



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon
le 7 juin 2013

Par : Bastien ROSSPOPOFF

Titre: Modèles historique et risque neutre de taux et d'inflation pour l'assurance

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. Olivier CAYOT

M. Patrick PERRET

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

Entreprise :

Ecureuil Protection Sociale

Directeur de mémoire en entreprise :

Vincent MARTINOT

Invité :

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Signature du candidat

Résumé

Mots-clés : *Solvabilité 2, taux, inflation, Générateurs de Scénarios Économiques, Jarrow et Yildirim, prix du marché du risque, SdS, Best Estimate, analogie de la monnaie étrangère*

L'introduction de la directive Solvabilité 2 redéfinit les normes prudentielles des assurances, mutuelles et instituts de prévoyance. Concernant les aspects quantitatifs, les changements s'opèrent notamment sur le calcul du capital de solvabilité réglementaire et la valorisation des provisions techniques. La complexité des calculs en jeu a contraint les intervenants à recourir à des techniques de simulation avancées et souvent lourdes en temps de calcul telles que les algorithmes dits de simulations dans les simulations.

En amont de ces techniques de simulation se trouvent des modèles permettant de générer des états futurs des variables économiques et financières présentant un risque pour l'entité. Ces modèles sont les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE). Les plus connus au sein de la communauté actuarielle sont ceux de *Wilkie* (1986), d'*Ahlgrim et al.* (2005) ou encore de *Brennan et Xia* (2000).

Parmi l'ensemble des variables prises en compte, l'inflation et les taux nominaux jouent un rôle prépondérant. Lorsqu'il est question de GSE prenant en compte ces variables, il est souvent utile de considérer également les taux réels permettant de donner une valeur présente à un flux d'inflation futur. Les liens existant entre ces variables sont complexes mais souvent réduits à la seule relation de *Fisher* (1896).

Le développement de produits indexés sur l'inflation aidant, la littérature scientifique a évolué depuis le modèle de *Fisher* qui suppose que l'inflation n'est pas couvrable par des produits négociables du marché. En effectuant une analogie avec les modèles de devises, on peut montrer qu'il existe un lien d'absence d'opportunité d'arbitrage entre les variables d'intérêt dont la relation de *Fisher* est un cas particulier. Des modèles tels que celui de *Jarrow et Yildirim* (2003) donnent alors des formules fermées pour des produits complexes indexés sur l'inflation.

Tout d'abord, nous étudierons les hypothèses sous-jacentes aux principaux modèles d'inflation de la littérature. Puis, nous développerons un modèle de taux et d'inflation adapté aux besoins de la directive Solvabilité 2. Enfin, on présentera une application au calcul et à la projection à un an du *Best Estimate* d'un contrat de retraite collective par points avec objectif de revalorisation indexé sur l'inflation.

Abstract

Key-words : *Solvency 2, interest rates, inflation, Economic Scenarios Generator, Jarrow and Yildirim, market price of risk, nested simulations, Best Estimate, foreign currency analogy*

Solvency 2 incites stakeholders to use time consuming simulations algorithms such as nested simulations. Ahead of those simulations algorithms lay models able to simulate state of economic variables at risk for a given entity. These models are the Economic Scenarios Generators (ESG). Related publications in the actuarial literature are Wilkie (1986), Ahlgrim and al. (2005) or Brennan and Xia (2000).

Among the set of variables considered, inflation and nominal rates play a central role. When it comes to ESG taking into account these variables, it is somehow useful to also consider real rates. Real rates give a present value to a future flow indexed on inflation. Links existing between these variables are complexes but often assumed reduced to the relation of Fisher (1896).

With the development of the inflation indexed market, scientific literature evolved since the Fisher's model which assumed that inflation cannot be hedged by financial instruments. By a comparison with currency models one can show that inflation, nominal and real rates are connected by a no-arbitrage relationship to which Fisher's equation is a limit.

First of all, we check hypothesis surrounding main inflation models of the literature. Then, we develop a model consistent with Solvency 2 requirements. Finally, we conclude with an application example on the evaluation and one-year projection of the Best Estimate of a collective pension contract by points with an inflation appreciation objective.

Table des matières

I	Taux et inflation	10
1	Solvabilité 2, taux et inflation	11
1.1	Valeur économique des Provisions Techniques	12
1.1.1	Compléments sur le Best Estimate	12
1.1.2	Valeur de marché et théorie financière	14
1.2	Exigence de solvabilité réglementaire – SCR	15
1.2.1	Évaluation du SCR par modèle interne	15
1.2.2	Évaluation du SCR par agrégation de modules de risque	18
1.3	SCR de taux et d’inflation	19
2	Produits des marchés de taux	21
2.1	Taux du marché	21
2.2	Obligations sans risque à taux fixe	22
2.3	Produits dérivés de taux	23
2.4	Marchés de taux	25
3	Modèles de taux	27
3.1	Modèles mono-factoriels et multi-factoriels	27
3.2	Modèles d’équilibre général et d’arbitrage	28
3.3	Cadre de travail de HJM	29
4	Introduction à l’inflation	33
4.1	Notions	33
4.2	Différentes références d’inflation	34
4.3	Obligations indexées sur l’inflation	36
4.4	Produits dérivés d’inflation	37
4.5	Marché de l’inflation	39
5	Inflation et taux	41
5.1	ZC réel – Valeur présente d’un flux futur d’IPC	41
5.2	Relation de Fisher	42
5.3	Modèle de Fisher avec prime de risque d’inflation	43
5.4	Analogie de la monnaie étrangère	44
5.5	Point Mort d’Inflation – BEIR	47
6	Prix du marché du risque	49
6.1	Liens Historique – Risque Neutre	49
6.1.1	Théorème de Girsanov	49
6.1.2	Typologie des primes de risque d’intérêt	50
6.2	Prix du marché du risque de taux – Ahmad et Wilmott	50
6.2.1	Principes généraux d’estimation	51
6.2.2	MPR de taux par Ahmad et Wilmott	51
6.2.3	Développement limité du prix du zéro-coupon	51
6.2.4	Modèle d’Ahmad et Wilmott	52
6.2.5	Application Numérique sur Euribor et BTF	53

6.3	Autres MPR	55
6.3.1	MPR Inflation	55
6.3.2	MPR Réel	56
6.4	Choix de modélisation	56
6.4.1	Approche par déflateurs	58
6.4.2	Approche par dynamique risque neutre	59
6.4.3	Approche par modèles séparés	59
7	Modèles de référence	60
7.1	GSE d'équilibre de Wilkie – 1986	60
7.2	GSE d'équilibre d'Ahlgrim – 2005	61
7.3	Modèle d'équilibre de Brennan et Xia – 2000	63
7.4	Modèle d'AOA de Jarrow et Yildirim – 2003	65
II	Modèle retenu	68
8	Modèle et données	69
8.1	Présentation du modèle retenu	69
8.2	Choix des données	70
8.2.1	ZC à partir de rendements actuariels	71
8.2.2	Rendements de ZC à partir de <i>swap</i>	73
9	Modèle Historique	76
9.1	Modèle Historique de taux court nominal	76
9.2	Modèle d'IPC	77
9.2.1	Formalisation	77
9.2.2	Estimation	77
10	Modèle Risque Neutre	80
10.1	Formalisation	80
10.2	Calibration des modèles de taux	82
10.2.1	Volatilités et modèles de volatilité	82
10.2.2	Calibration sur volatilité historique	83
10.2.3	Calibration sur volatilité intrinsèque nominale	84
10.2.4	Calibration sur volatilité intrinsèque réelle	86
11	Structure de dépendance du modèle	91
11.1	Dépendance entre maturités de ZC	91
11.2	Dépendance entre facteurs de risque	91
12	Génération de scénarios	94
12.1	Variables de projection	94
12.2	Équations de simulation	95
12.2.1	Simulations historiques	95
12.2.2	Simulations risque neutre	95
12.3	Corrélations des aléas	96
12.3.1	Corrélation des aléas historiques	97
12.3.2	Corrélation des aléas risque neutre	97
12.4	Simulations	98
13	Test martingale	103
14	Application à un portefeuille de retraite collectif par points	106
	Bibliographie	118

A Démonstrations – Partie 1	121
A.1 SCR par formule standard	121
A.2 Relation d'AOA entre déflateurs	122
A.3 Développement limité du ZC	123
B Démonstrations – Partie 2	124
B.1 Taux court réel sous la probabilité risque neutre locale	124
B.2 Formule fermée pour le <i>Cap</i> sur EU6M	126
B.3 Formule fermée pour le YYIIS	127
C Discrétisations et corrélations	129
C.1 Discrétisations	129
C.2 Corrélations	132

Notations

▷ Les indices r, n, q et I signifient réel, nominal, inflation et Indice des Prix à la Consommation (**IPC**).

▷ $P_n(t, T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon (**ZC**) d'échéance T .

▷ $P_r(t, T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon réel d'échéance T . Cet instrument est défini au chapitre 5.

▷ $R_k(t, T)$ est le rendement anticipé¹ d'un zéro-coupon en composition annuelle, soit :

$$[1 + R_k(t, T)]^{-(T-t)} = P_k(t, T) \quad k \in \{n, r\}$$

▷ $y_k(t, T)$ est le rendement d'un zéro-coupon en composition continue, soit :

$$e^{-(T-t)y_k(t, T)} = P_k(t, T) \quad k \in \{n, r\}$$

▷ $R_k^A(t, T)$ désigne le rendement actuariel anticipé en composition annuelle vu en t d'un titre obligataire de maturité T .

▷ $F_n(t, T, S)$ désigne le taux *forward* en composition continue vu en t . Il correspond au taux d'intérêt d'un emprunt sur la période $[T, S]$ vu en t ($t < T < S$).

▷ $f_k(t, T)$ le taux *forward* instantané en composition continue vu en t d'échéance T . Il correspond au taux d'intérêt d'un emprunt sur la période $[T, T + dT]$ vu en t ($t \leq T$) :

$$P_k(t, T) = e^{-\int_t^T f_k(t, u) du} \Leftrightarrow f_k(t, T) = \left. \frac{-\partial \ln P_k(t, u)}{\partial u} \right|_{u=T} \quad k \in \{n, r\}$$

▷ $r_k(t) = f_k(t, t) = \lim_{t \rightarrow T} y_k(t, T)$ le taux spot² au temps t , avec $k \in \{r, n\}$. Ce taux sera en pratique assimilé au rendement court terme des instruments observés sur le marché (typiquement 1 mois).

▷ Notation pour l'espérance conditionnelle : $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[-] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-|\mathcal{F}_t]$

1. Ce rendement diffère du rendement effectif d'un actif sans risque sur la période $[t, T]$.

2. Ce lien entre taux court et rendement effectif peut se montrer en effectuant un développement limité du rendement du ZC au voisinage de sa maturité.

Introduction

Il existe plusieurs méthodes permettant d'évaluer le capital de solvabilité réglementaire sous Solvabilité 2 qui dépendent du niveau de complexité et de l'adaptation au profil de risque que souhaite retenir l'entreprise. Plus l'estimation du capital est adaptée au profil de risque de l'entreprise, plus la complexité du modèle à développer augmente.

Les taux et l'inflation peuvent être des facteurs de risque importants pour un assureur dont la branche de déroulement est longue. À ce titre, il peut être souhaitable de posséder des indicateurs de risque liés à ces grandeurs. Cependant, nous verrons que **taux nominaux, taux réels et inflation ne peuvent être considérés séparément**. Afin d'obtenir des projections réalistes, **un lien plus fort que la simple corrélation doit être pris en compte**.

L'objet de ce mémoire est de montrer quelles sont les modèles de taux et d'inflation que l'on peut retenir pour une utilisation dans le cadre de Solvabilité 2. Pour cela, on imposera plusieurs contraintes aux modèles à retenir :

- Les taux nominaux, réels et l'inflation ainsi que leurs liens doivent être des composantes *explicites* des modèles.
- Les modèles retenus doivent permettre de projeter les variables sous la probabilité historique et sous la probabilité risque neutre de façon *cohérente*. Cette remarque sous-tend trois hypothèses :
 - ▷ La projection des variables sous la probabilité historique doit permettre de retranscrire leurs propriétés statistiques, ceci afin que les distributions des variables pour les projections primaires soient cohérentes avec l'historique.
 - ▷ La projection des variables sous la probabilité risque neutre doit permettre de valoriser des produits dérivés de taux comme d'inflation, ceci afin que la valorisation des éléments du bilan en valeur de marché soit cohérente avec les prix d'instruments observés.
 - ▷ Le passage d'une mesure de probabilité à l'autre doit se faire de façon cohérente, c'est-à-dire que l'on portera une attention particulière aux contraintes imposées aux grandeurs liant les deux mesures.

Le mémoire est structuré de la façon suivante :

- La première partie est dédiée à la présentation des modèles relatifs aux variables d'intérêt.
 - ▷ **Taux, inflation et Solvabilité 2**. Le premier chapitre présente les principaux éléments de la réforme prudentielle et ses interactions avec les taux et l'inflation.
 - ▷ **Modèles de taux nominaux**. Les chapitres 2 et 3 rappellent des généralités sur les produits de taux et les modèles de la littérature.
 - ▷ **Inflation et taux réels**. Les chapitres 4 et 5 présentent les caractéristiques des marchés d'inflation ainsi que les liens entre taux nominaux réels et inflation.
 - ▷ **Liens entre mesures probabilistes**. Le chapitre 6 présente la nature du lien probabiliste entre deux mesures de probabilité, ainsi que les moyens de l'estimer.
 - ▷ **Modèles de la littérature**. Le chapitre 7 est dédié à la présentation de quelques modèles célèbres de la littérature prenant en compte les variables d'intérêt.
- La deuxième partie est dédiée à la calibration et l'utilisation d'un modèle admissible au sens des critères établis précédemment :
 - ▷ **Présentation et calibration**. Les chapitres 8 à 11 sont dédiés à la présentation et la calibration du modèle retenu.
 - ▷ **Simulation**. Le chapitre 12 présente les équations et résultats de simulation avec le modèle retenu.

▷ **Application.** Le chapitre 14 présente une application simplifiée du modèle dans le cadre d'un contrat de retraite supplémentaire.

Première partie
Taux et inflation

Chapitre 1

Solvabilité 2, taux et inflation

Nous allons tout d'abord revenir sur les éléments phares du bilan prudentiel de Solvabilité 2 afin de comprendre les techniques de la littérature pour leur mode valorisation et l'importance de celles-ci pour les modèles de taux et d'inflation. Cette description se scinde en deux parties :

- La définition de la valeur économique des Provisions Techniques, qui amènera à définir le *Best Estimate* (**BE**) et la *Marge pour Risque* (**RM**) ;
- La définition des fonds propres réglementaires, le **SCR** ainsi que son évaluation par *modèle interne* et par *formule standard*.

Variables du bilan économique Le schéma 1.1 précise les différents éléments du bilan prudentiel qui seront repris dans la suite.

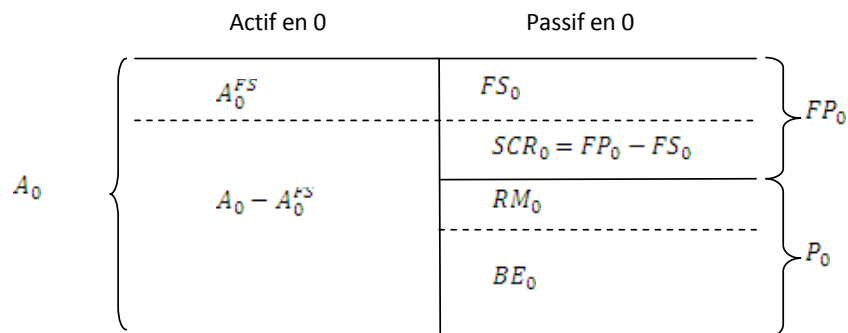


FIGURE 1.1 – Bilan économique simplifié d'un assureur

Avec :

- A_0 la valeur de marché de l'actif total de l'assureur qui se décompose en deux parties :
 - ▷ $A_0 - A_0^{FS}$ la proportion de l'actif investi en couverture des engagements réglementés (provisions techniques et exigence de capital réglementaire) ;
 - ▷ A_0^{FS} les fonds propres libres de l'assureur (*Free Surplus*). Ils correspondent à l'investissement des fonds propres excédentaires du SCR.
- P_0 la valeur de marché des provisions techniques. Elle se décompose¹ en :
 - ▷ BE_0 le *Best Estimate* initial ;

1. Comme nous le remarquerons plus loin, il faut également y ajouter, si elle existe, la partie des provisions techniques représentant les engagements parfaitement couvrables sur un marché financier.

▷ RM_0 la Marge pour Risque initiale.

- FP_0 les fonds propres économiques de l'assureur. Ils se décomposent en deux parties :
 - ▷ SCR_0 le montant de fonds propres minimal à détenir pour que la probabilité de ruine à un an soit inférieure à 0,5 % ;
 - ▷ FS_0 les fonds propres de surplus de l'assureur. Aussi, on a : $A_0^{FS} = FS_0$.

1.1 Valeur économique des Provisions Techniques

La valorisation des Provisions Techniques prévue par la directive Solvabilité 2 dépend de la nature de l'engagement considéré. On est amené à distinguer deux cas :

- Soit les flux engendrés par le contrat peuvent être parfaitement répliqués par des instruments négociables sur un marché liquide et transparent. La valeur économique des provisions pour ce contrat est alors égale à la valeur du portefeuille d'actifs de réplification². Dans ce cas, le risque couvert par le contrat est qualifié de *réplifiable* ou encore *couvrable*. Il est en pratique rare de voir des engagements d'assurance être parfaitement répliqués sur un marché financier et ce pour plusieurs raisons, par exemple :
 - ▷ En assurance vie, la présence de l'aléa de mortalité empêche souvent de trouver des instruments permettant de répliquer exactement les flux du contrat. À ce titre, même l'utilisation de contrats financiers indexés sur un indice de mortalité ne permettent pas de reproduire la variabilité propre aux engagements souscrits. En assurance dommages, les prestations étant indemnitaires et donc propres à l'assuré, il n'est pas possible de répliquer l'engagement de l'assureur.
 - ▷ L'estimation des Provisions Techniques doit prendre en compte les frais de gestion lorsque ceux-ci sont significatifs. À ce titre, l'utilisation de produits financiers ne permet pas de répliquer ces flux aléatoires.
- Soit les flux engendrés par le contrat ne peuvent être parfaitement répliqués par des instruments financiers. On définit³ la valeur de marché des Provisions Techniques comme la somme du *Best Estimate* et de la *Marge pour risque*.
 - ▷ Le BE est défini comme la « *moyenne pondérée par leurs probabilités des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent [...] estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents* ». Autrement dit, le BE correspond à l'espérance des flux futurs de trésorerie **actualisés** avec **les taux représentatifs des conditions de marché permettant de verser le flux**. On comprend alors que le calcul est plus complexe si le flux à verser dépend de l'état de l'environnement financier (et notamment du rendement de l'actif général de l'assureur, comme pour des engagements d'assurance avec participation aux bénéfices).
 - ▷ La RM « *garantit que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance [...] demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance* ». Il faut comprendre que c'est une marge de prudence. C'est la valeur à rajouter au BE pour obtenir la valeur de transférabilité des engagements. Contrairement au BE, la RM se calcule sur le transfert du portefeuille complet de l'assureur en prenant en compte réassurance et titrisation.

Dans le cas général, la valorisation des provisions techniques exigée par la directive Solvabilité 2 nécessite de les décomposer en *Best Estimate* et Marge pour Risque.

1.1.1 Compléments sur le Best Estimate

L'évaluation du BE est une problématique complexe, il convient de prendre en compte l'ensemble des facteurs de risque auxquels est exposé l'assureur. En particulier, elle doit comprendre l'évaluation de toutes les options et garanties contractuellement prévues aux contrats des assurés telles que la possibilité d'effectuer des rachats pour les contrats de capitalisation (tant statiques que dynamiques).

Évaluation du BE Notons :

- F_t la variable aléatoire correspondant au flux à verser en t au titre de l'ensemble des contrats souscrits. Ce flux algébrique prend en compte toutes les prestations contractuelles ainsi que les frais de gestion.

2. Article 77 paragraphe 4 de la directive Solvabilité 2.

3. Article 77 paragraphe 1 de la directive Solvabilité 2.

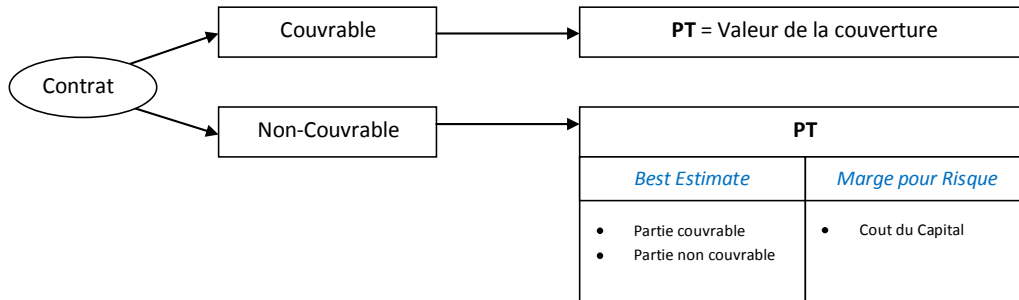


FIGURE 1.2 – Comptabilisation des Provisions Techniques prévue par la directive Solvabilité 2.

- $D(0, t) = e^{-\int_0^t r_n(u) du}$ la **variable aléatoire**⁴ correspondant au facteur d'actualisation effectif prévalant sur la période $[0, t]$.

Le BE est la valeur de marché des flux futurs :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t>0} D(0, t) F_t \right]$$

De façon générale, et comme nous le verrons au chapitre 5 dans le cadre de l'IPC, on peut montrer que :

$$BE = \sum_{t>0} P_n(0, t) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_t] \times \left[1 + \frac{\overbrace{\text{Cov}(F_t ; \Pi_n(0, t))}^{\text{Déflateur nominal}}}{\underbrace{P_n(0, t) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}}}_{\text{Prime pour risques couvrables}}} \right]$$

Quelques remarques :

- Dans le cas général, le facteur d'actualisation à appliquer à la moyenne historique d'un flux futur ne correspond pas au prix du zéro-coupon. Il faut ajouter un facteur correspondant à la prime de risque qu'exigent les agents pour les flux en partie couvrables. En effet, la théorie économique classique prévoit que les agents confrontés à un investissement dans un actif présentant une source de risque couvrable exigent une prime pour ne pas investir à la place dans un actif protégé.
- Dans le cadre de flux non couvrables par des instruments négociables sur un marché financier tels que ceux liés à l'aléa de mortalité, la prime de risque s'annule et le facteur d'actualisation à appliquer à la moyenne historique du flux correspond au prix du zéro-coupon. Ce mode de valorisation ne requiert pas l'ajout d'une prime de risque pour les risques non couvrables. Cependant, dans une logique de *valeur de transfert*, il serait compréhensible qu'un agent exige une prime de risque en sus de la valeur moyenne du risque pour, par exemple, encourir le risque de voir la mortalité effective du portefeuille s'éloigner de sa moyenne anticipée.

On peut illustrer ces résultats dans deux cas :

- **Engagement indépendant de l'environnement financier.** Dans ce cas, les flux à verser ne peuvent être couverts par des instruments financiers. Le taux d'actualisation à appliquer est directement le prix du zéro-coupon :

$$\begin{aligned} BE &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t>0} D(0, t) F_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t>0} D(0, t) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_t] \right] = \sum_{t>0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(0, t)] \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_t] \\ &= \sum_{t>0} P_n(0, t) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_t] \end{aligned}$$

4. C'est une variable aléatoire où $D(0, t)^{-1}$ correspond au rendement d'un actif placé au taux court terme sur toute la période $[0, t]$.

On notera que c'est le seul cas où le coefficient d'actualisation à appliquer est le prix du zéro-coupon, sinon il faut appliquer la variable aléatoire $D(0, t)$.

- **Cas des contrats de capitalisation**⁵ La souscription d'un contrat de capitalisation contraint l'assureur au calcul d'une participation aux bénéfices. Dans ce cas, le flux à verser F_t dépend de l'état du rendement de l'actif de l'assureur. Le calcul du BE peut alors être séparé en deux parties :
 - ▷ Un BE « garanti » correspondant aux provisions économiques à détenir pour couvrir l'engagement contractuel de capitalisation au taux technique.
 - ▷ Un montant correspondant à la participation aux bénéfices futurs, c'est la valeur de marché de la revalorisation à verser.
 Plus généralement, en présence d'interactions entre actif et passif, le calcul est complexe. Il est alors possible d'utiliser des techniques de simulation pour évaluer la valeur de transfert des engagements.

La détermination du BE est donc un problème complexe qui peut nécessiter des techniques de simulation coûteuses en temps de calcul. Sa détermination est cependant au cœur du dispositif Solvabilité 2.

Que l'engagement soit répliquable ou non, il faut attribuer une valeur de marché à des instruments qui ne sont pas directement cotés sur un marché financier. Afin de bien comprendre la notion sous-jacente à cette valeur de marché, nous allons faire quelques rappels de théorie financière classique.

1.1.2 Valeur de marché et théorie financière

Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) L'AOA est une hypothèse qui suppose que les agents intervenants d'un marché organisé sont rationnels. Pour résumer, cela revient à dire qu'il est impossible de faire un investissement de 0 € aujourd'hui qui rapporte une quantité certaine dans le futur. Sous cette hypothèse, deux actifs ou deux portefeuilles d'actifs qui ont les mêmes flux doivent avoir le même prix initial. Cette notion permet de définir des classes d'actifs dites « atteignables » ou « répliquables »⁶.

Actifs répliquables et marché complet Une stratégie de financement sur plusieurs actifs peut être définie comme la quantité de chacun des actifs dans un portefeuille. On peut définir plusieurs notions liées :

- Une stratégie est dite *auto-financée* si le changement de valeur du portefeuille est uniquement du aux changements de valeur des actifs (pas d'entrée extérieure d'argent).
- Un actif est dit *répliquable* s'il existe une stratégie auto-financée permettant de répliquer ses flux. Sous AOA, son prix est donc déductible du prix des autres actifs.
- Un marché est dit *complet* si tous les actifs contingents sont répliquables, c'est-à-dire si les prix de tous les actifs sont déductibles d'autres actifs.

Dans un marché complet, on peut indifféremment parler du prix d'un actif ou de la valeur de son portefeuille de réplification. Le prix de tout actif est alors déductible de celui des autres, il est redondant.

AOA et probabilité risque neutre *Harrison et Kreps* (1979) et *Harrison et Pliska* (1981) ont montré qu'il existe un lien entre l'AOA et l'existence d'une probabilité risque neutre. Une probabilité risque neutre \mathbb{Q} est une probabilité équivalente⁷ à la probabilité historique \mathbb{P} telle que le prix actualisé au taux sans risque d'un actif soit martingale sous \mathbb{Q} . On a donc :

$$\text{Existence de } \mathbb{Q} \Leftrightarrow \text{AOA} \qquad \text{Unicité de } \mathbb{Q} \Leftrightarrow \text{Marché complet}$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'AOA et dans un marché complet, le prix de tout actif S peut s'écrire :

$$S(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [D(t, T)S(T)]$$

Avec $D(t, T) = e^{-\int_t^T r_n(u)du}$.

5. Pour plus de détails sur l'estimation du BE en assurance vie, on pourra se reporter à *Gerber* (2010).

6. Pour une description complète, on pourra consulter la Partie I Section 2 de l'ouvrage de *Brigo et Mercurio* (2006).

7. Grossièrement, cela signifie que tout événement pouvant se produire pour une probabilité peut se produire pour l'autre probabilité. Ce qui change est la mesure elle-même, c'est-à-dire la probabilité d'occurrence des événements.

Il est également à noter que sous cette probabilité, le rendement moyen de tous les actifs est égal au taux sans risque. Cela montre l'importance du modèle de taux nominaux dès qu'il est question de la probabilité risque neutre.

Ces résultats permettent de valoriser des produits complexes connaissant leurs flux futurs sous la probabilité risque neutre. La valeur de marché est alors employée au sens de « valeur actuelle du portefeuille d'actifs du marché répliquant les flux futurs de l'instrument considéré ».

La détermination de la valeur de marché d'un engagement d'assurance suit cette logique. Ainsi, lorsque l'on parle de valeur de marché d'un engagement, il s'agit de déterminer la valeur du portefeuille de réplification des flux futurs à verser.

1.2 Exigence de solvabilité réglementaire – SCR

L'article 101 de la directive Solvabilité 2 définit le SCR comme étant la « valeur en risque (*Value-at-Risk*) des fonds propres de base de l'entreprise [...] avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an ».

1.2.1 Évaluation du SCR par modèle interne

Le calcul de l'exigence de capital de solvabilité réglementaire par modèle interne doit passer par la détermination de la distribution de pertes globales à un an. Plusieurs auteurs de la littérature actuarielle ont abordé cette problématique :

- *Devineau et Loisel* (2009) se basent sur un modèle simplifié d'évaluation du SCR en raisonnant sur le bilan économique sans pour autant résoudre le problème d'évaluation de la marge pour risque.
- *Planchet, Thérond et Juillard* (2011) proposent une autre méthode d'évaluation du SCR en raisonnant toujours sur le bilan économique, mais en proposant de résoudre le problème d'évaluation de la RM.
- *Bauer, Bergmann et Reuss* (2008) proposent de raisonner sur l'équivalence entre les principes de la MCEV⁸ proposés par le *CFO Forum*, et ceux du bilan prudentiel afin d'en déduire une autre valorisation du SCR.

Nous allons décrire, à titre d'exemple, la méthode proposée par *Devineau et Loisel* (2009), toutes les méthodes de valorisation du SCR étant *in fine* confrontées au même problème : l'estimation d'un quantile fonction des éléments du bilan à un an.

Équation d'évaluation du SCR par Devineau et Loisel

L'idée est de raisonner sur la distribution des fonds propres économiques, au prix de deux hypothèses. Dans cette approche, le SCR_0 est donné par :

$$SCR_0 = FP_0 - VaR_{0,5\%}(D(0,1) \times FP_1) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\underbrace{FP_0 - FP_1}_{:=L} \leq SCR_0) = 99,5\%$$

Pour cela, on suppose que $FS_0 = -VaR_{0,5\%}(D(0,1)FP_1)$. Pour rappel, FS_0 correspond au montant qu'il faut soustraire aux fonds propres économiques initiaux, FP_0 , pour obtenir le SCR_0 . Dans ce cas, L correspond à la variable aléatoire de perte à un an. Elle compare les fonds propres économiques à un an avec les fonds propres initiaux. C'est le quantile de cette variable qui permet d'évaluer le SCR_0 .

Pour arriver à ce résultat, on fait les hypothèses suivantes :

- ▷ Les fonds propres de surplus FS_0 sont supposés investis au taux court terme⁹ (monétaire) pendant la période $[0, 1]$, ce qui, dans le scénario bicentenaire de perte, donne le droit à un flux de $-VaR_{0,5\%}(FP_1)$ en 1.
- ▷ On suppose également que le mode d'investissement de FS_0 ne change pas le résultat de l'entreprise¹⁰.

8. *Market Consistent Embedded Value*, des règles internationales pour valoriser des entreprises du point de vue des différents preneurs.

9. Dans la version originale de *Devineau et Loisel* (2009), les fonds propres sont investis à la place dans un ZC d'échéance un an, et ainsi indisponibles pendant la période $[0, 1]$. Cette formulation, suggérée par F. Planchet, ne change que peu les résultats.

10. Dans un cas où ces fonds propres sont investis dans l'actif général, cette hypothèse peut créer une distorsion du rendement projeté.

Évaluation Avec cette équation, la détermination du SCR passe par l'évaluation d'un quantile d'ordre élevé des fonds propres à un an. Si cette équation paraît simple, il n'en reste pas moins que l'évaluation du SCR avec cette méthode est complexe. Si la projection de la valeur de marché de l'actif ne pose généralement pas de problème, il est rare de trouver des formules fermées permettant la valorisation du passif. La présence d'interactions actif/passif à travers des mécanismes tels que la participation aux bénéfices complexifie alors les calculs.

La détermination par formule fermée du SCR étant bien souvent impossible, il est courant de recourir à des techniques de simulation qui permettent d'estimer le SCR par des méthodes de Monte-Carlo. La méthode exhaustive pour l'évaluation du SCR est la méthode dite des *Simulations dans les Simulations* (**SdS**) aussi appelée *Nested Simulations*.

Modèle Interne et SdS

On se propose de montrer l'utilisation de SdS dans le cadre de la formule proposée par *Devineau et Loisel* (2009).

Facteurs de risque Afin de pouvoir évaluer à un an la valeur de marché des éléments du bilan, il faut déterminer quels sont les *facteurs de risque* de l'entreprise. Ces facteurs correspondent à toutes les variables économiques, macro-économiques, ou extérieures auxquelles est soumise l'activité de l'assureur et qui peuvent potentiellement déclencher une perte¹¹.

Par exemple, un assureur ayant investi dans des actions et des obligations compte parmi ses facteurs de risque le prix des actions et les courbes de taux permettant de valoriser ses obligations.

Plus généralement, ces facteurs contiennent a minima tous les *sous-jacents* des actifs de l'assureur, ainsi que les données influençant ses engagements (comme l'inflation qui peut déterminer le montant des prestations par exemple).

Ces facteurs de risque incluent également l'information nécessaire¹² pour donner une valeur de marché à l'ensemble des éléments du bilan. Ils sont des éléments indispensables des variables de projection des GSE. Les facteurs de risque étant propres à l'activité d'un assureur et aux modes d'investissement qu'il utilise, **il n'y a pas de GSE universel**.

Algorithme Le but de l'algorithme est d'estimer le SCR_0 en déterminant la $VaR_{99,5\%}(L)$ par un quantile empirique. Si l'on dispose de P réalisations de L , l'estimateur de la *Value-at-Risk* est la $99,5\% \times P$ -ième plus grande réalisation de la variable aléatoire de perte à un an. L'algorithme 1 présente une implémentation possible de SdS.

Remarques

- On distingue les simulations **primaires** (projections statistiques des facteurs de risque à un an) des simulations **secondaires** (évaluation de valeurs de marché). Cette distinction est importante et n'implique pas les mêmes scénarios économiques :
 - ▷ Les simulations primaires sont des projections **statistiques** des facteurs de risque et, à ce titre, n'ont de sens que sous la probabilité historique. Ces simulations servant à déterminer un quantile d'ordre élevé, il faut que P soit suffisamment grand pour assurer la convergence du quantile empirique vers le quantile théorique.
 - ▷ Les simulations secondaires doivent permettre de donner une valeur de marché à des engagements. Un des moyens d'y parvenir est de déterminer une espérance sous la probabilité risque neutre. La convergence de la moyenne empirique vers l'espérance étant plus rapide que la convergence d'un quantile extrême, on conçoit que N soit plus faible que P .
- Dans cet exemple, on a fait l'hypothèse que la valeur de l'actif peut être déterminée par des formules fermées qui utilisent les réalisations des facteurs de risque à un an.

11. La détermination des facteurs de risque est un élément crucial de la gestion des risques dans une entreprise. Pour plus de détails sur ce point, on pourra se reporter au mémoire de *Sauser* (2010).

12. La donnée ponctuelle de l'ensemble de ces variables n'est pas toujours suffisante, certains contrats comme une garantie « cliquet » sur des *variable annuités* dépendent de l'état de variables économiques pendant toute une période donnée. Le traitement de ce genre de contrats nécessite alors plus de soin dans l'utilisation de l'algorithme.

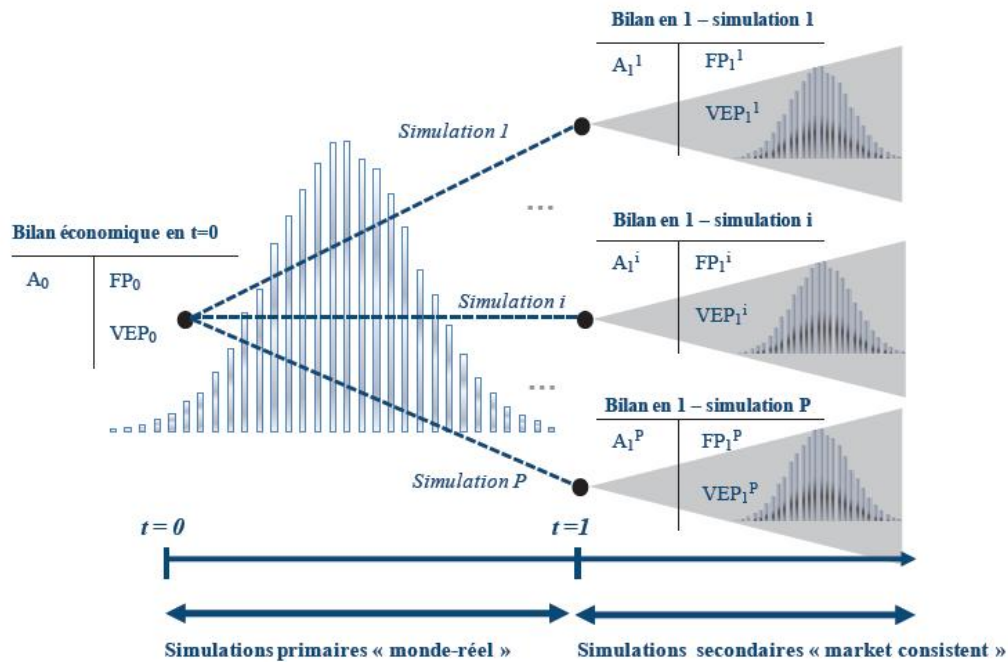


FIGURE 1.3 – Algorithme SdS. La VEP correspond à la Valeur Économique du Passif, notée P dans le mémoire. Source : Devineau et Loisel (2009).

Algorithm 1 Implémentation possible de SdS

- 1: **for** $i = 1$ to $i = P$ **do**
 - 2: **Projeter** la i -ème *réalisation* des facteurs de risque à un an, sous la probabilité **historique**.
 - 3: **Déduire** la i -ème *réalisation* de la valeur de marché de l'actif à un an A_1^i .
 - 4: **for** $k = 1$ to $k = N$ **do**
 - 5: **Projeter** la k -ème *trajectoire* des facteurs de risque d'horizon H , sous la probabilité **risque neutre**.
 - 6: **Évaluer** les flux de prestations actualisés sur la k -ème trajectoire.
 - 7: **end for**
 - 8: **Déduire** de la moyenne des flux actualisés la i -ème *réalisation* de la valeur de marché du passif à un an P_1^i .
 - 9: **Déduire** la i -ème *réalisation* de la variable de perte à un an L^i .
 - 10: **end for**
 - 11: **Évaluer** la $99,5\% \times N$ -ème plus grande réalisation de L .
 - 12: **Déduire** la valeur du SCR.
-

- Les projections des facteurs de risque secondaires doivent être effectuées dans une logique « market-consistent », qui consiste entre autres à utiliser des modèles d'arbitrage.

Complexité de mise en œuvre La mise en œuvre de cet algorithme est complexe et coûteuse en temps de calcul. Les limites proviennent du temps de calcul demandé pour un algorithme de complexité $N \times P$, de la complexité d'un GSE qui permet de projeter tous les facteurs de risque de façon cohérente et sous deux univers de probabilité, ainsi que de l'utilisation indispensable d'un modèle *ALM* pour évaluer les flux futurs actualisés. Bauer, Bergman et Reuss (2008) mettent en avant les difficultés d'estimation et les sources d'erreur inhérentes à l'utilisation de l'algorithme SdS :

- Le nombre de simulations primaires (typiquement de l'ordre de 500 000, selon Bauer et al. (2008)) doit être suffisant pour estimer avec précision le quantile à 99,5 %. Le nombre fini de simulations primaires implique une erreur sur la valeur du SCR.
- Le nombre de simulations secondaires (plus faible car il s'agit de déterminer une moyenne, typiquement 500 selon Bauer et al. (2008)) doit être suffisant pour que la valorisation des éléments du bilan à un an

soit fiable. Le nombre fini de simulations secondaires implique une erreur d'estimation du SCR.

- La valorisation du SCR implique la connaissance du BE_0 . Si ce dernier est évalué par simulation, il existe une erreur sur la valeur du SCR. Le nombre de réalisations choisi pour l'évaluation du BE_0 est en pratique grand (environ 2 000 000) puisque la complexité est plus faible que pour l'algorithme SdS et que cette erreur d'estimation se propage au reste du calcul.

Bauer et al. (2008) notent que l'erreur entachant les simulations primaires est plus importante et diminue plus lentement que l'erreur entachant les simulations secondaires.

Pour pallier cette complexité de calcul, des méthodes ont été proposées afin d'accélérer les calculs :

- **La méthode de Least Square Monte-Carlo** proposée par *Bauer, Bergman et Reuss* (2008). Cette méthode consiste à proposer des fonctions des facteurs de risque à un an et estimer la valeur de marché du passif à un an par une combinaison linéaire de ces fonctions. Il faut une phase préalable de calibration où l'on trouve les coefficients optimaux au sens des moindres carrés ordinaires de la régression. Les auteurs arrivent à des résultats similaires à ceux de SdS avec cette méthode avec une complexité réduite.
- **La méthode des portefeuilles répliquants** *Revelen* (2009) et *Schrager* (2008) ou encore *Devineau et Chauvigny* (2010). L'idée est d'estimer la valeur de marché du passif ou des fonds propres par un portefeuille autofinancé d'actifs disponibles sur le marché répliquant les *cash-flow* du passif ou des résultats futurs. Cette technique permet de réduire considérablement les temps de calcul et ainsi effectuer plus de scénarios primaires.
- **La méthode d'accélération de SdS** proposée par *Devineau et Loisel* (2009). Cette méthode consiste à identifier les « zones » (littéralement, au sens spatial) de facteurs de risque qui conduisent à des pertes extrêmes et localiser dans ces zones le quantile extrême des fonds propres.
- **La méthode d'accélération de scénarios secondaires** proposée par *Nteukam et Planchet* (2010). Cette méthode consiste à proposer une discrétisation particulière des trajectoires projetées permettant de converger plus rapidement vers l'espérance. À ce titre, elle est utile pour déterminer avec moins de scénarios secondaires la valeur de marché du passif.

Ces simplifications sont possibles dans le cadre de la directive Solvabilité 2 pour autant que le capital de solvabilité réglementaire estimé par cette méthode est équivalent à celui déterminé par une évaluation exhaustive.

Malgré ces techniques d'accélération, l'évaluation du SCR par modèle interne reste un problème complexe qui implique d'importantes ressources tant informatiques qu'humaines. Afin de pallier cette complexité de calcul, l'article 103 de la directive Solvabilité 2 prévoit l'utilisation d'une forme de calcul simplifiée, la *Formule Standard*. Cette évaluation prend moins en compte le profil de risque de l'entité que celle par modèle interne mais peut être transposée à toute activité d'assurance. Nous allons voir dans la suite comment a été dérivée une telle approche.

1.2.2 Évaluation du SCR par agrégation de modules de risque

Le SCR peut être évalué par agrégation des risques. L'idée sous-jacente est d'évaluer, pour chaque module de risque (par exemple marché, risques techniques, ...), une exigence de capital réglementaire marginale au titre des facteurs de risque spécifiques au module puis, en prenant en compte les phénomènes de diversification entre facteurs de risque, déduire l'exigence de capital de solvabilité global. Dans la cinquième étude d'impact proposée par l'EIOPA, cette agrégation passe par plusieurs hypothèses :

- On suppose qu'il est possible de décomposer la variable de perte à un an L en somme de variables de perte L_i caractérisant les pertes à un an liées à plusieurs risques. On trouve parmi ces risques ceux de souscription, de marché, de contrepartie, de longévité... Le paragraphe 4 de l'article 104 de la réforme Solvabilité 2 prévoit que chacune de ces variables de perte représente une *Value-at-Risk* d'horizon un an. Cette vision permet de définir des capitaux *marginiaux* à immobiliser pour ces risques, SCR^i :

$$L = \sum_{i=1}^d L_i \quad \mathbb{P}(L_i \leq SCR^i) = 99.5 \%$$

- On suppose que les risques L_i forment un **vecteur Gaussien**, avec $\rho_{ij} = \text{cor}(L_i; L_j)$. Cette hypothèse fait l'objet de vives critiques dans la littérature. Parmi celles-ci, on peut relever :
 - ▷ Les marginales ne sont pas forcément Gaussiennes et peuvent présenter une asymétrie marquée. ;
 - ▷ La structure de dépendance est supposée être celle d'une copule Gaussienne multi-variée et ne prend pas en compte des phénomènes tels que les *crises de corrélation* ou l'*asymétrie de la dépendance*.

À partir de ces deux hypothèses, *Bauer, Bergman et Reuss* (2008) montrent la formule d'agrégation dite en « racine carrée » :

$$\text{SCR} = \sum_{i=1}^d \mu_i + \sqrt{\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \rho_{ij} (\text{SCR}^i - \mu_i) (\text{SCR}^j - \mu_j)}$$

Avec $\mu_i = \mathbb{E}[L_i]$.

Démonstration. Cf. Annexe A. □

Grâce à cette formule, il est possible d'évaluer séparément les capitaux requis pour les risques marginaux et de les agréger afin d'en déduire le capital global, ce qui simplifie considérablement les calculs.

Approche Modèle Interne Partiel L'approche modèle interne partiel consiste à évaluer une ou plusieurs variables de risque L_i par l'intermédiaire d'un modèle interne. Elle permet de prendre en compte en partie le profil de risque de l'entreprise sur des risques déterminants pour sa solvabilité. L'évaluation du capital marginal à immobiliser repose sur l'utilisation de GSE dédiés aux variables d'intérêt.

Approche Formule Standard L'approche par formule standard consiste à spécifier des *chocs instantanés* à appliquer aux différents éléments du bilan afin de reproduire la *Value-at-Risk* de chaque variable de perte à un an. L'intensité des chocs à appliquer ainsi que leur nature seront quantifiés dans les textes de niveau 2 et les recommandations de niveau 3.

Évaluation du SCR, taux et inflation

Mise à part l'approche par formule standard par utilisation des chocs instantanés, les méthodes d'estimation du SCR reposent sur l'utilisation de GSE. Comme nous l'avons précisé précédemment, ces GSE doivent être capables de projeter des variables sous la probabilité historique comme risque neutre. Comme le souligne la présentation de *Planchet* (2011), ces utilisations impliquent une attention toute particulière aux hypothèses faites sur le modèle de taux nominaux utilisé.

Contrairement aux taux nominaux, l'inflation et les taux réels ne sont pas toujours directement pris en compte dans les modèles de projection classiques. Des modèles tels que celui de *Cox, Ingersoll et Ross* (1985) prennent implicitement en compte ces variables pour spécifier un modèle de taux, mais ne permettent pas de les projeter. Cependant, pour les branches à déroulement long, l'inflation est souvent un facteur de risque important pour l'entreprise et donc une variable indispensable des scénarios. Il faut alors disposer de modèles permettant une prise en compte explicite de l'inflation, tels que ceux de *Wilkie* (1986) ou encore d'*Ahlgrim et al.* (2005).

L'utilisation des instruments financiers permettant de couvrir le risque inflation pouvant présenter un intérêt pour les assureurs, on pourra également exiger que ces modèles permettent une valorisation de produits indexés et donc modélisent explicitement les taux réels, comme le fait le modèle de *Jarrow et Yildirim* (2003) que l'on présentera au chapitre 7.

Dans la suite, dans une optique de gestion des risques, nous allons préciser quels sont les risques liés aux taux et à l'inflation auxquels on s'intéresse.

1.3 SCR de taux et d'inflation

On va tout d'abord voir comment est géré le risque de taux nominaux dans la formule standard de Solvabilité 2, puis proposer l'introduction des taux réels et de l'inflation comme variables de risque.

Risque lié aux produits de taux La formule standard prend explicitement en compte le risque lié aux taux nominaux à l'intérieur du module « marché ». Plus précisément, l'étude menée par *Arias, Foulquier et Le Maistre* (2012) précise que sur les sept sous-modules du module « marché », trois¹³ peuvent correspondre au risque porté par un produit de taux :

- ▷ **Le risque de taux.** C'est le risque de voir le taux d'intérêt anticipé évoluer dans le temps. Lorsque l'on fait référence à un « taux sans risque », il s'agit en fait d'un produit de taux qui n'est soumis qu'à ce seul risque.
- ▷ **Le risque de spread.** C'est le risque de voir les *spread* de crédit de l'émetteur du produit de taux se détériorer. On notera que les titres garantis par des pays de la Zone Économique Européenne (EEA) ne sont pas concernés par ce risque.
- ▷ **Le risque de change.** C'est le risque de voir le niveau ou la volatilité des taux de change évoluer. Ce risque ne concerne que les titres libellés dans une monnaie autre que l'Euro.

Quelques précisions sur les risques de *spread* et de *change* :

- **Risque de Spread.** On peut illustrer le risque de *spread* dans le cadre de deux gammes de produits de crédits différents :
 - ▷ Le risque de *spread* est prépondérant pour les produits de *crédit* dont les flux sont indexés sur le défaut d'entités tels que les *Credit Defaults Swap (CDS)*, les *Collateralised Debt Obligation* ou encore les célèbres *Residential Mortgage-Backed Securities*. Ces produits particuliers nécessitent des modèles de crédit pour être valorisés. Pour plus d'informations sur ce point, on pourra se référer à la synthèse des modèles de crédit proposée par *Duffie et Singleton* (2003) .
 - ▷ Le risque de *spread* est également déterminant pour des obligations *corporate* et plus généralement, tous les titres de créance non garantis par un État de l'EEA. Il existe des modèles *ad-hoc* qui permettent de traiter le risque de *spread* indépendamment du modèle du taux sans risque nominal utilisé. À ce titre, on pourra notamment citer l'approche proposée par *Longstaff et al.* (2005) qui stipulent un modèle de valorisation de produits *corporate* prenant en compte liquidité et risque de défaut grâce à une calibration sur des CDS. Dans cette approche, l'intensité du processus de défaut est modélisée par un modèle type CIR et la volatilité du processus de liquidité est supposée constante.
- **Risque de Change** En toute cohérence, il faudrait prendre en compte les taux et l'inflation étrangère lorsqu'ils correspondent à des facteurs de risque. Cependant, l'étude que nous allons mener est directement transposable à une autre devise. Pour cela et par souci de simplicité, nous écartons également le risque de change de notre approche.

Nous ne nous intéresserons pas dans la suite à ces risques puisqu'il peuvent être traités par des modèles ad-hoc et donc indépendamment de l'approche que nous avons retenue.

Périmètre de risques modélisés Sur ces trois risques, nous retenons uniquement le risque de taux et nous y ajoutons le risque de voir le taux réel évoluer dans le temps et le risque de voir l'inflation évoluer dans le temps. On pourrait alors procéder par une approche type modèle interne partiel¹⁴ afin de déterminer des réalisations de la variable aléatoire de perte à un an associée à ces seuls risques et obtenir le montant marginal à immobiliser. Ce capital pourrait alors servir d'indicateur d'exposition aux risques de taux et d'inflation. Cependant, à des fins de simplicité et afin d'éviter de travailler sur les actifs, nous nous contenterons d'évaluer les projections du passif à un an.

13. Pour être plus précis, il faudrait également ajouter le risque de *concentration*, cependant ce dernier dépend du mode de gestion du portefeuille et non de l'actif lui-même.

14. Cette approche ne rentre toutefois pas dans le cadre d'un modèle interne partiel puisqu'elle ne modélise pas un module complet de risque.

Chapitre 2

Produits des marchés de taux

Le but de ce chapitre est de donner une introduction générale aux marchés de taux d'intérêt. Pour plus d'approfondissements, on pourra se référer à un ouvrage général comme celui de *Portait et Poncet* (2012), ou plus technique comme celui de *Brigo et Mercurio* (2006).

Instruments à revenus fixes pour un assureur Les instruments à revenus fixes, qu'ils soient obligataires ou monétaires, sont importants dans la stratégie d'un assureur. En effet, de part le phénomène de mutualisation, l'assureur peut en partie prévoir les prestations futures. Cette remarque est d'autant plus valable en présence d'interactions actif/passif où il convient de trouver des instruments en adéquation avec les prestations à verser. Un mode de placement tel que les actions présente l'inconvénient de ne pas permettre de connaître à l'avance la valeur future du titre et implique donc une incertitude sur la capacité à honorer ses engagements. Le marché des instruments à taux fixe est important pour un assureur avec une branche à déroulement long car il lui permet de mieux adosser ses engagements avec ses prestations¹.

2.1 Taux du marché

Il existe un grand nombre d'instruments de taux négociables sur différents marchés. Dans cette section, nous choisissons d'introduire quelques taux utilisés, sans pour autant prétendre à l'exhaustivité.

Plusieurs critères permettent de les distinguer, comme la maturité des instruments concernés ou le type d'émetteur. Nous nous concentrons sur les marchés souverain français et interbancaire européen ; ces marchés sont les principaux pour un investisseur français sur des produits de taux classiques.

Taux souverains Les taux souverains les plus cités sont les taux négociables du **marché secondaire**. Le marché secondaire² est le marché où la dette d'un État est échangée par les investisseurs privés, sans lien direct avec l'État. En fonction de la durée de l'emprunt, on parle d'instruments monétaires ou d'instruments obligataires. On peut alors classer les types d'emprunts d'États en trois catégories :

- **Bons du Trésor à taux fixe, BTF**, instruments monétaires. Ce sont des instruments d'émission court terme émis toutes les semaines par l'*AFT*. Les échéances sont de 13 semaines, 6 mois et 1 an.
- **Bons du Trésor à intérêts Annuels, BTAN**, instruments monétaires. Leur maturité à l'émission est de 2 ou 5 ans, et permettent un financement à moyen terme.
- **Obligations Assimilables du Trésor, OAT**, instruments obligataires. Leur maturité à l'émission va de 5 ans jusqu'à 50 ans. Ce sont des instruments de gestion de la dette à long terme et ils constituent un des moyens de placement prépondérants pour les assureurs.

1. Ce raisonnement est idéalisé. Dans la pratique, la détention d'un titre obligataire induit d'autres risques comme celui de contrepartie ou de liquidité.

2. À la différence du marché secondaire, le marché primaire est celui où les États placent leur dette par *adjudication* et souvent par *assimilation*. En France, l'Agence France Trésor (**AFT**) est chargée du placement de la dette d'État.

Taux interbancaires Les taux interbancaires sont une référence sur le marché monétaire, ils définissent quels sont les taux que les banques se fixent pour se financer entre elles. En Europe, ce sont les taux *Euribor*. Ces taux servent de référence à de nombreux instruments financiers et même certains prêts aux particuliers. Il existe des instruments financiers dérivés permettant de donner des équivalents long terme à ces taux variables, et donc généraliser les taux *Euribor* au marché obligataire. On peut alors classer les instruments de prêt à taux variable en plusieurs catégories :

- **Eonia**, taux d'intérêt moyen constaté d'un prêt d'une nuit en moyenne et entre banques. C'est un instrument dit *overnight*.
- **Euribor**, taux moyen de prêt entre banques européennes. La maturité de ces prêts va de 1 semaine à 12 mois avec un grand nombre de maturités. Ce taux est le taux de référence pour les instruments dérivés. Parmi ces derniers, on retient surtout le **Taux Euribor 6 mois (EU6M)**, qui est une référence monétaire pour les produits dérivés de taux.
- **FRA**, *forward rate agreement*, instrument monétaire. La maturité de ces produits dérivés de taux est généralement inférieure à deux ans. Ils consistent en un échange d'intérêts sur un taux variable (typiquement *Euribor* 3 mois) fixé dans le futur contre un taux fixe précisé à la création du contrat.
- **Swap contre Euribor**, instrument obligataire avec des maturités pouvant aller jusqu'à 30 ans. Ces *swaps* consistent en des échanges à fréquence donnée entre des intérêts sur un nominal à un taux fixe déterminé à l'avance et à un taux variable de référence (typiquement l'*Euribor* 6 mois).

Le graphe 2.1 résume les instruments disponibles sur les deux marchés.

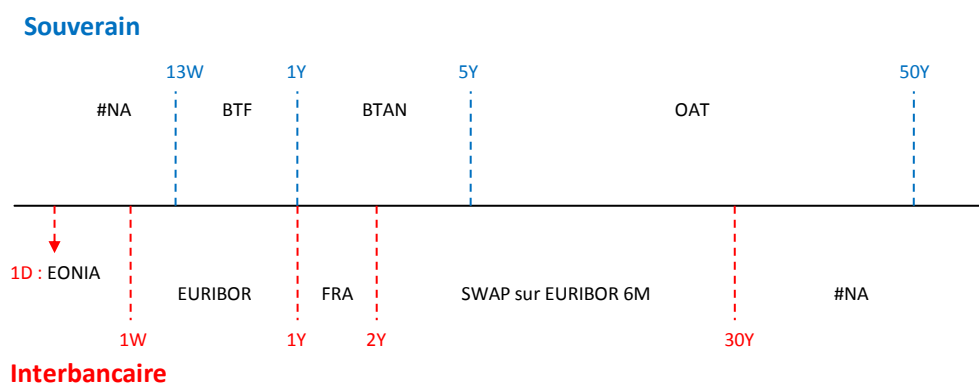


FIGURE 2.1 – Instruments classiques de taux interbancaires et souverains. Le marché interbancaire possède plus de maturités court terme et le souverain plus de maturités long terme.

2.2 Obligations sans risque à taux fixe

Les instruments à coupons sont cotés soit en prix³, soit en *rendement actuariel*. Le rendement actuariel est une donnée équivalente à celle du prix et permet de faciliter la comparaison avec des instruments n'ayant pas la même maturité.

Le rendement d'un instrument à coupons ne peut servir à l'actualisation d'un flux futur. Il faut retravailler les données afin d'extraire des courbes de taux actuariels, les courbes de taux zéro-coupon. Nous verrons dans la partie suivante quelles sont les techniques permettant de procéder à une telle décomposition.

Marché des Strips Il existe une exception au principe formulé précédemment. Certains instruments comme les OAT disposent d'un marché dédié de démantèlement, aussi appelé *strip*. Une institution financière peut décider d'acheter une grande quantité d'obligations et de vendre séparément tous les coupons qu'elles procurent.

3. Généralement, on utilise un nominal de 100 pour les obligations.

On peut ainsi avoir accès à un marché d'obligations zéro-coupon. Cependant, ce marché est moins développé que celui des obligations à coupons et les prix comprennent des primes de liquidité et des fourchettes de prix d'achat/vente qui empêchent l'utilisation du prix de ces instruments à des fins d'actualisation. Nous ne nous intéresserons pas aux prix de ces instruments dans la suite, nous valoriserons directement les ZC à travers le rendement des obligations observées.

Valorisation d'obligations à taux fixe Une obligation à taux fixe peut être considérée comme un produit particulier dérivé de taux. Les obligations à taux fixe sont le plus souvent cotées pied-de-coupon, c'est-à-dire sans compter la partie de coupon qui revient au vendeur⁴. Une obligation à taux de coupon fixe égal à c en t , de maturité T années versant un coupon dans $\theta \in [0, 1[$ fraction d'année vaut :

$$\mathcal{B}_n(t, T) = \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor} cNP_n(t, k + \theta) + NP_n(t, T) - (1 - \theta)cN \quad (2.1)$$

avec θ la partie décimale de T , durée qui sépare t du prochain détachement de coupon :

$$\theta = T - t - \lfloor T - t \rfloor$$

Ce modèle de valorisation pied-de-coupon tient dans le cadre de l'hypothèse classique d'absence d'opportunité d'arbitrage et en considérant que la probabilité de défaut est nulle.

Formule Standard et obligations à taux fixe *Arias, Foulquier et Le Maistre* (2012) ont mené une étude sur un échantillon de 4 279 obligations (souveraines et *corporate*) de 1999 à 2011 afin de mesurer l'impact du capital *marginal* à détenir, au sens de la cinquième étude d'impact de l'EIOPA, sur les investissements obligataires.

Pour cela, les auteurs proposent d'identifier quelles caractéristiques de l'obligation sont corrélées au capital à immobiliser, le « SCR obligataire⁵ ». Le tableau 2.1 résume les résultats obtenus.

Caractéristique	Corrélation SCR obligataire		Interprétation
	Pearson	Spearman	
Duration	74.5 %	83.2 %	Durée de vie ↗ ⇒ SCR ↗
Maturité résiduelle	65.9 %	83.1 %	
<i>Rating</i>	56.2 %	53.2 %	Qualité ↘ ⇒ SCR ↗
<i>Spread</i> de crédit	6.6 %	7.5 %	
Prix pied-de-coupon	-50.6 %	-29.6 %	Taux ↘ ⇔ <i>Spread</i> ↘ ⇒ SCR ↘
Taux de coupon	-18.6 %	2.3 %	Non significatif

TABLE 2.1 – Corrélation entre SCR obligataire et caractéristiques du titre.

Il apparait, entre autres, que plus la durée de vie d'un titre augmente et plus le SCR obligataire est grand. Cette remarque se comprend par l'augmentation de la *sensibilité*⁶ du titre avec sa durée de vie, mais doit être nuancée. En effet, l'étude menée ne prend pas en compte l'adéquation actif/passif de l'entreprise, mais le capital à immobiliser en regardant les caractéristiques intrinsèques du titre. Ainsi, une entreprise ayant un passif avec une grande durée peut voir son SCR de marché diminuer en utilisant des obligations de grandes maturités.

2.3 Produits dérivés de taux

Avec l'innovation financière de ces 20 dernières années, il existe de nombreux produits de taux différents. Nous choisissons d'en présenter quelques-uns fréquemment traités et de voir quel peut être leur intérêt pour un assureur.

4. Une convention de marché est que le prochain coupon qui va se détacher d'une obligation est acquis au *pro rata temporis* de la détention de l'obligation.

5. Le calcul de ce SCR prend en compte les risques de taux, de *spread*, de crédit et de change.

6. La sensibilité d'un titre correspond à l'opposé de sa dérivée par rapport à son rendement actuariel divisée par la valeur du titre. Elle permet de quantifier la variation relative du prix du titre à une diminution d'une unité de rendement actuariel.

Forward Rate Agreement – FRA Ce contrat de gré à gré permet à une des deux parties de garantir (en 0) les intérêts d'un emprunt à taux variable à une date de *fixing* future. Initialement, on choisit le taux d'intérêt fixe de façon à ce que la valeur du contrat soit nulle (qu'il ne soit profitable à aucune des parties). Une relation d'AOA montre que cela implique que le taux fixe corresponde au taux *forward*. La valorisation d'un FRA ne dépend pas d'un modèle de taux.

Intérêt pour un assureur Un FRA permet de fixer le coût d'un emprunt ou d'un prêt à venir à taux variable. Ainsi, un assureur peut diminuer son risque de taux en fixant à l'avance le coût de ses financements. Les FRA étant généralement de maturité courte (<18 mois) et sur des taux variables court terme⁷, leur intérêt est réduit pour un assureur de branche à déroulement long.

Swaps de Taux Les *swaps* de taux sont des instruments qui ont mis plus de temps à être adoptés par les investisseurs que les *futures* sur taux. En effet, même s'ils furent créés dans les années 80, ils nécessitaient des moyens informatiques et de développement accrus pour être valorisés avec précision et empêcher les asymétries d'information. Grâce aux efforts de l'*ISDA* et le développement informatique, ces produits sont actuellement couramment échangés.

Un *swap* taux fixe contre taux variable⁸ consiste en un **échange d'intérêts** (le nominal n'est jamais échangé) sur deux taux différents durant une période et à une fréquence fixés à l'avance. Un investisseur s'engage à payer la jambe fixe, soit un taux d'intérêt fixé à l'avance. L'autre s'engage à payer la jambe variable, soit un taux intérêt révisé⁹ en début de chaque période. À la création du *swap*, le taux fixe est choisi pour que les engagements des deux parties soit égaux. Cette valorisation qui **ne dépend pas d'un modèle de taux** permet de donner **une valeur long terme à un emprunt à taux variable court terme**. On s'en servira par la suite afin de déterminer une structure par terme des taux interbancaires.

Les *swaps* de taux sont cotés en taux fixe, appelé *taux swap* qui permet d'égaliser la valeur des deux jambes.

Intérêt pour un assureur Ces produits permettent de transformer un emprunt ou un prêt à taux variable en emprunt ou prêt à taux fixe et inversement. Par exemple, ce type d'instrument est utile pour un assureur dont le mode de financement dépend de taux interbancaires et qui souhaite fixer le revenu qu'il va recevoir afin de diminuer le risque de voir le taux baisser.

Cap, Floor – Cpl/Flr Les *Caps* et *Floors* sur taux variable¹⁰ sont des cas particuliers de *swap*. Ces contrats sont composés d'un ensemble de flux. Chacun des flux peut être vu comme un contrat à part entière ou *caplet/floorlet*. Dans le cas d'un *caplet*, une prime est échangée contre la différence, si elle est positive, entre un taux variable et une barrière S , appelée *strike*, fixée en début de contrat. Le *payoff* de la jambe variable d'un des paiements du *caplet* est :

$$N \times [S - \text{Taux variable}]_+$$

La valorisation d'un *cap* ou d'un *floor* dépend du modèle de taux utilisé. Nous les aborderons plus en détail dans la partie 2.

Intérêt pour un assureur Ces produits permettent de fixer le coût maximal d'un prêt ou d'un emprunt. Par exemple, l'achat d'un *cap* avec un prêt à taux variable permet de fixer le taux d'intérêt maximal au niveau du *strike*.

Option sur ZC – ZBP/ZBC Une option sur ZC est un contrat donnant le droit mais non l'obligation d'acheter en T un ZC de maturité S à un montant fixé en $t < T < S$. Ce produit permet de fixer le coût d'un financement obligataire. La valorisation d'une option sur ZC dépend du modèle de taux utilisé.

7. Typiquement *Euribor* 6M ou 3M.

8. Le plus souvent *Euribor* 6M ou *Euribor* 3M.

9. Le moment où le taux variable est fixé, dit *fixing*, est généralement espacé du moment du règlement d'une période.

10. Le plus souvent *Euribor* 6M ou *Euribor* 3M.

Swaption Une *swaption* payeuse est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation de rentrer dans un contrat *swap* en T de maturité S à un taux fixe fixé en $t < T < S$. Ce produit permet de fixer le coût futur d'un contrat *swap* pour un assureur ayant anticipé des besoins futurs d'échange entre taux fixe et taux variable. La valorisation d'une *swaption* dépend du modèle de taux utilisé.

Nous retiendrons que les instruments dont la valorisation dépend d'un modèle de taux permettent de calibrer ces modèles. En effet, on peut comparer le prix observé des instruments avec le prix théorique donné par le modèle et ajuster les paramètres pour minimiser l'erreur de valorisation.

2.4 Marchés de taux

Le but de cette section est d'établir quelques généralités sur le marché obligataire international afin de comprendre son essor et la différence avec le marché indexé inflation que nous aborderons à la section suivante.

Taille du marché mondial Le marché souverain européen est le deuxième mondial après celui des États-Unis et devant le Japon. Le volume de la dette européenne est supérieur à 12 Billions de dollars. La figure 2.2 permet de comprendre l'évolution mondiale du marché de dette internationale. Le marché obligataire grandit de plus en plus vite au cours du temps.

Chute des rendements obligataires Une constante de ces 25 dernières années est la chute des rendements obligataires souverains comme interbancaires des pays développés. Les raisons sont multiples, on peut entre autres citer des politiques monétaires restrictives par les États-Unis et la Grande Bretagne, notamment dans le but de faire chuter l'inflation. Ainsi, comme nous le verrons plus loin, cela a eu pour effet de diminuer les anticipations d'inflation des prêteurs et donc de diminuer le taux d'emprunt exigé. D'autres facteurs ont contribué à cette baisse, comme la faible performance économique, les politiques monétaires de *quantitative easing* ou encore les taux des banques centrales extrêmement bas, notamment au Japon où les taux sont quasiment nuls depuis 15 ans.

Développement du marché des dérivés de taux et de crédit Cette baisse des taux constante est une des raisons qui a poussé les investisseurs à chercher d'autres sources de rendement. Ainsi par exemple, le nombre de contrats sur les obligations 10 ans du Trésor US est passé de 14 000 en 1987 à 13 Millions en 2012. Ces instruments dérivés font partie des instruments classiques du marché. Bien qu'historiquement, ces derniers sont associés à la spéculation et prise de risque, ils sont également des outils importants de gestion des risques, et à ce titre ont pleinement leur place au sein des moyens d'investissement d'un assureur.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder les grandes classes de modèles de taux nominaux afin de comprendre lesquelles sont les mieux adaptées à notre objectif.



FIGURE 2.2 – Évolution du marché mondial obligataire. Source : Étude *Morgan Stanley* (2012), *Bank for International Settlements*

Chapitre 3

Modèles de taux

Le but de ce chapitre est de permettre de répondre à la question : « Quel modèle de taux nominal ¹ utiliser ? ».

Dans le cadre général, cette question n'a pas de réponse évidente. Le choix d'un modèle de taux doit être motivé par un objectif d'utilisation (projections *ALM*, *pricing*, couverture de portefeuille, ...) qui permet de déterminer quelles sont les caractéristiques recherchées.

Nous allons passer en revue les modèles de taux les plus courants de la littérature en fonction de différents critères. Pour une description plus technique, on pourra consulter *Brigo et Mercurio (2006)*, et pour une analyse de leur importance dans un contexte d'*ALM*, on pourra se référer au mémoire de *Wilhelmy (2005)*.

Il existe plusieurs caractéristiques permettant de distinguer les modèles de taux. Parmi celles-ci, on peut trouver :

- **Modèles mono-factoriels ou multi-factoriels.** On distingue les modèles à un facteur (généralement taux court) des modèles plus complexes prenant en compte plusieurs facteurs. Le nombre de facteurs détermine le nombre de sources d'aléa permettant d'expliquer les mouvements et formes des courbes de taux observées.
- **Modèles d'équilibre ou d'arbitrage.** On distingue les modèles permettant de prendre en compte implicitement des équilibres économiques de ceux utilisables pour la valorisation d'instruments dérivés.
- **Modèles markoviens ou de marché.** On distingue deux classes au sein des modèles d'AOA compatibles avec le cadre de travail *HJM*.

3.1 Modèles mono-factoriels et multi-factoriels

Un modèle de taux est dit mono-factoriel s'il n'existe qu'une seule source d'incertitude permettant d'expliquer la forme et les mouvements de la courbe des taux. À l'inverse, il est dit multi-factoriel si plusieurs sources d'incertitude sont susceptibles d'expliquer la forme et les mouvements de la courbe des taux.

Modèles mono-factoriels Les modèles de taux mono-factoriels classiques décrivent les variations de la courbe de taux *ZC* par une unique variable, traditionnellement le taux court. Sous ces modèles, une augmentation ou une diminution du taux court entraîne une augmentation ou une diminution de l'ensemble de la courbe des taux ; seules les **amplitudes** des variations changent avec la maturité. Cela implique entre autres que toutes les maturités des *ZC* sont parfaitement corrélées.

Limites Les variations des courbes de taux projetées par ces modèles sont peu réalistes car toujours dans le même sens pour l'ensemble des maturités. Empiriquement, on peut constater que la corrélation entre deux *ZC* diminue lorsque l'écart entre leurs maturités augmente ². Cependant, la simplicité de calibration et l'existence de formules fermées pour les prix de *ZC* et produits dérivés expliquent leur popularité.

1. On insiste sur le fait qu'il ne s'agit pas encore de parler des autres variables telles que l'inflation ou les taux réels.

2. On pourra se référer au graphe 11.1 de la partie 2 pour une illustration.

Modèles multi-factoriels Afin de comprendre qu'il existe plusieurs facteurs permettant d'expliquer la forme et les variations des courbes de taux, il est courant de raisonner par Analyse en Composantes Principales (**ACP**). *Nelson et Siegel* (1987) utilisent une ACP sur un historique de courbes de taux afin de déterminer la forme des facteurs explicatifs. Ils identifient alors trois facteurs principaux :

- La translation ;
- L'effet de pente ;
- L'effet de courbure.

Ils déduisent qu'il est possible d'expliquer plus de 95 % des variations des courbes de taux avec ces facteurs. Il est alors compréhensible d'utiliser des modèles prenant en compte plusieurs facteurs. On peut notamment citer :

- Le modèle de *Brennan et Schwartz* (1979) qui décrit ces variations par deux facteurs corrélés, le taux court r_n et le taux long l_n . On suppose que le taux court suit un processus de retour à la moyenne vers le taux long, qui suit lui même un processus log-normal :

$$dr_n(t) = [a_n^r + b_n^r(l_n(t) - r_n(t))] dt + \sigma_n^r r_n(t) dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

$$dl_n(t) = l_n(t) [a_n^l + b_n^l r_n(t) + c_n^l l_n(t)] dt + \sigma_n^l l_n(t) dW_l^{\mathbb{Q}}(t)$$
- Les modèles affines multi-factoriels tels que ceux présentés par *Aït-Sahalia et Kimmel* (2002) ou encore *Dai et Singleton* (2000) sont utilisés pour la valorisation du risque de *crédit*. Ils spécifient une dynamique de taux court dépendant d'un vecteur d'états, contenant plusieurs facteurs. Des contraintes particulières de linéarité des paramètres de la dynamique du vecteur d'états permettent de trouver des formules de prix de ZC par l'intermédiaire d'équations différentielles ordinaires.

Limites Ces modèles permettent d'avoir des projections plus réalistes au sens où les sources de variation des courbes de taux proviennent de différents facteurs et prennent en compte des corrélations imparfaites entre maturités de ZC. Cependant, on leur reproche généralement leur complexité tant d'implémentation que de mise en œuvre.

Le choix d'un modèle à un ou plusieurs facteurs dépend principalement du niveau de complexité et de réalisme souhaité dans les projections. Des études telles que celle de *Date et Wang* (2009) précisent qu'il peut être important d'ajouter un deuxième facteur aux modèles de taux. Cependant, dans notre approche, nous nous contenterons d'un unique facteur à des fins de simplicité.

3.2 Modèles d'équilibre général et d'arbitrage

Un modèle permettant de valoriser précisément des instruments financiers ne préserve pas toujours l'équilibre à long terme des variables économiques sous-jacentes. Cette remarque reprise par *Faleh* (2011) et *Ahlgrim et al.* (2005) permet de comprendre que le choix d'un modèle doit être orienté par l'utilisation que l'on souhaite en faire. Il existe alors deux grandes classes de modèles, ceux d'équilibre et ceux d'arbitrage.

Modèles d'équilibre général

Structure Les modèles d'équilibre général sont des modèles où l'équilibre des variables sous-jacentes est plus important que la cohérence avec les prix observés. Ainsi, le plus souvent, les prix de zéro-coupon sont des « *sorties* » de ces modèles. Ces modèles sont adaptés à des projections de long terme et incluent des phénomènes de retour à la moyenne. Ils peuvent posséder un ou plusieurs facteurs.

Retour à la moyenne des taux Le phénomène empirique du « retour à la moyenne » stipule que des périodes où les taux sont élevés sont généralement suivies par des périodes où les taux sont bas. Cette remarque empirique est également un gage de stabilité des taux dans les projections de modèles : en imposant cette contrainte, il sera plus rare d'observer des trajectoires de taux qui divergent. Cette contrainte est souvent reprise dans les modèles d'équilibre de la littérature.

Modèles mono-factoriels de retour à la moyenne Bien qu'il soit difficile de donner une forme générale à ces modèles, comme le précise *Faleh* (2011), la dynamique de la majorité des modèles d'équilibre de taux courts

avec retour à la moyenne est :

$$dr_n(t) = a_n(\theta_n - r_n(t))dt + \sigma_n r_n^\gamma(t) dW_n^{\mathbb{Q}}(t)$$

On trouve parmi ces modèles :

- Le modèle de *Vasicek* (1977) avec $\gamma = 0$. Ce modèle de retour à la moyenne est populaire en raison de sa simplicité d'utilisation. Cependant, il lui est souvent reproché la possibilité d'avoir des taux nominaux négatifs.
- Le modèle de *Cox, Ingersoll et Ross* (1985) avec $\gamma = 0,5$. Il présente aussi une structure de retour à la moyenne avec, cette fois-ci, l'impossibilité d'avoir des taux nominaux négatifs pour certains choix de paramètres. Cette forme est obtenue comme la solution d'une équation différentielle d'équilibre du marché et prend *implicitement* en compte les mouvements dus aux taux réels et à l'inflation.

Le plus souvent, il existe des formules fermées permettant de déduire les prix de zéro-coupon pour toutes les maturités avec la donnée du taux court.

Limites Ces modèles ne répliquent pas les valeurs de marché des actifs négociés. Ainsi, comme le mentionne *Hull* (2012), ces modèles ne peuvent être adaptés à la valorisation de dérivés sur taux puisqu'ils ne permettent pas de valoriser des sous-jacents.

Modèles d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage

Structure Les modèles d'AOA sont des modèles où la juste valorisation d'un actif est plus importante que l'équilibre entre les variables sous-jacentes. Ils ont connu un grand essor depuis les années 80, ainsi il existe une grande diversité de modèles d'AOA qui sont souvent des extensions de modèles d'équilibre. Généralement, ces modèles incluent un ou plusieurs paramètres dépendant du temps permettant de répliquer les prix d'instruments cotés sur le marché. Parmi les modèles d'AOA à taux court, on peut citer :

- Le modèle de *Ho et Lee* (1986) qui décrit un modèle simple d'AOA où la volatilité du taux court nominal est constante, et où il n'y a qu'un seul paramètre pour interpoler la courbe de taux du marché. La dynamique du taux court nominal sous la probabilité risquée neutre est :

$$dr_n(t) = \theta_n(t)dt + \sigma_n dW_n^{\mathbb{Q}}(t)$$

On reproche souvent à ce modèle son manque de stabilité et son incapacité à projeter des dynamiques au long terme.

- Le modèle de *Hull et White* à un facteur (1990) (**HW1**) est une extension de l'approche de *Ho et Lee* avec une structure d'*Ornstein-Uhlenbeck*. Il arrive également qu'on l'appelle le modèle de *Vasicek généralisé*. La dynamique du taux court nominal est :

$$dr_n(t) = a_n(\theta_n(t) - r_n(t))dt + \sigma_n dW_n^{\mathbb{Q}}(t)$$

Dans les modèles plus poussés, il existe également un second paramètre permettant de répliquer la nappe de *volatilité implicite* observée, ce qui permet de valoriser avec plus de précision les produits dérivés de taux.

Limites *Ahlgrim et al.* (2005) proposent un exposé synthétique des principaux inconvénients des modèles d'AOA. On peut notamment citer :

- Ces modèles sont plus utiles pour des projections au court/moyen terme. Cette critique est essentiellement fondée sur le principe qu'une calibration des modèles sur des données de marché peut conduire à des incohérences pour des projections long terme, d'abord à cause du court-termisme des produits dérivés qui servent à la calibration, mais aussi et surtout à cause de la forme des courbes des taux *forward* qui jouent un rôle central dans les modèles d'AOA et qui sont pourtant instables sur les marchés.
- Les modèles d'AOA manquent parfois de formules fermées et peuvent nécessiter des simulations pour permettre d'obtenir des prix de zéro-coupon.

3.3 Cadre de travail de HJM

Heath Jarrow et Morton (1992) proposent un cadre de travail général pour les modèles d'AOA qui inclut de nombreux modèles d'AOA comme celui de *Ho et Lee* (1986) et de *Hull et White* (1990). Dans cette section, nous allons rapidement aborder ce cadre de travail et voir deux classes de modèles type *HJM*.

HJM et taux forward instantanés L'approche proposée par *HJM* (1992) consiste à spécifier une dynamique de taux *forward* instantanés f_n :

$$df_n(t, T) = \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T) dW_n^{\mathbb{Q}}(t)$$

Les auteurs imposent que l'ensemble des taux *forward* instantanés observés initialement sur le marché soient égaux avec ceux donnés par le modèle.

Intérêt des taux forward instantanés *Brigo et Mercurio* (2006) notent que l'intérêt de travailler avec les taux *forward* instantanés est qu'une espérance conditionnelle est appliquée pour les déduire du taux court, ce qui enlève des degrés de liberté et ajoute des contraintes d'AOA. En effet, pour un modèle mono-factoriel :

$$f_n(t, T) = - \frac{\partial \ln \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \right]}{\partial T}$$

Une des conséquences est que **dès lors que la fonction de volatilité du taux *forward* instantané est déterminée, alors le modèle est totalement spécifié.** Ceci peut être vu par le fait que le taux court, sous la probabilité risque neutre, est fonction des taux *forward* instantanés initiaux et de la fonction de volatilité :

$$r_n(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma_n(u, t) \int_u^t \sigma_n(u, s) ds du + \int_0^t \sigma_n(u, t) dW_n^{\mathbb{Q}}(u)$$

Le cadre de travail *HJM* inclut possiblement tout modèle d'arbitrage puisqu'il n'impose que des contraintes d'AOA et non de modélisation.

Le grand intérêt du cadre de travail de *HJM* est de permettre de spécifier généralement les modèles d'AOA par la donnée d'une fonction de volatilité. Cependant, il est rare de trouver des modèles spécifiant directement la dynamique du taux *forward instantané*, on préfère généralement raisonner en terme de taux court ou de taux *forward*. En effet, les taux *forward* instantanés ne sont pas directement observables sur les marchés, ce qui en fait des variables possiblement erratiques et ayant une interprétation limitée.

En voyant les modèles d'AOA comme des spécifications particulières de modèles *HJM*, on peut établir deux grandes catégories : les modèles markoviens et les modèles de marché.

Modèles markoviens

On peut montrer que si la fonction de volatilité du taux *forward* s'écrit :

$$\sigma_n(t, T) = \sum_{i=1}^d f_i(t) \times g_i(T)$$

alors le taux court est un processus markovien. L'avantage d'avoir un taux court markovien est qu'il est possible d'utiliser des arbres recombinants pour des projections en temps discret, ce qui facilite les techniques numériques de calibration. Lorsque le taux court n'est pas markovien, la génération d'arbres est beaucoup plus complexe puisque le nombre de nœuds augmente exponentiellement.

Ces modèles considèrent une forme particulière de fonction de volatilité des taux *forward* instantanés. Par exemple :

- $\sigma_n(t, T) = \sigma_n$ pour le modèle de *Ho et Lee* (1986). La volatilité du taux *forward* instantané est constante.
- $\sigma_n(t, T) = \sigma_n e^{-a_n(T-t)}$ pour le modèle de *Hull et White* (1990). La volatilité du taux *forward* instantané est une fonction déterministe de sa maturité résiduelle.

Ces modèles markoviens sont populaires et généralement spécifiés en terme de taux court. Nous allons voir dans la suite la deuxième grande classe de modèles dérivés de l'approche *HJM*, qui spécifient des dynamiques de taux *forward* du marché afin de faciliter la procédure de calibration.

Modèles de Marché

Les modèles de marché sont parmi les plus utilisés à des fins de valorisation. Leur intérêt est de s'être moins intéressés à la modélisation des variables économiques sous-jacentes qu'à la possibilité de donner du sens à des formules populaires sur les marchés.

Les deux modèles de marché les plus connus sont le *lognormal forward-LIBOR model* (**LFM**, ou encore **BGM** pour *Brace-Garatek et Musiela* (1997)) et le *lognormal forward-swap model* (**LSM**). Ils présentent les particularités suivantes :

- Le modèle *LFM* permet de valoriser des *caps* sur *Euribor* avec la formule de *Black* pour les *caps* ;
- Le modèle *LSM* permet de valoriser des *swaptions* sur *Euribor* avec la formule de *Black* pour les *swaptions*.

Il faut comprendre que, tout comme les obligations sont principalement cotées en rendement actuariel et non en prix, les produits dérivés sont généralement cotés par l'intermédiaire de grandeurs permettant de retrouver le prix et facilitant des comparaisons entre différentes maturités et différents prix d'exercice.

Les *caps* et les *swaptions* sont généralement cotés en volatilité *implicite* donnée par un modèle de référence, celui de *Black*, par analogie avec les dérivés d'actions. Cependant, avant l'apparition des modèles de marché, il n'existait pas de modèle de taux capable de donner du sens à cette formule. Le fait de pouvoir calibrer les modèles en utilisant directement ces volatilités cotées permet de considérablement accélérer la procédure d'estimation et rend ces modèles populaires.

Modèle LFM La dynamique du taux *forward* F_n dans un modèle de *LFM* est un processus avec d sources d'aléa, correspondant aux $d + 1$ maturités possibles sur le marché :

$$\frac{dF_n(t, T_{i-1}, T_i)}{F_n(t, T_{i-1}, T_i)} = \mu_n^i(t) + \sigma_n^i(t) dW_n^{\mathbb{Q}}(t)$$

Les auteurs imposent par la suite des contraintes d'AOA telles que le fait que le taux *forward* $F_n(t, T_{i-1}, T_i)$ soit martingale sous la probabilité associée au ZC d'échéance T_i .

Limites Parmi les limites de ces modèles, on peut relever :

- Les modèles *LSM* et *LFM* ne sont pas compatibles entre eux. Autrement dit, il n'est pas possible de justifier, par l'utilisation d'un unique modèle, l'utilisation de la formule de *Black* pour *caps* et la formule de *Black* pour les *swaptions*.
- Le nombre de facteurs de ces modèles est souvent trop conséquent pour envisager des projections long terme.

Enfin, on peut retenir que ces modèles sont surtout utiles à la valorisation précise de certains produits dérivés. Rien ne garantit dans ces dynamiques des contraintes telles que le retour à la moyenne, utile dans le cadre d'une analyse long terme. À ce titre, nous les excluons de notre étude.

Conclusion

Le tableau 3.1 synthétise les comparaisons effectuées précédemment.

	Type	Facteurs	Retour à la moyenne	Valorisation dérivés
Vasicek	Équilibre	1	Oui	Non
CIR	Équilibre	1	Oui	Non
Brennan et Schwartz	Équilibre	2	Oui	Non
Ho et Lee	AOA	1	Non	Peu précis
Hull et White	AOA	1	Oui	Précis
LFM	AOA	d	Non	Exacte

TABLE 3.1 – Classification des modèles de taux selon différents critères. À notre sens, les modèles permettant la valorisation de dérivés sont ceux autorisant *a minima* la prise en compte de la courbe de taux initiale.

Si l'objectif premier est de valoriser des passifs d'assurance en valeur de marché, alors **les modèles d'AOA semblent plus appropriés**. En effet, même si ces derniers ne sont pas toujours stables, le référentiel Solvabilité 2 implique de valoriser ces flux de la même façon que des produits négociables du marché.

Parmi l'ensemble des modèles d'AOA de la littérature, notre attention se porte sur le modèle de *Hull et White* à un facteur. Comme le souligne *Planchet* (2009), c'est le modèle *minimal* de taux utilisable dans Solvabilité 2. De plus, grâce à sa propriété de retour à la moyenne, il est capable de valoriser des produits dérivés de long terme, loin des maturités observées, ce qui est utile pour notre utilisation.

Chapitre 4

Introduction à l'inflation

Cette partie est partiellement inspirée du rapport du *Comité de Normalisation Obligatoire "Inflation-Linked Bonds"* (2011) qui fournit un état exhaustif des conventions de marché pour ces produits.

4.1 Notions

Inflation et Indice des Prix à la Consommation L'inflation correspond à l'augmentation généralisée des prix au sein d'une économie. Ce phénomène est persistant et implique une diminution du pouvoir d'achat avec une somme constante dans le temps. L'augmentation des prix est différente pour chacun ; en fonction des habitudes de consommation, un individu ne vivra pas la même augmentation des prix qu'un céréalier par exemple. Une mesure de l'inflation souvent utilisée est la variation annuelle de l'Indice des Prix à la Consommation (IPC). L'IPC est un indicateur publié mensuellement par l'INSEE en France et Eurostat en Europe. Ces indices donnent l'évolution de la valeur d'un panier de biens représentatif de la consommation du pays.

En 1996, le rapport Boskin demandé par le Sénat des Etats-Unis estimait que l'inflation mesurée par l'IPC américain surestimait l'inflation « réelle » de 1,10 %. Cette surévaluation s'expliquait par le fait que le panier de biens n'était pas souvent réévalué et n'incluait donc pas les nouveaux produits ou les améliorations de qualité qui augmentent le pouvoir d'achat des consommateurs.

En Europe, le panier de biens est actuellement revu chaque année, ce qui permet à l'indicateur de ne pas être biaisé. Depuis l'an 2000, l'INSEE publie un indicateur sur Internet permettant aux particuliers de déterminer leur propre indice des prix reflétant leur propre consommation et évaluer ainsi « leur inflation ».

Formalisation Si l'on note $I(t)$ la valeur de l'IPC prévalant à une date t donnée, il y a plusieurs grandeurs qui peuvent être appelées « inflation ». On distingue :

- **L'inflation glissante annuelle**, $R_q(t)$. Elle peut être vue comme le taux de capitalisation effectif¹ de l'IPC en composition annuelle, soit :

$$(1 + R_q(t)) = \frac{I(t)}{I(t-1)} \Leftrightarrow R_q(t) = \frac{I(t)}{I(t-1)} - 1$$

Lorsque l'on parle d'inflation, c'est le plus souvent à cette grandeur qu'il est fait référence.

- **Le taux d'inflation effectif** en capitalisation continue $y_q(t, T)$ entre t et T . A l'instar du lien entre le prix du zéro-coupon et le rendement en composition continue, on peut le définir comme :

$$y_q(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right]$$

Cette quantité permet de définir des rendements effectifs intra-annuels. Comme nous le verrons plus loin, la série de ces rendements présente généralement une forte saisonnalité.

- **Le taux court terme** de capitalisation de l'IPC, q_t :

$$q_t = \lim_{T \rightarrow t} y_q(t, T)$$

En pratique, cette quantité est souvent approximée par les variations mensuelles d'IPC.

1. On notera la distinction avec les taux d'emprunt qui sont des taux de capitalisation espérés, anticipés ou encore dits *ex ante*.

On peut relier l'inflation glissante annuelle $R_q(t)$, le rendement d'inflation en composition continue $y_q(t, t + 1)$ et le taux court d'inflation :

$$(R_q(t) + 1)^{T-t} = e^{y_q(t, T)/(T-t)} = e^{\int_{u=t}^T q_u du}$$

Notons que tous les taux précédemment définis sont des **variables aléatoires vues de t** , contrairement aux taux anticipés nominaux et réels.

Ces définitions sont importantes puisqu'elles permettent de définir en temps continu un processus qui n'est observé qu'à des dates mensuelles en pratique. On s'en servira notamment pour la calibration du modèle d'inflation.

Interdiction contractuelle d'indexation sur l'inflation Les articles *L112-1* et *L112-2* du code monétaire et financier français² interdisent l'indexation automatique sur l'inflation. Cette loi visait originellement à protéger les locataires d'une augmentation des loyers en fonction de l'inflation. Il existe des dérogations à ce principes, notamment :

- L'article *L112-3* prévoit la possibilité d'indexation des livrets A, de développement durable et des comptes épargne-logement ;
- L'article *L112-3-1* prévoit la possibilité d'indexation des titres de créances et contrats financiers.

On retiendra, de plus, que le code des assurances interdit l'indexation des contrats d'assurance sur des indices extérieurs à l'assureur, et en particulier l'inflation. Cependant, rien n'interdit aux assureurs de se fixer comme objectif (non contractuel) de servir une revalorisation au niveau de l'inflation.

Importance pour un assureur Pour un assureur ayant des engagements dans des branches à développement long tel que les assureurs en vie, il est important de prendre en compte l'inflation parmi les facteurs de risque. Par exemple :

- Dans le cadre de prestations en nature, l'engagement de l'assureur est fortement impacté par la hausse des prix générale ;
- Dans le cadre d'engagements de rentes prévoyant une revalorisation avec pour objectif l'inflation, l'utilisation de produits indexés sur l'inflation est important pour que la rentabilité de l'actif corresponde avec les objectifs du passif.

Dans tout les cas et comme nous l'avions mentionné précédemment, les produits indexés sur l'augmentation de l'IPC ne reflètent pas toujours exactement l'augmentation de l'inflation. Afin de diversifier cet indice, en 1983 le Trésor Italien a émis de la dette indexée sur le taux de croissance du pays. Cependant, cet indice publié annuellement ne rencontra pas les faveurs des investisseurs. L'IPC présente le mérite d'être une mesure unifiée qui permet d'obtenir un bon *proxy* de l'inflation perçue.

4.2 Différentes références d'inflation

Les références d'inflation les plus utilisés sont évaluées hors tabac, à cause de son augmentation régulière par taxation des États qui pourraient ainsi contrôler l'inflation. Les deux principales références d'IPC que l'on va utiliser sont l'IPC français hors tabac publié par l'INSEE et l'IPCH hors tabac, indice Européen publié par Eurostat.

IPC et IPCH Le graphe 4.1 représente l'évolution des inflations française et européenne au cours du temps. On peut voir que l'inflation française est en-dessous de l'inflation européenne. Cette différence est liée au fait que la France fait partie des pays « *du nord* » de l'Europe, ayant une croissance et une inflation plus faibles que les pays « *du sud* » de l'Europe. Par conséquent, l'inflation européenne est historiquement au-dessus de l'inflation française.

Cet écart historique permet théoriquement de faire des arbitrages pour les investisseurs français payant l'inflation française et recevant l'inflation européenne. Cependant, il faut se méfier d'un éventuel ralentissement plus prononcé des pays « *du sud* » de l'UE qui entrainerait un croisement des deux indices.

2. www.legifrance.gouv.fr

Inflation Française et Européenne

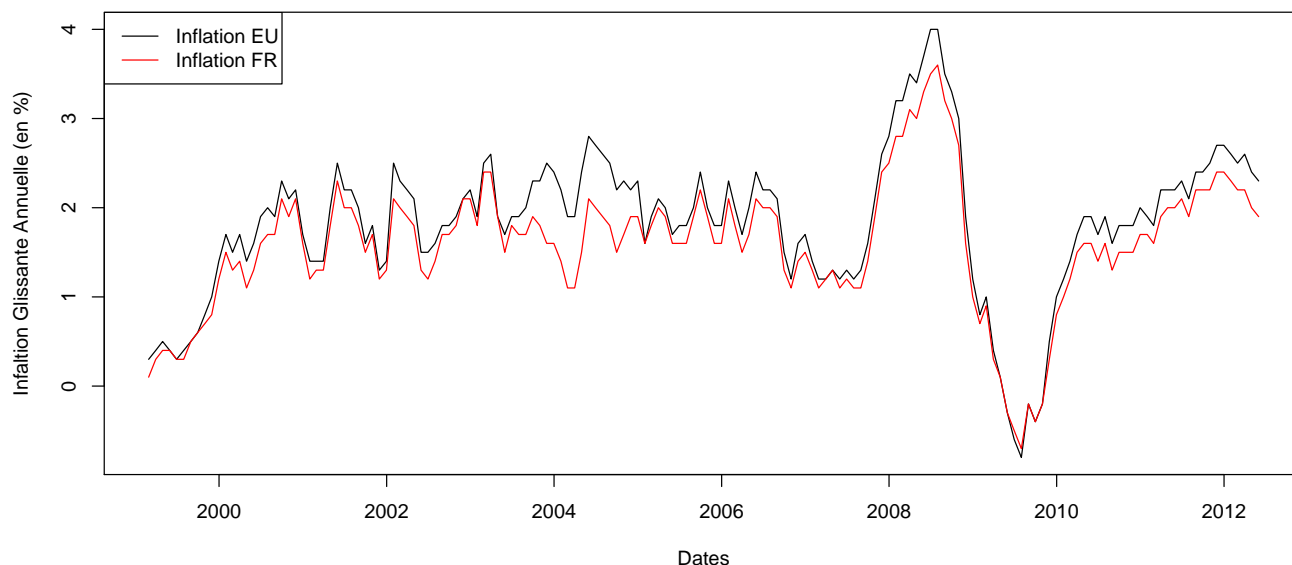


FIGURE 4.1 – Données mensuelles des inflations annuelles glissantes française et européenne du 01/01/1999 au 01/06/2012. Leur corrélation vaut 0.978.

Saisonnalité de l'inflation Les variations mensuelles d'inflation française comme européenne présentent une forte saisonnalité. En effet, comme le montre le graphique 4.2, les variations mensuelles d'IPC ont tendance à être différentes d'un mois sur l'autre, ce qui signifie qu'il existe un comportement intra-annuel propre à la série étudiée. Il s'explique entre autres par la présence de soldes dans l'année où les prix baissent significativement, ce qui se traduit par une baisse d'inflation mensuelle en Janvier et Juillet. Il existe des séries désaisonnalisées d'inflation publiées par l'INSEE afin de lisser cet effet.

Cette saisonnalité est importante en pratique pour les salles de marché, puisque sur des horizons de court terme il est important de retranscrire la saisonnalité de l'IPC à des fins de valorisation. Dans notre étude, nous nous plaçons à un horizon de moyen/long terme où ces variations n'ont que peu d'impact. On ignorera donc cette saisonnalité mensuelle, quitte à travailler avec des séries désaisonnalisées.

Référence journalière d'IPC Afin d'être utilisée pour l'indexation de produits financiers, la référence mensuelle n'est pas suffisante. Le besoin de valorisation quotidienne de l'IPC a obligé les différents émetteurs de dettes indexées à proposer un indicateur quotidien³. Dans le cas des émetteurs de dette souveraine indexée, la référence quotidienne $I(t)$ est définie comme :

$$I(t) = \frac{d-1}{ndm} (I_{m-2} - I_{m-3}) + I_{m-3}$$

avec :

- d le jour calendaire dans le mois m ;
- ndm le nombre de jours dans le mois m .

On voit la présence d'un retard de 2 mois permettant de définir une interpolation linéaire de l'IPC. Ceci signifie que par convention, sur les marchés, les flux indexés inflation sont connus deux mois à l'avance. Ceci pose un certain problème en pratique puisque tous les taux extraits d'instruments indexés inflation contiennent ce retard de deux mois et ne reflètent donc pas le taux applicable connaissant toute l'information présente. Cet effet est appelé le *carry effect* et peut s'avérer significatif pour des titres s'approchant de leur maturité. On pourra par exemple se référer à *D'Amico, Kim et Wei (2007)* pour plus d'informations sur cet effet.

3. L'inflation interpolée est disponible sur le site de l'Agence France Trésor.

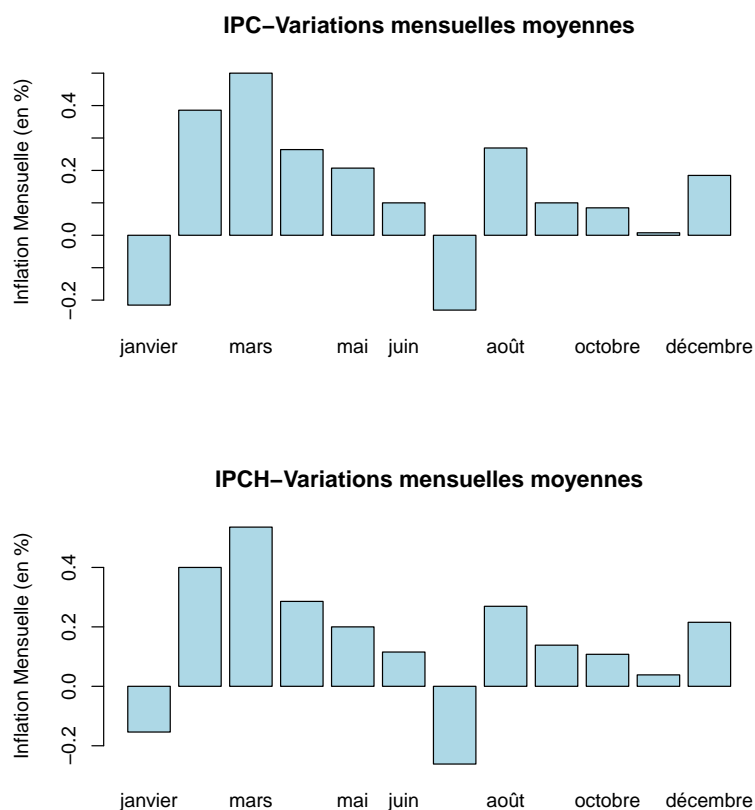


FIGURE 4.2 – Variations mensuelles moyennes d’IPC et IPCH du 01/01/1999 au 01/06/2012.

On peut dès à présent noter qu’il ne faut pas utiliser les données interpolées lors de l’estimation des paramètres des modèles. En effet, cela revient à sous-estimer la volatilité de l’IPC et à commettre une grande erreur de projection.

4.3 Obligations indexées sur l’inflation

Sur le marché obligataire européen, sont principalement négociées **les obligations indexées** sur l’inflation. Depuis 2010, tous les pays du G7 émettent de la dette indexée inflation. Cependant, le marché est relativement récent. Le Royaume-Uni fut le premier grand pays avec une inflation maîtrisée à émettre de la dette indexée en 1981⁴.

Motivations Si pour les Etats émergents, le recours à la dette indexée est nécessaire pour se financer, on peut se demander quelles sont les raisons d’un Etat à inflation maîtrisée d’émettre de la dette indexée.

En effet, une émission nominale classique en euros courants bénéficie à l’Etat en cas de hausse de l’inflation puisque ce dernier reçoit des impôts et différentes taxes indexées sur les revenus et les prix des biens, et donc indirectement sur l’inflation. Ainsi, les revenus de l’Etat augmentent alors que les échéances, elles, sont en euros courants, ce qui lui permet de profiter d’une hausse de l’inflation.

De ce fait, on peut voir l’émission de dette indexée comme une volonté d’un Etat de contrôler son inflation et de rendre peu crédibles des politiques hyper-inflationnistes permettant « d’effacer la dette ». Comme le souligne le rapport de travail de la BCE de *Garcia et Werner* (2010), les Etats profiteraient de cette crédibilité pour

4. En réalité, il existe des preuves d’une émission indexée inflation par l’Etat du Massachusetts en 1780, mais cette dernière fut marginale et destinée à financer l’effort de guerre.

emprunter sur les marchés nominaux à des taux plus faibles, les investisseurs ayant une meilleure appréciation des anticipations d'inflation. Ainsi, la mesure du risque d'inflation est déterminante pour une politique monétaire.

Structure d'indexation Il existe plusieurs modes de calcul des dettes indexées. La structure classique d'indexation de la dette est celle retenue par la dette indexée canadienne en 1991. La structure de cette indexation est devenue une référence dans le monde. Les deux instruments de dette indexée souveraine française sont :

- les OATi, 6 lignes d'émission actuellement, indexées sur l'IPC FR;
- les OAT€i, 8 lignes d'émission actuellement, indexées sur l'IPCH.

Mode d'indexation	Coupons et nominal indexés
Indice de Référence	IPC - INSEE pour OATI, l'IPCH - Eurostat pour OAT€I
Coupon payé	Coupon = Nominal × Taux de coupon × Inflation
Remboursement	Remboursement = Nominal × Inflation
Remboursement au pair	Déflation effective depuis émission → remboursement au pair

TABLE 4.1 – Mode d'indexation pour les OATi et OAT€i.

Valorisation d'obligations indexées Le prix pied-de-coupon en t d'une obligation indexée de maturité T ayant un taux de coupon c et nominal N est :

$$\mathcal{B}_r(t, T) = \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor} cN \frac{I(t)}{I_{\text{émission}}} P_r(t, k + \theta) + N \frac{I(t)}{I_{\text{émission}}} P_r(t, T) - (1 - \theta) \frac{I(t)}{I_{\text{émission}}} cN \quad (4.1)$$

avec $P_r(t, T)$ le prix d'un zéro-coupon réel que nous définirons plus loin. Sous cette forme, le nominal prend de la valeur avec le temps si l'IPC de référence augmente. Ainsi, par convention de marché, on cote le prix de l'obligation indexée hors coefficient d'indexation, soit :

$$\mathcal{B}_r(t, T) = cN \sum_{k=0}^{\lfloor T \rfloor} P_r(t, k + \theta) + NP_r(t, T) - c(1 - \theta)N$$

Avec cette convention, la valorisation d'une obligation indexée est la même qu'une obligation nominale en substituant le taux réel au taux nominal. Nous verrons plus loin que ce mode de valorisation revient à évaluer l'obligation dans une monnaie étrangère, en euros constants.

Garantie de remboursement au pair L'évaluation précédente ne prend pas en compte la garantie de remboursement au pair. En fait, une partie du remboursement du nominal peut être vue comme une option d'achat sur inflation. En effet, le remboursement peut s'écrire :

$$\max \left[N; N \frac{I(T)}{I_{em}} \right] = \frac{N}{I_{em}} [I(T) - I_{em}]_+ + N$$

On pourrait voir cela comme un *floor* sur inflation de *strike* I_{em} et de maturité T . Cependant, comme nous le verrons plus loin, ce type d'actif est considéré à la monnaie avec une inflation proche de 2 %. Aussi, on valorise ici un produit dérivé (très) en dehors de la monnaie.

Pour résumer, le remboursement du nominal se décompose en deux termes :

- Un remboursement certain de N ;
- Un remboursement optionnel indexé sur l'inflation.

Cependant, les baisses d'IPC de long terme pouvant entraîner une activation de cette option n'ayant jamais été constatées, on néglige bien souvent son prix. Elle est avant tout un atout commercial pour les investisseurs qui ne veulent pas risquer de voir leur investissement non remboursé.

4.4 Produits dérivés d'inflation

Le but de cette section est de faire un tour d'horizon des produits dérivés d'inflation en zone euro. Le graphe 4.3 résume les principaux produits d'échange d'inflation disponibles en Europe.

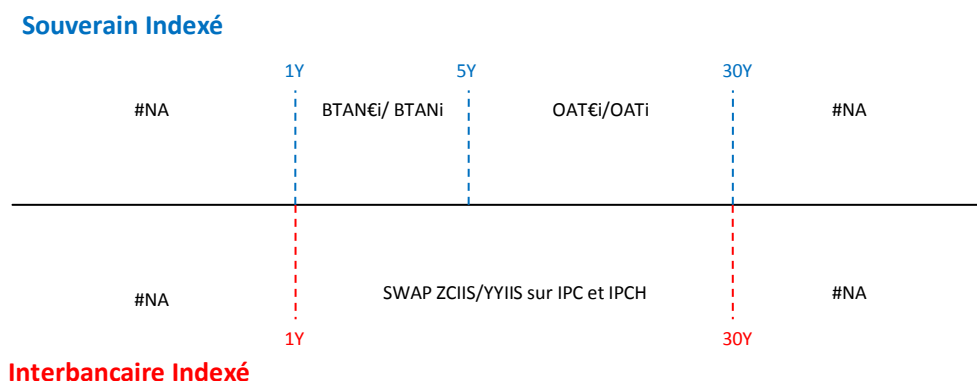


FIGURE 4.3 – Représentation du marché indexé inflation. Le nombre de maturités disponibles est plus réduit que pour le marché nominal. D’un point de vue modélisation, cela nous empêche d’utiliser tous les résultats sur les taux courts.

Swap ZC inflation – ZCIIS Le *Swap* zéro-coupon⁵ sur inflation de maturité T et de nominal N est un *swap* où la jambe variable correspond au paiement de N unités d’inflation effective constatée sur la période $[0, T]$. La jambe fixe correspond au paiement d’un taux K par unité de nominal en T ; c’est ce taux qui est coté sur le marché. Le *payoff* en T d’un *ZCIIS* payeur de jambe variable et receveur de jambe fixe de nominal N , créé en t et de maturité T , est :

$$ZCIIS(t, T) = N \left[\frac{I(T)}{I(t)} - 1 \right] - N [(1 + K)^{T-t} - 1]$$

La valorisation de ce *swap* ne nécessite pas de modèle et permet l’extraction directe des taux réels, comme nous le verrons plus loin. Un assureur peut contracter ce type de contrat afin de se protéger totalement contre une hausse de l’inflation sur une période donnée. Cependant, bien souvent on lui préfère la version à versements annuels.

Swap Year on Year inflation – YYIIS Ce *Swap* plus liquide échange à fréquence prédéterminée un taux K par unité de nominal avec l’inflation glissante annuelle constatée par unité de nominal. Ce contrat protège totalement des variations de l’inflation sur une période entière. Sa valorisation est cependant plus compliquée que celle d’un *ZCIIS* et dépend du modèle de taux considéré. Nous reviendrons sur sa valorisation dans la partie 2.

Cap Inflation – IIC/Floor Inflation – IIF Ces instruments sont également courants sur le marché des dérivés d’inflation. Ces instruments génèrent une série de flux, et chacun de ces flux peut être considéré comme un contrat à part entière. Nous en avons déjà vu un exemple à travers la garantie de remboursement au pair. Les *payoffs* de ces instruments créés en t pour une maturité en T pour un nominal N et un *strike* K sont :

$$IC(T) = \left[\frac{I(T)}{I(t)} - K \right]_+$$

$$IF(T) = \left[K - \frac{I(T)}{I(t)} \right]_+$$

Ces instruments permettent de se protéger contre une éventuelle hausse ou baisse d’inflation. Les *floors* sur inflation sont plus particulièrement utiles pour les assureurs voulant se prémunir d’une hausse d’inflation supérieure à un seuil déterminé qui les obligerait à payer des prestations trop élevées.

5. Aussi appelé *Zero coupon Inflation Indexed Swap*.

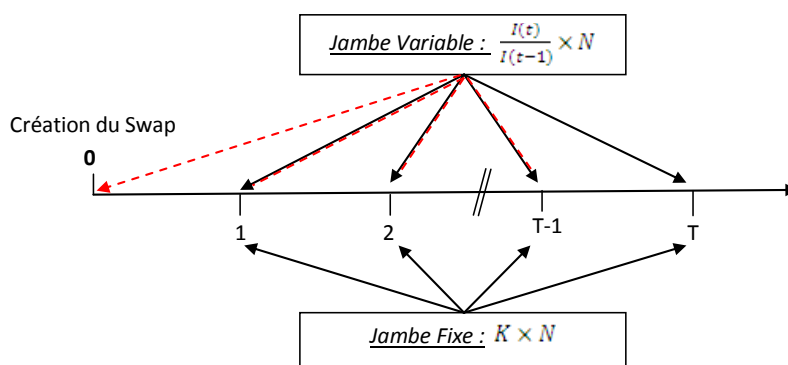


FIGURE 4.4 – Fonctionnement d’un YIIS. Les traits en pointillés désignent les dates de *fixing* de la référence d’IPC, les traits pleins les dates de paiement.

4.5 Marché de l’inflation

Les règles régissant les marchés d’inflation sont particulières et dépendent du pays de référence. Pour plus d’informations sur les différents marchés d’inflation, on pourra se référer à *Deacon, Derry et Mirfendereski* (2004). Pour le marché français plus spécifiquement, on pourra se référer au mémoire de *Bernay* (2011).

Le marché de l’inflation est moins développé que celui de la dette nominale. Cependant, avec l’essor de la France, l’Allemagne, la Grèce et l’Italie qui ont émis des obligations indexées sur l’inflation européenne, le marché européen d’inflation est le plus développé au monde. Le graphe 4.5 illustre ce point.

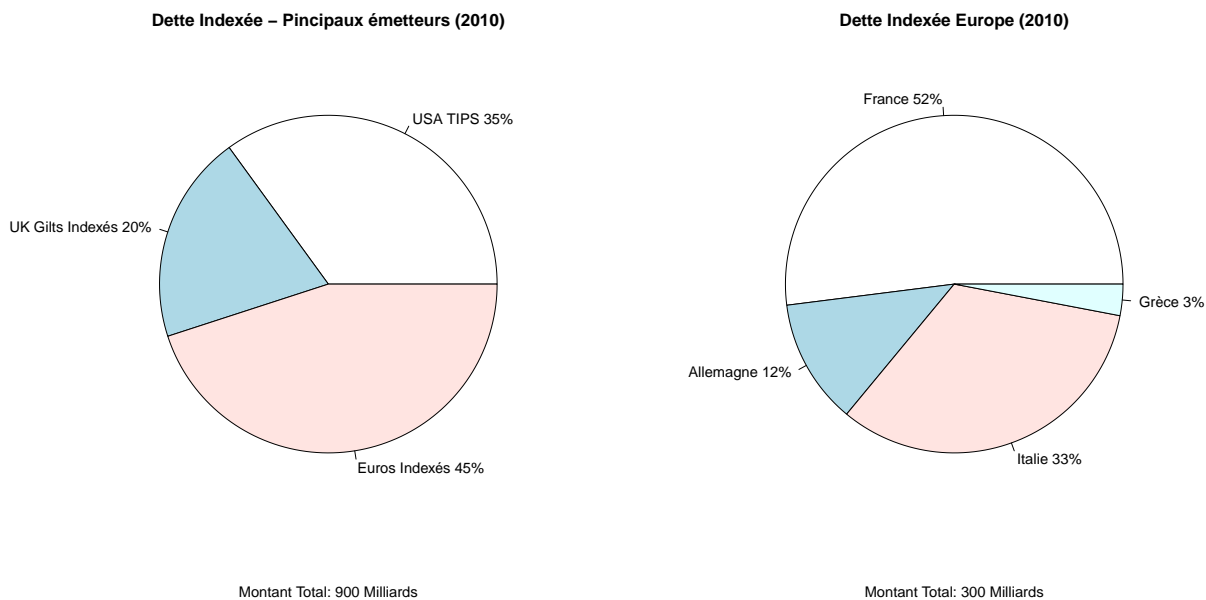


FIGURE 4.5 – Marché de la dette indexée mondiale. Le marché européen est le plus grand au monde. Source : *Comité de Normalisation Obligataire*.

Intervenants du marché inflation Le marché inflation réunit différents intervenants ayant des profils différents.

- **Acheteurs d’inflation.** Du côté des acheteurs d’inflation se trouvent toutes les entreprises subissant des pertes de recettes lorsque le taux d’inflation augmente. On trouve par exemple :

- ▷ Les compagnies d'assurance ayant des engagements liés à l'inflation telles que les assureurs dommages ou les assurances prévoyance ;
- ▷ Les investisseurs privés souhaitant sécuriser leur pouvoir d'achat.

• **Vendeurs d'inflation.** Du côté des vendeurs d'inflation, on trouve les entreprises subissant des pertes de résultat lorsque le taux d'inflation diminue. On trouve par exemple :

- ▷ Les entreprises de grande distribution dont les revenus sont directement liés au prix du panier moyen de consommation ;
- ▷ Les entreprises de service public dont les revenus sont liés à une taxation des revenus, et donc indirectement liés à l'inflation ;
- ▷ Les entreprises immobilières dont les loyers sont liés à l'inflation.

Il est souvent reproché à ce marché son asymétrie : il y a plus d'acheteurs d'inflation que de vendeurs.

Chapitre 5

Inflation et taux

Dans cette partie, on présente les relations reliant les trois variables d'intérêt de notre approche : taux nominaux, taux réels et inflation. On propose de voir quel est le problème causé par la valorisation de produits indexés sur l'inflation mesurée par l'IPC, et quels ont été les modèles proposés¹ par la littérature.

Couvrable et négociable Avant tout, il faut distinguer les variables économiques *couvrables* des variables *négociables*. Du point de vue de la théorie financière, les deux notions diffèrent et ne permettent pas d'arriver aux mêmes conclusions :

- **Couvrable.** Une variable aléatoire est dite couvrable s'il existe des actifs du marché permettant de se protéger contre son évolution. Par exemple, un taux d'intérêt est une variable aléatoire couvrable, il est possible de trouver des instruments du marché tels que les *caps* et *floors* permettant de se protéger contre son évolution. Ainsi, une variable couvrable peut être considérée comme le sous-jacent d'autres actifs négociables.
- **Négociable.** Une variable aléatoire est dite négociable si elle est directement achetée ou vendue sur le marché. Une variable négociable peut également être le sous-jacent d'autres actifs négociables, comme une action est le sous-jacent d'une option d'achat. Du point de vue de la théorie financière, cela implique que son prix actualisé est martingale sous la probabilité risque neutre.

La présentation de l'ensemble des produits indexés et dérivés d'inflation au chapitre précédent montre que l'inflation est typiquement une variable couvrable mais non négociable. Ainsi, il faut quelques hypothèses supplémentaires pour donner un prix à un flux futur d'inflation, et ainsi valoriser différents produits indexés.

5.1 ZC réel – Valeur présente d'un flux futur d'IPC

Le problème posé par la valorisation de produits indexés sur l'inflation tels que les obligations indexées inflation est de donner une valeur présente à l'inflation effective sur une période. Nous allons voir dans cette section comment déduire la valeur de marché de ce flux qui correspond au zéro-coupon réel.

Prenons l'exemple général de la valeur en t d'un flux F_T en T sur un nominal unitaire d'une obligation indexée sur l'inflation. Ce flux « élémentaire » du marché indexé est une variable aléatoire vue de t :

$$F_T = \frac{I(T)}{I(t)}$$

Afin de donner une valeur de marché V_t en t à ce flux, on peut utiliser les résultats généraux de la théorie financière :

$$V_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} e^{-\int_t^T r_n(u) du} \right] \quad (5.1)$$

1. Notons que la présentation faite ne suit pas le fil chronologique de l'évolution scientifique.

Afin d'aller plus loin sans faire d'hypothèses, il faut recourir à la notion de *déflateur*. Nous définirons en détail au chapitre suivant cette quantité. Pour l'instant, on peut retenir que le déflateur nominal est la variable aléatoire (vue de t) $\Pi_n(t, T)$ telle que, pour toute variable aléatoire X :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} X \right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [\Pi_n(t, T) X] \text{ Et, par exemple } P_n(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [\Pi_n(t, T)]$$

On peut alors déduire de l'équation 5.1 que :

$$V_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \Pi_n(t, T) \right]$$

En utilisant le fait que pour deux variables aléatoires X et Y :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [XY] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [X] \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [Y] + \text{Cov}_t[XY]$$

on en déduit que :

$$V_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [\Pi_n(t, T)] \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right] + \text{Cov}_t \left[\Pi_n(t, T), \frac{I(T)}{I(t)} \right]$$

Finalement, en appelant ZC réel de maturité T la valeur actuelle d'un flux en T versant l'inflation effective de la période $[t, T]$, on peut écrire :

$$P_r(t, T) = P_n(t, T) \times \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right] \times \left[1 + \frac{\text{Cov}_t \left[\Pi_n(t, T), \frac{I(T)}{I(t)} \right]}{P_n(t, T) \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right]} \right] \quad (5.2)$$

Il est alors courant de définir des mesures de l'inflation anticipée :

▷ L'anticipation d'inflation en capitalisation annuelle $R_q^e(t, T)$, vue en t , pour la période $[t, T]$:

$$(1 + R_q^e(t, T))^{T-t} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \frac{I(T)}{I(t)}$$

▷ Le taux d'inflation anticipé $y_q^e(t, T)$ en composition continue pour la période $[t, T]$:

$$y_q^e(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right] \Leftrightarrow e^{(T-t)y_q^e(t, T)} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[e^{(T-t)y_q(t, T)} \right]$$

En négligeant les termes de convexité dans la relation de *Jensen*, on peut écrire :

$$y_q^e(t, T) \approx \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [y_q(t, T)]$$

Dans le cadre d'une inflation couvrable, on peut, sans plus d'hypothèses, écrire la relation 5.2. Cependant, sous cette forme, il n'est pas évident de valoriser un ZC réel. Tout l'apport des théories financières depuis la relation de *Fisher* jusqu'à *l'analogie de la monnaie étrangère* est de proposer un cadre de travail permettant de valoriser le ZC réel.

La littérature permettant la prise en compte du lien explicite entre taux nominaux, réels et inflation est vaste. Comme le mentionnent *Ang, Bekaert et Wei* (2008), le nombre de travaux est important mais ils contiennent peu de faits stylisés communément admis et de modèles de référence. Dans la suite, nous allons proposer un tour d'horizon des trois grandes modélisations que propose la littérature scientifique, à savoir :

- La relation de *Fisher* classique ;
- La relation de *Fisher* avec prime de risque d'inflation ;
- L'analogie de la monnaie étrangère.

5.2 Relation de Fisher

La relation de Fisher est un modèle économique célèbre qui explique la variation des taux nominaux par deux facteurs : l'anticipation d'inflation et les taux réels. Bien qu'ayant été intuitée par de nombreux économistes

avant lui², la relation de Fisher est formalisée par l'article de Irving Fisher « *Appreciation and Interest* » en 1896. Elle stipule que dans un marché parfaitement liquide et sans risque de défaut, on peut écrire :

$$(1 + R_n(t, T))^{T-t} = (1 + R_r(t, T))^{T-t} \times (1 + R_q^e(t, T))^{T-t} \quad (5.3)$$

Reformulations On peut écrire la relation de Fisher avec les grandeurs d'anticipation d'inflation définies précédemment :

- En terme de rendement de zéro-coupon. En se rappelant du lien entre rendements en composition continue et taux en composition annuelle :

$$y_n(t, T) = y_r(t, T) + y_q^e(t, T) \quad (5.4)$$

Ainsi, l'égalité de *Fisher* peut être vue comme une relation linéaire entre rendement attendu de l'inflation, rendement nominal et rendement réel.

- En terme de taux court. La relation de *Fisher* **implique**³, en prenant la limite de l'équation 5.4 lorsque $T \rightarrow t$:

$$r_n(t) = r_r(t) + q_t$$

Pour cela, il suffit de remarquer que le taux court d'inflation correspond à la limite, lorsque l'horizon tend vers 0, de l'anticipation d'inflation.

- En terme de prix de ZC. Comme *Guibert* (2010), nous appellerons *zéro-coupon inflation* $P_i^e(t, T)$ la quantité telle que :

$$P_r(t, T) = P_i^e(t, T) \times P_n(t, T)$$

avec, dans le cadre de la relation de *Fisher* :

$$P_i^e(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right]$$

Interprétation Ce modèle stipule que les agents acceptant de prêter en *euros courants* demandent **un rendement qui se décompose linéairement en une rémunération en euros constants et leur anticipation d'inflation**. En effet, pour des prêts de long terme en particulier, l'important pour le prêteur est que les intérêts permettent d'acheter une certaine quantité de biens, d'où l'importance de l'inflation anticipée dans l'évaluation des taux nominaux. On comprend également qu'un État ayant une grande crédibilité sur sa politique monétaire tend à diminuer les anticipations d'inflation, et ainsi le niveau des taux nominaux.

Lien avec la valorisation générale La relation de *Fisher* est un cas particulier de la relation 5.2 dans le cas où :

$$\text{Cov}_t \left[\Pi_n(t, T), \frac{I(T)}{I(t)} \right] = 0$$

Ceci correspond au cas limite où l'inflation n'est pas supposée couvrable par des instruments financiers du marché. L'inflation effective sur la période est alors indépendante du déflateur. Dans ce modèle, les prix des ZC réels sont directement déductibles des taux nominaux et des anticipations d'inflation.

5.3 Modèle de Fisher avec prime de risque d'inflation

Tant que le marché des indexés inflation était sous-développé, cette équation d'équilibre entre les variables économiques était considérée comme plausible puisque l'inflation n'était pas couvrable. Cependant, avec le développement du marché des indexés, l'inflation est devenue une donnée de marché contre laquelle il est possible de se protéger. La possibilité de négocier des produits liés à l'inflation a obligé la littérature scientifique à proposer d'autres alternatives à la relation de *Fisher*.

2. On pourra notamment citer Henry Thornton en 1811 ou encore Jacob de Haas en 1889 qui s'approchèrent de la formulation sans pour autant l'écrire en termes aussi formels. L'histoire de la découverte de cette équation est synthétisée dans l'article « *The Early History of the Real/Nominal Interest Rate Relationship* » de Thomas M. Humphrey (1983).

3. La réciproque n'est pas vraie.

Afin de pallier l'inexactitude de la formule de *Fisher*, on peut en écrire une formulation qui suppose qu'il existe également **une prime pour risque d'inflation** :

$$\begin{aligned} (1 + R_n(t, T))^{T-t} &= (1 + R_r(t, T))^{T-t} \times (1 + R_q^e(t, T))^{T-t} \times (1 + \text{IP}(t, T))^{T-t} \\ \Leftrightarrow y_n(t, T) &= y_r(t, T) + y_q^e(t, T) + \text{ip}(t, T) \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec :

- $\text{IP}(t, T)$ la prime de risque d'inflation exigée par les agents en composition annuelle ;
- $\text{ip}(t, T)$ le taux de prime de risque pour l'inflation pour la période $[t, T]$ en composition continue :

$$\text{ip}(t, T) = \ln(1 + \text{IP}(t, T))$$

Interprétation Cette équation permet de définir le taux qu'exigent les agents lorsqu'ils prêtent en euros courants. Comme pour la relation de *Fisher*, les agents demandent un taux de rémunération en euros constants, le taux réel composé par leur anticipation d'inflation. Cependant, comme le rappelle *Hibbert et al.* (2001), dès lors que l'on suppose que l'inflation est couvrable, **les agents demandent une prime supplémentaire pour accepter de ne pas investir dans des actifs protégés de l'inflation.**

Dans ce cadre, et par analogie avec les taux, l'inflation anticipée doit inclure une prime de risque demandée par les agents sur le marché. Ainsi, la dynamique de la variable aléatoire d'inflation est différente sous la probabilité historique et sous la probabilité risque neutre. Cependant, comme le rappellent *Chen, Liu et Cheng* (2005), la relation donnée par les taux courts reste la même :

$$r_n(t) = r_r(t) + q_t$$

L'absence de prime de risque d'inflation pour le court terme s'explique par le fait qu'il n'existe pas d'actifs indexés inflation négociables au court terme en suffisante liquidité pour exiger une prime pour risque d'inflation. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le marché des indexés inflation est orienté vers la protection long terme et les intervenants n'ont pratiquement pas d'intérêt à investir dans des produits protégeant de la variation d'inflation à court terme.

Lien avec la valorisation générale La relation 5.5 est strictement équivalente à la relation 5.2. Elle permet de donner une interprétation économique au terme de covariance :

$$\text{ip}(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \left[1 + \frac{\text{Cov}_t \left[\Pi_n(t, T), \frac{I(T)}{I(t)} \right]}{P_n(t, T) \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right]} \right]$$

Comme le rappelle *Allan Sall Tang Andersen* (2011), pour mieux comprendre cette relation, on peut se rappeler que dans le cadre de la théorie économique du *C-CAPM*, la prime de risque d'inflation peut être décrite comme une fonction de l'aversion au risque et de la covariance entre taux de consommation (déflateur nominal) et inflation :

$$\text{ip}(t, t + \Delta) \approx -\gamma \text{Cov}_t \left(\Pi_n(t, t + \Delta), \frac{I(t + \Delta)}{I(t)} \right)$$

Ce qui permet de comprendre que la relation 5.5 s'inscrit dans la continuité des théories économiques modernes.

L'équation 5.5 n'est pas toujours utilisée explicitement par les modèles d'inflation et de taux car il est difficile d'estimer la prime de risque d'inflation. Ainsi, afin de donner un lien cohérent aux trois variables **sans pour autant supposer la nullité de la prime pour risque d'inflation**, certains modèles ont utilisé l'analogie de la monnaie étrangère.

5.4 Analogie de la monnaie étrangère

Ce cadre de travail n'est pas repris dans tous les modèles de la littérature. Au prix de certaines hypothèses, il permet d'obtenir une relation d'AOA permettant de donner une autre interprétation au prix du ZC, en le ramenant dans le cadre « classique » des modèles de devises.

Analogie On définit la « monnaie réelle » (dite monnaie *étrangère*) comme étant une monnaie étrangère dont le taux de change qui permet de la convertir dans la « monnaie nominale » (dite monnaie *locale*) est l'IPC. Cette monnaie étrangère correspond aux **euros constants** et la monnaie locale aux **euros courants**. Dans cette optique, on peut définir :

- $P_n(t, T)$ le facteur d'actualisation en euros courants. En tant que tel, cet actif est négociable et donc soumis aux contraintes d'AOA.
- $I(t)$ le taux de change réel/nominal en t , c'est bien ce taux qui permet de passer d'euros constants à euros courants.
- $P_r(t, T)$ le facteur d'actualisation en euros constants qui est différent du taux d'actualisation en euros courants. On ne peut pas directement investir dans ce zéro-coupon à partir de la monnaie locale, il faut d'abord « payer » le taux de change puis « re-changer » le flux auquel il donne droit. On suppose également que cette monnaie étrangère possède son propre marché complet et donc une **probabilité risque neutre étrangère**. Ainsi, on peut caractériser le ZC réel de la même façon que le ZC nominal mais dans sa monnaie, en notant \mathbb{Q}^F la probabilité risque neutre étrangère :

$$P_r(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F} \left[e^{-\int_t^T r_r(u) du} \right]$$

Il est alors possible d'utiliser l'ensemble des modèles de taux abordés au chapitre 3 pour caractériser le processus de taux réel sous la probabilité étrangère.

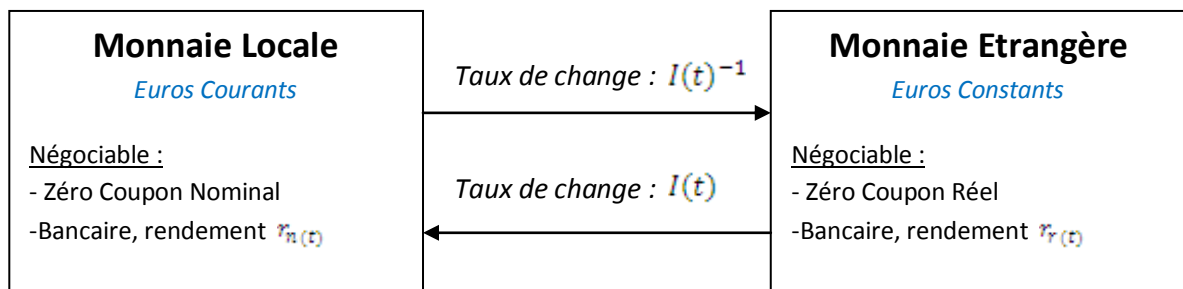


FIGURE 5.1 – L’analogie du taux de change est courante pour les modèles de valorisation d’indexés inflation.

Exemple du Chili⁴ Dans certains cas, l’existence de cette monnaie étrangère est concrète. Par exemple, au Chili, en plus de la devise officielle (le *peso*), il existe les *Unidad de Fomento* (**UF**), une unité monétaire liée à l’IPC local avec un *lag* d’un mois, et ainsi protégée de l’inflation. Les UF ont été introduites en 1967 et se sont répandues dans l’économie du pays comme dans ses marchés financiers. Typiquement, les prix des voitures et de l’immobilier sont fournis dans cette monnaie protégée de l’inflation. Comme le rappelle *Deacon et al.* (2004), cette indexation en *pesos constants* était faite à l’origine pour protéger les investisseurs de l’inflation galopante des années 60. Cependant, l’État chilien poursuit actuellement une désindexation de son économie afin de préserver la stabilité des prix. Cet exemple montre que l’analogie de la monnaie étrangère n’est pas anodine ; dans certains cas, les agents évaluent les prix en monnaie déflatée.

Cohérence avec valorisation générale On peut montrer avec des arguments d’AOA qu’avec les hypothèses précédentes, le ZC réel correspond bien à la valeur présente d’un flux futur d’inflation effective. Pour cela, on peut valoriser en t le flux d’IPC $I(T)$ versé en $T > t$:

- $I(T)$ unités de monnaie locale en T valent 1 unité de monnaie étrangère en T ;
- Une unité de monnaie étrangère en T vaut $P_r(t, T)$ unités de monnaie étrangère en t ;
- $P_r(t, T)$ unités de monnaie étrangère en t valent $I(t)P_r(t, T)$ unités de monnaie locale en t .

Le schéma 5.2 illustre le raisonnement.

4. Merci à P. Puymèges pour cette information. Pour plus de renseignements sur l’inflation au Chili, on pourra consulter *Deacon, Derry et Mifendereski* (2004).

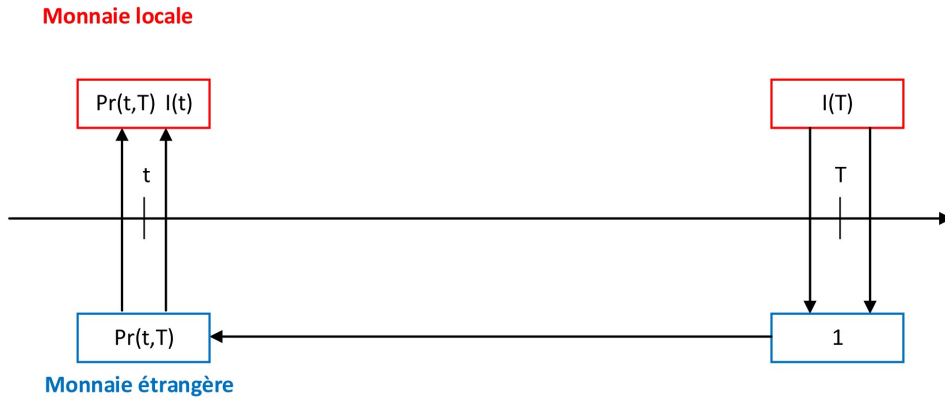


FIGURE 5.2 – Valorisation d’un flux futur d’IPC avec l’analogie de la monnaie étrangère.

Par AOA, on obtient donc l’égalité suivante sur la valeur de marché d’un flux futur d’IPC :

$$I(t)P_r(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} I(T) \right]$$

Ce qui peut être écrit en terme d’inflation effective :

$$P_r(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \frac{I(T)}{I(t)} \right]$$

Ce qui correspond bien à la définition que nous avons donnée du ZC réel.

Ceci permet de comprendre que l’analogie de la monnaie étrangère est un cadre de travail cohérent avec la valorisation générale du ZC réel.

Relation d’AOA entre déflateurs On peut montrer, dans le cadre général des modèles de devises où les économies locale et étrangère sont complètes et en AOA, que :

$$\Pi_n(t, T) = \frac{I(t)}{I(T)} \Pi_r(t, T)$$

Démonstration. Cf. annexe A. □

Dans le cadre de l’analogie de la monnaie étrangère, la contrainte de lien entre taux nominaux, taux réels et inflation provient d’une relation d’AOA, plus courante dans les théories financières classiques que les relations économiques. Ce résultat est à la base de plusieurs modèles de taux et d’inflation ayant différentes fonctions :

- Des modèles tels que celui de *Jarrow et Yildirim* (2003) utilisent cette analogie pour construire un modèle *HJM* dans deux monnaies et obtenir des formules fermées pour la majorité des produits dérivés d’inflation ;
- D’autres, tels que celui de *Allan Sall Tang Andersen* (2011), spécifient des modèles de taux nominaux et réels à plusieurs facteurs afin d’estimer la prime de risque d’inflation.

Lien avec la valorisation générale On peut montrer que les hypothèses permettant de déduire l’analogie de la monnaie étrangère **impliquent** que la relation 5.2 est vérifiée, sans aucune restriction sur la forme de la prime de risque d’inflation.

Une donnée importante pour les intervenants sur le marché inflationniste est le point mort d’inflation. Nous allons voir en quoi cette donnée est importante pour comprendre quelle est l’inflation anticipée par le prix des produits cotés sur le marché.

5.5 Point Mort d'Inflation – BEIR

Une notion couramment utilisée sur les marchés financiers est le point mort d'inflation⁵. Le BEIR est un taux mesurant l'inflation anticipée permettant l'égalisation de la relation de *Fisher* pour deux titres de même maturité et de même émetteur. Sous cette hypothèse, le BEIR mesure l'anticipation d'inflation implicite aux prix des obligations.

En pratique, si $y_n^A(t, T)$ désigne le taux actuariel en t d'une obligation nominale de maturité T et $y_r^A(t, T)$ le taux actuariel en t d'une obligation réelle de même maturité et de même émetteur, alors le BEIR vaut :

$$BEIR(t, T) = \frac{1 + y_n^A(t, T)}{1 + y_r^A(t, T)} - 1$$

Ou encore au premier ordre :

$$BEIR(t, T) \approx y_n^A(t, T) - y_r^A(t, T)$$

En pratique, cette mesure est souvent imparfaite pour plusieurs raisons :

- La mesure d'inflation anticipée par le BEIR intègre la prime de risque pour inflation. Nous verrons plus loin que cette prime ne peut pas toujours être négligée.
- Il est souvent difficile de trouver des titres nominaux et réels de même maturité; ainsi, il existe une imperfection de dates lors de l'estimation du BEIR.
- L'estimation du BEIR est aussi entachée de problèmes de liquidité puisque les obligations indexées ont tendance à être moins liquides que les obligations nominales, comme nous le verrons plus loin.

Pour ces raisons, le BEIR est utilisé comme un *proxy* pour la mesure d'inflation anticipée. Même si il est imparfait, il reste un indicateur largement utilisé du fait de sa simplicité d'interprétation et d'extraction.

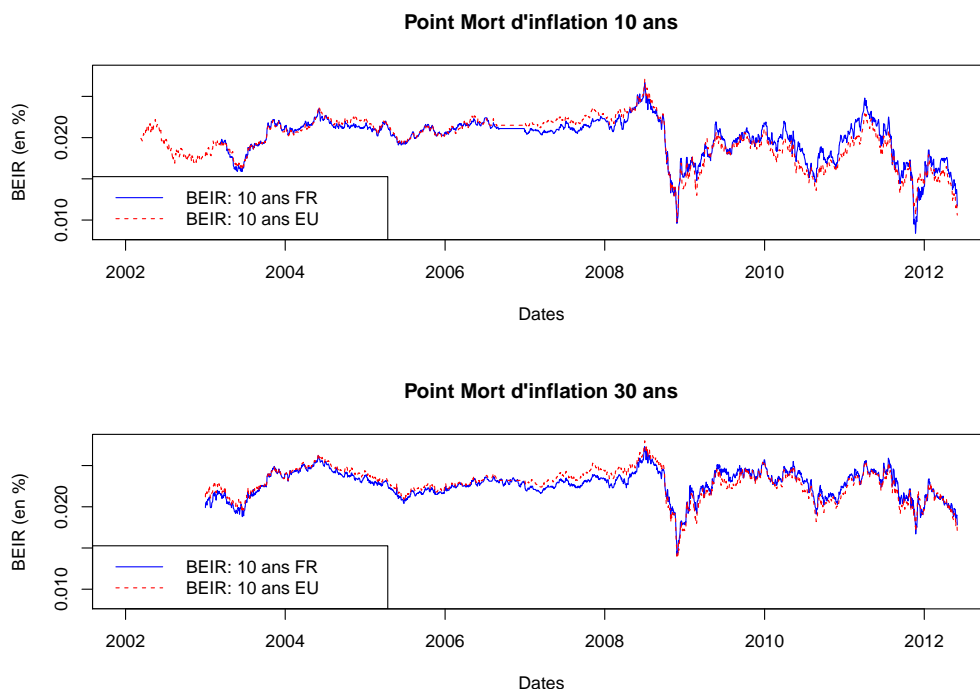


FIGURE 5.3 – BEIR pour différentes maturités du 01/01/2002 au 26/06/2012. Le BEIR court terme est plus volatile, mais la structure par terme du BEIR semble relativement stable. Les anticipations d'inflation oscillent autour de 2 % qui est l'objectif BCE long terme.

5. Aussi appelé Break Even Inflation Rate (**BEIR**).

BEIR en temps continu En reprenant l'interprétation de l'extension de la relation de Fisher, l'expression en composition continue du BEIR peut s'écrire :

$$BEIR(t, T) = y_n(t, T) - y_r(t, T) = y_q^e(t, T) + ip(t, T)$$

Ainsi, le BEIR peut se décomposer en la somme de l'anticipation d'inflation pour la période et d'une prime de risque pour l'inflation qui dépend directement de la **covariance entre taux nominaux et inflation**. Cette analyse est conforme avec nos remarques précédentes, dans le sens où le BEIR est un *proxy* pour la mesure de l'anticipation d'inflation.

Conclusion

Les taux réels sont définis comme la valeur présente d'un flux futur d'inflation effective sur une période. À ce titre, ils jouent un rôle prépondérant dans la valorisation d'instruments indexés inflation. Plus encore, dans le cadre de la directive Solvabilité 2, ils permettent de donner une valeur de marché à des engagements liés à l'inflation.

Cependant, les relations liant taux nominaux et taux réels sont complexes dans le cadre général et vont plus loin qu'une simple corrélation. Ainsi, comme le rappelle le tableau 5.1, la littérature scientifique a proposé des modélisations permettant de simplifier cette relation, de l'interpréter ou encore de l'inclure dans un cadre plus global.

	Type de relation	Lien avec relation 5.2	Valorisation dérivés d'inflation
<i>Fisher</i>	Économique	Restriction	Non
<i>Fisher</i> avec prime de risque	Économique	Equivalence	Complexe
Analogie monnaie étrangère	AOA	Généralisation	Simplifiée

TABLE 5.1 – Résumé des approches célèbres des liens entre taux réels, nominaux et inflation.

En pratique, les GSE utilisent majoritairement l'hypothèse de *Fisher*, c'est par exemple le cas du modèle de *Ahlgrim et al.* (2005) décrit au chapitre 7. Dans ce cadre, on émet l'hypothèse que la prime pour risque d'inflation est nulle. On peut la reformuler de deux manières équivalentes :

- L'inflation est la même sous la probabilité historique et sous la probabilité risque neutre. On considère alors que l'inflation n'est pas une variable couvrable.
- Le BEIR est une mesure exacte de l'inflation anticipée.

Cette hypothèse est plausible dans des modèles *ALM* utilisant l'inflation uniquement comme une donnée macro-économique, et non comme une source de risque couvrable. Dans notre approche, on considère l'inflation comme un facteur de risque pour l'entreprise ; ainsi, il peut être utile de la considérer comme une donnée de marché.

Chapitre 6

Prix du marché du risque

Objectif Les besoins inhérents à la valorisation du bilan prudentiel impliquent le développement de GSE permettant de travailler dans l'univers historique (pour projeter les facteurs de risque) et dans l'univers risque neutre (pour valoriser le BE). Il n'est *a priori* pas nécessaire pour les besoins du modèle interne de développer un modèle qui peut travailler **conjointement** dans les deux univers, c'est-à-dire de déterminer la réalisation d'une variable aléatoire dans un univers **et** dans l'autre.

Le but de cette première section est de montrer quels sont les différents choix de liens possibles entre générateurs historique et risque neutre, et comment il est possible de construire un générateur de scénarios économiques **cohérent** dans les deux univers.

6.1 Liens Historique – Risque Neutre

Les probabilités historique et risque neutre sont équivalentes. Cela signifie que tout événement possible dans un univers est possible dans l'autre univers. Ce qui change est la fréquence d'occurrence, la probabilité.

Approche intuitive Dans « l'univers » risque neutre, les agents n'exigent pas de prime de risque pour l'achat d'un actif risqué.

Prenons l'exemple de l'achat d'un zéro-coupon $P_n(t, T)$ nominal. Dans l'univers historique, les agents demandent, entre autres, une prime de risque pour compenser le risque de voir le rendement coté augmenter, et la valeur marchande du titre diminuer. Ainsi, dans l'univers historique, le rendement du zéro-coupon exigé par l'acheteur peut s'écrire :

$$y_n(t, T) = \text{Rendement d'un ZC sans risque}(t, T) + \text{Prime}(t, T)$$

La probabilité risque neutre est une mesure de probabilité où le prix du zéro-coupon correspond à la moyenne actualisée des flux futurs auxquels il donne droit dans tous les états du monde. Le but d'un changement de probabilité est donc d'éliminer les primes de risque. Cette approche permet de comprendre les notions sous-jacentes à l'univers risque neutre et permettent d'introduire le *prix du marché du risque* (aussi noté **MPR**, pour *Market Price of Risk*).

6.1.1 Théorème de Girsanov

Ce théorème permet d'explicitier le lien probabiliste formel entre les deux univers. Un résultat connu est qu'entre deux probabilités équivalentes, il existe une densité de probabilité, appelée densité de *Radon-Nikodym*, qui peut s'écrire en t pour un horizon T :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(- \int_t^T \lambda(u) dW^{\mathbb{P}}(u) - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda(u)^2 du \right)$$

Le théorème de Girsanov permet de spécifier le changement de probabilité **directement sur les dynamiques des processus**. Il est alors possible de lier les deux dynamiques à partir de la relation :

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) - \lambda(t)dt$$

On peut relier les aléas¹ d'un actif sous la probabilité historique aux aléas sous la probabilité risque neutre.

On peut formuler plusieurs remarques sur ce résultat :

- Ce changement de probabilité affecte uniquement les dérivées des dynamiques en question, pas leurs volatilités. Cette remarque est particulièrement importante pour la calibration des modèles.
- Le prix du marché du risque correspond généralement à la prime de risque instantanée par unité de volatilité. Nous reviendrons sur cette interprétation.
- Tout comme la prime de risque exigée pour une action est différente de celle exigée pour une obligation, on conçoit que le prix du marché du risque diffère selon l'actif observé. Ainsi, en fonction des actifs modélisés, il faudra considérer séparément leurs prix du marché du risque.
- On peut également noter qu'il n'y a aucune raison pour que cette prime **de marché**² soit constante avec le temps, contrainte forte utilisée dans les modèles de la littérature.

Le but de la section suivante est de présenter et proposer des méthodes d'estimation des prix du marché du risque des variables d'intérêt dans notre approche.

6.1.2 Typologie des primes de risque d'intérêt

Dans notre approche, nous devons évaluer trois grandeurs : l'inflation, les taux réels et les taux nominaux. Ainsi, il faut s'intéresser aux différentes primes de risque que possèdent ces trois grandeurs risquées. Cette typologie s'appuie sur l'article de *Caja et Planchet* (2010), on pourra s'y référer pour plus de détails.

Il existe une prime pour chaque source d'incertitude que l'acheteur du produit accepte de supporter lors de l'achat du titre. Ainsi, il faut distinguer les produits auxquels on s'intéresse :

- **Prime de risque pour produits de taux.** Les produits de taux partagent certaines caractéristiques communes, et donc plusieurs sources de risque en commun. Parmi celles-ci, on peut trouver :
 - ▷ *Le risque de taux.* C'est le risque de voir les facteurs de risque déterminant la courbe des taux changer au cours du temps³. C'est le risque prédominant dans un produit de taux. Un produit de taux qualifié de « sans risque » est supposé soumis à cette seule source de risque.
 - ▷ *Les risques de crédit, liquidité et concentration* qui sont connus dans la littérature classique des produits de taux.
- **Risque d'inflation.** Le risque d'inflation correspond directement à la prime de risque d'inflation. Elle correspond au risque de voir l'inflation s'écarter significativement de l'anticipation.

Dans la suite, nous allons nous intéresser plus particulièrement au prix du marché du risque de taux, dont les modèles d'évaluation sont le plus répandu, et nous verrons par la suite quelles sont les possibilités d'évaluation des autres risques.

6.2 Prix du marché du risque de taux – Ahmad et Wilmott

Le prix du marché du risque de taux est par nature la conséquence d'une modélisation, et donc non observable.

Il existe plusieurs modèles d'estimation du prix du marché du risque. La majorité de ces modèles sont paramétriques, c'est-à-dire qu'ils contraignent la forme du taux court nominal et en déduisent le prix du marché du risque. Parmi ces approches, on peut citer *Bernaschi et al.* (2006) qui évaluent le prix du marché du risque à partir d'un modèle *CIR*, ou encore *Ahmad et Wilmott* (2006) qui estiment le prix du marché du risque à partir d'un cadre général de taux court d'équilibre à un facteur.

1. On notera au passage qu'il est intuitif que ce résultat affecte uniquement les titres présentant un aléa, sinon il n'y a pas de risque qui mérite une prime, la probabilité historique est alors confondue avec la probabilité risque neutre.

2. Plusieurs théories économiques ont tenté d'expliquer les primes de risque, comme le *CAPM* ou encore l'*APT de Ross* (1976), mais ces niveaux ne permettent pas d'expliquer avec précision les primes que le marché exige.

3. On notera que dans le cas d'un produit de taux nominal, ce risque inclut le risque d'inflation.

On notera que le raisonnement actuel est appliqué pour un zéro-coupon nominal. Cependant, avec l'analogie de la monnaie étrangère, on doit pouvoir transposer la situation au zéro-coupon réel dans sa monnaie.

6.2.1 Principes généraux d'estimation

Pour le risque de taux, l'estimation du prix du marché du risque repose en général sur le principe fondamental de l'indépendance entre le prix du marché du risque et la maturité du zéro-coupon.

Indépendance entre prix du marché du risque et maturité du zéro-coupon Sans justifications préalables, il n'y a aucune raison pour que le prix du marché du risque de taux ne dépende pas de la maturité du zéro-coupon considéré. Pour un ZC nominal avec un modèle de taux court à un facteur, la dynamique du ZC dans l'univers historique est :

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} &= [r_n(t) - \lambda_n(t, T)\Sigma_n(t, T)]dt - \Sigma_n(t, T)dW_n^{\mathbb{P}}(t) \\ \Leftrightarrow \lambda_n(t, T) &= \frac{\mu_n(t, T) - r_n(t)}{\Sigma_n(t, T)} \end{aligned}$$

Pour montrer que le prix du marché du risque est indépendant de la maturité, il faut utiliser principalement une hypothèse d'AOA et de marché complet. La méthode à suivre est la suivante :

- Prendre un portefeuille contenant deux zéro-coupon de maturités différentes T_1 et T_2 ;
- Choisir les quantités pour répliquer localement l'actif sans risque, ce qui doit être possible si le marché est complet ;
- Écrire la dynamique du portefeuille en question ;
- Déduire de l'égalité obtenue sur les dérivées et de la nullité de la volatilité du portefeuille que le prix du marché du risque ne dépend pas de la maturité.

On obtient alors :

$$\lambda_n(t, T) = \lambda_n(t) = \lambda_t \tag{6.1}$$

Cette démonstration est importante dans la calibration du prix du marché du risque et ne nécessite pas d'hypothèses de modèle.

6.2.2 MPR de taux par Ahmad et Wilmott

Cette méthode fut présentée en 2006 par *Ahmad et Wilmott*, nous en reprenons ici les grandes lignes.

Les auteurs proposent un modèle de taux court à un facteur, sous la probabilité historique :

$$dr = u(r)dt + w(r)dW_n^{\mathbb{P}}(t)$$

Nous allons voir dans la suite comment déterminer le prix du marché du risque à partir de cette dynamique.

6.2.3 Développement limité du prix du zéro-coupon

Le résultat qui suit est à la base de la méthode d'évaluation de *Ahmad et Wilmott*. Il est important de comprendre l'approximation qui est faite, puisque nous verrons que dans le cadre de la transposition de ce résultat aux taux réels, l'hypothèse faite n'est pas toujours acceptable.

Pour un zéro-coupon en t qui se rapproche de sa maturité T , on peut écrire un développement limité de la fonction qui à t associe le prix du ZC, soit :

$$\begin{aligned} P_n(t, T) &= P_n(T, T) + \left. \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial t} \right|_{t=T} (T - t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 P_n(t, T)}{\partial^2 t} \right|_{t=T} (T - t)^2 + o(T - t)^2 \\ P_n(t, T) &= 1 - r_T(T - t) + \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T) + r_T^2] (T - t)^2 + o(T - t)^2 \end{aligned}$$

On préfère en pratique utiliser l'expression en fonction du rendement en capitalisation continue du zéro-coupon se rapprochant de sa maturité :

$$y_n(t, T) = \frac{-\ln P_n(t, T)}{T - t} = r_T - \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T)] (T - t) + o(T - t)$$

Démonstration. Cf. Annexe A. □

Cette expression peut être utilisée pour plusieurs zéro-coupon se rapprochant de leurs maturités⁴. On peut donc voir que sur le début de la courbe des rendements, la pente de la courbe est $\frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t))$. Ainsi, disposant de plusieurs rendements pour des maturités courtes, on peut estimer le prix du marché du risque par régression⁵ sur plusieurs maturités court terme.

On remarque que cette expression dépend des fonctions $u(r)$ et $w(r)$. L'approche d'*Ahmad et Wilmott* consiste à estimer le prix du marché du risque de taux dans un cadre général de taux court d'équilibre.

6.2.4 Modèle d'Ahmad et Wilmott

Modèle de volatilité Tout comme nous avons vu la forme générale d'un modèle d'équilibre sous la probabilité risque neutre avec l'équation 3.1, *Ahmad et Wilmott* spécifient le pendant **historique** d'une modélisation de volatilité aussi générale :

$$dr_t = u(r)dt + vr^\beta dW_n^{\mathbb{P}}(t)$$

Comme nous l'avons vu, une telle forme couvre plusieurs modèles de taux célèbres comme les modèles de *CIR*, *Vasicek*...

Estimation de la volatilité Supposons que l'on dispose d'un historique de taux courts. Selon l'approche proposée par *Ahmad et Wilmott* et reprise par *Caja et Planchet*, on peut estimer la volatilité du taux court par la méthode suivante :

- Diviser le support du taux court en N segments. Nous choisissons de prendre N segments contenant chacun autant de réalisations de taux court. Pour cela, la i -ème borne des segments correspond au quantile d'ordre $\frac{i}{N}$ avec $i \in \{0, \dots, N\}$.
- Évaluer les variations journalières de taux court $\delta r_t = r_t - r_{t+1}$ et attribuer chacune des variations δr au segment d'appartenance de r_t .
- Évaluer sur chacun des N segments la quantité $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\delta r]$. En effet, on a le résultat⁶ suivant :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\delta r_t] = w(r)^2 \delta t \Rightarrow \ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\delta r] = 2 \ln v + \ln \delta t + 2\beta \ln r$$
- Effectuer une régression linéaire des $\ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\delta r^p]$ sur les \bar{r}^p , milieux des p segments, en déduire la valeur de v et β .

Cette régression permet d'estimer les paramètres de la volatilité. Il reste à spécifier un modèle de dérive.

Modèle de dérive L'approche retenue pour évaluer la dérive est de spécifier une paramétrisation de la dérive par l'observation de la densité du taux court. L'idée est qu'il existe un lien statistique entre la distribution stationnaire de la variable r_t et sa dérive. En supposant que la volatilité de r est vr^β , on peut montrer que la dérive de r s'écrit :

$$u(r) = v^2 \beta r^{2\beta-1} + \frac{1}{2} r^{2\beta} \frac{d(\ln p_\infty)}{dr}$$

Où p_∞ est la densité stationnaire de r . L'avantage d'une telle expression est que la densité stationnaire est directement observable. Ainsi, **on peut spécifier n'importe quelle loi paramétrique pour r à partir d'une telle expression** et en déduire la dérive adéquate. On recouvre ainsi plusieurs distributions de taux court. L'estimation de la distribution d'équilibre revient alors à un ajustement de loi paramétrique.

4. En fait, l'expression n'étant valable que pour des titres étant proches de leur maturité, il n'y aura pas de coupons en général.

5. *Caja et Planchet* estiment par la pente entre le taux 1 mois et le taux 3 mois. Ces valeurs étant instables, on préfère lisser le résultat par régression court terme.

6. Une démonstration intuitive consiste à écrire le produit de la dynamique dr_t par lui-même, en remarquant que les variations quadratiques avec le terme temporel sont nulles.

6.2.5 Application Numérique sur Euribor et BTF

Nous appliquons la méthodologie indiquée précédemment sur l'Euribor et les rendements de BTF, taux courts associés aux Bons du Trésor Français. L'Euribor représente le marché interbancaire et le BTF le marché souverain. Le graphe 6.1 présente les jeux de données.

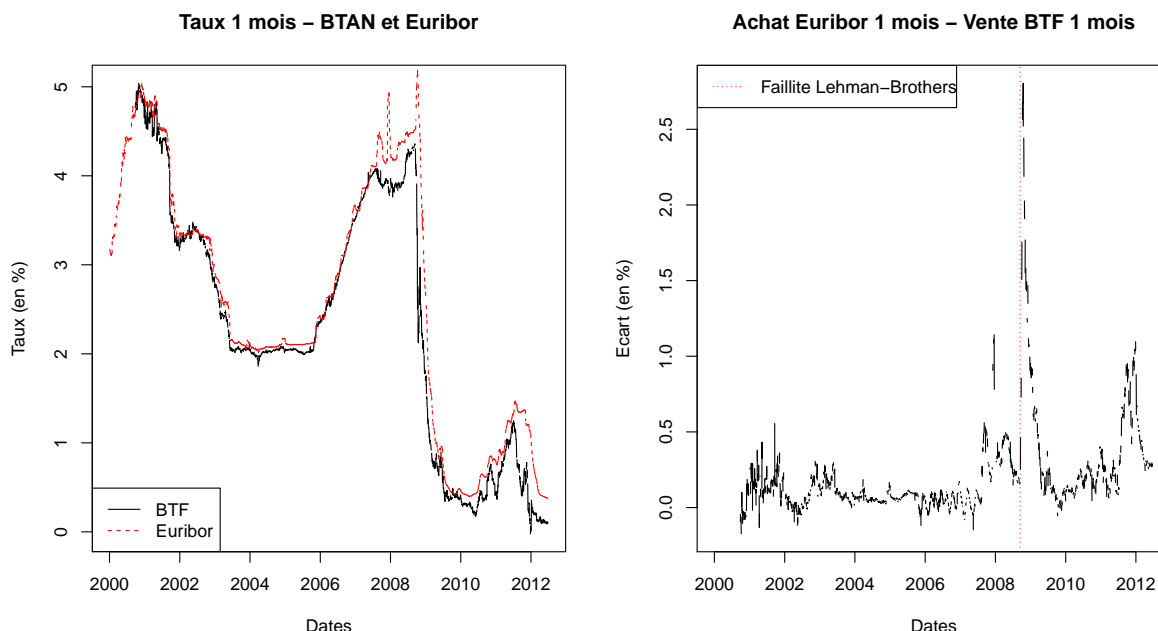


FIGURE 6.1 – Evolution de l'Euribor et des rendements de BTF depuis le 01/01/2000 jusqu'au 26/06/2012. La baisse de 2008 est liée à une politique monétaire conciliante des banques centrales suite à la chute de *Lehman Brothers* dont l'effet se ressent sur le *spread* de taux. Les deux taux présentent une forte dépendance avec une corrélation de 0,98.

Suite aux observations sur l'historique des valeurs et pour aller dans le même sens qu'*Ahmad et Wilmott*, nous décidons d'utiliser une loi lognormale pour la calibration de la distribution d'équilibre des taux courts. Cette loi a l'avantage d'être positive et ainsi de permettre d'avoir **un modèle de taux court historique sans taux négatifs**. On obtient les résultats suivants sur la distribution d'équilibre et la dérive du taux court :

$$p_{\infty}(r) = \frac{1}{ar\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2a^2} \left[\ln \frac{r}{\bar{r}} \right]^2}$$

$$u(r) = v^2 r^{2\beta-1} \left[\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \ln \frac{r}{\bar{r}} \right]$$

Cette dérive revient à imposer un modèle de retour à la moyenne vers un taux d'équilibre. Pour trouver celui-ci, il suffit d'évaluer la valeur du taux court qui annule la dérive :

$$u(r) = 0 \Leftrightarrow r_{eq} = \bar{r} e^{2a^2 \left[\beta - \frac{1}{2} \right]}$$

Soit dans notre cas, un retour à la moyenne autour de 3,43 % pour l'Euribor. Le graphique 6.2 et le tableau 6.2.5 résument les valeurs d'estimation.

Commentaires sur les valeurs du MPR Il y a plusieurs choses à remarquer concernant les valeurs que prennent les prix du marché du risque :

Paramètre	Valeur Euribor	Valeur BTF
v	0,047	0,0069
β	0,84	0,14
Moyenne Lognormale	0,02	0,017
Variance Lognormale	0,74	0,99

TABLE 6.1 – Estimation des paramètres du modèle de taux court

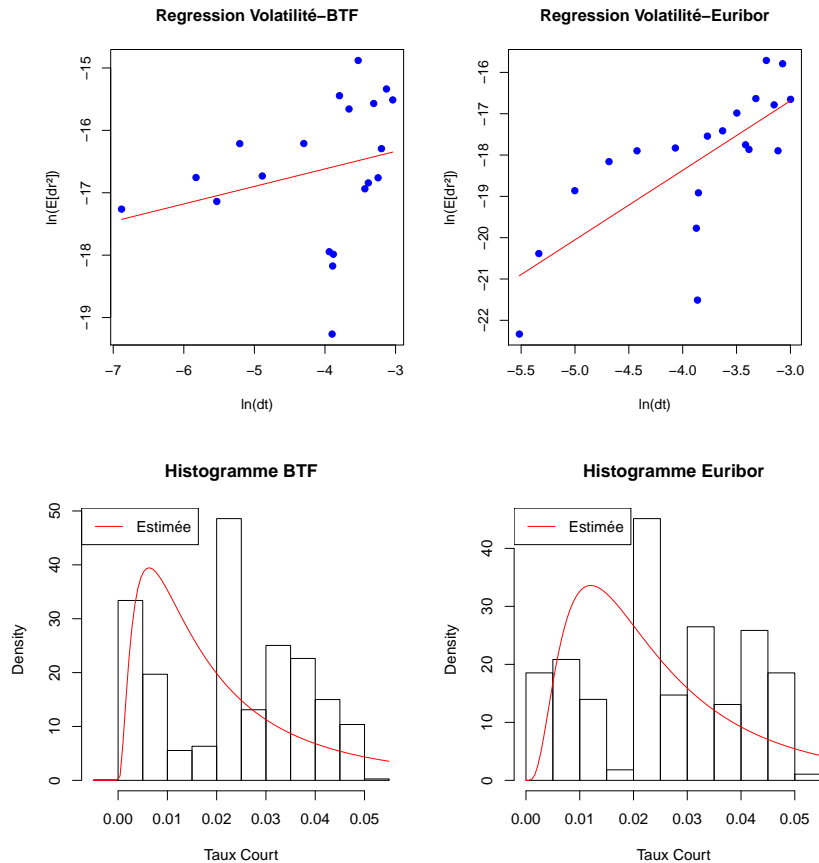


FIGURE 6.2 – L’histogramme des valeurs du taux court n’incite pas à prendre une loi lognormale. Ceci est dû à la plage d’estimation trop courte et l’épisode de chute des taux de 2008 qui donnent des queues de distribution trop épaisses.

- Tout d’abord, **le prix du marché du risque n’est pas constant**. D’un point de vue économique, cela peut paraître déroutant : si un investisseur est rationnel, alors sa vision ne devrait pas se déformer aussi rapidement. La seule façon pour que le prix du marché du risque prenne ces valeurs est que les investisseurs aient une mémoire courte. Cependant, on a ici à faire à des comportements agrégés, le plus souvent opportunistes et ne transcrivant pas de logiques d’investissement claires.
- Ensuite, on peut voir que **le prix du marché du risque est la plupart du temps négatif**, voire très négatif en période de crise. Ce résultat est prévisible puisque les agents sont en général averses au risque, et très averses en période de crise.
- On peut également remarquer que **les prix du marché des risques souverain et interbancaire se sont décorrélés** depuis le début de la crise des *subprimes*. Cet effet est devenu important à partir de début 2012 où l’État Français est devenu valeur refuge avec une prime de risque positive. Ainsi, il n’est désormais pas envisageable de considérer que ces MPR sont égaux.
- Enfin, l’aspect erratique du MPR oblige à faire des choix de modélisation afin de prendre en compte directement ou indirectement la variation de prime de risque qu’exigent les agents.

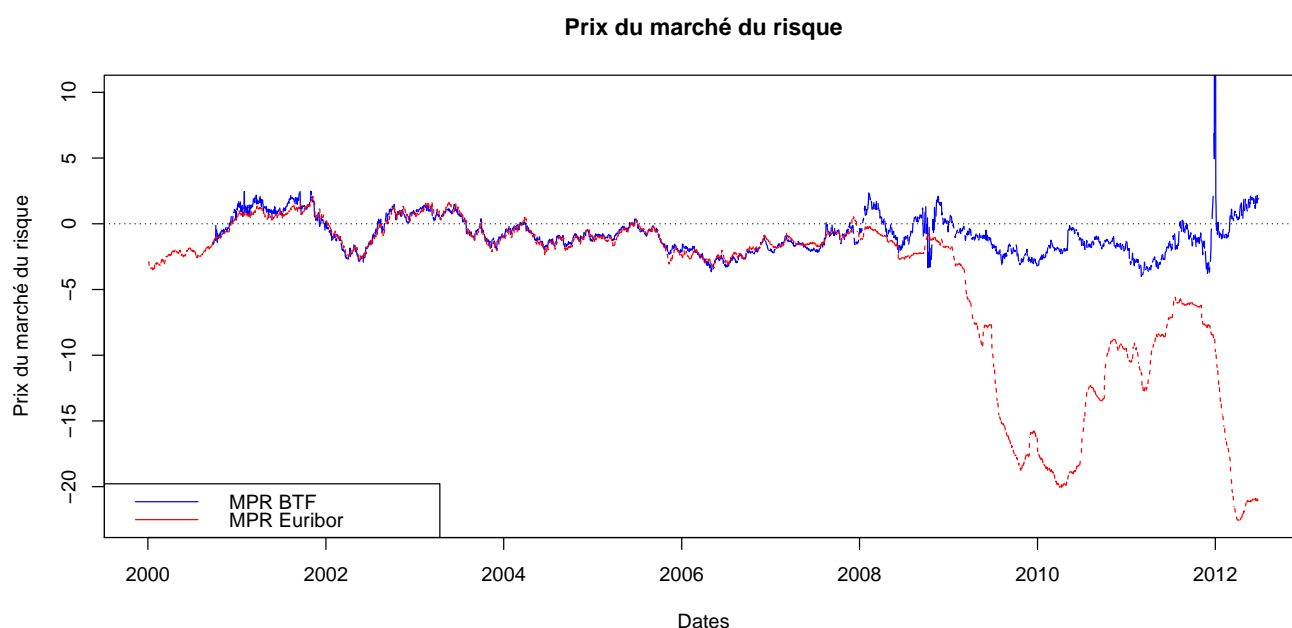


FIGURE 6.3 – On remarque que les MPR se sont décorrélés après 2008, quand le marché souverain s’est déconnecté du marché interbancaire. On remarque également le pic de prime de risque en décembre 2012, quand les taux souverains sont devenus négatifs sur le marché secondaire. La divergence a de fortes chances de s’accroître car les taux nominaux négatifs se banalisent.

Pour conclure sur cette partie, nous nous permettons de citer *Ahmad et Wilmott* : "If markets were rational and the market price of risk always constant then calibration would be fine. But they are not, and it isn't."

Le but de la section suivante est de montrer comment évaluer les autres prix du marché du risque et quelles sont les problématiques liées à ces estimations.

6.3 Autres MPR

Nous allons maintenant détailler les méthodes d’évaluation des autres MPR d’intérêt, à savoir le MPR d’inflation lié à la prime d’inflation et le MPR réel lié au risque de taux réel.

6.3.1 MPR Inflation

L’estimation du MPR d’inflation lié à l’estimation de la prime de risque d’inflation est devenue un enjeu important à la fois pour les investisseurs, mais aussi pour les décideurs de politiques monétaires. En effet, l’évaluation de cette prime **permet de déduire la structure par terme de l’anticipation d’inflation**, qui est une mesure directe de la « crédibilité monétaire ». À ce titre, l’estimation de la prime de risque d’inflation repose beaucoup sur le marché des indexés inflation. Comme le souligne *Bernanke* (2004), « *[Ils] constituent la source la plus directe d’anticipation d’inflation* ».

Approches phares De récentes études ont proposé des modèles d’évaluation du MPR inflation. Souvent, le point de départ est la relation d’AOA⁷ entre déflateurs nominaux, réels et IPC. Contrairement au cas nominal, ces modèles travaillent nécessairement dans l’univers risque neutre et dans l’univers historique, ce qui les rend complexes. Parmi ces modèles, on peut citer :

- Sans prise en compte des données du marché d’indexés inflation :

7. En effet, si le but est d’évaluer la prime de risque d’inflation, on ne peut pas utiliser la relation de *Fisher* dont le point de départ est de la négliger.

- ▷ *Burashi et Jiltsov* (2005) proposent un modèle structurel ne prenant pas en compte une structure par terme de la prime de risque d'inflation. Ils estiment le MPR inflation entre 20 et 140 points de base.
- ▷ *Ang, Bekaert et Wei* (2007) proposent un modèle affine à trois facteurs comme *Dai et Singleton* (2002) qui inclut un changement de régime. Ils proposent une structure par terme du MPR inflation et l'estiment autour de 1,15 % à 5 ans.
- Avec prise en compte des données du marché d'indexés inflation :
 - ▷ *Warner et Garcia* (2010). Ils utilisent un modèle de taux à trois facteurs et à temps discret pour les taux nominaux et réels. Ils supposent également que le MPR nominal a une structure affine, et intègrent parmi les variables explicatives les prévisions d'inflation par la BCE, le SPF⁸ publié trimestriellement afin d'améliorer la précision d'estimation. L'estimation des différents paramètres sur les données européennes se fait par un filtre de Kalman qui nécessite la maximisation de la vraisemblance dans une grande dimension.
 - ▷ *Sall Andersen* (2011) reprend ce cadre de travail et propose un modèle affine à trois facteurs en temps continu comme *Duffie et Khan* (1996). L'estimation des paramètres est coûteuse en temps de calcul et utilise une méthode Bayésienne de *Markov Chain Monte Carlo*.
 - ▷ *Chen, Lui et Cheng* (2005) utilisent des modèles de *CIR* (1985) à deux facteurs. L'estimation des différents paramètres est réalisée par un filtre de Kalman.

La diversité de ces études permet de comprendre qu'il n'y a pas de modèle simple faisant l'unanimité au sein de la communauté scientifique. Le problème posé par cette estimation est complexe puisqu'il faut estimer la prime de risque liée à une quantité qui n'est pas directement observable. Cependant, on peut tout de même lister quelques faits sur lesquels s'accordent la majorité des études⁹ sur le marché européen :

- La prime de risque d'inflation ne présente pas de structure par terme triviale. Elle a tendance à être faible/négative sur le court terme, et fortement positive sur le long terme.
- L'estimation est entachée par l'erreur de liquidité sur les produits indexés. En effet, ces derniers se négocient moins que leurs équivalents nominaux, et cette différence ne peut pas toujours être négligée.
- Les variations long terme du BEIR sont majoritairement dues à des variations de la prime pour risque d'inflation, les anticipations d'inflation long terme sont donc stables.

Conclusion Les modèles permettant d'évaluer le prix du marché du risque d'inflation sont complexes. Contrairement au MPR nominal, le sous-jacent n'est pas directement négociable. Il faut donc utiliser plusieurs instruments financiers pour pouvoir évaluer cette donnée.

6.3.2 MPR Réel

L'évaluation du MPR réel pourrait se faire de la même façon que le MPR nominal en considérant que les taux réels observés sont dans leur monnaie. Si le fondement théorique reste valide, on est ici confronté à un problème technique. En effet, l'approximation à l'ordre 2 qui nous permet d'évaluer le MPR nominal implique de pouvoir observer des taux court terme (typiquement inférieurs à un an). Cependant, les 2 premières maturités court terme d'indexés inflation proviennent des données *swap*¹⁰ et sont de maturités 12 et 18 mois. Dans ces conditions, il n'est pas possible d'évaluer directement le prix du marché du risque réel.

6.4 Choix de modélisation

Connaissant le lien qui unit les deux univers, on a désormais plusieurs possibilités de modélisation qui s'offrent à nous. On peut remarquer que notre problème a plusieurs solutions. Afin de modéliser des dynamiques dans l'univers risque neutre et dans l'univers historique, il y a trois variables que l'on peut spécifier :

- La dynamique de la variable sous la probabilité historique ;
- La dynamique de la variable sous la probabilité risque neutre ;
- La dynamique du prix du marché du risque.

8. Surety of Professional Forecaster of the European Central Bank

9. La plus claire des études sur ce point est celle menée par *Warner et Garcia* (2010) pour la BCE.

10. Nous verrons dans la partie suivante comment extraire ces données.

Cependant, le théorème de Girsanov montre que **la connaissance de deux des trois variables permet de travailler dans les deux univers**¹¹. En effet, il suffit de deux de ces trois éléments pour pouvoir changer de probabilité, **la modélisation de la troisième donnée est redondante**.

Ainsi, il existe trois choix de modélisation possibles :

- Modéliser la variable sous la probabilité historique et son prix du marché du risque. On en déduit alors la valeur de la variable aléatoire sous la probabilité risque neutre. Cette approche peut être assimilée aux approches par **déflateurs**. Parmi les modèles à déflateurs, on peut trouver celui de *Brennan et Xia* (2000).
- Modéliser la variable sous la probabilité risque neutre et le prix du marché du risque. On en déduit alors la valeur de la variable aléatoire sous la probabilité historique. Cette approche est la plus communément utilisée, mais souvent au prix d'approximations qui mènent à supposer que le prix du marché du risque est constant. Parmi ces modèles, on peut trouver celui de *Vasicek* (1977) qui suppose que le prix du marché du risque est constant.
- Modéliser la variable sous la probabilité Risque Neutre et sous la probabilité historique, et laisser le prix du marché du risque libre. Cette approche revient à modéliser séparément toutes les variables, elle a le mérite de ne pas contraindre la forme du prix du marché du risque. C'est par exemple ce que l'on peut obtenir en utilisant deux modèles séparés¹². Cette approche ne peut être envisagée si le modèle doit permettre d'évaluer **simultanément** une variable dans deux univers.

Le schéma 6.4 résume les trois choix disponibles. On propose dans la suite de faire un point rapide sur ces trois méthodes afin d'en retenir une pour notre approche.

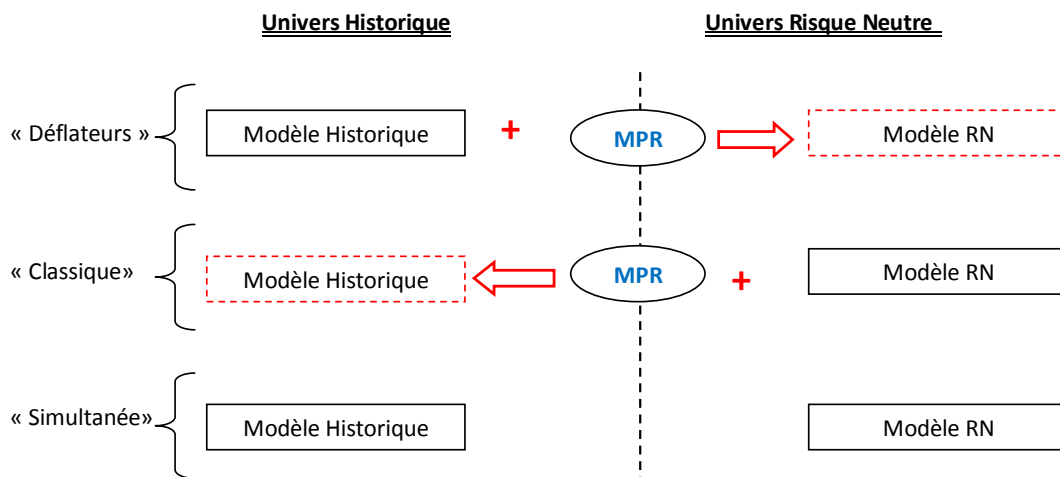


FIGURE 6.4 – Résumé des méthodes possibles de modélisation conjointe dans les deux univers. Les cases en pointillés représentent les valeurs déduites, et celles en trait plein les valeurs modélisées. On remarquera que le MPR n'est pas déductible de l'approche « simultanée ».

11. On remarquera que l'on ne dit pas que la donnée de deux des trois variables permet d'en déduire la troisième.

12. Il faut tout de même que les volatilités des deux dynamiques soient égales dans les deux univers pour que les modèles soient cohérents. Cette remarque vient d'une lecture directe du théorème de Girsanov.

6.4.1 Approche par déflateurs

L'approche par déflateurs est, d'un point de vue théorique, l'une des plus parcimonieuses en termes d'hypothèses de modélisation. *Caja et Planchet* (2010) proposent une introduction à la théorie des déflateurs. En effet, dans cette approche, on modélise des grandeurs directement ou indirectement observables. Ainsi, on contourne l'erreur de modèle inévitable quand on spécifie directement une dynamique sous la probabilité risque neutre : la variable dans cet univers n'étant jamais observable, on ne peut vérifier la qualité d'ajustement du modèle. Cette approche permet tout de même d'utiliser la probabilité risque neutre pour valoriser des actifs contingents.

MPR et déflateurs Afin de faciliter la compréhension de cette approche, prenons un actif risqué S_t et supposons connue sa dynamique sous la probabilité historique, avec un modèle lognormal classique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s(t)dt + \sigma_S(t)dW_S^{\mathbb{P}}(t)$$

Si le but est d'évaluer la valeur de marché de l'actif en 0 connaissant sa valeur en T , alors on peut écrire :

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_n(u)du} S_T \right]$$

$$S_0 = \int_{\omega \in \Omega} e^{-\int_0^t r_n(u,\omega)du} S_T(\omega) d\mathbb{Q}(\omega)$$

En se rappelant la forme de la densité de Radon-Nikodym vue de 0 et d'horizon T :

$$d\mathbb{Q} = \exp \left(-\int_0^T \lambda_S(u) dW_S^{\mathbb{P}}(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_S(u)^2 du \right) d\mathbb{P}$$

Donc on peut réécrire cette espérance sous la probabilité historique en utilisant la densité de Radon-Nikodym :

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\underbrace{e^{-\int_0^T \left(r_n(u) + \frac{\lambda_S(u)^2}{2} \right) du - \int_0^T \lambda_S(u) dW_S^{\mathbb{P}}(u)}}_{\text{Déflateur } \Pi_S(T)} S_T \right]$$

Le déflateur ¹³ $\Pi_S(T)$ est la **variable aléatoire** qui correspond au taux d'actualisation à appliquer à la variable aléatoire $S(T)$ pour que son prix actualisé sous **la probabilité historique** soit martingale. Sa dynamique est :

$$\frac{d\Pi_S(t)}{\Pi_S(t)} = -r_n(t)dt - \lambda_S(t)dW_S^{\mathbb{P}}(t)$$

Si l'on dispose d'un modèle pour le prix du marché du risque et d'un modèle historique, il est possible de modéliser le déflateur et d'en déduire des valeurs de marché de produits dérivés. Cette approche passe indirectement par la probabilité risque neutre et permet de valoriser des produits dérivés en n'utilisant que des variables directement ou indirectement observables.

Tout comme il existe un prix du marché du risque par type d'actif modélisé, il doit exister un déflateur par type d'actif modélisé.

Limites Cette approche présente deux limites :

- Le plus souvent, il n'existe pas de formules fermées permettant d'obtenir le prix d'actifs dérivés. Dans le cadre de modèles de taux court, cela signifie qu'il n'est pas possible d'obtenir directement le prix du zéro-coupon à partir du modèle de taux court et de la connaissance du déflateur. Étant donnée la complexité du problème, cette solution alourdira encore les calculs.
- Il est difficile de construire un modèle d'arbitrage à partir d'une approche par déflateur. Intrinsèquement, la courbe des taux est une *sortie* du modèle, et ainsi il peut être difficile de choisir les facteurs de façon à répliquer la courbe de taux observée où encore correctement valoriser des produits dérivés.

13. Aussi appelé *noyau de pricing* dans la littérature financière ou encore *pricing kernel*.

6.4.2 Approche par dynamique risque neutre

Cette approche est celle qui est la plus utilisée lorsque le modèle est spécifié sous la probabilité risque neutre (comme le sont la majorité des modèles d'AOA) et qu'il est nécessaire de passer sous la probabilité historique.

Cas des modèles affines Dans le cadre des modèles affines sous la probabilité risque neutre, il est régulièrement fait l'hypothèse que le modèle reste affine sous la probabilité historique. Ce point, discuté par *Duffie et Stanton* (2000), est contraignant et peu réaliste, comme nous allons le voir dans la suite.

Limites Cette approche est tentante. En effet, avec un modèle de prix du marché du risque et le modèle risque neutre de notre choix, on peut avoir des projections de variables dans l'univers historique.

Dans notre cas, il est difficile d'extraire et donc de modéliser des prix du marché du risque non conventionnels (risque de taux réel et risque d'inflation). Ainsi, nous ne retiendrons pas cette solution.

6.4.3 Approche par modèles séparés

Cette approche est la plus facile à comprendre. Il s'agit de ne pas modéliser/contraindre le prix du marché du risque. Il existe cependant une contrainte minimale pour que les deux modèles soient cohérents : il faut que la volatilité soit la même dans les deux modèles.

Limites Cette approche possède également l'inconvénient de l'erreur de modèle sous la probabilité risque neutre et ne permet pas, en plus, de travailler simultanément dans les deux univers.

Dans la suite, nous allons tout de même retenir cette solution. En effet, comme mentionné, l'approche par dynamique risque neutre n'est pas utilisable pour un modèle d'inflation et l'approche par déflateur ne permet pas d'avoir des formules fermées. Aussi on retiendra cette approche pour sa simplicité et surtout car elle permet d'utiliser les formules fermées de valorisation de zéro-coupon des modèles risque neutre sans imposer directement un modèle sur le prix du marché du risque.

Chapitre 7

Modèles de référence

Le but du présent chapitre est d'introduire quelques modèles courants de la littérature des modèles d'équilibre et d'AOA considérant explicitement les liens entre taux nominaux, taux réels et inflation. Notre objectif n'est pas toujours celui recherché par les modèles présentés, mais ils sont une bonne illustration des modélisations et liens usuels entre variables d'intérêt. Pour une comparaison sur une utilisation de ces modèles liés à l'*ALM*, on pourra par exemple se référer à la thèse de *Faleh* (2011).

7.1 GSE d'équilibre de Wilkie – 1986

Le modèle de *Wilkie* (1986) est un modèle général de projection de variables macro-économiques en temps discret. Ce fut historiquement le premier à intégrer la majorité des variables économiques d'intérêt pour un assureur. Pour cette raison, ce modèle est resté pendant longtemps, et malgré ses détracteurs, le modèle de référence.

Variables Économiques Ce modèle prend en compte :

- **L'inflation**, la « force motrice » du modèle de *Wilkie*. Dans la première version du modèle, l'écart entre le rendement de l'IPC et l'inflation long terme est modélisé par un processus auto-régressif d'ordre 1.
- **Les taux des dividendes et taux d'intérêt long terme**. Ces variables sont déduites de l'inflation et du montant des dividendes.
- **Les salaires, les montants des dividendes des actions**. Ces variables sont déterminées par un lien de **causalité** avec l'inflation, et sont ainsi « secondaires » dans le modèle.

Ce GSE rentre dans la classe générale des modèles à **cascades**, qui lient les variables économiques entre elles par des liens de causalité. Ces modèles présentent l'avantage d'avoir des dépendances explicites ne nécessitant pas de calibrations croisées, mais on leur reproche souvent d'être trop rigides dans les liens qu'ils créent entre les variables. Il ne sera par exemple pas possible d'observer des situations non prévues par le lien de causalité.

Critiques Du fait de sa popularité, le modèle de *Wilkie* est également critiqué et ses limites régulièrement pointées du doigt. Parmi celles-ci, on peut trouver :

- Le modèle d'inflation est mal adapté aux données et a une faible capacité prédictive ;
- Le rendement des actions suit un processus auto-régressif, ce qui donne des distributions plus compactes que celles observées ;
- La volatilité de l'inflation estimée est constante et peu réaliste. Cette remarque a amené *Wilkie* à proposer une deuxième version de son modèle en 1995 où le processus auto-régressif d'ordre 1 est remplacé par un modèle ARCH avec une modélisation de la volatilité de l'inflation plus réaliste.

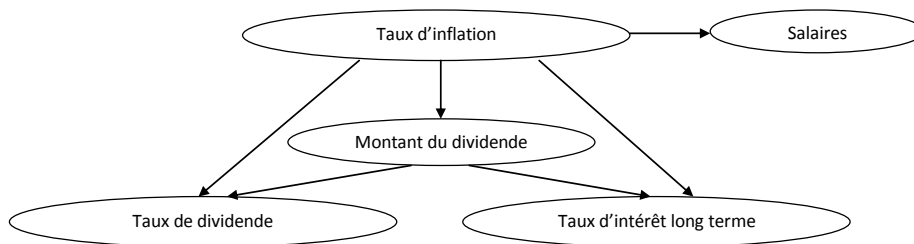


FIGURE 7.1 – Structure du modèle de *Wilkie* (1986). Les flèches représentent les liens de causalité. Source : *Planchet, Thérond et Juillard* (2006)

7.2 GSE d'équilibre d'Ahlgrim – 2005

Le modèle d'*Ahlgrim et al.* (2005) est un modèle populaire soutenu par la *Casualty Actuarial Society* et la *Society Of Actuaries*, deux grandes associations professionnelles d'actuariat américaines. Il s'agit d'un modèle général de projection de variables macro-économiques qui modélise en temps continu les variables d'intérêt. Contrairement au modèle de *Wilkie*, ce modèle a une structure de corrélation globale, ce qui enlève une partie de l'hypothèse de causalité.

Variables modélisées Les variables modélisées sont les suivantes :

- **Inflation.** L'inflation est modélisée sous la probabilité historique, par un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* de retour à la moyenne. Ce processus est semblable à un processus de retour à la moyenne, ce qui reste dans la logique du modèle de *Wilkie* pour l'inflation. Ici, la distribution stationnaire de l'inflation oscille autour de l'inflation long terme, ce qui est un critère de stabilité important pour un modèle de projection long terme. Soit :

$$dq(t) = a_q[\mu_q - q(t)]dt + \sigma_q dW_q^{\mathbb{P}}(t)$$

Avec μ_q l'inflation long terme et a_q la vitesse de retour à la moyenne.

- **Taux d'intérêt réels.** Les taux d'intérêt réels sont modélisés sous la probabilité **risque neutre**¹ par un cas d'application du modèle *Hull et White* à deux facteurs où le taux court réel $r_r(t)$ oscille autour du taux long $l_r(t)$, qui est lui-même aléatoire. Cette modélisation diffère légèrement de celle de *Brennan et Schwartz* (1979) présenté au chapitre 3 :

$$dr_r(t) = a_{rr}[l_r(t) - r_r(t)]dt + \sigma_{rr}dW_{rr}^{\mathbb{Q}}(t)$$

$$dl_r(t) = a_{rl}[\mu_r(t) - l_r(t)]dt + \sigma_{rl}dW_{rl}^{\mathbb{Q}}(t)$$

Dans ce type de modèles affines, il existe des formules fermées pour obtenir le prix du ZC réel à partir des paramètres des taux courts et taux longs.

- **Taux d'intérêts nominaux.** Les taux d'intérêt nominaux sont déduits des taux d'intérêt réels et des anticipations d'inflation en utilisant la relation classique de *Fisher* :

$$P_n(t, T) = P_r(t, T) \times \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{I(t)}{I(T)} \right]$$

Comme nous l'avons montré au chapitre 5, l'utilisation de cette relation consiste à négliger la prime de risque d'inflation. On concevra que cette simplification entraîne des écarts de valorisation des produits dérivés d'inflation ou des produits dérivés de taux.

1. Nous verrons plus loin que cela constitue une hypothèse importante du modèle.

- Les autres variables économiques d'intérêt :
 - ▷ **Rendement des actions.** Le rendement des actions est supposé être égal au taux sans risque plus un *spread* aléatoire qui dépend d'un modèle à changement de régime.
 - ▷ **Dividendes des actions.** Comme dans l'approche de *Wilkie*, le logarithme des dividendes suit un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* de retour à la moyenne.
 - ▷ **L'immobilier.** L'immobilier est représenté par un index des prix du marché qui est modélisé par un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* de retour à la moyenne.
 - ▷ **Le chômage.** Le taux de chômage suit également un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* de retour à la moyenne, qui intègre également un paramètre d'inflation.

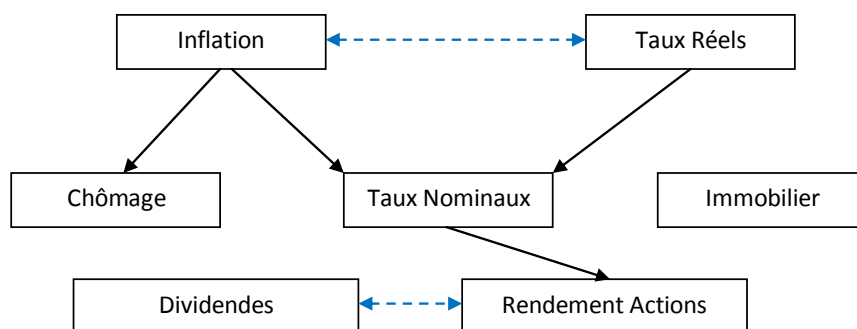


FIGURE 7.2 – Structure du modèle d'Ahlgrim. Les traits pleins représentent les liens causaux entre variables, et les traits en pointillés les corrélations du modèle. On ne spécifie pas les mesures de probabilité car **elles sont confondues dans ce modèle**. Source : *Faleh* (2011)

Modèle d'Ahlgrim et MPR Ce modèle d'équilibre fait l'hypothèse que tous les prix du marché du risque sont nuls. À notre connaissance, il n'y a pas d'articles mentionnant cette particularité du modèle, les auteurs eux-même éludent ce point. Pour comprendre où réside cette approximation, le lecteur intéressé pourra vérifier que :

- Les taux réels sont spécifiés sous la probabilité risque neutre². Cette **spécification** des dynamiques de taux court et long sous la probabilité **risque neutre**, courante depuis *Vasicek* (1977), permet d'utiliser les formules fermées donnant les prix de ZC réels.
- La **calibration** des paramètres des taux court et long se fait sous la probabilité **historique**, en utilisant le fait que la discrétisation exacte d'un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* est un processus auto-régressif d'ordre 1.

Il existe donc une incohérence entre spécification risque neutre et calibration historique. La seule possibilité pour que ce cadre de travail soit valide est que les probabilités historique et risque neutre soient confondues. Cela entraîne, entre autres, la nullité du prix du marché du risque (voir graphique 6.3) ; les agents sont supposés en permanence neutres au risque.

À travers nos recherches bibliographiques, il est apparu que cette approximation était relativement répandue. On la retrouve par exemple dans la thèse de *Faleh* (2011) pour le modèle de taux réels, ou encore dans le mémoire de *Guibert* (2010) qui reprend le modèle d'*Ahlgrim*.

La calibration de modèles spécifiés sous la probabilité risque neutre est un problème complexe pour les modèles d'équilibre. En effet, contrairement aux modèles d'AOA tels que ceux rentrant dans le cadre *HJM*, la seule donnée de la volatilité (qui ne change pas avec la probabilité) ne suffit en général pas à caractériser complètement le

2. On notera que contrairement à l'analogie de la monnaie étrangère, on ne distingue pas les probabilités risque neutre locale et étrangère. Elles sont confondues du fait de l'hypothèse de *Fisher*.

processus. Une solution possible est de suivre *Vasicek* (1977) et de proposer une hypothèse sur la forme du MPR afin d'estimer les paramètres.

Limites Ce modèle présente plusieurs limites pour notre approche qu'il convient d'apprécier :

- Comme nous l'avons vu au chapitre 3, c'est un modèle d'équilibre, donc intrinsèquement non adapté pour valoriser des instruments financiers. Ainsi, il ne peut convenir pour la valorisation précise d'engagements.
- Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la relation entre taux nominaux, taux réels et inflation ne permet pas la prise en compte de l'inflation comme facteur de risque couvrable, ce qui peut être problématique en présence de produits financiers ou d'engagements indexés sur l'inflation.
- L'absence de prime de risque dans le modèle crée un biais entre les prix de ZC donnés par le modèle et ceux qu'on aurait avec des agents averse au risque. Cependant, la projection des facteurs de risque (taux courts nominaux et réels et inflation) reste pertinente.

7.3 Modèle d'équilibre de Brennan et Xia – 2000

Le modèle de *Brennan et Xia* (2000) est un modèle d'équilibre réputé pour sa complexité de mise en œuvre. L'article *Dynamic Asset Allocation under Inflation* explicite un modèle de projection, ainsi que des équations de résolution du problème d'optimisation d'allocation pour un investisseur long terme, avec différentes formes de fonction d'utilité possibles et différentes contraintes de portefeuille. Nous ne nous attarderons pas sur le problème (complexe) d'optimisation et présenterons uniquement le modèle de *Brennan et Xia*.

Constance des prix du marché du risque Comme le prédisent les théories économiques classiques, le modèle de *Brennan et Xia* fait l'hypothèse que les prix du marché du risque sont constants. Cette hypothèse est cohérente avec une logique de modèle d'équilibre qui décrit l'état stationnaire des facteurs observés.

Une conséquence immédiate est que tous les processus à structure affine sous la probabilité risque neutre restent affines sous la probabilité historique.

Variables modélisées Les variables modélisées sont les suivantes :

- **Taux réels.** Les taux réels sont représentés par un modèle de taux court à un facteur, suivant un modèle d'équilibre de retour à la moyenne d'*Ornstein-Uhlenbeck* sous la probabilité risque neutre :

$$dr_r(t) = a_r[\mu_r - r_r(t)]dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

- **Inflation.** L'inflation est modélisée sous la probabilité historique par un processus de retour à la moyenne d'*Ornstein-Uhlenbeck*. Dans la continuité du modèle de *Wilkie*, l'inflation est auto-régressive sous la probabilité historique :

$$dq(t) = a_q(\mu_q - q(t))dt + \sigma_q dW_q^{\mathbb{P}}(t)$$

- **IPC.** Les auteurs supposent qu'il existe un aléa supplémentaire entre inflation et IPC, soit sous la probabilité historique :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = q_t dt + \sigma_i dW_i^{\mathbb{P}}(t)$$

Dans ce modèle, l'inflation est donc la dérive de l'IPC. On suppose de plus que le marché n'est pas complet ; les auteurs en déduisent qu'inflation et IPC ne sont pas parfaitement corrélés, et ainsi il existe une partie de l'inflation qui n'est couvrable par aucun des actifs du marché. On projette l'aléa lié à l'inflation sur l'ensemble des aléas du modèle, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = q_t dt + \varepsilon_S dW_S^{\mathbb{P}}(t) + \varepsilon_r dW_r^{\mathbb{P}}(t) + \varepsilon_q dW_q^{\mathbb{P}}(t) + \varepsilon_{\perp} dW_{\perp}^{\mathbb{P}}(t)$$

Avec $W_{\perp}(t)$ un mouvement brownien, indépendant de tous les autres mouvements browniens, représentant la variabilité de l'IPC qui n'est pas explicable par les actifs du marché. ε_p représente la corrélation entre $W_i(t)$ et $W_p(t)$ pour $p \in \{S, r, q, \perp\}$. On retombe dans le cadre du modèle d'*Ahlgrim* en supposant que $\varepsilon_p = 0$ pour $p \in \{S, r, \perp\}$.

- **Actions.** Les actions sont modélisées par un modèle simple type *Black Scholes* que l'on peut spécifier indifféremment dans les deux univers avec l'hypothèse de constance de la prime de risque, soit :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r_n(t) + \sigma_S \lambda_S) dt + \sigma_S dW_S^{\mathbb{P}}(t)$$

Ce modèle est encore celui de référence pour les actions et ne pose pas de problèmes particuliers malgré sa simplicité³.

- **Déflateur réel.** Le déflateur réel M_r occupe une place stratégique dans ce modèle. Il est modélisé explicitement et permet de déduire le prix des zéro-coupon nominaux à partir du modèle des taux réels et des différents prix du risque. On suppose que l'investisseur exige une prime de risque lié à **toutes les autres sources d'aléa du marché** pour l'investissement dans un ZC nominal sans risque. La dynamique historique du déflateur réel est :

$$\frac{dM_r(t)}{M_r(t)} = -r dt + \phi_S dW_S^{\mathbb{P}}(t) + \phi_r dW_r^{\mathbb{P}}(t) + \phi_q dW_q^{\mathbb{P}}(t) + \phi_{\perp} dW_{\perp}^{\mathbb{P}}(t)$$

Où les facteurs ϕ_p sont directement liés aux primes de risque et aux paramètres du modèle. Cette équation rappelle la forme « standard » du déflateur déterminé au chapitre 6, en posant :

$$\lambda_r(t) dW_r(t) = -\phi_S dW_S^{\mathbb{P}}(t) - \phi_r dW_r^{\mathbb{P}}(t) - \phi_q dW_q^{\mathbb{P}}(t) - \phi_{\perp} dW_{\perp}^{\mathbb{P}}(t)$$

$$\Rightarrow \lambda_r = \sqrt{\phi_S^2 + \phi_r^2 + \phi_q^2 + \phi_{\perp}^2 + 2\phi_S \phi_r \text{cov}(W_S^{\mathbb{P}}, W_r^{\mathbb{P}}) + \dots}$$

Dans ce modèle, le prix du marché du risque réel est donc également constant.

- **Taux nominaux.** Sans pour autant utiliser l'analogie de la monnaie étrangère, le déflateur nominal est déduit de la relation d'AOA entre déflateur réel et IPC, soit :

$$M_n(t) = \frac{M_r(t)}{I(t)}$$

Comme nous avons vu au chapitre 5, cette relation ne contraint pas la forme de la prime de risque d'inflation. Le prix du zéro-coupon nominal est donc déduit par la relation :

$$P_n(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{M_r(T) I(T)}{M_r(t) I(T)} \right]$$

Une suite de calculs permet de trouver une formule fermée reliant le prix du zéro-coupon nominal $P_n(t, T)$ aux différents paramètres du modèle, au taux court réel $r_r(t)$ et à l'inflation $q(t)$.

Limites Ce modèle avancé prend en compte primes de risque pour inflation comme prix du marché du risque. On pourrait lui reprocher de supposer que les prix du marché du risque sont constants, contrairement à ce qui est observé sur les marchés. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, cette hypothèse est cohérente avec la nature même des modèles d'équilibre.

Le plus gros reproche que l'on puisse formuler sur le modèle de *Brennan et Xia* est *in fine* sa complexité. En effet, son approche par déflateur n'est pas habituelle et la procédure d'estimation par filtre de Kalman peut paraître déroutante. À cela, il faut ajouter le nombre important de paramètres à estimer :

- Les paramètres des modèles d'*Ornstein-Uhlenbeck* d'inflation anticipée $[a_q, \mu_q, \lambda_q, \sigma_q]$ et de taux réels $[a_r, \mu_r, \lambda_r, \sigma_r]$;
- Les paramètres du modèle d'actions $[\sigma_S, \lambda_S]$;
- Le paramètre du modèle d'IPC $[\sigma_i]$;
- Les corrélations entre les variables du problème, $[\rho_{Sr}, \rho_{Sq}, \rho_{rq}]$;
- Les paramètres associés aux différents aléas dans le déflateur réel, $[\phi_S, \phi_r, \phi_q, \phi_{\perp}]$.

C'est pour cela que ce modèle n'est en général pas retenu pour la gestion de l'allocation d'actifs en assurance. Dans notre cadre, il ne serait pas adapté à la valorisation précise d'instruments mais s'il n'était pas aussi complexe, il pourrait être utilisé pour la partie *historique* des projections.

3. Une des remarques les plus souvent faites est la forte approximation de la constance de la volatilité. En effet, une étude des rendements du S&P 500 sur une longue période tend à montrer que la volatilité est aléatoire. Généralement, on propose d'ajuster un modèle GARCH sur la volatilité pour combler cette lacune. Pour plus d'informations sur ce point, on pourra se référer à *Gatheral* (2006).

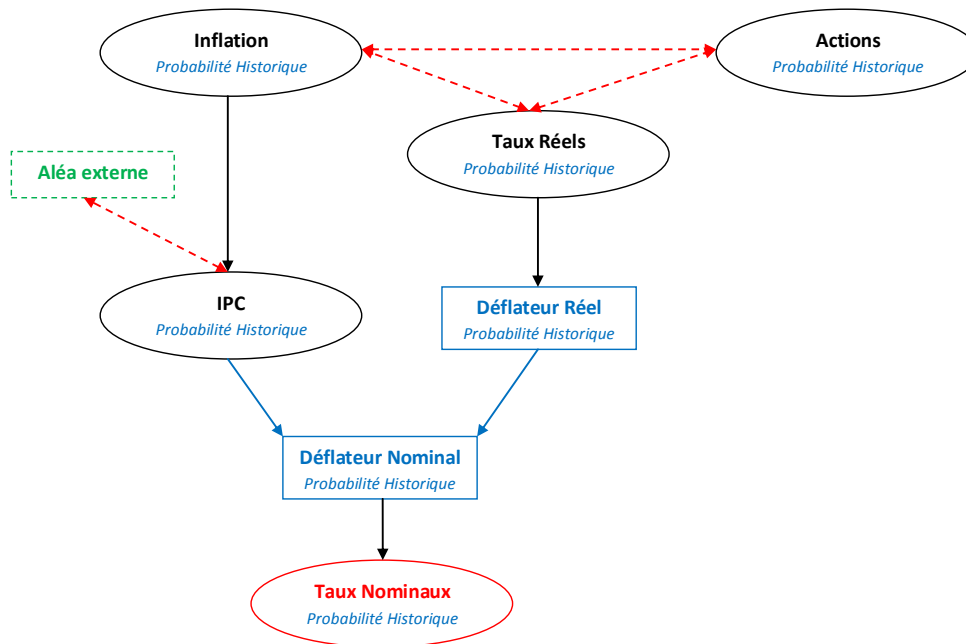


FIGURE 7.3 – Schéma du modèle de *Brennan et Xia (2000)*. Les flèches rouges représentent les corrélations entre variables, les flèches noires les liens entre les dérivés et les flèches bleues les liens entre déflateurs.

7.4 Modèle d’AOA de Jarrow et Yildirim – 2003

Le modèle de *Jarrow et Yildirim (2003)* est un modèle *HJM* à trois facteurs permettant de valoriser des produits nominaux et indexés inflation, et utilisant l’analogie de la monnaie étrangère. Ce modèle pionnier est devenu populaire dans la littérature financière et permet également de valoriser des produits dérivés d’inflation.

Variables modélisées Les variables modélisées sont les suivantes :

- **Les taux d’intérêt nominaux.** Les taux nominaux sont modélisés sous la probabilité risque neutre locale par un modèle de *Hull and White (1995)* à un facteur :

$$dr_n(t) = [\theta_n(t) - a_n r_n(t)] dt + \sigma_n dW_n(t)$$

Comme nous l’avons mentionné précédemment, ce type de modèle est cohérent avec la courbe de taux observée.

- **Les taux d’intérêt réels.** Dans le cadre de l’analogie de la monnaie étrangère, les taux réels prévalent dans une économie possédant *sa propre probabilité risque neutre*. Sous la **probabilité risque neutre étrangère**, la dynamique du taux réel suit un modèle de *Hull and White (1995)* à un facteur :

$$dr_r(t) = [\theta_r(t) - a_r r_r(t)] dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^F}(t)$$

Dans cette approche, il semble intuitif que les deux taux aient la même modélisation. On fera cependant attention de ne pas pousser cette analogie trop loin, puisque les taux réels sont *intrinsèquement* différents des taux nominaux, notamment par le fait qu’ils peuvent être négatifs.

- **L’Indice des Prix à la Consommation.** L’IPC est, dans le cadre de l’analogie de la monnaie étrangère, un taux de change. Sous la probabilité historique, il est modélisé par un modèle de *Black Scholes* classique, soit :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I^{\mathbb{P}}(t)$$

Ce modèle d’IPC est simple et diffère des modélisations auto-régressives classiquement préconisées.

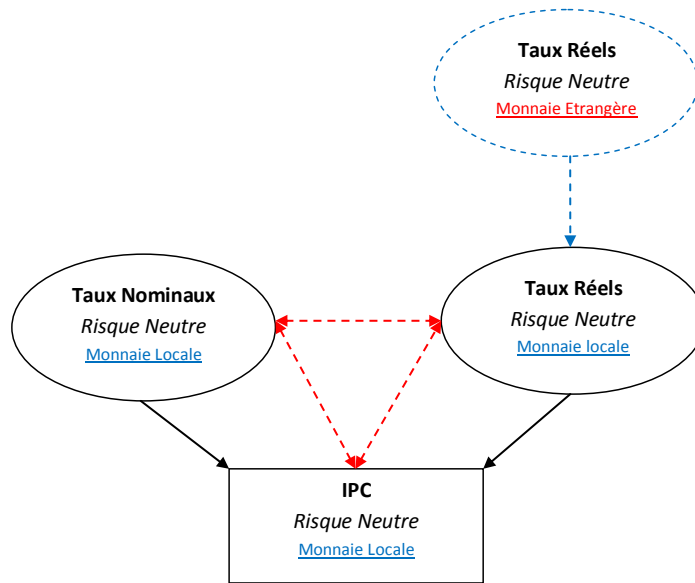


FIGURE 7.4 – Représentation Graphique du modèle de Jarrow et Yildirim. La flèche bleue représente un changement de probabilité, les flèches noires les contributions à la dérive de l’IPC, et les flèches rouges les corrélations.

La structure de dépendance est particulière dans ce modèle puisque tous les mouvements browniens sont supposés corrélés, ce qui rajoute trois paramètres au modèle.

Dynamiques sous la probabilité risque neutre locale L’avancée réelle proposée par *Jarrow et Yildirim* est de spécifier les dynamiques des trois variables d’intérêt sous la probabilité risque neutre et **sans négliger ni estimer la prime de risque d’inflation**. Remarquons tout d’abord que pour déterminer les dynamiques de ces variables sous la probabilité risque neutre locale, il suffit de déterminer leurs dérivées sous cette probabilité⁴. Pour cela, ils se servent de deux éléments :

- La relation d’AOA permet de lier la dérive de l’inflation sous la probabilité risque neutre aux taux courts nominaux et réels, comme nous l’avons vu au chapitre 5 :

$$\mu_I - \sigma_I \lambda_I(t) = r_n(t) - r_r(t)$$

Afin d’éviter l’estimation de la prime de risque d’inflation, les auteurs proposent d’utiliser cette relation pour définir la dynamique de l’inflation sous la probabilité risque neutre. Il reste donc à spécifier la dynamique du taux réel sous la probabilité risque neutre locale pour que le modèle soit complet.

- Comme nous l’avons montré au chapitre 5, l’actif $I(t)P_r(t, T)$ est négociable en unités de monnaie locale. Ainsi, le prix de cet actif actualisé doit être martingale sous la probabilité risque neutre locale. Ce résultat permet de spécifier la dynamique du zéro-coupon réel sous la probabilité risque neutre locale à partir de la dynamique du taux court réel sous la probabilité risque neutre étrangère.

Grâce à cette approche en deux temps, le modèle de *Jarrow et Yildirim* est totalement spécifié et ne néglige pas la prime de risque d’inflation.

Limites Ce modèle est un modèle d’AOA à un facteur, il permet de répliquer les courbes de taux réels et nominaux observées sur le marché. Cependant, pour un modèle d’arbitrage, il y a beaucoup de paramètres à régler afin de pouvoir valoriser des produits dérivés. En pratique, cette remarque est handicapante. En effet, généralement, les paramètres sont choisis de façon à égaliser les prix du marché avec les prix du modèle par

4. Ce résultat bien connu vient de l’application du théorème de Girsanov qui ne change pas la volatilité, mais uniquement la dérive.

différents algorithmes d'optimisation. Ici, on augmente directement la dimension du problème, ce qui oblige à avoir plus de produits observés et plus de temps de calcul pour trouver les bons paramètres.

Pour pallier ce problème, *Brigo et Mercurio* (2006) ont proposé deux modèles de marché. Ces modèles facilitent grandement la calibration sur le prix de produits observés. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre 3, ils permettent surtout de valoriser des produits dérivés et ne sont pas stables pour des projections long terme⁵. Ainsi, on préférera le modèle *Jarrow et Yildirim*, même si ce dernier est plus difficile à calibrer.

Comparaison sommaire des modèles

Afin de conclure ce chapitre, on propose une comparaison sommaire entre les quatre modèles de taux et d'inflation que nous venons d'aborder.

	Wilkie	Ahlgrim	Brennan et Xia	Jarrow et Yildirim
Type	Équilibre	Équilibre	Équilibre	AOA
Lien Histo. - RN	-	Proba. confondues	Déflateurs	Modèle RN
Lien Taux - Inflation	-	Fisher	AOA déflateurs	Monnaie étrangère
Dépendances	Cascade	Corrélations	Corrélations	Corrélation
Inflation auto-régressive	Oui	Oui	Oui	Non

TABLE 7.1 – Comparaison des modèles présentés selon leur prise en compte des variables de taux et d'inflation.

On retiendra deux points de cette comparaison :

- **Prise en compte des liens entre inflation et taux.** La majorité des modèles de la littérature ne porte pas une attention particulière à la modélisation des liens entre les trois variables d'intérêt. Cela s'explique principalement par le fait qu'il n'est pas courant de considérer l'inflation comme un facteur de risque couvrable. Dans ces circonstances, le recours à l'hypothèse de *Fisher* est justifié. Cependant, pour les assureurs ayant une branche à déroulement long, cette hypothèse peut s'avérer trop restrictive.
- **Prise en compte des primes de risque.** Les hypothèses faites sur les primes de risques sont souvent non maîtrisées. Ainsi, pour ne pas contraindre le MPR, il faut également calibrer avec soin les modèles de taux. Des modèles tels que celui de *Brennan et Xia* proposent alors un cadre de travail permettant de lier équilibre et hypothèses sur les MPR.

Dans la deuxième partie, nous allons voir un exemple de modèle permettant de prendre en compte ces éléments sans faire d'hypothèses sur le MPR.

5. Ils n'intègrent par exemple pas d'effets de retour à la moyenne, garants d'une stabilité des trajectoires simulées.

Deuxième partie

Modèle retenu

Chapitre 8

Modèle et données

Dans ce chapitre, nous allons proposer un modèle d'inflation et de taux en utilisant l'approche « simultanée » proposée dans le chapitre 6 de la partie 1. Nous allons également décrire le jeu de données permettant la calibration du modèle.

8.1 Présentation du modèle retenu

Le schéma 8.1 et le tableau 8.1 permettent de se faire une idée des caractéristiques du modèle retenu. Il est original dans le sens où il combine des éléments repris de plusieurs approches différentes que nous avons abordées précédemment. Dans les grandes lignes, il s'inspire de :

- *Jarrow et Yildirim* (2003) pour la partie **risque neutre**. L'intérêt est de garder un modèle d'AOA permettant de valoriser des produits de taux et d'inflation en valeur de marché et toutes **les formules fermées** qui sont liées. On modélise directement les deux taux et on utilise une relation d'AOA pour déduire l'IPC risque neutre.
- *Ahmad et Wilmott*¹ (2006) et *Ahlgrim et al.* (2005) pour le modèle **historique**. L'idée est de modéliser séparément l'inflation et les taux nominaux sous la probabilité historique, et d'en déduire le taux court réel. On préfère cette modélisation car elle permet d'utiliser un modèle auto-régressif sur l'inflation et donc d'**intégrer l'avis d'expert sur les modélisations** d'inflation historique.

Remarques Trois remarques :

- Pour des raisons de « symétrie » du modèle global, il aurait été préférable d'utiliser un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* pour le taux court nominal historique. Cela aurait homogénéisé les formules que nous verrons au chapitre 12. Cependant, il paraissait nécessaire d'avoir un modèle historique présentant des taux nominaux positifs.
- En déduisant le taux court réel des taux courts nominaux et d'inflation, on ne fait pas d'hypothèses particulières sur la forme de la prime de risque d'inflation. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 5, l'égalité entre taux courts nominaux, réels et d'inflation ne fait pas intervenir de prime de risque d'inflation. Cette prime impacte uniquement la structure par terme des taux.
- Il peut paraître surprenant de ne pas se servir de la spécification de la dynamique de l'inflation historique dans l'univers risque neutre. Cependant, nous tenons à ne pas changer le modèle d'AOA de *Jarrow et Yildirim* afin de garder les mêmes formules fermées et le même cadre *HJM*.

Le modèle est donc avant tout un modèle d'AOA au sens où il permet de valoriser avec la même précision que le modèle de *Jarrow et Yildirim* des produits dérivés d'inflation. Cependant, la partie historique du modèle est moins basée sur la courbe des taux initiale et prend en compte un phénomène de retour à la moyenne historique du taux court.

Les choix de modélisation nous sont propres et peuvent facilement être changés pour des besoins plus particuliers. L'intérêt est de montrer un **exemple** de ce qu'il est possible de faire.

1. On notera que dans le modèle historique, le taux court ne peut être négatif, alors qu'il peut l'être sous la probabilité risque neutre. Cette différence contredit l'équivalence des deux mesures de probabilité.

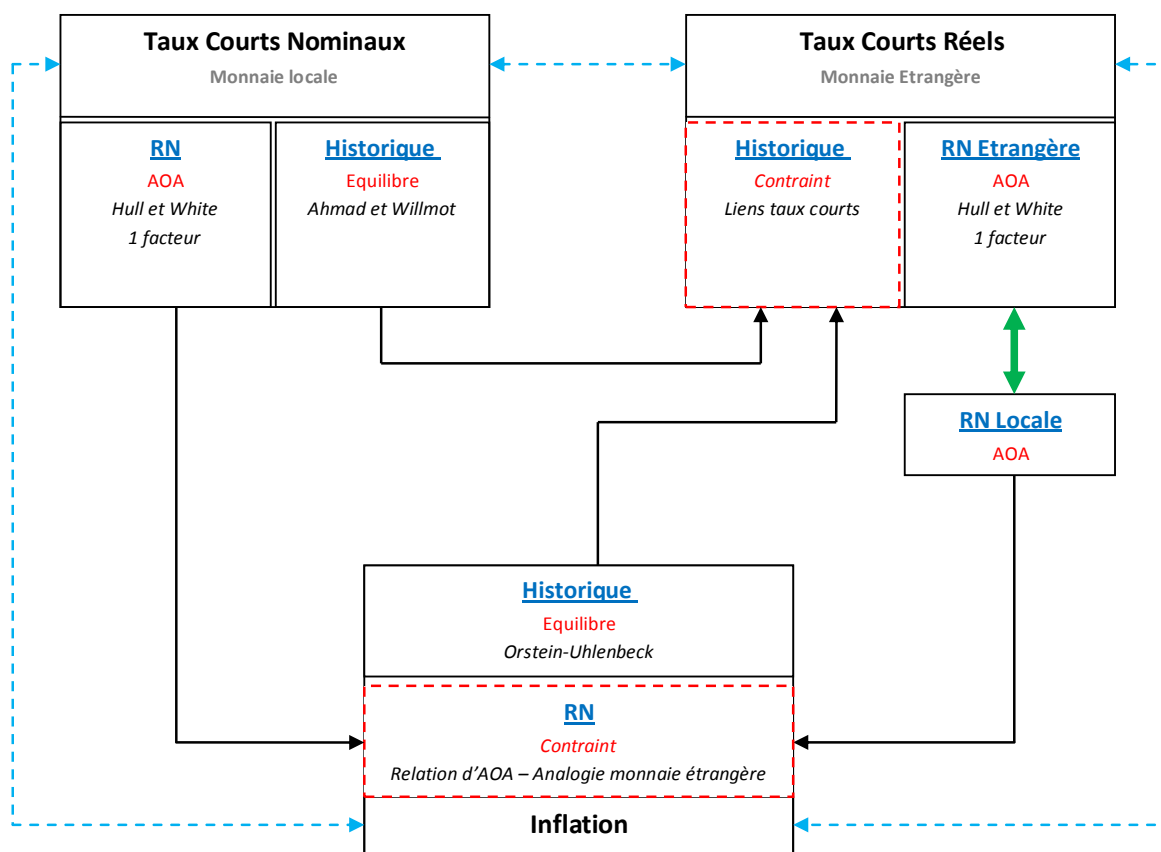


FIGURE 8.1 – Schéma du modèle retenu. Les flèches en pointillés représentent les corrélations, les flèches en trait plein représentent les contraintes sur les dérivés.

	Modèle retenu
Type	Historique : Équilibre – RN : AOA
Lien Histo. - RN	Modèles Simultanés
Lien Taux - Inflation	Analogie monnaie étrangère
Prime de risque d'inflation	Non
Dépendances	Corrélations
Inflation auto-régressive	Oui

TABLE 8.1 – Tableau synthétisant les caractéristiques du modèle retenu.

8.2 Choix des données

On a le choix entre deux jeux de données, les taux extraits du marché souverain français et ceux du marché de dérivés européen :

- Les emprunts d'État français, avec les BTF pour le court terme nominal, les OAT/BTAN pour le long terme nominal et les OATi/BTANi pour le long terme indexé ;
- Le marché des dérivés européen, avec les emprunts à taux variables *Euribor* pour le court terme nominal, les *swap* contre *Euribor* pour le long terme nominal et les *ZCIS* pour le long terme indexé.

Dans la suite, nous allons présenter les méthodes permettant d'extraire les prix de ZC à partir des données cotées. Nous allons nous intéresser à deux natures distinctes de données cotées :

- Les rendements actuariels d'OAT et OATi ;

- Les taux *swap* contre *EU6M* et *ZCHS*.

8.2.1 ZC à partir de rendements actuariels

L'extraction de taux zéro-coupon à partir de rendements d'obligations est une problématique inévitable des institutions investissant sur les marchés financiers. En fonction de la méthode utilisée, les résultats peuvent différer et changer le taux d'actualisation. Cependant, notre problématique n'est pas celle de la valorisation exacte d'instruments négociables et l'on peut se permettre d'utiliser des méthodes paramétriques de lissage plutôt que d'interpolation de courbes de taux.

Il y a plusieurs méthodes permettant d'extraire les courbes de taux ZC, on pourra par exemple consulter l'ouvrage de *Portrait et Poncet* (2011) sur ce point. Pour nos besoins, nous allons :

- Utiliser une méthode de récurrence pour obtenir les taux ZC aux maturités « entières » ;
- Utiliser une forme paramétrique de lissage afin d'obtenir les taux ZC pour des maturités non observées.

Extraction par récurrence

On se contente ici d'énoncer la formule qui donne les prix des ZC $P_k(t, T)$ à partir des rendements actuariels $y_k^A(t, T)$, $T \in [1, \dots, T_m]$ d'obligations du marché, qui figure dans *Portrait et Poncet* (2011) :

$$P_k(t, T) = \frac{1 - y_k^A(t, T) \sum_{m=1}^{T-1} P_k(t, m)}{1 + y_k^A(t, T)}$$

Cette méthode implique de disposer de rendements couvrant l'ensemble des maturités entières de 1 jusqu'à T_m . En pratique, il est rarement possible d'avoir ces données. Une solution pragmatique consiste à d'abord interpoler la courbe des rendements actuariels (avec une méthode par splines naturelles par exemple) et d'en extraire les maturités entières.

La donnée brute des taux ZC pour des maturités entières n'est pas satisfaisante pour deux raisons :

- La quantité de données à conserver est grande, surtout s'il y a plusieurs courbes de taux à garder en mémoire ;
- Il n'est pas possible avec ces seules maturités d'avoir des facteurs d'actualisation pour des maturités non entières.

Pour ces raisons, on utilisera une méthode de lissage afin d'extrapoler les rendements non observés et de condenser en peu de facteurs l'ensemble de la courbe de taux. Parmi l'ensemble des méthodes disponibles, on choisit la méthode de *Nelson et Siegel* (1987).

Méthode de lissage de Nelson et Siegel

Nous avons déjà présenté les grandes lignes de cette approche au chapitre 3 de la partie 1. Les auteurs proposent une écriture linéaire du rendement de ZC en fonction de trois paramètres. Pour un *Time To Maturity* τ , le rendement s'écrit :

$$y_k(t, t + \tau) = \beta_1 + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda}}}{\frac{\tau}{\lambda}} \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\lambda}}}{\frac{\tau}{\lambda}} - e^{-\frac{\tau}{\lambda}} \right]$$

Avec :

$$P_k(t, t + \tau) = e^{-\tau y_k(t, t + \tau)} \Leftrightarrow y_k(t, t + \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln (P_k(t, t + \tau))$$

Cette forme dépend linéairement du vecteur de paramètres β et non linéairement de λ . Le principal avantage de cette formulation est de permettre d'interpréter les paramètres du modèle :

- β_1 correspond au taux long terme. Ceci peut être vu en faisant tendre τ vers l'infini.
- β_2 correspond à la différence entre le taux long et le taux court. En effet, lorsque τ tend vers 0, $y(\tau)$ tend vers $\beta_1 + \beta_2$. On notera donc

$$r^{NS} = \beta_1 + \beta_2$$

l'estimation du taux *spot* en capitalisation continue par la méthode de *Nelson et Siegel*.

- β_3 paramètre la courbure de la courbe de rendements.
- λ est un paramètre d'échelle qui conditionne la vitesse à laquelle le rendement tend vers le taux long : plus il est grand, plus le rendement varie sur une longue plage de maturité.

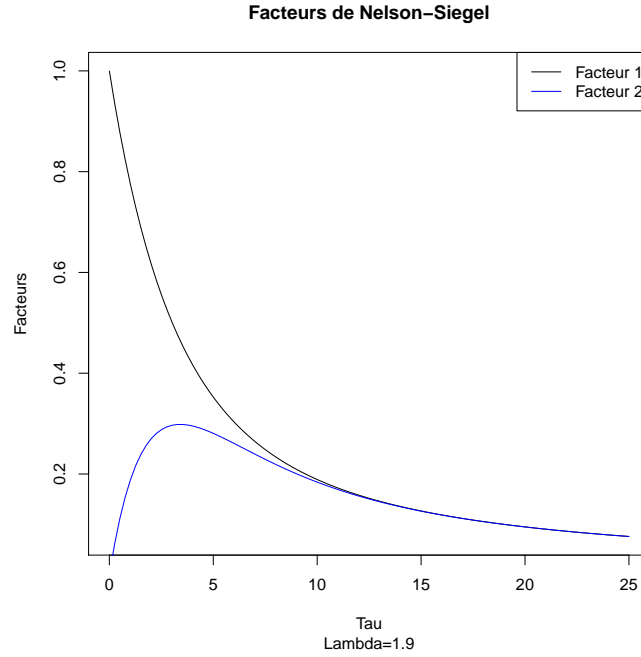


FIGURE 8.2 – Représentation des facteurs de la méthode de Nelson-Siegel

On peut également obtenir l'expression paramétrique du taux forward instantané, qui est utile pour la projection du taux court dans modèle de *Hull et White* :

$$f(t, T) = \frac{\partial(T-t)y(t, T)}{\partial T} \Rightarrow f^{\text{NS}}(t, T) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\tau\lambda^{-1}} + \frac{\tau\beta_3}{\lambda} e^{-\tau\lambda^{-1}}$$

Estimation des paramètres L'estimation des paramètres du modèle *Nelson et Siegel* passe par la résolution d'un problème d'optimisation. Par un critère des moindres carrés ordinaires, on a :

$$[\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \lambda^*] = \operatorname{argmin}_{\beta, \lambda} \sum_{i=1}^m [X(\tau_i, \lambda)\beta - y_k(t, t + \tau_i)]^2$$

avec :

$$X(\tau_i, \lambda) = \left[1, e^{-\tau_i\lambda^{-1}}, \frac{\tau_i}{\lambda} e^{-\tau_i\lambda^{-1}} \right]$$

Une solution rapide pour résoudre ce problème d'optimisation est de se donner une valeur de λ *a priori* et de résoudre le problème linéaire des moindres carrés avec cette valeur. En effet, à $\lambda = \lambda^*$ fixé, on a :

$$\beta^* = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}Y_{\text{obs}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{X}[i,] &= X(\tau_i, \lambda) & \mathbb{X} &\in \mathcal{M}_{m \times 3}(\mathbb{R}) \\ Y_{\text{obs}}[i] &= y_k(t, t + \tau_i) & Y_{\text{obs}} &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Cette méthode a l'avantage d'être rapide puisqu'il suffit d'inverser une fois la matrice de dimension trois $(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$ pour obtenir une solution analytique au problème d'optimisation. Dans la suite, nous utiliserons $\lambda^* = 1,9$ comme le préconise *Keita* (2011).

La méthode telle que nous venons de l'illustrer permet d'extraire des courbes de taux ZC nominales et réelles pour les obligations à coupons telles que les OAT et OATi. Nous allons voir que dans le cadre des *swap*, la méthode reste la même.

8.2.2 Rendements de ZC à partir de *swap*

Swap contre Euribor

La méthode est fondamentalement la même que pour l'extraction à partir de rendements d'obligations à coupons, à ceci près que dans un *swap* de taux, le nominal n'est jamais échangé. La formule, elle, reste valide en remplaçant le rendement d'obligations par le taux *swap* coté.

Swap – ZCIIS

Le *swap* ZCIIS a déjà été présenté au chapitre 4. Nous allons le valoriser et montrer que la donnée du taux *swap* ZCIIS permet de trouver le prix du ZC réel. Cette partie reprend la présentation de *Brigo et Mercurio* (2006).

Jambe indexée Pour un ZCIIS créé en 0 de maturité T vu en t , la jambe indexée paye en T le taux d'inflation effective sur la période $[0, T]$. Elle vaut donc :

$$\begin{aligned} JI(t, T) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \left(\frac{I(T)}{I(0)} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{I(t)}{I(0)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \frac{I(T)}{I(t)} \right] - P_n(t, T) \\ &= \frac{I(t)}{I(0)} P_r(t, T) - P_n(t, T) \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la définition 5.2 du ZC réel vue au chapitre 5 de la partie 1.

Jambe Fixe La jambe fixe paye en T des intérêts sur un taux annuel K , qui est le taux *swap* coté :

$$JF(t, T) = [(1 + K)^{T-t} - 1] P_n(t, T)$$

Le taux *swap* ZCIIS est choisi à la création du *swap* de façon à ce que le contrat ne soit profitable à aucune des parties, soit :

$$\begin{aligned} JF(0, T) &= JI(0, T) \\ \Leftrightarrow P_r(0, T) &= P_n(0, T)(1 + K)^T \end{aligned}$$

Cette dernière formule permet d'extraire **sans l'intermédiaire d'un modèle** les taux ZC réel à partir des taux nominaux et des taux *swap* ZCIIS. On peut ensuite utiliser la méthode de *Nelson et Siegel* afin d'extrapoler et lisser les résultats obtenus.

Jeu de données retenu

Les deux jeux de données sont suffisants pour permettre une calibration séparée du modèle. On choisit de mener la calibration sur les données des *swaps*, car leur plus grand nombre de maturités observées permet une calibration plus précise du modèle. De plus, nous verrons que le marché de dérivés de taux et d'inflation permet d'effectuer des calibrations de paramètres plus poussés du modèle.

Le tableau 8.2 résume les caractéristiques du jeu de données retenus.

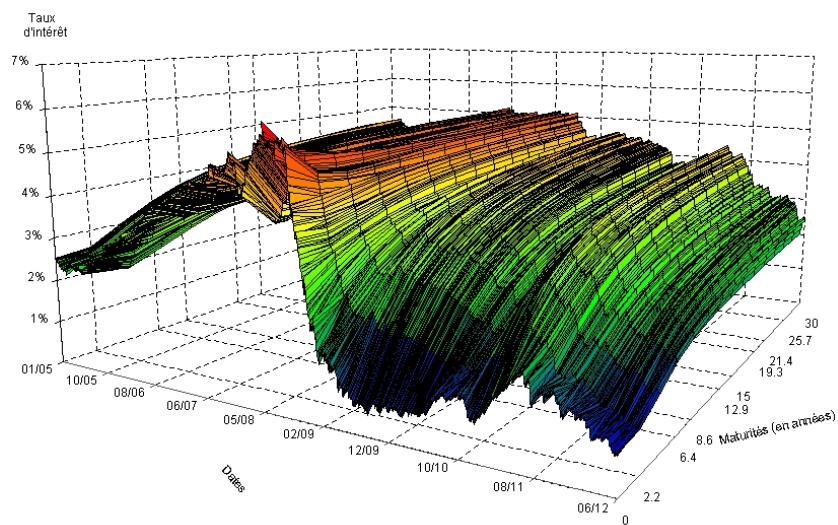


FIGURE 8.3 – Évolution des courbes de taux nominales ZC extraites des taux *swap* contre *EU6M* entre le 01/01/2005 et le 26/06/2012. On remarque la plus grande volatilité du taux court par rapport au taux long, ainsi que les fortes variations en 2008 dues aux pressions sur le marché interbancaire.

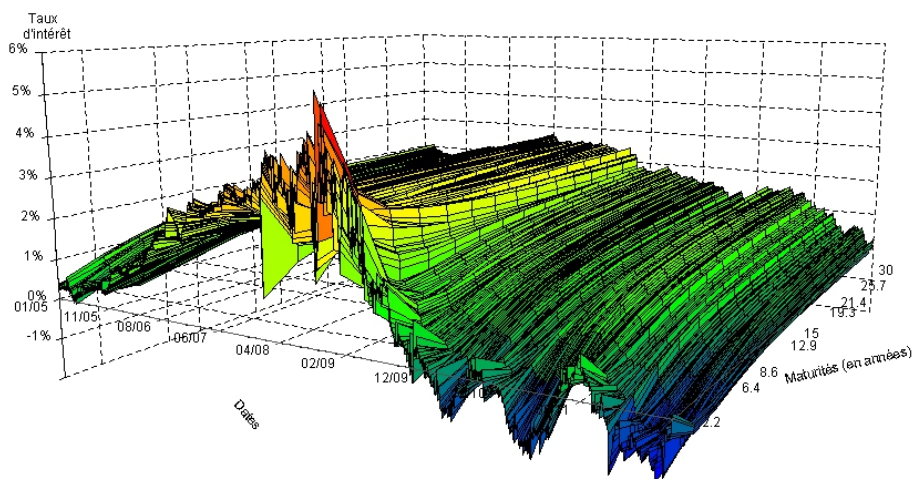


FIGURE 8.4 – Évolution des courbes de taux réelles ZC extraites des *ZCIS* entre le 01/01/2005 et le 26/06/2012. On remarque la plus grande volatilité du taux court par rapport au taux long. On constate la grande quantité de taux réels négatifs, spécialement depuis le début d'année 2012, conséquence de taux nominaux extrêmement bas et d'anticipations d'inflation stables.

	Début	Fin	Maturités	<i>Ticker Bloomberg</i>
Taux Euribor	01/01/2009	26/06/2012	1M → 12M	EUR00**M Index
Taux <i>Swap</i> EU6M			1Y → 30Y	EUSA** BGN Curncy
Taux ZCIIS			1Y → 30Y	EUSWI** CMPN Curncy
Cap ATM EU6M			2Y 4Y 6Y 8Y 10Y 12Y 15Y	EUCPAM** Curncy
Strike ATM EU6M			2Y 4Y 6Y 8Y 10Y 12Y 15Y	EUCPST** Curncy
Taux YIIS			2Y 4Y 6Y 8Y 10Y 12Y 15Y	EUSWIY** CMPN Curncy
IPCH			-	CPTFEMU Index

TABLE 8.2 – Tableau descriptif des données utilisées. Les ** représentent les maturités des produits considérés. L'historique retenu pour la calibration est volontairement réduit du fait du manque de liquidité des produits indexés inflation avant 2009.

Chapitre 9

Modèle Historique

Le modèle historique est original. L'idée est d'utiliser un modèle de taux court nominal d'équilibre sous la probabilité historique comme celui que proposent *Ahmad et Wilmott*, et de le combiner avec un modèle d'inflation auto-régressive comme celui que proposent *Ahlgrim et al.*, afin d'en déduire le taux court réel par la relation de *Fisher*.

9.1 Modèle Historique de taux court nominal

Formalisation Le modèle de taux court nominal s'inspire de l'approche de *Ahmad et Wilmott* (2006) vue au chapitre 6 de la partie 1. On rappelle que l'expression du taux court nominal dans ce modèle est :

$$dr_n(t) = u_n(r)dt + vr_n^\beta dW_n^{\mathbb{P}}(t) \quad (9.1)$$

Afin d'être cohérent avec le modèle d'AOA de *Jarrow et Yildirim*, on doit en plus supposer que la volatilité du taux court est constante et non stochastique. Il faut donc poser $v = \sigma_n$ et $\beta = 0$. Le modèle de taux courts nominaux devient :

$$dr_n(t) = u_n(r_n)dt + \sigma_n dW_n^{\mathbb{P}}(t)$$

Avec dans notre cas une distribution stationnaire lognormale de taux courts :

$$u(r_n) = -\frac{\sigma_n^2}{r_n} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} \ln \frac{r_n}{\bar{r}_n} \right]$$

Avec :

- \bar{r}_n la moyenne historique du logarithme de la distribution stationnaire du taux court ;
- a la volatilité historique du logarithme de la distribution stationnaire du taux court.

Estimation La procédure d'estimation est assez réduite ici. On décide de laisser l'estimation de σ_n pour le modèle risque neutre et on se contente d'estimer uniquement les paramètres de la dérive du taux nominal, soit a et \bar{r}_n .

L'estimation de ces paramètres ne dépend pas du modèle de volatilité retenu. Par conséquent, on peut garder l'estimation réalisée au chapitre 6. On rappelle sommairement les résultats dans le tableau 9.1 :

Paramètre	Valeur Euribor
\bar{r}_n	2 %
a	0.74
Retour à la moyenne	3.43 %

9.2 Modèle d'IPC

9.2.1 Formalisation

Le modèle historique d'IPC que nous avons choisi de retenir s'inspire de celui de *Ahlgrim et al.* (2005) repris par *Guibert* (2010).

Inflation court terme Cette approche consiste à spécifier un modèle d'*Ornstein-Uhlenbeck* pour le taux court d'inflation :

$$dq_t = a_q(\mu_q - q_t)dt + \sigma_q dW_q^{\mathbb{P}}(t) \quad (9.2)$$

Ce processus de retour à la moyenne présente un intérêt réel pour modéliser l'inflation puisque ses paramètres sont interprétables :

- a_q est le coefficient de retour à la moyenne ;
- μ_q est l'inflation long terme. Ce paramètre est facilement interprétable et permet d'intégrer un avis d'expert dans l'inflation attendue. On pourra par exemple le comparer avec l'objectif de la Banque Centrale Européenne de 2 %.

IPC L'inflation court terme q_t est comme un taux de capitalisation en composition continue pour l'IPC :

$$I(T) = I(t)e^{\int_t^T q_u du} \Rightarrow q_t = \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{T-t} \ln \frac{I(T)}{I(t)}$$

On peut écrire une formule fermée pour l'IPC avec ce modèle d'inflation. Pour cela, il faut expliciter les paramètres de la loi de $\int_t^T q_u du$, Gaussienne. On obtient alors :

$$I(T) = I(t) \exp \left[M_I^{\mathbb{P}}(t, T) + \sqrt{V_I(t, T)} \varepsilon_I(t, T) \right] \quad (9.3)$$

avec :

$$M_I^{\mathbb{P}}(t, T) = \mu_q(T-t) + \frac{\mathbf{q}_t - \mu_q}{a_q} \left[1 - e^{-a_q(T-t)} \right]$$

$$V_q(t, T) = \frac{\sigma_q^2}{a_q^2} \left[T-t + \frac{2}{a_q} e^{-a_q(T-t)} - \frac{1}{2a_q} e^{-2a_q(T-t)} - \frac{3}{2a_q} \right]$$

Plusieurs remarques :

- Cette formule dépend du taux d'inflation court terme prévalant en t ;
- L'aléa $\varepsilon_I(t, T)$ n'est pas parfaitement corrélé à $\varepsilon_q(t, T)$, la donnée de l'inflation court terme seule ne permet pas de déduire l'IPC.

De plus, en utilisant le lemme d'*Itô* sur $I(q_t, t)$, on peut également noter que la dynamique de $I(T)$ est, conditionnellement à \mathcal{F}_t :

$$\frac{dI(T)}{I(T)} = \left[q_t + \frac{1}{2} B_q^2(t, T) \sigma_q^2 + B_q(t, T) [a_q(\mu_q - q_t)] \right] dt + \sigma_q B_q(t, T) dW_q^{\mathbb{P}}(t)$$

avec :

$$B_q(t, T) = \frac{1}{a_q} \left[1 - e^{-a_q(T-t)} \right]$$

On remarque que plus on s'éloigne de la dernière observation, plus la volatilité change (augmente si $a_q > 0$) par l'intermédiaire du coefficient $B_q(t, T)$.

Les trois quantités spécifiées nous seront utiles par la suite pour les projections de variables d'intérêt. Il nous reste à estimer les paramètres du modèle, $[a_q, \mu_q, \sigma_q]$

9.2.2 Estimation

Les dynamiques étant spécifiées sous la probabilité historique, la procédure d'estimation peut directement utiliser les données historiques.

Il faut cependant porter une attention particulière à la fréquence des données retenues. Il y a deux écueils à éviter :

- L'utilisation des données journalières. En effet, la volatilité de l'inflation ainsi lissée est bien plus faible que la volatilité de la série initiale.
- L'utilisation des données mensuelles. En effet, il existe une forte saisonnalité des séries mensuelles, comme le confirment les auto-corrélations du graphe 9.1.

Données On se heurte ici à un problème pour l'utilisation des données annuelles. En effet, les séries d'IPCH sont disponibles depuis 2001 uniquement, ce qui ne permet pas de calibrer le modèle. Une solution pratique est de raisonner sur l'équivalence historique entre IPC et IPCH. Comme le montre le graphe 4.1 du chapitre 4 de la partie 1, les deux séries sont similaires. On peut donc considérer que les paramètres de l'IPCH sont égaux à ceux d'IPC.

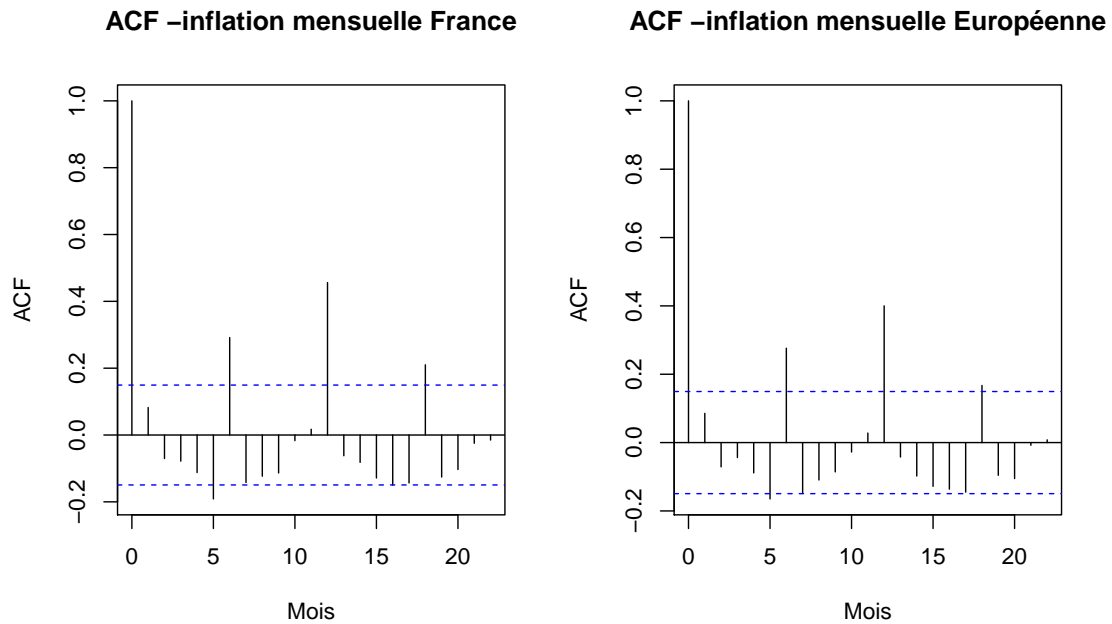


FIGURE 9.1 – Il existe une forte périodicité des données mensuelles. L'effet de périodicité à 6 mois est dû aux soldes.

Équations de calibration *Ahlgrim* (2005) fait l'approximation que le rendement en composition continue d'IPC annuel est égal à l'inflation court terme observée \hat{q}_t :

$$\ln \frac{I(t+1)}{I(t)} = \int_t^{t+1} q_u du \approx \hat{q}_t \times 1$$

En pratique, cela revient à assimiler le taux court terme d'inflation à son taux 1 an.

On peut alors utiliser une discrétisation exacte du processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* de l'inflation pour obtenir :

$$\hat{q}_{t+1} = \hat{q}_t e^{-a_q} + \mu_q (1 - e^{-a_q}) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_q}}{2a_q}} \varepsilon_q(t, t+1)$$

Cette discrétisation exacte peut également se réécrire en terme de séries chronologiques :

$$\hat{q}_{t+1} = \alpha_q + \beta_q \hat{q}_t + \varepsilon_q^1$$

Avec :

$$\alpha_q = \mu_q (1 - e^{-a_q})$$

$$\beta_q = e^{-k_q}$$

$$\varepsilon_q^1 \sim \mathcal{N} \left(0, \sigma_q'^2 = \frac{\sigma_q^2}{2a_q} [1 - e^{-2a_q}] \right)$$

Les variations de l'inflation court terme se comportent comme un processus auto-régressif d'ordre 1. On peut donc utiliser des résultats de la théorie des séries chronologiques afin d'estimer les paramètres du modèle.

Résultats d'Estimation L'estimation des paramètres de ce modèle est fréquente dans la littérature actuarielle. Par souci de cohérence, on décide d'utiliser les résultats de l'estimation sur l'IPC FR de l'étude menée par *Guibert* (2010)¹, référencés dans le tableau 9.2.2.

Paramètre	Valeur
μ_q	2,00 %
a_q	0,718
σ_q^2	0,005

TABLE 9.1 – Estimation des coefficients du processus d'inflation

Qualité d'estimation On pourra également se référer à l'étude de *Guibert* (2010) sur ce point.

1. On pourrait également choisir celle menée par *Faleh* (2011) qui diffère légèrement sur le choix de la période retenue pour la calibration.

Chapitre 10

Modèle Risque Neutre

Comme nous l'avons décrit à la partie précédente, le modèle de *Jarrow et Yildirim* (2003) est un modèle d'AOA rentrant dans le cadre *HJM*. Nous allons voir dans ce chapitre comment est construit le modèle et comment évaluer ses paramètres.

10.1 Formalisation

La présentation faite reprend les grandes lignes de l'article de *Jarrow et Yildirim* (2003), en utilisant notre modèle d'IPC qui est volontairement différent mais ne change pas les formules fermées originelles.

Dynamiques et formules fermées Les dynamiques des processus en jeu dans le modèle sont les suivantes, conditionnellement à \mathcal{F}_0 :

$$\begin{aligned}dr_n(t) &= (\theta_n(t) - a_n r_n(t))dt + \sigma_n dW_n^{\mathbb{Q}}(t) \\dr_r(t) &= (\theta_r(t) - a_r r_r(t))dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^F}(t) \\ \frac{dI(t)}{I(t)} &= \mu_I^{\mathbb{Q}} dt + \sigma_q B_q(0, t) dW_q^{\mathbb{Q}}(t)\end{aligned}$$

Il existe une formule fermée reliant le prix du ZC au taux court sous AOA. Cette formule ne dépend que du lien entre la dynamique du taux court dans sa probabilité risque neutre et le prix du ZC, elle est propre au modèle de *Hull et White* (1995). Ainsi, on peut l'utiliser indifféremment pour le prix du ZC nominal ou réel. Soient $0 < t < T$:

$$P_k(t, T) = \exp(A_k(t, T) - B_k(t, T)r_k(t)) \quad (10.1)$$

où :

$$\begin{aligned}B_k(t, T) &= \frac{1}{a_k} [1 - e^{-a_k(T-t)}] \\ A_k(t, T) &= \ln \frac{P_k(0, T)}{P_k(0, t)} + B_k(t, T)f_k(0, t) - \frac{\sigma_k^2}{4a_k} B_k(t, T)^2 [1 - e^{-2a_k t}]\end{aligned}$$

Démonstration. Cf. *Brigo et Mercurio* (2006) 3.3.2 « *Bond and Option Pricing* ». □

Cette formule est importante en pratique car elle permet de se concentrer sur la simulation de trajectoires de taux court et d'en déduire les prix des ZC associés. De plus, **elle peut être utilisée comme lien entre univers probabilistes**. Pour illustrer cette phrase, prenons un exemple de projection de trajectoires de prix de ZC dans l'univers **historique**. On peut :

- Simuler une trajectoire de taux court sous la probabilité historique avec le modèle historique spécifié. On obtient p réalisations de taux courts $r_k(t_i)$, $i \in \{1, \dots, p\}$.
- Évaluer grâce à la formule fermée le prix des ZC correspondants aux taux court simulés $P_k(t_i, t_i + \tau)$, $[i, \tau] \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, \tau_m\}$. Pour cela, on utilise les paramètres du modèle risque neutre.

Contraintes d'AOA Comme nous l'avons vu précédemment, la relation d'AOA provenant de l'analogie du taux de change permet d'écrire, conditionnellement à \mathcal{F}_0 :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r_n(t) - r_r(t)]dt + \sigma_q B_q(0, t) dW_q^{\mathbb{Q}}(t) \quad (10.2)$$

Cette formule permet de faire le lien entre les trois grandeurs modélisées sous la probabilité risque neutre, même si la dynamique de l'IPC est théoriquement la même que sous la probabilité historique.

Changement de probabilité Il reste à déterminer la dynamique du taux court réel sous la probabilité risque neutre locale pour compléter le modèle. Pour cela, il faut utiliser le fait que l'actif $I(t)P_r(t, T)$ est négociable sur le marché nominal. Ayant changé la volatilité du modèle originel, la formule n'est pas la même que celle proposée par les auteurs. On trouve, conditionnellement à \mathcal{F}_0 :

$$dr_r(t) = [\theta_r(t) - a_r r_r(t) - \rho_{rq} \sigma_r \sigma_q B_q(0, t)] dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad (10.3)$$

Démonstration. Cf. Annexe B. □

Plusieurs remarques :

- Dans le cas où $\rho_{rq} = 0$, les dynamiques des taux réels sous la probabilité risque neutre locale et étrangère sont confondues. En effet, dans le cas où l'inflation et les taux réels sont indépendants, le numéraire « monnaie étrangère » conserve la probabilité risque neutre locale.
- Il apparait un coefficient de plus que pour le modèle de *Jarrow et Yildirim*, a_q le coefficient de retour à la moyenne. On remarque cependant que l'interprétation des coefficients n'a pas changé d'un modèle à l'autre.

Cette dernière formule vient compléter le modèle et permet de projeter les variables de taux court dans le modèle sous la probabilité risque neutre afin d'en déduire les différents prix de ZC.

Ratios de Couverture Dans ce modèle et comme le rappelle la formule 10.1, les prix de ZC sont des fonctions déterministes du taux court. On peut évaluer les sensibilités théoriques des prix de ZC données par le modèle aux variations du taux court :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_r(t, T)}{\partial r_r(t)} &= -P_r(t, T) B_r(t, T) \\ \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial r_n(t)} &= -P_n(t, T) B_n(t, T) \\ \frac{\partial P_r(t, T)}{\partial r_n(t)} &= \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial r_r(t)} = 0 \\ \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial I(t)} &= \frac{\partial P_r(t, T)}{\partial I(t)} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit les sensibilités des obligations à taux fixe et indexées inflation par rapport aux taux *spot* réel, taux *spot* nominal et inflation. En rappelant les valorisations des obligations données aux chapitres 2 et 4 de la partie 1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}_r(t)}{\partial I(t)} &= \frac{\partial \mathcal{B}_n(t)}{\partial I(t)} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}_r(t)}{\partial r_r(t)} &= - \sum_{i=0}^{\lfloor T-t \rfloor} c N b_r(t, i + \theta) P_r(i + \theta) - N b_r(t, T) P_r(T - t) \\ \frac{\partial \mathcal{B}_n(t)}{\partial r_n(t)} &= - \sum_{i=0}^{\lfloor T-t \rfloor} c N B_n(t, i + \theta) P_n(i + \theta) - N B_n(t, T) P_n(T - t) \end{aligned}$$

Ces sensibilités nous seront utiles pour valider le modèle. En effet, étant données ces sensibilités, on peut construire des portefeuilles localement insensibles (au sens du modèle et au premier ordre) à la variation du taux *spot* et/ou de l'inflation. Ainsi, si le modèle est bien calibré, la valeur de marché du portefeuille doit rester stable au cours du temps.

Il reste à calibrer les modèles de taux afin de conclure sur la structure du modèle risque neutre.

10.2 Calibration des modèles de taux

L'estimation des paramètres des processus de taux est plus complexe que pour le modèle historique. En effet, les données ne sont pas *directement observables* puisque modélisées sous la probabilité risque neutre. Dans une approche *HJM*, la calibration du modèle se fait par la spécification des paramètres de volatilité. Il faut donc trouver les paramètres $[\sigma_k, a_k]$ du modèle.

Nous allons voir qu'il existe deux choix de calibration qui conduisent à des estimations différentes des paramètres : celles qui se basent sur l'historique du processus de taux, dites calibration *historiques*, et celles qui se basent sur le prix de produits dérivés se valorisant avec des modèles, dites calibrations *implicites*.

Cette section ne présente pas de manière exhaustive toutes les méthodes de calibration. Pour plus d'informations, on pourra se référer à *Brigo et Mercurio* (2006), l'article de *Date et Wang* (2009) qui propose une comparaison prédictive des calibrations par filtre de *Kalman*, ou encore *Park* (2004) qui propose un tour d'horizon des méthodes de calibration.

10.2.1 Volatilités et modèles de volatilité

La volatilité est une donnée importante des modèles de valorisation. Pour plus d'informations sur les modèles de volatilité, on pourra consulter l'ouvrage dédié de *Gatheral* (2006). Il existe plusieurs hypothèses faites sur la volatilité des titres :

- Certains modèles la suppose **constante** dans le temps. C'est par exemple le cas du modèle de *Black et Scholes* pour les actions, ou *Ho et Lee* pour les taux. Cependant, cette hypothèse a été remise en cause par l'observation long terme des rendements d'actions. Ainsi, d'un point de vue couverture, les traders qui utilisent le modèle de *Black et Scholes* doivent constamment changer leur hypothèse de volatilité pour atteindre les prix du marché de produits dérivés.
- Certains modèles la suppose **déterministe**. C'est le cas du modèle de *Hull et White* qui suppose que la volatilité d'un ZC augmente quand il se rapproche de sa maturité. De la même façon, cette hypothèse a été remise en cause par les périodes de tension sur les marchés de taux. Les paramètres de ces modèles doivent également être changés régulièrement afin d'atteindre les prix du marché de produits dérivés.
- Enfin, d'autres modèles la suppose **aléatoire**. C'est le cas des modèles à volatilité stochastique. Ces modèles modélisent souvent à part la volatilité comme une variable *ad-hoc* et l'intègrent à des modèles plus généraux. On peut citer le modèle d'*Heston* qui modélise la volatilité par un processus de *CIR* et préserve l'effet de retour à la moyenne en garantissant une variable positive. La calibration de ces modèles est réputée pour sa complexité, mais permet de prendre en compte la dépendance de la volatilité implicite avec le prix d'exercice de l'option¹ pour la valorisation de produits dérivés en dehors de la monnaie.

Volatilité	Valorisation de dérivés ATM	Smile/Skew	Calibration
Constante	Une volatilité par maturité	Non	Dimension 1
Déterministe	Une volatilité pour toute maturités	Non	Plusieurs dimensions
Aléatoire	Volatilité du modèle	Oui	Calibration processus

TABLE 10.1 – Comparaison des modèles de volatilité de taux ZC.

Modèle de Hull et White Le modèle de *Hull et White* fait l'hypothèse que la volatilité du ZC est déterministe. Cependant, lorsqu'il s'agit de donner une valeur de marché à un produit dérivé, les agents doivent anticiper la **volatilité future** des taux et n'utilisent pas uniquement la volatilité *instantanée* des taux, l'important étant souvent la volatilité du sous-jacent sur toute la période qui sépare la création de l'option de son exercice. On comprend que la seule utilisation de la volatilité *instantanée* des sous-jacents ne permet pas de valoriser correctement des produits dérivés.

1. Appelée *Smile* et *Skew*.

Afin de pallier cette insuffisance et sans pour autant utiliser un modèle à volatilité stochastique, on peut extraire du prix des instruments dérivés cotés la volatilité qu'il faudrait pour que le prix donné par le modèle soit égal à sa valeur de marché : *Brigo et Mercurio* (2006) l'appellent **volatilité intrinsèque**² du modèle.

Nous allons effectuer les calibrations de la volatilité historique et intrinsèque et comparer les résultats obtenus dans le cas de la volatilité nominale.

10.2.2 Calibration sur volatilité historique

Comme le rappelle *Park* (2004), il y a plusieurs alternatives pour calibrer le modèle sur la volatilité historique :

- Calibrer le modèle sur les volatilités des prix de ZC observés. On utilise alors l'information de l'ensemble de la courbe des taux.
- Calibrer le modèle sur des données de taux court. Cette estimation peut se révéler fastidieuse car il est difficile d'extraire du taux court l'intégralité des paramètres de la fonction de volatilité.

Par souci de simplicité, et de la même façon que *Jarrow et Yildirim* (2003), on choisit d'effectuer une calibration sur les séries chronologiques des rendements afin de proposer des estimateurs des deux paramètres des deux fonctions de volatilité $[\sigma_k, a_k]$. Cette méthode reprend celle proposée par *Park*³ (2004) mais en utilisant des discrétisations exactes.

Loi des Rendements Pour les rendements de ZC nominaux et réels, on peut écrire pour un intervalle de temps Δ (typiquement un jour) :

$$\ln \frac{P_k(t + \Delta, T)}{P_k(t, T)} = \int_t^{t+\Delta} \left[\mu_k^{\mathbb{P}}(u, T) - \frac{1}{2} \Sigma_k^2(u, T) \right] du - \int_t^{t+\Delta} \Sigma_k(u, T) dW_k^{\mathbb{P}}(u)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_n^{\mathbb{P}}(u, T) &= r_n(u) - \lambda_n(u) \Sigma_n(u, T) \\ \mu_r^{\mathbb{P}}(u, T) &= r_r(u) - [\lambda_r(u) + \rho_{rq} \Sigma_q(0, u)] \Sigma_r(u, T) \end{aligned}$$

En supposant la constance des dérivées, les rendements instantanés suivent une loi normale **sous la probabilité historique** :

$$\ln \frac{P_k(t + \Delta, T)}{P_k(t, T)} - \int_t^{t+\Delta} \left[\mu_k^{\mathbb{P}}(u, T) - \frac{1}{2} \Sigma_k^2(u, T) \right] du \sim \mathcal{N}(0, \tilde{\Sigma}_k^2(T - t, \Delta))$$

Avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_k^2(T - t, \Delta) &= \int_t^{t+\Delta} \Sigma_k^2(u, T) du \\ &= \frac{\sigma_k^2}{a_k^3} \left[\frac{1}{2} e^{-2a_k(T-t)} (e^{2a_k\Delta} - 1) - 2e^{-a_k(T-t)} (e^{a_k\Delta} - 1) + \Delta \right] \end{aligned}$$

On utilise ici une discrétisation exacte, puisqu'une dans tous les cas le problème n'est pas linéaire et une approximation ne permettrait pas une calibration plus facile des paramètres de volatilité.

Hypothèse de faibles variations et estimateur de volatilité instantanée On suppose que la volatilité et la *tendance* des rendements sont à variations faibles sur un intervalle $[t - h; t + h]$ centré en t , avec h assez grand pour que les estimateurs convergent. *Park* (2004) préconise une fenêtre de 90 à 180 jours de *trading*. On peut alors procéder en deux étapes pour estimer la volatilité :

- Estimateur de la *tendance* :

$$\hat{\mu}_k^{\mathbb{P}}(t, T) = \frac{1}{2h + 1} \sum_{i=-h}^{i=h} \ln \frac{P_k(t + i + \Delta, T)}{P_k(t + i, T)}$$

2. Par abus de langage, on utilise également la désignation de volatilité *implicite*. Cependant, on a vu au chapitre 3 que celle-ci désignait la volatilité d'un produit dérivé obtenue par une formule « standard » comme celle de *Black* pour les *caps*.

3. En fait, l'auteur tombe également dans l'écueil de l'oubli de la prime de risque. Cependant, s'intéressant uniquement à la volatilité du processus, les techniques qu'il présente restent valides.

- Estimateur de la volatilité instantané :

$$\hat{\delta}_h(t, T) = \frac{1}{2h+1} \sum_{k=-h}^h \left(\hat{\mu}_k^{\mathbb{P}}(t, T) - \ln \frac{P_k(t+\Delta, T)}{P_k(t, T)} \right)^2$$

On minimise ensuite l'écart entre l'estimateur de la volatilité et sa forme paramétrique sur les différentes maturités pour chaque date t . On cherche donc :

$$\{\sigma_r^*(t); a_r^*(t)\} = \operatorname{argmin}_{\sigma_r, a_r} \sum_{T=T_m}^{T_M} \left(\hat{\delta}_h(t, T) - \tilde{\Sigma}_k^2(T-t, \Delta) \right)^2$$

Limites Ce type d'estimation de la volatilité instantanée de la série des rendements présente plusieurs limites :

- Le nombre d'observations utilisées est plus faible que si l'on avait supposé la volatilité constante. Ainsi on peut critiquer la convergence des estimateurs. Ce problème peut être rédhitoire en particulier sur un nombre de données réduit.
- Cette méthode est plus sensible aux valeurs aberrantes. Une grande valeur de rendement isolée en t peut causer une augmentation de la volatilité sur tout l'intervalle $[t-h, t+h]$, soit $2h+1$ valeurs.

Validation des hypothèses

Il y a plusieurs résultats et hypothèses à tester. On peut notamment vérifier l'hypothèse de variations faibles de la volatilité. On peut vérifier que la volatilité estimée varie faiblement dans le temps. Pour cela, on peut par exemple contrôler les séries des coefficients estimés et vérifier que les variations de ces derniers sont faibles⁴. Le graphe 10.4 permet de confirmer ce point.

10.2.3 Calibration sur volatilité intrinsèque nominale

Pour évaluer la volatilité intrinsèque, il faut utiliser des produits dérivés de taux et d'inflation dont la valorisation dépend d'un modèle. Le choix des produits sur lesquels il faut calibrer le modèle et la méthode à utiliser est **un problème complexe**, qui nécessite un soin particulier à la fois pour ne pas prendre en compte des valeurs aberrantes, mais également sur le choix des algorithmes d'optimisation à utiliser. Sur ce sujet, la littérature est vaste, on pourra par exemple se référer à l'ouvrage de référence de *Brigo et Mercurio* (2006), au guide d'implémentation des modèles *HJM* de *Juan Monge Liaño* (2007), ou encore à l'ouvrage plus accessible de *John Hull* (2012).

On choisit ici de calibrer la volatilité du modèle de taux nominal de *Hull et White* à un facteur sur le prix de *caps* contre EU6M à la monnaie (**ATM**). Ces instruments ont été retenus pour leur grande liquidité et l'existence de maturités longues, d'importance dans notre étude. On comparera les résultats obtenus avec une calibration sur l'historique des taux. La présentation des formules fermées reprend celle de *Brigo et Mercurio* (2006).

Principes généraux d'un *Cap* EU6M

Nous avons fait une rapide présentation des *caps* sur EU6M au chapitre 2 de la partie 1. Nous allons ici rappeler le mécanisme de l'instrument financier et montrer que dans le cadre de notre modèle, il existe une formule fermée de valorisation se servant d'options sur *ZC*.

Un *cap* est un *swap* où la jambe fixe s'engage à payer une prime fixée initialement et la jambe variable paye plusieurs flux incertains. Chacun de ces paiements peut être vu comme un contrat à part entière, communément appelé *caplet*⁵ (**Cpl**).

4. La volatilité étant une fonction continue des paramètres, cela induira bien que la volatilité varie également faiblement.

5. Le recours aux *caplets* pour valoriser un *cap* se fait dans le même esprit que le recours aux *ZC* pour valoriser une obligation.

Remarques et notations Avant de donner la formule de valorisation, quelques précisions :

- Notons $L(t_{i-1}, t_i)$ le taux *Euribor* fixé en t_{i-1} valable pour la période $[t_{i-1}, t_i]$. Dans notre cas, $\tau_i = t_i - t_{i-1} = 6M$. Le taux *Euribor* est coté en composition annelle proportionnelle, soit :

$$\frac{1}{1 + \tau_i L(t_{i-1}, t_i)} = P_n(t_{i-1}, t_i) \Leftrightarrow L(t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{\tau_i} \left[\frac{1}{P_n(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right]$$

- Un *cap* est dit ATM lorsque le taux d'exercice est égal au taux *swap* sur la même référence et avec la même maturité que le *cap*, on le dit aussi à la *monnaie forward*.
- Pour un *cap* sur EU6M, les paiements sont espacés de six mois. Le premier paiement, qui a lieu six mois⁶ après le début du contrat, est couramment exclu du contrat, puisque le montant d'échange est connu et donc directement déductible de la prime.

Valorisation d'un Cap On peut montrer qu'un *caplet* sur EU6M est équivalent à une certaine option de vente européenne sur ZC (**ZBP**) :

$$Cpl(t, T, S, \tau, N, K_C) = N(1 + K\tau) \times ZBP \left(t, T, S, \frac{1}{1 + X\tau} \right)$$

Démonstration. En annexe. □

Cette égalité ne dépend pas du modèle de taux utilisé. Cependant, dans le cadre du modèle de *Hull et White* à un facteur, il existe formule fermée donnant le prix de l'option de vente sur ZC. On peut montrer que :

$$ZBP(t, T, S, K_P) = K P_n(t, T) \Phi(-h + \sigma_p) - P_n(t, S) \Phi(-h)$$

Avec :

- $\sigma_p = \sigma_n \sqrt{\frac{1 - e^{2a_n(T-t)}}{2a_n}} B_n(T, S)$
- $h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P_n(t, S)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$

Démonstration. En annexe. □

La valorisation d'un *cap* est alors donnée par la formule :

$$Cap(t, N, K) = \sum_{i=1}^n (1 + K\tau_i) ZBP \left(t, T, S, \frac{1}{1 + X\tau_i} \right)$$

Données On rappelle qu'on utilise les données de prix de *cap* à la monnaie entre le 01/01/2009 et 26/06/2012 de maturités⁷ :

[2Y, 4Y, 6Y, 8Y, 10Y, 12Y, 15Y]

Problème d'optimisation Soient m *caps* de maturités $[T_1, \dots, T_m]$ de prix⁸ en t $[Cap_1, \dots, Cap_n]$. Les paramètres $[\hat{a}_n, \hat{\sigma}_n]$ du modèle en t sont donnés par :

$$\{\hat{a}_n, \hat{\sigma}_n\} = \operatorname{argmin}_{\sigma_n, a_n} \sum_{p=1}^m \left(\frac{Cap_p - Cap_{\sigma_n, a_n}(t_p, 100, K_p)}{Cap_1} \right)^2$$

Cette optimisation est délicate en pratique, car elle est en dimension deux et le prix théorique est sensible à la valeur des paramètres. Ainsi, nous utilisons un algorithme de *quasi-Newton* implémenté dans **R**, qui permet d'imposer des bornes pour l'estimation des paramètres.

Résultats On peut comparer les résultats de volatilité implicite avec ceux de volatilité historique. À cette fin, le graphique 10.4 permet de comparer leurs paramètres et le graphe 10.2 permet de voir quelle serait l'erreur commise en valorisant des *caps* avec la volatilité historique.

6. On notera qu'en pratique, le *swap* commence deux jours après le début du contrat. De même, les paiements ont lieu le premier

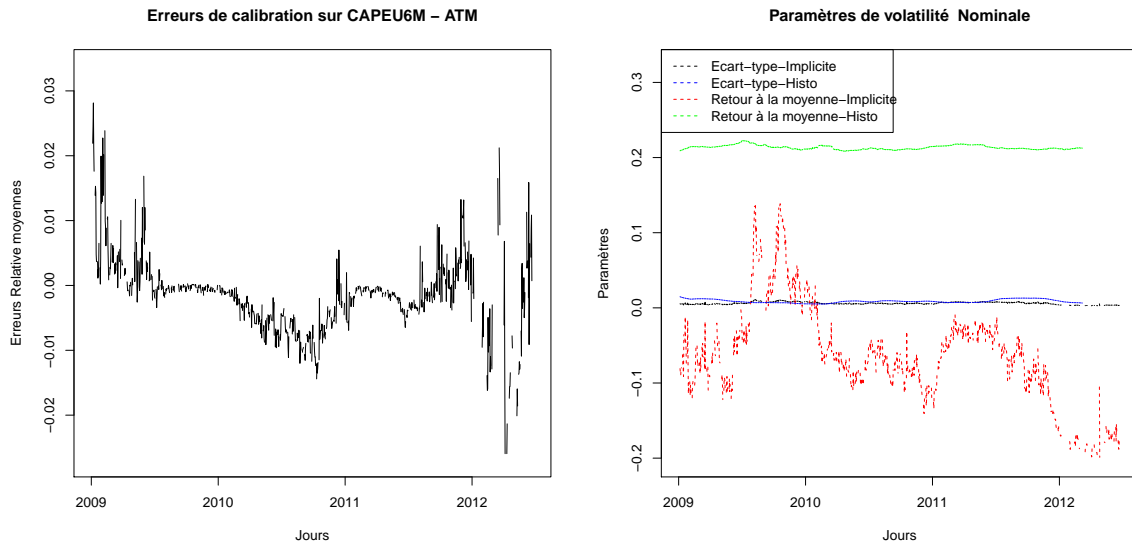


FIGURE 10.1 – Paramètres du modèle de *Hull et White* de volatilité nominale historique et implicite. Les paramètres provenant des deux modes d’estimation ne présentent pas de similarités claires. Les erreurs sont fortes en début et fin de période d’estimation à cause de la forte volatilité sur les marchés.

10.2.4 Calibration sur volatilité intrinsèque réelle

La calibration sur la volatilité intrinsèque réelle est plus complexe que la calibration sur les *caps/floors*. Cette complexité provient du plus grand nombre de paramètres dont dépend l’estimation. En effet, les corrélations interviennent aussi pour la valorisation de produits dérivés d’inflation dépendant d’un modèle.

La calibration aux données de marché est généralement effectuée sur des *YYIIS* plutôt que sur des *caps/floors* d’inflation du fait de leur plus grande liquidité et de leur valorisation plus facile que celle des *caps/floors* inflation.

Principes généraux d’un YYIIS

Nous présenterons uniquement les résultats principaux de valorisation. Pour les justifications théoriques, on pourra se référer au chapitre 16 de *Brigo et Mercurio* (2006).

Un *YYIIS* échange une jambe à taux fixe contre une jambe rémunérant le taux d’inflation effectif jusqu’à maturité. La valeur en $t < T_{i-1} < T_i$ d’un paiement de jambe fixe en T_i d’un *YYIIS* est :

$$JF_i = K \times P_n(t, T_i)$$

Avec K le taux *swap* coté tel que les deux jambes aient la même valeur à la création du *swap*. Le paiement de la jambe variable, quant à elle, vaut :

$$JV_i = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u) du} \left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 \right] \right]$$

En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$, on peut se ramener à l’espérance actualisée d’un *ZCIIS* de maturité T_i . On a finalement :

$$JV_i = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r_n(u) du} P_r(T_{i-1}, T_i) \right] - P_n(t, T_i)$$

Cette expression ne dépend pas du modèle utilisé.

jour ouvré après les 6 mois. Nous négligerons ces décalages dans la suite.

7. On choisit de ne pas utiliser des maturité court terme car il existe un phénomène de « bosse » des volatilités implicites que le modèle de *Hull et White* ne peut prendre en compte. On pourra se référer à *Brigo et Mercurio*(2006) sur ce point.

8. On sera prudent sur la nature des données puisque les *caps* sont souvent cotés en points de base et en pourcentage du nominal.

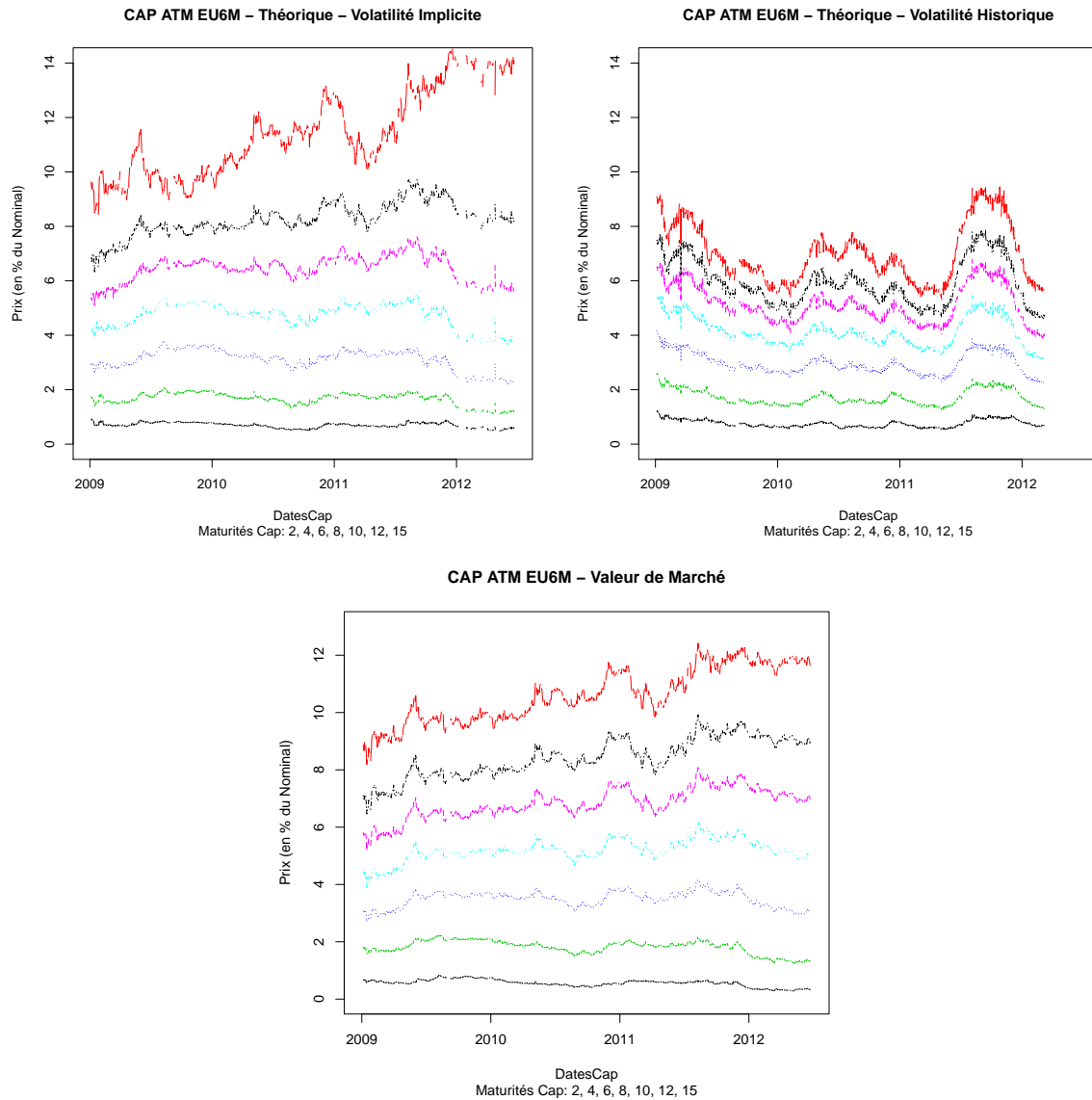


FIGURE 10.2 – La valorisation utilisant la volatilité historique sous-estime presque systématiquement le prix du produit dérivé, et d’autant plus pour les grandes maturités. L’utilisation de ces paramètres n’est donc ni prudente, ni précise pour l’estimation de la valeur de marché d’un passif d’assurance.

Valorisation avec le modèle de Jarrow et Yildirim

Comme nous l’avons vu précédemment, notre modèle est légèrement différent du modèle original des auteurs. Aussi, il faut adapter les formules de valorisation des instruments financiers. La valeur de la jambe indexée en 0 est :

$$\begin{aligned}
 YYIIS(M) = & N [P_r(0, T_1) - P_n(0, T_1)] \\
 & + N \sum_{i=2}^M \left[P_n(0, T_{i-1}) \frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} e^{\mathbf{C}(T_{i-1}, T_i)} - P_n(0, T_i) \right]
 \end{aligned}$$

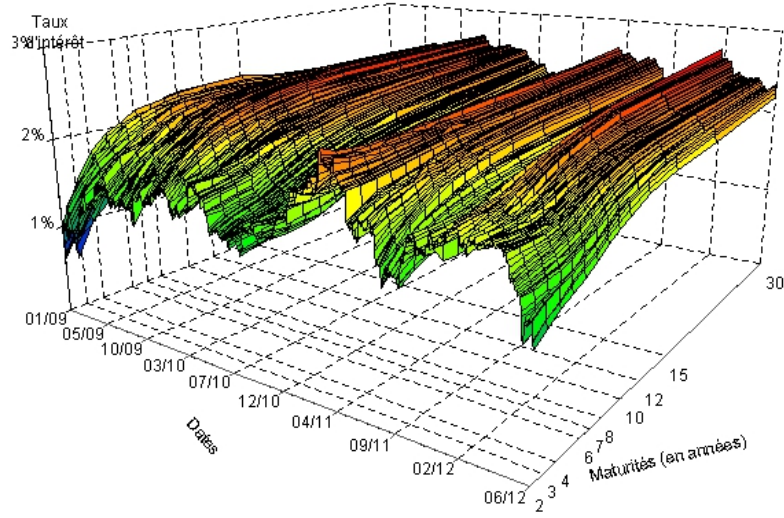


FIGURE 10.3 – Taux *swap* *YYIIS* cotés du 01/01/2009 au 25/06/2012. Ces taux sont proches des taux *swap* *ZCIS*, en particulier pour les faibles maturités.

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(T_{i-1}, T_i) = & \sigma_r B_r(T_{i-1}, T_i) \times \\ & \left[B_r(0, T_{i-1}) \left(\frac{\rho_{RQ} \sigma_q}{a_r - a_q} - \frac{1}{2} \sigma_r B_r(0, T_{i-1}) + \frac{\rho_{NR} \sigma_n}{a_n + a_r} ((1 + a_r B_n(0, T_{i-1})) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_{NR} \sigma_n}{a_n + a_r} B_n(0, T_{i-1}) - \frac{\rho_{RQ} \sigma_q}{a_r - a_q} B_q(0, T_{i-1}) \right] \end{aligned}$$

Démonstration. Cf. Annexe B. □

On remarque que dans cette expression, le premier paiement correspond à la valeur de la jambe variable d'un *ZCIS*, ce qui est cohérent avec les remarques précédentes.

La valorisation de ce produit implique la connaissance de **huit** paramètres que l'on peut réduire à six en utilisant les estimateurs des volatilités nominales implicites.

Cependant, dans la valorisation ci-dessus, l'écart-type de l'inflation σ_q et la corrélation ρ_{RQ} interviennent uniquement proportionnellement l'un à l'autre. Ainsi pour toute constante non nulle d :

$$\mathbf{C}(T_{i-1}, T_i, \sigma_q, \rho_{RQ}) = \mathbf{C}\left(T_{i-1}, T_i, \sigma_q \times d, \frac{\rho_{RQ}}{d}\right) \Rightarrow YYIIS(M, \sigma_q, \rho_{RQ}) = YYIIS\left(M, \sigma_q \times d, \frac{\rho_{RQ}}{d}\right)$$

Pour éviter ce problème d'identification des paramètres, on choisit d'utiliser les estimateurs des paramètres de volatilité $[\sigma_q, a_q]$ obtenus au chapitre précédent. L'optimisation est alors en dimension 4 :

$$\Theta_r = [a_r, \sigma_r, \rho_{NR}, \rho_{RQ}]$$

Ce nombre est élevé et il faut ajouter des contraintes pour les paramètres de corrélation, ce qui rend l'estimation délicate. De plus, la calibration sera sensible à l'erreur commise sur toutes les autres calibrations. Le problème d'optimisation peut être écrit ainsi :

$$\hat{\Theta}_r = \operatorname{argmin}_{\{a_r, \sigma_r, \rho_{NR}, \rho_{RQ}\}} \sum_{p=1}^m \left(\frac{JF_p - YYIIS(M_p)}{JF_p} \right)^2$$

Résultats Comme nous l'avons précisé précédemment, la calibration sur *YYIIS* est plus complexe que celle sur les *caps*. Cependant, comme le montrent les graphes 10.5, l'estimation des *YYIIS* n'est pas sensible aux paramètres du modèle. Ainsi, même l'estimation des prix par la volatilité historique donne des résultats cohérents. Cela est dû au fait que dans la formule de valorisation, les paramètres du modèle interviennent principalement au travers d'un facteur d'ajustement, **C**. Deux remarques sur ce point :

- Cette faible dépendance aux paramètres peut s'avérer problématique si l'on souhaite obtenir une estimation précise des coefficients. Pour pallier ce problème, on peut envisager une calibration sur les *IICAP*. Cependant, après avoir tenté une telle calibration, nous choisissons de renoncer à cause de sa complexité et de la difficulté d'obtenir des erreurs faibles.
- Cette dépendance rend le *YYIIS* plus fiable d'utilisation au sens où la valorisation de ce *swap* repose plus sur les prix de *ZC* que sur les paramètres du modèle.

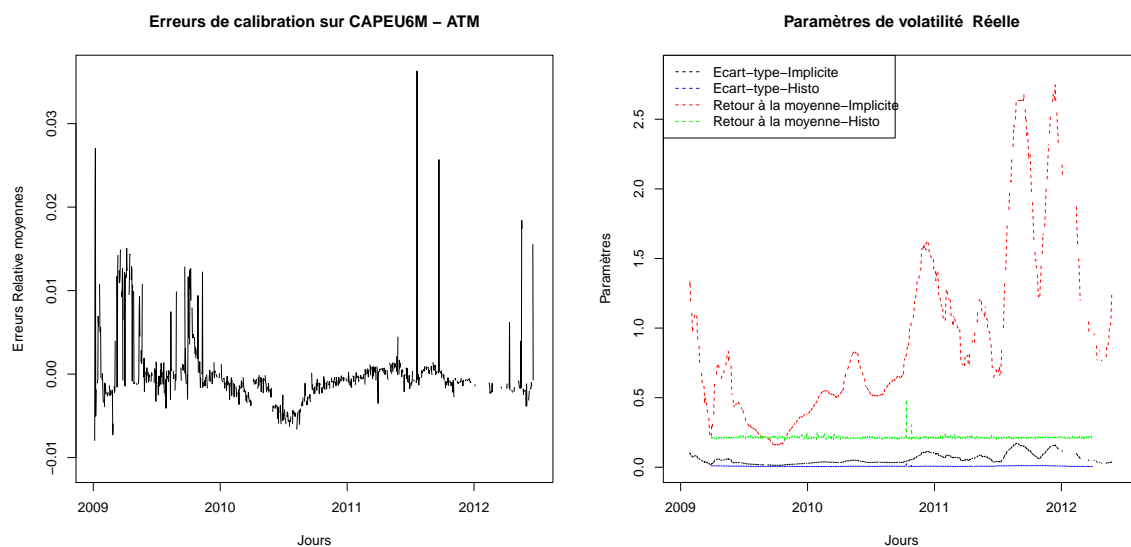


FIGURE 10.4 – Paramètres du modèle de *Hull et White* de volatilité réelle historique et implicite.

L'estimation de la volatilité réelle se fait par l'intermédiaire des corrélations implicites, comme nous l'avons vu précédemment. Cependant, il nous reste encore à voir si les dépendances du modèles sont bien représentées par le seul paramètre de corrélation. En effet, rien ne nous garantit que la *copule Gaussienne* soit adaptée à la modélisation de la dépendance entre facteurs de risque.

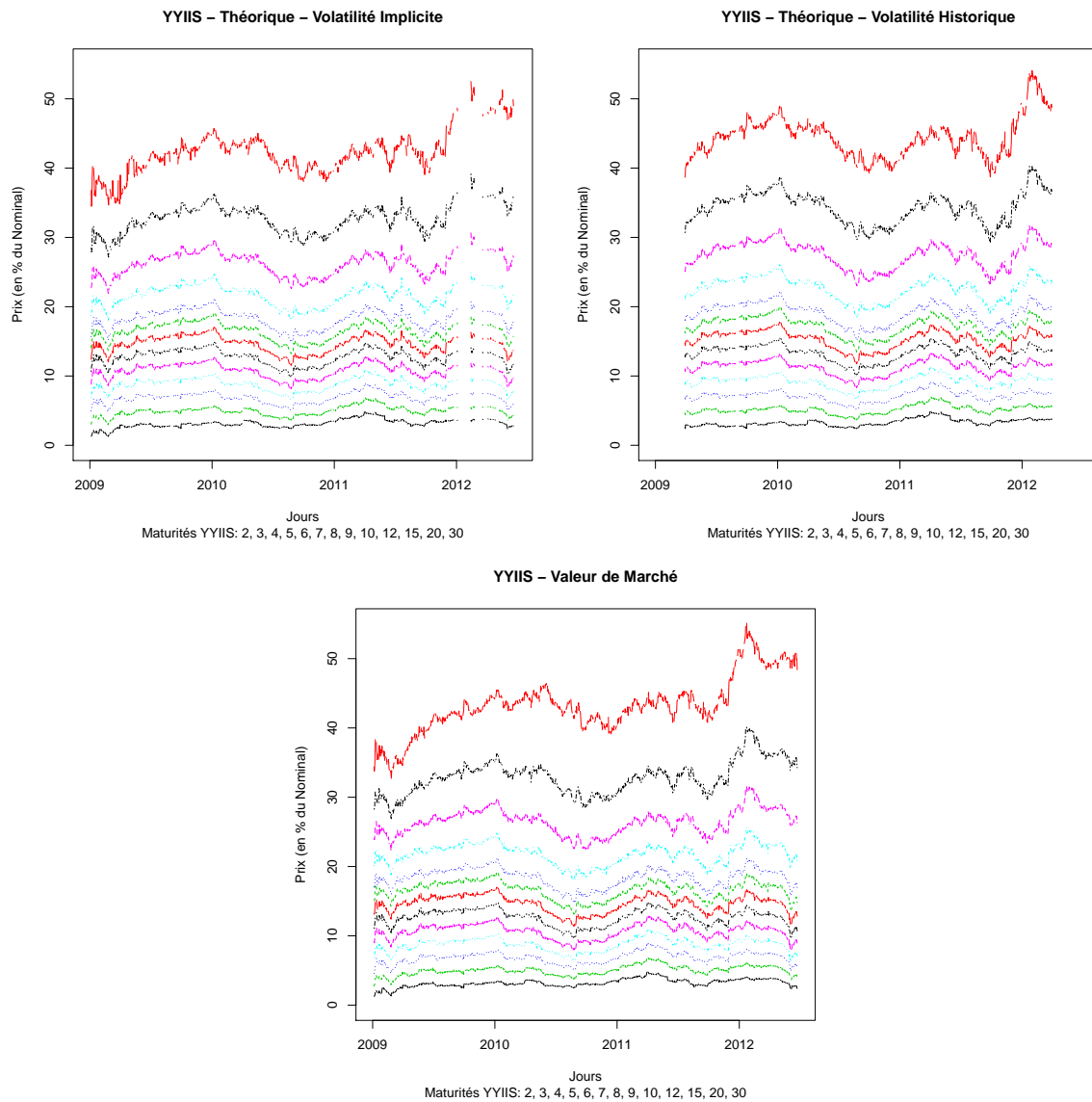


FIGURE 10.5 – Valorisation des YYIIS avec différentes volatilités. On remarque que le prix du YYIIS n'est pas sensible aux paramètres du modèle au sens où même la calibration sur volatilité historique donne de bons résultats.

Chapitre 11

Structure de dépendance du modèle

Outre l'analogie du taux de change qui impose des contraintes sur les *dérivées* des trois facteurs, la cohérence entre les éléments est régie par trois corrélations, $(\rho_{ir}, \rho_{in}, \rho_{rn})$. Le but de ce chapitre est d'évaluer ces corrélations et voir si la structure de dépendance théorique du modèle permet bien de représenter la dépendance empirique entre les facteurs.

La structure de dépendance théorique du modèle peut être décomposée en deux hypothèses distinctes :

- La dépendance entre maturités de ZC ;
- La dépendance entre facteurs du modèle.

11.1 Dépendance entre maturités de ZC

On choisit de montrer une hypothèse importante inhérente à l'utilisation des modèles de taux à un facteur. Comme nous l'avons précisé au chapitre 3, dans le modèle de *Hull et White*¹, on peut montrer que tous les rendements de ZC à une date donnée sont **comonotones** :

$$\text{Cor}(\ln P_k(t, T), \ln P_k(t, T')) = 1$$

Ce résultat découle directement de la formule fermée donnant le prix du ZC en fonction de la valeur du taux court :

$$P_k(t, T) = \exp(A_k(t, T) - B_k(t, T)r_k(t))$$

Ainsi, on fait l'hypothèse dans le modèle de *Hull et White* qu'un aléa à la hausse des taux aura des répercussions à la hausse sur toute la courbe de taux, seule l'**intensité** sera différente, et contrôlée par $B_k(t, T)$.

Il faut donc vérifier si cette hypothèse de corrélation à 1 des différentes maturités est compatible avec les données observées. À cette fin, on se propose de vérifier cette hypothèse sur les rendements de ZC issus des taux nominaux et réels, les résultats sur les taux ZC *swap* étant similaires. Le graphe 11.1 montre l'évaluation des « auto-corrélations » entre les maturités des rendements nominaux et les « auto-corrélations » entre les maturités des rendements réels.

Ce graphe est une représentation simplifiée des corrélations pour une grande quantité de maturités différentes. On représente ainsi plusieurs interactions en même temps.

11.2 Dépendance entre facteurs de risque

Dans cette section, on se propose de spécifier la dépendance du modèle et calibrer les derniers paramètres manquants, à savoir les corrélations entre processus $\{\rho_{RN}, \rho_{IN}, \rho_{IR}\}$.

1. La démonstration reste valable pour les modèles affines à un facteur.

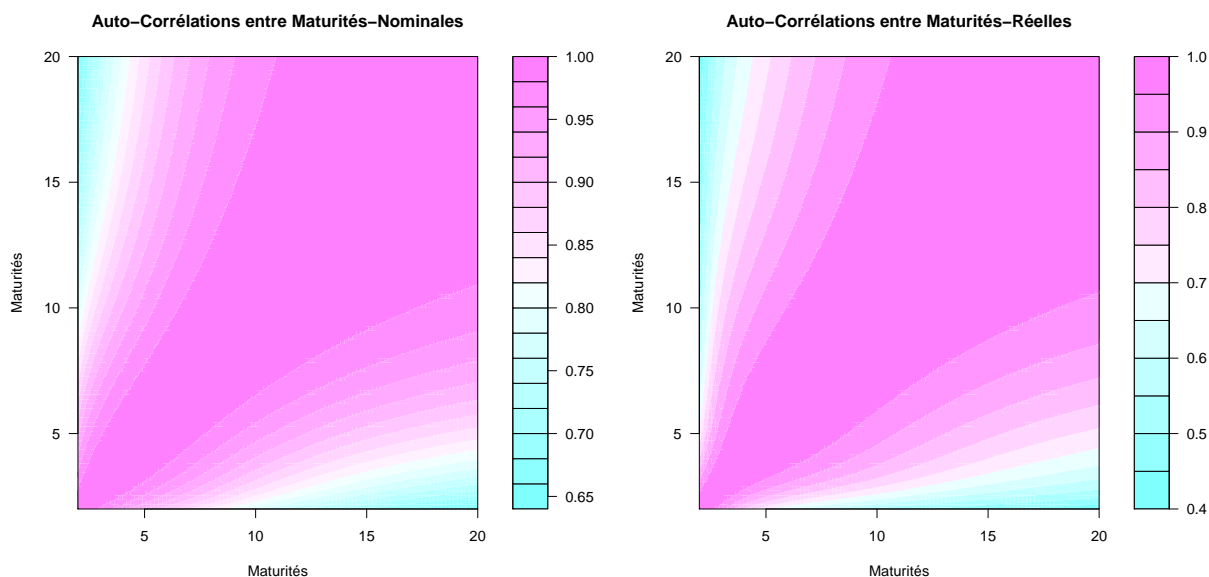


FIGURE 11.1 – Corrélations entre maturités pour taux ZC nominaux et réels. Les auto-corrélations entre maturités proches sont proche de 1, ce qui s’explique par le fait que les investisseurs évaluent de la même façon les titres ayant des maturités proches.

Dépendance Dans le modèle de *Jarrow et Yildirim*, la loi jointe des facteurs $[W_i, W_n, W_r]$ est une loi Gaussienne multivariée. En laissant de côté l’hypothèse faite sur les marginales, **il est supposé que la copule Gaussienne est adaptée à la modélisation de la dépendance entre les facteurs**. Cette hypothèse est forte et nous proposons de vérifier sa validité et d’examiner les conséquences qu’elle induit.

Copule Gaussienne en dimension 2 La copule Gaussienne est une copule elliptique à un paramètre, la corrélation linéaire entre les variables. Elle présente, entre autres, les propriétés suivantes :

- C’est une copule **symétrique**, c’est-à-dire que les risques sont autant liés en période de crise qu’en période de croissance. Ainsi, elle n’est pas adaptée à la modélisation de phénomènes à dépendance asymétrique.
- Cette copule n’a **pas de dépendance des extrêmes**, c’est-à-dire qu’il n’existe pas de phénomène d’augmentation de la corrélation entre les variables en période de crise ou de forte croissance. Ainsi, elle n’est pas adaptée à la modélisation de phénomènes dont les variables deviennent plus dépendantes en période « anormales ».

Dépendance empirique des facteurs de risque Afin de visualiser la dépendance empirique entre les facteurs de risque, on peut raisonner sur les variations des facteurs de risque :

$$\frac{\Delta I(t)}{I(t)} = \mu_q^{\mathbb{P}}(t)\Delta t + \sum_i \varepsilon_i; \quad \Delta r_k(t) = \mu_k^{\mathbb{P}}(t)\Delta t + \sigma_k \varepsilon_k$$

Et tracer les graphes croisés des variables normalisées :

$$\left\{ F_{\Delta r_r}^{emp} [\Delta r_r(t)], F_{\Delta r_n}^{emp} [\Delta r_n(t)] \right\} \quad \left\{ F_{\Delta r_k}^{emp} [\Delta r_k(t)], F_{\Delta I}^{emp} [\Delta I(t)] \right\}, \quad t \in \{t_m, t_M\}$$

Avec F_X^{emp} la fonction de répartition empirique de la variable aléatoire X . Les marginales de ces graphes sont des lois uniformes. Ainsi, on peut visualiser la dépendance entre deux variables sans l’impact de leurs distributions marginales.

Pour l’inflation, nous devons utiliser les rendements mensuels d’inflation, et non pas les séries interpolées. Ceci diminue fortement le nombre d’observations et affecte la qualité de l’estimation. Le graphe 11.2 présente les résultats. On constate que la copule Gaussienne semble adaptée pour la modélisation de la dépendance entre taux nominaux et taux réels.

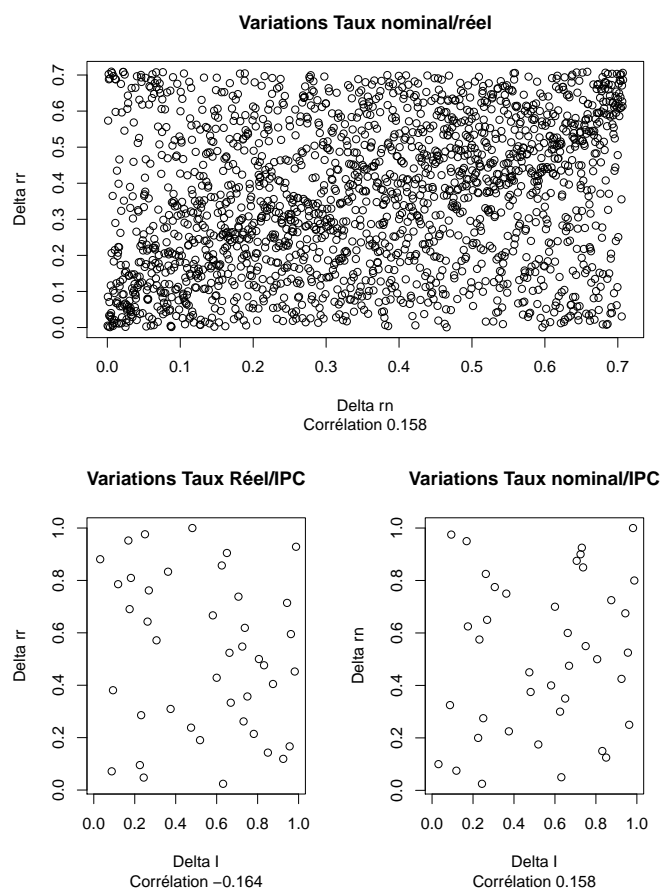


FIGURE 11.2 – Corrélations entre facteurs de risque. Le manque de données ne permet pas de stipuler une forme de dépendance particulière avec l'inflation. On notera que la copule Gaussienne semble convenable pour la modélisation de la dépendance nominal/réel.

Chapitre 12

Génération de scénarios

Le but de ce chapitre est de générer des scénarios cohérents de taux réels, nominaux et d'inflation dans les deux univers, historiques et risque neutre. Pour cela, nous allons tout d'abord spécifier quelles sont les variables pertinentes à projeter, puis nous aborderons la structure de projection, ainsi que les équations utilisées.

Dans le cadre de ce chapitre, on se place en $t = 0$ correspondant au 30/01/2012 où l'on suppose connues toutes les variables du problème.

12.1 Variables de projection

Dans le cadre d'une application au calcul du SCR, les besoins diffèrent en fonction des scénarios à utiliser. En effet, comme nous l'avons vu en introduction, les scénarios primaires et secondaire n'ont pas le même but. Les scénarios primaires servent à la projection des facteurs de risque, tandis que les scénarios secondaires servent à la valorisation des différents éléments du bilan.

Probabilité Historique Afin de projeter les facteurs de risque à un an sous la probabilité historique et en supposant ne pas devoir valoriser d'instruments *path-dependant*, les variables à projeter sont :

- **Le taux court nominal** $r_n(t)$. La projection seule du taux court nominal permet de déduire l'ensemble des taux nominaux à un an avec l'équation 10.1.
- **Le taux court réel** $r_r(t)$. On en déduit également avec l'équation 10.1 la courbe de taux réels en t .
- **Le taux d'inflation effectif** sur la période $[0, t]$, $\int_0^t q_u du$. La donnée du taux effectif d'inflation sur la période permet de déduire directement l'IPC en t , $I(t)$.
- **Le taux court d'inflation** q_t . Le taux court d'inflation est une donnée nécessaire pour caractériser le taux d'inflation effective. Comme nous l'avons rappelé précédemment, cette donnée n'est pas parfaitement corrélée au taux d'inflation effective.

Probabilité Risque Neutre Afin de valoriser des produits dépendant des taux et de l'inflation, il faut projeter, sous la probabilité risque neutre locale :

- **Le taux court nominal**. La projection du taux court nominal permet de déduire l'ensemble des taux nominaux.
- **Le taux court réel**. La projection du taux court réel permet de déduire l'ensemble des taux réels.
- **Le taux nominal effectif** sur la période $[0, t]$, $\int_0^t r_n(u) du$. Le taux nominal effectif permet de déduire le facteur d'actualisation $e^{-\int_0^t r_n(u) du}$ à appliquer sous la probabilité risque neutre.
- **Le taux réel effectif** sur la période $[0, t]$, $\int_0^t r_r(u) du$. Le taux réel effectif permet de déduire le facteur d'actualisation réel $e^{-\int_0^t r_r(u) du}$, permettant de déterminer la tendance de l'IPC.
- **Le taux d'inflation effectif**, $\int_0^t q_u du$. Cette variable permet de prendre en compte les flux versés par des produits indexés sur l'inflation qui ne seraient pas directement simplifiables grâce au facteur d'actualisation réel.

12.2 Équations de simulation

Dans cette section, nous allons décrire les équations de discrétisation qui permettent de projeter les différentes variables. On présente ici uniquement les résultats, on pourra se référer à l'annexe C pour plus de précisions. Dans cette section, on notera :

$$U_k(t, T) = \frac{\sigma_k^2}{2a_k} \left[1 - e^{-2a_k(T-t)} \right]$$

$$V_k(t, T) = \frac{\sigma_k^2}{a_k^2} \left[T - t + \frac{2}{a_k} e^{-a_k(T-t)} - \frac{1}{2a_k} e^{-2a_k(T-t)} - \frac{3}{2a_k} \right]$$

avec $k \in \{n, r, q\}$.

Les équations de discrétisation qui suivent sont relativement complexes. Mais, comme le rappelle *Hibert* (2001), il suffit de les implémenter une fois dans un ordinateur.

12.2.1 Simulations historiques

Pour effectuer les simulations historiques, il y a quatre sources d'aléa qui nécessitent une discrétisation. Nous allons donner des équations pour chacune d'entre elles, puis spécifier la structure de corrélation.

Taux court nominal Le taux court nominal dans le modèle de *Ahmad et Wilmott* (2006) n'admet pas de discrétisation évidente. On choisira donc une discrétisation type *Euler*¹. Avec l'équation 9.1, on obtient :

$$r_n(t + \Delta) = r_n(t) + u(r_n(t)) \Delta + \sigma_n \sqrt{\Delta} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{P}}$$

Cette discrétisation n'étant pas exacte, il est nécessaire d'avoir un pas de discrétisation faible afin que la distribution du taux court simulée corresponde avec la distribution théorique.

Taux court d'inflation On peut obtenir une discrétisation exacte du taux court d'inflation à partir de l'équation 9.2 :

$$q_{t+\Delta} = q_t e^{-a_q \Delta} + \mu_q (1 - e^{-a_q \Delta}) + \sqrt{U_n(t, t + \Delta)} \varepsilon_{q,t}^{\mathbb{P}}$$

Taux d'inflation effectif Nous avons déjà donné une discrétisation exacte de l'IPC d'inflation à l'équation 9.3, ce qui permet d'écrire :

$$\int_t^{t+\Delta} q_u du = \mu_q (T - t) + \frac{q_t - \mu_q}{a_q} \left[1 - e^{-a_q(T-t)} \right] + \sqrt{V_q(t, t + \Delta)} \varepsilon_{q,eff,t}^{\mathbb{P}}$$

Taux court réel Sous la probabilité historique, le taux court réel se déduit du taux court nominal et du taux court d'inflation par la relation générale sur les taux court illustrée au chapitre 5 de la partie 1 :

$$r_r(t + \Delta) = r_n(t + \Delta) - q_{t+\Delta}$$

12.2.2 Simulations risque neutre

Pour les simulations risque neutre, il est possible d'obtenir uniquement des discrétisations exactes pour toutes les variables d'intérêt.

Taux court nominal La discrétisation exacte du taux court nominal dans le modèle de *Hull et White* est un classique de la théorie financière. Suivant *Brigo et Mercurio* (2006), on peut montrer que :

$$r_n(t + \Delta) = r_n(t) e^{-a_n \Delta} + \alpha_n(t + \Delta) - \alpha_n(t) e^{-a_n \Delta} + \sqrt{U_n(t, t + \Delta)} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{Q}}$$

avec :

$$\alpha_k(t) = f_k(0, t) + \frac{\sigma_k^2}{2a_k^2} (1 - e^{-a_k t})^2 \quad k \in \{n, r\}$$

1. L'application du schéma de *Milstein* qui permet d'améliorer la qualité de la discrétisation ne change ici rien à l'équation, la volatilité n'étant pas une fonction du taux court.

Taux effectif nominal La discrétisation exacte du taux effectif nominal peut être déduite de la discrétisation exacte du taux court nominal. Là encore, la formule est courante :

$$\int_t^{t+\Delta} r_n(u)du = B_n(t, t+\Delta) [r_n(t) - \alpha_n(t)] + \ln \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t+\Delta)} + \frac{1}{2} [V_n(0, t+\Delta) - V_n(0, t)] + \sqrt{V_n(t, t+\Delta)} \varepsilon_{\text{neff}, t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux court réel La discrétisation du taux court réel est similaire au cas nominal, mais il faut en plus prendre en compte le facteur de changement de probabilité. On obtient :

$$r_r(t+\Delta) = r_r(t)e^{-a_r\Delta} + \alpha_r(t+\Delta) - \alpha_r(t)e^{-a_r\Delta} - \rho_{rq}\sigma_r\frac{\sigma_q}{a_q} \left[B_r(t, t+\Delta) + \frac{1}{a_r - a_q} [e^{-a_r\Delta} - e^{-a_q\Delta}] \right] + \sigma_r\sqrt{U_r(t, t+\Delta)} \varepsilon_{r,t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux effectif réel Afin d'obtenir l'expression du taux effectif réel, il faut intégrer l'équation précédente. On obtient :

$$\int_t^{t+\Delta} r_r(u)du = B_r(t, t+\Delta) [r_r(t) - \alpha_r(t)] + \ln \frac{P_r(0, t)}{P_r(0, t+\Delta)} + \frac{1}{2} [V_r(0, t+\Delta) - V_r(0, t)] - \rho_{rq}\sigma_r\frac{\sigma_q}{a_q} \left[\frac{1}{a_r} [\Delta + B_r(t, t+\Delta)] + \frac{1}{a_r - a_q} [B_r(t, t+\Delta) - B_q(t, t+\Delta)] \right] + \sqrt{V_r(t, t+\Delta)} \varepsilon_{\text{reff}, t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux d'inflation effectif Le taux d'inflation effectif s'obtient à partir de la relation 10.2 et des réalisations de taux d'inflation effectif. On obtient :

$$\int_t^{t+\Delta} q_u du = \int_t^{t+\Delta} r_n(u)du - \int_t^{t+\Delta} r_r(u)du + \sqrt{V_q(t, t+\Delta)} \varepsilon_{\text{qeff}, t}^{\mathbb{Q}}$$

Dans cette section, on a établi les équations de discrétisation permettant de générer des réalisations de chacune des variables prises séparément. Il reste à voir comment on peut générer une « discrétisation jointe » des variables.

12.3 Corrélations des aléas

Afin de réaliser des projections cohérentes des variables jointes, il reste à gérer l'hypothèse de vecteur gaussien entre les variables. Soient :

$$\varepsilon_t^{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{P}} \\ \varepsilon_{q,t}^{\mathbb{P}} \\ \varepsilon_{\text{qeff},t}^{\mathbb{P}} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_t^{\mathbb{P}}) \quad \varepsilon_t^{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{Q}} \\ \varepsilon_{\text{neff},t}^{\mathbb{Q}} \\ \varepsilon_{r,t}^{\mathbb{Q}} \\ \varepsilon_{\text{reff},t}^{\mathbb{Q}} \\ \varepsilon_{\text{qeff},t}^{\mathbb{Q}} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_t^{\mathbb{Q}})$$

Les matrices de corrélation² $\Gamma_t^{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\Gamma_t^{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dépendent des corrélations entre les aléas des vecteurs $\varepsilon_t^{\mathbb{P}}$ et $\varepsilon_t^{\mathbb{Q}}$. Ces corrélations sont directement liées aux équations de discrétisation choisies. Là encore, on notera uniquement les résultats. On pourra se référer à l'annexe C pour plus de détails.

2. On appelle matrice de corrélation toute matrice symétrique définie positive ayant des 1 sur la diagonale.

Dans cette section, on notera :

$$\text{Cov}_{k;p}(\Delta) = \rho_{kp} \frac{\sigma_p \sigma_k}{a_p + a_k} \left[1 - e^{-(a_p + a_k)\Delta} \right]$$

$$\text{Cov}_{\text{keff};p}(\Delta) = \rho_{kp} \frac{\sigma_p \sigma_k}{a_k} \left[B_p(t, t + \Delta) - \frac{1}{a_k + a_p} \left[1 - e^{-(a_p + a_k)\Delta} \right] \right]$$

$$\text{Cov}_{\text{keff};\text{peff}}(\Delta) = \rho_{kp} \frac{\sigma_k \sigma_q}{a_k a_p} \left[\Delta - B_p(t, t + \Delta) - B_k(t, t + \Delta) + \frac{1}{a_k + a_p} \left[1 - e^{-(a_p + a_k)\Delta} \right] \right]$$

avec $\{k, p\} \in \{r, n, q\}^2$

12.3.1 Corrélation des aléas historiques

Pour déterminer les corrélations historiques servant à la discrétisation historique, il faut spécifier la matrice $\Gamma_t^{\mathbb{P}}$. On obtient :

$$\Gamma_t^{\mathbb{P}}[1, 2] = \rho_{nq} \sigma_n \sigma_q B_q(t, t + \Delta) \times [\sigma_n^2 \Delta U_q(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{P}}[1, 3] = \rho_{nq} \frac{\sigma_n \sigma_q}{a_q} [\Delta - B_q(t, t + \Delta)] \times [\sigma_n^2 \Delta V_q(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{P}}[2, 3] = \text{Cov}_{\text{qeff};q}(\Delta) \times [V_q(\Delta) U_q(\Delta)]^{-2}$$

12.3.2 Corrélation des aléas risque neutre

Pour déterminer les corrélations historiques servant à la discrétisation historique, il faut spécifier la matrice $\Gamma_t^{\mathbb{Q}}$. On obtient :

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 2] = \text{Cov}_{n;\text{neff}}(\Delta) \times [U_n(\Delta) V_n(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 3] = \text{Cov}_{n;r}(\Delta) \times [U_n(\Delta) U_r(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 4] = \text{Cov}_{n;\text{reff}}(\Delta) \times [U_n(\Delta) V_r(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 5] = \text{Cov}_{n;\text{qeff}}(\Delta) \times [U_n(\Delta) V_q(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 3] = \text{Cov}_{\text{neff};r}(\Delta) \times [V_n(\Delta) U_r(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 4] = \text{Cov}_{\text{neff};\text{reff}}(\Delta) \times [V_n(\Delta) V_r(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 5] = \text{Cov}_{\text{neff};\text{qeff}}(\Delta) \times [V_n(\Delta) V_q(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[3, 4] = \text{Cov}_{r;\text{reff}}(\Delta) \times [U_r(\Delta) V_r(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[3, 5] = \text{Cov}_{r;\text{qeff}}(\Delta) \times [U_r(\Delta) V_q(\Delta)]^{-2}$$

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[4, 5] = \text{Cov}_{\text{reff};\text{qeff}}(\Delta) \times [V_r(\Delta) V_q(\Delta)]^{-2}$$

Remarque Ces corrélations ne dépendent pas de t , mais uniquement de Δ . Autrement dit, les lois jointes $\varepsilon_t^{\mathbb{P}}$ et $\varepsilon_t^{\mathbb{Q}}$ ne dépendent que du pas de discrétisation. Cette remarque est importante pour l'implémentation puisque cela signifie que, pour des projections à pas de discrétisation constant, tous les aléas ont la même loi et peuvent être générés initialement. On a donc :

$$\Gamma_t^{\mathbb{Q}} = \Gamma^{\mathbb{Q}} \quad \Gamma_t^{\mathbb{P}} = \Gamma^{\mathbb{P}}$$

Génération de vecteurs gaussiens multivariés Pour conclure sur la discrétisation, on propose de rappeler comment il est possible de générer des vecteurs gaussiens multivariés à partir de lois normales centrées réduites indépendantes. Pour cela, il faut utiliser la *decomposition de Cholesky* (notée $\text{Chol}()$) des matrices de corrélation. La décomposition de *Cholesky* d'une matrice de corrélation Γ est l'unique matrice triangulaire inférieure telle que :

$$\text{Chol}(\Gamma)^T \text{Chol}(\Gamma) = \Gamma$$

Soit ε_0 un vecteur gaussien centré à marginales indépendantes, alors $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$ peut s'écrire :

$$\varepsilon = \mu + \text{Chol}(\Gamma) \varepsilon_0$$

On pourra montrer que, avec cette écriture :

- ε est une combinaison linéaire de variables gaussiennes. Elle est donc elle-même gaussienne.
- La moyenne et la variance de ε sont bien celles attendues.

Cette équation permet de générer les vecteurs gaussiens multivariés $\varepsilon_t^{\mathbb{P}}$ et $\varepsilon_t^{\mathbb{Q}}$.

12.4 Simulations

On effectue 500 projections à un horizon de 10 ans en pas bimensuel³. Le tableau 12.1 résume les valeurs au 30/01/2012 de l'ensemble des variables utiles à la projection.

Variable	Valeur au 30/01/2012		
Taux court d'inflation	<i>Glissante annuelle</i>		2,6 %
	<i>Implicite marché</i>		2,06 %
IPCH	112,96		
Taux nominaux	<i>5 ans</i>	<i>15 ans</i>	<i>30 ans</i>
	1,67 %	2,57 %	2,89 %
	<i>Forward inst. 5 ans</i>	<i>Forward inst. 15 ans</i>	<i>Forward inst. 30 ans</i>
	2,48 %	3,19 %	3,20 %
Moyenne historique r_n	$\bar{r}_n = 2 \%$		
Taux réels	<i>5 ans</i>	<i>15 ans</i>	<i>30 ans</i>
	-0,43 %	0,08 %	0,27 %
	<i>Forward inst. 5 ans</i>	<i>Forward inst. 15 ans</i>	<i>Forward inst. 30 ans</i>
	0,044 %	0,45 %	0,45 %
Volatilités	<i>Nominal</i>	<i>Réel</i>	<i>Inflation</i>
	0,4 %	4,4 %	7,1 %
Retour à la moyenne	<i>Nominal</i>	<i>Réel</i>	<i>Inflation</i>
	-11 %	141 %	71,8 %
Corrélations	<i>Nominal-Réel</i>	<i>Nominal-Inflation</i>	<i>Inflation-réel</i>
	26 %	12 %	-16 %

TABLE 12.1 – Valeurs initiales des variables utiles à la projection.

Structure de projection Comme le rappelle *Faleh* (2011), il existe plusieurs structures de projections possibles. Parmi celles-ci, on trouve :

- La structure de projection linéaire. Cette structure consiste à développer une unique trajectoire à partir de chaque nœud.
- La structure de projection par arbre. Cette structure consiste à développer plusieurs trajectoires à chaque nœud, ce qui augmente de façon exponentielle le nombre de trajectoires.

La structure de projection par arbre est plus complexe à utiliser mais permet de faciliter des techniques d'optimisation dynamique qui se servent de scénarios.

Nous choisissons de rester sur une structure de projection linéaire afin de simplifier l'utilisation pratique des scénarios. On pourra se référer à *Faleh* (2011) afin de voir une utilisation pratique des structures par arbre pour un GSE d'*ALM* à des fins d'optimisation de l'allocation stratégique.

Résultats La présentation des résultats des simulations reprend celle de *Ginsbourger et al.* (2012). On utilise des successions de « boîtes à moustaches » (*boxplot*) afin de représenter la variabilité des trajectoires à chaque pas de temps. On rappelle qu'un *boxplot* est composé de :

- Un rectangle dont l'extrémité basse représente le quantile à 25 % et l'extrémité haute le quantile à 75 %.

3. Il faut donc comprendre que l'inflation projetée est désaisonnalisée.

- Deux segments dont l'extrémité basse représente le quantile à 1 % et l'extrémité haute représente le quantile à 99%.
- Un trait central qui représente la médiane, le quantile à 50 %.

Cet outil graphique permet de condenser l'information des trajectoires observées. Les graphiques 12.2, 12.1, 12.3 et 12.4 permettent de se faire une idée des trajectoires issues du modèle. Pour plus d'illustrations, on pourra se référer à l'Annexe 14.

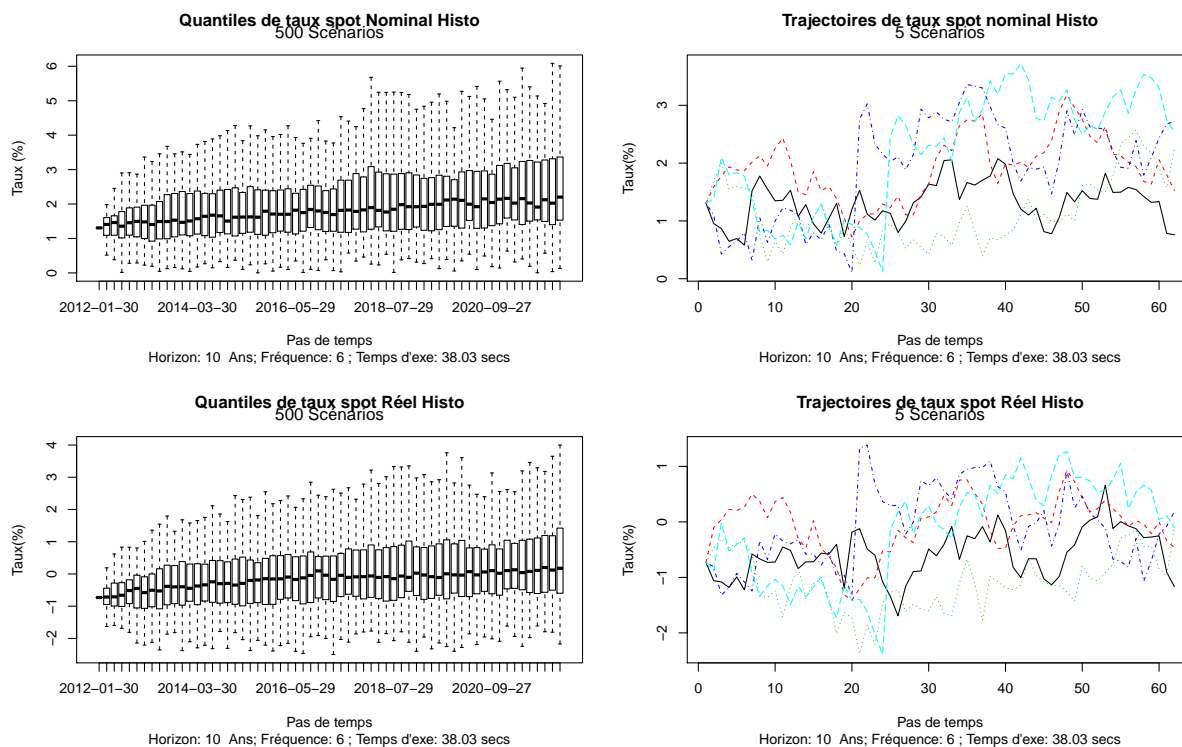


FIGURE 12.1 – Projections des taux courts nominaux et réels sous la probabilité historique. On remarque que dans le modèle historique, le taux court réel présente un retour à la moyenne de 2 %, ce qui correspond à ce qui pouvait être anticipé.

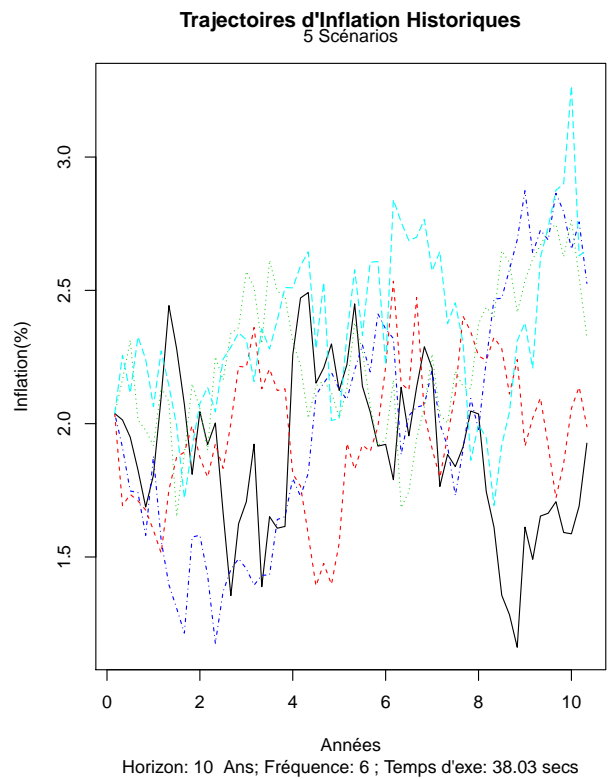
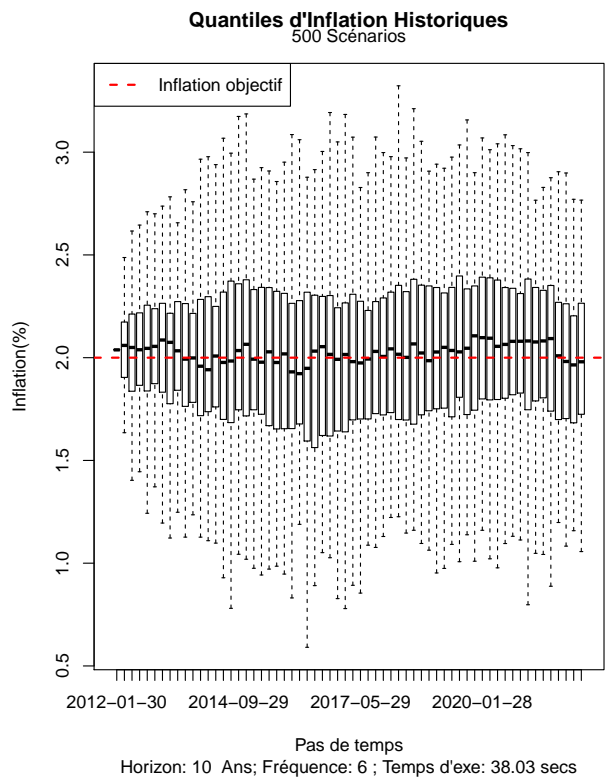
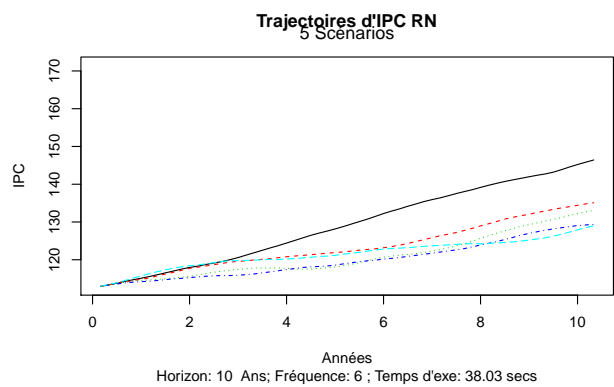
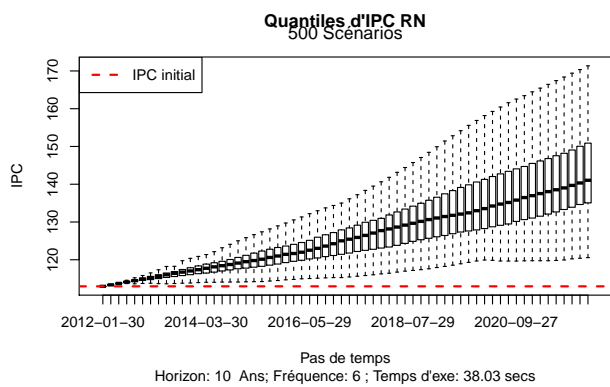
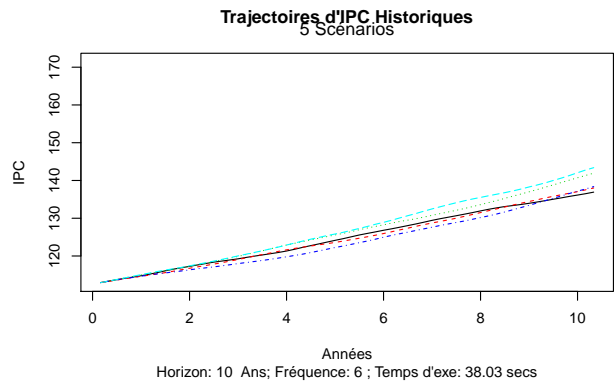
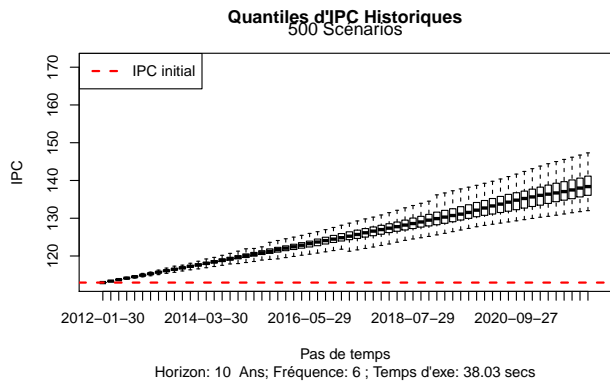


FIGURE 12.2 – Projections historiques et risque neutre de l'IPC et de l'inflation.

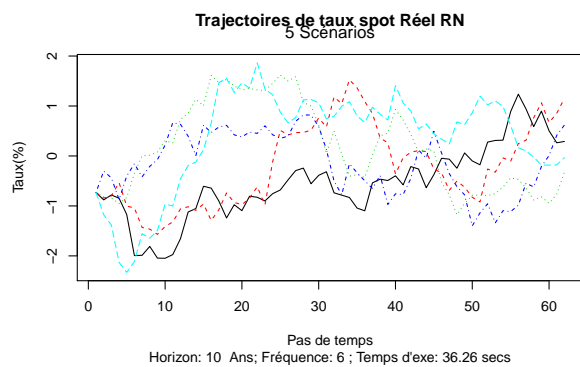
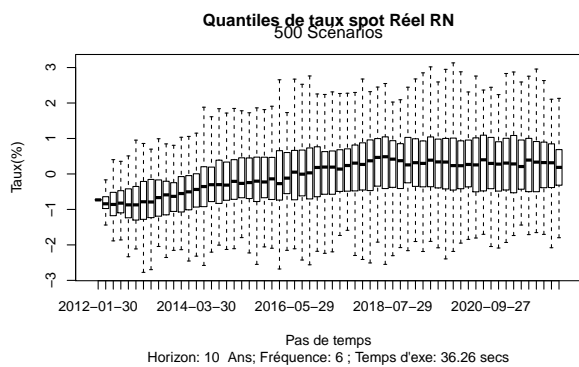
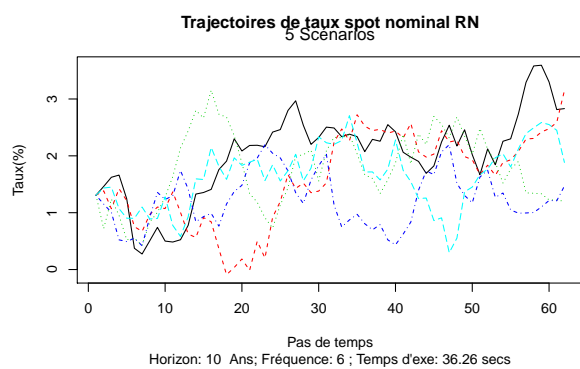
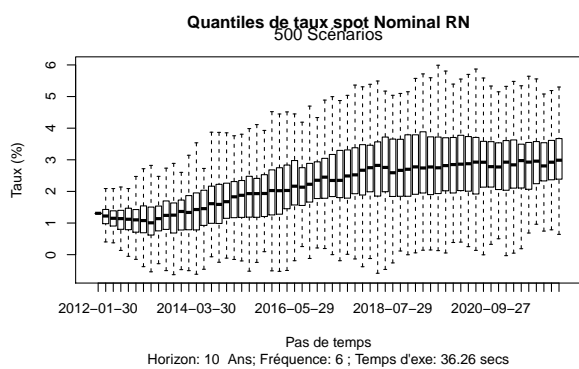


FIGURE 12.3 – Projections des taux courts nominaux et réels sous la probabilité risque neutre. Dans le modèle de *Hull et White*, la tendance des taux projetés est due aux taux *forward* de la courbe de taux initiale.

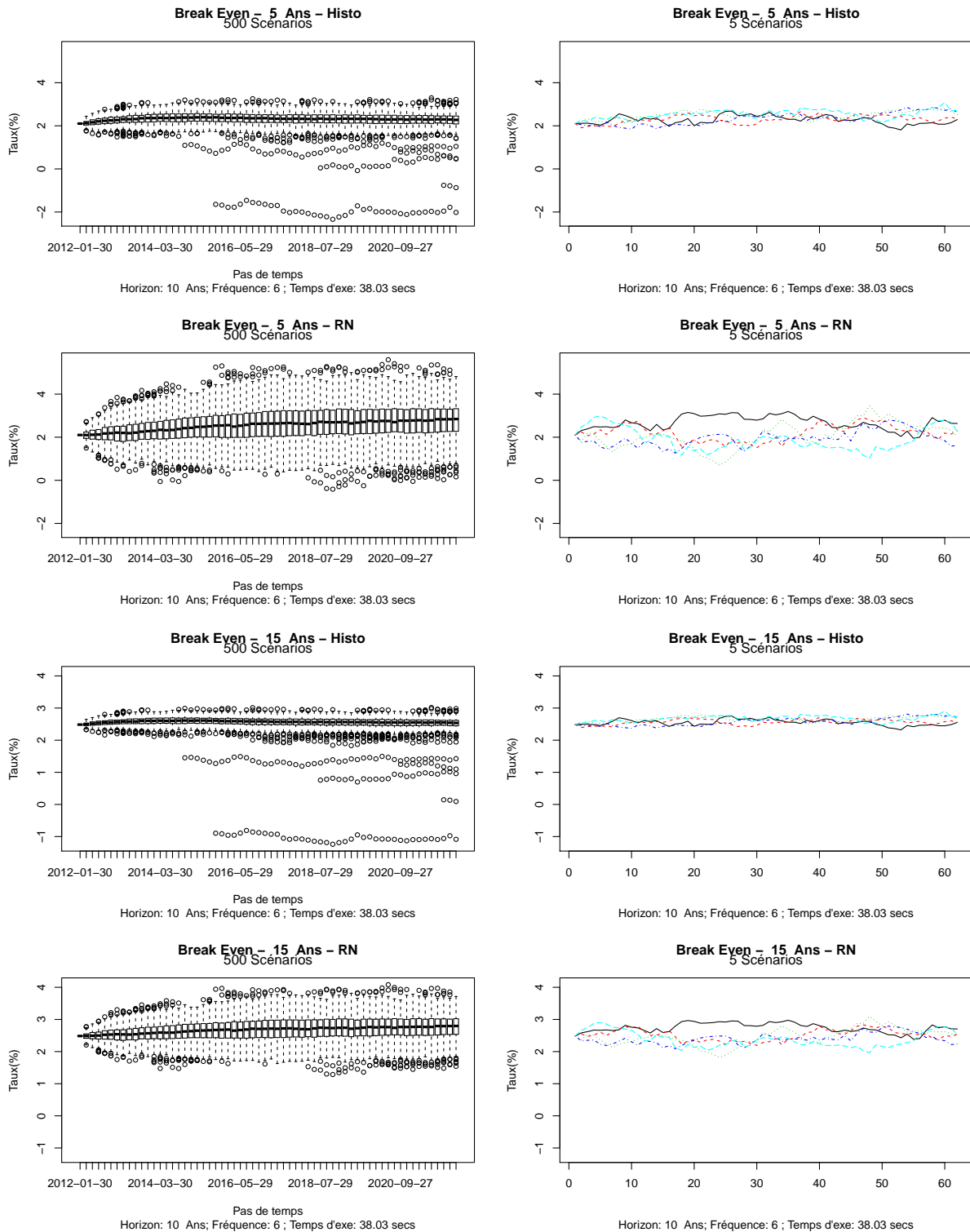


FIGURE 12.4 – Simulations historiques et risque neutre du BEIR. Pour le BEIR historique, l’effet de retour à la moyenne des taux et de l’inflation garantit la stabilité du BEIR. Pour le BEIR risque neutre, la tendance est due aux taux *forwards* réels et nominaux.

Chapitre 13

Test martingale

Le but de ce chapitre est de vérifier les paramètres du modèle risque neutre. Pour cela, on va effectuer un « test martingale ». Ce test vise à vérifier que le prix des actifs est bien égal à leurs flux futurs actualisés sous la probabilité risque neutre. En d'autres termes, on vérifie que le modèle risque neutre permet bien de donner une valeur de marché à un instrument financier. Ce critère est primordial pour notre utilisation.

Valorisation d'un ZC nominal L'instrument le plus simple que l'on peut valoriser est le ZC nominal. Pour cela, il suffit d'évaluer $\hat{P}_n(0, T)$ par une méthode de Monte-Carlo sur les scénarios risque neutre :

$$\hat{P}_n(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\int_0^T r_n^i(u) du} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_n^i(u) du} \right] = P_n(0, T)$$

Les $e^{-\int_0^T r_n^i(u) du}$, $i \in \{1 \dots N\}$ sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, on peut utiliser le théorème *Central Limite* trouver un intervalle de confiance et savoir si l'estimateur est bien convergent.

Le graphique 13.1 montre les résultats d'estimation pour un ZC nominal. Les résultats semblent satisfaisants et ne montrent pas de biais significatif.

Valorisation d'autres ZC Il est possible de vérifier la valorisation d'autres actifs négociables afin de valider le modèle, cependant il faut faire attention aux hypothèses faites.

ZC réel dans sa monnaie Dans le modèle de projection présenté, les simulations risque neutre se font sous la probabilité risque neutre locale. Ainsi, il n'y a aucune raison que sous cette probabilité, la moyenne des facteurs d'actualisation réels converge vers les prix de ZC. Cependant, en prenant $\rho_{IR} = 0$, nous avons vu que les probabilité risque-neutre locale et étrangère sont confondues, ce qui nous permet de généraliser l'approche précédente au ZC réel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{rq} = 0 \\ \hat{P}_r(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\int_0^T r_r^i(u) du} \Rightarrow \hat{P}_r(0, T) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_r^i(u) du} \right] = P_r(0, T) \end{array} \right.$$

Ce cas particulier permet de vérifier la cohérence du modèle de taux réel dans sa monnaie. Le graphique 13.2 présente les résultats du test. Les résultats semblent satisfaisants et ne montrent pas de biais significatif.

ZC protégé d'inflation On peut également vérifier que les ZC protégés d'inflation $P_{IP}(0, T) = I(t)P_r(t, T)$ sont martingales sous la probabilité risque neutre locale :

$$\hat{P}_{IP}(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\int_0^T r_n^i(u) du} I^i(T) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_n^i(u) du} \right]$$

Le graphique 13.2 présente les résultats du test.

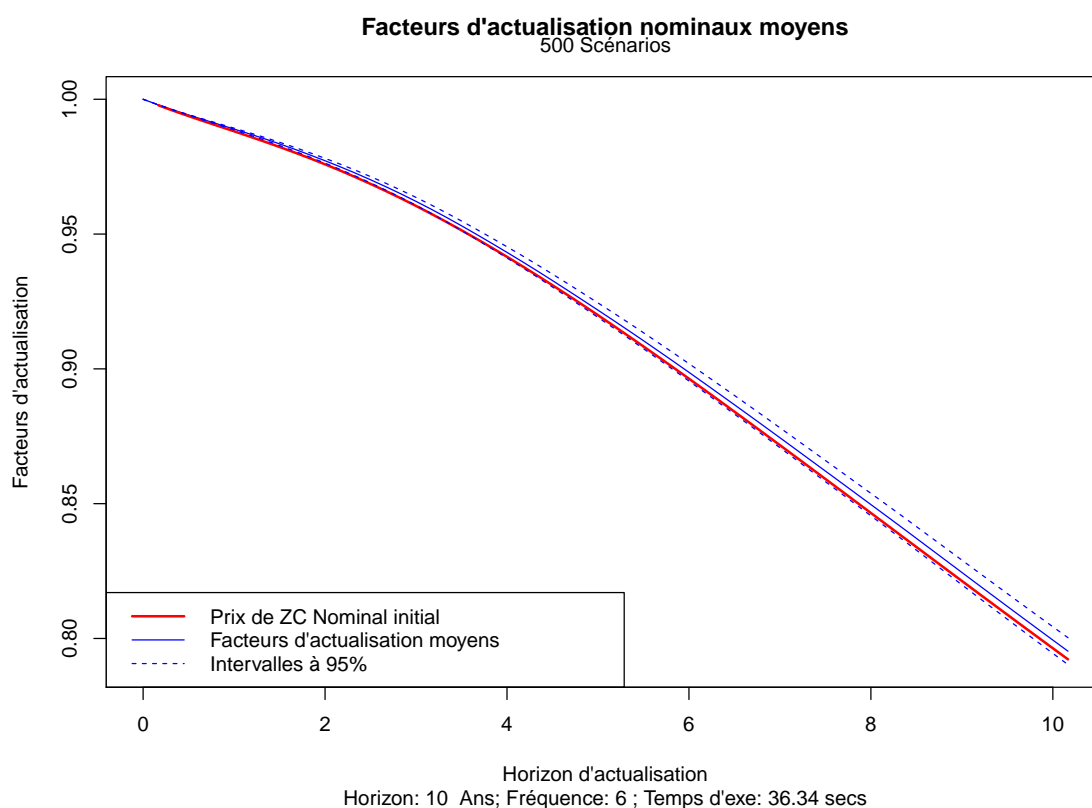


FIGURE 13.1 – Trajectoires de facteurs d’actualisation. La convergence vers le prix de ZC nominaux est bonne.

Limites Le test martingale qui est mené ici ne permet pas de vérifier que le modèle est bien adapté pour la valorisation des instruments. En effet, théoriquement, tous les modèles d’AOA prenant comme paramètre d’entrée la courbe de taux ZC permettent d’obtenir ces résultats. **Ce test permet surtout de vérifier que le modèle est correctement implémenté et spécifié.**

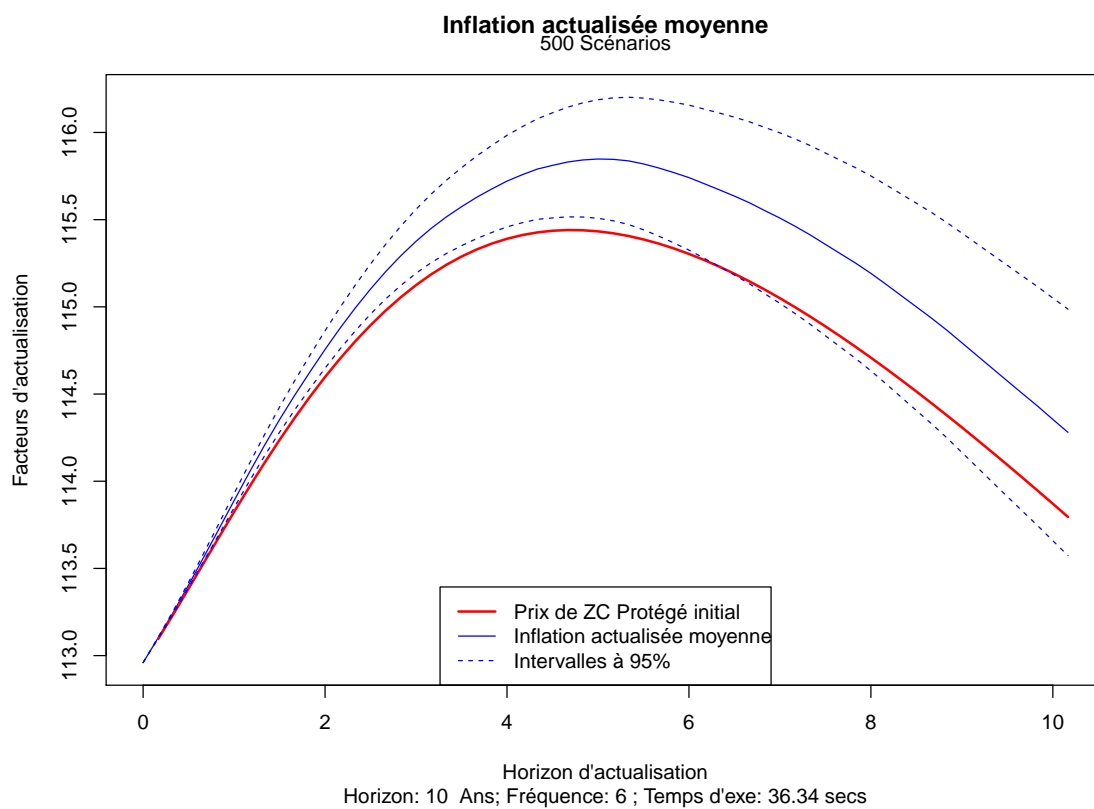
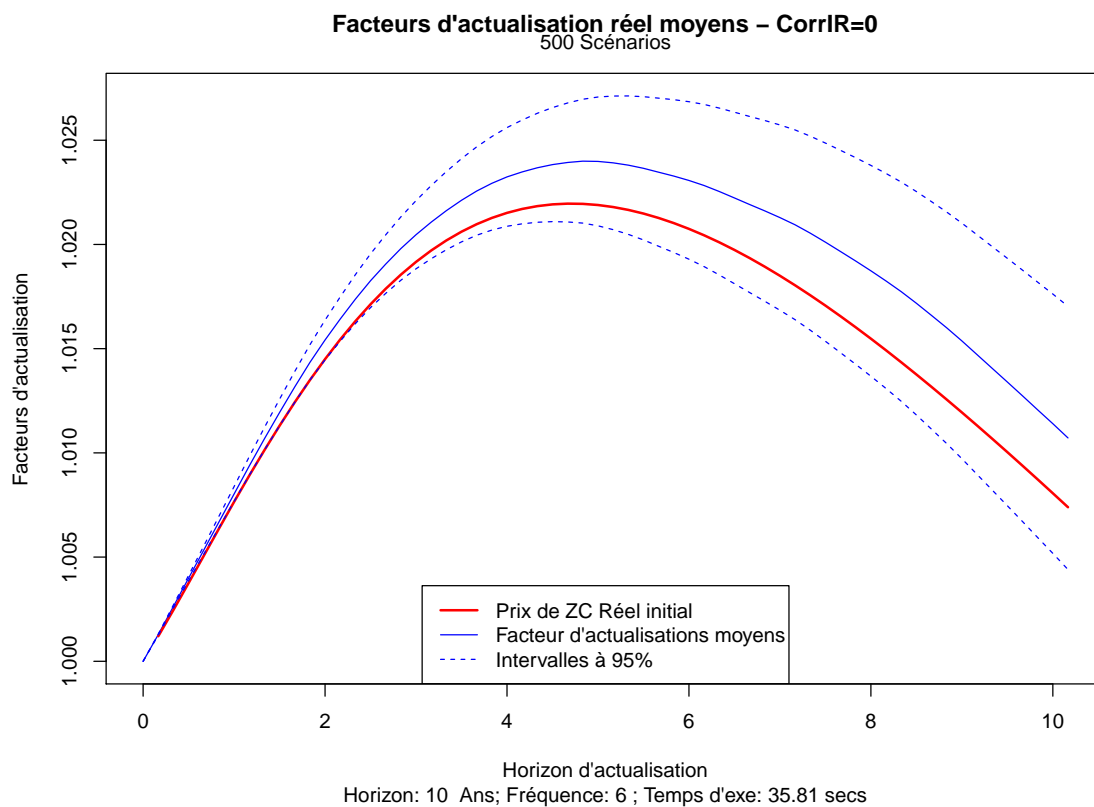


FIGURE 13.2 – Test martingale pour des ZC. Le graphe du haut présente l'estimation du prix de ZC réel dans leur monnaie (en prenant $\rho_{IR} = 0$). Le graphe du bas présente l'estimation du prix d'un ZC protégé d'inflation.

Chapitre 14

Application à un portefeuille de retraite collectif par points

Inflation et assurance

L'inflation peut faire partie des facteurs de risques significatifs de l'assureur. En effet, il peut y avoir une dépendance contractuelle des engagements de l'assureur avec l'inflation, par exemple :

- Dans le cadre de prestations en nature (indemnisation), l'engagement de l'assureur est étroitement lié à la hausse des prix. Toutefois, il n'est pas évident que l'augmentation des prestations corresponde à l'inflation mesurée par la variation d'IPC qui est plus assimilable à un « facteur systémique ».
- Dans le cadre d'engagements de retraite collective prévoyant une revalorisation avec pour objectif l'inflation publiée par l'INSEE (ou l'évolution du point ARGIR/ ARCCO) la dépendance avec l'inflation mesurée par une variation d'IPC est explicite.

Néanmoins, le droit du contrat du Code des Assurances (qui ne sera pas modifié par la transcription de la directive Solvabilité 2) n'autorise pas de garantir des prestations indexées sur l'inflation mesurée par la variation d'IPC. En effet, l'article L.131-1 du Code des Assurances précise que, dans le cadre d'assurance sur la vie et d'assurance contre les accidents atteignant les personnes, les sommes assurées doivent être fixées au contrat. Concernant la revalorisation des rentes des régimes de retraite collective, il est possible de prévoir une revalorisation contractuelle qui doit être fixée au contrat et de piloter un fond de participation aux bénéfices spécifique dédié à la revalorisation des rentes avec pour objectif l'inflation. Toutefois dans ce cas, la revalorisation inflation n'est pas exigible¹ par l'assuré et dépend des résultats des actifs de l'assureur.

Dans le cadre de cette application, on choisit d'utiliser le modèle présenté pour évaluer, dans le cadre d'un contrat collectif de retraite supplémentaire par points, la sensibilité aux taux et à l'inflation d'une borne supérieure du *Best Estimate*. L'idée est que, sous certaines hypothèses simplificatrices, il est possible d'obtenir une formule fermée pour le calcul d'une majoration du *Best Estimate*. Cette application peut être considérée comme une version simplifiée d'une technique de portefeuille répliquant.

Caractéristiques du contrat Considérons un accord social de retraite supplémentaire par points consistant en un engagement pour revaloriser au mieux l'inflation. L'objectif sous-jacent étant de permettre aux bénéficiaires de conserver le même pouvoir d'achat, on pourra assimiler cet objectif à celui de la revalorisation à hauteur de x % de l'inflation des primes versées.

Hypothèses On propose de prendre certaines hypothèses permettant de simplifier l'application :

- On suppose que la structure du portefeuille d'assurés reste le même pendant un an ;
- On évalue le *Best Estimate* nécessaire pour permettre une revalorisation à x % de l'inflation, et non celui correspondant à l'engagement contractuel.

1. Ce qui est d'ailleurs sain pour la garantie de la solvabilité de l'entreprise en cas d'une baisse des rendements des actifs.

Cette dernière hypothèse est particulièrement importante. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte des mécanismes de participation aux bénéficiaires et ainsi déterminer le résultat financier futur, ce qui oblige à prendre en compte des interactions actif/passif. Cela requiert donc un modèle de projection complexe avec des stratégies d'investissement ratifiées. Dans notre approche, on choisit d'évaluer l'objectif de l'entreprise plutôt que sa capacité à l'honorer.

L'engagement peut alors se décomposer en deux parties indépendantes :

- L'engagement hors revalorisation, notée BEG ;
- La revalorisation des primes indexée sur l'inflation, notée RE .

Engagement hors inflation

Cet engagement correspond à la valeur actuelle des primes à verser aux personnes encore présentes (brutes de revalorisation et nettes de frais) :

$$BEG_t = \sum_{u>t} P_n(t, u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [F_u]$$

où F_u est le flux de trésorerie à verser en u aux personnes encore présentes dans le portefeuille. Généralement, on détermine $\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [F_u]$ en utilisant des tables de mortalité et de départ à la retraite. Il faut également prendre en compte les frais de gestion de l'assureur.

Il est possible de déterminer la sensibilité donnée par le modèle de la partie garantie des engagements aux taux nominaux de la même façon qu'une obligation :

$$\frac{\partial BEG_t}{\partial r_n(t)} = - \sum_{u>t} B_n(t, u) P_n(t, u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [F_u]$$

Avec cette équation, on peut évaluer la valeur du BEG_t après une variation Δr_n du taux court. Soit au premier ordre :

$$BEG_t(r_n(t) + \Delta r_n) \approx BEG_t + \frac{\partial BEG_t}{\partial r_n(t)} \Delta r_n$$

Si le coefficient de retour à la moyenne nominal est positif, $a_n > 0$, alors cela signifie qu'une hausse des taux induit une baisse de la valeur du BEG_t , résultat classique pour les obligations.

Avec ces indicateurs, on peut quantifier et évaluer la sensibilité de la partie remboursement des primes dues aux anticipations de volatilités des agents retirées des prix de produits dérivés. On notera que, pour être plus cohérent avec Solvabilité 2, on pourrait également appliquer des primes d'illiquidité et contra-cycliques sur les prix de ZC.

Revalorisation indexée sur l'inflation

Cet « engagement » consiste à revaloriser les primes à hauteur de x % du taux d'inflation effectif² sur la période $[t, u]$ aux personnes encore présentes en $u > t$.

$$RE_t = x \sum_{u>t} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^u r_n(s) ds} \times \left(\frac{I(u)}{I(t)} - 1 \right) \times \right] \times \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} [F_u^{\text{HF}}]$$

avec F_u^{HF} , le flux à verser en u à l'assuré hors frais.

On reconnaît dans cette expression la valeur d'un paiement de jambe variable de $ZCIS$ vu en t , de maturité u et de nominal $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_u^{\text{HF}}]$. La partie revalorisation des engagements peut donc s'écrire :

$$RE_t = x \sum_{u>t} [P_r(t, u) - P_n(t, u)] \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_u^{\text{HF}}]$$

2. On pourrait également envisager une garantie de remboursement au pair comme pour les $OATi$. Pour les mêmes raisons qu'au chapitre ??, on peut négliger le prix de cette option en dehors de la monnaie.

Comme précédemment, on peut évaluer la sensibilité de la revalorisation inflation aux paramètres du modèle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial RE_t}{\partial r_n(t)} &= + \sum_{u>t} B_n(t, u) P_n(t, u) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_u^{\text{HF}}] \\ \frac{\partial RE_t}{\partial r_r(t)} &= - \sum_{u>t} B_r(t, u) P_r(t, u) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_u^{\text{HF}}] \\ \frac{\partial^2 RE_t}{\partial r_r(t) \partial r_n(t)} &= 0\end{aligned}$$

On peut alors déterminer la variation de la revalorisation aux variations des taux nominaux et réels :

$$RE_t(r_k(t) + \Delta r_k) \approx RE_t + \frac{\partial RE_t}{\partial r_k(t)} \Delta r_k$$

Il apparait alors que, si $a_n > 0$ et $a_r > 0$:

- La valeur de la revalorisation augmente si les taux nominaux augmentent seuls ;
- La valeur de la revalorisation baisse si les taux réels augmentent seuls.

On peut trouver une interprétation de ces résultats en se référant au *Break Even* vu au chapitre 5 :

$$\begin{aligned}[r_n \nearrow, r_r \rightarrow] &\Rightarrow BEIR \nearrow \rightsquigarrow \text{Inflation anticipée} \nearrow \rightsquigarrow RE \nearrow \\ [r_r \nearrow, r_n \rightarrow] &\Rightarrow BEIR \searrow \rightsquigarrow \text{Inflation anticipée} \searrow \rightsquigarrow RE \searrow\end{aligned}$$

Les hypothèses précédentes nous permettent de déterminer la valeur de marché du *Best Estimate*. Pour l'application :

- Le graphe 14.1 présente les flux espérés estimés pour le portefeuille de retraite considéré ;
- Le graphe 14.2 présente l'évolution du BE au cours du temps. Pour cela, on considère que le portefeuille d'assurance est, pendant toute la période, celui du 31/12/2011.

Ainsi on dispose d'une formule fermée pour la valorisation du *Best Estimate*. On notera que c'est en fait une majoration du best estimate dans le cas où chaque année la revalorisation atteint x % du taux d'inflation effectif :

$$BE = \sum_{t \geq 0} [x P_r(0, t) + (1 - x) P_n(0, t)] \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [F_t^{\text{HF}}]$$

Distribution à un an du *Best Estimate*

Un autre indicateur utilisant le modèle proposé est la projection à un an du BE avec le modèle proposé au chapitre 12. Pour cela, on considère un horizon de projection de un an avec les mêmes hypothèses que celles présentés dans le tableau 12.1.

Le graphe 14.3 présente l'évaluation de la densité du *proxy* du *Best Estimate* à un an. L'avantage de cette méthode est d'être rapide puisque le calcul de ce *proxy* fait uniquement appel à des formules fermées. Plusieurs remarques sur ces graphes :

- Pour le BE hors revalorisation, la médiane de la distribution est plus faible que la valeur initiale. En effet, dans une période de taux bas, l'effet de retour à la moyenne du générateur de scénarios crée plus de situations où les taux sont plus élevés que les taux initiaux. Ainsi, la valeur des engagements projetée à un an est en médiane plus faible que la valeur initiale. On remarque également l'asymétrie de la distribution du BE hors revalorisation, due à l'asymétrie du modèle de taux court.
- Pour la revalorisation des engagements, le cœur de la distribution est proche de la valeur initiale. Ceci est dû au fait qu'à la date de projection, la *break even* est proche du *break even* d'équilibre du modèle.

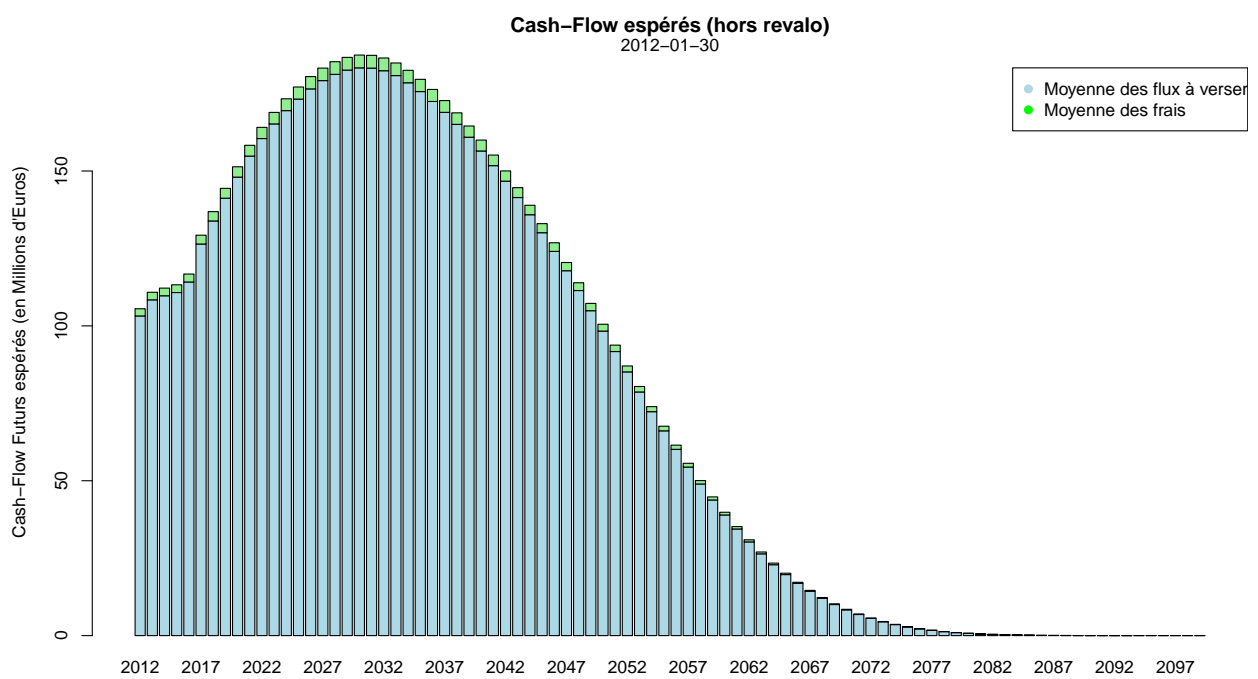


FIGURE 14.1 – Flux futurs (bruts d’actualisation) estimés pour le contrat considéré. Les engagements sont longs en retraite, ce qui induit une forte sensibilité aux taux et à l’inflation.

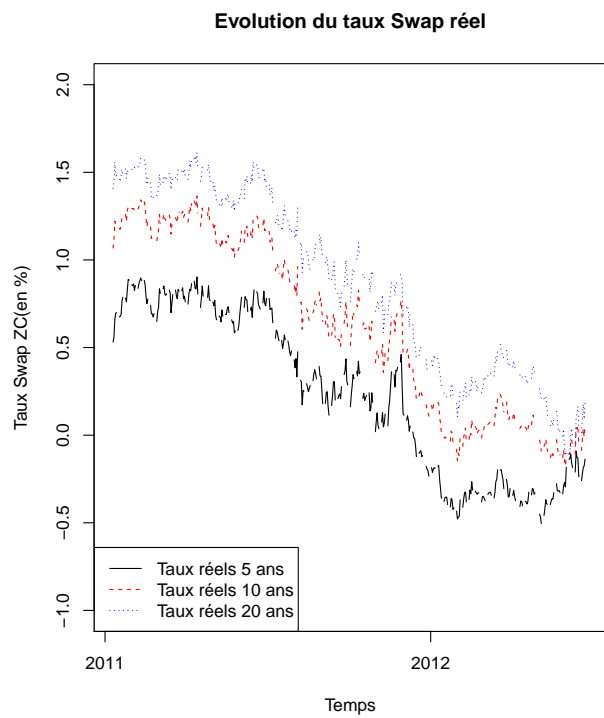
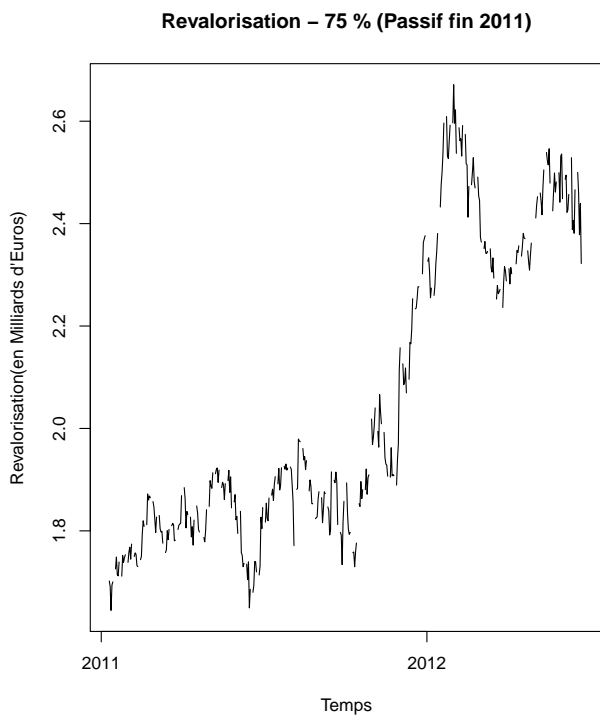
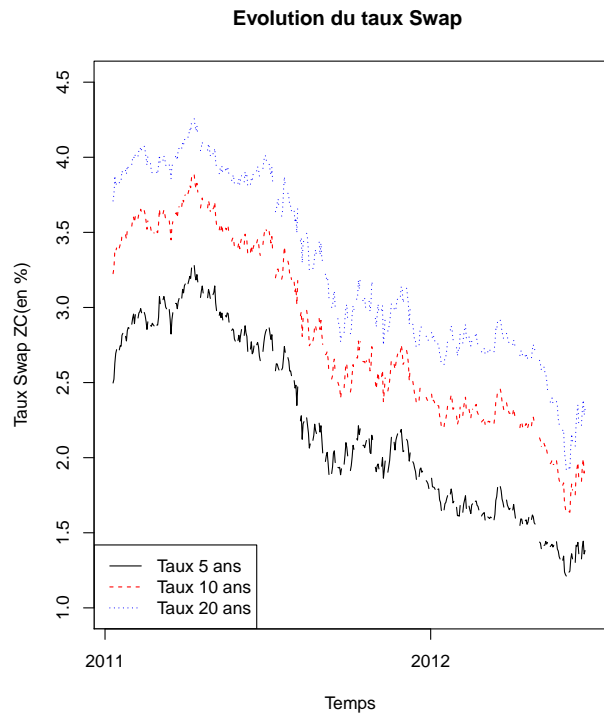
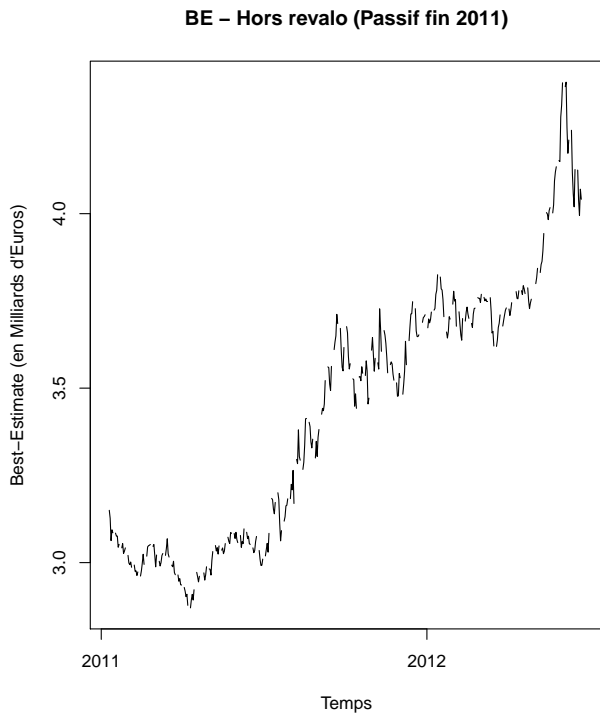


FIGURE 14.2 – Évolution du *Best Estimate* hors revalorisation et de la revalorisation au cours du temps. On considère que le portefeuille d'assurance n'a pas changé durant toute la période. On voit la forte volatilité de la valeur économique des engagements.

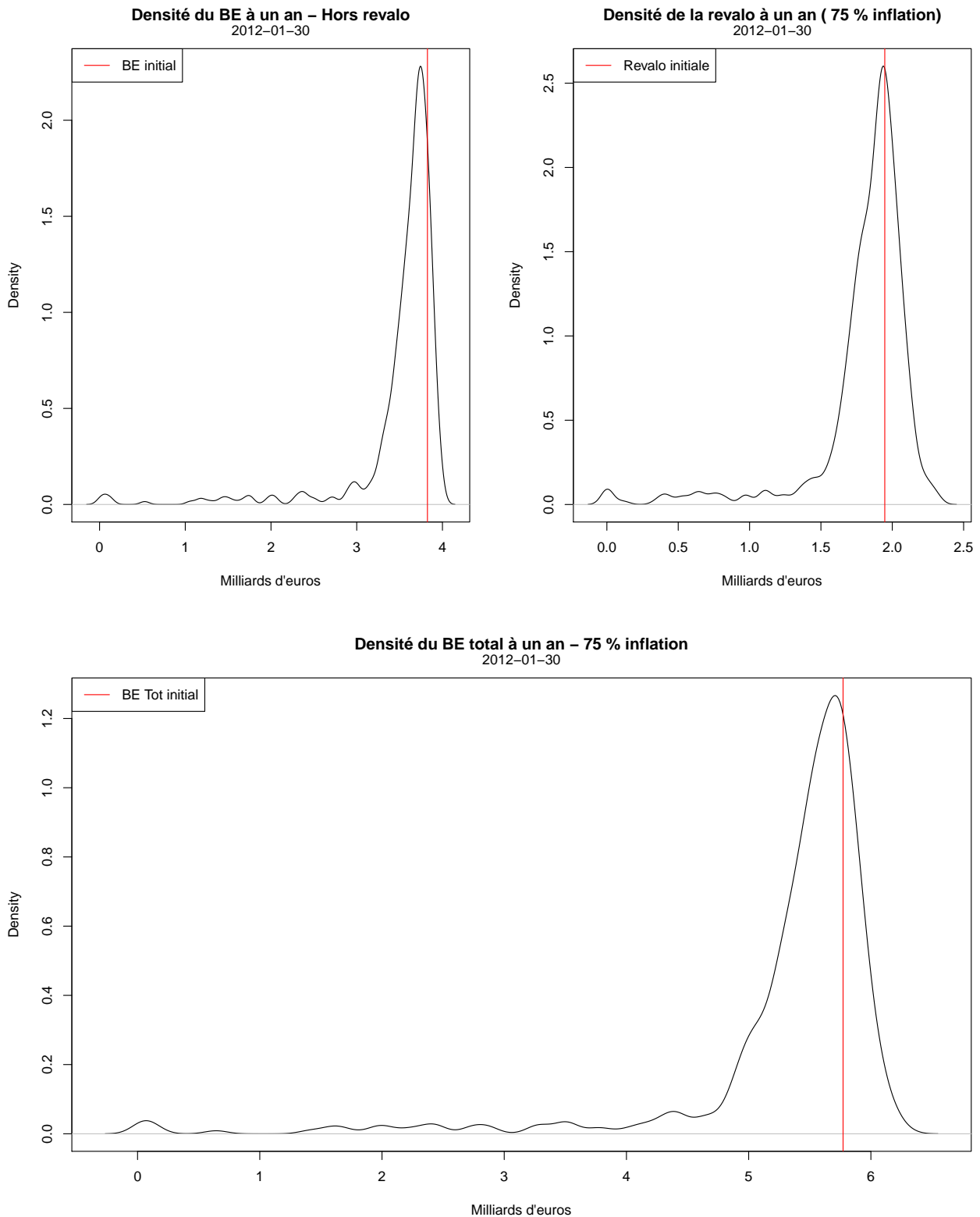


FIGURE 14.3 – Estimation par noyau gaussien des densités du BE et de la revalorisation inflation projetées à un an. On remarque l’impact de la queue de distribution des taux nominaux historiques qui conduit à des valeurs faibles du BE. Cependant, cette zone ne correspond pas aux situations dangereuses pour un assureur.

Sensibilité aux paramètres du GSE

On effectue une étude des sensibilités des projections du BEG et de la RE en fonction de trois paramètres du modèle :

- Le taux court long terme \bar{r}_n ;
- Le taux d'inflation d'équilibre μ_q ;
- L'horizon de projection H .

L'étude de sensibilité consiste à effectuer 1 000 simulations pour chaque valeur d'étude. On choisit de présenter deux indicateurs pour chaque sensibilité :

- La moyenne du BEG et de la RE à un an pour chaque valeur de la variable d'étude ;
- La distribution du BEG et de la RE à un an pour chaque valeur de la variable d'étude.

Taux court long terme Les graphes 14.4 présentent les résultats de l'étude.

- ▷ Le BE et de la RE moyenne diminuent lorsque le taux court long terme augmente. En effet, plus le taux court est élevé, plus le coefficient d'actualisation à appliquer est grand, ce qui diminue la valeur présente des engagements.
- ▷ La distribution du taux court nominal est asymétrique et suit une loi lognormale. Plus le taux nominal long terme est bas, plus les queues de distribution sont épaisses et plus le nombre de valeurs extrêmes est grand, ce qui diminue la moyenne des engagements, pas la médiane.

Taux d'inflation d'équilibre Les graphes 14.5 présentent les résultats de l'étude.

- ▷ On remarque que le BEG à un an est insensible à la valeur de l'inflation long terme, ce qui est cohérent avec notre modélisation ;
- ▷ On remarque que la RE à un an est proportionnelle à la valeur de l'inflation long terme. En effet, lorsque les anticipations d'inflation sont plus fortes, le montant à investir pour garantir la revalorisation augmente.

Horizon de projection Les graphes 14.6 présentent les résultats de l'étude.

- ▷ On remarque que l'influence de l'horizon de projection sur les indicateurs de moyenne est fort, en particulier pour les faibles maturités. Cependant, cela est souvent dû au nombre de valeurs extrêmes qui augmente avec l'horizon de projection.
- ▷ On remarque également la forte asymétrie de la distribution qui augmente avec l'horizon de projection dû au modèle de taux court.

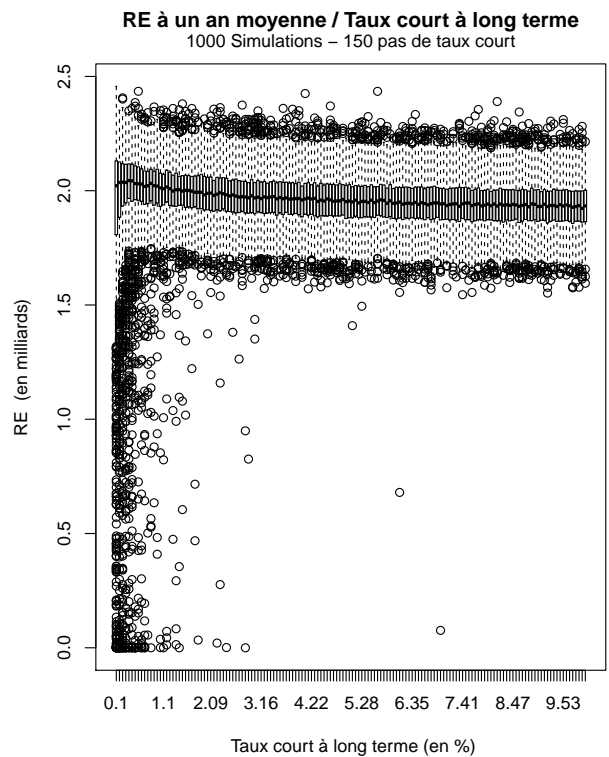
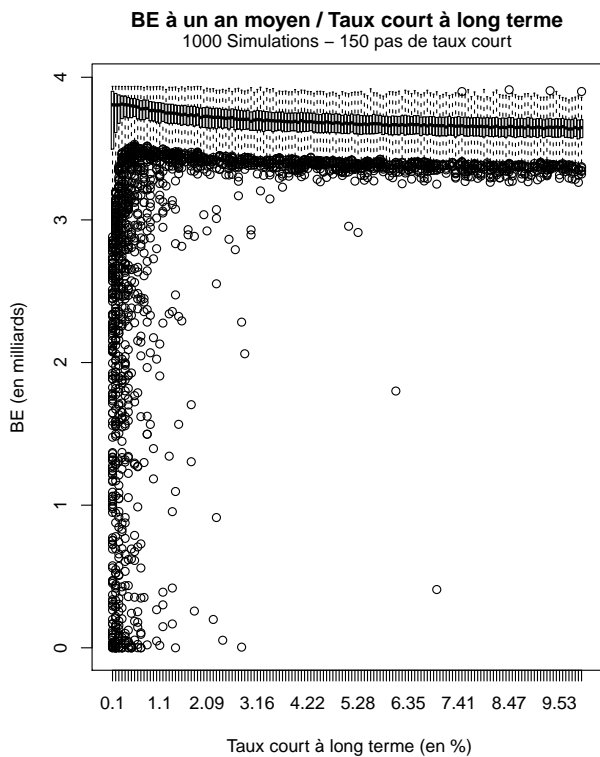
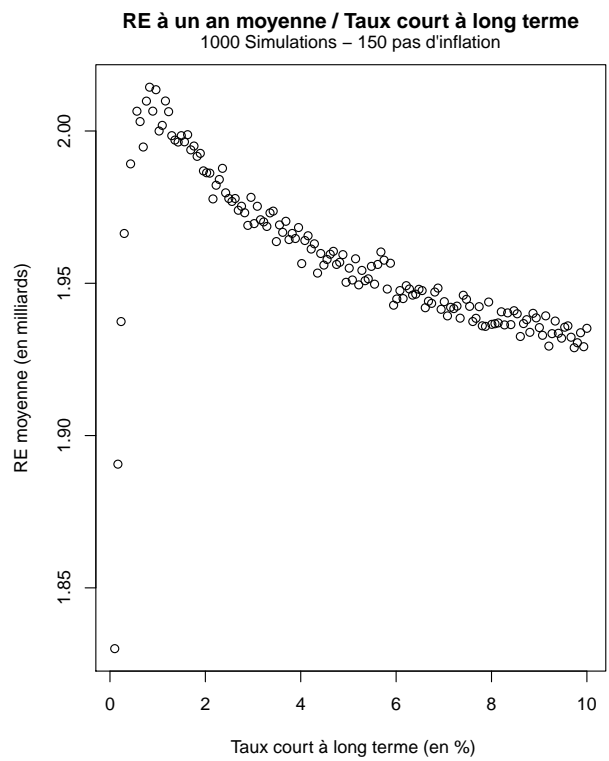
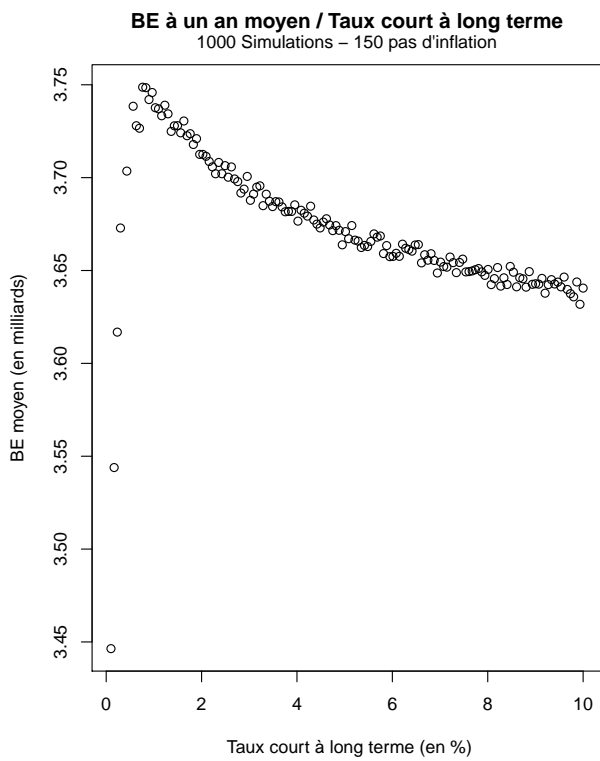


FIGURE 14.4 – Moyenne et distribution du BEG et de la RE à un an en fonction du taux court terme d'équilibre. L'asymétrie de la distribution lognormale du taux court crée une différence entre moyenne et médiane.

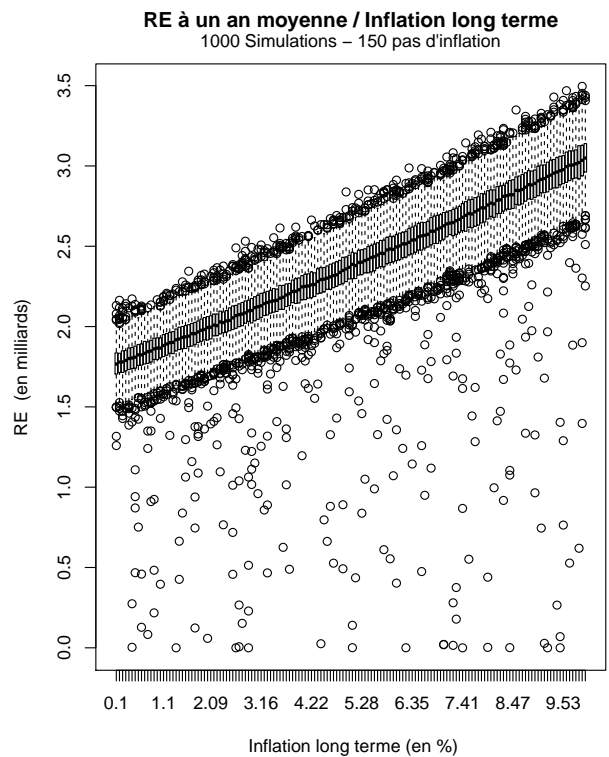
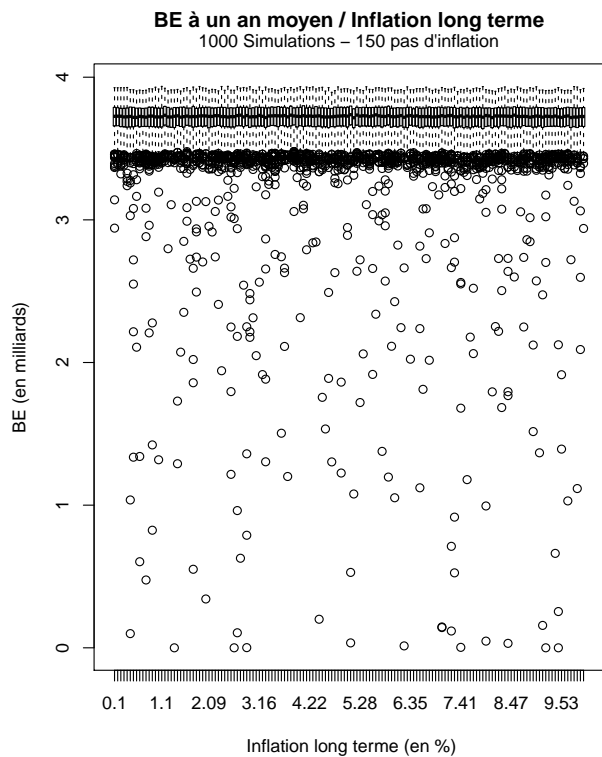
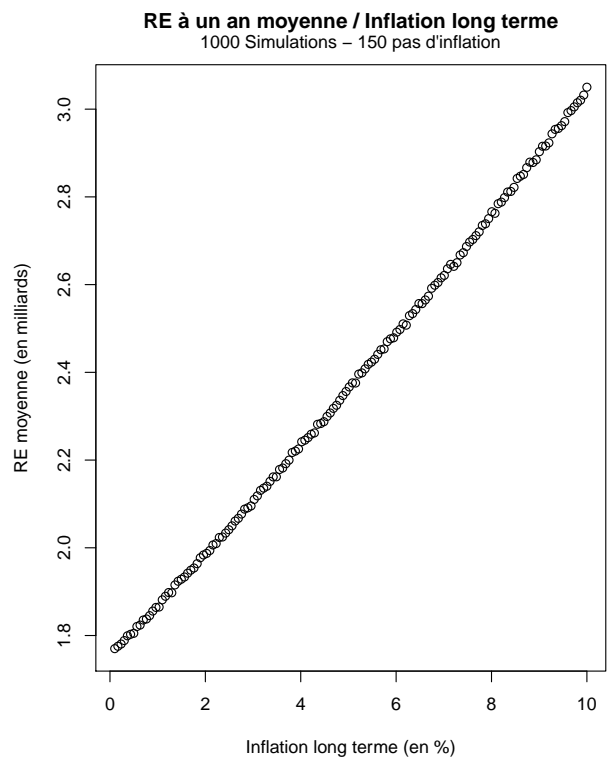
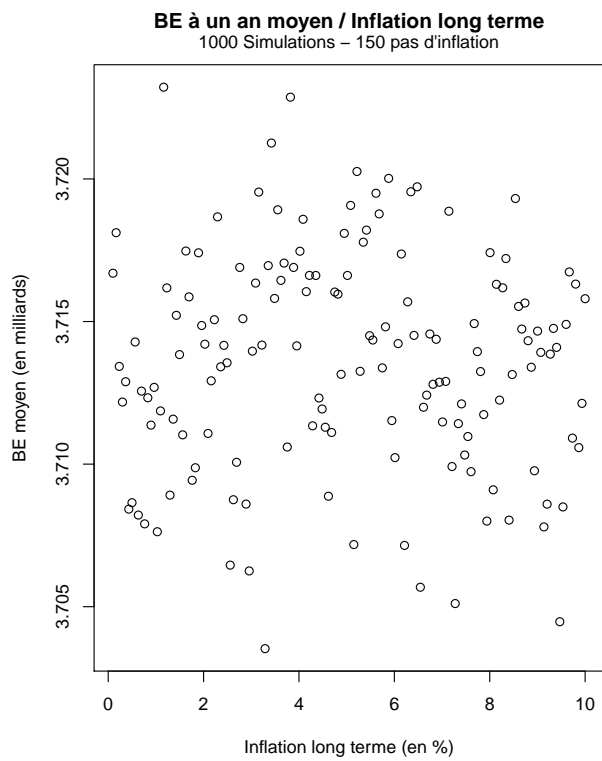


FIGURE 14.5 – Moyenne et distribution du BEG et de la RE à un an en fonction du taux d'inflation d'équilibre. La tendance de la RE est particulièrement bien marquée.

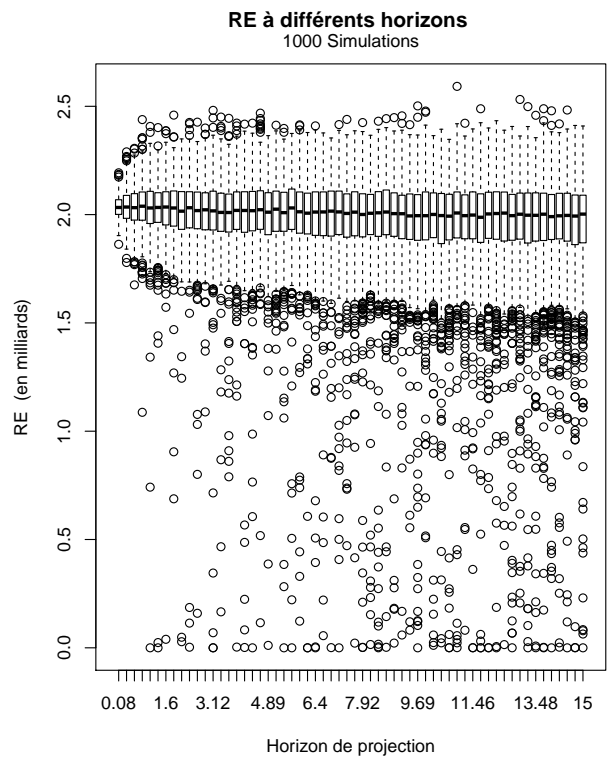
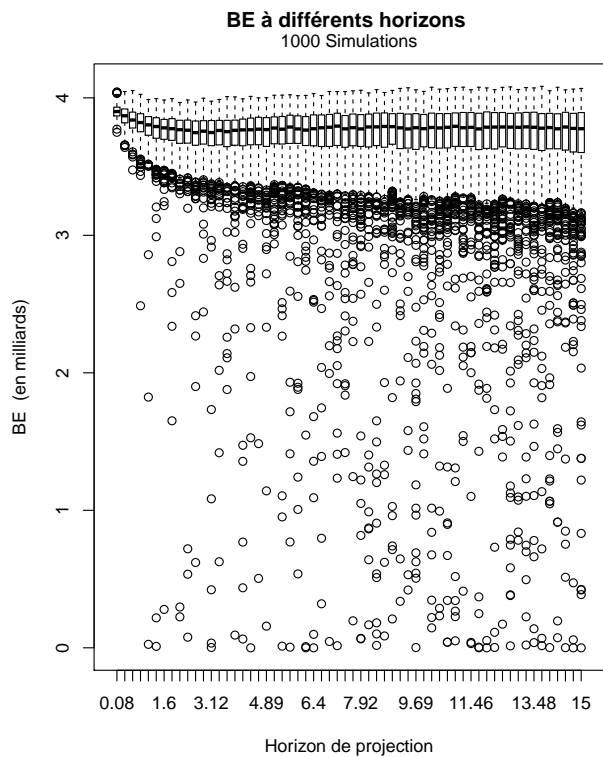
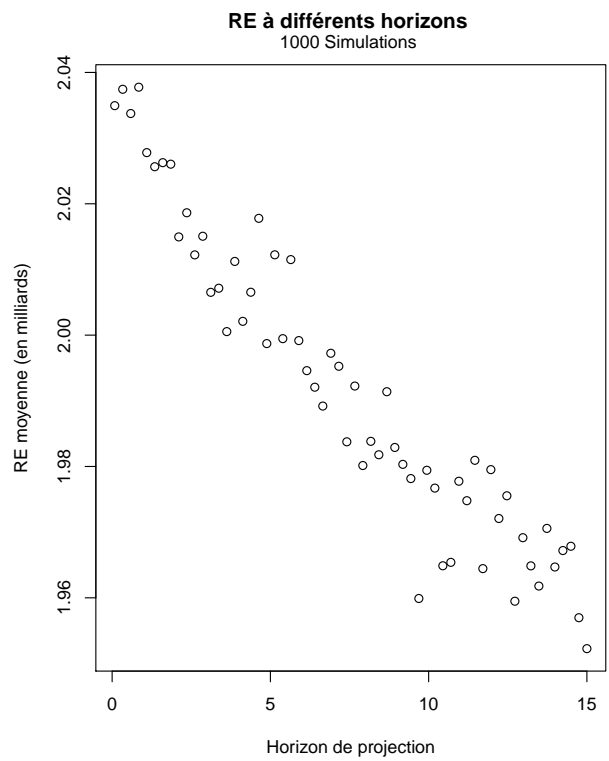
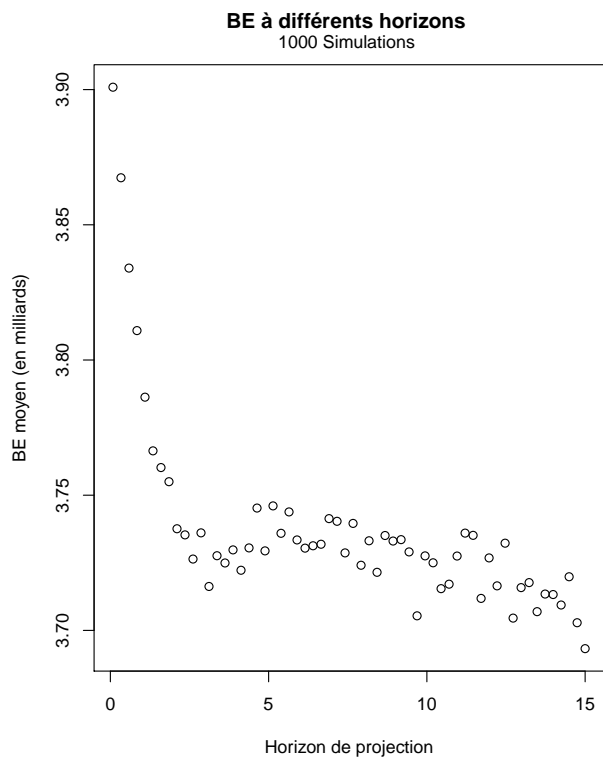


FIGURE 14.6 – Moyenne et distribution du BEG et de la RE à différents horizons de projections.

Conclusion générale

L'inflation peut être un facteur de risque important, pouvant désigner des phénomènes très différents que ce soit en assurance vie ou en assurance dommages. Si dans le premier cas il est possible de concevoir des objectifs de revalorisation liés à l'IPC, dans le deuxième cas il semble plus difficile d'assimiler la tendance des sinistres à l'inflation mesurée par l'IPC. Aussi, l'inflation dont il est question dans ce mémoire peut être considérée, dans ce cadre, comme une mesure « systémique » et couvrable de l'inflation. Le marché des indexés et dérivés d'inflation européen étant le plus développé au monde, ces actifs représentent un outil important d'investissement pour les assureurs exposés au risque d'inflation. Ils permettent d'avoir un meilleur adossement actif/passif, et ainsi d'avoir une situation économique moins sensible aux variables économiques externes.

La directive Solvabilité 2 pousse à revoir sous un nouvel angle les GSE de la littérature actuarielle. Il apparaît alors le besoin de trouver un consensus entre modèles d'arbitrage et modèles d'équilibre afin d'obtenir un GSE cohérent avec les prix d'instruments du marché et avec des intuitions économiques. À cette fin, les modèles de valorisation comme de projection doivent évoluer. La relation de *Fisher* n'étant plus vérifiée, on peut alors utiliser l'analogie de la monnaie étrangère qui procure un cadre de travail cohérent avec les prix observés et dans la continuité des théories économiques classiques. Le modèle de *Jarrow et Yildirim* (2003) est un point de départ pratique aux réflexions à mener pour trouver un modèle adapté aux besoins de la communauté actuarielle. Comme nous l'avons vu, il est possible de l'adapter pour prendre en compte des convictions macro-économiques telles qu'une inflation auto-régressive.

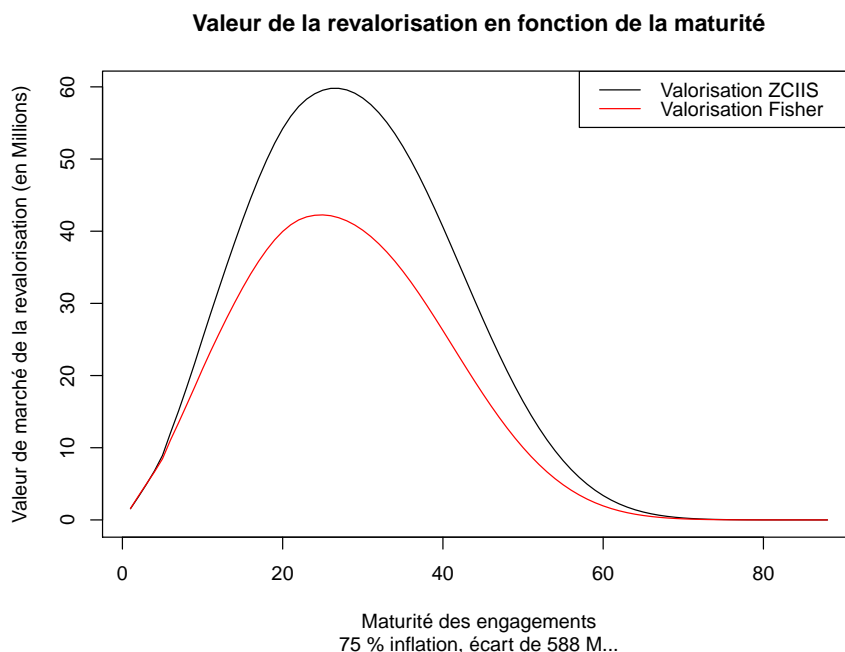


FIGURE 14.7 – Impact de l'hypothèse d'une inflation non couvrable sur la valeur de la revalorisation

Comme nous l'avons vu, il existe souvent, dans la littérature actuarielle, des hypothèses fortes sur les primes de risque qui nuisent à la précision des prix des instruments donnés par les modèles (comme les modèles de *Wilkie* et d'*Ahlgrim*). De plus, dans une période de forte tension sur les taux, les primes de risque ont tendance à avoir des comportements erratiques, ce qui rend plus difficiles à accepter ces hypothèses restrictives. La modélisation séparée dans les deux univers probabilistes fournit une alternative intéressante et compatible avec la directive Solvabilité 2. Dans ce cadre, il est possible de combiner des modèles afin de valoriser des prix d'instruments financiers avec précision, sans pour autant faire d'hypothèse directe sur les primes de risque.

En suivant l'approche de *Guibert*, il est possible d'évaluer l'impact de l'hypothèse d'inflation couvrable : la figure 14.7 montre que sur des engagements longs où la prime de risque d'inflation peut être grande, cela peut conduire à une sous-estimation importante de la valeur des engagements.

Cependant, comme le soulignent *Planchet, Thérond et Juillard* (2006), l'introduction d'un nouveau référentiel prudentiel ne doit pas contraindre les intervenants à utiliser des techniques rendant l'évaluation du profil de risque coûteuse en temps de calcul. Aussi, l'utilisation directe de l'algorithme *SdS* ne permet pas d'avoir un outil d'aide à la décision. Dans notre exemple, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir un *proxy* pour évaluer l'état futur des engagements, et ainsi aider à la gestion du risque. Dans ce sens et indépendamment du calcul du capital réglementaire, les modèles utilisés doivent également servir à des évaluations de *proxies* permettant aux gestionnaires de risque de piloter le respect des exigences réglementaires.

Bibliographie

- [Agence France Trésor, 2002] AGENCE FRANCE TRÉSOR (2002). Guide à l'usage des investisseurs.
- [Ahmad et Wilmott, 2006] AHMAD, R. et WILMOTT, P. (2006). The market price of interest-rate risk measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets. *WILMOTT magazine*.
- [Allag, 2008] ALLAG, L. (2008). Modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel de solvabilité 2. Mémoire de Master, ISFA.
- [Ang *et al.*, 2008] ANG, A., BEKAERT, G. et WEI, M. (2008). The term structure of real rates and expected inflation. *The Journal of Finance*.
- [Arias *et al.*, 2012] ARIAS, L., FOULQUIER, P. et LE MAISTRE, A. (2012). The impact of solvency II on bond management.
- [Aït-Sahalia et Kimmel, 2002] AÏT-SAHALIA, Y. et KIMMEL, R. (2002). Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions.
- [Bauer *et al.*, 2008] BAUER, D., BERGMANN, D. et REUSS, A. (2008). Solvency II and nested simulation - a least-squares monte carlo approach.
- [Bernaschi *et al.*, 2006] BERNASCHI, M., TOROSANTUCCI, L. et UBOLDI, A. (2006). Empirical evaluation of the market price of risk using the cir model.
- [Bernay, 2011] BERNAY, A. (2011). Rentabilité des actifs à long terme et risque inflation : enjeux de modélisation pour l'assurance. Mémoire de Master, ESSEC - ISUP.
- [Brennan et Xia, 2000] BRENNAN, M. et XIA, Y. (2000). Dynamic asset allocation under inflation. *Journal of Finance*.
- [Brigo et Mercurio, 2006] BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2006). Interest rate models, theory and practice. *Springer*.
- [Caja et Planchet, 2010] CAJA, A. et PLANCHET, F. (2010). La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?
- [Campbell *et al.*, 2009] CAMPBELL, J., SHILLER, R. et VICEIRA, L. (2009). Understanding inflation-indexed bond markets. *Cowles Foundation Discussion Paper N0.1696*.
- [CEIOPS, 2010] CEIOPS (2010). QIS5 calibration paper.
- [Chen *et al.*, 2006] CHEN, R., LUI, B. et CHENG, X. (2006). Inflation, fisher equation and the term structure of inflation risk premia : Theory and evidence from TIPS.
- [Comité de Normalisation Obligataire, 2011] COMITÉ DE NORMALISATION OBLIGATAIRE (2011). Inflation-linked bonds.
- [d'Ámico *et al.*, 2007] D'ÁMICO, S., KIM, D. et M.WEI (2007). Tips from TIPS : the informational content of inflation-protected security prices.
- [Date et Wang, 2006] DATE, P. et WANG, C. (2006). Linear gaussian affine term structure models with unobservable factors : Calibration and yield forecasting.
- [Decon *et al.*, 2004] DECON, DERRY et MIRFENDERESKI (2004). Inflation indexed securities.
- [Devineau et Chauvigny, 2010] DEVINEAU, L. et CHAUVIGNY, M. (2010). Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique solvabilité 2.
- [Devineau et Loisel, 2009] DEVINEAU, L. et LOISEL, S. (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique solvabilité 2. *Bulletin Français d'Actuariat*.

- [F. Quittard Pinon, 2003] F. QUITTARD PINON (2003). Marché des capitaux et théorie financière. *Economica*.
- [Faleh, 2011] FALEH, A. (2011). *Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite*. Thèse de doctorat, ISFA.
- [Garcia et van Rixtel, 2007] GARCIA, J. et VAN RIXTEL, A. (2007). Inflation-linked bonds from a central bank perspective. *ECB Occasional Paper Series*.
- [Garcia et Werner, 2010] GARCIA, J. et WERNER, T. (2010). Inflation risk and inflation risk premia. *ECB Working Paper Series*.
- [Gatheral, 2006] GATHERAL, J. (2006). The volatility surface : A practitioner guide. *Wiley Finance*.
- [Gerber, 2010] GERBER, G. (2010). Allocation d'actifs sous solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne. Mémoire de Master, Paris Dauphine.
- [Gilli et Schumann, 2012] GILLI, M. et SCHUMANN, E. (2012). Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson model. *COMISEF*.
- [Ginsbourger *et al.*, 2012] GINSBOURGER, D., ROSSPOPOFF, B., PIROT, G., DURRANDE, N. et RENARD, P. (2012). Distance-based kriging relying on proxy simulations for inverse conditioning.
- [Grishenko et Huang, 2008] GRISHENKO, O. et HUANG, J. (2008). Inflation risk premium : Evidence from the TIPS market.
- [Guibert, 2010] GUIBERT, Q. (2010). Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire. Mémoire de Master, ISFA.
- [Guirrieri *et al.*, 2010] GUIRRIERI, S., NAKABAYASHI, M. et WONG, T. (2010). Calibration methods of hull-wite model. *Risk Management Département, Mizuho Securities*.
- [Hastie *et al.*, 2003] HASTIE, T., TISHIRANI, R. et FRIEDMAN, J. (2003). *Springer Series in Statistics*.
- [Heath *et al.*, 1992] HEATH, D., JARROW, R. et MORTON, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuations. *Econometrica*.
- [Hibbert *et al.*, 2001] HIBBERT, J., MONBRAY, P. et TURNBULL, C. (2001). A stochastic asset model & calibration for long-term financial planning purposes.
- [Hördahl, 2008] HÖRDAHL, P. (2008). The inflation risk premium in the term structure of interest rates. *BIS Quarterly Review*.
- [Hull, 2011] HULL, J. (2011). Options, futures et autres actifs dérivés. *Pearson*.
- [Humphrey, 1983] HUMPHREY, T. (1983). The early history of the real/nominal interest rate relationship. *Economic Review*.
- [Hurd et Rellen, 2006] HURD, M. et RELLEN, J. (2006). New informations from inflation swap and index-linked bonds.
- [Jarrow et Yilidrim, 2003] JARROW, R. et YILIDRIM, Y. (2003). Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives using an HJM Model. *Journal of Quantitative Finance*.
- [Keita, 2011] KEITA, C. (2011). Génération de scénarii stochastiques économiques en vue d'une allocation d'actif en assurance vie. Mémoire de Master, ISUP.
- [Monge Linaño, 2007] MONGE LINAÑO, J. (2007). A practical implementation of the Heath-Jarrow-Morton framework.
- [Nteukam et Planchet, 2010] NTEUKAM, O. et PLANCHET, F. (2010). Évaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif & mesure de l'erreur liée à l'agrégation.
- [Park, 2004] PARK, F. C. (2004). Implementing interest rate models : A practical guide.
- [Parlement européen et Conseil de l'Union européenne, 2009] PARLEMENT EUROPÉEN ET CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/ce - Solvabilité 2. *Journal officiel de l'Union européenne*.
- [Planchet, 2009] PLANCHET, F. (2009). Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. *La Tribune de l'Assurance*.
- [Planchet, 2011] PLANCHET, F. (2011). Paramètres de générateur de scénarios économiques, comment choisir ? *La Tribune de l'Assurance*.
- [Planchet *et al.*, 2006] PLANCHET, F., THÉRON, P. et JUILLARD, M. (2006). Modèles financiers en assurance. *Economica*.

- [Priaulet, 2006] PRIAULET, P. (2006). Modèles de la courbe des taux d'intérêt - cours ENSAE.
- [Sall Tang Andersen, 2011] SALL TANG ANDERSEN, A. (2011). Inflation risk premia in the term structure of interest rates : Evidences from euro area inflation swaps.
- [Sauser, 2010] SAUSER, C. (2010). Analyse et contrôle des scénarios financiers dans le cadre d'un modèle interne. Mémoire de Master, ISFA.
- [Wilhelmy, 2005] WILHELMY, F. (2005). Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif. Mémoire de Master, ISFA.

Annexe A

Démonstrations – Partie 1

On se propose de revenir sur les démonstrations de certains points techniques abordés dans la partie 1.

A.1 SCR par formule standard

Le but de cette démonstration est de montrer que, dans le cas où les facteurs de risque forment un vecteur Gaussien, il existe une relation simplifiée reliant le SCR aux SCR marginaux. Ayant noté que la variable de perte à un an L s'écrit :

$$L = \sum_{i=1}^d L_i \quad \mathbb{P}(L_i \leq \text{SCR}^i) = 99.5 \%$$

On a donc :

$$\text{SCR}^i = \text{VaR}_{99.5\%}(L_i)$$

On fait l'hypothèse que $[L_1, \dots, L_d]$ suit une loi normale multivariée. Ainsi, en notant $[\mu_i, \sigma_i]$ les paramètres de la loi L_i , on a :

$$\text{SCR}^i = \Phi^{-1}(99.5\%) \times \sigma_i + \mu_i \quad \rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(L_i; L_j)}{\sigma_i \times \sigma_j}$$

Et :

$$\text{SCR} = \Phi^{-1}(99.5\%) \times \sqrt{\text{var} \left[\sum_{i=1}^d L_i \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^d L_i \right]}$$

Cette expression peut être simplifiée dans le cadre d'une loi normale multivariée :

$$\begin{aligned} \Phi^{-2}(99.5\%) \text{var} \left[\sum_{i=1}^d L_i \right] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \Phi^{-1}(99.5\%) \sqrt{\text{var}[L_i]} \times \Phi^{-1}(99.5\%) \sqrt{\text{var}[L_j]} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} (\text{SCR}^i - \mu_i) \times (\text{SCR}^j - \mu_j) \end{aligned}$$

Ce qui permet de retrouver l'expression proposée en introduction :

$$\text{SCR} = \sum_{i=1}^d \mu_i + \sqrt{\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \rho_{ij} (\text{SCR}^i - \mu_i) (\text{SCR}^j - \mu_j)}$$

A.2 Relation d'AOA entre déflateurs

Le but de cette démonstration est de montrer que, dans le cadre de l'analogie de la monnaie étrangère, il existe une relation d'AOA entre déflateurs, telle qu'elle figure au chapitre 5. Ce résultat est courant pour les modèles de devises, mais il est plus difficile de trouver la démonstration dans le cadre de l'analogie de la monnaie étrangère.

On peut valoriser par deux portefeuilles autofinancés différents en t une unité de monnaie étrangère en T . Par exemple :

- $I(t)\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[\Pi_r(t, T)]$. Cet actif disponible en t donne le droit à une unité d'IPC en T , soit une unité de monnaie étrangère.
- $\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[\Pi_n(t, T)I(T)]$. Ce montant correspond à la définition du ZC réel.

Par AOA, on a donc :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[I(t)\Pi_r(t, T)] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[I(T)\Pi_n(t, T)]$$

Ce qui peut être écrit de manière équivalente :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{I(T)\Pi_n(t, T)}{I(t)\Pi_r(t, T)}\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{I(t)\Pi_r(t, T)}{I(T)\Pi_n(t, T)}\right]$$

Toutes les variables étant positives, on peut les additionner et réduire au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{[I(t)\Pi_r(t, T)]^2 + [I(T)\Pi_n(t, T)]^2}{I(t)\Pi_r(t, T)I(T)\Pi_n(t, T)}\right] &= 2 \\ \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{[I(t)\Pi_r(t, T)]^2 - 2I(T)\Pi_n(t, T)I(t)\Pi_r(t, T) + [I(T)\Pi_n(t, T)]^2 + 2I(T)\Pi_n(t, T)I(t)\Pi_r(t, T)}{I(t)\Pi_r(t, T)I(T)\Pi_n(t, T)}\right] &= 2 \\ \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{[I(t)\Pi_r(t, T) - I(T)\Pi_n(t, T)]^2}{I(t)\Pi_r(t, T)I(T)\Pi_n(t, T)}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que :

$$\begin{aligned} I(t)\Pi_r(t, T) - I(T)\Pi_n(t, T) &= 0 \\ \frac{I(t)}{I(T)}\Pi_r(t, T) &= \Pi_n(t, T) \end{aligned}$$

A.3 Développement limité du ZC

Le but de cette démonstration est de revenir sur le développement limité du prix du ZC abordé au chapitre 6. Dans le cadre d'un modèle de taux court, on a :

$$P_n(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} \right]$$

Avec :

$$dr_t = [u(r) - \lambda_t w(r)] dt + w(r) dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Ce qui permet d'écrire (Itô) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial t} &= -r_t P_n(t, T) \\ \frac{\partial^2 P_n(t, T)}{\partial^2 t} &= -\frac{\partial r_t}{\partial t} P_n(t, T) - r_t \frac{\partial P_n(t, T)}{\partial t} \end{aligned}$$

La dernière équation peut alors s'écrire, en utilisant le fait que la dérive du processus de taux court soit égale à sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 P_n(t, T)}{\partial^2 t} = [\lambda_t w(r) - u(r) + r_t^2] P_n(t, T)$$

Ce qui permet d'écrire la première équation figurant au chapitre 6 :

$$P_n(t, T) = 1 - r_T(T - t) + \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T) + r_t^2] (T - t)^2 + o(T - t)^2$$

Pour obtenir le développement limité pour les taux, il faut effectuer un développement limité de $\ln P_n(t, T)$ lorsque $T \rightarrow t$. En se rappelant que lorsque x est proche de 0, pour des constantes a et b quelconques :

$$\ln(1 - ax + bx^2) = -ax + bx^2 - \frac{ax^2}{2} + o(x^2)$$

Alors, il vient :

$$\begin{aligned} \ln P_n(t, T) &= \ln \left[1 - r_T(T - t) + \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T) + r_t^2] (T - t)^2 + o(T - t)^2 \right] \\ &= -r_T(T - t) + \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T) + r_t^2] (T - t)^2 - \frac{r_t^2}{2} + o(T - t)^2 \\ &= -r_T(T - t) + \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T)] (T - t)^2 + o(T - t)^2 \end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver la deuxième équation figurant au chapitre 6 :

$$y_n(t, T) = \frac{-\ln P_n(t, T)}{T - t} = r_T - \frac{1}{2} [u(r_T) - \lambda_T w(r_T)] (T - t) + o(T - t)$$

Annexe B

Démonstrations – Partie 2

On se propose de revenir sur les démonstrations de certains points techniques abordés dans la partie 2.

B.1 Taux court réel sous la probabilité risque neutre locale

Le modèle de volatilité étant original, on propose cette démonstration pour montrer que la dynamique du taux court réel sous la probabilité risque neutre locale est la même que celle proposée par *Jarrow et Yildirim*. Ayant spécifié la dynamique de l'inflation sous la probabilité risque neutre locale :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r_n(t) - r_r(t)]dt + \Sigma_q(0, t)dW_q^{\mathbb{Q}}(t)$$

avec $\Sigma_q(0, t) = \sigma_q B_q(0, t)$.

On peut déterminer deux équations sur la dérive, sous la probabilité risque neutre locale, de l'actif $P_{\text{IP}}(t, T) = I(t)P_r(t, T)$ correspondant au versement d'une unité d'IPC en T .

▷ Tout d'abord, on peut utiliser le lemme d'*Itô* sur $P_{\text{IP}}(t, T) = I(t)P_r(t, T)$:

$$dP_{\text{IP}}(t, T) = I(t)dP_r(t, T) + P_r(t, T)dI(t) + \langle dI(t); dP_r(t, T) \rangle$$

Soit, en notant $P_r(t, T)\mu_r^{\mathbb{Q}}(t, T)$ la dérive sous la probabilité risque neutre locale du ZC réel :

$$\frac{dP_{\text{IP}}(t, T)}{P_{\text{IP}}(t, T)} = [\mu_r^{\mathbb{Q}}(t, T) + r_n(t) - r_r(t) + \rho_{rq}\Sigma_q(0, t)\Sigma_r(t, T)] dt - \Sigma_r(t, T)dW_r^{\mathbb{Q}}(t) + \Sigma_q(0, t)dW_q^{\mathbb{Q}}(t)$$

▷ Étant négociable sur le marché nominal, $P_{\text{IP}}(t, T)$ doit être martingale sous la probabilité risque neutre locale. On peut alors écrire :

$$\frac{dP_{\text{IP}}(t, T)}{P_{\text{IP}}(t, T)} = r_n(t)dt + \Sigma_{\text{IP}}(t, T)dW_{\text{IP}}^{\mathbb{Q}}(t)$$

En égalisant les deux dérives, on peut écrire :

$$\mu_r^{\mathbb{Q}}(t, T) = r_r(t) - \rho_{rq}\Sigma_r(t, T)\Sigma_q(0, t)$$

En se rappelant que sous la probabilité risque neutre étrangère, la dérive du prix du ZC est égale à $r_r(t)$, on obtient l'expression du prix du marché du risque λ_F qui permet de passer de la probabilité risque neutre étrangère à la probabilité risque neutre locale :

$$\begin{aligned} \mu_r^{\mathbb{Q}}(t, T) &= r_r(t) - \lambda_F(t)\Sigma_r(t, T) \\ \Rightarrow \lambda_F(t) &= \rho_{rq}\Sigma_q(0, t) \end{aligned}$$

Et ainsi la dynamique du taux court sous la probabilité risque neutre locale est :

$$dr_r(t) = (\theta_r(t) - a_r r_r(t) - \rho_{rq}\sigma_r\sigma_q B_q(0, t))dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

Démonstration alternative – changement de numéraire Il existe une autre façon de montrer quelle est la forme de la prime de risque, en utilisant une technique s'apparentant au « changement de numéraire ». Pour plus de détails sur la technique du changement de numéraire, on pourra se référer à *Brigo et Mercurio* (2006).

D'après le chapitre 5, on peut écrire :

$$P_r(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_n(u) du} \frac{I(t)}{I(0)} P_r(t, T) \right]$$

$$P_r(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^F} \left[e^{-\int_0^t r_r(u) du} P_r(t, T) \right]$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\mathbb{Q}(t)}{d\mathbb{Q}^F(t)} \Big|_{\mathcal{F}_0} = e^{\int_0^t (r_r(u) - r_n(u)) du} \frac{I(t)}{I(0)} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \Sigma_q^2(0, u) - \int_0^t \Sigma_q(0, u) dW_q(u)}$$

Et donc, d'après le théorème de *Girsanov* et conditionnellement à \mathcal{F}_0 :

$$dW_q^{\mathbb{Q}}(u) = dW_q^{\mathbb{Q}^F}(u) - \Sigma_q(0, u) du$$

$$dW_r^{\mathbb{Q}}(u) = dW_r^{\mathbb{Q}^F}(u) - \rho_{rq} \Sigma_q(0, u) du$$

Ce résultat s'interprète comme la prime de risque liée au passage du compte monétaire nominal $e^{-\int_0^t r_n(u) du}$ associé à la probabilité risque neutre au compte monétaire étranger¹ vu du marché local $\frac{I(t)}{I(0)} e^{-\int_0^t r_r(u) du}$ lié à la probabilité risque neutre étrangère. Ce dernier actif est bien un numéraire valide au sens où il est presque sûrement positif et sans dividendes.

1. Changement de monnaie en 0 puis investissement dans le compte monétaire étranger $e^{-\int_0^t r_r(u) du}$ et changement de monnaie en t .

B.2 Formule fermée pour le *Cap* sur EU6M

La démonstration se fait en deux temps. D'abord, on propose de vérifier l'équivalence entre *caplet* et *ZBP* puis, dans le cadre du modèle de *Hull et White*, on propose une formule fermée pour le *cap*. On se contentera des grandes lignes des démonstrations. Pour plus de détails, ou pourra se référer à *Brigo et Mercurio* (2006).

Equivalence *caplet* – *ZBP*

On peut montrer qu'un *caplet* sur EU6M est équivalent à une certaine option de vente européenne sur ZC . En effet, prenons en t :

- un Cpl de date de *fixing* T , de prix d'exercice K_C , de nominal N et de date de paiement $S > T$. On note $\tau = T - S$ le temps entre le *fixing* et le paiement. Son prix en t est donné par :

$$Cpl(t, T, S, \tau, N, K_C) = N \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} (L(T, S) - K_C)_+ \right]$$

- un *ZBP* de date d'exercice T et de prix d'exercice K_P , offrant la possibilité de vendre un ZC de maturité $S > T$. Son prix en t est donné par :

$$ZBP(t, T, S, K_P) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} (P_n(T, S) - K_P)_+ \right]$$

Il apparait alors que :

$$Cpl(t, T, S, \tau, N, K_C) = N(1 + K\tau) \times ZBP \left(t, T, S, \frac{1}{1 + X\tau} \right)$$

Cette égalité ne dépend pas du modèle de taux utilisé.

Valorisation avec modèle de *Hull et White*

Dans le cadre du modèle de *Hull et White* à un facteur, il existe formule fermée donnant le prix de l'option de vente sur ZC. On peut montrer que :

$$ZBP(t, T, S, K_P) = K P_n(t, T) \Phi(-h + \sigma_p) - P_n(t, S) \Phi(-h)$$

Avec :

- $\sigma_p = \sigma_n \sqrt{\frac{1 - e^{2a_n(T-t)}}{2a_n}} B_n(T, S)$
- $h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P_n(t, S)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$

B.3 Formule fermée pour le YYIIS

On rappelle que la valeur en t d'un paiement de jambe variable de *YYIIS* rémunérant l'inflation effective pendant la période $[T_{i-1}; T_i]$ est donnée par la formule :

$$JV_i = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_i-1} r_n(u) du} P_r(T_{i-1}, T_i) \right] - P_n(t, T_i)$$

Dans cette annexe, on va s'intéresser à la valorisation de cette jambe variable avec le modèle proposé en 0. Pour cela, il faut déterminer :

$$YYIIS_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_i-1} r_n(u) du} P_r(T_{i-1}, T_i) \right] \quad (\text{B.1})$$

En utilisant les résultats de l'annexe B.1, on sait que, conditionnellement à \mathcal{F}_0 et pour $0 < u < T_i$:

$$\frac{dP_r(u, T_i)}{P_r(t, T_i)} = r_r(u) - \rho_{rq} \Sigma_q(0, u) \Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_i) dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$P_r(T_{i-1}, T_i) = P_r(0, T_i) \exp \left[\int_0^{T_{i-1}} \left(r_r(u) - \rho_{rq} \Sigma_q(0, u) \Sigma_r(u, T_i) - \frac{1}{2} \Sigma_r^2(u, T_i) \right) du - \int_0^{T_{i-1}} \Sigma_r(u, T_i) dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right]$$

En utilisant le fait que, pour $T_i = T_{i-1}$:

$$1 = P_r(0, T_{i-1}) \exp \left[\int_0^{T_{i-1}} \left(r_r(u) - \rho_{rq} \Sigma_q(0, u) \Sigma_r(u, T_{i-1}) - \frac{1}{2} \Sigma_r^2(u, T_{i-1}) \right) du - \int_0^{T_{i-1}} \Sigma_r(u, T_{i-1}) dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right]$$

On peut éliminer le taux effectif réel du prix du ZC réel :

$$\begin{aligned} P_r(T_{i-1}, T_i) &= \frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} \\ &\exp \left[- \int_0^{T_{i-1}} \left(\rho_{rq} \Sigma_q(0, u) [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] + \frac{1}{2} [\Sigma_r^2(u, T_i) - \Sigma_r^2(u, T_{i-1})] \right) du \right. \\ &\left. - \int_0^{T_{i-1}} [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right] \end{aligned}$$

On notera \mathbf{G} le terme dans l'exponentielle.

Tel quel, il est difficile d'aller plus loin. En effet, dans la formule B.1, la présence du taux d'actualisation nominal complique les calculs. Une astuce consiste à passer dans l'univers T_{i-1} *forward*-neutre. Le passage dans cet univers est un *changement de numéraire*² du compte monétaire sans risque associé à la probabilité risque neutre au prix du ZC nominal de maturité T_{i-1} . Le changement de probabilité pour l'aléa réel est :

$$dW_r^{\mathbb{Q}}(u) = dW_r^{T_{i-1}}(u) - \rho_{NR} \Sigma_n(u, T_{i-1})$$

L'avantage du passage dans un tel numéraire est qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} YYIIS_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{i-1}}} \left[\frac{P_n(0, T_{i-1})}{P_n(T_{i-1}, T_{i-1})} P_r(T_{i-1}, T_i) \right] \\ &= P_n(0, T_{i-1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{i-1}}} [P_r(T_{i-1}, T_i)] \\ &= P_n(0, T_{i-1}) \frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{i-1}}} [e^{\mathbf{G}}] \end{aligned}$$

Il reste donc à déterminer l'espérance de \mathbf{G} sous la probabilité T_{i-1} *forward*-neutre. On remarque que \mathbf{G} suit une loi normale sous cette probabilité :

$$\mathbf{G} \sim \mathcal{N}(M, V)$$

2. Pour plus de détails sur ce point, on pourra se référer à *Brigo et Mercurio (2006)*.

avec :

$$M = - \int_0^{T_{i-1}} \left([\rho_{rq}\Sigma_q(0, u) + \rho_{rn}\Sigma_n(u, T_{i-1})] [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] + \frac{1}{2} [\Sigma_r^2(u, T_i) - \Sigma_r^2(u, T_{i-1})] \right) du$$

$$V = \int_0^{T_{i-1}} [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})]^2 du$$

Ce qui permet d'écrire :

$$YYIIS_0 = P_n(0, T_{i-1}) \frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} e^{M + \frac{V}{2}}$$

On note alors, de la même façon de *Brigo et Mercurio* (2006) :

$$\mathbf{C}(T_{i-1}, T_i) = M + \frac{V}{2}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(T_{i-1}, T_i) &= M + \frac{1}{2} \int_0^{T_{i-1}} [\Sigma_r(u, T_i)^2 + \Sigma_r(u, T_{i-1})^2 - 2\Sigma_r(u, T_i)\Sigma_r(u, T_{i-1})] du \\ &= - \int_0^{T_{i-1}} \left([\rho_{rq}\Sigma_q(0, u) + \rho_{rn}\Sigma_n(u, T_{i-1})] [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] + \Sigma_r(u, T_i)\Sigma_r(u, T_{i-1}) \right) du \end{aligned}$$

On peut déduire certains résultats de la formule originelle de *Brigo et Mercurio* (2006). En particulier, tous les termes qui s'annulent avec ρ_{rq} sont les mêmes. Soit :

$$\begin{aligned} -\rho_{rn} \int_0^{T_{i-1}} \Sigma_n(u, T_{i-1}) [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] du &= \\ \rho_{rn} \frac{\sigma_n}{a_n + a_r} B_r(T_{i-1}, T_i) [B_r(0, T_{i-1})(1 + a_r B_n(0, T_{i-1})) - B_n(0, T_{i-1})] & \end{aligned}$$

et :

$$\int_0^{T_{i-1}} \Sigma_r(u, T_i)\Sigma_r(u, T_{i-1}) du = -\frac{\sigma_r^2}{2} B_r(T_i, T_{i-1})B_r(0, T_{i-1})^2$$

Pour finir le calcul, il reste à évaluer :

$$-\rho_{rq} \int_0^{T_{i-1}} \Sigma_q(0, u) [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] du = \rho_{rq} \frac{\sigma_q \sigma_r}{a_r a_q} \int_0^{T_{i-1}} [1 - e^{-a_q u}] [e^{-a_r(T_{i-1}-u)} - e^{-a_r(T_i-u)}] du$$

Ce qui donne :

$$-\rho_{rq} \int_0^{T_{i-1}} \Sigma_q(0, u) [\Sigma_r(u, T_i) - \Sigma_r(u, T_{i-1})] du = \rho_{rq} \frac{\sigma_q \sigma_r}{a_r - a_q} B_r(T_{i-1}, T_i) [B_r(0, T_{i-1}) - B_q(0, T_{i-1})]$$

Et permet de justifier la formule donnée au chapitre 10.

Annexe C

Discrétisations et corrélations

Dans cette annexe, on propose de reprendre les démonstrations des résultats du chapitre 12. Dans un premier temps, on va revenir sur les équations de discrétisation, puis on démontrera la validité des équations de corrélations.

C.1 Discrétisations

Historique

Taux court nominal On rappelle que le taux court nominal suit un processus d'*Ahmad et Wilmott* (2006) :

$$dr_n(t) = u(r_n(t))du + \sigma_n dW_n^{\mathbb{P}}(u)$$

Une discrétisation type *Euler* mène au résultat :

$$\begin{aligned} r_n(t + \Delta) &= r_n(t) + u(r_n(t))\Delta + \sigma_n \int_t^{t+\Delta} dW_n^{\mathbb{P}}(u) \\ r_n(t + \Delta) &= r_n(t) + u(r_n(t))\Delta + \sigma_n \sqrt{\Delta} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Taux court d'inflation On rappelle que le taux court d'inflation suit un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*. Comme noté à l'équation 9.2 :

$$dq_u = a_q(\mu_q - q_u)du + \sigma_q dW_q^{\mathbb{P}}(u)$$

La discrétisation exacte d'un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* est connue dans la littérature. Suivant *Brigo et Mercurio* (2006), on obtient :

$$\begin{aligned} q_T &= q_t e^{-a_q(T-t)} + \mu_q(1 - e^{-a_q(T-t)}) + \sigma_q \int_t^{t+\Delta} e^{-a_q(t+\Delta-u)} dW_q^{\mathbb{P}}(u) \\ q_T &= q_t e^{-a_q(T-t)} + \mu_q(1 - e^{-a_q(T-t)}) + \sqrt{V_q(t, t + \Delta)} \varepsilon_{q,t}^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Taux effectif d'inflation Le taux effectif d'inflation est défini comme l'intégrale du taux court d'inflation. L'intégrale d'un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* est une formule connue dans la littérature. En suivant *Brigo et Mercurio* (2006), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta} q_u du &= \mu_q(T-t) + \frac{q_t - \mu_q}{a_q} [1 - e^{-a_q(T-t)}] + \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{P}}(u) \\ \int_t^{t+\Delta} q_u du &= \mu_q(T-t) + \frac{q_t - \mu_q}{a_q} [1 - e^{-a_q(T-t)}] + \sqrt{V_q(t, t + \Delta)} \varepsilon_{q, \text{eff}, t}^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Risque neutre

Taux court nominal Le taux court nominal suit un processus de *Hull et White* à un facteur. La discrétisation exacte d'un processus de *Hull et White* à un facteur est connue dans la littérature. En suivant *Brigo et Mercurio* (2006), on peut écrire :

$$r_n(t + \Delta) = r_n(t)e^{-a_n\Delta} + \alpha_n(t + \Delta) - \alpha_n(t)e^{-a_n\Delta} + \sigma_n \int_t^{t+\Delta} e^{-a_n(t+\Delta-u)} dW_n^{\mathbb{Q}}(u)$$

$$r_n(t + \Delta) = r_n(t)e^{-a_n\Delta} + \alpha_n(t + \Delta) - \alpha_n(t)e^{-a_n\Delta} + \sqrt{U_n(t, t + \Delta)} \varepsilon_{n,t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux effectif nominal Le taux effectif nominal est défini comme l'intégrale du taux court nominal. L'intégrale d'un processus de *Hull et White* est connue dans la littérature. En suivant *Brigo et Mercurio* (2006), on peut écrire :

$$\int_t^{t+\Delta} r_n(u) du = B_n(t, t + \Delta) [r_n(t) - \alpha_n(t)] + \ln \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t + \Delta)} + \frac{1}{2} [V_n(0, t + \Delta) - V_n(0, t)]$$

$$+ \sigma_n \int_t^{t+\Delta} B_n(u, t + \Delta) dW_n^{\mathbb{Q}}(u)$$

$$\int_t^{t+\Delta} r_n(u) du = B_n(t, t + \Delta) [r_n(t) - \alpha_n(t)] + \ln \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t + \Delta)} + \frac{1}{2} [V_n(0, t + \Delta) - V_n(0, t)]$$

$$+ \sqrt{V_n(t, t + \Delta)} \varepsilon_{\text{neff},t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux court réel Le taux court réel suit un processus de *Hull et White* dans sa monnaie. On rappelle l'équation 10.3, conditionnellement à \mathcal{F}_t , pour $u \geq t$:

$$dr_r(u) = [\theta_r(u) - a_r r_r(u) - \rho_{rq} \sigma_r \sigma_q B_q(t, u)] du + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

De façon similaire au cas nominal, la discrétisation peut être obtenue par :

$$r_r(t + \Delta) = r_r(t)e^{-a_r\Delta} + \alpha_r(t + \Delta) - \alpha_r(t)e^{-a_r\Delta} - \rho_{rq} \sigma_r \sigma_q \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-u)} B_q(t, u) du$$

$$+ \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_r\Delta}}{2a_r^2}} \varepsilon_{r,t}^{\mathbb{Q}}$$

soit :

$$r_r(t + \Delta) = r_r(t)e^{-a_r\Delta} + \alpha_r(t + \Delta) - \alpha_r(t)e^{-a_r\Delta} - \rho_{rq} \sigma_r \frac{\sigma_q}{a_q} \left[B_r(t, t + \Delta) + \frac{1}{a_r - a_q} [e^{-a_r\Delta} - e^{-a_q\Delta}] \right]$$

$$+ \sigma_r \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

$$r_r(t + \Delta) = r_r(t)e^{-a_r\Delta} + \alpha_r(t + \Delta) - \alpha_r(t)e^{-a_r\Delta} - \rho_{rq} \sigma_r \frac{\sigma_q}{a_q} \left[B_r(t, t + \Delta) + \frac{1}{a_r - a_q} [e^{-a_r\Delta} - e^{-a_q\Delta}] \right]$$

$$+ \sigma_r \sqrt{U_r(t, t + \Delta)} \varepsilon_{r,t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux effectif réel Le taux effectif réel est défini comme l'intégrale du taux court réel. De façon similaire au cas nominal, on obtient :

$$\int_t^{t+\Delta} r_r(u) du = B_r(t, t + \Delta) [r_r(t) - \alpha_r(t)] + \ln \frac{P_r(0, t)}{P_r(0, t + \Delta)} + \frac{1}{2} [V_r(0, t + \Delta) - V_r(0, t)]$$

$$- \rho_{rq} \sigma_r \frac{\sigma_q}{a_q} \left[\frac{1}{a_r} [\Delta + B_r(t, t + \Delta)] + \frac{1}{a_r - a_q} [B_r(t, t + \Delta) - B_q(t, t + \Delta)] \right] + \sigma_r \int_t^{t+\Delta} B_r(u, t + \Delta) dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

$$\int_t^{t+\Delta} r_r(u)du = B_r(t, t + \Delta) [r_r(t) - \alpha_r(t)] + \ln \frac{P_r(0, t)}{P_r(0, t + \Delta)} + \frac{1}{2} [V_r(0, t + \Delta) - V_r(0, t)]$$

$$- \rho_{rq} \sigma_r \frac{\sigma_q}{a_q} \left[\frac{1}{a_r} [\Delta + B_r(t, t + \Delta)] + \frac{1}{a_r - a_q} [B_r(t, t + \Delta) - B_q(t, t + \Delta)] \right] + \sqrt{V_r(t, t + \Delta)} \varepsilon_{\text{reff}, t}^{\mathbb{Q}}$$

Taux d'inflation effectif Le taux d'inflation effectif est déduit des taux nominaux et réels effectifs. La variance du taux d'inflation effectif doit être la même que dans l'univers historique. On obtient :

$$\int_t^{t+\Delta} q_u du = \int_t^{t+\Delta} r_n(u) du - \int_t^{t+\Delta} r_r(u) du + \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{Q}}(u)$$

$$\int_t^{t+\Delta} q_u du = \int_t^{t+\Delta} r_n(u) du - \int_t^{t+\Delta} r_r(u) du + \sqrt{V_q(t, t + \Delta)} \varepsilon_{\text{qeff}, t}^{\mathbb{Q}}$$

C.2 Corrélations

Historique

Pour déterminer les corrélations historiques servant à la discrétisation historique, il faut spécifier la matrice $\Gamma_t^{\mathbb{P}}$, avec :

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{\mathbb{P}}[1, 2] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} dW_n^{\mathbb{P}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} e^{-a_q(t+\Delta-s)} dW_q^{\mathbb{P}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{P}}[1, 3] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} dW_n^{\mathbb{P}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{P}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{P}}[2, 3] &= \text{Cor} \left[\sigma_q \int_t^{t+\Delta} e^{-a_q(t+\Delta-s)} dW_q^{\mathbb{P}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{P}}(s) \right]\end{aligned}$$

Risque neutre

Pour déterminer les corrélations risque neutre servant à la discrétisation risque neutre, il faut spécifier la matrice $\Gamma_t^{\mathbb{Q}}$, avec :

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 2] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} e^{-a_n(t+\Delta-u)} dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_n \int_t^{t+\Delta} B_n(u, t + \Delta) dW_n^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 3] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} e^{-a_n(t+\Delta-u)} dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_r \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-s)} dW_r^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 4] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} e^{-a_n(t+\Delta-u)} dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_r \int_t^{t+\Delta} B_r(u, t + \Delta) dW_r^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[1, 5] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} e^{-a_n(t+\Delta-u)} dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 3] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} B_n(u, t + \Delta) dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_r \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 4] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} B_n(u, t + \Delta) dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_r \int_t^{t+\Delta} B_r(u, t + \Delta) dW_r^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[2, 5] &= \text{Cor} \left[\sigma_n \int_t^{t+\Delta} B_n(u, t + \Delta) dW_n^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[3, 4] &= \text{Cor} \left[\sigma_r \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_r \int_t^{t+\Delta} B_r(u, t + \Delta) dW_r^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[3, 5] &= \text{Cor} \left[\sigma_r \int_t^{t+\Delta} e^{-a_r(t+\Delta-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{Q}}(s) \right] \\ \Gamma_t^{\mathbb{Q}}[4, 5] &= \text{Cor} \left[\sigma_r \int_t^{t+\Delta} B_r(u, t + \Delta) dW_r^{\mathbb{Q}}(u) ; \sigma_q \int_t^{t+\Delta} B_q(u, t + \Delta) dW_q^{\mathbb{Q}}(s) \right]\end{aligned}$$

À part les deux corrélations liées aux taux nominaux historiques, les équations sont similaires. Il suffit alors de différencier :

- Les corrélations entre deux taux courts ;
- Les corrélations entre taux court et taux effectifs ;
- Les corrélations entre deux taux effectifs.

On a directement les résultats du chapitre 12 en se servant du fait que, dans notre approche :

$$\text{Cov} [W_k(u) ; W_q(s)] = \mathbf{1}_{\{s=u\}} \rho_{kq}$$