

## **Résumé**

Au cours de ces vingt dernières années, la Value at Risk (VaR) est devenue une mesure de risque de référence. Elle est très souvent utilisée par les compagnies d'assurance, les grandes banques et les sociétés de gestion d'actifs dans le cadre des nouvelles normes Solvabilité II et Bâle II. En particulier, la VaR est une mesure indispensable pour les services de risque de marché dont la vocation est de suivre quotidiennement le risque des portefeuilles des sociétés de gestion d'actifs.

Cependant, cette mesure de risque très utile et simple d'interprétation peut être calculée par de nombreuses méthodes assez controversées. L'inconvénient majeur des méthodes classiques de calcul de la VaR reste l'estimation mal adaptée des pertes au niveau des risques extrêmes.

Ainsi, au cours de ce mémoire, nous nous sommes attachés à analyser et à tester deux nouvelles méthodes de calcul de VaR basées sur la théorie des valeurs extrêmes sur un fond alternatif de DAM en comparant les résultats à la méthode historique qui était jusqu'à présent la méthode de calcul la plus adaptée aux portefeuille de DAM.

D'après notre étude, la VaR calculée selon la méthode GEV (Generalized Extreme Value distribution) semble répondre à la problématique de la VaR de la cellule risk market de DAM. En effet, cette méthode permet d'obtenir une VaR selon une mise en œuvre de calcul simple et rapide et pour des niveaux de probabilité très élevés, donc pour des risques extrêmes.

## **Abstract**

Over the last twenty years, Value at Risk has become a reference measure of risk. It is frequently used by insurance companies, banking groups and asset management firms in accordance with Solvency II and Bale II. Value at risk is particularly essential to risk market services intended to follow the portfolio risk of the asset management firms on a daily basis.

However, this useful and easily interpretable measure can be calculated by many quite controversial methods. The main drawback of the traditional calculation methods of Value at Risk is the unsuitable estimation of losses as far as risk level is concerned.

Thus, in this paper, we have analysed and tested two new calculation methods of Value at Risk which go by Extreme Value Theory on a DAM hedge fund. We have compared the results with the historical method which has been the most suitable method for DAM portfolios up to now.

Our study shows that Value at Risk calculated according to Generalized Extreme Value (GEV) seems to be the most suitable method for DAM risk market service. Indeed, this method gives a Value at Risk according to an easy and fast implementation with a high level probability, which means for extreme risks.

## **Remerciements**

Je tiens tout d'abord à remercier Mlle Lados Sophie, mon maître de stage, Manager de la cellule service « Risk Market » au sein de Dexia Asset Management Paris, pour son enseignement, ses conseils, son soutien, sa pédagogie et sa disponibilité. Grâce à elle, j'ai pu découvrir l'environnement d'une société de gestion financière. Elle m'a donné l'opportunité de m'entretenir avec des gérants de portefeuille qui m'ont exposé leur stratégie et elle m'a enseigné le fonctionnement de la gestion alternative.

J'adresse ensuite toute ma reconnaissance aux gérants de portefeuille du front office, à l'équipe « Pricing » du middle office et aux autres membres de la cellule « Risk Market » qui, par leurs conseils et leur disponibilité, ont contribué à favoriser ma compréhension du sujet ainsi qu'à rendre ce stage agréable.

J'aimerais enfin remercier M. Jacques Chevalier, professeur chercheur à l'ISUP et responsable de la filière actuariat, pour le suivi et les conseils qu'il m'a prodigués.

## Sommaire

RÉSUMÉ .....	1
ABSTRACT .....	2
REMERCIEMENTS .....	3
SOMMAIRE .....	4
INTRODUCTION .....	7
<b>CHAPITRE I : PRÉSENTATION ET MÉTHODE HISTORIQUE DE LA VALUE AT RISK .....</b>	<b>9</b>
<b>I. PRÉSENTATION DE LA VALUE AT RISK .....</b>	<b>10</b>
<b>I.1. PRÉSENTATION DES MESURES DE RISQUE .....</b>	<b>10</b>
<b><i>I.1.1 Définition d'une mesure de risque .....</i></b>	<b><i>10</i></b>
<i>I.1.1.A. Définition du risque .....</i>	<i>10</i>
<i>I.1.1.B. Définition du risque de marché .....</i>	<i>11</i>
<i>I.1.1.C. Définition d'une mesure de risque cohérente .....</i>	<i>11</i>
<b><i>I.1.2 La volatilité comme mesure de risque .....</i></b>	<b><i>13</i></b>
<b>I.2. DÉFINITION DE L'APPROCHE VAR .....</b>	<b>15</b>
<b><i>I.2.1 Définition de la Value at Risk .....</i></b>	<b><i>15</i></b>
<b><i>I.2.2 Précautions à l'utilisation de la VaR .....</i></b>	<b><i>17</i></b>
<b>I.3. UTILITÉ ET UTILISATIONS DE LA VAR .....</b>	<b>19</b>
<b><i>I.3.1 Utilité de la VaR et contexte d'utilisation .....</i></b>	<b><i>19</i></b>
<i>I.3.1.A. Utilité de la VaR .....</i>	<i>19</i>
<i>I.3.1.B. Contextes d'utilisation de la VaR .....</i>	<i>20</i>
<b><i>I.3.2 Environnement réglementaire .....</i></b>	<b><i>21</i></b>
<b>I.4. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DE LA MÉTHODE VAR .....</b>	<b>24</b>
<b><i>I.4.1 Avantages .....</i></b>	<b><i>24</i></b>
<b><i>I.4.2 Inconvénients .....</i></b>	<b><i>25</i></b>
<b>II. APPROCHE HISTORIQUE DE LA VALUE AT RISK .....</b>	<b>27</b>
<b>II.1. ESTIMATION DE LA DISTRIBUTION DES VARIATIONS DES FACTEURS DE RISQUE .....</b>	<b>27</b>
<b><i>II.1.1 Cas d'un facteur de risque .....</i></b>	<b><i>27</i></b>
<b><i>II.1.2 Cas d'un actif isolé .....</i></b>	<b><i>29</i></b>
<b><i>II.1.3 Cas d'un portefeuille .....</i></b>	<b><i>30</i></b>
<b><i>II.1.4 Cas général .....</i></b>	<b><i>31</i></b>
<b>II.2. APPROCHE HISTORIQUE EN PRATIQUE .....</b>	<b>33</b>
<b>II.3. POINTS FORTS ET POINTS FAIBLES DE LA MÉTHODE .....</b>	<b>34</b>
<b><i>II.3.1 Les points forts de la méthode historique .....</i></b>	<b><i>34</i></b>
<i>II.3.1.A. Les avantages de la méthode historique .....</i>	<i>34</i>
<i>II.3.1.B. Les autres méthodes VaR sont inadaptées aux fonds gérés par DAM .....</i>	<i>35</i>
<b><i>II.3.2 Les points faibles de la méthode historique .....</i></b>	<b><i>37</i></b>
<b><i>II.3.3 Conclusion quant à la méthode historique au sein de DAM .....</i></b>	<b><i>38</i></b>
<b>III. VALIDATION DES APPROCHES : LE BACKTESTING .....</b>	<b>40</b>
<b>III.1. PRÉSENTATION DE LA NOTION DE BACKTESTING .....</b>	<b>40</b>
<b><i>III.1.1 Description du backtesting .....</i></b>	<b><i>40</i></b>
<b><i>III.1.2 Démarche à suivre .....</i></b>	<b><i>41</i></b>
<b><i>III.1.3 Interprétation du résultat du test .....</i></b>	<b><i>41</i></b>
<b><i>III.1.4 Point de vue du comité de Bâle .....</i></b>	<b><i>42</i></b>
<b>III.2. COMPARAISON DE VAR AVEC BACKTESTING .....</b>	<b>43</b>

III.2.1 Description de la méthode MRB .....	43
III.2.2 Utilisation de la statistique RMSRB.....	44
<b>CHAPITRE II - THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES APPLIQUÉE À LA VAR .....</b>	<b>45</b>
<b>I. INTRODUCTION AU RISQUE EXTRÊME.....</b>	<b>46</b>
I.1. CONTEXTE HISTORIQUE DU RISQUE EXTRÊME .....	46
I.2. LE RISQUE EXTRÊME PAR LES MATHÉMATIQUES .....	47
I.3. LA LOI NORMALE ET EXTRÊMES .....	47
<b>II. APPROCHE PARAMÉTRIQUE.....</b>	<b>49</b>
II.1. LE THÉORÈME DE FISHER-TIPPET .....	49
II.2. TEMPS DE RETOUR ET SCALING.....	53
II.3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE LA GEV .....	56
II.3.1 Construction de la distribution empirique $(\chi_n^+)_n$ .....	56
II.3.2 Calcul du gradient conjugué des paramètres .....	57
II.3.3 Détermination de la taille de l'échantillon .....	60
<b>III. APPROCHE SEMI-PARAMÉTRIQUE.....</b>	<b>61</b>
III.1. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE .....	61
III.2. FONCTION DE DISTRIBUTION DES EXCÈS .....	61
III.2.1 Détermination du seuil $u$ .....	64
III.2.2 Estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la GPD.....	66
III.3. EXPECTED SHORTFALL, MESURE DE RISQUE COHÉRENTE .....	69
III.3.1 Problématique de la Tail VaR .....	69
III.3.2 Définition de l'Expected Shortfall .....	69
<b>IV. COMPARAISON DES APPROCHES « EXTRÊMES ».....</b>	<b>71</b>
IV.1. MÉTHODE PARAMÉTRIQUE .....	71
IV.2. MÉTHODE SEMI-PARAMÉTRIQUE.....	72
<b>CHAPITRE III - APPLICATION À UN FOND ALTERNATIF DE DEXIA ASSET MANAGEMENT..</b>	<b>73</b>
<b>I. ENVIRONNEMENT ET PRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES.....</b>	<b>74</b>
I.1. ENVIRONNEMENT ET GESTION DES PORTEFEUILLES.....	74
I.1.1 Présentation de DAM .....	74
I.1.2 Présentation de la gestion alternative .....	74
I.2. PRÉSENTATION DU PORTEFEUILLE « EQUITY » .....	80
I.2.1.A. Fiche technique du fonds « Equity ».....	80
I.2.1.B. Chiffres clé du fonds « Equity ».....	81
<b>II. CALCUL DE LA VAR SELON L'APPROCHE HISTORIQUE .....</b>	<b>85</b>
II.1. MISE EN PLACE DES DONNÉES.....	85
II.1.1 Choix de la longueur d'historique .....	85
II.1.2 Récupération des données.....	86
II.2. CALCUL DE LA VAR HISTORIQUE.....	88
II.2.1 Reconstitution historique des P&L fictifs du fonds .....	88
II.2.2 Détermination des VaR.....	88
II.2.3 Analyse des résultats .....	91
<b>III. LA VAR SELON LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES.....</b>	<b>92</b>
III.1. APPLICATION DE LA MÉTHODE PARAMÉTRIQUE .....	92
III.1.1 Introduction .....	92

<b>III.1.2 Mise en place des données</b> .....	93
III.1.2.A. Choix de la longueur de la distribution initiale .....	93
III.1.2.B. Choix des paramètres de longueurs des distributions.....	93
III.1.2.C. Précisions sur la distribution initiale .....	96
<b>III.1.3 Constitution de la distribution des extrêmes</b> .....	98
<b>III.1.4 Estimation des paramètres GEV</b> .....	99
III.1.4.A. Avec le solveur d'Excel.....	99
III.1.4.B. Avec le logiciel E- views .....	100
<b>III.1.5 Lecture de la VaR GEV</b> .....	103
<b>III.2. APPLICATION DE LA MÉTHODE SEMI-PARAMÉTRIQUE</b> .....	105
<b>III.2.1 Mise en place des données</b> .....	105
<b>III.2.2 Détermination du seuil <math>u</math></b> .....	105
<b>III.2.3 Estimation des paramètres de la fonction d'excès en moyenne</b> .....	109
<b>III.2.4 Conclusion de l'approche semi-paramétrique</b> .....	111
<b>IV. COMPARAISON DES DIFFÉRENTES APPROCHES</b> .....	<b>113</b>
<b>IV.1.1 Comparaison des résultats</b> .....	113
<b>IV.1.2 Le backtesting</b> .....	114
<b>IV.1.3 Analyse de l'approche historique</b> .....	115
<b>IV.1.4 Analyse des méthodes « extrêmes »</b> .....	116
IV.1.4.A. Convergence des approches GEV et GPD.....	116
IV.1.4.B. Points faibles de nos applications des méthodes « extrêmes ».....	117
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>119</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>121</b>

## **Introduction**

La gestion du risque de l'entreprise a connu, ces quinze dernières années, un développement exponentiel, en ce qui concerne les risques tant quantifiables que non quantifiables. Le Risk Management constitue aujourd'hui une science à part entière et, au sein des établissements financiers, un métier à part entière ; cette tendance ne cesse encore de s'accroître.

L'équipe Risk Market de la société Dexia Asset Management (DAM) a pour fonction de suivre le risque de marché face auquel sont exposés les différents fonds gérés par le front office en mettant en place des modèles statistiques de gestion du risque adaptés et en calculant quotidiennement divers indicateurs de risque permettant de valider la gestion de ces fonds. Parmi ces indicateurs, la Value at Risk, devenue aujourd'hui une mesure de risque très populaire est suivie de près par les risk manager du service Risk de DAM.

Trois méthodes de calcul sont généralement utilisées pour estimer la distribution de pertes. Elles ont en commun d'estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille à partir des données du passé, mais diffèrent cependant sur les points suivants :

- La méthode historique : observation du comportement historique de la position pour estimer la VaR
- La méthode Variance Covariance : décomposition des instruments de la position en fonction des différents facteurs de risque (indices actions, taux de différentes maturités, taux de change...) puis estimation de la distribution de probabilité des facteurs de risque
- La méthode de Monte Carlo : simulation par Monte Carlo des facteurs de marché à partir d'une loi de distribution a priori, et estimation de la VaR, comme pour la méthode historique, à partir de l'échantillon généré.

L'approche retenue par DAM est la méthode historique car celle-ci présente l'avantage de ne pas être contrainte à des hypothèses préalables, d'être applicable à toute nature d'actif (y compris les options financières) contrairement à la méthode Variance Covariance et d'être simple à mettre en place contrairement à la méthode de Monte-Carlo. Cependant, la méthode historique présente l'inconvénient de mal estimer les extrêmes au niveau des queues de distribution. En particulier, DAM est spécialisé dans la gestion de fonds alternatifs qui sont par nature très exposés au risque.

Ainsi, l'objet de ce mémoire est de proposer à la cellule Risk Market, une approche de calcul de la VaR « améliorée » qui tienne compte particulièrement des queues de distribution des séries financières et qui s'avère très adaptée aux événements extrêmes, qui sont justement ceux qui font peser les risques les plus importants sur les établissements financiers.

Dans une première partie, nous allons définir la Value at Risk et dans quel contexte elle évolue, puis nous rappellerons le fonctionnement de la simulation historique qui est la méthode retenue au sein de DAM. Dans la seconde partie, nous présenterons les approches paramétrique et semi-paramétrique qui sont deux méthodes de calcul de VaR basées sur la théorie des valeurs extrêmes. Enfin, nous appliquerons ces trois approches sur un fond alternatif géré par la société dans une troisième partie, à travers laquelle nous comparerons les méthodes en soulignant leurs points faibles et leurs points forts, nos résultats et les mises en place des méthodes en pratique.

**CHAPITRE I : PRÉSENTATION ET MÉTHODE**  
**HISTORIQUE DE LA VALUE AT RISK**

# **I. PRÉSENTATION DE LA VALUE AT RISK**

## **I.1. Présentation des mesures de risque**

### **I.1.1 Définition d'une mesure de risque**

#### *I.1.1.A. Définition du risque*

Le risque se définit comme une perte potentielle, identifiée et quantifiable, inhérente à une situation ou une activité, associée à la probabilité de l'occurrence d'un événement ou d'une série d'événements. Il s'oppose à l'incertitude — non quantifiable — et au danger moins identifiable et encore moins quantifiable. La gestion du risque consiste en l'évaluation et en l'anticipation des risques, et à mettre en place un système de surveillance. Le risque est présent dans toute entreprise et il existe ainsi de nombreux types de risque en fonction du secteur d'activité (banque, assurance, aéronautique, ...) mais aussi de la nature du risque (risque quantifiable ou non). En particulier, au sein d'une société de gestion d'actifs, trois services sont généralement dédiés à la gestion du risque :

- Risque opérationnel
- Risque de crédit
- Risque de marché

### ***1.1.1.B. Définition du risque de marché***

Le risque qui nous intéresse dans cette étude est le risque de marché que l'on définit comme le risque de perte qu'une position de taux de change, action ou matière première peut entraîner dans l'hypothèse d'un scénario d'évolution défavorable de paramètres de marché. Les paramètres sont généralement les taux d'intérêt, les prix des créances, les cours de change, d'actions, de matières premières, d'une part, et les volatilités de ces paramètres, d'autre part.

Aussi le risque peut être défini comme la perte qui peut survenir lorsqu'un élément d'actif doit être vendu pour financer un besoin de liquidité. La perte peut être imputable à une détérioration de la valeur de l'actif à la suite d'une fluctuation des taux d'intérêt, du marché, de la qualité du crédit ou pour toute autre raison.

De part leur nature, les marchés financiers fournissent d'innombrables séries temporelles et de chiffres. Une mesure du risque peut donc y sembler plus aisée que dans d'autres domaines où la qualification du risque est plus floue et où les données sont moins nombreuses mais mesurer le risque reste une activité délicate et avant d'étudier les problèmes d'estimation, il est important de choisir une mesure pertinente du risque.

### ***1.1.1.C. Définition d'une mesure de risque cohérente***

Un moyen sûr d'utiliser une mesure de risque qui soit pertinente est d'utiliser une mesure dite cohérente dont la définition a été donnée par Artzner, Delbaen, Eber et Heath en 1999 :

Soit  $\Omega$  l'espace des états possibles de la nature, supposé fini. La valeur future du portefeuille dans les différents états de la nature est donc un vecteur noté  $X$ . L'actif sûr est noté  $r$ , ce vecteur a toutes ses coordonnées positives (c'est en ce sens qu'il est qualifié de sûr).

Les cinq axiomes suivants permettent de caractériser une mesure de risque  $\rho$  qui soit cohérente :

1. **Invariance par translation :**

$$\forall X, \forall \alpha \quad \rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$$

2. **Sous-additivité :**

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Cet axiome s'interprète par le fait que diviser un portefeuille ne peut réduire le risque total.

3. **Homogénéité positive :**

$$\forall \lambda \geq 0, \forall X \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

Le sens de cet axiome est que la taille du portefeuille ne doit pas avoir de conséquence sur la mesure du risque, c'est-à-dire sur le fait d'être acceptable ou non.

4. **Monotonie :**

$$\text{Si } X \leq Y, \text{ alors } \rho(Y) \leq \rho(X)$$

Cet axiome signifie que si X offre un rendement inférieur à celui de Y dans tous les états de la nature, alors il est plus risqué que Y.

5. **Pertinence :**

$$\forall X, X \leq 0, X \neq 0, \quad \rho(X) > 0$$

Cet axiome est nécessaire pour éviter que certains risques ne soient oubliés.

Conclusion : Cette définition ne fournit pas de manière pratique une mesure du risque mais il permet de présenter cinq critères indispensables à vérifier pour tester une mesure de risque en pratique.

### **I.1.2 La volatilité comme mesure de risque**

La mesure de risque la plus répandue pour un actif financier est la volatilité, qui correspond à l'écart-type des rendements de la série financière étudiée. Cette mesure de risque ne caractérise pas l'indécision du marché, mais l'ampleur des variations de cours qu'il peut subir, à la hausse comme à la baisse, les variations de court terme n'étant que des anticipations des variations à moyen et long terme.

La volatilité est un indicateur primordial pour la fluidité du marché. Un marché qui stagne est un marché à volatilité très faible. D'après la théorie financière, un investisseur n'admet d'acquérir un actif financier présentant une forte volatilité (donc un risque important) que si son rendement est élevé. C'est pourquoi les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours bas permettant à l'acheteur d'anticiper une rentabilité plus élevée. L'inverse s'est vérifiée lors de toutes les crises financières, y compris sur cette fin d'année 2008 où la chute des marchés financiers s'est accompagnée de fortes perturbations journalières des cours, impactant d'importantes hausses de la volatilité de ceux-ci.

Nous notons que cette mesure de risque est couramment utilisée par la théorie moderne du portefeuille définie par Markowitz. La volatilité est très appréciée car les nombreuses données que fournissent les marchés financiers permettent de la calculer aisément. Cependant, la volatilité est fortement contestée pour les raisons suivantes :

- Elle ne constitue pas une mesure cohérente du risque car elle ne vérifie pas la condition de monotonie, ni celle d'invariance par translation.

- Le fait de retenir la variance empirique d'une série financière provient du fait que l'on suppose que les rendements de cette série financière suivent une loi normale, entièrement caractérisée par sa moyenne (le rendement moyen de la série) et son écart-type (la volatilité). L'hypothèse que les rendements d'une série financière suivent une loi gaussienne est peu vérifiée, et encore moins au niveau des queues de distribution, comme nous le verrons dans notre chapitre III « *Application à un fond alternatif de Dexia Asset Management* ».
- L'hypothèse que les rendements d'une série financière suivent une loi normale est possible en appliquant le théorème central limite. Ce théorème suppose que les rendements soient indépendants entre eux. Or, de nombreuses études économétriques ont montré que cette hypothèse était rarement vérifiée (« les marchés financiers ont de la mémoire »).

#### Conclusion :

La volatilité n'est donc pas une mesure de risque cohérente et n'est pas valable au niveau des queues de distribution, là où justement se situent les risques les plus importants. D'ailleurs, dans le calcul de la variance, les valeurs extrêmes sont souvent considérées comme aberrantes et exclues. C'est pourquoi, la réglementation bancaire s'attache à une autre mesure de risque, plus apte à contrôler les événements extrêmes qui sont ceux qui font peser un réel danger sur les établissements financiers.

## **I.2. Définition de l'approche VaR**

### **I.2.1 Définition de la Value at Risk**

D'après A. Louis Calvet (en 2000), la VaR d'un portefeuille d'actifs financiers correspond au montant des pertes maximum sur un horizon de temps donné, si l'on exclut un ensemble d'évènements défavorables (worst case scenarios) ayant une faible probabilité de se produire.

Berdin et Hyde (en 2001) apportent une définition plus exhaustive au concept de VaR. En effet, ils définissent la VaR comme étant la mesure qui fournit une estimation de la perte potentielle sur un actif ou un portefeuille qui peut survenir avec une probabilité donnée suite à des mouvements de prix ou de taux relativement adverses, sous l'hypothèse que pendant une période de temps (l'horizon de la VaR) la composition du portefeuille reste inchangée.

Autrement dit, et d'une manière plus simple, la Value at Risk d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs est la perte maximale attendue, mesurée en unité monétaire sur une période et à un niveau de confiance donnés, sous les conditions normales du marché.

#### Les paramètres de la VaR

La VaR d'un portefeuille est caractérisée par les deux paramètres suivants :

- Le niveau de confiance choisi (ou seuil de probabilité) s'élevant à 95% ou 99% par exemple et qui est la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la Value at Risk.
- L'horizon temporel choisi. Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long plus les pertes peuvent être importantes. Par exemple, pour une distribution normale des rendements, il faut multiplier la Value at Risk à un jour par  $\sqrt{t}$  pour avoir la Value at Risk sur t jours.

### Interprétation mathématique

Selon Esch, Kieffer et Lopez (en 1997) et Jorion (en 2000), la VaR de l'actif en considération, pour une durée  $t$  et un niveau de probabilité  $q$  se définit comme le montant de la perte attendue de sorte que ce montant, pendant la période  $[0, t]$ , ne devrait pas être plus important que la VaR avec une probabilité de  $(1-q)$ . Autrement dit :

$$\Pr [ P_t > \text{VaR}_q ] = 1 - q \quad \iff \quad \Pr [ P_t < \text{VaR}_q ] = q$$

Où  $P_t$  est la perte sur le titre à l'instant  $t$ .

En centralisant et en réduisant l'expression, nous obtenons :

$$\Pr \left\{ \frac{P_t - E(P_t)}{\sigma(P_t)} \leq \frac{\text{VaR}_q - E(P_t)}{\sigma(P_t)} \right\} = q$$

Nous pouvons donc définir :

$$\frac{\text{VaR}_q - E(P_t)}{\sigma(P_t)} = Z_q$$

D'où nous pouvons calculer la VaR comme étant :

$\text{VaR}_q = E(P_t) + Z_q \cdot \sigma(P_t)$
---

## **I.2.2 Précautions à l'utilisation de la VaR**

### Critiques adressées à l'encontre de la VaR

Z. Mikdashi, dans son livre sur les systèmes bancaires et financiers, tenait à mettre en garde l'investisseur utilisant la notion de VaR. En effet, celui-ci rappelait qu'il fallait garder à l'esprit les indications suivantes :

- Tout d'abord, il faut savoir que pour un même portefeuille, les banques peuvent trouver des VaR différentes à cause de l'utilisation de paramètres divergents, particulièrement concernant les intervalles de confiance, les périodes de détention du portefeuille, etc. Ce point rend les comparaisons d'autant plus difficiles.
- Ensuite, ces modèles d'analyse se basent sur des relations linéaires rendement/risque, utilisant des distributions particulières alors que la pratique en diverge souvent. Evidemment, il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'un modèle et que dès lors un certain nombre d'hypothèses simplificatrices doivent être acceptées, condition intrinsèque pour permettre un niveau de modélisation acceptable.
- Enfin, cette notion ne saisit pas le fait qu'il existe un décalage notable entre le moment où le gérant de portefeuille décide de liquider ses positions et le moment de la liquidation effective, et ce, d'autant plus que le risque de liquidité est grand. Il est donc important, lors d'analyse basée sur la VaR, de considérer ces mises en garde afin de ne pas interpréter de manière trop hasardeuse les résultats qu'une analyse de Value at Risk pourrait générer.

### La VaR comme mesure de risque cohérente

Il est important de s'interroger sur la pertinence de la VaR comme mesure de risque cohérente. Artzer, Delbaen, Eber et Heath (en 1997) ont montré que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de sous-additivité. Pour cela, ils proposent le cas de deux options digitales :

- La première A, dont le prix initial est a, paie 1000 si la valeur de l'action à la date T est supérieure à un strike de montant U et rien sinon.
- La seconde B, dont le prix initial est b, paie 1000 si la valeur de l'action en T est inférieure à L ( $L < U$ ) et rien sinon. On choisit L et U de sorte que :  
 $\Pr (S_T < L) = \Pr (S_T > U) = 0,8\%$ .

Observons la Value at Risk à 99% de 2 traders vendant respectivement une option A et une option B. Elles sont évidemment nulles. La VaR d'un trader vendant une action A et une action B sera, elle, de 1000. La VaR n'est donc pas sous-additive. C'est une contradiction majeure de l'utilisation de la VaR comme mesure de risque qui contredit le principe de diversification.

Dans le cas particulier où la variation de prix d'un portefeuille X suit une loi normale, nous avons :

$$VaR_\alpha(X) = \phi^{-1}(\alpha) \times \sigma(X)$$

Or :

$$\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$$

Dans le cadre normal, la VaR est bien une mesure cohérente de risque. La VaR ne peut donc être utilisée de manière pertinente que lorsque cette approximation peut être effectuée ou que le portefeuille est linéaire (ce qui n'est en particulier pas le cas des portefeuilles comportant des options).

## **I.3. Utilité et utilisations de la VaR**

### **I.3.1 Utilité de la VaR et contexte d'utilisation**

#### *I.3.1.A. Utilité de la VaR*

La méthode VaR est avant tout la quantification du risque du marché en unité monétaire, à laquelle sont reliés une probabilité et un horizon de temps comme nous avons vu dans les paragraphes précédents. Ainsi l'investisseur en portefeuille qu'il soit banque, entreprise ou particulier dispose d'une valeur quantifiée qui lui permet de prendre des décisions. Si la VaR est trop élevée par rapport à son goût pour le risque, il peut réduire sa position (vente d'une partie des titres) et donc réduire la VaR par la même occasion, ou encore prendre des couvertures (hedging) tendant à réduire le risque global de son portefeuille.

La VaR constitue donc un outil d'aide à la gestion du risque et permet de quantifier les différentes expositions sur les marchés. Néanmoins il n'est pas rare de trouver en pratique d'autres utilisations que celles exposées ci-dessus, et notamment :

- L'évaluation des performances :

Ce concept permet en effet d'ajuster les performances par rapport au risque qui permet une rémunération plus objective. Une performance ne sera réellement meilleure que si en termes de risque elle a conservé des niveaux comparables.

- L'adéquation au capital :

Les accords de Bâle ont édicté une série de règlements permettant de guider les banques dans leur adéquation de capital. Les calculs devenant souvent très complexes, le comité a toléré dans certains cas l'utilisation de modèles internes à la banque ce qui les a amenés, pour la plupart, à l'application de la notion de Value at Risk des capitaux gérés avec l'aide notamment de

pondérations ajustées. De ce fait, la VaR donne une base rationnelle pour déterminer le capital qu'il faut mettre en réserve pour absorber les pertes non anticipées. Nous notons que le capital réglementaire exigé vaut généralement 3 fois la VaR sur 10 jours au seuil de 99%.

- Choix de placement :

La VaR peut être utilisée pour permettre de choisir, entre deux placements, lequel offrira le rendement espéré le plus élevé pour un niveau de risque fixé. Ainsi, la Value at Risk aide dans l'élaboration d'une stratégie de placement et permet :

- Un reporting interne au management.
- Un reporting externes aux autorités de contrôle.
- La fixation des limites par activité, et donc une meilleure allocation des ressources.
- Une évaluation intelligente des performances puisqu'elle permet de les lier au niveau de risque supporté pour y arriver.

### ***1.3.1.B. Contextes d'utilisation de la VaR***

Dans le monde bancaire, la VaR permet d'optimiser la gestion des risques financiers dus aux opérations initiées par les salles de marchés. Elle permet également de donner au client une image claire du risque financier pris indirectement par lui. Ainsi, cette mesure de risque s'adresse :

- Aux professionnels du marché : opérateurs de marché, gestionnaires de fonds privés, gestionnaires de fonds institutionnels et gestionnaires de fonds de pension.
- Aux Risk Managers : responsables de la gestion des risques et du contrôle de la gestion des risques (Risk Market)
- Aux comptables
- Aux institutionnels.

Un grand nombre d'entreprises disposent actuellement de services de Risk Management. Ces services ont comme missions principales la réévaluation quotidienne des prix de marché (mark to-market) de toutes les positions et l'appréhension des risques de marché par des méthodes de sensibilité ou probabilistes comme la VaR et la mise en place de limites tant internes qu'externes.

Le concept de la VaR provient du fait qu'il est indispensable de réévaluer les positions au prix de marché qui sont à l'origine de pertes ou de profits. Si les prix de marché changent, la réévaluation se trouve donc affectée. La réévaluation des positions à ces nouveaux prix donne une idée de la sensibilité des portefeuilles de la banque en termes de pertes et profits à une variation des prix de marché. Ces prix peuvent varier de manière inégale, parfois même de manière dramatique et imprévue, d'où la nécessité de réévaluer les positions en se fixant des scénarios de marché. A partir de cette réévaluation, on peut calculer le montant de pertes potentielles donc la Value at Risk.

En conclusion, bien que la VaR puisse en théorie être utilisée pour la quantification des risques de marché, des risques de crédit, des risques de liquidité et des risques opérationnels au sein des sociétés de gestion d'actifs, seule son application au risque de marché est principalement utilisée.

### **I.3.2 Environnement réglementaire**

Deux organismes de contrôles font autorité dans le domaine de la réglementation du Risk management concernant la solvabilité des banques en tant que principales gestionnaires de portefeuilles. Il s'agit du Comité de Bâle et la Banque des Règlements Internationaux (BRI).

Nous avons vu que la VaR est très utile pour une institution financière, car elle lui permet de détenir le niveau de capital nécessaire pour survivre. C'est pourquoi le Comité de Bâle, chapeauté par la BRI, retenait cette mesure pour calculer le capital réglementaire d'une institution financière en 1995 qui est devenue effective en janvier 1998. Celles-ci doivent depuis calculer leurs expositions au risque en recourant à la VaR.

Les règles actuelles concernant le calcul de la VaR pour une institution financière sont les suivantes :

- La VaR doit être calculée sur un horizon de dix jours pour un niveau de probabilité de 1%.
- Au moins une année d'observations est nécessaire pour le calcul de cette VaR.
- L'institution financière doit prendre en compte plusieurs catégories de risques : les risques associés aux instruments financiers non linéaires (produits dérivés), les risques découlant des mouvements de la structure à terme des taux d'intérêt et les risques associés à la base (écart entre le prix au comptant et le prix à terme) pour les matières premières.
- L'institution financière doit également se livrer au Backtesting. Mentionnons qu'en réaction à la faillite de la banque allemande Herstatt dans les années 70, les gouvernements des banques centrales faisant partie du G-10 ont mis sur pied le Comité de Bâle en 1974 dont le rôle est de réglementer et de superviser les pratiques bancaires, ce comité étant sous la gouverne de la BRI. A la suite du krach boursier d'octobre 1987, la BRI avait fortement suggéré aux banques en 1988 de détenir un capital réglementaire supérieur ou égal à 8% d'une somme pondérée de leurs actifs risqués. Il était alors d'usage d'allouer à chaque actif un coefficient de pondération proportionné à son risque.

Cette mesure du risque était statique et ignorait le phénomène de la diversification des portefeuilles. Certes, les banques ne sont pas obligées de suivre les recommandations de la BRI, mais celles qui les négligent risquent de subir une décote de rating sur les marchés financiers internationaux.

La BRI et le Comité de Bâle recommandent de multiplier la valeur de la Value at Risk pour une période de 10 jours par un multiple pour déterminer le capital nécessaire permettant de couvrir les engagements. Ainsi, la formule suivante indique le montant des capitaux requis pour exercer selon les normes prudentielles :

$$\text{Capitaux requis} = 3 \times \text{VaR} + \text{minimum fixé}$$

Il apparaît, à la lecture de cette formule, que le niveau de capitaux requis est étroitement lié au calcul « interne » de la Value at Risk, c'est-à-dire à la méthode d'estimation utilisée par les institutions financières. Étant donné qu'il n'y a pas de modèle imposé, les organismes de réglementation ont du trouver un moyen de comparer les nombreux modèles internes. La BRI prévoit de mettre en place des pénalités financières pour les institutions dont les modèles de Value at Risk auraient tendance à sous-estimer le risque, c'est-à-dire les organismes qui sous-évaluent le risque de manière à disposer de plus de capitaux à investir. Parmi les sanctions, le comité de Bâle propose d'augmenter le niveau des fonds minima dans le calcul des capitaux requis pour couvrir une partie des risques ou encore tout simplement d'accroître le coefficient multiplicateur de la Value at Risk dans cette même équation.

## **I.4. Avantages et Inconvénients de la méthode VaR**

Comme toutes les autres méthodes de mesure du risque, la Value at Risk présente des avantages et des inconvénients que nous allons exposer ci-dessous.

### **I.4.1 Avantages**

Les mesures traditionnelles du risque tel que la variance ou la déviation standard et le degré de sensibilité ne donne pas une perception de l'ampleur des pertes possibles. Elles offrent simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne pour un écart-type donné ; ou encore le degré de sensibilité du prix (rendement) aux fluctuations de marché. Par contre, la mesure VaR donne une perception du montant de pertes dans un horizon de planification donné avec une probabilité associée à ces pertes.

La VaR n'est pas assujettie à la distribution normale, ce qui n'est pas le cas de l'écart type ou du bêta qui sont des mesures de risques reliés à la loi gaussienne. Il est bien connu que les rendements des titres n'obéissent pas toujours à une loi normale. D'où l'avantage confirmé de l'application de la théorie des valeurs extrêmes au calcul de la Value at Risk dans la suite de cette étude.

La Value at Risk est très appréciée car elle reste plus intuitive, plus facile à comprendre par l'éventail très large des investisseurs, qui ne sont pas toujours des spécialistes en techniques de gestion de portefeuille ou de Risk management. L'autre point fort que nous citons est un avantage de la VaR par rapport à la volatilité.

Comme la VaR, l'écart-type intègre des informations sur les probabilités et l'ampleur des pertes. Mais contrairement à la VaR, il suppose implicitement que les pertes et les profits sont des images identiques inversées. Une perte de 1 million de dollars s'assortit de la même probabilité qu'un gain de 1 million de dollars et il en est de même pour n'importe quel montant en dollars. Si cela est quasiment vrai pour les instruments simples - comme une position de trésorerie dans une

monnaie internationale - c'est loin d'être le cas pour des options. En effet, acheter une option crée un potentiel illimité de hausse avec un potentiel de perte limité au coût de l'option. Inversement, vendre des options peut produire un risque à la baisse illimité sans que le profit puisse excéder la prime dégagée sur la vente de l'option. En ne s'attachant qu'aux probabilités de pertes importantes, la VaR peut rendre compte de ce type d'asymétrie alors que l'écart-type, lui, ne le peut pas.

### **I.4.2 Inconvénients**

Lors de l'utilisation de la mesure VaR il est très important de garder à l'esprit que ce n'est qu'un indicateur de risque et son utilisation dépend du jugement de l'utilisateur et de son expérience. Dans cette logique, il serait avisé de retenir la mise en garde faite par la banque JP Morgan dans son document d'introduction à RiskMetrics (1995) : "Nous tenons à rappeler au lecteur qu'aucun outil d'analyse sophistiqué ne remplacera le jugement professionnel dans la gestion du risque". En effet, depuis son apparition l'approche VaR a fait l'objet de plusieurs critiques, non seulement à propos de son estimation mais également à propos de la pertinence de son utilisation. Nous avons choisi d'exposer les critiques les plus récurrentes portées sur la VaR en indiquant les auteurs.

Christoffersen et Diebold (en 1997) ont montré qu'avec un horizon de prévision de quelques jours, l'utilisation de prévisions conditionnelles pour estimer la volatilité, où les données les plus récentes ont plus de poids, ne donnaient pas de meilleurs résultats que l'utilisation de distribution inconditionnelle comme distribution de prévision. La raison est que les données historiques récentes donnent peu d'information sur la possibilité qu'un événement extrême survienne, et particulièrement dans le cas des moyennes mobiles exponentielles de RiskMetricsTM.

Jorion (en 1996) étudie le risque d'estimation lié au calcul de la VaR. Il considère la VaR obtenue par les méthodes conventionnelles comme étant une approximation du premier ordre. Il préconise une bonne compréhension des méthodes statistiques qui sont à la base des calculs car l'utilisation de paramètres estimés avec biais entraîne un risque d'estimation de la VaR. Par conséquent, ce risque d'estimation implique que la VaR devrait être accompagné d'un intervalle de confiance.

Beder (en 1995) montre dans une étude comparative avec huit méthodes différentes que toute VaR n'est pas équivalente, et montre ainsi la dépendance à la technologie et à la compétence. Il y a des différences non négligeables selon la méthode utilisée et de même que pour une technique similaire, deux entreprises peuvent poser des hypothèses différentes dans sa mise en pratique. La VaR peut donner un faux sentiment de sécurité (notamment, il ne faut pas oublier le risque de liquidité des positions avec les VaR quotidiennes). De plus, la VaR est une mesure qui ne capte pas les facteurs qualitatifs, ce qui l'amène à conclure que les mathématiques sont parties intégrantes à la finance, mais que la finance ne suit pas toujours des règles mathématiques.

Pour McKay et Keefer (en 1996), la VaR est une statistique qui aveugle les gestionnaires. En effet, selon eux, la VaR ignore les asymétries de marchés, un portefeuille peut être plus exposé aux profits qu'aux pertes ou l'inverse. Ils sont d'avis que le remodelage du risque (risk-reshaping), complément à la gestion du risque, a été oublié. Deux portefeuilles peuvent avoir la même VaR mais présenter des configurations de risques différentes. Le risque peut être facilement éliminé dans un cas alors que pour l'autre portefeuille ce n'est peut-être pas possible. Enfin, ils avancent que la VaR renforce la notion populaire que les institutions financières font de l'argent en s'exposant aux risques de marchés. Alors qu'en réalité la VaR, selon eux, devrait tendre vers zéro et tous les risques de marché devraient être couverts.

Culp, Miller et Neves (en 1998) soulignent qu'une des hypothèses sous-jacentes à la VaR, soit celle de la stabilité du portefeuille pour l'horizon de la VaR. Cela peut devenir problématique pour les VaR dont les horizons sont étendus. Selon eux, lorsque l'exposition à un certain niveau de risque intrinsèque aux activités d'une entreprise, la VaR devrait être accompagnée des profits espérés. Également, la VaR n'est pas utile pour tous les types d'entreprises, particulièrement les firmes commerciales qui doivent être prudentes avec la VaR, qui devrait servir plutôt d'outil de surveillance et de diagnostic. Ils rappellent également que la VaR n'est pas un substitut à une bonne gestion et un bon système d'information.

## **II. APPROCHE HISTORIQUE DE LA VALUE AT RISK**

L'approche de simulation historique (SH) d'estimation de la VaR, contrairement à une autre approche très pratiquée qui est la méthode variances covariances, ne pose pas d'hypothèses sur la distribution des rendements du portefeuille. Cependant elle repose sur l'hypothèse de stationnarité de ces rendements : la distribution des variations des prix des différents facteurs de risque, pour l'horizon pour lequel on estime la VaR, est bien estimée par les observations des variations de ces prix pendant l'historique disponible. Dans ce cas la qualité d'estimation des paramètres (moyennes, variances, covariances, ...) de cette distribution est également garantie.

Le principe général de cette approche consiste à estimer la distribution des variations des facteurs de risque par la distribution observée à partir des historiques. A titre de rappel, un facteur de risque est un cash-flow généré par l'actif à un instant  $t$  quelconque. De cette distribution, on peut extraire un quantile qui permet de lire la VaR pour un seuil de confiance donné.

### **II.1. Estimation de la distribution des variations des facteurs de risque**

#### **II.1.1 Cas d'un facteur de risque**

Supposons un cas simple où la valeur dont nous désirons déterminer la VaR est le facteur de risque  $X$  lui-même (le cours d'une action par exemple). Dans ce cas la variable aléatoire est  $\Delta$  tel que :

$$\Delta = \frac{X(1) - X(0)}{X(0)}$$

Nous supposons que la distribution de cette variable aléatoire est bien représentée par les observations :

$$\Delta = \frac{X(t) - X(t-1)}{X(t-1)} \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(t) : \text{variation du facteur de risque à l'instant } t \\ X(t) : \text{facteur de risque à l'instant } t \\ X(t-1) : \text{facteur de risque à l'instant } t-1 \end{array} \right.$$

La relation :

$$X(1) - X(0) = \Delta \cdot X(0)$$

Permet d'estimer la valeur future du facteur de risque X par :

$$X^{(t)}(1) = X(0) + \Delta(t) \cdot X(0) \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Et la distribution de la perte encourue par :

$$L^{(t)} = X(0) - X^{(t)}(1) = -\Delta(t) \times X(0) \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

$X_t(1)$  étant la valeur estimée du facteur de risque en question pour l'instant (1) et  $L(t)$  la perte estimée pour ce même instant.

## II.1.2 Cas d'un actif isolé

Considérons maintenant le cas où l'actif dont nous voulons déterminer la VaR dépend de plusieurs facteurs de risque  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . La valeur de cet actif s'exprime donc par une relation du type:

$$P = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Nous disposons d'observations pour ces facteurs de risque, dont nous déduisons les variations relatives (rendements) :

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Avec  $X_k$  représentant l'ensemble des facteurs de risque de l'actif et  $\Delta_k$ , la variation relative de  $X_k$ .

A partir des valeurs observées actuellement  $X_1(0), \dots, X_n(0)$  des différents facteurs de risque, on estime la distribution des valeurs futures par :

$$X_k^{(t)}(1) = X_k(0) \times (1 + \Delta_k(t)) \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

De là, nous pouvons déduire l'estimation de la distribution du prix futur de l'actif considéré :

$$P^{(t)}(1) = f(X_1^{(t)}(1), X_2^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)) \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Ainsi que, par différence avec :

$$P(0) = f(X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0))$$

Nous pouvons déterminer l'estimation de la distribution de la perte subie :

$$L^{(t)} = P(0) - P^{(t)}(1) \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

### II.1.3 Cas d'un portefeuille

Considérons maintenant un portefeuille constitué de N actifs en nombres respectifs  $n_1, \dots, n_N$ . La valeur de chacun de ceux-ci s'exprime à partir de plusieurs facteurs de risque  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et la valeur  $P_p$  de ce portefeuille s'exprime en fonction de celles  $p_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) des différents actifs par :

$$P_p = \sum_{j=1}^N n_j P_j$$

Nous notons que, même dans le cas où la VaR se calcule sous l'hypothèse d'une distribution normale, où la VaR peut s'écrire :

$$VaR_q = E(L_t) + z_q \cdot \sigma(L_t)$$

(Et la méthode de l'analyse historique est indépendante de cette hypothèse distributionnelle), nous rencontrons un problème pour le cas d'un portefeuille puisque la variance de la valeur de celui-ci dépend des covariances entre les prix des différents actifs :

$$VaR(\Delta_{P_p}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j Cov(\Delta_{P_i}, \Delta_{P_j})$$

Nous déterminerons donc ici aussi directement la distribution de la perte du portefeuille à partir de l'effet des variations des divers facteurs de risque sur la valeur du portefeuille lui-même. La détermination de cet impact se fera bien sûr de la même manière que celle qui vient d'être exposée pour un actif isolé.

## II.1.4 Cas général

Nous pouvons donc dire que l'approche historique de calcul de la VaR du portefeuille passe par les quatre étapes suivantes :

La première étape consiste à identifier les différents facteurs de risque  $X_1, X_2, \dots, X_n$  qui déterminent la valeur des divers actifs en portefeuille : dans notre cas les cours des titres.

Pour chaque facteur de risque, nous appliquons la méthodologie présentée ci-dessus. Ainsi, à partir des observations des différents facteurs de risque pour les époques  $-T, -T+1, \dots, -1, 0$ , nous déduisons les variations relatives (rendements).

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Les observations actuelles  $X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0)$  de ces facteurs de risque permettent d'en estimer la distribution des valeurs futures :

$$X_k^{(t)}(1) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k(t)) \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Le prix des différents actifs s'exprime à partir des facteurs de risque par les relations :

$$P_j = f_j(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad j = 1, \dots, N$$

Ces relations peuvent être très simples (facteurs de risque équivalents aux prix de l'actif par exemple) ou beaucoup plus complexes (la formule de Black et Scholes pour le cas des options). Elles permettent de déterminer les distributions des prix futurs des différents actifs :

$$P_j^{(t)}(1) = f_j(X_1^{(t)}(1), X_2^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)) \quad j = 1, \dots, N \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Et donc la distribution de la valeur future du portefeuille :

$$P_p^{(t)}(1) = \sum_{j=1}^N n_j p_j^{(t)}(1)$$

On dispose par ailleurs de la valeur actuelle du portefeuille :

$$P_p(0) = \sum_{j=1}^N n_j P_j(0)$$

Où :

$$P_j(0) = f_j(X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0)) \quad j = 1, \dots, N$$

L'estimation de la distribution de la perte subie sur le portefeuille se déduit alors par :

$$L^{(t)} = P_p(0) - P_p^{(t)}(1) \quad t = -T+1, \dots, -1, 0$$

Et avec elle la valeur du paramètre VaR.

## **II.2. Approche historique en pratique**

En pratique, les différentes étapes à suivre pour calculer la VaR au seuil  $s$  d'un portefeuille à une date  $t$  avec la méthode historique sont les suivantes (la longueur de l'historique est déterminée à l'avance à  $N$  jours, que nous fixons par exemple à 3 années =  $252 \times 3 = 756$  jours) :

- Récupérer la composition (nom de chaque actif et quantité de l'actif) du portefeuille à la date  $t$ .
- Calculer les  $N$  rendements historiques de chacun des actifs composant le portefeuille à la date  $t$ .
- Recomposer la distribution historique des valeurs du portefeuille (avec sa composition à la date  $t$ ) : calculer sa valeur fictive à la première date de l'historique et appliquer les rendements de chaque actif qui le composent à chaque date jusqu'à la date  $t$ .
- Classer et numéroter par ordre croissant les  $N$  différentes variations (pertes ou gains) fictives du portefeuille reconstitué et obtenir ainsi une distribution de  $N$  variations.
- La VaR au seuil  $s$  (par exemple 99%) qui représente la perte maximale que réalisera le portefeuille dans 99% des cas est la variation numéro  $(s \times N) = 99\% \times 756 = 748$ .

## **II.3. Points forts et points faibles de la méthode**

### **II.3.1 Les points forts de la méthode historique**

#### *II.3.1.A. Les avantages de la méthode historique*

L'avantage majeur de la méthode historique réside dans le fait qu'elle allie simplicité et large application :

- La méthode SH représente manifestement la plus intuitive des techniques de calcul de la VaR. La procédure est en effet simple et fournit des résultats faciles à interpréter.
- Un autre avantage considérable de la méthode SH est le fait qu'elle ne formule aucune hypothèse quant à la forme des distributions des rendements, ni quant à la linéarité des relations entre les prix et les facteurs de risque. Elle parvient ainsi à s'adapter avec les spécificités des positions traitées et des marchés. Elle convient donc pour gérer tout type de position dans toute condition de marché.
- Un autre avantage vient s'ajouter à ceux de cette technique, en fait son caractère non paramétrique lui évite d'estimer des paramètres, ceux étant implicitement présents dans l'historique des variations des facteurs de marché. La SH ne requiert donc pas de calculs préliminaires.
- La méthode SH échappe au risque de modèle puisque, du fait de son caractère non paramétrique et à l'absence d'hypothèses, elle n'utilise aucun modèle d'évaluation.

### ***II.3.1.B. Les autres méthodes VaR sont inadaptées aux fonds gérés par DAM***

Les autres approches fréquemment citées dans la littérature et utilisées par les risk managers sont inadaptées aux fonds alternatifs gérés par Dexia Asset Management :

#### Méthode Variance Covariance :

Grâce aux hypothèses qu'elle pose, la méthode Variance Covariance (VC) est facilement mise en œuvre. Toutefois ces hypothèses peuvent s'avérer irréalistes et compromettre les résultats.

- L'hypothèse de normalité des variations des prix constitue une hypothèse fondamentale formulée par la méthode VC qui simplifie énormément la procédure. Cependant, il est rare que les rendements d'un portefeuille d'actifs financiers se comportent de manière normale.
- La méthode VC repose sur une autre hypothèse fondamentale, à savoir la linéarité de la relation entre les prix des actifs et les facteurs de risque. Cette hypothèse est particulièrement contraignante lorsqu'il s'agit de traiter le cas des actifs optionnels tel que les options, instruments typiquement non linéaires, dans ce cas cette hypothèse peut s'avérer problématique. Par conséquent, la méthode VC ne mesure pas de manière précise le risque des portefeuilles dont une large proportion présente des caractéristiques non linéaires.
- Nous verrons dans notre chapitre III – *Application à un fond alternatif de Dexia Asset Management* qu'il est fréquent que les hedge funds gérés par Dexia Asset Management (DAM) contiennent ce type de produits dérivés. Ainsi, cette méthode est mal adaptée au risque des portefeuilles sur lesquelles porte notre étude.

### Méthode Monte Carlo (MC)

D'un point de vue conceptuel, cette méthode présente l'avantage de posséder des facultés immenses, mais au prix d'une grande complexité théorique et pratique. La lenteur d'exécution et la grande vulnérabilité de cette méthode au risque de modèle sont une conséquence de cette complexité :

- La méthode de simulation MC présente l'inconvénient majeur d'être la plus complexe des approches de calcul de la VaR. En fait, elle rend la VaR peu intuitive, difficile à comprendre et donc inappropriée pour communiquer les résultats d'une institution financière. De ce fait la méthode de simulation MC prive l'approche VaR de ces avantages les plus significatifs.
- Un autre inconvénient non moins important de la méthode de simulation MC est son coût trop élevé en moyen informatique et temporel. Ceci sans doute en conséquence de son extrême complexité.
- Ainsi, il semble irréalisable de retenir en pratique cette approche dans le cas du calcul de la Value at Risk des fonds alternatifs gérés au sein de Dexia Asset Management. En effet, les risk managers ont pour mission de calculer quotidiennement la VaR d'une vingtaine de fonds alternatifs de composition très complexe.

### **II.3.2 Les points faibles de la méthode historique**

Les difficultés liées à l'utilisation de données passées pour prévoir une perte sont particulièrement problématiques dans le cadre de la méthode historique. En effet,

- La méthode historique construit la distribution des rendements futurs du portefeuille sur la base des prix passés. Pour calculer sa VaR sur base de la SH, l'institution financière est donc tenue de récolter et de stocker une quantité importante de données historiques relatives à un grand nombre de facteurs de risque. Ces exigences en matière de données peuvent poser problème, particulièrement lorsque des instruments financiers sont récents ou proviennent de marchés émergents. Ainsi, si le gestionnaire calcule une VaR sur un portefeuille qui détient un titre récent, il ne pourra donc pas récupérer la distribution des rendements de ce titre et en déduire les rendements fictifs historiques du portefeuille. Une possibilité pour le risk manager est d'utiliser les cours de l'indice sectoriel correspondant à ce titre récent.
- Dans le cadre de la Simulation Historique, les données passées jouent un rôle crucial dans l'estimation de la VaR mais celles-ci présentent les inconvénients suivants : tout d'abord, la méthode historique ne tient pas compte des événements extrêmes, puisque le volume des données historiques utilisées est forcément limité pour pouvoir tenir compte de ces événements très rares. De plus, cette approche, dans sa version la plus répandue (également pour celle que nous utiliserons dans notre partie III - *Application à un fond alternatif de Dexia Asset Management*) assigne le même poids pour toutes les données, anciennes ou récentes. Or on sait que les données les plus récentes jouent un rôle plus important dans l'estimation.
- L'utilisation de données historiques pose encore problème du fait que ces données sont traitées comme si elles provenaient toutes de la même distribution de probabilité, alors que celles-ci changent au cours du temps. Par conséquent la méthode SH considère les données extrêmes, observées durant les périodes de turbulence des marchés comme des « outliers ». En réalité, celles-ci proviennent d'une distribution dont la dispersion est plus élevée. En procédant de la sorte, la méthode historique ignore les hausses temporaires de

la volatilité comme l'a souligné G.Holton en 1998. De plus, la méthode SH est incapable de prendre en compte des événements futurs plausibles si ceux-ci n'apparaissent pas dans le passé d'après K.Dowd, en 1998.

- La méthode historique présente l'inconvénient de supposer la stationnarité des rendements des actifs détenus en portefeuille. Cette hypothèse qui est généralement vérifiée par les titres boursiers ne devrait pas poser de problème en théorie. Cependant, un calcul rigoureux devrait prendre en compte l'hypothèse de non stationnarité de chacun des titres mais elle remettrait en cause la pertinence du calcul de la VaR sur ce portefeuille, sans compter que le test de stationnarité qui peut être réalisé par un test de Dickey-Fuller dont la mise en œuvre est longue et compliquée en pratique, voire inenvisageable pour un calcul quotidien.
- Enfin, le choix de la période d'observation pose problème. D'un côté, beaucoup de données sont nécessaires pour observer les événements rares, de l'autre, la prise en compte de données trop anciennes peut affaiblir la pertinence des estimations. En effet, la simulation historique prend en compte l'historique de chaque actif qui compose le portefeuille et les conjectures de marché actuelles (interactions des actifs entre eux) sont très différentes à celles d'un passé trop lointain.

### **II.3.3 Conclusion quant à la méthode historique au sein de DAM**

La méthode historique est simple, tant en théorie qu'en pratique. En évitant au maximum de poser des hypothèses restrictives, cette technique parvient à priori à traiter les particularités, tant des positions que des marchés. Elle parvient ainsi à éviter certains problèmes tels que le risque de modèle mais cette méthode reste particulièrement affaiblie par sa grande dépendance aux données qu'elle utilise.

Toutefois, l'approche historique peut s'avérer être une méthode puissante pour mesurer le risque associé à tout portefeuille pour lequel des données sont facilement disponibles, dans des conditions relativement stables des marchés financiers.

En particulier, cette méthode est parfaitement adaptée aux fonds alternatifs gérés au sein de Dexia Asset Management (contrairement aux deux autres approches traditionnelles de variance covariance et de Monte Carlo). En effet, les données peuvent être aisément récupérées grâce au moniteur Bloomberg mis à la disposition du service risk market de DAM. De plus, la condition de stabilité des marchés financiers ne devrait pas causer de problème aux fonds alternatifs dont la stratégie de gestion a pour objectif de rester décorrélié des marchés financiers, comme nous le détaillerons en chapitre III – *Application à un fond alternatif de Dexia Asset Management*. Il ne devrait donc pas exister d'impact face à la stabilité des marchés.

Cependant, la méthode historique présente un inconvénient majeur pour ce type de fonds qui présentent de forts effets de levier et donc sont très exposés au risque puisque l'approche SH ne tient pas compte des événements extrêmes. En effet, la taille de l'historique est déterminant dans la prise en compte des événements rares et celle-ci limite fortement le seuil de probabilité de la Value at Risk comme nous le verrons en chapitre III – *Application à un fond alternatif de Dexia Asset Management*.

Ainsi, l'objet de notre chapitre II est de proposer un autre type de calcul de la Value at Risk qui tient compte des événements rares en se basant sur la théorie statistique des valeurs extrêmes. Deux méthodes seront alors décrites et testées sur notre portefeuille en chapitre III en comparaison à l'approche historique : la méthode paramétrique qui permet de définir une « distribution d'extrêmes » et de lui attribuer une loi de distribution pour obtenir les quantiles et la méthode semi-paramétrique qui fournit une loi parfaitement adaptée aux queues de distribution des séries financières contrairement à la loi normale dont les queues sont trop fines.

## **III. Validation des approches : le backtesting**

### **III.1. Présentation de la notion de backtesting**

Un outil très pratique pour comparer et tester la pertinence des valeurs de Value at Risk obtenues selon différentes approches reste le backtesting que nous décrivons dans cette section.

#### **III.1.1 Description du backtesting**

Les résultats des estimations de la VaR posent clairement la question du choix de la méthode de calcul de la VaR. Tout naturellement, les critères de coûts d'implémentation, de complexité du modèle et de flexibilité sont déterminants. Cependant, il est aussi très important de s'assurer de l'adéquation de la méthode choisie, on parle alors de backtesting. Cet exercice consiste à confronter la VaR calculée avec les pertes et profits effectivement réalisés sur le portefeuille sur une période assez prolongée dans le temps. Le comité de Bâle exige des banques que cette période de calcul soit au moins de 250 jours ouvrables, dans ce cas on aura 250 VaR à confronter avec 250 résultats du portefeuille correspondant aux nombres de jours ouvrables. Le groupe RiskMetrics dans son document "Risk Management : A Practical Guide" affirme qu'une fenêtre de 90 jours ouvrables est suffisante pour effectuer un backtesting sur le portefeuille et d'obtenir des résultats assez significatifs.

### **III.1.2 Démarche à suivre**

La méthode pour réaliser le backtesting consiste à tout d'abord fixer la période de temps sur laquelle est effectué le test. Il faut ensuite relever les VaR et les profits et pertes journalières durant toute la période et procéder à la comparaison des valeurs obtenues jour par jour et relever ensuite le nombre d'exceptions ou de violations : c'est à dire le nombre de fois où la perte réelle dépasse la VaR estimée. Le nombre d'exceptions durant toute la période du test révèle le degré de pertinence de la technique utilisée pour calculer la VaR, et par la suite présente un critère pertinent pour juger de la qualité de l'approche utilisée et de son adéquation avec le portefeuille sujet d'estimation.

### **III.1.3 Interprétation du résultat du test**

Le nombre d'exceptions (ou de violations) acceptable est relatif au niveau de confiance auquel est calculée la VaR. En effet, selon les directives du comité de Bâle, sur une VaR calculée pour un niveau de confiance de 95% on peut accepter 5 exceptions dans une fenêtre de 100 jours de test. Ceci veut dire que la proportion des pertes qui dépasse la VaR estimée ne doit pas dépasser les 5%. Dans la même logique, pour un niveau de confiance de 99% le nombre d'exceptions ne doit pas dépasser une fois sur 100 jours, c'est-à-dire que la perte réelle sur le portefeuille ne doit pas dépasser la VaR pour plus de 1% des cas. Cette procédure s'avère parfaitement logique et intuitive comparée à la définition du niveau de confiance. En effet, une VaR calculée pour un niveau de 95% veut dire implicitement que dans 95% des cas, la perte réelle sur le portefeuille ne dépassera pas la VaR obtenue et qu'il y a 5% de chance qu'elle la dépasse. Ainsi, si la perte réelle dépasse la VaR à une fréquence supérieure à 5%, il faut dans ce cas se poser des questions sur la pertinence de la VaR obtenue et par conséquent sur la fiabilité de la technique utilisée.

### III.1.4 Point de vue du comité de Bâle

D'ailleurs, pour le cas des banques, le comité de Bâle a prévu des pénalités (sous forme d'augmentation d'exigence de fonds propres) en cas d'inadéquation. Dans le cadre des accords de Bâle de 1998, les banques sont tenues d'effectuer cette analyse en utilisant les douze derniers mois de données pour un niveau de confiance de 99% et un horizon d'une journée. Trois zones sont ainsi définies selon le nombre de dépassements :

#### Présentation des 3 zones de test et des coefficients affectés

Zone	Nombre d'exceptions	Augmentation du multiple
Verte	0	0
	1	0
	2	0
	3	0
	4	0
Jaune	5	0,4
	6	0,5
	7	0,65
	8	0,75
	9	0,85
Rouge	10 ou +	1

Selon la zone dans laquelle le modèle de la banque se trouve, les régulateurs agissent différemment : en effet, si le modèle utilisé par la banque se trouve dans la zone verte aucune pénalité n'est prévue par les directives du comité de Bâle, et le niveau des fonds propres que la banque doit détenir se calcule par la formule classique :  $FP = 3 \times VaR + c$ .

Par contre, si le modèle est dans la zone jaune ou rouge, la banque se voit pénalisée. Dans ce cas, les autorités majorent le coefficient multiplicateur d'un facteur complémentaire valant de 0,4 à 0,85 (selon le nombre d'exceptions) pour la zone jaune, et de 1 pour la zone rouge. Ainsi pour un modèle appartenant à la zone jaune avec huit exceptions le niveau des fonds propres exigés devient :  $FP = 3,75 \times VaR + c$ . Et les banques, dans ce cas, sont tenues de revoir leurs modèles.

## III.2. Comparaison de VaR avec backtesting

Comme nous l'avons vu, le backtesting est très utile, et même exigé par le comité de Bâle pour tester la cohérence d'une approche de VaR retenue par une banque. Cependant le backtesting permet également de comparer différentes approches de VaR appliquées sur un même portefeuille et peut donc aider le risk manager à sélectionner la méthode de calcul de VaR qui est la plus adaptée à son portefeuille.

### III.2.1 Description de la méthode MRB

Il s'agit de prendre en considération les variabilités des VaR estimées par les différentes approches. Ceci permet d'évaluer si une approche particulière parmi celles utilisées produit un risque estimé relativement plus élevé que les autres. En d'autres termes, cette mesure va permettre de dire si l'approche utilisée pour estimer la VaR surestime ou non le risque. Une telle approche qui, logiquement, va fournir des VaR élevées est jugée comme étant conservatrice.

Pour évaluer la taille relative des VaR estimées fournies par les différentes approches utilisées, le gestionnaire peut avoir recours à la statistique du Biais Relatif Moyen (MRB) développée par Hendricks en 1996. Cette statistique MRB a pour rôle de capturer l'ampleur à laquelle les différentes approches produisent des estimations de tailles moyennes semblables.

Etant donné le nombre de jours  $T$  définissant la période (251 jours au moins selon le comité de Bâle) et  $N$ , le nombre de méthodes de VaR testées, le Biais Relatif Moyen d'une approche  $i$  (avec  $i$  compris entre 1 et  $N$ ) est donné par :

$$MRB_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{VaR_{it} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \quad \text{avec} \quad \overline{VaR}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VaR_{it}$$

Avec :

$$\begin{cases} VaR_{it} = \text{VaR fournie par l'approche } i, \text{ le jour } t \\ \overline{VaR}_t = \text{Moyenne des VaR fournies par chacune des approches au jour } t \end{cases}$$

### Interprétation du résultat du test MRB

Ainsi, comme nous l'avons signalé ci-dessus, cette procédure fournit une mesure de la taille de chaque VaR obtenue par chacune des trois approches et une taille qui est relative à la moyenne des VaR des trois approches. De ce fait, le MRB obtenu est un pourcentage. Par exemple, un MRB égal à 0,1 implique que l'approche utilisée – et par la suite la VaR obtenue – est en moyenne 10% plus grande que la moyenne des VaR obtenues par toutes les approches.

Lors de la comparaison de plusieurs VaR obtenues selon différentes approches, il suffit de comparer les statistiques MRB de chaque méthode et de retenir celle qui a le plus petit MRB en valeur absolue car cela signifie que cette approche est la moins éloignée de la moyenne des VaR obtenue par l'ensemble des approches.

### **III.2.2 Utilisation de la statistique RMSRB**

Hendricks (1996) étend la simple statistique du biais relatif moyen qui capture la variabilité du modèle estimé à une autre statistique qui capture l'ampleur à laquelle la moyenne des VaR de chaque approche diffère de la moyenne des VaR de toutes les approches réunies, en d'autres termes, elle nous fournit une information sur l'ampleur à laquelle l'approche utilisée surestime ou sous-estime le risque. Cette statistique est connue sous le nom de : racine carrée du biais relatif moyen (RMSRB) et donnée par :

$$RMSRB_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{VaR_{it} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \right)^2}$$

### Interprétation du test RMSRB

Le résultat de la statistique RMSRB s'interprète de la même façon que la statistique MRB. Il conviendra de calculer les RMSRB de chaque VaR obtenue selon des approches différentes, de les comparer et de conclure que la méthode qui fournit la meilleur Value at Risk est celle qui a le plus faible RMSRB en valeur absolue.

## **CHAPITRE II - THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES APPLIQUÉE À LA VAR**

# I. Introduction au risque extrême

## I.1. Contexte historique du risque extrême

La capitalisation totale des marchés financiers à travers le monde a considérablement augmenté entre le début des années 80 à nos jours. En effet, elle s'élevait à 3 380 milliards de dollars en 1983 pour atteindre 63 trillions de dollars (soit 63 000 milliards de dollars) à son pic d'octobre 2007, soit une hausse de près de 20 fois sa valeur de 1983.

Cette intense et lucrative activité financière est cependant tempérée par quelques rares mais très violentes secousses. Ces crises font généralement suite à des périodes de forte croissance des cours qui sont nommés bulles spéculatives par les économistes et conduisent ainsi à décrire les crises elles-mêmes par des « éclatements de bulles spéculatives ». Ainsi, parmi les crises majeures depuis 1990, nous pouvons dénombrer une quinzaine de crises financières significatives, dont la récente crise des subprimes qui a débuté durant l'été 2007 pour aboutir à son plus bas niveau en automne 2008. Cette crise a provoqué une baisse de près de 21 trillions, soit 21 000 milliards de dollars de la capitalisation boursière mondiale entre octobre 2007 et octobre 2008, soit 33% de sa valeur (*d'après Bernard Zimmern dans son article du 14 octobre 2008 publié par l'IFRAP*) et a conduit à une baisse des indices boursiers les plus significatifs des marchés de près de la moitié de leur valeur :

### Evolution des indices boursiers entre le 01.06.2007 et le 20.11.08

Indice	1.06.2007	20.11.2008	Evolution
CAC 40	6 168	2 980	52%
Dow Jones	13 668	7 552	45%
Nasdaq	2 614	1 316	50%
Nikkei 225	17 959	7 703	57%

*Remarque : Nous avons volontairement choisi des dates correspondant à des pics boursiers.*

## **I.2. Le risque extrême par les mathématiques**

Ce sont ces grandes catastrophes qui définissent le risque extrême contre lesquelles tentent de se protéger les gérants de portefeuille et que les gestionnaires de risque tentent d'anticiper en établissant des indicateurs de risque, des tests statistiques ou des modèles mathématiques adaptés à chaque produit.

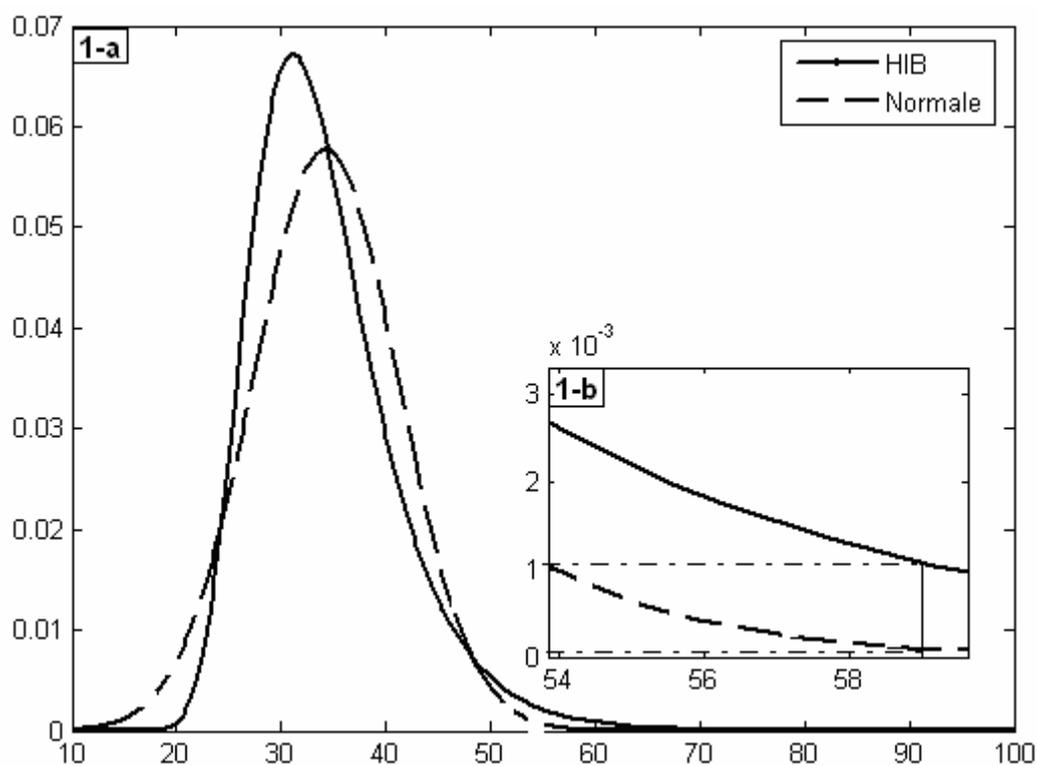
En effet, l'approche mathématique pour modéliser le risque se fait grâce à la théorie des probabilités. Le risque est une variable aléatoire qui va des états futurs du monde dans l'espace des réels qui représente les pertes ou les profits. Cette variable aléatoire suit une certaine loi de probabilité que l'on ne connaît pas et que l'on tente d'approcher par des lois connus. Un évènement extrême survient lorsque le risque prend ses valeurs au niveau de la queue de distribution. La théorie des valeurs extrêmes qui consiste à analyser les occurrences présentant des fréquences très faibles apparaît comme un outil particulièrement bien adapté pour notre étude.

## **I.3. La loi normale et extrêmes**

Pour analyser le risque des séries financières, la théorie classique consiste à admettre que les distributions des actifs suivent des lois gaussiennes. En effet, cela se vérifie sur la majorité des rendements des produits financiers. Cependant, cette hypothèse ne se vérifie plus au niveau des queues de distribution, c'est-à-dire pour les valeurs extrêmes. D'un point de vue macro-économique, cela s'explique par le comportement des investisseurs en période de bulles spéculatives ainsi qu'en période d'éclatement de celles-ci. Ainsi, au niveau des queues de distribution, les distributions des rendements des séries financières sont davantage approchées par des lois dites à queue épaisse.

Hubert et Bendjoudi (en 1999) ont défini une loi de distribution à queue lourde comme une loi dont le coefficient d'aplatissement est supérieur à celui de la loi normale (lui-même égal à 3). Ils citent en exemple la loi HIB, communément utilisée pour l'étude des séries météorologiques (analyse des crues), qui vérifie ce critère et est dite par conséquent « à queue lourde » au sens de ces auteurs. Le graphe ci-dessous permet d'illustrer cette comparaison des courbes d'une distribution normale par rapport à une distribution HIB, à queue lourde :

### Illustration de la différence entre la loi normale et une loi à queue lourde (HIB)



*Commentaire* : Nous observons que la distribution de la loi normale est pratiquement nulle au niveau des extrêmes alors qu'elle ne l'est pas pour la loi HIB.

## II. Approche paramétrique

### II.1. Le théorème de Fisher-Tippett

La théorie des valeurs extrêmes repose sur le théorème de Fisher-Tippett. Celui-ci nous permet d'obtenir la loi asymptotique de l'extrême  $M_n = \max_{1, \dots, n}(X_1, \dots, X_n)$  où chaque  $X_i$  définit un rendement de perte en valeur absolue d'un portefeuille d'actifs financiers supposés i.i.d (de même nous récupérerions les rendements de gains si nous souhaitions étudier le gain maximal d'un portefeuille d'actifs financiers).

D'après Fisher -Tippett, s'il existe des suites de constantes strictement positives  $(a_n)$  et  $(b_n)$  et une fonction de distribution  $F$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F(x)$$

Alors  $F$  peut être de 3 types : Gumbel, Fréchet ou Weibull.

Ainsi, le théorème de Fisher-Tippett permet d'obtenir la loi asymptotique de la perte maximum d'une série de pertes indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Nous travaillons donc sur des séries de rendements que nous pouvons supposer i.i.d car cette hypothèse se vérifie facilement pour les séries financières.

Nous présentons ci-dessous les distributions de ces 3 lois :

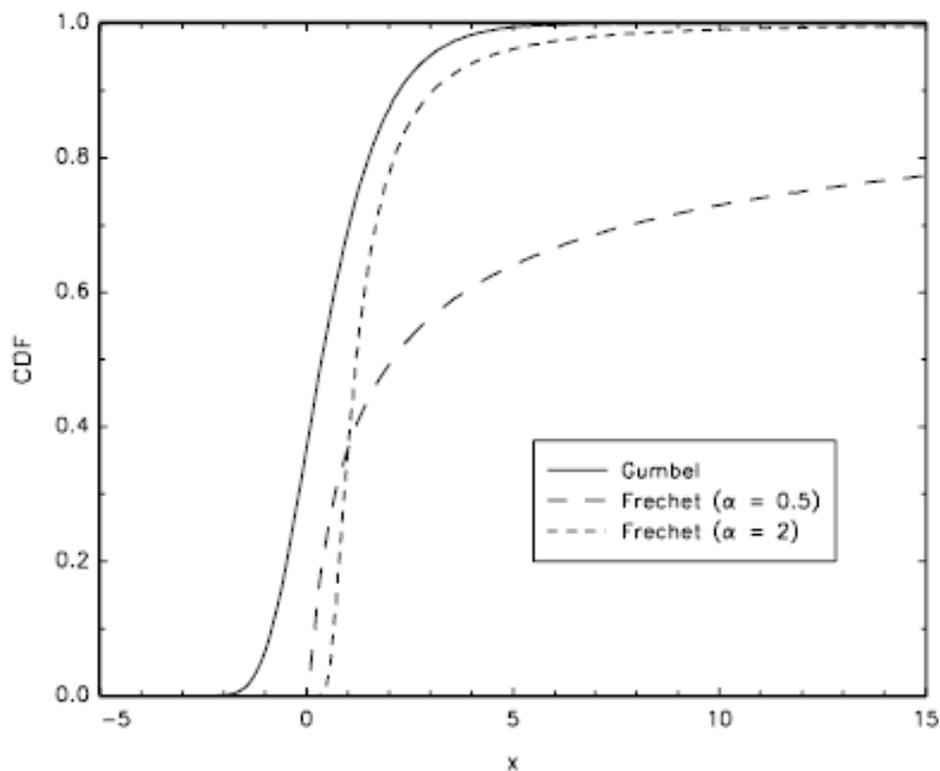
- Loi de Gumbell :  $G(x) = \exp(-e^{-x})$
- Loi de Fréchet :  $G(x) = 0$  si  $x \leq 0$   
 $G(x) = \exp(-x^{-\alpha})$  si  $x > 0, \alpha > 0$

- Loi de Weibull :  $G(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha})$  si  $x \leq 0, \alpha > 0$   
 $G(x) = 1$  si  $x > 0$

Nous représentons ci-dessous les graphes des lois de distribution de :

- Gumbel
- Fréchet de paramètre 0,5
- Fréchet de paramètre 2

### Distributions de Gumbel et Fréchet



Commentaire : La queue de distribution de la loi de Gumbel apparaît plus épaisse que celles des lois de Fréchet de paramètre 0,5 et 2. De plus, nous observons que plus le paramètre de la loi de Fréchet est faible, plus la distribution possède une queue épaisse.

Caractérisation de la GEV :

Les 3 types de distribution peuvent être caractérisés par une distribution unique appelée « Generalized Extreme Value » (GEV). Sa fonction de répartition et sa fonction de densité sont respectivement :

$$G(x) = \exp \left[ - \left( 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{-1}{\zeta}} \right) \right]$$

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1+\zeta}{\zeta}} \exp \left[ - \left[ 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\zeta}} \right]$$

La fonction GEV est donc caractérisée par les 3 paramètres :

- $\mu$  qui est un paramètre de localisation.
- $\sigma$  un paramètre de dispersion.
- $\zeta$  l'indice de valeur extrême.

En particulier, l'indice de valeur extrême  $\zeta$  permet d'identifier la distribution GEV parmi les 3 lois. Nous avons les correspondances suivantes :

$$\text{Si : } \left\{ \begin{array}{l} \zeta > 0, \text{ la GEV est de type Fréchet.} \\ \zeta < 0, \text{ la GEV est de type Weibull.} \\ \zeta \rightarrow 0, \text{ elle est de type Gumbell.} \end{array} \right.$$

Il est à noter que les distributions à queue épaisse sont de type Fréchet, ce qui est le cas de la plupart des séries financières.

A partir de cette distribution, nous pourrions déduire des quantiles d'extrême, c'est-à-dire pour une probabilité donnée  $p$ , la perte maximale  $x_p$  sur  $n$  jours que nous réaliserons où  $n$  désigne la taille de l'échantillon ( $X_i$ ) à partir duquel est déterminé  $M_n$ . Le quantile  $x_p$  d'ordre  $p$  vérifie :

$$P(M_n < x_p) = p$$

D'où :

$$G(x_p) = \exp \left[ - \left( 1 + \zeta \left( \frac{x_p - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{-1}{\zeta}} \right) \right] = p$$

$$\left[ - \left( 1 + \zeta \left( \frac{x_p - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{-1}{\zeta}} \right) \right] = \ln(p)$$

$$x_p = \mu - \frac{\sigma}{\zeta} \left[ 1 - (-\ln(p))^{-\zeta} \right]$$

Nous devons faire le rapprochement avec la VaR au seuil  $\alpha$  à 1 jour : pour cela nous passons par la notion de temps de retour.

## II.2. Temps de retour et Scaling

Définition :

Le temps de retour  $\tau$  associé à une VaR de seuil  $\alpha$  est défini comme le temps moyen au bout duquel le portefeuille subit une perte extrême (nombre de jours qu'il faut pour dépasser la VaR journalière) sous l'hypothèse de stationnarité de la série financière.

L'intérêt d'introduire cette notion est d'obtenir un intermédiaire entre le seuil de la VaR que nous désirons calculer et le seuil du quantile extrême correspondant.

Le temps de retour a pour valeur :

$$\tau = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Démonstration : Nous introduisons la variable de Bernoulli  $Z$  de paramètre  $(1 - \alpha)$  qui prend pour valeur 1 si un évènement extrême survient (avec une probabilité  $\alpha$ ) et 0 sinon.

Nous renouvelons l'expérience de manière indépendante et nous notons  $X$  le nombre de fois où nous devons la réaliser jusqu'à obtenir une perte extrême (en d'autre terme,  $X$  est le rang du premier succès). La variable  $X$  suit donc une loi géométrique de paramètre  $(1 - \alpha)$  et le temps de retour associé au seuil  $\alpha$  de notre VaR est :

$$\tau = E(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (1)$$

Remarque : Nous avons émis en II-1, l'hypothèse que la série étudiée est composée de pertes indépendantes et identiquement distribuées. Nous supposons ici l'hypothèse de stationnarité qui se vérifie également facilement pour des séries financières et qui est nécessaire pour définir le temps de retour comme le temps moyen au bout duquel le portefeuille subit une perte extrême.

**Tableau de correspondance des temps de retour**

Seuil de probabilité	Temps de retour (jours)
99,98%	5 000
99,50%	200
99,20%	125
99,10%	111
99%	100
98%	50
97%	33
96%	25
95%	20

Les quantiles extrêmes obtenus par la distribution GEV ont la particularité de nous donner des pertes maximales sur n jours. En utilisant le même raisonnement que précédemment, le temps de retour associé à la distribution des extrêmes sur une base de n jours et un quantile à  $\alpha_{GEV}$  est :

$$\tau_{GEV} = \frac{1}{1 - \alpha_{GEV}}$$

De plus, comme  $\tau_{GEV}$  est le nombre de jours moyen au bout duquel nous obtiendrons une perte extrême à n jours, nous avons la relation suivante :

$$\tau = n \times \tau_{GEV}$$

Soit : 
$$\tau = n \times \frac{1}{1 - \alpha_{GEV}}$$

En utilisant (1) :	$\alpha_{GEV} = 1 - n \times (1 - \alpha)$
--------------------	--

Il est évident que le nombre de jours  $n$  parmi lesquels nous sélectionnons les pires pertes reste inférieur au temps de retour correspondant. Pour chaque seuil  $\alpha$ , il correspond donc un nombre de jours maximal que nous noterons  $n^{\max}$  et qui ne peut être dépassé.

$$\text{Soit :} \quad n < \frac{1}{1-\alpha}$$

Ainsi, nous comparerons une VaR historique au seuil  $\alpha$  à la VaR GEV obtenue comme quantile d'ordre  $\alpha_{GEV}$ . De plus, dans le cadre de la réalisation de stress-test, nous pourrions raisonner directement en termes de temps de retour sans passer par un niveau de probabilité de seuil.

Scaling : Pour passer d'une VaR journalière à une VaR T jours. Il est possible de multiplier la VaR historique par  $\sqrt{T}$  car la VaR historique peut être considérée comme une volatilité et la VaR GEV par  $T^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Avant de déduire une VaR de la distribution GEV, nous devons d'abord déterminer les paramètres de la distribution. Pour cela, nous procédons à une estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance.

## II.3. Estimation des paramètres de la GEV

### II.3.1 Construction de la distribution empirique $(\mathcal{X}_n^+)_n$

Nous rappelons le principe de la méthode du maximum de vraisemblance. A partir d'un échantillon empirique de variables i.i.d d'une loi dont nous ne connaissons pas les paramètres, la méthode nous permet d'obtenir des estimateurs sans biais des paramètres et donc de déterminer la loi.

Afin de déterminer des estimateurs des paramètres de la distribution GEV de l'extrême d'une série financière, nous devons récupérer un échantillon empirique de variables d'extrêmes que nous nommerons  $(\mathcal{X}_n^+)_n$ .

Nous disposons de la série des rendements de pertes (en valeur absolue)  $\{X_1, \dots, X_K\}$  que nous pouvons supposer i.i.d et à queue épaisse (caractéristiques d'une série financière). De plus, nous posons :  $K = n \times T$ .

Dans un premier temps, nous fixons l'indice de taille  $n$  qui détermine le nombre de jours à partir desquels sont déduits les extrêmes. Nous créons alors  $T$  blocs de  $n$  jours et nous prenons la plus grande valeur de perte sur ce bloc formant ainsi  $T$  extrêmes empiriques  $(\mathcal{X}_1^+, \dots, \mathcal{X}_T^+)$ . L'indice  $n$  doit être suffisamment élevé pour que le théorème de Fisher-Tippett s'applique sur les blocs de taille  $n$  qui sont choisis de façon à ce que les variables de l'échantillon  $(\mathcal{X}_n^+)_n$  soient indépendantes entre elles. Nous allons utiliser dans notre étude une distribution qui est proposée dans la littérature parmi d'autres. Ainsi, nous posons :

$$\mathcal{X}_q^+ = \max\{X_{1+q(t-1)}, t = 1, \dots, n\}, \quad 1 \leq q \leq T$$

Afin de mieux mettre en valeurs la construction de la série finale  $(\mathcal{X}_n^+)_n$ , nous détaillons son mode de calcul à partir de la série initiale  $(X_n)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1^+ &= \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ \mathcal{X}_2^+ &= \max\{X_1, X_3, \dots, X_{2n-1}\} \\ &\vdots \\ \mathcal{X}_T^+ &= \max\{X_1, X_{1+T}, \dots, X_{1+T(n-1)}\} \end{aligned}$$

Ainsi, l'échantillon  $(\mathcal{X}_n^+)_n$  est obtenu directement à partir de l'échantillon  $(X_n)$ . Cependant, tous les termes de la série  $(X_n)$  ne sont pas pris en compte dans le découpage de la série : en particulier, celui-ci s'arrête au terme  $X_{1+T(n-1)}$  ne parcourant pas les  $(T-1)$  dernières valeurs de l'échantillon initial.

Afin d'obtenir un échantillon final qui prend en compte les valeurs de pertes les plus récentes dont nous disposons, les valeurs de la série initiale sont classées de la plus récente à la plus ancienne.

### **II.3.2 Calcul du gradient conjugué des paramètres**

La fonction de densité de la distribution GEV  $(\mu, \sigma, \xi)$  est :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\zeta}{\zeta}} \exp \left[ - \left[ 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\zeta}} \right].$$

En fixant l'échantillon :  $(\mathcal{X}_1^+, \dots, \mathcal{X}_T^+) = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_T)$

Et en notant :  $\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \\ \zeta \end{bmatrix}$  le vecteur des paramètres.

Comme notre échantillon est i.i.d, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\chi_1^+, \dots, \chi_T^+, \theta) = \prod_{i=1}^T g(\chi_i)$$

$$= \frac{1}{\sigma^T} \prod_{i=1}^T \left[ 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\zeta}{\zeta}} \exp \left[ - \sum_{i=1}^T \left[ 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\zeta}} \right]$$

Donc la fonction de log-vraisemblance s'écrit :

$$l_n(\theta) = -\frac{1}{T} \text{Ln}[L(\chi_1, \dots, \chi_T, \theta)]$$

$$= \text{Ln} \sigma + \frac{1+\zeta}{\zeta} \times \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \text{Ln} \left[ 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right] + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left[ 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\zeta}}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance vérifie :

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \min_{\theta \in \vartheta} l_n(\theta)$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système :

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) = 0$$

Le vecteur du gradient est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta L}{\delta \mu} \\ \frac{\delta L}{\delta \sigma} \\ \frac{\delta L}{\delta \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{1 + \zeta - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}}{\sigma \omega_i} \right) \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\left[ (1 + \zeta) - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}} \right] (\chi_i - \mu) - \sigma \omega_i}{\omega_i \sigma^2} \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (1 - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}) \left[ \frac{1}{\zeta^2} \ln(\omega_i) - \frac{\chi_i - \mu}{\zeta \sigma \omega_i} \right] - \frac{\chi_i - \mu}{\sigma \omega_i} \end{pmatrix}$$

En annulant ces trois dérivées, nous obtenons le système vectoriel suivant :

$$S \begin{cases} -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{1 + \zeta - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}}{\sigma \omega_i} \right) = 0 \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\left[ (1 + \zeta) - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}} \right] (\chi_i - \mu) - \sigma \omega_i}{\omega_i \sigma^2} = 0 \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (1 - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}) \left[ \frac{1}{\zeta^2} \ln(\omega_i) - \frac{\chi_i - \mu}{\zeta \sigma \omega_i} \right] - \frac{\chi_i - \mu}{\sigma \omega_i} = 0 \end{cases}$$

Où :  $\omega_i = 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right)$

### **II.3.3 Détermination de la taille de l'échantillon**

Le choix de la taille  $n$  des blocs est assez difficile : il faut que la période de référence du bloc soit suffisamment longue pour que la théorie des extrêmes puisse s'appliquer d'une part et que le découpage en  $n$  blocs prenne en compte le maximum de termes de la série initiale comme nous l'avons évoqué plus haut.

Cependant, pour un échantillon initial  $(X_1, \dots, X_K)$  de longueur  $K$  fixe, plus l'indice  $n$  est grand, plus la taille  $T$  de la série finale  $(\chi_n^+)_n$  se voit réduite car  $K = T \times n$  alors qu'il faut que nous disposions d'assez de données pour obtenir des estimations convenables (au moins 50 observations pour utiliser la méthode du maximum de vraisemblance). En finance, il n'existe pas de consensus sur le choix de la taille  $n$  des blocs mais en tenant compte de l'évolution des marchés, nous pouvons nous baser sur des valeurs de  $n$  variant entre 20 et 40 selon la série pour converger vers une GEV.

En théorie, la méthode du maximum de vraisemblance ne peut s'appliquer que sur des échantillons de plus de 50 observations donc le nombre de blocs  $T$  ne doit pas être inférieur à 50. Nous notons qu'en pratique, sur un échantillon de  $T = 46$  maxima, le solveur d'Excel nous a fourni des résultats très satisfaisants.

Comme la taille  $K$  de l'échantillon initial  $(X_1, \dots, X_K)$  est  $K = T \times n$ , les deux contraintes précédentes impliquent une troisième contrainte sur  $K$  qui doit être au moins égale à  $50 \times 20 = 1000$ . Cela signifie un historique constitué de  $\frac{1000}{252} \approx 4$  années donc remontant à l'année 2004.

## III. Approche semi-paramétrique

### III.1. Description de la méthode

Cette méthode n'utilise pas de distribution d'extremums ; nous travaillons uniquement sur la distribution de pertes initiales en se concentrant sur les queues de distribution. Pour cela, nous utilisons la caractérisation du domaine d'attraction de la distribution de Fréchet.

#### Domaine d'attraction de Fréchet

Définition :

Si  $F$  vérifie les hypothèses du théorème de Fisher-Tippet, alors on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de Fréchet et nous notons  $F \in MDA(H)$ , où  $H$  est la distribution GEV correspondante.

Nous rappelons que les séries étudiées étant des séries financières, elles présentent la caractéristique d'être à queue épaisse et donc d'appartenir au domaine de Fréchet. Dans la suite de notre étude et plus particulièrement dans la section de l'approche semi-paramétrique de la théorie des valeurs extrêmes, nous supposerons cette hypothèse vérifiée.

### III.2. Fonction de distribution des excès

La fonction de distribution des excès de perte par rapport à un seuil  $u$  est définie par :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u)$$

Avec :  $0 \leq y < x_0 - u$ ,  $x_0 = \sup\{x \in \mathfrak{R}, F(x) < 1\}$

Il s'agit bien de la distribution initiale de nos pertes concentrée dans les queues de distributions où la « distribution initiale » désigne la distribution de l'échantillon i.i.d des rendements de pertes  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de taille  $K$  et  $F$  sa fonction de répartition. En effet, au-delà d'un certain seuil  $u$ , la distribution des excès est exactement notre distribution initiale. Ce résultat intuitif découle du théorème suivant :

*Théorème :*

*Soit  $F$  une fonction de distribution et  $F_u$  sa fonction de distribution des excès associée. Alors, pour  $\zeta \in \mathfrak{R}$ , on a :*

*$F \in MDA(H_\zeta)$  si et seulement si il existe une fonction positive mesurable  $\beta(u)$  telle que :*

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\zeta, \beta(u)}(y)| = 0$$

Tout l'objet de l'approche semi-paramétrique consiste à admettre que la distribution des excès de notre série, autrement dit, notre série initiale au-delà d'un certain seuil peut s'écrire :

$$F_u(x) = 1 - \left(1 + \frac{\zeta x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\zeta}}, \quad \forall x > u \quad (1)$$

Il s'agit de la distribution de Pareto généralisée définie par les paramètres  $\zeta$  et  $\beta$  que nous notons GPD ( $\zeta, \beta$ ) dont nous définissons les particularités ci-dessous.

### Loi de Pareto généralisée

La GPD (Generalized Pareto Distribution) est une distribution à 2 paramètres de fonction de distribution (ou fonction de répartition) :

Avec  $x \geq 0, \beta > 0$  quand  $\zeta \geq 0$  et  $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\zeta}$  quand  $\zeta < 0$  :

$$\begin{cases} G_{\zeta, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\zeta x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\zeta}} & \text{si } \zeta \neq 0 \\ G_{\zeta, \beta}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } \zeta = 0 \end{cases}$$

La fonction de densité de la GPD ( $\zeta, \beta$ ) est la suivante :

$$\begin{cases} g_{\zeta, \beta}(x) = \beta^{\frac{1}{\zeta}} (\beta + \zeta x)^{-\frac{1}{\zeta}-1} & \text{si } \zeta \neq 0 \\ g_{\zeta, \beta}(x) = \beta^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } \zeta = 0 \end{cases}$$

L'espérance de la loi GPD ( $\zeta, \beta$ ) a pour valeur :  $\frac{\beta + \zeta u}{1 - \zeta}$ .

De même, si l'on s'intéresse à un seuil  $s > u$ , la distribution des excès de perte par rapport au seuil  $s$  suit toujours une Pareto généralisée avec le même paramètre  $\zeta$  mais de paramètre d'échelle de valeur  $\beta + \zeta(s - u)$ .

Le paramètre  $\zeta$  est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution et  $\beta$  est un caractère d'échelle. Le cas  $\zeta > 0$  est le plus intéressant dans les modèles de gestion de risque car la Pareto généralisée est à queue épaisse.

### III.2.1 Détermination du seuil $u$

#### Fonction d'excès en moyenne

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer le seuil  $u$  à partir duquel la distribution initiale vérifie la propriété précédente. L'estimation du seuil se fait par la méthode graphique de Hill plot. Avant de la décrire, nous introduisons la fonction d'excès en moyenne qui représente l'espérance de la distribution GPD.

La fonction d'excès en moyenne est définie par :

$$e(u) = E(X - u / X > u)$$

Où  $X$  est notre variable de perte initiale. La fonction d'excès en moyenne correspond donc à l'espérance de la fonction de distribution des excès  $F_u$ .

Un estimateur empirique de cet estimateur est :

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^K (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^K 1_{\{X_i > u\}}}$$

Or, l'espérance de la loi GPD ( $\zeta, \beta$ ) ayant pour valeur :

$$\frac{\beta + \zeta u}{1 - \zeta}$$

Nous cherchons donc le seuil  $u$  à partir duquel :

$$e(u) = E(X - u / X > u) = \frac{\beta + \zeta u}{1 - \zeta}$$

C'est-à-dire, à partir duquel la fonction est linéaire en  $u$ . Ainsi, la méthode de Hill Plot consiste à tracer graphiquement la fonction d'excès en moyenne estimée  $\hat{e}_n(u)$  en fonction de  $u$  et de repérer les valeurs de  $u$  à partir desquels le graphique est presque linéaire.

En pratique, nous rencontrons des difficultés avec la méthode graphique au niveau de l'interprétation de la « partie linéaire ». Dans les ouvrages traités sur le sujet, il nous est proposé d'autres méthodes pour déterminer le niveau  $u$  :

- Nous pouvons choisir pour  $u$  différentes fonctions de  $K$  telles que ( $E$  désigne la fonction partie entière) :
  - $u = E(\sqrt{K})$
  - $u = E\left(\frac{K}{10}\right)$
  - $u = E\left(\frac{K}{20}\right)$
- Utiliser pour  $u$  une fonction constante de  $K$ . Ainsi,  $u$  est déterminé selon le seuil de confiance souhaité. Cette solution a l'avantage de mieux maîtriser la taille de l'historique (plus de 2 ans en jours ouvrés) et la proportion d'extrêmes retenus. Il est alors naturel de supposer que plus le seuil de confiance est élevé, plus l'estimation doit se faire sur les statistiques les plus extrêmes. Par exemple, pour un seuil à 95%, on peut retenir 40 extrêmes et pour un seuil de 99.5% seulement 10 extrêmes.

Cependant, il s'agit de méthodes bien spécifiques qui sont adaptées aux séries et nous ne sommes pas concernés par ces méthodes pour l'analyse de nos séries.

Lorsque  $u$  est déterminé, nous notons  $N_u = \sum_{i=1}^K 1_{\{X > u\}}$  le nombre de pertes de notre distribution initiale qui dépassent le seuil et nous pouvons calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{\zeta}$  et  $\hat{\beta}$  de la Pareto généralisée.

### III.2.2 Estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de la GPD

A partir de la forme (1) de la distribution des excès :

$$F_u(x) = 1 - \left(1 + \frac{\zeta x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\zeta}}$$

On obtient  $\hat{\zeta}$  et  $\hat{\beta}$  par la méthode du maximum de vraisemblance qui revient à maximiser la fonction de log-vraisemblance :

$$\text{Ln } L(\zeta, \beta) = \sum_{t=1}^n \text{Ln} [g_{\zeta, \beta}(x_t) 1_{\{\zeta > 0\}}(x_t)]$$

Une fois les paramètres de la GPD estimés, en utilisant le fait que :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u) = \frac{P(u < X < y + u)}{P(X > u)} = \frac{P(X < y + u) - P(X < u)}{1 - P(X < u)} = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Et en posant  $y = x - u$ , nous obtenons l'égalité :

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(x - u) + F(u)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x > u \\ F \text{ est la distribution des pertes initiales} \\ F_u, \text{ la distribution des excès donc la GPD}(\zeta, \beta) \end{array} \right.$$



Nous notons qu'il s'agit ici de la distribution des pertes initiales au-dessus d'un certain niveau de pertes tandis que la distribution obtenue précédemment grâce à une GEV correspondait à la série des pertes maximales.

Il sera très intéressant de comparer cette distribution à celle des extrêmes en utilisant les seuils équivalents obtenus via les temps de retour (que nous avons définis dans la section de l'approche paramétrique) comme nous le ferons dans la section application de cette étude.

Les quantiles d'ordre  $q$  obtenus en inversant la fonction  $\hat{F}$  sont exactement les VaR de seuil  $q$  :

$$\hat{VaR}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\zeta}} \left[ \left( \frac{n}{N_u} (1-q) \right)^{-\hat{\zeta}} - 1 \right], \quad \forall q > \hat{F}(u)$$

## **III.3. Expected shortfall, mesure de risque cohérente**

### **III.3.1 Problématique de la Tail VaR**

La Tail VaR théorique est une mesure de risque cohérente (ou la VaR conditionnelle) qui permet de répondre à la question « Si la situation se dégrade effectivement, quelle sera ma perte moyenne ? ». Elle calcule donc l'espérance de perte conditionnellement à une variation de valeur du portefeuille située dans le 100 (1-s)<sup>ème</sup> centile. Pour une VaR de seuil s à J jours, elle donne la perte moyenne dans les J jours en supposant que la situation évolue dans le (1-s) % des cas les plus défavorables. La Tail VaR vient donc compléter la VaR permettant de mieux cerner le niveau de risque du portefeuille et pourtant elle reste beaucoup trop faussée en pratique par la méthode historique.

Jusqu'à aujourd'hui, le service Risk Market de Dexia Asset Management calcule la Tail VaR à partir de la méthode historique classique, définie en première partie car elle présente l'avantage de ne pas sous-estimer les risques extrêmes ; cependant cette approche présente l'inconvénient d'être trop faussée par les valeurs aberrantes.

### **III.3.2 Définition de l'Expected Shortfall**

A l'aide de la distribution de Pareto généralisée (la distribution de notre série initiale dans les queues de distribution), nous obtenons une VaR conditionnelle beaucoup plus précise que nous nommons « Expected Shortfall » et que nous noterons ES.

De façon générale, mathématiquement, il s'agit de la quantité :

$$ES = E (X / X > VaR )$$

Où X suit la loi d'une perte quotidienne en termes de rendement.

Nous remarquons que :

$$ES_q = VaR_q + E(X - VaR_q / X > VaR_q)$$

Où  $E(X - VaR_q / X > VaR_q)$  est la fonction d'excès en moyenne au seuil  $VaR_q$  ; C'est-à-dire l'espérance de la distribution des excès de perte par rapport au seuil  $VaR_q$ . D'après ce que nous avons vu au-dessus, si  $VaR_q$  est supérieur au seuil minimum  $u$ , alors la distribution des excès de perte par rapport au seuil  $VaR_q$  suit une distribution de Pareto généralisée de paramètres  $\zeta$  et  $\beta + \zeta(VaR_q - u)$ .

Ainsi, nous avons :

$$E(X - VaR_q / X > VaR_q) = \frac{\beta + \zeta(VaR_q - u)}{1 - \zeta}$$

Ce qui nous permet de conclure pour l'expected shortfall et d'en déduire un estimateur obtenue à partir d'une mesure de risque cohérente :

$$\frac{ES_q}{VaR_q} = \frac{1}{1 - \zeta} + \frac{\beta - \zeta u}{(1 - \zeta)VaR_q}$$

$$\hat{ES}_q = \frac{\hat{VaR}_q + \hat{\beta} - \hat{\zeta} u}{1 - \hat{\zeta}}$$

## IV. Comparaison des approches « extrêmes »

Dans les tableaux suivants, nous récapitulons les points forts et les points faibles des deux approches basées sur la théorie des valeurs extrêmes que nous venons de présenter.

### IV.1. Méthode paramétrique

	Avantages	Inconvénients
<b>Méthode paramétrique (loi GEV)</b>	Rapide et simple à mettre en œuvre sous Excel (VBA et macro).	Nécessite beaucoup de données pour que les théorèmes limite s'appliquent.
	Notion de temps de retour utile pour les stress test.	La méthode permet uniquement de calculer la VaR qui n'est pas une mesure de risque cohérente (car elle ne vérifie pas l'hypothèse de sous-additivité).
	L'indice de queue (paramètre $\xi$ ) de la loi GEV est un bon indicateur pour savoir si la distribution d'extrême converge vers une loi de Fréchet et pour ainsi valider la méthode.	Pas de VaR en-dessous d'un certain seuil minimal selon le temps de retour.
	La loi GEV permet d'obtenir des seuils de VaR très élevés et très précis pour générer des stress test.	

## IV.2. Méthode semi-paramétrique

	Avantages	Inconvénients
<b>Méthode semi-paramétrique (loi GPD)</b>	Permet de calculer la VaR et la Tail VaR qui est une mesure cohérente.	La méthode graphique du Hill plot est difficile et longue à mettre en œuvre.  Non envisageable pour un calcul quotidien.
	D'autres méthodes que la méthode graphique du Hill Plot sont proposées pour la détermination du seuil $u$ : <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Choisir pour <math>u</math> différentes fonctions de l'indice <math>K</math> (qui désigne la longueur de la série initiale de données)</li> <li>▪ Déterminer le seuil <math>u</math> selon le niveau de confiance souhaité (et non selon l'indice <math>K</math>)</li> </ul>	Nécessite un grand historique de données :  En effet, l'échantillon de la méthode EMV est uniquement composé des données supérieurs au seuil $u$ .

**CHAPITRE III - APPLICATION À UN FOND  
ALTERNATIF DE DEXIA ASSET  
MANAGEMENT**

# **I. Environnement et présentation des portefeuilles**

Cette section va nous permettre de situer les données de travail sur lesquelles se base notre étude dans leur contexte. La provenance des données tient un rôle tout aussi important que les résultats que nous obtiendrons pour fournir une interprétation et une analyse cohérentes. De plus, l'origine de nos données est primordiale pour choisir les paramètres de nos différentes approches de calcul.

## **I.1. Environnement et gestion des portefeuilles**

### **I.1.1 Présentation de DAM**

La société Dexia Asset Management située dans le 8<sup>ème</sup> arrondissement de Paris, est une société de gestion d'actifs financiers qui s'adresse aux investisseurs institutionnels et privés. La compagnie pratique diverses stratégies d'investissement allant de stratégies traditionnelles, alternatives et structurées. Notre étude portera sur un fond représentatif des fonds alternatifs de la compagnie car il présente un effet de levier important et est donc considéré comme « risqué ».

### **I.1.2 Présentation de la gestion alternative**

#### Définition

La gestion alternative est un mode de gestion de portefeuille appliqué par certains fonds d'investissement dits « fonds alternatifs » ou « fonds de couverture », ou « hedge funds ». Ces investissements sont souvent considérés comme risqués parce qu'ils utilisent parfois un effet de levier important, alors qu'ils tendent au contraire à éliminer le risque de marché. Au vu de la hauteur des risques supposés, ils sont réservés aux investisseurs sophistiqués.

## Historique

Les fonds alternatifs sont apparus dans les années 1950 avec les activités d'Alfred Winslow Jones, un ancien journaliste du magazine Fortune. Ils ont été découverts par le public à l'occasion de la dévaluation de la livre Sterling suite à l'intervention de Georges Soros. Historiquement, les family offices furent les premiers à les utiliser et ont ainsi contribué à leur émergence. En novembre 2007, Près de 10 000 hedge funds étaient opérationnels dans le monde et géraient environ 1 760 milliards de dollars (soit 1 250 milliards d'euros).

## Objectif de la gestion alternative : se décorrélérer des marchés financiers

La gestion alternative vise à décorrélérer les performances du portefeuille de l'évolution générale de la bourse en intervenant sur les marchés des actions mais aussi sur les obligations, les devises, les matières premières, le marché des œuvres d'art, l'immobilier et les entreprises non cotées... Le but est généralement de lisser les courbes de rendement et de les améliorer par rapport au rendement du marché permettant d'avoir un meilleur rapport performance / volatilité.

## Les fonds alternatifs considérés comme très risqués

La raison pour laquelle ces « fonds alternatifs » sont considérés comme risqués est lié au fait qu'au delà du « lissage » des courbes de rendement, ils ont servi lors de nombreuses attaques spéculatives, sur les taux de change par exemple, avec des retombées économiques néfastes pour le pays attaqué. Des exemples incluent la crise économique du Mexique (1992-1994), la crise asiatique de 1997-1998, la Russie, le Brésil etc... Pour certains, ces « fonds » n'ont fait que rétablir les taux de change « surévalués » de certains pays à un niveau plus raisonnable. Cependant, les attaques spéculatives ne s'arrêtent pas seulement aux monnaies « surévaluées » comme lors de la crise asiatique où Taïwan, Singapour et Hong Kong n'ont pas été épargnés.

### Type d'actifs utilisés dans les fonds alternatifs

Les portefeuilles alternatifs se composent notamment :

- D'actions défensives ou contracycliques en période de marché baissier, ou des actions à coefficient bêta élevé en période de marché haussier.
- De produits dérivés : en fonction de la tendance du marché, le gestionnaire peut acheter ou vendre des contrats qui profiteront de la baisse (achat d'options de vente/puts, etc.) ou de la hausse (achat d'options d'achat/calls, etc.). Le gérant a aussi la possibilité d'emprunter plus de titres qu'il n'en possède (achat à découvert) ou inversement (vente à découvert), dans le but d'augmenter l'effet de levier financier.
- Des placements dans des domaines très spécifiques tels que ceux que pratique Vice fund
- De placements autres que sur le marché des actions : devises, matières premières, dettes décotées, etc.

### Les outils des Hedge Funds

- La vente à découvert (selling short) consiste à vendre au comptant des titres que l'on ne détient pas, en espérant les racheter moins cher ultérieurement. Pour ce faire, le gérant emprunte ces mêmes titres sur la période. En effet, lors d'un prêt de titres il y a transfert de propriété vers l'emprunteur, si bien que celui-ci a le droit de les vendre ; il lui faut seulement faire en sorte d'avoir racheté les titres au moment où il doit les rendre. Cette stratégie est très risquée en cas de retournement haussier du marché : en effet, le cours du titre sous-jacent a la capacité de hausser théoriquement à l'infini et si l'on ajoute l'effet de levier les pertes peuvent être abyssales.
- L'arbitrage consiste à exploiter des écarts de prix injustifiés, par exemple en achetant des obligations convertibles supposées sous-évaluées tout en vendant à découvert l'action sous-jacente. On peut également profiter de l'écart des prix d'un même titre ou d'une

même devise (cf spéculation sur le Yen dont la correction a perturbé les marchés asiatiques peu avant la crise des subprime) sur deux marchés différents.

- La recherche de l'effet de levier (leverage) consiste à emprunter pour augmenter la taille effective du portefeuille (constitué au départ seulement des fonds apportés par les investisseurs).
- Le recours aux produits dérivés : options, futures ou contrats de gré à gré est fréquent, soit dans un but spéculatif, soit au contraire pour couvrir le portefeuille.
- La justice internationale : des fonds rachètent à bas prix des créances sur des pays du tiers-monde, puis engagent des actions en justice afin de permettre la saisie de matières premières ou d'autres valeurs appartenant à ces pays, si ceux-ci ne respectent pas leurs obligations de paiement.
- La gestion alternative s'appuie aussi sur la recherche et l'analyse micro ou macroéconomique, qui doit permettre de trouver des opportunités soit dans les tendances de fond de l'économie ou des marchés financiers, soit en découvrant des entreprises à fort potentiel ou au contraire en difficulté.

### Exemples de stratégies utilisées

Les différentes stratégies se caractérisent par des ratios rendement / risque très variables. Il existe de nombreuses présentations des différentes stratégies alternatives. La majorité de celles que nous présentons ci-dessous sont pratiquées au sein de Dexia Asset Management :

- Arbitrage de convertible (convertible arbitrage) : l'objectif de ce fonds est d'investir dans les obligations convertibles mal cotées sur le marché. Typiquement, cette stratégie consiste à acheter l'obligation convertible, tout en vendant l'action sous-jacente à découvert.

- Sélection de titres (long short Equity) : cette stratégie consiste à prendre des positions aussi bien longues (acheteuses) que courtes (vendeuses) sur des actions sélectionnées appartenant au même secteur ou à la même zone géographique, avec une position nette résultante plutôt longue (long bias), ou plutôt vendeuse (short bias), ou neutre (market neutral). Cette stratégie nécessite de bien maîtriser les outils de sélection des titres (stock picking).
- High Frequency Statistical arbitrage : l'objectif est de prendre des positions basées sur un écart de comportement par rapport à l'historique, c'est-à-dire à miser sur un retour à la moyenne. Ceci peut consister à tirer profit d'une baisse ou d'une hausse de la corrélation entre des titres, des secteurs ou bien des marchés, lorsque celle-ci semble injustifiée d'un point de vue fondamental. Ce comportement est auto prédictif, c'est-à-dire que son adoption favorise la stabilité des observations. Nous citerons l'exemple suivant : tirer profit d'une baisse de la corrélation entre l'action BNP et l'action Société Générale en achetant l'une et en vendant l'autre.
- Quantitative trading : le principe de cette stratégie est de prendre des positions à partir de prédictions effectuées par un modèle quantitatif (soit une analyse des cours) et des informations dans le but de déceler des signaux acheteurs ou vendeurs. Cette stratégie est efficace sur les futures uniquement car les frais de courtages y sont très faibles et la liquidité suffisante.
- Macro / opportuniste (global macro) : les gérants de cette stratégie tentent de tirer profit des évolutions de l'économie globale, en particulier des évolutions de taux dues aux politiques économiques des gouvernements. La stratégie utilise les instruments reflétant la situation économique mondiale : devises, indices, courbes de taux, matières premières.
- Arbitrage sur produits de taux (fixed income arbitrage) : cette stratégie consiste à tirer profit des mouvements et des déformations de la courbe des taux. Elle utilise comme véhicules les titres d'État, les futures et les swaps de taux.

- Arbitrage sur fusions-acquisitions (merger arbitrage) : la possibilité d'arbitrage dans ce genre de situations (OPA, OPE) résulte de l'écart entre le prix annoncé par l'acquéreur et le prix auquel la cible se traite sur le marché.
- Situations spéciales (event driven) : le gestionnaire de cette stratégie recherche les opportunités générées par des événements intervenant dans la vie des entreprises telles que des filialisations, des fusions, ou des difficultés (distressed securities).
- Marchés émergents (emerging markets) : le but est d'investir dans les marchés en développement. Cette stratégie est considérée très risquée car les instruments de couverture ne sont pas toujours disponibles sur ce type de marché.

#### Les limites de la gestion alternative

- Le risque : les fonds alternatifs sont très peu réglementés et il est très difficile pour un investisseur particulier d'apprécier leur risque. En effet, certains fonds ont une volatilité plus faible que celle d'un marché action de pays développé et sont d'ailleurs décorrélés des marchés actions (actions achat/ventes). D'autres sont beaucoup plus risqués compte tenu notamment des effets de levier importants utilisés (tels que les matières premières). Nous rappelons notamment que les hedge funds ont plusieurs fois été la cause depuis les années 1990, et notamment lors de la crise asiatique, d'énormes dégâts économiques.
- Le manque de liquidité : les meilleurs Hedge Funds sont souvent fermés, donc moins liquides que d'autres placements. Les fonds alternatifs offrent généralement peu de liquidité à leurs souscripteurs. Un investissement doit régulièrement attendre 1 à 3 mois avant d'obtenir une souscription puis 2 à 12 mois pour pouvoir sortir du fonds.
- Opportunités : la croissance importante des placements en fonds alternatifs fait que de plus en plus de gérants sont à la recherche des mêmes opportunités d'investissements avec beaucoup plus d'argent que par le passé. Les performances des fonds alternatifs auraient tendance à diminuer et ainsi encouragent leurs gérants à prendre de plus en plus de risques.

## **I.2. Présentation du portefeuille « Equity »**

Le portefeuille sur lequel nous allons tester nos différentes approches de calcul de la Value at Risk est un fonds géré au sein de Dexia Asset Management spécialisé dans les actions européennes et nord-américaines et que nous nommerons « Equity », par souci de confidentialité.

Afin de mieux comprendre l'environnement et les enjeux de notre étude sur ce produit, nous apportons les précisions suivantes concernant ce portefeuille :

### ***I.2.1.A. Fiche technique du fonds « Equity »***

#### Stratégie d'investissement :

Le fonds « Equity » est un fonds monétaire dynamique qui investit une partie de ses actifs selon la stratégie "Event Driven", principalement sur actions européennes et nord-américaines. Le principal moteur de performance est la réalisation d'évènements susceptibles de créer une discontinuité dans le prix d'un actif donné. Le principal atout de ce fonds est par conséquent de profiter des fusions et acquisitions et de l'émergence de situations spéciales. Nous notons que le processus comporte des biais limités en termes d'exposition au marché.

Horizon d'investissement : 18 mois

Année de création : 1998

Valorisation : quotidienne

### 1.2.1.B. Chiffres clé du fonds « Equity »

Nous notons que l'ensemble des données ci-dessous correspondent à la situation du portefeuille arrêté à la date du 30 juin 2008.

#### Données statistiques :

	1 an	3 ans	Création
<b>Corrélation JPM EMU EUR</b>	-0,02	-0,03	-0,1
<b>Corrélation MSCI Europe EUR PI</b>	0,4	0,5	0,31
<b>Volatilité</b>	7,08%	5,61%	5,88%
<b>Ratio de Sharpe ^</b>	-1,55	-0,81	0,96
<b>Meilleure performance</b>	3,66%	3,66%	4,71%
<b>Moins bonne performance</b>	-3,84%	-3,84%	-5,88%
<b>Max draw down</b>	-	-	-8,04%

\* Performance vs. Euribor 3 mois

#### Commentaire :

- *Le max drawdown indique l'écart entre la plus haute valeur et la plus basse valeur du fonds depuis sa création.*
- *Le ratio de Sharpe mesure l'écart de rentabilité du fonds Equity par rapport au taux de rendement d'un placement sans risque (Euribor 3 mois ici), divisé par la volatilité du fonds.*
- *Nous observons que la corrélation entre la valeur liquidative du fonds et les indices d'action MSCI Europe et JPM EMU qui sont représentatif des principales actions européennes et américaines est presque nulle ; il semble que le comportement du hedge fund est bien décorrélé des marchés américains et européens.*

Performances annuelles et valeurs liquidatives du fonds :

Année	Valeurs liquidative	Performance annuelle	Performance depuis la création
1998	1 700		
1999	1 901	11,82%	11,82%
2000	2 219	16,73%	28,55%
2001	2 360	6,35%	34,91%
2002	2 639	11,82%	46,73%
2003	2 795	5,91%	52,64%
2004	2 987	6,87%	59,51%
2005	3 251	8,84%	68,35%
2006	3 512	8,03%	76,38%
2007	3 515	0,09%	76,46%
juin 2008	3 350	-4,69%	71,77%

*Commentaire : Il est intéressant de noter que le fonds « Equity » a été très performant sur les années 2001 et 2002 durant la crise financière qui a suivi l'évènement du 11 septembre 2001 en restant donc bien décorrélé des marchés boursiers. Cependant, le hedge fund n'a pas été épargné par la crise des subprimes qui a débuté fin 2007 et qui s'est poursuivie sur l'année 2008 puisque la performance du fonds sur 2007 est presque nulle et sur le premier semestre 2008, celle-ci est négative avec pour valeur -4,69 %. L'objectif de gestion de ne pas subir les tendances des marchés financiers ne s'est donc pas vérifié ici.*

Analyse du risque :

	<b>30.06.2008</b>	<b>31.12.2007</b>	<b>30.06.2007</b>	<b>31.12.2006</b>	<b>30.06.2006</b>	<b>31.12.2005</b>
<b>VaR à 99% sur 1 jour</b>	-0,78%	-0,65%	-0,56%	-0,78%	-0,73%	-0,61%
<b>Sensibilité action ajustée (1)</b>	1,95%	2,10%	1,85%	1,52%	1,67%	2,05%
<b>Taux d'investissement brut (2)</b>	133,72%	128,56%	111,09%	125,34%	133,67%	154,22%
<b>Taux d'investissement net (3)</b>	16,53%	15,06%	13,36%	15,08%	16,08%	18,55%
<b>Nombre de positions</b>	83	86	85	85	83	81
<b>% des 10 plus grosses positions</b>	28,67%	29,07%	29,31%	29,31%	28,62%	27,93%
<b>Merger arbitrage (4)</b>	18,36%	16,29%	19,65%	27,34%	26,59%	19,23%

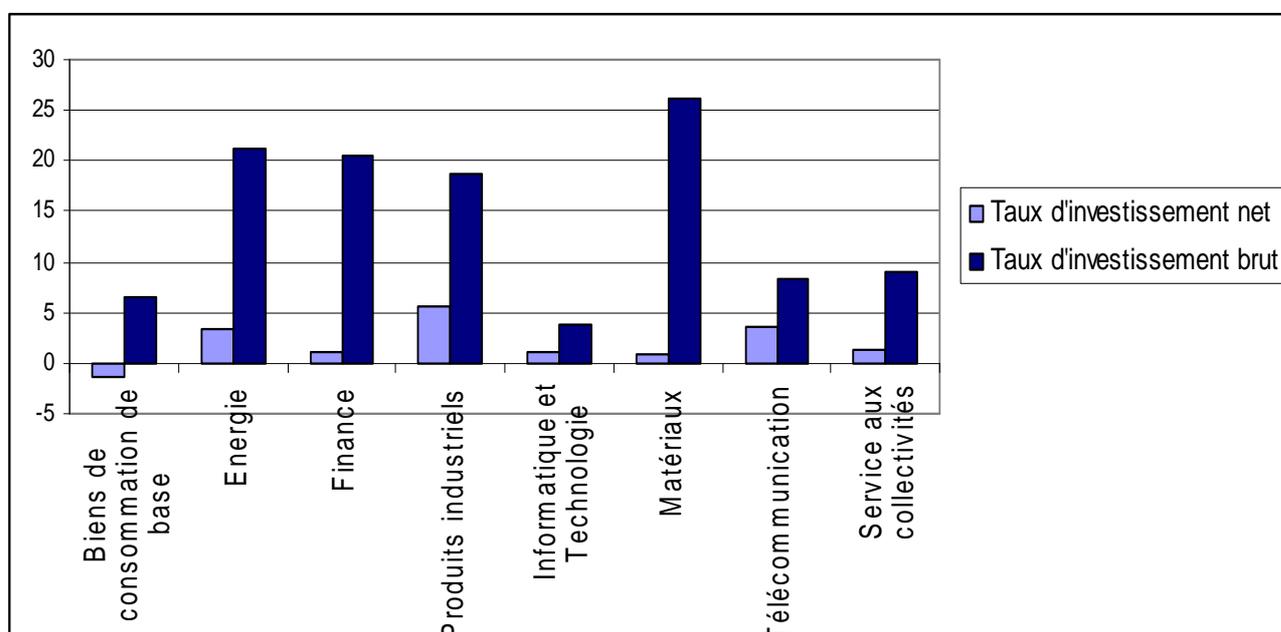
Commentaire :

- (1) : la « Sensibilité action ajustée » désigne la variation de la performance du fonds en supposant une hausse de l'indicateur Beta de 1%, hors positions sur les « merger arbitrage », à savoir les positions sur fusions acquisitions et autres opportunités.
- (2) : le taux brut d'investissement correspond à la somme des expositions « long » et « short » en valeur absolue.
- (3) : le taux net d'investissement correspond à la somme des expositions « long » et « short ».
- (4) : Ce taux indique la part d'investissement sur les titres se rapportant à des OPA, OPE, OPR...

Composition du fonds « Equity » au 30 juin 2008 :

Le diagramme ci-dessous donne la répartition sectorielle de la composition du portefeuille Equity en position nette (somme des positions longues diminuées des positions courtes) et en brute (somme des positions longues et des positions courtes en valeur absolue) :

**Exposition sectorielle du fonds « Equity » (en %)**



Conclusion :

Le fonds Equity, spécialisé dans les actions européennes et américaines est relativement risqué et est en particulier très sensible aux perturbations des marchés boursiers actuelles. Nous connaissons l'évolution de la composition du fonds et de ses principaux indicateurs de risque depuis 2005 ainsi que la performance du portefeuille depuis sa création, c'est-à-dire depuis 1998. Nous notons que les Value at Risk calculées aux différentes dates ont été obtenues selon l'approche historique.

## **II. Calcul de la VaR selon l'approche historique**

La méthode de calcul de la Value at Risk est fixée au 30 juin 2008. Nous allons calculer la VaR du fonds Equity selon l'approche de simulation historique et selon les deux méthodes qui découlent de la théorie des valeurs extrêmes afin de comparer nos résultats et de conclure sur la pertinence de ces méthodes appliquées au fonds alternatif spécialisé dans les actions européennes et nord-américaines.

### **II.1. Mise en place des données**

#### **II.1.1 Choix de la longueur d'historique**

Dans un premier temps, nous fixons l'horizon de l'historique sur lequel nous établirons nos prévisions. Comme nous l'avons vu, cette étape est délicate car la méthode présente un risque de mesure lié à la longueur de l'échantillon. Si celui-ci est trop court, on s'expose à un risque lié au fait qu'on n'aura pas suffisamment de données pour estimer correctement le quantile à 99% par exemple (la variance de l'estimateur sera alors très grande). Si, au contraire, on le choisit trop long, on court le risque que la distribution des facteurs change, ce qui induit un risque sur l'estimation du quantile. En effet, le contexte économique évolue très vite et certaines conjectures historiques de titres ne sont plus valables car les conditions de marché sont trop différentes.

En particulier, les secteurs de l'informatique et des télécommunications ont beaucoup évolué ces dernières années. Comme notre portefeuille contient des titres de ces secteurs, il serait peu pertinent d'utiliser un historique remontant à 1998. De plus, la gestion de notre fonds étant de saisir les opportunités de marché propres aux fusions acquisitions, les interactions de ces secteurs évoluent vite et risquent de fausser nos prévisions. Par conséquent, nous choisissons de retenir un horizon de 3 années, ce qui correspond à 756 données puisque nous nous basons sur 252 jours ouvrés par an.

## II.1.2 Récupération des données

Dans un premier temps, nous devons récupérer l'ensemble des données nécessaires au calcul de la VaR historique :

- La composition du fonds Equity au 30 juin 2008, à savoir les noms des titres, les quantités et les sens des 83 positions (comme le montre le tableau « *Analyse du risque* » de la section « *Chiffres clé du fonds Equity* »). Pour information, la composition du portefeuille par secteur à cette date est représentée dans le graphe « *Exposition sectorielle du fonds « Equity » (en %)* » présenté précédemment.
- L'historique des cours de ces actions remontant au 30 juin 2005 que nous récupérons sur Bloomberg. A partir de l'historique des cours, nous calculons l'historique des rendements à chaque date  $t$  en appliquant la formule :

$$r_t = \frac{cours_t - cours_{t-1}}{cours_{t-1}}$$

### Problème de titres manquants :

Lorsque nous récupérons l'historique des rendements des actions présentes en portefeuille au 30 juin 2008, nous nous apercevons que certaines actions présentes dans le fonds sont rattachées à de récentes introductions en Bourse. Nous notons que ce phénomène n'est pas étonnant compte tenu de la particularité de notre fonds qui est de saisir les opportunités de fusions acquisitions du marché.

Etant donné qu'il n'existe pas d'historique remontant à 2005 pour ces actions, nous reconstituons donc l'historique des rendements de ce titre en utilisant l'indice sectoriel dont fait parti le titre. Nous notons qu'un indice sectoriel mesure la performance d'un sous-ensemble de compagnies ayant des caractéristiques communes ; ces indices sont calculés à partir des compagnies incluses dans le sous-ensemble visé (par exemple, les compagnies d'un secteur

d'activité comme les télécommunications ou les compagnies de taille semblable comme les petites compagnies).

Nous trouvons le secteur auquel se rattache les titres récents, les indices sectoriels correspondants et leurs cours journaliers depuis le 30 juin 2005 sur Bloomberg.

Ainsi, nous avons utilisé les indices sectoriels suivants :

- L'indice du secteur des télécommunications pour le titre « OUTREMER TELECOM » entré en Bourse sur le milieu de l'année 2007, en position courte au 30 juin 2008 pour une quantité de 33.
- L'indice du secteur des technologies pour le titre « ADENCLASSIFIEDS » entré en Bourse sur la fin de l'année 2007, en position longue au 30 juin 2008 pour une quantité de 18.

## **II.2. Calcul de la VaR historique**

### **II.2.1 Reconstitution historique des P&L fictifs du fonds**

Après avoir récupéré les données nécessaires à la simulation historique sur Equity, nous reconstituons l'historique fictif de ses valeurs depuis le 30 juin 2005 selon la démarche suivante :

- Nous calculons l'historique fictif des rendements du portefeuille (positifs pour les gains et négatifs pour les pertes) en sommant les rendements des 83 titres pondérés par leurs quantités (positives pour les positions longues et négatives pour les positions courtes) dans le fond au 30 juin 2008.
- Nous appliquons cet historique de rendements à la valeur du portefeuille à la première date du 30 juin 2005 et nous en déduisons l'historique fictif des valeurs liquidatives du fond sur les 3 années d'une part puis l'historique des P&L (« Profit and Loss ») ou encore des variations en montant qui en découlent.

### **II.2.2 Détermination des VaR**

A partir de la distribution historique des P&L des Valeurs Liquidatives (VL) du fonds Equity, nous classons et numérotons par ordre croissant les N différentes variations (pertes ou gains) fictives du portefeuille reconstitué. Nous obtenons ainsi une distribution de 756 variations à partir de laquelle nous pouvons déterminer les VaR à 1 jour selon le seuil  $s$  souhaité. En effet, la VaR au seuil  $s = 99\%$  qui représente la perte maximale que réalisera le portefeuille dans 99% des cas est la variation numéro  $(s \times 756) = 99\% \times 756 = 748$ .

Le tableau ci-dessous présente la correspondance entre le seuil de VaR souhaité et le rang du P&L de la distribution à retenir :

**Tableau de correspondance entre le seuil et le rang du P&L**

<b>seuil VaR</b>	<b>rang de la variation retenue</b>
99,95%	756
99,50%	752
99%	748
98%	741
95%	718

*Commentaire : Nous voyons que l'historique de 3 années permet un découpage de Value at Risk assez fin puisque nous pouvons obtenir une VaR pour un seuil allant jusqu'à 99,95%. Cependant, nous notons que nous ne pouvons pas obtenir de VaR pour un seuil supérieur à 99,95%.*

Nous avons représenté ci-dessous la distribution des P&L de VL du fond Equity classée de la plus grande perte au plus grand gain des 19 plus grandes pertes, soit de la 738<sup>ème</sup> perte à la 756<sup>ème</sup> perte :

**Distribution des P&L de VL classées dans l'ordre croissant**

<b>Date historique</b>	<b>Rang de la variation</b>	<b>Perte en montant</b>
01/04/2007	756	-220,43
28/01/2008	755	-216,34
06/05/2007	754	-154,98
13/04/2007	753	-147,78
20/04/2007	752	-116,25
31/05/2008	751	-109,87
16/10/2005	750	-76,39
27/10/2007	749	-58,91
01/09/2006	748	-26,13
12/05/2008	747	-24,89
19/04/2007	746	-20,65
08/04/2007	745	-19,34
12/09/2007	744	-17,65
22/03/2006	743	-15,39
02/03/2006	742	-15,92
04/11/2007	741	-12,06
12/12/2007	740	-11,71
26/03/2008	739	-10,58
20/07/2007	738	-9,52

*Commentaire* : Nous avons représenté en bleu ciel les montants correspondants aux VaR des seuils souhaités (voir le « Tableau de correspondance entre le seuil et le rang du P&L » pour la lecture des seuils correspondants).

### II.2.3 Analyse des résultats

Nous en déduisons le tableau de résultat des VaR 1 jour ainsi que les Tail VaR obtenues sur la Valeur Liquidative (VL) d'Equity au 30 juin 2008 en montant et en pourcentage :

**Tableau de la VaR 1 jour sur la VL d'Equity au 30 juin 2008**

Seuil VaR	VaR en montant	VaR en %	Tail VaR en montant	Tail VaR en %
99,95%	-220,43	-6,58%	-220,43	-6,58%
99,50%	-116,25	-3,47%	-171,16	-5,11%
99%	-26,13	-0,78%	-125,23	-3,74%
98%	-12,06	-0,36%	-78,31	-2,34%
95%	-8,38	-0,25%	-65,37	-1,95%

*Commentaire* : la Tail VaR correspond à la perte moyenne au-dessus d'un certain seuil que réalisera le fond. Sur notre série, il s'agit de la moyenne des pertes les plus importantes au-dessus du niveau de probabilité retenu.

#### Conclusion de la VaR selon la méthode historique

Nous avons calculé la VaR du fond Equity pour plusieurs niveaux de probabilité ainsi que les Tail VaR associés, à partir d'un historique remontant à 3 ans. D'après l'approche historique, la valeur liquidative du fond perdra au moins 3,47% de sa valeur dans 0,50% des cas, et enregistrera une perte moyenne qui représente 5,11% de son montant.

### III. La VaR selon la théorie des valeurs extrêmes

#### III.1. Application de la méthode paramétrique

##### III.1.1 Introduction

Rappel : La méthode paramétrique consiste à supposer que les extrêmes d'une distribution financière i.i.d suivent une loi de Fréchet dont il est possible de déterminer les paramètres en résolvant le système S suivant (voir chapitre II - *Théorie des valeurs extrêmes appliquée la VaR*)

$$S \begin{cases} -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{1 + \zeta - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}}{\sigma \omega_i} \right) = 0 \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\left[ (1 + \zeta) - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}} \right] (\chi_i - \mu) - \sigma \omega_i}{\omega_i \sigma^2} = 0 \\ -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (1 - \omega_i^{-\frac{1}{\zeta}}) \left[ \frac{1}{\zeta^2} \ln(\omega_i) - \frac{\chi_i - \mu}{\zeta \sigma \omega_i} \right] - \frac{\chi_i - \mu}{\sigma \omega_i} = 0 \end{cases}$$

Où :  $\omega_i = 1 + \zeta \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right)$

Logiciels utilisés : Pour résoudre le système S, nous utilisons dans un premier temps le solveur d'Excel et dans un second temps, nous avons donc choisi d'utiliser le logiciel E-views qui est spécialisé pour l'analyse des séries statistiques pour confronter les résultats obtenus par ces deux logiciels entre eux d'une part et tester lequel des deux est le mieux adapté à notre calcul.

### **III.1.2 Mise en place des données**

#### ***III.1.2.A. Choix de la longueur de la distribution initiale***

Comme nous l'avons vu, l'un des principaux inconvénients de la méthode paramétrique est la taille de l'historique des données nécessaires d'une part. En effet, les contraintes de longueur proviennent de deux théorèmes mathématiques « limite » qui sont utilisés pour l'obtention de la VaR selon l'approche GEV. D'autre part, le choix des paramètres de tailles des blocs et de la distribution des extrêmes est également limité par la problématique du temps de retour. Ainsi, nous choisissons de sélectionner le maximum de données pour l'application de l'approche paramétrique dans le choix de la taille de l'historique de notre série initiale. L'historique remonte ainsi à l'année de création du fond Equity, soit 1998, ce qui nous fait 10 années d'historique. Nous disposons alors de  $252 \times 10 = 2520$  données et il nous reste à calibrer les paramètres de longueurs des blocs et de la série des extrêmes.

#### ***III.1.2.B. Choix des paramètres de longueurs des distributions***

Comme nous l'avons vu, la distribution des extrêmes est définie tout d'abord par :

- La longueur des blocs à partir desquels sont extraits les extrêmes, c'est-à-dire le nombre de jours  $n$  des blocs
- La longueur de la distribution constituée des extrêmes et donc le nombre d'extrêmes  $T$
- Le niveau de probabilité de la VaR désiré dont le temps de retour correspondant définit le nombre minimal de jours  $n$  requis. Ainsi, à chaque paramètre  $n$  correspond un seuil de probabilité de VaR que nous nommons « seuil minimal ».

Nous représentons ci-dessous le tableau de correspondance entre les paramètres  $n$ ,  $T$ , seuil minimal et  $K$  le nombre de données de la distribution initiale ( $K = n \times t$ ).

**Tableau de correspondance des paramètres  $n$ ,  $T$  et « seuil minimal »**

Taille de la distribution initiale $K$	Taille des blocs $n$	Nombre d'extrêmes $T$	Seuil minimal	Dernier $X$	Nombre de données omises
2520	20	126	95,00%	2395	125
2520	25	100,8	96,00%	2420	100
2520	30	84	96,67%	2437	83
2520	35	72	97,14%	2449	71
2520	40	63	<b>97,50%</b>	2458	62
2520	45	56	97,78%	2465	55
2520	50	50,4	<b>98,00%</b>	2471	49
2520	55	45,8	98,18%	2475	45
2520	57	44,2	<b>98,25%</b>	2477	43
2520	60	42,0	<b>98,33%</b>	2479	41
2520	65	38,8	<b>98,46%</b>	2482	38
2520	70	36,0	98,57%	2485	35
2520	80	31,5	<b>98,75%</b>	2490	31
2520	85	29,6	98,82%	2491	29
2520	90	28,0	98,89%	2493	27
2520	95	26,5	98,95%	2494	26
2520	100	25,2	<b>99,00%</b>	2496	24
2520	120	21,0	<b>99,17%</b>	2500	20
2520	150	16,8	<b>99,33%</b>	2504	16
2520	200	12,6	<b>99,50%</b>	2508	12
2520	250	10,1	<b>99,60%</b>	2511	9

*Commentaire : Nous rappelons que le « nombre de données omises » provient de la forme de la construction de la distribution des extrêmes. Le « dernier  $X$  » correspond à la dernière donnée prise en compte dans la construction de la distribution des extrêmes (terme  $X_{1+T(n-1)}$ ) comme nous l'avons décrit en section II.3.1 du chapitre II, « Construction de la distribution empirique ».*

### Détermination de la taille n des blocs

La détermination de la taille n des blocs est tout d'abord contrainte par le théorème de Fisher-Tippet qui est un théorème limite et qui se vérifie donc pour un nombre important de données. Cette contrainte concerne le nombre de données à partir desquelles sont déterminés les extrêmes et donc la taille des blocs. En pratique, nos tests ont abouti à un résultat satisfaisant à partir d'une longueur de 20 jours.

Cependant, le nombre de jours définissant la longueur des blocs est limité par la problématique du temps de retour. En effet, la taille des blocs doit rester strictement inférieure au temps de retour correspondant au seuil  $\alpha$  de la VaR que nous désirons calculer et les 2 paramètres sont liés selon la formule :

$$n < \frac{1}{1 - \alpha}$$

Soit :  $1 - \frac{1}{n} < \alpha = \text{seuil minimal}$

Dans notre cas, nous n'aurons pas besoin d'appliquer la méthode GEV pour des seuils inférieurs à 97,5% qui correspond à un temps de retour de 40. D'après le tableau de correspondance, nous choisissons donc pour le paramètre n des valeurs supérieures à 40.

### Détermination du nombre de blocs T

Le théorème du maximum de vraisemblance requiert un échantillon d'au minimum 50 données pour être efficace, soit au minimum 50 extrêmes. Cependant, en pratique nous avons obtenu des résultats quelque peu convenables pour des distributions d'extrêmes composées de 25 données. Nous commencerons donc à tester les combinaisons à partir d'une longueur de 25 extrêmes.

Conclusion : Compte-tenu de l'ensemble des contraintes dans le choix de nos paramètres, nous avons sélectionné 5 combinaisons sur lesquelles nous allons tester l'approche paramétrique. Les combinaisons retenues sont affichées en gris clair dans le tableau de correspondance, à savoir :

**Tableau des combinaisons sélectionnées pour l'application sur Equity**

Numéro de combinaison	Taille de la distribution initiale K	Taille des blocs n	Nombre d'extrêmes T	Seuil minimal	Nombre de données omises
1	2520	40	63	<b>97,50%</b>	62
2	2520	50	50,4	<b>98,00%</b>	49
3	2520	57	44,2	<b>98,25%</b>	43
4	2520	80	31,5	<b>98,75%</b>	31
5	2520	100	25,2	<b>99,00%</b>	24

### ***III.1.2.C. Précisions sur la distribution initiale***

Nous précisons que la distribution initiale est constituée des pertes de rendements historiques du produit Equity. Il est important de noter que dans l'approche historique, nous récupérons les rendements des actifs composant le portefeuille alors qu'ici, nous récupérons la série du fond directement. En effet, si nous appliquions la théorie des valeurs extrêmes sur chaque titre du portefeuille, il faudrait tenir compte de la corrélation qu'il existe entre chaque actif et donc appliquer la théorie des copules. Or, le fond Equity est composé de 83 positions en portefeuille et des études ont montré qu'il était préférable d'appliquer la théorie des extrêmes sur les rendements du portefeuille total.

Il apparaît alors une autre problématique évidente, à savoir que cette méthode est réalisable ici car le fond Equity existe depuis 1998, nous pouvons donc récupérer les données nécessaires à notre approche mais notre théorie ne serait pas applicable sur un produit récent.

Nous récupérons ainsi sur Bloomberg les Valeurs Liquidatives (VL) du fond Equity du 30 juin 1998 au 30 juin 2008. Nous rappelons que nous classons les rendements du plus récent au plus ancien afin de prendre en compte les valeurs de pertes les plus récentes dont nous disposons étant donné que le nombre de données omises variera entre 24 et 62 selon les combinaisons retenues.

Puis, nous calculons les rendements journaliers  $R_t$  du fond selon la formule :

$$R_t = \frac{VL_t - VL_{t-1}}{VL_{t-1}}, \text{ pour } 2 < t < 2520$$

La distribution initiale est donc constituée de 2519 rendements. Nous obtenons ainsi le tableau des scénarios testés sur le fond Equity :

**Tableau des combinaisons testées pour l'application sur Equity**

<b>Numéro de combinaison</b>	<b>Taille de la distribution initiale K</b>	<b>Taille des blocs n</b>	<b>Nombre d'extrêmes T</b>	<b>Seuil minimal</b>	<b>Nombre de données omises</b>
1	2519	40	63,0	<b>97,50%</b>	62
2	2519	50	50,4	<b>98,00%</b>	49
3	2519	57	44,2	<b>98,25%</b>	43
4	2519	80	31,5	<b>98,75%</b>	30
5	2519	100	25,2	<b>99,00%</b>	24

### III.1.3 Constitution de la distribution des extrêmes

L'historique des rendements du fond Equity est composé de  $(252 \times 10) - 1 = 2519$  données. A partir de la distribution initiale de 2519 rendements que nous classons de la perte la plus récente à la plus ancienne, nous constituons notre série d'extrêmes grâce à une macro codée sous Visual Basics en calibrant les paramètres  $n$  et  $T$  pour chaque scénario sélectionné :

$$\mathcal{X}_q^+ = \max\{X_{1+q(t-1)}, t = 1, \dots, n\}, \quad 1 \leq q \leq T$$

A l'aide d'une macro programmée en Visual Basic, nous réalisons le découpage sur la série initiale pour obtenir la série finale. Par exemple pour la première combinaison testée ( $n = 40$  et  $T = 63$ ), le programme s'écrit :

```
k = 2519
n = 40
T = Int(k / n)
k = n * T

'Découpage en T blocs, détermination de la distribution des extrêmes|
For i = 1 To T
x = Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(2, 18).Value
  For j = 1 To n
    If x < Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(2 + i * j, 18).Value Then
      x = Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(2 + i * j, 18).Value
    End If
  Next
Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(i + 1, 21).Value = x
Next

'Distribution des extrêmes
Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(1, 20).Value = "n"
Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(1, 21).Value = "Mn"

For i = 1 To T
  Workbooks("Book2.xls").Sheets("Sheet2").Cells(i + 1, 20).Value = i
Next

End Sub
```

*Commentaire* : Le programme codé ci-dessus est complété pour les 5 distributions et nous obtenons ainsi 5 distributions de rendements extrêmes de longueurs variant entre 25 et 63 données.

### III.1.4 Estimation des paramètres GEV

#### III.1.4.A. Avec le solveur d'Excel

Afin de déterminer les paramètres de la distribution GEV des 5 distributions, nous entrons dans une feuille de calcul Excel les formules des estimateurs de maximum de vraisemblance de la distribution GEV qui sont solutions du système S (voir section III.1.1 du chapitre III). Le solveur d'Excel nous fournit pour nos paramètres les estimateurs suivants :

**Tableau des résultats des paramètres GEV avec le solveur d'Excel**

Paramètres	Combinaison n°1	Combinaison n°2	Combinaison n°3	Combinaison n°4	Combinaison n°5
Nombre de jours $n$	40	50	57	80	100
Nombre d'extrêmes $T$	63	50	44	31	25
Seuil minimal	97,50%	98%	98,25%	98,75%	99%
<b>mu</b>	<b>0,049</b>	<b>0,059</b>	<b>0,794</b>	<b>1,346</b>	<b>0,076</b>
<b>sigma</b>	<b>0,016</b>	<b>0,912</b>	<b>0,214</b>	<b>0,066</b>	<b>0,017</b>
<b>xi</b>	<b>0,510</b>	<b>0,010</b>	<b>-0,387</b>	<b>-0,212</b>	<b>-0,301</b>

#### Interprétation des résultats

Pour les combinaisons 3 à 5, nous obtenons un paramètre xi ( $\xi$ ) négatif. Cela signifie que nos distributions GEV ne convergent pas vers des lois de Fréchet. Pour interpréter ce résultat, nous proposons les deux solutions suivantes :

- Au-delà du « pire à 50 jours », la série des rendements extrêmes d'Equity est trop volatile et ne converge pas vers la loi de Fréchet.
- Dans les combinaisons 3 à 5, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance sur des échantillons de taille inférieure à 45 données.

## Conclusion

Les combinaisons 3 à 5 ne convergent pas vers des lois de Fréchet. L'approche GEV n'est donc pas réalisable selon ces combinaisons. De plus, ces paramètres ne peuvent pas nous fournir de Value at Risk de probabilité inférieure à 98,25%. Nous choisissons donc de retenir la première combinaison pour obtenir des VaR de seuils supérieurs à 97,5% que nous pourrions comparer à nos différentes approches. Nous notons que le paramètre GEV  $\xi$  de cette distribution est positif et nous assure que la distribution converge vers une loi de Fréchet.

### **III.1.4.B. Avec le logiciel E- views**

Pour chacune des 5 distributions d'extrêmes obtenues, nous utilisons la méthode du log likelihood du logiciel E-views qui va nous permettre de maximiser la fonction de vraisemblance par rapport aux 3 paramètres  $\mu, \sigma$  et  $\xi$ .

Rappel : Nous rappelons que la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$l_n(\theta) = -\frac{1}{T} \text{Ln}[L(\chi_1, \dots, \chi_T, \theta)]$$

$$= \text{Ln}\sigma + \frac{1+\xi}{\xi} \times \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \text{Ln} \left[ 1 + \xi \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right] + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left[ 1 + \xi \left( \frac{\chi_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

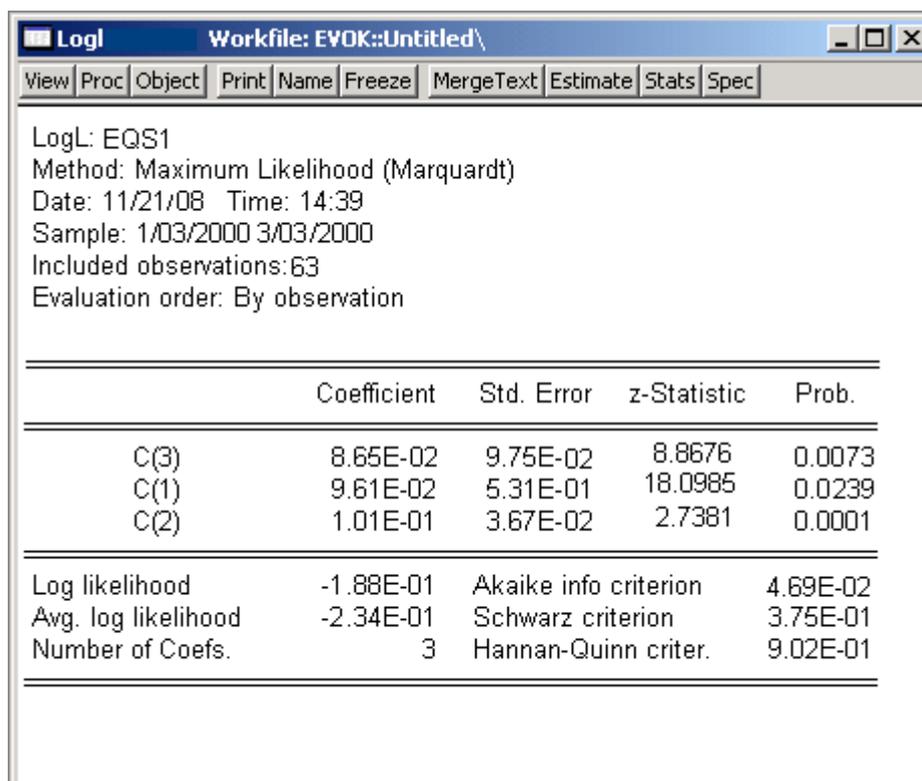
Pour accéder à la fonction MLE dans le logiciel EViews, nous tapons *object* puis sur *new object* dans la fenêtre du *workfile*.

Nous accédons alors à une fenêtre dans laquelle nous spécifions la fonction de vraisemblance :

```
@logl logl1
w = 1+c(3)*(EQS1-c(1))/c(2)
@param c(3) 0.0001 c(2) 0.0001 c(1) 0.0001
Logl1 = -log(c(2))-((1+c(3))/c(3))*log(w)-w^(-1/c(3))
```

Où les coefficients c(1), c(2) et c(3) désignent respectivement les paramètres  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$ .

La sortie E-views correspondante est la suivante :



The screenshot shows the EViews Log window for a Maximum Likelihood (Marquardt) estimation of EQS1. The window title is 'LogL: EQS1' and the workfile is 'EYOK::Untitled\'. The log contains the following text:

```
LogL: EQS1
Method: Maximum Likelihood (Marquardt)
Date: 11/21/08 Time: 14:39
Sample: 1/03/2000 3/03/2000
Included observations: 63
Evaluation order: By observation
```

Below the text is a table of coefficient estimates:

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(3)	8.65E-02	9.75E-02	8.8676	0.0073
C(1)	9.61E-02	5.31E-01	18.0985	0.0239
C(2)	1.01E-01	3.67E-02	2.7381	0.0001

Below the coefficient table is a summary of fit statistics:

Log likelihood	-1.88E-01	Akaike info criterion	4.69E-02
Avg. log likelihood	-2.34E-01	Schwarz criterion	3.75E-01
Number of Coefs.	3	Hannan-Quinn criter.	9.02E-01

*Commentaire :* Nous notons que les tests économétriques effectués par E-views permettent de conclure que la convergence vers la GEV est assurée car les coefficients sont estimés significatifs (z-statistique supérieure à 2 avec une probabilité inférieure à 5%).

Le programme a été lancé sur les 5 distributions d'extrêmes et nous représentons ci-dessous le tableau récapitulatif des résultats des paramètres GEV obtenus avec le logiciel :

**Tableau des résultats des paramètres GEV avec E-views**

<b>Paramètres</b>	<b>Combinaison n°1</b>	<b>Combinaison n°2</b>	<b>Combinaison n°3</b>	<b>Combinaison n°4</b>	<b>Combinaison n°5</b>
<i>Nombre de jours n</i>	40	50	57	80	100
<i>Nombre d'extrêmes T</i>	63	50	44	31	25
<i>Seuil minimal</i>	97,50%	98%	98,25%	98,75%	99%
<b>mu</b>	<b>0,096</b>	<b>0,022</b>	<b>0,028</b>	<b>4,729</b>	<b>-1,504</b>
<b>sigma</b>	<b>0,102</b>	<b>0,007</b>	<b>0,013</b>	<b>2,928</b>	<b>35,985</b>
<b>xi</b>	<b>0,087</b>	<b>0,344</b>	<b>0,095</b>	<b>-0,992</b>	<b>-0,625</b>

Interprétation des résultats :

Ici aussi, les combinaisons 4 et 5 ne sont pas utilisables car les distributions d'extrêmes ne convergent pas vers des lois de Fréchet. Nous décidons donc de ne pas tenir compte de ces combinaisons et nous nous limitons, comme avec le solveur d'Excel, à la 1<sup>ère</sup> combinaison qui nous fournit une distribution d'extrêmes de 63 données qui converge vers une loi de Fréchet et qui nous permettra d'obtenir des VaR pour des seuils supérieurs à 97,5%.

### III.1.5 Lecture de la VaR GEV

D'après les résultats précédents, nous allons déduire des VaR à partir de la première combinaison uniquement selon les paramètres obtenus par le solveur d'Excel et par le logiciel E-Views.

A partir des paramètres GEV de la distribution de Fréchet obtenus, nous pouvons lire les quantiles correspondants à la distribution selon la formule :

$$x_{\alpha_{GEV}} = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\zeta}} \left[ 1 - (-\text{Ln}(\alpha_{GEV}))^{-\hat{\zeta}} \right]$$

Pour déterminer le seuil  $\alpha_{GEV}$  correspondant au seuil classique de la VaR  $\alpha_{classique}$ , nous utilisons la formule de correspondance entre les deux seuils qui découle de la définition du temps de retour :

$$\alpha_{GEV} = 1 - n \times (1 - \alpha_{classique})$$

Nous représentons ci-dessous le tableau de correspondance entre les 2 seuils :

**Tableau de correspondance entre les seuils de VaR classique et GEV**

alpha classique	alpha GEV
97,50%	0,00%
97,55%	2,00%
98%	20,00%
99%	60,00%
99,20%	68,00%
99,40%	76,00%
99,50%	80,00%
99,75%	90,00%
99,90%	96,00%
99,95%	98,00%
99,99%	99,60%

*Commentaire* : Le tableau de correspondance a été réalisé en posant  $n = 40$  (première combinaison) et permet de mettre en évidence le seuil minimal de 97,5%. Les niveaux de probabilité pour lesquels nous choisissons de calculer les Value at Risk sont indiqués en bleu clair dans le tableau.

A partir des paramètres GEV estimés (selon le solveur Excel et le logiciel E-views), nous avons calculé les quantiles de la loi obtenue qui correspondent aux VaR. Le tableau récapitulatif des résultats est le suivant :

**Tableau de résultats des VaR**

alpha classique	alpha GEV	Var GEV Solveur Excel	VaR GEV E-views
97,55%	2%	1,14%	1,44%
98%	20%	2,38%	1,98%
98,50%	40%	2,91%	2,26%
98,75%	50%	3,28%	2,47%
99%	60%	4,90%	3,57%
99,20%	68%	6,06%	4,58%
99,35%	74%	6,24%	4,75%
99,50%	80%	6,33%	4,95%
99,75%	90%	6,49%	5,89%
99,80%	92%	6,94%	6,27%
99,95%	98%	8,18%	7,04%
99,99%	99,60%	10,30%	9,73%

*Commentaire* : Nous observons que la distribution estimée avec le solveur d'Excel fournit des VaR supérieurs aux VaR de la distribution des extrêmes estimée selon E-Views. Nous notons que nous pouvons obtenir des VaR pour des seuils de très grande précision contrairement à la méthode historique.

## III.2. Application de la méthode semi-paramétrique

### III.2.1 Mise en place des données

La méthode semi-paramétrique se base uniquement sur la distribution de pertes initiales en se concentrant sur les queues de distribution. Ici aussi, le but de cette méthode est de disposer du maximum de données. Notre série initiale de données est donc composée de l'ensemble des rendements de pertes  $\{X_1, \dots, X_{2519}\}$  que nous avons récupérés pour l'approche paramétrique. Nous rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des rendements journaliers du fond Equity depuis sa création en 1998 à aujourd'hui (30 juin 2008).

Comme nous avons vu au chapitre II, la fonction de distribution des excès de perte par rapport à un seuil  $u$  est définie par :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u)$$

### III.2.2 Détermination du seuil $u$

#### Rappel méthode du Hill Plot

La première étape consiste à déterminer par une méthode graphique le niveau  $u$  à partir duquel la distribution initiale de rendements converge vers une Pareto généralisée. Pour cela, nous traçons le graphe de la fonction d'excès en moyenne estimée en fonction des niveaux  $u$  afin de déterminer à partir de quelle valeur le graphe devient linéaire. Nous rappelons l'estimateur de la fonction d'excès en moyenne que nous calculons grâce à une macro codée en VBA :

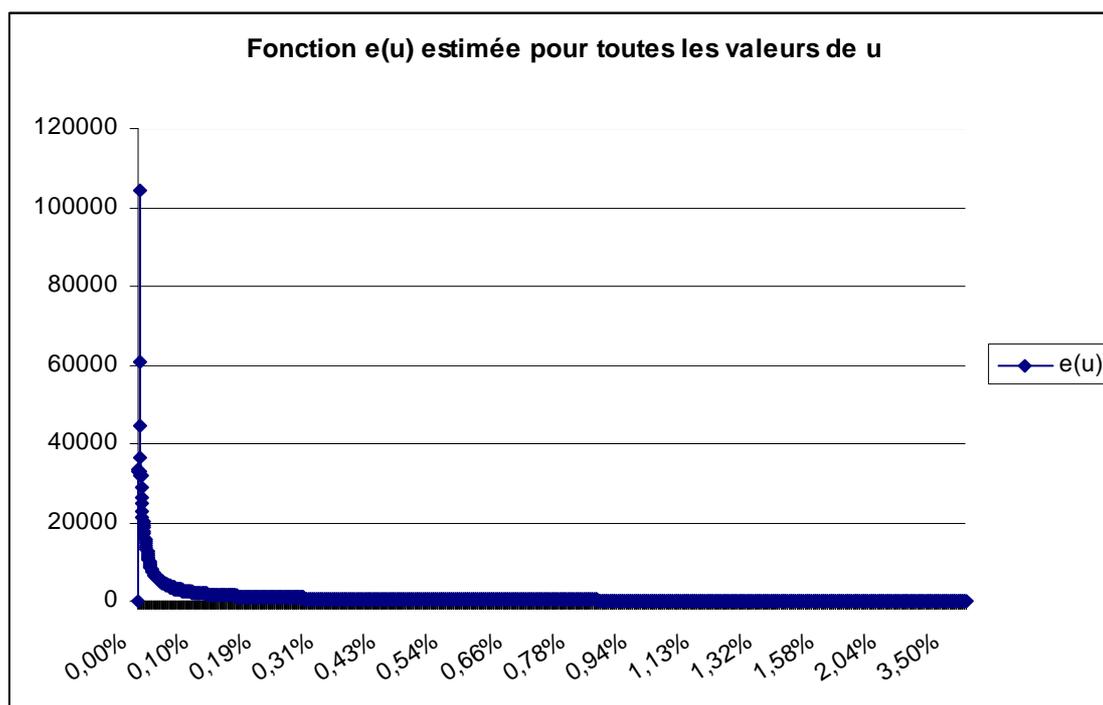
$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^K (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^K 1_{\{X_i > u\}}}$$

Le graphe de cet estimateur en fonction des valeurs de  $u$  nous permet de déterminer le seuil  $u$  qui correspond à la valeur à partir de laquelle le graphe devient linéaire. Cette méthode graphique correspond à la méthode du Hill Plot et est basée sur l'hypothèse que l'espérance de la loi de Pareto généralisée est linéaire par rapport à  $u$ . En effet, l'espérance de la loi GPD ( $\zeta, \beta$ ) a pour valeur :

$$\frac{\beta + \zeta u}{1 - \zeta}.$$

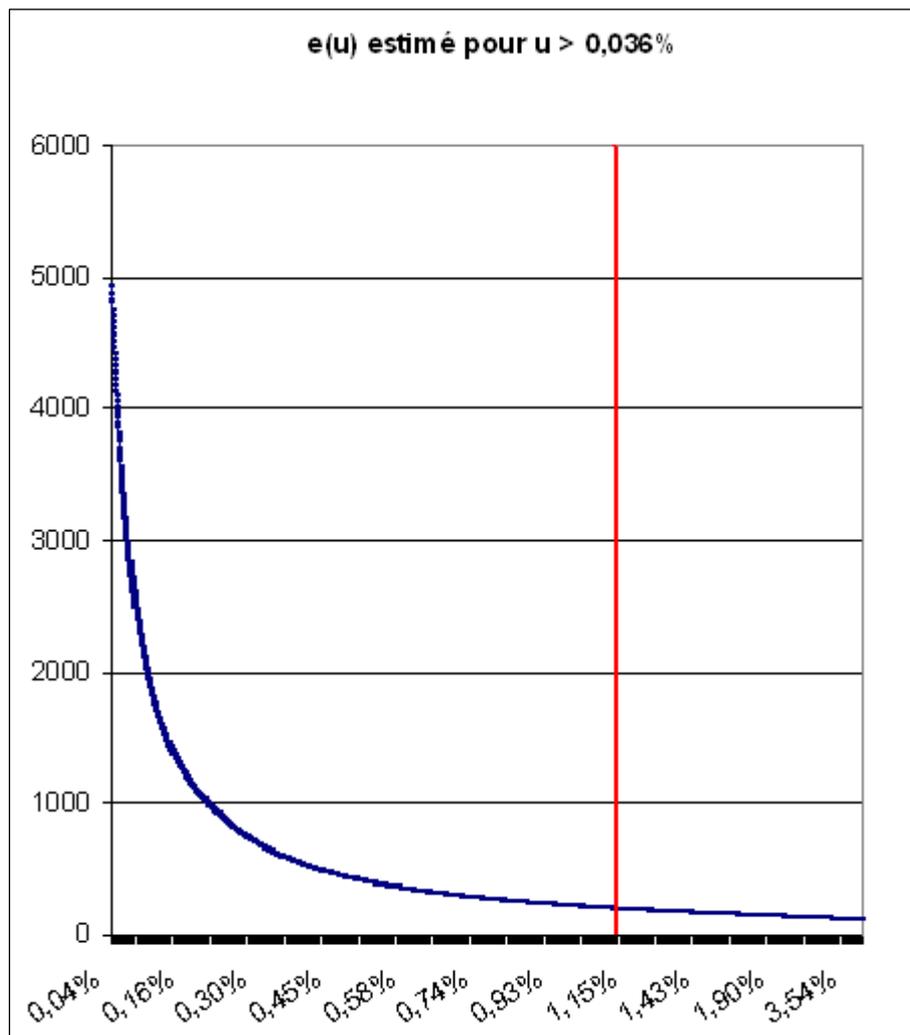
#### Graphes de la fonction d'excès en moyenne estimée

Nous représentons ci-dessous le graphe de la fonction d'excès en moyenne estimée en fonction des valeurs des  $u$  désignés par les valeurs de la distribution.



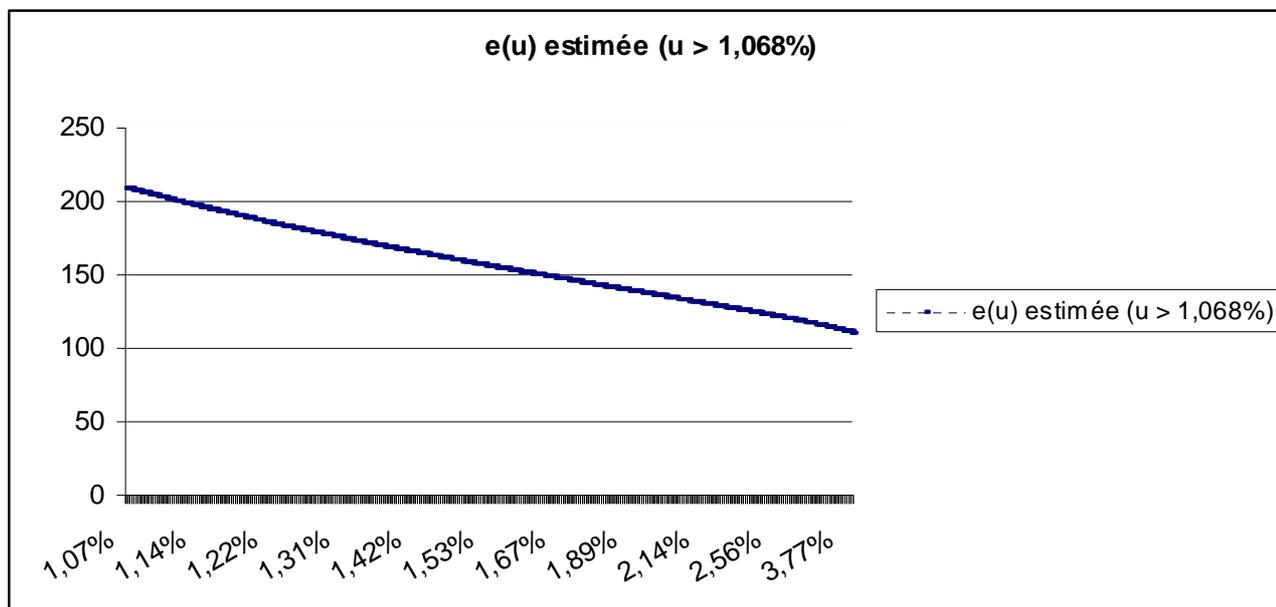
Commentaire : Le graphe qui représente l'ensemble de la distribution initiale ne nous permet pas de visualiser précisément l'évolution de la tendance de la courbe.

Nous représentons donc le graphe de la fonction d'excès en moyenne pour des valeurs de  $u$  plus grandes afin de « zoomer » sur la tendance linéaire que prend la courbe pour des valeurs grandes de  $u$ . Dans un premier temps, nous choisissons de sélectionner la fonction  $\hat{e}(u)$  pour les valeurs de  $u$  supérieures à 0,036% qui correspond à la 31<sup>ème</sup> donnée de notre échantillon initial :



Commentaire : D'après ce graphe, il semble que la fonction d'excès en moyenne estimée devienne linéaire à partir du terme  $X_{1638} = 1,068\%$ .

Nous représentons ainsi la courbe de la fonction d'excès en moyenne estimée pour un seuil supérieur à  $u = 1,068\%$  :



Le graphe de la fonction  $\hat{e}_n(u)$  pour des valeurs de  $u$  supérieures à 1,068% montre bien la tendance linéaire que prend la fonction d'excès en moyenne pour des grandes valeurs de  $x$  et nous permet de déterminer le seuil  $u = 1,068\%$  à partir duquel la fonction converge vers une loi GPD  $(\zeta, \beta)$ . Nous notons que la distribution comporte désormais  $2519 - 1638 = 881$  données. Nous pouvons donc appliquer la méthode d'Estimation du Maximum de Vraisemblance (EMV) sur cet échantillon de taille supérieure à 50.

### III.2.3 Estimation des paramètres de la fonction d'excès en moyenne

Nous rappelons que la fonction de log vraisemblance de la distribution GPD  $(\zeta, \beta)$  :

$$\text{Ln } L(\zeta, \beta) = \sum_{t=1}^n \text{Ln} [g_{\zeta, \beta}(x_t) 1_{\{\zeta > 0\}}(x_t)]$$

De même que pour l'estimation du maximum de vraisemblance grâce à la fonction log likelihood d'E-Views que nous avons utilisée dans l'approche paramétrique, nous estimons les paramètres de la fonction  $\text{Ln } L(\zeta, \beta)$  sur E-Views en entrant le code suivant :

```
@logl met_semi
@param c(1) 0.0001 c(2) 0.0001
a = 1/c(2)
met_semi = a*log(c(1))-(a+1)*log(c(1)+c(2)*EQUIMS)
```

La sortie correspondante est la suivante :

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	
C(2)	8.78E-01	2.63E-01	3.3373	0.0002	
C(1)	1.01E-01	5.28E-02	2.9054	0.0012	
Log likelihood	-7.581502	Akaike info criterion		7.9162	
Avg. log likelihood	-9.590132	Schwarz criterion		5.5615	
Number of Coefs.	2	Hannan-Quinn criter.		6.37E-01	

*Commentaire* : Le logiciel E-views permet de calculer le pouvoir explicatif des variables  $c(1)$  et  $c(2)$  qui sont les paramètres de notre loi GPD. Une  $z$ -statistique supérieure à 2 pour une probabilité supérieure à 5% permet de conclure que les variables sont significatives. D'après la sortie E-views obtenue, les  $z$ -statistiques des coefficients ont pour valeurs 3,3 et 2,9 pour des probabilités respectives de 0,02% et 0,12%.

Nous en déduisons donc que la distribution converge effectivement vers la Pareto généralisée et nous pouvons retenir les estimateurs des paramètres de la loi GPD fournis par E-views.

### III.2.4 Conclusion de l'approche semi-paramétrique

Les estimateurs des paramètres de la loi GPD de notre distribution des excès en moyenne nous permettent de déduire la distribution de Pareto généralisée ainsi que les Value at Risk et l'expected shortfall.

Le tableau suivant récapitule les particularités de notre série et les paramètres estimés de la loi GPD obtenus :

**Paramètres de la loi GPD**

<b>beta estimé</b>	<b>0,878</b>
<b>xi estimé</b>	<b>0,101</b>
<b>u</b>	<b>1,068%</b>
<b>n</b>	<b>2519</b>
<b>Nu</b>	<b>881</b>
<b>F(u)</b>	<b>77,92%</b>

Les VaR correspondent aux quantiles de la loi estimée et ont pour valeurs :

$$\widehat{VaR}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{N_u} (1-q) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right], \quad \forall q > F(\hat{u})$$

Où :

- n : est le nombre de données de la série initiale, soit 1519
- $N_u$  : est le nombre de données au dessus du seuil  $u = 1,068\%$
- $\hat{\beta}$  et  $\hat{\xi}$  : sont les estimateurs des paramètres de la GPD
- q : est le seuil de probabilité de la VaR

Les paramètres estimés de la GPD selon l'approche semi-paramétrique nous permettent également de mesurer l'expected shortfall selon la formule (voir chapitre II, section III.3.2) :

$$\hat{ES}_q = \frac{\hat{VaR}_q + \hat{\beta} - \hat{\zeta} u}{1 - \hat{\zeta}}$$

Nous en déduisons les montants suivants de VaR selon l'approche semi-paramétrique sur le fond Equity ainsi que les Expected Shortfall :

### Résultats des VaR et Expected Shortfall obtenus

Seuil de probabilité	VaR	Expected Shortfall
92,82%	1,068%	5,10%
95,00%	2,07%	5,43%
97,50%	2,92%	5,73%
98,00%	3,19%	5,93%
98,50%	3,28%	6,54%
98,75%	3,96%	5,79%
99,00%	4,82%	7,03%
99,20%	5,36%	7,15%
99,35%	5,69%	7,45%
99,50%	6,02%	7,80%
99,75%	6,67%	8,62%
99,80%	7,82%	8,87%
99,95%	8,56%	9,32%
99,99%	9,91%	9,96%

Commentaire : La méthode semi-paramétrique nous permet d'obtenir des VaR pour des seuils de probabilité supérieurs à  $F(u)$ , soit 92,82% ici. Nous notons que, comme pour l'approche paramétrique, les niveaux de VaR que nous pouvons calculer sont très précis et « illimités ».

Conclusion : Nous avons calculé des Value at Risk du fond Equity selon trois différentes approches. Afin de choisir les montants de Value at Risk les plus représentatifs de notre produit, nous procédons à la comparaison des trois méthodes pour porter une conclusion sur la pertinence des méthodes et des résultats qu'elles fournissent.

## IV. Comparaison des différentes approches

### IV.1.1 Comparaison des résultats

Nous présentons ci-dessous le tableau récapitulatif des résultats obtenus selon les trois différentes approches :

Tableau de comparaison des VaR obtenues

<i>alpha classique</i>	VaR historique (1)	VaR GEV Excel (2)	VaR GEV E-views	VaR GPD	Ecart (2) - (1)
95,00%	0,25%			2,07%	
97,55%		1,14%	1,44%		
98,00%	0,36%	2,38%	1,98%	3,19%	2,02%
98,50%		2,91%	2,26%	3,28%	
98,75%		3,28%	2,47%	3,96%	
99,00%	0,78%	4,90%	3,57%	4,82%	4,12%
99,20%		6,06%	4,58%	5,36%	
99,35%		6,24%	4,75%	5,69%	
99,50%	3,47%	6,33%	4,95%	6,02%	2,86%
99,75%		6,49%	5,89%	6,67%	
99,80%		6,84%	6,27%	7,82%	
99,95%	6,58%	8,18%	7,04%	8,56%	1,60%
99,99%		10,30%	9,73%	9,91%	

*Commentaire* : il apparaît clairement que les méthodes obtenues par la théorie des valeurs extrêmes fournissent des montants de Value at Risk nettement supérieures au VaR obtenues selon l'approche historique pour tout niveau de probabilité (écart moyen de 2,65%).

#### **IV.1.2 Le backtesting**

Nous ne procédons pas à la comparaison de nos différentes approches avec la méthode du backtesting et nous n'aurons ainsi pas recours aux statistiques MRB et RMSRB pour la raison évidente que le test requiert 1 année de calcul de VaR tandis que notre modèle a été effectué sur 1 seule journée (en date du 30 juin 2008).

De plus, nous ne conseillons pas de procéder à la méthode du backtesting même lorsque le nombre de jours de calcul de VaR sera atteint, compte-tenu des spécificités des approches de calcul appliquées, à savoir :

- L'approche historique a été réalisée avec des données remontant à 3 ans alors que les méthodes basées sur la théorie des extrêmes se sont appuyées sur un historique remontant à 10 années. Les statistiques conduiront donc à rejeter la simulation historique à tort.
- Parmi les méthodes testées, nous avons testé deux fois la même méthode (la méthode paramétrique de la théorie des extrêmes par la distribution GEV) mais avec 2 logiciels différents (solveur d'Excel et logiciel E-views). Les statistiques du backtesting auront donc tendance à accorder plus de poids à cette méthode.

#### Conclusion

Nous n'utilisons pas la technique du backtesting pour comparer nos différentes méthodes de calcul car notre application des Value at Risk est limitée à 1 journée de calcul. Nous notons que cette méthode de comparaison n'aurait pas grand intérêt ici. Cependant, il peut être utile d'appliquer le backtesting sur un horizon de calcul 252 jours comme le suggère le comité de Bâle de façon indépendante sur chaque méthode afin de tester la pertinence des montants de Value at Risk obtenus par chacune.

### **IV.1.3 Analyse de l'approche historique**

D'après le tableau des résultats, nous voyons que l'approche historique ne nous permet pas d'obtenir le niveau de précision des méthodes extrêmes quant à la finesse des seuils de probabilité de VaR.

Ce point s'explique tout d'abord par la longueur d'historique des données utilisées selon cette méthode qui remonte à trois années uniquement alors que pour les méthodes « extrêmes » nous avons utilisé un historique de 10 années.

Cependant, il n'aurait pas été possible d'effectuer la méthode historique avec des données remontant à 10 années pour les raisons suivantes :

- Nous utilisons l'historique de chaque actif qui compose le portefeuille à la date de calcul et de nombreux titres n'auraient pas existé à cette époque.
- Les conjectures de marché ont trop varié depuis 10 ans si l'on tient compte :
  - de l'évolution de chaque titre du fond pris indépendamment
  - des interactions entre chacun des titres, ce qui est particulièrement important pour Equity et pour les fonds alternatifs en général.

La 2<sup>ème</sup> raison permettant d'expliquer que les méthodes « extrêmes » nous fournissent des VaR pour des seuils très élevés et de niveaux très fins provient du fait que cette approche attribue des lois de distribution et que les VaR correspondent à des quantiles.

Cependant, nous notons que la méthode historique est très efficace pour calculer la Value at Risk d'un fond récent composé de titres cotés depuis au moins 3 ans alors que les méthodes « extrêmes » nécessitent un historique du fond assez consistant (au moins 4 années).

#### **IV.1.4 Analyse des méthodes « extrêmes »**

##### ***IV.1.4.A. Convergence des approches GEV et GPD***

Nous avons obtenu des résultats satisfaisants avec les 3 méthodes appliquées sur des données identiques (l'historique des rendements de pertes du fond Equity du 30 juin 1998 au 30 juin 2008) et que nous comparons, à savoir :

- L'application de la méthode paramétrique (GEV) avec le solveur d'Excel
- L'application de la méthode paramétrique (GEV) sous E-views
- L'application de la méthode semi-paramétrique (GPD) sous E-views

Nos résultats sont jugés satisfaisants dans le sens où nous avons obtenu la convergence de nos distributions vers les lois limites :

- Convergence vers une distribution de Fréchet de la série des extrêmes selon l'approche paramétrique
- Convergence vers une Pareto généralisée de la fonction d'excès en moyenne selon l'approche semi-paramétrique.

#### ***IV.1.4.B. Points faibles de nos applications des méthodes « extrêmes »***

Nous avons déjà énoncé les points faibles des méthodes basées sur la théorie des extrêmes (*voir chapitre II, section IV « Comparaison des approches dites extrêmes »*). Dans l'optique d'une application sur l'ensemble des portefeuilles de Dexia Asset Management, nous complétons la liste des inconvénients des méthodes GEV et GPD suite à notre application de ces approches sur le fond Equity :

- Selon les 2 approches, il est indispensable de disposer de nombreuses données et donc d'un produit existant sur le marché depuis au moins 4 années environ.
- La méthode semi-paramétrique que nous avons effectuée utilise la méthode graphique du Hill plot qui est une méthode graphique peu précise et trop longue à mettre en œuvre quotidiennement.
- En plus des problèmes d'interface entre Excel et E-views (les sorties E-views n'étant pas exploitables en l'état pour un usage quotidien), le logiciel E-views ne sera pas retenu par le service risk market de Dexia Asset Management qui ne dispose pas du logiciel et qui a l'habitude de programmer sous VBA et Excel.

#### **Conclusion :**

Nous retenons de cette application et de son analyse que seule la méthode paramétrique par l'approche GEV sous VBA est réalisable pour des questions pratiques, à savoir un usage quotidien et automatique du suivi du risque. Compte-tenu de la simplicité de la méthode et la rapidité de sa mise en œuvre, le service risk market de DAM pourra aisément appliquer l'approche GEV parallèlement à l'approche historique. Nous notons que cette méthode classique fournit des résultats très inférieurs aux niveaux de VaR obtenus selon l'approche GEV (écart de 2,65% en moyenne). Cependant, afin de tester la méthode et la pertinence des résultats, nous recommandons de la calculer sur une période d'un an en plus de la méthode historique à titre

comparatif et expérimental puis de la tester grâce à la méthode du backtesting tel que suggérer par le comité de Bâle avant de l'adopter définitivement.

## CONCLUSION

Notre étude nous a permis de proposer au service Risk Market de Dexia Asset Management une nouvelle approche de calcul de la Value at Risk basée sur la théorie des valeurs extrêmes, à utiliser sur les fonds alternatifs de la société. La théorie des extrêmes propose les approches GEV et GPD que nous avons testées sur un fond de DAM, que nous avons choisi de nommer Equity. Les deux méthodes ont fourni des résultats comparables. Cependant, la mise en œuvre de ces approches a présenté de légères différences. Nous avons vu que la méthode paramétrique GEV répondait mieux aux besoins pratiques face auxquels sont confrontés les Risk Manager de DAM, à savoir l'automatisation d'un calcul simple et rapide à appliquer quotidiennement et qui soit disponible sous Excel.

Nous rappelons que la méthode retenue actuellement et qui est calculée quotidiennement sur l'ensemble des fonds gérés par la société est l'approche historique. Lors de notre application, nous avons comparé les résultats fournis par les nouvelles approches « extrêmes » aux VaR obtenues par la méthode historique sur le fond Equity. Nos calculs ont abouti à des résultats de VaR tout à fait convenables, supérieurs aux VaR de la méthode historique de 2,65 % en moyenne. Afin de juger quelle méthode de calcul reflète le mieux le risque du fond Equity, nous conseillons l'application du backtesting qui consiste à comparer les VaR quotidiennes aux rendements réels du fond sur une année de calcul. Nous notons que retenir un montant de VaR plus important est considéré comme prudent et présente donc un avantage face à la Banque des Règlements Internationaux afin de ne pas être soumis à des pénalités financières.

En plus de fournir des niveaux de VaR prudent, un autre avantage de la VaR selon la méthode GEV est l'application de Stress Test selon une nouvelle interprétation macro-économique. Le stress testing tel que pratiqué actuellement par le Risk Market de DAM est réalisé à partir de scénarios historiques tel que l'évènement du 11 septembre 2001. La VaR selon la théorie des valeurs extrêmes, a pour vocation de calculer des Stress Test non pas selon des scénarios historiques passés mais de prédire la perte que subira un portefeuille lors d'une situation de crise attendue sur un horizon de jours donné. En effet, les méthodes extrêmes permettent de fournir des VaR pour des seuils de probabilité très élevés et de grande précision. Ainsi, la VaR à 99,98%

qui correspond à un temps de retour de 5000 jours s'interprète comme la perte maximale que réalisera le fond dans un horizon de 5000 jours, soit 20 années environ.

Nous notons que l'approche VaR GEV que nous proposons est réalisable sur un portefeuille mis en place sur le marché depuis un horizon d'au moins 4 années. En effet, notre méthode de calcul s'applique sur les rendements du fond et non sur les actifs qui le composent. Cela présente l'avantage de tenir compte de la stratégie du fond et de faciliter les modalités de calcul qui nécessiteraient l'utilisation des copules. Une application intéressante serait de tester la théorie extrême multivariée sur le fond Equity notamment et de comparer les niveaux de VaR obtenus.

Nous portons une attention particulière à la crise financière de la fin d'année 2008 durant laquelle de nombreuses banques se sont retrouvées face à une insuffisance de leurs fonds propres et qui peut amener à nous interroger sur l'efficacité des indicateurs de risque de marché. Il est important de noter que le risque de marché est indissociable du risque de crédit et du risque opérationnel et que chacun porte sa part de responsabilité. La conclusion qu'il convient de retenir de ces événements est qu'il reste des progrès à faire en matière de risque au sein des établissements financiers et en matière de réglementation, notamment sur la prise en compte des scénarios de crise, comme le propose la théorie des extrêmes.

## BIBLIOGRAPHIE

### OUVRAGES

---

J.V. Andersen, Y.Malevergne et D.Sornette, *Comprendre et gérer les risques grands et extrêmes*  
Esch, Kieffer, Lopez, *Value at Risk, vers un Risk Management moderne*

### DOCUMENTS

---

Jorion (1996), "Risk : Measuring the Risk in Value-At-Risk", *Financial Analysts Journal*

Mc Kay R., Keeffer T.E (Septembre 1996), "VaR is a Dangerous Technique", *Corporate Finance: Searching for Systems Integration*

Hendricks Darryll (Avril 1996), "Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data", *Economic Policy Review*, p. 39-70

Abdous, K. Goudhi, A. Khoudraji (1999), "Non- parametric estimation of the limit dependence function of multivariate extremes", *Extrêmes*, 3, p. 243-265

Artzner, F.Delbaen, J-M Eber et D. Heath (Juillet 1999), "coherent measures of risk", *Mathematical Finance* 9

Bassi, P. Embrechts et M.Kafetzaki (Janvier 1998), « Risk Management and Quantile Estimation », *A Practical Guide to Heavy Tails*, Birkhauser, p. 111-130

Beder, Tanya (Septembre 1995), "VaR : Seductive but Dangerous, Financial Analysts Journal", *Financial Analysts Journal*, p. 12-24

Culp, Christopher L., Neves, Andrea (été 1998), "Value at Risk: Uses and Abuses", *Journal of Applied Corporate Finance*, p. 26-38

Coles et J. Tawn (1999), "Statistical methods for extreme values", *Springer Verlag*, p. 108

Costinot, G.Riboulet et T.Roncalli (2000), « Note technique sur l'utilisation des extrêmes unidimensionnelles dans la construction des stress scenarii », Groupe de recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais, document interne.

François Longin (1998), « Value at Risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes », *Annales d'économie et de statistiques*, n°52

Bernard Zimmern (14 octobre 2008), « Chiffres-clés de la crise financière », *IFRAP la revue Société Civile*

## **SITES INTERNET**

---

[www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

[www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org)

[www.bis.org/bcbs/index.html](http://www.bis.org/bcbs/index.html)

[www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com)

[www.ifrap.org/-Une-revue-Societe-Civile-.html](http://www.ifrap.org/-Une-revue-Societe-Civile-.html)