face its commitments towards its policy-holders and other creditors. The concern of the risk and the solvency of the companies is at present an important subject. On the traces of the banking norms "Basle 2" and other solvency models (like the Swiss Solvency Test), the European Commission carried out the ambitious project named "Solvency 2". This project will harmonize at the European level the standards of solvency : the interests of the policy-holders will be protected from the same way and the conditions of competition will be equal for all the insurance companies.

The standards of Solvency 2 define two level of capital requirement and propose two modes for their evaluation : a standard formula or internal models. This second alternative constitutes the problems of this training period whose subject is the stochastic modelling of the disability and death insurance product. Two products of the company were modelled on the one hand in a deterministic way and on the other hand in a stochastic way. These models could be adapted thereafter to the other products.

The internal models use techniques of simulations and stochastic modelling : this models use random sampling respecting probability laws. We obtain the results distribution, which have to represent the reality of the risks. The deterministic model give an average vision of the estimated technical accounts and the stochastic model give the results distribution.

These models were realized with Microsoft Excel and Visual Basic. These models were elaborate in four steps, which are the projection of portfolio at the inventory date, the simulation and the projection of new businesses, the simulation of the future yields and finally the determination of the profits sharing and revalorization. The whole of these stages provide the estimated technical accounts.

Key words : Deterministic model, disability and death insurance, force of mortality, general linear model, internal model, Lee and Carter model, Mortality table, Poisson regression, random variable, simulation, Solvency 2, stochastic model, technical account.

Introduction

J'ai réalisé mon stage de fin d'études aux Assurances du Crédit Mutuel à Strasbourg au sein du service Actuariat. L'objet du stage est la modélisation stochastique des produits de prévoyance dans le cadre des normes Solvabilité 2, qui constituent l'actuel projet de la Commission Européenne en collaboration avec les Etats membres.

Avant d'évoquer la problématique m'ayant conduit à réaliser ce stage et l'articulation des travaux élaborés, je commencerai par une brève présentation du Crédit Mutuel, de son groupe et de l'une de ses filiales, les Assurances du Crédit Mutuel (ACM).

Le Crédit Mutuel, est depuis plus de 100 ans, une banque coopérative et mutualiste conçue par et pour ses sociétaires. Ces derniers sont à la fois les copropriétaires et les clients : une part sociale est souscrite lors de l'adhésion à la Caisse.

Deuxième banque de détail en France, le groupe Crédit Mutuel est composé des réseaux du Crédit Mutuel et du CIC, et de l'ensemble de ses filiales. Acteur majeur du financement de l'économie, fortement présent dans la banque de détail et l'assurance, le groupe Crédit Mutuel propose l'ensemble des services financiers à une clientèle de particuliers, de professionnels de proximité et d'entreprises de toutes tailles. Il détient 12,4% du marché des dépôts et 16,8% de celui des crédits distribués par les banques. Il est 1er bancassureur non vie (IARD) et 4ème pour l'assurance-vie. Ses filiales d'assurance gèrent près de 24 millions de contrats en épargne, automobile, habitation, santé, prévoyance et retraite, au bénéfice de 9,6 millions d'assurés.

Productif et rentable, le groupe bénéficie d'une excellente solidité financière et est classé dans la catégorie des émetteurs de haute qualité. Le Crédit Mutuel, comme le CIC, est AA-/A-1+ chez Standard & Poor's avec une perspective stable. Il figure donc parmi les établissements bancaires les mieux notés de la zone euro d'autant que la Banque Fédérative du Crédit Mutuel (holding du groupe Centre Est Europe, actionnaire direct du CIC) est aussi Aa3 chez Moody's et AA- chez Fitch.

L'assurance constitue le 2ème métier du groupe. Elle a dégagé 1,3 milliard de produit net bancaire (11,5% du total) et 594 millions de résultat net part du groupe (soit 20,2% du total). L'activité s'exerce à travers le Groupe des Assurances du Crédit Mutuel, Suravenir (branche vie) et Suravenir Assurances (branche non-vie) et les Assurances du Crédit Mutuel Nord en vie et non-vie.

Les compagnies du Groupe des Assurances du Crédit Mutuel conçoivent et gèrent des gammes complètes d'assurance destinées aux particuliers, professionnels, entreprises et associations. Créateur de la bancassurance il y a plus de 35 ans, le Crédit Mutuel distribue les contrats des ACM à travers la plupart de ses fédérations régionales.

Les ACM ont réalisé en 2006 un chiffre d'affaire consolidé de 8,094 milliards d'euros (soit une progression de 7,8%), dont 6,377 milliards en vie (+8,4%) et 1,640 milliard en non-vie (+4,9%), le reste étant pour les services. Les provisions techniques ont atteint 50,8 milliards d'euros au 31 décembre 2006 avec 17,5 millions de contrats en cours. Le résultat net consolidé s'est accru de près de 36% à 512,5 millions.

Concernant les assurances de personnes, l'activité a progressé en 2006. En prévoyance individuelle, après le succès de la nouvelle gamme lancée en 2005, de nouvelles évolutions ont été intégrées pour élargir la protection des familles.

Après cette brève présentation de l'activité des Assurances du Crédit Mutuel en 2006, intéressons nous à la problématique du stage. Comme annoncé précédemment, le sujet du stage s'inscrit dans le cadre des normes Solvabilité 2. D'ailleurs la première partie du mémoire (« Le contexte européen de solvabilité ») est consacré à l'évolution du contexte réglementaire du monde de l'assurance en Europe en ce qui concerne les normes de solvabilité. Les normes actuellement en vigueur, le nouveau projet et sa structure, les conséquences attendues et le rôle de l'Autorité de Contrôles des Assurances et des Mutuelles (ACAM) en France seront présentés. Nous verrons que deux niveaux d'exigence en capital sont définis par les normes de Solvabilité 2. La compagnie aura la possibilité d'évaluer ces besoins par l'utilisation de formules standards, qui sont actuellement en cours de calibrage par le biais d'études auprès des assureurs et réassureurs européens, ou par l'utilisation de modèles internes mis en place par les sociétés. C'est ce dernier aspect qui a déterminé les objectifs du stage.

La seconde partie du mémoire (« Modélisation déterministe ») sera consacrée à la présentation des modèles déterministes mis en place pour deux produits de prévoyance proposés par les Assurances du Crédit Mutuel. Après avoir présenté les récentes évolutions réglementaires concernant les tables de mortalité, le processus de construction des tables d'expérience sera présenté. Puis après une présentation des produits étudiés, l'ensemble des formules de projections mises en place informatiquement sera détaillé. La réalisation de comptes techniques prévisionnels nécessite la détermination des résultats techniques et financiers de la société et la détermination de la participation aux bénéficiaires et de la revalorisation. Les limites des modèles seront listées et les résultats obtenus seront présentés.

Dans la troisième partie du mémoire (« Modélisation stochastique ») nous présenterons les modèles stochastiques mis en place pour les mêmes produits que dans la partie précédente. Nous nous familiariserons dans un premier temps avec les méthodes de simulations de variables aléatoires ; en effet le terme « stochastique » fait appel à des simulations de variables aléatoires respectant des lois de probabilité et permettant d'obtenir une distribution des résultats. Par la suite les modèles utilisés, comme par exemple le modèle de Lee et Carter et sa version probabiliste utilisant la loi de Poisson dans le cas de la mortalité, seront présentés. Nous verrons dans quelle mesure ils seront utilisés de manière stochastique. Les limites des modèles stochastiques seront évoquées et nous verrons qu'en moyenne les résultats obtenus sont similaires aux résultats obtenus dans le cas déterministe.

1. Le contexte européen de solvabilité

Le monde de l'assurance et sa réglementation vivent actuellement des évolutions considérables. La préoccupation du risque et de la solvabilité des entreprises occupe une place considérable. Les normes de solvabilité actuellement en vigueur dans l'Union Européenne, appelées « Solvabilité 1 », n'intégrant pas l'ensemble des risques inhérents à la société d'assurance, la commission européenne a lancé l'ambitieux projet nommé « Solvabilité 2 », qui harmonisera au niveau européen les normes de solvabilité.

Nous commencerons par une description des facteurs de risque inhérents à la société et des causes d'insolvabilité. Puis nous présenterons brièvement le projet Solvabilité 2, en insistant sur les limites des normes actuelles de solvabilité et en évoquant la structure du nouveau projet, les formules standard et les modèles internes constitutifs du premier pilier. Nous verrons finalement deux exemples de modèle de solvabilité européen.

1.1. Les facteurs de risque et les causes d'insolvabilité

Le risque correspond à tout événement aléatoire qui réduit la capacité de l'assureur à faire face à ses engagements.

Les différentes classes de risques sont les suivantes :

- Les risques techniques : mortalité, morbidité, rachats
- Les risques opérationnels : fraude, risque commercial, mauvaise gestion
- Les risques financiers : risque de marché, de défaut, de change
- Les risques de gestion actif/passif : risque de liquidité, mauvaise couverture
- Les risques divers : risque juridique, fiscal, politique

Plusieurs éléments peuvent donc mener la société d'assurance à la faillite.

Les causes d'insolvabilité d'une compagnie peuvent être :

- Une faiblesse du contrôle essentiellement interne
- L'inexpérience et l'incompétence du management, d'où l'absence de réponse en cas de problème
- Des investissements imprudents
- Des cotisations insuffisantes suite à de mauvaises tarifications
- Des provisions insuffisantes
- Une réassurance inadéquate
- La fraude
- Une croissance rapide : par exemple dans le domaine de l'invalidité ou de la dépendance

Certaines études sur les cas d'insolvabilité mettent en évidence la non unicité des facteurs d'insolvabilité. Il apparaît que dans la majorité des cas, l'insolvabilité intervient en présence d'une combinaison de facteurs internes et externes notamment la faible qualité du management additionnée à des procédures de gestion du risque inadéquates.

D'autre part plus de 40% des cas d'insolvabilité observés aux Etats-Unis entre 1969 et 1998 ont porté sur les risques de souscription, c'est-à-dire pour insuffisance des provisions et des primes, suite à une croissance rapide et/ou suite à la réalisation d'une catastrophe.

Ceci met en évidence la nécessité du modèle interne adéquat pour assister la procédure de gestion des risques.

1.2. Le projet Solvabilité 2

La réforme de la réglementation européenne sur les nouvelles normes de solvabilité est nettement engagée. Cette réforme suit les traces de la réforme bancaire « Bâle 2 » et du système en vigueur actuellement « Solvabilité 1 ». Les réflexions en cours et les travaux d'analyse relatifs à cette réforme sont assurés au sein du CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*), réunissant les autorités de contrôle des 27 pays associés, dont la France avec l'ACAM (Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles).

Les assureurs européens ont été interrogés en 2005 sur leurs provisions techniques et des méthodes d'évaluation harmonisées, comme le « Best Estimate », notamment avec l'étude QIS1 (*Quantitative Impact Study*). L'étude QIS2, lancée en 2006, avait pour objectif de mieux cerner les contours d'une formule standard d'évaluation du capital de solvabilité requis, le SCR (*Solvability Capital Requirement*) et la méthode de détermination du capital minimum requis, le MCR (*Minimum Capital Requirement*). En 2007, l'étude QIS3 a été lancée. Son but principal est le calibrage des formules standard pour le calcul du MCR et SCR, mais aussi d'introduire la problématique spécifique des groupes. Le CEIOPS a confirmé en mars 2007, que deux autres QIS seront nécessaires afin d'aboutir au calibrage des formules standards, qui doivent être unique pour toute l'Europe en limitant les paramètres spécifiques à chaque pays.

La seconde étude est marquée par une mobilisation à la hausse des entreprises et des pays : 514 entreprises issus de 23 pays pour QIS2 contre 319 entreprises issues de 19 pays pour QIS1. Concernant la France, 76 entreprises, dont 17 en vie, ont participé à l'étude QIS2. Ces entreprises françaises représentent au total 72 % des parts de marché de provisions en vie et 54 % des parts de marché de primes en non vie.

La dernière étude en date (QIS3) a connu un large succès auprès du marché français : avec plus de 150 réponses, la participation a doublé par rapport à celle observée pour le QIS2. En revanche, la participation des organismes de petite taille reste dans l'ensemble insuffisante, malgré une implication largement plus importante pour QIS 3. Le dépouillement des contributions a largement débuté et ses conclusions seront rendues publiques à l'automne.

Les normes actuelles de solvabilité présentent des limites : celles-ci vont être évoquées dans un premier temps. Puis le nouveau projet de solvabilité sera présenté, en insistant ensuite sur le choix entre les formules standard ou les modèles internes et du contrôle de ces derniers.

1.2.1. Les limites de Solvabilité 1

Le régime de solvabilité actuellement en vigueur est appelé Solvabilité 1, qui impose aux assureurs de détenir un volume de fonds propres égal à la marge de solvabilité réglementaire (MSR) ou exigence minimale de solvabilité, ou au fond de garantie si celui-ci est supérieur.

La marge de solvabilité réglementaire pour les branches vie est un montant en dessous duquel la marge de solvabilité ne doit pas descendre. Ce montant minimal de la marge vie est en relation avec l'activité de la société. Le seuil se compose de l'addition des résultats suivants :

- 4% des provisions nettes de réassurance, ramené à 1% si le risque de placement est transféré à l'adhérent (contrats en unités de compte, sans garantie plancher), en intégrant un ratio destiné à tenir compte forfaitairement de la réassurance
- 1 pour millage, variable selon les contrats, des capitaux sous risque non négatifs, net de réassurance en limitant le rapport de rétention à un seuil de 0,50 des capitaux bruts.

La marge de solvabilité réglementaire pour les branches non-vie est également fondée sur des éléments caractéristiques de l'activité de l'entreprise. L'exigence minimale de marge de solvabilité est déterminée soit sur le montant annuel des primes, soit par rapport à la charge moyenne annuelle des sinistres. Dans le premier cas, le montant annuel des primes est réparti en deux tranches, respectivement inférieure et supérieure à 50.000.000 €. La MSR est constituée de 18% de la première tranche et de 16% de la seconde. Dans le second cas, le tiers des prestations des trois derniers exercices est réparti en deux tranches, respectivement inférieure et supérieure à 35.000.000 €. La MSR est constituée de 26% de la première tranche et de 23% de la seconde. Si les calculs de la première et de la seconde méthode donnent des résultats inférieurs à l'exigence minimale de marge de l'exercice précédent, l'exigence de marge de solvabilité est au moins égale à celle de l'exercice précédent multiplié par le rapport entre les provisions de sinistres à payer (PSAP) à la fin du dernier exercice et le montant des PSAP au début du dernier exercice. Dans ces calculs, les provisions techniques sont calculées déduction faite de la réassurance, ce rapport ne pouvant cependant pas être supérieur à 1.

$$MSR_{31/12/N} = MSR_{31/12/N-1} \times \min\left(\frac{PSAP \text{ nettes}_{31/12/N}}{PSAP \text{ nettes}_{01/01/N}}; 1\right)$$

Le fonds de garantie est un second seuil pour les ressources dont doit disposer l'entreprise. Il est égal au minimum entre un tiers de la marge de solvabilité et du fonds de garantie minimum qui correspond à 1,5 à 3 millions d'euros selon la branche d'activité et le type de société. Il doit être constitué de fonds propres ou de quasi fonds propres effectivement constitués.

En prévoyance, les branches d'activités sont les suivantes :

- Branche 1 : Les accidents y compris accident du travail et maladies professionnelles
- Branche 2 : La maladie
- Branche 20 : Vie – Décès

Les branches 1 et 2 sont associées à la non-vie et le minimum de fonds de garantie associé pour les Sociétés Anonymes (SA) est de 2 millions d'euros. La branche 20 est associée à la vie et le minimum de fonds de garantie associé pour les SA est de 3 millions d'euros. En cas

de pluralité des branches exploitées, le fonds de garantie le plus élevé s'applique. Dans le cas de la prévoyance, le fonds de garantie retenu est alors de 3 millions d'euros.

Notons que la directive européenne modificatrice de Solvabilité 1 a pour vocation de simplifier et de relever les fonds de garantie minimum, en raison notamment de la progression du montant des sinistres et des dépenses de fonctionnement depuis leur date d'adoption.

Comme nous pouvons le constater, Solvabilité 1 utilise des formules simples permettant la comparabilité des résultats entre entreprises. Mais cette réforme présente des faiblesses :

- Solvabilité 1 prend comme unique référence le passé et fait donc l'hypothèse que le passé est un bon guide pour estimer le futur sans ajustement. La vision est uniquement rétrospective.
- Le système actuel présente une absence d'harmonisation des normes dans les Etats membres ; en effet, les normes de solvabilité (i.e. les modalités de calculs de l'exigence de marge de solvabilité) ont été transposées différemment selon les Etats. Nous sommes donc en présence d'une harmonisation « illusoire ». Il est évident que, si les modes de calcul des provisions diffèrent fondamentalement d'un pays à l'autre et s'ils aboutissent à des niveaux de prudence des provisions sensiblement différents, les exigences de marge qui sont calculées sur la base de ces provisions sont très différentes d'un pays à l'autre, et cela pour un risque identique.
- L'ensemble des risques supportés par l'entreprise ne sont pas pris en compte : par exemple le risque de crédit et le risque technique. Solvabilité 1 n'opère pas de distinction entre les risques. La marge de solvabilité est donc calculée de manière « forfaitaire ».
- Solvabilité 1 présente une absence de perspective de groupe : la société est vue individuellement. La surveillance complémentaire des entreprises d'assurance a toutefois introduit une approche groupe (en application des articles R334-41 à R334-45 du Code des Assurances).
- On peut également citer l'insuffisance discriminante en fonction de la situation financière effective des sociétés.
- Dans Solvabilité 1, l'aspect qualitatif est négligé. Aucune surveillance n'est exercée sur le contrôle interne.

Ainsi les types de risques et la qualité de leur gestion n'ont pas d'impact sur les besoins en fonds propres des compagnies.

La commission européenne, désirant un domaine des assurances prospère, c'est-à-dire un cadre européen sûr et pérenne pour que l'assurance continue à être un vecteur de croissance et de stabilité économique, a lancé le projet Solvabilité 2 en collaboration avec les Etats membres. Ce projet est une étape importante dans la construction du marché unique européen.

1.2.2. Description du projet de Solvabilité 2

Le principe de ce projet est simple : chaque assureur et réassureur doit être à même de comprendre les risques inhérents à son activité afin de pouvoir allouer suffisamment de capital pour les couvrir ; c'est-à-dire créer un cadre prudentiel plus adapté aux risques réels pesant sur les compagnies d'assurance et ainsi conduire à un usage efficient du capital.

La réforme Solvabilité 2 est organisée sur trois piliers, semblables aux trois piliers de la réforme Bâle 2 :

▪ **Pilier 1 : Exigences quantitatives**

Ce pilier doit contenir au moins des dispositions concernant les exigences sur les provisions techniques, sur les investissements effectués par l'assureur et en capital. Deux niveaux d'exigences en capital sont définis : le SCR et le MCR.

Concernant les provisions techniques, il faut harmoniser les méthodes de calculs au niveau européen, afin d'avoir des provisions prudentes et fiables. Il s'agit d'un calcul en *best estimate* (valeur actuelle probable des flux futurs), complété d'une marge pour risque.

Le SCR est le niveau de capital qui doit permettre à l'entreprise d'absorber un certain montant de pertes, correspondant, en principe, à une probabilité de ruine à un an inférieure à 0,5 %. Son calcul vise à prendre en compte les risques quantifiables pris par l'entreprise. Le SCR pourra être calculé de deux manières : par l'intermédiaire d'une formule « standard » harmonisée au niveau européen ou par l'intermédiaire d'un modèle interne. Son non respect implique, de la part de l'Autorité de Contrôle, une action proportionnée et s'inscrivant dans la durée.

Le MCR est le niveau de capital minimum en dessous duquel un organisme d'assurance ne devrait pas tomber. Son mode de calcul devrait être plus simple que celui du SCR et robuste d'un point de vue juridique. Le non respect du MCR entraîne le retrait d'agrément s'il n'est pas couvert rapidement.

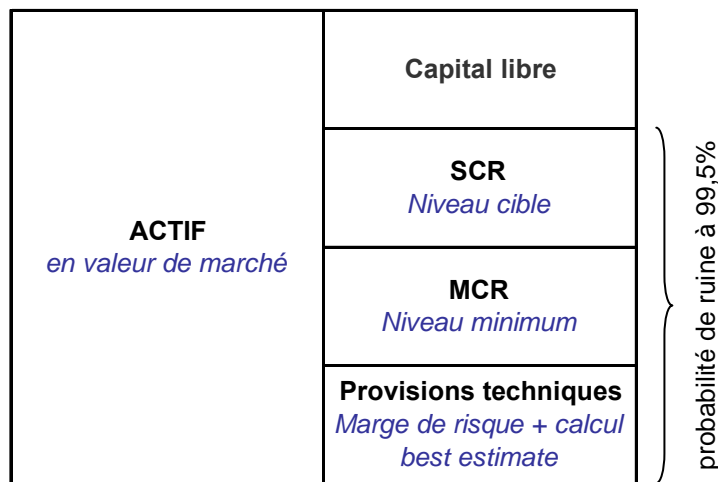


FIG. 1 – LA STRUCTURE DUBILAN - PILIER 1 DE SOLVABILITE 2

▪ **Pilier 2 : La surveillance prudentielle – Exigences qualitatives**

Ce pilier contient les exigences d'une bonne organisation administrative et d'un contrôle interne adéquat, soumet les entreprises à un devoir d'information envers les autorités de contrôle et prévoit des pouvoirs d'investigation minimaux. Ce pilier prévoit l'identification et la gestion des risques internes, un programme de réassurance adapté et une harmonisation du contrôle au niveau européen.

▪ **Pilier 3 : Discipline de marché**

De façon générale, les principaux facteurs favorisant la discipline de marché en assurance sont l'information financière à destination des marchés financiers et des agences de notation et une tendance générale à plus de transparence et à une harmonisation des règles comptables.

▪ **Les conséquences attendues de Solvabilité 2**

La réforme Solvabilité 2 aura les conséquences suivantes :

- Epouser d'avantage le profil de risques de chaque société d'assurance.
- Inciter les entreprises à mieux connaître et gérer leurs risques.
- Eviter une immobilisation excessive et coûteuse de capital.
- Améliorer la sécurité du marché en allouant mieux les exigences en capital en fonction des risques.
- Harmoniser les normes européennes : l'ensemble des directives existantes devraient être remplacé par une directive unique européenne.

Mais cette réforme n'est pas parfaite, car elle perd en simplicité et en transparence, et de plus, cette réforme n'intègre pas la fiscalité.

S'inscrivant dans une architecture appelée « Lamfalussy », la mise en place de Solvabilité 2 comporte quatre étapes. Ce processus porte le nom du baron belge Alexandre Lamfalussy, qui en 2001 a présidé le comité dit « comité Lamfalussy » chargé de réfléchir à l'amélioration de la structure de régulation des marchés financiers par les ministres des finances des Quinze. A l'automne 2002, la commission européenne a proposé d'étendre la méthode Lamfalussy aux directives relatives au secteur bancaire. Le processus Lamfalussy permet d'élaborer des textes plus adaptés au terrain, car ils sont préparés après la consultation des acteurs concernés, et plus harmonisés, car la procédure prévoit davantage de coopération entre les régulateurs des différents Etats membres.

Les quatre étapes de cette architecture sont :

- Premier niveau, l'élaboration de la législation : la commission européenne et le parlement européen adoptent un texte législatif selon le principe de codécision. Ce texte livre les principes directeurs de la future réglementation et donne des axes de mise en œuvre.
- Second niveau, l'élaboration des mesures d'exécution : un comité spécialisé conçoit, en collaboration avec les autorités de régulation des états membres, les détails techniques liés à la mise en œuvre de la réglementation. Ceux-ci sont portés au vote des états membres, au travers de représentants du secteur de la finance concerné par la réglementation.
- Troisième niveau, la coopération des régulateurs : les autorités de régulation nationales coordonnent leurs travaux de déclinaison des textes européens dans leur droit, afin que les réglementations des états membres divergent le moins possible.
- Quatrième niveau, le contrôle du respect du droit : la commission européenne vérifie la conformité des réglementations nationales et prend les mesures nécessaires à l'encontre des états suspectés de contourner le règlement européen.

Il est prévu que Solvabilité 2 entre en vigueur à l'horizon 2010.

1.2.3. Les formules standard et les modèles internes

Pour satisfaire à la contrainte d'évaluation des besoins en capital, deux modes sont proposés : la formule standard et les modèles internes. Le choix est offert aux sociétés.

Dans le premier cas, les compagnies baisseront leurs coûts d'application de la directive et dans le second cas, les compagnies auront certes un coût d'application de la directive plus élevé, mais bénéficieront d'une meilleure gestion des risques.

Les entreprises d'assurance pourront déroger à la formule standard si elles ont construit un modèle interne leur permettant de justifier que le niveau de prudence requis est assuré avec un niveau de fonds propres moindre que celui qui aurait été déterminé par la formule de base.

▪ De la formule standard au modèle interne

Dans le cas de la formule standard, un ensemble de calculs simplifiés reposant sur les données comptables et des indicateurs connus, permettent d'établir un besoin minimum de capital, admis comme relativement arbitraire.

Le modèle interne, implémenté informatiquement, est bien plus complexe à mettre en œuvre. L'idée de ce modèle interne est la réalisation de modélisations personnalisées et globales des portefeuilles d'assurance. Le besoin en capital pour la société s'appréciera directement à la lecture des résultats générés par le modèle interne, élaboré de façon globale ou par branche de risques.

▪ Le stochastique appliqué aux modèles internes

Les modèles internes utiliseront en général les techniques de simulations et de modélisations stochastiques, c'est-à-dire de tirages aléatoires respectant des lois de probabilité et permettant d'obtenir une distribution des résultats et ainsi de représenter le plus fidèlement possible la réalité des risques.

Le modèle interne n'est rien d'autre qu'une traduction quantitative de la réalité d'un ensemble des risques assurés, susceptible de tenir compte de la volatilité des phénomènes étudiés. Le cycle de production étant inversé, l'assurance doit utiliser les processus aléatoires pour envisager une réalisation prospective des risques. Un seul tirage constitue la réalisation d'un chemin possible. Une multitude de tirages aléatoires, processus de Monte Carlo, livre un ensemble de chemins représentant le domaine des possibles : la probabilité des résultats est alors déterminée par sa fréquence d'apparition.

Les valeurs obtenues à l'issue d'une modélisation stochastique permettent une analyse plus riche et plus robuste que la vision déterministe. En effet la modélisation déterministe n'offre qu'une vision moyenne, alors que la modélisation stochastique fournit une vision en profondeur, c'est-à-dire fournit les distributions des valeurs et indique la répartition des risques, dont les valeurs extrêmes.

La modélisation stochastique repose sur la programmation informatique. Les temps de calculs pouvant être longs, ceux-ci sont souvent utilisés comme argument pour simplifier les modèles.

1.2.4. Différentes approches calculatoires

Différentes approches peuvent être utilisées dans les compagnies d'assurance. La première basée sur le ratio sinistres/primes est couramment utilisée (Solvabilité 1 est basée sur cette méthode), mais n'est pas adaptée aux modèles internes dans le cadre de Solvabilité 2.

- **Les calculs de type « Fixed Ratio »**

Ce principe simple de calcul vise à utiliser les éléments disponibles au bilan des compagnies et par quelques simples opérations à déterminer le niveau de capital minimum. En France, on utilise comme référentiel les provisions mathématiques en vie et les sinistres/primes en non vie, considérées comme une bonne approximation de l'exposition au risque.

Cette méthode induit de faibles coûts du calcul de la MSR en temps comme en moyen, mais sa fiabilité est limitée.

- **Les calculs de type « Risk Based Capital » (RBC)**

La méthode RBC consiste à définir des types d'actifs, à pondérer leur valeur selon les risques sous-jacents, et de la même manière au passif de dissocier les classes de risques pour leur appliquer un besoin de marge adapté. Le besoin en capital correspond à la somme des besoins des différentes branches. D'éventuels ajustements liés à la dépendance d'une branche par rapport à l'autre sont réalisés (covariance).

Cette méthode permet de prendre en compte différentes sources de risques dans le calcul de la MSR, mais une mise en place longue et coûteuse avec à priori une plus grande fiabilité des résultats.

- **Les calculs issus de modèles dynamiques**

Il s'agit de nouvelles méthodes de détermination d'un besoin de capital, utilisant une modélisation adaptée et précise des risques étudiés. Ces modèles peuvent être déterministes, basés sur plusieurs scénarios, ou dans l'idéal stochastiques. Les modèles internes envisagés dans Solvabilité 2 appartiennent à cette classification.

Ces modèles de calculs permettent la prise en compte du profil de la société et de ses risques, mais sa mise en place nécessite d'avantage de temps, des moyens considérables (capacités informatiques, robustesse des hypothèses) avec une fiabilité à priori optimale.

1.2.5. L'ACAM et le contrôle

Créée par la loi n°2003-706 du 1^{er} août 2003 de sécurité financière, l'Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles (ACAM) est une autorité publique indépendante dotée de la personnalité morale.

L'ACAM bénéficie d'une indépendance légalement organisée, de pouvoirs de décisions et de gestions propres ainsi que d'une autonomie budgétaire.

Elle a pour mission principale de contrôler les entreprises d'assurance et de réassurance relevant du Code des assurances, les mutuelles relevant du Code de la mutualité, les

institutions de prévoyance et les institutions de retraite supplémentaire relevant du Code de la sécurité sociale. Elle est à ce titre chargée de veiller à ce que les entités soumises à son contrôle respectent les dispositions législatives et réglementaires qui leur sont applicables et les engagements contractuels qui les lient à leurs assurés ou adhérents. Elle doit s'assurer que ces entités sont en mesure de tenir à tout moment les engagements qu'elles ont contractés envers leurs assurés ou adhérents.

L'examen de leur situation financière et de leurs conditions d'exploitation forme la base de ses travaux. En particulier, l'ACAM vérifie que les entreprises évaluent correctement leurs engagements envers les assurés ou adhérents, qu'elles disposent, pour faire face à ces engagements, de placements suffisamment sûrs et diversifiés, et que leur richesse propre est supérieure au minimum de marge de solvabilité.

Dans le cadre des modèles internes, l'ACAM aura des pouvoirs d'homologation de ces modèles. La mise en œuvre pratique de ces modèles internes reste donc leur homologation.

1.3. Exemples de modèles européens de solvabilité

Avant de clore cette partie consacrée au contexte européen de solvabilité, intéressons nous à deux autres modèles de solvabilité présents en Europe : les modèles suisse et britannique. Nous verrons que le projet Solvabilité 2 est comparable au modèle suisse de solvabilité.

1.3.1. Le modèle suisse

En mai 2003, l'Office fédéral Suisse des assurances privées et les assureurs suisses ont lancé le projet Test suisse de solvabilité (Swiss Solvency Test, SST) afin d'élaborer un dispositif de surveillance axé sur les risques. Les premiers travaux conceptuels ont été affinés jusqu'en mai 2004 et ont été suivis de tests sur le terrain réalisés auprès d'assureurs suisses. La loi sur la surveillance des assureurs est entrée en vigueur en 2006 et d'ici 2008 les calculs requis par le SST devront être appliqués.

Les objectifs du SST sont la protection des preneurs d'assurance, la promotion d'une culture du risque, le renforcement du marché par le biais de la concurrence et d'exigences de fonds propres reflétant les risques encourus. Ces objectifs sont compatibles avec les objectifs de Solvabilité 2. La structure du SST est également une structure en trois piliers, et fixe une exigence minimale de fonds propres et de capital cible.

Ce modèle standard du SST est défini comme un modèle interne qui quantifie explicitement les corrélations des risques. L'approche standard comprend un ensemble de scénarios prédéfinis et spécifiques aux entreprises en matière de risque d'investissement, de crédit et de souscription. Les assureurs sont incités à obtenir un agrément pour leurs modèles internes et à les préférer au modèle standard pour calculer le capital cible.

1.3.2. Le modèle britannique

Le modèle britannique est un modèle complémentaire aux règles de Solvabilité 1 mis en place en janvier 2005. Ce modèle est un système de contrôle du secteur de l'assurance axé sur les risques et prévoit que les assureurs identifient et comprennent les risques inhérents à leur activité, se dotent d'un dispositif de contrôle approprié pour gérer ces risques et s'assurent que ces contrôles sont effectués. Les autorités de tutelle déterminent le niveau

final des fonds propres que doit détenir un assureur en calculant l'exigence de renforcement des fonds propres et en procédant à une évaluation individuelle des fonds propres.

Tous les assureurs vie sont tenus de détenir des fonds propres équivalents au moins au fonds minimum de garantie de Solvabilité 1, ou à l'exigence de marge de solvabilité de Solvabilité 1 à laquelle s'ajoute l'exigence de capital de résilience, si ce dernier montant est plus élevé que le premier. De plus, les assureurs dont les provisions techniques relatives aux produits avec participations aux bénéfices sont supérieures ou égales à 500 millions GBP doivent adopter une approche bipolaire. L'approche bipolaire exige des assureurs vie de procéder à une évaluation réaliste de leurs engagements au titre de la participation aux bénéfices, pour savoir s'ils ont besoin de détenir des fonds propres supplémentaires en plus des provisions mathématiques pour couvrir les participations aux bénéfices discrétionnaires attendues.

Les assureurs non-vie doivent détenir des fonds propres suffisants pour satisfaire à l'exigence minimale de fonds propres (Solvabilité 1) ou à l'exigence de renforcement des fonds propres si celle-ci est supérieure. Ce critère plus sensible aux risques se définit comme la somme d'une exigence de fonds propres liée aux actifs et d'une exigence de fonds propres liée à l'assurance, minorée des provisions pour égalisation de l'assureur.

En plus de l'exigence de renforcement des fonds propres, les assureurs vie et non-vie sont tenus de procéder à une auto évaluation des exigences de fonds propres en fonction de leur profil de risque. Les normes individuelles d'adéquation des fonds propres (ICAS – *Individual Capital Adequacy Standards*) contiennent des indications sur la méthodologie à adopter à cette fin. Les calculs se fondent sur des modèles internes.

1.4. Conclusion

La mise en œuvre des modèles internes par des techniques de modélisations stochastiques au sein des compagnies n'est à l'heure actuelle uniquement faite pour satisfaire à la réglementation en matière de solvabilité. Rappelons que ces modèles internes traduisent une meilleure maîtrise des risques d'assurance et probablement dans quelques années, les modèles internes mis en place serviront à la gestion quotidienne des risques. L'utilisation des modèles internes pour répondre aux obligations réglementaires de solvabilité interviendra en second plan. C'est d'ailleurs un des souhaits du projet Solvabilité 2.

L'objet du stage est la modélisation stochastique des produits de prévoyance, s'inscrivant dans ce contexte de Solvabilité 2 et des modèles internes. L'étude est réalisée sur deux produits de la gamme prévoyance de la compagnie. Elle sera par la suite adaptée aux autres produits de prévoyance.

La première étape est la construction d'un modèle déterministe, qui offre la vision moyenne de la répartition des risques. Cette modélisation déterministe sera suivie par une modélisation stochastique, qui repose sur un grand nombre de tirages de variables aléatoires.

2. Modélisation déterministe

L'objectif de la modélisation déterministe est la projection des résultats par la construction des comptes techniques prévisionnels d'un produit : ce compte technique est constitué des montants de primes, de commissions, de sinistres et de provisions, en considérant l'évolution du portefeuille et celle des affaires nouvelles escomptées. Ce prévisionnel des résultats permet la valorisation du portefeuille et fournit un modèle cohérent avec les hypothèses retenues (lois de mortalité, de rachats...).

Cette modélisation dite déterministe est réalisée sur deux produits et pourra être appliquée aux autres produits de prévoyance de la compagnie. Le premier produit étudié, nommé « Assur-Obsèques », est une assurance décès vie entière prévoyant le versement au(x) bénéficiaire(s) d'un capital destiné au financement des obsèques. Le second produit, nommé « XL Prévoyance », est une assurance décès temporaire sur mesure proposant diverses garanties complémentaires, comme la rente éducation, l'incapacité temporaire totale de travail ou l'invalidité permanente.

Après extraction des données de l'entrepôt de données et préparation de celles-ci (sélection des champs utilisés et agrégation des données par exemple), les deux modélisations déterministes ont été réalisées sous le logiciel Microsoft Excel avec l'utilisation des macros en Visual Basic.

Avant la présentation détaillée de ces deux modélisations, nous commencerons par la construction des tables d'expérience utilisées dans la modélisation. Cette construction des tables d'expérience est une étape importante dans la valorisation du portefeuille d'assurance. L'ensemble des notations utilisées est présenté en annexe 1.

2.1. Construction des tables d'expérience

La valorisation du portefeuille se fait pour une grande partie par l'utilisation de tables d'expérience. En effet, les tables (de mortalité, de sortie, de maintien...) constituent le référentiel central de toutes les activités d'une compagnie d'assurance exerçant si bien dans la branche vie que dans la branche non-vie, puisqu'elles permettent d'estimer les probabilités de survie, de décès, de rachat ou de maintien dans un état. Remarquons que la prévoyance est du ressort des deux branches vie et non-vie. Par exemple nous verrons que le produit XL Prévoyance propose des garanties de rentes éducation qui relèvent de la branche vie, et propose des garanties en incapacité de travail, qui relèvent de la branche non-vie.

Nous allons dans cette partie développer le processus de construction des tables de mortalité d'expérience et de sortie pour les deux produits étudiés, et des tables de passage en incapacité de travail pour le produit XL Prévoyance. Notons que le phénomène de mortalité se rencontre dans deux configurations distinctes, selon que l'on considère la survenance d'un événement (le décès) ou le maintien dans un état (l'invalidité permanente).

La construction de ces tables a été réalisée sous le logiciel SAS (*Statistical Analysis System*). Les années de survenance retenues sont 2005 et 2006 et nous supposons qu'au 01/05/2007, l'ensemble des sinistres tardifs concernant la survenance 2006 ont été déclarés.

Avant d'expliquer le processus de construction des tables d'expérience, intéressons nous à la réglementation en vigueur et aux récentes évolutions concernant les tables de mortalité.

Nous verrons que leur utilisation pour l'établissement des tarifs et le provisionnement est encadrée par la réglementation.

2.1.1. La réglementation en vigueur

La réglementation, via le Code des Assurances, établit clairement les tables de mortalité à utiliser. L'élaboration des comptes sociaux des entreprises d'assurance et notamment le calcul des provisions techniques sont encadrés par la réglementation et supervisés par l'autorité de contrôle. La réglementation définit de façon exhaustive les différentes provisions réglementaires et les tables associées.

Un récent arrêté modifie le Code, car les tables utilisées jusqu'à présent (la TD88-90 et la TV88-90 qui ont été homologuées par l'arrêté du 27 avril 1993) sont jugées obsolètes pour refléter le risque de mortalité de la population actuelle. En effet les anciennes tables ont été réalisées par l'INSEE sur des observations faites entre 1988 et 1990, c'est-à-dire il y a plus de 16 ans. La TV88-90 décrit la mortalité féminine et la TD88-90 est construite à partir de la population masculine.

L'arrêté en question est celui du 20 décembre 2005 relatif aux tables de mortalité et qui est entré en vigueur au 1^{er} janvier 2006. Cet arrêté est présenté en annexe 2.

Deux nouvelles tables masculine et féminine, appelées TH00-02 et TF00-02 sont parues au journal officiel du 29 décembre 2005. Ces tables ont été établies sur la base de l'observation INSEE de la population française entre 2000 et 2002 et ont été lissées. Ce sont des tables du « moment » ou également appelées tables « statiques ».

Pour information, ces nouvelles tables ne prennent pas en compte le phénomène de surmortalité de 2003 liée à la canicule et le phénomène de sous mortalité de 2004 lié aux conséquences de la canicule (la canicule a provoqué en 2003 des décès qui, autrement, se seraient peut-être produits en 2004) et au fait qu'il n'y a pas eu beaucoup d'épidémie de grippe en 2004.

▪ Utilisation des tables

D'après l'article A335-1 du Code des Assurances, ces tables sont utilisables par sexe aussi bien pour les garanties décès que pour les garanties vie. Il est possible de retenir la table la plus défavorable par rapport au risque assuré, c'est-à-dire la table la plus prudente. Dans le cas des garanties décès, la table utilisée est la TH00-02. En effet, les hommes ayant des probabilités de décès plus grandes que les femmes, dans le cas des garanties décès, les probabilités des hommes sont les plus défavorables.

Concernant notre sujet, nous distinguons l'utilisation des tables réglementaires et des tables d'expérience. Les tables réglementaires sont utilisées pour le calcul des provisions et les tables d'expérience sont utilisées dans le reste des cas, comme par exemple la projection des sinistres et des rachats.

D'après l'article A331-1-1 du Code des Assurances, les provisions mathématiques des contrats d'assurance sur la vie doivent être calculées d'après les tables de mortalité appropriées en vigueur à l'époque de l'application du tarif. Mais les entreprises ont également la possibilité d'après le même article, de calculer les provisions mathématiques de tous leurs contrats en cours, en appliquant lors de tous les inventaires annuels ultérieurs les tables de mortalité appropriés en vigueur à la date d'inventaire. Nous décidons de calculer les provisions mathématiques d'après les tables en vigueur à l'époque de l'application du tarif.

▪ **Comparaison des tables**

Les nouvelles tables réglementaires fournissant des probabilités de décès plus faibles que les anciennes tables, l'espérance de vie à la naissance passe de 80,7 ans à 83 ans pour les femmes et de 72,5 ans à 75,5 ans pour les hommes.

Afin d'observer la diminution des probabilités de décès, nous représentons le rapport des probabilités fournies par la TH00-02 par celles fournies par la TD88-90. Comme nous indique la figure suivante, la nouvelle table masculine est inférieure en moyenne de 22 % par rapport à la TD88-90.

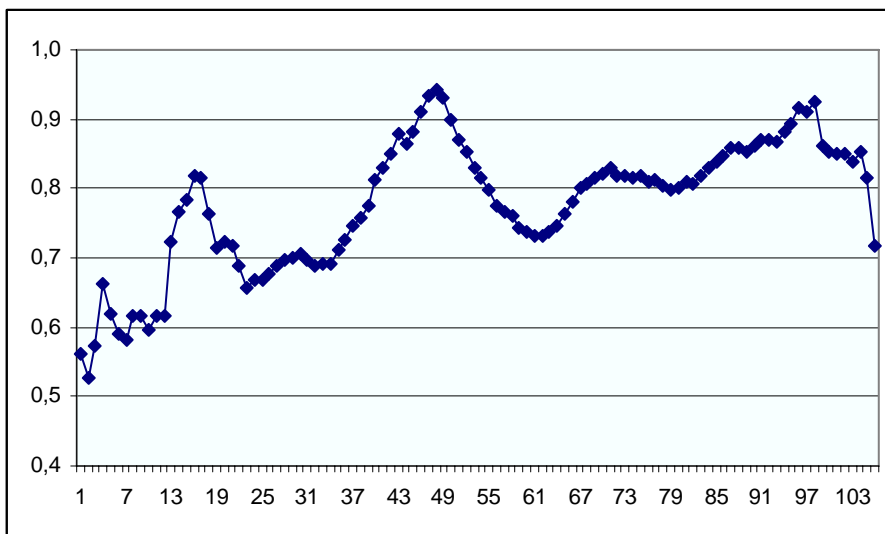


FIG. 2 – RAPPORT DES TAUX DE MORTALITE TH 00-02 / TD 88-90

Comme nous venons de le voir, les tables réglementaires sont utilisées dans le calcul des provisions mathématiques. La diminution des taux de mortalité implique la diminution de cette provision. Nous illustrons cette diminution des provisions mathématiques par le test de sensibilité réalisé sur le stock Assur-Obsèques au 31/12/2006.

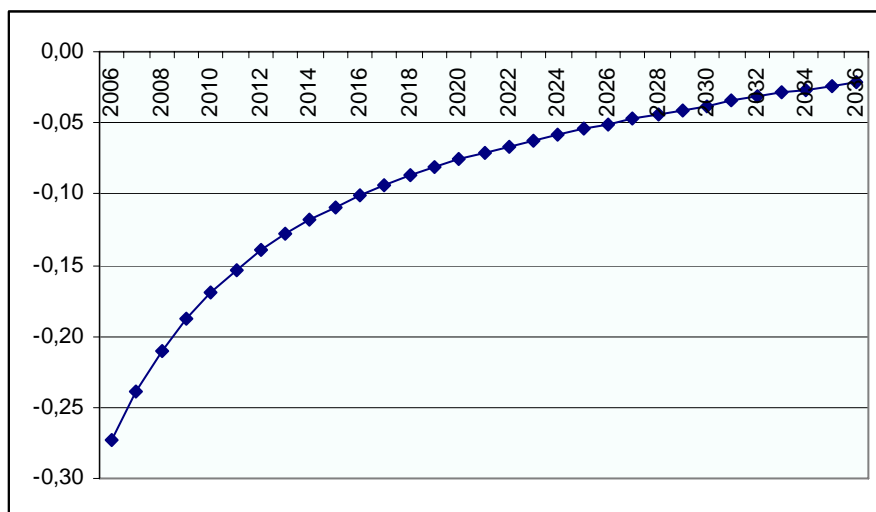


FIG. 3 – TEST DE SENSIBILITE : PROVISIONS MATHÉMATIQUES TH 00-02 / TD 88-90

La détermination des provisions mathématique avec la nouvelle table réglementaire implique une diminution de plus de 25 % pour 2006 et cette diminution perd d'intensité avec les années de projection.

Après avoir présenté le contexte réglementaire concernant les tables de mortalité, nous présentons le processus de construction des tables de mortalité d'expérience.

2.1.2. Estimation des taux annuels bruts de décès, de passage en incapacité et de sortie

Pour estimer le taux annuel de décès à l'âge entier x (respectivement le taux annuel de passage en incapacité de travail et le taux annuel de sortie), traditionnellement noté q_x (respectivement i_x , s_x), la première étape, après la préparation et le nettoyage des données, consiste à utiliser uniquement des individus observés vivants sur une partie ou sur la totalité de leur $x+1^{\text{ème}}$ année. Les périodes sont décomposées en fonction de la date d'anniversaire.

Il n'est pas tenu compte des observations relatives aux âges voisins, qu'elles proviennent des mêmes individus ou d'individus différents. On parle alors d'estimation brute du taux q_x (resp. i_x , s_x), par opposition aux estimations dites lissées.

La première hypothèse consiste à supposer que sur l'intervalle d'âge $[x, x+1]$, tous les décès, les arrêts en incapacité de travail et les sorties sont des événements indépendants et que les N_x individus ont la même probabilité de décéder, de tomber en arrêt de travail ou de sortir avant leur $x+1^{\text{ème}}$ année.

Dans la construction des tables d'expérience, l'étape importante est le calcul des années de présence de chaque individu. En effet, les données peuvent être tronquées ou censurées du fait d'observations partielles disponibles. Pour l'année N , nous déterminons les années risques (i.e. la proportion dans l'année de présence de chaque assuré) de la manière suivante :

Présence en début de période	Présence en fin de période	Bilan	Année risque
1	1	Observation complète	1
1	0	Observation censurée à droite	$\frac{\text{date situation} - 01/01/N}{365}$
0	1	Observation tronquée à gauche	$\frac{31/12/N - \text{date d'effet}}{365}$
0	0	Observation censurée à gauche et tronquée à droite (année d'effet = année de situation = N)	$\frac{\text{date situation} - \text{date d'effet}}{365}$
0	0	Observation non prise en compte (année d'effet et année de situation < N ou > N)	0

TAB. 1 – CALCUL DES ANNEES RISQUES EN FONCTION DE L'OBSERVATION

Dans le cas du décès, les années risques sont calculées sur l'ensemble des assurés pour le produit Assur-Obsèques (i.e. le décès est la garantie de base) et sur les assurés ayant souscrit au moins une des garanties décès toutes causes ou rente éducation pour le produit XL Prévoyance (i.e. la garantie rente éducation peut être souscrite seule sans garantie décès toutes causes). La somme de ces années risques par âge fournit les N_x^{DC} individus utilisés dans la détermination des taux bruts de mortalité.

Dans le cas de l'incapacité de travail pour le produit XL Prévoyance, les années risques sont calculées sur les assurés ayant souscrit la garantie incapacité temporaire totale de travail. La somme de ces années risques par âge fournit les N_x^{IT} individus utilisés dans la détermination des taux bruts de passage en incapacité de travail.

Dans le cas des sorties, les années risques sont calculées sur l'ensemble des assurés. Les taux de sortie sont déterminés selon deux optiques différentes : les taux de sortie en fonction de l'âge entier x ou le taux de sortie en fonction de l'ancienneté du contrat a . L'ancienneté est déterminée par différence de millésime entre la date d'inventaire (lorsque le contrat est en cours) ou la date de situation (lorsque le contrat n'est plus en cours) et la date d'effet du contrat.

A partir du fichier des sinistres, nous comptabilisons le nombre de décès par âge, D_x , le nombre d'entrée en incapacité de travail par âge, I_x , et le nombre de sorties par âge ou par ancienneté, S_x ou S_a , pour les années de survénances retenues. Chacun de ces nombres à comptabiliser est une variable de Bernoulli respectivement indicatrice du nombre de décès, du nombre d'entrée en incapacité de travail, du nombre de sorties.

A partir de ces éléments, nous déterminons les taux bruts annuels de mortalité, de passage en incapacité et de sortie :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{N_x^{DC}}, \hat{i}_x = \frac{I_x}{N_x^{IT}}, \hat{s}_x = \frac{S_x}{N_x} \text{ et } \hat{s}_a = \frac{S_a}{N_a}$$

Concernant le décès, nous présentons et commentons les résultats obtenus pour les deux produits étudiés. L'annexe 4 présente les taux bruts de mortalité et les rapports à la TD88-90 et à la TH00-02 pour les deux produits.

Pour le produit Assur-Obsèques, nous remarquons que pour les âges inférieurs à 57 ans (respectivement 64 ans), les taux bruts observés peuvent être supérieurs aux taux de la table de mortalité TD88-90 (respectivement de la TH00-02). Comment expliquer ce phénomène ? Ce produit, comme nous le verrons dans sa présentation, permet de prendre en charge les frais d'obsèques et des frais de successions que les héritiers devraient payer. Bien que la souscription soit ouverte à toute personne âgée de 18 à 69 ans, ce contrat est davantage souscrit par des populations séniors. Nous pouvons donc dire que nous sommes en présence d'une plus forte volatilité pour les âges inférieurs à 57 ans, car moins d'assurés ont souscrits au contrat. Et d'autre part, la souscription n'est soumise à aucune formalité médicale, nous pourrions donc supposer que pour les âges inférieurs à 60 ans, une anti-sélection est présente.

Pour XL Prévoyance, les taux bruts observés sont tous inférieurs aux taux de la TD88-90 et de la TH00-02 avec un abattement moyen de la mortalité de plus de 70 % par rapport à la TD88-90 et un abattement moyen de plus de 65 % par rapport à la TH00-02.

2.1.3. Lissage des taux bruts

Nous appliquons deux méthodes de lissage des taux bruts : la méthode par la loi de Makeham et un ajustement par un modèle log-linéaire de régression polynomiale de type Poisson.

2.1.3.1. Lissage par la loi de Makeham

Makeham en 1960 a enrichi la formule de Gompertz (1825) d'un paramètre. La formule de Gompertz propose un modèle paramétrique simple qui traduit l'augmentation de manière quasi exponentielle des taux instantanés de mortalité :

$$\mu_x = BC^x \quad \text{avec } B > 0, C > 1$$

B varie en fonction du niveau de mortalité et C mesure l'augmentation du risque de décès avec l'âge.

La loi de Makeham est : $\mu_x = A + BC^x$ avec $A > 0, B > 0, C > 1$

On considère que le paramètre A rend compte de la mortalité environnementale, indépendante de l'âge.

Nous déterminons la probabilité qu'un individu d'âge x survive entre x et x+1 :

$$p_x = \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_s ds\right) = \exp\left(-\int_x^{x+1} (A + BC^s) ds\right) = \exp\left(-A - \frac{B}{\ln C} C^x (C - 1)\right)$$

D'où la probabilité qu'un individu d'âge x décède entre x et x+1 est :

$$q_x = 1 - \exp\left(-A - \frac{B}{\ln C} C^x (C - 1)\right)$$

Cette méthode de lissage présente un inconvénient car le paramètre A peut être négatif. C'est d'ailleurs ce que l'on observe dans le lissage des taux de décès pour le produit XL Prévoyance. Le tableau 1 ci-contre présente les paramètres obtenus pour la loi de Makeham :

Garantie	A	B	C
Décès / PTIA (Assur-Obsèques)	0,005397	1,24E-05	1,107582
Décès / PTIA (XL Prévoyance)	-0,000325	1,20E-05	1,110772
Incapacité - Maladie Franchise 3 mois	0,000939	0,000060	1,109680
Incapacité - Accident Franchise 0	0,017820	0,002618	1,026040
Sortie par âge (Assur-Obsèques)	0,221350	-0,179700	1,001000
Sortie par âge (XL Prévoyance)	0,078936	2,07E-10	1,361700
Sortie par ancienneté	1,000000	-0,895861	1,003275

TAB. 2 – PARAMETRES DE LA LOI DE MAKEHAM

Nous remarquons également que dans le cas des sorties par ancienneté, le paramètre B est négatif.

2.1.3.2. Lissage par un modèle log-linéaire de type Poisson

Ce lissage est effectué à l'aide d'un modèle linéaire généralisé et plus particulièrement ce lissage est effectué via la procédure GENMOD disponible dans SAS. Avant de présenter le lissage effectué, introduisons dans un premier temps les modèles linéaires généralisés et la procédure GENMOD. Cette procédure sera d'ailleurs utilisée dans la suite du mémoire, par exemple dans la détermination des taux de rachat dans la modélisation stochastique du produit Assur-Obsèques.

▪ **Les modèles linéaires généralisés**

Le modèle linéaire traditionnel est de la forme $y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i$, où y_i est la variable de réponse pour la $i^{\text{ème}}$ observation. La quantité x_i est le vecteur colonne des variables explicatives non aléatoires, pour l'observation i . Le vecteur des paramètres inconnus β est estimé par la méthode des moindres carrés sur la donnée y . Les ε_i sont supposés être des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance constante. La valeur prédite de y_i , notée μ_i est $\mu_i = x_i' \beta$.

Le modèle linéaire généralisé est une extension du modèle linéaire traditionnel : il est donc applicable à un champ plus large d'analyse de données.

Les modèles linéaires généralisés sont composés en trois parties qui sont :

- La composante aléatoire : Les composantes de la variable aléatoire Y ont une loi de distribution normale et sont indépendantes avec $E[Y] = \mu$ et une variance constante σ^2 .
- Les composantes systématiques : les variables exogènes x_1, \dots, x_p produisent un prédicteur linéaire η donné par $\eta = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$.
- Le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique : $\mu = \eta$

Cette généralisation introduit un nouveau symbole η pour le prédicteur linéaire et la troisième spécification indique alors que μ et η sont identiques. Si l'on écrit $\eta_i = g(\mu_i)$ alors $g(\cdot)$ est appelée la fonction de lien.

Le modèle linéaire généralisé est élaboré à partir d'une distribution de probabilité pour la variable à expliquer et d'une fonction de lien appropriée.

Chacune des lois de distribution citée ci-dessous a une fonction de lien particulière pour laquelle il existe une statistique suffisante égale à la dimension de β dans le prédicteur linéaire η . Les liens pour les lois de distribution usuelle sont :

- Loi Normale : lien identité $\eta = \mu$
- Loi de Poisson : lien logarithmique $\eta = \log \mu$
- Loi Gamma : lien inverse ou logarithmique $\eta = \mu^{-1}$ ou $\eta = \log \mu$
- Loi Inverse Gaussienne : lien inverse carré $\eta = \mu^{-2}$

La variable de réponse Y , dont les réponses individuelles sont supposées indépendantes, a une distribution de probabilité extraite de la famille exponentielle :

$$f_Y(y, \theta, \varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi)\right)$$

Où φ est un paramètre de dispersion qui est soit une constante connue (si ce dernier est fixé, alors la famille de distribution est à un seul paramètre) soit sera estimé, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont des fonctions spécifiques et θ est un paramètre dit canonique.

La moyenne et la variance de Y découlent des équations du maximum de vraisemblance et sont :

$$E[Y] = b'(\theta) = \mu \text{ et } Var(Y) = b''(\theta)a(\varphi)$$

Les lois de distribution les plus courantes sont données ci-dessous :

- Loi Normale : $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- Loi de Poisson : $f(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}, y \in N$
- Loi Gamma : $f(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu)y} \left(\frac{y\nu}{\mu}\right)^\nu \exp\left(-\frac{y\nu}{\mu}\right), y > 0$
- Loi Inverse Gamma : $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3} \sigma} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2(\mu y)^2 y}\right), y > 0$

A partir des lois de distribution de la variable de réponse, nous déterminons la fonction de log-vraisemblance, qui est de la forme :

$$L_n(Y, \mu, \varphi) = \sum_i \log(f(y_i, \mu_i, \varphi)) = \sum_i l_i$$

Pour les lois de distribution usuelles nous avons :

- Loi Normale : $l_i = -0,5 \left[\frac{w_i (y_i - \mu_i)^2}{\varphi} + \log\left(\frac{\varphi}{w_i}\right) + \log(2\pi) \right]$
- Loi de Poisson : $l_i = y_i \log(\mu_i) - \mu_i$
- Loi Gamma : $l_i = \left(\frac{w_i}{\varphi}\right) \log\left(\frac{y_i w_i}{\varphi \mu_i}\right) - \frac{y_i w_i}{\varphi \mu_i} - \log(y_i) - \log\left(\Gamma\left(\frac{w_i}{\varphi}\right)\right)$
- Loi Inverse Gamma : $l_i = -0,5 \left[\frac{w_i (y_i - \mu_i)^2}{y_i \mu_i^2 \varphi} + \log\left(\frac{\varphi y_i^3}{w_i}\right) + \log(2\pi) \right]$

Pour obtenir le modèle, la fonction de log-vraisemblance est maximisée. L'algorithme de Newton-Raphson est généralement utilisé.

La qualité d'ajustement peut être mesurée de plusieurs manières, comme par exemple par la déviance ou le Khi deux de Pearson.

▪ **La procédure GENMOD de SAS**

La procédure GENMOD de SAS remplit les conditions des modèles linéaires généralisés tels que définis par Nelder et Wedderburn (1972). Cette procédure ajuste un modèle linéaire généralisé aux données par l'estimation du vecteur de paramètres β par le maximum de vraisemblance. Les paramètres du modèle sont estimés par un processus itératif.

Dans le lissage de nos taux bruts, nous utilisons la distribution de Poisson et le lien logarithmique.

La procédure SAS nous fournit dans ses sorties les informations sur le modèle, à savoir le fichier utilisé, la distribution choisie, la fonction de lien choisie, la variable de réponse, le poids utilisé, le nombre d'observations lues et le nombre d'observations utilisées.

The GENMOD Procedure	
Informations sur le modèle	
Data Set	TRANSIT.CASETARIF
Distribution	Poisson
Link Function	Log
Dependent Variable	Rx
Offset Variable	poids
Number of Observations Read	804
Number of Observations Used	804

TAB. 3 – SORTIE SAS : INFORMATIONS SUR LE MODELE DANS GENMOD

Dans l'exemple ci-dessus, nous remarquons que la distribution est celle de Poisson, le lien est la fonction logarithmique et l'ensemble des observations sont utilisées.

La procédure peut être exécutée avec des variables de classes ou sans, c'est-à-dire comme fonction continue. Dans le cas de l'utilisation des variables de classes, les variables explicatives utilisées dans le modèle ainsi que leurs modalités identifiées par la procédure sont données dans la sortie SAS. Dans l'exemple ci-dessous, la variable « x » présente 43 niveaux ayant des valeurs comprises entre 18 et 60 ans et la variable « anc » présente 23 niveaux ayant des valeurs comprises entre 0 et 22 ans. Dans le cas de la fonction continue, ces informations ne sont pas données.

Informations sur le niveau de classe		
Classe	Niveaux	Valeurs
x	43	18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
anc	23	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

TAB. 4 – SORTIE SAS : CAS DES VARIABLES DE CLASSE

La procédure fournit les critères de qualité d'ajustement du modèle. Ces statistiques sont utiles pour juger de l'adéquation du modèle. Les statistiques fournies sont la déviance, la déviance normée, le Khi deux de Pearson, le Khi-deux de Pearson normé et la log-vraisemblance.

Critère pour évaluer la qualité de l'ajustement			
Critère	DF	Valeur	Valeur/DF
Deviance	800	3126.8835	3.9086
Scaled Deviance	800	3126.8835	3.9086
Pearson Chi-Square	800	3616.3400	4.5204
Scaled Pearson X2	800	3616.3400	4.5204
Log Likelihood		157625.4921	

TAB. 5 – SORTIE SAS : CRITERE DE QUALITE D'AJUSTEMENT

Ces critères permettent de comparer les modèles et de sélectionner celui dont la qualité de l'ajustement est la meilleure.

La procédure fournit ensuite les résultats du processus itératif d'estimation des paramètres β . Pour chaque paramètre du modèle, la procédure fournit le nom du paramètre, les degrés de liberté qui lui sont associés, sa valeur estimée, l'écart-type du paramètre estimé, l'intervalle de confiance de Wald à 95%, ainsi que le Khi-deux et la p-valeur associée pour le test de la significativité du paramètre dans le modèle.

L'intervalle de confiance de Wald à 95 % ($\alpha = 5\%$) est donné par la formule suivante :

$$IC_{95\%}(\beta) = \left[\hat{\beta} \pm z_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma} \right] = \left[\hat{\beta} \pm z_{97,5\%} \times \hat{\sigma} \right]$$

Où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile à $1-\alpha/2$ % de la distribution normale, $\hat{\beta}$ est le paramètre estimé et $\hat{\sigma}$ est l'estimation de l'erreur standard.

Si une colonne de la matrice du modèle correspond à un paramètre dépend linéairement de colonnes correspondants aux paramètres précédents dans le modèle, la procédure assigne 0 degré de liberté et fournit la valeur 0 à la fois pour l'estimation du paramètre et pour son écart-type.

Analyse des résultats estimés de paramètres							
Paramètre	DF	Estimation	Erreur standard	Wald 95	Limites de confiance %	Khi 2	Pr > Khi 2
Intercept	1	-1.7410	0.0666	-1.8715	-1.6105	683.48	<.0001
x	1	-0.0399	0.0035	-0.0467	-0.0331	132.46	<.0001
x2	1	0.0006	0.0000	0.0005	0.0007	178.85	<.0001
anc	1	-0.0473	0.0011	-0.0495	-0.0452	1842.78	<.0001
Scale	0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000		

TAB. 6 – SORTIE SAS : PARAMETRES ESTIMES

Dans le tableau ci-dessus, les p-valeur associées à chaque paramètre sont inférieures à 0.0001, ce qui indique que les paramètres retenus sont tous significatifs.

Il est également important de vérifier l'importance des effets principaux dans le modèle. Deux analyses génèrent des tests statistiques pour la significativité de ces effets : une analyse séquentielle des variables utilisées (analyse de type 1) et une analyse comparative des variables explicatives (analyse de type 3).

L'analyse de type 1 consiste en un ajustement séquentiel de modèles emboîtés, en commençant par le modèle avec un terme constant et en continuant jusqu'au modèle totalement spécifié, en ajoutant une variable explicative à chaque étape. La statistique du ratio de vraisemblance, double de la différence entre les log-vraisemblances, est calculée entre chaque modèle successif. Ce type d'analyse est aussi appelée analyse de la déviance.

Une stratégie pour la sélection de variables est d'ajuster une séquence de modèles, en commençant par un modèle simple avec seulement un terme constant, et en ajoutant une variable explicative dans chaque modèle successif. On peut mesurer l'importance de la variable explicative additionnelle par la différence des déviations entre les modèles successifs. Les tests asymptotiques calculés par la procédure GENMOD permettent d'estimer l'influence statistique de la variable additionnelle. Les résultats de cette analyse cependant dépendant de l'ordre dans lequel les variables sont introduites.

Cette analyse consiste en la spécification d'un modèle et dans le calcul de statistiques de ratio de vraisemblance pour des fonctions de type 3 pour chaque variable du modèle. Une fonction estimable du type 3 pour une variable est une fonction linéaire des paramètres du modèle qui implique les modalités de la variable et toutes les interactions avec les autres. Cette analyse ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont spécifiés les termes du modèle.

Statistiques LR pour Analyse de Type 1				
Source	Écart	DF	Khi 2	Pr > Khi 2
Intercept	5372.1942			
x	5328.3187	1	43.88	<.0001
x2	5091.0704	1	237.25	<.0001
anc	3126.8835	1	1964.19	<.0001

Statistiques LR pour Analyse de Type 3			
Source	DF	Khi 2	Pr > Khi 2
x	1	129.85	<.0001
x2	1	174.80	<.0001
anc	1	1964.19	<.0001

TAB. 7 – SORTIE SAS : SIGNIFICATIVITE DES EFFETS

Dans l'exemple ci-dessus, si bien dans l'analyse de type 1, que dans l'analyse de type 3, l'ensemble des effets sont significatifs.

2.1.4. Résultats obtenus

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus par les deux méthodes de lissage présentées ci-dessus. L'ensemble de ces résultats seront utilisés dans les modélisations déterministes misent en place.

2.1.4.1. Les taux de décès

Nous intégrons dans les graphiques, les probabilités de la TD88-90. Les taux de décès ont été déterminés en fonction de l'âge de l'assuré.

- **Lissage des taux bruts de décès pour Assur-Obsèques**

Les âges retenus pour le lissage sont compris entre 45 et 95 ans. Pour les âges inférieurs à 45 ans ou supérieurs à 95 ans, le nombre de décès observé est non significatif.

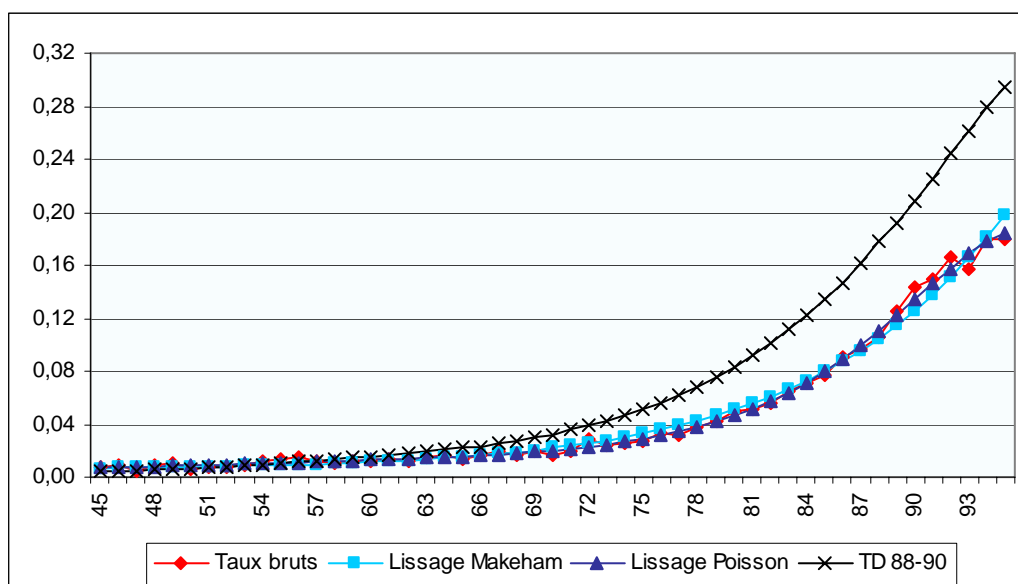
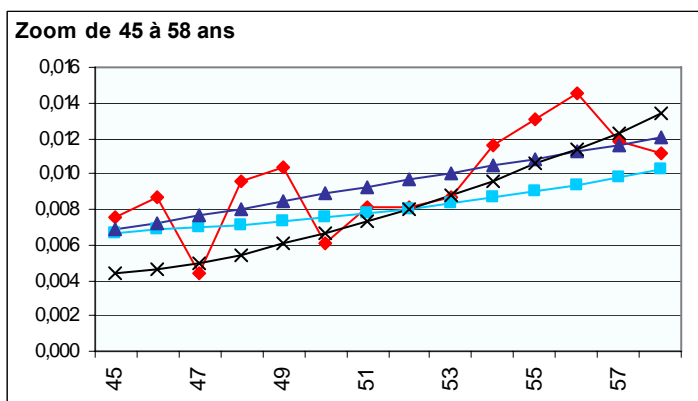


FIG. 4 ET 4 BIS – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE DECES PAR LES METHODES - ASSUR-OBSEQUES

Les deux méthodes de lissage fournissent des résultats très semblables.

D'autre part, nous avons remarqué précédemment que des taux bruts de décès observés sont supérieurs à la TD88-90. Après lissage, le même phénomène est observé : pour les âges compris entre 45 et 55 ans dans le lissage de Poisson et pour les âges compris entre 45 et 52 ans dans le lissage de Makeham, les taux lissés sont supérieurs à la TD88-90.



Dans la modélisation, nous retenons les taux d'expérience par lissage de Poisson et pour les âges inférieurs à 45 ans et les âges supérieurs à 95 ans, nous utilisons un abattement de la TD88-90.

▪ Lissage des taux bruts de décès pour XL Prévoyance

Comme dans le cas d'Assur-Obsèques, les taux de décès ont été déterminés en fonction de l'âge de l'assuré. Les âges retenus pour le lissage sont compris entre 30 et 70 ans. Pour les âges inférieurs à et supérieurs, le nombre de décès observé est non significatif.

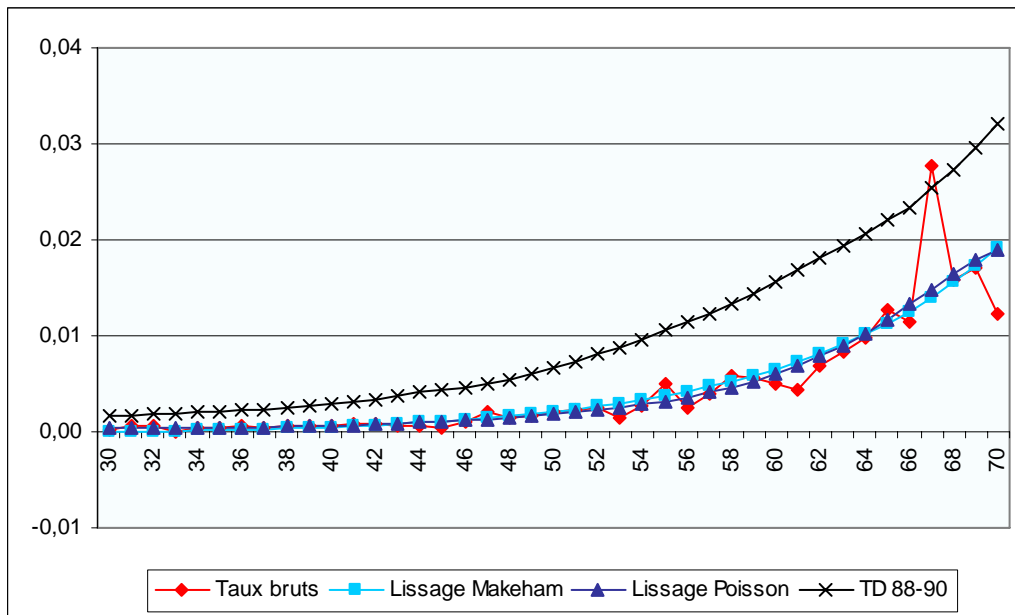


FIG. 5 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE DECES - XL PREVOYANCE

Les deux méthodes de lissage utilisées donnent des résultats très similaires. Mais le lissage de Makeham fournit une probabilité de survivre au moins un an pour une personne de 30 ans négative. Dans le prévisionnel nous décidons ainsi de retenir le lissage de Poisson.

En comparant le lissage de Poisson avec la TD88-90, nous observons un abattement décroissant avec l'âge de près de 80 % à 40 %.

2.1.4.2. Les taux de passage en incapacité

Dans le cas de l'incapacité, nous avons des franchises nettement différentes selon la cause du sinistre : 0 jour en cas d'accident et 90 jours en cas de maladie.

Cette différence de durée de franchise étant importante, nous décidons d'élaborer des taux de passage en incapacité différents selon la cause et sa franchise associée.

▪ **Taux de passage en incapacité pour la franchise 90 jours maladie**

Les âges retenus sont compris entre 25 et 60 ans. Le nombre d'entrée en incapacité de travail en dehors de cet intervalle d'âge est en effet non significatif.

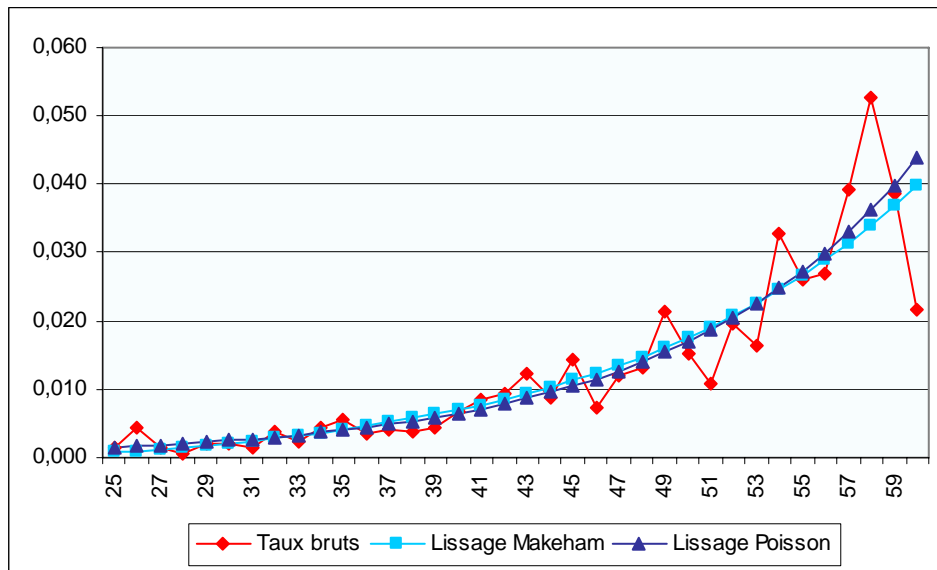


FIG. 6 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE PASSAGE EN INCAPACITE FRANCHISE 90 JOURS POUR XL PREVOYANCE

Les résultats obtenus suite aux deux méthodes de lissage sont semblables et comme précédemment nous décidons de retenir les taux obtenus par le lissage de Poisson.

▪ **Taux de passage en incapacité pour la franchise 0 jours accident**

Les âges retenus ici sont compris entre 20 et 60 ans. La franchise étant nulle, nous observons d'avantage d'entrée en incapacité que dans le cas d'une franchise de 90 jours.

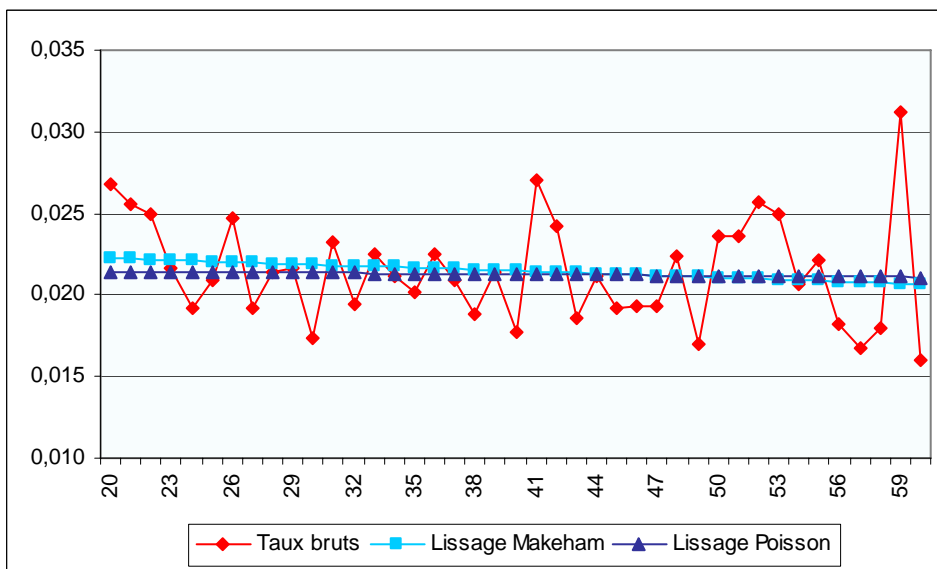


FIG. 7 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE PASSAGE EN INCAPACITE SANS FRANCHISE - XL PREVOYANCE

Les résultats des deux lissages sont très semblables. On observe une légère décroissance des taux. Comme précédemment nous décidons de retenir les taux obtenus par le lissage de Poisson.

2.1.4.3. Les taux de sortie

Finalement nous déterminons les taux de sortie pour les deux produits étudiés. Nous distinguons les sorties en fonction de l'âge de l'assuré et en fonction de l'ancienneté du contrat. Nous n'avons pas suffisamment de données pour élaborer les taux de sorties croisés en fonction de l'âge de l'assuré et de l'ancienneté du contrat.

▪ Taux de sortie en fonction de l'âge de l'assuré

Dans un premier temps, observons les taux de sorties (i.e. de rachats) pour le produit Assur-Obseques. Les âges retenus sont de 21 à 95 ans. Pour les âges inférieurs et supérieurs, aucune sortie n'est observée.

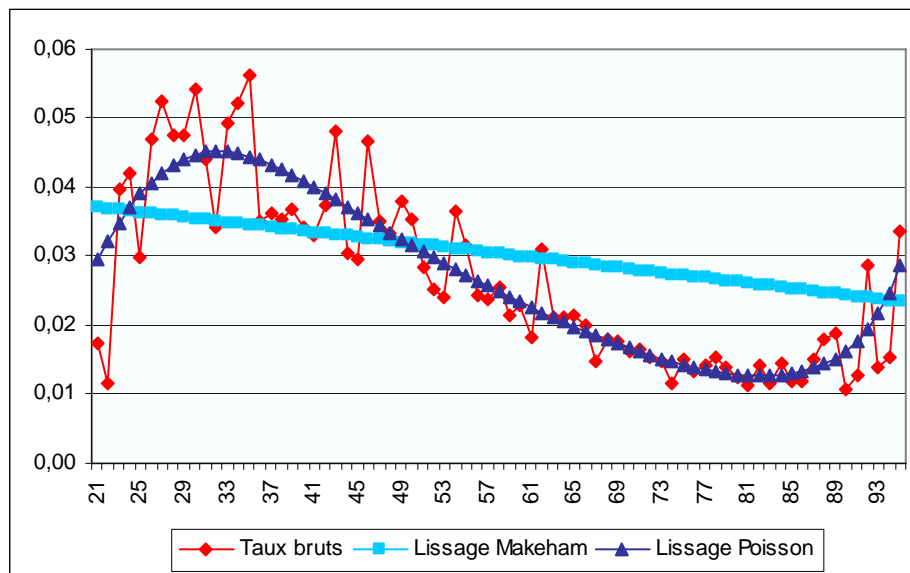


FIG. 8 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE SORTIE EN FONCTION DE L'ÂGE DE L'ASSURÉ - ASSUR-OBSEQUES

Nous remarquons immédiatement que le lissage de Makeham n'est pas adapté aux données brutes relativement aux sorties ; en effet ce modèle est un modèle exponentiel spécifique à la mortalité. Le lissage de Poisson, qui suit d'avantage les taux bruts observés, est retenu pour la modélisation.

Nous remarquons que les sorties surviennent d'avantage pour les âges jeunes (inférieurs à 32 ans) et diminuent ensuite jusqu'à 85 ans. Après 85 ans, les taux de sorties augmentent à nouveau.

Dans un second temps nous déterminons les taux de sortie pour le produit XL Prévoyance. Les âges retenus sont compris entre 18 et 60 ans.

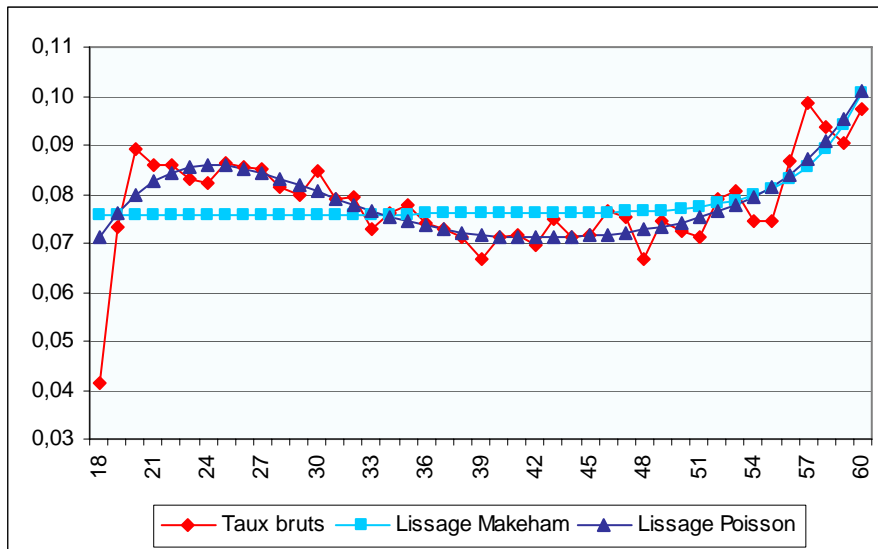


FIG. 9 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE SORTIE EN FONCTION DE L'AGE DE L'ASSURE - XL PREVOYANCE

Dans le lissage de Makeham, le paramètre B étant très faible ($2,07 \times 10^{-10}$), la courbe lissée reste quasi-plate jusqu'à 50 ans pour augmenter après 50 ans. Le lissage de Poisson fournit des taux de sortie croissant de 18 à 24 ans et de 42 à 60 ans. Pour les âges intermédiaires, les taux de sorties sont décroissants.

▪ **Taux de sortie en fonction de l'ancienneté du contrat**

Pour le produit XL Prévoyance, nous déterminons également les taux de sortie en fonction de l'ancienneté. Sur le portefeuille nous observons des anciennetés de contrats comprises entre 0 et 22 ans. Les résultats obtenus pour sont les suivants :

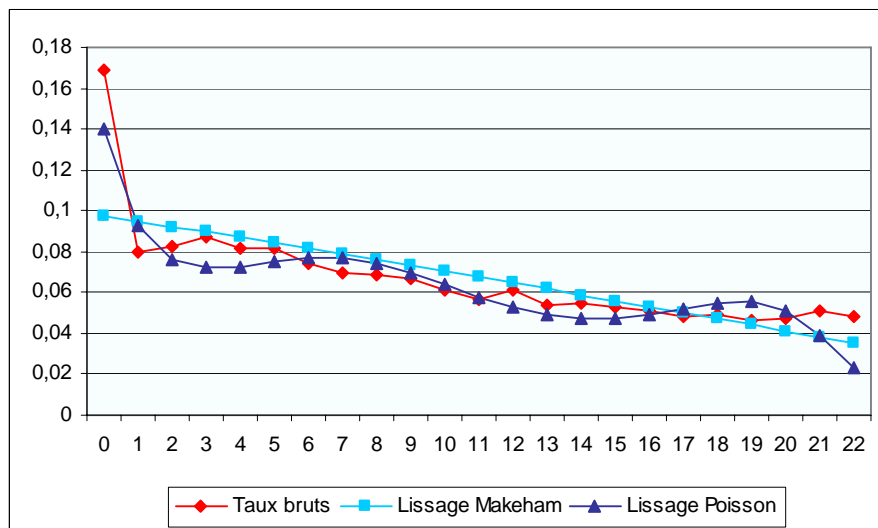


FIG. 10 – LISSAGE DES TAUX BRUTS DE SORTIE EN FONCTION DE L'ANCIENNETE - XL PREVOYANCE

Aux vues des résultats obtenus dans les deux cas, nous décidons de retenir pour le prévisionnel les taux de sortie en fonction de l'ancienneté des contrats obtenus par le lissage de Poisson.

2.2. Assur-Obsèques

Nous allons débuter par une brève présentation du produit Assur-Obsèques, puis nous détaillerons la projection des éléments du compte technique d'une part sur les contrats en stock et d'autre part sur les affaires nouvelles escomptées. Nous terminerons par évoquer le calcul de la participation aux bénéficiaires, le calcul de la valeur des cash-flows futurs qui fournit un indicateur de la valeur du portefeuille, et par une présentation des résultats obtenus.

L'année de démarrage du prévisionnel est notée N et les années de projection sont $N+t$, où t varie de 1 à la limite du prévisionnel, fixée à 30 ans. Pour alléger les notations, nous noterons les flux en $N+t$ par t uniquement.

2.2.1. Présentation du produit

Il s'agit d'un contrat collectif d'assurance sur la vie à adhésions individuelles et facultatives régi par le Code des Assurances. L'objet du contrat est de garantir le versement d'un capital au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) au décès de l'assuré.

▪ Les garanties

La garantie de base est le versement d'un capital assuré choisi librement par l'adhérent avec un minimum de 1.500 € et un maximum de 10.000 €. La garantie s'applique en cas de décès de l'assuré quelle qu'en soit la cause.

Le capital versé permet de prendre en charge les frais d'obsèques en désignant, par exemple, une entreprise de pompes funèbres et de prendre en charge des frais de successions que les héritiers devraient payer.

A cette garantie de base s'ajoute la garantie assistance. Les prestations sont des informations sur les obsèques (les sociétés de pompes funèbres, le transport du corps, le règlement des frais d'obsèques...), des informations sur les successions (les démarches auprès des différents organismes, le règlement et la répartition de la succession...) et un service de mémorisation des données. Ce dernier service permet de recueillir des souhaits de l'assuré concernant l'organisation de ses obsèques et de les restituer au moment de son décès au chargé de mémoire qu'il aura désigné, pour que ses volontés puissent être réalisées.

▪ Conditions d'admission et adhésion

Ce contrat s'adresse à toute personne physique désirant, de son vivant, éviter à ses héritiers les frais liés à son décès. Il permettra à une personne désignée, c'est-à-dire le bénéficiaire, de disposer d'un capital pour prendre en charge les différents frais funéraires.

L'âge minimum de souscription est de 18 ans et l'âge maximum est de 69 ans pour le fractionnement unique et 85 ans pour les autres fractionnement, et cela sans formalité médicale.

▪ Les bénéficiaires

Le(s) bénéficiaire(s) est (sont) désigné(s) sur le bulletin d'adhésion : l'assuré peut désigner la (les) personne(s) de son choix ou une entreprise de pompes funèbres comme bénéficiaire(s) du capital en cas de décès.

A tout moment, l'assuré peut modifier la désignation de bénéficiaire, en avisant par écrit l'assureur.

- **Les cotisations**

Les cotisations dépendent de l'âge de l'assuré lors de l'adhésion et du montant de capital choisi.

Deux possibilités sont proposées pour le paiement des cotisations : paiement par cotisations viagères, celles-ci restent constantes dans le temps ou paiement par cotisation unique à l'adhésion.

- **Le délai de carence**

En cas de décès de l'assuré par maladie, au cours des deux premières années, les cotisations payées sont remboursées au(x) bénéficiaire(s) désigné(s). Le délai de carence est donc de deux ans.

- **Le rachat total**

L'adhérent a la possibilité de mettre fin à son contrat, c'est-à-dire de demander le rachat de l'adhésion. Il perçoit alors une somme appelée valeur de rachat. Le versement de cette somme libère définitivement l'assureur de toutes ses obligations.

Le rachat peut intervenir à tout moment après paiement de la prime unique ou après acquittement de deux années de cotisations viagères. La valeur de rachat est égale à la provision mathématique du contrat calculée à la date de demande sur la base des cotisations payées hors assistance.

Le paiement de la valeur de rachat est effectué à l'adhérent sans aucune pénalité, sur présentation de l'original de la demande d'adhésion dans les deux mois qui suivent la demande de rachat. Le rachat met fin à l'adhésion.

- **La fiscalité**

Le capital versé au bénéficiaire est exonéré de tout droit de succession. Seules sont soumises aux droits de succession, les cotisations versées après 70 ans excédant 30.500 € sur des contrats souscrits à compter du 20/11/1991.

2.2.2. Projection du stock

Nous disposons d'un inventaire des contrats au 31/12/N. Cet inventaire contient entre autres, la date de naissance de l'assuré, la date d'effet du contrat, le montant du versement en cas de décès, le fractionnement et la prime sur une base annuelle. Le fractionnement peut être unique, annuel, semestriel, trimestriel ou mensuel. Dans cette modélisation, le calcul des flux futurs se fait contrat par contrat.

Conformément à la notice du produit, l'âge de l'assuré est déterminé par différence de millésime, i.e. année d'inventaire – année d'effet du contrat.

Notons j l'indice du $j^{\text{ième}}$ contrat (au total J contrats) et x_j l'âge de l'assuré j à l'inventaire.

L'utilisation d'une table de mortalité d'expérience propre au produit constitue un avantage à cette démarche de valorisation du portefeuille. Comme indiqué en annexe 1, l'indice * signifie l'utilisation de probabilités d'expérience qui peuvent par conséquent être différentes de celles ayant servies à établir le tarif. Pour illustrer cette différence, nous comparons le tarif annuel pour 1 € garanti à la mortalité d'expérience :

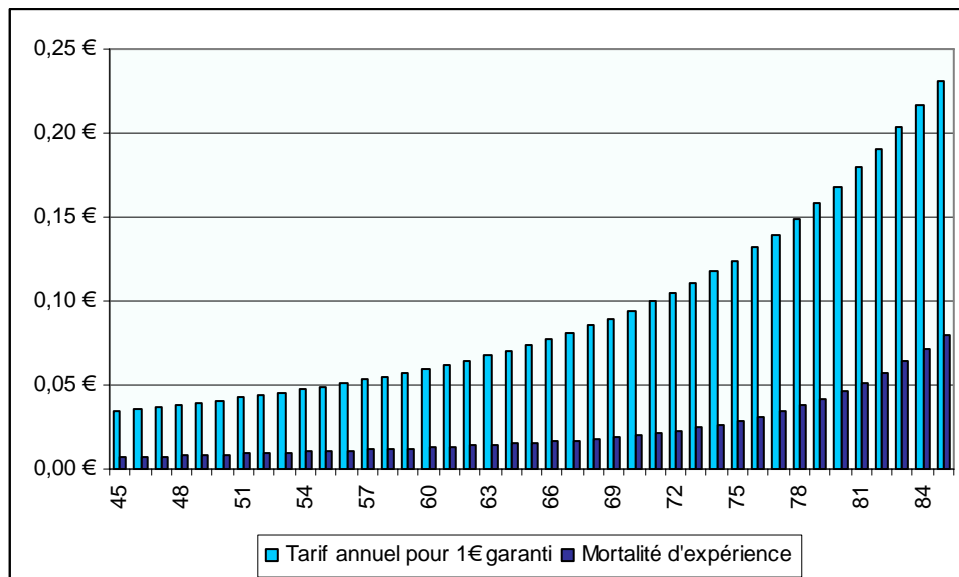


FIG. 11 – COMPARAISON DU TARIF ANNUEL POUR 1 € GARANTI ET DE LA MORTALITE D'EXPERIENCE

Nous remarquons immédiatement que la mortalité d'expérience est nettement inférieure au tarif pratiqué, ce qui permet de dégager un bénéfice technique.

La probabilité de présence dans t années d'une personne d'âge x en utilisant les probabilités d'expériences est notée ${}_t\lambda_x^*$: elle est le produit de la probabilité qu'une personne d'âge x survive au moins t années par la probabilité que cette même personne ne sorte pas durant ces t années. Par conséquent, ${}_t\lambda_x^*$ s'écrit :

$${}_t\lambda_x^* = {}_tP_x^* \left(\prod_{i=0}^{t-1} (1 - s_{x+i}^*) \right) = {}_{t-1}\lambda_x^* \times P_{x+t-1}^* (1 - s_{x+t-1}^*)$$

Cette probabilité sera utilisée dans l'ensemble du prévisionnel pour la projection des flux si bien pour le stock que pour les affaires nouvelles.

2.2.2.1. Le nombre de contrats

Le nombre de contrats espérés au 31/12/N+t est :

$$\text{Nombre contrats espérés}(t) = \sum_{j=1}^J {}_t\lambda_{x_j}^*$$

En effet ${}_t\lambda_x^*$ est la probabilité de présence dans t années d'une personne d'âge x possédant un contrat Assur-Obsèques.

2.2.2.2. Les primes et de commissions

En notant $Prime_j$ la prime annuelle du $j^{\text{ième}}$ contrat et en supposant que les sorties se font en moyenne au milieu d'année, la valeur espérée des primes acquises dans l'année N+t est donnée par :

$$\text{Primes espérées}(t) = \sum_{j=1}^J Prime_j(t) \times \frac{{}_{t-1}\lambda_{x_j}^* + {}_t\lambda_{x_j}^*}{2}$$

Les commissions se déduisent contrat par contrat en appliquant les taux adéquats :

$$\text{Commissions espérées}(t) = \sum_{j=1}^J Prime_j(t) \times \text{taux commissions} \times \frac{{}_{t-1}\lambda_{x_j}^* + {}_t\lambda_{x_j}^*}{2}$$

2.2.2.3. Les sinistres

Notons $K_{décès_j}$, le montant versé au moment du décès pour le contrat j. Ce montant tient compte du délai de carence de deux ans. C'est-à-dire que le capital versé est soit égal au capital garanti, $capital_j$, si le décès a lieu après les deux ans suivant la souscription ou bien égal au montant des primes payées dans le cas contraire.

$$K_{décès_j}(t) = \begin{cases} \sum \text{primes payées} & \text{si } t < 2 \\ capital_j & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

La charge de sinistre imputable à chaque contrat est donc la probabilité que le contrat soit présent au 1^{er} janvier N+t multiplié par la probabilité de décéder dans l'année, c'est-à-dire à l'âge $x+t-1$, le tout multiplié par le montant du capital garanti :

$$\text{Sinistres espérés}(t) = \sum_{j=1}^J K_{décès_j}(t) \times {}_{t-1}\lambda_{x_j, a_j}^* \times q_{x_j+t-1}^*$$

2.2.2.4. Les sorties

Les flux de sorties représentent les flux de rachat total. Ces rachats sont possibles à tout moment en cas de fractionnement unique et ne sont possibles qu'après acquittement de deux années de cotisations viagères pour les autres fractionnements.

En cas de rachat du contrat, l'assureur verse à l'assuré la provision mathématique constituée. Par conséquent, les flux de sorties espérés au 31/12/N+t sont :

$$\text{Sorties espérés}(t) = \sum_{j=1}^J PM_j(t) \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \times s_{x_j+t-1}^* \times 1_{\{anc \geq 2 \cup fract=U\}}$$

En effet, l'assuré doit être présent jusqu'au 01/01/N+t et sortir dans l'année.

2.2.2.5. Les provisions

La seule provision mise en place pour le contrat Assur-Obsèques est la provision mathématique, qui est appelée par abus de langage la provision pour risques croissants (PRC). Elle a pour objet de prendre en compte l'augmentation du risque de mortalité avec l'âge de l'adhérent lorsque la prime ne peut être ajustée. L'article R331-3 du Code des Assurances définit la provision mathématique comme « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés ». Elle permet à l'assureur d'honorer ses engagements à tout moment.

L'engagement de l'assureur et l'engagement de l'assuré au 31/12/N+t+k sont respectivement :

$$\text{Engagement assureur}_j^k = \frac{\text{capital}_j \times (M_{x_j+t+k} + \text{frais} \times N_{x_j+t+k})}{D_{x_j+t+k}}$$

$$\text{Engagement assuré}_j^k = \frac{\text{prime}_j \times N_{x_j+t+k}}{D_{x_j+t+k}}$$

En traduisant la définition donnée par le Code, la provision mathématique au 31/12/N+t et au 31/12/N+t+1 sont respectivement :

$$PM_j^0 = \frac{\text{capital}_j \times (M_{x_j+t} + \text{frais} \times N_{x_j+t}) - \text{prime}_j \times N_{x_j+t}}{D_{x_j+t}}$$

$$PM_j^1 = \frac{\text{capital}_j \times (M_{x_j+t+1} + \text{frais} \times N_{x_j+t+1}) - \text{prime}_j \times N_{x_j+t+1}}{D_{x_j+t+1}}$$

La PM au bilan est déterminée au prorata de la durée entre la date d'échéance annuelle précédente et la date d'inventaire (durée 1) et de la durée entre les deux échéances annuelles (durée 2).

$$PM_j(t) = PM_j^0 + (PM_j^1 - PM_j^0) \times \frac{\text{durée 1}}{\text{durée 2}}$$

Notons que cette provision mathématique est déterminée à partir de la table réglementaire et la PM espérée est le produit de la PM et de la probabilité de présence issue de la table d'expérience.

La PM espérée au 31/12/N+t est alors : $PM \text{ espérée}(t) = \sum_{j=1}^J PM_j(t) \times_t \lambda_{x_j}^*$

2.2.3. Projection des affaires nouvelles

Le principe de projection des affaires nouvelles est tout à fait identique à celui de la valorisation du portefeuille à une différence près : nous ne disposons pas d'un état au 31/12/N, avec N la dernière année durant laquelle des affaires sont susceptibles de rentrer. Le volume d'affaires nouvelles escompté correspond au nombre de souscription observé en 2006 sur le portefeuille diminué de 10 % par an. Nous supposons donc que les souscriptions vont suivre un rythme décroissant :

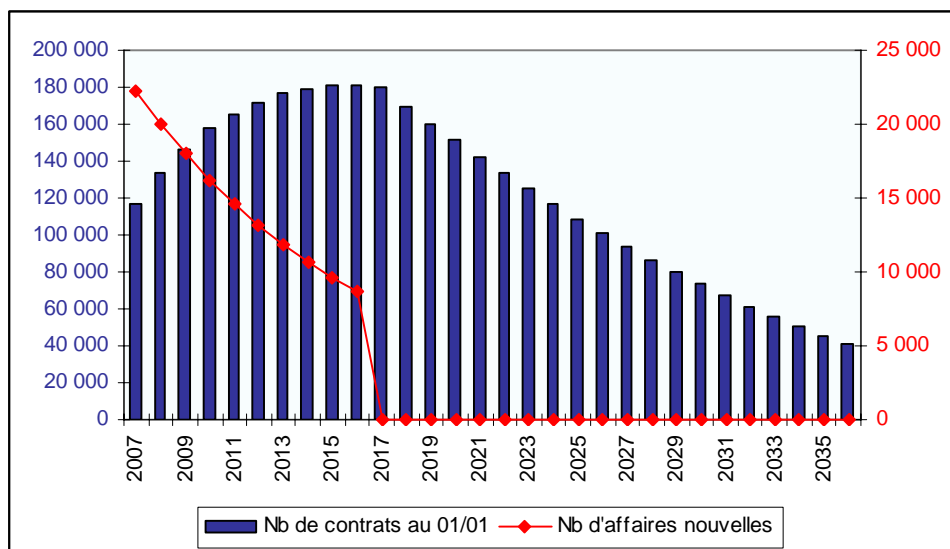


FIG. 12 – ÉVOLUTION DU NOMBRE DE CONTRATS ET DES AFFAIRES NOUVELLES – ASSUR OBSEQUES

Nous supposons par la suite que les affaires nouvelles sont simulées d'après la répartition par âge à la souscription qui suit celle observée sur le portefeuille.

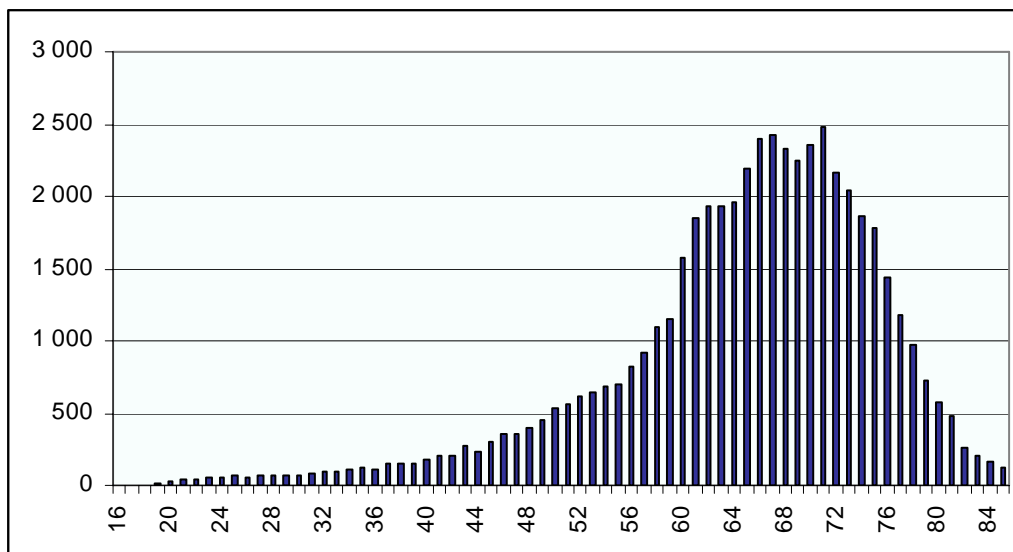


FIG. 13 – REPARTITION DE L'AGE A LA SOUSCRIPTION ASSUR-OBSEQUES AU 31/12/2006

La prime est recalculée pour chaque contrat simulé en fonction de l'âge à la souscription et du capital garanti moyen de 3500 €.

En comparaison avec les durées de projections effectuées dans le cadre du calcul de la valeur économique (« Appraisal value », qui est la somme de la valeur intrinsèque, « Embedded Value » et de la production future, « Goodwill »), on escompte de rentrer des affaires nouvelles au cours des 10 prochaines années.

Les années d'entrée sont numérotées $k=0\dots 9$. On simule J_k contrats la $k^{\text{ième}}$ année et on note x_{jk} l'âge à la souscription du $j^{\text{ième}}$ contrat de la $k^{\text{ième}}$ année.

La probabilité de sortir au cours de l'année de souscription est établie au prorata temporis de durée séparant la date d'effet de la fin d'année.

En notant durée le nombre de jours séparant la date d'effet du 31/12 divisé par le nombre de jours que compte l'année, la probabilité de présence au cours de la première année sous l'hypothèse d'une répartition uniforme des décès est :

$$P_{x_j}^* = \left(1 - \text{durée} \times q_{x_j}^*\right) \left(1 - \text{durée} \times s_{x_j}^*\right)$$

Nous détaillons brièvement l'ensemble des flux projetés.

2.2.3.1. Le nombre de contrats

Le nombre de contrats présents au 31/12/N+t est égal à :

$$\text{Nbre contrats espérés}(t) = \sum_{k=0}^{\min(t,9)} \sum_{j=1}^{J_k} P_{x_{jk}}^* \times_{t-k} \lambda_{x_{jk}}^*$$

2.2.3.2. Les primes et de commissions

En suivant le même raisonnement que précédemment, nous établissons :

$$\text{Primes espérées}(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}} \sum_{k=0}^{\min(t-1,9)} \sum_{j=1}^{J_k} \text{Prime}_{jk}(t) \times P_{x_{jk}}^* \times \frac{{}_{t-1-k} \lambda_{x_{jk}}^* + {}_{t-k} \lambda_{x_{jk}}^*}{2} \\ + \mathbf{1}_{\{t \leq 9\}} \sum_{j=1}^J \text{duree} \times \text{Prime}_{jt}(t) \times \frac{1 + P_{x_{jt}}^*}{2}$$

En effet, le total des primes espérées au 31/12/N+t est la somme des primes des contrats simulés avant l'année N+t et des primes des nouveaux contrats simulés en N+t. Pour ces contrats simulés en N+t, on pondère la prime par la durée de présence en N+t et on la multiplie par la moyenne de la probabilité de présence en fin d'année et la probabilité de présence à la souscription, qui est de 1. En effet, nous supposons que le sinistre a eu lieu en milieu de période entre la souscription et la date d'inventaire.

Les commissions sont déterminées en appliquant les taux de commissions adéquats.

2.2.3.3. Les sinistres

Comme précédemment, le capital versé en cas de sinistre n'est égal au montant assuré que si le sinistre a eu lieu après un délai de deux ans. Dans le cas contraire le remboursement des primes est effectué.

Nous obtenons les flux de primes espérées suivants :

$$\begin{aligned} \text{Sinistres espérées}(t) = & 1_{\{t \geq 1\}} \sum_{k=0}^{\min(t-1,9)} \sum_{j=1}^{J_k} K\text{décès}_{jk}(t) \times P_{x_{jk}}^* \times_{t-1-k} \lambda_{x_{jk}}^* \times q_{x_{jk}+t-1-k}^* \\ & + 1_{\{t \leq 9\}} \sum_{j=1}^J \text{durée} \times K\text{décès}_{jt}(t) \times q_{x_{jt}}^* \end{aligned}$$

Les sinistres espérés sont composés des sinistres des contrats simulés avant N+t et des sinistres des contrats simulés en N+t.

2.2.3.4. Les sorties

Comme évoqué dans la présentation du produit, les sorties ne peuvent avoir lieu qu'après deux années de versement de cotisations viagères ou immédiatement en cas de fractionnement unique. Par conséquent, les affaires nouvelles souscrites en N+t ne donnent pas droit au versement de la provision mathématique avant en N+t+2.

Les flux de sorties espérés au 31/12/N+t sont :

$$\text{Sorties espérées}(t) = 1_{\{t-k \geq 2 \cap \text{fract} = U\}} \sum_{k=0}^{\min(t-1,9)} \sum_{j=1}^{J_k} PM_{jk}(t) \times P_{x_{jk}}^* \times_{t-1-k} \lambda_{x_{jk}}^* \times s_{x_{jk}+t-1-k}^*$$

2.2.3.5. Les provisions

En suivant le même raisonnement que précédemment, les PM et de PENA espérés au 31/12/N+t sont :

$$PM \text{ espérée}(t) = \sum_{k=0}^{\min(t,9)} \sum_{j=1}^{J_k} P_{x_{jk}}^* \times_{t-k} \lambda_{x_{jk}}^* \times PM_{jk}(t)$$

$$PENA \text{ espérée}(t) = \sum_{k=0}^{\min(t,9)} \sum_{j=1}^{J_k} P_{x_{jk}}^* \times_{t-k} \lambda_{x_{jk}}^* \times PENA_{jk}(t)$$

2.2.4. Calcul de la participation aux bénéfices

D'après l'article L331-1 du Code des Assurances, « les entreprises d'assurance doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent » et ceci par l'intermédiaire de la participation aux bénéfices. Cette dernière peut être versée en espèces (peu pratiqué) ou affectée intégralement et immédiatement au contrat. L'assureur peut aussi choisir d'en différer le versement, pour tout ou partie, et constituer une réserve pour les

années futures appelée provision pour participation aux bénéfices. Il doit toutefois redistribuer ces bénéfices dans les huit ans qui suivent leur constatation. En cas de conjoncture difficile, les assureurs peuvent être amenés à utiliser cette provision pour participation aux bénéfices, qui permet de lisser dans le temps les bonnes et les mauvaises années et d'offrir ainsi un taux de rendement stable aux assurés.

Dans la modélisation, cette participation aux bénéfices (PB) est calculée séparément des flux de projection de stock et des affaires nouvelles. Dans une première étape, le compte technique vie est reconstitué en fonction de l'ensemble des flux projetés. A partir de ce compte, la PB peut être déterminée.

Le compte technique reprend l'ensemble des charges et produits techniques au sens du Plan Comptable des Assurances. Il permet de déterminer le résultat technique de l'exercice. Nous distinguons deux comptes techniques selon l'activité : le compte technique vie et non vie. Selon la nature des opérations pratiquées par la société, cette dernière établira le et les compte(s) technique(s) nécessaires, en effet les sociétés mixtes établiront les deux comptes techniques. Les comptes techniques vie et non vie sont disponibles en annexe 3.

Selon le Code des Assurances, les entreprises d'assurances doivent distribuer au minimum 90% de leurs bénéfices techniques et 85% de leurs bénéfices financiers. Les bénéfices techniques correspondent à l'excédent des primes acquises en sus des pertes et dépenses engagées et les bénéfices financiers correspondent à l'excédent des produits financiers en sus des charges financières et des frais de gestion des placements.

Dans le cas du produit Assur Obsèques, si le compte de résultat fait apparaître un solde créditeur, il a été contractuellement posé que 90% de ce solde sont affectés à la participation aux résultats techniques et financiers et à la provision pour égalisation du contrat. Par contre, si le solde est débiteur, celui-ci sera prélevé sur la provision pour égalisation. En cas d'insuffisance du montant de la réserve, le solde sera reporté au débit du compte de résultat suivant.

Après calcul des provisions pour Assur-Obsèques, nous observons leur évolution probable et celle du montant de la revalorisation associée en milliers :

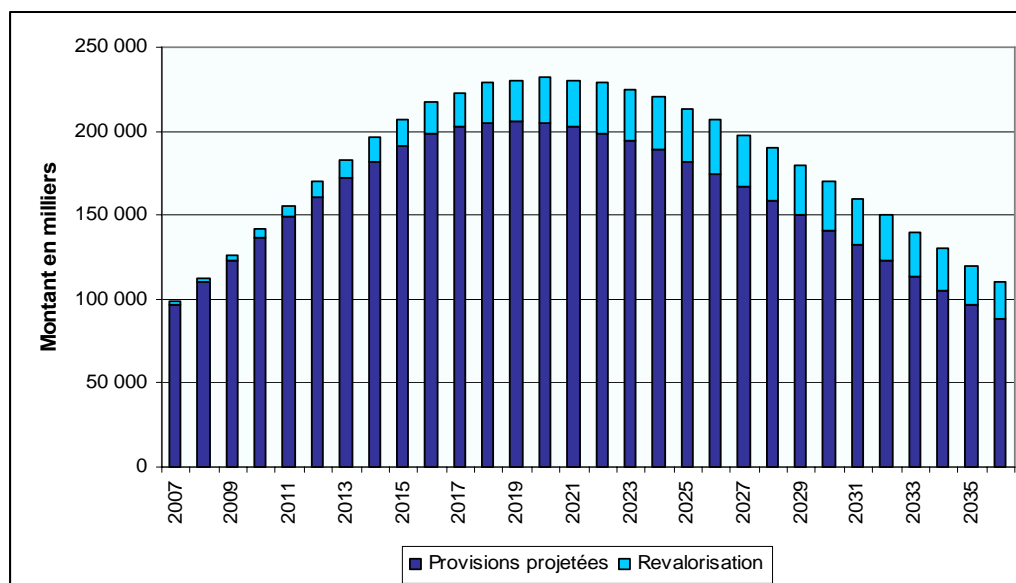


FIG. 14 – ÉVOLUTION PROBABLE DES PROVISIONS ET DE LA REVALORISATION - ASSUR-OBSEQUES

2.2.5. Calcul de la valeur de cash-flows futurs

La dernière étape dans la modélisation déterministe mise en place est le calcul de l'Embedded Value (= valeur intrinsèque), qui fournit la valeur du portefeuille.

L'Embedded Value (EV) est la somme de l'actif net réévalué et de la valeur actuelle des flux futurs de trésorerie dont l'actionnaire peut disposer tout en permettant à la société d'assurer son autofinancement en matière d'investissement et de marge de solvabilité réglementaire.

L'EV est ainsi un outil prospectif et synthétique permettant de prendre en compte le cycle inversé de l'assurance et les contraintes prudentielles en matière de fonds propres minimaux. L'EV permet d'évaluer une valeur centrale déterministe du portefeuille.

L'EV doit permettre à la société :

- D'évaluer la valeur « économique » de ses portefeuilles en cours
- De piloter les mécanismes de création de valeur et d'allocation de ressources
- De communiquer vis-à-vis de la communauté financière : analystes, actionnaires, partenaires, agences de notation...

L'EV s'analyse comme la somme de deux parties distinctes qui sont l'actif net réévalué et la valeur du portefeuille de contrats en cours (i.e. le stock) nette du coût d'immobilisation des fonds propres. Cette méthode donne une valeur intrinsèque qui n'intègre pas la valeur de la production future (Goodwill).

L'actif net réévalué correspond à la part de richesse de la société qui reviendrait aux actionnaires dans le cas d'une cessation d'activité. La valeur du portefeuille correspond à la valeur des profits (ou pertes) futurs distribuables, nets d'impôts, générés par le portefeuille de contrats en vigueur.

La marge nette ou résultat comptable après impôt est donnée par la formule suivante :

Résultat comptable après impôt = Primes

- + Produits financiers comptables
- Prestations (sinistres, rachats)
- Participation des assurés aux bénéficiaires
- Frais récurrents (frais d'acquisition, d'administration et autres)
- Variation des PM
- Impôts

Nous déterminons également le coût de portage de la marge de solvabilité, qui correspond à la valeur actuelle des flux de trésorerie entre l'actionnaire et la société, nécessaires à la constitution des fonds propres réglementaires. Le coût provient de la différence entre le taux de rendement attendu par l'actionnaire ou le taux d'actualisation et le taux de rendement financier sur fonds propres, net de l'impôt sur les sociétés. Le taux d'actualisation est généralement déterminé en fonction de l'OAT 10 ans et d'une prime de risque : il est compris entre 7,5% et 9,5%.

La marge de solvabilité retenue est la marge de solvabilité réglementaire de Solvabilité 1. Le produit Assur-Obsèques étant un produit de la branche vie, la formule de la marge de solvabilité à constituer est donc celle se rapportant à la branche considérée, à savoir :

$$MSR = 4\% \times PM \times \max\left(0,85; \frac{PM \text{ nettes réass}}{PM \text{ brutes}}\right) + 0,3\% \times CSR \times \max\left(0,50; \frac{CSR \text{ nets réass}}{CSR \text{ bruts}}\right)$$

La marge de solvabilité réglementaire est donc la somme de deux résultats : le premier étant déterminé par rapport aux provisions mathématiques et le second par rapport aux capitaux sous risques (CSR).

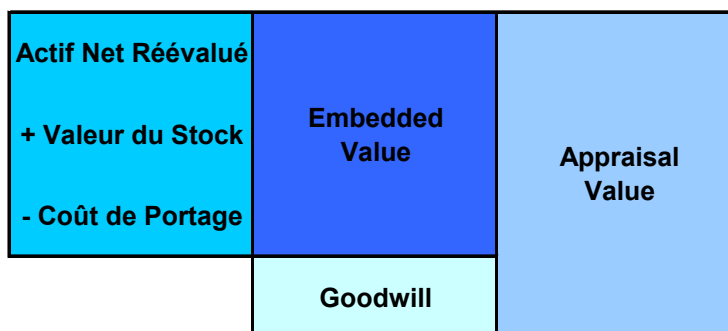


FIG. 15 – DECOMPOSITION DE L'EMBEDDED VALUE ET DE L'APPRaisal VALUE

Comme indiqué sur la figure ci-dessus, l'Appraisal Value est la somme de l'Embedded Value et du Goodwill.

▪ **Etude de l'Embedded Value en fonction de l'âge**

Nous étudions l'évolution de l'EV en fonction de l'âge de l'assuré. Pour cela, nous déterminons l'EV pour des contrats souscrit au 01/01/2006 à fractionnement annuel, de montant garanti égal à 1500€ pour des assurés âgés de 50 à 65 ans. Le tarif appliqué est le tarif en vigueur à la date de souscription.

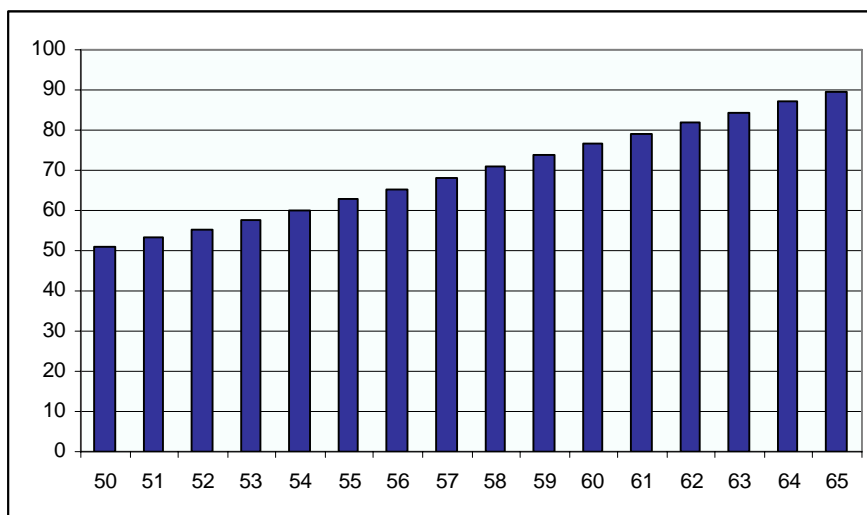


FIG. 16 – EMBEDDED VALUE EN FONCTION DE L'AGE DE L'ASSURE

Nous constatons que l'EV augmente avec l'âge pour des contrats de même caractéristique. Cette augmentation est expliquée par une augmentation du tarif supérieure à l'augmentation des probabilités de décès d'expérience. Un gain technique est ainsi dégagé et la valorisation du contrat est augmentée.

2.2.6. Les résultats du prévisionnel Assur-Obsèques

Dans cette partie, nous représentons graphiquement les résultats obtenus à partir du prévisionnel au 31/12/2006. Nous débuterons par la représentation de l'évolution probable de la provision mathématique et de l'ensemble des flux d'une part sur l'ensemble du stock et d'autre part sur les affaires nouvelles.

Dans un second temps, nous comparerons les flux estimés aux données historiques observées sur le portefeuille. Les données relatives aux années 2002 à 2006 proviennent des données historiques et les flux à compter de 2007, sont la somme des flux projetés sur le stock et les affaires nouvelles. Cette représentation sous forme de « backtesting » permet d'apprécier les résultats du prévisionnel par rapport aux résultats historiques.

- **Evolution probable de la provision mathématique**

L'évolution de la provision mathématique est dans un premier temps observée sur le stock, c'est-à-dire sur une population vieillissante : par conséquent les engagements de l'assureur et des assurés diminuent. L'augmentation de la PM jusqu'en 2013 traduit une diminution de l'engagement de l'assureur moins rapide que celle des assurés.

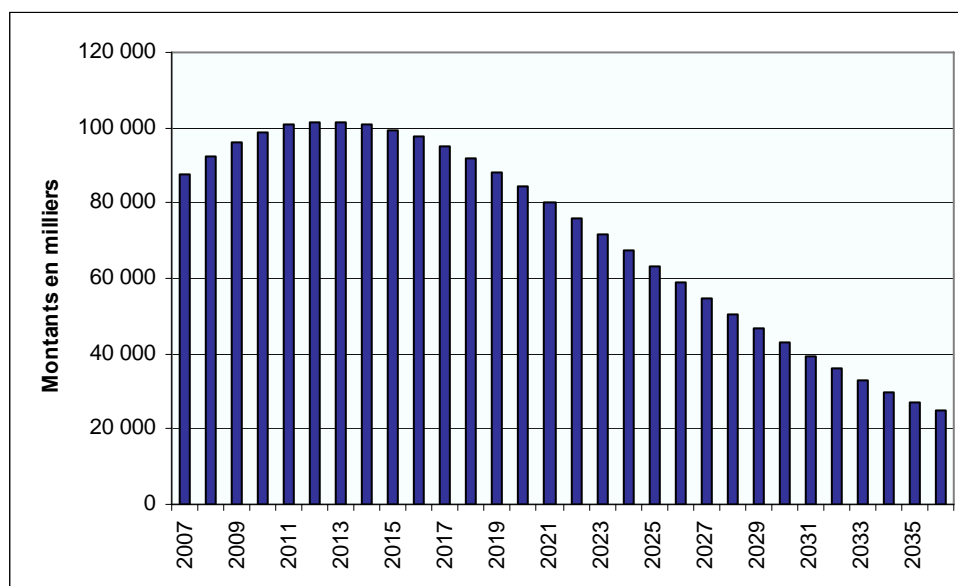


FIG. 17 – EVOLUTION PROBABLE DE LA PM – STOCK

Dans le cas des affaires nouvelles, nous observons une augmentation de la PM probable durant les 16 prochaines années. Rappelons que les affaires nouvelles sont simulées pour les 10 années à venir.

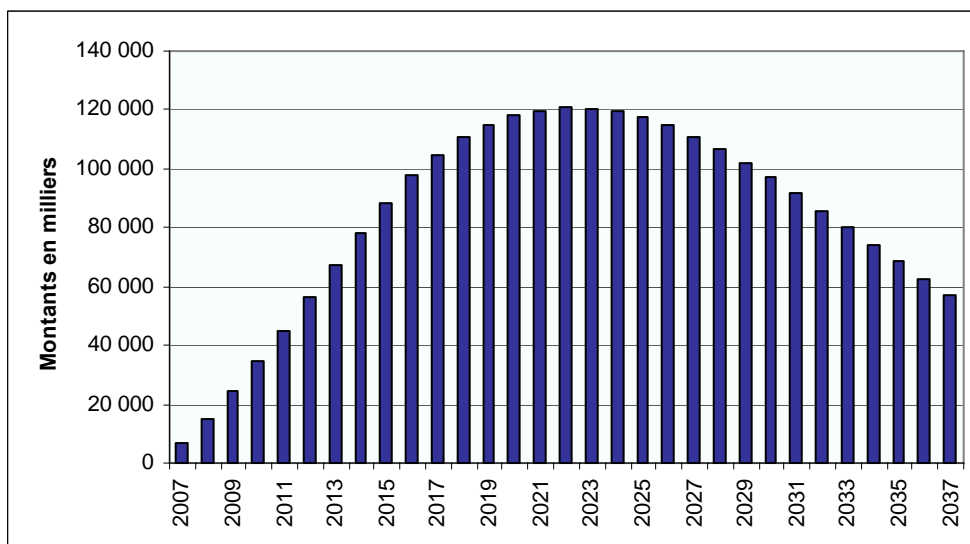


FIG. 18 – EVOLUTION PROBABLE DE LA PM – AFFAIRES NOUVELLES

▪ **Evolution probable des flux modélisés**

Sur le stock, comme nous pouvons l'attendre, nous observons une diminution des deux postes de bilan représentés ci-dessous. En effet la population vieillit et par conséquent le volume de primes et de commissions encaissées diminue (la prime déterminée en fonction de l'âge à la souscription est constante dans le temps). Concernant les sinistres, la charge de sinistre et la variation de la provision mathématique diminuent dans les mêmes proportions que la prime.

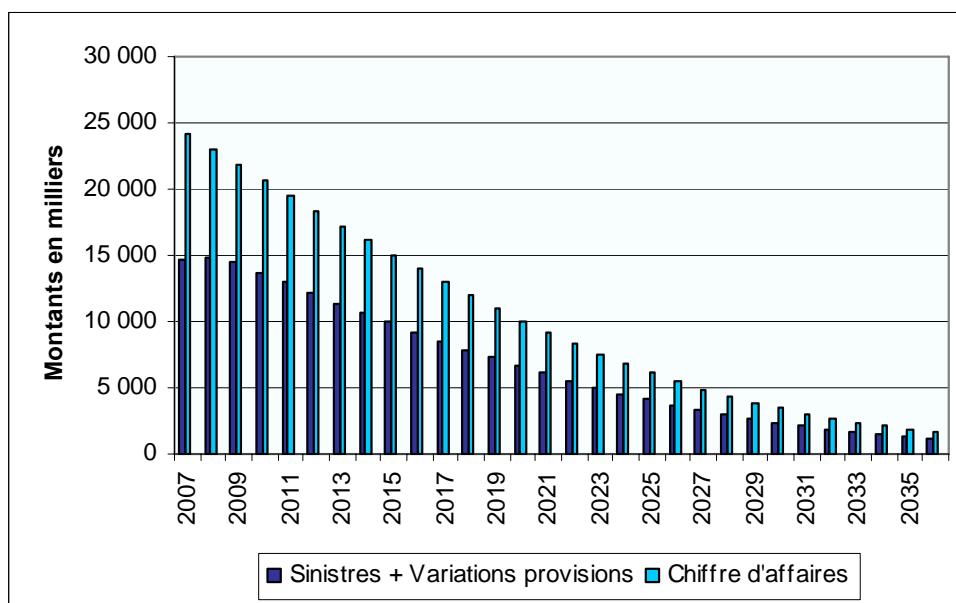


FIG. 19 – EVOLUTION PROBABLE DES FLUX – STOCK

Concernant les affaires nouvelles, escomptées pendant 10 ans, nous observons une augmentation des deux postes de bilan pendant ces 10 années, puis une diminution semblable à celle observée sur le stock.

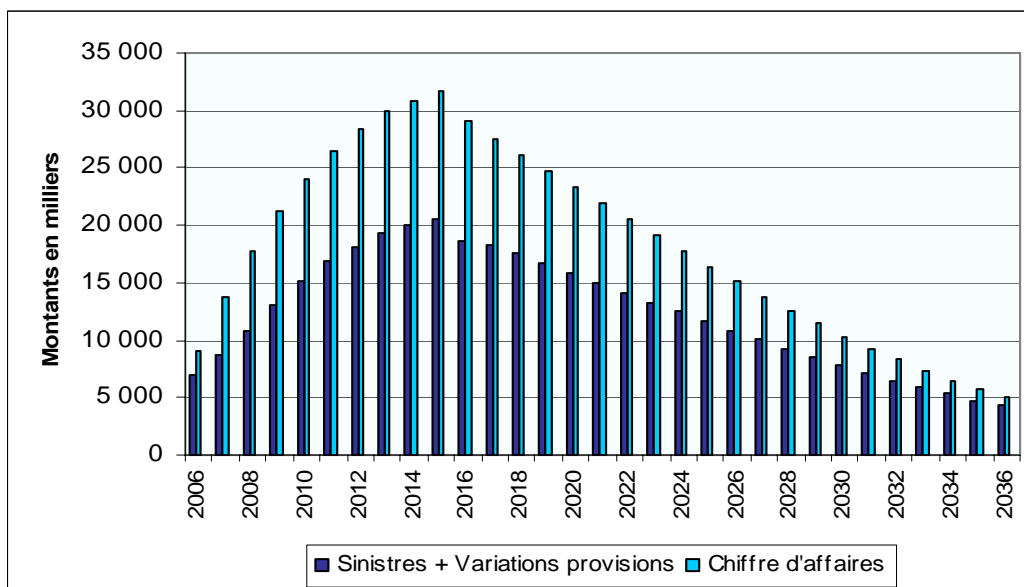


FIG. 20 – ÉVOLUTION PROBABLE DES FLUX – AFFAIRES NOUVELLES

▪ **Backtesting des flux**

Nous observons l'historique des flux depuis 2002 et la projection des flux à partir de 2007. Ce backtesting permet de valider graphiquement les résultats obtenus par le prévisionnel.

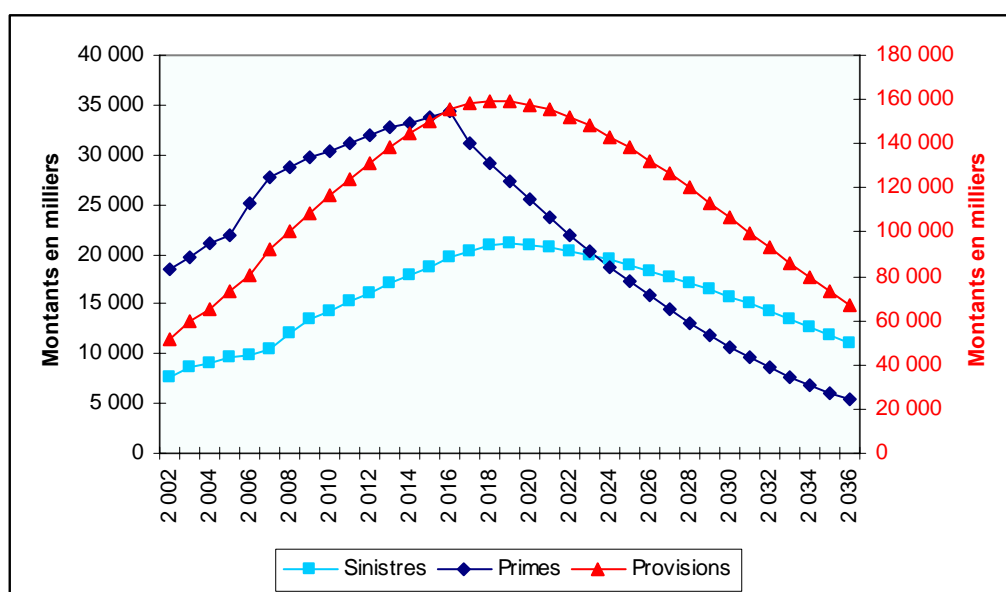


FIG. 21 – BACKTESTING ASSUR-OBSEQUES

Concernant les primes, nous observons une augmentation des primes émises jusqu'en 2016 : en effet cette année correspond à la dernière année où des affaires nouvelles sont escomptées et la prime étant nivelée, la mise du portefeuille en run-off, implique la diminution des primes émises. Pour les sinistres et les provisions, nous observons une augmentation jusqu'en 2018. Les résultats présentés par le backtesting soulignent une projection « cohérente » avec l'historique du produit.

2.3. XL Prévoyance

La seconde modélisation déterministe élaborée est celle du produit XL Prévoyance.

Pour réduire les temps de calcul, la modélisation n'est pas faite contrat par contrat mais de manière agrégée, en regroupant les contrats par âge à l'adhésion, ancienneté, fractionnement et garanties, et en sommant les capitaux garantis. L'avantage est en premier lieu de réduire les temps de calcul, mais également de pouvoir stocker les données du portefeuille sur une feuille Excel. En effet, l'ensemble du portefeuille comporte plus de 260.000 contrats. De manière agrégée, le nombre de contrats est divisé par près de 100. Mais cette agrégation des données possède un inconvénient : la date d'effet n'est plus disponible, par conséquent la provision pour prime émise non acquise ne peut plus être calculée de manière exacte au prorata du temps entre la date d'inventaire et l'échéance de prime suivante. Par conséquent, nous estimerons cette provision à partir d'un taux de provision historique moyen observé sur le portefeuille.

Le produit XL Prévoyance est tout d'abord présenté en développant l'ensemble des garanties proposées, puis l'ensemble des flux du stock et des affaires nouvelles sera détaillé. Une partie complémentaire a été réalisée dans cette modélisation : il s'agit de la modélisation des flux de provisions de sinistres à payer et de provisions mathématiques de rentes pour les sinistres en cours au 31/12/N.

Comme dans le prévisionnel Assur-Obsèques, afin de déterminer la revalorisation probable, déterminée en aval de la modélisation, les comptes techniques vie probables sont réalisés. La participation bénéficiaire est déterminée de manière analogue à celle constituée pour Assur-Obsèques : par conséquent, nous ne présenterons pas son calcul pour ce produit.

Avant d'évoquer les limites de ce prévisionnel, les résultats obtenus seront présentés.

2.3.1. Présentation du produit

XL Prévoyance est un contrat collectif d'assurance, à adhésion facultative, régi par le Code des Assurances.

Ce contrat a pour objectif de mettre à disposition des assurés un régime de prévoyance permettant de garantir les risques de décès et de perte totale et irréversible d'autonomie (PTIA), d'incapacité temporaire totale de travail (IT) et d'invalidité permanente (IP).

▪ Condition d'admission et adhésion

A l'adhésion, l'assuré fait le choix des garanties et des montants retenus, donne son consentement à l'assurance, atteste de son état de santé, désigne le(s) bénéficiaire(s) en cas de décès et autorise le prélèvement automatique de la cotisation.

L'adhésion au contrat est ouverte aux personnes âgées de 16 ans à 65 ans, pour les garanties décès et PTIA, et à 55 ans pour les garanties IT et IP. Comme dans le contrat Assur-Obsèques, l'âge est calculé par différence de millésime.

L'adhésion est conclue pour une durée d'un an : elle se renouvelle par tacite reconduction d'année en année jusqu'à l'âge limite fixée pour chaque garantie, sous réserve de paiement de la cotisation.

▪ **Montant de la cotisation**

Lors de la souscription, l'adhérent devra déclarer sa profession exacte qui déterminera le tarif dont il relève.

Le montant de la cotisation est déterminé en fonction des garanties choisies, de la profession déclarée, de l'âge de l'assuré et du fractionnement, et évolue en fonction de ces mêmes critères à chaque échéance principale. Par conséquent, la cotisation augmente chaque année, car même si les garanties et la profession restent inchangées, l'âge augmente annuellement. La cotisation n'est donc pas nivelée dans le temps, mais augmente en fonction de l'augmentation des risques.

Contrairement au produit Assur-Obsèques, où les cotisations sont nivelées dans le temps, nous ne mettons donc pas en place une provision pour risques croissants. La cotisation augmente annuellement en fonction des risques, c'est-à-dire que l'assuré supporte l'augmentation des risques et la constitution de la provision est inutile.

Comme dans tout contrat d'assurance, les cotisations sont payables d'avance.

▪ **La garantie décès / PTIA**

En cas de décès de l'assuré, qu'elle qu'en soit la cause ou de PTIA, avant l'échéance principale suivant le 75^{ème} anniversaire de l'assuré, l'assureur verse le capital qui figure sur la demande d'adhésion au(x) bénéficiaire(s).

Le paiement du capital met fin à l'adhésion.

▪ **La garantie doublement du capital décès / PTIA en cas d'accident**

L'assureur verse un capital supplémentaire égale au capital décès / PTIA toutes causes en cas de décès ou PTIA à la suite d'un accident survenu postérieurement à la prise d'effet de la garantie et dans les 12 mois qui suivent l'accident, et au maximum avant l'échéance principale suivant le 75^{ème} anniversaire de l'assuré.

▪ **La garantie rente éducation en cas de décès / PTIA**

En cas de décès ou de PTIA, qu'elle qu'en soit la cause, avant l'échéance principale du 75^{ème} anniversaire de l'assuré, l'assureur verse la rente mensuelle qui figure sur la demande d'adhésion à chacun des enfants désignés.

Cette rente est servie au début de chaque mois civil, pour chacun des bénéficiaires jusqu'à l'échéance principale suivant son 25^{ème} anniversaire.

▪ **La garantie incapacité temporaire totale de travail**

En cas d'arrêt de travail de l'assuré par suite de maladie ou d'accident survenant avant l'échéance principale suivant son 65^{ème} anniversaire, l'assureur verse l'indemnité journalière choisie qui figure sur la demande d'adhésion.

La franchise maladie est de 90 jours et la franchise accident est de 0 jour.

- **La garantie invalidité permanente**

La garantie invalidité permanente intervient en relais de la garantie incapacité de travail : le service de la rente intervient en lieu et place du service d'indemnités journalières.

En cas d'invalidité permanente de l'assuré, survenant avant l'échéance de son 65^{ème} anniversaire, l'empêchant totalement ou partiellement d'exercer une activité à la suite d'une maladie ou d'un accident, l'assureur verse au plus tôt à partir de la fin du délai de franchise, une rente dont la base est égale à 365 fois le montant de l'indemnité journalière.

Le délai de franchise est identique à la garantie incapacité de travail : 90 jours pour la maladie et sans franchise pour l'accident.

Le taux d'invalidité « n » est fixé par expertise médicale. Il résulte de la combinaison du taux d'incapacité fonctionnelle et du taux d'incapacité professionnelle, qui varient tous deux de 0 à 100 %.

Le taux d'invalidité résulte du tableau de combinaisons suivant :

TIP	TAUX D'INCAPACITÉ FONCTIONNELLE								
	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10				29,24	33,02	36,59	40,00	43,27	46,42
20			31,75	36,94	41,60	46,10	50,40	54,51	58,48
30		30,00	36,34	42,17	47,62	52,78	57,69	62,40	66,94
40	25,20	33,02	40,00	46,42	52,42	58,09	63,50	68,68	73,68
50	27,14	35,57	43,09	50,00	56,46	62,57	68,40	73,99	79,37
60	28,85	37,80	45,79	53,13	60,00	66,49	72,69	78,62	84,34
70	30,37	39,79	48,20	55,93	63,16	70,00	76,52	82,79	88,79
80	31,75	41,60	50,40	58,48	66,04	73,19	80,00	86,54	92,83
90	33,02	43,27	52,42	60,82	68,68	76,12	83,20	90,00	96,55
100	34,20	44,81	54,29	63,00	71,14	78,84	86,18	93,22	100,00

TIP : Taux d'Incapacité Professionnelle

TAB. 8 – DETERMINATION DU TAUX D'INVALIDITE

- **La revalorisation**

Chaque année à l'échéance annuelle de l'adhésion, les cotisations et les garanties sont revalorisées en fonction de la variation de l'indice INSEE des 295 postes de dépenses de l'ensemble des ménages, série France entière, entre les deux 1^{er} octobre précédents.

En revalorisant les garanties, les cotisations, les commissions et les sinistres qui sont fonctions des garanties, sont revalorisées parallèlement. Les garanties revalorisées sont : les capitaux décès et décès accidentel, les indemnités journalières et les rentes éducation.

De plus, au 1^{er} janvier de chaque année, les indemnités journalières servies pour des arrêts de travail de six mois au moins, ainsi que les rentes éducatives et invalidité servies depuis un an au moins, sont revalorisées en fonction du même indice, dans la limite de disponibilité de la provision pour participation aux bénéficiaires. Ce second type de revalorisation peut donc

être assimilé par un gain pour les assurés : en effet cette revalorisation n'est pas compensée par une revalorisation des cotisations.

L'historique de l'indice INSEE utilisé en base 100 en 1980 et l'augmentation en % associée sont représentés par la figure ci-contre :

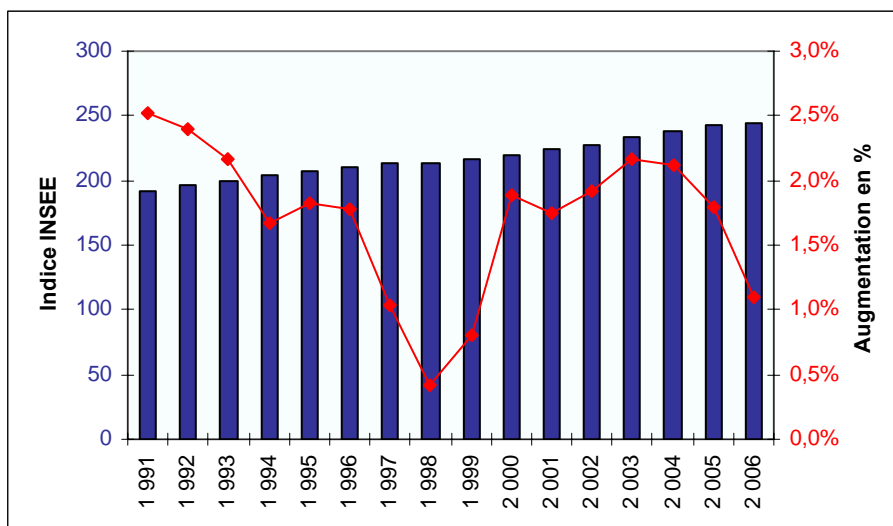


FIG. 22 – INDICE INSEE DES 295 POSTES DE DEPENSES DE L'ENSEMBLE DES MENAGES, SERIE FRANCE ENTIERE

Dans le prévisionnel, nous utilisons le taux de revalorisation moyen observé sur les 5 dernières années.

2.3.2. Projection du stock

Contrairement au produit Assur-Obsèques qui n'inclut que le risque de mortalité, le produit XL Prévoyance, par l'ensemble de ces garanties proposées, présente des risques liés au maintien en incapacité de travail, de passage en invalidité et de maintien en invalidité permanente.

Nous disposons également d'un inventaire au 31/12/N et les notations utilisées sont les mêmes que celles utilisées pour Assur Obsèques, à l'exception de la probabilité de sortie, qui n'est plus exprimée en fonction de l'âge de l'assuré, mais en fonction de l'ancienneté a de son contrat. D'où la probabilité de présence dans t années d'une personne d'âge x en utilisant les probabilités d'expériences propres au produit XL Prévoyance, est notée ${}_t\lambda_{x,a}^*$: elle est le produit de la probabilité qu'une personne d'âge x survive au moins t années par la probabilité que cette même personne d'ancienneté a ne sorte pas durant ces t années. Par conséquent, ${}_t\lambda_{x,a}^*$ s'écrit :

$${}_t\lambda_{x,a}^* = {}_tP_x^* \left(\prod_{i=0}^{t-1} (1 - s_{a+i}^*) \right) = {}_{t-1}\lambda_{x,a}^* \times P_{x+t-1}^* (1 - s_{a+t-1}^*)$$

L'ensemble des flux sont présentés dans cette partie. Concernant les primes et les sinistres, les flux seront détaillés par garantie.

2.3.2.1. Le nombre de contrats

Contrairement à la modélisation précédente, où les calculs de flux sont faits contrat par contrat, l'agrégation des données implique la prise en compte des fréquences obtenues, notée *freq*.

Le nombre de contrats espérés au 31/12/N+t est :

$$Nb\text{re contrats espérés}(t) = \sum_{j=1}^J {}_t\lambda_{x_j, a_j}^* \times freq$$

2.3.2.2. Les primes et de commissions

Nous déterminons dans un premier temps la prime annuelle théorique au 31/12/N+t, qui est la somme des primes annuelles théoriques par garantie souscrite :

$$Prime_j^{th}(t) = \sum_{gar} Prime_j^{gar}(t, x_j, clt_j, b_j, duree_j)$$

Comme nous l'avons indiqué dans la présentation du produit, les cotisations sont annuellement recalculées en fonction de l'âge atteint de l'assuré et des garanties souscrites.

L'ensemble des calculs de primes par garantie est développé ci après.

▪ **La garantie décès / PTIA**

Le tarif de la garantie décès, exprimé en base mensuelle pour 100.000 €, dépend uniquement de l'âge de l'assuré compris entre 16 et 75 ans.

Notons $capital_j$ le capital décès garanti au moment de l'inventaire, c'est-à-dire le capital choisi lors de l'adhésion augmenté des revalorisations annuelles jusqu'à la date d'inventaire. Ce capital garanti à l'inventaire est revalorisé chaque année du prévisionnel.

La prime pour la garantie décès / PTIA au 31/12/N+t s'écrit :

$$Prime_j^{DC}(t) = capital_j \times (1 + \text{taux reval})^t \times \text{tarif}(x_j + t) \times \frac{12}{100000}$$

En effet l'âge de l'assuré en N+t est x_j+t , c'est-à-dire l'âge de l'assuré au début du prévisionnel, x_j , auquel on ajoute t années.

▪ **La garantie doublement du capital décès / PTIA en cas d'accident**

Comme pour la garantie décès/PTIA, le tarif de la garantie doublement du capital décès en cas d'accident, exprimé en base mensuelle pour 100.000 €, dépend uniquement de l'âge de l'assuré compris entre 16 et 75 ans.

Comme pour la garantie décès / PTIA, nous notons $capital_j$ le capital décès garanti au moment de l'inventaire.

La prime pour la garantie décès / PTIA au 31/12/N+t s'écrit :

$$Prime_j^{DA}(t) = capital_j \times (1 + \text{taux reval})^t \times \text{tarif}(x_j + t) \times \frac{12}{100000}$$

▪ **La garantie rente éducation**

Le tarif pour la garantie rente éducation, exprimé mensuellement pour 1 € de rente, dépend de l'âge de l'assuré et de l'âge moyen du (des) bénéficiaire(s).

Notons $rente_j$ le montant de la rente mensuelle garanti au moment de l'inventaire.

La prime pour la garantie rente éducation au 31/12/N+t s'écrit :

$$Prime_j^{RE}(t) = 12 \times rente_j \times (1 + \text{taux reval})^t \times \text{tarif}(x_j + t, b_j + t) \quad \text{si } b_j \leq 25$$

En effet b_j étant l'âge du bénéficiaire en N, le tarif est fonction de l'âge b_j+t , l'âge du bénéficiaire en N+t.

▪ **La garantie IT**

Le tarif mensuel pour la garantie IT, exprimé mensuellement pour 100 unités d'indemnité journalière, dépend de l'âge de l'assuré (entre 16 et 65 ans), de sa classe tarifaire et de la durée maximale d'indemnisation.

Quatre classes tarifaires sont identifiées : les professions médicales et paramédicales, les professions sédentaires, les professions manuelles et non sédentaires, et les professions dangereuses.

La garantie IT peut soit être souscrite seule, soit être souscrite avec la garantie invalidité permanente. Dans le premier cas, la durée maximale d'indemnisation est de 730 jours, et dans le second cas de 1095 jours.

Notons IJ_j le montant de l'indemnité journalière garantie au moment de l'inventaire.

La prime pour la garantie IT au 31/12/N+t s'écrit :

$$Prime_j^{IT}(t) = IJ_j \times (1 + \text{taux reval})^t \times \text{tarif}(x_j + t, clt_j, duree_j) \times \frac{12}{100}$$

▪ La garantie invalidité

Comme pour le tarif IT, le tarif IP, exprimé mensuellement pour 100 unités d'indemnité journalière, dépend de l'âge de l'assuré (entre 16 et 65 ans), de sa classe tarifaire et de la durée maximale d'indemnisation.

La prime pour la garantie IP au 31/12/N+t s'écrit :

$$Prime_j^{IP}(t) = IJ_j \times (1 + \text{taux reval})^t \times \text{tarif}(x_j + t, clt_j, duree_j) \times \frac{12}{100}$$

▪ Les flux de primes espérées

Nous supposons que les sorties se font en moyenne au milieu de l'année. D'autre part, ne disposant pas des données concernant les réductions tarifaires et des surprimes, nous multiplions la prime théorique annuelle par le rapport de la prime effective (qui tient compte des réductions et des surprimes) et de la prime théorique initiale. En effet, l'évolution des cotisations se fait de manière proportionnelle avec les réductions et les surprimes.

Le produit XL Prévoyance ne prévoit ni réduction, ni majoration liée au fractionnement.

La valeur espérée des primes totales encaissées au 31/12/N+t est par conséquent :

$$Primes\ espérées(t) = \sum_{j=1}^J Prime_j^{th}(t) \times \frac{Prime_j^{eff}(0)}{Prime_j^{th}(0)} \times \frac{\lambda_{x_j, a_j}^{*t-1} + \lambda_{x_j, a_j}^{*t}}{2}$$

▪ Les commissions

Les commissions espérées au 31/12/N+t sont obtenues en multipliant les primes espérées au 31/12/N+t par le taux de commission moyen observé pour le produit XL Prévoyance :

$$Commissions\ espérées(t) = \sum_{j=1}^J Primes\ espérées_j(t) \times \text{taux commissions}$$

2.3.2.3. Les sinistres

Nous estimons la charge probable due aux sinistres par garanties choisies. La charge totale de sinistres espérée est par conséquent la somme des charges espérées par garantie.

Nous supposons que l'ensemble des sinistres a lieu en milieu d'année.

▪ **La garantie décès / PTIA**

Nous supposons que le décès et la perte totale et irréversible de l'autonomie sont identiques et par conséquent, la table d'expérience est la même pour ces deux risques.

D'autre part, à partir de l'échéance principale suivant le 70^{ème} anniversaire de l'assuré, le capital en cas de décès n'est plus revalorisé. Il est réduit de 10% par an, sur la base du capital atteint à l'échéance principale qui précède le 70^{ème} anniversaire.

Notons $capital_j$, le capital choisi par l'assuré au moment de l'adhésion, et $Kdécès_j$ le capital versé au moment du décès pour le contrat j.

La charge de sinistre imputable à chaque contrat est la probabilité que le contrat soit présent au 1^{er} janvier multiplié par la probabilité de décéder dans l'année, le tout multiplié par le montant du capital garanti :

$$Sinistres\ espérés^{DC}(t) = \sum_{j=1}^J Kdécès_j(t) \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \times q_{x_j+t-1}^*, \text{ où}$$

$$Kdécès_j(t) = \begin{cases} capital_j \times (1 + \text{taux reval})^t & \text{si } 16 \leq x_j \leq 70 \\ 0,9^{x_j-70} capital_j \times (1 + \text{taux reval})^{70-x_j} & \text{si } 71 \leq x_j \leq 75 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▪ **La garantie doublement du capital décès / PTIA en cas d'accident**

Le capital versé en cas de décès suite à un accident, est identique au capital versé pour la garantie décès / PTIA. La proportion de décès accidentels observés parmi ceux ayant souscrit à la garantie doublement du capital décès / PTIA en cas d'accident est de 8 %.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$Sinistres\ espérés^{DA}(t) = \sum_{j=1}^J Kdacc_j \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \times 0,08 \times q_{x_j+t-1}^*, \text{ où}$$

$$Kdacc_j = \begin{cases} Kdécès_j & \text{si } x_j \leq 75 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▪ **La garantie rente éducation**

La prestation pour cette garantie est le versement d'une rente mensuelle, qui figure sur la demande d'adhésion, à chacun des enfants désignés.

L'âge limite pour l'assuré est de 75 ans et l'âge limite pour les bénéficiaires est de 25 ans.

La charge de sinistre espérée au 31/12/N+t est la somme des charges de sinistres par contrat, en incluant les nouveaux sinistres de rente éducation (i.e. date de décès en N+t) et les sinistres de rente éducation en cours (i.e. début du service de la rente avant N+t et âge du bénéficiaire < 25 ans) :

$$\text{Sinistres espérés}^{RE}(t) = \sum_{j=1}^J \text{Rente édu}_j(t) \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \times q_{x_j+t-1}^* + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{t-1} \text{Rente édu}_j(t) \times_{k-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \times q_{x_j+k-1}^* , \text{ où}$$

Rente édu_j correspond à 6 mois de rente l'année du décès (i.e. décès en milieu d'année) et l'année du 25^{ème} anniversaire du bénéficiaire (i.e. anniversaire en moyenne en milieu d'année) et correspond à 12 mois de rente les années comprises entre ces deux extrémités. Cette rente est revalorisée à partir du 1^{er} janvier de la 3^{ème} année de service de la rente : ce n'est qu'à partir de cette année là, qu'au moins un an de service de la rente a été effectué.

Comme pour la garantie décès toutes causes, le début de versement de la rente éducation est conditionné par la présence du contrat au 01/01/N+t et à la probabilité de décéder dans l'année.

▪ **La garantie incapacité temporaire totale de travail**

Comme vu précédemment, la garantie incapacité temporaire totale de travail peut soit être souscrite seule, soit être souscrite avec la garantie invalidité permanente. Dans le premier cas, les indemnités journalières (IJ) sont servies au maximum pendant 730 jours (24 mois) et dans le second cas pendant 1095 jours (36 mois). Le service des indemnités journalières s'effectue mensuellement après la période de franchise absolue choisie et du délai de carence prévu.

Rappelons que la durée de la franchise est de 90 jours (3 mois) en cas de maladie, qu'il n'y a pas de franchise en cas d'accident et que les sinistres ont lieu en moyenne en milieu d'année. Les indemnités journalières sont versées pour chaque jour calendaire. L'assureur verse ainsi en moyenne 30 indemnités journalières au maximum pendant les 33 ou 21 mois restants pour la maladie et verse en moyenne 30 indemnités journalières au maximum pendant 36 ou 24 mois pour l'accident.

Le paiement des IJ est donc conditionné dans un premier temps par le passage en IT et dans un second temps par le maintien en IT.

Les probabilités de passage en incapacité utilisées sont les probabilités d'expérience établies par cause. Concernant le maintien en incapacité de travail, nous utilisons la table de maintien du BCAC.

La table de maintien en incapacité de travail du BCAC fournit en colonne l'âge de l'assuré à son arrêt de travail et en ligne, le nombre de mois écoulés depuis son arrêt de travail.

Comme indiqué en annexe 1, nous notons ${}^ITl_x^m$ le nombre d'individus entrés à l'âge x en IT et toujours en IT après m mois, parmi un effectif initial de 10.000 assurés entrés en IT à l'âge x . La table de maintien en incapacité ne dépend pas de la cause de l'entrée en incapacité de travail.

L'assureur verse des indemnités journalières pour le mois m si l'assuré est toujours en invalidité en m (i.e. maintien en invalidité depuis la fin de la période de franchise jusqu'au au mois m), c'est-à-dire avec une probabilité $\frac{{}^ITl_x^m}{{}^ITl_x^0}$ en cas d'accident et $\frac{{}^ITl_x^m}{{}^ITl_x^3}$ en cas de maladie. Cette probabilité correspond donc au montant probable que devra payer l'assureur pour une IJ en cours de service d'1€.

Les tables du BCAC illustrent le fait que l'âge à l'entrée en arrêt de travail impacte fortement la probabilité de maintien dans cet état. En effet on constate que le rythme de sortie de l'incapacité est d'autant plus rapide que l'âge à la survenance de l'arrêt de travail est faible. Les assurés les plus âgées ont tendance à rester en arrêt de travail plus longtemps, comme le présente la figure ci-dessous :

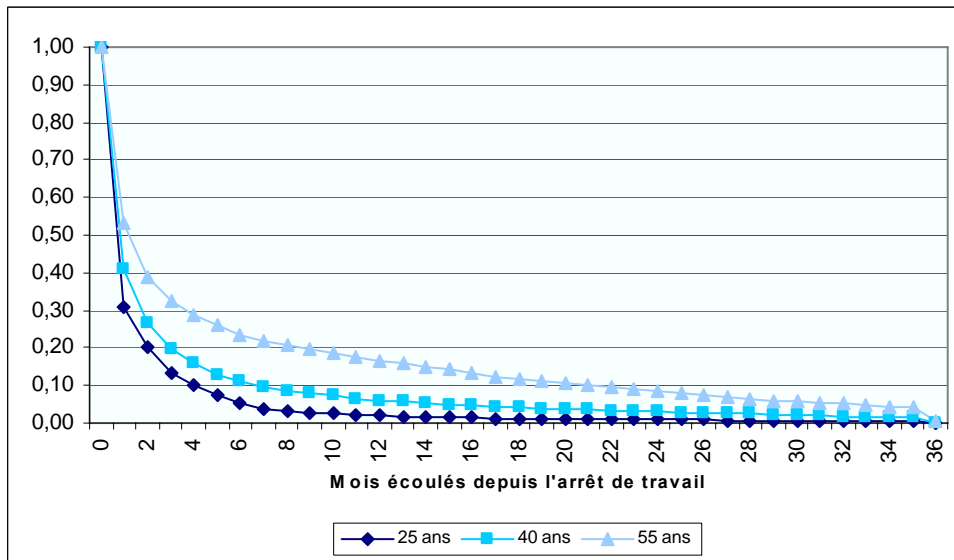


FIG. 23 – MAINTIEN EN INCAPACITE DE TRAVAIL EN FONCTION DE L'AGE A L'ENTREE

Nous supposons que l'arrêt en IJ est en $N+t$. Les versements mensuels de sinistres pour chaque cause s'écrivent de la manière suivante :

$$Kinc_j^{mens,mal}(m) = 30IJ_j \times \frac{{}^ITl_{x_j+t}^{m-1}}{{}^ITl_{x_j+t}^3} \quad \text{si } 4 \leq m \leq 24$$

$$Kinc_j^{mens,acc}(m) = 30IJ_j \times \frac{{}^ITl_{x_j+t}^{m-1}}{{}^ITl_{x_j+t}^0} \quad \text{si } 1 \leq m \leq 24$$

Le passage en incapacité de travail se produisant en moyenne en milieu d'année, les versements annuels de sinistres $Kinc_j^{cause}(t)$ pour chaque cause dans le cas par exemple

d'une durée d'indemnisation maximale de 24 mois, correspondent à 6 mois d'indemnités, franchise incluse, pour l'année N, 12 mois pour l'année N+1 et 6 mois pour l'année N+2 : ce qui nous donne bien un total de 24 mois. Et pour les années N+1 et N+2, les indemnités journalières sont revalorisés, car au 1^{er} janvier de ces années, les IJ sont servies depuis 6 mois au moins.

Le service des IJ est conditionné dans un premier temps par la durée maximale d'indemnisation de 24 ou 36 mois (i.e. jusqu'en N+2 ou N+3), mais aussi par l'âge de l'assuré, qui doit être inférieur à 65 ans.

La charge de sinistre espérées au 31/12/N+t est alors la somme de la charge imputable à chaque contrat à cette date, en incluant les nouveaux sinistres IT et les sinistres IT en cours :

$$\begin{aligned} \text{Sinistres espérés}^{IT}(t) = & \sum_{j=1}^J \left(\text{Kinc}_j^{mal}(t) \times^{mal} i_{x_j+t}^{IT} + \text{Kinc}_j^{acc}(t) \times^{acc} i_{x_j+t}^{IT} \right) \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{t-1} \left(\text{Kinc}_j^{mal}(t) \times^{mal} i_{x_j+k}^{IT} + \text{Kinc}_j^{acc}(t) \times^{acc} i_{x_j+k}^{IT} \right) \times_{k-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \end{aligned}$$

Le paiement des prestations de sinistres est conditionné par la probabilité de présence du contrat au 01/01/N multiplié par la probabilité de passage en incapacité dans l'année.

▪ La garantie invalidité permanente (IP)

La garantie invalidité permanente prévoit le versement d'une rente d'invalidité. Le montant de la rente versée dépend du taux d'invalidité « n » :

- Si le taux d'invalidité « n » est égal ou supérieur à 66 %, la rente est servie intégralement.
- Si le taux d'invalidité « n » est compris entre 33 et 66 %, le montant de la rente est multiplié par le rapport $\frac{n-33}{33}$.
- Si le taux d'invalidité est inférieur à 33 %, aucune rente n'est versée.

Nous utilisons dans la modélisation un taux d'invalidité de 66 %, i.e. l'intégralité de la rente est servie.

Le paiement de la rente est, comme pour l'incapacité de travail, conditionné dans un premier temps par le passage en IP et dans un second temps par le maintien en IP.

Les probabilités de passage en invalidité sont déterminées à partir des probabilités de passage en incapacité de travail d'expérience. Concernant le maintien en IT, nous utilisons la table de maintien du BCAC.

Les probabilités de passage en invalidité sont le produit de la probabilité de passage en incapacité par la probabilité de passage d'incapacité à invalidité. Cette dernière probabilité est donnée par la table de passage du BCAC, qui fournit en colonne l'âge de l'assuré à son entrée en incapacité et en ligne, le nombre de mois écoulés depuis son arrêt de travail. Comme indiqué en annexe 1, nous notons ${}^{pass}l_x^m$ le nombre d'incapables reconnus invalides par la sécurité sociale après m mois passés en incapacité, ce nombre étant rapporté à un effectif originel de 10.000 assurés entrés en incapacité à l'âge x.

Pour les causes de maladie et d'accident, respectivement de franchise 3 mois et sans franchise, le taux de passage en invalidité pour un assuré d'âge x est :

$${}^{mal}i_x^{*IP} = {}^{mal}i_x^{*IT} \times \frac{\sum_{m=0}^{35} {}^{pass}l_x^m}{{}^{IT}l_x^3} \quad \text{et} \quad {}^{acc}i_x^{*IP} = {}^{acc}i_x^{*IT} \times \frac{\sum_{m=0}^{35} {}^{pass}l_x^m}{{}^{IT}l_x^0}$$

Dans le cas de la maladie nous obtenons les probabilités de passage en incapacité de travail et en invalidité suivantes :

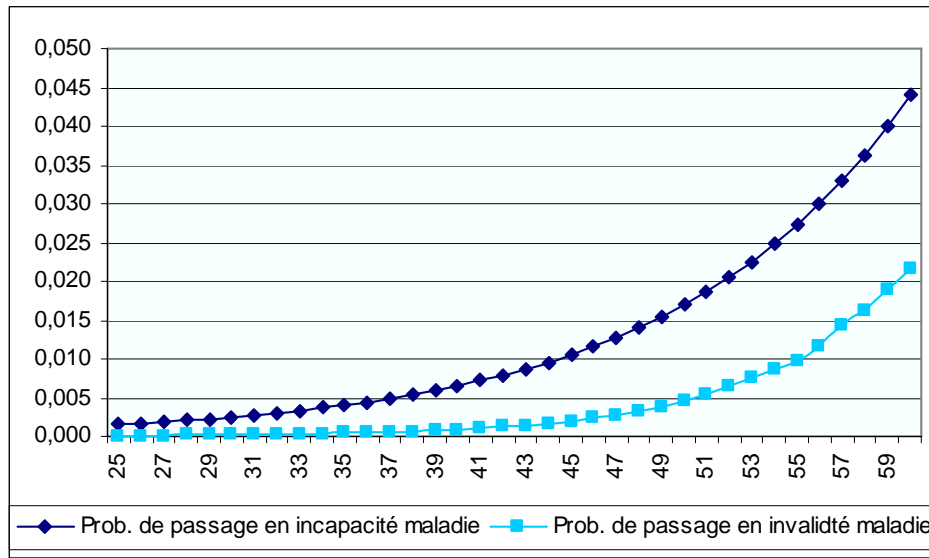


FIG. 24 – PROBABILITES DE PASSAGE EN INCAPACITE DE TRAVAIL ET INVALIDITE POUR CAUSE DE MALADIE

La table de maintien en invalidité du BCAC fournit en colonne l'âge de l'assuré à son arrêt de travail et en ligne, le nombre d'années écoulés depuis son arrêt de travail. Comme indiqué en annexe 1, nous notons ${}^{IP}l_x^n$ le nombre d'individus entrés à l'âge x en invalidité et toujours en invalidité après n années, parmi un effectif initial de 10.000 assurés entrés en IP à l'âge x.

L'assureur verse la rente annuelle pour l'année n si l'assuré est toujours en invalidité en n (i.e. maintien en invalidité depuis la fin de l'année d'arrêt jusqu'à l'année n), c'est-à-dire avec une probabilité $\frac{{}^{IP}l_x^n}{{}^{IP}l_x^0}$. Cette probabilité correspond donc au montant probable que devra payer l'assureur pour une rente en cours de service d'1€

La charge de sinistre annuelle en invalidité permanente est alors :

$$Kin v_j(t) = \begin{cases} (180 - franchise) I J_j \times \frac{{}^{IP}l_{x_j+t}^{t-1}}{{}^{IP}l_{x_j+t}^0} & \text{pour } t = 1 \\ 365 I J_j \times (1 + \text{taux reval})^{t-2} \times \frac{{}^{IP}l_{x_j+t}^{t-1}}{{}^{IP}l_{x_j+t}^0} & \text{pour } 2 \leq t \leq 65 - x_j(0) \end{cases}$$

Rappelons qu'au 1^{er} janvier de chaque année, les rentes d'invalidité servies depuis un an au moins sont revalorisées en fonction de l'indice cité dans la présentation du produit. Par

conséquent, vu qu'en t=1, seuls six mois ont été indemnisés, les indemnités journalières sont revalorisées à partir de t=3

D'où la charge de sinistre en invalidité au 31/12/N+t est :

$$\begin{aligned} \text{Sinistres espérés}^{IP}(t) = & \sum_{j=1}^J \left(\text{Kin}v_j^{mal}(t) \times {}^{mal}i_{x_j+t}^{IP} + \text{Kin}v_j^{acc}(t) \times {}^{acc}i_{x_j+t}^{IP} \right) \times_{t-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{t-1} \left(\text{Kin}v_j^{mal}(t) \times {}^{mal}i_{x_j+k}^{IP} + \text{Kin}v_j^{acc}(t) \times {}^{acc}i_{x_j+k}^{IP} \right) \times_{k-1} \lambda_{x_j, a_j}^* \end{aligned}$$

2.3.2.4. Les provisions

Le contrat XL Prévoyance nécessite la mise en place de trois provisions. La première est la provision pour prime émise non acquise pour les garanties non vie, la seconde est la provisions pour sinistre à payer qui s'applique aux sinistres incapacité de travail et la dernière est la provision mathématique de rente, qui concerne les sinistres invalidité et rente éducation.

- **La provision pour primes émises non acquises (PENA)**

La prime émise et encaissée au cours d'un exercice couvre des risques débordant sur l'exercice suivant, voire sur plusieurs exercices. Il convient alors de constituer une provision correspondant à la fraction de prime afférente à ces exercices futurs.

D'après l'article R331-6 du Code des Assurances, la provision pour primes non acquises est destinée à constater, « pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et des primes restants à émettre se rapportant à la période comprise entre la date d'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut du terme du contrat ».

La PENA est donc déterminée au prorata temporis de la durée (article A331-16 du Code des Assurances) séparant la date d'inventaire de la date d'échéance de prime suivante. Le prévisionnel XL Prévoyance étant réalisé sur des données agrégée, nous ne pouvons donc pas calculer la PENA de cette manière. Les PENA sont ainsi déterminées à partir d'un taux de PENA historique observé sur le portefeuille.

$$\text{PENA espérée}(t) = \sum_{j=1}^J \text{Primes espérées}_j^{DA+IT+IP}(t) \times \text{taux PENA}$$

La PENA n'est constituée que pour les garanties non-vie, les versements des primes en vie n'étant pas obligatoire.

- **La provision pour sinistres à payer (PSAP)**

D'après l'article R331-6 du Code des Assurances, les provisions pour sinistres à payer représentent « la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise ».

L'incapacité temporaire de travail donne lieu à constitution, pour les sinistres en cours de provisions pour sinistres à payer (chargées pour frais de gestion) pour les indemnités journalières dues au titre de l'exercice et non encore réglés, et de provisions pour sinistres (chargées pour frais de gestion) pour les indemnités journalières dues après la date d'arrêt.

$$PSAP \text{ espérée}(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=t+1}^{65-x_j(0)} 1_{\{\text{Sinistres espérés}_j^{IT}(t+1) > 0\}} \times \text{Sinistres espérés}_j^{IT}(k) \times \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k-t-1}$$

▪ La provision mathématique de rente (PMR)

D'après l'article R331-6 du Code des Assurances, la provision mathématique des rentes représente « la valeur actuelle des engagements de l'entreprise en ce qui concerne les rentes et accessoires de rente mis à sa charge ». Les rentes dont il est question ici sont les rentes invalidité et les rentes éducation.

L'invalidité permanente suite à accident ou maladie donne lieu à constitution de provisions mathématiques pour rentes en service correspondant aux prestations d'invalidité à verser après l'arrêt au titre des dossiers d'invalidité en cours à cette date.

Le décès de l'assuré ayant souscrit la garantie rente éducation, donne lieu à constitution de provisions mathématique de rentes en service correspondant aux prestations à verser jusqu'au 25^{ème} anniversaire du ou des bénéficiaire(s) ayant lieu après la date d'inventaire.

$$PMR \text{ espérée}(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=t+1}^{65-x_j(0)} 1_{\{\text{Rentés espérés}_j(t+1) > 0\}} \times \text{Rentés espérés}_j(k) \times \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k-t-1}$$

2.3.3. Projection des affaires nouvelles

Comme dans la simulation des affaires nouvelles du produit Assur-Obèques, nous escomptons des affaires au cours des 10 prochaines années en suivant la répartition par âge et des garanties choisies à la souscription du portefeuille.

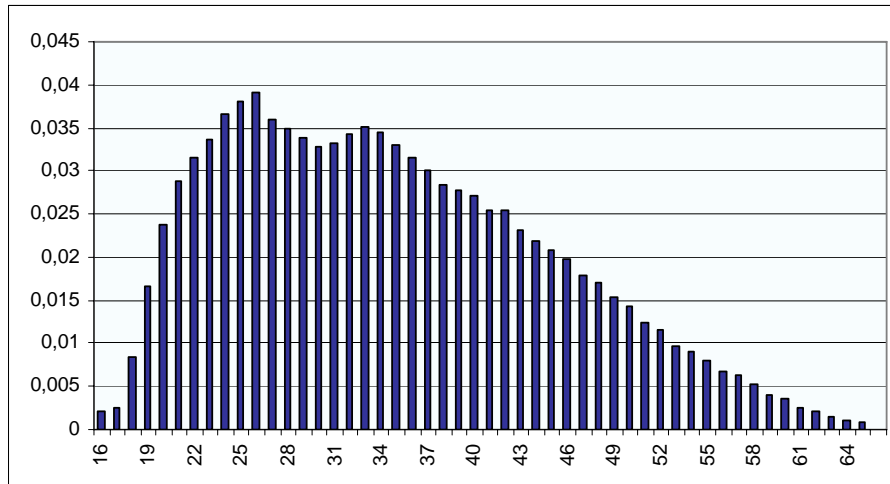


FIG. 25 – REPARTITION DE L'AGE A LA SOUSCRIPTION AU 31/12/2006 XL PREVOYANCE

Les années d'entrée sont numérotées $k=0\dots 9$ et on simule J_k contrats la $k^{\text{ième}}$ année. On note x_{jk} l'âge à la souscription du $j^{\text{ième}}$ contrat de la $k^{\text{ième}}$ année. Comme nous le verrons dans la partie consacrée aux résultats du prévisionnel, suite à une campagne publicitaire menée par les ACM, nous avons observé une large augmentation des souscriptions en 2006. Par conséquent, nous décidons de simuler moins de contrats que de souscriptions observés en 2006. De plus nous escomptons une diminution du nombre de souscriptions durant ces 10 années.

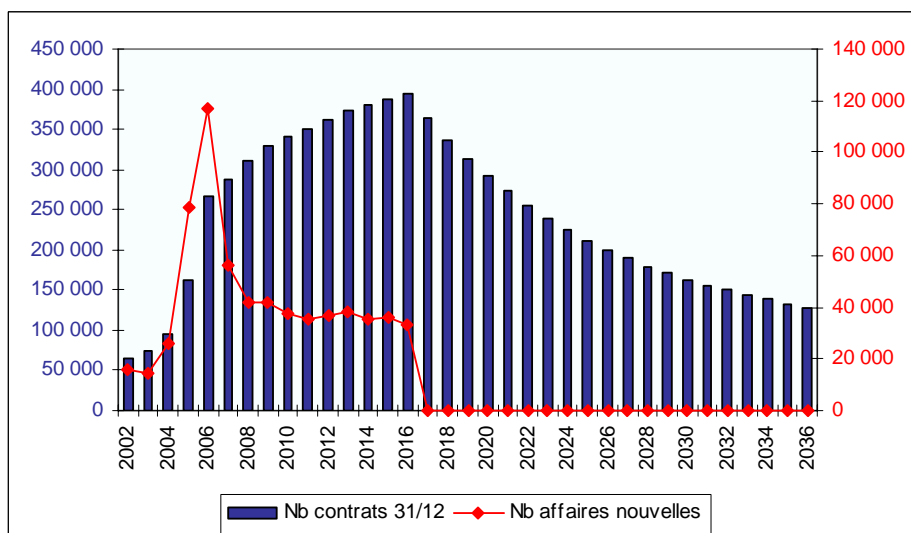


FIG. 26 – NOMBRE DE CONTRATS AU 31/12 ET D'AFFAIRES NOUVELLES DE CHAQUE ANNEE PREVOYANCE

La probabilité de sortir au cours de l'année de souscription est établie au prorata temporis de durée séparant la date d'effet de la fin d'année.

En notant durée le nombre de jours séparant la date d'effet du 31/12 divisé par le nombre de jours que compte l'année, la probabilité de présence au cours de la première année sous l'hypothèse d'une répartition uniforme des décès est :

$$P_{x_j}^* = (1 - durée \times q_{x_j}^*) (1 - durée \times s_0^*)$$

Notons que pour ce produit, nous avons retenu les taux de sorties en fonction de l'ancienneté. Par conséquent, les affaires nouvelles ont tous une ancienneté nulle.

Nous détaillons brièvement l'ensemble des flux projetés :

2.3.3.1. Le nombre de contrats

Le nombre de contrats présents au 31/12/N+t est égal à :

$$Nbre\ contrats\ espérés(t) = \sum_{k=0}^{\min(t,9)} \sum_{j=1}^{J_k} P_{x_{jk}}^* \times_{t-k} \lambda_{x_{jk},0}$$

La fréquence n'intervient plus dans la simulation des affaires nouvelles. Ce paramètre n'a été utilisé dans le stock que dans un souci de gain de temps. Les affaires nouvelles sont elles simulées individuellement.

2.3.3.2. Les primes et de commissions

En suivant le même raisonnement utilisé précédemment, nous établissons :

$$Primes\ espérées(t) = 1_{\{t \geq 1\}} \sum_{k=0}^{\min(t-1,9)} \sum_{j=1}^{J_k} \sum_{gar} Prime_{jk}^{gar}(t) \times P_{x_{jk}}^* \times \frac{{}_{t-1-k} \lambda_{x_{jk},0}^* + {}_{t-k} \lambda_{x_{jk},0}^*}{2} + 1_{\{t \leq 9\}} \sum_{j=1}^J \sum_{gar} durée \times Prime_{jt}^{gar}(t) \times \frac{1 + P_{x_{jt}}^*}{2}$$

Dans la simulation des affaires nouvelles, nous ne supposons ni réduction, ni surprime tarifaire. La prime escomptée est la somme des primes par garantie escomptées.

2.3.3.3. Les sinistres

Le raisonnement est le même que pour la projection des flux de sinistres en stock. Nous distinguons les flux de sinistres pour chaque garantie.

Par exemple, pour la garantie décès toutes causes, nous avons au 31/12/N+t :

$$Sinistres\ espérés^{DC}(t) = 1_{\{t \geq 1\}} \sum_{k=0}^{\min(t-1,9)} \sum_{j=1}^{J_k} Kdécès_{jk}(t) \times P_{x_{jk}}^* \times_{t-1-k} \lambda_{x_{jk},0}^* \times q_{x_{jk}+t-1-k} + 1_{\{t \leq 9\}} \sum_{j=1}^J durée \times Kdécès_{jt}(t) \times q_{x_{jt}}$$

2.3.3.4. Les provisions

De manière similaire au stock, nous déterminons les montants des trois provisions espérés. Par exemple pour les PENA, nous avons :

$$PENA \text{ espérée}(t) = \sum_{k=0}^{\min(t,9)} \sum_{j=1}^{J_k} P_{x_{jk}}^* \times_{t-k} \lambda_{x_{jk},0} \times PENA_{jk}(t)$$

2.3.4. Projection des sinistres en cours

Au 31/12/N, nous possédons un inventaire des sinistres en cours pour lesquelles des provisions de sinistres à payer incapacité et des provisions mathématiques de rentes sont constituées. Nous disposons de la date de survenance des sinistres, de l'âge de l'assuré au sinistre, de la date de naissance des bénéficiaires, du nombre de mois indemnisé et du montant de l'indemnité versée. A partir de ces éléments nous pouvons à l'aide des tables de maintien et de passage du BCAC déterminer les sinistres et les provisions espérés.

Pour les sinistres en rente éducation en cours, des PM doivent être constituées, le(s) bénéficiaire(s) percevant les indemnités de rente jusqu'à leur 25^{ème} anniversaire.

Pour les sinistres en incapacité de travail en cours, des PSAP et des PMR doivent être constituées : en effet, l'individu en incapacité de travail au 31/12/N, peut se maintenir en incapacité de travail pendant la durée maximale d'indemnisation restante ou bien passer en invalidité durant cette période. Dans ce dernier cas, le maintien en invalidité devra être déterminé.

Pour les sinistres en invalidité en cours, seules des PMR doivent être constituées : l'individu en invalidité permanente au 31/12/N peut se maintenir dans cet état au maximum jusqu'à son 65^{ème} anniversaire.

Détaillons l'ensemble des flux de sinistres estimés. Ces flux de sinistres permettront de déterminer les provisions probables.

2.3.4.1. Les sinistres rente éducation en cours

Dans la modélisation, nous n'avons pas considéré de mortalité pour les bénéficiaires de rente éducation. Nous faisons de même ici. Le montant des flux annuels correspond au montant de la rente annuelle servie jusqu'au 25^{ème} anniversaire du bénéficiaire et revalorisée après un an de service de la rente.

2.3.4.2. Les sinistres en incapacité en cours

Nous disposons d'un inventaire au 31/12/N des sinistres en incapacité en cours. Seuls les dossiers ayant fait l'objet d'un règlement pour arrêt de travail en cours des quatre derniers mois de l'exercice font l'objet d'un provisionnement.

Notons μ le nombre de mois indemnisés (franchise comprise) depuis l'arrêt de travail. Au 31/12/N, nous savons que l'individu j en incapacité de travail depuis l'âge y est indemnisé depuis μ mois. Le maintien en incapacité de travail se détermine à partir de ces deux éléments. Le capital mensuel versé est alors :

$$Kinc_j^{mens}(m) = 30IJ_j \times \frac{{}^{\text{IT}}I_{y_j}^{\mu+m-1}}{{}^{\text{IT}}I_{y_j}^{\mu}} \text{ si } 1 \leq m \leq D,$$

Avec D est la durée maximale d'indemnisation restante en mois, c'est à dire la différence entre 24 ou 36 et μ .

Rappelons qu'au 1^{er} janvier de chaque année, les indemnités journalières servies pour des arrêts de travail de six mois au moins, sont revalorisées. D'où la charge de sinistre en invalidité en cours au 31/12/N+t est :

$$\text{Sinistres espérés}^{\text{IT}}(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=12(t-1)-1}^{12t \wedge D} Kinc_j^{mens}(m) \times (1 + \text{taux reval})^{t-1+1_{\{\mu \geq 6\}}} \text{ pour } t \leq 3$$

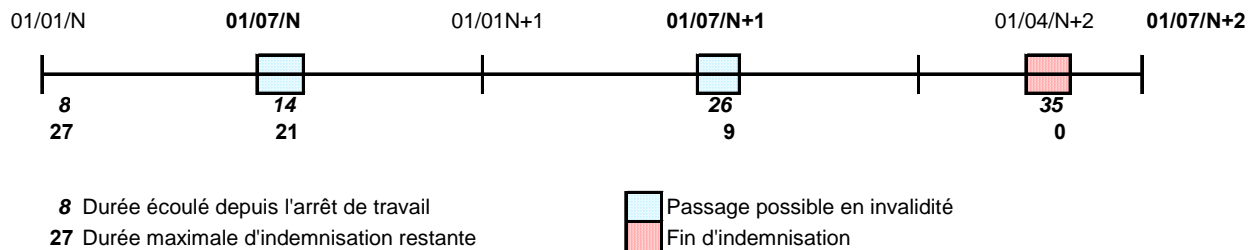
En effet, les sinistres traités ici sont en cours au 31/12/N+t : par conséquent la probabilité de passage en incapacité n'a plus d'intérêt d'être prise en compte.

A ces flux probables de sinistres en incapacité de travail, s'ajoutent les flux probables de sinistres en invalidité. En effet, les assurés ayant souscrits l'option invalidité permanente, peuvent passer en invalidité et dans ce cas, des rentes devront lui être versées.

Comme précédemment, nous supposons que le taux d'invalidité est de 66%, ce qui implique le versement de l'intégralité de la rente.

Un individu en incapacité de travail depuis μ mois, peut entrer en invalidité durant les D mois restants. Nous supposons toujours que le passage en invalidité se fait en milieu d'année.

Observons le graphique suivant : Nous représentons les différents passages en invalidité possibles pour un assuré entré en incapacité à l'âge y , qui est entré en incapacité de travail depuis 8 mois (D).



Suivant notre hypothèse de modélisation du passage en invalidité en milieu d'année, cet individu peut passer en invalidité au 01/07/N et au 01/07/N+1. L'année suivante, il percevra sa dernière indemnisation (s'il est toujours en incapacité de travail) au mois d'avril. Il ne pourra alors plus passer en invalidité. Cet individu a donc 2 « possibilités » pour passer en invalidité, qu'on note h .

S'il passe en invalidité en N, alors h=1 et la probabilité de passage associée est :

$$\frac{\sum_{k=12(h-1)}^{D \wedge 12h-1} \text{pass } l_{y_j}^{\mu+k}}{{}^{\text{IT}} l_{y_j}^{\mu}} = \frac{\sum_{k=0}^{D \wedge 11} \text{pass } l_{y_j}^{\mu+k}}{{}^{\text{IT}} l_{y_j}^{\mu}}$$

En effet, nous sommes les individus entrés à l'âge x en incapacité de travail et qui passent en invalidité après μ mois et avant $\mu + 12$ mois passés en incapacité de travail.

Par un raisonnement analogue, pour h=2 ou voire h=3 (pour les individus ayant $\mu < 6$), nous obtenons :

$$\text{Kin}v_j^h(t) = (1_{\{h=t, t \leq 3\}} 180 + 1_{\{h < t\}} 365) l_j \times \frac{\sum_{k=12(h-1)}^{D \wedge 12h-1} \text{pass } l_{y_j}^{\mu+k}}{{}^{\text{IT}} l_{y_j}^{\mu}} \times \frac{{}^{\text{IP}} l_{x_j+t}^{t-1}}{{}^{\text{IP}} l_{x_j+t}^0} \text{ pour } t \leq 65 - x_j \quad (0)$$

En prenant en compte la revalorisation des prestations au 01/01 pour des rentes versées depuis plus de un an, les sinistres espérés sont :

$$\text{Sinistres espérés}^{\text{IP}}(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{h=1}^3 \text{Kin}v_j^h(t) \times (1 + \text{taux reval})^{0 \vee (t-1-h)}$$

Le montant des PSAP et des PMR au 31/12/N+t se déterminent de façon analogue au stock en actualisant les flux futurs de sinistres espérés à cette date.

2.3.4.3. Les sinistres en invalidité en cours

Nous disposons du nombre de mois de rente versées (franchise comprise) pour chaque sinistre. La table de maintien en invalidité du BCAC étant une table annuelle, nous supposons donc la linéarité dans le passage des probabilités de survie annuelles aux probabilités mensuelles :

$${}^{\text{IP}} l_{x+s} = (1-s) \times {}^{\text{IP}} l_x + s \times {}^{\text{IP}} l_{x+1} \text{ avec } 0 \leq s \leq 1$$

Les sinistres en invalidité ne sont conditionnés que par le maintien dans l'état d'invalidité. Le passage en invalidité n'a plus lieu d'être pris en compte car les assurés sont déjà en invalidité.

En notant $[z]$ la partie entière de z, les sinistres espérés au 31/12/N+t sont :

$$\text{Sinistres espérés}^{\text{IP}}(t) = \sum_{j=1}^J \text{Rente}_j(t) \times \frac{{}^{\text{IP}} l_{y_j+t}^{t-1}}{{}^{\text{IP}} l_{y_j+t}^0} \times (1 + \text{taux reval})^{t-1 - \lfloor \frac{\mu}{12} \rfloor}$$

En effet l'âge entier au 31/12/N est de $y + \left[\frac{\mu}{12} \right]$ et la partie décimale est $0 \leq 1 - \frac{\mu}{12} \leq 1$.
D'autre part, rappelons qu'au 01/01 les rentes versées depuis un an au moins sont revalorisées, c'est-à-dire pour les rentes dont $\left[\frac{\mu}{12} \right] \geq 1$.

Le montant des PMR au 31/12/N+t se détermine de façon analogue au stock en actualisant les flux futurs de sinistres espérés à cette date.

2.3.5. Les résultats du prévisionnel XL Prévoyance

Après ce long exposé des formules de projection de flux mis en place dans le prévisionnel, nous présentons graphiquement les résultats obtenus. Nous représentons l'évolution probable des provisions estimées sur le stock et les sinistres en cours et sur les affaires nouvelles, le résultat probable pour les garanties décès et doublement du capital décès en cas d'accident et pour les garanties incapacité de travail et invalidité permanente sur le stock au 31/12/2006.

Finalement, comme pour Assur-Obsèques, nous présentons la revalorisation probable et nous élaborons un backtesting des flux en comparant les flux projetés aux données historiques observées sur le portefeuille de 2002 à 2006.

▪ Evolution probable des provisions

Dans un premier temps, nous observons l'évolution probable des provisions sur le stock et les sinistres en cours au 31/12/2006 :

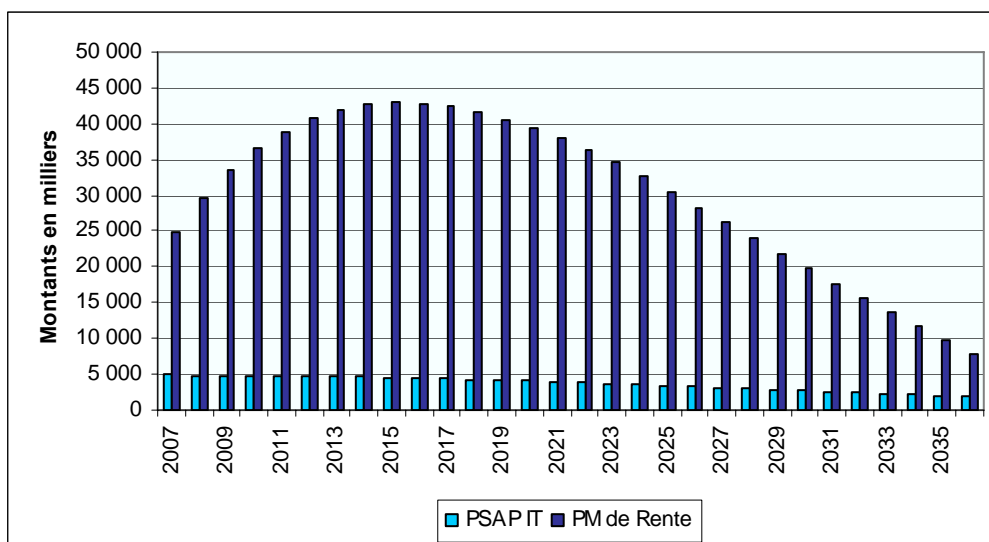


FIG. 27 – EVOLUTION PROBABLE DES PROVISIONS – STOCK + SINISTRES EN COURS

Concernant les PSAP, nous observons une diminution sur l'ensemble du prévisionnel. En effet, l'effectif de la population du stock et des sinistres en cours est décroissant.

Concernant les PMR, les prestations étant versées durant des périodes plus longues (jusqu'au 65^{ème} anniversaire de l'assuré), un volume de provision plus grand que les PSAP doit être constitué et ces provisions sont croissantes durant les 10 prochaines années à venir.

Nous représentons le même graphique sur les affaires nouvelles escomptées. Comme nous pouvions l'attendre, nous observons dans un premier temps une augmentation des provisions puis une diminution dès la première année où les affaires nouvelles ne sont plus escomptées dans le cas des PSAP et après près de 20 ans pour les PMR.

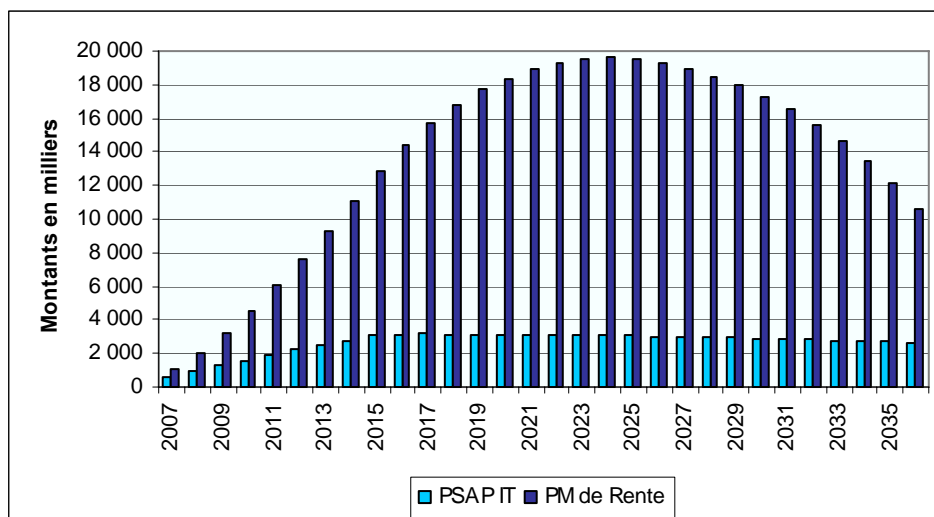


FIG. 28 – EVOLUTION PROBABLE DES PROVISIONS – AFFAIRES NOUVELLES

▪ Flux probables en décès sur le stock

Dans un premier temps, nous observons une augmentation du chiffre d'affaires de plus de 65% de 2007 à 2036. Cette augmentation, qui peut paraître contradictoire par rapport aux résultats obtenus sur le stock Assur-Obèques, peut être expliquée par la nature du produit. En effet, le vieillissement de la population est caractérisé par l'augmentation des cotisations qui sont fonction de l'âge atteint à chaque échéance annuelle. D'autre part, les garanties et par conséquent les cotisations sont revalorisées annuellement. Donc la diminution du nombre de contrats espérés, entraînant la diminution de la masse de primes encaissées, est largement compensée par l'augmentation du tarif décès en fonction de l'âge.

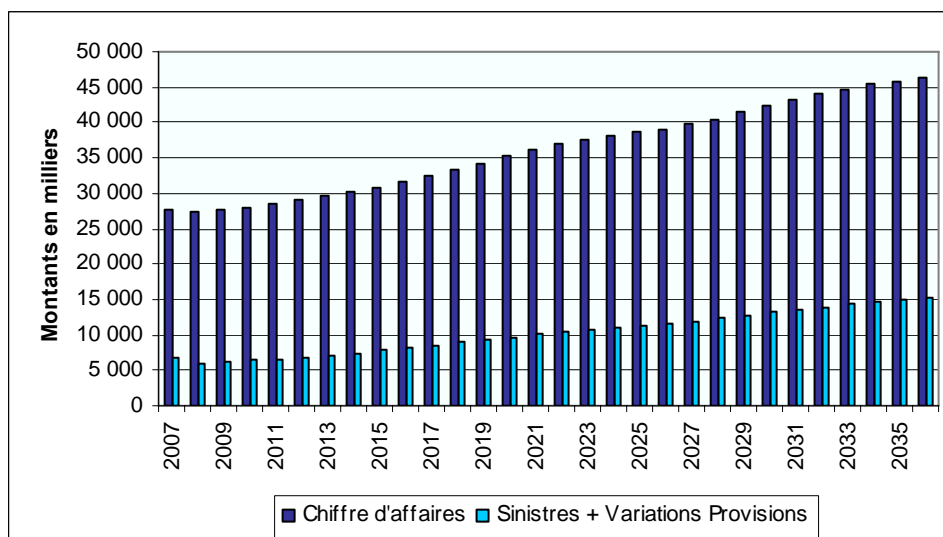


FIG. 29 – EVOLUTION PROBABLE DES FLUX DE DECES – STOCK

Notons par ailleurs que l'âge du portefeuille au 31/12/2006 pour la garantie décès est de 35,1 ans, soit une population relativement jeune.

Concernant les sinistres et la variation des PM de rentes éducation, nous observons une augmentation de plus de 125% de 2007 à 2036. Cette augmentation peut être expliquée par le vieillissement de la population et la revalorisation annuelle des garanties.

▪ **Résultat probable IT+IP sur le stock**

Contrairement au décès, nous observons une diminution des primes, des commissions et des sinistres probables de 2007 à 2036. Dans ce cas, l'augmentation du tarif et de la revalorisation des garanties et des cotisations ne compensent pas l'impact du vieillissement de la population.

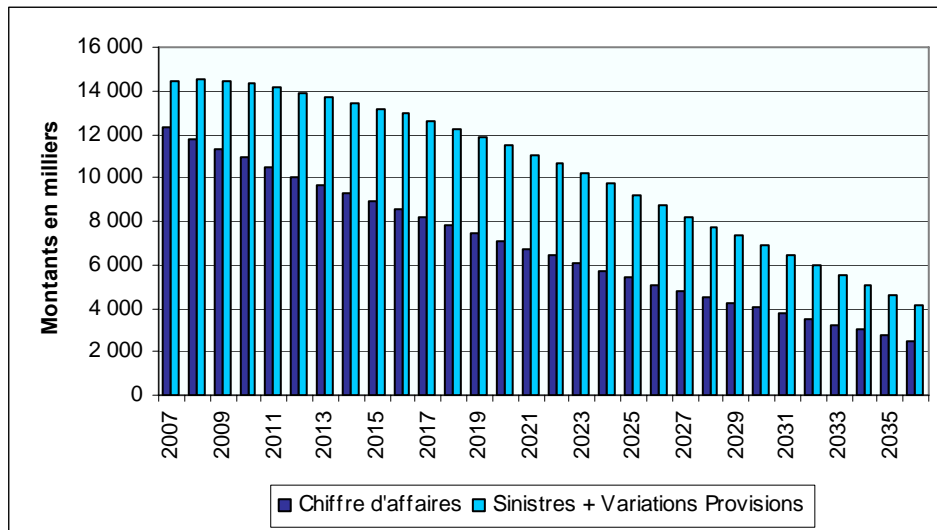


FIG. 30 – EVOLUTION PROBABLE DES FLUX D'INCAPACITE ET INVALIDITE – STOCK

▪ **Backtesting des flux**

Afin de vérifier que les projections réalisées suivent le profil les flux historiques, nous établissons, comme pour Assur-Obsèques, un backtesting à partir des données historiques de 2002 à 2006 sur les flux projetés à partir de 2007.

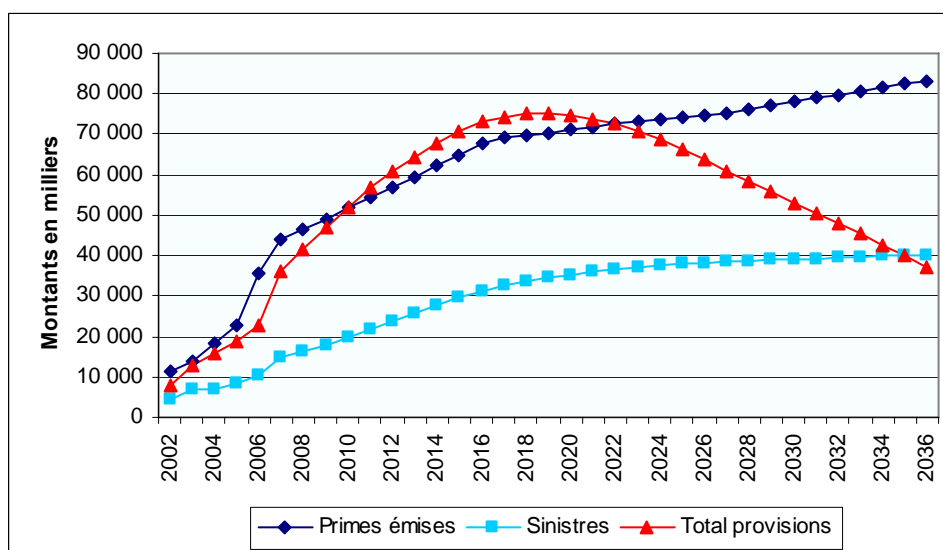


FIG. 31 – BACKTESTING XL PREVOYANCE

Dans le cas du décès, nous observons une augmentation de 53 % des primes émises pour la dernière année de l'historique : cette augmentation est expliquée par une augmentation du nombre de souscription de 63 %, qui fait suite à une forte campagne pour le produit menée par la compagnie d'assurance.

Le nombre de souscription ayant fortement augmenté en 2006, les primes, les provisions et les sinistres projetés suivent ainsi la même tendance l'année suivante.

Nous pouvons donc conclure que le prévisionnel élaboré fournit des résultats s'inscrivant dans la suite « logique » des flux observés sur le portefeuille.

Rappelons que cette vision n'est qu'une vision moyenne. Afin d'obtenir une distribution des flux futurs probables, nous mettons en place la modélisation stochastique.

2.3.6. Limites du modèles

Le modèle déterministe mis en place comporte des limites qui sont pour la plupart des hypothèses de simplifications :

- Les données en input du prévisionnel sont des données agrégées en fonction de l'âge à l'adhésion, de l'ancienneté, des garanties et des capitaux assurés. Par conséquent nous avons perdu les données concernant la date d'effet du contrat dans le processus d'agrégation. Le calcul des PENA ne peut donc pas se faire de manière exacte : nous avons alors décidé de calculer ces provisions à partir du taux de PENA moyen observé sur le portefeuille.
- Les taux de surprimes et les réductions tarifaires n'étant pas disponibles, la prime est recalculée annuellement en fonction de l'âge, de la classe tarifaire et des garanties de l'assuré. Puis nous déterminons les primes futures en multipliant cette prime théorique calculée par le rapport de la cotisation effective (les surprimes et les réductions y étant incluses) par la cotisation initiale théorique. Cette multiplication nous permet de prendre en compte les surprimes et les réductions en portefeuille.
- La commission est déterminée à partir d'un taux moyen de commission pour le produit. Nous ne déterminons pas la commission par garantie.
- Nous ne supposons pas de mortalité pour les bénéficiaires de rente éducation, qui ont un âge moyen de 10,1 ans et qui représentent 5,6 % du portefeuille. La prise en compte de la mortalité de ces bénéficiaires n'aurait pas beaucoup de conséquences sur les flux estimés. Pour indication, d'après la table TD88-90, la probabilité de décéder entre 10 et 25% est de 1,33%.
- La table de mortalité d'expérience réalisée est une table statique, c'est-à-dire qu'elle concerne uniquement les survenances de sinistres présentes (2005 et 2006), c'est-à-dire la mortalité de la population actuelle. Nous n'utilisons pas de tables dynamiques ou prospectives, dites de « génération », qui tiennent compte du recul de la mortalité, c'est-à-dire qui intègrent une tendance temporelle. Cette limite sera corrigée dans la modélisation stochastique par l'utilisant du modèle de Lee Carter (1992).

Certaines de ces limites pourraient être corrigées, mais les temps de calculs seraient encore augmentés.

Pour indication, le temps de calcul nécessaire à la projection des flux du stock est de 25 minutes et pour la projection des flux des affaires nouvelles, près de 4 heures sont nécessaires. En effet, les affaires nouvelles sont simulées une à une : dans ce cas, nous n'avons pas d'agrégation des données. Les temps de calculs sont très souvent des freins à la modélisation. Ce dernier point sera d'autant plus vrai dans le cas des modèles stochastiques, où un grand nombre de simulations sont nécessaires afin d'observer l'impact du stochastique sur les projections.

2.4. Conclusion

Les deux modélisations déterministes mises en place fournissent la vision moyenne des flux futurs modélisés. La première est une modélisation ligne à ligne et dans la seconde les données ont été agrégées pour un gain de temps dans l'exécution du programme réalisé.

L'étape suivante est la modélisation stochastique des mêmes produits Assur-Obsèques et XL Prévoyance. Cette modélisation stochastique repose dans un premier temps sur le tirage de variables aléatoires, et dans un second temps sur un modèle de construction de tables de mortalité prospectives dans le cas de la mortalité et sur les modèles linéaires généralisés dans le cas des rachats et des taux d'entrée en incapacité de travail. Concernant le maintien en incapacité de travail, le passage en invalidité et le maintien en invalidité, nous continuons à utiliser les tables fournies par le BCAC.

Cette modélisation stochastique permettra l'obtenir la distribution du compte technique et par conséquent de la revalorisation pour les 30 années à venir.

3. Modélisation stochastique

La seconde étape du stage est la modélisation stochastique des produits de prévoyance. L'étude est faite sur les mêmes produits que dans la modélisation déterministe et pourra être adaptée à l'ensemble des autres produits de prévoyance de la société.

Dans un premier temps, une introduction à la modélisation stochastique sera donnée. Dans cette partie, nous verrons que l'agrégation des données, qui a pour net avantage de réduire les temps de calcul, peut significativement augmenter la volatilité des résultats suivant le principe de simulations adopté. D'autre part, les méthodes de génération des variables aléatoires utilisées dans la simulation seront présentées et nous terminerons par quelques remarques concernant les temps de calcul.

Dans un second temps, la modélisation stochastique du produit Assur-Obsèques sera présentée. Nous verrons de quelle façon la mortalité, les rachats et les taux de rendement ont été modélisés de manière stochastique. Pour finir l'étude concernant le produit Assur-Obsèques, les résultats sous forme de représentations graphiques et les limites de la modélisation seront exposés. Nous verrons que les résultats moyens obtenus sont similaires aux résultats obtenus dans le modèle déterministe.

Finalement nous verrons la modélisation stochastique du produit XL Prévoyance. La modélisation de la mortalité, des résiliations et des taux de rendement est similaire à celle mise en place pour Assur-Obsèques. La modélisation des autres garanties comme l'incapacité de travail sera présentée et nous verrons que le principe adopté est similaire à celui employé pour la modélisation des résiliations. Finalement les résultats et les limites de la modélisation seront donnés.

3.1. Introduction à la modélisation stochastique

Le terme « stochastique » renvoie à l'utilisation de tirages aléatoires respectant des lois de probabilité. Dans cette section nous verrons les méthodes de simulations utilisées pour générer les variables aléatoires nécessaires dans les simulations et nous donneront quelques remarques concernant les temps de calculs. En effet la prise en compte des temps de calculs est importante, car pour mesurer l'impact du stochastique, un grand nombre de simulations doit être réalisé.

Avant d'évoquer ces points, nous débiterons par étudier l'impact de l'agrégation des données, qui peut engendrer de la volatilité.

3.1.1. L'impact de l'agrégation des données

Dans un souci de gain de temps de calcul, nous avons décidé d'agrèger les données du stock pour chaque produit. Mais quels impacts fournit cette agrégation ? Modifie-t-elle la volatilité de nos résultats ?

Afin de répondre à ces questions, nous comparons l'évolution du nombre de contrats suite à des simulations sur le portefeuille non agrégé et sur le portefeuille agrégé. Cette comparaison nous permet ainsi de répondre à nos interrogations.

▪ La simulation des sorties de manière globale

Notre première approche a été de simuler les sorties de manière globale, c'est-à-dire de manière agrégée. A partir d'une variable aléatoire uniforme et de la distribution à priori des sorties pour une ligne de contrats agrégés (i.e. pour un âge à l'adhésion, une ancienneté et un fractionnement donnés), l'ensemble de ces contrats sortent par décès ou par rachat la même année. Cette hypothèse est forte, car nous supposons que l'ensemble des assurés ayant les mêmes caractéristiques sortent la même année et pour la même cause.

Nous étudions l'évolution du nombre de contrats pour 200 simulations, d'une part sur le portefeuille agrégé et d'autre part sur le portefeuille non agrégé pour le produit Assur-Obsèques. Nous comparons les résultats en moyenne et en quantiles.

Le nombre de contrats moyens observé suite aux deux séries de simulations sont donnés dans la figure suivante :

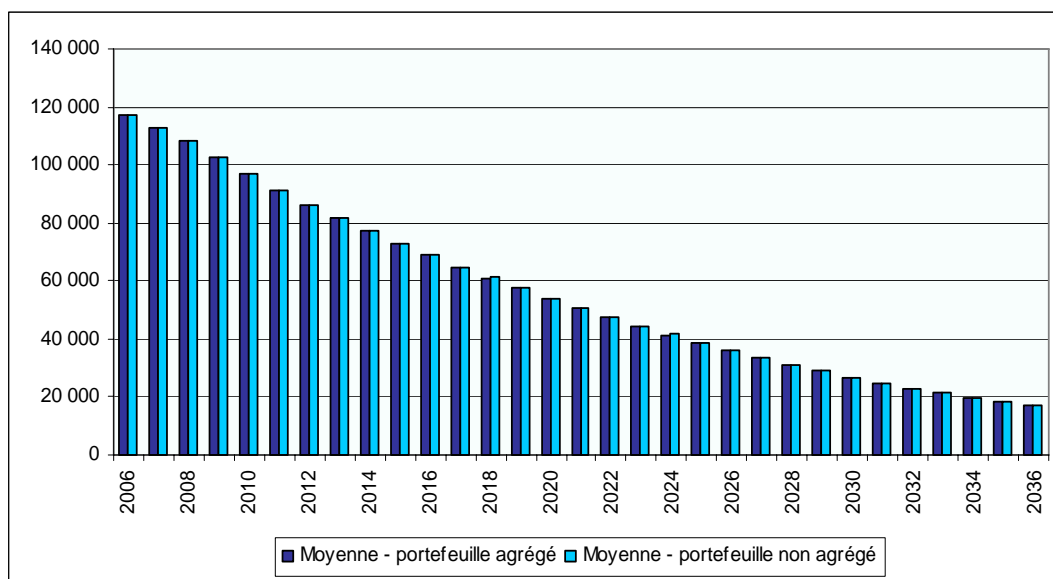


FIG. 32 – COMPARAISON DU NOMBRE DE CONTRATS MOYENS - 200 SIMULATIONS

Nous pouvons conclure d'après la figure ci-dessus, qu'en moyenne la projection du nombre de contrats est proche. L'agrégation des données n'impacte donc pas la moyenne des projections et notre hypothèse simpliste paraît jusqu'à présent acceptable.

Mais en observant les quantiles et plus précisément l'écart entre les quantiles à 95% et 5%, nous observons une large augmentation de l'écart inter-quantiles. Afin de comprendre et d'illustrer les raisons de l'augmentation de la volatilité que l'on observe avec cette démarche, nous présentons un exemple simple.

Les hypothèses de notre exemple sont les suivantes :

- La taille du portefeuille est de 1000 contrats de mêmes caractéristiques
- Aucun rachat n'a lieu : le seul risque est le décès
- La probabilité de décès est de 2 %

Dans le cas de l'agrégation des données, la première année, nous tirons une variable uniforme u . Si u est inférieure ou égale à 0,02 notre probabilité de décès, les 1000 assurés

décèdent et sinon ces assurés survivent. Ce processus peut être représenté par le schéma de Bernoulli suivant :

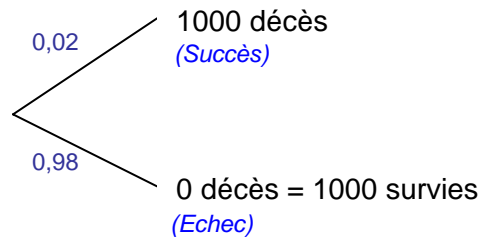


FIG. 33 – SCHÉMA DE BERNOULLI EN DONNEES AGREGUES

L'espérance de ce processus est de : $0,02 * 1000 + 0 = 20$

La variance de ce processus est de : $0,02 * 1000^2 + 0 - 20^2 = 19\ 600$

Dans le cas des données non agrégées, la première année, pour chacun des 1000 contrats, nous tirons une variable uniforme u . Si u est inférieure ou égale à $0,02$, l'assuré décède et sinon il survit. Ce processus peut être représenté par le schéma suivant :

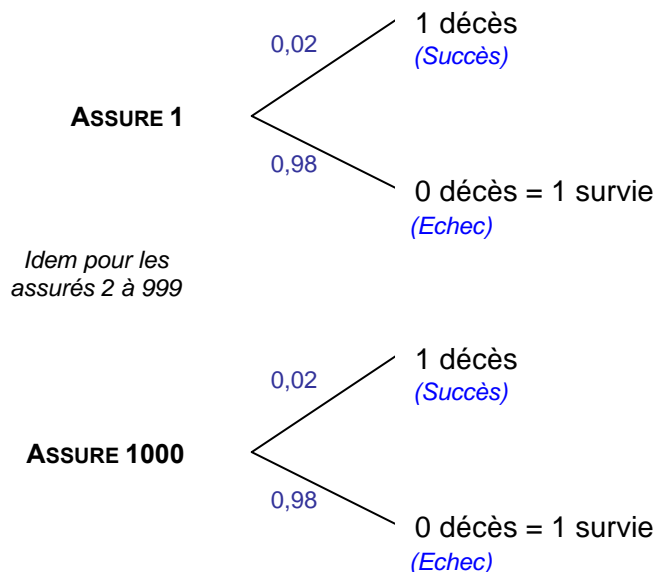


FIG. 34 – SCHEMAS DE BERNOULLI EN DONNEES NON AGREGUES

L'espérance de ce processus est de : $1000 * (0,02 * 1 + 0) = 1000 * 0,02 = 20$

La variance de ce processus est de : $1000 * (0,02 * 1^2 + 0 - 0,02^2) = 1000 * 0,0196 = 19,6$

Dans les deux schémas proposés, les moyennes sont égales. Mais en ce qui concerne la variance, celle-ci est multipliée par 1000 dans la version agrégée ! La variance est donc multipliée par l'effectif de l'agrégation.

Notre première approche relativement simple et peu coûteuse en temps de calcul doit par conséquent être écartée.

▪ La simulation des sorties par la loi binomiale

Nous abordons une seconde approche en utilisant des épreuves de Bernoulli successives. En effet, un contrat « individuel » (i.e. un contrat non agrégé) sort pour cause de décès avec la probabilité q_x et ne sort pas pour cause de décès avec la probabilité $1 - q_x$. Si le décès n'a pas eu lieu, le contrat est racheté avec la probabilité $s_{x,a}$ et n'est pas racheté avec la probabilité $1 - s_{x,a}$. Ces deux processus sont deux épreuves de Bernoulli successives (cf. figure 35), où le succès correspond à la sortie et l'échec au maintien du contrat en stock.

Mais en effectuant deux épreuves de Bernoulli pour chaque contrat individuel et pour chaque année de projection, cela revient à utiliser les données non agrégées, c'est-à-dire qu'aucun gain de temps de calculs n'est alors réalisé. Nous cherchons donc une méthode de simulation plus rapide.

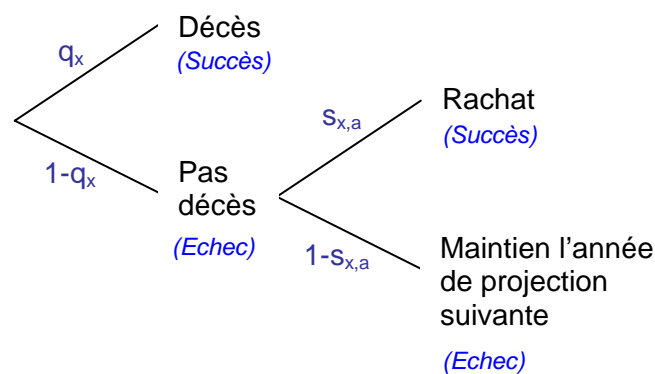


FIG. 35 – EPREUVES DE BERNOULLI SUCCESSIVES

Pour ce faire, nous utilisons la fonction $CRITERE.LOI.BINOMIALE(n, p, a)$ disponible dans Microsoft Excel. Cette fonction renvoie la plus petite valeur pour laquelle la distribution binomiale cumulée est supérieure ou égale à une valeur critère. Les paramètres de cette fonction sont le nombre de tirages de Bernoulli (n), la probabilité de succès (p) et le critère (a). Dans la modélisation, le nombre de tirages de Bernoulli représente le nombre de contrats agrégés, la probabilité de succès correspond à la probabilité de décès ou à la probabilité de rachat et le critère est une variable aléatoire uniforme sur $[0 ; 1]$ simulée.

Dans la projection, le nombre de contrats agrégés, c'est-à-dire le nombre de tirages de Bernoulli à chaque étape, est ainsi diminué chaque année par la valeur fournie par les deux fonctions de critère de la loi binomiale l'année précédente. En effet, le stock diminue chaque année suite aux décès survenus et aux rachats effectués.

Comme précédemment, nous simulons 200 fois le nombre de contrats et nous comparons les résultats obtenus aux résultats dans le cas des données non agrégées. Si bien en moyenne qu'en quantiles, nous obtenons des résultats similaires. Par conséquent, cette seconde approche est retenue. Concernant le temps de calcul, cette méthode reste nettement plus rapide que la simulation brute faite ligne à ligne.

3.1.2. La génération de variables aléatoires

Le choix des méthodes de simulations de variables aléatoires dépend de l'efficacité de l'algorithme, c'est-à-dire la rapidité et la qualité des simulations. Trois lois doivent être générées : la loi uniforme sur $[0,1]$, la loi normale et la loi de Poisson. Ces lois sont utilisées dans l'ensemble des étapes de la simulation : la modélisation des tables de mortalité, des lois de sorties et d'entrée en incapacité et finalement dans la modélisation des taux courts.

3.1.2.1. La génération d'une loi uniforme

La modélisation stochastique étant réalisée sous Microsoft Excel / Visual Basic, nous disposons d'un générateur pseudo-aléatoire de variables uniformes : il s'agit de la fonction *alea()* (dénomination française) ou *Rnd()* (dénomination anglaise). Le principal défaut de cette fonction est que le nombre aléatoire précédemment généré est utilisé pour le calcul du nombre aléatoire suivant, ce qui implique que la suite des nombres aléatoires est périodique. Ainsi au bout d'un grand nombre de tirages, on recommence la même suite de variables.

La fonction *Rnd()* est un générateur à congruence linéaire. Il s'agit de l'algorithme le plus utilisé pour produire des nombres aléatoires depuis qu'il a été inventé en 1948 par Derrick Henry Lehmer. L'algorithme est donné par :

$$x_1 = (x_0 \times a + c) \times \text{mod}(m)$$

Avec x_1 la nouvelle valeur générée, x_0 la « graine » du générateur (appelée « seed » en anglais) c'est-à-dire la valeur précédente (la valeur initiale utilisée par Visual Basic est 327.680), a le multiplicateur tel que $a = 1.140.671.485$, c l'incrément tel que $c = 12.820.163$ et m le module (i.e. opérateur du reste de la division euclidienne) tel que $m=2^{24}$.

Cette méthode présente plusieurs inconvénients. Elle simule donc des séries de variables aléatoires répétitives sans jamais atteindre 1 : en effet, les variables simulées appartiennent à l'intervalle semi-ouvert $[0 ;1[$. D'autre part en-dessous de 10000 valeurs simulées, les séquences générées ont graphiquement tendance à former des « paquets de nombres » (cf. bibliographie : Planchet, Jacquemin, 2003). Et finalement, ce générateur fournit au mieux m réalisations avec une équiprobabilité de $1/m$. Nous décidons par conséquent de ne pas retenir cette fonction pour générer les variables aléatoires de loi uniforme.

▪ **Méthode de la translation irrationnelle du Tore**

Nous retenons une seconde méthode qui est la méthode de la translation irrationnelle du Tore. Dans un premier temps il faut simuler un nombre aléatoire u compris entre 0 et 1 avec un générateur classique, comme la fonction *Rnd()*.

Il faut ensuite poser $n = \text{int}(u \times 10^8 + 1)$, où $\text{int}(x)$ représente la valeur entière de x . La variable uniforme v est générée de la manière suivante :

$$v = \text{frac}(n\sqrt{p})$$

Où $\text{frac}(x)$ est la partie fractionnaire de x et p est un nombre premier choisi dans la table des nombres premiers.

Cette méthode ne présente pas l'inconvénient de recommencer la même suite de variables, mais présente l'inconvénient de simuler une variable aléatoire au début de l'algorithme. Nous décidons néanmoins de la retenir.

3.1.2.2. La génération d'une loi normale

La seconde loi à générer est la loi normale. La fonction de répartition de cette loi n'étant pas facilement inversible, il faut avoir recours à des algorithmes spécifiques. Rappelons que la fonction de distribution et la fonction de répartition de la normale d'espérance m et d'écart type σ sont respectivement pour $x \in \mathfrak{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{Y \leq \frac{x-m}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Les deux méthodes de simulations présentées ci-dessous permettent de générer des variables aléatoires normales centrées et réduites.

▪ La simulation de variables normales par rejet

Le premier algorithme est la génération de variables aléatoires normales par la méthode de rejet. Cet algorithme consiste à générer des paires de nombres aléatoires à distribution normale centrée réduite à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme et d'un critère de rejet.

L'algorithme est le suivant :

- Générer deux variables aléatoires u_1 et u_2 de loi uniforme sur $[0 ; 1]$ et indépendantes
- Poser alors $v_1 = 2u_1 - 1$ et $v_2 = 2u_2 - 1$
- Si $S = v_1^2 + v_2^2 > 1$ alors on rejette les variables et on retourne à la première étape de l'algorithme
- Dans le cas contraire, les variables sont acceptées : $z_1 = v_1(-2S^{-1} \times \log S)^{1/2}$ et $z_2 = v_2(-2S^{-1} \times \log S)^{1/2}$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite

Cet algorithme simple à programmer informatiquement n'a pas une efficacité maximale, car les variables uniformes simulées peuvent être rejetées.

Comme le représente la figure ci-dessous, la zone d'acceptation est constitué des couples de points (u_1, u_2) à l'intérieur du cercle unité et par conséquent, la zone de rejet est constituée des couples (u_1, u_2) en-dehors du cercle unité mais appartenant au carré unité. L'efficacité est donc de $\frac{\pi}{4}$.

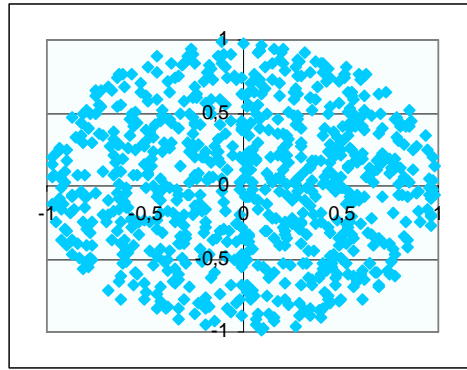


FIG. 36 – ZONE D'ACCEPTATION POUR 1000 SIMULATIONS DE VARIABLES NORMALES PAR REJET

▪ **La méthode de Box Muller**

Le second algorithme, probablement l'un des plus connus pour générer des variables normales, est l'algorithme de Box et Muller (George Edward Pelham Box et Mervin Edgar Muller, 1958) qui consiste à générer des paires de nombres aléatoires à distribution normale centrée réduite, à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme sans critère de rejet.

La transformation prend communément deux formes : La forme simple transforme des coordonnées cartésiennes uniformément distribuées dans le cercle unité en des coordonnées normalement distribuées et la forme polaire transforme des coordonnées polaires uniformément distribuées en des coordonnées cartésiennes normalement distribuées.

L'algorithme pour la forme polaire est le suivant :

- Générer deux variables aléatoires u et v de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendantes
- Alors $x_1 = R \cos(\theta) = \sqrt{-2 \ln(u)} \cos(2\pi \times v)$ et $x_2 = R \sin(\theta) = \sqrt{-2 \ln(v)} \cos(2\pi \times u)$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite, avec $R^2 = -2 \ln(u)$ et $\theta = 2\pi \times v$

L'efficacité est ici de 1 : en effet pour deux variables uniformes simulées, deux variables normales sont créées. Cet algorithme est ainsi retenu.

L'algorithme par la méthode du rejet et l'algorithme de Box Muller nous permettent ainsi de générer une variable X de loi normale centrée réduite $N(0,1)$. Pour générer une variable aléatoire Y de loi normale $N(m,s^2)$, nous posons $Y=m+sX$. L'ensemble des lois normales peuvent donc être simulées à partir de ces algorithmes simples à mettre en place informatiquement.

3.1.2.3. La génération d'une loi de Poisson

La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ fournit les probabilités suivantes :

$$p_n = P(N = n) = \lambda^n \frac{\exp(-\lambda)}{n!}, \forall n \geq 0, n \text{ entier}$$

Pour trouver un nombre aléatoire suivant la distribution de Poisson, on détermine un nombre entier e tel que :

$$\sum_{k=0}^e \exp(-m) \frac{m^k}{k!} \leq u \leq \sum_{k=0}^{e+1} \exp(-m) \frac{m^k}{k!},$$

Où u est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 suivant une loi uniforme, m est la moyenne de la loi de Poisson simulée.

L'algorithme de simulation est le suivant :

- Poser $e=-1$, $s=-1$, $v=0$ et $q=\exp(-m)$
- Simuler une variable uniforme u sur $[0,1]$
- Tant que $s \leq u$, poser $e = e + 1$, $v = v + \frac{m^e}{e!}$ et $s = v \times q$

L'entier e retourné à la fin de l'algorithme suit une loi de Poisson de paramètre m .

3.1.3. Les temps de calcul

Un des aspects les plus importants dans la modélisation est le temps de calcul. La mise en œuvre d'un grand nombre de simulations doit pouvoir être élaborée dans un temps raisonnable compte tenu du nombre de produits à modéliser. Rappelons que le périmètre d'étude pour ce stage concerne deux produits de prévoyance, Assur-Obsèques et XL Prévoyance, mais cette méthodologie sera appliquée à l'ensemble des produits de prévoyance de la compagnie.

▪ Assur-Obsèques

Le portefeuille agrégé comporte 1 369 lignes, c'est-à-dire 1 369 contrats agrégés. Pour tout ce portefeuille nous simulons v lois de mortalité et de rachats, et pour chaque contrat agrégé, nous simulons w sorties suivant les lois de mortalité et de rachat simulées. Nous obtenons donc $1\,369vw$ simulations. Ce nombre de simulations peut donc devenir très grand.

La durée de calcul pour une simulation de loi de mortalité et de rachat et d'une simulation de sortie pour ces lois est de 16 secondes. Dans le cas de la projection des affaires nouvelles, la durée pour une telle simulation est de 19 secondes, soit 35 secondes au total.

Par conséquent, pour v tables simulées et w sorties simulées par tables, le temps total de calcul est de $\frac{35 \times v \times w}{3600}$ heures. Pour $v=100$ et $w=50$, près de 49 heures sont nécessaires !

Les temps de calculs sont donc conséquent, mais reste dans la limite du raisonnable.

▪ XL Prévoyance

Le portefeuille agrégé comporte 2 628 lignes, soit un total de $2\,628vw$ simulations. La durée de calcul pour une simulation de loi de mortalité, de rachat et d'entrée en incapacité et d'une simulation de sortie pour ces lois est de 54 secondes. Dans le cas de la projection des affaires nouvelles, la durée pour une telle simulation est de 37 secondes, soit 91 secondes au total. Pour $v=100$ et $w=50$, près de 127 heures sont nécessaires.

3.2. Assur-Obsèques

Après avoir exposé le principe de simulation adopté, nous présenterons le modèle de construction de tables de mortalité par génération selon deux modèles : le modèle de Lee et Carter et sa version probabiliste nommée modèle log-Poisson. Nous verrons dans quelle mesure ces modèles ont été utilisés pour introduire de l'aléa par des tirages de variables aléatoires. Ensuite la détermination des lois de sorties par l'utilisation de modèles linéaires généralisés sera présentée. De l'aléa sera également introduit dans les lois de sorties. Finalement nous verrons que, pour construire les comptes techniques prévisionnels nous avons besoin des taux de rendement qui serviront à déterminer les résultats financiers, qui interviennent dans le calcul de la participation aux bénéfices. Les taux de rendements sont issus des simulations de taux courts par la méthode de Cox, Ingersoll et Ross.

Après l'exposé de la construction du modèle stochastique pour le produit Assur-Obsèques, il sera intéressant de présenter les résultats obtenus sous formes graphiques et de les comparer aux résultats obtenus dans le cas déterministe. Nous verrons qu'en moyenne les résultats sont identiques. Pour conclure cette partie, les limites de ce modèle stochastique seront listées.

3.2.1. Le principe adopté

Dans la modélisation déterministe d'Assur-Obsèques, nous avons élaboré un calcul ligne à ligne. Ce calcul étant long, nous avons décidé d'agréger les données afin de gagner en temps de calcul. L'agrégation est faite sur l'âge de l'assuré à l'adhésion, l'ancienneté du contrat, le fractionnement (unique ou non) et en sommant les capitaux garantis et les cotisations.

Le produit Assur-Obsèques est un produit « simple » car ne présente qu'une seule garantie de base, à savoir le versement du capital garanti (en respectant le délai de carence) au(x) bénéficiaire(s) au décès de l'assuré quelle qu'en soit la cause. La simulation de tables de mortalité entre donc en jeu ici. Mais la possibilité de racheter le contrat est également offerte aux assurés ; par conséquent, la modélisation de lois de rachat est la seconde étape de la modélisation.

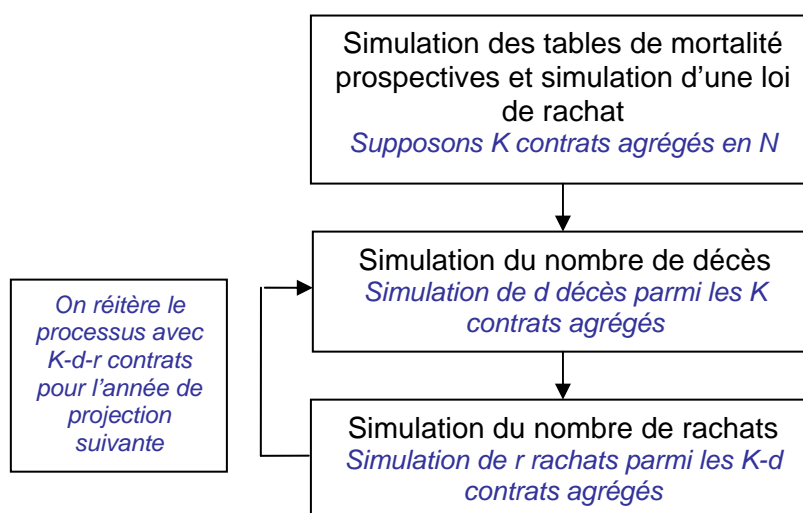


FIG. 37 – PRINCIPE DE SIMULATION STOCHASTIQUE ADOPTE POUR ASSUR-OBSEQUES

Dans les simulations du nombre de décès et de rachats, nous utilisons le critère de la loi binomiale disponible dans Microsoft Excel. Les probabilités de décès et de rachat reposent sur les lois simulées dans la première étape.

Parallèlement à ce processus, nous effectuons la simulation des taux courts par la méthode de Cox, Ingersoll et Ross, qui serviront à déterminer les taux de rendement utilisé dans le compte technique prévisionnel.

Ce principe de simulation est mis en place d'une part pour la projection du stock et d'autre part pour la simulation des affaires nouvelles. Après chacune des simulations des sorties, nous déterminons le compte technique et la revalorisation associée. Par ce biais nous obtenons la distribution des résultats techniques et financiers et de la participation aux bénéficiaires.

Pour les tables de mortalité prospectives et la loi de sortie simulées, nous réitérons la simulation du nombre de décès et de rachat par année de projection. Et pour modéliser l'impact du stochastique sur l'estimation des flux futurs, il faut réitérer plusieurs fois le processus décrit ci-dessus. Nous devons simuler un nombre important de tables et de sorties afin que les résultats soient fiables. Les temps de calcul sont par conséquent non négligeables.

3.2.2. La modélisation de la mortalité

En mars 2005, La Commission européenne a présenté un livre vert consacré aux changements démographiques, intitulé « Confronting demographic change : A new solidarity between the generations » (*Face aux changements démographiques, une nouvelle solidarité entre générations*). Les changements démographiques de l'Union Européenne sont le fruit de trois tendances de fond, qui sont l'allongement continu de la durée de vie, fruit du progrès de la santé et de la qualité de vie des Européens, l'accroissement des effectifs des générations âgées de plus de 60 ans et la faible natalité. Ces tendances impactent les secteurs de la sécurité sociale, mais impactent également le monde de l'assurance. Les assurés pourraient vivre bien plus longtemps que prévu par les tables ayant servi à établir le tarif. C'est ce qu'on appelle le risque de longévité.

Dans le modèle déterministe, nous avons utilisé une table de mortalité statique. Suite à ces remarques, nous comprenons bien l'intérêt d'utiliser des tables prospectives à deux dimensions : l'âge de l'assuré et l'année calendaire. Ces tables donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année et sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité et en les extrapolant dans le futur. Le modèle de Lee et Carter permet de construire des tables de mortalité prospectives.

Cette méthode a fait ses preuves sur plusieurs populations (études de la population des Etats-Unis en 1992, du Canada en 1993, du Chili en 1994, de la Belgique en 2002, et de la France en 2005) et demeure une méthode solide amenant à des résultats satisfaisants. Cette méthode est devenue un standard dans l'élaboration des tables de mortalité prospectives. Néanmoins ce modèle présente quelques inconvénients qui seront cités ultérieurement.

Après avoir décrit les données utilisées, le modèle de Lee et Carter sera présenté. Nous verrons dans quelle mesure celui-ci est utilisé pour le rendre « stochastique ». Par la suite nous présenterons la version probabiliste de ce modèle : le modèle log-Poisson proposé par Brouhns (2002), qui pallie aux limites du modèle de Lee et Carter. Nous comparerons les paramètres estimés par les deux modèles et nous constaterons que les résultats très sont proches.

3.2.2.1. Les données utilisées

Ne possédant qu'un faible historique des données concernant le produit Assur-Obsèques, il est difficile d'en déduire une tendance temporelle. Par conséquent, nous utilisons les tables de mortalité nationales fournies par l'INED (Institut National d'Etude Démographique) et disponibles sur le site Internet (cf. bibliographie). L'INED propose des tables de mortalité du moment pour les 19^{ème}, 20^{ème} et 21^{ème} siècles et propose également des tables de mortalité prospectives par extrapolation des données passées.

Nous supposons par conséquent que notre portefeuille suit la même évolution que la population française. Nous décidons de déterminer les paramètres du modèle de Lee-Carter sur 15 années d'historique, c'est-à-dire à partir des tables de mortalité de l'INED de 1992 à 2006 et de la table d'expérience réalisée. Par interpolation linéaire entre la table d'expérience et les tables de l'INED, nous déterminons les tables de mortalité utilisées dans le modèle.

L'approche prospective proposée par le modèle de Lee et Carter est intéressante et utile, mais présente un inconvénient. Cette modélisation privilégie une tendance temporelle, qui peut entraîner des aberrations pour les longues projections. En effet, la décroissance des taux instantanés de décès engendre une augmentation de l'espérance de vie à la naissance sans limite !

L'âge limite dans les tables de l'INED étant de 105 ans, nous supposons donc que $q_{105} = 1$. Il est possible de proposer des probabilités de décès à ces grands âges, mais celles-ci n'auraient qu'une très faible contribution dans le montant de l'engagement total pour Assur-Obsèques et aucune contribution dans le cas d'XL Prévoyance (en effet, le décès n'est garanti que jusqu'au 75^{ème} anniversaire de l'assuré).

Cette hypothèse pourra être corrigée dans le modèle en considérant le problème de la fermeture de la table. Par exemple Coale et Kisker (1990) proposent un modèle basé sur la formule de Gompertz.

3.2.2.2. Le modèle de Lee-Carter

La méthode développée par Lee et Carter en 1992 permet la construction de tables de mortalité prospectives. Ces tables ne tiennent pas seulement compte de l'âge des individus mais aussi du temps : la loi de mortalité du groupe étudié est caractérisée par un modèle bidimensionnel. C'est une méthode d'extrapolation des tendances passées, initialement utilisée sur des données américaines et qui est rapidement devenue un standard. En effet ce modèle a par la suite été utilisé sur de nombreuses populations et étudié par différents actuaires, professeurs et chercheurs.

La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité à l'âge x est un modèle log-bilinéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_x(t),$$

Où les variables aléatoires ε_x représentent les erreurs d'ajustement et sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi $N(0, \sigma^2)$; ce qui implique l'hypothèse d'homoscédasticité. On a alors que le logarithme du taux instantané se décompose en une somme de deux termes à un terme d'erreur près : le premier, α_x , est spécifique à l'âge et

décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps ; le second exprime une tendance temporelle de la mortalité, k_t , multipliée par un terme spécifique à l'âge, β_x , qui module la tendance suivant l'âge.

L'hypothèse sous jacente est la constance des taux instantanés de décès entre deux âges entiers, à savoir :

$$\mu_{x+s} = \mu_x = -\ln(1 - q_x), \quad s \in [0,1[$$

Ce qui implique que le taux de décès dans l'année pour un assuré d'âge x s'exprime :

$$q_{x+s} = q_x = 1 - \exp(-\mu_x), \quad s \in [0,1[$$

Le critère d'optimisation de la modélisation est la minimisation de la variance des erreurs. Et pour que le modèle ait une solution unique, deux contraintes sont imposées :

$$\sum_{x=0}^{age \text{ lim}} \beta_x = 1 \quad et \quad \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$$

Nous obtenons alors les paramètres par un critère de moindres carrés :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \arg \min \sum_{x,t} (\ln \mu_{xt}^* - \alpha_x - \beta_x k_t)^2$$

Le nombre de paramètres à estimer est élevé : il correspond à $2(age_{lim}+1) + (t_M-t_m+1) = 2 \times 105 + (2006-1992+1) = 225$ paramètres.

▪ **Estimation des paramètres**

Estimons dans un premier temps les paramètres $\hat{\alpha}_x$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{y,t} (\ln \mu_{yt}^* - \alpha_y - \beta_y k_t)^2 = 2(t_M - t_m + 1) \hat{\alpha}_x - 2 \sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln \mu_{xt}^* - \beta_x k_t)$$

En tenant compte de la contrainte $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$, nous obtenons :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu_{xt}^*$$

Par conséquent ce paramètre est interprété comme la moyenne temporelle des taux instantanés de décès à l'âge x sur l'échelle logarithmique.

Pour l'estimation des paramètres $\hat{\beta}_x$ et de la composante temporelle \hat{k}_t , nous utilisons le processus itératif de Newton-Raphson, utilisé par le solveur d'Excel. Le principe est qu'à chaque itération, l'ensemble des paramètres sont mis à jour. Les valeurs sont initialisées et les deux contraintes sont introduites. Les valeurs nulles sont interdites pour le paramètre $\hat{\beta}_x$.

▪ Paramètres obtenus pour Assur-Obsèques

Sur la période étudiée, dans le cas du produit Assur-Obsèques, les résultats obtenus pour les paramètres $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\beta}_x$ sont représentés sur les figures 38 et 39.

Entre les âges de 44 et 45 ans et de 95 à 96 ans, nous observons un saut dans la courbe du paramètre $\hat{\alpha}_x$. Ces sauts sont expliqués par l'utilisation des probabilités d'expérience de 45 à 95 ans et des probabilités issues de la table réglementaire abattue pour les âges inférieurs et supérieurs.

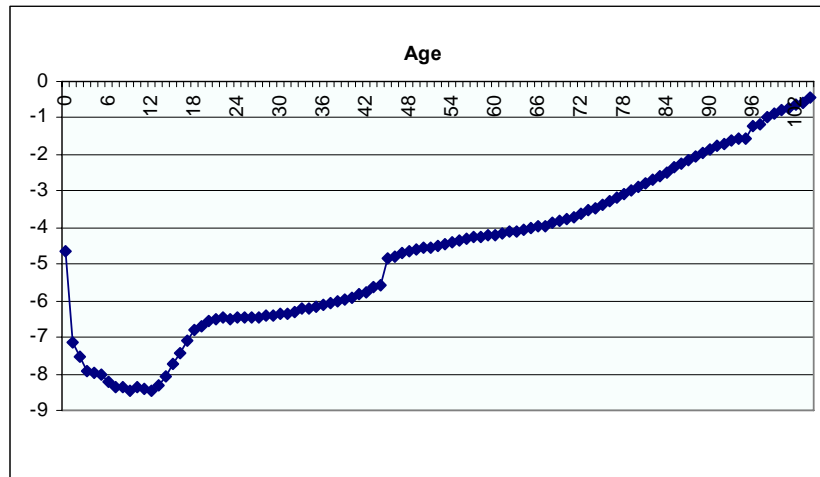


FIG. 38 – EVOLUTION DES ALPHA SUIVANT L'AGE

Concernant le paramètre $\hat{\beta}_x$, nous observons globalement une décroissance de celui-ci avec l'âge.



FIG. 39 – EVOLUTION DES BETA SUIVANT L'AGE

Pour la composante temporelle \hat{k}_t , nous extrapolons les résultats obtenus. Il s'avère que la régression linéaire simple est tout à fait satisfaisante : comme nous pouvons le constater sur la figure 40, nous obtenons un R^2 supérieur à 0,99. Nous avons ainsi une modélisation du type $\hat{k}_t = \hat{a}_k + \hat{b}_k t + \varepsilon_k$ avec ε_t un bruit blanc pour année de projection t .

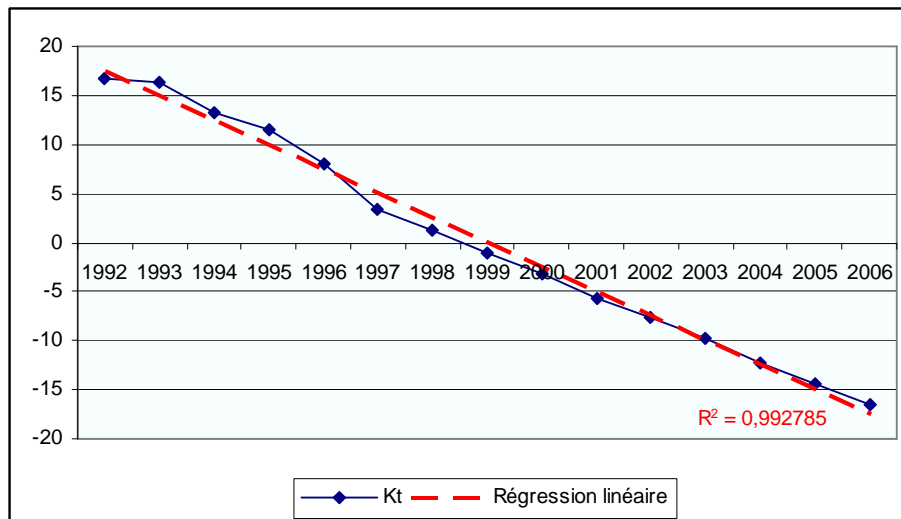


FIG. 40 – EXTRAPOLATION DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE

A partir des paramètres estimés nous pouvons donc déterminer les tables de mortalité par génération selon la formule suivante :

$$q_x(t) = 1 - \exp(-\mu_x(t)) = 1 - \exp\left\{-\exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x(\hat{a}_k + \hat{b}_k \times t))\right\}$$

Nous représentons les tables de mortalité par générations utilisées dans le modèle (années 1992 à 2006) et les tables générées par le modèle (années 2007 à 2036) :

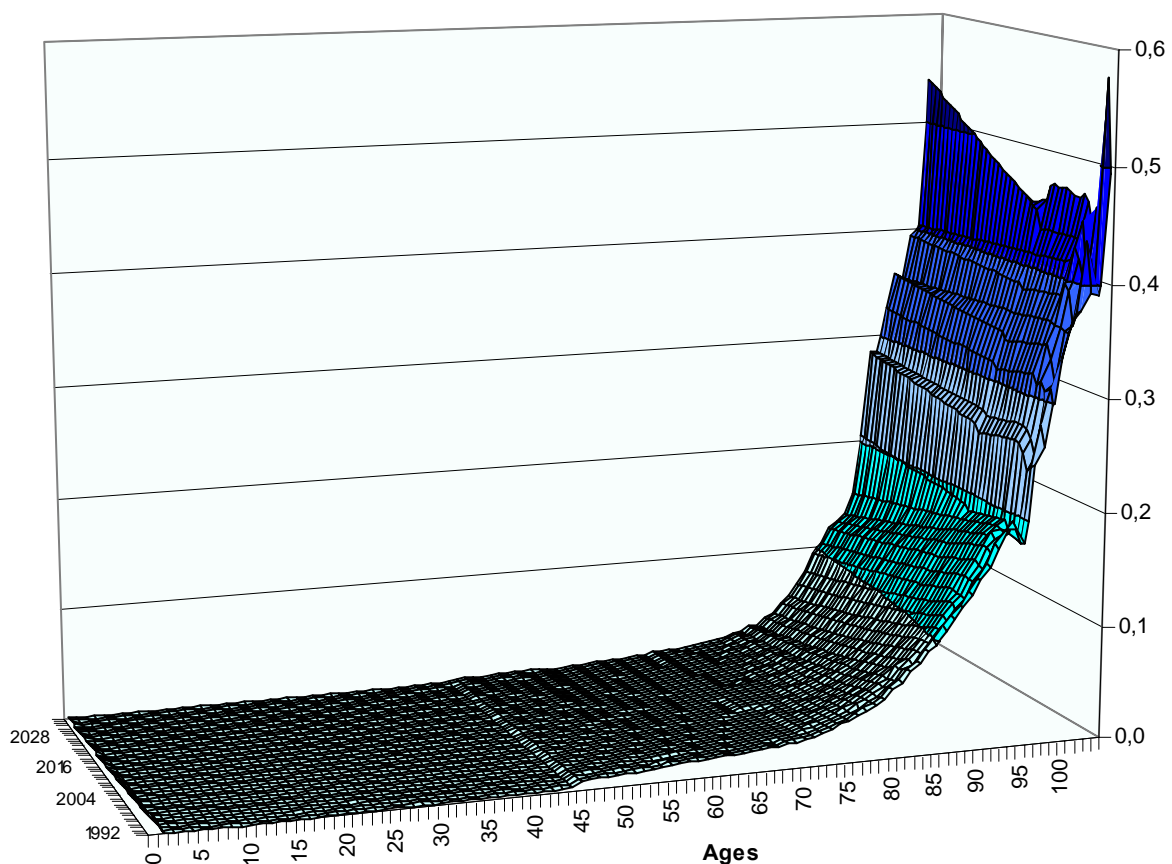


FIG. 41 – SURFACE DES TAUX DE MORTALITE PAR ANNEES DE 1992 A 2036

Après la présentation du modèle de Lee et Carter, il s'agit de l'utiliser dans le cas d'une mortalité stochastique.

3.2.2.3. La version stochastique du modèle de Lee et Carter

Pour évaluer au plus juste le risque de mortalité, la modélisation stochastique introduit des termes aléatoires à deux niveaux : nous considérons d'une part une loi de mortalité aléatoire et d'autre part une durée de vie aléatoire des assurés en utilisant la loi de mortalité simulée.

Pour la modélisation de la loi de mortalité aléatoire nous partons du modèle de Lee et Carter. Rappelons que ce modèle décompose le logarithme du taux instantané de mortalité en une somme de deux termes : le second est d'ailleurs composé d'une composante temporelle que nous extrapolons pour les années futures. Nous introduisons ainsi un aléa (modification aléatoire de la mortalité théorique) suivant une loi normale dans l'équation de régression déterminée précédemment.

▪ Introduction d'un aléa dans la régression de la composante temporelle

Nous avons vu dans la partie précédente que la composante temporelle \hat{k}_t a été extrapolée par une régression linéaire simple. A partir de l'équation de cette régression, nous introduisons un aléa dans les tables de mortalité prospectives. En effet, il suffit de générer un aléa ε_t pour chaque \hat{k}_t des t années futures, avec ε_t un bruit blanc gaussien de variance σ_k^2 , tel que :

$$\hat{k}_t^* = \hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t, \text{ où } \begin{cases} \hat{a}_k = -2,493298526 \\ \hat{b}_k = 4984,1046980, \text{ pour } t \geq 1992 \\ \sigma_k^2 = 0,903570788 \end{cases}$$

La modélisation des tables prospectives utilise cette équation de régression de la composante temporelle, qui permet d'obtenir la tendance de mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du résidu ε_t , qui est une loi normale $N(0, \sigma_k^2)$. La variable \hat{k}_t^* est sans biais, en effet :

$$E[\hat{k}_t^*] = E[\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t] = \hat{k}_t$$

Le taux instantané de mortalité s'écrit alors :

$$\tilde{\mu}_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \times \hat{k}_t^*) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x (\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t))$$

▪ Correction du biais engendré

Bien que le paramètre \hat{k}_t^* soit sans biais, la modélisation engendre un biais sur les taux instantanés de mortalité à l'âge x car :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{\mu}_x(t)] &= E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x(\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t)\right)\right] \\
 &= E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x(\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k)\right) \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \\
 &= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \\
 &= \mu_x(t) \times \exp\left(\frac{\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Puisque ε_t suit une loi normale $N(0, \sigma_k)$, nous avons que $\exp(\hat{\beta}_x \varepsilon_t)$ suit une loi log-normale $LN(0, \hat{\beta}_x \sigma_k)$ et l'espérance d'une variable aléatoire log-normale $LN(m, \sigma)$ est $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Nous montrons ici que notre modélisation stochastique de la mortalité entraîne une erreur positive sur les taux de mortalité : la mortalité est donc surévaluée. Nous observons l'erreur due à $\exp(\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2 / 2)$ suivant l'âge sur la figure ci-dessous :

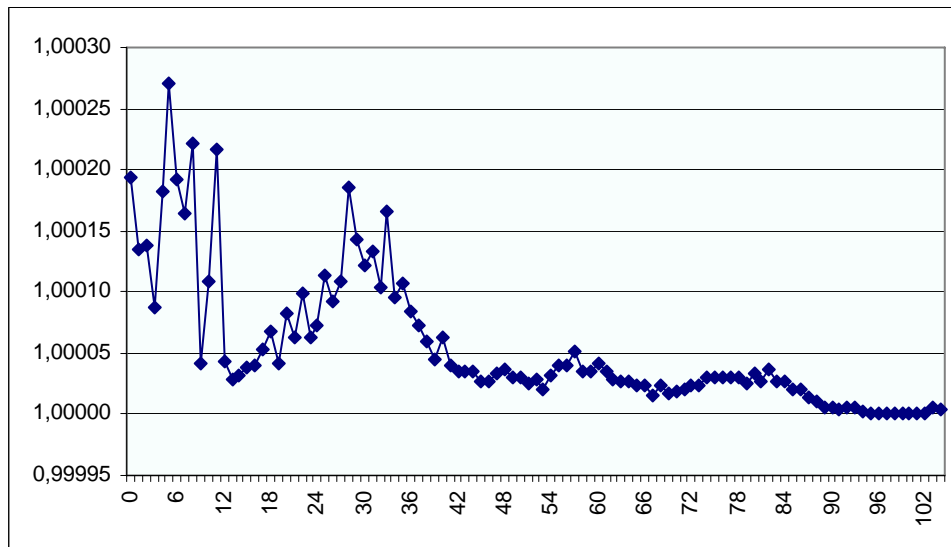


FIG. 42 – ANALYSE DE L'ERREUR EN FONCTION DE L'AGE

Nous pouvons constater que l'erreur est relativement faible et dépend de l'âge x . L'erreur est plus importante pour les âges jeunes. L'impact sur le produit Assur-Obsèques n'est donc pas important, aux vues de la répartition des âges des assurés pour ce produit. Mais pour d'autres produits, la volatilité pourrait être plus importante, et donc l'impact du biais serait plus conséquent.

La version corrigée du taux instantané de mortalité est :

$$\mu_x^*(t) = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t^* - \frac{\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2}{2}\right)$$

Cette construction du modèle satisfait à la contrainte :

$$E[\mu_x^*(t)] = \mu_x(t)$$

▪ Modélisation de la durée de vie

Pour la modélisation de la durée de vie aléatoire des assurés, nous utilisons la fonction du critère de la loi binomiale présenté précédemment. Pour chaque année de projection nous simulons par ce critère le nombre de décès survenus dans l'année.

3.2.2.4. Le modèle log-Poisson

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de Lee et Carter repose sur l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de mortalité, ce qui implique une hypothèse forte et peu réaliste. En effet aux âges élevés, les effectifs de la population (i.e. des survivants) diminuent et donc la variance des taux de décès croît. De plus le critère retenu dans la méthode de Lee et Carter n'est pas de type maximum de vraisemblance. Le modèle log-Poisson, proposé par Brouhns est une adaptation probabiliste et une extension du modèle de Lee et Carter destinée à pallier à ces deux limites.

Brouhns modélise dans son modèle le nombre de décès D_{xt} à l'âge x pour l'année t par une loi de Poisson, tel que :

$$D_{xt} \approx \text{Poisson}(L_{xt}\mu_{xt})$$

Avec L_{xt} le nombre d'individus vivants à l'âge x pour l'année t , et $\mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$ le taux instantané de mortalité à l'âge x pour l'année t .

Remarquons immédiatement que l'expression du taux instantané de mortalité est identique à celle du modèle de Lee et Carter. Nous pouvons également noter que pour passer du modèle de Lee et Carter au modèle log-Poisson, nous passons d'un modèle linéaire à un modèle linéaire généralisé avec le logarithme comme fonction de lien. L'interprétation des paramètres n'est pas remise en cause dans ce modèle de Poisson ; seule la structure est modifiée en considérant que le nombre de décès observé suit une loi de Poisson.

Ce modèle présente ainsi plusieurs avantages par rapport au modèle de Lee et Carter. Citons les :

- La loi de Poisson permet de lever l'hypothèse d'homoscédasticité et reconnaît la variabilité plus grande des taux bruts $\hat{\mu}_x(t)$ aux âges élevés, due aux effectifs réduits
- Cette formulation du modèle permet le recours au principe du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres
- Le modèle reconnaît le caractère entier du nombre de décès D_{xt} ce qui n'est pas fait dans le modèle de Lee et Carter.

Présentons le processus d'estimation des paramètres du modèle.

▪ Estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance

Un grand avantage du modèle log-Poisson est qu'il est aisé d'en estimer les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance. En effet, comme nous avons :

$$P(D_{xt} = d_{xt}) = \frac{(L_{xt}\mu_{xt})^{d_{xt}}}{d_{xt}!} \exp(-L_{xt}\mu_{xt})$$

La vraisemblance du modèle s'écrit alors :

$$L(\alpha, \beta, k) = \prod_{x,t} \frac{(L_{xt} \mu_{xt})^d}{D_{x,t}} \exp(-L_{xt} \mu_{xt})$$

Et la log-vraisemblance du modèle s'écrit à une constante additive près,

$$\ln L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \{D_{xt} \ln \mu_{xt} - L_{xt} \mu_{xt}\} = \sum_{x,t} \{D_{xt} (\alpha_x + \beta_x k_t) - L_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\}$$

La présence du terme bilinéaire $\beta_x k_t$ dans l'expression du taux de mortalité rend l'estimation des paramètres difficile par la procédure GENMOD de SAS ou tout autre outil statistique classique. C'est pour cette raison que nous utilisons la méthode itérative de Newton-Raphson. Nous fixons un critère d'arrêt sur l'estimation des paramètres.

Nous devons donc résoudre les équations de récurrence suivantes :

$$\hat{\alpha}_x^{i+1} = \hat{\alpha}_x^i - \frac{\sum_t (D_{xt} - L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i))}{-\sum_t (L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i))}$$

$$\hat{k}_t^{i+1} = \hat{k}_t^i - \frac{\sum_x (D_{xt} - L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i)) \times \hat{\beta}_x^i}{-\sum_x (L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i)) \times (\hat{\beta}_x^i)^2}$$

$$\hat{\beta}_x^{i+1} = \hat{\beta}_x^i - \frac{\sum_t (D_{xt} - L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^{i+1})) \times \hat{k}_t^i}{-\sum_t (L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^{i+1})) \times (\hat{k}_t^{i+1})^2}$$

Les valeurs initiales $\hat{\alpha}_x^0, \hat{\beta}_x^0$ et \hat{k}_t^0 pour $x=0$ à 104 ans et $t=1992$ à 2006, sont libres, mais des valeurs nulles sont à éviter pour le paramètre bêta, afin de ne pas diviser par zéro. Les contraintes pour l'unicité des paramètres sont les mêmes que dans le modèle de Lee et Carter. Rappelons les :

$$\sum_{x=0}^{age \lim} \beta_x = 1 \quad et \quad \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$$

Afin qu'elles soient respectées, les paramètres estimés doivent être ajustés selon les formules suivantes :

$$k_t^* = \left(\hat{k}_t - \frac{1}{t_M - t_m - 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t \right) \times \sum_x \hat{\beta}_x$$

$$\beta_x^* = \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_x \hat{\beta}_x}$$

$$\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \frac{\hat{\beta}_x}{t_M - t_m - 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t$$

▪ Comparaison des paramètres estimés

Nous comparons graphiquement les paramètres estimés par les deux modèles étudiés. Pour les trois paramètres estimés, les valeurs sont très proches.

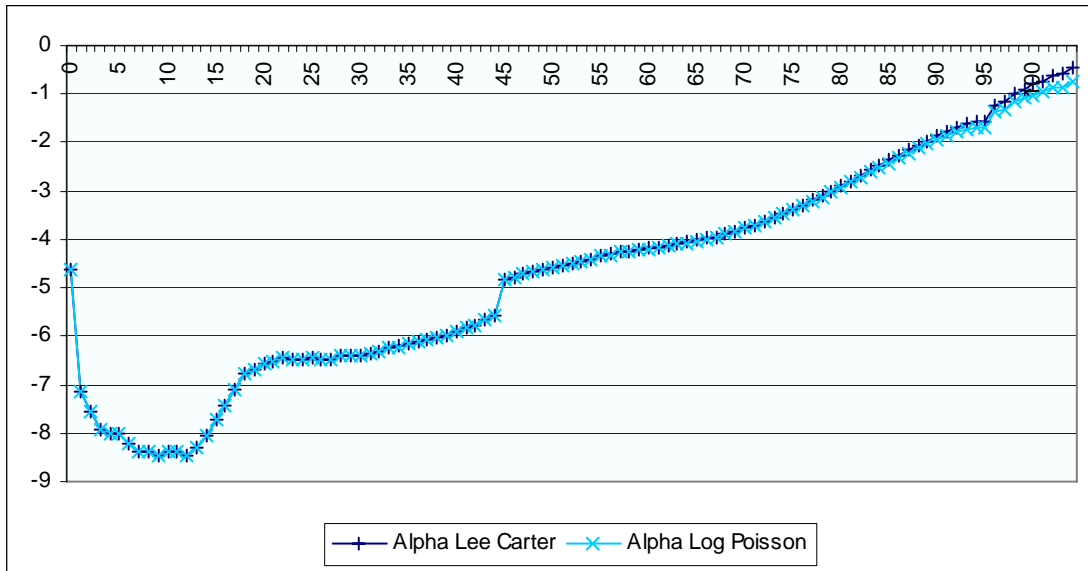


FIG. 43 – COMPARAISON DES ESTIMATIONS DES PARAMETRES ALPHA

La seule différence à noter dans la figure 43 est présente pour les âges élevés : à partir de 90 ans, les alphas estimés par le modèle log-Poisson sont inférieurs à ceux du modèle du Lee et Carter.

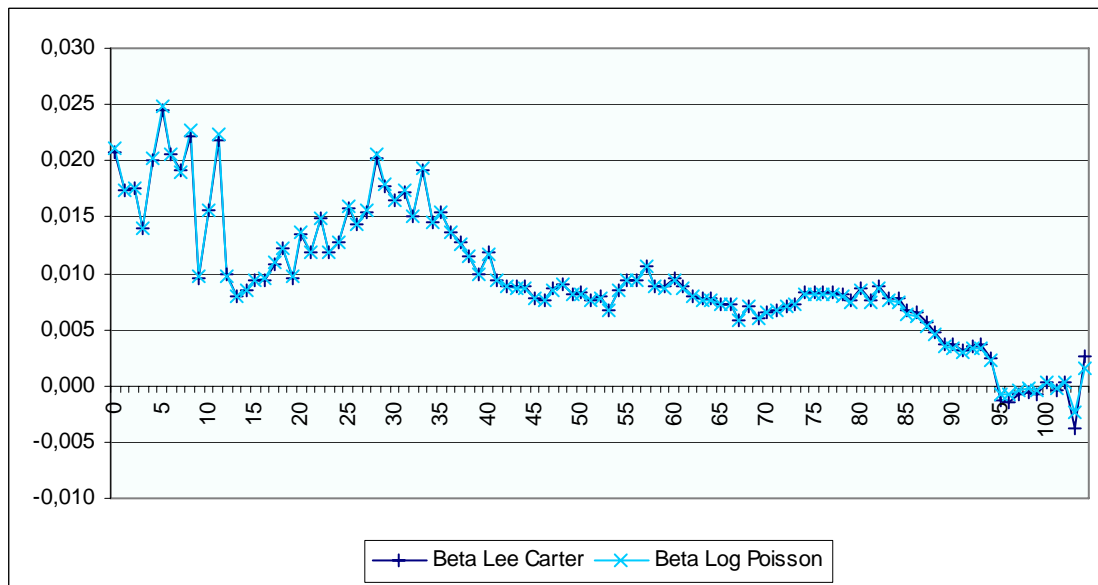


FIG. 44 – COMPARAISON DES ESTIMATIONS DES PARAMETRES BETA

Les valeurs obtenues pour bêta sont très proches.

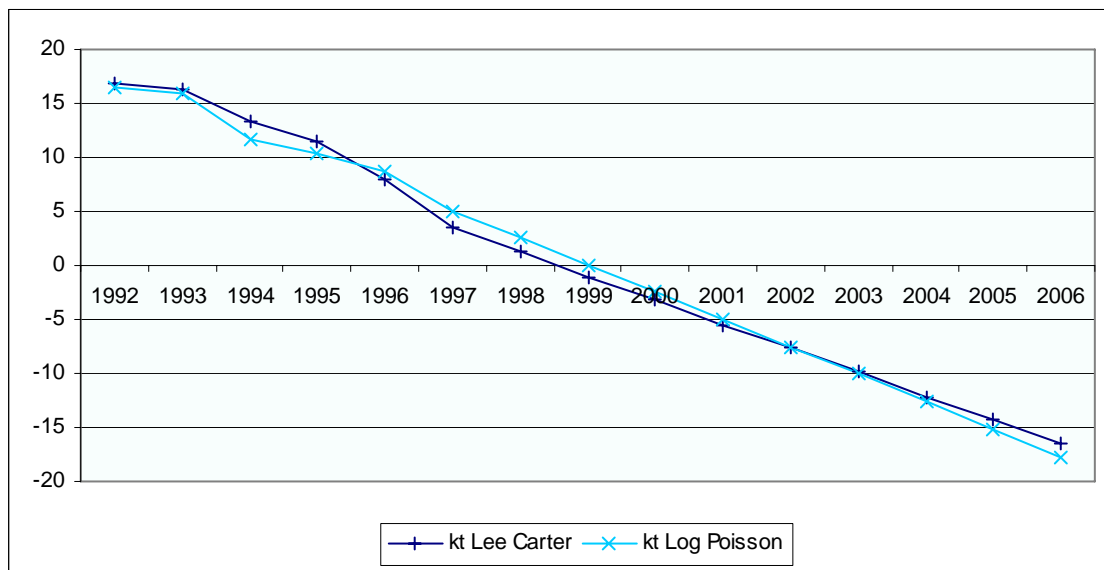


FIG. 45 – COMPARAISON DES ESTIMATIONS DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE

Concernant la composante temporelle, les valeurs sont très proches et par conséquent les droites de régression également.

3.2.2.5. La version stochastique du modèle log-Poisson

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle log-Poisson est une version probabiliste du modèle de Lee et Carter, qui n'est qu'une méthode d'extrapolation des données passées. Le seul aléa dans le modèle provient de l'extrapolation de la composante temporelle. La version probabiliste basée sur la méthode de maximum de vraisemblance permet d'estimer les paramètres pour le passé et d'utiliser leur convergence asymptotique vers une loi gaussienne. Pour la génération de tables de mortalité aléatoires, différentes méthodes sont ainsi disponibles.

- **Simulation du triplet $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})$**

Par efficacité asymptotique du maximum de vraisemblance, les paramètres convergent vers une loi gaussienne de moyenne $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})$ et de matrice de variance-covariance l'inverse de la matrice d'information de Fisher notée $I^{-1}(\alpha, \beta, k)$.

La matrice d'information de Fisher est définie comme la variance associée au maximum de vraisemblance pour $\theta = (\alpha, \beta, k)$:

La matrice d'information de Fisher est la matrice $I(\theta)$ de dimension $d \times d$ symétrique définie par :

$$I_{ij}(\theta) = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(X, \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log L(X, \theta) \right]$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites,

- Les lois $Loi_{\theta}(X)$ sont identifiables : $\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow Loi_{\theta_1} = Loi_{\theta_2}$
- $\{x : L(x, \theta) > 0\}$ ne dépend pas de θ
- Θ est ouvert, $\Theta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{104}, \beta_0, \dots, \beta_{104}, k_{1992}, \dots, k_{2006})$
- L est dérivable deux fois sur Θ

Alors,

$$E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(X, \theta) \right] = 0 \quad \forall j \leq d$$

$$\text{et } I_{ij}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(X; \theta) \right]$$

On génère alors $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k})$ à partir de la loi normale asymptotique. La simulation d'une loi normale asymptotique non dégénérée de paramètres m et V est réalisée selon le principe suivant :

- Soit T un vecteur aléatoire à n composantes gaussiennes centrées réduites et indépendantes : la loi de T multi-normale a pour moyenne le vecteur nul et pour matrice de variance covariance la matrice unité
- Soit L la matrice résultant de la factorisation de Cholesky de la matrice V
- Alors le vecteur aléatoire $X = m + LT$ suit une loi multi-normale de moyenne m et de variance-covariance V .

La factorisation de Cholesky consiste pour une matrice symétrique définie positive V à déterminer une matrice triangulaire L tel que $V = L^t L$ avec L une matrice triangulaire inférieure. En imposant que les éléments de la diagonales L soient tous positifs, la factorisation correspondante est alors unique. Il est noté par convention que $L = \sqrt{V}$.

Les dimensions de nos matrices étant élevées (car le nombre de paramètres estimés est élevé : $2 \cdot 105 + 15 = 235$), cette méthode est longue et fastidieuse.

▪ Simulation d'une loi de Poisson

Une deuxième méthode est de générer de nouvelles réalisations de D_{xt} par tirage de la loi de Poisson de paramètre d_{xt} le nombre observé en (x,t) .

▪ Régression des paramètres

Une troisième méthode est une méthode similaire à celle utilisée dans la version stochastique du modèle de Lee et Carter. Nous utilisons une régression linéaire pour la composante temporelle et nous simulons des aléas de loi normale centrée et de variance égale à la variance des erreurs de la régression. Et à cette extrapolation de la composante temporelle, nous introduisons une régression polynomiale pour le paramètre alpha. Cette régression polynomiale provient de l'allure de la courbe en fonction de l'âge.

Pour la régression de la composante temporelle, nous obtenons les résultats suivants :

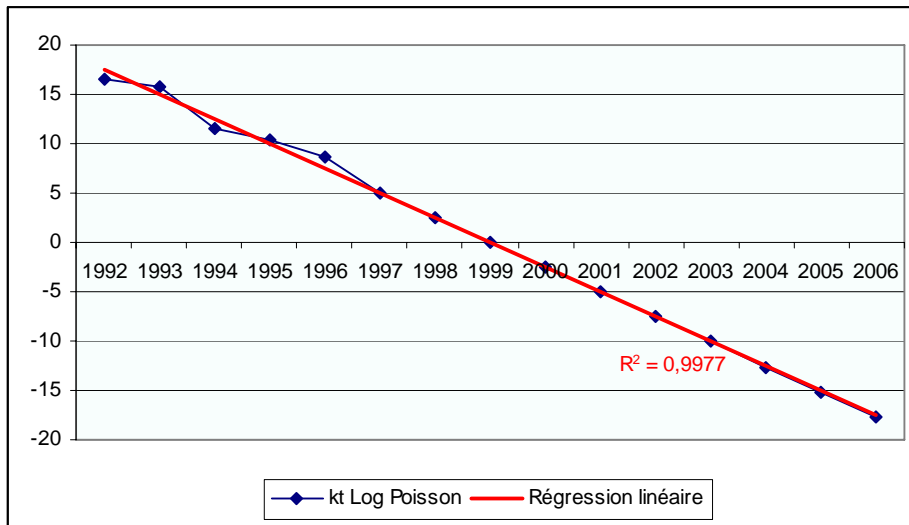


FIG. 46 – REGRESSION DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE (LOG-POISSON)

Nous obtenons un $R^2 > 0,99$ ce qui traduit une régression tout à fait satisfaisante. Les valeurs obtenues pour la régression de la composante temporelle sont :

$$\hat{k}_t^* = \hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t, \text{ où } \begin{cases} \hat{a}_k = -2,511317936 \\ \hat{b}_k = 5020,1245535, \text{ pour } t \geq 1992 \\ \sigma_k^2 = 0,5475893931 \end{cases}$$

L'aléa introduit suit une loi normale centrée et de variance égale à σ_k^2 . La variable \hat{k}_t^* est sans biais, en effet : $E[\hat{k}_t^*] = E[\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t] = k_t^*$

Pour la régression du paramètre alpha, la régression qui fournit le meilleur R^2 est la régression polynomiale de degré 3 :

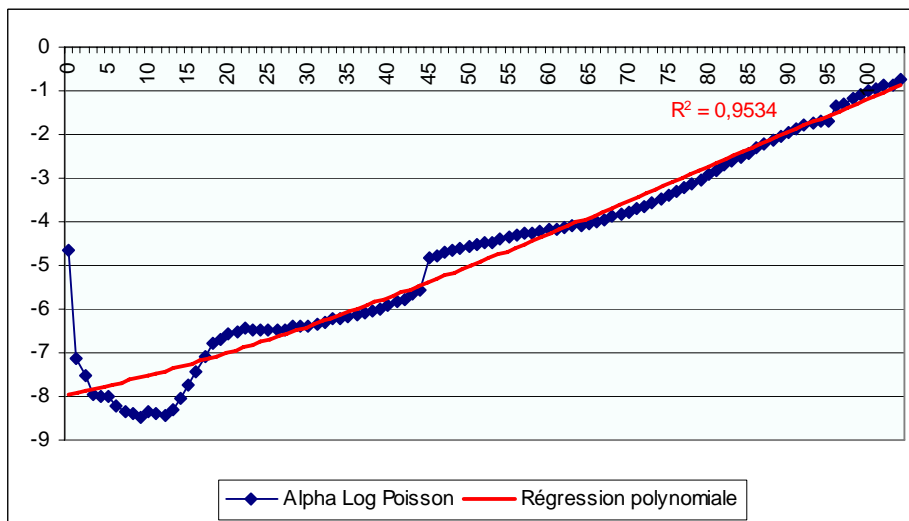


FIG. 47 – REGRESSION POLYNOMIALE DU PARAMETRE ALPHA (LOG-POISSON)

Les paramètres de la régression sont les suivants :

$$\hat{\alpha}_x^* = \hat{a}_\alpha \times x^3 + \hat{b}_\alpha \times x^2 + \hat{c}_\alpha \times x + \hat{d}_\alpha + \varepsilon_x, \text{ où } \begin{cases} \hat{a}_\alpha = -0,000001838 \\ \hat{b}_\alpha = 0,000462606 \\ \hat{c}_\alpha = 0,039618935 \\ \hat{d}_\alpha = -8,006480250 \\ \sigma_\alpha^2 = 0,223903030 \end{cases}$$

L'aléa introduit suit une loi normale centrée et de variance égale à σ_α^2 . Le paramètre $\hat{\alpha}_x^*$ est sans biais, en effet $E[\hat{\alpha}_x^*] = E[\hat{a}_\alpha \times x^3 + \hat{b}_\alpha \times x^2 + \hat{c}_\alpha \times x + \hat{d}_\alpha + \varepsilon_x] = \alpha_x^*$

C'est cette dernière méthode que nous retenons dans notre modèle. Le taux instantané de mortalité s'écrit alors :

$$\tilde{\mu}_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x^* + \hat{\beta}_x \times \hat{k}_t^*) = \exp((\hat{a}_\alpha \times x^3 + \hat{b}_\alpha \times x^2 + \hat{c}_\alpha \times x + \hat{d}_\alpha + \varepsilon_x) + \hat{\beta}_x (\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t))$$

Dans le cas de la régression polynomiale de degré 3 du paramètre alpha et de la régression linéaire de la composante temporelle, nous obtenons pour 2007 à 2036 la surface de mortalité suivante :

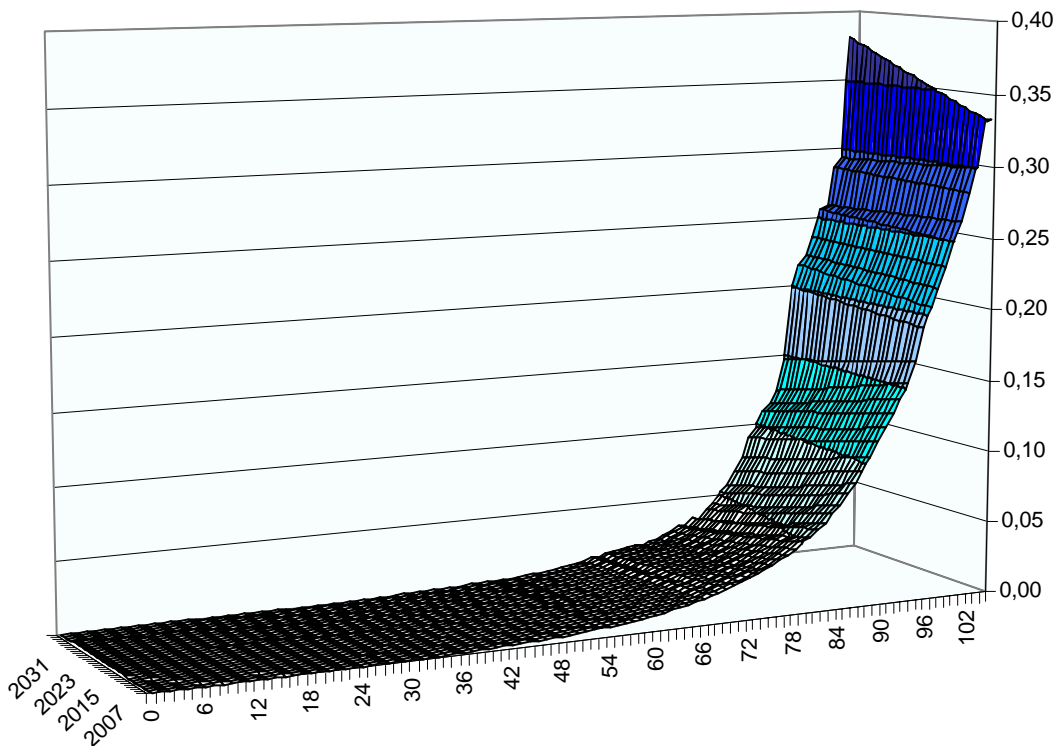


FIG. 48 – SURFACE DE MORTALITE DANS LE MODELE DE LOG-POISSON (2007 A 2036)

Avec ces régressions effectuées, nous constatons plus de régularité des taux sur la surface de mortalité.

▪ **Correction du biais engendré**

Comme dans le cas de la version stochastique du modèle de Lee et Carter, bien que les paramètres \hat{k}_t^* et $\hat{\alpha}_x^*$ soient sans biais, cette modélisation engendre un biais sur les taux instantanés de mortalité.

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mu}_x(t)] &= E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x^* + \hat{\beta}_x \times \hat{k}_t^*\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(\left(\hat{a}_\alpha \times x^3 + \hat{b}_\alpha \times x^2 + \hat{c}_\alpha \times x + \hat{d}_\alpha + \varepsilon_x\right) + \hat{\beta}_x \left(\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t\right)\right)\right] \\ &= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\varepsilon_x + \hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \\ &= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\varepsilon_x\right) \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \end{aligned}$$

A ce stade du calcul du biais, se pose un problème. Avons-nous indépendance entre les deux termes $\exp(\varepsilon_x)$ et $\exp(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t)$? Rappelons que ε_x est l'erreur issue de la régression du paramètre $\hat{\alpha}_x^*$ et $\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t$ est le produit du paramètre bêta et de l'erreur issue de la régression de la composante temporelle.

Les paramètres sont estimées via la méthode de maximum de vraisemblance : ils sont donc dépendants. Mais ici nous cherchons à savoir si les erreurs de la régression des alphas et le produit de l'erreur de la régression de la composante temporelle et du paramètre bêta sont indépendants. N'ayant pas trouvé de réponse à ce problème, nous supposons l'indépendance et le calcul du biais est le suivant :

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mu}_x(t)] &= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\varepsilon_x\right) \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \\ &= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\varepsilon_x\right)\right] \times E\left[\exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right] \\ &= \mu_x(t) \times \exp\left(\frac{\sigma_\alpha^2}{2}\right) \times \exp\left(\frac{\hat{\beta}_x^2 \sigma_k^2}{2}\right) \\ &= \mu_x(t) \times \exp\left(\frac{\sigma_\alpha^2 + \hat{\beta}_x^2 \sigma_k^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Et par conséquent la version corrigée du taux instantané de mortalité est le suivant :

$$\mu_x^*(t) = \exp\left(\hat{\alpha}_x^* + \hat{\beta}_x \times \hat{k}_t^* - \frac{\sigma_\alpha^2 + \hat{\beta}_x^2 \sigma_k^2}{2}\right)$$

Avant de clore cette partie, étudions l'impact de cette hypothèse d'indépendance par rapport à l'expression du taux instantané de mortalité sans correction du biais.

Nous effectuons 1000 simulations de tables de mortalité et nous observons la variation relative entre les taux de mortalité sans introduction d'aléa et respectivement les taux de mortalité stochastiques sans correction du biais et les taux de mortalité stochastiques avec correction du biais. Nous observons une surestimation des taux de mortalité de plus de 12% dans le premier cas et une surestimation de moins de 2% dans le second cas. Donc bien que la correction du biais ne soit pas totale, nous diminuons considérablement l'erreur induite par cette version stochastique des taux instantané de mortalité.

3.2.3. La modélisation des taux de rachat

La seconde étape est de modéliser les taux de rachat de manière stochastique. Dans un premier temps, nous avons défini de nouvelles lois de sorties issues de modèles linéaires généralisés qui correspondent davantage à l'évolution des sorties en fonction de l'âge des assurés et de l'ancienneté des contrats.

3.2.3.1. La détermination des taux de sortie par GENMOD

Dans le prévisionnel déterministe, nous avons utilisé des taux de sortie en fonction de l'âge de l'assuré. Mais ces taux de sortie dépendent également de l'ancienneté du contrat. En effet, les contrats ayant une ancienneté de 3 ans ont le taux de sortie le plus élevé, ceci s'explique par le fait que les contrats à fractionnement non uniques ont à possibilité d'être racheté à partir de la troisième année de versement des cotisations.

Concernant les contrats à fractionnement uniques : la possibilité de rachat est offerte immédiatement. Mais ces contrats ne représentent que 4,6 % du portefeuille au 31/12/2006 et d'autre part, les rachats observés pour des contrats à fractionnement unique ne représentent que 2,4 % des rachats. L'impact de ces contrats n'est donc pas significatif dans les résultats. Par conséquent nous supposons dans la modélisation que l'ensemble des contrats ne peuvent être rachetés qu'à partir de la troisième année.

Pour estimer les taux de sorties en fonction de l'âge et de l'ancienneté, nous utilisons les modèles linéaires généralisés. Ces modèles peuvent être utilisés soit sur les variables de classes (ici 70 classes d'âges réparties de 16 à 85 ans et 12 classes d'anciennetés réparties de 0 à 12 ans) soit considérer le modèle comme une fonction linéaire. Dans ce second cas, la procédure nous fournit trois paramètres, à savoir l'intercept, le paramètre lié à l'âge et le paramètre lié à l'ancienneté.

Nous décidons d'utiliser la méthode linéaire en supposant que les rachats ne surviennent qu'à partir de 3 ans d'ancienneté. La procédure utilisée est *GENMOD* (cf. section 2.1.3.2) sous SAS. La distribution choisie est celle de Poisson et la fonction de lien associée est la fonction logarithmique.

Nous avons effectué cette procédure pour différents paramètres, comme par exemple l'âge et ses puissances ou/et l'ancienneté et ses puissances. La procédure *GENMOD* nous fournit des critères pour évaluer la qualité de l'ajustement : la déviance normée et du Khi-deux de Pearson normé. Dans le cas des taux de rachats pour Assur-Obsèques, les paramètres retenus sont l'âge et l'ancienneté.

La procédure nous fournit également la statistique du Khi deux associée à chacun des paramètres. La p-valeur observée est inférieure à 0,0001 pour chaque paramètre, ce qui signifie qu'ils sont tous très significatifs. L'estimation des paramètres et leur erreur standard sont données dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	Valeur	Erreur
Intercept	-1,316133709	0,089872044
Age	-0,027800609	0,001285833
Ancienneté	-0,104287774	0,006422845

TAB. 9 – PARAMETRES DE LA REGRESSION DES TAUX DE RACHAT

Les paramètres liés à l'âge et l'ancienneté sont tous deux négatifs. Ce qui signifie, comme nous pouvions le penser, que les taux de sortie sont décroissants en fonction de l'âge et en fonction de l'ancienneté. Mais nous remarquons que le paramètre lié à l'ancienneté est plus de 3 fois supérieur en valeur absolue. Ce qui signifie que les taux de sorties diminuent plus vite en fonction de l'ancienneté.

Afin de valider les paramètres estimés, nous effectuons des analyses uni-variées sur le nombre de rachats observés et le nombre de rachats estimés par le modèle. Nous constatons que le nombre de rachats estimés sont relativement proches du nombre de rachats observés si bien pour l'analyse en fonction de l'âge (figure 49), qu'en fonction de l'ancienneté (figure 50). Nous retenons donc les paramètres précédents.

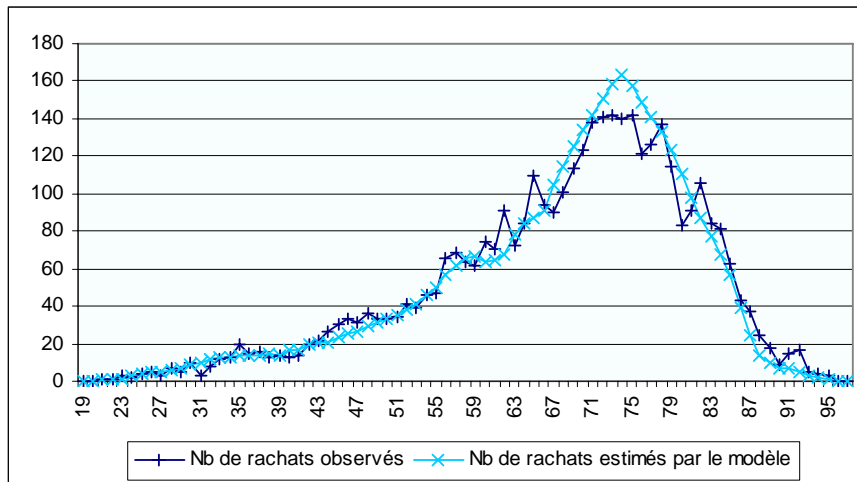


FIG. 49 – ANALYSE DU NOMBRE DE RACHATS EN FONCTION DE L'ÂGE

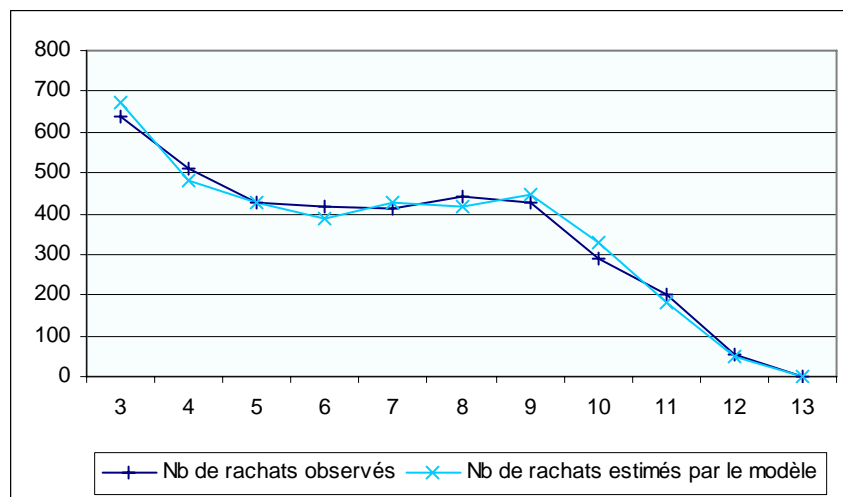


FIG. 50 – ANALYSE DU NOMBRE DE RACHATS EN FONCTION DE L'ANCIENNETE

Les taux de rachats sont donnés par l'expression suivante :

$$s_{x,a} = \exp\left(\text{Intercept} + x \times \hat{\beta}_x + a \times \hat{\beta}_a\right)$$

Nous représentons la surface des taux de rachats sur la figure ci-dessous :

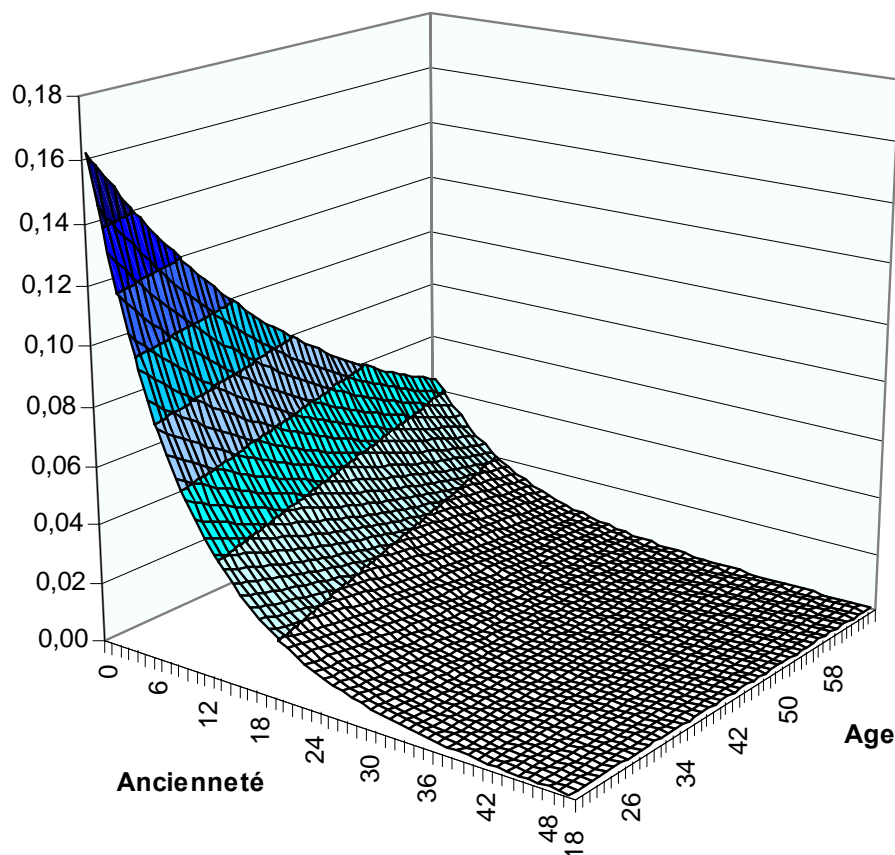


FIG. 51 – SURFACE DES TAUX DE SORTIES EN FONCTION DE L'AGE ET DE L'ANCIENNETE

3.2.3.2. La loi de rachat stochastique

La procédure *GENMOD* utilisée pour déterminer la fonction de rachat, nous fournit l'erreur standard du modèle pour chaque paramètre estimé (cf. tableau 6 pour exemple). Nous utilisons ces erreurs pour introduire des aléas sur les paramètres estimés. Ces aléas suivent des lois normales centrées et d'écart type égal à l'erreur fournie par la procédure.

Dans le cas d'Assur-Obsèques, les taux de sortie stochastiques s'expriment de la manière suivante :

$$\tilde{s}_{x,a} = \exp\left(\text{Intercept} + \varepsilon_{int} + x \times (\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a \times (\hat{\beta}_a + \varepsilon_a)\right)$$

Avec ε_k une variable aléatoire normale centrée et d'écart type σ_k .

- **Correction du biais engendré**

Cette introduction d'un aléa sur chaque paramètre estimé engendre un biais sur les taux de rachat. En effet :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{s}_{x,a}] &= E\left[\exp\left(\text{Intercept} + \varepsilon_{Int} + x \times (\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a \times (\hat{\beta}_a + \varepsilon_a)\right)\right] \\
 &= E\left[\exp\left(\text{Intercept} + x \times \hat{\beta}_x + a \times \hat{\beta}_a\right) \times \exp(\varepsilon_{Int} + x\varepsilon_x + a\varepsilon_a)\right] \\
 &= s_{x,a} \times E\left[\exp(\varepsilon_{Int} + x\varepsilon_x + a\varepsilon_a)\right] \\
 &= s_{x,a} \times E\left[\exp(\varepsilon_{Int}) \exp(x\varepsilon_x) \exp(a\varepsilon_a)\right]
 \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la version stochastique du modèle log-Poisson, nous sommes face à un problème d'indépendance : l'erreur d'estimation de l'intercept et les erreurs d'estimations des paramètres âge et ancienneté pondérées respectivement par l'âge et l'ancienneté sont-ils indépendants ? N'ayant pas de réponse, nous supposons l'indépendance.

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{s}_{x,a}] &= s_{x,a} \times E[\exp(\varepsilon_{Int})] \times E[\exp(x\varepsilon_x)] \times E[\exp(a\varepsilon_a)] \\
 &= s_{x,a} \times \exp\left(\frac{\varepsilon_{Int}^2}{2}\right) \exp\left(\frac{x^2 \varepsilon_x^2}{2}\right) \exp\left(\frac{a^2 \varepsilon_a^2}{2}\right) \\
 &= s_{x,a} \times \exp\left(\frac{\varepsilon_{Int}^2 + x^2 \varepsilon_x^2 + a^2 \varepsilon_a^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Puisque ε_x suit une loi normale $N(0, \sigma_x)$, nous avons que $\exp(x\varepsilon_x)$ suit une loi log-normale $LN(0, x\sigma_x)$.

Le modèle stochastique a donc tendance à surestimer les taux de sortie. Suite à des simulations de lois de rachat, nous constatons que cette surestimation des taux de rachats est moindre dans le cas de la correction du biais avec hypothèse d'indépendance que dans le cas de non correction du biais.

Nous analysons le comportement de l'exponentielle, $\exp\left(\frac{\varepsilon_{Int}^2 + x^2 \varepsilon_x^2 + a^2 \varepsilon_a^2}{2}\right)$, par un assuré de 67 ans et d'ancienneté 4 ans (qui correspondent à l'âge moyen et à l'ancienneté moyenne observé sur le portefeuille) dans la figure 52. Comme nous pouvons le constater, cette exponentielle est croissante avec l'âge et l'ancienneté, c'est-à-dire avec les années de projection.

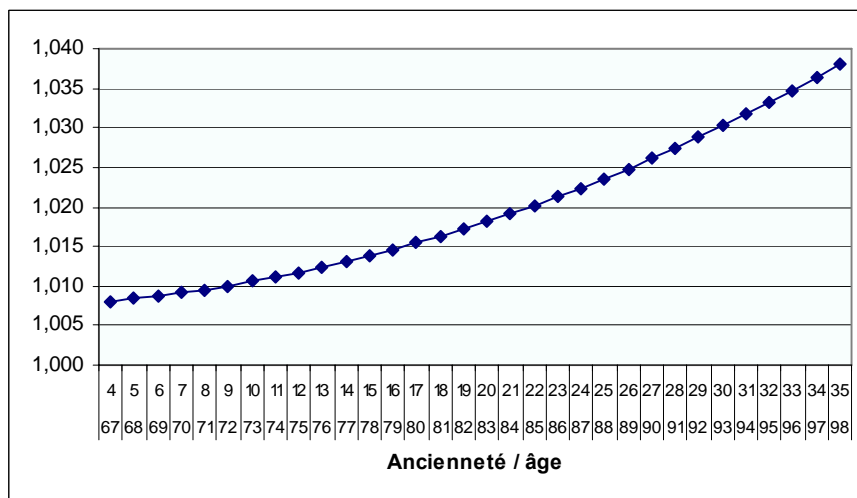


FIG. 52 – ÉVOLUTION DU BIAIS ENGENDRE POUR UN ASSURÉ DE 67 ANS ET D'ANCIENNETÉ 4 ANS AU 31/12/2006

Nous représentons 20 simulations de lois de rachats pour un assuré ayant les mêmes caractéristiques, à savoir un âge de 67 ans et une ancienneté de 4 ans :

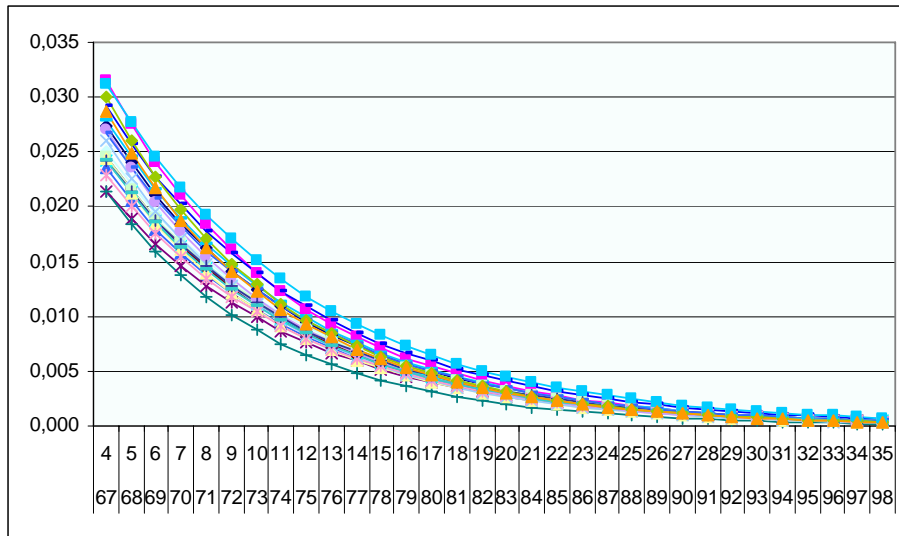


FIG. 53 – SIMULATIONS DE LOIS DE RACHATS POUR UN ASSURE DE 67 ANS ET D'ANCIENNETE 4 ANS

Donnons finalement la version corrigée des taux de rachat, que nous utilisons dans la modélisation stochastique :

$$s_{x,a}^* = \exp\left(\text{Intercept} + \varepsilon_{Int} + x \times (\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a \times (\hat{\beta}_a + \varepsilon_a) - \frac{\varepsilon_{Int}^2 + x^2 \varepsilon_x^2 + a^2 \varepsilon_a^2}{2} \right),$$

Tel que : $E[s_{x,a}^*] = s_{x,a}$

- **Modélisation de la durée de vie résiduelle du contrat**

De manière similaire au décès, pour chaque loi de rachat simulée, nous simulons les sorties par le critère binomial utilisant la loi ainsi simulée. En réitérant les simulations de sorties sur la même loi de rachat, nous observons l'impact des diverses sorties possibles sur une loi de rachat simulée. Et afin d'observer l'impact du stochastique dans la modélisation, nous réitérer ce processus un grand nombre de fois.

3.2.4. La modélisation des taux d'intérêt court terme

Par hypothèse de simplification, nous supposons que nous ne disposons que d'une seule classe d'actif, à savoir des obligations. L'objectif du stage est la modélisation des passifs, mais ayant besoin de modéliser les taux de rendement, nous avons formulé cette hypothèse concernant les actifs de la société.

La modélisation des taux d'intérêts court terme nous servira à déterminer la structure par terme des taux qui permettront d'estimer les taux de rendements futurs. Ces derniers sont utilisés dans le compte technique et plus particulièrement dans le calcul des résultats financiers intervenants dans le calcul de la participation aux bénéficiaires. Le modèle utilisé pour la simulation des taux courts est le modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

▪ Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

Nous choisissons de représenter la dynamique des taux courts par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross datant de 1985. Il s'agit d'un modèle d'équilibre à un facteur : le taux court dépend d'une seule source d'incertitude. Ce modèle est couramment utilisé dans les modélisations, car il est relativement simple à mettre en application.

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- Il n'existe pas de coûts de transaction
- Les titres sont parfaitement divisibles
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information
- Les marchés sont efficients ce qui implique l'absence d'opportunité d'arbitrage
- Les taux d'emprunts et de prêts sont égaux

Ce modèle permet d'obtenir des résultats basés sur la structure initiale observée sur le marché, ce qui assure la cohérence des prix produits avec les valeurs de marché.

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross est caractérisé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \varphi\sqrt{r_t}dZ_t$$

Où a est le facteur de retour à la moyenne, b est la valeur moyenne à long terme, φ la volatilité telle que $\varphi\sqrt{r_t}$ correspond à l'écart-type instantané du taux court, Z_t le mouvement brownien standard.

Les taux courts ainsi simulés permettent de reconstituer la structure par termes des taux (appelée également fonction d'actualisation) à n'importe quelle date. En effet, sous l'hypothèse du modèle de CIR, la valeur à la date t du zéro-coupon de maturité T est égale à :

$$P(t, T) = A(t, T)\exp(-B(t, T) \times r(t)),$$

$$\text{Où } A(t, T) = \left(\frac{2\gamma \exp\left(\frac{(\gamma + a)(T - t)}{2}\right)}{(\gamma + a)(\exp\{\gamma(T - t)\} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\varphi^2}}, \quad B(t, T) = \left(\frac{2(\exp\{\gamma(T - t)\} - 1)}{(\gamma + a)(\exp\{\gamma(T - t)\} - 1) + 2\gamma} \right) \text{ et}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\phi^2}$$

Ces zéro-coupons sont assimilables à des obligations d'Etat qui sont supposées sans risque.

Dans la modélisation stochastique mise en place, nous simulons les taux courts à partir de tirages aléatoires de variables normales. Comme nous venons de le voir, les taux courts permettent de reconstituer la structure par termes des taux de la date t à $t+30$. Pour illustrer ces simulations, la figure ci-dessous présente les quantiles de la structure par termes des taux issus de 1000 simulation de taux courts :

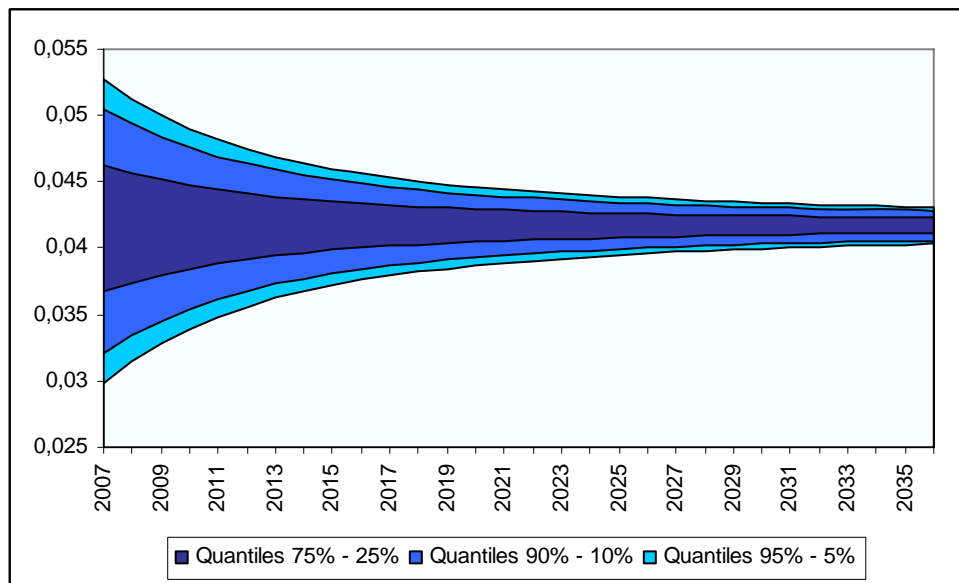


FIG. 54 – QUANTILES DE LA STRUCTURE PAR TERMES DES TAUX

▪ La détermination des taux de rendements futurs

Nous supposons que la provision mathématique constituée au 31/12/2006 est placée en obligations de maturité 8 ans et de taux égal au taux forward annuel à 8 ans vu de 2006, c'est-à-dire le taux entre 2013 et 2014 vu à la date d'inventaire. Cette maturité correspond à la duration du produit.

Chaque année de projection suivante, nous déterminons le montant net à réinvestir qui correspond au total suivant : primes + commissions – sinistres – frais + coupons des obligations placées + nominal des obligations arrivant à échéance. Ce montant est réinvesti en obligations de même maturité (8 ans) et de taux égal au nouveau taux forward annuel à 8 ans vu de l'année de projection.

Lorsqu'un de ces montants est déficitaire, ce montant est déduit de l'obligation la plus ancienne.

Les taux de rendements futurs sont alors les moyennes pondérées des placements effectués.

3.2.5. Les résultats de la modélisation stochastique

Les résultats présentés ci-dessous sont issus de la version stochastique du modèle log-Poisson. Nous commenterons dans un premier temps les résultats obtenus sur le stock ; dans un second temps, les résultats obtenus pour la projection des affaires nouvelles seront présentés et finalement nous présenterons les taux de rendement escomptés et la revalorisation liée à la participation aux bénéfices.

Les résultats présentés ici sont obtenus par la simulation de 100 séries de lois de mortalité et de rachat et de 65 simulations de sorties (décès et rachats) par tables, ce qui représente au total 6500 simulations.

- **Résultats obtenus pour le stock**

Nous commençons par observer l'évolution du nombre de contrats sur le stock en représentant les principaux quantiles sur la figure suivante :

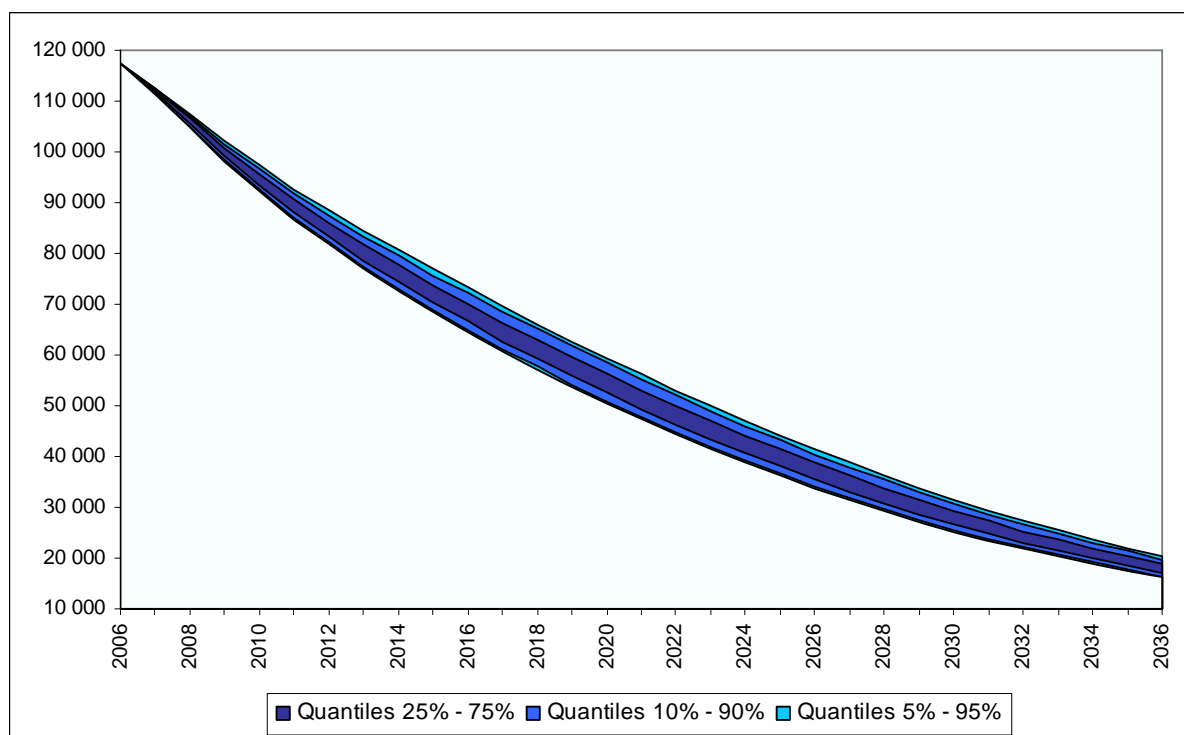


FIG. 55 – PROJECTION DU NOMBRE DE CONTRATS - STOCK

En observant l'écart entre les quantiles à 95% et 5% du nombre de contrats projetés (cf. figure 56), nous observons une augmentation de cet écart jusqu'en 2019 pour atteindre près de 9 000 contrats et diminuent par la suite pour atteindre un peu plus de 4 000 contrats à 30 ans. Cet écart diminue après 13 ans, car le stock vieillit et par conséquent le nombre de contrats diminue. En observant la proportion de cet écart par rapport au nombre moyens de contrats toujours en cours, nous pouvons constater que cette proportion est croissante durant les 30 années de projection, c'est-à-dire que l'incertitude concernant le nombre de contrats projetés augmente.

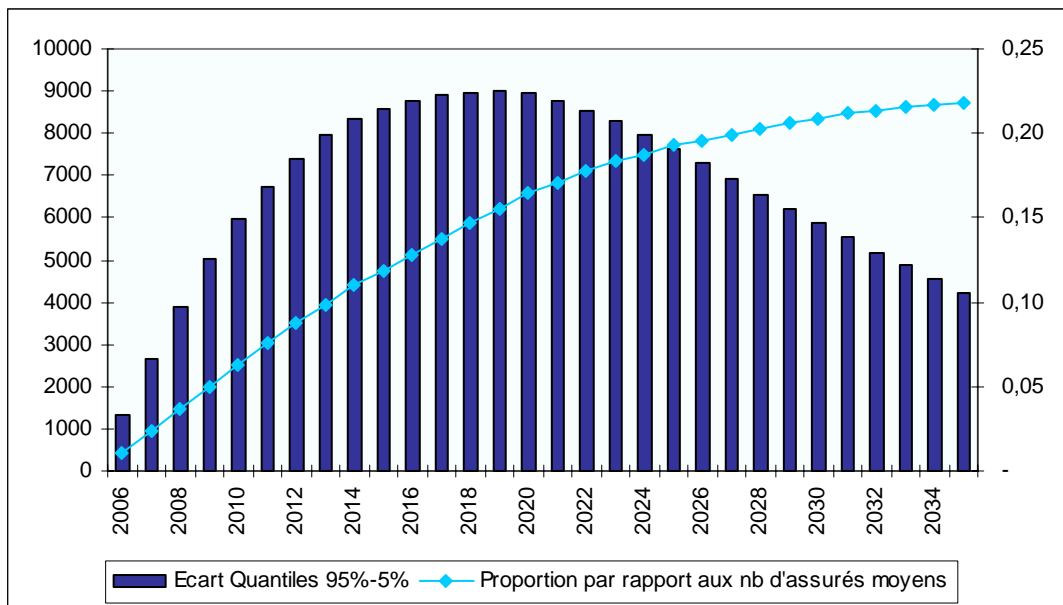


FIG. 56 – VOLATILITE DANS LE NOMBRE DE CONTRATS PROJETES - STOCK

Ensuite nous observons les résultats obtenus par la projection stochastique de la provision mathématique.

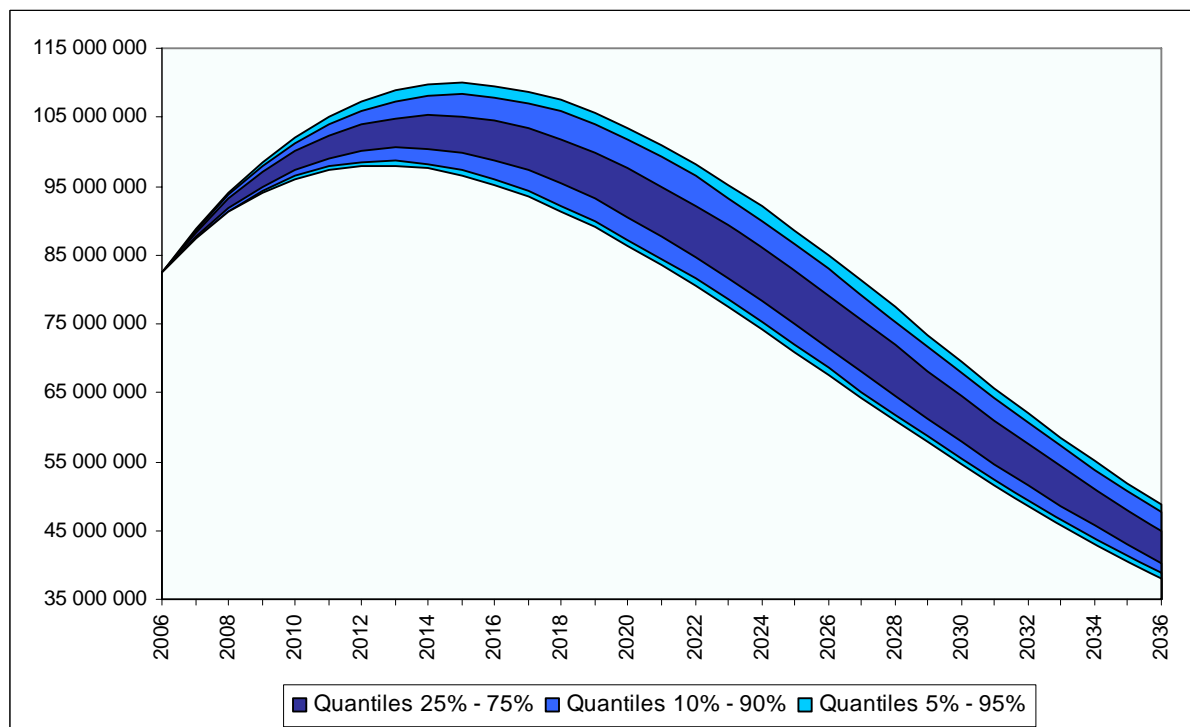


FIG. 57 – PROJECTION DE LA PROVISION MATHÉMATIQUE - STOCK

Nous observons une évolution semblable aux résultats obtenus dans la modélisation déterministe. En comparant le flux moyen des PM de la modélisation stochastique aux résultats obtenus dans la modélisation déterministe, nous observons une diminution des PM à partir de 2013 moins rapide que dans le cas déterministe. Cet écart dans les PM projetées

s'explique essentiellement par le fait que la diminution de l'engagement de l'assureur dans le cas stochastique est moins rapide. Comme nous le verrons dans la suite de cette partie, nous observons une forte diminution des rachats pour les années à venir par rapport aux résultats obtenus dans le prévisionnel déterministe. Cette diminution est expliquée par la modification de la loi de rachat par rapport à celle utilisée dans le cas déterministe. Les taux de rachats, à présent déterminés en fonction de l'âge et de l'ancienneté, sont plus faibles pour des âges et des anciennetés élevés. L'engagement de l'assureur étant fonction des capitaux garantis, est par conséquent plus élevé dans le cas où les taux de sorties sont moins élevés (les taux de décès restants inchangés).

Nous observons ensuite les résultats obtenus pour la projection des sinistres décès et des rachats dans les figures 58 et 59 ci-dessous. Nous observons la même évolution moyenne des sinistres que dans le cas déterministe, à savoir une augmentation des sinistres les deux premières années, puis une diminution des sinistres à moins de 5 millions d'euros à 30 ans.

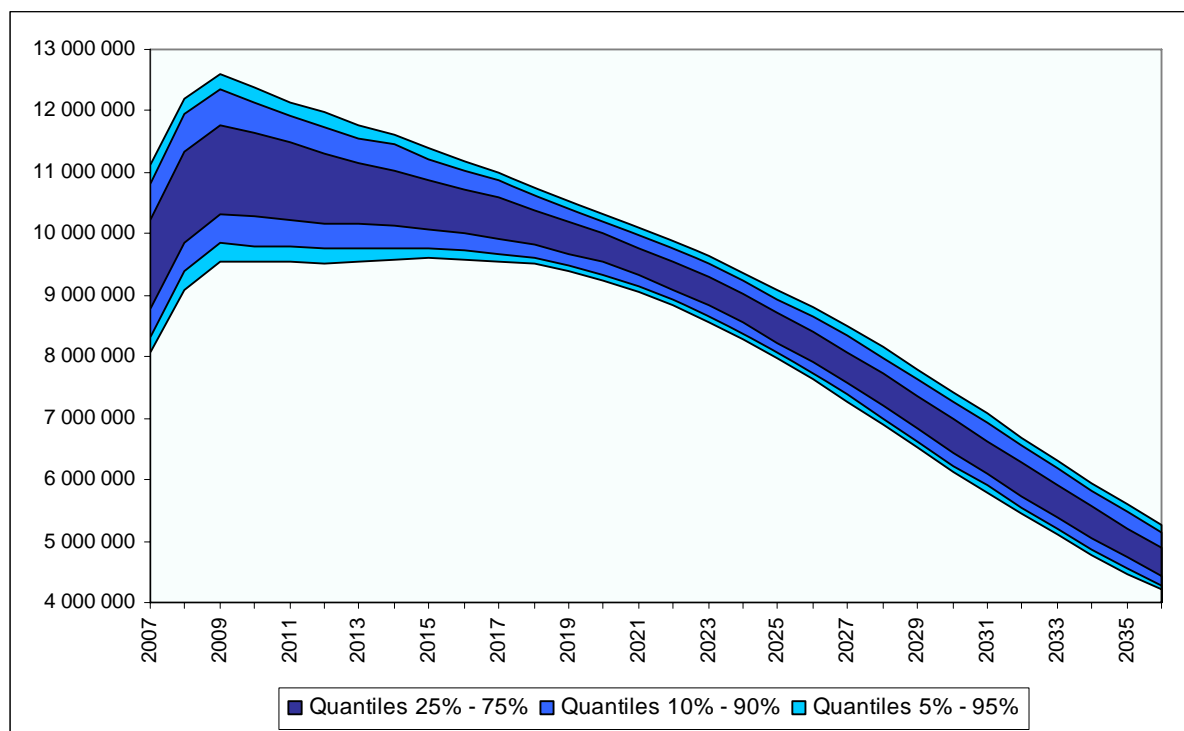


FIG. 58 – PROJECTION DES SINISTRES DECES - STOCK

Concernant les rachats, nous observons une augmentation des rachats jusqu'en 2009 et une forte diminution les années suivantes. Ce phénomène est expliqué par notre hypothèse concernant les rachats, par la composition du portefeuille et par la fonction de rachat introduite. En effet, nous avons supposé qu'aucun rachat ne peut avoir lieu avant la 2^{ème} année pour l'ensemble des contrats (à fractionnement unique ou non). Or le portefeuille au 31/12/2006 est composé de 44,7 % de contrats ayant moins de 3 ans d'ancienneté et 21,1 % de contrats ayant moins d'une année d'ancienneté. Ces contrats expliquent l'augmentation des rachats jusqu'en 2009.

La diminution des rachats est quant à elle expliquée par la fonction décroissante des taux de sortie en fonction de l'âge et de l'ancienneté. Le stock est en effet projeté, ce qui implique le vieillissement et la fidélisation des assurés (i.e. Les rachats diminuent avec l'ancienneté et l'âge) et par conséquent implique la diminution du taux global de rachat.

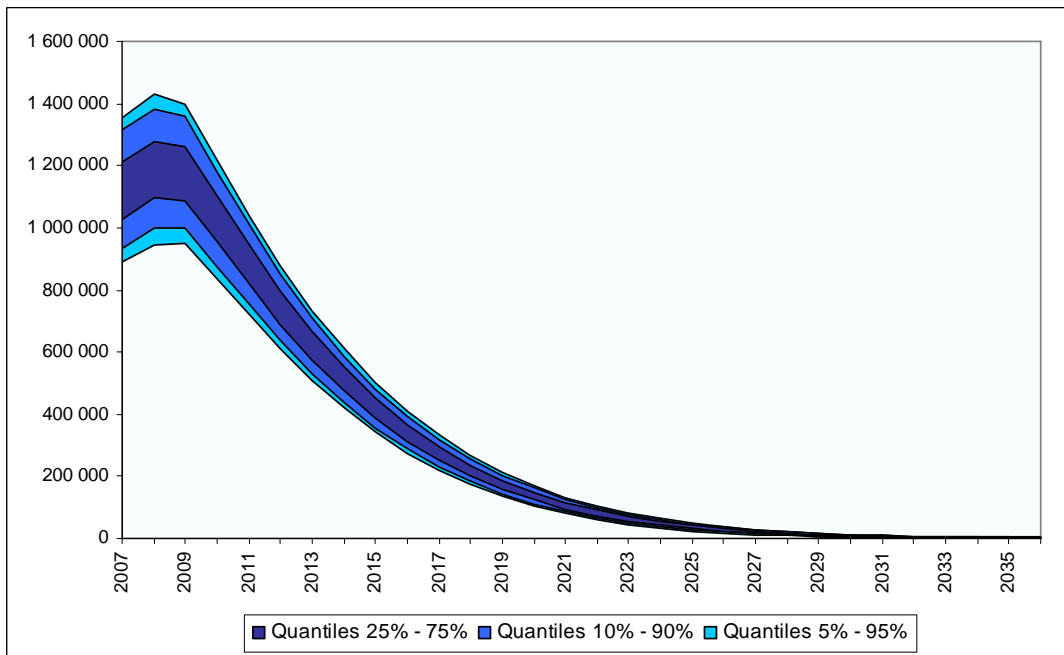


FIG. 59 – PROJECTION DES RACHATS - STOCK

Concernant les projections du chiffre d'affaires et des PENA, les montants moyens observés sont semblables aux montants obtenus dans la projection déterministe, qui fournit bien le scénario moyen de la modélisation stochastique.

▪ **Résultats obtenus pour les affaires nouvelles**

Concernant le nombre de contrats, nous observons comme précédemment l'évolution de l'écart inter-quantiles : celui augmente jusqu'en 2028 et diminue par la suite. Cet écart représente une proportion croissante du nombre d'assurés moyens, pour atteindre près de 23% du nombre d'assurés moyens en 2037. L'incertitude dans le nombre de contrats augmente ainsi durant les 30 années de projection.

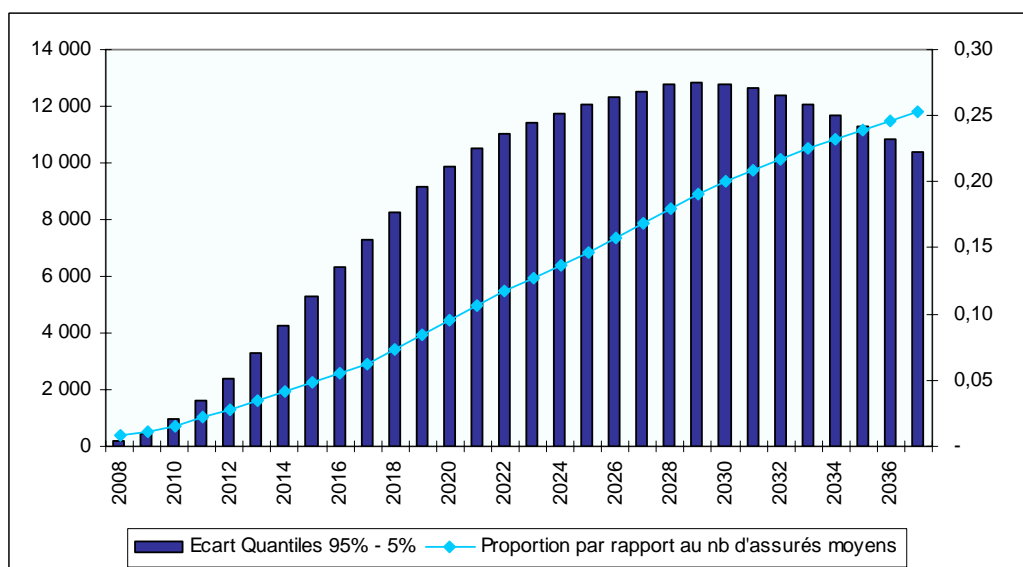


FIG. 60 – VOLATILITE DANS LE NOMBRE DE CONTRATS PROJETES – AFFAIRES NOUVELLES

Dans le cas des affaires nouvelles, nous observons une augmentation de la PM jusqu'en 2026, puis une diminution. Comme pour le stock, les différences observées entre l'évolution de la PM dans le cas stochastique et dans le cas déterministe proviennent de la modification de la loi de rachat.

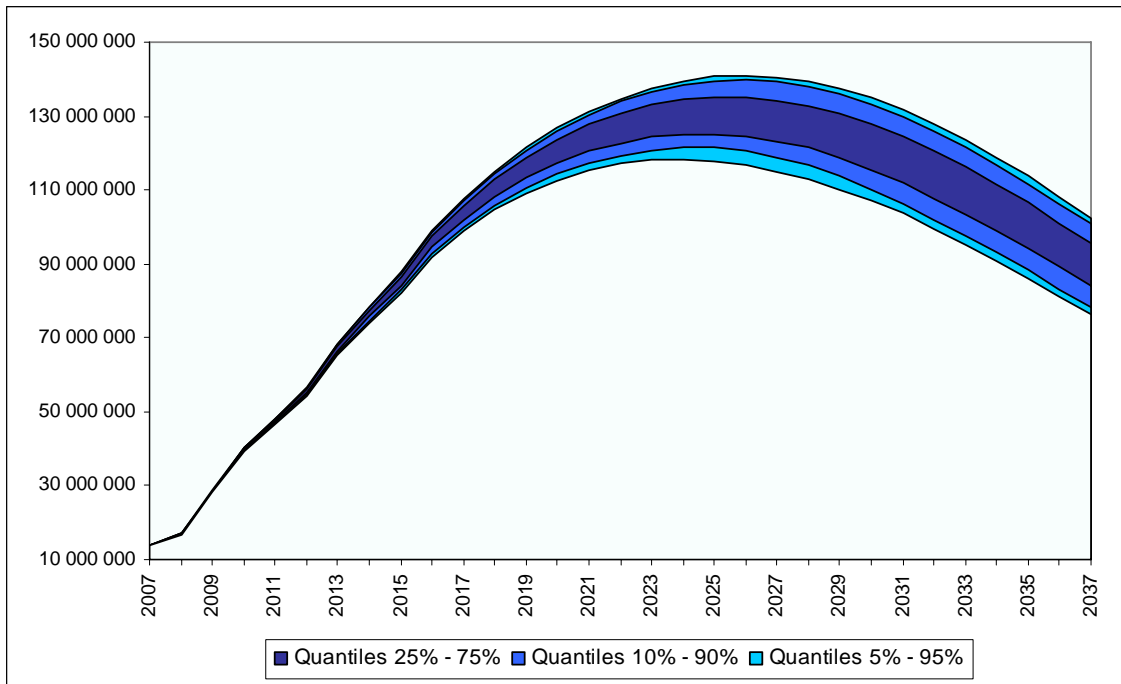


FIG. 61 – PROJECTION DE LA PROVISION MATHÉMATIQUE – AFFAIRES NOUVELLES

L'ensemble des résultats obtenus sont similaires aux résultats dans le cas déterministe, mis à part pour les rachats suite au changement de la loi de rachat.

▪ **Taux de rendement simulés**

A partir des taux forward simulés et des résultats moyens pour chaque année de projection, nous déterminons les taux de rendement.

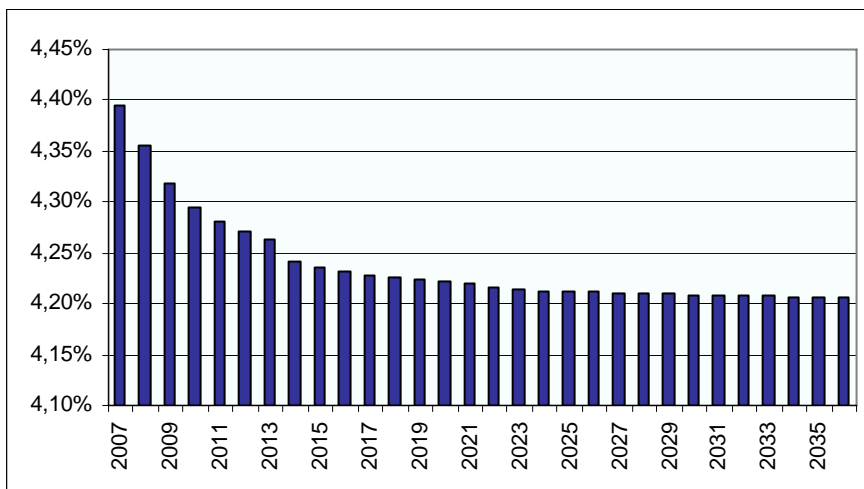


FIG. 62 – TAUX DE RENDEMENT ESCOMPTÉS

Nous observons une décroissance du taux de rendement jusqu'à stabilisation de celui-ci à partir de 2022 à près de 4,21 %.

▪ **La revalorisation**

Comme nous l'avons vu précédemment, suite au changement de la loi de rachat, l'engagement de l'assuré est plus élevé dans le cas stochastique. Par conséquent, le montant moyen des provisions est plus élevé. Et dans le calcul de la revalorisation, deux effets contradictoires agissent : d'une part la diminution des sorties implique une augmentation du résultat technique et d'autre part l'augmentation de l'engagement de l'assureur implique la diminution du taux de revalorisation.

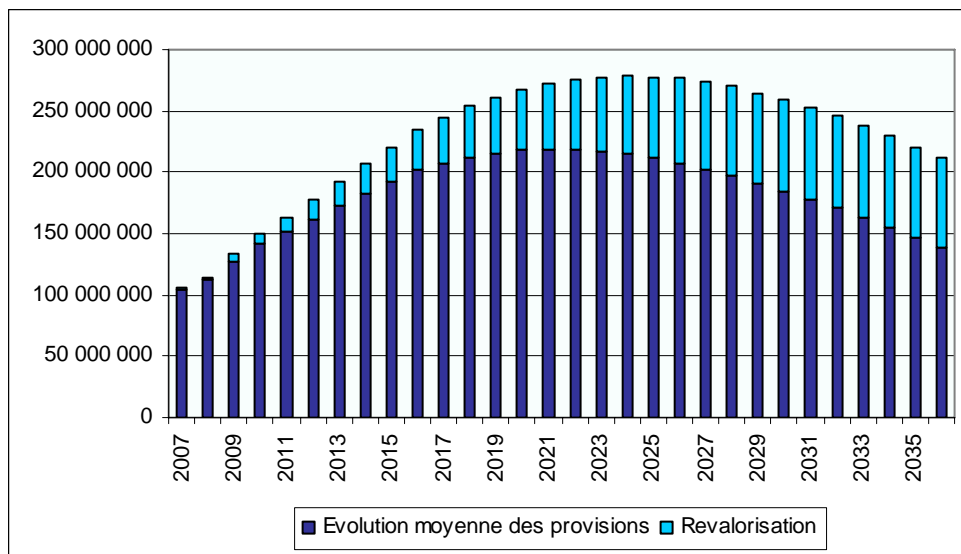


FIG. 63 – EVOLUTION MOYENNE DES PM ET REVALORISATION DES PROVISIONS

3.2.6. Les limites du modèle

Différentes limites peuvent être citées si bien sur les modèles utilisés que les hypothèses émises. Ces limites pourront être corrigées à l'avenir. Les limites sont les suivantes :

- Nous n'utilisons pas de modèle pour la fermeture des tables de mortalité. Nous utilisons par conséquent l'âge limite fourni par les tables de l'INED, à savoir 105 ans.
- Dans le cas d'Assur-Obèques, les contrats à fractionnement uniques ont la possibilité de racheter leur contrat immédiatement. Cet aspect n'a pas été modélisé, nous avons en effet supposé que ces contrats sont rachetés à partir de la troisième année d'ancienneté. Cette hypothèse paraît néanmoins raisonnable, car 6,8 % des contrats du stock ont un fractionnement unique et seuls 2,4 % des rachats observés concernent des contrats à fractionnement unique.
- Lors de la simulation des sorties (décès et rachat) par le critère binomial, le montant des sinistres est proportionnel au nombre de sorties. Même remarque pour le calcul de la provision mathématique, du chiffre d'affaires, qui sont calculé au prorata du nombre de présents. Les montants exacts des capitaux garantis, des primes... ne sont plus disponibles suite à l'agrégation des données ; nous utilisons les montants moyens. Cette limite n'a que peu d'impact car les capitaux garantis sont bornés et compris entre 1.500 et 10.000 €.
- Le nombre d'affaires nouvelles escompté est défini à priori : il serait possible de simuler ce nombre de manière stochastique. De même, les capitaux décès des affaires nouvelles escomptées sont égaux aux capitaux décès moyens observés sur le portefeuille. Nous pourrions simuler ces capitaux décès de manière aléatoire en utilisant l'écart type observé sur le portefeuille.
- Dans la version stochastique du modèle log-Poisson, nous avons introduit de l'aléa au niveau de la régression du paramètre alpha et de la régression de la composante temporelle. L'introduction de cet aléa engendre du biais sur les taux instantané de mortalité. Pour déterminer ce biais, nous avons supposé l'indépendance des termes restants et nous avons vu que l'expression corrigée du taux instantané de mortalité diminue considérablement l'erreur induite par cette introduction d'aléa. Nous avons fait la même hypothèse dans la modélisation stochastique des taux de rachat.

3.3. XL Prévoyance

Nous débuterons par la présentation du principe de simulation adopté. Nous verrons ensuite que la modélisation de la mortalité est identique à celle mise en place pour le produit Assur-Obsèques, à savoir l'utilisation du modèle log-Poisson avec régression des paramètres alpha et de la composante temporelle. Ensuite la détermination des lois de sorties et d'entrée en incapacité de travail par l'utilisation de modèles linéaires généralisés sera présentée. Nous présenterons également les résultats obtenus sous formes graphiques et nous les comparerons aux résultats obtenus dans le cas déterministe. Nous verrons qu'en moyenne les résultats sont identiques. Pour conclure cette partie, les limites de ce modèle stochastique seront listées.

3.3.1. Le principe adopté

Dans la modélisation déterministe du produit XL Prévoyance, nous avons élaboré un calcul agrégé. Les mêmes données agrégées sont utilisées dans la modélisation stochastique.

Le produit XL Prévoyance est plus complexe que le produit Assur-Obsèques, mais concernant la garantie décès le principe adopté pour les simulations stochastiques est le même. Différentes simulations entre en jeu pour ce produit : la simulation des lois de mortalité, de sortie et d'entrée en incapacité. A partir de ces lois simulées, nous simulons le nombre de décès, de résiliations et d'entrée en incapacité par l'utilisation du critère de la loi binomiale disponibles dans Excel.

Le principe adopté est le suivant :

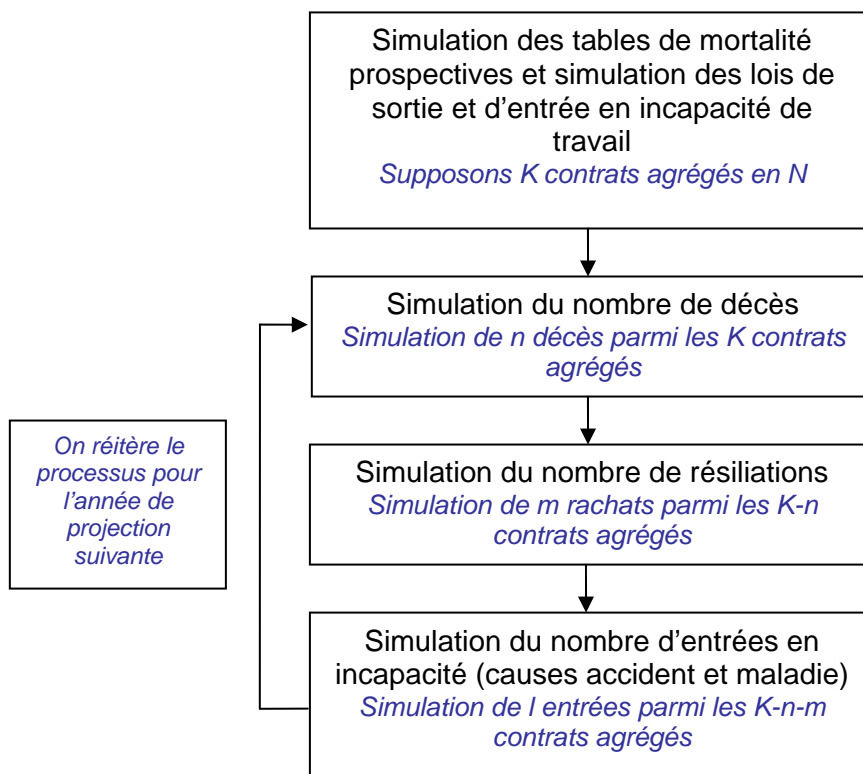


FIG. 64 – PRINCIPE DE SIMULATION STOCHASTIQUE ADOPTE POUR XL PREVOYANCE

Ensuite pour chaque entrée en incapacité de travail, différentes simulations sont mises en place. En effet, une fois entrée en incapacité de travail, l'incapable se maintient ou ne se maintient pas dans l'état d'incapable, ou passe en invalidité permanente, et dans ce dernier cas, l'invalidé se maintient ou ne se maintient pas dans l'état d'invalidé. L'ensemble de ces simulations sont faites à partir de critères de la loi binomiale.

Parallèlement à ce processus, nous effectuons la simulation des taux courts qui serviront à déterminer les taux de rendement utilisé dans le compte technique prévisionnel.

Pour chaque simulation nous déterminons le compte technique prévisionnel qui nous permettra de déterminer les résultats technique et financier, la participation aux bénéficiaires et la revalorisation de manière stochastique.

Pour les tables de mortalité prospectives et les lois de sortie et d'entrée en incapacité de travail simulées, nous réitérons la simulation du nombre de décès, de sorties et d'entrées en incapacité par année de projection. Et pour modéliser l'impact du stochastique sur l'estimation des flux futurs, il faut réitérer plusieurs fois le processus décrit ci-dessus.

Nous devons simuler un nombre important de lois afin que les résultats soient fiables. Le produit proposant plus de garantie qu'Assur-Obsèques et possédant plus de lignes agrégées, les temps de calcul sont plus importants et donc non négligeables.

3.3.2. La modélisation de la mortalité

Le produit XL Prévoyance propose une garantie décès. La simulation stochastique de cette garantie est identique à celle mise en place pour Assur-Obsèques : à savoir l'utilisation des modèles de Lee et Carter et log-Poisson sur les données de l'INED et la table de mortalité d'expérience réalisée.

L'introduction de l'aléa se fait également en deux étapes : la première dans la modélisation des tables simulées et la seconde dans la simulation du nombre de décès pour le critère binomial. Le modèle mis en place est le modèle log-Poisson avec introduction d'aléas sur la régression des paramètres.

Concernant la garantie doublement du capital en cas d'accident, après avoir simulé le nombre de décès, nous simulons une variable uniforme u : si u est inférieure à la probabilité de décéder suite à un accident, la cause du décès est accidentelle, sinon celle-ci n'est pas accidentelle.

Concernant la garantie rente éducation, comme dans le modèle déterministe, nous ne supposons pas de mortalité pour les bénéficiaires de ces rentes.

3.3.3. La modélisation des sorties

Nous procédons de manière similaire à la modélisation des taux de sortie pour le produit Assur-Obsèques. Nous retenons les paramètres pour lesquels la qualité de l'ajustement est la meilleure. La procédure nous fournit la statistique du Khi deux associée aux paramètres retenus : l'âge, l'âge au carré et l'ancienneté. Les p-valeurs observées sont inférieures à 0,0001. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Paramètre	Valeur	Erreur
Intercept	-2,603106696	0,019428988
Age	0,006180457	0,000506826
Ancienneté	-0,047965416	0,001099020

TAB. 10 – PARAMETRES DE LA REGRESSION DES TAUX DE SORTIE – XL PREVOYANCE

Comme nous pouvons le constater, les taux de sortie sont croissants avec l'âge (cf. figure 9) et décroissants avec l'ancienneté (cf. figure 10).

Les taux de sorties sont dans le cas d'XL Prévoyance donnés par l'expression suivante :

$$s_x = \exp(\text{Intercept} + x \times \hat{\beta}_x + a \times \hat{\beta}_a)$$

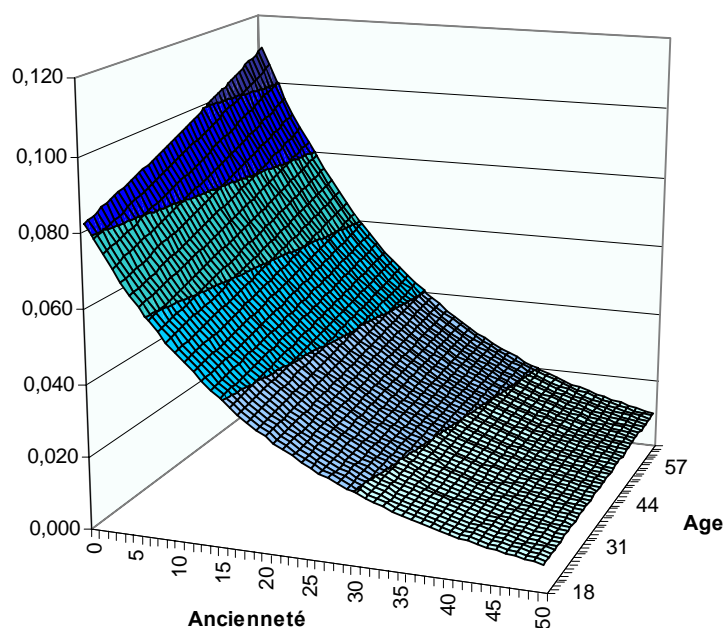


FIG. 65 – SURFACE DES TAUX DE SORTIE EN FONCTION DE L'AGE ET DE L'ANCIENNETE

A partir des erreurs standards fournies pour chaque paramètre, nous déterminons les taux de sortie de manière stochastique. Les aléas introduits suivent des lois normales de moyenne nulle et d'écart type égal à l'erreur standard du paramètre. Les taux de sortie stochastiques sont de la forme :

$$\tilde{s}_x = \exp(\text{Intercept} + \varepsilon_{Int} + x \times (\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a \times (\hat{\beta}_a + \varepsilon_a))$$

Avec ε une variable aléatoire normale centrée et d'écart type σ .

De manière similaire à la modélisation de taux de rachat pour Assur-Obèques, l'introduction d'aléas dans la loi de sortie engendre un biais. Nous corrigeons ce biais de manière semblable et nous obtenons les taux de sorties corrigés suivants :

$$s_x^* = \exp\left(\text{Intercept} + \varepsilon_{Int} + x(\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a(\hat{\beta}_a + \varepsilon_a) - \frac{\varepsilon_{Int}^2 + x^2 \varepsilon_x^2 + a^2 \varepsilon_a^2}{2}\right)$$

Pour chaque loi simulée, nous simulons les sorties par le critère binomial. En réitérant les simulations sur la même loi de sortie, nous observons l'impact des diverses sorties possibles sur une loi simulée. Et afin d'observer l'impact du stochastique dans la modélisation, nous réitérons ce processus un grand nombre de fois.

3.3.4. La modélisation de l'incapacité

Les lois d'entrée en incapacité de travail pour chaque cause (maladie avec franchise 90 jours et accident sans franchise) ont également été déterminées par les modèles linéaires généralisés avec une distribution de Poisson et une fonction de lien exponentielle (fonction GENMOD de SAS).

Comme dans le cas des sorties, à chaque paramètre du modèle estimé, l'erreur standard associée est donnée. Celle-ci est utilisée comme écart type des variables normales centrées utilisées comme aléas pour chaque paramètre. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Paramètre	Valeur	Erreur
Intercept	-8,481115844	0,282149145
Age	0,074062097	0,006257109
Ancienneté	0,082515027	0,007291811

TAB. 11 – PARAMETRES DE LA REGRESSION DES TAUX D'ENTREE EN INCAPACITE MALADIE

Paramètre	Valeur	Erreur
Intercept	-4,021278512	0,100401371
Age	0,007333843	0,002620005
Ancienneté	-0,005039575	0,004824174

TAB. 12 – PARAMETRES DE LA REGRESSION DES TAUX D'ENTREE EN INCAPACITE ACCIDENT

Par exemple le taux d'entrée en incapacité pour cause de maladie avec une franchise de 90 jours s'expriment de la manière suivante :

$${}^{mal} \tilde{i}_x^{IT} = \exp\left(Intercept + \varepsilon_{Int} + x \times (\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a \times (\hat{\beta}_a + \varepsilon_a)\right)$$

Avec ε une variable aléatoire normale centrée et d'écart type σ .

Par un calcul du biais similaire aux taux de sortie, la version corrigée des taux d'entrée en incapacité pour cause de maladie est la suivante :

$${}^{mal} i_x^{IT*} = \exp\left(Int. + \varepsilon_{Int} + x(\hat{\beta}_x + \varepsilon_x) + a(\hat{\beta}_a + \varepsilon_a) - \frac{\varepsilon_{Int}^2 + x^2 \varepsilon_x^2 + a^2 \varepsilon_a^2}{2} \right)$$

Les taux d'entrée en incapacité pour cause d'accident sans franchise s'écrivent de manière semblable.

Afin d'observer l'impact du biais dans le cas des taux d'entrée en incapacité pour cause de maladie, nous observons par exemple le biais pour un assuré de 36 ans et d'ancienneté nulle :

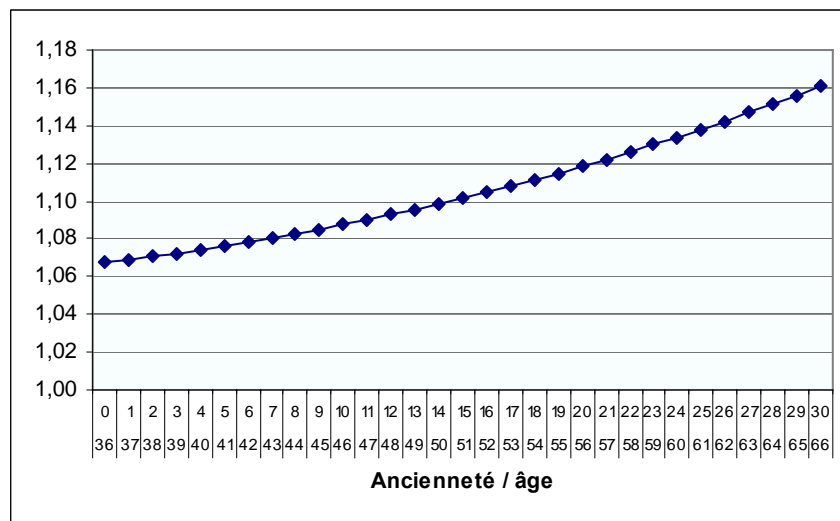


FIG. 66 – ÉVOLUTION DU BIAIS ENGENDRE SUR LES TAUX D'ENTREE EN INCAPACITE MALADIE

L'impact du biais est faible pour les premières années de projection et croît de manière exponentielle les années suivantes, et atteint près de 4 pour la dernière année de projection. Le biais engendré est par conséquent non négligeable et il est nécessaire de la corriger si bien pour les taux d'entrée en incapacité de travail pour cause de maladie que pour cause d'accident.

3.3.5. La modélisation des taux courts

Cette modélisation est identique à celle décrite dans le cas d'Assur-Obsèques, à savoir la modélisation des taux d'intérêt court terme par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross et la détermination des taux de rendement à partir de ces taux et des résultats obtenus pour chaque année de projection.

3.3.6. Les résultats de la modélisation stochastique

Dans un premier temps, nous observerons la projection stochastique du taux de mortalité global et du taux de sortie global observé sur le stock. Comme nous pouvions l'attendre, le taux de mortalité global est croissant et le taux de sortie global est décroissant.

Les résultats obtenus sur le stock seront commentés dans un second temps. Puis c'est ceux obtenus sur les affaires nouvelles qui seront présentés. Et avant de présenter la revalorisation escomptée liée à la participation aux bénéficiaires, nous présenterons les taux de rendement simulés.

Les résultats présentés dans cette partie sont issus des simulations de 50 séries de lois de mortalité, de sortie et d'entrée en incapacité de travail et de 20 simulations de sorties par lois simulées, ce qui représente un total de 1 000 simulations.

▪ Projection stochastique des taux de mortalité et de sortie sur le stock

Comme le montre la figure 67, le taux global de mortalité est croissant avec une valeur moyenne de 1,329 pour 1 000 en 2006 et atteignant 4,733 pour 1 000 en 2036. L'écart inter-quantiles augmente avec les années de projection : l'incertitude sur les taux de décès augmente.

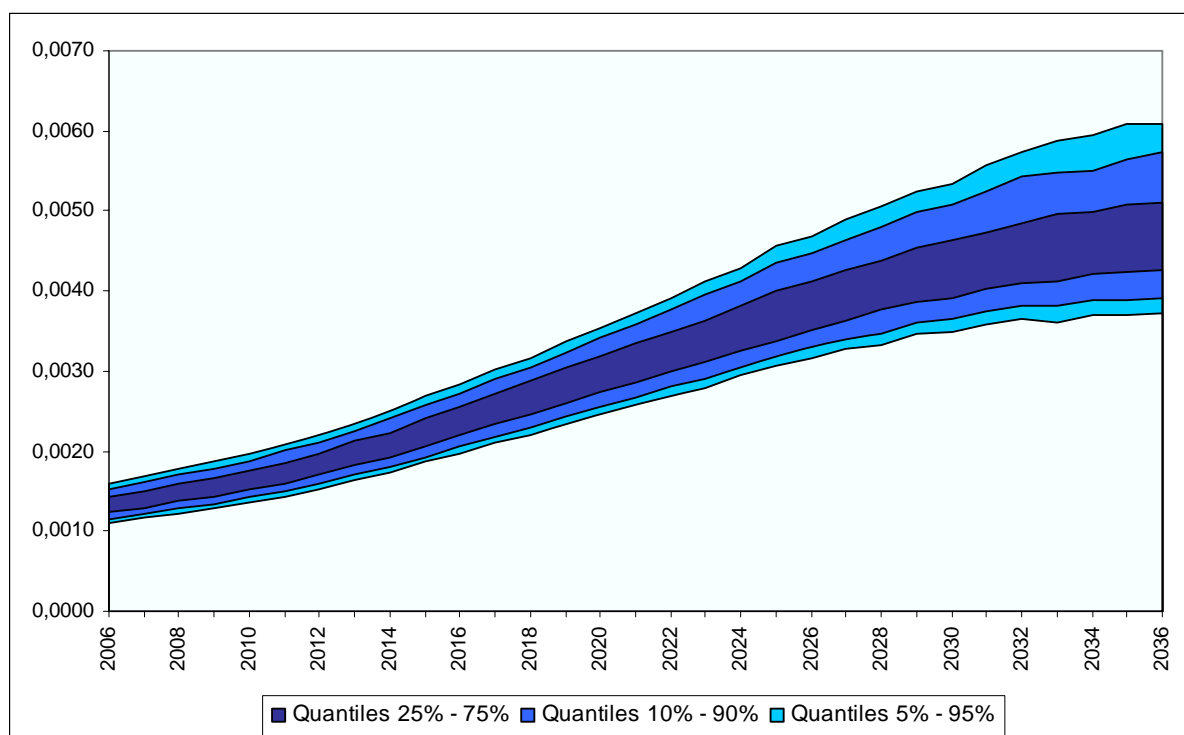


FIG. 67 – PROJECTION STOCHASTIQUE DU TAUX DE MORTALITE GLOBAL – STOCK

Les taux de sorties (cf. figure 68) sont quant à eux décroissants avec une valeur moyenne de 9,08 % en 2006 pour atteindre 2,51 % en 2036. Nous remarquons également que l'écart inter-quantiles diminue avec les années de projection.

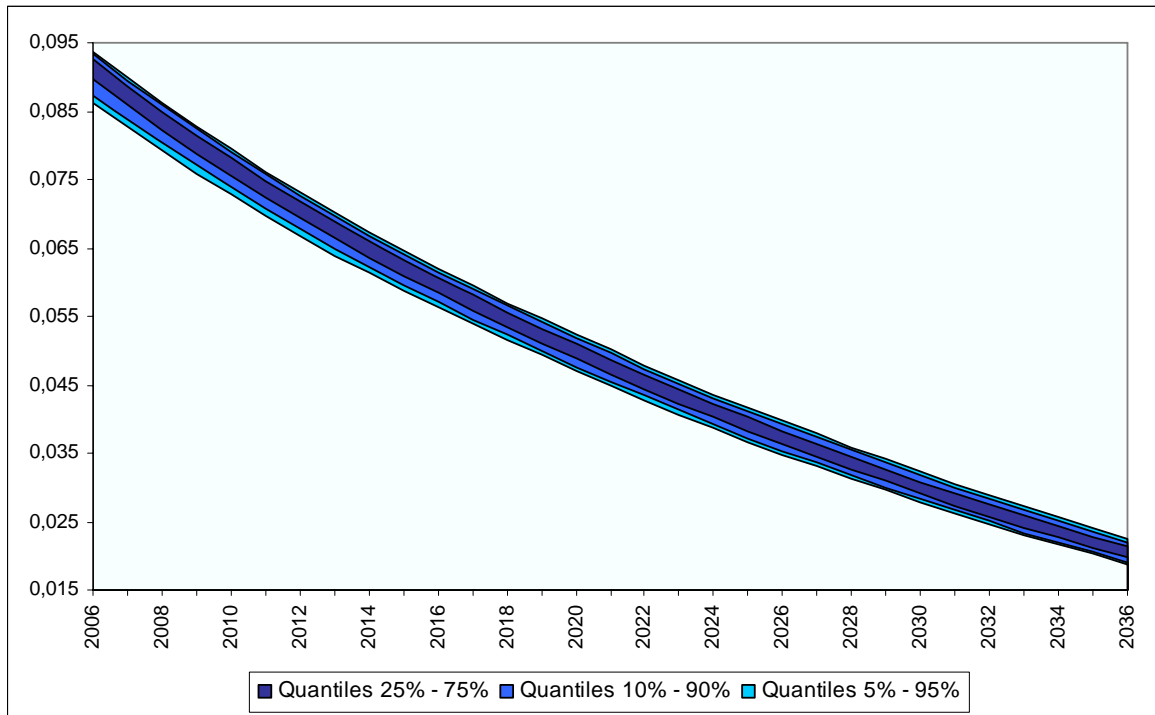


FIG. 68 – PROJECTION STOCHASTIQUE DU TAUX DE SORTIE GLOBAL – STOCK

▪ **Résultats obtenus sur le stock**

Nous considérons ensuite l'évolution du nombre de contrats sur le stock : nous constatons la diminution logique du nombre de contrats projetés.

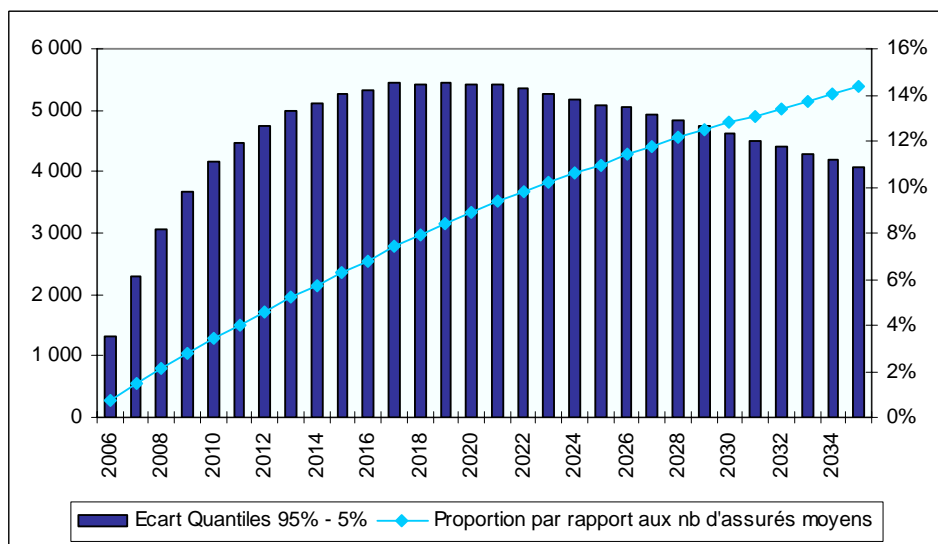


FIG. 69 – VOLATILITE DANS LE NOMBRE DE CONTRATS PROJETES – STOCK

Et en observant l'écart inter-quantiles de ce nombre de contrats projetés (cf. figure 69), nous observons une augmentation de cet écart jusqu'en 2019 avec plus de 5 000 contrats et diminue ensuite pour atteindre près de 4 000 contrats en 2036. En observant cet écart par rapport aux nombres moyens de contrats en cours, nous constatons que cette proportion est croissante durant les 30 années de projection et atteint près de 15% des nombres moyens

de contrats en cours en 2036. Par conséquent l'incertitude concernant le nombre de contrats projetés augmente avec les années de projection.

Ensuite nous observons la projection globale des provisions. Ces provisions projetées sont les provisions mathématiques de rentes et les provisions pour sinistres à payer.

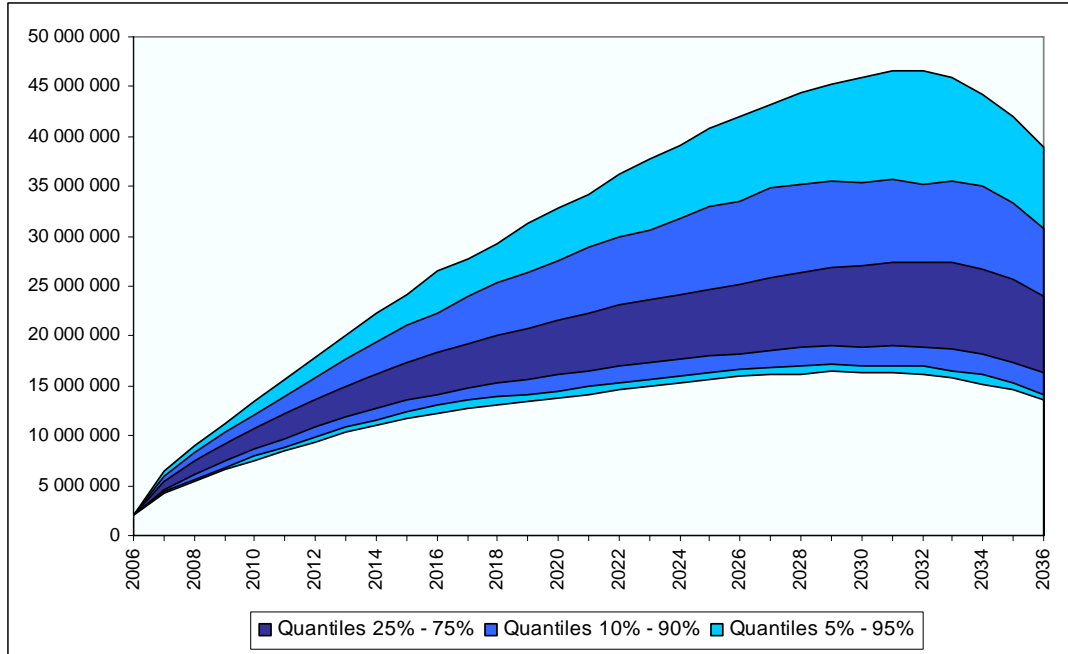


FIG. 70 – PROJECTION GLOBALE DES PROVISIONS – STOCK

Nous observons une augmentation moyenne des provisions globale sur le stock jusqu'en 2026, puis une diminution. Nous remarquons que l'écart inter-quantiles augmente parallèlement à l'augmentation moyenne des provisions.

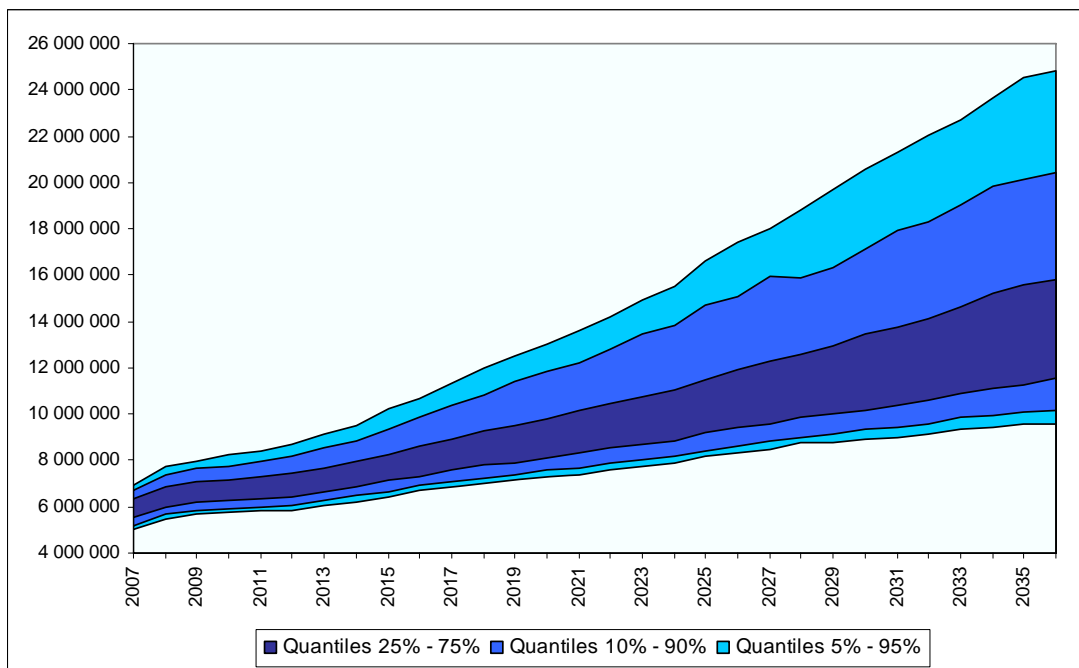


FIG. 71 – PROJECTION GLOBALE DES SINISTRES – STOCK

Finalement nous observons la projection globale des sinistres sur le stock : nous observons une augmentation des sinistres avec un élargissement de l'écart inter-quantiles.

▪ **Résultats obtenus sur les affaires nouvelles**

Concernant le nombre d'affaires nouvelles, nous observons une augmentation pendant les dix années où l'on escompte des entrées d'affaires nouvelles, puis une diminution avec une augmentation de l'écart inter-quantiles. Comme dans le cas du stock, en 2036, l'incertitude concernant le nombre de contrats représente près de 15% du nombre de contrats moyens.

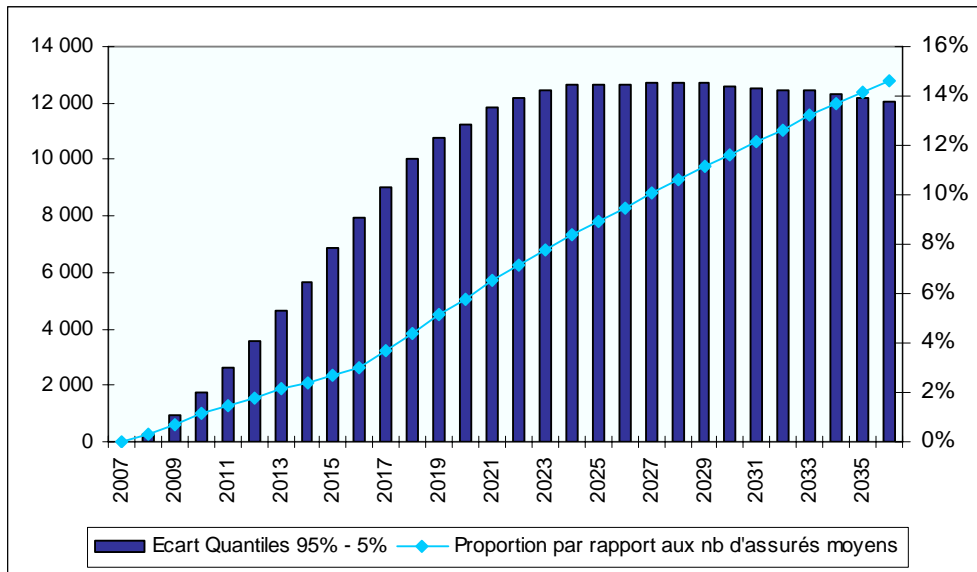


FIG. 72 – PROJECTION DU NOMBRE DE CONTRATS – AFFAIRES NOUVELLES

Concernant la projection des provisions, nous observons une augmentation du montant des provisions avec une augmentation de l'écart inter-quantiles jusqu'en 2036.

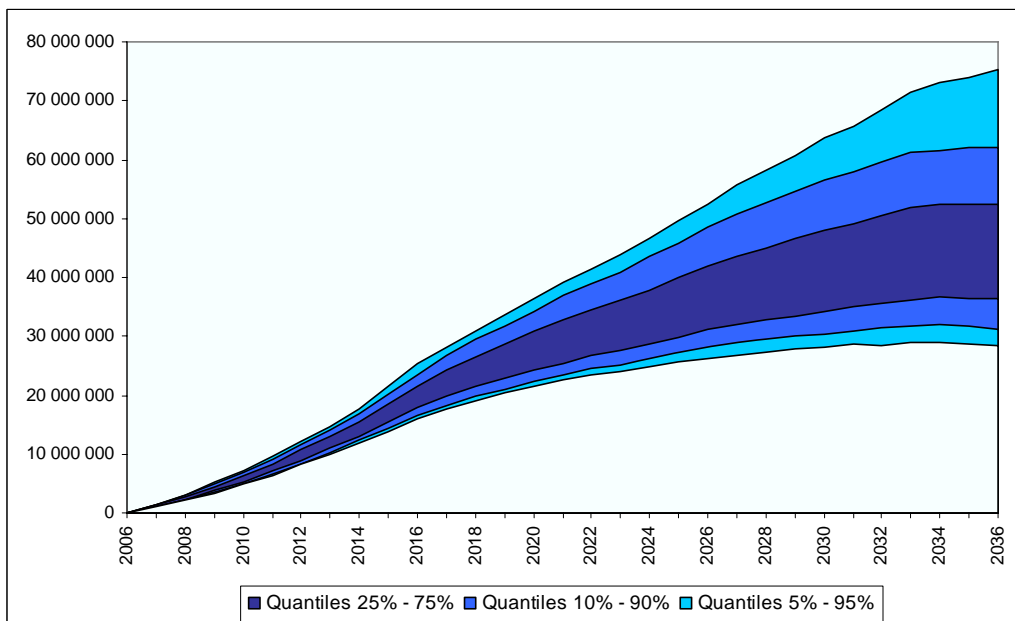


FIG. 73 – PROJECTION GLOBALE DES PROVISIONS – AFFAIRES NOUVELLES

Nous observons finalement la projection globale des sinistres sur la figure ci-dessous :

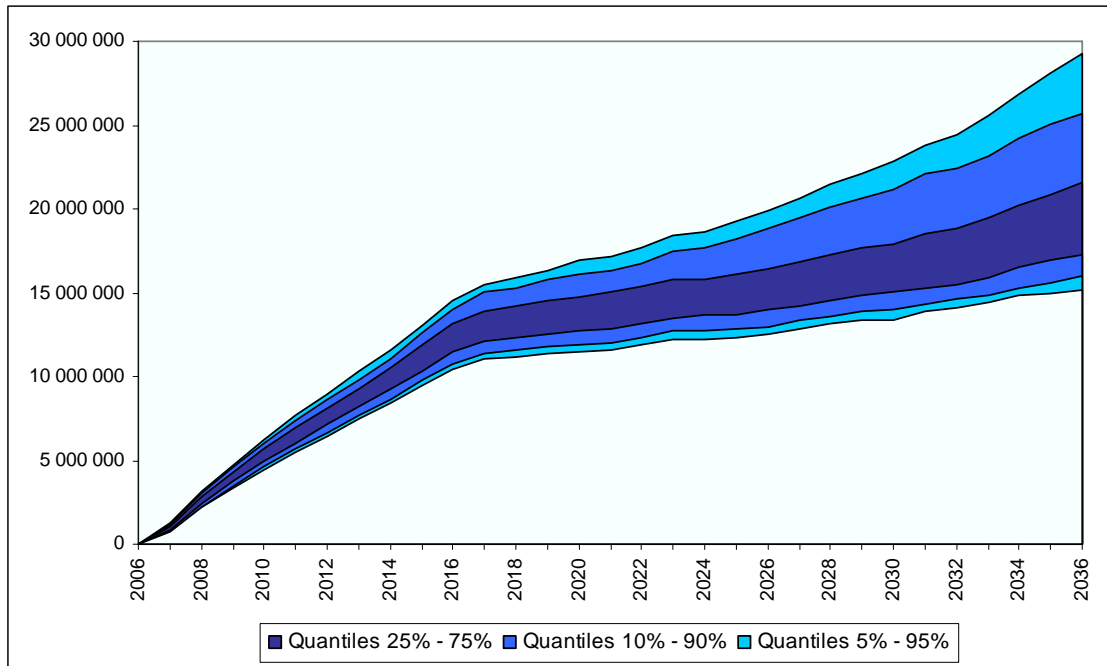


FIG. 74 – PROJECTION GLOBALE DES SINISTRES – AFFAIRES NOUVELLES

Nous observons une augmentation continue des montants de sinistres avec une croissance plus rapide les 10 premières années où l'on escompte des entrées d'affaires nouvelles. Nous remarquons que l'incertitude dans les montants de sinistres croît avec les années de projection.

▪ **Taux de rendement simulés**

A partir des taux forward simulés, nous déterminons les taux de rendement utilisés dans les comptes technique prévisionnels pour le calcul des résultats financiers.

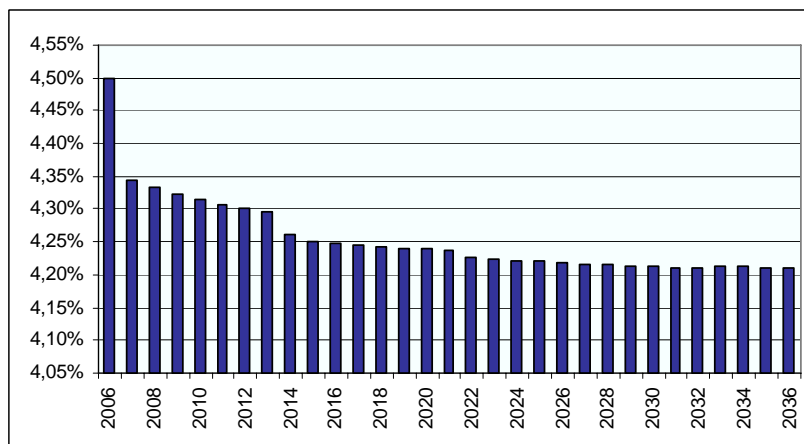


FIG. 75 – TAUX DE RENDEMENT ESCOMPTES

Nous observons une stabilisation des taux de rendement à partir de 2022 autour de 4,20%.

▪ La revalorisation

Nous représentons l'évolution moyenne et la revalorisation de la somme des provisions déterminées sur le stock, les sinistres en cours et les affaires nouvelles.

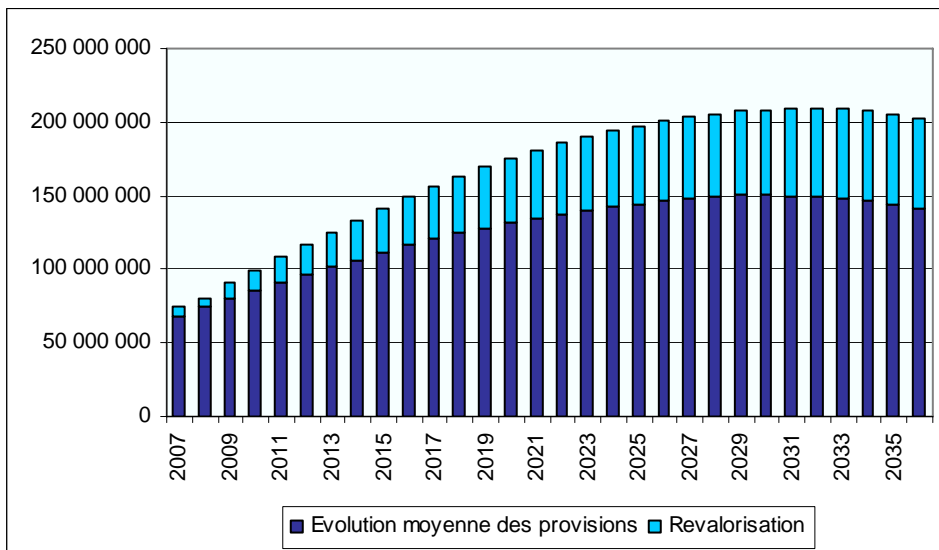


FIG. 76 – EVOLUTION MOYENNE ET REVALORISATION DES PROVISIONS

3.3.7. Les limites du modèle

Les limites du modèle sont pour la plupart identiques à celle déjà observées dans le cas d'Assur-Obsèques. Notons que dans le cas d'XL Prévoyance, la fermeture de la table est inutile, car les garanties proposées sont des garanties temporaires où l'âge maximum de garantie est de 75 ans pour le décès.

Nous avons noté que les sinistres et autres flux sont déterminés au prorata du nombre de sorties. Mais l'impact était modéré dans le cas d'Assur-Obsèques car les capitaux garantis sont bornés. Dans ce second modèle, les capitaux garantis ne sont pas bornés.

Concernant la simulation des affaires nouvelles, la remarque concernant le nombre d'affaires nouvelles escomptées est identique : le nombre d'affaires nouvelles pourrait être généré de manière aléatoire. Et le montant des garanties pourraient également être généré de manière aléatoire.

3.4. Conclusion

Les modèles stochastiques mis en place ont été construit à partir des données agrégées des portefeuilles modélisés. Ces modèles basées sur des tirages aléatoires, permettent d'obtenir les distributions des éléments des comptes techniques prévisionnels.

Le premier avantage de ces modèles stochastiques est l'intégration de tables de mortalité prospectives par l'utilisation des méthodes de Lee et Carter et log-Poisson respectivement. Ces méthodes bidimensionnelles prennent en compte à la fois l'année et l'âge pour déterminer les taux de mortalité. Les données utilisées pour la construction de ces tables sont les tables de mortalité de l'INED et la table d'expérience réalisée.

Ensuite les lois de rachats et d'entrée en incapacité de travail ont été déterminées à partir de modèles linéaires généralisés, où de l'aléa a été introduit sur chacune des variables explicatives des modèles.

Ces deux modèles mis en place vont pouvoir être adapté aux autres produits de prévoyance de la société. Les limites de ces modèles sont raisonnables et pourront à l'avenir être corrigées.

Conclusion

La réglementation des compagnies d'assurance est en évolution : la préoccupation du risque et de la solvabilité occupe une place considérable. Dans cette optique, le projet Solvabilité 2 crée un cadre prudentiel qui permet d'apprécier la solvabilité globale d'une compagnie. Ce projet a pour objectif de mieux cerner les risques et d'évaluer les actifs et les passifs de manière cohérente avec le marché. Les compagnies d'assurance sont donc amenées à mieux connaître et gérer leurs risques. C'est dans cette optique que mon stage a été réalisé en considérant deux produits de la gamme prévoyance et en modélisant le passif de ces produits.

Les risques pour les produits de prévoyance sont des risques de souscription vie, qui sont les risques de mortalité, de longévité, de rachat, d'invalidité, de révision des rentes, de dépenses et de catastrophes. Cette énumération correspond aux risques présents dans la détermination du SCR vie dans le QIS3.

La première étape du stage a été la construction d'un modèle déterministe pour chacun des produits étudiés. Ces modèles sont basés sur les tables d'expérience réalisés et permettent d'avoir une vision moyenne des comptes techniques projetés.

La seconde étape a été la construction des modèles stochastiques. Le terme « stochastique » fait appel à des simulations de variables aléatoires suivant des lois de probabilité. Ces simulations ont été élaborées à partir d'algorithmes choisis en fonction de leur efficacité. Différentes garanties, c'est-à-dire différents risques ont été modélisés de manière stochastique. Le premier risque est la mortalité, qui a été modélisé suivant le modèle de Lee et Carter et sa version probabiliste utilisant la loi de Poisson. Pour les autres risques, les modèles linéaires généralisés ont permis de déterminer les lois sur lesquelles des aléas ont été introduits. Et finalement dans une certaine mesure, les taux de rendement ont été modélisés de manière stochastique. Ces modèles stochastiques ont permis d'obtenir la distribution des résultats concernant les produits étudiés.

L'ensemble des modèles ont été implémentés sous Microsoft Excel avec l'utilisation des macros en Visual Basic. Ces modèles sont donc simples d'utilisation et par l'agrégation des données faite en amont, les capacités du logiciel sont donc largement suffisantes.

Avant de clore ce mémoire dont la finalité est la construction d'un modèle interne répondant aux exigences des normes Solvabilité 2, intéressons nous aux marges de solvabilité déterminées à partir des différents outils à dispositions ; à savoir :

- la MSR issue de Solvabilité 1
- Le SCR issu du QIS3
- Le modèle interne

Nous comparons ces différentes marges pour le produit Assur-Obsèques. Rappelons que marge de solvabilité réglementaire pour les produits de la branche vie sont calculés en fonction des capitaux sous risques et des provisions mathématiques (cf. partie 2.2.5.). Le SCR fourni par le QIS3 est fonction des risques cités auparavant et fait appel à différents chocs :

- Le risque de mortalité est caractérisé par une augmentation de 10% des taux de mortalité pour chaque âge
- Le risque de longévité est caractérisé par une diminution de 25% des taux de mortalité pour chaque âge

Conclusion

- Le risque de rachat est caractérisé par une augmentation de 50% des taux de rachat
- Le risque de dépenses est caractérisé par une augmentation de 10% des frais

A partir du modèle stochastique, nous déterminons la répartition stochastique de la MSR et nous comparons le quantile à 99,5% de la MSR et la MSR moyenne aux marges citées précédemment. Nous obtenons les résultats suivants :

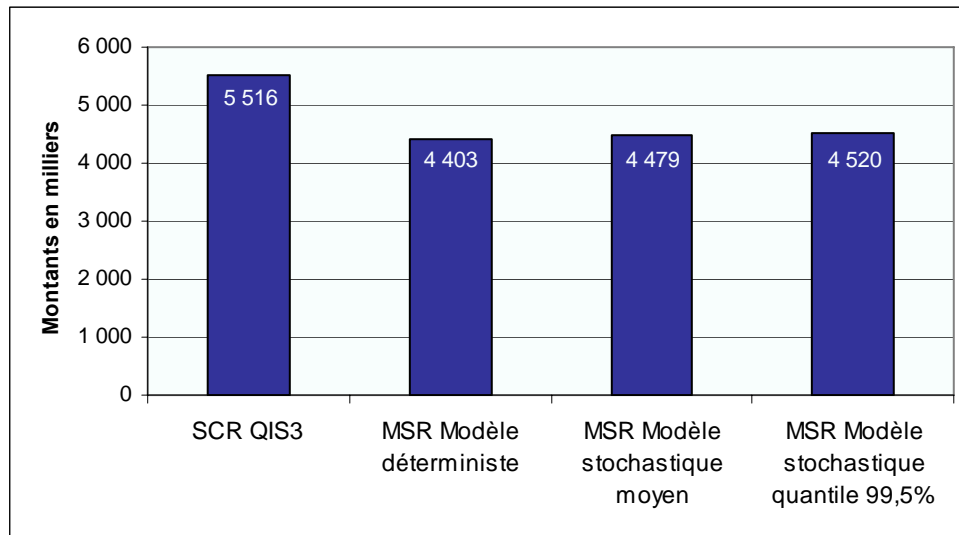


FIG. 77 – COMPARAISON DES MARGES DE SOLVALIBITE POUR ASSUR-OBSEQUES

Nous remarquons immédiatement que le SCR fournit par QIS3 est la marge la plus grande (+25% par rapport à la MSR du modèle déterministe). Le QIS3 prenant en compte l'ensemble des risques du produit, la marge constituée est plus prudente.

Finalement, ce stage dont le sujet colle à l'actualité en matière de réglementation, constitue une bonne expérience professionnelle. J'ai pu acquérir et développer de nombreuses connaissances concernant par exemple les normes de solvabilité, la réglementation en matière de tables de mortalité et de calcul des provisions, la détermination de la participation aux bénéficiaires ou encore concernant les méthodes de simulations de variables aléatoires. Ce sujet m'a permis d'appliquer de nombreuses connaissances acquises durant les trois années d'études en actuariat, et m'a permis de me familiariser d'avantage avec les logiciels statistiques et de programmation, qui occupent une part importante du travail d'un actuinaire. Ce travail a été très riche car fait appel à de nombreux domaines comme l'analyse numérique, l'assurance vie, les statistiques, la comptabilité des assurances ou encore l'informatique.

Annexes

ANNEXE 1 : NOTATIONS UTILISEES	PAGE 130
ANNEXE 2 : ARRETE DU 20 DECEMBRE 2005	PAGE 133
ANNEXE 3 : TABLES REGLEMENTAIRES	PAGE 135
ANNEXE 4 : TABLES DE MORTALITE D'EXPERIENCE	PAGE 136
ANNEXE 5 : COMPTES TECHNIQUES VIE ET NON VIE	PAGE 137
ANNEXE 6 : PARAMETRES DU MODELE DE LEE ET CARTER	PAGE 139
ANNEXE 7 : PARAMETRES DU MODELE LOG-POISSON	PAGE 141

Annexe 1 : Notations utilisées

- **Notations générales**

q_x = probabilité de décès dans l'année d'une personne d'âge x

s_a = probabilité de sortie dans l'année d'une personne d'ancienneté a

s_x = probabilité de sortie dans l'année d'une personne d'âge x

$p_x = 1 - q_x$ = probabilité de survivre au moins un an pour une personne d'âge x

${}_t q_x$ = probabilité de décéder avant t années pour une personne d'âge x

${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = \prod_{i=0}^{t-1} p_{x+i}$ = probabilité de survivre plus de t années pour une personne d'âge x

i_x = probabilité de passage en incapacité de travail pour une personne d'âge x

$v = \frac{1}{1+i}$ = taux d'actualisation avec i le taux d'intérêt technique

$\mu_{x+t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t+h | T_x > t)}{h}$ = taux de décès instantané

- **Les formules de commutations**

$D_x = l_x (1+i)^{-x} = v^x l_x$ = nombre de vivants à l'âge x actualisé au taux i

$N_x = \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k}$ = nombre de vivants à partir de l'âge x actualisé au taux i

$C_x = v^{x+\frac{1}{2}} d_x$ = nombre de décédés (en milieu d'année) à l'âge x actualisé au taux i

$M_x = \sum_{k=0}^{w-x} C_{x+k}$ = nombre de décédés (en milieu d'année) à partir de l'âge x actualisé au taux i

- **Notations utilisées pour la construction des tables d'expérience**

D_x = variable aléatoire qui indique le nombre de décès entre les âges x et $x+1$

I_x = variable aléatoire qui indique le nombre d'arrêts en incapacité de travail entre les âges x et $x+1$

S_x = variable aléatoire qui indique le nombre de sorties entre les âges x et $x+1$

N_x = variable aléatoire qui indique l'effectif entre les âges x et $x+1$

N_x^{gar} = variable aléatoire qui indique l'effectif entre les âges x et $x+1$ parmi ceux qui on souscrit la garantie décès / incapacité

\hat{Q}_x = estimateur brut du taux initial de décès, variable aléatoire de réalisation :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{N_x^{DC}}$$

\hat{I}_x = estimateur brut du taux de passage initial en incapacité de travail, variable aléatoire de réalisation :

$$\hat{i}_x = \frac{I_x}{N_x^{IT}}$$

\hat{S}_x = estimateur brut du taux initial de sortie, variable aléatoire de réalisation :

$$\hat{S}_x = \frac{S_x}{N_x}$$

▪ **Notations utilisées dans le prévisionnel**

${}^{IT}l_x^m$ = nombre d'individus entrés à l'âge x en incapacité de travail et toujours en incapacité de travail après m mois (maintien en incapacité)

${}^{IP}l_x^m$ = nombre d'individus entrés à l'âge x en invalidité et toujours en invalidité après n années (maintien en invalidité)

${}^{pass}l_x^m$ = nombre d'individus entrés à l'âge x en incapacité de travail et qui passent en invalidité après m mois passés en incapacité

${}^{mal:IT}i_x$ = probabilité de passage en incapacité de travail franchise de 3 mois (=90 jours) pour une personne d'âge x pour la cause maladie

${}^{acc:IT}i_x$ = probabilité de passage en incapacité de travail sans franchise pour une personne d'âge x pour la cause accident

${}^{cause:IP}i_x$ = probabilité de passage en invalidité pour une personne d'âge x pour la cause maladie ou accident

N = année de départ du prévisionnel

j = indice du j^{ème} contrat (au total J contrats)

x_j = âge de l'assuré j au 31/12/N par différence de millésime en N

y_j = âge de l'assuré j au moment du sinistre par différence de millésime en N

b_j = âge moyen du (des) bénéficiaire(s) en rente éducation en N

a_j = ancienneté du contrat de l'assuré j par différence de millésime

clt_j = classe tarifaire de l'individu j

▪ **Utilisation des tables du BCAC et des tables d'expérience**

Les tables de maintien en incapacité, de maintien en invalidité et de passage en invalidité sont celles du BCAC, qui englobent les deux causes, maladie et accident.

Des tables de mortalité d'expérience, de taux de passage en incapacité franchise 90 jours maladie et franchise 0 jour accident, et de taux de sorties ont été élaborées. L'utilisation de tables d'expérience propres à ces produits constitue un plus à cette démarche de valorisation de portefeuille d'assurance de personnes.

Nous notons par l'indice * l'utilisation de probabilité d'expérience qui peuvent être différentes de celles ayant servies à établir le tarif.

Dans le prévisionnel Assur Obsèques, nous utilisons les probabilités de sortie en fonction de l'âge x. Par conséquent, la probabilité de présence dans t années d'une personne d'âge x, s'écrit :

$${}_t\lambda_x^* = {}_tP_x^* \left(\prod_{i=0}^{t-1} (1 - s_{x+i}^*) \right) = {}_{t-1}\lambda_x^* \times P_{x+t-1}^* (1 - s_{x+t-1}^*)$$

Dans le prévisionnel XL Prévoyance, nous utilisons les probabilités de sortie en fonction de l'ancienneté a . Par conséquent, la probabilité de présence dans t années d'une personne d'âge x , s'écrit :

$${}_t\lambda_{x,a}^* = {}_tP_x^* \left(\prod_{i=0}^{t-1} (1 - s_{a+i}^*) \right) = {}_{t-1}\lambda_{x,a}^* \times P_{x+t-1}^* (1 - s_{a+t-1}^*)$$

Ces probabilités sont utilisées pour le calcul de toutes les valeurs probables du prévisionnel.

Annexe 2 : Arrêté du 20 décembre 2005

Arrêté du 20 décembre 2005 relatif aux tables de mortalité

Le ministre de l'économie, des finances et de l'industrie,
Vu le code des assurances, notamment ses articles A. 331-1-2, A. 335-1 et A. 331-10 ;
Vu l'arrêté du 27 avril 1993 relatif aux tables de mortalité ;
Vu l'avis du comité consultatif de la législation et de la réglementation financière en date du 18 novembre 2005,

Arrête :

Art. 1er. – Au sixième alinéa de l'article A. 331-10 du code des assurances, après les mots : « loi de survie en invalidité établie », sont insérés les mots : « par l'entreprise d'assurance ».

Art. 2. – L'article A. 335-1 du code des assurances est ainsi modifié :

I. – Le quatrième alinéa est ainsi rédigé :

« a) Tables homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances, établies par sexe, sur la base de populations d'assurés pour les contrats de rente viagère, et sur la base de données publiées par l'Institut national de la statistique et des études économiques pour les autres contrats ; ».

II. – Au cinquième alinéa, le signe « – » est remplacé par le mot : « b) », après les mots : « tables établies », sont insérés les mots : « ou non par sexe », et les mots : « la commission de contrôle des assurances » sont remplacés par les mots : « l'autorité mentionnée à l'article L. 310-12 ».

III. – Au sixième alinéa, les mots : « visées au deuxième tiret du 2o » sont remplacés par les mots : « mentionnées au b », et les mots : « des tables visées au premier tiret du 2o » sont remplacés par les mots : « des tables appropriées mentionnées au a ».

IV. – Au septième alinéa, le mot : « appliquer » est remplacé par les mots : « être établi d'après » et les mots : « visées au premier tiret du 2o » sont remplacés par les mots : « mentionnées au a ».

V. – Sont insérés après le cinquième alinéa trois alinéas ainsi rédigés : « Les tables mentionnées au b sont établies d'après des données d'expérience de l'entreprise d'assurance, ou des données d'expérience démographiquement équivalentes.

« Lorsque les tarifs sont établis d'après des tables mentionnées au a, et dès lors qu'est retenue une table unique pour tous les assurés, celle-ci correspond à la table appropriée conduisant au tarif le plus prudent.

« Pour les contrats en cas de vie autres que les contrats de rente viagère, les tables mentionnées au a sont utilisées en corrigeant l'âge de l'assuré conformément aux décalages d'âge ci-annexés. »

VI. – Il est inséré avant le dernier alinéa un alinéa ainsi rédigé : « Pour les contrats de rentes viagères immédiates et les contrats prévoyant, au choix de l'assuré, une liquidation en rente ou le versement d'un capital, et lorsque les tarifs pratiqués pour le calcul de la rente viagère sont établis d'après des tables mentionnées au a, les tables utilisées pour ce calcul sont celles appropriées intégrant les effets d'anti-sélection. Ces dispositions n'interdisent pas de prévoir l'utilisation des tables appropriées en vigueur à l'époque du versement de la prime ou de la conversion en rente. »

Art. 3. – L'article A. 331-1-2 du code des assurances est complété par un alinéa ainsi rédigé : « Les dispositions des alinéas précédents ne font pas obstacle au pouvoir de l'autorité mentionnée à l'article L. 310-12 d'exiger conformément à l'article R. 331-1 qu'une entreprise d'assurance majore les provisions mathématiques mentionnées au premier alinéa, après examen des données d'expérience relatives à la population d'assurés. »

Art. 4. – Aux I et II de l'annexe à l'article A. 344-8 du code des assurances, il est inséré un I ainsi rédigé : « i) La liste des tables mentionnées au b de l'article A. 335-1 et établies durant l'année. »

Art. 5. – Les tables prévues au a de l'article A. 335-1 du code des assurances sont pour les contrats autres que de rente viagère :

- la table TH00-02 ci-annexée concernant les assurés de sexe masculin ;
- la table TF00-02 ci-annexée concernant les assurés de sexe féminin.

Ces tables ainsi que les décalages d'âge mentionnés au huitième alinéa de l'article A. 335-1 du code des assurances, annexés au présent arrêté, sont homologués.

Art. 6. – A l'article A. 335-1 du code des assurances, il est créé une annexe contenant les tables TF00-02 et TH00-02 et les décalages d'âge ci-annexés ainsi que les tables TV88-90 et TD88-90 annexées à l'arrêté du 27 avril 1993 susvisé.

Art. 7. – Les dispositions du présent arrêté entrent en vigueur le 1er janvier 2006, à l'exception du dernier alinéa du paragraphe V et du paragraphe VI de l'article 2, qui entrent en vigueur le 1er juillet 2006.

Art. 8. – Le directeur général du Trésor et de la politique économique est chargé de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait à Paris, le 20 décembre 2005.

THIERRY BRETON

Annexe 3 : Tables réglementaires

Les taux de mortalité des tables réglementaires TD88-90 et TH00-02 :

AGE	TD 88-90	TH 00-02	AGE	TD 88-90	TH 00-02
0	0,00871000	0,00489000	56	0,01142148	0,00874855
1	0,00072633	0,00038187	57	0,01225720	0,00932491
2	0,00047447	0,00027143	58	0,01339492	0,00995088
3	0,00033330	0,00022123	59	0,01443135	0,01066389
4	0,00029300	0,00018104	60	0,01565629	0,01145690
5	0,00027287	0,00016096	61	0,01686062	0,01234656
6	0,00024262	0,00014086	62	0,01812147	0,01335105
7	0,00021234	0,00013082	63	0,01943270	0,01447833
8	0,00021239	0,00013083	64	0,02064355	0,01576238
9	0,00020232	0,00012079	65	0,02201552	0,01719090
10	0,00021248	0,00013087	66	0,02338693	0,01876464
11	0,00021252	0,00013088	67	0,02532018	0,02045979
12	0,00022269	0,00016111	68	0,02737245	0,02231759
13	0,00026324	0,00020142	69	0,02965043	0,02434432
14	0,00033419	0,00026190	70	0,03207970	0,02657632
15	0,00045587	0,00037280	71	0,03553499	0,02902789
16	0,00061824	0,00050397	72	0,03873705	0,03167328
17	0,00087216	0,00066557	73	0,04235202	0,03454501
18	0,00115713	0,00082747	74	0,04605077	0,03768248
19	0,00131090	0,00094935	75	0,05076369	0,04116658
20	0,00142454	0,00102102	76	0,05549466	0,04506284
21	0,00152848	0,00105242	77	0,06149095	0,04938294
22	0,00160225	0,00105353	78	0,06803728	0,05425586
23	0,00156394	0,00104450	79	0,07492358	0,05992740
24	0,00156639	0,00104559	80	0,08240055	0,06659633
25	0,00154834	0,00104668	81	0,09228450	0,07433196
26	0,00155074	0,00106813	82	0,10142075	0,08303619
27	0,00156343	0,00108964	83	0,11149897	0,09252650
28	0,00158648	0,00111121	84	0,12256375	0,10263560
29	0,00161996	0,00114307	85	0,13410887	0,11352412
30	0,00167426	0,00116481	86	0,14610900	0,12533205
31	0,00173918	0,00119686	87	0,16089770	0,13801831
32	0,00180444	0,00124950	88	0,17745702	0,15155371
33	0,00191159	0,00132285	89	0,19234409	0,16576306
34	0,00200893	0,00142728	90	0,20779636	0,18058628
35	0,00210684	0,00153215	91	0,22519494	0,19625380
36	0,00222626	0,00165808	92	0,24518480	0,21289104
37	0,00236741	0,00179494	93	0,26183908	0,23059483
38	0,00252003	0,00195319	94	0,27904080	0,24926330
39	0,00264219	0,00214339	95	0,29373650	0,26899100
40	0,00284972	0,00236591	96	0,31804281	0,28963992
41	0,00311190	0,00264195	97	0,33632287	0,31124944
42	0,00333397	0,00293053	98	0,38783784	0,33376372
43	0,00376060	0,00325293	99	0,41942605	0,35755814
44	0,00408491	0,00359935	100	0,44866920	0,38159879
45	0,00435936	0,00397043	101	0,47586207	0,40487805
46	0,00465884	0,00434576	102	0,51315789	0,43032787
47	0,00500569	0,00471518	103	0,54054054	0,46043165
48	0,00545556	0,00507896	104	0,58823529	0,48000000
49	0,00606578	0,00544807	105	0,71428571	0,51282051
50	0,00668664	0,00582298	106	1,00000000	0,52631579
51	0,00731943	0,00623671	107	1,00000000	0,55555556
52	0,00804370	0,00667969	108	1,00000000	0,50000000
53	0,00878467	0,00715314	109	1,00000000	0,50000000
54	0,00961243	0,00766949	110	1,00000000	1,00000000
55	0,01060059	0,00820833			

Annexe 4 : Tables de mortalité d'expérience**Produit Assur Obsèques**

Age x	Taux bruts	Rapport à la TD 88-90	Rapport à la TH 00-02
45	0,00754	173,0%	189,9%
46	0,00868	186,3%	199,7%
47	0,00445	88,9%	94,4%
48	0,00963	176,5%	189,6%
49	0,01034	170,5%	189,8%
50	0,00608	90,9%	104,4%
51	0,00812	110,9%	130,2%
52	0,00816	101,4%	122,2%
53	0,00863	98,2%	120,6%
54	0,01159	120,6%	151,1%
55	0,01302	122,8%	158,6%
56	0,01458	127,7%	166,7%
57	0,01179	96,2%	126,4%
58	0,01114	83,2%	111,9%
59	0,01194	82,7%	112,0%
60	0,01236	78,9%	107,9%
61	0,01376	81,6%	111,4%
62	0,01204	66,4%	90,2%
63	0,01495	76,9%	103,3%
64	0,01592	77,1%	101,0%
65	0,01308	59,4%	76,1%
66	0,01724	73,7%	91,9%
67	0,01981	78,2%	96,8%
68	0,01618	59,1%	72,5%
69	0,01997	67,4%	82,0%
70	0,01728	53,9%	65,0%
71	0,01976	55,6%	68,1%
72	0,02917	75,3%	92,1%
73	0,02474	58,4%	71,6%
74	0,02491	54,1%	66,1%
75	0,02745	54,1%	66,7%
76	0,03364	60,6%	74,7%
77	0,03156	51,3%	63,9%
78	0,03769	55,4%	69,5%
79	0,04246	56,7%	70,9%
80	0,04915	59,6%	73,8%
81	0,05058	54,8%	68,0%
82	0,05638	55,6%	67,9%
83	0,06528	58,5%	70,6%
84	0,0706	57,6%	68,8%
85	0,07698	57,4%	67,8%
86	0,09044	61,9%	72,2%
87	0,0961	59,7%	69,6%
88	0,10494	59,1%	69,2%
89	0,12513	65,1%	75,5%
90	0,14312	68,9%	79,3%
91	0,14942	66,4%	76,1%
92	0,16539	67,5%	77,7%
93	0,1566	59,8%	67,9%
94	0,17978	64,4%	72,1%
95	0,1791	61,0%	66,6%

Produit XL Prévoyance

Age x	Taux bruts	Rapport à la TD 88-90	Rapport à la TH 00-02
30	0,000265	15,8%	22,8%
31	0,000584	33,6%	48,8%
32	0,000699	38,7%	55,9%
33	0,000071	3,7%	5,4%
34	0,000468	23,3%	32,8%
35	0,000390	18,5%	25,5%
36	0,000523	23,5%	31,5%
37	0,000464	19,6%	25,9%
38	0,000725	28,8%	37,1%
39	0,000658	24,9%	30,7%
40	0,000638	22,4%	27,0%
41	0,000877	28,2%	33,2%
42	0,000878	26,3%	30,0%
43	0,000648	17,2%	19,9%
44	0,000542	13,3%	15,1%
45	0,000481	11,0%	12,1%
46	0,001076	23,1%	24,8%
47	0,002136	42,7%	45,3%
48	0,001442	26,4%	28,4%
49	0,001714	28,3%	31,5%
50	0,001986	29,7%	34,1%
51	0,002258	30,8%	36,2%
52	0,002530	31,5%	37,9%
53	0,002802	31,9%	39,2%
54	0,003074	32,0%	40,1%
55	0,003346	31,6%	40,8%
56	0,003618	31,7%	41,4%
57	0,003890	31,7%	41,7%
58	0,004162	31,1%	41,8%
59	0,004434	30,7%	41,6%
60	0,004706	30,1%	41,1%
61	0,004978	29,5%	40,3%
62	0,005250	29,0%	39,3%
63	0,005522	28,4%	38,1%
64	0,005794	28,1%	36,8%
65	0,006066	27,6%	35,3%
66	0,006338	27,1%	33,8%
67	0,006610	26,1%	32,3%
68	0,006882	25,1%	30,8%
69	0,007154	24,1%	29,4%
70	0,007426	23,1%	27,9%

Annexe 5 : Comptes techniques vie et non vie

COMPTE TECHNIQUE VIE						
			Opérations brutes	Cessions et rétrocessions	Opérations nettes (n)	Opérations nettes (n-1)
1	Primes.....	+				
2	Produit des placements :					
2a	Revenus des placements.....	+				
2b	Autres produits des placements.....	+				
2c	Profits provenant de la réalisation de placements.....	+				
3	Ajustements ACAV (plus-values).....	+				
4	Autres produits techniques.....	+				
5	Charges des sinistres:					
5a	Prestations et frais payés.....	-				
5b	Charges des provisions pour sinistres.....	+/-				
6	Charges des provisions d'assurance vie et autres provisions techniques :					
6a	Provisions d'assurance vie.....	+/-				
6b	Provisions sur contrats en unités de compte... ..	+/-				
6c	Autres provisions techniques.....	+/-				
7	Participation aux résultats.....	-				
8	Frais d'acquisition et d'administration :					
8a	Frais d'acquisition.....	-				
8b	Frais d'administration.....	-				
8c	Commissions reçues des réassureurs.....	+				
9	Charges des placements :					
9a	Frais internes et externes de gestion des placements et intérêts.....	-				
9b	Autres charges des placements.....	-				
9c	Pertes provenant de la réalisation de placements.....	-				
10	Ajustement ACAV (moins-values).....	-				
11	Autres charges techniques.....	-				
12	Produits des placements transférés.....	-				
Résultat technique de l'assurance vie						

COMPTE TECHNIQUE NON VIE						
			Opérations brutes	Cessions et rétrocessions	Opérations nettes (n)	Opérations nettes (n-1)
1	Primes acquises:					
1a	Primes.		+			
1b	Variation des primes non acquises.		+/-			
2	Produit des placements alloués.		+			
3	Autres produits techniques.		+			
4	Charges des sinistres:					
4a	Prestations et frais payés.		-			
4b	Charges des provisions pour sinistres.		+/-			
5	Charges des autres provisions techniques.		+/-			
6	Participation aux résultats.		-			
7	Frais d'acquisition et d'administration:					
7a	Frais d'acquisition.		-			
7b	Frais d'administration.		-			
7c	Commissions reçues des réassureurs.		+			
8	Autres charges techniques.		-			
9	Variation de la provision pour égalisation.		+/-			
	Résultat technique de l'assurance non vie					

Annexe 6 : Paramètres du modèle de Lee-Carter

Les paramètres du modèle de Lee-Carter pour la modélisation Assur-Obsèques sont les suivants :

Age	Alpha x	Bêta x	Age	Alpha x	Bêta x	Année	Kt
0	-4,62674478	0,02074312	53	-4,45147022	0,00667999	1992	16,8082886
1	-7,14441517	0,01730711	54	-4,39885569	0,00847490	1993	16,2388162
2	-7,54271673	0,01751329	55	-4,34780781	0,00939180	1994	13,2449009
3	-7,93984371	0,01391574	56	-4,30855142	0,00936161	1995	11,4361204
4	-7,98978615	0,02011161	57	-4,26585573	0,01067234	1996	7,9966892
5	-8,01238826	0,02447420	58	-4,25204521	0,00884518	1997	3,4465198
6	-8,20875906	0,02064926	59	-4,22124319	0,00877026	1998	1,2453570
7	-8,36345317	0,01909325	60	-4,18434356	0,00954005	1999	-1,1087846
8	-8,37374132	0,02212959	61	-4,15905807	0,00881603	2000	-3,2397029
9	-8,46754787	0,00954922	62	-4,13184640	0,00801160	2001	-5,6104885
10	-8,36804770	0,01551140	63	-4,09815104	0,00772335	2002	-7,6646645
11	-8,39230015	0,02189081	64	-4,05955278	0,00777317	2003	-9,7834981
12	-8,45178027	0,00985246	65	-4,02284162	0,00722758	2004	-12,2078087
13	-8,30863520	0,00798538	66	-3,97899430	0,00727051	2005	-14,3047035
14	-8,05877092	0,00845680	67	-3,94273740	0,00581102	2006	-16,4970413
15	-7,73382620	0,00930306	68	-3,87767387	0,00714134		
16	-7,44918285	0,00945178	69	-3,82902907	0,00604242		
17	-7,08109451	0,01080208	70	-3,76395480	0,00652713		
18	-6,77792417	0,01218674	71	-3,69514152	0,00673888		
19	-6,67951772	0,00958251	72	-3,62120581	0,00713980		
20	-6,56606067	0,01350115	73	-3,54430250	0,00728481		
21	-6,52158425	0,01180004	74	-3,45753752	0,00823822		
22	-6,43796558	0,01483152	75	-3,37194850	0,00822617		
23	-6,49265067	0,01181577	76	-3,28413544	0,00826991		
24	-6,47850412	0,01272133	77	-3,19119371	0,00822586		
25	-6,46062003	0,01584069	78	-3,09691854	0,00808221		
26	-6,47694070	0,01435099	79	-3,00301688	0,00755028		
27	-6,46171823	0,01549865	80	-2,89142045	0,00861522		
28	-6,39897811	0,02025820	81	-2,79702297	0,00759736		
29	-6,40981293	0,01776826	82	-2,67794200	0,00893055		
30	-6,38142411	0,01645583	83	-2,57979227	0,00778853		
31	-6,33729989	0,01719152	84	-2,47058636	0,00775839		
32	-6,32003428	0,01514109	85	-2,36898317	0,00664384		
33	-6,22622708	0,01917528	86	-2,25972407	0,00661749		
34	-6,21292254	0,01457162	87	-2,15991666	0,00559513		
35	-6,16963060	0,01541037	88	-2,05962221	0,00483745		
36	-6,12994240	0,01366658	89	-1,96872221	0,00363386		
37	-6,07197241	0,01270046	90	-1,87019722	0,00361182		
38	-6,02130598	0,01150959	91	-1,78165300	0,00315271		
39	-5,98778446	0,00992448	92	-1,69497840	0,00353742		
40	-5,89529844	0,01180464	93	-1,63000424	0,00365476		
41	-5,82598100	0,00937744	94	-1,58855717	0,00242583		
42	-5,76376507	0,00885721	95	-1,58263380	-0,00124453		
43	-5,64378861	0,00877243	96	-1,22129278	-0,00140471		
44	-5,56076559	0,00877947	97	-1,15588808	-0,00066804		
45	-4,82619491	0,00773006	98	-0,98086035	-0,00054770		
46	-4,77105685	0,00764340	99	-0,88865585	-0,00081590		
47	-4,71074738	0,00863559	100	-0,80064740	0,00029884		
48	-4,65800599	0,00908044	101	-0,72949230	-0,00041364		
49	-4,61357771	0,00815490	102	-0,62634101	0,00037840		
50	-4,56580322	0,00825557	103	-0,59419670	-0,00371405		
51	-4,52712993	0,00756301	104	-0,43662480	0,00268923		
52	-4,48256506	0,00790827					

Les paramètres du modèle de Lee-Carter pour la modélisation XL Prévoyance sont les suivants :

Age	Alpha x	Bêta x	Age	Alpha x	Bêta x	Année	Kt
0	-4,91568685	0,02074304	53	-5,83006759	0,00667979	1992	16,7999775
1	-7,43219770	0,01730752	54	-5,70298107	0,00847471	1993	16,2400780
2	-7,83046630	0,01751318	55	-5,57340862	0,00939177	1994	13,2464582
3	-8,22757091	0,01391586	56	-5,45091793	0,00936165	1995	11,4377691
4	-8,27751164	0,02011179	57	-5,32015270	0,01067234	1996	7,9980238
5	-8,30011328	0,02447441	58	-5,21444281	0,00884505	1997	3,4470264
6	-8,49647608	0,02064967	59	-5,08817722	0,00877020	1998	1,2457524
7	-8,65116503	0,01909362	60	-4,95329675	0,00954000	1999	-1,1083170
8	-8,66145320	0,02213029	61	-4,82891656	0,00881588	2000	-3,2394375
9	-8,75525643	0,00954913	62	-4,70243742	0,00801149	2001	-5,6101474
10	-8,65575927	0,01551229	63	-4,57034037	0,00772327	2002	-7,6644867
11	-8,68001141	0,02189113	64	-4,43730325	0,00777306	2003	-9,7833218
12	-8,73948924	0,00985321	65	-4,31299219	0,00722749	2004	-12,2076287
13	-8,59634822	0,00798527	66	-4,18995638	0,00727044	2005	-14,3047267
14	-8,34649272	0,00845689	67	-4,08741222	0,00581088	2006	-16,4970196
15	-8,02156336	0,00930370	68	-3,97259298	0,00714120		
16	-7,73693811	0,00945205	69	-3,89465551	0,00604244		
17	-7,36888250	0,01080187	70	-3,82641581	0,00652695		
18	-7,06574991	0,01218644	71	-3,70501848	0,00673882		
19	-6,96735780	0,00958241	72	-3,61146767	0,00713962		
20	-6,85392069	0,01350137	73	-3,51672580	0,00728470		
21	-6,80945192	0,01180009	74	-3,42196317	0,00823809		
22	-6,72585039	0,01483162	75	-3,31955044	0,00822611		
23	-6,78052376	0,01181546	76	-3,22757403	0,00826980		
24	-6,76638017	0,01272133	77	-3,12144751	0,00822593		
25	-6,74850075	0,01584060	78	-3,01977855	0,00808223		
26	-6,76481757	0,01435103	79	-2,92712614	0,00755021		
27	-6,74959855	0,01549878	80	-2,82208427	0,00861518		
28	-6,68687377	0,02025839	81	-2,71858181	0,00759730		
29	-6,69770495	0,01776881	82	-2,61251273	0,00893045		
30	-7,44208686	0,01645612	83	-2,52931404	0,00778841		
31	-7,51449419	0,01719175	84	-2,43654450	0,00775821		
32	-7,57452330	0,01514137	85	-2,35658953	0,00664380		
33	-7,54579987	0,01917576	86	-2,27303837	0,00661739		
34	-7,56520388	0,01457198	87	-2,18594346	0,00559496		
35	-7,52948455	0,01541052	88	-2,09355813	0,00483726		
36	-7,48664575	0,01366690	89	-2,02454276	0,00363353		
37	-7,41873298	0,01270078	90	-1,94535852	0,00361151		
38	-7,34881984	0,01150993	91	-1,86476557	0,00315242		
39	-7,27159621	0,00992445	92	-1,77073901	0,00353713		
40	-7,15887737	0,01180489	93	-1,70695084	0,00365431		
41	-7,07740346	0,00937770	94	-1,65392252	0,00242543		
42	-6,98161802	0,00885745	95	-1,63213837	-0,00124495		
43	-6,87773175	0,00877254	96	-1,54838487	-0,00140516		
44	-6,77159428	0,00877945	97	-1,48582681	-0,00066842		
45	-6,67555512	0,00773003	98	-1,31953892	-0,00054792		
46	-6,57078495	0,00764341	99	-1,23272029	-0,00081655		
47	-6,45819326	0,00863560	100	-1,15037701	0,00029825		
48	-6,35090598	0,00908054	101	-1,08429491	-0,00041402		
49	-6,25097483	0,00815503	102	-0,98928703	0,00037839		
50	-6,14386236	0,00825565	103	-0,96001327	-0,00371439		
51	-6,04205170	0,00756317	104	-0,81786193	0,00268881		
52	-5,93143975	0,00790832					

Annexe 7 : Paramètres du modèle log-Poisson

Les paramètres du modèle log-Poisson pour la modélisation Assur-Obsèques sont les suivants :

Age	Alpha x	Bêta x	Age	Alpha x	Bêta x	Année	Kt
0	-4,63118152	0,02117333	53	-4,45704553	0,00672848	1992	16,4962148
1	-7,14454982	0,01730391	54	-4,40490694	0,00846311	1993	15,8488952
2	-7,54253761	0,01760833	55	-4,35423887	0,00934368	1994	11,6302270
3	-7,93840544	0,01396759	56	-4,31523481	0,00929198	1995	10,3992508
4	-7,98942739	0,02026757	57	-4,27289771	0,01058947	1996	8,6623464
5	-8,01233034	0,02482848	58	-4,25915388	0,00880677	1997	5,0633233
6	-8,20729179	0,02055036	59	-4,22858735	0,00872156	1998	2,5622175
7	-8,36311643	0,01900755	60	-4,19197363	0,00945982	1999	0,0558351
8	-8,37203300	0,02279834	61	-4,16688061	0,00874512	2000	-2,4871494
9	-8,46500059	0,00979172	62	-4,13989553	0,00793589	2001	-5,0108209
10	-8,36610761	0,01555809	63	-4,10647053	0,00763375	2002	-7,5395082
11	-8,39132408	0,02227921	64	-4,06819841	0,00768378	2003	-10,0864394
12	-8,44979963	0,00975701	65	-4,03175710	0,00715930	2004	-12,6316538
13	-8,30743357	0,00799373	66	-3,98833690	0,00717139	2005	-15,1924054
14	-8,05841676	0,00841870	67	-3,95238074	0,00579144	2006	-17,7703330
15	-7,73258404	0,00930621	68	-3,88800863	0,00707052		
16	-7,44883011	0,00953757	69	-3,83978930	0,00601997		
17	-7,08114523	0,01096697	70	-3,77547956	0,00651534		
18	-6,77831303	0,01228871	71	-3,70748721	0,00670895		
19	-6,67987320	0,00966237	72	-3,63449753	0,00710589		
20	-6,56644209	0,01355833	73	-3,55866180	0,00723699		
21	-6,52183405	0,01184393	74	-3,47327461	0,00814371		
22	-6,43850636	0,01492818	75	-3,38907386	0,00811144		
23	-6,49314060	0,01185188	76	-3,30282978	0,00815841		
24	-6,47898471	0,01269279	77	-3,21164467	0,00811895		
25	-6,46076757	0,01597579	78	-3,11940816	0,00793538		
26	-6,47750403	0,01440069	79	-3,02768664	0,00746892		
27	-6,46199144	0,01556390	80	-2,91911410	0,00842420		
28	-6,39841356	0,02066147	81	-2,82738189	0,00742890		
29	-6,40938756	0,01792666	82	-2,71224383	0,00861832		
30	-6,38153500	0,01650372	83	-2,61755382	0,00752332		
31	-6,33751862	0,01732053	84	-2,51268744	0,00743927		
32	-6,32030010	0,01514975	85	-2,41551013	0,00636884		
33	-6,22576693	0,01935844	86	-2,31158146	0,00626576		
34	-6,21334137	0,01451615	87	-2,21711803	0,00531086		
35	-6,17013265	0,01544581	88	-2,12276504	0,00459111		
36	-6,13068736	0,01365459	89	-2,03772515	0,00349201		
37	-6,07249092	0,01260060	90	-1,94630165	0,00341933		
38	-6,02228066	0,01142245	91	-1,86468330	0,00301281		
39	-5,98895642	0,00987973	92	-1,78547359	0,00328052		
40	-5,89646012	0,01171306	93	-1,72648513	0,00327165		
41	-5,82728797	0,00932171	94	-1,68902710	0,00218070		
42	-5,76505866	0,00884355	95	-1,68325804	-0,00072637		
43	-5,64538867	0,00874809	96	-1,36492607	-0,00081762		
44	-5,56255763	0,00871612	97	-1,30933401	-0,00037258		
45	-4,83000309	0,00771540	98	-1,16250438	-0,00023986		
46	-4,77515320	0,00760842	99	-1,08750919	-0,00041749		
47	-4,71520980	0,00857645	100	-1,01688197	0,00027910		
48	-4,66261731	0,00898334	101	-0,96132780	-0,00018225		
49	-4,61840719	0,00808868	102	-0,88203294	0,00033573		
50	-4,57063981	0,00815407	103	-0,85856583	-0,00235970		
51	-4,53233069	0,00753900	104	-0,74176837	0,00156980		
52	-4,48808796	0,00785462					

Les paramètres du modèle log-Poisson pour la modélisation XL Prévoyance sont les suivants :

Age	Alpha x	Bêta x
0	-4,91896719	0,02104655
1	-7,43242150	0,01725831
2	-7,83045510	0,01758165
3	-8,22626116	0,01396438
4	-8,27747559	0,02025742
5	-8,30006656	0,02465101
6	-8,49503778	0,02041078
7	-8,65086656	0,01888665
8	-8,65982726	0,02266046
9	-8,75289562	0,00990081
10	-8,65378127	0,01543326
11	-8,67907115	0,02212616
12	-8,73744113	0,00965042
13	-8,59509330	0,00792369
14	-8,34613109	0,00839397
15	-8,02033663	0,00929661
16	-7,73659193	0,00954088
17	-7,36891066	0,01095370
18	-7,06607843	0,01225560
19	-6,96764159	0,00967138
20	-6,85412412	0,01345785
21	-6,80950261	0,01175206
22	-6,72621643	0,01482989
23	-6,78083040	0,01177344
24	-6,76665379	0,01259132
25	-6,74838165	0,01581981
26	-6,76518039	0,01428962
27	-6,74961008	0,01541254
28	-6,68595491	0,02044440
29	-6,69695937	0,01773749
30	-7,44182485	0,01652301
31	-7,51438507	0,01738483
32	-7,57438260	0,01523263
33	-7,54495784	0,01942621
34	-7,56512265	0,01462053
35	-7,52946987	0,01554709
36	-7,48682079	0,01377829
37	-7,41854837	0,01269039
38	-7,34905833	0,01153951
39	-7,27202335	0,01003228
40	-7,15921226	0,01182484
41	-7,07780578	0,00947325
42	-6,98195520	0,00900446
43	-6,87822378	0,00891400
44	-6,77215414	0,00885764
45	-6,67610309	0,00788822
46	-6,57145855	0,00778489
47	-6,45906653	0,00874395
48	-6,35175658	0,00913575
49	-6,25192528	0,00826854
50	-6,14465472	0,00831314
51	-6,04314853	0,00773510
52	-5,93274048	0,00803335

Age	Alpha x	Bêta x
53	-5,83138724	0,00693131
54	-5,70468610	0,00863653
55	-5,57541071	0,00949992
56	-5,45313867	0,00942841
57	-5,32277327	0,01071713
58	-5,21726006	0,00892722
59	-5,09135995	0,00882436
60	-4,95693096	0,00953904
61	-4,83299436	0,00880925
62	-4,70703933	0,00797862
63	-4,57555870	0,00765087
64	-4,44325811	0,00768803
65	-4,31967259	0,00714938
66	-4,19752416	0,00713481
67	-4,09576358	0,00575821
68	-3,98199834	0,00701052
69	-3,90473485	0,00595524
70	-3,83726245	0,00646182
71	-3,71725402	0,00662101
72	-3,62490337	0,00700795
73	-3,53149696	0,00712411
74	-3,43827336	0,00801661
75	-3,33759563	0,00796958
76	-3,24735606	0,00801437
77	-3,14339143	0,00797825
78	-3,04407171	0,00777581
79	-2,95377353	0,00734570
80	-2,85176787	0,00827452
81	-2,75143496	0,00729658
82	-2,64912251	0,00845955
83	-2,56904299	0,00740113
84	-2,48011312	0,00732318
85	-2,40371381	0,00627499
86	-2,32422761	0,00618001
87	-2,24170113	0,00525198
88	-2,15462417	0,00454113
89	-2,08983352	0,00347651
90	-2,01600733	0,00339612
91	-1,94123995	0,00300285
92	-1,85470586	0,00326619
93	-1,79636644	0,00325686
94	-1,74810922	0,00217728
95	-1,72794985	-0,00069837
96	-1,65249874	-0,00074336
97	-1,59684844	-0,00028872
98	-1,45006298	-0,00018836
99	-1,37497431	-0,00033446
100	-1,30443924	0,00032870
101	-1,24875511	-0,00010818
102	-1,16950669	0,00039613
103	-1,14575262	-0,00224357
104	-1,02949923	0,00162322

Année	Kt
1992	16,6347327
1993	16,0586379
1994	10,8378351
1995	10,2705220
1996	8,9282064
1997	5,5756200
1998	2,9595232
1999	0,3348628
2000	-2,2998392
2001	-4,9325254
2002	-7,5672867
2003	-10,2101974
2004	-12,8661763
2005	-15,5235860
2006	-18,2003291

Bibliographie

▪ Mémoires

- Cohen, Rocard : *Comparaison des méthodes modèles linéaires généralisés et crédibilité pour la tarification automobile*, Mémoire ISFA (1996)
- Delwarde : *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*, Mémoire Université Catholique de Louvain (2004)
- Favre : *Business Plan – Projection des primes, sinistres et provisions*, Mémoire DUAS (2006)
- Fortini, Gosselin, Lenoir – *Création de tables de mortalité prospectives en France*, Mémoire ENSAE (2005)
- Henge : *Rapprochement des concepts de valeur intrinsèque et du capital économique en assurance vie*, Mémoire DUAS (2006)

▪ Cours de la formation d'actuaire de Strasbourg

- Eisele : Calcul stochastique (2006)
- Eisele : Analyse de survie (2007)
- Heinrich : Les exigences prudentielles en assurance – Solvabilité 1 et 2 (2007)
- Khalili : Probabilités (2005 et 2006)
- Nobelis : Statistiques (2006)
- Rubio : Assurance vie (2005 et 2006)
- Troesch : Analyse numérique (2006)

▪ Ouvrages

- Le Code des Assurances
- Corfias : *Assurance vie : technique et produits*, Editions l'argus de L'assurance, collection les fondamentaux de l'assurance, 2003
- Foata, Fuchs : *Calcul des probabilités*, 2^{ème} édition, Dunod, Collection Sciences Sup, 2003
- Planchet, Thérond : *Modèles de durée, applications actuarielles*, Economica, Collection Assurance Audit Actuariat, 2006
- Planchet, Winter : *Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective*, Economica, Collection Assurance Audit Actuariat, 2006

▪ Publications

- La tribune de l'assurance : Solvabilité 2 - *Le stochastique appliqué aux modèles internes*, n°105 octobre 2006, pages 31 à 33
- Brouhns, Denuit, Vermunt : *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables*, Insurance : Mathematics and Economics, 2002, pages 373 à 393
- Faucillon, Juillard, Luong Tien, Luu Anh, Planchet, Vo Tran : *Etude du risque systémique de mortalité*, Institut de Science Financière et d'Assurances, Avril 2006
- Henge, Desplanches, Hager, Robert : *Les tables de mortalité*, Les dossiers techniques d'information Optimind, 2007

- Planchet, Jacquemin : *Utilisation de méthodes de simulation en assurance – Partie 1 : Générer des nombres aléatoires*, Bulletin français d'actuariat, Volume 6, N°1, juin-décembre 2003, pages 3 à 35
- Planchet, Lelieur : *Utilisation des méthodes de Lee-Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons*, 2006

- **Sites internet**
 - www.ccamip.fr
 - www.ffsa.fr
 - www.indices.insee.fr
 - www.ined.fr
 - www.institutdesactuaires.com
 - www.legifrance.gouv.fr
 - www.swissre.com

- **Documents internes des Assurances du Crédit Mutuel**
 - Comptes techniques et bilans comptables des produits étudiés
 - Rapports annuels du Groupe
 - Notice du produit Assur-Obsèques
 - Notice du produit XL Prévoyance

Abréviations

- **ACAM** : Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles
- **ACM** : Assurances du Crédit Mutuel
- **ACC** : Accident
- **AGELIM** : Age limite
- **BCAC** : Bureau Commun des Assurances Collectives
- **CIR** : Cox, Ingersoll et Ross
- **CSR** : Capitaux sous risques
- **DA** : Doublement accident
- **DC** : Décès
- **EFF** : Effective
- **EV** : Embedded Value
- **IARD** : Incendie Accidents et Risques Divers
- **IC** : Intervalle de confiance
- **IJ** : Indemnité journalière
- **INT** : Intercept
- **IP** : Invalidité permanente
- **IT** : Incapacité temporaire totale de travail
- **MAL** : Maladie
- **MSR** : Marge de solvabilité réglementaire
- **NB** : Nombre
- **PASS** : Passage
- **PB** : Participation aux bénéfices
- **PENA** : Provision pour primes émises non acquises
- **PF** : Portefeuille
- **PM** : Provision mathématique
- **PMR** : Provision mathématique de rente
- **PRC** : Provision pour risques croissants
- **PSAP** : Provision pour sinistres à payer
- **PTIA** : Perte totale et irréversible de l'autonomie
- **RE** : Rente éducation
- **REASS** : Réassurance
- **SST** : Swiss Solvency Test
- **TH** : Théorique

Index des figures

Fig. 1 – La structure dubilan - pilier 1 de Solvabilité 2	15
Fig. 2 – Rapport des taux de mortalité TH 00-02 / TD 88-90	23
Fig. 3 – Test de sensibilité : Provisions mathématiques TH 00-02 / TD 88-90	23
Fig. 4 et 4 bis – Lissage des taux bruts de décès par les méthodes - Assur-Obsèques.....	32
Fig. 5 – Lissage des taux bruts de décès - XL Prévoyance.....	33
Fig. 6 – Lissage des taux bruts de passage en incapacité franchise 90 jours pour XL Prévoyance.....	34
Fig. 7 – Lissage des taux bruts de passage en incapacité sans franchise - XL Prévoyance.....	34
Fig. 8 – Lissage des taux bruts de sortie en fonction de l'âge de l'assuré - Assur-Obsèques	35
Fig. 9 – Lissage des taux bruts de sortie en fonction de l'âge de l'assuré - XL Prévoyance	36
Fig. 10 – Lissage des taux bruts de sortie en fonction de l'ancienneté - XL Prévoyance	36
Fig. 11 – Comparaison du tarif annuel pour 1 € garanti et de la mortalité d'expérience.....	39
Fig. 12 – Evolution du nombre de contrats et des affaires nouvelles – assur obsèques	43
Fig. 13 – Répartition de l'âge à la souscription Assur-Obsèques au 31/12/2006.....	43
Fig. 14 – Evolution probable des provisions et de la revalorisation - Assur-Obsèques	46
Fig. 15 – Décomposition de l'Embedded Value et de l'Appraisal Value	48
Fig. 16 – Embedded value en fonction de l'âge de l'assuré	48
Fig. 17 – Evolution probable de la PM – Stock.....	50
Fig. 18 – Evolution probable de la PM – Affaires nouvelles.....	51
Fig. 19 – Evolution probable des flux – Stock.....	51
Fig. 20 – Evolution probable des flux – Affaires nouvelles	52
Fig. 21 – Backtesting Assur-Obsèques	52
Fig. 22 – Indice INSEE des 295 postes de dépenses de l'ensemble des ménages, série France entière	56
Fig. 23 – Maintien en incapacite de travail en fonction de l'age à l'entree	62
Fig. 24 – Probabilités de passage en incapacite de travail et invalidite pour cause de maladie.....	64
Fig. 25 – Répartition de l'âge à la souscription au 31/12/2006 XL Prévoyance.....	67
Fig. 26 – Nombre de contrats au 31/12 et d'affaires nouvelles de chaque année Prévoyance	67
Fig. 27 – Evolution probable des provisions – Stock + Sinistres en cours.....	73
Fig. 28 – Evolution probable des provisions – Affaires nouvelles.....	74
Fig. 29 – Evolution probable des flux de décès – Stock.....	74
Fig. 30 – Evolution probable des flux d'incapacite et invalidite – Stock	75
Fig. 31 – Backtesting XL Prévoyance	75
Fig. 32 – Comparaison du nombre de contrats moyens - 200 simulations.....	79
Fig. 33 – Schéma de Bernoulli en donnees agregees.....	80
Fig. 34 – Schémas de Bernoulli en donnees non agregees	80
Fig. 35 – Epreuves de Bernoulli successives	81
Fig. 36 – Zone d'acceptation pour 1000 simulations de variables normales par rejet	84
Fig. 37 – Principe de simulation stochastique adopte pour assur-obsèques	86
Fig. 38 – Evolution des alpha suivant l'âge	90
Fig. 39 – Evolution des beta suivant l'âge	90
Fig. 40 – Extrapolation de la composante temporelle.....	91
Fig. 41 – Surface des taux de mortalité par années de 1992 à 2036	91
Fig. 42 – Analyse de l'erreur en fonction de l'age.....	93
Fig. 43 – Comparaison des estimations des paramètres alpha	96
Fig. 44 – Comparaison des estimations des paramètres beta.....	96
Fig. 45 – Comparaison des estimations de la composante temporelle.....	97
Fig. 46 – Régression de la composante temporelle (Log-Poisson)	99
Fig. 47 – Régression polynomiale du parametre alpha (Log-Poisson)	99
Fig. 48 – Surface de Mortalité dans le modèle de Log-Poisson (2007 à 2036)	100
Fig. 49 – Analyse du nombre de rachats en fonction de l'age	103
Fig. 50 – Analyse du nombre de rachats en fonction de l'ancienneté.....	103
Fig. 51 – Surface des taux de sorties en fonction de l'âge et de l'ancienneté	104
Fig. 52 – Evolution du biais engendré pour un assure de 67 ans et d'ancienneté 4 ans au 31/12/2006	105
Fig. 53 – Simulations de lois de rachats pour un assuré de 67 ans et d'ancienneté 4 ans.....	106
Fig. 54 – Quantiles de la structure par termes des taux	108
Fig. 55 – Projection du nombre de contrats - Stock.....	109
Fig. 56 – Volatilité dans le nombre de contrats projetés - Stock.....	110
Fig. 57 – Projection de la Provision mathématique - Stock	110
Fig. 58 – Projection des sinistres décès - Stock	111
Fig. 59 – Projection des rachats - Stock	112
Fig. 60 – Volatilité dans le nombre de contrats projetés – Affaires nouvelles.....	112
Fig. 61 – Projection de la Provision mathématique – Affaires nouvelles	113
Fig. 62 – Taux de rendement escomptés	113
Fig. 63 – Evolution moyenne des pm et revalorisation des provisions	114

Fig. 64 – Principe de simulation stochastique adopte pour XL Prévoyance	116
Fig. 65 – Surface des taux de sortie en fonction de l'âge et de l'ancienneté	118
Fig. 66 – Evolution du biais engendre sur les taux d'entrée en incapacite maladie.....	120
Fig. 67 – Projection stochastique du taux de mortalite global – Stock.....	121
Fig. 68 – Projection stochastique du taux de sortie global – Stock.....	122
Fig. 69 – Volatilité dans le nombre de contrats projetes – Stock	122
Fig. 70 – Projection globale des provisions – Stock	123
Fig. 71 – Projection globale des sinistres – Stock	123
Fig. 72 – Projection du nombre de contrats – Affaires nouvelles.....	124
Fig. 73 – Projection globale des provisions – Affaires nouvelles	124
Fig. 74 – Projection globale des sinistres – Affaires nouvelles	125
Fig. 75 – Taux de rendement escomptes	125
Fig. 76 – Evolution moyenne et revalorisation des provisions	126
Fig. 77 – Comparaison des marges de solvabilité pour Assur-Obsèques	129

Index des tableaux

Tab. 1 – Calcul des années risques en fonction de l'observation	24
Tab. 2 – Paramètres de la loi de Makeham	26
Tab. 3 – Sortie SAS : Informations sur le modèle dans GENMOD	29
Tab. 4 – Sortie SAS : Cas des variables de classe	29
Tab. 5 – Sortie SAS : Critère de qualité d'ajustement	30
Tab. 6 – Sortie SAS : Paramètres estimés	30
Tab. 7 – Sortie SAS : Significativité des effets.....	31
Tab. 8 – Détermination du taux d'invalidité.....	55
Tab. 9 – Paramètres de la regression des taux de rachat	102
Tab. 10 – Paramètres de la regression des taux de sortie – XL Prévoyance	118
Tab. 11 – Paramètres de la regression des taux d'entrée en incapacité maladie.....	119
Tab. 12 – Paramètres de la regression des taux d'entrée en incapacité accident.....	119

Glossaire

- **Accident** : Toute atteinte corporelle non intentionnelle et non prévisible de la part de l'assuré, suite à des événements soudains et imprévus, individuels ou collectifs, dus à des causes extérieures.
- **Assurance décès vie entière** : Contrat d'assurance qui garantit le versement du capital aux bénéficiaires désignés en cas de décès de l'assuré, quelle que soit la date à laquelle le décès survient.
- **Assurance décès temporaire** : Contrat d'assurance qui garantit le versement d'un capital aux bénéficiaires en cas de décès jusqu'à une date limite fixée lors de souscription du contrat.
- **Contrat d'assurance** : Il s'agit d'un contrat par lequel un organisme dit « l'assureur », s'engage envers une ou plusieurs personnes déterminées ou un groupe de personnes, le ou les assurés, à couvrir, moyennant le paiement d'une somme d'argent dite « prime d'assurance », une catégorie de risques déterminés par le contrat dit « police d'assurance » ou par des conventions additionnelles dites « avenants ».
- **Bâle 2** : Directive applicable au secteur bancaire et regroupant l'intégralité des exigences en fonds propres.
- **Bénéficiaire** : Personne physique ou morale au profit de laquelle l'assurance a été contractée. Elle peut être nommément désignée aux conditions particulières du contrat ou bien apparaître dans les conditions générales sous les termes de: conjoint survivant, d'ayants droit, ou encore d'héritier né ou à naître... Le bénéficiaire recevra l'indemnité due par l'assureur en cas de réalisation du risque assuré.
- **Délai de carence** : période pendant laquelle la garantie n'est pas en vigueur. La garantie est acquise après le délai de carence.
- **Duration** : La durée d'un instrument financier à taux fixe, comme une obligation, est la durée de vie moyenne de ses flux financiers pondérée par leur valeur actualisée. Toutes choses étant égales d'ailleurs, plus la durée est élevée, plus le risque est grand. Il s'agit d'un outil permettant de comparer schématiquement plusieurs instruments ou obligations à taux fixe entre eux, quelles qu'aient été leurs conditions d'émission.
- **Embedded Value (Valeur intrinsèque)** : Valeur actuelle des flux futurs de trésorerie dont l'actionnaire peut disposer tout en permettant à la société d'assurer son autofinancement en matière d'investissement et de marge de solvabilité réglementaire.
- **Franchise** : période ininterrompue d'incapacité totale de travail non indemnisée par l'assureur. Pour donner lieu à indemnisation, l'arrêt de travail doit être total, continu et supérieur à la franchise.
- **Générateur de nombres pseudo aléatoires** : Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle (comportements de groupe).

- **Incapacité temporaire totale de travail** : est considéré en état d'incapacité temporaire totale de travail, l'assuré, par suite de maladie ou d'accident, dans l'impossibilité physique constatée médicalement, de continuer son travail ou d'exercer toute activité lieu à gain de profit.
- **Invalidité permanente** : est caractérisée par la perte totale définitive d'une part significative ou totale de la capacité d'exercer toute activité rémunérée suite à une atteinte corporelle, par maladie ou accident. Elle peut être partielle ou totale.
- **Lamfalussy** : Le processus Lamfalussy est la démarche utilisée par l'Union européenne pour concevoir les réglementations du secteur de la finance. Ce processus porte le nom d'Alexandre Lamfalussy, qui présidait le comité consultatif, qui le mit au point en mars 2001.
- **Marge de solvabilité** : Montant de capital devant être disponible à tout moment. Cette marge de solvabilité est imposée par la réglementation des entreprises pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation, dans le but de protéger et de garantir le respect des engagements de l'assureur.
- **Modèle de régression linéaire** : Les modèles de régression linéaire cherchent à déterminer une relation linéaire entre une ou plusieurs variables explicatives (ou exogènes) et une ou plusieurs variables déterminées (ou endogène) à partir d'un ensemble de n observations qualitatives ou quantitatives.
- **Modèle stochastique** : Modèle visant à prendre en compte la volatilité des phénomènes étudiés dans ses résultats, en tirant aléatoirement de nombreux scénarios (correspondant à autant d'état de la nature) et en évaluant statistiquement les risques.
- **Participation aux bénéfices** : Mécanisme selon lequel les entreprises d'assurance vie ou de capitalisation font participer leurs assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent. Selon le Code des Assurances, les entreprises d'assurances doivent distribuer au minimum 90% de leurs bénéfices techniques et 85% de leurs bénéfices financiers.
- **Perte totale et irréversible d'autonomie (PTIA)** : est considéré en état de perte totale et irréversible d'autonomie, l'assuré reconnu comme étant dans l'impossibilité absolue et définitive de se livrer à une occupation ou un travail quelconque lui procurant gain ou profit, et dont l'état nécessite l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie. Sera automatiquement considéré en état de perte totale et irréversible d'autonomie l'assuré ayant une activité salariée, dès lors qu'il sera classé par la Sécurité Sociale parmi les invalides de la 3^{ème} catégorie.
- **Prévoyance** : Ensemble des garanties des risques sociaux : maternité, maladie, décès, incapacité, invalidité, chômage, dépendance.
- **Prime** : Contrepartie des garanties apportées par l'assureur. La prime peut être acquittée périodiquement (prime mensuelle, trimestrielle, semestrielle, annuelle) ou une seule fois (prime unique).
- **Provision mathématique** : Les compagnies d'assurance sont obligées d'avoir des provisions pour chaque police en tant que mesure de protection pour s'acquitter de leurs obligations envers le public aux termes des contrats.
- **Rachat** : Résiliation d'une police (avant l'expiration normale) par consentement mutuel entre l'assuré et la compagnie d'assurance.

- **Rente** : Somme fixée à l'avance, reçue périodiquement (par exemple chaque mois ou chaque année), pour une durée déterminée ou, éventuellement, pour le reste de sa vie (rente viagère).
- **Rente éducation** : Contrat d'assurance qui garantit un revenu aux enfants pour qu'ils poursuivent leurs études en cas de décès des parents.
- **Résultat technique** : Différence entre les ressources (cotisations et produits financiers) et les dépenses (sommes attribuées aux assurés, frais de gestion et commissions).
- **Simulation de Monte Carlo** : Procédure numérique permettant de créer un échantillon aléatoire d'un processus stochastique et d'estimer ensuite les caractéristiques de la loi de probabilité en rapport avec ce processus.
- **Simulation stochastique** : Simulation permettant de créer des réalisations de variables aléatoires.
- **Solvabilité 1** : Régime de solvabilité actuellement en vigueur dans d'Union Européenne.
- **Solvabilité 2** : Projet visant à réformer Solvabilité 1 grâce à une approche intégrée des risques.
- **Tables de mortalité TD 88-90 et TV 88-90** : Les deux tables ont été établies à partir des données de l'INSEE issues d'observations réalisées entre 1988 et 1990 sur la population masculine pour la TD 88-90 et la population féminine pour la TV 88-90. Elles ont été homologuées par l'arrêté du 27 avril 1993 et s'applique à la tarification des contrats d'assurance en cas de décès pour la TD 88-90 et des contrats d'assurance en cas de vie pour la TV 88-90.
- **Tables de mortalité TH 00-02 et TF 00-02** : Ces deux tables de mortalité masculine et féminine, respectivement TH00-02 et TF00-02, sont parues au Journal Officiel du 29 décembre 2005. Ces tables ont été établies sur la base de l'observation INSEE de la population française entre 2000 et 2002.
- **Tarif** : L'unité utilisée pour calculer la prime de la police.
- **Valeur de rachat** : La valeur de rachat est égale à la totalité de l'épargne disponible à un moment déterminé. La seule obligation de l'assureur est d'en définir la valeur minimale dans le contrat et d'en communiquer au moins une fois l'an à l'assuré la valeur réelle.