

Rapport de Stage final
- année universitaire 2007/2008 -

Chloé Blanchard

**Utilisation de la méthode affine pour
l'évaluation du risque crédit.
Comparaison avec les méthodes classiques**

➤ **ETABLISSEMENT D'ACCUEIL**



**35, boulevard des Capucines
75002 PARIS**

➤ **MAITRE DE STAGE**

**Julie Huttner, Actuaire, Consultante Manager
julie.huttner@alturiaconsulting.com**

➤ **PÉRIODE DE STAGE**

Du 6 Mars 2008 au 6 Juillet 2008

Table des matières

Remerciements	7
Résumé	9
Abstract	9
Introduction	11
Préliminaires	13
Le Comité Bâle II et solutions.....	13
Notions	14
Risque de portefeuille.....	14
Les notations	14
Les corrélations	15
Le taux de recouvrement	16
Les méthodes de calcul	17
Première Partie :	19
Les modèles courants	20
Le modèle CreditMonitor de la firme Moody's KMV	20
Présentation	20
Estimation de la valeur des actifs et de leur volatilité.....	21
Calcul de la probabilité de défaut.....	23
Calcul de la distance au défaut	24
Corrélations	25
Pour résumer	25
La méthode CreditMetrics de la firme JP Morgan	26
Présentation de la méthode par un exemple type sur un titre.....	27
Risque sur un portefeuille : généralisation sur plusieurs titres (voir annexe 1).....	32
Estimation des corrélations des actifs	32
CreditRisk+ de la firme Credit Suisse.....	34

Modéliser le Risque de Crédit.....	34
Les étapes du calcul.....	34
La fréquence du défaut.....	35
Les pertes de défaut.....	36
Risque de concentration et analyse sectorielle.....	39
Corrélation par paires.....	39
Le capital économique pour le risque de crédit.....	40
La méthode CreditPortfolioView de McKinsey & Co.....	43
Deuxième Partie :	47
Comparaisons des quatre modèles.....	48
Le modèle CreditMonitor de la firme KMV-Moody's.....	48
CreditMetrics de la firme JP Morgan.....	49
Le logiciel CreditRisk+ de la Credit Suisse.....	51
La méthode CreditPortfolioView de Mc Kinsey&Co.....	52
Conclusion.....	53
Troisième Partie :	55
Le modèle à intensité de Duffie	56
Processus d'intensité associé à un temps d'arrêt.....	57
Processus Affine.....	58
Fonction de survie.....	61
Modèle de défaut pour plusieurs débiteurs.....	63
Fonction de répartition du prochain temps de défaut.....	64
Calcul de la probabilité de k défauts.....	64
Exemple numérique.....	65
Risque concernant la concentration sectorielle ou régionale.....	68
Calibrage du modèle.....	69
Conclusion.....	76
Conclusion.....	77
Bibliographie.....	78

ANNEXES.....	80
ANNEXE 1 :CreditMetrics	81
Risque sur un portefeuille : généralisation sur plusieurs titres.....	81
Calcul des probabilités jointes.....	81
Risque de crédit du portefeuille	83
Risque marginal.....	84
ANNEXE 2 : CreditRisk+	86
Application au taux variable.....	86
Evénement de défaut avec taux de défaut variable	86
Pertes de défaut avec taux de défaut variable	87
Distribution de perte à taux de défaut variable	88
Du taux de défaut fixe au taux de défaut variable.....	90
ANNEXE 3 : CreditRisk+	92
Evénement défaut avec taux de défaut fixé.....	92
ANNEXE 4 : CreditRisk+	94
Calcul sur les corrélations	94

Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe de la société Alturia pour son accueil et sa disponibilité tout au long de mon stage.

Je remercie particulièrement la patience, l'aide précieuse et les nombreux conseils de Julie Huttner, mon maître de stage, qui ont contribué au bon déroulement de cette expérience et de mon mémoire.

Je souhaite remercier également chaleureusement Laure, Elodie, Matthieu et Michel pour leur bonne humeur.

A ma famille, avec toute ma reconnaissance.

Résumé

Ces derniers temps, un mot est sur toutes les lèvres dans le secteur financier et actuariel : le risque de crédit. Avec les nouvelles législations (Bâle II) et le contexte économique actuel (la crise des "subprimes"), l'étude de ce phénomène est à la mode.

Le but de mon stage et de ce mémoire est de décrire et comparer les quatre méthodes principales de calcul de risque de crédit. Puis dans un second temps, de les rapprocher d'une nouvelle méthode dite *méthode affine à intensité* afin de pouvoir déterminer si la mise en œuvre de celle-ci serait opportune.

Le sujet de mon mémoire inclut une partie de production de descriptions détaillées (présentation des modèles existants et du nouveau modèle) et une partie de comparaisons, synthèse et analyse (comparaison des modèles existants)

Mots clés : risque de crédit, modèles à intensité, CreditMetrics, CreditRisk+, CreditMonitor, CreditPortfolioView

Abstract

For few months, every single person is concerned about credit risk. With the new legislations (Bâle II) and the economic context (the subprime crisis), this subject is a key piece of the financial problematic.

My internship's purpose was to describe and compare the four more important and valuable credit risk methods. Furthermore, I had to study the new one: the "affine intensity model" to specify the liability and worthiness of this method.

My research was composed of a theoretical part with detailed descriptions about the five models and a practical part of comparison, analysis and synthesis between each of them.

Key words : credit risk, intensity models, CreditMetrics, CreditRisk+, CreditMonitor, CreditPortfolioView

Introduction

L'activité d'une banque est fortement liée à une certaine prise de risque. Afin d'éviter des pertes importantes au sein d'une compagnie, il est important de savoir analyser et compenser les risques pris au cours de la vie de celle-ci.

Une bonne gestion du bilan ou des actifs, une diversification des titres, des limites sur ceux qui sont risqués sont des méthodes intuitives de gestion d'un portefeuille. Néanmoins, l'importance des risques pour les banques, quelques faillites retentissantes ainsi que les réformes Bâle II conduisent tout naturellement les banques à adopter une gestion des risques de plus en plus fine accolée à des méthodes quantitatives.

Les banques sont exposées à différents types de risques :

- le risque de taux qui est la variation du prix ou de la valorisation d'un actif due à la variation des taux d'intérêt,
- le risque de change qui exprime la variation du cours de change d'un actif par rapport à une autre devise résultant de la variation du taux de change,
- le risque de liquidité engendré par le manque de liquidité d'un titre, c'est-à-dire sa capacité à se vendre rapidement et
- le risque de crédit.

C'est sur ce dernier que portera notre étude.

Si les premiers risques sont de mieux en mieux appréhendés, le risque de crédit, beaucoup plus aléatoire et important, est encore mal traité dans les compagnies financières et fait toujours l'objet d'études.

Le risque de crédit que l'on peut ainsi définir :

"Le risque de crédit est le risque de pertes liées à un évènement de crédit"

concerne en réalité, le risque lié à deux types d'événements :

- les pertes dues au défaut de la contrepartie et
- les pertes dues à la dégradation du crédit (dégradation de la qualité de crédit ou de signature de l'émetteur)

Le risque de défaut de contrepartie est l'incertitude concernant la capacité d'une entreprise à honorer ses dettes et engagements (paiement de l'intérêt et/ou du principal). Le défaut peut,

selon certaines approches, être considéré comme la dégradation maximale de la qualité de crédit et donc rejoindre le risque de dégradation de crédit. A l'heure actuelle, il n'existe aucune façon mathématique ou économique de déterminer si une firme fera défaut ou non, mais il est possible d'émettre des hypothèses sur une éventuelle défaillance.

Le risque de dégradation de la qualité de crédit d'un emprunteur provient des anticipations des investisseurs sur un titre. Par exemple, une anticipation négative d'un titre sur le marché c'est-à-dire sur la capacité d'un émetteur à rembourser sa dette, fait baisser la qualité de ce titre et entraîne la dégradation de sa valeur. Les banques, dans ce cas, doivent augmenter leur provision pour créances douteuses et constater des pertes.

Préliminaires

Le Comité Bâle II et solutions

En 1988, le Comité de Bâle, composé des 13 pays de l'Organisation de Coopération et de Développement Economiques publie les premiers «Accords de Bâle», ensemble de recommandations dont le pivot est la mise en place d'un ratio minimal de fonds propres par rapport à l'ensemble des crédits accordés : le ratio Cooke. A ce moment, il fut évoqué les fonds propres réglementaires et les engagements de crédit devant être calculés par un système comptable précis.

Le traité, constitué de recommandations, précise notamment que le rapport des fonds propres sur la somme des crédits accordés ne doit pas être inférieur à 8%.

Les accords de Bâle sont actuellement appliqués dans plus d'une centaine de pays.

En 2004, le Comité de Bâle, prenant conscience des limites du ratio Cooke en ce qui concerne le risque de crédit, rédige les accords intitulés Bâle II. Ces nouveaux textes prennent en compte de manière plus pertinente les notions incluses dans le risque de crédit et notamment celles concernant la qualité de l'émetteur par l'intermédiaire d'un système de notation interne pour chaque établissement. Un nouveau ratio est mis en place : le ratio Mac Donough.

Le fait que les régulateurs s'intéressent de très près au risque de crédit comme nous venons de le voir par la modification des accords de Bâle reflète l'importance accordée à une bonne évaluation de la qualité de l'emprunteur.

La réforme Bâle II propose trois approches distinctes pour mesurer le risque de crédit intrinsèque des clients :

- L'approche standard qui est schématiquement une amélioration de l'approche Cooke en procédant par différenciation du risque grâce aux notations "externes" fournies par les agences de notations.
- L'approche "Notation Interne Fondation" pour laquelle la banque doit construire des modèles internes de notations de ses clients et estimer les probabilités de défauts correspondantes pour un horizon d'un an.

- L'approche "Notation Interne Avancée", approfondissement de la méthode précédente, demande une estimation complémentaire des pertes en cas de défaut.

A la fin des années 90 de nombreux modèles ont été développés permettant de calculer le risque de crédit, afin que les utilisateurs qui étaient dans l'impossibilité d'effectuer une évaluation interne du risque puissent répondre aux exigences Bâle II. Ces modèles ont rapidement été repris par des logiciels, disponibles sur le marché, permettant à tout un chacun pouvant se les offrir de calculer le risque de défaut ou la dégradation de qualité de la contrepartie.

Au début des années 2000, de nouvelles théories, restées encore à l'état de modèles, ont percé sur le marché du risque de crédit : les modèles à intensité. C'est parmi ceux-ci que nous retrouvons ceux qui nous intéressent : les modèles affines.

Notions

Risque de portefeuille

Aux deux risques de crédit que nous avons vu précédemment, c'est-à-dire le risque de défaut et le risque de dégradation de la qualité de l'émetteur, il est important de préciser qu'une entité détentrice de plusieurs actifs est soumise à deux autres types de risque, dits risques de portefeuille :

- Les corrélations de défaut : la proportion dans laquelle les probabilités de défaut des différentes firmes sont corrélées,
- L'exposition : le montant du portefeuille exposé au risque de défaut.

Les notations

Un élément très utile et bien connu pour évaluer la qualité de la signature d'un emprunteur consiste dans la "note" ou "rating" accordée par des "agences de notation" à celui-ci.

Les deux principales agences de notation étant Standard&Poor's et Moody's (seules agences de notation avec Fitch ayant eu l'accréditation pour fournir les notes dans le cadre de la réglementation Bâle II), il en sera fait mention dans toute la suite du mémoire.

Ci-dessous un tableau récapitulatif des notations les plus courantes et leur signification.

Note Moody's	Note Standard & Poor's	Signification	Exemples
Aaa	AAA	Meilleure qualité, risque le plus faible	France, BERD, GDF, General Electric
Aa	AA	Haute qualité. Très forte capacité à faire face aux obligations de paiement	Dexia, Ville de Stockholm, Siemens, Département des Hauts de Seine, EDF
A	A	Catégorie supérieure des obligations de qualité moyenne. Capacité forte de l'emprunteur à faire face à ses obligations	Xerox, David Bowie, Ville de Tours, Suez Lyonnaise des Eaux, Crédit Lyonnais, Rothmans
Baa	BBB	Qualité moyenne. Capacité satisfaisante de l'emprunteur à faire face à ses obligations	Pioneer, Vivendi, CBS, Argentine
Ba	BB	De nature spéculative. Capacité incertaine à terme de l'emprunteur à faire face à ses obligations	Levi Strauss
B	B	Faible capacité de l'emprunteur à faire face à ses obligations	US Airways, Turquie, Venezuela, Giraudy, Indonésie
Caa	CCC	Qualité médiocre. Danger quant au paiement des intérêts et au remboursement du capital	Russie
Ca	CC	Hautement spéculatif. Proche de la défaillance.	
	D	En faillite !	Iridium, Daewoo, Fruit of the Loom, United Artists Theaters

Les corrélations

Ici, la corrélation est le lien entre les entreprises d'un même portefeuille.

Un manager ne peut se contenter de connaître les pertes potentielles subies et les probabilités de défaut, il doit aussi tenir compte des corrélations de défaut entre les entreprises.

Les corrélations sont des éléments fondamentaux du calcul de risque puisque la faillite d'une entreprise peut causer la faillite d'une entreprise liée. Nous citons notamment les

corrélations entre secteurs industriels et entre pays. Par exemple, une crise dans le secteur textile entrainera la chute et potentiellement le défaut de toutes les entreprises textiles du portefeuille. La diversification permettra alors d'éviter "de mettre tous les œufs dans le même panier" et donc d'éviter un défaut massif. Il est donc important pour un manager du risque d'avoir une idée juste et précise des corrélations. Aussi rigoureuse que soit la méthode d'évaluation des corrélations par secteurs ou par localisations, il est très délicat voire impossible de déterminer une corrélation parfaite, celle-ci devant forcément inclure les participations croisées entre entreprises, données difficiles à obtenir exactement.

Le taux de recouvrement

Le taux de recouvrement est la valeur en unité monétaire récupérée par le prêteur de la firme en cas de défaut.

Les taux de recouvrement sont donnés pour chaque titre par les agences de notations en fonction du degré de sécurisation du titre. Il est intéressant de noter qu'une entreprise peut émettre des titres dans plusieurs classes. Les taux sont donnés en pourcentage du nominal des titres. A ces valeurs sont communément adjointes leurs volatilités. Ci-dessous, nous avons un exemple de la firme Moody's :

Degré de sécurisation	Moyenne (%)	Ecart- Type (%)
"Senior Secured"	53.80	26.86
"Senior Unsecured"	51.13	25.45
"Senior Subordinated"	38.52	23.81
"Subordinated"	32.74	20.18
"Junior Subordinated"	17.09	10.90

Les méthodes de calcul

Les accords de Bâle II prévoient qu'une entreprise puisse choisir sa méthode d'évaluation de risque de crédit en interne.

Dans un premier temps, nous étudierons les méthodologies Value-at-Risk, financées par des entreprises, utilisées couramment de nos jours.

Tout d'abord, nous expliciterons l'approche structurelle basée sur le pricing des options implémentée par la firme KMV (rachetée par la suite par Moody's, agence de notation). Le modèle CreditMonitor, basé originellement sur le modèle de Merton (1974) comporte un processus de défaut endogène qui est relié à la structure du capital de la firme.

Ensuite nous aborderons la méthode CreditMetrics de la banque JP Morgan, aussi appelée "approche par migration de crédit". Celle-ci est basée sur la probabilité qu'une firme a de passer d'une catégorie de crédit à une autre, y compris la catégorie "défaut" sur un horizon donné.

Puis, nous étudierons l'approche dite "actuarielle" : CreditRisk+ initialisée par la banque Credit Suisse Financial Products basée sur l'hypothèse que la survenance de défaut pour une obligation suit une loi de probabilité.

Enfin, nous survolerons la méthode "macroéconomique" du cabinet de conseil en stratégie McKinsey, CreditPortfolioView, qui est un modèle discret multi-périodique où les probabilités de défauts sont conditionnelles aux variables économiques comme le niveau de taux d'intérêt, le chômage, la croissance, etc.

Dans une deuxième partie, nous comparerons les méthodes que nous venons d'étudier sur de nombreux points comme les données en entrée, les données en sortie, les corrélations ou la fiabilité des résultats. Cette comparaison se basera sur mes observations et les conclusions de nombreuses études.

Dans une troisième partie, nous étudierons un modèle à intensité ou modèle affine : le modèle de Duffie, pouvant éventuellement pallier les faiblesses des modèles existants.

Première Partie :

Les modèles courants

Les modèles courants

Le modèle CreditMonitor de la firme Moody's KMV

Présentation

Le but de ce modèle, comme des suivants, est d'étudier la perte engendrée par un événement de crédit en passant par la probabilité de défaut de l'entreprise.

Le risque de défaut d'une entreprise croît lorsque la valeur des engagements tend vers sa valeur de marché jusqu'à ce que cette dernière soit inférieure à la valeur des engagements.

La valeur nette de l'entreprise pour ses actionnaires correspond à :

$$\text{Valeur de marché des actifs} - \text{valeur des engagements}$$

Cette entreprise fera défaut si sa valeur nette est inférieure à zéro.

Il existe trois types d'informations disponibles sur le marché permettant de calculer la probabilité de défaut : l'état financier de la firme, le prix de marché de la dette de la firme et de ses titres et une appréciation subjective de ses revenus et risques (la volatilité). Ces informations peuvent être combinées dans une seule mesure de risque de défaut appelée *distance au défaut*.

La probabilité de défaut peut être directement calculée à partir de la distance au défaut si la distribution de probabilité des valeurs des actifs est connue. En effet, la probabilité de défaut instantanée correspond à la probabilité que la distance au défaut soit inférieure ou égale à 0.

Oldrich Vasicek et Stephen Kealhofer ont étendu le modèle bien connu de Black-Scholes-Merton pour déterminer un modèle de probabilité de défaut appelé modèle Vasicek-Kealhofer (VK). Ce modèle prend pour hypothèse que les actifs d'une firme sont des options dont le point de défaut agit telle une barrière absorbante pour la valeur des actifs de la firme. C'est-à-dire que quand la valeur des actifs tombe sous le point de défaut, la firme est déclarée en défaut.

Moody's KMV (MKMV) a implémenté le modèle VK pour calculer l'Expected Default Frequency (EDF : fréquence de défaut attendue) qui mesure la probabilité de défaut d'une entreprise cotée dans l'année à venir ou sur plusieurs années.

Le calcul de cette probabilité requiert en entrée certaines données financières comme la valeur des titres sur le marché, leurs volatilités etc.

La probabilité de défaut est calculée par MKMV en trois étapes :

- 1) estimation de la valeur des actifs et de leur volatilité,
- 2) calcul de la probabilité de défaut,
- 3) calcul de la distance au défaut.

Estimation de la valeur des actifs et de leur volatilité

Si le prix de marché des actions est disponible, la valeur de marché et la volatilité des actifs peuvent être déterminées directement en utilisant une approche basée sur la théorie des options où une action apparaît comme une option d'achat sur la valeur de l'actif sous-jacent de la firme.

L'engagement limité des actions signifie que les émetteurs n'ont pas l'obligation de rembourser les détenteurs des titres dans le cas où les obligataires auraient consommé l'intégralité des fonds restants puisque ces derniers sont prioritaires. C'est pourquoi, les détenteurs des autres titres de la firme doivent attendre jusqu'à ce que les détenteurs d'obligations soient remboursés par les émetteurs. En d'autres termes, nous pouvons voir une action comme un call sur la valeur de la firme avec un prix d'exercice égal à la valeur des engagements de la firme.

Le modèle VK utilise cette hypothèse pour en déduire la valeur des actifs sous-jacents. Le processus est équivalent à celui utilisé par les traders pour déterminer la volatilité implicite d'une option à partir du prix observé de l'option. La différence réside dans le fait qu'ici nous avons deux paramètres : le prix des options et leur volatilité.

Credit Monitor utilise le modèle général de Merton de tarification des actifs dérivés basé sur le modèle de Black&Scholes.

Soient V_A , dV_A la valeur des actifs de la firme et ses variations

μ , σ_A dérivé de la valeur moyenne des actifs de la firme et sa volatilité

V_E , dV_E la valeur des fonds propres de la firme et ses variations
 σ_E la volatilité de la valeur moyenne des fonds propres de la firme
 dz un processus de Wiener

Soit la valeur des actifs d'après la relation suivante

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad (1)$$

Si X est la valeur de la dette due à la date T , alors, la valeur de marché des fonds propres et la valeur de marché des actifs sont liées par la formule du Call :

$$V_E = V_A N(d_1) - e^{-rt} X N(d_2) \quad (2)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln(V_A / X) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

Et r le taux sans risque

Nous pouvons établir que les volatilités des actions et des actifs sont liées par l'équation :

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \sigma_A \quad (3)$$

A partir de la valeur historique des actions de la firme ainsi que leur volatilité, nous obtenons, en inversant les équations, la valeur et la volatilité des actifs de l'entreprise.

Un des problèmes de ce modèle est que celui-ci lie les actions et les actifs donnés par (3) de façon instantanée, ce qui est en contradiction avec la réalité qui est bien trop lente pour réaliser ce genre de phénomène. Il y a donc un risque d'instabilité des résultats.

Pour pallier à cet inconvénient, MKMV utilise dans son calcul de l'EDF un processus beaucoup plus complexe basé sur ce principe. Nous ne l'étudierons pas ici.

Calcul de la probabilité de défaut

La probabilité de défaut est la probabilité que la valeur de marché des actifs d'une firme soit inférieure à la valeur de réserve des engagements au moment de la maturité de la dette.

Soit

$$p_t = \Pr[V_A^t \leq X_t / V_A^0 = V_A] = \Pr[\ln V_A^t \leq \ln X_t / V_A^0 = V_A] \quad (4)$$

Avec p_t la probabilité de défaut à l'instant t

V_A^t la valeur de marché des actifs de la firme à l'instant t

X_t la valeur de réserve des engagements

En appliquant le lemme d'Itô sur le logarithme népérien et après intégration, nous obtenons :

$$\ln V_A^t = \ln V_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} \varepsilon \quad (5)$$

Où μ est le revenu attendu des actifs de la firme

Et ε est le facteur aléatoire sur les revenus de loi normale centrée réduite

En combinant (4) et (5) nous aboutissons à l'équation de la probabilité de défaut

$$p_t = \Pr \left[\ln V_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} \varepsilon \leq \ln X_t \right] \quad (6)$$

Soit

$$p_t = \Pr \left[- \frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \geq \varepsilon \right] \quad (7)$$

Le modèle Black&Scholes prend pour hypothèse que le facteur ε est distribué selon une loi normale centrée réduite. Nous pouvons donc définir la probabilité de défaut en terme de distribution normale cumulée.

$$p_t = N \left[- \frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right] \quad (8)$$

Calcul de la distance au défaut

Six variables déterminent la probabilité de défaut d'une firme sur différents horizons à partir d'aujourd'hui jusqu'au temps H :

- 1) la valeur actuelle des actifs,
- 2) La distribution de la valeur des actifs au temps H,
- 3) La volatilité des valeurs futures des actifs au temps H,
- 4) Le niveau du point de défaut, la valeur des engagements,
- 5) Le taux de croissance attendu des actifs sur l'horizon,
- 6) La longueur H de l'horizon,

La distance au défaut est simplement le nombre en écart-type entre la valeur des actifs de la firme et le niveau de la dette. Si nous la plaçons dans le modèle de Black&Scholes nous obtenons la formule :

$$DD = \frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} = -d_2 \quad (9)$$

Cette formule est une étape intermédiaire du calcul de probabilité que nous avons vu précédemment.

Néanmoins, cette valeur, bien qu'utilisée comme valeur de référence dans le modèle, présente de nombreux inconvénients.

En effet, dans la pratique, nous avons besoin d'ajuster la distance au défaut pour inclure non seulement la croissance de la valeur des actifs par rapport au taux mais aussi d'ajuster tous les cash-flows inclus dans le modèle comme les dividendes.

De plus, la distribution normale est un choix assez faible pour définir la probabilité de défaut pour plusieurs raisons notamment que dans la réalité, le point de défaut est aussi une variable aléatoire.

Ensuite, la distribution empirique des taux de défaut observés possède des queues plus larges qu'une distribution normale.

Enfin, jusqu'à présent, le point de défaut était calculé à l'aide des engagements de la firme et des amortissements planifiés ce qui n'est pas réaliste puisque les firmes réajustent leurs engagements en fonction de leurs besoins en financement et en particulier lorsqu'elles sont proches du défaut.

Corrélations

Les corrélations de ce modèle sont estimées de manière historique en comparant les données sur les entreprises dans les années passées.

Pour résumer

Le processus utilisé par Moody's&KMV se décompose en trois étapes :

1. Estimer la valeur de marché et la volatilité des actifs de la firme.
2. Calculer la distance au défaut : la distance en écart-type entre la valeur de la firme et le point de défaut.
3. Transformer la distance de défaut en une fréquence attendue de défaut EDF en utilisant une distribution de défauts empiriques.

Parce que la mesure de crédit EDF est basée sur le prix de marché, elle a un aperçu prévisionnel et reflète la position actuelle dans le cycle de crédit. C'est donc une mesure temporelle fiable pour le risque de crédit.

Cependant, celle-ci utilise des hypothèses fortes que ne sont pas respectées dans la réalité.

La méthode CreditMetrics de la firme JP Morgan

CreditMetrics est un outil d'estimation du risque du portefeuille dû aux variations de la valeur de la dette causées par la variation de la qualité de crédit de chacun des émetteurs. Cette méthode tient compte des deux risques de crédit : la dégradation de la qualité de crédit et le défaut.

L'approche CreditMetrics se base sur l'estimation de la distribution temporelle du changement de la valeur du portefeuille de prêts ou d'obligations à un horizon de temps donné.

Le risque est étudié dans un "cadre portefeuille" ce qui nécessite le calcul des corrélations et donc des bénéfices de la diversification.

CreditMetrics permet de calculer le risque à partir de deux indicateurs : l'**écart-type** et le **premier percentile**.

L'écart-type est une mesure symétrique de la distribution autour de la valeur moyenne du portefeuille. Plus cette mesure est grande, plus le risque est important.

Le premier percentile indique le premier pourcentage soit la valeur la plus basse que le portefeuille va réaliser x% du temps (x=1%, 5%...).

Les données nécessaires pour ces calculs sont :

- les notations des firmes d'après Standard&Poor's ou Moody's comme nous l'avons vu dans le paragraphe "Notions" de la première partie,
- le taux de recouvrement d'une entreprise en fonction du degré de sécurisation du titre (cf. la partie Notions),
- une table appelée « matrice de transition » contenant les probabilités de migration d'une notation à une autre sur un an pour une entreprise.

Ci-dessous un exemple de matrice de transition basée sur les notations de Standard&Poor's où l'on voit la probabilité pour chaque titre de passer d'un état à un autre :

Notation Initiale	Notation à la fin de l'année							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Défaut
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	67.86	19.79

- les corrélations entre titres, c'est-à-dire le lien entre chaque titre d'un portefeuille,
- toutes les données techniques du marché sur lequel est coté le titre : taux de coupon, maturité, le spread, les taxes...

Présentation de la méthode par un exemple type sur un titre

Nous allons calculer le risque d'une obligation BBB de nominal \$100, de coupon 6% et de maturité 5 ans. En ce qui concerne le taux de recouvrement, notre titre est "Senior Unsecured".

Nous procédons en trois étapes

- Etape 1 : La notation de crédit détermine la probabilité de migration ou de défaut du titre.
- Etape 2 : L'ancienneté du titre permet de déterminer son taux de recouvrement en cas de défaut et la valeur du titre.
- Etape 3 : Utilisation des valeurs et probabilités des deux premières étapes pour le calcul de l'écart-type et du premier pourcentage.

Etape 1 : Changement de notation de crédit

Le modèle utilise les notations et la matrice de transition S&P sur un horizon annuel.

Prenons l'exemple d'un émetteur noté BBB. Au bout d'un an, celui-ci peut être :

- réévalué à la baisse au niveau BB, B ou CCC ou bien être réévalué à la hausse au niveau AAA, AA ou A,
- garder un niveau constant BBB,
- faire défaut.

Moody's et S&P nous fournissent les tables de migration avec les probabilités p_i déterminées à partir des données historiques :

Notation à la fin de l'année	Probabilité de défaut (%)
AAA	0.02
AA	0.33
A	5.95
BBB	86.93
BB	5.30
B	1.17
CCC	0.12
Défaut	0.18

NB :

- la probabilité de rester constant reste la plus forte (86,93%),
- les événements les plus probables ensuite sont l'augmentation (A) ou la dégradation (BB) d'une unité de notation (on parle de notch),
- la probabilité de l'entreprise de faire défaut est de 0.18%.

Etape 2 : Evaluation du taux de couverture et de la valeur du bond

Après obtention des probabilités de migration, nous évaluons ensuite le taux de recouvrement et la valeur de l'obligation en cas de dégradation ou d'augmentation dans la notation.

- Taux de recouvrement :

En cas de défaut, la valeur résiduelle nette de couverture dépendant du degré de sécurisation du titre. Comme nous avons considéré que notre obligation BBB, appartient à la classe « Senior Unsecured », son taux de couverture est donc de 51.13% de son nominal et possède un écart-type 25.45% comme nous pouvons le voir dans la partie "Notations".

- Valeur de l'obligation après variation de la notation du titre :

La valeur de l'obligation après changement de notation correspond à la somme des cash flows futurs de l'obligation actualisés sur la courbe des taux correspondants à sa nouvelle notation. Pour cela, nous cherchons tout d'abord la courbe zéro-coupon pour chaque catégorie de notation afin d'actualiser les flux entre la fin de l'horizon et la maturité.

Dans la table ci-dessous, nous avons les taux zéro-coupon par catégorie de notation :

Catégories	1^{ère} année	2^{ème} année	3^{ème} année	4^{ème} année
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	1.22	4.78	5.17
A	3.72	1.32	4.93	5.32
BBB	4.10	1.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Reprenons l'exemple de notre obligation BBB de maturité 5 ans, de nominal 100€ et de taux de coupon de 6%. A la fin de l'année nous obtenons 6€, et il nous reste encore quatre coupons à obtenir. Si celle-ci est réévaluée à A à la fin de l'année, nous réévaluons les cash-flows futurs (nominal+coupon) avec la courbe des taux correspondants à la nouvelle notation.

Valeur de l'obligation avant prélèvement du coupon :

$$V = 6 + \frac{6}{(1 + 3.72\%)} + \frac{6}{(1 + 4,32\%)^2} + \frac{6}{(1 + 4,93\%)^3} + \frac{6}{(1 + 5,32\%)^4} = 108.66$$

Ci-dessous, voici la table résumant les valeurs de l'obligation suivant sa notation future :

Notation	Coupon	Valeur Forward	Valeur totale
AAA	6.00	103.37	109.37
AA	6.00	103.10	109.10
A	6.00	102.66	108.66
BBB	6.00	101.55	107.55
BB	6.00	96.02	102.02
B	6.00	92.10	98.10
CCC	6.00	77.64	83.64
Défaut	-	51.13	51.13

NB :

- comme prévu, la valeur de l'obligation augmente (diminue) en fonction de l'augmentation (diminution) de la notation (attire des investisseurs, ...),

- le 51,13 en cas de défaut correspond à la valeur de la couverture (ici 51,13% du nominal).

Etape 3 : Estimation du risque de crédit

Nous avons maintenant toutes les informations nécessaires pour calculer l'écart-type et le premier centile.

- L'écart-type

Calculons tout d'abord la moyenne pondérée des valeurs des obligations μ_{totale} , puis l'écart-type σ_{total} incluant la volatilité du taux de couverture :

$$\mu_{totale} = \sum_{i=1}^8 p_i \mu_i = 107.09 \quad \sigma_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) - \mu_{totale}^2} = 3.18.$$

Avec p_i les probabilités obtenues à partir de la matrice de transition (un i correspond à un état) et σ_i^2 les variances du taux de recouvrement.

Celles-ci sont égales à 0 pour la majorité des états, excepté pour l'état "défaut" où, dans notre cas, elle est égale à 25.45^2 .

- Calcul du niveau de pourcentage

Nous cherchons à déterminer le 1^{er} centile de notre obligation. Pour cela, nous utilisons une table contenant les probabilités de migration ainsi que la valeur des obligations. Nous regardons la probabilité d'atteindre chaque notation en partant du bas. Le niveau pour laquelle la valeur est égale ou dépasse les 1% sera considéré comme le niveau du 1^{er} pourcentage.

Notation Finale	Probabilité de l'état (%)	Nouvelle valeur du bon + coupon (€)	Probabilité pondérée (€)	Valeur Moyenne (€)	- Différence de probabilité au carré
AAA	0.02	109.37	0.02	2.28	0.0010
AA	0.33	109.19	0.36	2.10	0.0146
A	5.95	108.66	6.47	1.57	0.1474
BBB	86.93	107.55	93.49	0.46	0.1853
BB	5.30	102.02	5.41	5.06	1.3592
B	1.17	98.10	1.15	8.99	0.9446
CCC	0.12	83.64	1.10	23.45	0.6598
Défaut	0.18	51.13	0.09	55.96	5.6358
		Moyenne :	107.09€	Variance :	8.9477
				Ecart-Type :	2.99€

En partant du bas, nous voyons que la notation pour laquelle nous dépassons les 1% de probabilité cumulée est la notation B, soit une obligation de valeur 98.10€, donc une perte de 8.99€ par rapport à la valeur moyenne.

C'est-à-dire qu'une entreprise BBB à 1% de chance de passer à une notation inférieure ou égale à B avec une perte de valeur résultante d'au moins 8.99€.

A noter que CreditMetrics peut s'utiliser sur un horizon d'un an mais aussi pour tout autre horizon.

Risque sur un portefeuille : généralisation sur plusieurs titres (voir annexe 1)

Pour un portefeuille de plusieurs titres, les trois étapes sont identiques.

Nous calculons :

- les probabilités jointes de migration incluant la corrélation entre titres,
- les valeurs du portefeuille,
- l'écart type et le premier pourcentage du portefeuille.

Estimation des corrélations des actifs

Bien que de nombreuses méthodes existent sur l'étude de la corrélation des actifs, la plus simple est d'utiliser une valeur fixée entre les couples d'obligations dans le portefeuille. Cela évite à l'utilisateur d'estimer un large nombre de corrélations individuelles. Malheureusement dans ce cas, la capacité à détailler le risque dû à la surconcentration sur un secteur est perdue.

Pour information, une moyenne sur la corrélation entre les actifs peut être de 25% à 30%.

Dans le cas idéal, nous pourrions produire la totalité des corrélations entre actifs, malheureusement le peu de sources ainsi que l'impossibilité de produire une matrice de corrélation de cette taille rend cette approche infaisable.

C'est pourquoi, CreditMetrics utilise une méthodologie basée sur les corrélations à partir d'un jeu d'indices de corrélation et d'une cartographie pour construire des corrélations émetteur par émetteur.

Le processus se compose de deux étapes :

- utilisation d'indice industriel tel la domiciliation afin de bâtir une matrice de corrélation entre les secteurs,
- création d'une cartographie individuelle par émetteur en fonction de leur participation dans chaque secteur. Par exemple une firme peut être à 20% française et 80% américaine puis à 70% dans l'industrie chimique et 30% dans la finance, ce qui nous conduit à une participation de 56% dans le secteur de la chimie américaine etc.

Pour chaque étape, on dispose de la participation au secteur de chaque firme, puis nous calculons la corrélation entre secteur, pour ensuite déterminer la corrélation entre actifs.

CreditRisk+ de la firme Credit Suisse

CreditRisk+ est une méthode utilisée pour calculer les distributions des pertes de crédit potentielles d'un portefeuille.

Contrairement à la méthode précédente, la méthode CreditRisk+ ne tient compte que de deux états : défaut ou non défaut.

Nous allons étudier le cas simplifié où le taux de défaut est fixé. Une extension relativement compliquée permet de passer au cas où le taux est variable (voir annexe 2).

Modéliser le Risque de Crédit

Les actions et obligations sont soumises aux anticipations des investisseurs, leur cours tiennent donc compte de la qualité de crédit des émetteurs.

Le taux de défaut varie sur une échelle continue et peut être vu comme une variable aléatoire avec volatilité qui traduit l'incertitude de sa valeur. Comme nous l'avons précisé dans notre exemple, nous considérerons le taux de défaut comme une variable fixe.

Le défaut est ici considéré comme un événement imprévisible.

CreditRisk+ utilise quatre types de données en entrée :

- l'exposition,
- les taux de défaut des obligations,
- la volatilité de ces taux,
- les taux de recouvrement.

A ce moment, nous pouvons remarquer que le taux de défaut des obligations est ici une entrée et non pas un résultat comme nous avons pu le voir dans les modèles précédents.

Les étapes du calcul

La modélisation du risque de crédit se fait en deux étapes :

- calcul de la fréquence des défauts,

- calcul de la gravité des pertes.

Nous en déduisons les pertes dues au défaut afin d'avoir une idée de l'amélioration ou de la détérioration de la qualité du portefeuille et une mesure de l'impact de la diversification et de la concentration du portefeuille.

A partir de ce moment, nous allons nous concentrer sur un exemple concernant un portefeuille à taux de défaut fixe sur un horizon d'un an.

La fréquence du défaut

En premier lieu, CreditRisk+ modélise la distribution de l'événement défaut sur un an dans un portefeuille varié comme une loi de Poisson où l'on incorpore la volatilité.

Soit un portefeuille contenant N émetteurs. On suppose que chaque exposition possède une probabilité de défaut annuelle connue.

Soit p_A = **Probabilité de défaut annuelle pour l'émetteur A**

Les créateurs de la méthode restent flous quant au calcul de cette probabilité, néanmoins nous pouvons voir qu'il peut être raisonnable d'utiliser les tables reliant la qualité de crédit aux probabilités de défaut fournies par les agences de notations.

Pour analyser la distribution des pertes, nous introduisons la fonction génératrice des moments.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{ndéfauts}) z^n$$

De simples calculs sous l'hypothèse de défauts indépendants (voir annexe 3) nous permettent d'arriver à la conclusion que la probabilité de n défaut s'écrit sous la forme :

$$p(\text{ndéfauts}) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

avec

$$\mu = \sum_A p_A$$

La distribution du nombre de défauts correspond donc à une loi de Poisson de paramètre μ (nombre de défauts attendus) ne dépendant pas du niveau d'exposition.

Les pertes de défaut

A partir de la distribution du nombre de défaut, nous pouvons considérer la distribution des pertes du portefeuille. Comme nous l'avons vu, en cas de défaut, la firme accuse une perte égale au montant dû par l'émetteur moins un montant de recouvrement.

Posons les notations suivantes pour un émetteur A :

p_A = probabilité de défaut de l'émetteur A

L_A = exposition de l'émetteur A

λ_A = perte attendue pour l'émetteur A

Décomposons L_A et λ_A tel que

$$L_A = L \times \nu_A$$

$$\lambda_A = L \times \varepsilon_A$$

Où ν_A et ε_A sont l'exposition et la perte attendue de l'émetteur par unité et L une exposition en montant d'unités.

A ce moment là, nous arrondissons chaque ν_A au nombre entier le plus proche ce qui introduit notre première approximation mais permet de réduire le nombre de ν_A possible afin de répartir le portefeuille en m "bandes d'exposition"

La relation entre ces termes peut s'écrire

$$\varepsilon_j = \nu_j \times \mu_j \quad \text{soit} \quad \mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} = \sum_{A:\nu_A=\nu_j} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$$

avec $j = 1, \dots, m$

Etudions à présent la distribution des pertes dues au défaut. Pour cela, introduisons un nouvel élément aléatoire sur la distribution. En effet, certaines pertes seront plus élevées que d'autres en fonction de l'exposition.

Soit $G(z)$ la fonction génératrice pour les pertes en fonction de L

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{pertes agrégées} = n \times L) z^n$$

On suppose que les expositions sont indépendantes ce qui implique que les "bandes d'expositions" sont indépendantes. La fonction génératrice totale peut donc être représentée par le produit des fonctions génératrices des bandes

$$G(z) = \prod_{i=1}^m G_i(z)$$

On aura alors pour chaque bande, en utilisant la fonction génératrice des probabilités de défaut :

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n \text{ défauts}) z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^{nv_j} = e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}}$$

Donc

$$G(z) = \prod_{i=1}^m G_j(z) = e^{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}$$

Ceci correspond à la fonction génératrice pour les pertes du portefeuille.

On peut aussi écrire $G(z)$ telle que :

$$G(z) = e^{\mu(P(z)-1)} = F(P(z))$$

avec le polynôme :

$$P(z) = \frac{\sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right) z^{v_j}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right)}$$

Nous voyons donc que $G(z)$ s'exprime comme la composition de deux sources d'incertitude provenant de la loi de Poisson pour la fréquence de l'événement de défaut et de la variation des montants d'expositions à l'intérieur du portefeuille.

Donc, pour obtenir la distribution de pertes, nous avons besoin uniquement des différentes tailles d'exposition ν sur tout le portefeuille et des pertes attendues ε pour chaque taille d'exposition. La conclusion que nous pouvons en tirer est que nous n'avons besoin que de très peu de données pour un portefeuille entier.

La distribution de pertes est obtenue en effectuant un développement limité de $G(z)$.

En effectuant le développement de Taylor de $G(z)$, nous obtenons :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} z^n$$

De plus,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{pertes agrégées} = n \times L) z^n$$

Nous pouvons en déduire que

$$A_n = p(\text{pertes agrégées}) = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

Après plusieurs transformations, nous obtenons la relation de récurrence :

$$A_n = \sum_{j: \nu_j \leq n} \frac{\mu_j \nu_j}{n} A_{n-\nu_j} = \sum_{j: \nu_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-\nu_j}$$

où

$$A_0 = G(0) = F(P(0)) = e^{-\mu}$$

En retournant dans le cadre général où le taux de défaut est variable, intéressons-nous au risque de concentration et à la corrélation par paires.

Risque de concentration et analyse sectorielle

CreditRisk+ incorpore les effets macroéconomique qui impacteraient la variabilité des pertes. Par exemple une récession économique qui augmenterait le risque de défaut, ou la sensibilité des émetteurs aux fluctuations. Pour ce faire, le taux de défaut est associé à une distribution de probabilité grossissant plus ou moins la queue de distribution des pertes potentielles.

De plus, CreditRisk+ modélise l'impact de la diversification par une analyse sectorielle.

On prend pour hypothèse que chaque émetteur appartenant à un secteur possède un facteur systématique commun influençant de la même sorte son taux de défaut et sa volatilité. Puis nous généralisons à plusieurs facteurs. A cela, nous ajoutons le risque spécifique de chaque émetteur.

Corrélation par paires

Nous allons nous intéresser à la formule de corrélation entre les événements de défaut sous CreditRisk+. Pour définir clairement la corrélation sur une durée Δt nous associons à chaque émetteur la fonction indicatrice I telle que si A fait défaut $I_A = 1$.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{défaut} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La corrélation ρ entre les deux émetteurs A et B sur une durée Δt est définie par $\rho = \rho(I_A, I_B)$

Soient les valeurs attendues pour I_A, I_B et I_{AB} sont μ_A, μ_B et μ_{AB} c'est à dire le nombre estimé de défaut de A, B et A et B.

Comme I ne peut prendre que deux valeurs alors :

$$\rho = \frac{\mu_{AB} - \mu_A \mu_B}{\sqrt{(\mu_A - \mu_A^2)} \sqrt{(\mu_B - \mu_B^2)}}$$

Dans le contexte CreditRisk+, l'équation va s'appuyer sur les notations des deux émetteurs A et B, avec une décomposition sectorielle en n secteurs :

Reference	Emetteur A	Emetteur B
Durée		Δt
Probabilité de défaut instantanée	P_A	P_B
Nombre de défauts attendus	$\mu_A = 1 - e^{-P_A \Delta t} = P_A \Delta t$	$\mu_B = 1 - e^{-P_B \Delta t} = P_B \Delta t$
Décomposition sectorielle	$\theta_{Ak}; 1 \leq k \leq n$	$\theta_{Bk}; 1 \leq k \leq n$

Le modèle de calcul est présenté en annexe (annexe 4).

La formule finale concernant la corrélation entre les émetteurs A et B dans le modèle CreditRisk+ est :

$$\rho_{AB} = \sqrt{\mu_A \mu_B} \sum_{k=1}^n \theta_{Ak} \theta_{Bk} \left(\frac{\sigma_k}{\mu_k} \right)^2$$

avec μ_k et σ_k la moyenne et la variance du taux de défaut.

Cette formule n'est valable que si les probabilités de défaut dans la période sont faibles.

NB :

- cette valeur peut être supérieure à 1 si les valeurs de moyenne et variance sont élevées
- Si les émetteurs n'ont pas de secteur en commun, la corrélation est nulle
- Si nous prenons en compte que $\frac{\sigma_k}{\mu_k}$ est proche de 1 alors la corrélation est de l'ordre de

grandeur de $\sqrt{\mu_A \mu_B}$

Le capital économique pour le risque de crédit

Une entreprise doit disposer de fonds propres et de provisions suffisantes pour absorber les pertes potentielles en cas de défaut. CreditRisk+ donne donc une mesure du capital économique qui doit être couvert par les provisions pour couvrir les pertes dues au défaut.

Le capital économique est la différence entre le niveau du 99ème pourcentage et les pertes moyennes (de la même façon que l'utilisation du premier percentile dans CreditMetrics). Il est intéressant car :

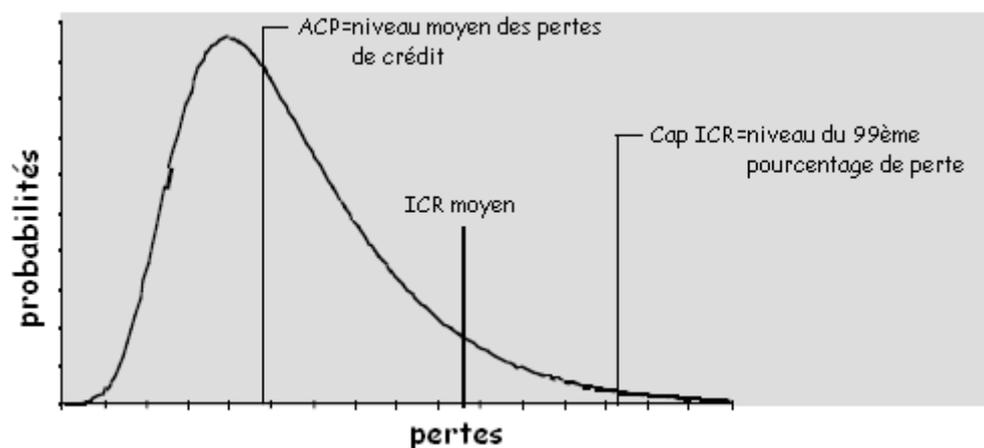
- c'est une mesure plus appropriée pour mesurer le risque économique que celles prévues par la réglementation,
- elle permet de tenir compte de l'effet de diversification,
- elle prend en compte la qualité du crédit et la taille de l'exposition,
- c'est une mesure dynamique qui reflète le risque variable d'un portefeuille, elle peut donc être utilisée comme un outil d'optimisation du portefeuille.

CreditRisk+ calcule aussi les pertes potentielles de crédit avec la formule ACP (Annual Credit Provision):

$$\text{ACP} = \text{Exposition} \times \text{Taux de défaut} \times (1 - \text{Taux de couverture})$$

Un calcul fréquent de l'ACP permet de constater la variation de la qualité de crédit.

De plus CreditRisk+ calcule une distribution des pertes possibles dont la moyenne est l'ACP mais avec une probabilité plus petite de grandes pertes. En effet, comme l'expérience le montre, l'ACP ne suffit pas car d'une année sur l'autre la moyenne des pertes peut varier avec de petites pertes fréquentes et de grosses pertes plus rares. On établit donc l'Incrémental Credit Reserve (ICR) dont nous voyons la distribution ci-dessous



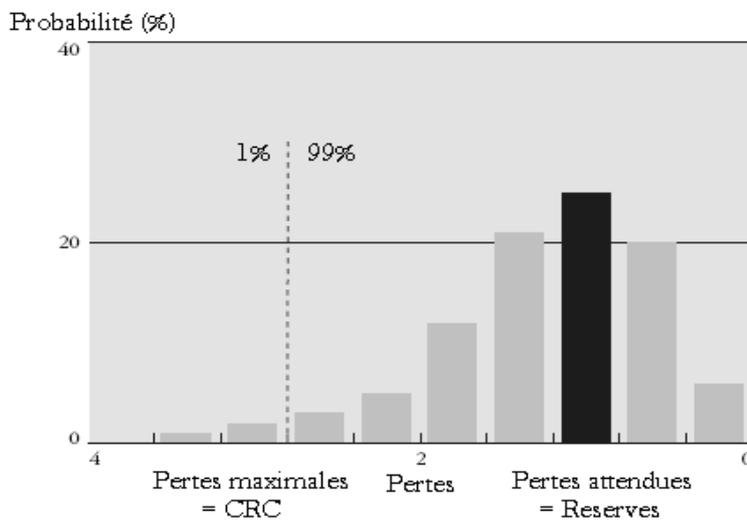
La méthode CreditPortfolioView de McKinsey & Co

Cette méthode a été implémentée dans le logiciel CreditPortfolioView édité par McKinsey and Company en 1998. Elle a été développée par Thomas C. Wilson de la firme McKinsey and Company.

Les sorties du modèle CreditPortfolioView se rapprochent de celles du modèle précédent, soient les deux mesures :

- Les **pertes attendues** (Expected Loss : EL)
- Le **capital pour le risque crédit** du portefeuille (Credit Risk Capital : CRC)

Le capital pour le risque de crédit est la somme des pertes maximales dans un intervalle de confiance (par exemple 99%) sur une période fixe (par exemple 1 an). Il peut être interprété comme le capital économique additionnel, qui doit être détenu pour un portefeuille donné au delà de la réserve de crédit, afin de couvrir les pertes inattendues.



L'approche développée ici pour mesurer les pertes attendues et inattendues diffère néanmoins des modèles précédents sur plusieurs points.

Tout d'abord, cette approche modélise la distribution de pertes de façon discrète, en fonction du nombre et de la taille des crédits. Elle autorise également le calcul d'une "prime

de large exposition", qui est une prime de risque pour assurer les portefeuilles moins diversifiés au niveau du risque.

Ensuite, la distribution des pertes est largement influencée par l'état actuel de l'économie, plus que par les moyennes historiques : en effet, celles-ci ne correspondent pas à l'état du crédit courant. Le modèle doit donc prendre en compte les effets cycliques du défaut qui déterminent le comportement du partage des risques entre les acteurs majeurs d'un portefeuille diversifié. Les facteurs macroéconomiques ont donc une importance non négligeable, dans le calcul du risque réel de crédit d'un portefeuille.

De plus, les spécificités d'un pays ou d'une industrie influençant le risque sont explicitement utilisées dans le modèle à travers des relations empiriques qui permettent de définir des corrélations sectorielles que ce soit au point de vue régional ou industriel, au niveau individuel ou du portefeuille.

Le modèle en lui-même comporte deux composantes :

- Un modèle de risque de défaut systématique multifactoriel.

Ce modèle est utilisé pour simuler le défaut moyen conditionnel corrélé ainsi que les probabilités de migrations pour chaque segment pays/industrie/notation.

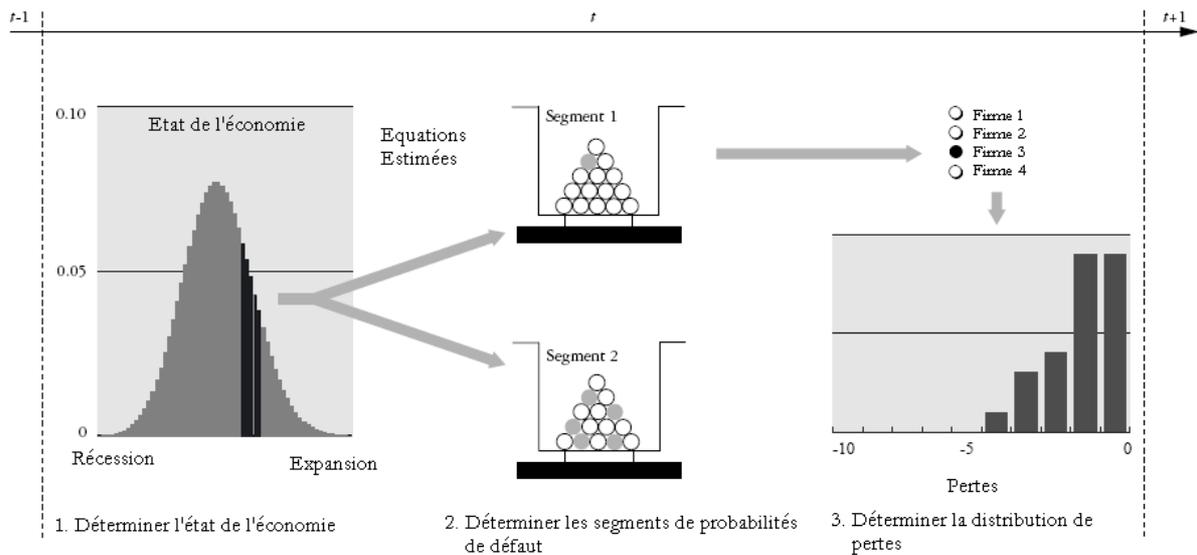
Les probabilités de défaut moyennes de ces segments sont rendues conditionnelles par rapport à l'état de l'économie et tiennent compte de la sensibilité des entreprises par rapport à cet état à l'aide de données historiques.

- Un modèle de calcul de la distribution discrète des pertes pour toutes les expositions de crédit d'un portefeuille qu'il soit liquide, illiquide, constant, non constant, diversifié ou non.

Celui-ci est complété par une agrégation des distributions marginales et conditionnelles des pertes individuelles pour atteindre une distribution totale du portefeuille.

De plus, nous ajoutons une corrélation dans les défauts des différentes contreparties définie par le risque systématique. Ce calcul nous conduit au taux de défaut corrélé moyen.

CreditPortfolioView calcule les pertes selon le modèle suivant :



Le temps est divisé en périodes discrètes, indexées par t .

Durant chaque période, nous avons trois étapes :

- une simulation pour déterminer l'état de l'économie,
- le calcul des migrations de notations et d'évolution des taux de défaut pour chaque segment industrie/région grâce aux équations du modèle,
- enfin un échantillon du portefeuille nous permettant de calculer le défaut actuel de celui-ci.

La méthode de calcul des corrélations est basée sur l'hypothèse que les corrélations entre défauts des firmes sont liées aux corrélations entre les segments auxquels elles appartiennent et à l'état de l'économie.

Deuxième Partie :

Comparaison des modèles

Comparaisons des quatre modèles

Dans ce chapitre, nous recenserons les avantages et les inconvénients de chacun des modèles et effectuerons lorsque cela est possible une comparaison.

Avant d'entrer dans les détails concernant chaque modèle, nous pouvons tout d'abord faire la constatation que tous les modèles n'ont pas vraiment le même objectif :

- le modèle CreditMonitor a un but plus global et estime les probabilités de défaut grâce à un ensemble d'équations basées sur le cours et la volatilité des titres d'une entreprise, puis calcule une réserve,
- les trois autres modèles utilisent les probabilités de défaut comme entrée et calculent une agrégation de ces probabilités pour avoir une vision portefeuille du risque et donc une distribution.

Le modèle CreditMonitor de la firme KMV-Moody's

Ce modèle est basé sur trois étapes :

- estimation de la valeur de marché et de la volatilité des actifs de la firme,
- calcul de la distance au défaut,
- déduction des probabilités de défaut en fonction de la distance au défaut,

Ce modèle est relativement simple et facile à utiliser.

Comme celui-ci se base sur la méthode de tarification de Merton, il n'utilise pas de probabilités de défaut et de matrice de transition en entrée fournies par les agences de notations, mais la valeur et la volatilité des actions.

Ces données, sont facilement récupérables et peuvent être actualisées quotidiennement, contrairement aux notations qui sont des données annuelles. C'est pourquoi une plus grande précision, et un suivi journalier sont possibles avec cette méthode.

De plus la firme KMV-Moody's a montré qu'à l'intérieur d'une classe de notation, les probabilités de défaut peuvent être largement différentes d'une firme à une autre, ce qui remet en cause la précision des méthodes plus globales de type CreditMetrics.

En revanche, comme ce modèle intègre une valeur par émetteur, contrairement à CreditMetrics qui se sert de classes de notations, il peut nécessiter des temps de traitement importants.

Le second inconvénient est que le modèle ne tient pas compte de la valeur de marché à travers les expositions, ce modèle manque donc de réalisme.

Ensuite, comme nous le verrons dans le modèle CreditMetrics, la structure par terme des taux d'intérêt est supposée constante et la corrélation entre risque de marché et risque de crédit est omise. Ce qui nous semble peu réaliste.

De plus, bien que nous ne l'ayons pas abordé ici, KMV utilise des données historiques concernant certains facteurs macroéconomiques pour déduire les Expected Default Frequency des Distances au Défaut. Cela suppose donc une stationnarité concernant les probabilités de défaut, alors qu'il a été prouvé, notamment par Wilson que les probabilités de défaut dépendent du cycle économique.

Enfin, un dernier problème concerne la détermination des valeurs en entrée. En effet pour les entreprises non cotées, nous pouvons attribuer une valeur "fictive" de l'action en se basant sur le rapprochement de celle-ci avec une entreprise cotée. Néanmoins, le modèle devient donc moins précis.

CreditMetrics de la firme JP Morgan

Le modèle est basé sur trois étapes logiques.

Les documents permettant de l'expliquer sont transparents et permettent à tout utilisateur de savoir de quelle manière fonctionne le logiciel. Ainsi, celui-ci peut le comprendre afin d'améliorer le processus.

Ensuite, JP Morgan introduit une amélioration considérable par rapport à l'ancienne méthode qui consiste à calculer, en plus du défaut, la perte liée à la dégradation et l'augmentation de sa notation sur un an ce qui nous donne une distribution.

Enfin cette méthode, simple elle aussi, est largement utilisée dans les banques et semble avoir fait ses preuves.

Néanmoins, de nombreux points laissent planer des doutes sur sa précision et son efficacité.

Tout d'abord, le modèle dépend entièrement des notations et matrices de transition fournies par Moody's ou Standard & Poor's. En l'absence de celles-ci, il est impossible d'implémenter le modèle ce qui rend la méthode très dépendante.

De plus ces matrices sont supposées constantes dans le temps, ce qui évidemment ne correspond pas à la réalité puisque les probabilités de défaut sont totalement dépendantes de certaines variables économiques temporelles.

Ensuite, le document, bien que transparent, reste totalement flou sur les corrélations entre les émetteurs. L'explication repose la majeure partie du temps sur une corrélation fixée et exogène or cela est inexact puisque la corrélation peut être réellement différente entre deux couples d'entreprises même si celles-ci ont la même notation. D'après les utilisateurs, estimer les corrélations à partir de cette méthode reste un exercice très délicat.

Il est à noter, que ce problème se retrouve aussi dans la méthode CreditMonitor.

Ensuite, en généralisant tout un portefeuille d'entreprises spécifiques à sept classes de notations, nous perdons les particularités de chacune. Nous entrons donc dans un domaine très imprécis où chaque entreprise d'une même catégorie serait censée avoir la même probabilité de défaut.

De plus, certains théoriciens remettent en cause la justesse des probabilités de défaut calculées à partir des données historiques, le contexte économique étant changeant d'année en année.

Enfin, on peut s'interroger sur la pertinence d'un défaut intervenant de manière continue dans un exercice alors que la notation est mise à jour sur une base discrète. En effet, cela signifierait donc qu'une entreprise, dont la dégradation ou l'augmentation de notation ne se fait qu'en fin d'année voit sa position évoluer au milieu de celle-ci. Cette hypothèse, bien que pratique, n'est pas réaliste.

Le logiciel CreditRisk+ de la Credit Suisse

Ce modèle est appelé le modèle "actuariel" et reste une référence parmi les logiciels de risque de crédit. De la même façon que le modèle précédent, ce modèle a pour but de nous fournir une distribution de probabilité des taux de défaut.

Rappelons que ce modèle se base sur trois étapes :

- estimation de la fréquence des événements de défauts,
- estimation de la sévérité des pertes en cas de défauts,
- estimation de la distribution de la perte de défaut dans un portefeuille.

En premier lieu, il est important de remarquer que ce modèle, contrairement aux précédents, prend les probabilités de défaut en entrée et non en résultat. Les propriétaires de cette méthode restent très flous sur l'obtention des probabilités de défaut se concentrant plus sur la corrélation des défauts et la valeur d'un portefeuille face au risque.

Ensuite, peu d'éléments en entrée sont demandés

- les probabilités de défaut et leur volatilité,
- les taux de recouvrement.

Ceux-ci sont fournis par les agences de notations, ce qui, une fois de plus, simplifie son utilisation.

Enfin, une documentation claire et précise est fournie, permettant d'avoir une vue d'ensemble ou une vue plus détaillée sur la modélisation. Celle-ci étant mathématiquement beaucoup plus complexe, faisant entrer des lois de probabilité et des calculs assez poussés, un utilisateur non averti pourra tout de même comprendre les grandes lignes du moteur de calcul du logiciel.

Ce point est important : en effet si CreditRisk+ et CreditMetrics fournissent ces "technical documents", la firme KMV Moody's (de même que la firme Mc Kinsey) s'en abstient, ce qui rend le travail d'étude beaucoup plus complexe.

Cependant, des études ont montré que cette méthode sous-estime le risque dans de nombreux cas et donne des valeurs imprécises en ce qui concerne les corrélations.

En effet, ce modèle considère les corrélations en entrée et non en sortie comme nous avons pu le voir dans les autres modèles. Le seul élément de corrélation présent est la volatilité de chaque taux de défaut.

Ensuite, le logiciel tient compte uniquement de la présence ou non du défaut et non pas de la gradation ou de la dégradation de la qualité de crédit.

De plus, le modèle reste assez flou concernant la volatilité du taux de défaut approprié à considérer, n'apportant aucune préconisation. Il faudrait donc tester à quel point le modèle peut être sensible à la variation de cette valeur.

Enfin, le même problème présent dans chacune des trois méthodes précédentes est encore d'actualité ici : les corrélations restent très difficiles à estimer. De plus, les documents fournis, bien que complets d'autre part, occultent totalement ce problème.

La méthode CreditPortfolioView de Mc Kinsey&Co

Cette méthode, appelée "méthode économétrique" est beaucoup moins utilisée que celles vues précédemment, c'est pourquoi, il n'existe que très peu de données, de modèles, et de critiques concernant celle-ci.

Le plus de ce logiciel est de prendre en compte de nombreuses données macroéconomiques qui permettent à celui-ci de coïncider au plus près avec la réalité actuelle du marché. Les entrées concernant autant la domiciliation de l'entreprise, que son secteur industriel ainsi que les nombreux facteurs économiques présents permettent d'anticiper avec précision l'évolution du marché.

Cependant, ces entrées sont nombreuses, très difficile à trouver et souvent incertaines. En effet, recueillir des données sur chaque entreprise et chaque pays reste un exercice long et compliqué. CreditPortfolioView est donc un modèle très difficile à implémenter, ce qui explique peut être sa faible utilisation.

Conclusion

D'après ce que nous pouvons voir, il semble qu'aucun de ces modèles ne puisse être considéré comme un modèle interne idéal pour prévoir un capital réglementaire lié au risque de crédit. Par exemple, tous ces modèles prennent l'hypothèse que les taux d'intérêt et les expositions sont déterministes, ce qui pour des options simples est vrai, mais devient totalement hasardeux pour d'autres produits dérivés. Etudions une méthode innovante concernant le risque de crédit mettant en scène des modèles à intensité.

Troisième Partie :

Le modèle de Duffie

Le modèle à intensité de Duffie

Les modèles à formes réduites ne s'intéressent pas aux raisons économiques du défaut, c'est-à-dire à la valorisation boursière de la société ou à sa structure d'entreprise mais considèrent celui-ci comme un événement aléatoire conditionné par les données disponibles sur le marché du crédit.

Ces modèles ont récemment été introduits dans la littérature sur la théorie financière pour le risque de crédit. Ils nous fournissent une modélisation cohérente et assez facile à implémenter mais n'ont pas encore rencontré le succès escompté auprès des régulateurs et des praticiens. Cela est sûrement dû à leur manque de flexibilité.

Nous aborderons ici un modèle avec un processus d'intensité considérant le défaut comme un temps d'arrêt τ .

Cette approche a été longuement abordée par Duffie dans plusieurs de ses articles, et semble être la référence en ce qui concerne les modèles à intensité stochastique.

En réalité, ce modèle constitue une extension continue du modèle CreditRisk+ dont nous avons parlé précédemment.

Dans cette section nous calculerons et approfondirons les diverses notions de cette méthode.

Le modèle proposé par Duffie voit les processus de défaut comme des variables aléatoires pouvant effectuer des "sauts" au moment du défaut selon un processus à intensité stochastique.

Avec l'étude du comportement joint des temps de défaut, des taux d'intérêt, des paiements assurés des titres, et des taux de couverture en cas de défaut, nous pouvons déterminer le comportement stochastique de la structure par terme des obligations risquées.

En application, les intensités de défaut peuvent être autorisées à dépendre des variables observables liées avec la probabilité de défaut. Par exemple, nous pouvons parler des ratios dettes/fonds propres, de la volatilité, de l'endettement, des prix des titres sur le marché, et des mesures de performance du secteur industriel et autres variables macroéconomiques.

Nous allons étudier si cette méthode permet de corriger les principaux défauts identifiés dans les modèles précédents :

- le taux sans risque évolue de manière stochastique alors que dans les modèles précédents celui-ci est supposé constant,

- les corrélations de défaut sont souvent prises en compte de manière très brute, donnant implicitement une corrélation de défaut similaire pour chaque catégorie de firme.
- les revenus sur un portefeuille de crédit sont souvent "biaisés sur la gauche". Cela signifie que la dégradation potentielle de la notation d'une firme donnée par Moody's ou S&P à un effet immédiat sur le prix de l'action. En revanche, l'augmentation potentielle se répercute à beaucoup plus long terme,
- cette méthodologie doit amener des spécifications cohérentes concernant la dynamique risque-neutre utilisée pour prédire et déterminer la Value at Risk de Crédit.

Processus d'intensité associé à un temps d'arrêt

Nous rappellerons dans ce chapitre les définitions et modèles de base pour un processus à intensité.

Nous nous plaçons dans un espace probabilisé (Ω, F, P) avec une filtration $\{G_t : t \geq 0\}$ de F .

Soit l'intensité de l'arrivée de défaut :

$$P(\tau < t + \Delta t / G_t) \approx \lambda(t)\Delta(t)$$

avec τ l'instant de défaut

Δt intervalle de temps très petit

Soit K , un processus de comptage enregistrant par temps t le nombre d'événements de défaut d'un portefeuille : $K_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$.

Proposition : Soit un processus de comptage K G_t -adapté et λ est un processus prévisible

non négatif, tel que pour presque tout t $E(\int_0^t \lambda_s ds) < \infty$ alors

- $M_t = K_t - \int_0^t \lambda_s ds$ est une martingale.

- K est non explosif et λ est l'intensité de K .

Soit pour une semi-martingale Y , le saut $\Delta Y_t = Y_t - \lim_{s \rightarrow t} Y_s$

Comme le processus K a une intensité déterminée λ et est non explosif il s'agit d'un processus de Poisson. La durée entre les événements suit une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$

Un temps d'arrêt τ a une intensité λ si τ est le premier événement d'un processus de comptage non explosif d'intensité λ .

Comme K est un processus de comptage non explosif d'intensité λ et \hat{G}_t la filtration telle que $\hat{G}_t \subset G_t$ alors K est doublement stochastique suivant \hat{G}_t si λ est un processus \hat{G}_t -prévisible et si pour tout t tel que $s > t$, conditionné par $G_t \vee \tilde{G}_s$ généré par $G_t \cup \hat{G}_t$ $K_s - K_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\int_t^s \lambda_u du$.

On dit que τ est doublement stochastique puisque le processus de comptage sous-jacent est doublement stochastique.

La probabilité de survie est donc

$$P(\tau > s / G_t) = E(e^{-\int_t^s \lambda(u) du} / G_t)$$

Processus Affine

La littérature fourmille de modèles utilisant des processus affines à intensité, notamment, en modélisation financière des taux d'intérêt. Nous pouvons citer par exemple le modèle de Ornstein-Uhlenbeck, appliqué au taux d'intérêt par Vasicek en 1977 et la diffusion de Feller sur la modélisation du taux d'intérêt par Cox Ingersoll Ross en 1951.

De plus, une classe générale multi-variée d'un modèle de sauts à diffusion affine a été introduite par Duffie et Kan (1996) pour la modélisation de la structure par terme.

Enfin, Dai et Singleton, en utilisant un modèle de diffusion affine à trois dimensions en 2000, ont découvert que les variances conditionnelles et les variables d'état corrélées négativement sont des ingrédients essentiels dans l'explication du comportement historique de la structure par terme du taux d'intérêt US.

Pour la tarification des options, Heston a proposé un modèle de volatilité stochastique affine concernant le change et le prix des titres proposé.

Un processus affine dans un espace $D \in \mathbb{R}^d$ est un processus de Markov dont la fonction caractéristique est :

$$E(e^{iu\lambda(t)} / \lambda(s)) = e^{\rho(t-s,iu) + \psi(t-s,iu)\lambda(s)}$$

avec $\rho(.,iu), \psi(.,iu)$ coefficients.

Nous considérons que X est régulier si les coefficients $\rho(.,iu), \psi(.,iu)$ de la fonction caractéristique sont dérivables et continus en 0. De manière simplifiée, X doit suivre un processus de sauts de la forme :

$$d\lambda_t = \bar{x}(\lambda_t)dt + c(\lambda_t)dB_t + dJ_t$$

où $\bar{x}(x)$ et $c(x)$ sont affines.

B_t est un processus brownien standard géométrique

Cette classe inclut le processus gaussien Ornstein-Uhlenbeck où $c(x)$ est constant et $\bar{x}(\lambda_t)$ est remplacé par une expression contenant un taux de retour à la moyenne soit $\kappa(\bar{x} - \lambda_t)$ aussi bien que le processus racine carrée c'est-à-dire où $\bar{x}(\lambda_t)$ devient $\kappa(\bar{x} - \lambda_t)$ et où $c(x)$ est substitué par $c\sqrt{\lambda_t}$. Ces deux exemples sont unidimensionnels.

Reprenons le cas du processus racine carrée. Nous pouvons écrire

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{x} - \lambda_t)dt + c\sqrt{\lambda_t}dB_t$$

avec des paramètres c, κ, \bar{x} constants positifs.

\bar{x} est appelé "moyenne à long terme", et κ le taux de retour à la moyenne. Cela signifie que les valeurs de λ_t convergent vers \bar{x} à un taux κ quand t tend vers ∞ .

Cette diffusion, conçue à l'origine pour modéliser les tailles des populations fluctuant aléatoirement, est devenue le populaire processus de Cox, Ingersoll, Ross (CIR) en finance.

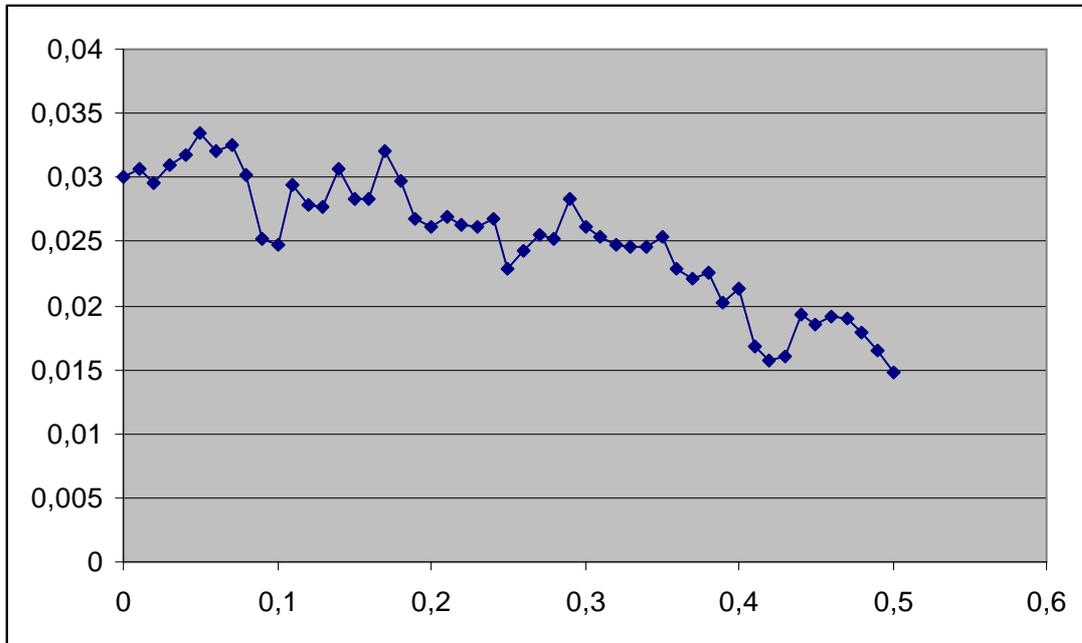
A cette équation, ajoutons un processus de Poisson J indépendant de B.

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{x} - \lambda_t)dt + c\sqrt{\lambda_t}dB_t + dJ_t$$

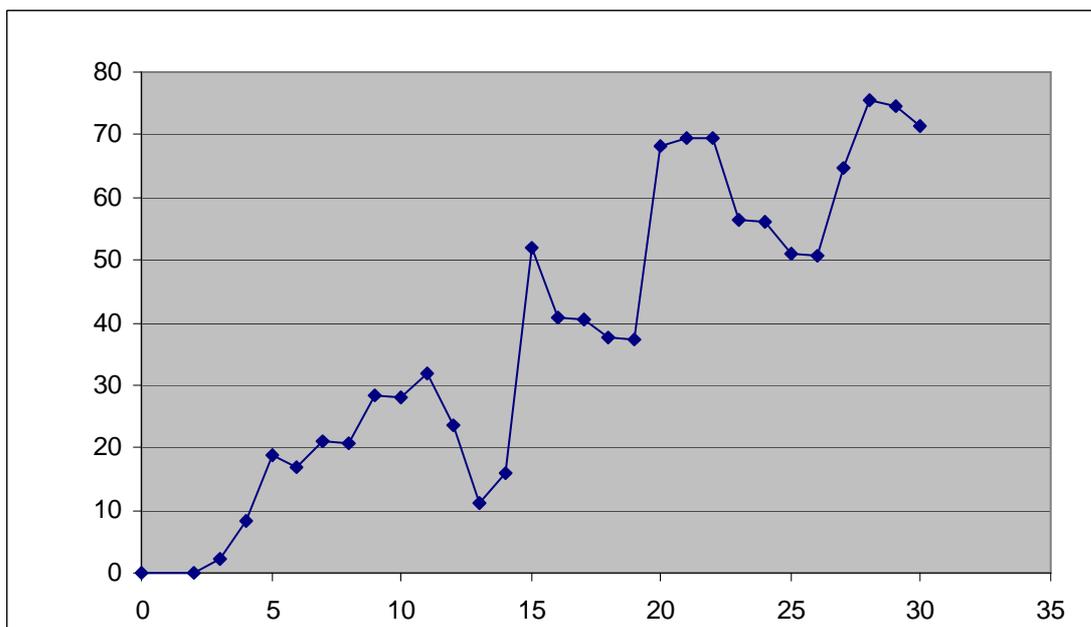
Le processus J est un processus de sauts dont les arrivées suivent une loi de Poisson $P(l)$ les amplitudes des sauts sont indépendantes entre elles et suivent une loi exponentielle $\varepsilon\left(\frac{1}{\gamma}\right)$.

L'intensité λ d'arrivée des sauts et la moyenne γ de l'amplitude des sauts complètent la liste $(c, \kappa, \bar{x}, \lambda, \gamma)$ des paramètres d'un processus affine fondamental.

Ci-dessous nous avons simulé un processus affine fondamental sans saut



Dans le graphique ci-dessous, nous avons simulé le processus précédent mais cette fois-ci avec sauts.



Les paramètres ont été calibrés d'après les travaux de Duffie soient :

$$\kappa = 0.6$$

$$\bar{x} = 0.02$$

$$c = 0.14$$

$$l = 0.2$$

$$\gamma = 0.1$$

Fonction de survie

A présent, cherchons à modéliser la probabilité de survie $P(\tau \geq t)$ pour t donné et pour un temps d'arrêt τ d'intensité l sur un horizon T .

Pour $0 < t \leq T$, soit Y_t :

$$Y_t = E[\exp(-\int_t^T \lambda_s ds) | F_t]$$

Une propriété de la fonction affine est que la probabilité de survie peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$Y_t = E[\exp(-\int_t^s \lambda(u) du) | G_t] = \exp[\alpha(s-t) + \beta(s-t)\lambda(t)] = P(\tau > s)$$

Pour déterminer les valeurs des solutions de $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ nous résolvons dans un premier temps les équations de Riccati suivantes :

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = n\beta(t) + \frac{1}{2} p\beta(t)^2 + q$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = m\beta(t) + l \frac{\gamma\beta(t)}{1 - \gamma\beta(t)}$$

pour les constantes n, p, q, m, l, γ

Nous posons comme conditions que :

$$\begin{aligned}
n &= -\kappa \\
p &= c^2 \\
q &= -1 \\
m &= \kappa \bar{x}
\end{aligned}$$

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0$$

Le résultat de ces équations nous donne les valeurs des coefficients $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ exprimés en fonctions des paramètres de la diffusion sous la forme

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \frac{1 + a_1 e^{b_1 s}}{c_1 + d_1 e^{b_1 s}} \\
\alpha(s) &= \frac{m(-c_1 - d_1)}{b_1 c_1 d_1} \log \frac{c_1 + d_1 e^{b_1 s}}{c_1 + d_1} + \frac{m}{c_1} s \\
&+ \frac{l(a_2 c_2 - d_2)}{b_2 c_2 d_2} \log \frac{c_2 + d_2 e^{b_2 s}}{c_2 + d_2} + \left(\frac{l}{c_2} - l \right) s
\end{aligned}$$

où

$$c_1 = \frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 2c^2}}{-2}$$

$$d_1 = \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 2c^2}}{-2}$$

$$a_1 = -1$$

$$b_1 = \frac{d_1(-\kappa - 2c_1) - (-\kappa c_1 + c^2)}{-c_1 - d_1}$$

$$a_2 = \frac{d_1}{c_1}$$

$$b_2 = b_1$$

$$c_2 = 1 - \frac{\gamma}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{d_1 + \gamma}{c_1}$$

Modèle de défaut pour plusieurs débiteurs

Nous allons étudier les corrélations entre plusieurs titres d'un portefeuille tout en étudiant le comportement de l'intensité de défaut de chaque débiteur.

Propriété :

Un modèle affine fondamental peut se décomposer sous la forme de somme de modèles affines indépendants dont les paramètres (c, κ, γ) sont identiques.

Soient N émetteurs dont les temps de défaut $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ ont des processus d'intensité affine fondamentaux $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

Chacune de ces intensités peuvent être décomposées sous la forme

$$\lambda_i = X_c + X_i$$

avec X_c, X_i processus affines fondamentaux de paramètres $(c, \kappa, \bar{x}_c, l_c, \gamma)$ et $(c, \kappa, \bar{x}_i, l_i, \gamma)$ et X_c la partie commune à toutes les entreprises et X_i la partie spécifique.

Alors λ_i est un processus affine fondamental ayant pour paramètres $(c, \kappa, \bar{x}, l, \gamma)$ avec $\bar{x} = \bar{x}_i + \bar{x}_c$ et $l = l_i + l_c$.

Nous avons donc $N+1$ processus indépendants.

Notons le paramètre $\rho = l_c / l$ la fraction des sauts que subit le portefeuille par obligation. Un émetteur ne supporte en fait pas l'ensemble de ses obligations. Ce paramètre peut être vu comme la probabilité qu'un saut arrive pour i sachant qu'il en est arrivé un pour j . Si de plus $X_c(0) = \rho \lambda_i(0)$ alors ρ est la corrélation instantanée initiale entre λ_i, λ_j pour tout i est j

C'est-à-dire $\rho = \lim_{t \rightarrow 0} (Corr(\lambda_i(t), \lambda_j(t)))$.

Nous supposons de plus que $\rho = \bar{x}_c / \bar{x}$

Un modèle affine permet une corrélation pouvant être facilement implémentée.

Fonction de répartition du prochain temps de défaut

Proposition 1 : Soient X et Y deux processus affines fondamentaux, indépendants, avec pour paramètre respectivement $(c, \kappa, \bar{x}_X, l_X, \gamma)$ et $(c, \kappa, \bar{x}_Y, l_Y, \gamma)$.

Alors $Z=X+Y$ est un processus affine fondamental ayant pour paramètres $(c, \kappa, \bar{x}, l, \gamma)$ avec $\bar{x} = \bar{x}_X + \bar{x}_Y$ et $l = l_X + l_Y$

Proposition : Considérant N titres, la fonction de répartition du prochain temps de défaut peut s'écrire sous la forme:

$$F(t) = 1 - \exp\left(\alpha_c(t) + \beta_c(t)X_c(\tau) + N\alpha_i(t) + \beta_i(t)\sum_{j=1}^N X_j(\tau)\right)$$

avec les paramètres $\alpha_c(t), \beta_c(t), X_c(\tau), \alpha_i(t), \beta_i(t), X_j$ que nous avons vu précédemment

Lemme 1 : Considérons $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ des temps d'arrêt correspondant à des défauts. Nous supposons que, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ le temps de défaut τ_i a un processus d'intensité λ_i . Par ailleurs, on suppose que $P(\tau_i = \tau_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Alors nous avons un processus pour le premier instant de défaut $\tau^{(N)} = \min(\tau_1 \dots \tau_N)$ d'intensité $\lambda_1 + \dots + \lambda_N$.

Calcul de la probabilité de k défauts

Nous calculons à présent la probabilité de k défauts.

La probabilité que le nombre M de défaut soit égal à k est :

$$P(M = k) = C_N^k P(d_1 \cap \dots \cap d_k \cap d_{k+1}^c \cap \dots \cap d_N^c)$$

Où nous noterons

$$q(k, N) = P(d_1 \cap \dots \cap d_k \cap d_{k+1}^c \cap \dots \cap d_N^c)$$

la probabilité que seules k entreprises fassent défaut sur N entreprises.

Où d_i représente l'évènement l'entreprise i fait défaut et d_i^c l'évènement l'entreprise i ne fait pas défaut.

Proposition : Si p_j est la probabilité que sur j titres, au moins l'un fasse défaut avant la maturité et $q(k, N)$ la probabilité qu'exactement k titres fassent défaut avant la maturité alors :

$$q(k, N) = \sum_{j=1}^N (-1)^{(j+k+N+1)} C_k^{N-j} p_j$$

Exemple numérique

Pour la suite, nous utiliserons 4 sets de paramètres pour calculer le modèle.

Set	k	\bar{x}	c	l	μ
1	0,6000	0,0200	0,1410	0,2000	0,1000
2	0,6000	0,0156	0,0000	0,2000	0,1132
3	0,6000	0,0373	0,1410	0,0384	0,2500
4	0,6000	0,0005	0,1410	0,5280	0,0600

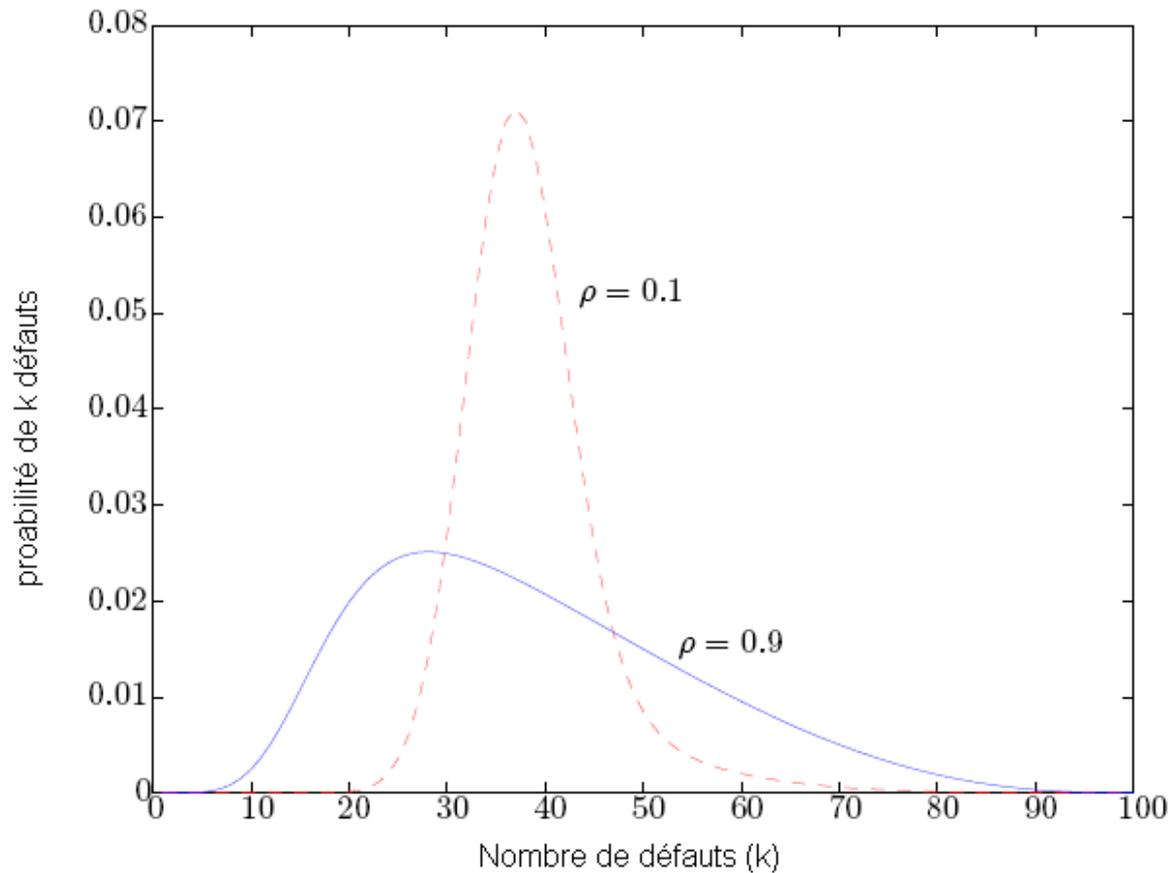
Soit le temps de défaut $\tau^{(N)} = \min(\tau_1, \dots, \tau_N)$ dont l'intensité vaut $\lambda_1 + \dots + \lambda_N$.

Nous avons vu que la fonction de répartition du prochain temps de défaut parmi k titres est :

$$F(t) = 1 - \exp \left[\alpha_c(t) + \beta_c(t) X_c(\tau) + N \alpha_i(t) + N \beta_i(t) \sum_{j=1}^N X_j(\tau) \right]$$

D'après les graphiques tirés de l'article de Duffie et Gârleanu prenant en compte les données des différents sets, nous pouvons faire certaines remarques.

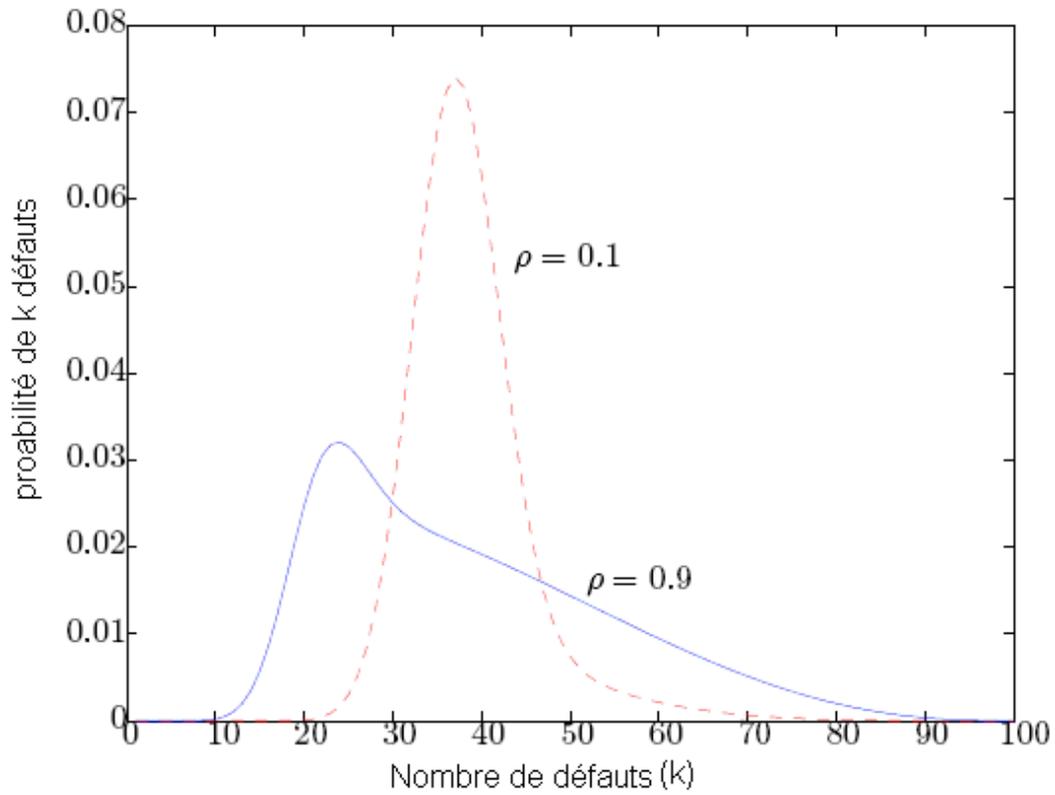
Tout d'abord la distribution du nombre de défauts est écrasée au fur et à mesure que nous paramétrons une corrélation plus importante. Il est facilement interprétable que des défauts indépendants seront plus centrés sur la moyenne.



Probabilité de k défauts selon différents niveaux de corrélation pour le Set 1

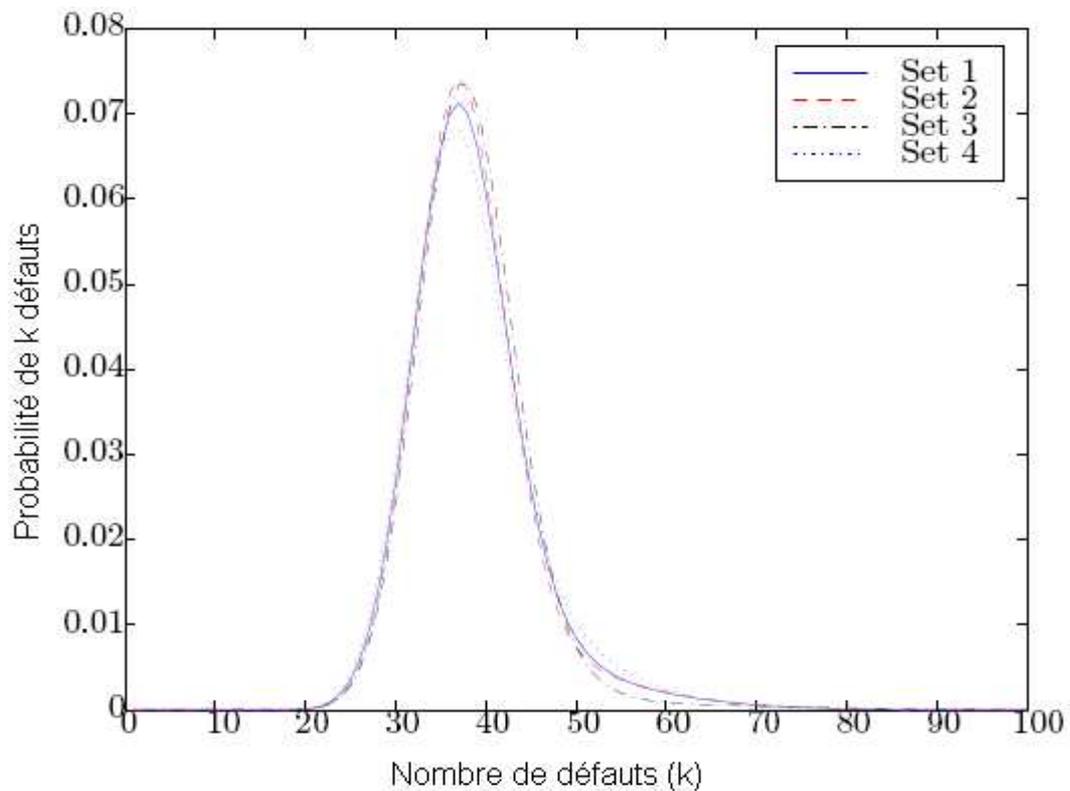
Ce graphique montre la probabilité $q(k,100)$ de k défauts pendant 10 ans sur un groupe de 100 éléments pour le Set 1 et une corrélation haute (0.9) ou basse (0.1)

Autre remarque intéressante, le paramétrage du modèle n'influence que peu la courbe en cas de faible corrélation mais est plus marquante en cas de forte corrélation.

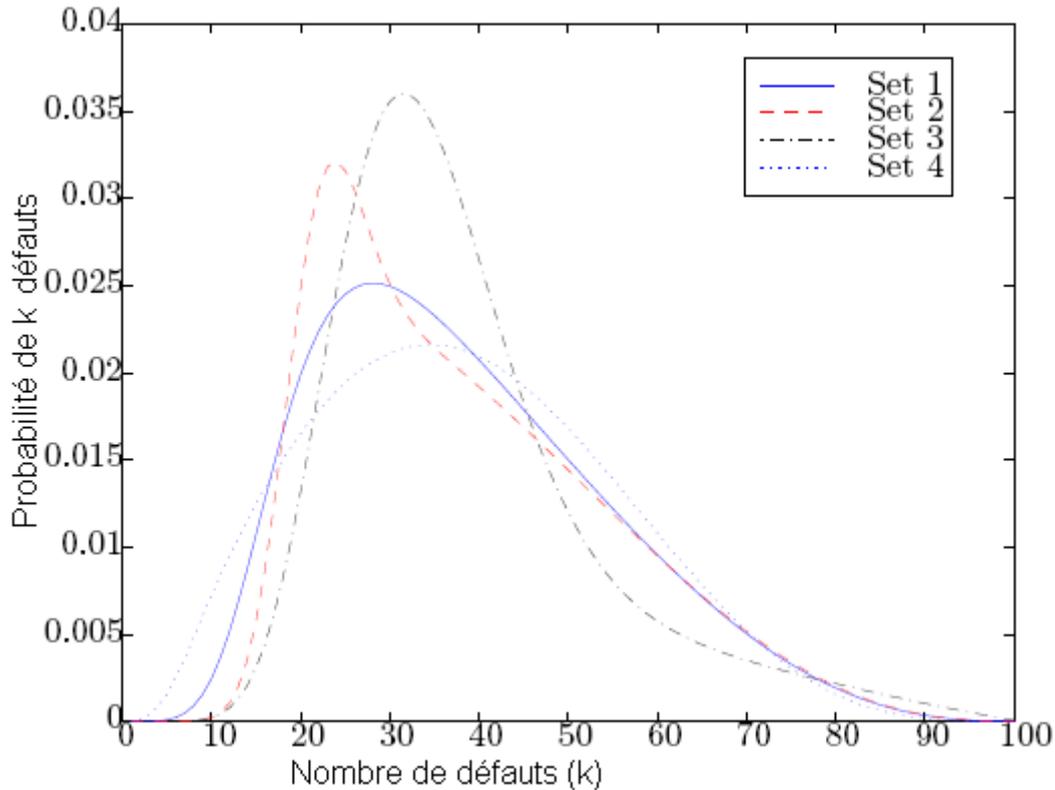


Probabilité de k défauts selon différents niveaux de corrélation pour le Set 2

Ci-dessous, un aperçu de notre précédente remarque sur la faible et la forte corrélation :



Probabilité de k défauts pour un faible niveau de corrélation (0.1) pour tous les sets



Probabilité de k défauts pour un fort niveau de corrélation (0.9) pour tous les sets

Risque concernant la concentration sectorielle ou régionale

Il pourrait être intéressant de considérer le modèle à plusieurs débiteurs en intégrant le risque sectoriel. Pour cela, il suffirait de découper comme précédemment le processus affine en plusieurs processus affines indépendants de manière plus ou moins éclatée suivant la complexité du modèle.

Par exemple on peut supposer que le temps de défaut τ_i de l'émetteur i a une intensité $\lambda_i = X_i + Y_{C(i)} + Z$ où le facteur $Y_{C(i)}$ est commun à toutes les sociétés du secteur et le facteur Z commun à tous les émetteurs (X_i est le facteur particulier de la société i). Nous avons donc une décomposition en processus affines fondamentaux indépendants.

Nous obtenons :

$$E \left[\exp \left(\int_t^{t+s} -\lambda_i(u) du \right) | F_t \right] = \exp \left[\alpha(s) + \beta_i(s) X_i(t) + \beta_c(s) X_c(t) + N \alpha_i(t) + \beta_z(s) Z(t) \right]$$

Avec $\alpha(s) = \alpha_i(s) + \alpha_{C(i)}(s) + \alpha_z(s)$ et α, β calculés de la même manière que précédemment.

En généralisant le modèle, nous pouvons envisager un modèle multifactoriel avec des variables non indépendantes.

Calibrage du modèle

Une des parties les plus délicates du modèle consiste à calibrer ses paramètres. Le modèle étant relativement récent, il est difficile de recueillir un panel de données suffisamment large pour permettre une étude approfondie de celui-ci.

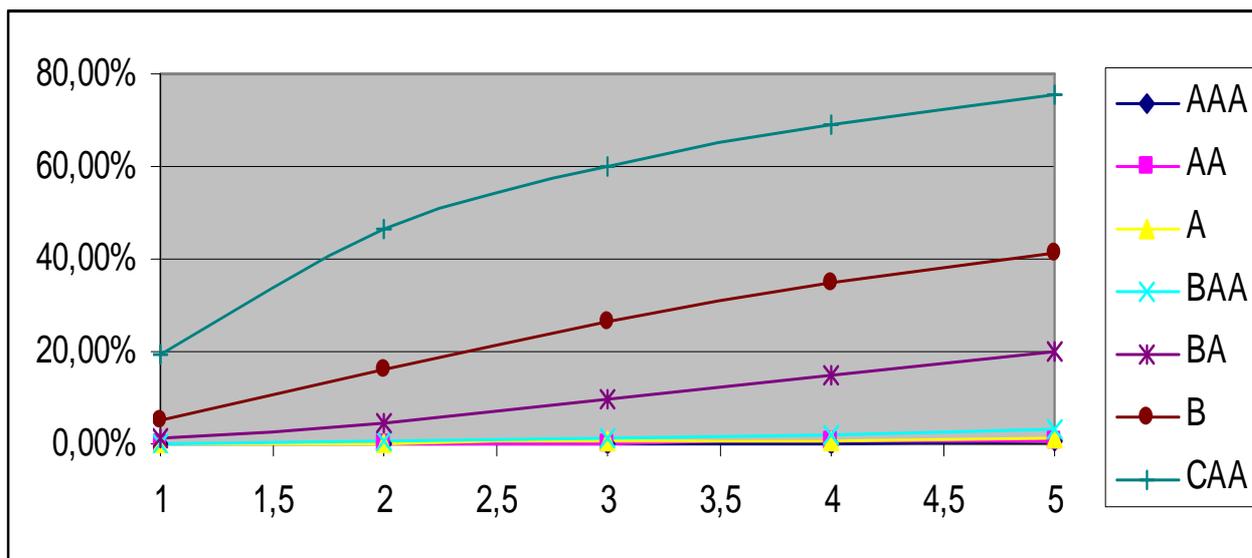
Nous considérerons le problème de la corrélation à part pour nous intéresser uniquement aux paramètres. Pour cela nous allons voir différentes méthodes.

1) La méthode avec les probabilités de défaut

Nous utilisons les tables de probabilités de défaut en fonction de la notation que nous avons vu précédemment sur un horizon temporel de 5 ans.

Notations	1	2	3	4	5
AAA	0,01%	0,04%	0,09%	0,18%	0,31%
AA	0,01%	0,06%	0,15%	0,27%	0,44%
A	0,07%	0,17%	0,30%	0,46%	0,65%
BAA	0,17%	0,41%	0,78%	1,25%	1,79%
BA	1,08%	3,41%	6,14%	8,76%	11,05%
B	4,95%	10,97%	15,75%	19,33%	21,98%
CAA	19,15%	27,43%	32,63%	36,32%	39,01%

Ci-dessous le graphique représentant les valeurs des probabilités de défaut cumulées sur 5 ans.



Certains paramètres du modèle seront déterminés arbitrairement comme la corrélation. Puis nous reprenons la fonction de répartition des défauts vue précédemment :

$$F(t) = 1 - \exp(\alpha_c(t) + \beta_c(t)X_c(0) + N\alpha_i(t) + N\beta_i(t)X_i(0))$$

Nous en déduisons les probabilités de défaut à divers horizon et nous calibrons le modèle en utilisant un algorithme de Newton.

On détermine ensuite pour chaque notation les paramètres qui se rapprochent le plus de ceux fournis par Moody's.

Des études ont montré que sans la corrélation, les paramètres pour une entreprise sont les suivants :

	c	γ	l	κ	\bar{x}	Précision
Aaa	0.15	0.25	0.000010	0.20	0.00020	10^{-6}
Aa	0.15	0.30	0.00015	0.20	0.00020	10^{-6}
A	0.15	0.50	0.00015	0.35	0.00025	10^{-6}
Baa	0.15	0.75	0.00020	0.50	0.00040	10^{-6}
Ba	0.15	1.60	0.00150	0.55	0.00100	10^{-4}
B	0.15	1.70	0.00350	0.60	0.00170	10^{-3}
Caa	0.15	1.80	0.00750	0.70	0.00350	10^{-2}

La colonne "Précision" est le résultat de la somme au carré de la différence entre les valeurs trouvées et les valeurs données par Moody's.

Une fois les paramètres calibrés, nous pouvons faire tourner le modèle.

La corrélation peut être introduite artificiellement suivant l'historique des titres et une analyse de l'économie.

Cette méthode n'est pas très fonctionnelle puisqu'elle se sert de modèles déjà existants pour déterminer les paramètres. Nous allons étudier une méthode alternative.

2) La méthode GMM simplifiée (Generalized Method of Moment : méthode des moments généralisés

Intéressons nous tout d'abord à un modèle simplifié où les sauts ont été omis.

Le modèle de Cox, Ross, Ingersoll, est donc de la forme :

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{x} - \lambda_t)dt + c\sqrt{\lambda_t}dB_t$$

- Méthode des moments généralisés.

Comme l'estimation des paramètres d'un modèle continu est assez délicate, nous allons donc discrétiser celui-ci.

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = (\kappa\bar{x} + \kappa\lambda_t) + \varepsilon_{t+1}$$

$$E[\varepsilon_{t+1}] = 0$$

$$E[\varepsilon_{t+1}^2] = \sigma^2\lambda_t$$

Même si discrétiser le modèle nous conduit à faire une approximation, l'avantage est que faire la variance des variations de l'intensité dépend directement du niveau de celle-ci. De plus, si la période est assez courte, l'erreur engendrée par la discrétisation sera minime.

Le principe de cette méthode est, à l'aide des équations ci-dessus, d'obtenir des conditions sur les moments d'après la méthode des moments de Hansen.

La méthode GMM converge asymptotiquement si les variations de l'intensité sont stationnaires et s'il existe des espérances.

Posons ϑ le vecteur de paramètres (a, b, σ) .

D'après l'équation précédente, ε_{t+1} est défini par :

$$\varepsilon_{t+1} = \lambda_{t+1} - \lambda_t - \kappa \bar{x} - b \kappa \lambda_t$$

De plus, on définit le vecteur $f_t(\vartheta)$ par :

$$f_t(\vartheta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} \cdot \lambda_t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \lambda_t \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 \lambda_t) \cdot \lambda_t \end{bmatrix}$$

D'après les équations précédentes, la propriété d'indépendance conclu que $E[f_t(\vartheta)] = 0$.

La procédure GMM consiste à remplacer $E[f_t(\vartheta)]$ par son estimation empirique $g_T(\vartheta)$ sur T observations avec :

$$g_T(\vartheta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\vartheta)$$

On considère ensuite les estimateurs des paramètres qui minimisent la forme quadratique suivante :

$$J_T(\vartheta) = g_T(\vartheta) \cdot W_T(\vartheta) \cdot g_T(\vartheta)$$

avec $W_T(\vartheta)$ matrice de poids, symétrique et positive.

Minimiser $J_T(\vartheta)$ revient à résoudre :

$$D'(\vartheta) \cdot W_T(\vartheta) \cdot g_T(\vartheta) = 0$$

Avec $D(\vartheta)$ matrice Jacobienne de $g_T(\vartheta)$ par rapport à ϑ .

En 1982, Hansen montre que l'on peut choisir la matrice $W_T(\vartheta)$ de façon à minimiser la matrice de covariance asymptotique en prenant :

$$W_T(\vartheta) = S^{-1}(\vartheta)$$

D'où

$$S(\vartheta) = E[f_t(\vartheta) \cdot f_t'(\vartheta)]$$

Notons $S_0(\vartheta)$ un estimateur de cette matrice de covariance, on peut calculer cette dernière pour l'estimateur GMM de ϑ :

$$\frac{1}{T} \cdot (D_0'(\vartheta) \cdot S_0(\vartheta) \cdot D_0(\vartheta))^{-1}$$

où $D_0(\hat{\vartheta})$ est le Jacobien, avec $\hat{\vartheta}$ le vecteur des paramètres estimés.

Nous utilisons cette matrice de covariance pour tester la significativité des paramètres.

La valeur minimale de la forme quadratique est distribuée selon un χ^2 sous l'hypothèse nulle que les conditions d'orthogonalité sont vérifiées.

- Application à notre modèle

Nous devons estimer les paramètres κ, \bar{x}, c du modèle uniquement puisque nous prenons un modèle sans sauts.

Nous ne disposons de données que sur les prix des obligations. La méthode GMM ne peut donc être appliquée telle quelle et doit bénéficier d'une légère adaptation.

Nous pouvons reconstituer les prix zéro coupon à partir des prix des obligations délivrant des coupons. Ces prix sont reliés ensuite à l'intensité de notre modèle ce qui nous donne l'équation suivante :

$$B_{t,T} = e^{(\alpha(T-t) + \beta(T-t) \cdot \lambda_t)}$$

avec $B_{t,T}$ le prix en t du zéro coupon de maturité T et les fonctions α et β sont celles précédemment citées.

Avec différentiation au premier ordre, nous obtenons l'équation

$$\ln(B_{t+1}) - \ln(B_t) = \frac{\delta\alpha}{\delta t} \cdot dt + \frac{\delta\beta}{\delta t} \lambda_t dt + \beta \cdot (\lambda_{t+1} - \lambda_t)$$

et

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = \kappa(\bar{x} - \lambda_t)dt + c\sqrt{\lambda_t}dZ_t$$

d'où

$$\ln(B_{t+1}) - \ln(B_t) = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \frac{\delta\beta}{\delta t} \lambda_t + \beta \cdot \kappa (\bar{x} - \lambda_t) \right) dt + \beta \cdot (\bar{x} - \lambda_t) + \beta \cdot c \cdot \sqrt{\lambda_t} dZ_t$$

Posons alors

$$\varepsilon_t = \beta \cdot c \cdot \sqrt{\lambda_t} dZ_t$$

La distribution est gaussienne donc

$$\varepsilon_t \approx N(0, \beta^2 \cdot c^2 \cdot \lambda_t dt) \approx N(0, \beta \cdot c^2 \cdot \lambda_t (\ln(B_t) - \alpha) dt)$$

Ce qui donne les conditions de moments suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0 \\ E_t[\varepsilon_{t+1}^2 - \beta c^2 \cdot (\ln B_t - \alpha) \cdot dt] = 0 \\ E_t[\varepsilon_{t+1} \cdot \frac{\ln B_t - \alpha}{\beta}] = 0 \\ E_t[(\varepsilon_{t+1}^2 - \beta c^2 \cdot (\ln B_t - \alpha) \cdot dt) \cdot \frac{\ln B_t - \alpha}{\beta}] = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\varepsilon_t = \ln(B_{t+1}) - \ln(B_t) - \left[\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \beta c^2 \cdot \theta + \left(\frac{\delta\beta}{\delta t} - \beta \kappa \right) \cdot \frac{\ln B_t - \alpha}{\beta} \right] dt$$

Nous pouvons obtenir les valeurs des paramètres par un algorithme de minimisation.

- Application pratique

Les étapes pour l'application sur un modèle sans saut sont donc :

- Récupération des prix sur un site spécialisé (Bloomberg...)
- Calcul des prix Zéro-Coupon de ces obligations
- Estimation des paramètres κ, \bar{x}, c grâce à la méthode GMM

Malheureusement, un manque de temps et de données ne m'a pas permis d'appliquer la méthode.

Afin de calculer le modèle avec sauts, nous pouvons nous reporter à la littérature à propos du modèle SGMM (méthode Spectral-GMM)

Conclusion

La méthode de Duffie sur les processus à intensité concernant le risque de crédit répond à quelques unes de nos questions.

Basé sur un modèle à composante affine, le taux de défaut est ici considéré comme un événement imprévisible régi par un processus à taux de hasard. Elle propose une fonction de survie et donc une probabilité de défaut qui en découle très théorique et différente de celle qu'on a pu voir jusqu'à présent.

Ce modèle est une bonne méthode alternative aux modèles existants, comblant quelques faiblesses de manière très mathématique.

De plus, il n'est pas nécessaire d'acheter des données à des firmes pour l'implémenter.

En revanche, cette méthode est peu utilisée par manque de maniabilité.

Parmi les points négatifs, nous pouvons citer un manque de flexibilité ainsi qu'un calibrage compliqué du modèle.

De plus, nous n'avons pas assez de recul sur les résultats.

En conclusion, si ce modèle est une bonne base de recherches, de nombreuses études devront encore être effectuées pour obtenir l'aboutissement de celui-ci.

Conclusion

Dans un premier temps, nous avons décrit les méthodes utilisées par les logiciels commercialisés par des institutions bancaires concernant le calcul du risque crédit. Comme nous l'avons vu, ces méthodes divergent sur plusieurs points mais gardent une trame commune. Cette homogénéité présente toutefois quelques faiblesses.

Avec d'une part le renforcement des lois concernant Bâle II et d'autre part les crises que traverse le secteur, l'étude d'une nouvelle méthode est devenue un point central de préoccupation des entreprises. C'est pourquoi, une demande croissante d'outils de mesure encore plus performants est apparue sur le marché.

Le cœur de ce document présente donc une nouvelle méthode appelé "méthode concernant les modèles à intensité" dont le principal auteur est Duffie. Cette, méthode, bien que prometteuse par de nombreux aspects, semble encore assez peu utilisée et peu utilisable. Un manque de recul, ne permet pas encore d'avoir une vue d'ensemble des problématiques posées par cette méthodes; celle-ci n'étant de toute façon pas totalement aboutie.

Je regrette par ailleurs de n'avoir pas pu disposer tout le long de mon stage des données nécessaires pour faire moi-même les calculs, j'ai donc dû me baser sur des estimations établies par d'autres personnes ayant étudié le sujet.

Bibliographie

C. CHAMPAGNE. (1999), *Modèle d'évaluation du Crédit : CREDITMETRICS*, HEC Montréal

CREDITMETRICS - Technical Document. JP Morgan

CREDITRISK+ - A Credit Risk Management Framework Credit Suisse First Boston

P. CROSBIE (2003) *Modeling Default Risk*

M. CROUHY, D. GALAI, R. MARK (2000) *A comparative analysis of current credit risk models*

T. DAKHLI. (2003) *Analyse de la dépendance de défaut et Evaluation des dérivés de crédit sur portefeuille*, HEC Montréal

D. DUFFIE. (2004). *Credit Risk Modeling with Affine Processes*. Stanford University and Scuola Normale Superiore, Pisa.

D. DUFFIE, N. GARLEANU (2001). *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligation*. Graduate School of Business. Stanford University.

M. GORDY (2000) *A comparative anatomy of credit risk models*

C. GOURIEROUX (2003) *Econométrie de la finance : exemple du risque de crédit*. Les Cahiers du CREF. HEC Montréal.

C. GOURIEROUX, A. MONFORT, V. POLIMENIS (2005) *Affine Model for Credit Risk Analysis*

C. GOURIEROUX, A. TIOMO. *Risque de Crédit, une méthode avancée*.

A. GUILHAMON (2001) *Etude et valorisation d'un dérivé de crédit*. Thèse ENSAE.

D. KURTZ, T. PIGNARD *Modélisation du risque de crédit*. DEA Statistique et Modèles aléatoires en économie et finance.

G. ODERDA, M. DACOROGNA, T. JUNG. (2002) *Credit Risk Models : Do they deliver their promises? A Quantitative Assesment.*

K. PHELAN, C. ALEXANDER (1999) *Credit models : Different Strokes.* Risk Magazine, Credit Risk supplement.

F. PLANCHER (2003) *Utilisation de méthode de simulation en assurance.* JWA Actuaire

T. RONCALLI (2001) *Introduction à la gestion des risques.* Cours ENSAI 3^{ème} année. Groupe de recherche opérationnelle du Crédit Lyonnais

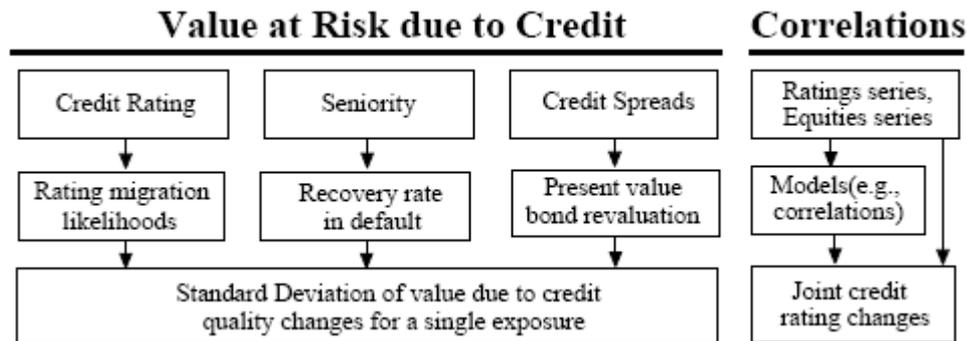
J. ZHANG, F. ZHU, J. LEE (2008) *Asset Correlation, Realized Default Correlation and Portfolio Credit Risk*

ANNEXES

ANNEXE 1 :CreditMetrics

Risque sur un portefeuille : généralisation sur plusieurs titres

Généralisons maintenant à un portefeuille contenant plusieurs éléments. Voici le chemin à suivre. La nouveauté consiste dans les corrélations entre titres.



Calcul des probabilités jointes

Ajoutons un titre noté A de maturité 3 ans et de taux de coupon 5%. Nous voulons obtenir la valeur de ce portefeuille au bout d'un an. Nous créons pour cela, la table de valeurs pour l'obligation A et la table de probabilité.

Year-end rating	Coupon	Forward Value	Total Value	Probability (%)
AAA	5.00	101.59	106.59	0.09
AA	5.00	101.49	106.49	2.27
A	5.00	101.30	106.30	91.05
BBB	5.00	100.64	105.64	5.52
BB	5.00	98.15	103.15	0.74
B	5.00	96.39	101.39	0.60
CCC	5.00	73.71	88.71	0.01
Default	–	51.13	51.13	0.06

Il faut maintenant estimer les probabilités jointes de migration pour chaque obligation. Ces probabilités jointes doivent résumer les deux tables de probabilité précédentes.

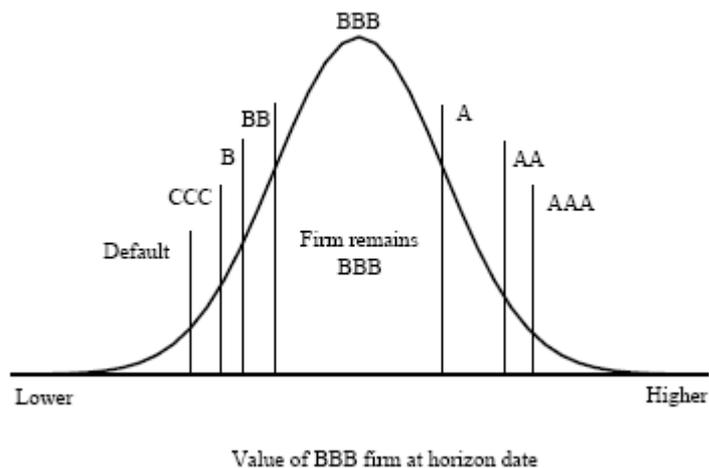
Si nous excluons toute corrélation entre les deux titres, nous nous contentons de faire une simple multiplication entre probabilité. Voici la table de probabilité jointe.

Obligor #1 (BBB)		Obligor #2 (single-A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.01	0.30	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.01	0.14	5.42	0.33	0.04	0.02	0.00	0.00
BBB	86.93	0.08	1.98	79.15	4.80	0.64	0.23	0.01	0.05
BB	5.30	0.00	0.12	4.83	0.29	0.04	0.01	0.00	0.00
B	1.17	0.00	0.03	1.06	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.11	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	0.18	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Par exemple, la probabilité que le titre A reste noté A et le titre BBB reste noté BBB est de $86.93 \times 91.05 = 79.15$.

En réalité, les titres sont rarement indépendants influencés par les mêmes facteurs micro-économiques. Les probabilités jointes ne seront donc pas uniquement le produit des probabilités individuelles mais seront pondérées par un coefficient de corrélation entre les titres.

En utilisant le modèle de Merton, nous pouvons établir le lien entre la valeur de la firme et un changement de notation. En comparant la corrélation des valeurs des deux firmes, nous pouvons trouver un élément de corrélation entre les probabilités de changement de notation.



Reportons à plus tard le calcul de ces corrélations et prenons pour notre exemple une corrélation égale à 0,3. Voici la table des probabilités jointes de nos deux titres :

Obligor #1 (BBB)		Obligor #2 (single-A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
BBB	86.93	0.07	1.81	79.69	4.55	0.57	0.19	0.01	0.04
BB	5.30	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.01
B	1.17	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	0.18	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

A noter :

- la somme des probabilités est égale à 100%,
- la probabilité la plus importante est constatée dans le cas où chaque titre garde son niveau.
- l'effet de la corrélation est généralement d'amplifier les probabilités jointes de la diagonale passant par leur niveau actuel (ici BBB-A).
- la somme de chaque colonne et de chaque ligne correspond à la probabilité de l'émetteur seul de changer de notation (ici la somme de la dernière ligne correspond à la probabilité de défaut de l'émetteur BBB).

Risque de crédit du portefeuille

A présent combinons les deux titres pour avoir la valeur du portefeuille au bout d'un an

Obligor #1 (BBB)		Obligor #2 (single-A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		106.59	106.49	106.30	105.64	103.15	101.39	88.71	51.13
AAA	109.37	215.96	215.86	215.67	215.01	212.52	210.76	198.08	160.50
AA	109.19	215.78	215.68	215.49	214.83	212.34	210.58	197.90	160.32
A	108.66	215.25	215.15	214.96	214.30	211.81	210.05	197.37	159.79
BBB	107.55	214.14	214.04	213.85	213.19	210.70	208.94	196.26	158.68
BB	102.02	208.61	208.51	208.33	207.66	205.17	203.41	190.73	153.15
B	98.10	204.69	204.59	204.40	203.74	201.25	199.49	186.81	149.23
CCC	83.64	190.23	190.13	189.94	189.28	186.79	185.03	172.35	134.77
Default	51.13	157.72	157.62	157.43	156.77	154.28	152.52	139.84	102.26

Cette table représente les 64 valeurs possibles du portefeuille dépendant de la migration des titres allant de 102.26€ (défaut) à 215.96€. (AAA chacun) c'est-à-dire la somme des valeurs de chaque titre.

Calculons à présent nos deux valeurs de risque : l'écart-type et le niveau de pourcentage.

- L'écart type :

Les formules restent les mêmes si ce n'est qu'elles sont calculées non plus sur 8 valeurs mais sur 64.

$$\mu_{totale} = \sum_{i=1}^{64} p_i \mu_i = 213.63 \quad \text{et} \quad \sigma_{total} = \sqrt{\sum_{i=1}^{64} p_i \mu_i^2 - \mu_{totale}^2} = 3.35$$

Rappelons que la moyenne de l'obligation BBB était de 107.09€ et celle de l'obligation A de 106.55€. Nous voyons donc que la somme des moyennes est égale à la moyenne des valeurs du portefeuille. En revanche l'écart-type de BBB était de 2.99€ et celui de A était de 1.49€ donc l'écart-type du portefeuille est plus faible que la somme des écarts type des obligations individuelles. Un portefeuille diversifié est donc moins risqué.

Si nous généralisons maintenant pour un portefeuille de plus de deux titres, nous voyons qu'il est beaucoup plus complexe d'appliquer cette méthode. Par exemple un portefeuille de cinq titres revient à calculer $8^5 = 32\,768$ probabilités jointes ainsi de suite. Une méthode consiste à traiter les valeurs par paire en calculant leur variance, puis d'associer les paires par deux et ainsi de suite jusqu'à avoir la variance du portefeuille.

- Le 1^{er} pourcentage :

De la même manière que nous l'avons vu pour un portefeuille à un titre, nous recherchons la valeur telle que la probabilité de toutes les valeurs plus petites que celle-là aient pour somme 1%. D'après la table de probabilités jointes ci-dessus, nous obtenons le 1^{er} pourcentage à 204.40€ ce qui est 9.23€ en dessous de la moyenne.

Pour un portefeuille plus large, il sera impossible de lire la valeur dans un tableau. Nous utiliserons donc une approche par simulation dont le résultat sera une courbe plutôt que des points discrets.

Risque marginal

Nous venons de voir comment le risque de crédit peut être calculé pour une seule obligation. Néanmoins, la décision de détenir une obligation est influencée par la composition du portefeuille. Le point crucial est le calcul de l'augmentation du risque causé par l'arrivée dans le portefeuille d'un nouveau titre. Pour cela, calculons le risque marginal.

Etudions tout d'abord le risque marginal par rapport à l'écart-type.

Nous voyons que l'addition du titre A au titre BBB a fait augmenter l'écart-type de 2.99€ à 3.35€, soit une augmentation de 0.36€.

Etendons l'étude au calcul du niveau de pourcentage, plus adapté aux gros portefeuilles.

Rappelons que le titre BBB a une moyenne de 107.09€ et un niveau de 1^{er} pourcentage de 98.10€ soit un écart de 8.99€ tandis que lorsque le titre A est ajouté, le portefeuille a une moyenne de 213.63€ et un premier pourcentage à 204.40€ soit une différence de 9.23€. Le risque marginal du titre A est donc de $9.23€ - 8.99€ = 0.24€$ (rappelons que l'écart entre la moyenne et le 1^{er} pourcentage pour le titre A était de 3.39€). La différence entre 0.24€ et 3.39€ est due à la diversification.

NB : certains définissent le risque marginal comme la contribution d'un titre au risque total du portefeuille, d'autres le définissent comme l'impact marginal sur le risque du portefeuille de l'augmentation de l'exposition totale par un nouveau montant. Néanmoins et quelle que soit la définition retenue, le risque marginal est bien une mesure de risque intégrant l'effet de diversification.

ANNEXE 2 : CreditRisk+

Application au taux variable

Événement de défaut avec taux de défaut variable

Comme vu précédemment et parce que les secteurs sont indépendants :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{ndéfauts}) z^n = \prod_{n=0}^{\infty} F_k(z)$$

En reprenant les notations de l'appendice A7 et l'équation de A2 nous pouvons écrire :

$$F_k(z) \llbracket x_k = x \rrbracket = e^{x(z-1)}$$

Supposons que x_k a une fonction de densité $f_k(x)$, nous posons :

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{ndéfauts}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{x=0}^{\infty} P(\text{ndéfaut} / x) f(x) dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} f(x) dx$$

Afin d'établir une fonction génératrice de x_k , supposons que x_k suive une loi Gamma de moyenne μ_k et d'écart type σ_k .

Quelques rappels sur la loi Gamma :

La densité pour une loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ est égale à :

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1} \quad \text{avec} \quad \Gamma(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}$$

La moyenne est donc $\mu = \alpha\beta$ et la variance $\sigma^2 = \alpha\beta^2$ nous avons donc

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{\sigma_k^2} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}$$

Distribution des événements de défaut sur un seul secteur :

Avec l'équation $F_k(z) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x(z-1)} f(x) dx$ et la loi Gamma nous obtenons :

$$F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k} \quad \text{où} \quad p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}$$

En développant par Taylor

$$F_k(z) = (1 - p_k)^{\alpha_k} \sum \binom{n + \alpha_k - 1}{n} p_k^n z^n.$$

Et donc $F_k(z) = (1 - p_k)^{\alpha_k} \binom{n + \alpha_k - 1}{n} p_k^n$ qui correspond à une densité Binomiale Négative.

Conclusion :

La distribution de l'événement de défaut pour chaque secteur suit une loi binomiale négative.

Pertes de défaut avec taux de défaut variable

Généralisons le processus étudié avec taux fixe.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(\text{pertes agrégées} = n \times L) z^n \text{ la fonction génératrice et } G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z)$$

Nous rappelons l'utilisation du polynôme $P_{(k)}(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right)} = \frac{1}{\mu^{(k)}} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}$

La fonction $F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}$ (*) ainsi que l'expression $G_k(z) = F_k(P_k(z))$ (**)

Nous étendons la formule précédente pour chaque émetteur du secteur k

$$P_{(k)}(z) = \frac{\sum_{jA} \left(\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \right) z^{\nu_A}}{\sum_A \left(\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \right)} = \frac{1}{\mu_{(k)}} \sum_A \left(\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \right) z^{\nu_A} (***)$$

Nous reprenons également la fonction génératrice de perte où chaque émetteur A a un taux de

$$\text{défaut de } x_A \quad e^{-\sum_A x_A + \sum_j x_A z^{\nu_A}} = e^{\sum_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} = e^{\frac{x_k}{\mu_k} \sum_A \frac{\nu_A}{\varepsilon_A} (z^{\nu_A} - 1)} = e^{x_k (P_k(z) - 1)}$$

et nous l'appliquons à $G(x)$

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{n=0}^{\infty} P(\text{pertes agrégées} / x_k) f_k(x_k) dx_k = \int_{x_k=0}^{\infty} e^{\sum_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} f_k(x_k) dx_k \\ &= \int_{x_k=0}^{\infty} e^{x_k (P_k(z) - 1)} f_k(x_k) dx_k \end{aligned}$$

En utilisant les équations (*) et (**) et (***) précédentes, nous obtenons la fonction génératrice des pertes suivante :

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}$$

Distribution de perte à taux de défaut variable

Supposons tout d'abord $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$

avec $G(z)$ satisfaisant $\frac{d}{dz}(\log(G(z))) = \frac{1}{G(z)} \frac{dG(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)}$ (*)

A et B sont des polynômes tels que $A(z) = a_0 + \dots + a_r z^r$ et $B(z) = b_0 + \dots + b_s z^s$

Donc la dérivée du log de $G(z)$ est une fonction rationnelle

Montrons que $A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1} (n-j) A_{n-j} \right)$

Reprenons l'équation (*) et déduisons la relation $B(z) \frac{dG(z)}{dz} = A(z)G(z)$

En remplaçant nous obtenons $\left(\sum_{j=0}^s b_j z^j \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} z^n \right) = \left(\sum_{i=0}^r a_i z^i \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \right)$

Pour $n \geq 0$ nous pouvons réécrire les deux membres de l'équation comme suit

$$\sum_{j=0}^{\min(s,n)} b_j (n+1-j) A_{n+1-j} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i}$$

Soit $b_0(n+1)A_{n+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=1}^{\min(s,n)} b_j (n+1-j) A_{n+1-j}$

Ou $b_0(n+1)A_{n+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1} (n-j) A_{n-j}$

Donc $A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1} (n-j) A_{n-j} \right)$

Comme nous l'avons vu précédemment

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\epsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}$$

Essayons de calculer $\frac{A(z)}{B(z)}$

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \log\left(\frac{G'(z)}{G(z)}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{G'_k(z)}{G_k(z)}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{p_k \alpha_k \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)} - 1}}{\mu_k}}{1 - \frac{p_k \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)}}}{\mu_k}} \right)$$

Ce qui est vrai puisque $G'(z)/G(z)$ est une fonction rationnelle.

Du taux de défaut fixe au taux de défaut variable

Même si CréditRisk+ est considéré comme un logiciel où l'on incorpore la variabilité du taux de défaut, les modèles intégrés se comportent comme si le taux de défaut était fixé sous deux hypothèses :

- l'écart-type du taux de défaut moyen de chaque secteur tend vers zéro,
- le nombre de secteurs tend vers l'infini.

Nous allons prouver cette convergence en montrant que la fonction génératrice des pertes à taux de défaut variable

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)}}}{\mu_k}} \right)^{\alpha_k}$$

tend vers la fonction génératrice de perte à taux fixé $G(z) = e^{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{v_j^{(t)}} (z^{v_j^{(t)}} - 1)}$

Rappelons que $p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}$; $\alpha_k = \frac{\mu_k}{\sigma_k^2}$; $\beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}$; $\mu = \sum_{k=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}}$

Si σ_k tend vers 0 alors β_k tend vers 0 et donc $p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}$ tend vers 0 et $\alpha_k = \frac{\mu_k}{\sigma_k^2} \rightarrow \frac{\mu_k}{p_k}$

$$\text{Donc } G(z) \rightarrow \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\frac{\mu_k}{p_k}}$$

A la limite et d'après la seconde hypothèse

$$G(z) \rightarrow \prod_{k=1}^n e^{-\mu_k} e^{\sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} = e^{-\sum_{j,k} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} + \sum_{j,k} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} z^{\nu_j^{(t)}}} = e^{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} (z^{\nu_j^{(t)}} - 1)}$$

Cqfd.

ANNEXE 3 : CreditRisk+

Événement défaut avec taux de défaut fixé

Comme nous l'avons déjà vu, les événements de défaut sont impossibles à déterminer tant par le nombre que par la date.

Ce portefeuille contient N émetteurs et chaque exposition possède une probabilité de défaut annuelle :

$$p_A = \text{Probabilité de défaut annuel pour l'émetteur A}$$

Pour analyser la distribution des pertes, nous introduisons la fonction génératrice probable définie à l'aide d'une variable exogène z :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n\text{défauts})z^n$$

La fonction génératrice pour un seul émetteur est facilement calculable :

$$F_A(z) = 1 - p_A + p_A z = 1 + p_A(z - 1)$$

Par hypothèse d'indépendance, nous avons :

$$F(z) = \prod_A F_A(z) = \prod_A (1 + p_A(z - 1))$$

Pour simplifier, prenons le logarithme :

$$\log F(z) = \sum_A \log(1 + p_A(z - 1))$$

Prenons l'hypothèse que les probabilités de défaut individuelles soient faibles, nous pouvons poser :

$$\log(1 + p_A(z - 1)) = p_A(z - 1)$$

A la limite, nous avons :

$$F(z) = e^{\sum_A p_A(z-1)} = e^{\mu(z-1)} \text{ avec } \mu = \sum_A p_A$$

Après un développement de Taylor :

$$F(z) = e^{\mu(z-1)} = e^{-\mu} e^{\mu z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n$$

D'où nous pouvons conclure que la probabilité de n défaut est de :

$$p(\text{ndéfauts}) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

NB :

- la distribution ci-dessus est une loi de Poisson dépendante du nombre de défauts attendus,
- elle ne dépend pas du nombre d'exposition ou de la faible probabilité de défauts individuels,
- il n'est pas nécessaire que chaque exposition ait la même probabilité de défaut,
- l'écart type standard est $\sqrt{\mu}$ bien que les données suggèrent une déviation plus importante.

ANNEXE 4 : CreditRisk+

Calcul sur les corrélations

Nous allons nous intéresser à la formule des corrélations entre les événements de défaut sous CreditRisk+.

Pour définir clairement la corrélation sur une durée Δt nous associons à chaque émetteur la fonction indicatrice I telle que si A fait défaut $I_A = 1$.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{défaut} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La corrélation ρ entre les deux émetteurs A et B sur une durée Δt est définie par $\rho = \rho(I_A, I_B)$

Si les valeurs attendues pour I_A, I_B et I_{AB} sont μ_A, μ_B et μ_{AB} soit le nombre estimé de défaut de A, B et A et B, comme I ne peut prendre que deux valeurs alors :

$$\rho = \frac{\mu_{AB} - \mu_A \mu_B}{\sqrt{(\mu_A - \mu_A^2)} \sqrt{(\mu_B - \mu_B^2)}}$$

Dans le contexte CreditRisk+, l'équation va s'appuyer sur les notations des deux émetteurs A et B, avec une décomposition sectorielle de n :

Reference	Emetteur A	Emetteur B
Durée		Δt
Probabilité de défaut instantanée	P_A	P_B
Nombre de défauts attendus	$\mu_A = 1 - e^{-P_A \Delta t} = P_A \Delta t$	$\mu_B = 1 - e^{-P_B \Delta t} = P_B \Delta t$
Décomposition sectorielle	$\theta_{AK}; 1 \leq k \leq n$	$\theta_{BK}; 1 \leq k \leq n$

Le terme inconnu de l'équation est la moyenne :

$$\mu_{AB} = \int_{x_1} \cdots \int_{x_n} x_A x_B \prod_{k=1}^n f_k(x_k) dx_k$$

En se référant à la table nous pouvons poser l'approximation suivante :

$$x_A x_B \approx (1 - e^{-x_A \Delta t})(1 - e^{-x_B \Delta t})$$

Et d'après la décomposition sectorielle nous savons que :

$$x_A = \sum_k \frac{x_k}{\mu_k} \theta_{Ak} \mu_A \quad \text{et} \quad x_B = \sum_k \frac{x_k}{\mu_k} \theta_{Bk} \mu_B$$

Posons le coefficient :

$$\omega_{kk'} = \frac{\theta_{Ak} \theta_{Bk'}}{\mu_k \mu_{k'}} \mu_A \mu_B$$

Alors :

$$\mu_{AB} = \int_{x_1} \cdots \int_{x_n} \omega_{kk'} x_k x_{k'} \prod_{k=1}^n f_k(x_k) dx_k$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mu_{AB} &= \sum_{k \neq k'} \omega_{kk'} \int_{x_k} \int_{x_{k'}} x_k x_{k'} f_k(x_k) f_{k'}(x_{k'}) dx_k dx_{k'} \int_{x_j; j \neq k} \prod_{j=1; j \neq k, k'}^n f_j(x_j) dx_j \\ &+ \sum_{k=1}^n \omega_{kk} \int_{x_k} x_k^2 f_k(x_k) dx_k \int_{x_j; j \neq k} \prod_{j=1; j \neq k}^n f_j(x_j) dx_j \end{aligned}$$

Par simplification :

$$\mu_{AB} = \mu_A \mu_B + \sum_{k=1}^n \omega_{kk} \sigma_k^2$$

En remplaçant ω_{kk} par sa valeur nous obtenons :

$$\rho_{AB} = \frac{\mu_{AB} - \mu_A \mu_B}{\sqrt{(\mu_A - \mu_A^2)} \sqrt{(\mu_B - \mu_B^2)}} = (\mu_A \mu_B)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \theta_{Ak} \theta_{Bk} \mu_A \mu_B \left(\frac{\sigma_k}{\mu_k} \right)^2$$

La formule finale concernant la corrélation entre les émetteurs A et B dans le modèle CreditRisk+ est :

$$\rho_{AB} = \sqrt{\mu_A \mu_B} \sum_{k=1}^n \theta_{Ak} \theta_{Bk} \left(\frac{\sigma_k}{\mu_k} \right)^2$$

Cette formule n'est valable que si les probabilités de défaut dans la période sont faibles.

NB :

- cette valeur peut être supérieure à 1 si les valeurs de moyenne et variance sont élevées,
- si les émetteurs n'ont pas de secteur en commun, la corrélation est nulle,
- si nous prenons en compte que $\frac{\sigma_k}{\mu_k}$ est proche de 1 alors la corrélation est de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\mu_A \mu_B}$.