



ISUP

## PROMOTION 2009

Mémoire présenté devant

**I n s t i t u t d e S t a t i s t i q u e  
de l'Université Pierre et Marie Curie**

Pour l'obtention du

# **Diplôme de Statisticien Mention Actuariat**

*A s s u r a n c e*

*F i n a n c e*

Par Mlle. DOBROWOLSKI Gaëlle

Sujet : Assurance dépendance dans le cadre de l'assurance retraite collective

Lieu du stage : Axa Direction Epargne Retraite Entreprise

Responsable du stage : M. CABASSON Olivier

Invité(s) :

**CONFIDENTIEL**

## Résumé

L'espérance de vie à 60 ans ne cesse de s'accroître, elle augmente d'environ deux mois chaque année. En conséquence, le nombre de personnes âgées va croître de façon spectaculaire. Le risque dépendance étant fortement croissant avec l'âge, l'évolution du nombre de dépendants va probablement suivre celle des personnes âgées.

Afin d'aider les personnes dépendantes, le système public français a mis en place l'allocation personnalisée d'autonomie (APA). Toutefois, le montant de l'allocation personnalisée d'autonomie n'excède pas 1 106,77 euros par mois, ce qui est bien insuffisant. En effet, le coût d'une personne dépendante est estimé à 3.000 euros par mois ce qui représente une lourde dépense, fréquemment à la charge des enfants. Le coût de l'aide à apporter à ces personnes peut donc se révéler très important et son financement est devenu un problème commun à l'ensemble des pays développés dont la population a vieilli. Ceci conduit donc à développer les produits d'assurance dépendance en parallèle de l'offre publique.

Dans une première partie, nous étudierons les horizons du risque dépendance en France. Après avoir défini la notion de dépendance et les outils de mesure de ce risque, nous détaillerons les particularités des contrats existants, puis nous dresserons un portrait du marché dépendance et des produits proposés en France.

Dans une deuxième partie, des études préalables à la mise en place du produit seront menées. Tout d'abord, nous étudierons les lois relatives à la dépendance en comparant les estimations existantes, avant d'expliquer sur quoi sont construites les lois Axa mises à disposition. Ces lois sont les seuls outils dont j'ai disposé durant ce stage. Ensuite, la modélisation mathématique des états liés à la dépendance sera abordée par un modèle simple, traitant la dépendance totale uniquement, puis par un modèle multi-état traitant la dépendance totale et la dépendance partielle. La modélisation multi-état est étudiée avec les chaînes de Markov, au moyen d'un outil créé pour automatiser les nombreux calculs de ce modèle. Malgré le fait que les résultats soient alignés avec ceux du marché, les lois liées à la dépendance partielle à disposition ne sont pas fiables. Le modèle multi-état ne sera donc pas retenu, et nous choisirons de réassurer la dépendance partielle si elle est proposée dans le produit à mettre en place.

Dans une troisième partie, nous entrerons dans le « vif » du sujet. Toute la problématique du mémoire repose sur la **conception d'un produit dépendance dans le cadre de la retraite collective**. C'est dans cette partie que les tenants et les aboutissants des réflexions liées à la conception du produit seront détaillés : à quel type de contrat retraite associer ce produit, quelles caractéristiques doit-il avoir, quelles prestations offrir, et comment prélever les cotisations ? Plusieurs solutions s'offraient, nous avons finalement choisi de créer un produit collectif et obligatoire lié à l'article 83, garantissant le **doublément du capital constitutif en phase d'épargne**, et le **doublément de la rente article 83 en restitution**. Le produit est tarifé dans ce mémoire comme s'il couvrait uniquement la dépendance totale, car le tarif en cas de dépendance partielle sera défini avec le réassureur.

La prime de la **garantie en phase d'épargne est payée périodiquement durant cette phase**, elle représente un très faible pourcentage de la prime article 83. La prime de la **garantie en phase de rente est financée en grande partie par le terme trimestriel d'avance de l'article 83, puis le paiement de la prime résiduelle est étalée tout au long de la phase de rente afin de pouvoir être réajustée au besoin, le risque dépendance étant encore mal connu**.

Dans une quatrième partie, le produit doit être mis en place. Tout d'abord, les engagements mathématiques de l'assureur seront traduits mathématiquement afin d'évaluer leur coût.

Ensuite, **les performances du fonds article 83 déterminant le capital constitutif de l'assuré seront estimées**, selon le type de gestion choisi. Cette estimation nécessite la mise en place de **modèles stochastiques**.

La tarification du produit nécessite également la **mise en place d'un outil** qui prenne en compte tous les paramètres influents et qui **automatise les calculs non seulement pour un assuré, mais aussi pour une entreprise entière car le contrat est collectif**.

Aussi, le produit mis en place nécessite des provisions particulières. Bien entendu, l'outil créé pour la tarification devra inclure le calcul des provisions pour un assuré, et pour une démographie d'entreprise, à un horizon donné.

Enfin, nous proposerons un type de réassurance adapté au produit.

Dans une cinquième partie, la fiabilité des éléments mis en place doit être testée. Pour ce faire, nous étudierons la robustesse des tarifs établis en mettant à l'épreuve les lois et les hypothèses du modèle. Le tarif est sensible aux variations des hypothèses démographiques et financières. L'âge de l'assuré à la souscription influe sur le tarif de la garantie en phase d'épargne, et l'âge de l'assuré à la liquidation influe sur le tarif de la garantie en phase de restitution.

Les distorsions imposées aux lois d'incidence et des lois de mortalité des dépendants modifient le tarif. La limite de réajustement du tarif a été fixée à 10% chaque année lors de la conception du produit, **ce qui ne suffit pas toujours à compenser la perte subie par l'assureur. Cette perte peut être compensée par la mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite**.

Ainsi, en cas de dérive des lois liées à la dépendance (qui sont à ce jour mal connues), un solde du compte de résultat de la dépendance négatif peut être compensé par un solde positif de la retraite.

Aussi, l'assurance dépendance est un risque nouveau dont les caractéristiques techniques sont difficiles à appréhender. Ce mémoire a pour objectif de concevoir un nouveau produit qui étende l'offre retraite AXA en proposant une garantie supplémentaire à l'assuré : la garantie dépendance, dont la survenance évolue parallèlement au vieillissement de la population.

## Abstract

At age 60, life expectancy is growing increasingly by about two months each year. Consequently, the number of elderly people will increase dramatically, as the number of people in dependency.

To help the disabled, the French public system has established a dedicated allowance for dependents called “Allocation personnalisée d’autonomie” (APA).

However, the amount of this allowance does not exceed EUR 1 106.77 per month, which is insufficient. Indeed, the cost of a dependent person is estimated at EUR 3 000 per month.

Thus, the cost of assisting these people can be very important. It has become a common problem in all developed countries whose population has aged. This leads to develop private long term care insurance products in parallel with state assistance.

In a first part, we will define dependency in France and measures for this risk. Then we will detail features of existing contracts, and focus on long term care insurance market in France.

In a second part, we will compare the existing studies about incidence and prevalence rates. Then, we will examine how AXA built its incidence rates.

The mathematical modelling of dependency states will be shape by a simple model, treating only the highest dependency level, and by a multi-state model, treating different dependency levels.

The multi-state model is based on Markov chains.

A tool has been created to automate calculations. Despite the fact that results are aligned with market prices, incidence rates at disposal related to a low dependency level were not reliable. Thus, the multi-state model is not relevant, and we choose to reinsure the low dependency.

In a third part, we will get to the heart of the matter. The issue of this memorandum is to design a long term care insurance product as part of collective retirement insurance. In this part ins and outs of reflections related to product design will be detailed: what type of pension contract mix with this product, which benefits should we offer and how to collect premiums?

We studied different combinations. Then we finally decide to associate long term care with a compulsory defined contribution plan, called “Article 83”.

During the savings period, the product is guaranteeing the doubling of purchase price. The premium for this guaranty is collected automatically on the “Article 83” premium. It represents a very small percentage of the “Article 83” premium.

During the benefits period, the product is guaranteeing the doubling of the pension benefit. The pricing has been made as if it was only about total dependency, because incidence rates are reliable for this state. Moreover, the pricing for a low dependency level depends on the reinsurer’s prices.

At the plan settlement, “Article 83” annuities and the cost of dependency are calculated.

The quarterly advance term of the retirement plan is totally allocated to finance the cost of dependency during the benefits period. The remaining premium payable is spread throughout the phase of benefits. In this way, the premium can be readjusted if necessary, within 10%.

In a fourth part, the product can be set up. Firstly, insurer commitments are translated mathematically in order to assess their cost. Then, stochastic models are used to calculate financial performances of the “Article 83” pension fund.

Product pricing also requires the construction of a tool that takes into account all the influential parameters and that automates calculations for a whole demography of insured (for a company).

Product reserving needs to be adapted too. The pricing tool built also calculates reserves for a whole company, and for a given horizon.

In the fifth section, we study the robustness of premiums by shocking incidence and mortality rates, and assumptions of the model. The rate is sensitive to changes in demographic and financial assumptions.

The maximum premium adjustment was set at 10% annually, which is not enough to compensate the loss realized by the insurer, in the worst scenario. This loss can be compensated by the mutualisation between dependency risk and retirement risk.

Finally, the goal of this memorandum is to design a new product that extends AXA collective retirement offer by offering additional coverage to the insured: long term care insurance, which the occurrence operates in parallel with the aging population.

## Remerciements

Je te tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé pendant le déroulement de mon stage.

Merci plus particulièrement à **Olivier Cabasson**, mon maître de stage, pour la motivation qu'il m'a apporté, pour ses conseils avisés et son soutien tout au long de ce mémoire, et à **Virginie Mace**, pour sa grande disponibilité, son aide, et sa pédagogie.

Merci également à toute l'équipe AXA DERE, pour la grande qualité de leur accueil et leur bonne humeur durant ces six mois.

Merci aux services juridique, marketing, et technique d'Axa, pour les interviews et les informations qu'ils m'ont accordé.

Merci enfin à M. Cohen pour ses recommandations.

# Sommaire

<b>1. INTRODUCTION .....</b>	<b>11</b>
<b>2. HORIZONS DU RISQUE DEPENDANCE EN FRANCE .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1. Définition et mesure du risque dépendance.....</b>	<b>14</b>
2.1.1. Définition de la notion de dépendance.....	14
2.1.2. Mesure de la dépendance .....	14
2.1.2.1. La grille AGGIR.....	14
2.1.2.2. Les AVQ : dépendance physique .....	15
2.1.2.3. Le test « Blessed » : dépendance psychique .....	16
2.1.2.4. Définition des états de dépendance.....	16
<b>2.2. Particularités des produits dépendance .....</b>	<b>17</b>
2.2.1. Aléa moral et Anti-sélection .....	17
2.2.1.1. Aléa moral .....	17
2.2.1.2. Anti-sélection .....	17
2.2.2. Garantie forfaitaire ou indemnitaire.....	17
2.2.2.1. Définitions des types de garantie.....	17
2.2.2.2. Conséquences en termes de développement produit.....	18
2.2.3. Contrat prévoyance ou contrat d'épargne .....	18
2.2.3.1. Un contrat prévoyance .....	18
2.2.3.2. Un contrat d'épargne .....	19
2.2.4. Assurance individuelle ou assurance collective .....	20
2.2.4.1. Assurance individuelle : un risque d'anti-sélection .....	20
2.2.4.2. Assurance collective à adhésion facultative .....	20
2.2.4.3. Assurance collective à adhésion obligatoire : une mutualisation.....	20
<b>2.3. Analyse de la démographie du marché dépendance en France .....</b>	<b>21</b>
2.3.1. Population des dépendants .....	21
2.3.2. Population des « aidants ».....	22
2.3.3. Les mesures de l'Etat - l'APA et la mise en place du 5 <sup>o</sup> risque.....	23
2.3.3.1. L'APA .....	23
2.3.3.2. La mise en place du cinquième risque .....	24
2.3.4. Le coût et la commercialisation du risque dépendance .....	25
2.3.5. Analyse des produits français .....	26
<b>3. ETUDES PREALABLES .....</b>	<b>27</b>
<b>3.1. Modélisation des états de dépendance.....</b>	<b>28</b>
3.1.1. Définitions et notations .....	28
3.1.1.1. Définitions .....	28
3.1.1.2. Hypothèses et notations .....	28
3.1.2. Le modèle simple .....	29
3.1.2.1. Etats du modèle .....	29
3.1.2.2. Relations entre les états du modèle.....	30
<b>3.2. Estimation des lois spécifiques à la dépendance.....</b>	<b>31</b>
3.2.1. Les références existantes.....	31
3.2.1.1. Lois d'incidence et de prévalence.....	31
3.2.1.2. Loi de mortalité des individus dépendants .....	37
3.2.1.3. Loi de mortalité des individus valides .....	39

3.2.2.	Lois Axa.....	41
3.2.2.1.	Le produit Saphir .....	41
3.2.2.2.	Démographie Saphir .....	42
3.2.2.3.	Loi d'incidence et de prévalence .....	45
3.2.2.4.	Loi de mortalité des dépendants .....	46
3.2.2.5.	Loi de mortalité des valides.....	46
3.2.3.	Conclusion .....	46
<b>3.3.</b>	<b>Choix du modèle de tarification .....</b>	<b>47</b>
3.3.1.	Modèle simple.....	47
3.3.1.1.	Tarification basée sur l'incidence .....	48
3.3.1.2.	Tarification basée sur la prévalence.....	50
3.3.1.3.	Application .....	50
3.3.2.	Modèle multi-états .....	51
3.3.2.1.	Etats du modèle .....	52
3.3.2.2.	Rappel : les chaînes de Markov .....	53
3.3.2.3.	Tarification du risque dépendance avec un modèle multi-états .....	54
3.3.2.4.	Création d'un outil de tarification du modèle multi états .....	55
3.3.2.5.	Conclusion.....	56
<b>4.</b>	<b>DEFINITION DE L'OFFRE PRODUIT .....</b>	<b>57</b>
<b>4.1.</b>	<b>Description générale du produit.....</b>	<b>58</b>
4.1.1.	Article 83 .....	58
4.1.2.	Collectif et Obligatoire.....	59
4.1.3.	Portabilité des droits .....	59
4.1.4.	Conditions tarifaires.....	60
4.1.5.	Mutualisation .....	60
<b>4.2.</b>	<b>Prestations .....</b>	<b>60</b>
4.2.1.	En phase de constitution .....	60
4.2.2.	En phase de restitution .....	61
4.2.3.	Tout au long de la vie du contrat : Garantie Axa assistance .....	61
<b>4.3.</b>	<b>Cotisations .....</b>	<b>62</b>
4.3.1.	Tarification fonction de l'âge à l'adhésion et à la liquidation.....	62
4.3.2.	Primes révisables dans la limite d'un certain intervalle .....	62
4.3.3.	Choix du mode de financement de la garantie dépendance .....	62
<b>4.4.</b>	<b>Bilan .....</b>	<b>64</b>
<b>5.</b>	<b>MISE EN PLACE DU PRODUIT.....</b>	<b>65</b>
<b>5.1.</b>	<b>Paramètres influents.....</b>	<b>66</b>
5.1.1.	Paramètres de l'article 83.....	66
5.1.1.1.	Paramètres influençant la valeur du capital constitutif .....	66
5.1.1.2.	Paramètres influençant les rentes article 83.....	67
5.1.2.	Pilotage du régime .....	67
5.1.2.1.	Contrat en unité de compte .....	67
5.1.2.2.	Contrat en Euros .....	69
5.1.3.	Rentes viagères à annuités fractionnées .....	70
<b>5.2.</b>	<b>Traduction mathématique des engagements de l'assureur .....</b>	<b>71</b>
5.2.1.	Le doublement du capital constitutif.....	71
5.2.2.	Garantie doublement rente article 83 .....	71
5.2.2.1.	Calcul de la prime unique .....	72
5.2.2.2.	Calcul du pourcentage prélevé sur les rentes.....	73

<b>5.3. Modélisation du fonds choisi par l'assuré .....</b>	<b>74</b>
5.3.1. Fonds en unités de compte .....	74
5.3.1.1. Grille d'allocation évolutive « équilibre » .....	74
5.3.1.2. Choix des actifs .....	76
5.3.1.3. Modélisation des actifs .....	77
5.3.1.4. Calcul du capital constitutif .....	84
5.3.2. Fonds en euros .....	85
5.3.2.1. Caractéristiques .....	85
5.3.2.2. Modélisation .....	85
<b>5.4. Création d'un outil de tarification .....</b>	<b>86</b>
5.4.1. Exemple de modélisation du fonds article 83 .....	86
5.4.1.1. Modélisation d'un fonds en unités de compte .....	86
5.4.1.2. Modélisation d'un fonds en euros.....	88
5.4.2. Exemple de tarification du produit.....	89
5.4.2.1. Garantie doublement du capital constitutif .....	89
5.4.2.2. Garantie doublement rente.....	89
5.4.2.3. Tarif collectif .....	90
5.4.3. Bilan.....	91
<b>5.5. Provisionnement spécifique au produit .....</b>	<b>92</b>
5.5.1. Provisions mathématiques de valides.....	92
5.5.1.1. Application à la garantie doublement Capital constitutif.....	93
5.5.1.2. Application à la garantie doublement rente .....	95
5.5.2. Provisions mathématiques de dépendants .....	96
5.5.2.1. Application à la garantie doublement capital constitutif .....	96
5.5.2.2. Application à la garantie doublement rente article 83 .....	97
5.5.3. Conclusion .....	97
<b>5.6. Possibilités de réassurance .....</b>	<b>98</b>
5.6.1. Traité en quote-part.....	98
5.6.2. Réassurance et provisionnement .....	98
<b>6. AVANTAGES ET LIMITES DU PRODUIT .....</b>	<b>99</b>
<b>6.1. Etude de sensibilité du tarif .....</b>	<b>100</b>
6.1.1. Hypothèses du modèle .....	100
6.1.1.1. Hypothèses démographiques .....	100
6.1.1.2. Hypothèses financières .....	101
6.1.1.3. Hypothèses commerciales .....	102
6.1.2. Scénario central.....	102
6.1.2.1. Sensibilité en phase de constitution.....	102
6.1.2.2. Sensibilité en phase de restitution.....	103
6.1.3. Scénarios entraînant une augmentation des tarifs établis .....	104
6.1.3.1. Projection de la population .....	105
6.1.3.2. Sensibilité en phase d'épargne.....	107
6.1.3.3. Sensibilité en phase de restitution.....	110
<b>6.2. Mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite.....</b>	<b>111</b>
6.2.1. Compte de résultat technique .....	111
6.2.1.1. Description .....	111
6.2.1.2. Comptes de charges .....	112
6.2.1.3. Comptes de produits .....	113
6.2.2. Compte de résultat financier .....	115
6.2.2.1. Comptes de produits .....	115
6.2.2.2. Comptes de charges .....	115
6.2.3. Application.....	116
6.2.3.1. Pertes liées à la dépendance relativement à l'encours global .....	116

6.2.3.2. Pertes liées à la dépendance, en Euros.....	117
<b>7. CONCLUSION.....</b>	<b>118</b>
<b>8. BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>120</b>
8.1. Mémoires .....	120
8.2. Articles et Ouvrages .....	120
<b>9. ANNEXES .....</b>	<b>123</b>
<b>9.1. Outil de tarification modèle final .....</b>	<b>124</b>
9.1.1. Démographie fournie par l'entreprise .....	124
9.1.2. Résultats de l'outil .....	124
9.1.3. Méthodologie .....	126
<b>9.2. Programme de modélisation du fonds article 83.....</b>	<b>127</b>

# **1. Introduction**

L'arrivée à des âges élevés de la génération du baby-boom et l'allongement de l'espérance de vie vont conduire à une hausse importante du nombre de personnes âgées. Le vieillissement de la population va de pair avec l'augmentation du nombre de personnes dépendantes. Un million de personnes dépendantes sont recensées aujourd'hui et l'INSEE prévoit une augmentation de 60% du nombre de personnes dépendantes en 2040.

La probabilité annuelle d'entrée en dépendance lourde est multipliée par 50 entre 60 et 85 ans et par 3 entre 85 et 90 ans. De plus, la probabilité pour un individu âgé de 65 ans d'être un jour en situation de dépendance lourde est de 30% pour les hommes et 45% pour les femmes.

La dépendance est donc un facteur démographique qui va se développer avec le temps, et qui concerne essentiellement les personnes âgées.

Le département AXA Epargne Retraite Entreprise propose de créer un nouveau produit, qui permette aux employeurs d'offrir à leurs salariés non seulement une retraite supplémentaire, mais aussi une garantie dépendance, qui revient beaucoup moins cher au salarié que s'il souscrivait en individuel. Ce produit doit permettre au département AXA Epargne Retraite Entreprise d'élargir sa gamme et de se positionner sur un risque en plein essor.

La conception d'un produit doit se faire en alliant les compétences juridiques, fiscales, marketing, et techniques de l'assureur.

Tout d'abord, nous découvrirons le risque dépendance en le définissant, en le mesurant, et en étudiant les spécificités de ce risque. Celles-ci peuvent se trouver autant dans le type de contrat souscrit que dans les garanties offertes. Il sera également important d'étudier les produits qui existent déjà sur le marché.

Ensuite, une étude préalable à la mise en place du produit sera réalisée, afin de se familiariser avec les méthodes de modélisation et de tarification existantes en matière de dépendance. Les lois liées à la dépendance seront décrites dans le but de comprendre comment les lois utilisées dans le mémoire ont été construites. Il sera également intéressant de développer un modèle multi-états au moyen des chaînes de Markov, afin de voir si la dépendance partielle peut être tarifée ou non dans le produit à mettre en place.

Puis, une réflexion sera nécessaire afin de considérer toutes les possibilités et d'étudier les avantages et les inconvénients de chacune. Après avoir défini nos priorités, il faudra trancher et établir toutes les caractéristiques du produit. Ceci se fera par une description générale du produit, puis par la définition des prestations offertes, et enfin par la détermination des cotisations prélevées et de leur fiscalité.

Alors, le produit pourra être mis en place. La première étape sera la traduction mathématique des engagements de l'assureur en phase d'épargne, puis en phase de restitution.

La deuxième étape consistera à modéliser le rendement financier du fonds article 83 par des méthodes stochastiques, et selon le type de gestion choisi par l'assuré.

La troisième étape devra illustrer la création d'un outil en y appliquant une démographie type. Les résultats de cette application devront correspondre aux attentes de la définition de l'offre Axa

retraite dépendance. La quatrième étape ajustera le provisionnement habituel et proposera un type de réassurance adapté au produit mis en place.

Enfin, il sera nécessaire de tester les avantages et les limites du produit. Pour ce faire, il faudra choisir des scénarios qui augmentent le tarif du produit, en fonction des projections de l'INSEE par exemple. Il s'agira de distorsions de lois liées à la dépendance ou de performances financières à la baisse par exemple. Ainsi, l'impact de ces scénarios sur le tarif pourra être quantifié. Il faudra également se demander si ces scénarios négatifs peuvent être compensés par une mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite, et dans quelle mesure.

## **2. Horizons du risque dépendance en France**

## **2.1. Définition et mesure du risque dépendance**

### **2.1.1. Définition de la notion de dépendance**

L'état de dépendance se prête à diverses définitions, des plus larges (personnes à autonomie réduite), aux plus restrictives (dépendance totale).

La loi du 24 janvier 1997 instaurant la prestation spécifique dépendance (PSD) indiquait que la dépendance est « l'état de la personne qui, nonobstant les soins qu'elle est susceptible de recevoir, a besoin d'être aidée pour l'accomplissement des actes essentiels de la vie et requiert une surveillance régulière », définition reprise par la loi du 20 juillet 2001 instaurant l'Allocation Personnalisée d'autonomie (APA).

La dépendance correspond à plusieurs réalités, car elle peut être la conséquence du vieillissement des personnes âgées ou des maladies dégénératives de l'âge adulte. Les termes de dépendance, d'invalidité, de handicap, de perte d'autonomie, de déficience sont utilisés.

La définition retenue par la plupart des assureurs se base à la fois sur les actes de la vie quotidienne (dépendance physique), sur le test psychotechnique « Blessed » (dépendance psychique) et sur la législation relative à la sécurité sociale (grille AGGIR).

### **2.1.2. Mesure de la dépendance**

Différents indicateurs ont été construits afin d'évaluer la dépendance, que ce soit au niveau international ou en France, à partir de questions portant sur les activités de la vie quotidienne : « Activities of Daily Living » ou « actes de la vie quotidienne » (AVQ) qui sont s'habiller, faire sa toilette, se déplacer, se nourrir et les « Instrumental activities of daily living » qui sont par exemple faire ses courses, préparer ses repas, entretenir sa maison, prendre ses médicaments...

Pour chacune de ces activités, les différents niveaux de capacités de la personne sont relevés. Les indicateurs les plus connus sont les indicateurs de Katz, de Colvez, l'indicateur EHPA, ou la grille AGGIR (Autonomie gérontologique groupes iso-ressources).

Les deux premiers indicateurs notent uniquement la perte d'autonomie physique, les deux autres englobent aussi l'aspect psychique.

Seule la grille AGGIR les AVQ et le test « Blessed » sont utilisés par les assureurs et particulièrement par AXA. Les autres indicateurs ne seront donc pas présentés.

#### **2.1.2.1. La grille AGGIR**

La grille AGGIR, depuis la loi du 24 juillet 1997 est la grille nationale d'évaluation de la dépendance en France et détermine l'éligibilité à l'APA.

La grille AGGIR se base sur dix variables discriminantes (cohérence, orientation, toilette, habillage, alimentation, élimination, changement de position, déplacement intérieur, déplacement extérieur et possibilités d'alerter) pour déterminer le Groupe Iso-Ressources auquel appartient la personne et sept variables illustratives pour personnaliser le plan d'aide (gestion de ses biens, cuisine, ménage, transport, achats, suivi du traitement médical, pratique d'activités de temps libre).

Cette grille permet une classification en 6 groupes (GIR) des personnes âgées en situation de perte d'autonomie. Seuls les 4 premiers GIR ouvrent droit à l'APA.

Les niveaux GIR 1 et GIR 2 représentent la dépendance totale ou « lourde ».

Le niveau GIR 3 représente la dépendance partielle.

Les GIR 4, 5 et 6 correspondent à des personnes âgées très peu ou pas dépendantes et n'ouvrent pas droit aux prestations des assureurs.

En 2005, 37% des bénéficiaires de l'APA sont en dépendance lourde, 63% en dépendance légère.

	<b>GIR 4</b>	<b>GIR 3</b>	<b>GIR 2</b>	<b>GIR 1</b>
<b>Autonomie mentale</b>	Conservée	Conservée	Autonomie mentale Partiellement altérée et confinement au lit ou au fauteuil ou	Totalement altérée
<b>Autonomie locomotrice</b>	Aide	Partiellement conservée	Autonomie mentale Totalement altérée et capacité motrice conservée	Capacité motrice perdue, confinement au lit ou au fauteuil
<b>Actes de la vie quotidienne</b>	Aide nécessaire pour la toilette et l'habillage	Aide nécessaire quotidiennement et plusieurs fois par jour pour l'autonomie corporelle	Aide nécessaire pour la plupart des activités de la vie courante, perte d'autonomie corporelle et sociale, présence indispensable d'intervenants	Aide nécessaire pour la plupart des activités de la vie courante, perte d'autonomie corporelle et sociale, présence indispensable d'intervenants

### **2.1.2.2. Les AVQ : dépendance physique**

Indépendamment du classement par référence à la grille AGGIR, l'état de dépendance physique est mesuré par la capacité des personnes dépendantes à effectuer seules certains des actes de la vie quotidienne :

- le déplacement : capacité de se déplacer dans les pièces habituelles et les locaux de service du lieu de vie, après recours aux équipements adaptés,
- l'habillage : capacité à s'habiller et à se déshabiller correctement et complètement,
- l'alimentation : capacité à se servir et à manger de la nourriture préalablement préparée,
- la toilette : capacité à satisfaire, de façon spontanée, à un niveau d'hygiène corporelle conforme aux normes usuelles.

### **2.1.2.3.Le test « Blessed » : dépendance psychique**

Le test « Blessed » réalisé par l'auteur du même nom en 1968 est un outil utilisé pour évaluer l'état de dépendance psychique. Il doit être réalisé par un neurologue ou psychiatre, par interrogation de la personne dépendante et de son entourage.

Le degré de dépendance de l'individu est déterminé par un score, qui est établi par le conseil médical des assureurs.

### **2.1.2.4.Définition des états de dépendance**

La définition AXA des états de dépendance totale ou partielle rejoint celles de la plupart des assureurs.

Dépendance Totale : GIR 1,2 et perte de 3 AVQ sur 4

Dépendance Partielle : GIR 3 et perte de 2 AVQ sur 4

## **2.2. Particularités des produits dépendance**

### **2.2.1. Aléa moral et Anti-sélection**

L'assurance dépendance est souvent confrontée aux phénomènes d'aléa moral (consommation excessive des garanties d'assurance) et d'anti-sélection (ce sont les assurés qui sont les plus exposés aux risques qui souscrivent).

#### **2.2.1.1. Aléa moral**

La dépendance est une notion subjective dont la définition et la mesure reposent sur des critères assez variables.

La dépendance ne résulte pas souvent d'un sinistre clair, et ce sont les personnes dépendantes qui sont en général les mieux à même d'apprécier leurs défaillances et leurs besoins.

#### **2.2.1.2. Anti-sélection**

Les assureurs ont des difficultés à identifier les hauts risques de dépendance. Dans le cas de certaines maladies, les personnes âgées sont susceptibles de mieux prédire leurs besoins futurs en matière de prestations dépendance que l'assureur.

Aussi, la forte augmentation de la proportion de dépendants limite les possibilités d'assurer la perte d'autonomie aux grands âges. La souscription d'un contrat devient prohibitive pour le client potentiel après soixante-quinze ans (risque d'anti-sélection).

Nous verrons dans la mise en place du produit comment résoudre ces problèmes d'anti-sélection.

## **2.2.2. Garantie forfaitaire ou indemnitaire**

### **2.2.2.1. Définitions des types de garantie**

On distingue deux types de garanties dans l'assurance dépendance : indemnitaire ou forfaitaire. Ces modèles se distinguent principalement dans les deux principaux marchés d'assurance dépendance privée : les États-Unis et la France.

Le modèle Américain du risque « Long Term Care » définit l'état d'une personne par le type de soins qu'elle pourrait recevoir. L'assurance dépendance aux USA s'apparente à une assurance santé. Cette approche est dite indemnitaire.

Les produits indemnitaires étant des produits de remboursement, il est impératif pour les assureurs de contrôler la consommation de soins des assurés dépendants afin de maîtriser les prestations versées.

Le modèle français accorde beaucoup d'importance à la définition de la dépendance (notion d'état consolidé et d'irréversibilité de la dépendance totale) car il propose des garanties forfaitaires.

L'assuré choisit au moment de la souscription le montant de rente viagère dont il souhaite bénéficier lorsqu'il se trouvera dans un état de dépendance. Ces produits permettent aux familles une gestion personnalisée des prestations, contrairement aux produits de remboursement (produits indemnitaires) qui sont peu flexibles. De plus, les assureurs Français enrichissent souvent ces garanties par des offres d'assistance.

### **2.2.2.2. Conséquences en termes de développement produit**

Les produits indemnitaires deviennent souvent incompréhensibles pour l'assuré, car ils proposent trop de garanties différentes. De plus, la sélection médicale de ces contrats étant très élevée, les coûts des réseaux de distribution sont de plus en plus chers.

Aussi, le choix de la couverture indemnitaire ou forfaitaire a un impact important sur le suivi statistique. Les actuaires américains raisonnent par exemple sur la base de fréquences d'entrée selon les types de besoin et selon les coûts de ces soins, qui ne cessent d'évoluer. Cette approche rend très difficile l'agrégation des sinistres.

Les données françaises, plus homogènes dans la définition du risque dépendance et des caractéristiques des produits, peuvent être suivies plus facilement. Le plus souvent les modèles simples sont utilisés pour la gestion du risque (validité, dépendance, décès) en estimant les probabilités de transition entre ces états, et leurs probabilités de maintien. Cependant, le risque étant nouveau, il manque un historique pour étoffer ces études.

Ainsi, le choix d'une garantie indemnitaire contre forfaitaire revient pour l'assuré à savoir s'il souhaite choisir des prestations en nature organisées par l'assureur ou s'il préfère la liberté du forfaitaire. Dans le modèle allemand où les assurés ont le choix entre ces deux solutions, le forfaitaire est largement préféré.

Les assureurs français ayant fait le choix du forfaitaire, ils disposent d'un avantage certain pour développer leurs garanties en France et à l'étranger.

## **2.2.3. Contrat prévoyance ou contrat d'épargne**

### **2.2.3.1. Un contrat prévoyance**

La Fédération Française des sociétés d'Assurances (FFSA) dénombre, le 31 décembre 2001, 1 207 200 contrats de prévoyance contre 224 500 contrats d'épargne.

Un contrat de dépendance en prévoyance garantit des prestations de montants fixés par l'assuré à la signature du contrat, à verser par l'assureur à compter de la date survenance de la dépendance. Dans le cas général, les prestations prennent la forme de rentes viagères, versées mensuellement à terme échu, d'un montant allant de 200€ à 2 000€ par mois.

Les primes sont souvent unisexes et elles sont fonction de l'âge de l'assuré à l'adhésion et du niveau de prestations retenu. Une fois la dépendance survenue, l'assuré ne paye plus de primes.

La plupart des produits d'assurance dépendance prévoyance sont «**à fonds perdus**». Cela signifie que si l'assuré arrête un jour de cotiser, il ne sera plus couvert et les sommes qu'il aura versées jusque-là seront perdues (comme en assurance auto par exemple). L'assuré peut aussi choisir un contrat prévoyant une «valeur de réduction», c'est-à-dire permettant d'avoir droit à des prestations réduites proportionnellement à la durée des cotisations si la dépendance survient par la suite. Généralement, les «valeurs de réduction» ne sont garanties qu'à partir d'un minimum de huit ans de cotisations.

Primes et prestations sont toujours revalorisées dans le temps. La revalorisation des prestations doit suivre l'évolution des frais liés à la dépendance. La revalorisation des primes sert à garantir un équilibre technique : les prestations versées étant issues des provisions que les assureurs constituent grâce aux primes, il est normal que les primes évoluent en parallèle aux prestations.

Dans ce type de contrat d'assurance, hormis l'aléa relatif à l'évolution des taux d'intérêt, il y a deux autres aléas :

Au moment de la souscription du contrat, l'assuré doit être en bonne santé. La date de survenance du risque est donc inconnue et incertaine.

De plus, si l'assuré devient un jour dépendant, sa durée de survie en dépendance est aussi inconnue. Par conséquent, l'assureur ne connaît ni la période de versement des cotisations, ni celle de versement des prestations !

### **2.2.3.2. Un contrat d'épargne**

L'assurance vie consiste à capitaliser les primes versées par l'assuré pour les lui restituer, sous forme de capital ou de rentes, à partir d'une date ou d'un événement donné. Dans le cadre du risque de dépendance, il s'agit de contrats d'épargne classique, avec une option dépendance.

Le plus souvent, il s'agit de contrats «vie entière». Ainsi, l'assuré verse librement tout au long de sa vie les sommes qu'il souhaite sur son contrat. Quand il décède, ses bénéficiaires perçoivent alors l'épargne accumulée. S'il devient dépendant, il peut décider que tout ou partie du capital constitué sera converti en rente viagère, afin de pouvoir faire face aux dépenses liées à sa perte d'autonomie.

Par conséquent, contrairement à un contrat de prévoyance à fonds perdus, l'assuré n'est jamais perdant car il est certain de récupérer, lui ou ses bénéficiaires, les sommes engagées.

L'inconvénient pour l'assuré de ce type de contrat est qu'il ne connaîtra le montant de sa rente qu'au moment de sa perte d'autonomie.

Du point de vue de l'assureur, l'aléa est moindre qu'en prévoyance car il se situe uniquement dans le calcul de la conversion de l'épargne en rente viagère : il doit donc estimer la durée de survie de l'assuré en état de dépendance. Mais, il n'a pas à estimer, au moment de la souscription, la date de survenance de la dépendance chez un assuré alors en bonne santé.

## **2.2.4. Assurance individuelle ou assurance collective**

### **2.2.4.1. Assurance individuelle : un risque d'anti-sélection**

L'assurance individuelle est une démarche personnelle, les assureurs sont donc confrontés à un risque d'anti-sélection important : les personnes les plus exposées au risque dépendance, ont plus tendance à souscrire que les autres.

Les contrats d'épargne sont moins sensibles à ce risque que les contrats de prévoyance car les prestations sont proportionnelles aux primes versées.

Afin de limiter les risques d'anti-sélection et de fausse déclaration, les contrats d'assurance individuelle prévoient des **délais de carence** pendant lesquels l'assuré n'est pas couvert. Les délais généralement appliqués sont de trois ans en cas de dépendance due à une maladie à déroulement long et d'un an en cas de dépendance due à une autre maladie. Aucun délai de carence n'est appliqué si la dépendance est due à un accident.

Le déroulement long concerne les maladies psychiques ou neurologiques comme la maladie d'Alzheimer, ou la maladie de Parkinson. Le problème n'est pas la préexistence de la maladie à la signature du contrat mais l'asymétrie d'information entre l'assuré, qui peut se rendre compte qu'il devient malade, et l'assureur, pour lequel détecter les signes de ce genre de maladies est très difficile.

### **2.2.4.2. Assurance collective à adhésion facultative**

On appelle assurance collective à adhésion facultative un cadre juridique dans lequel un assuré aura la démarche de s'assurer, mais pas en prenant contact directement avec une compagnie d'assurance, comme en assurance individuelle. Un contrat collectif peut être obligatoire ou facultatif. On note que les conditions des contrats dépendance individuel et collectif facultatif sont équivalentes.

### **2.2.4.3. Assurance collective à adhésion obligatoire : une mutualisation**

Les contrats collectifs d'assurance dépendance obligatoire proposés par les entreprises offrent beaucoup d'avantages par rapport aux contrats individuels.

D'abord les primes sont plus faibles en raison de l'âge moyen plus bas des populations assurées qui versent donc des primes pendant une période plus longue. Par exemple, les cotisations en assurance collective sont de 30€ par an en moyenne alors qu'elles sont de 300 € par an en moyenne en assurance individuelle.

Dans un contrat collectif à adhésion obligatoire les cotisations sont les mêmes pour tous les employés, quel que soit leur âge. Il est rare à 40 ou à 50 ans de savoir si l'on est un « mauvais risque ». De plus si l'adhésion est obligatoire et que le groupe d'assurés est suffisamment grand, le risque d'anti-sélection diminue.

De plus, les contrats collectifs permettent de faire des économies car le marketing coûte moins cher lorsqu'on passe par l'entreprise. Les entreprises supportent aussi une part importante des coûts administratifs et peuvent se charger d'une partie de la communication. Le salarié n'a plus à choisir entre une multitude de contrats et il bénéficie du pouvoir de négociation de l'entreprise, ce qui se ressent sur le rapport qualité-prix des contrats.

## 2.3. Analyse de la démographie du marché dépendance en France

### 2.3.1. Population des dépendants

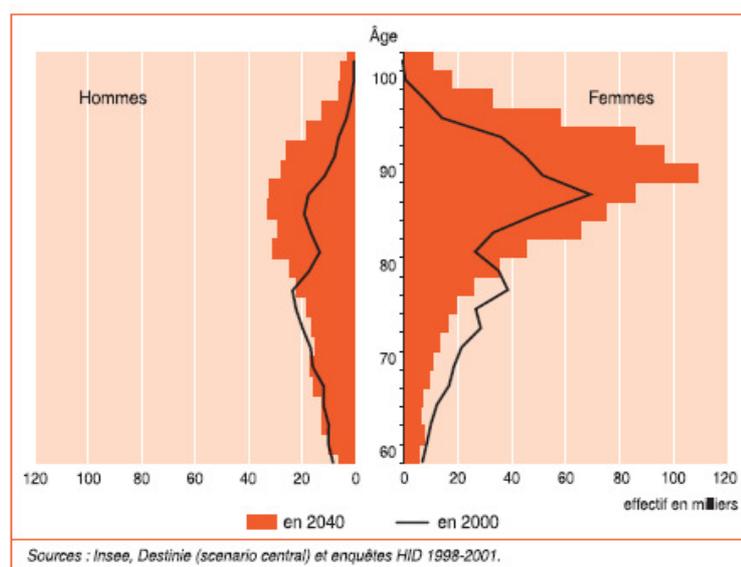
D'après les estimations de l'INSEE, la population âgée de plus de 75 ans serait multipliée par 3 d'ici 2050 ce qui équivaut à 12 millions d'individu, soit 18% de la population Française. La population âgée de plus de 85 ans serait quand à elle multipliée par 4 d'ici 2050, soit 5 millions d'individus, 7.5% des Français.

Le phénomène de vieillissement de la population s'accompagne d'une augmentation du nombre de dépendants. En effet, la probabilité annuelle d'entrée en dépendance lourde est multipliée par 50 entre 60 et 85 ans et par 3 entre 85 et 90 ans.

Les probabilités d'aggravation de la dépendance augmentent avec l'âge, et les rémissions, assez fréquentes jusqu'à 70 ans, deviennent très rares au-delà de 80 ans.

Le phénomène d'augmentation de la dépendance est même plus important que le phénomène de vieillissement. En effet, l'INSEE attend une augmentation de 60% du nombre d'individus dépendants d'ici 2040, alors que l'augmentation attendue du nombre de 50-80 ans ne devraient être que de l'ordre de 10%.

Figure 1 - Effectifs des personnes dépendantes par âge



En 2040, le nombre de personnes âgées dépendantes mais aussi l'âge de l'entrée en dépendance seront plus élevés qu'en 2000 (figure 1).

De plus, l'âge moyen des personnes dépendantes augmenterait fortement entre 2000 et 2040, passant de 78 à 82 ans pour les hommes, et de 83 à 88 ans pour les femmes. Cette augmentation s'explique tout d'abord par l'augmentation de 3 ans de l'âge moyen de l'ensemble des personnes de 60 ans et plus (de 71 à 74 ans pour les hommes, et de 73 à 76 ans pour les femmes). Aussi, à 80 ans, les femmes très dépendantes ont un risque de décès quatre fois supérieur à celui des femmes non dépendantes.

Les différences entre hommes et femmes sont frappantes. La probabilité pour un individu âgé de 65 ans d'être un jour en situation de dépendance lourde est de 30% pour les hommes et 45% pour les femmes.

Les femmes ont donc un risque plus élevé que les hommes de devenir un jour dépendant. Pourtant, les tarifs sont le plus souvent unisexes. Les assureurs doivent donc faire attention à garder une proportion mineure de femmes dans leur portefeuille, ou avoir un tarif ajustable calculé en fonction de la répartition homme/femmes de la démographie.

Pour tenter d'équilibrer la répartition entre hommes et femmes, plusieurs compagnies d'assurance proposent des réductions pour les personnes souscrivant en couple. Elles bénéficient en général de 10 % de réduction, ou de six mois de cotisations gratuites. De plus, vivre en couple réduit le risque de dépendance. Par conséquent, ces assurés constituent de «bons risques».

### 2.3.2. Population des « aidants »

Sur la période 2000-2040, le nombre de personnes âgées dépendantes devrait augmenter de 55%, alors que le nombre d'aidants potentiels (population âgé de 50 à 80 ans) ne devrait augmenter que de 10%. Les effectifs d'aidants devraient également baisser de part l'activité professionnelle des femmes, l'éloignement des enfants, et les recompositions familiales.

En 2000, en moyenne 2,8 personnes de la famille proche peuvent aider un homme dépendant, contre 2,2 personnes pour une femme dépendante. En raison de la plus faible espérance de vie des hommes, ces derniers auront en effet très souvent leur femme pour s'occuper d'eux à l'âge de la dépendance. Les femmes seront en revanche plus souvent veuves. Cet effet est renforcé par la différence d'âge entre conjoints, les femmes ayant en moyenne 2 à 3 ans de moins que leur conjoint.

Plusieurs facteurs, dont les effets sont partiellement contradictoires, vont influencer l'évolution de la répartition par type d'aidants d'ici 2040 : l'âge moyen des personnes dépendantes va augmenter, l'espérance de vie des valides va s'allonger, les ruptures dans les couples devraient être plus fréquentes, et la baisse de la fécondité risque de réduire la présence d'enfants aidants.

Au total, avec 2,3 aidants pour les hommes contre 2,0 pour les femmes, le nombre moyen d'aidants potentiels devrait diminuer d'ici 2040, mais les écarts entre hommes et femmes devraient s'atténuer (figure 2).

Figure 2. Nombre moyen d'aidants potentiels (2000-2040)

Année	Hommes			Femmes		
	60-80 ans	80 ans et plus	Ensemble	60-80 ans	80 ans et plus	Ensemble
2000	3,0	2,6	2,8	2,7	1,9	2,2
2020	2,7	2,5	2,6	2,5	2,1	2,2
2040	2,3	2,3	2,3	2,3	2,0	2,0

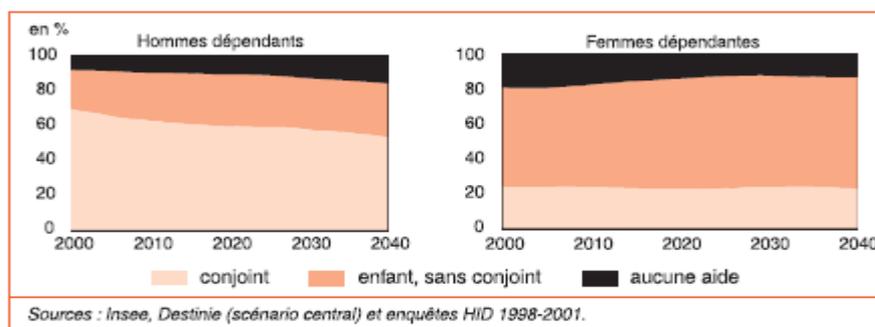
Sources : Insee, Destinie (scénario central) et enquêtes HID 1998-2001.

L'allongement de l'espérance de vie des valides fait augmenter le nombre d'aidants, surtout pour les femmes. Leur conjoint profite de ce surcroît d'espérance de vie, et avec la baisse de la dépendance, leurs enfants sont aussi plus souvent valides même lorsqu'elles atteignent des âges très élevés.

À l'inverse, la plus grande fréquence des ruptures dans les couples tend à diminuer la présence du conjoint en tant qu'aidant, pour les hommes comme pour les femmes. Du fait de ces évolutions, l'aide du conjoint resterait stable : autour de 23% chez les femmes et diminuerait nettement chez les hommes, passant de 69 % à 53 % entre 2000 et 2040.

La proportion d'hommes dépendants sans aucune aide doublerait pour atteindre 16 % en 2040, tandis qu'elle diminuerait pour les femmes, passant de 18 % à 12 % sur la période (figure 3).

**Figure 3 - Répartition des personnes dépendantes selon leur situation familiale (2000-2040)**



### **2.3.3. Les mesures de l'Etat - l'APA et la mise en place du 5<sup>o</sup> risque**

#### **2.3.3.1.L'APA**

L'Etat a mis en place en 1997 la première aide destinée aux personnes âgées dépendantes : la Prestation Spécifique Dépendance. Ce système n'était fiable ni au niveau du nombre de personnes concernées ni au niveau du montant alloué. Une nouvelle aide a donc vu le jour au début de l'année 2002 : l'Allocation Personnalisée d'Autonomie.

Certaines ressources, comme le dernier avis d'imposition, sont prises en compte pour la détermination des droits à l'APA. D'autres comme les pensions reçues au titre de la dépendance par exemple ne sont pas prises en compte. L'allocation versée sera différente selon que l'individu dépendant est en établissement spécialisé ou à domicile. L'égalité du montant de l'aide est garantie à conditions identiques d'autonomie et de ressources sur tout le territoire.

Sur 13,4 millions de personnes potentiellement concernées par l'APA (population âgée de plus de 60 ans), près d'un million de personnes en bénéficient en 2007. 37% des bénéficiaires de l'APA sont en dépendance totale, 63% sont en dépendance partielle.

La proportion des bénéficiaires pris en charge en établissement est d'autant plus élevée que la dépendance est importante.

Le montant moyen de l'APA s'élève à 730 € par mois (dépendance partielle ou totale). Le montant de l'APA s'élève au maximum à 1200€ par mois pour un individu en dépendance totale et 500€ au maximum pour un individu en dépendance partielle.

L'APA a un coût relativement important pour l'Etat. Son montant s'élève à 15 544M€, qui sont répartis en 43% pour les dépendants à domicile et 57% pour les dépendants en établissement.

En effet, même si les individus dépendants vivant à domicile sont plus nombreux que les individus dépendants vivant en établissement, vivre en établissement coûte beaucoup plus cher.

En dépit de l'avancée que l'APA représente pour les personnes dépendantes en termes de prestations versées, elle reste insuffisante comparée au coût de la dépendance qui s'élève facilement à plus de 3000€ pour un individu en établissement spécialisé.

### **2.3.3.2. La mise en place du cinquième risque**

L'Etat a présenté les premières orientations du projet de réforme de la dépendance. L'objectif est de prendre en charge un cinquième risque de protection sociale.

Les quatre premiers piliers de la sécurité sociale sont : la maladie, les accidents de travail, la famille et la vieillesse. Le cinquième pilier serait destiné à couvrir les besoins de la perte d'autonomie liée au grand âge ou au handicap.

On trouve plusieurs axes de développement.

Tout d'abord, le maintien à domicile des personnes dépendantes est encouragé en améliorant l'allocation personnalisée d'autonomie. Le nombre de places dans les maisons de retraite devrait être augmenté.

Les aides publiques devraient être mieux réparties afin qu'elles reviennent aux plus modestes. Les personnes les plus aisées auraient le choix entre une assurance individuelle (en contrepartie les plus aisés devront mettre en gage une partie de leur patrimoine, 20 000 euros au maximum) ou une aide publique.

Ensuite, le financement de ce cinquième risque sera appuyé sur la solidarité nationale à travers l'APA et sur l'effort d'épargne des Français à travers les contrats d'assurance individuelle et collective.

Cette mesure interviendrait comme une prise en compte institutionnelle du risque qui sensibiliserait la population. De plus, elle ne remettrait pas en cause l'articulation public/privé car les assurances privées seraient nécessaires pour compléter la couverture du public, et les avantages fiscaux évoqués pourraient orienter la nature des produits proposés par le privé.

#### **2.3.4. Le coût et la commercialisation du risque dépendance**

Le coût de la dépendance est cependant sous évalué. Un individu en dépendance totale se verra verser une allocation maximale de 1 200€, alors que le coût mensuel de l'assistance à une personne en dépendance totale (GIR 1 et 2) est d'environ 3600€ mensuels et en dépendance partielle (GIR3) de 1600€ mensuel, c'est-à-dire plus que la retraite moyenne (1400€ par mois) complétée par l'Allocation Personnalisée d'Autonomie (730€ par mois en moyenne).

L'implication des familles est donc souvent nécessaire pour soutenir à domicile les personnes âgées dépendantes. D'après la DREES (Direction de la Recherche, des Etudes, des Evaluations et des Statistiques), 75% des bénéficiaires de l'APA sont aidés par au moins un proche et 68% reçoivent une aide mixte provenant à la fois de leur entourage et de professionnels.

Le coût de la dépendance dépend fortement du mode de prise en charge : à domicile ou en établissement. Du côté des aidants, 80% envisagent le maintien de leur ascendant dépendant à son domicile ou à celui de la famille. Du côté des dépendants, 40% envisagent d'entrer dans un établissement pour personnes âgées.

Même si deux tiers des personnes interrogées se disent prêtes à épargner d'avantage pour anticiper une éventuelle perte d'autonomie, la plupart des responsables commerciaux des sociétés d'assurance estiment que le public visé éprouve des difficultés psychologiques à se projeter en état de dépendance. L'offre existante en assurance dépendance est donc relativement simple sur le plan technique, mais difficile à vendre.

Il faut donc passer du temps avec l'assuré pour lui présenter l'intérêt de ce type de produit si l'on vise des garanties individuelles, ou convaincre l'employeur des nombreux bénéfices qu'offre une garantie dépendance si l'on vise un contrat collectif obligatoire.

### 2.3.5. Analyse des produits français

En 2007, on comptait 2 millions de personnes couvertes pour le risque dépendance par les sociétés d'assurance, et 80 millions d'euros versés aux personnes dépendantes. La France est le deuxième pays en Europe, après l'Allemagne à avoir le plus grand nombre d'adhésions à des contrats dépendance.

Le marché dépendance est très concentré sur 4 opérateurs qui sont AG2R-PRIMA, PREDICA, GROUPAMA, CNP. Ces opérateurs assurent 85% des personnes couvertes et détiennent 80% des cotisations.

On compte en 2007 une trentaine de produits dépendance sur le marché Français, dont 80% de prévoyance et 20% d'épargne ayant une garantie dépendance. Ce marché est relativement récent puisque les premiers produits dépendance datent de 1986, et que la majorité est commercialisée depuis moins de 10 ans.

Selon une enquête de la FFSA réalisée en mai 2008 intitulée 'Les contrats d'assurance dépendance en 2007' (Cf. bibliographie), les contrats d'assurance dépendance en 2007 sont répartis comme tels :

Les contrats dépendance en 2007		Contrats individuels	Contrats collectifs	Ensemble	Variation 2007/ 2006
Contrat dont la garantie dépendance est la garantie principale	Nouvelles têtes assurées en 2007	90 493	3 000	93 693	+ 8 %
	Cotisations correspondantes	28,8 M€	0,2 M€	29,0 M€	+ 26 %
	Nombre de têtes assurées au 31/12	977 845	807 000	1 784 845	+ 3 %
	Cotisations	342,5 M€	30,5 M€	373,0 M€	+ 5 %
	Cotisation moyenne annuelle par tête assurée	351 €	28 €	209 €	+ 2 %
	Prestations versées	70,2 M€	10,6 M€	80,9 M€	+ 24 %
	Provisions au 31/12	1 932,9 M€	119,4 M€	2 052,3 M€	+ 16 %
Contrat dont la garantie dépendance est complémentaire à un contrat d'assurance vie	Nombre de têtes assurées au 31/12	141 621	150	141 770	+ 1 %
	<i>dont nouvelles têtes assurées</i>	<i>9 324</i>	<i>10</i>	<i>9 334</i>	<i>- 14 %</i>

Source: FFSA

On peut voir sur le tableau ci-dessus qu'à la fin 2007, près de 142 000 personnes sont assurées par un contrat pour lequel la garantie dépendance est complémentaire à la garantie principale qui peut être soit une garantie décès, soit une garantie d'épargne ou de retraite (tel le contrat que nous souhaitons mettre en place).

Jusqu'en 2004 le nombre de têtes assurées par un tel contrat connaissait chaque année un développement important, avec des taux de croissance annuels élevés, variant de + 12 % à + 30 % selon les années. Ces croissances étaient même plus fortes que celles des contrats dont la garantie dépendance est la garantie principale.

Par contre depuis 2005 la tendance est différente et le nombre de têtes assurées connaît un développement beaucoup plus faible avec une croissance d'un niveau quasiment identique à celle des contrats garantie principale comme en 2006, voire même inférieur comme en 2005 ou en 2007. Presque toutes les personnes couvertes par ce type de contrat le sont à titre individuel et facultatif. En effet, le tableau ci-dessus montre qu'en 2007 seuls 150 têtes sont assurées en contrat collectif dont la garantie dépendance est complémentaire !

### **3. Etudes préalables**

### **3.1. Modélisation des états de dépendance**

#### **3.1.1. Définitions et notations**

Le risque dépendance est difficile à évaluer, surtout en ce qui concerne la détermination des probabilités de survie, les coûts qu'il entraîne, et la façon dont il évolue.

Les primes et les prestations étant basées sur les entrées en dépendance et les décès, il faudra modéliser ces paramètres avant de pouvoir tarifier et provisionner le risque dépendance. Pour ce faire, deux indicateurs sont utilisés : la prévalence et l'incidence.

##### **3.1.1.1. Définitions**

Pour un âge donné, la **prévalence** se définit comme la proportion de personnes dépendantes dans une population donnée. La prévalence représente un stock de personnes dépendantes à un âge donné.

L'**incidence** représente la probabilité de devenir dépendant, c'est un flux entre deux âges consécutifs.

L'incidence et la prévalence sont logiquement liées par une relation où la mortalité des dépendants entre en jeu.

##### **3.1.1.2. Hypothèses et notations**

*Hypothèses :*

Tous les assurés ne deviendront pas dépendants au cours de leur vie, la plupart d'entre eux décéderont sans être devenus dépendants.

Les contrats sont souscrits en début d'année. La date d'anniversaire des assurés est le premier janvier.

On suppose qu'un individu entré en dépendance au cours d'une année donnée ne peut pas décéder avant l'année suivante.

*Notations :*

${}_k P_x^v$  = probabilité pour un individu valide d'âge  $x$  de vivre jusqu'à l'âge  $x+k$  sans devenir dépendant

${}_k Q_x^v$  = probabilité pour un individu valide d'âge  $x$ , de décéder avant l'âge  $x+k$ , sans passer par l'état dépendant

${}_k P_x^d$  = probabilité pour un individu dépendant d'âge  $x$  de vivre jusqu'à l'âge  $x+k$

${}_k Q_x^d$  = probabilité pour un individu dépendant d'âge  $x$  de décéder avant l'âge  $x+k$

${}_k P_x$  = probabilité pour un individu (dépendant ou valide) d'âge  $x$  de vivre jusqu'à l'âge  $x+k$

${}_k q_x$  = probabilité pour un individu (dépendant ou valide) d'âge  $x$  de décéder avant l'âge  $x+k$

$l_x$  = nombre moyen de personnes (valides ou dépendantes) vivantes à l'âge  $x$

$l_x^v$  = nombre moyen de personnes valides vivantes à l'âge  $x$

$l_x^d$  = nombre moyen de personnes dépendantes vivantes à l'âge  $x$

$i_x$  = taux d'incidence à l'âge  $x$  = probabilité pour un individu d'âge  $x$  en début d'année de devenir dépendant dans l'année (notion de flux).

$j_x$  = taux de prévalence à l'âge  $x$  = proportion de personnes dépendants parmi la population

entière (notion de stock) =  $\frac{l_x^d}{l_x}$

La tarification repose sur l'évaluation des différents flux financiers probabilisés. Pour apprécier les flux futurs, il nous faudra estimer : la loi d'incidence (et/ou prévalence), la loi de mortalité des individus dépendants, et la loi de mortalité des individus valides.

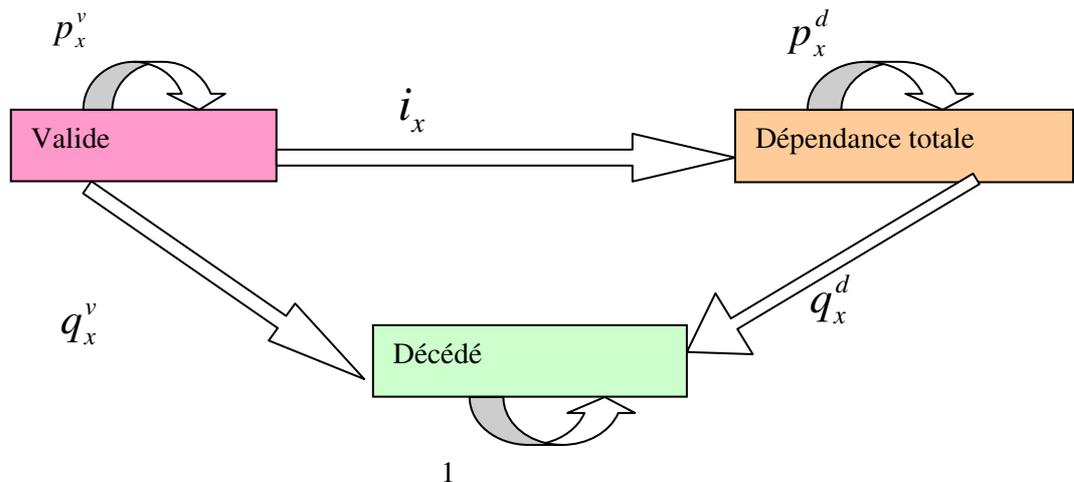
### 3.1.2. Le modèle simple

Seule la dépendance totale est considérée dans ce modèle.

Dans le cas d'un produit couvrant la dépendance totale, il est admis que la probabilité qu'un individu dépendant ne redevienne valide est quasi-nulle, ce qui se vérifie en réalité.

#### 3.1.2.1. Etats du modèle

Le graphique ci-dessous résume les différentes situations dans lesquelles l'assuré peut se trouver, ainsi que les différentes lois de passage d'un état à un autre.



### 3.1.2.2. Relations entre les états du modèle

Tout d'abord, les relations suivantes se déduisent du graphique précédent:

$$\begin{cases} p_x^v + q_x^v + i_x = 1 \\ p_x^d + q_x^d = 1 \end{cases}$$

Ensuite, le nombre de personnes dépendantes d'âge  $x+1$  est égal à la somme du nombre de dépendants d'âge  $x$  qui ne décèdent pas et du nombre de valides d'âge  $x$  qui deviennent dépendants et qui ne décèdent pas la même année. Cette relation s'écrit de la manière suivante :

$$l_{x+1}^d = l_x^d \cdot p_x^d + l_x^v \cdot i_x$$

**Remarque :**

Une autre alternative à cette hypothèse serait de supposer que les personnes valides deviennent dépendantes en milieu d'année et les personnes dépendantes décèdent du 1<sup>er</sup> juillet au 31 décembre. Cette alternative n'a pas d'impact significatif sur les résultats. En effet, sous cette hypothèse on a la relation suivante:  $l_{x+1}^d = l_x^d \cdot (1 - q_x^d) + l_x^v \cdot i_x \cdot (1 - 0.5 q_x^d)$

En revenant sous l'hypothèse première, on déduit que :

$$i_x = \frac{l_{x+1}^d - l_x^d \cdot p_x^d}{l_x^v}$$

Puis, en divisant numérateur et dénominateur par  $l_x$ , et en notant que :

$$\begin{cases} \frac{l_{x+1}^d}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1}^d}{l_{x+1}} = p_x \cdot j_{x+1} \\ \frac{l_x^d}{l_x} = j_x \\ \frac{l_x^v}{l_x} = \frac{l_x - l_x^d}{l_x} = 1 - j_x \end{cases}$$

$$i_x = \frac{j_{x+1} \cdot p_x - j_x \cdot p_x^d}{(1 - j_x)}$$

On a que:

La loi d'incidence dépend donc de la loi de prévalence, de la loi de mortalité générale, et de la loi de mortalité des dépendants.

On peut également calculer la prévalence à partir de l'incidence, en faisant la somme de toutes les personnes entrées en dépendance à un âge  $x$  compris entre  $x_0$  et  $x_n$ .

Le stock de personnes dépendantes d'âge  $x_n$  (compté à partir de l'âge  $x_0$ ) est noté  $j_{x_n}(x_0)$  et vérifie l'égalité suivante :

$$j_{x_n}(x_0) = \sum_{x=x_0}^{x_n} p_{x_0} \cdot i_x \cdot p_{x_n-x}^d$$

## 3.2. Estimation des lois spécifiques à la dépendance

Il n'existe pas à ce jour de tables de mortalité des dépendants. Le faible effectif des populations en portefeuille ne permet pas l'application de la loi des grands nombres. Il faut donc appliquer des méthodes d'estimation spécifiques, adaptées aux faibles effectifs de données à disposition.

Dans un premier temps, nous définirons les lois relatives à la dépendance, ensuite nous étudierons les méthodes d'estimation existantes.

### 3.2.1. Les références existantes

#### 3.2.1.1. Lois d'incidence et de prévalence

##### 3.2.1.1.1. Méthode générale

Cette méthode apparaît sous des formes proches dans les travaux de D Ferrer et L. Hulin ainsi que dans l'article de M. Deléglise, C. Hess, et S. Nouet.

D'après l'enquête HID, pour les niveaux de dépendance GIR 1 et GIR 2 (dépendance totale) les taux de prévalence suivants sont observés:

âge moyen	taux de prévalence GIR 1 et 2
64.5	0.70%
74.27	1.74%
84.2	7.37%
92.67	21.89%

#### Linéarisation des taux de prévalence observés dans l'enquête HID :

Afin d'atténuer les effets de volatilité observés dus à la petitesse de l'échantillon, un lissage linéaire des observations est réalisé avec les moyennes mobiles.

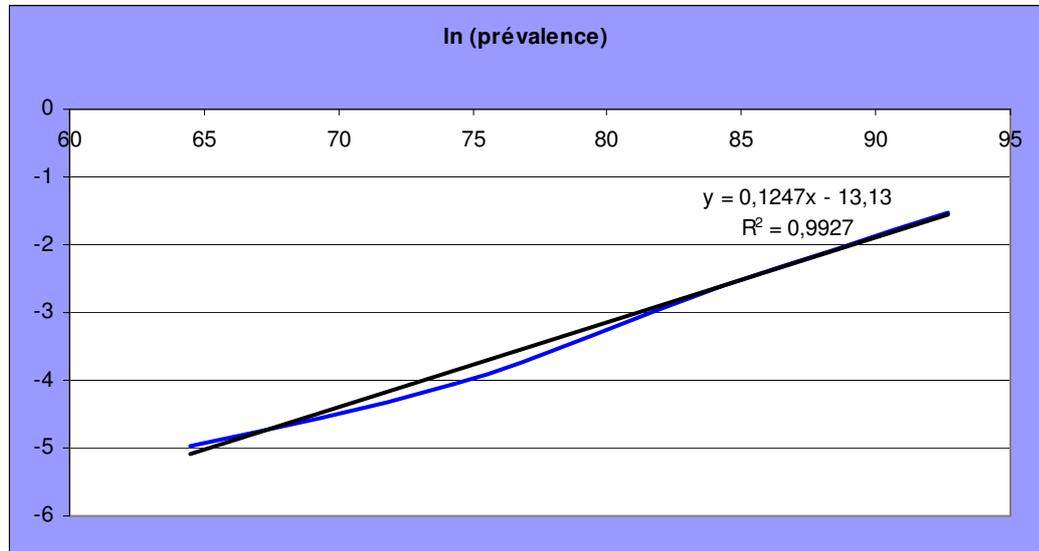
Une moyenne mobile d'ordre  $2n+1$  se définit comme suit :

$$\bar{j}_x = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} j_{x-n+k}$$

On peut travailler avec différentes valeurs de  $n$ , de façon à avoir un bon lissage. Cependant,  $n$  ne doit pas être trop grand car une moyenne mobile d'ordre excessif provoque une perte d'informations, de même que ne pas faire de lissage conduit à un niveau de variabilité anormalement élevé.

Relation linéaire entre le logarithme des taux de prévalence et l'âge moyen des individus :

On voit qu'il n'existe pas de relation linéaire entre l'âge moyen des individus dépendants et le taux de prévalence. Par contre, il existe une relation linéaire entre le logarithme des taux de prévalence et l'âge moyen, qu'on peut voir sur le graphique ci-dessous.



Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés :

Par la méthode des moindres carrés ordinaires, les coefficients de l'équation  $\ln(j_x) = a.x + b$  sont estimés. On trouve :

$$\hat{a} = 0.1247 \text{ et } \hat{b} = -13.13$$
$$j_x = \exp(-13.13) * \exp(0.1247 * x)$$

Passage de la prévalence à l'incidence :

La prévalence est observable, mais pas l'incidence. De ce fait, le taux d'incidence pourra être déduit de la formule ci-dessous une fois les taux de mortalité des dépendants calculés :

$$i_x = \frac{j_{x+1} \cdot p_x - j_x \cdot p_x^d}{(1 - j_x)}$$

### 3.2.1.1.2. Présentation de l'étude SCOR Vie

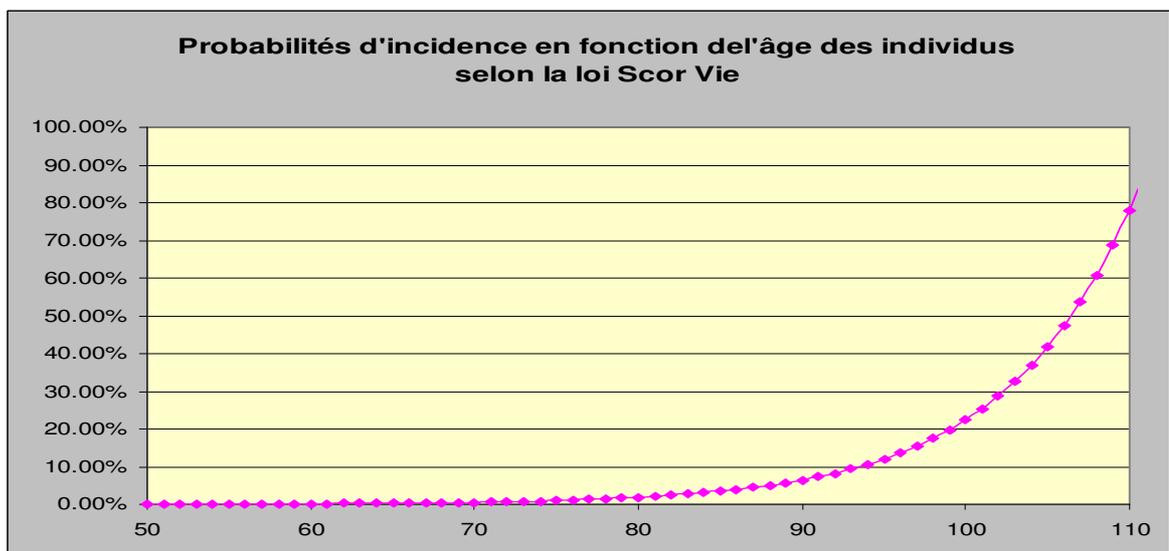
SCOR Vie dispose de plusieurs années de données statistiques en assurance dépendance car la société a racheté 75% du portefeuille du produit dépendance le plus ancien, nommé Saphir, créé en 1986 par UAP.

Les statistiques de SCOR Vie servent de référence dans de nombreux travaux mais les études disponibles datent de 1995, les modèles comme le risque dépendance ont évolué depuis.

SCOR Vie estime la loi d'incidence par la formule suivante :

$$i_x = 1.35 * 0.00041 * e^{\frac{x-52}{8}}$$

En illustrant cette loi, il apparaît que le caractère exponentiel rend très élevés les probabilités d'entrée en dépendance aux grands âges. Il semble nécessaire de plafonner ces probabilités à partir d'un certain âge.



Cette estimation date de 1995 mais une version plus récente existe, Axa l'utilise pour modéliser les taux d'incidence aux très grands âges (après 90 ans).

### 3.2.1.1.3. Présentation de l'étude de Duée et Rebillard pour l'INSEE

#### Présentation du modèle

Les variables décrivant la dépendance sont liées à l'âge et à d'autres variables individuelles : le sexe, le niveau d'étude, le nombre d'enfants...

Cette étude propose de modéliser la dépendance (tout GIR confondus donc il faut estimer la dépendance partielle et totale) par une variable  $x$  pouvant représenter la prévalence, l'incidence, ou la rémission. Cette variable est liée à l'âge  $a$  de l'individu, et à d'autres variables explicatives notées  $z$  (niveau d'étude, sexe, nombre d'enfants).

On note cette variable :

$$x(a) = f(a, z)$$

L'âge intervient à travers une fonction de la probabilité de décès car la dépendance et la mortalité selon l'âge ont des profils similaires : augmentation d'abord lente, puis rapide aux âges élevés.

Soient :

$q(a)$  probabilité de mortalité  
 $lq(a)$  **logit** du quotient de mortalité  
où  $a$  représente l'âge

$lq(a)$  est un indicateur d'état de santé qui peut varier de  $-\infty$  à  $+\infty$  et qui vaut :

$$lq(a) = \ln\left(\frac{q(a)}{1-q(a)}\right)$$

On suppose que la variable  $x(a)$  représentant la dépendance (prévalence, incidence, rémission) est une **fonction logistique** faisant intervenir à la fois l'état de santé  $lq(a)$  et des variables explicatives  $z$ .

On a alors :

$$x(a) = \frac{1}{1 + \exp(-(cste + \alpha.lq(a) + \beta.z))}$$

#### Justification de la modélisation

- Transformation de  $q(a)$  en  $lq(a)$  :

$q$  étant une probabilité, sa valeur sera comprise entre 0 et 1. La transformation de  $q$  en  $\frac{q}{1-q}$  permet de travailler sur des valeurs variant de 0 à  $+\infty$ , puis le passage au logarithme permet de travailler sur des valeurs variant entre  $-\infty$  et  $+\infty$ .

- Modélisation de  $x(a)$  par la fonction logistique:

On peut justifier la modélisation de  $x(a)$  par deux éléments.

- Relation linéaire entre  $\ln\left(\frac{x(a)}{1-x(a)}\right)$  et  $\ln\left(\frac{q(a)}{1-q(a)}\right)$  :

On a :

$$\text{logit}(x(a)) = \ln\left(\frac{x(a)}{1-x(a)}\right)$$

$$\text{logit}(x(a)) = \ln\left(\frac{\frac{1}{1 + \exp(-(cste + \alpha.lq(a) + \beta z))}}{1 - \frac{1}{1 + \exp(-(cste + \alpha.lq(a) + \beta z))}}\right)$$

$$\text{logit}(x(a)) = \ln\left(\frac{1}{\exp(-(cste + \alpha.lq(a) + \beta z))}\right)$$

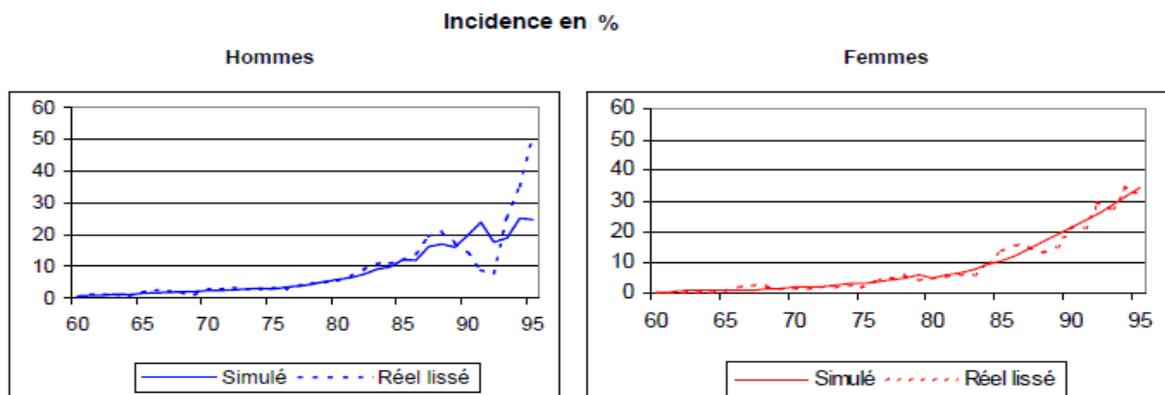
$$\text{logit}(x(a)) = \ln 1 - \ln(\exp(-(cste + \alpha.lq(a) + \beta z)))$$

$$\text{logit}(x(a)) = cste + \alpha.lq(a) + \beta z$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x(a)}{1-x(a)}\right) = cste + \alpha.lq(a) + \beta z$$

- Vérification graphique :

Cette modélisation peut être justifiée par le fait que les taux d'incidence y sont proches de ceux observés dans l'enquête HID. Ceci est illustré dans les graphiques ci-après :



Conclusion

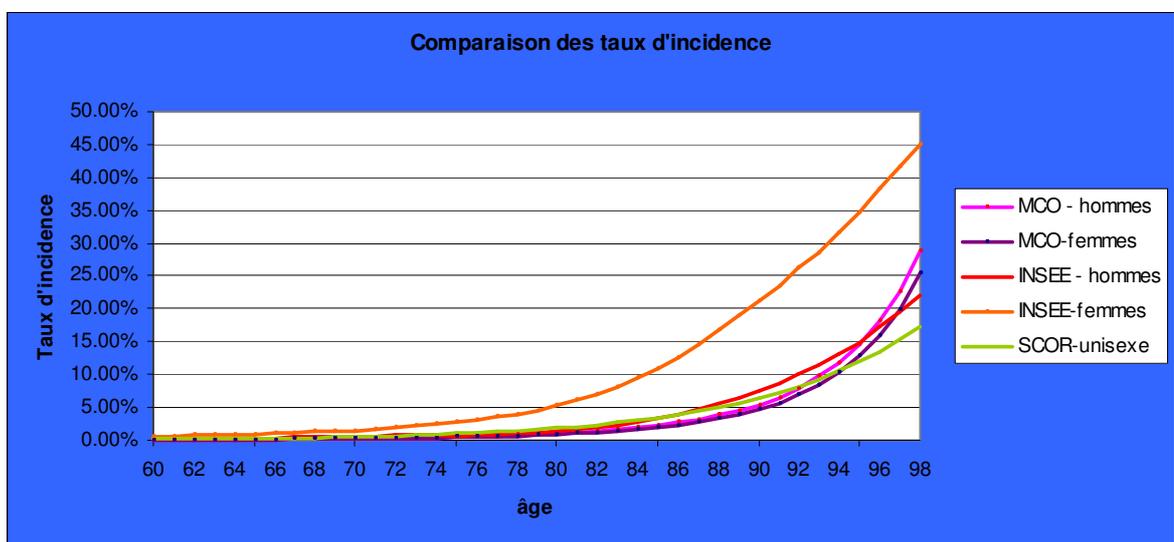
Grâce aux données HID, les coefficients  $cste$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  ont été estimés. En effet, ces données nous informent sur les taux d'incidence ou de prévalence selon un certain nombre de variables explicatives  $z$ , comme le niveau d'étude ou le nombre d'enfants.

On remarque que les entrées en dépendance sont plus fréquentes avec l'âge et qu'avoir 2 ou 3 enfants diminue l'entrée en dépendance chez les plus jeunes, pour les hommes comme pour les femmes. Avoir plus de 4 enfants augmente fortement les valeurs estimées des lois de prévalence et d'incidence.

De plus, la prévalence est moins élevée pour les personnes ayant fait des études.

On peut donc ensuite estimer les coefficients du modèle par des méthodes simples, comme les moindres carrés ordinaires par exemple.

#### 3.2.1.1.4. Comparatif



Les lois d'incidence de l'INSEE représentent la dépendance partielle et totale. Il est donc logique qu'elles soient légèrement plus fortes que les autres. En effet, la probabilité pour un individu valide de devenir dépendant partiellement est plus forte que la probabilité qu'un individu valide devienne dépendant totalement.

La loi INSEE (publiée par la FFSA) pour les femmes est plus élevée que les autres.

Les lois d'incidence féminines sont plus fortes que les lois d'incidence masculine, quelles que soient les méthodes d'estimation utilisées.

La loi AXA que nous utiliserons est du même ordre de grandeur que les autres lois. Cette loi AXA est confidentielle.

### **3.2.1.2. Loi de mortalité des individus dépendants**

#### **3.2.1.2.1. SCOR Vie**

SCOR Vie a établi une formule en 1995, exprimant la probabilité de décès d'un dépendant pour un âge x donné, en fonction affine des probabilités de mortalité générales.

$$q_x^d = \alpha \cdot q_x + \beta$$

avec  $q_x$  taux de mortalité des tables TH00-02 et TF00-

02

$\alpha$  = surmortalité multiplicative liée à la dépendance

$\beta$  = coefficient de surmortalité additive

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont indépendants de l'âge de l'assuré et estimés avec les données SCOR à  $\hat{\alpha}=2$  et  $\hat{\beta}=0.035$ .

Cette loi est assez ancienne. Les lois de mortalité des dépendants prennent maintenant d'autres paramètres en considération, comme dans le modèle de l'INSEE par exemple.

#### **3.2.1.2.2. Etude de Duée et Rebillard pour l'INSEE**

Il a été constaté à travers l'enquête HID qu'à caractéristiques données (âge, sexe, études), le taux de mortalité des individus dépendants (partiellement ou totalement) est généralement supérieur à celui de la population générale.

On note :

$q_{s,a,e}$  la probabilité de décès d'un individu (valide ou dépendant) à âge, sexe, niveau d'étude déterminé

$N_{s,a,e}^d$  le nombre de personnes dépendantes à âge, sexe, niveau d'étude déterminé

$N_{s,a,e}^v$  le nombre de personnes valides à âge, sexe, niveau d'étude déterminé

$s_{s,a,e}$  la surmortalité des personnes dépendantes par rapport aux valides

On a :

$$q_{s,a,e} = \frac{N_{s,a,e}^d \cdot q_{s,a,e}^d + N_{s,a,e}^v \cdot q_{s,a,e}^v}{N_{s,a,e}^d + N_{s,a,e}^v} \quad \text{et} \quad q_{s,a,e}^d = s_{s,a,e} q_{s,a,e}^v$$

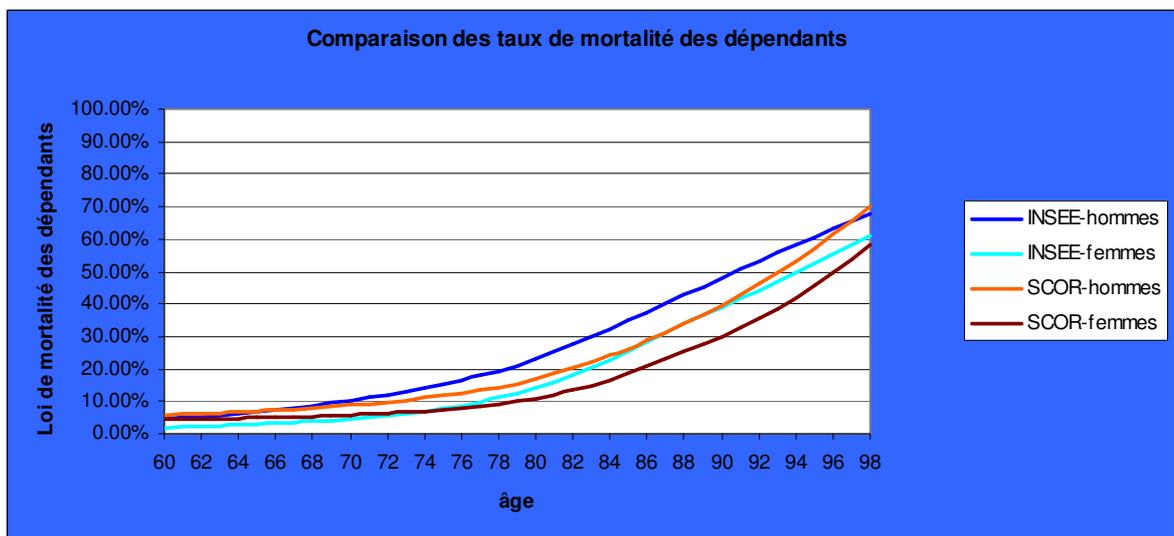
On en déduit :

$$q_{s,a,e}^v = q_{s,a,e} \frac{N_{s,a,e}^d + N_{s,a,e}^v}{N_{s,a,e}^d \cdot s_{s,a,e} + N_{s,a,e}^v}$$

$$q_{s,a,e}^d = \frac{1}{1 + \exp(-(cste^d + \alpha^d lq(a)))}$$

La surmortalité des personnes dépendantes est élevée vers 60 ans mais elle décroît avec l'âge et disparaît vers 95 ans. L'INSEE donne ainsi une estimation de la loi de mortalité des dépendants suivants les paramètres âge, sexe, niveau d'étude de l'assuré.

### 3.2.1.2.3. Comparatif



On retrouve la tendance selon laquelle les hommes ont des probabilités de décès plus importantes que les femmes. La loi INSEE présente des taux de mortalité supérieurs aux autres lois.

### 3.2.1.3. Loi de mortalité des individus valides

#### 3.2.1.3.1. Relation mathématiques entre les états

On a par définition :

$$p_x^v = \frac{l_{x+1}^v}{l_x^v} = \frac{l_{x+1} - l_{x+1}^d}{l_x - l_x^d}$$

Sachant que  $\frac{l_{x+1}^d}{l_x} = \frac{l_{x+1}^d}{l_{x+1}} \frac{l_{x+1}}{l_x} = j_{x+1} p_x$ , on obtient en divisant numérateur et dénominateur par  $l_x$  :

$$p_x^v = p_x \cdot \frac{1 - j_{x+1}}{1 - j_x}$$

Comme  $q_x^v = 1 - p_x^v$ , on en déduit que  $q_x^v = \frac{(1 - j_x) - p_x \cdot (1 - j_{x+1})}{1 - j_x}$

Cette équation vérifie bien que le taux de mortalité annuel d'un valide est supérieur à celui d'un individu en général (valide ou dépendant) dès que  $j_{x+1}$  est supérieur à  $j_x$  (ce qui paraît logique quelque soit  $x$ ).

I.E. : Lorsque le stock de dépendants en  $x+1$  est supérieur au stock de dépendant en  $x$ , les valides ont eu un taux de décès plus élevé que la population générale l'année  $x$ .

#### 3.2.1.3.2. Etude de Duée et Rebillard pour l'INSEE

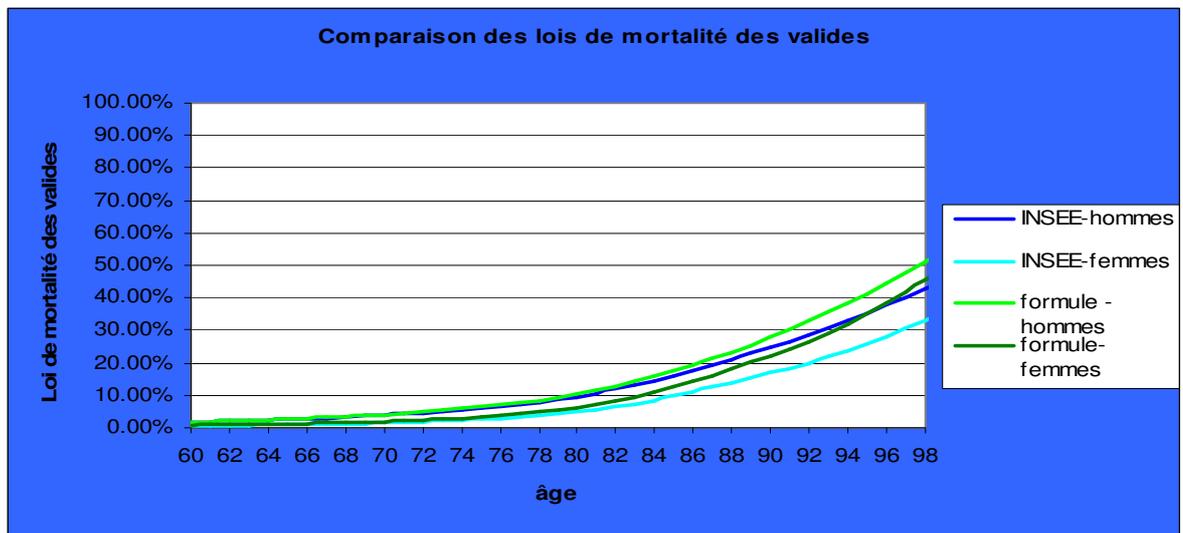
La mortalité des dépendants est intimement liée à l'ancienneté en dépendance. En effet, les observations de mortalité pendant les 5 premières années en dépendance sont extrêmement élevées.

Les probabilités de mortalité des personnes valides sont calculées de la même façon que pour la mortalité des personnes dépendantes.

On a donc :

$$q_{s,a,e}^v = \frac{1}{1 + \exp(-(cste^v + \alpha^v lq(a)))}$$

### 3.2.1.3.3. Comparatif



On constate que les méthodes de l'INSEE et de déduction par les formules mathématiques apportent des lois de mortalité des valides relativement similaires. On voit ici aussi que les probabilités de mortalités des hommes sont plus élevées que celles des femmes.

### **3.2.2. Lois Axa**

Les lois utilisées par toutes les entités Axa sont données par le « Group Risk Management ». Ce département fait le relai entre les différentes entités Axa et s'assure de l'homogénéité des tarifs du groupe.

En France, il n'existe à ce jour que deux grands portefeuilles d'assurance dépendance assez anciens pour la création de lois d'incidence et de mortalité des dépendants: l'un est détenu par la CNP, l'autre est le produit Saphir AG2R.

#### **3.2.2.1. Le produit Saphir**

En 1986, le produit Saphir est lancé. C'est le premier produit assurant le risque dépendance. Il est mis en place par AG2R et l'UAP (qui fusionne avec Axa en 1996), mais il ne sera diffusé que par l'AG2R. En effet, le risque étant mal connu, UAP a souhaité éviter tout risque de redressement en tant qu'assureur, et a considéré ce risque « moins grave » pour une organisation comme l'AG2R.

Le portefeuille Saphir est ensuite racheté par SCOR à hauteur de 75%, il reste donc une petite part du portefeuille à Axa. 153 567 individus ont souscrit au contrat Saphir, et il en reste 107 133 aujourd'hui.

De 1986 à 1994, la sinistralité observée étant très faible, les assureurs ont accepté à tort des cas de dépendance « légère ». Ensuite une forte sinistralité a été observée sur la période 1994 à 1998. Durant cette période, l'assureur devait donc faire face à des engagements pris à tort, et en plus à une forte sinistralité.

En 1999, le produit Saphir est clôturé, le portefeuille évoluera donc en groupe fermé à partir de cette date, pour laisser la place à de nouveaux produits.

Cette gestion laxiste a eu un impact important et a entraîné le sous-provisionnement du risque. Un contrôle de l'ACAM en 2000 a poussé Axa à modifier ses lois de provisionnement pour des lois beaucoup plus prudentes.

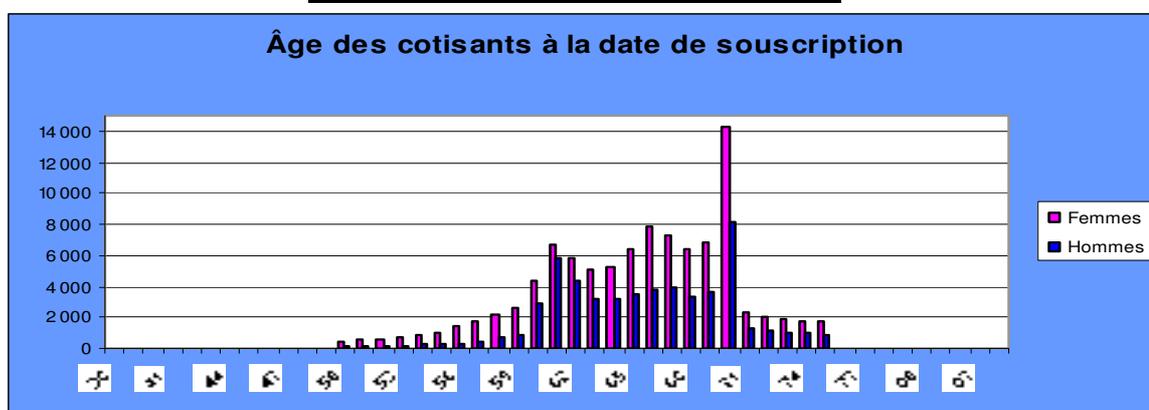
### 3.2.2.2. Démographie Saphir

Le portefeuille Saphir est composé d'environ deux tiers de femmes et un tiers d'hommes. Les adhérents avaient à l'époque de sa création entre 55 et 75 ans à la souscription (qui se faisait autour de la date de liquidation de la retraite).

#### 3.2.2.2.1. Cotisants (valides)

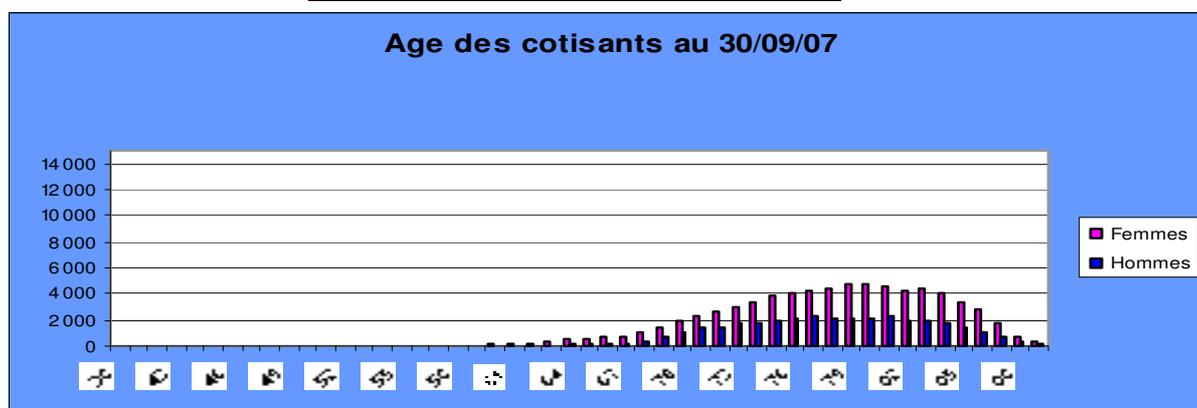
*A la date de souscription du contrat Saphir*

	Hommes	Femmes
Nombre de cotisants	153	567
dont	36%	64%
Age moyen	65.4	65.2
Âge médian	65	66



*Au 30/09/07*

	Hommes	Femmes
Nombre de cotisants	107	133
dont	32%	68%
Age moyen	77.7	77.9
Âge médian	77	78

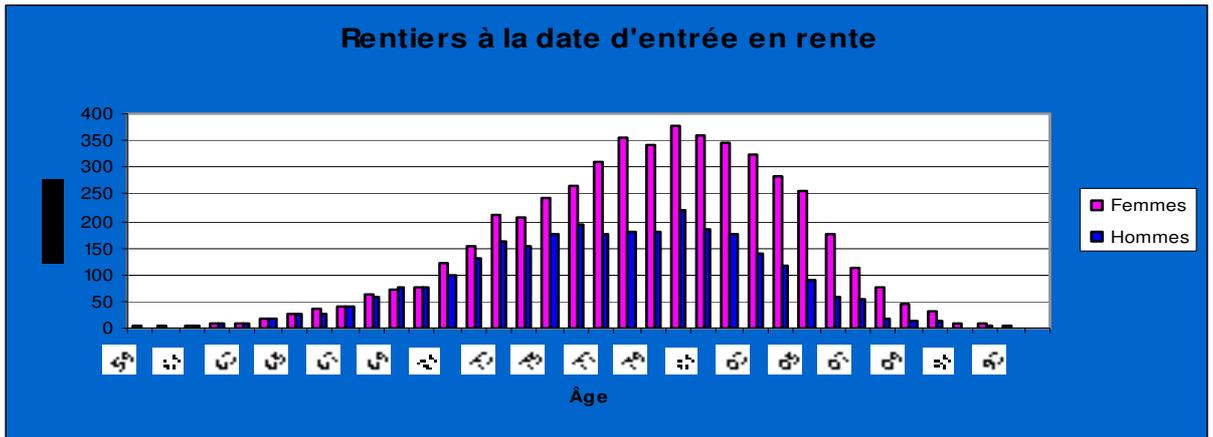


Le portefeuille est composé essentiellement de femmes, et beaucoup ont souscrit à l'âge de 71 ans. La moyenne d'âge des cotisants a logiquement augmenté avec le temps, la distribution est beaucoup plus homogène en 2007.

### 3.2.2.2. Rentiers (dépendants)

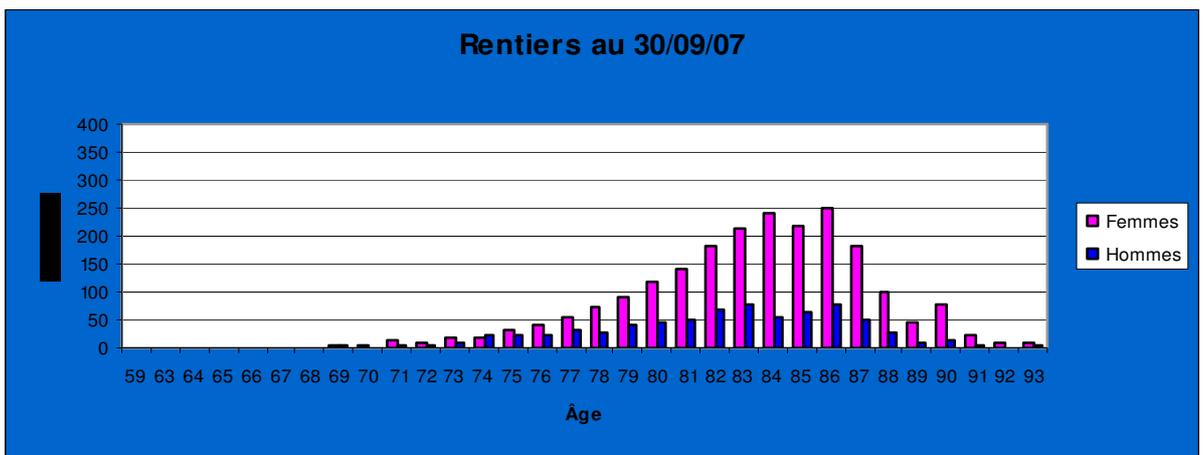
*A la date d'entrée en dépendance*

	Hommes	Femmes
Nombre de cotisants	7 901	
dont	37%	63%
Age moyen	77.2	78.7
Âge médian	77	78



*Au 30/09/07*

	Hommes	Femmes
Nombre de cotisants	2 929	
dont	25%	75%
Age moyen	82.1	83.3
Âge médian	79	83



Le nombre de rentiers évolue, il est donc très utile d'avoir un portefeuille réel et de suivre l'évolution du risque dépendance, afin de choisir des lois d'incidence prudentes, et aussi de les mettre à jour le plus souvent possible pour adapter le provisionnement et la tarification.

### 3.2.2.2.3. Evolution de la démographie de Saphir

<b>Hommes</b>			
	A la date d'entrée au contrat	au 30/09/07	Evolution
<b>Cotisants</b>	54859	34423	-37.25%
	A la date d'entrée en dépendance	au 30/09/07	Evolution
<b>Rentiers</b>	2 906	739	-74.57%

<b>Femmes</b>			
	A la date d'entrée au contrat	au 30/09/07	Evolution
<b>Cotisants</b>	98 708	72 710	-26.34%
	A la date d'entrée en dépendance	au 30/09/07	Evolution
<b>Rentiers</b>	4 995	2190	-56.16%

On observe tant une diminution du nombre de cotisants que du nombre de rentiers. Les cotisants sortent du contrat car ils arrêtent de cotiser, ou parce qu'ils décèdent. Les rentiers sortent du régime lorsqu'ils décèdent, et de façon beaucoup plus importante que les cotisants. En effet, l'espérance de vie en état de dépendance est beaucoup plus faible que pour la population générale.

Pour les hommes comme pour les femmes, seuls 4% des cotisants au régime sont devenus rentiers.

Ces individus avaient le choix de la souscription vers 65 ans, alors que le produit que nous mettons en place est obligatoire et imposé à des individus de 40 ans en moyenne. Les populations n'auront donc pas les mêmes caractéristiques car elles n'ont pas été constituées de la même façon (**moins d'anti-sélection pour notre produit obligatoire**).

De plus, il n'existe à ce jour que deux portefeuilles assez anciens pour comparer des lois d'incidence théoriques (comme celles vues dans le chapitre précédent) avec des lois d'incidence observées. Saphir étant l'un des deux, nous pouvons dire que les lois qui en découlent permettent de parvenir à des résultats assez fidèles et éclairants.

### **3.2.2.3.Loi d'incidence et de prévalence**

La loi d'incidence utilisée par Axa est issue des entrées en dépendance observées sur le contrat Saphir. Du fait que certains sinistres aient été couverts à tort en début de vie du contrat, la loi d'incidence Axa tient compte d'une marge de prudence comprise entre 2% et 3%. Cette loi estime la dépendance totale.

Ces données n'étaient pas en adéquation avec une loi exponentielle, car une cassure était observée dans l'évolution des taux d'incidence Saphir vers l'âge de 75 ans.

La courbe des taux d'incidence observés sur Saphir avait une tendance exponentielle faible de 50 à 74 ans, puis une croissance exponentielle très forte après 75 ans, et aucun adhérent au contrat Saphir n'a dépassé les 90 ans aujourd'hui.

C'est pourquoi les taux d'entrée en dépendance sont modélisés par deux fonctions exponentielles consécutives (tranches d'âges 56-74 ans, puis 75-86 ans), qui sont prolongées au-delà de 86 ans par une loi SCOR issue des enquêtes PAQUID.

PAQUID est une étude épidémiologique dont l'objectif général est d'étudier le vieillissement cérébral et fonctionnel après 65 ans. Pour ce faire, une cohorte de 4134 personnes âgées a été observée en Gironde et en Dordogne, suivies depuis 1988 et jusqu'à au moins 2003.

On observe aujourd'hui une nouvelle tendance exponentielle, entre 65 et 85 ans. Si cette tendance se confirmait, une nouvelle modélisation de la loi serait possible avec une seule loi exponentielle.

On note que la loi Axa n'observe pas de différence significative entre les probabilités d'incidence masculines et féminines. La courbe des taux d'incidence observée sur le portefeuille Saphir est donc une courbe unisexe.

### **3.2.2.4. Loi de mortalité des dépendants**

La loi de mortalité Axa des individus en dépendance totale est calculée sur l'historique du produit Saphir depuis 1986. De la même façon que la loi d'incidence Axa, elle comprend les sinistres acceptés à tort en début de contrat. La marge de prudence est d'environ 3%.

Pour modéliser la mortalité des dépendants aux âges « hors observations Saphir » (c'est-à-dire plus de 90 ans), Axa s'est inspiré des travaux réalisés par A. Oudin, lors du contrôle effectué par l'ACAM en 1998. Ses travaux sont basés sur une loi de survie à 1 an réalisée par Booth Heather, issue d'une étude de 12 mois portant sur 6099 personnes âgées hébergées dans des "care home" au Royaume Uni.

Voici les coefficients de survie à un an utilisés par OUDIN dans ce qu'il appelait "Survie à un an (Booth)":

	75 ans	85 ans	95 ans	Ensemble
Valide	89%	85%	74%	85%
Dépendance modérée	85%	78%	66%	78%
Dépendance lourde	65%	58%	51%	58%

Ces coefficients que l'on notera  $c_{x+k}$  ont ensuite été interpolés linéairement pour avoir des estimations des coefficients pour tous les âges et pour différents horizons.

Ensuite, par un simple calcul les  $l_{x+k}^d$  sont obtenus,  $k$  représentant les différents horizons et  $x$  l'âge de l'assuré lorsqu'il tombe en dépendance. La population de base tient compte de 100 000 individus pour l'horizon  $k=0$  puis on a que:

$$l_{x+k+1}^d = l_{x+k}^d \cdot (1 - c_{x+k})$$

C'est ainsi que la loi de mortalité des dépendants utilisée est construite selon le sexe, car c'est une variable très discriminante par rapport à la durée de maintien en dépendance des individus. Il n'y a pas de dérive notable de provisionnement sur les rentes en cours.

On note que la loi de survie d'un individu dépendant est 6 fois plus faible que celle d'un individu valide.

### **3.2.2.5. Loi de mortalité des valides**

La loi de décès des individus valides, est basée sur les tables de référence TH00-02 et TF00-02 en y appliquant un coefficient d'abattement basé sur l'expérience Saphir. Les  $q_x$  sont abattus de 35% pour les hommes et 40% pour les femmes.

### **3.2.3. Conclusion**

Il n'existe à ce jour que deux portefeuilles assez anciens pour avoir les lois d'incidence observées. Saphir étant l'un des deux, nous avons la chance d'utiliser des lois de tarification basées sur l'un des deux seuls portefeuilles existants en matière de dépendance.

### **3.3. Choix du modèle de tarification**

Ce chapitre est une première approche de la tarification du risque dépendance. Pour un assuré bénéficiant de 1€ de rente en cas de dépendance, quelle serait la prime à payer ?

Nous présenterons et appliquerons dans un premier temps la méthode de tarification existante pour un modèle simple, c'est-à-dire un modèle qui considère seulement le cas de la dépendance totale.

Dans un second temps, nous présenterons et appliquerons un modèle multi-états, qui prend en compte les états de dépendance partielle, et totale.

#### **3.3.1. Modèle simple**

La tarification du risque dépendance repose sur 4 paramètres techniques :

- Un taux d'actualisation
- Loi d'incidence ou de prévalence
- Loi de mortalité des individus dépendants
- Loi de mortalité des valides

Les formules suivantes sont calculées pour une annuité de 1€ payable en cas de survenance de la dépendance **totale**. Les rentes sont non réversibles.

Soient :

$$\begin{aligned} \pi_x & \text{ la prime pure payée par un assuré d'âge } x, \\ w & = \text{âge limite de la table de mortalité} \\ i & = \text{taux technique} \\ v & = \frac{1}{1+i} = \text{facteur d'actualisation} \end{aligned}$$

On distingue deux approches dans le modèle simple: la notion de flux (incidence), et la notion de stock (prévalence).

### 3.3.1.1. Tarification basée sur l'incidence

On sait que l'assuré paie sa prime tant qu'il est valide et que l'assureur verse une prestation une fois que l'assuré est dépendant et tant qu'il est vivant. Pour tarifier cette garantie, il faut donc estimer les flux engendrés dans les différents états - valide, dépendant, décédé.

Calcul de la prime unique non chargée  $\Pi_x$  :

L'annuité d'une rente annuelle de 1€ payable à terme échu (payable en fin de période) à un assuré dépendant est égale à la somme des flux futurs actualisés.

$$a_x^d = \sum_{j=1}^{w-x} p_x^d \cdot v^j$$

La prime unique est égale à l'engagement de l'assureur pour un assuré d'âge  $x$ , qui se traduit de la façon suivante :

- L'assuré d'âge  $x$  à la signature du contrat doit être vivant et valide à la date  $k$  : la probabilité de cet événement est  ${}_k p_x^d$
- L'assuré devient dépendant (il peut mourir la même année, ça n'aura pas de conséquence sur la valeur de la prime): la probabilité de cet événement est  $i_{x+k}$
- L'assureur doit alors verser une rente annuelle viagère dont la valeur actuelle probable à la date  $k$  est  $a_{x+k}^d$ .

La prime unique pour une rente payable à terme échu vaut donc :

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{w-x} {}_k p_x^v \cdot i_{x+k} \cdot v^k \cdot a_{x+k}^d$$

Prime pure annuelle  $\Pi_x^A$  :

On fait l'hypothèse que l'assuré paie ses primes à terme d'avance, et que les prestations sont versées à terme échu.

Si les cotisations de notre contrat étaient prélevées de la même façon en constitution ou en restitution, la prime pure annuelle pour un assuré vaudrait :

$$\Pi_x^A = \frac{\Pi_x}{\ddot{a}_x^v}$$

Avec  $\ddot{a}_x^v = \sum_{k=0}^{w-x} {}_k p_x^v \cdot v^k$  = valeur actuelle probable d'une prime annuelle de montant 1€, payable d'avance tant que l'assuré est vivant et valide.

Prime unique avec délai de carence :

Soit  $c$  le délai de carence en années. La prime pure unique avec délai de carence vaut :

$$\Pi_x^C = \sum_{k=c}^{w-x} p_x^v \cdot v^k \cdot i_{x+k} a_{x+k}^d = \sum_{k=0}^{w-x-c} p_x^v \cdot i_{x+k+c} \cdot v^{k+c} \cdot a_{x+k+c}^d$$

Prime unique avec franchise :

Soit :

$f$  = nombre d'années de franchise

${}_f|a_x^d$  = rente différée de  $f$  années

La prime pure unique devient :

$$\Pi_x^F = \sum_{k=0}^{w-x} p_x^v \cdot i_{x+k} \cdot v^k \cdot {}_f|a_{x+k}^d$$

Avec

$${}_f|a_{x+k}^d = v^f \cdot p_{x+k}^d \cdot a_{x+k+f}^d$$

Prime unique commerciale :

La prime commerciale est égale à la somme de la prime pure et des chargements, soit les prestations et les frais. Les frais sont composés des éléments suivants :

- frais sur cotisations incluant le coût de la gestion du contrat ainsi que la marge du preneur de risque (frais de gestions sur primes + commissions), noté  $f_c$  et **exprimé en pourcentage de la prime commerciale**,
- frais sur arrérages, noté  $f_a$  et exprimés en pourcentage de la prime pure,
- Chargement pour commissions
- frais de sécurité, noté  $f_s$  et exprimés en pourcentage de la prime pure.

On note  $\Pi_x^{F'}$  la prime unique commerciale avec franchise :

$$\Pi_x^{F'} = \frac{\Pi_x^F \cdot (1 + f_a) \cdot (1 + f_s)}{(1 - f_c)}$$

Le chargement de sécurité est ajouté au produit par les gestionnaires.

### 3.3.1.2. Tarification basée sur la prévalence

Les notations restent les mêmes. La prime basée sur les stocks d'individus dépendants vaut :

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{w-x} p_x^v \cdot v^k \cdot j_{x+k}$$

Où  $j_{x+k}$  est le taux de prévalence en  $x+k$  correspondant au risque pris en charge par l'assureur.

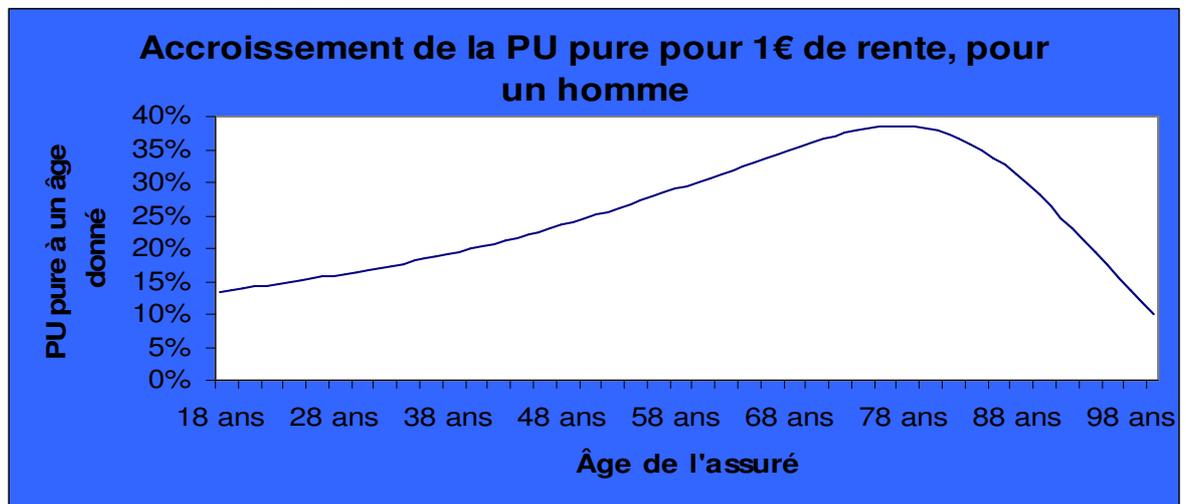
On note que les taux de prévalence ne sont pas connus pour  $k > 0$ , l'assureur doit les estimer. Pour des raisons prudentielles, les taux estimés sont généralement plus grands que les taux observés. Ainsi, la prime pure calculée à partir des taux de prévalence estimés sera plus grande que la prime pure calculée à partir des taux observés.

Une étude a montré que si l'âge de l'assuré est inférieur à 75 ans, le biais introduit n'est pas significatif, ce qui n'est plus le cas au-delà.

C'est pourquoi la formule utilisant la loi d'incidence sera préférée à celle de la prévalence.

### 3.3.1.3. Application

La prime unique pour bénéficier d'une rente de 1€ évolue selon l'âge d'adhésion au contrat de l'assuré comme sur le graphique ci-dessous :



Dans un contrat collectif obligatoire, tous les salariés de l'entreprise paient le même prix. L'assureur devra donc prendre la démographie de l'entreprise pour établir son tarif.

### **3.3.2. Modèle multi-états**

On peut estimer de façon fiable les lois liées à la dépendance totale, mais pas les lois liées à la dépendance partielle. Cependant, le marché ne permet pas de proposer un produit assurant seulement le risque de dépendance totale, sans couvrir la dépendance partielle.

Nous allons donc tenter de tarifier le risque dépendance par un modèle à quatre états : valide, dépendant partiel, dépendant total ou décédé, afin de voir si cette méthode peut être retenue.

D'un point de vue assurantiel, le risque de dépendance partielle peut vite dériver, tout d'abord parce qu'un retour de l'état dépendance partielle vers l'état valide est possible, et que le maintien en dépendance partielle peut être très long.

Les chaînes de Markov sont utilisées pour les modèles à plus de trois états, et dans ce cadre, elles semblent tout à fait adaptées à la modélisation de ce phénomène.

Une approche en deux phases peut également être réalisée. La première, d'une durée environ égale à un an, correspond à une période d'adaptation de la personne à son nouvel état, le taux de mortalité est très élevé en raison des nombreux bouleversements que subit l'individu. La seconde phase débute après un an passé en dépendance et va jusqu'au décès, la mortalité d'un individu dépendant s'y rapproche de celle d'un valide. Ce phénomène en deux phases, une phase d'adaptation différente de la phase où l'état est stabilisé se constate également dans les états de veuvage ou de mortalité des nourrissons par exemple.

On trouve aussi les approches semi-markoviennes, par exemple dans le cas d'un modèle à  $m+1$  états où l'assuré peut être dépendant suite aux causes 1 à  $m-1$  et où les états ne sont visités qu'une fois. La durée passée en état de dépendance et l'âge au décès jouent un rôle très important dans la mortalité des personnes dépendantes. Avec une modélisation de type Markov, les taux de transition ne dépendent que de l'âge de l'individu, c'est pourquoi dans ce cas il faut choisir une approche semi markovienne.

Ces approches aurait été très intéressantes si l'on avait eu les causes de dépendance pour chaque individu (par exemple cause 1 : accident, cause 2 : maladie neuro-dégénératives, cause 3 : maladies métaboliques, cause 4 : cancers, ..., cause  $m-1$ ), ce qui n'est pas possible avec notre démographie.

Dans cette partie, nous allons donc considérer deux phases distinctes dans la dépendance, mais les chaînes de Markov permettent de prendre en compte un nombre fini d'états et des probabilités de passage d'un état à un autre.

De plus, la notion de chaînes de Markov permet d'introduire la notion d'ancienneté en dépendance, qui ne pouvait pas être prise en compte avec le modèle simple.

### 3.3.2.1. Etats du modèle

L'espace des états  $E$  peut prendre les valeurs suivantes :

$i_0 =$  valide

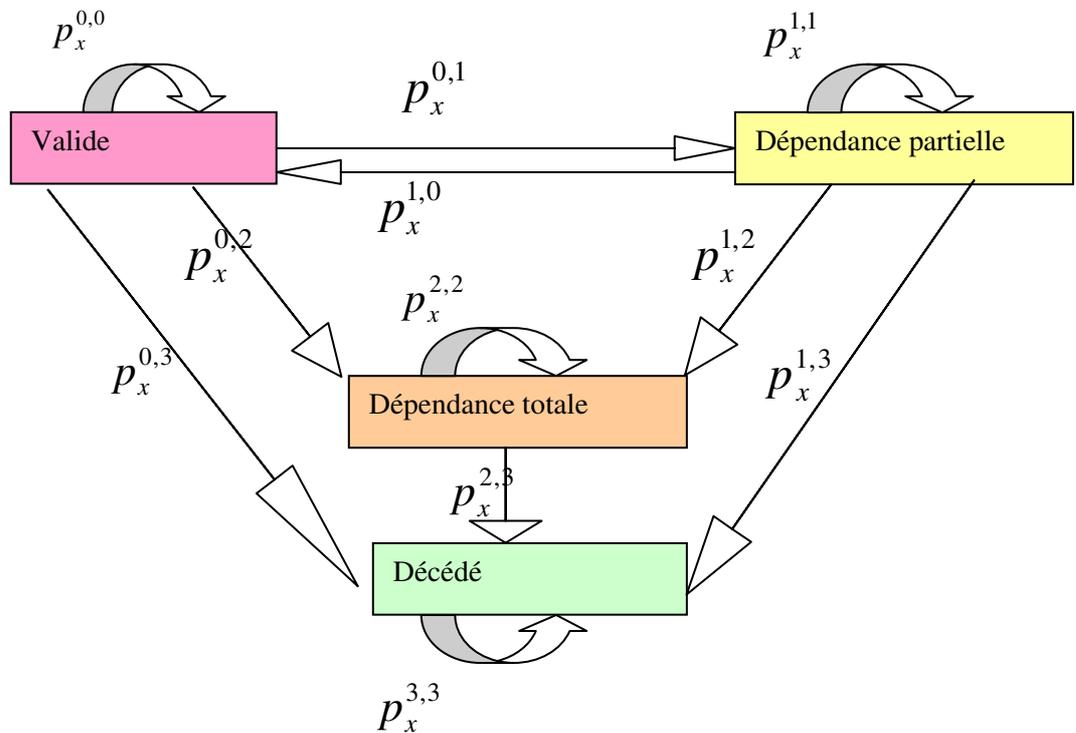
$i_1 =$  dépendance partielle

$i_2 =$  dépendance totale

$i_3 =$  décès

De la même façon que dans le chapitre précédent, il est admis que la probabilité de passage de l'état dépendant total à l'état valide ou à l'état dépendant partiel est nulle, autrement dit, l'état de dépendance totale est irréversible.

De nouvelles notations représentant la probabilité de passer d'un état à un autre sont introduites. Les différents états de la dépendance ainsi que les probabilités de passage d'un état à un autre sont :



En supposant cette modélisation Markovienne, la probabilité de passage d'un état  $i$  à la date  $k$  à un état  $j$  à la date  $k+1$  ne dépend que de l'état de l'individu à la date  $k$ , et à un âge donné. La matrice de transition entre les différents états à la date  $k$  est alors :

$$P_x = \begin{bmatrix} p_x^{0,0} & p_x^{0,1} & p_x^{0,2} & p_x^{0,3} \\ p_x^{1,0} & p_x^{1,1} & p_x^{1,2} & p_x^{1,3} \\ 0 & 0 & p_x^{2,2} & p_x^{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2.2. Rappel : les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un processus à temps discret.

Un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov : la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé, car toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus.

On note :

$E$  espace d'états fini ou dénombrable

$X_n$  variable aléatoire à valeur dans  $E$  représentant l'état du processus à l'instant  $n$

Propriété:

$$\forall n \geq 0, \forall (i_0, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+2},$$

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Définition :

Une probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  se définit par  $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$

Et la matrice de transition est la famille de nombres  $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in E^2}$

La matrice de transition  $P_x = (p_x^{i,j})_{(i,j) \in E^2}$  est stochastique car  $\forall i \in E, \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1$ . En

effet, un individu venant d'un état donné sera obligatoirement l'année suivante dans un des autres états ou dans le même.

Proposition:

La matrice de transition en  $k$  pas vaut :

$$Q_x^{(k)} = [P_x * \dots * P_{x+k-1}] = [p_{i,j}^{(k)}]_{(i,j) \in E^2}$$

$$\text{avec } p_{i,j}^{(k)} = P(X_{n+k} = j | X_n = i)$$

Lorsque  $j$  vaut 1 ou 2 (i.e. : états de dépendance partielle ou totale), la probabilité  $Q_x^k(i, j) = P(X_{x+k} = j | X_x = i)$  correspond à la probabilité de verser des prestations dépendance lorsque l'assuré aura  $x+k$  années.

### **3.3.2.3. Tarification du risque dépendance avec un modèle multi-états**

Soient :

$\Pi_x$  la prime pure payée par un assuré d'âge  $x$ ,

$Q_x^k(0,1)$  la matrice de transition de l'état valide à l'état de dépendant partiel au bout de  $k$  années,

$Q_x^k(0,2)$  la matrice de transition de l'état valide à l'état de dépendant total au bout de  $k$  années.

$w$  = âge limite de la table de mortalité

$i$  = taux technique

$v = \frac{1}{1+i}$  = facteur d'actualisation

Si l'on garantit à l'assuré une rente annuelle viagère de 1€ en cas de dépendance totale, et de 0.5€ en cas de dépendance partielle. La prime pure unique pour un assuré d'âge  $x$  vaut:

$$\Pi_x = \sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot [0.5 * Q_x^k(0,1) + Q_x^k(0,2)] \quad \text{avec } v = \frac{1}{1+i}$$

Prime annuelle :

Si les cotisations de notre contrat étaient prélevées de la même façon en constitution ou en restitution, la prime pure annuelle, pour une rente de 1€ payable d'avance en cas de dépendance totale, vaudrait :

$$\Pi_x = \frac{\sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot [0.5 * Q_x^k(0,1) + Q_x^k(0,2)]}{1 + \sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot Q_x^k(0,0)}$$

### 3.3.2.4. Création d'un outil de tarification du modèle multi états

Un outil de tarification a été construit afin d'illustrer cette partie, le volume des calculs et le nombre de matrices à générer étant très important. Cet outil a été développé avec Excel VBA et fonctionne de la façon suivante :

**Les probabilités de passage relatives à la dépendance partielle ne sont pas estimées de façon assez robuste** car les effectifs des données disponibles sont trop faibles. A ce titre, **cette méthode est expérimentale** et pourra être réutilisée dans un cadre plus rigoureux une fois que le risque dépendance partielle sera mieux connu.

Chaque matrice  $P_x$  est remplie avec les probabilités de transition d'un état à un autre.

Etat d'origine en n	Etat d'arrivée en n+1			
	valide	partiel	total	décédé
valide	$p_x^{0,0}$	$p_x^{0,1}$	$p_x^{0,2}$	$p_x^{0,3}$
partiel	$p_x^{1,0}$	$p_x^{1,1}$	$p_x^{1,2}$	$p_x^{1,3}$
total	0	0	$p_x^{2,2}$	$p_x^{2,3}$
décédé	0	0	0	1

Ainsi, les  $p_x^{i,j}$  sont insérés dans la matrice pour chaque âge  $x$ .

Ensuite, l'outil calcule les matrices de transition  $Q_x^{(k)} = [P_x * \dots * P_{x+k-1}]$  pour chaque âge  $x$  et pour chaque  $k$  allant de 1 à  $w-x$ , et  $x$  allant de 18 à 120 ans. Cette étape génère un nombre important de matrices.

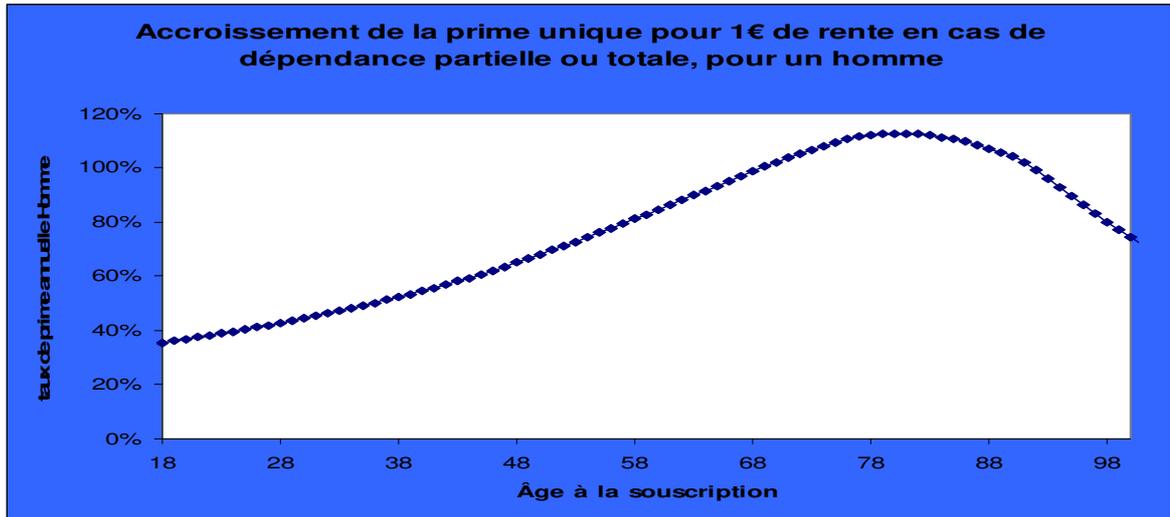
Les valeurs suivantes sont récupérées dans chacune des matrices

$$Q_x^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_x^k(0,0) & Q_x^k(0,1) & Q_x^k(0,2) & Q_x^k(0,3) \\ Q_x^k(1,0) & Q_x^k(1,1) & Q_x^k(1,2) & Q_x^k(1,3) \\ 0 & 0 & Q_x^k(2,2) & Q_x^k(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces valeurs sont ensuite transférées dans une autre feuille Excel calculant les primes annuelles correspondant à une rente annuelle de 1€ payable à terme d'avance pour chaque âge. La tarification pour une prime annuelle est basée sur ces matrices, et est établie selon la formule suivante:

$$\Pi_x = \frac{\sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot [0.5 * Q_x^k(0,1) + Q_x^k(0,2)]}{1 + \sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot Q_x^k(0,0)}$$

Le résultat pour chaque âge  $x$  est récupéré et pour une population masculine, l'accroissement de la prime pure unique pour 1€ de rente en cas de dépendance partielle ou totale est le suivant:



### 3.3.2.5. Conclusion

Les résultats obtenus s'alignent avec les résultats du marché mais sont basés sur des lois non robustes et peu fiables (les lois relatives à la dépendance partielle). En effet, les probabilités de transition liées à la dépendance partielle dans la matrice de départ ne sont pas estimées de façon assez rigoureuse pour garantir la robustesse des résultats.

Un produit dépendance actuellement ne peut pas offrir une garantie dépendance totale sans offrir de prestations en cas de dépendance partielle. Il sera donc préférable de réassurer le risque dépendance partielle et de considérer un modèle simple à trois états : valide, dépendant total, décédé.

Il s'agira donc de **dépendance totale** dans ce mémoire.

## **4. Définition de l'offre produit**

## **4.1. Description générale du produit**

Le département AXA Entreprises Retraite souhaite proposer à ses clients un nouveau produit retraite standard, comportant une garantie dépendance. Afin de concevoir le produit, il est nécessaire d'étudier les axes commerciaux, marketing, juridiques, techniques.

Les principaux acteurs consultés dans le cadre de la mise en place du produit sont les responsables de la direction technique collective, de la direction juridique collective, et du marketing.

### **4.1.1. Article 83**

Un article 83 est un contrat d'assurance de groupe sur la vie régi par l'article L 143-1 et suivants du code des assurances. Il met en œuvre les garanties collectives d'un régime de retraite supplémentaire à cotisations définies et adhésion obligatoire mis en place conformément aux dispositions de l'article L911-1 du code de la sécurité sociale et de l'article 83 du code général des impôts (CGI).

Un article 83 vaut pour tout ou une partie des salariés d'une entreprise. L'adhésion est obligatoire pour toutes les personnes de la catégorie de bénéficiaires concernés.

Le régime article 83 est financé en tout ou partie par l'employeur. De plus, un compte retraite individuel est ouvert au nom de chaque salarié ; les droits personnels du salarié lui sont acquis et pourront être transférés, à sa demande, vers un contrat de même type en cas de mobilité professionnelle.

Dans le cadre de l'article 83 du CGI (et de l'article L. 242-1 du code de la Sécurité sociale), l'entreprise peut déduire les versements qu'elle fait pour le compte du salarié de son résultat imposable et est exonérée des charges sociales et patronales sur ces versements, sauf Contribution Sociale Généralisée (CSG) et Contribution au Remboursement de la dette Sociale (CRDS).

Le salarié est exonéré d'impôts sur le revenu sur les produits financiers réalisés par le fonds article 83 (sous un certain plafond), mais la rente est ensuite pleinement imposable.

Ce type de produit peut être mis en place unilatéralement par l'employeur s'il paye l'intégralité des cotisations. Mais un accord d'entreprise ou un référendum sont nécessaires si les cotisations sont prélevées pour partie sur les salaires.

Les cotisations sont définies, mais pas les prestations. Les prestations sont servies sous forme de rentes viagères, dont le montant dépend du capital constitutif à la liquidation, et des tables de mortalités (TGH/TGF05).

Le capital constitutif varie selon trois grands axes : le taux de cotisation du régime (fixe durant toute la phase de constitution), l'évolution du salaire de l'employé, la gestion et la performance financière des cotisations du régime.

L'entreprise d'assurance communique chaque année à l'adhérent le montant des capitaux ou des rentes garantis, ou le nombre d'unités de compte et leur valeur, ainsi que l'évolution annuelle de ces montants et de ces valeurs depuis l'adhésion (ou pour les cinq dernières années lorsque la date de son adhésion est antérieure de plus de cinq ans à la date de clôture de l'exercice).

On distingue 3 types de clients : petits, moyens, ou grands comptes.

Les petits comptes sont les TPE/PME, ces clients ne sont pas ciblés car il y a un risque d'anti-sélection.

Les contrats sur les grands comptes se font généralement au cas par cas.

Afin de réaliser un contrat standard « middle market », nous ciblons les entreprises de 50 à 200 assurés, donc les clients aux comptes de taille moyenne.

#### **4.1.2. Collectif et Obligatoire**

Afin d'éviter l'anti-sélection et pour permettre la mutualisation du risque dépendance, la garantie dépendance sera obligatoire pour les salariés, au même titre que l'adhésion à l'article 83. Cependant, pour ne pas interférer avec les contrats de prévoyance dépendance déjà vendus dans certaines entreprises par AXA, cette garantie sera optionnelle pour l'employeur.

Par ailleurs, faire le choix d'une garantie dépendance obligatoire souscrite en phase de constitution permet de s'assurer que l'assuré reste dans une certaine limite d'âge, ce qui permet de lisser le montant des primes dans le temps, d'éviter les délais de carence et de réduire les questionnaires médicaux.

En effet, nous choisissons de ne réaliser aucune sélection médicale dans le cadre de la souscription obligatoire et d'un groupe de taille suffisante.

L'assuré bénéficie également de tarifs moins onéreux grâce à la mutualisation du risque dépendance au sein de l'entreprise.

Enfin, un régime collectif permet à l'assuré de bénéficier de certains avantages fiscaux et sociaux sur ses cotisations.

#### **4.1.3. Portabilité des droits**

Il aurait été intéressant que l'assuré, en cas de départ de l'entreprise puisse transférer ses droits acquis sur le contrat collectif vers un contrat individuel. Cependant, le code des assurances envisage le transfert des droits individuels en cours de constitution de l'assuré uniquement dans le cadre de la retraite.

Dans ces conditions, le transfert des droits liés à la dépendance n'est pas envisageable.

Ainsi, l'assuré qui quitte l'entreprise ne pourra plus adhérer au contrat. Il pourra cependant souscrire à un nouveau contrat individuel, mais au tarif correspondant à son âge actuel (et non pas au tarif correspondant à son âge de souscription au contrat collectif).

L'assuré conserve toutefois les droits qu'il a acquis lorsqu'il était dans l'entreprise, et aura des garanties proportionnelles à ses cotisations.

S'il quitte l'entreprise avant la liquidation, l'assuré garde donc ses droits acquis au titre de la dépendance, mais n'en constitue plus de nouveaux,

L'assuré garde le plein bénéfice de son assurance dès lors qu'il liquide sa retraite dans l'entreprise

#### **4.1.4. Conditions tarifaires**

##### Délai de carence :

Un délai de carence est habituellement prévu dans les contrats dépendance, afin d'éviter l'anti-sélection. Dans une petite entreprise de quelques têtes par exemple, un patron pourrait vouloir souscrire sachant qu'il est malade, et dans ce cas un délai de carence serait utile à l'assureur. Cependant, notre contrat ne couvrant que les entreprises de plus de 100 têtes, il est facile de penser qu'il y aura peu d'anti-sélection, et qu'il est inutile d'introduire un délai de carence.

##### Franchise :

Un délai de franchise peut être prévu, l'assureur ne versera la rente qu'après que l'assuré n'ait passé une certaine durée en état de dépendance. Dans ce contrat, nous aurions souhaité une franchise de 90 jours, mais vu le type de garanties proposées, ceci semble difficile à mettre en place.

##### Valeurs de réduction :

Selon l'article L132-23 du code des assurances, les droits individuels résultant des contrats d'assurance de groupe en cas de vie dont les prestations sont liées à la cessation d'activité professionnelle ne comportent **pas de possibilités de rachat** (sauf cas particuliers, Cf. Garanties en constitution).

#### **4.1.5. Mutualisation**

Nous souhaiterions étudier la mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite. Une fois les comptes de résultats de la retraite et de la garantie dépendance établis, notre produit présentera l'avantage de compenser les gains/pertes techniques de la dépendance par ceux de la retraite. Afin de pouvoir revaloriser les rentes article 83, une limite de prélèvement dans les bénéfices de la retraite de 0.50% par an est fixée.

### **4.2. Prestations**

#### **4.2.1. En phase de constitution**

D'après l'article L132-23 du code des assurances, les contrats d'assurance de groupe en cas de vie dont les prestations sont liées à la cessation d'activité professionnelle (article 83 par exemple) **ne comportent pas de possibilité de rachat** sauf cas particulier, comme invalidité. L'invalidité de l'assuré doit correspondre au classement dans les **deuxième ou troisième catégories** prévues à l'article L. 341-4 du code de la sécurité sociale.

Les invalides sont classés comme suit :

- 1° catégorie : invalides capables d'exercer une activité rémunérée ;
- 2° catégorie : invalides absolument incapables d'exercer une profession quelconque ;
- 3° catégorie : invalides qui, étant absolument incapables d'exercer une profession, sont, en outre, dans l'obligation d'avoir recours à **l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie.**

Rappel : Dépendance totale (GIR 1 et GIR 2)

Le GIR 1 comprend les personnes confinées au lit ou au fauteuil ayant perdu leur autonomie mentale, corporelle, locomotrice et sociale, qui **ont besoin une présence indispensable et continue d'intervenants**.

Le GIR 2 est composé de deux sous-groupes : d'une part, les personnes confinées au lit ou au fauteuil dont les fonctions mentales ne sont pas totalement altérées et qui **nécessitent une prise en charge pour la plupart des activités de la vie courante** ; d'autre part, celles dont les fonctions mentales sont altérées mais qui ont conservé leurs capacités motrices. Le déplacement à l'intérieur est possible mais la toilette et l'habillage nécessitent une prise en charge totale ou partielle.

L'état d'**invalidité 3<sup>o</sup> catégorie correspond donc à un état de dépendance totale**. Lors de son entrée en dépendance, l'assuré pourra donc récupérer le montant de son capital constitutif à cette date (avant la liquidation de la retraite).

Si l'assuré devient dépendant total en phase de constitution, il sera considéré comme troisième catégorie d'invalidité et pourra donc, au titre de l'article L132-23 racheter son capital constitutif. Nous lui proposons en plus de doubler ce capital constitutif.

#### **4.2.2. En phase de restitution**

En cas de dépendance totale, l'assuré recevra le doublement de sa rente article 83.

Augmentation optionnelle de la garantie

L'assuré pourra augmenter sa garantie dépendance au travers d'un contrat facultatif individuel (prévoyance), proposé mais indépendant de ce contrat collectif. Dans ce nouveau contrat, si le salarié ne veut pas continuer à cotiser il pourra bénéficier d'une rente réduite à condition qu'il ait cotisé au moins huit ans.

Pas de versement de capital

Associer la rente dépendance avec le versement d'un capital à la survenance de la dépendance est impossible. En effet, l'administration sociale admet qu'un contrat de retraite peut prévoir des garanties complémentaires couvrant le risque dépendance de l'adhérent avec prestations sous forme de rentes viagères. La prestation sous forme de capital comporte donc un risque de requalification du régime.

#### **4.2.3. Tout au long de la vie du contrat : Garantie Axa assistance**

Une autre garantie supplémentaire, la garantie assistance, sera couplée au produit. Les principales prestations d'assistance proposées sont généralement : la recherche de prestataires (taxi, livraison de médicaments), l'assistance à l'étranger, l'aide à la constitution des démarches administratives, etc.

Cependant, nous n'en tiendrons pas compte dans la conception du produit ni dans la tarification car cette garantie est offerte par une autre entité d'AXA.

## **4.3. Cotisations**

### **4.3.1. Tarification fonction de l'âge à l'adhésion et à la liquidation**

La tarification retenue est fonction de l'âge à la souscription pour la garantie en phase de constitution, et fonction de l'âge à la liquidation pour la garantie en phase de restitution.

### **4.3.2. Primes révisables dans la limite d'un certain intervalle**

Vu le court historique de sinistralité disponible sur le risque dépendance, les cotisations doivent être révisables dans la limite d'un certain intervalle. Cet intervalle sera fixé à + ou – 10%.

### **4.3.3. Choix du mode de financement de la garantie dépendance**

Les possibilités de financement de ce produit sont nombreuses.

En phase de constitution :

- sur les cotisations
- sur les en cours
- sur la participation aux bénéfices retraite

A la liquidation :

- sur le capital constitutif

Restitution :

- sur la rente (sur le même principe que les charges sociales CSG-CRDS, c'est à dire en prélèvement direct)
- sur la participation aux bénéfices de la retraite

On peut alors se demander, d'un point de vue juridique, **quel serait le traitement fiscal et social de chacun de ces prélèvements de financement pour une garantie dépendance, afin que les assurés et l'employeur bénéficient d'avantages fiscaux/sociaux.**

#### **En phase de constitution**

Dans le cas où **le financement se fait par une cotisation**, il faut distinguer la cotisation dépendance de la cotisation retraite.

En effet, l'administration sociale qualifie la dépendance comme un risque de prévoyance. La contribution de l'employeur au financement de la garantie dépendance est donc exonérée seulement sous le plafond de la prévoyance.

Dépasser le plafond prévoyance équivaut à passer d'un contrat où la garantie principale porte sur la retraite à un contrat où la garantie la plus importante porte sur de la prévoyance. Dans notre cas ceci équivaut à ce que les prestations probables de la dépendance ne dépassent pas les droits acquis au titre de la retraite, à la date de survenance de la dépendance.

Si l'on dépasse le plancher prévoyance, la cotisation sera soumise aux taxes CSG /CRDS et à la taxe de 8%.

Dans le cas où **le financement est issu de la participation aux bénéfices retraite**, cela revient à financer une garantie prévoyance sur un excédent de résultat retraite.

Cependant, les plafonds d'exonération prévoyance et retraite ne sont pas les mêmes. L'excédent de résultat retraite pourrait alors être requalifié de cotisation prévoyance et l'administration sociale pourrait donc requalifier ce produit en distinguant la dépendance de la retraite.

**Dans ce cas où la garantie dépendance serait facultative**, la cotisation dépendance n'est pas fiscalement déductible et la contribution de l'employeur n'est pas exonérée de charges sociales. Ceci constitue une raison supplémentaire à choisir un produit obligatoire.

#### A la liquidation

Le cas d'un prélèvement sur le capital constitutif pourrait être admis si le montant du financement ne dépasse pas l'équivalent de la première rente.

Si la somme est supérieure à la rente, cela pourrait être considéré comme le versement d'un capital et remettre en question le régime de retraite.

#### En phase de restitution

Le cas d'un financement en déduction de la rente ou sur la participation aux bénéfices est admis mais le retraité devra fiscaliser l'intégralité de la rente.

#### Conclusion

Le financement de la garantie « doublement capital constitutif en phase d'épargne se fera durant la phase d'épargne, sous la forme du prélèvement d'un pourcentage de la prime versée par le salarié et l'employeur sur le capital constitutif. Les taux d'incidence étant très faibles aux âges de la phase d'épargne, le coût de cette garantie sera très faible.

La garantie en phase de restitution ne sera financée qu'à partir de la liquidation. Ceci permet d'éliminer le risque financier lié aux performances financières du capital constitutif, et donc au niveau de prestations.

De plus, le financement de la garantie « doublement rente article 83 » en phase de restitution sera fait en grande partie à la liquidation, mais pas en intégralité.

La rente article 83 sera calculée à terme trimestriel d'avance. Ainsi ce terme d'avance sera alloué intégralement au financement de la garantie dépendance en phase de restitution.

Ainsi le montant restant à payer sera ainsi peu important, il sera prélevé en amont des rentes article 83. Ceci permet également à l'assureur un éventuel ajustement de ces prélèvements sur les rentes en cas de dérives du risque dépendance.

Afin d'étaler les primes dans le temps, les prélèvements seront faits viagèrement, avec un taux différent sur les cotisations article 83 en phase de constitution ou sur les rentes en phase de restitution.

Cette combinaison de financement devrait permettre à l'employeur d'offrir une garantie supplémentaire à ses salariés sans que ceux-ci n'aient le sentiment de payer une charge lourde.

#### 4.4. Bilan

**Type de contrat:**

- Obligatoire pour éviter l'anti-sélection
- Collectif pour mutualiser les risques

Pas de sélection médicale

**Cotisations :**

- Garantie « doublement capital constitutif »: Primes prélevées à un taux x durant la phase de constitution
- Garantie « doublement rente article 83 »: Terme d'avance trimestriel article 83 + taux y durant la phase de restitution

**Prestations :**

- En phase de constitution: Doublement capital constitutif
- En phase de restitution:
  - Doublement de la rente article 83 en cas de dépendance totale, la moitié en cas de dépendance partielle (voir tarifs dépendance partielle avec réassureur)
  - Possibilité d'augmenter cette garantie par la souscription d'un contrat facultatif individuel
- Tout au long de la vie du contrat: Garantie « Axa assistance »

Mutualisation entre les comptes de résultat retraite et dépendance

## **5. Mise en place du produit**

## **5.1. Paramètres influents**

Pour mettre en place un tarif adapté au produit défini précédemment, il faut dans un premier temps **étudier les paramètres qui vont faire varier le tarif**.

Ensuite, il faudra **trouver les formules mathématiques traduisant les engagements pris par l'assureur**, puis **modéliser les performances financières des actifs choisis**.

Enfin il faudra **intégrer tout ceci dans un outil** qui soit capable de calculer un tarif pour toute une démographie d'entreprise.

### **5.1.1. Paramètres de l'article 83**

Le capital constitutif varie selon trois grands axes :

- le taux de cotisation du régime,
- l'évolution du salaire de l'employé,
- la gestion et la performance financière de l'épargne du régime

L'entreprise peut avoir une action sur certains de ces paramètres au travers de sa politique sociale (progression des salaires, niveau de la rotation du personnel), alors que d'autres lui sont imposés par le contexte macro-économique (niveau des taux d'intérêt, inflation).

#### **5.1.1.1. Paramètres influençant la valeur du capital constitutif**

##### *Taux de cotisation de l'article 83*

Dans de nombreux outils de simulation, notamment chez Axa, il est pris un taux de cotisation à l'article 83 fixe de 3% par défaut, mais ce paramètre peut varier selon les entreprises. Il est paramétrable dans l'outil de tarification du produit.

##### *Evolution du salaire de l'employé*

Dans de nombreux outils de simulation, notamment chez Axa, il est pris un taux de revalorisation des salaires fixe de 2% par défaut. Il est paramétrable dans l'outil de tarification, présenté en annexe.

##### *Supports financiers du régime*

On distingue deux types de contrats :

- Les contrats en euros : l'allocation des actifs est la même quelque soit l'horizon de placement, les actifs choisis ont une faible volatilité.
- Les contrats en unités de compte : gestion évolutive, qui adapte l'allocation des actifs en fonction de l'horizon d'investissement.

Ces contrats sont étudiés en détails ultérieurement.

### **5.1.1.2. Paramètres influençant les rentes article 83**

#### *Risques relatifs aux hypothèses démographiques*

Un salarié acquiert des droits à prestations dont le paiement n'interviendra que dans le futur, que s'il est en vie au moment de la retraite. Les prestations sont donc soumises à un certain nombre de conditions telles que la survie des assurés. Dans ce cadre, les tables de mortalité (TGH/TGF05) seront utilisées.

#### *Risques relatifs aux hypothèses financières*

Le taux technique utilisé pour calculer les engagements de l'assureur ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français (*Article A 132-1*).

Le taux de revalorisation des rentes dépend de plusieurs paramètres (évolution des produits financiers et des taux d'actualisation réglementaires dans le temps, résultat du produit...). Il ne concerne que les fonds en euros, **il n'y a pas de participation aux bénéficiaires sur les fonds en unités de compte.**

Un assuré qui a choisi une gestion en euros pourra se voir offrir un rendement supérieur au taux minimal garanti en phase d'épargne au titre de la participation aux bénéficiaires.

A la liquidation, l'épargne des assurés est basculée vers un fonds en euros, quelque soit le type de gestion choisie. Ainsi, les rentes pourront éventuellement être revalorisées en restitution, même pour un contrat géré en unités de compte lors de la phase d'épargne.

### **5.1.2. Pilotage du régime**

#### **5.1.2.1. Contrat en unité de compte**

Dans un contrat en unité de compte, les sommes investies sur les unités de compte ne sont pas garanties et présentent donc un risque en capital pour l'assuré.

Les investissements réalisés sur un contrat d'assurance vie étant généralement fait pour une somme donnée, les unités de compte peuvent être en nombre non entier. Chaque versement de l'assuré est converti en nombre d'unités de compte qui sont additionnées tout au long de la constitution des droits de l'assuré. A la liquidation des droits, le nombre d'unités de compte est multiplié par la valeur liquidative du fonds à cette date pour obtenir le montant en euros du capital constitutif à échéance.

La valeur liquidative est la division de l'actif net par son nombre de parts ou d'actions. La valeur liquidative est calculée par un organisme de valorisation (CACEIS Fastnet, Natixis Investor Servicing, Euro VL, ...) à périodicité définie par le prospectus du fonds. La valeur liquidative est également diffusée auprès de l'AMF (Autorités des Marchés Financiers) et d'autres organismes de presse.

Les actifs réglementés représentant les engagements des contrats en unités de compte ne sont pas exactement les mêmes que les actifs réglementés représentant les contrats en euros. Les actifs réglementés que l'on trouve en représentation des engagements règlementés des contrats en unités de compte sont par exemple (Cf. article R131-1 pour les contrats en unités de compte):

- les obligations et autres valeurs émises ou garanties par l'un des Etats membres de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE)
- Obligations, titres participatifs et parts ou actions émises par des véhicules de titrisation et titres participatifs négociés sur un marché reconnu
- Titres de créances négociables d'un an au plus
- Actions des sociétés d'investissement à capital variable et parts de fonds communs de placement
- Actions et autres valeurs mobilières cotées dans une bourse de valeur d'un état membre de l'OCDE
- Actions des entreprises d'assurance, de réassurance
- Actions des sociétés d'investissement à capital variable et parts des fonds communs de placement

Lors de la souscription d'un contrat retraite collectif, l'assureur peut proposer à l'entreprise cliente différents systèmes de gestion dans les contrats multi-supports : fonds par horizons, fonds à bascule, allocation évolutive.

#### **5.1.2.1.1. Fonds par horizon**

Les cotisations des salariés sont investies dans différents fonds selon l'âge du salarié, c'est à dire selon l'horizon de placement. En effet, à chaque horizon de placement correspond une allocation d'actif optimale.

Il faut savoir que plus l'horizon de placement est lointain, plus les profils risqués, dits dynamiques, améliorent la performance du placement.

Inversement, si le placement se fait à une date proche de l'échéance (la liquidation), les profils sécuritaires sont plus appropriés.

Les cotisations investies sur un support y restent jusqu'à la liquidation de la retraite, ce qui nécessite la création d'un fonds dédié pour chaque horizon d'investissement. Jusqu'à 48 ans, le fonds est à horizon très long terme, puis il varie tout les 6 ans jusqu'à être un fonds horizon très court terme entre 61 et 65 ans.

#### **5.1.2.1.2. Fonds à bascule**

Les cotisations sont investies différemment au fil du temps, et ne sont pas bloquées dans un fonds mais replacées. A horizon lointain, l'épargne est placée dans des fonds dynamiques. En se rapprochant de la date de liquidation de la retraite, toute l'épargne est déplacée dans des fonds plus sécuritaires.

Ce type de gestion diffère de la précédente dans la mesure où l'intégralité de l'encours de l'épargnant est investie sur un même fonds à un instant donné, selon la tranche d'horizon de son profil qui change tout les 6 ans.

### 5.1.2.1.3. Allocation évolutive

Ce type de gestion n'est pas basé sur un fonds qui change par tranches d'horizon, mais repose sur **trois supports dont l'allocation varie chaque année** pour permettre une gestion évolutive. Les trois supports utilisés sont : les **actions, les obligations, et le monétaire**.

Il existe une allocation optimale de ces trois supports permettant de maximiser le rendement chaque année, pour une volatilité (un risque) donné.

En projetant les couples espérance de rendement et volatilité pour chaque portefeuille, il apparaît une frontière efficiente. Parmi les portefeuilles efficients trois profils sont choisis, correspondant à différentes aversions au risque.

L'assuré se voit donc proposer trois profils de risque: **dynamique, équilibré, sécuritaire** qui correspondent respectivement à un risque élevé, modéré, faible. Le profil le plus choisi est le profil équilibré.

Parmi ces trois systèmes de gestion, les fonds en allocation évolutive sont le plus souvent utilisés car comme le soulignent les travaux de *Virginie Mace, AXA DERE* sur le sujet, la gestion évolutive est plus efficiente que la gestion par bascule et par horizon.

A la souscription d'un contrat article 83, **l'assuré choisit généralement une allocation évolutive « équilibrée » ou un fonds en euros**. Ce sont les deux possibilités que nous retiendrons pour le montage du produit.

Nous comparerons plus tard l'impact du choix d'une gestion évolutive ou d'un contrat en euros sur le tarif de notre produit.

### 5.1.2.2. Contrat en Euros

Dans un contrat en euros, la somme investie par l'assuré est garantie, cependant la gestion financière est souvent plus sécuritaire. En effet l'assureur doit avoir une gestion plus prudente car il a garanti un taux minimum à l'assuré.

Selon le code des assurances, les entreprises pratiquant des opérations d'assurance dépendant de la vie humaine, peuvent garantir dans leurs contrats un montant total d'intérêts techniques qui, rapporté aux provisions mathématiques, ne sera pas inférieur à un taux minimum garanti. **Ce taux doit être fixé annuellement pour l'année suivante.**

La commercialisation d'un contrat assorti d'une telle garantie de taux n'est possible que si la **moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise calculés pour les deux derniers exercices est au moins égale aux 4/3 du taux minimum qu'elle propose de garantir** la première année.

Les engagements réglementés du contrat (les provisions techniques, les créances, les dépôts de garanties...) doivent être représentés par des actifs réglementés, énumérés dans *l'article R 332-2 du code des assurances*.

### 5.1.3. Rentes viagères à annuités fractionnées

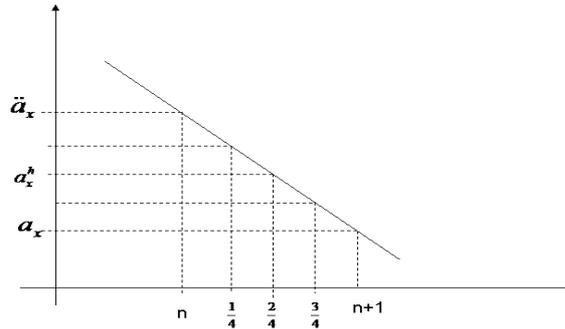
Les rentes retraites sont très rarement versées annuellement. Dans notre produit les rentes article 83 seront versées trimestriellement.

La rente annuelle payable chaque trimestre à un assuré d'âge  $x$  est notée  $R_{x+m}^H$ .

Les tables viagères étant annuelles, il faudra recourir à des approximations pour estimer les rentes fractionnées, on procèdera par interpolation linéaire.

Soit une rente annuelle payable par fractions de  $\frac{1}{h}$ , à la fin de chaque  $h^o$  d'année. Cette rente est

la somme de  $H$  rentes partielles  $a_x^h$  payables tous les ans à la date «  $n + \frac{h}{H}$  », avec  $h=1, \dots, H$ .



On a que  $\ddot{a}_x - a_x = 1$ .

Par interpolation linéaire, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{a_x^h - a_x}{\ddot{a}_x - a_x} = \frac{1 - \frac{k}{h}}{h}$$

$$\Leftrightarrow a_x^h = \left(1 - \frac{k}{h}\right) \cdot \frac{1}{h} + a_x$$

On obtient alors :

$$a_x^H = \sum_{h=1}^H a_x^h = a_x + 1 - \frac{H \cdot (H + 1)}{2 \cdot H^2} = a_x + \frac{H \cdot (H - 1)}{2 \cdot H}$$

Dans notre produit,  $H=4$  car la rente est trimestrielle. De plus, la rente article 83 est calculée à terme d'avance afin d'allouer le terme d'avance à la garantie dépendance.

On note  $\ddot{a}_x^4$  l'annuité correspondant à 1€ de rente annuelle, dont les versements sont fractionnés trimestriellement.

Comme  $\ddot{a}_x^H - a_x^H = \frac{1}{H}$ , on a que :

$$\ddot{a}_x^4 = a_x + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} = a_x + 1.75 = \ddot{a}_x + 0.75$$

Et la rente annuelle dont les versements seront fractionnés trimestriellement est la suivante:

$$R_{x+m}^4 = \frac{CC_{x+m}}{\ddot{a}_{x+m}^4}$$

## **5.2. Traduction mathématique des engagements de l'assureur**

### **5.2.1. Le doublement du capital constitutif**

#### *Hypothèses et notations*

- Le doublement du capital constitutif est versé en milieu d'année.
- Si l'assuré devient dépendant à l'âge  $x$ , il recevra le montant du capital constitutif du début de l'année  $x$ , noté  $CC_x$
- La garantie est valable tant que l'assuré est dans l'entreprise (s'il change d'entreprise ou qu'il liquide sa retraite, la garantie prend fin). Par hypothèse, l'assuré reste dans l'entreprise jusqu'à liquidation.
- L'assuré liquide sa retraite à l'âge  $x+m$ .

#### *Calcul de la prime unique*

La prime unique de cette garantie vaut :

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{m-1} {}_k p_x^y \cdot i_{x+k} \cdot v^{k+0.5} \cdot CC_{x+k}$$

#### *Calcul du pourcentage prélevé sur les primes*

Cette prime unique est ensuite divisée par le total des primes versées au titre de l'article 83, afin d'exprimer la garantie en pourcentage de ces primes.

Soient :

$y$  le pourcentage prélevé sur chaque prime

$P_{x+i}$  la prime payée au titre de l'article 83 à l'âge  $x+i$

$$y = \frac{\Pi_x}{\sum_{i=0}^{m-1} P_{x+i}}$$

### **5.2.2. Garantie doublement rente article 83**

Afin d'éviter le risque financier lié aux rendements financiers du capital constitutif en phase d'épargne, le tarif de cette garantie sera calculé lors de la liquidation, une fois le montant du capital constitutif connu.

Le paiement de cette prime se fera donc en restitution.

### 5.2.2.1. Calcul de la prime unique

#### Hypothèses

- Tout les salariés qui changent d'entreprise laissent leur capital constitutif chez AXA (et ne demandent pas le transfert des droits acquis).
- Les prestations retraite et dépendance sont versées en fin de trimestre.

L'assureur s'est engagé à verser  $R\text{€}$  à l'assuré s'il devient dépendant total, en plus des  $R\text{€}$  versés tant que l'assuré est vivant.

Soient:

$m$  le nombre d'années avant la liquidation de la retraite de l'assuré

$CC_x$  le capital constitutif de l'assuré d'âge  $x$

$R_x^H = \frac{CC_x}{\ddot{a}_x^H}$  le montant de la rente annuelle payable trimestriellement, revalorisée d'un assuré d'âge  $x$ .

$\Pi_x^H$  la prime unique de la garantie « doublement rente », calculée à l'âge  $x$ .

${}^R a_{x+k}^{d,H}$  la rente annuelle payable trimestriellement que l'assureur devra verser à l'assuré en cas de dépendance à l'âge  $x+k$  :

$${}^R a_{x+k}^{d,H} = \sum_{j=1}^{w-x-k} v^j \cdot {}_j p_{x+k}^d \cdot R_{x+k+j}^H$$

On se place à l'âge  $x+m$  de liquidation de la retraite, la prime unique payable en fin de trimestre vaut:

$$\Pi_{x+m}^H = \sum_{k=0}^{w-x-m} {}_k p_{x+m}^v \cdot {}_k i_{x+m+k} \cdot v^k \cdot {}^R a_{x+m+k}^{d,H}$$

### 5.2.2.2. Calcul du pourcentage prélevé sur les rentes

La prime restant à payer est la différence entre la prime unique et le terme d'avance trimestriel. Cette somme est répartie dans le temps selon l'espérance de vie d'un individu (valide ou dépendant)

Ensuite, pour obtenir un pourcentage, la somme restant à prélever chaque année est rapportée à la rente moyenne annuelle.

Soit  $\dot{e}_x$  l'espérance de vie d'une personne d'âge  $x$

$$\dot{e}_x = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt = \frac{1}{l_x} \int_0^{w-x} l_{x+t} dt \cong \left( \frac{l_x + l_{x+1}}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{2} + \dots \right)$$

$$\dot{e}_x \cong \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + \frac{l_{x+w-1}}{l_x} \cong \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{w-1} \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Soient :

$\bar{R}_x$  la rente moyenne calculée sur la période de l'espérance de vie d'un individu d'âge  $x$

$r$  le taux de revalorisation de la rente (1% par hypothèse dans l'outil de tarification)

$T_{x+m} = \frac{R_{x+m}^H}{4}$  est le terme d'avance trimestriel qui finance la garantie doublement rente

$a_x^H$  ( $H=4$ ) la rente annuelle payable trimestriellement, à terme échu

$z$  le pourcentage prélevé sur chaque rente article 83, après prélèvement du terme d'avance trimestriel à l'âge de la liquidation  $x+m$

Le pourcentage prélevé en amont des rentes article 83 vaut :

$$z = \frac{(\Pi_{x+m}^H - T_{x+m})}{a_{x+m}^H} * \frac{1}{\bar{R}_{x+m}}$$

$$\bar{R}_x = \frac{R_{x+m}^H \cdot \sum_{i=0}^{\dot{e}_x} [(1+r)^i]}{\dot{e}_x}$$

avec

Les chapitres précédents ont permis d'estimer tous les paramètres du tarif, sauf le **montant du capital constitutif pour chaque horizon de placement, et à échéance**. C'est ce qui sera fait dans la partie suivante.

### 5.3. Modélisation du fonds choisi par l'assuré

Deux gestions différentes sont modélisées ici : la gestion évolutive, avec un profil de risque « équilibré » (fonds en unités de compte), et la gestion en euros.

Pour tarifier notre produit, il faut déterminer le rendement moyen pour chaque horizon, et chaque type de gestion, et estimer l'évolution du capital constitutif en phase d'épargne.

#### 5.3.1. Fonds en unités de compte

Pour modéliser le montant du capital constitutif à échéance d'un assuré ayant choisi une gestion évolutive « équilibrée », donc en unités de compte, il faut définir l'allocation des actifs tout au long de la phase de constitution.

Le profil « équilibré » se traduit par un investissement dynamique en début de contrat (100% actions), puis par un investissement de plus en plus sécuritaire (100% monétaire à échéance).

##### 5.3.1.1. Grille d'allocation évolutive « équilibre »

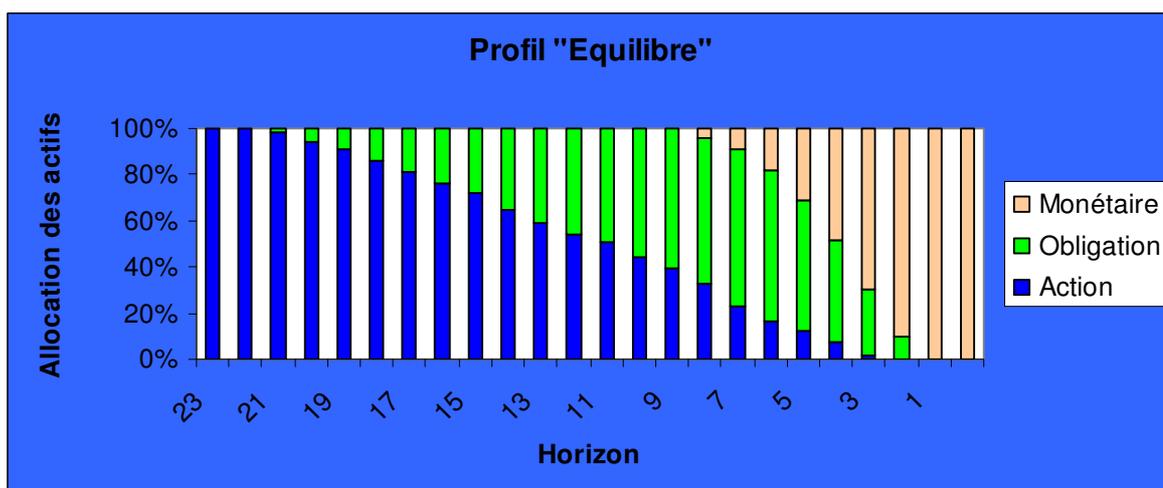
A partir de trois fonds « purs » (action, obligation, monétaire), un fonds de gestion par horizon pourra être reconstitué, via la matrice d'allocation des fonds purs au fil du temps.

Chaque année (parfois chaque trimestre), l'ensemble des versements effectués par les assurés (flux), ainsi que les avoirs épargnés (stocks) sont réalloués entre les trois supports selon une grille d'allocation, en fonction de l'horizon de placement.

La matrice d'allocation évolutive a été réalisée par *Virginie Mace, Axa DERE* dans ses travaux sur la gestion par horizon. Cette matrice est la suivante :

	<b>Equilibre</b>											
<b>Horizon</b>	<b>23</b>	<b>22</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>19</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>12</b>
<b>Action</b>	100%	100%	98%	94%	91%	86%	81%	76%	72%	65%	59%	54%
<b>Obligation</b>	0%	0%	2%	6%	9%	14%	19%	24%	28%	35%	41%	46%
<b>Monétaire</b>	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

	<b>11</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>Action</b>	51%	44%	39%	33%	23%	16%	12%	7%	2%	0%	0%	0%
<b>Obligation</b>	49%	56%	61%	63%	68%	66%	57%	45%	28%	10%	0%	0%
<b>Monétaire</b>	0%	0%	0%	4%	9%	18%	31%	48%	70%	90%	100%	100%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%



L'horizon zéro correspond à la liquidation de la retraite. L'horizon 23 correspond à un assuré âgé de 40 ans (on prend l'exemple d'un assuré qui liquide sa retraite à 64 ans).

Avant 40 ans, la totalité du fonds de son article 83 est investie en actions car l'assuré est loin de la liquidation donc la gestion financière peut être dynamique.

Après 40 ans, la gestion du fonds change pour devenir de plus en plus sécuritaire, jusqu'à ce que les capitaux ne soient investis qu'en monétaire à partir de 62 ans et jusqu'à liquidation de la retraite.

L'allocation de ce type de gestion étant déjà définie, il reste à **choisir chaque actif** composant le fonds afin de **le modéliser**. Il faudra aussi modéliser les **dépendances entre les actifs**.

Une fois ces étapes effectuées, l'évolution du capital constitutif en phase d'épargne pourra être estimée, et le produit pourra être mis en place.

### **5.3.1.2.Choix des actifs**

Les actifs choisis doivent être **éligibles en tant qu'actifs réglementés pour un fonds en unités de compte**. Les paramètres des trois actifs Action, Obligation, et Monétaire sont basés sur l'historique de valeurs liquidatives de trois supports d'AXA Investment Managers.

#### **5.3.1.2.1. Actions**

On utilise le support **Axa Europe Action** (historique depuis 1991) basé sur environ 80 grandes et moyennes sociétés Européennes.

Les gérants du fonds sélectionnent les grandes et moyennes sociétés européennes qui présentent une valorisation attrayante et un potentiel de croissance important. La durée de placement recommandée dans ce fonds est de plus de 8 ans.

Les paramètres de ce fonds, bruts de frais financiers sont :

Espérance de rendement=10.23%

Volatilité=17.26%

#### **5.3.1.2.2. Obligations**

On utilise l'historique du support **AXA Euro 7-10**, depuis le 31/12/93. Ce support est investi dans des titres de marchés monétaires et obligataires libellés en euro, d'échéance 7 à 10 ans, dont les émetteurs peuvent être privés ou gouvernementaux, et dans des produits dérivés de taux.

Un arbitrage permanent entre obligations d'émetteurs privés et gouvernementaux (diversification de l'allocation des différents types d'obligation) est réalisé afin d'améliorer la performance du fond et de minimiser la volatilité.

La durée de placement recommandée est de 3 ans.

Les titres sont notés « Investment Grade », c'est-à-dire qu'ils sont notés entre AAA et BBB- selon l'échelle de Standard & Poor's, ce qui correspond à un niveau de risque faible. Ces obligations sont les seules que les investisseurs institutionnels peuvent acheter, les autres étant considérées comme trop risquées.

Les paramètres de ce fonds, bruts de frais financiers sont :

Espérance de rendement=5.86%

Volatilité=4.10%

#### **5.3.1.2.3. Monétaire**

On utilise l'historique du support **Axa Court Terme** depuis le 01/01/91, investi sur les marchés monétaires et de taux. La durée de placement recommandée est de 3 mois.

Les paramètres de ce fonds, bruts de frais financiers sont :

Espérance de rendement=4.78%

Volatilité=0.36%

#### **5.3.1.2.4. Corrélation entre actifs financiers**

Il existe une dépendance entre les trois actifs à modéliser qui sera représentée au moyen des coefficients de corrélations, donnés par AXA Investment Managers. On note que si le fonds est investi dans plusieurs actifs corrélés entre eux, son rendement sera moins volatile. Ces éléments sont indispensables dans la modélisation des actifs.

### **5.3.1.3. Modélisation des actifs**

#### **5.3.1.3.1. Méthode de Monte-Carlo**

La méthode de Monte-Carlo permet de calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires.

En modélisant un certain nombre de variables, comme le cours des actifs, et en simulant un nombre important de tirages aléatoires, la probabilité d'occurrence d'une valeur donnée peut être déterminée. Cette méthode permet d'affecter une distribution de probabilité à une variable donnée.

Afin de mettre en place le produit, nous souhaitons étudier la distribution du capital constitutif tout au long de la phase d'épargne jusqu'à l'échéance.

#### **5.3.1.3.2. Simulation d'une loi multi-normale**

On veut simuler une loi multi-normale afin de générer des scénarios aléatoires prenant en compte les liens entre les actifs.

La loi normale sur  $R^n$  étend la loi normale à un vecteur aléatoire  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  à valeurs dans  $R^n$ .

Elle est caractérisée par deux paramètres : un vecteur  $m$  de moyennes, et une matrice de variance-covariance  $V$  (carrée d'ordre  $n$ ) représentant les corrélations entre les actifs (actions, obligations, monétaire).

Pour simuler une loi multi-normale non dégénérée de paramètres  $m$  et  $V$ , la méthode suivante est utilisée :

Soient :

$T$  un vecteur aléatoire à  $n$  composantes gaussiennes centrées réduites et indépendantes (la loi de  $T$ , multi-normale, a pour moyenne le vecteur nul et pour matrice de variance-covariance la matrice identité).

$L$  la matrice résultant de la factorisation de Cholesky de la matrice de variance covariance entre les actifs  $V$ .

Alors, le vecteur aléatoire  $X = m + LT$  suit la loi multi-normale de moyenne  $m$  et de variance-covariance  $V$ .

Cette procédure permet une implémentation sous SAS des mouvements browniens notés  $B_t$ , intervenants dans le calcul des rendements des trois actifs, et ainsi de prendre en compte leurs dépendances.

### 5.3.1.3.3. Actions

On utilise le processus de Black et Scholes.

Les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

- Le prix de l'action à modéliser  $S_t$  suit un mouvement brownien géométrique tel que :

$$dS_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot dB_t$$

Avec  $B_t$  processus de Wiener (à accroissements indépendants et gaussiens centré réduit)

- $\mu$  constante représentant l'espérance de rentabilité du sous-jacent S
- $\sigma$  constante représentant la volatilité du sous-jacent S
- Absence d'opportunités d'arbitrage
- Le temps est une fonction continue.
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert.
- Pas de coûts de transactions
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant.
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100<sup>e</sup> d'action).
- Dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividendes entre le moment de l'évaluation de l'option et l'échéance de celle-ci.

Lorsque toutes ces hypothèses sont remplies, on parle alors de modèle de Black-Scholes.

#### Définition : processus aléatoire d'ITO

On dit que S est un processus aléatoire d'ITO si :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dB_s$$

$$\text{où } dS = \psi ds + \varphi dB_s$$

avec  $\psi, \varphi$  sont des fonctions aléatoires  $\in M^2$

$B$  mouvement brownien

$$M^2 = \left( E \left( \int_0^t \varphi^2 ds \right) < +\infty, \forall t \right)$$

#### Proposition : Lemme d'ITO

Si S est la solution de l'équation aux dérivées partielles d'une fonction aléatoire d'ITO, alors on a que :

$$\Phi(S_t) = \Phi(S_0) + \int_0^t \Phi'(S_s) \cdot \psi_s ds + \int_0^t \Phi'(S_s) \cdot \varphi_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''(S_s) \cdot \varphi_s^2 ds$$

$$d\Phi = \Phi' \cdot \psi ds + \Phi' \cdot \varphi dB + \frac{1}{2} \Phi'' \cdot \varphi^2 ds$$

où  $\Phi$  est une fonction quelconque

Si on pose  $\psi = \mu.S_t$  et  $\varphi = \sigma.S_t$ , le prix de l'action à modéliser est une intégrale d'ITO car son équation est de la forme  $dS_t = \mu.S_t dt + \sigma.S_t dB_t = \psi dt + \varphi dB_t$ . Le lemme d'ITO peut alors être appliqué. On pose :

$$\Phi(S_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

On a alors que :

$$\Phi'(S_t) = \frac{1}{S_t}$$

$$\Phi''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$$

Par le lemme d'ITO, on a que:

$$d\Phi = \Phi'.\psi ds + \Phi'.\varphi dB + \frac{1}{2}\Phi''.\varphi^2 ds$$

$$d\Phi = \mu ds + \sigma dB - \frac{1}{2}\sigma^2 ds = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds + \sigma dB\right)$$

Le rendement des actions est discrétisé pour l'implémentation, on obtient :

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \dots = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma.(B_t - B_{t-1})\right) - 1$$

Comme  $B_t$  est un processus de Wiener (à accroissements indépendants et gaussiens centré réduit), on a que  $B_t - B_{t-1}$  obéit à une loi normale  $N(0, t - (t-1))$ , soit une  $N(0, 1)$ .

Et comme  $E(\exp(X)) = \exp\left(\frac{Var(X)}{2}\right)$  si  $X$  a une loi normale  $N(0, Var(X))$  par la propriété de fonction caractéristique d'une loi normale.

On a :

$$\begin{cases} E(R) = E\left(\exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \exp(\sigma.X)\right) - 1 = \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) - 1 = \exp(\mu) - 1 \\ Var(R) = \exp(2.\mu) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) \end{cases}$$

On note que **R suit une loi gaussienne**. Cela se vérifie par des tests statistiques comme Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk... (instruction proc univariate, option normal sous SAS).

Les paramètres, estimés avec l'historique du support AXA Europe Action (bruts de frais financiers) sont :

$$\hat{\mu} = \ln(1 + \bar{r}) = 0.0974$$

$$\hat{\sigma} = 0.1726$$

Ainsi, les rendements des actions sont simulés avec l'équation :

$$R_t = \exp\left(0.0974 - \frac{1}{2} \cdot 0.1726^2 + 0.1726 \cdot B_t\right) - 1$$

Où  $B_t$  mouvement brownien simulé afin de prendre en compte les corrélations entre les trois actifs (Cf. « Simulation de loi multi-normale »).

#### 5.3.1.3.4. Obligations

##### Hypothèses

- Les prix des obligations (donc les taux) sur les différentes échéances fluctuent ensemble.
- Les prix des zéros coupons sont fonction d'une seule variable : le taux à très court terme, qui est le seul facteur à l'origine des déformations de la courbe des taux. C'est pourquoi un modèle à un facteur de risque sera utilisé: le modèle de Vasicek.

Le taux à très court terme est donc modélisé sous la forme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a.(b - r_t).dt + \sigma.dBt$$

Où  $r_t$  est le taux court terme en t

$b$  est la moyenne du taux court sur le long

terme

$a$  est la vitesse de retour à la moyenne

$Bt$  est un mouvement brownien

$\sigma$  volatilité instantanée

$a, b, \sigma$  sont des constantes positives

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêts. Les taux n'ont pas de tendance sur période longue, contrairement aux actions.

On note  $\frac{\sigma^2}{2.a}$  la volatilité à long terme telle que toutes les trajectoires de  $r$  vont revenir vers la moyenne à long terme  $b$ , avec une variance à long terme  $\frac{\sigma^2}{2.a}$ . Il apparaît que la volatilité  $\sigma$  et la vitesse de retour à la moyenne  $a$  sont opposées.

Lorsque  $r_t$  est éloigné de  $b$ , l'espérance de variation de  $r_t$  vaut  $a.(b - r_t)$ . Elle est positive si  $r_t < b$ . Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter pour se rapprocher de la moyenne sur le long terme (d'autant plus intensément si  $a$  est grand), et inversement.

On observe aussi la normalité du taux court (tests de normalité du taux  $r$  réalisés avant la modélisation), qui peut donc être négatif avec une probabilité de 50% !

Le cours des actifs est généralement modélisé par des processus continus dans les approches par les équations aux dérivés partielles ou par les martingales. Cependant, l'implémentation informatique du rendement des obligations nécessite une discrétisation du modèle, qui peut être à l'origine de biais non négligeables.

En effet l'estimation des paramètres ne se fait pas à partir du modèle continu mais à partir du processus discrétisé, par la méthode du maximum de vraisemblance par exemple.

##### Discrétisation selon la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une procédure numérique permettant de résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Cette méthode est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles.

On discrétise le temps et on note  $t_n = t_0 + n.\Delta_t$  où  $n=0,1,\dots,N$

Dans notre cas, on a que  $\Delta_t = 1$  car le pas de temps est annuel.

On approche ensuite les valeurs de  $r_{t_n}$  par les valeurs  $r_n$  vérifiant l'équation de récurrence :

$$r_n = r_{n-1} + a.(b - r_{n-1}).\Delta_t + \varepsilon.\Delta_t$$

où  $\varepsilon$  résidu gaussien  $N(0, \sigma^2.\Delta_t)$

Estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance

En développant l'équation obtenue avec la méthode Euler, on a que :

$$r_n = a.b.\Delta_t + r_{n-1}.(1 - a.\Delta_t) + \varepsilon.\Delta_t$$

En notant

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= x_n \\ r_n &= y_n \\ \alpha &= a.b.\Delta_t \\ \beta &= 1 - a.\Delta_t \end{aligned}$$

On obtient la régression linéaire suivante :  $y_n = \alpha + x_n.\beta + \varepsilon.\Delta_t$

On note que  $r_n = y_n$  suit une loi gaussienne car c'est une combinaison linéaire de variable gaussienne. La normalité du rendement  $R$  peut être vérifiée par des tests statistiques comme Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk... (Instruction proc univariate, option normal sous SAS).

De plus, on a que :

$$\begin{cases} E(r_n) = \alpha + \beta.x_n + E(\varepsilon.\Delta_t) = \alpha + \beta.x_n \\ Var(r_n) = Var(\varepsilon.\Delta_t) = \sigma^2.\Delta_t \end{cases}$$

D'où  $y_n$  obéit à une loi normale  $N(\alpha + \beta.x_n ; \sigma^2.\Delta_t)$  et sa densité est :

$$f(y_n) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi.\Delta_t}} . \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y_n - \alpha - \beta.x_n)^2}{\sigma^2.\Delta_t}\right)$$

On a que si la loi des  $y_n$  est une loi continue de densité  $f_\theta$ , la vraisemblance de l'échantillon  $(y_1, \dots, y_N)$  est :

$$L_n(y_1, \dots, y_N ; \theta) = \prod_{i=1}^N f_\theta(y_i)$$

Et la log-vraisemblance de l'échantillon est :

$$\ln(L_n(y_1, \dots, y_N ; \theta)) = -\frac{1}{2.\sigma^2.\Delta_t} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha - \beta.x_i)^2 - \frac{N}{2} \cdot \ln(\sigma^2.2.\pi.\Delta_t)$$

Ainsi, en annulant les dérivées partielles par rapport aux trois paramètres du modèle  $\alpha, \beta, \sigma$ , une estimation par maximum de vraisemblance de ces paramètres est obtenue:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{\beta}, \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \text{ et } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y} + \hat{\beta} \cdot (x_i - \bar{x}))^2}{(N-2) \cdot \Delta_t} \text{ (corrigé pour être sans biais).}$$

Enfin, comme  $\alpha = a \cdot b \cdot \Delta_t$  et  $\beta = 1 - a \cdot \Delta_t$ , on peut déduire les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$ . Les paramètres, estimés avec l'historique du support AXA Euro 7-10 sont :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 1 - \hat{\beta} = 0.99 \\ \hat{b} &= \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}} = 0.056 \\ \hat{\sigma} &= 0.041 \end{aligned}$$

Ainsi les rendements des obligations pour chaque pas  $\Delta_t$  seront simulés avec l'équation :

$$r_t = r_{t-1} + 0.99 \cdot (0.056 - r_{t-1}) \cdot 1 + 0.041 \cdot B_t$$

Où  $B_t$  mouvement brownien simulé afin de prendre en compte les corrélations entre les trois actifs (Cf. « Simulation de loi multi-normale »).

### 5.3.1.3.5. Monétaire

On retient le même modèle pour le monétaire que pour l'obligataire. Les paramètres, estimés avec l'historique du support AXA Court Terme, **bruts de frais financiers**, sont :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 1 - \hat{\beta} = 0.84 \\ \hat{b} &= \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}} = 0.0467 \\ \hat{\sigma} &= 0.0036 \end{aligned}$$

Ainsi, les rendements du monétaire pour chaque pas  $\Delta_t$  seront simulés avec l'équation :

$$r_t = r_{t-1} + 0.84 \cdot (0.0467 - r_{t-1}) \cdot 1 + 0.0036 \cdot B_t$$

Où  $B_t$  mouvement brownien simulé afin de prendre en compte les corrélations entre les trois actifs (Cf. « Simulation de loi multi-normale »).

#### **5.3.1.4. Calcul du capital constitutif**

Après avoir simulé les rendements des trois actifs pour chaque horizon, leur corrélation, et leurs rendements nets de frais financiers ; le capital constitutif l'année  $t$ , noté  $CC_t$  peut être calculé.

##### Frais financiers

Les rendements des actifs sont calculés bruts de frais financiers dans un premiers temps. Ensuite, les rendements nets sont calculés selon la formule :

$$(1 + r_{net_i}) = (1 + r_{brut_i}) \cdot (1 - \text{frais\_financiers}_i)$$

Avec  $i$  = (action, obligation, monétaire)

##### Capital constitutif net de frais article 83

Les frais d'entrée sont fixés à 1% des primes à chaque versement (donc chaque année). Les frais sur encours sont fixés à 0.5% annuels des provisions mathématiques.

$$CC_t = (CC_{t-1} + (1 - 0.01) * \text{prime}_t) * (1 + A_t \cdot R_{At} + O_t \cdot R_{Ot} + M_t \cdot R_{Mt}) * (1 - 0.005)$$

avec  $t=1, \dots, m$   
 $m$  = nombre d'année restant avant la liquidation de la retraite de l'assuré

$\text{prime}_t$  = prime versée par l'assurée au titre de l'article 83 en  $t$ .

$A_t$  = allocation des actions en  $t$

$R_{At}$  = rendement des actions en  $t$

$O_t$  = allocation des obligations en  $t$

$R_{Ot}$  = rendement des obligations en  $t$

$M_t$  = allocation du monétaire en  $t$

$R_{Mt}$  = rendement du monétaire en  $t$

Par hypothèse, si l'assuré quitte l'entreprise avant la liquidation, son capital constitutif reste chez AXA (il ne demande pas le transfert chez l'assureur de sa nouvelle entreprise). Dans ce cas, il ne verse plus de primes à AXA à partir de son départ de l'entreprise mais son capital constitutif continu à capitaliser des intérêts.

## **5.3.2. Fonds en euros**

### **5.3.2.1. Caractéristiques**

#### *Fonds en euros Axa*

**L'Actif Général Retraite** (AGR) est le Fonds Général du groupe AXA en France dédié exclusivement aux engagements de retraite collective gérés en euros. Ce fonds est piloté par la direction des investissements.

#### *Distribution des produits financiers*

A la différence d'un fonds en unités de compte, un fonds en euros n'a pas de valeur liquidative. La revalorisation des droits des assurés se fait en redistribuant les produits financiers comptablement constatés dans l'année. Les revenus comptables pris en compte dans le résultat annuel sont les suivants:

- coupons et dividendes détachés
- coupons courus
- intérêts courus à la vente - intérêts courus à l'achat
- plus et moins values réalisées (différence entre la valeur de marché et la valeur comptable des actifs du fonds)
- mécanismes de la surcote /décote et de la réserve de capitalisation (ayant pour effet de lisser les rendements obligataires)

Ces produits rapportés à la valeur comptable de l'actif constatée sur l'exercice permettent de déterminer la performance comptable attribuée dans l'année.

*N.B. :* On distingue le fonds en euros des cotisants, et le fonds en euros des rentiers. A la liquidation, tous les contrats même ceux qui étaient en unités de compte en phase d'épargne sont basculés vers le fonds en euros des rentiers.

#### *Stratégie d'investissement*

Ce fonds est un support financier qui peut être utilisé, en phase de constitution comme en phase de rente. Cela permet de disposer d'une durée d'investissement plus longue, qui autorise la détention d'actifs dont le rendement espéré est relativement important (actions, obligations longues). Ce fonds est essentiellement composé d'obligations d'Etat.

### **5.3.2.2. Modélisation**

Par **simplification**, la performance d'un fonds en euros sera modélisée en l'assimilant à un actif monétaire. En effet, un fonds en euros a une volatilité faible comparable à celle du monétaire et un rendement moyen similaire.

Afin de modéliser un fonds en euros, la même macro SAS que pour un fonds en unités de compte sera utilisée, mais en prenant une allocation d'actif différente : 100% monétaire quel que soit l'horizon de placement.

## 5.4. Création d'un outil de tarification

Un outil de tarification a été construit. Une démographie succincte de l'entreprise permet de donner un tarif pour chaque employé puis pour toute l'entreprise. Cet outil est présenté en annexe.

### 5.4.1. Exemple de modélisation du fonds article 83

#### 5.4.1.1. Modélisation d'un fonds en unités de compte

Le fonctionnement de l'outil est illustré par l'exemple d'un assuré « individu type » en gestion évolutive. Ses caractéristiques sont les suivantes :

		Homme
âge	âge	40
	âge de départ de l'entreprise	64
	âge de départ à la retraite	64
salaire	salaire à l'âge d'adhésion	40 000.00
	revalo salaire	2.00%
cotisation	cotisation à l'article 83	3.00%
revalo	revalorisation annuelle des rentes	1.00%
Type de gestion		En euros
		0
Provisionnement	âge de l'assuré à la date de provisionnement	

A 40 ans, « l'individu type » versera la prime suivante:  $40\,000 * 0.03 = 1\,200\text{€}$ . Puis il versera  $40\,000 * 1.02 * 0.03 = 1\,224\text{€}$  à 41 ans, etc...

Pour cet individu, 10 000 scénarios sont générés aléatoirement en modélisant chacun des actifs du fonds (actions, obligations, monétaire) grâce à l'algorithme présenté précédemment. **Le programme SAS est disponible en annexes.**

Ainsi les probabilités d'occurrence de chaque valeur du capital constitutif sont obtenues, ainsi que les statistiques descriptives comme le capital constitutif moyen à chaque horizon. Ces estimations vont permettre de **tarifer le produit en phase d'épargne.**

Ces estimations vont également nous permettre d'évaluer la volatilité du **capital constitutif à échéance**, et de quantifier le risque encouru par l'assureur en cas de réalisation des quantiles « de droite », qui représentent un niveau de prestations plus élevé donc un risque pour l'assureur.

Toutefois, cette modélisation n'intervient pas dans la tarification de la garantie en phase de rente, car nous avons décidé de tarifier cette garantie qu'une fois le capital constitutif connu (à la liquidation), afin d'éliminer un risque financier.

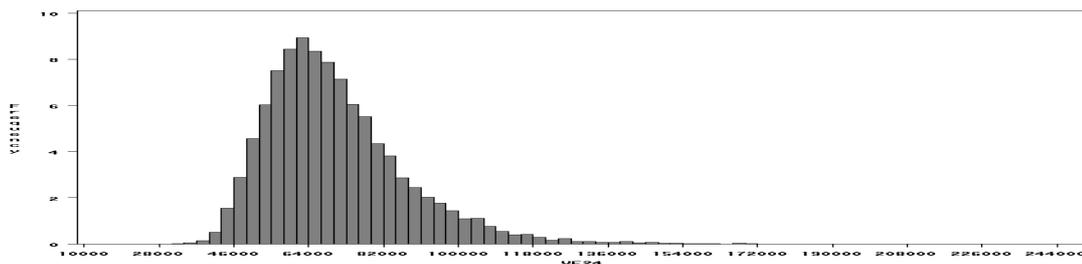
Le montant du capital constitutif moyen pour chaque horizon de placement est estimé et permet de tarifier la garantie en phase de constitution.



L'horizon de placement 23 correspond à un assuré âgé de 40 pour l'exemple.

Histogramme de la répartition du capital constitutif à échéance

Toujours pour le même individu « type », la distribution du montant du capital constitutif à échéance est la suivante :



Parmi les 10 000 scénarios générés aléatoirement, on constate un étalement à droite.

Statistiques descriptives du capital constitutif à échéance

Moyenne	Volatilité	Minimum	Maximum
70 301.75	166.49	33 113.66	171 413.1

Médian								
VaR99	VaR95	VaR90	VaR75	e	VaR25	VaR10	VaR5	VaR1
123	101	92	78	67	58	52	48	43
452.9	928	385.29	601.38	357.5	602.87	185.67	883.2	613.28

Les **quantiles à 99%, 95%, et 90%** seront enregistrés pour chaque horizon de placement, afin d'étudier les **dérives du tarif en phase de constitution** dans la partie « sensibilité ».

Le montant du capital constitutif moyen sera utilisé, le capital constitutif moyen étant plus élevé que le capital constitutif médian pour chaque horizon.

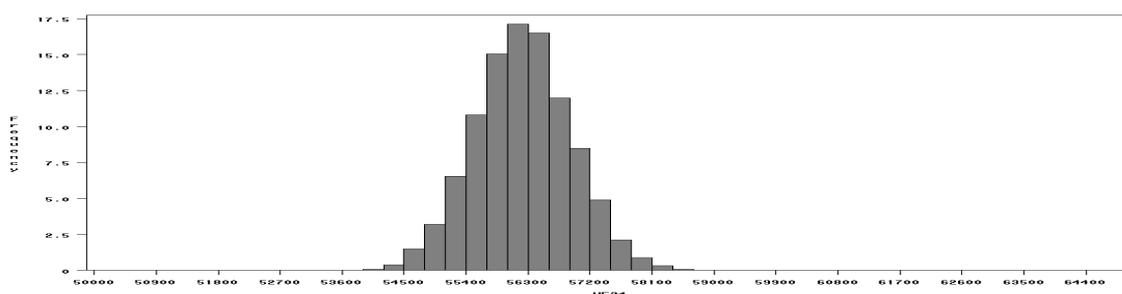
### 5.4.1.2. Modélisation d'un fonds en euros

Pour le même individu « type » que dans le chapitre précédent, l'outil permet d'obtenir la distribution du capital constitutif pour un fonds en euros.

Le montant du capital constitutif moyen pour chaque horizon de placement est estimé et permet de tarifier la garantie en phase de constitution.



*Histogramme de la répartition du capital constitutif à échéance*



La distribution du capital constitutif à échéance avec un fonds en euros est quasi symétrique, à la différence d'un fonds en unités de compte, car la volatilité est plus faible.

Le cout du risque d'un contrat en euros est plus faible qu'un contrat en unités de compte. En effet, l'écart entre le capital constitutif minimum et maximum de l'assuré type représente un peu plus de 5 000€ alors que l'étalement avec un fonds en UC est de plus de 150 000€ !

Le risque avec une gestion en euros est d'avoir des produits financiers plus faibles que le taux minimum garanti à l'assuré. **L'analyse de ce risque nécessite une étude approfondie, qui ne fait pas l'objet d ce mémoire.**

#### Statistiques descriptives

MOY	VOL	MINI	MAXI
56224.86	6.936237	53358.43	58851.4

VaR99	VaR95	VaR90	VaR75	MEDIANE	VaR25	VaR10	VaR5	VaR1
57866.05	57387.53	57125.05	56682.49	56220.18	55760.8	55340.19	55087.4	54631.41

Le capital constitutif à échéance est plus faible avec une gestion en euros qu'avec une gestion évolutive. En effet, à échéance, le montant du capital constitutif moyen est de 56 224.86 €, alors qu'avec une gestion évolutive il vaut 70 301.75 €.

## **5.4.2. Exemple de tarification du produit**

Le tarif qui s'applique à tous les salariés de l'entreprise est exprimé en pourcentage des primes article 83 en phase de constitution, puis en pourcentage des rentes article 83 en phase de restitution. Ce tarif est établi sur la base d'une moyenne arithmétique des tarifs individuels de chaque employé.

### **5.4.2.1. Garantie doublement du capital constitutif**

Nous prenons toujours pour exemple le même assuré « type ». Pour cet homme qui souscrit à 40 ans avec un salaire de 40 000€ et qui liquide sa retraite à 64 ans, la prime du doublement du capital constitutif en phase de constitution avec une gestion évolutive, vaut **0.61%** des primes article 83. **Le détail des étapes de calculs développées par l'outil de tarification est en annexe.**

Les taux d'incidence avant 64 ans étant très faibles, il est logique que le coût de cette garantie soit faible. Si cette garantie était prolongée jusqu'à 120 ans, la prime serait multipliée par 30 !

Toutes choses égales par ailleurs, **une femme paiera la garantie en phase d'épargne moins chère qu'un homme.**

En effet, les taux d'incidence féminin sont moins élevés que les taux d'incidence masculin, le versement d'un capital coûte donc moins cher pour les femmes. Pour une femme qui souscrit à 40ans et qui reste dans l'entreprise jusqu'à 64 ans, la prime du doublement du capital constitutif en phase de constitution avec une gestion évolutive, vaut **0.30%** des primes article 83, soit la moitié du tarif masculin.

L'outil de tarification calcule un tarif individuel puis agrège ces tarifs au niveau de l'entreprise assurée. La prime « doublement capital constitutif » est prélevée en phase de constitution sur chaque prime article 83.

### **5.4.2.2. Garantie doublement rente**

Nous prenons toujours pour exemple le même assuré « type ». Pour un homme qui souscrit à 40 ans avec un salaire de 40 000€ avec une gestion évolutive qui liquide sa retraite à 64 ans, la prime du doublement rente article 83 vaut **43.12%** de la rente moyenne.

Les primes en pourcentages de cette garantie sont les mêmes quelques soient le salaire de l'employé à la souscription et son âge à la souscription. **Seul l'âge à la liquidation fait varier la proportion de cette prime.**

Toutes choses égales par ailleurs, **une femme paiera la garantie en phase de restitution plus cher qu'un homme.**

En effet, le doublement d'une rente coûte beaucoup plus cher pour une femme que pour un homme car les femmes ont une durée de vie en dépendance beaucoup plus élevée que celle des hommes.

Avec les paramètres de l'application précédente, la prime unique de la garantie doublement rente article 83 vaut pour une femme en gestion évolutive qui liquide sa retraite à 64 ans **81.74%** de la rente moyenne, soit le double du tarif masculin.

### Prélèvements

**Lors de la liquidation, la première rente trimestrielle (le terme d'avance) de l'article 83 est attribuée au financement de la garantie doublement rente.** Ainsi, il reste à payer à l'assuré la différence entre la valeur de la prime unique dépendance et le terme d'avance trimestriel.

**Cette différence va ensuite être prélevée en amont sur les rentes article 83 versées à l'assuré et elle pourra être modifiée dans la limite de plus ou moins 10% en cas de changement significatif de la démographie.**

Avec les paramètres de l'application, la prime de la garantie doublement rente en phase de restitution pour « l'individu type » vaut pour un homme 100% du terme d'avance trimestriel article 83 + **1% de chaque rente article 83**, et pour une femme 100% du terme d'avance trimestriel article 83 + **2.52% de chaque rente article 83**.

#### **5.4.2.3. Tarif collectif**

L'outil de tarification calcule les primes à payer pour chaque tête avant de calculer la prime à payer pour tous les salariés de l'entreprise.

Cette prime est égale à la moyenne arithmétique des primes individuelles.

Voici les caractéristiques principales de la démographie utilisée :

Nombre de salariés	% hommes	Salaire moyen	Age moyen	% gestion évolutive
162	59%	27 243 €	44.85	67%

On obtient pour cette démographie le tarif suivant :

<b>Prime moyenne doublement CC,</b> <i>prélevée sur chaque prime</i>	<b>0,40%</b>
---	--------------

<b>Prime moyenne double rente,</b> <i>prélevée sur chaque rente</i>	<b>1,62%</b>
--	--------------

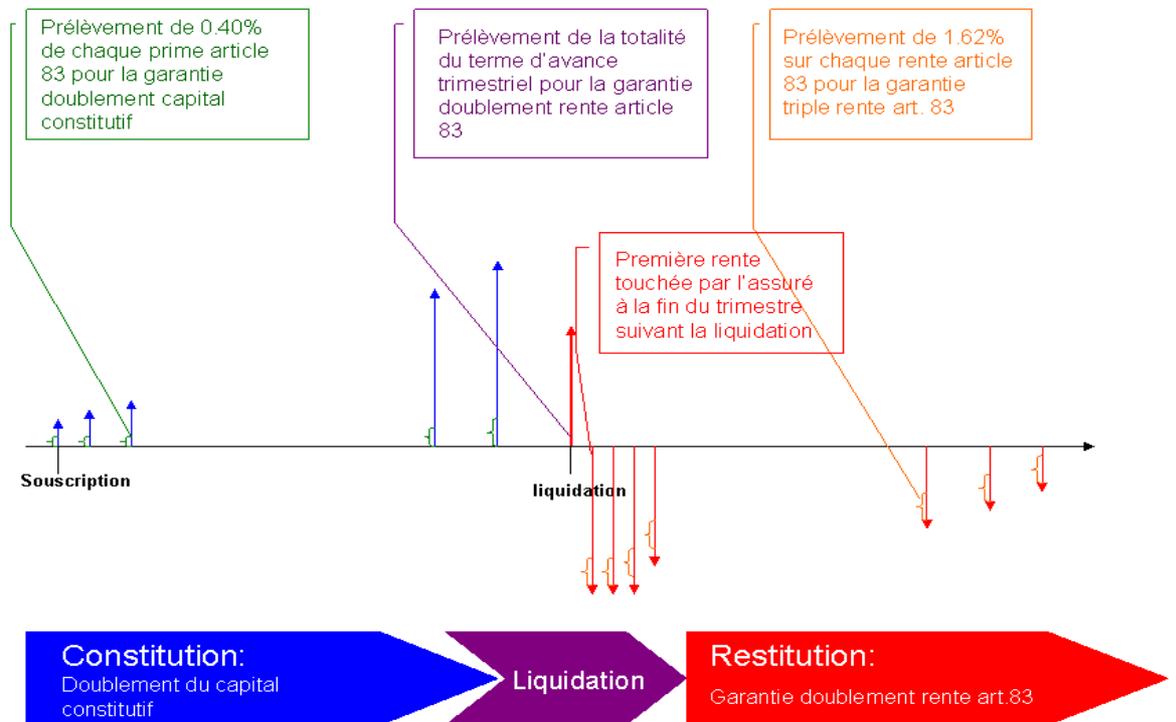
**Avec un tarif en pourcentage unisexe, les hommes paient pour les femmes, et les individus qui ont choisi une gestion eu euros paient pour ceux qui ont choisi une gestion évolutive.**

Le tarif à la souscription est révisable. Chaque année, l'entreprise doit fournir sa démographie et le tarif est adapté.

**Ainsi, tout changement significatif de la démographie entraîne une nouvelle tarification, dans la limite de plus ou moins 10% de la prime annuelle.**

### 5.4.3. Bilan

Le cycle de vie du produit, qui sera commun à tous les salariés de l'entreprise peut être illustré comme ci-dessous :



## 5.5. Provisionnement spécifique au produit

Le provisionnement mis en place est atypique car il faut distinguer les différentes phases de vie du produit, les engagements étant différents au fil du temps.

Les engagements réglementés sont mentionnés dans *l'article R331-1 du code des assurances*.

Les provisions techniques figurent parmi ces engagements réglementés. Ces provisions, calculées sans déduction des réassurances cédées, doivent être suffisantes pour le règlement intégral des engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés, des entreprises réassurées et des bénéficiaires de contrats.

Les provisions techniques correspondant aux opérations d'assurance vie sont citées dans *l'article R331-3 du code des assurances*. On trouve parmi elles les provisions mathématiques.

Les provisions mathématiques sont la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés.

Dans le cas de la dépendance, il faudra constituer une **provision mathématique de valides**, et une **provision mathématique de dépendants**, en plus des provisions habituelles.

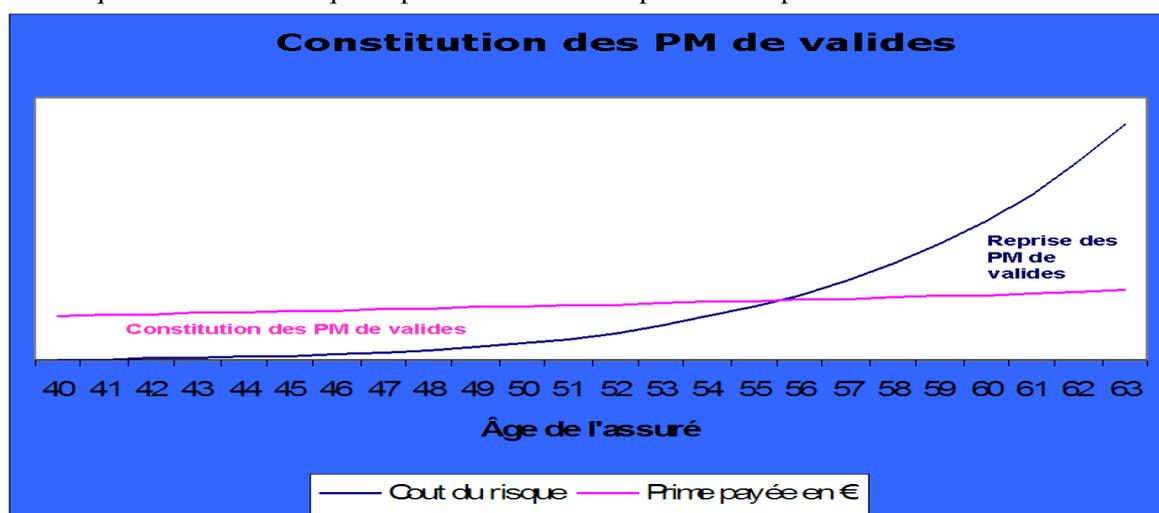
### 5.5.1. Provisions mathématiques de valides

Ces provisions résultent de la différence entre les engagements respectifs de l'assureur et de l'assuré.

En non vie, les provisions mathématiques de valides peuvent être assimilées à des provisions pour risque croissant.

En effet, dans le cas de la dépendance, le risque est une fonction croissante de l'âge. L'assuré paye au départ plus que le coût du risque réel, puis en fin de contrat le coût du risque devient supérieur aux primes encaissées.

Pour lisser le risque, l'assureur doit provisionner certains montants afin de disposer des fonds nécessaires le moment venu. En début de vie du contrat, la différence entre la prime payée et le niveau du risque vient alimenter la provision. En fin de contrat, l'assureur peut puiser dans cette réserve quand le coût du risque dépendance devient supérieur aux primes encaissées.



### 5.5.1.1. Application à la garantie doublement Capital constitutif

Le paiement des primes n'est effectué qu'en phase de constitution, et la garantie n'est valable que durant la phase de constitution. **Les provisions au titre de la garantie doublement capital constitutif ne concernent donc que la phase de constitution.**

#### Hypothèses

L'assuré paye la prime tant qu'il est valide.

Le calcul des provisions mathématiques s'effectue le 31/12 de chaque année.

Le versement des prestations en cas de dépendance se fait en milieu d'année.

#### Engagement de l'assureur

On note :

$CC_x$  le montant du capital constitutif du début de l'année  $x$

$x+m$  l'âge à laquelle l'assuré liquide sa rente

$\Pi_{x+t}$  la prime unique de la garantie doublement capital constitutif à l'âge de provisionnement  $x+t$

Pour un assuré valide, l'engagement de l'assureur correspond au coût de la dépendance probable, soit à la prime unique à l'âge  $x+t$  :

$$\Pi_{x+t} = \sum_{k=0}^{m-1-t} {}_k P_{x+t}^v \cdot i_{x+t+k} \cdot v^{k+0.5} \cdot CC_{x+t+k}$$

#### Engagement de l'assuré

On note :

$\Pi_x$  la prime unique de la garantie « doublement capital constitutif » calculée à l'âge  $x$  de souscription

${}_m \ddot{a}_{x+t}^v = \sum_{k=0}^{m-1} {}_k P_{x+t}^v \cdot v^k$  la rente immédiate limitée dans le temps (car cette garante prend fin à la date  $m$  de la liquidation), à terme d'avance.

L'engagement de l'assuré d'âge  $x+t$  ( $x+t < x+m$ ) à la date de provisionnement ayant souscrit son contrat à l'âge  $x$  correspond à ce qu'il reste à payer à l'assuré à l'âge  $x+t$ . On obtient :

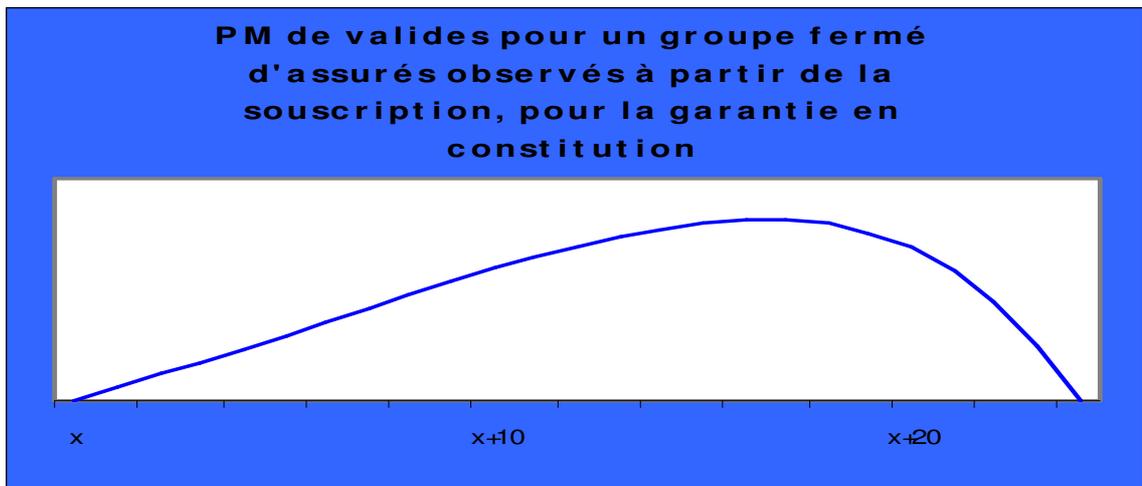
$$\frac{\Pi_x}{{}_m \ddot{a}_x^v} \cdot {}_m \ddot{a}_{x+t}^v$$

#### Provision Mathématiques de valides

On note  $PMv_t(x)$  la provision mathématique de valides en  $x+t$ , pour un assuré ayant souscrit à l'âge  $x$ .

$$PMv_t(x) = \Pi_{x+t} - \frac{\Pi_x}{{}_m \ddot{a}_x^v} \cdot {}_m \ddot{a}_{x+t}^v$$

On observe les provisions mathématiques de valides sur un groupe fermé d'assurés,  $x$  étant l'âge de la souscription,  $x+24$  étant l'âge de liquidation (fixée à 64 ans par hypothèse).



La Provision mathématique de valides en constitution a une forme inhabituelle (cloche asymétrique à droite) mais il faut noter que **la garantie prend fin à la liquidation (64 ans par hypothèse)**, à la différence de la garantie en restitution, qui ne prend fin qu'au décès de l'assuré.

### 5.5.1.2. Application à la garantie doublement rente

Le paiement de cette garantie est effectué en phase de restitution, et la garantie n'est valable qu'une fois la retraite liquidée. **Les provisions au titre de la garantie doublement rente article 83 en cas de dépendance totale ne concernent que la phase de restitution.**

#### Engagement de l'assureur

On note :

$x+m$  l'âge à laquelle l'assuré liquide sa rente

$\Pi_{x+t}$  la prime unique de la garantie doublement rente à l'âge de provisionnement  $x+t > x+m$

${}^R a_{x+k}^{d,H}$  la rente annuelle fractionnée trimestriellement que l'assureur devra verser à l'assuré

en cas de dépendance à l'âge  $x+k$  :  ${}^R a_{x+k}^{d,H} = \sum_{j=1}^{w-x-k} v^j \cdot {}_j p_{x+k}^d \cdot R_{x+k+j}^H$

$R_x^H = \frac{CC_x}{\ddot{a}_x^H}$  le montant de la rente annuelle revalorisée, fractionnée trimestriellement, d'un assuré d'âge  $x$ ,

avec  $CC_x$  le capital constitutif de l'assuré d'âge  $x$ ,

$\ddot{a}_x^H$  la rente annuelle à terme d'avance payable trimestriellement

Pour un assuré valide, l'engagement de l'assureur correspond au coût de la dépendance probable, soit à la prime unique à l'âge de provisionnement  $x+t$  :

$$\Pi_{x+t} = \sum_{k=0}^{w-x-t} {}_k p_{x+t}^v \cdot i_{x+t+k} \cdot v^k \cdot {}^R a_{x+t+k}^{d,H}$$

#### Engagement de l'assuré

On note :

$\Pi_{x+m}$  la prime unique de la garantie « doublement rente » calculée à l'âge  $x+m$  de liquidation

$T_{x+m} = \frac{R_{x+m}^H}{4}$  est le terme d'avance trimestriel qui finance la garantie doublement rente

$a_x^H$  la rente annuelle payable trimestriellement, à terme échu

L'engagement de l'assuré correspond à ce qu'il reste à payer à l'assuré d'âge  $x+t$  lors du provisionnement. On considère que le provisionnement s'effectue après la liquidation, donc après le paiement du terme trimestriel  $T_{x+m}$ . Afin de faciliter la gestion du contrat, l'assuré paiera une prime après la liquidation tant qu'il est en vie, même s'il devient dépendant.

L'assuré a alors l'engagement suivant:

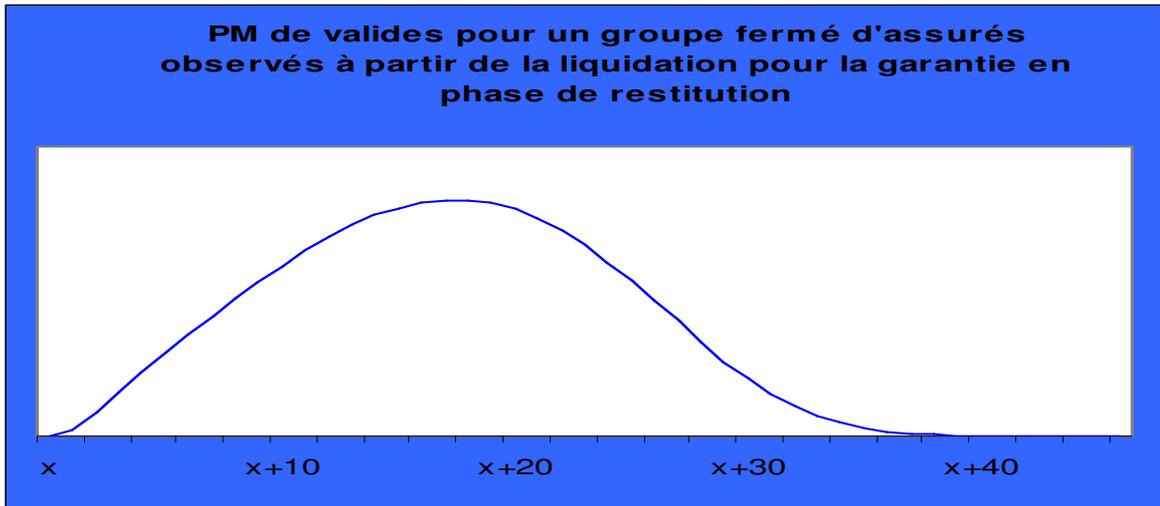
$$\frac{(\Pi_{x+m} - T_{x+m})}{a_{x+m}^H} \cdot a_{x+t}^H$$

### Provision Mathématique de valides

On note  $PMv_t(x)$  la provision mathématique de valides au titre de la garantie doublement rente :

$$PMv_t(x) = \prod_{x+t} - \frac{(\Pi_{x+m} - T_{x+m})}{a_{x+m}^H} \cdot a_{x+t}^H$$

On observe les provisions mathématiques de valides sur un groupe fermé d'assurés (simulés de la même façon que dans la partie « sensibilité »),  $x$  étant l'âge de la liquidation.



### **5.5.2. Provisions mathématiques de dépendants**

En non vie, les provisions mathématiques de dépendants peuvent être assimilées à des provisions pour sinistres à payer.

En effet, si l'on considère la population des dépendants, l'assuré n'a plus d'engagement puisqu'il arrête de payer s'il devient dépendant.

Les provisions mathématiques représentent alors seulement la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur. Ces provisions dépendent donc de l'âge de l'individu à l'entrée en dépendance et de l'ancienneté dans l'état de dépendance.

On note :

$R_x^H = \frac{CC_x}{\ddot{a}_x^H}$  le montant de la rente annuelle payable trimestriellement, revalorisée d'un assuré d'âge  $x$ ,  
 $CC_x$  le capital constitutif de l'assuré d'âge  $x$ , et  $\ddot{a}_x^H$  la rente annuelle payable trimestriellement ( $H=4$ )

#### **5.5.2.1. Application à la garantie doublement capital constitutif**

Le paiement d'un capital ne nécessite pas de provisions mathématiques des dépendants car les assurés déjà dépendants ont déjà reçu toute la prestation.

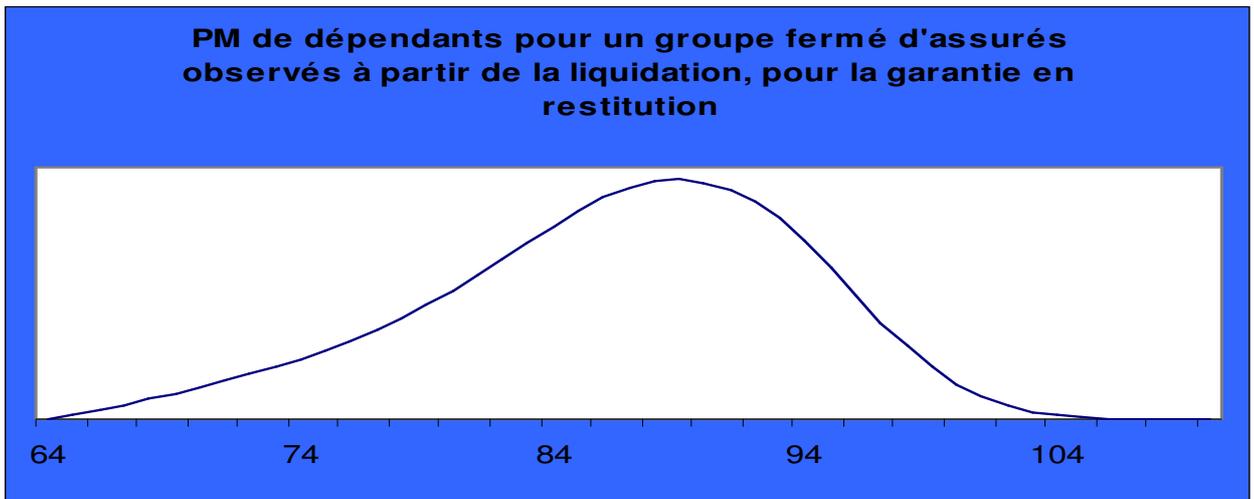
Une fois le capital payé, l'assureur n'a donc plus aucun engagement.

### 5.5.2.2. Application à la garantie doublement rente article 83

Pour chaque assuré d'âge  $x+t$  (avec  $t > m$ ) bénéficiaire d'une rente annuelle de  $R\text{€}$ , versée trimestriellement, à terme échu, la provision mathématique de dépendants est égale à :

$$PMd_t(x) = {}^R a_{x+t}^{d,H} = \sum_{j=1}^{w-x-t} v^j \cdot {}_j p_{x+t}^d \cdot R_{x+t}^H$$

On observe les provisions pour risques croissants sur un groupe fermé d'assurés,  $x$  étant l'âge de la liquidation.



L'âge où l'on trouve le plus de dépendants est entre 87 et 91 ans. Il est donc normal de voir que les engagements de l'assureur sont au plus haut à cette période.

### 5.5.3. Conclusion

D'une façon générale, les pratiques sont très variables d'un assureur à un autre. Le risque dépendance reste mal connu et en constante évolution.

Il n'existe pas de loi statistique établie sur la probabilité de devenir dépendant. En l'absence de table réglementaire, chacun des acteurs du marché est amené à élaborer progressivement ses propres outils qui servent ensuite de support à sa politique de provisionnement.

Dans ce contexte, les autorités de régulation au niveau européen s'efforcent de faire converger les pratiques des entreprises vers ce que l'on pourrait qualifier de niveau de prudence commun. Mais il s'agit d'une démarche à moyen et long termes.

## **5.6. Possibilités de réassurance**

Pour être dans le marché le produit doit offrir une garantie dépendance totale et partielle. La dépendance partielle n'étant pas irréversible comme la dépendance totale, ce risque peut causer d'importantes pertes pour l'assureur en cas de dérive du risque.

Le réassureur est moins averse au risque que l'assureur, qui a besoin d'une grande visibilité sur son résultat. Ainsi, les risques plus volatiles et moins maîtrisés vont être cédés.

Après avoir comparé les avantages et inconvénients des différents types de réassurance, un traité proportionnel en quote-part semble le plus adéquat dans le cas du risque dépendance.

### **5.6.1. Traité en quote-part**

Dans le cadre de contrats de dépendance, un traité de réassurance proportionnel est le plus adapté car il permet le partage du risque entre l'assureur et le réassureur, les lois d'incidence et de mortalités des dépendants étant mal connues.

Dans un traité en quote-part, le partage du risque entre l'assureur et le réassureur se fait selon un certain pourcentage convenu à l'avance et uniforme pour un contrat donné.

Le réassureur prend en charge sur tous les risques une proportion constante de ceux-ci, en contrepartie de quoi il reçoit la même proportion de primes de l'assureur.

Les conditions du contrat et toutes les études techniques s'y rapportant sont traitées par le réassureur.

Toutes les démarches commerciales et de marketing (frais d'acquisition) sont à la charge de l'assureur. En contrepartie, le réassureur verse une commission de réassurance à l'assureur.

Ainsi, l'engagement du réassureur suit celui de l'assureur tout au long de la vie du contrat.

Le traité en quote-part a pour principal avantage d'avoir une gestion assez simple. En cas de dérive du risque, le réassureur partage les pertes avec l'assureur, dans la limite d'une certaine proportion.

Il est donc nécessaire de réassurer le produit si l'assuré choisit une garantie en cas de dépendance partielle. Selon l'accord passé entre l'assureur et le réassureur, les garanties partielle + totale, ou seulement partielle seront cédées, dans les proportions de l'accord, et au tarif de l'accord passé entre l'assureur et le réassureur.

### **5.6.2. Réassurance et provisionnement**

Pour la part qui lui incombe, le réassureur constitue ses provisions mathématiques de valides et des provisions mathématiques de dépendants :

- Par dépôt d'espèces : les actifs de couverture des provisions du réassureur sont gérés directement par l'assureur.
  
- Par nantissement : Le réassureur conserve sa part d'actifs et la gère selon ses propres méthodes. Afin de garantir l'exécution du contrat à l'assureur, le réassureur doit déposer ses titres auprès d'une banque qui se trouvent 'nantis' auprès de la cédante.

Le nantissement est plus avantageux pour le réassureur car il dispose de fonds plus importants et peut les gérer directement en fonction de ses besoins. Cependant, la rémunération proposée par l'assureur est parfois supérieure à la rémunération propre au réassureur.

Pour l'assureur, disposer de titre nanti ou de dépôt d'espèces n'aboutit pas à la même gestion. Dans le cas de dépôt d'espèces, l'assureur a un engagement envers le réassureur, il choisira donc une gestion des actifs sécuritaire. Dans le cas de titres nantis, le réassureur doit gérer ses fonds lui-même et a un souci de rentabilité.

## **6. Avantages et limites du produit**

## **6.1. Etude de sensibilité du tarif**

Grâce à l'outil de tarification mis en place, les paramètres du produit peuvent être modifiés aisément ce qui permet d'étudier la sensibilité du tarif aux variations de ces paramètres.

Dans le cas où les paramètres feraient baisser les tarifs, l'assureur réalisera un bénéfice qu'il pourra redistribuer, il n'y aura pas d'impact négatif.

Cependant, dans le cas où les paramètres feraient augmenter les tarifs, l'assureur devra réajuster son tarif, en respectant la contrainte fixée lors de la création du produit : un réajustement annuel et dans la limite d'une augmentation de 10% du tarif précédent. L'assureur pourrait être en situation de perte dans ce cas.

Il faut donc étudier l'impact des scénarios susceptibles de faire augmenter le tarif du produit mis en place dans une trop grande mesure.

### **6.1.1. Hypothèses du modèle**

#### **6.1.1.1. Hypothèses démographiques**

##### *Mortalité de la population*

L'assureur peut être amené à supporter le risque d'une population d'une longévité supérieure à celle estimée dans la tarification.

De plus dans le cadre de la dépendance l'assureur est confronté à l'évaluation de la mortalité des valides et des dépendants. Par conséquent, des scénarios prévoyant une augmentation de la longévité de la population générale, des valides, ou de la population des dépendants doivent être testés.

##### *Loi d'incidence*

La loi d'incidence devrait être un des facteurs les plus déterminants sur le niveau du tarif, car une augmentation de la loi d'incidence, tous facteurs égaux par ailleurs, est synonyme d'une augmentation du nombre de prestations à payer.

Du fait du caractère exponentiel du taux d'accroissement de la loi d'incidence, il faut être prudent pour le choix du scénario testé et vérifier que les taux d'entrée en dépendance aux grands âges restent plausibles.

### **6.1.1.2.Hypothèses financières**

#### Taux technique

Le taux technique a beaucoup d'influence sur le tarif. Il conditionne le montant des primes, des rentes, mais aussi des résultats futurs.

Le taux technique ajouté d'une marge ne doit pas être inférieur aux produits financiers réalisés par l'assureur afin de ne pas engendrer de pertes sur le résultat de l'assureur.

Heureusement, ce paramètre n'est pas très fluctuant.

En effet, un assureur employant un taux technique supérieur à celui utilisé par ses confrères ne restera pas longtemps compétitif car ces tarifs seront plus bas mais il aura du mal à réaliser des bénéfices financiers.

A l'inverse, un assureur employant un taux technique faible sera en mesure de réaliser des bénéfices mais ses tarifs vont être beaucoup plus chers.

L'ensemble des assureurs utilisent donc un taux technique raisonnable, fixé par la demande du marché et par un souci d'impératif technique.

#### Revalorisation de la rente

La revalorisation des prestations ne sera pas garantie contractuellement car elle résultera de plusieurs paramètres comme : l'évolution des produits financiers dans le temps, l'évolution les taux d'actualisation réglementaires dans le temps, les résultats du produit...

L'assureur décide des variations de ce paramètre, la sensibilité du tarif au taux de revalorisation de la rente ne sera donc pas étudiée.

#### Produits financiers

La garantie en phase de restitution est volontairement financée entièrement en phase de restitution, de façon à ce que les potentielles dérives des produits financiers n'aient pas d'impact sur le tarif.

Les performances financières influent donc uniquement sur le tarif en phase de constitution. Le coût de la garantie en constitution étant faible (par rapport au coût en restitution), **les dérives des produits financiers auront finalement peu d'impact sur notre produit.**

A titre d'exemple, une augmentation tarifaire de 10% suffirait à compenser une augmentation de 20% des produits financiers en phase de constitution (le tarif d'un homme en gestion évolutive passe de 0.61% à 0.70%).

### **6.1.1.3.Hypothèses commerciales**

Les frais du contrat (administration de la prime, frais d'acquisition...) influencent la valeur de la prime et des provisions.

Les frais de notre produit sont ajoutés par une autre entité d'AXA, nous n'en tiendrons pas compte.

### **6.1.2. Scénario central**

Le scénario « central » représente le tarif établi avec les lois et les paramètres en l'état.

Les paramètres choisis par l'assureur dont les sensibilités sont à étudier sont les suivants :

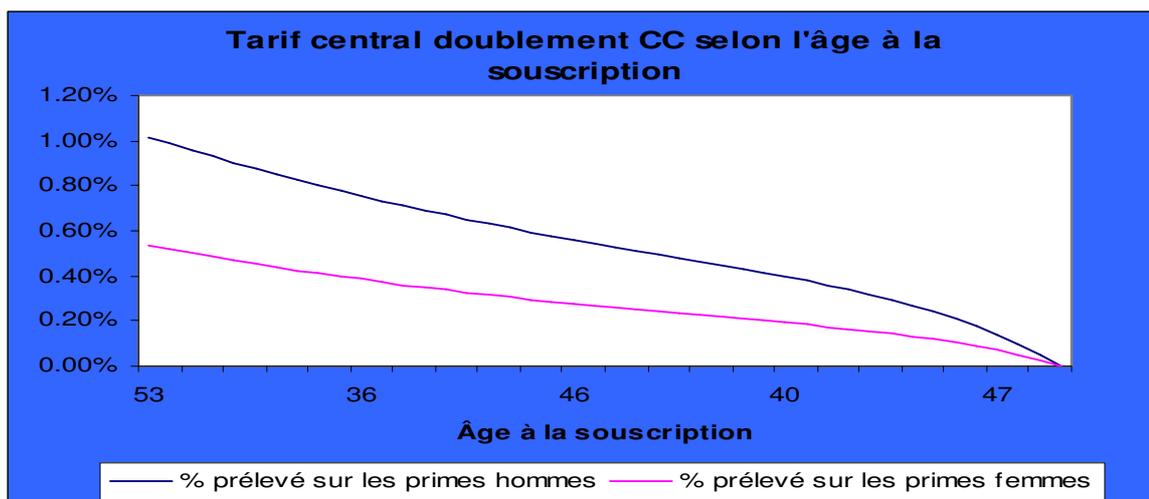
- la loi de mortalité des valides (les cotisants) : loi AXA
- la loi de mortalité des dépendants : loi AXA
- la loi d'incidence : loi AXA
- le taux technique : 2.25%
- les produits financiers réalisés par le fonds article 83

#### **6.1.2.1.Sensibilité en phase de constitution**

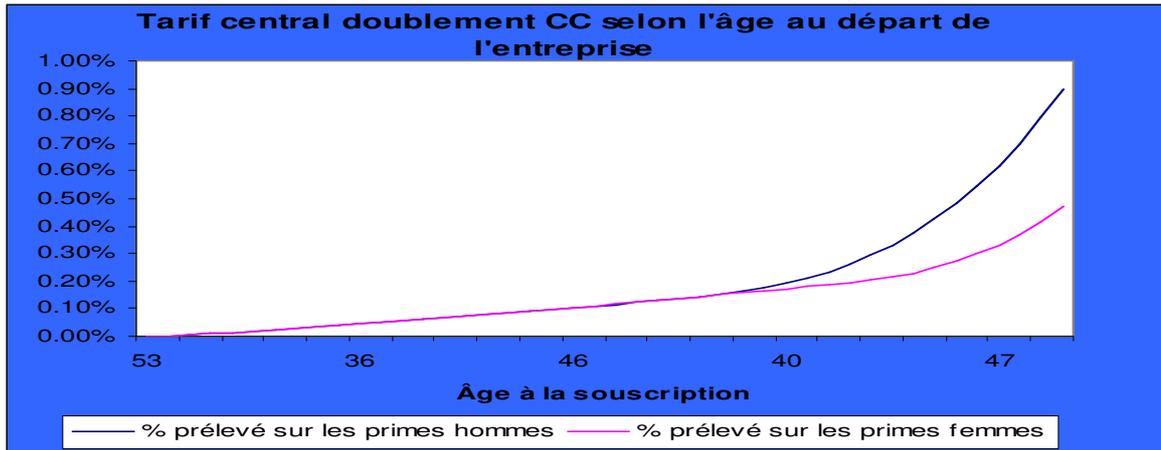
En phase de constitution, seule la garantie doublement Capital constitutif s'applique. Le tarif varie selon l'âge de l'assuré à la souscription et l'âge de départ de l'entreprise, à partir duquel cette garantie n'est plus valable.

Pour illustrer ceci, on a supposé que l'assuré entre dans l'entreprise à 20 ans, et la quitte à 64 ans.

Un assuré qui entre dans l'entreprise à l'âge de 20 ans se verra prélever des primes différentes selon l'âge de son arrivée dans l'entreprise (la date de souscription) ainsi que selon l'âge de son départ de l'entreprise (la date de fin de sa garantie).



Plus l'assuré souscrit tard plus de coût de la garantie « doublement capital constitutif » est faible, ce qui est logique car son temps de présence dans l'entreprise est raccourci, donc les prestations probables à servir sont plus faibles.

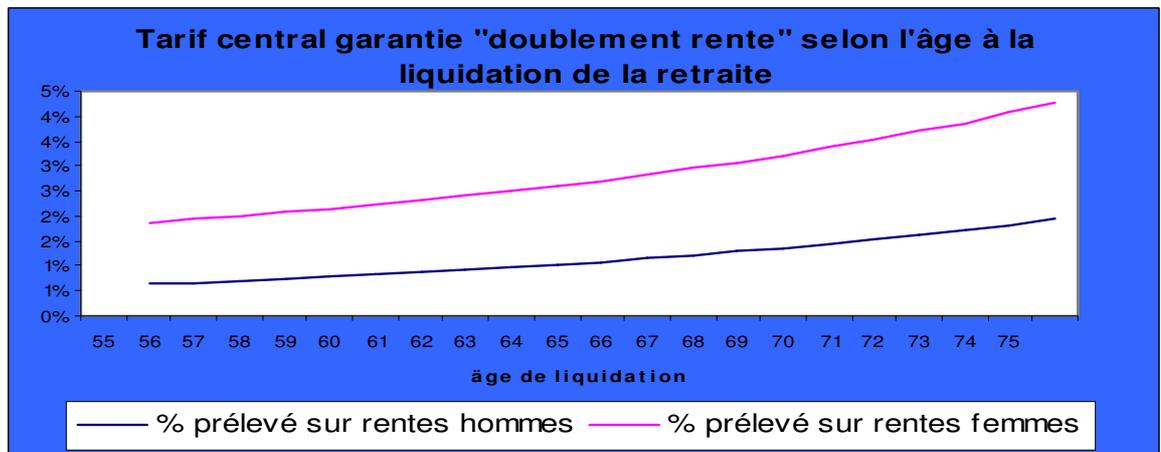


De même, plus le temps de présence de l'assuré dans l'entreprise est élevé, plus le coût de sa garantie est important.

Les coûts de cette garantie sont faibles comparés aux primes article 83 payées par l'assuré, et encore plus faibles comparés au salaire de l'assuré.

#### 6.1.2.2. Sensibilité en phase de restitution

En phase de restitution, seule la garantie doublement rente s'applique. Le tarif en pourcentage étant proportionnel au capital constitué, **il varie seulement selon l'âge de l'assuré au départ en retraite** car les probabilités relatives aux hypothèses démographiques sont calculées à ce moment là.



Plus l'assuré liquide sa retraite jeune, plus la prime à payer est faible. En effet, l'assuré aura une probabilité de devenir dépendant plus faible, des primes étalées sur une période plus longue.

De plus, le capital constitutif d'un assuré qui liquide sa retraite jeune est moins élevé que celui d'un assuré qui cotise et qui investit son capital plus longtemps.

L'évolution du tarif à ces paramètres est donc sans surprise et l'hypothèse retenue de fixer l'âge de la liquidation à 64 ans paraît approprié.

### 6.1.3. Scénarios entraînant une augmentation des tarifs établis

On souhaite étudier l'impact des distorsions des lois d'incidence, de mortalité des valides, de mortalité des dépendants sur les effectifs des populations de valides et de dépendants.

Pour ce faire, les scénarios suivants vont être étudiés :

- Augmentation des taux d'incidence +20%
- Baisse de la mortalité des dépendants de 20%
- Baisse de la mortalité des valides de 20%

Afin d'illustrer les chocs des différents scénarios, regardons dans un premier temps leur impact sur l'espérance de vie de la population des vivants :

<b>Espérance de vie des valides par âge</b>	<b>64</b>	<b>70</b>	<b>75</b>	<b>80</b>	<b>85</b>	<b>90</b>	<b>95</b>	<b>100</b>
Scénario central	20.51	15.91	12.42	9.30	6.72	4.78	3.48	2.64
Augmentation de l'incidence de 20%	20.17	15.58	12.10	9.00	6.45	4.53	3.28	2.47

<b>Espérance de vie des dépendants par âge</b>	<b>64</b>	<b>70</b>	<b>75</b>	<b>80</b>	<b>85</b>	<b>90</b>	<b>95</b>	<b>100</b>
Scénario central	4.86	4.58	4.28	3.98	3.48	2.93	2.61	2.33
Baisse de la mortalité des dépendants de 20%	5.70	5.36	4.98	4.60	3.98	3.29	2.88	2.54

L'espérance de vie d'un individu de sexe masculin âgé de 64 ans est de 20.51 ans s'il est valide, et de 4.86 s'il est dépendant.

**La baisse de la mortalité des dépendants n'influe pas sur l'espérance de vie des valides, comme l'augmentation de l'incidence n'influe pas sur l'espérance de vie des dépendants.**

Le scénario de baisse de mortalité des valides fait augmenter l'espérance de vie des valides mais n'influe pas sur l'espérance de vie des dépendants.

Afin d'illustrer l'impact de ces scénarios sur la population, nous étudierons les effectifs des populations de valides et de dépendants.

Pour ce faire, il faut dans un premier temps projeter la population.

### 6.1.3.1. Projection de la population

Soient :

$\hat{l}_{x+k}^v$  la population projeté des valides à l'âge  $x+k$

$\hat{l}_{x+k}^d$  la population projeté des dépendants en  $x+k$

${}_l p_{x+j}^d$  la probabilité pour un individu entré en dépendance à l'âge  $x+j$  de vivre  $l$  années

${}_l p_x^v$  la probabilité pour un valide d'âge  $x$  de vivre  $l$  années

#### Population des valides

Les valides en  $k+1$  sont les valides présents en  $k$  qui sont toujours valides et qui sont restés vivants en  $k+1$  :

$$\hat{l}_{x+k+1}^v = \hat{l}_{x+k}^v * {}_1 p_{x+k}^v$$

avec  $\hat{l}_0^v =$  nombre de valide en  $k=0$

$${}_1 p_{x+k}^v = 1 - {}_1 q_{x+k}^v - i_{x+k}$$

#### Population des dépendants

A chaque nouvelle période  $k+1$ , la population des dépendants se décompose en deux groupes :

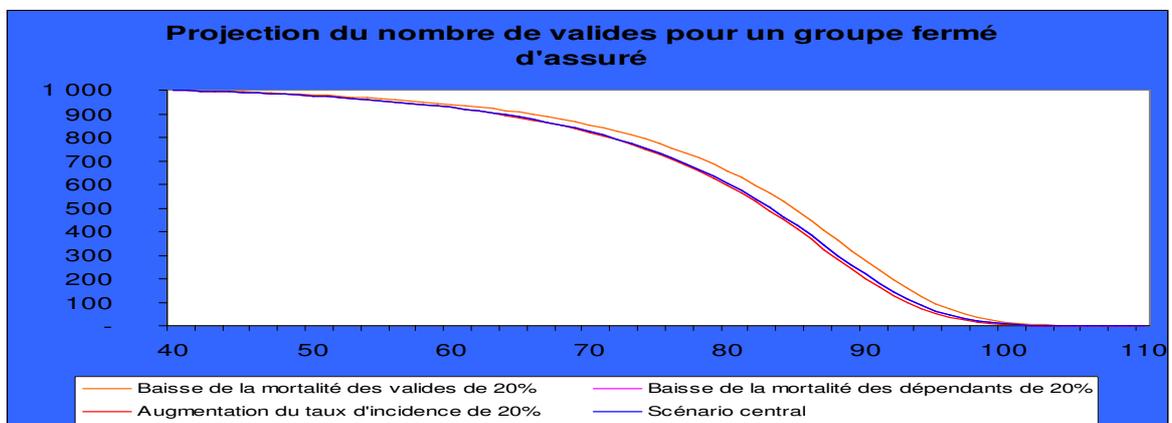
- la population des nouveaux dépendants, dont l'effectif est  $\hat{l}_{x+k}^v \cdot i_{x+k}$
- la population des individus entrés en dépendance à l'âge  $x+j$  ( $k > j$ ) et qui ont survécus jusqu'en  $k+1$ , leur effectif est  $\hat{l}_{x+j}^v \cdot i_{x+j \cdot (k-j)} P_{(x+j)}^d$

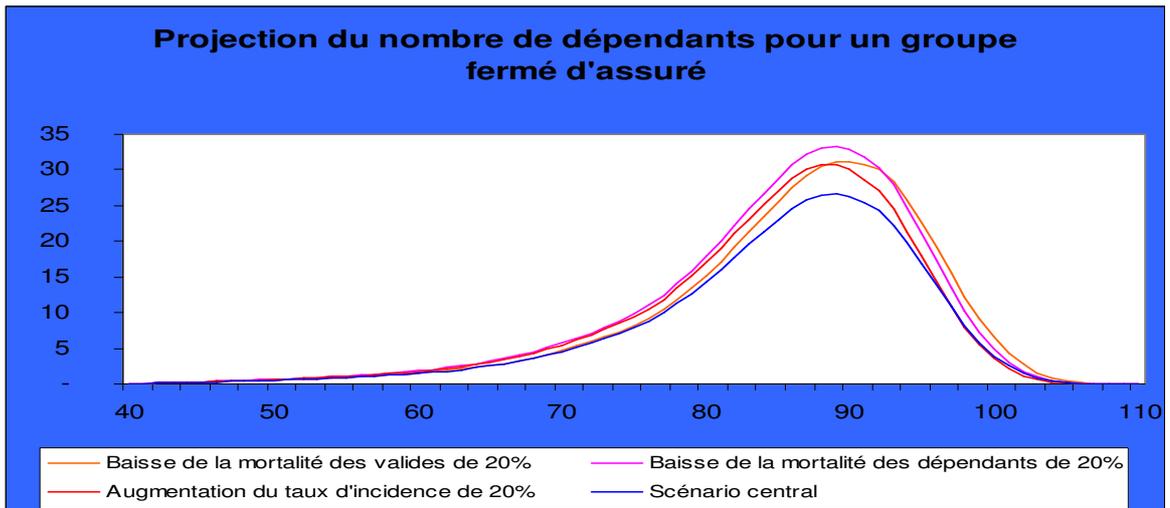
A la date  $k$ , l'effectif de la population des dépendants est donc :

$$\hat{l}_{x+k+1}^d = \sum_{j=0}^k \left( \hat{l}_{x+j}^v \cdot i_{x+j \cdot (k-j)} P_{(x+j)}^d \right)$$

#### Application

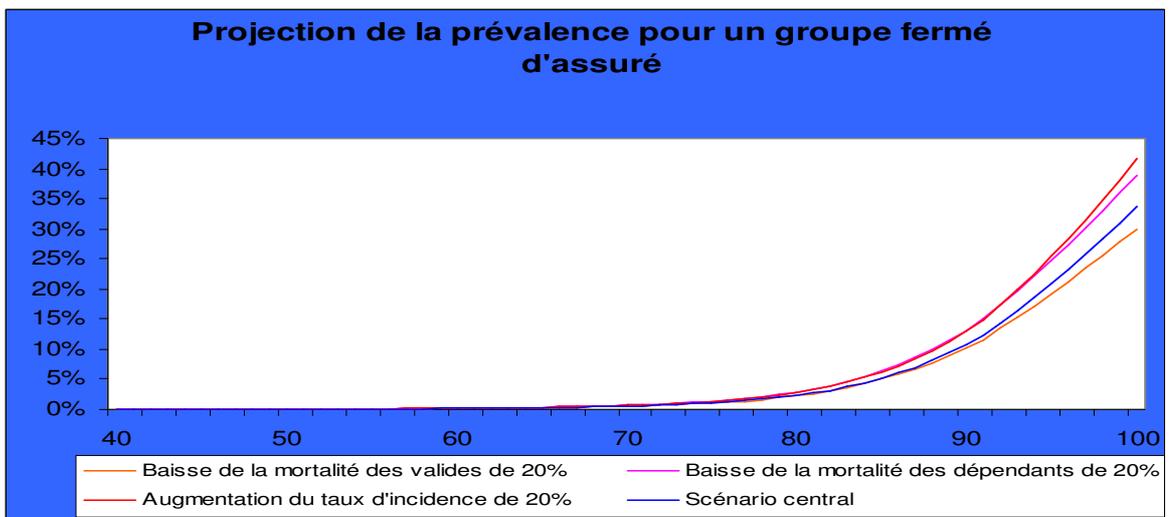
Pour un portefeuille fermé de  $\hat{l}_0^v = 1000$  assurés hommes âgés de 40 ans à la souscription, qui évoluent en groupe fermé jusqu'à 120 ans, les projections sont les suivantes :





Selon l'INSEE, une augmentation de 60% du nombre d'individus dépendants est attendue d'ici 2040. Cette augmentation se retrouve bien dans le pire de nos scénarios (baisse de la mortalité des dépendants de 20%).

En rapportant le nombre de dépendants au nombre de vivants, nous obtenons le stock de dépendants pour un âge donné, appelé aussi la **prévalence**.



C'est sous le scénario d'augmentation des taux d'incidence de 20% que la prévalence est la proportion d'individus dépendants parmi les vivants est la plus importante.

### 6.1.3.2. Sensibilité en phase d'épargne

Les scénarios choisis modifient le tarif du produit en phase de constitution. Il faut étudier dans quelle mesure le tarif va être modifié, afin de mesurer la perte potentielle encourue par l'assuré.

#### 6.1.3.2.1. Scénario lié aux hypothèses financières

Lors de la modélisation du fonds choisi par l'assuré, nous avons vu que la réalisation des quantiles à **99%, 95%, et 90%** de la distribution du capital constitutif à échéance représentait un risque.

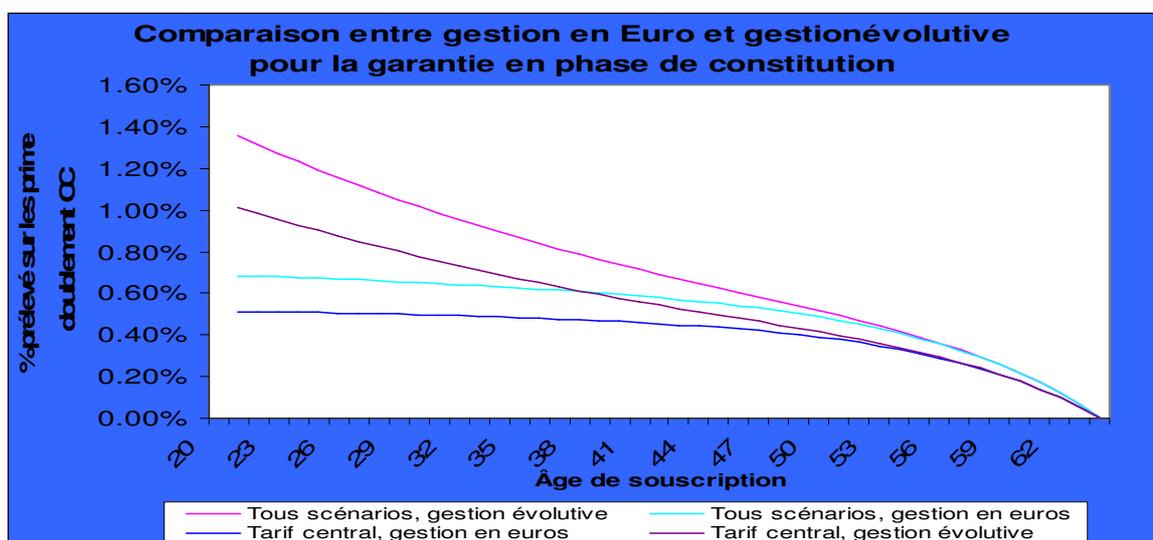
Afin de mesurer ce risque, **les valeurs des quantiles ont été enregistrées pour chaque horizon de placement lors de l'exécution de la macro SAS présentée dans la modélisation des actifs**, puis nous calculons le tarif correspondant à la réalisation du quantile.

Afin d'illustrer ceci nous regardons l'augmentation tarifaire entraînée par la réalisation de chacun des quartiles, par rapport au tarif du scénario central.

Quantiles	75%	90%	95%	99%	Maximum
Augmentation par rapport au tarif basé sur la moyenne	18%	39%	56%	90%	179%

Ces proportions sont obtenues en divisant le nouveau tarif par le tarif calculé avec le capital constitutif moyen, et en soustrayant 100%.

#### Impact de la gestion choisie



L'écart entre les tarifs pour les deux types de gestion est le plus important pour les assurés qui souscrivent jeunes.

En effet aux jeunes âges la gestion évolutive est très dynamique, pour devenir assimilable à une gestion en euros (allocation en actif général de retraite) aux âges élevés.

Le cumul des scénarios entraîne une hausse du tarif central allant jusqu'à 40% pour les jeunes âges de souscription, avec une gestion en euros comme avec une gestion évolutive.

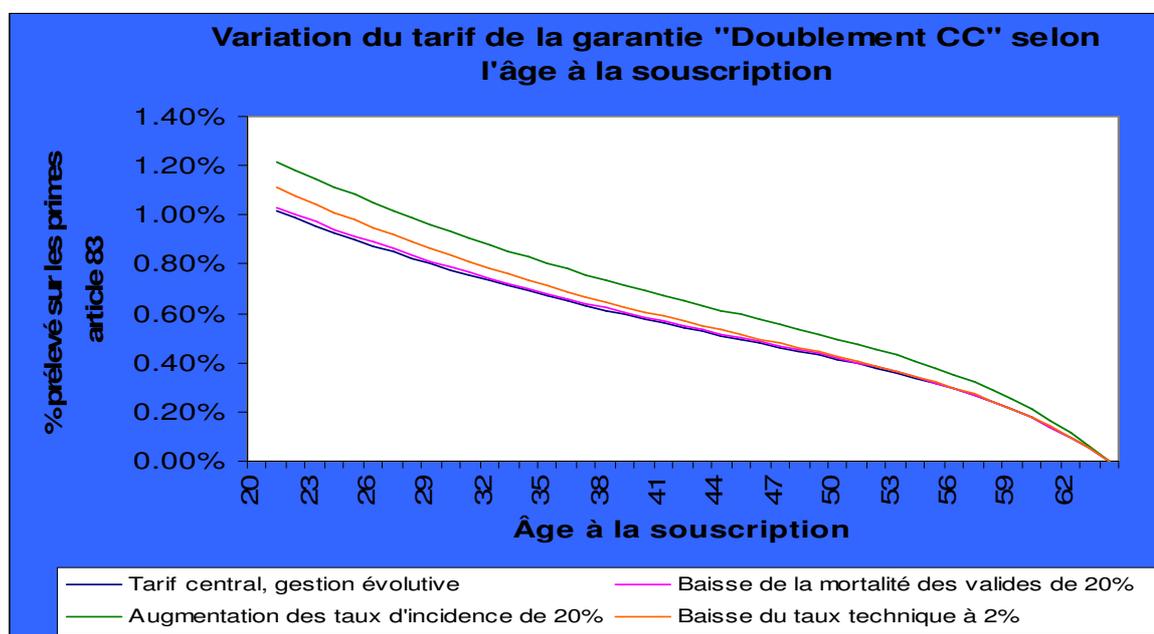
Les pertes entraînées par le cumul des scénarios sont beaucoup plus importantes avec une gestion évolutive qu'avec une gestion en euros, une gestion évolutive offrant un capital constitutif plus élevé donc des prestations probables plus élevées.

De plus, la gestion évolutive présente par nature des rendements beaucoup plus volatiles, le risque est donc moins bien maîtrisé qu'avec une gestion en euros, où l'assureur a une meilleure visibilité.

Il semble donc essentiel d'étudier avec une attention particulière les risques financiers qui peuvent survenir avec une gestion évolutive.

On se place donc dans le cas d'un assuré de sexe masculin, **en gestion évolutive**.

#### 6.1.3.2.2. Scénarios liés aux hypothèses démographiques



Le scénario de baisse de la mortalité des dépendants ne joue pas sur la garantie en phase de constitution, « doublement CC » car c'est un versement de capital, non une rente.

La baisse de la mortalité des valides est le scénario qui influe le moins sur le tarif.

L'augmentation des taux d'incidence a beaucoup plus d'influence sur le tarif que la baisse de mortalité des valides, car le taux d'incidence est directement lié au calcul de la prime, alors que la mortalité des valides intervient dans la mortalité générale et dans les taux d'incidence.

La baisse du taux technique impacte l'actualisation et fait logiquement augmenter les tarifs.

On remarque également que plus l'âge à la souscription est élevé, plus les différences s'estompent entre les différents scénarios, ce qui est logique car la garantie « doublement CC » prend fin à la liquidation (fixé à 64 ans par hypothèse).

La plus forte augmentation de tarif est d'environ 20%. En augmentant ses tarifs de 10% chaque année il faudrait 2 ans à l'assureur pour réajuster les tarifs au coût du risque.

### 6.1.3.2.3. Impact du cumul des scénarios sur un tarif collectif

En cumulant tout les scénarios:

- Baisse de la mortalité des valides de 20%
- Baisse de la mortalité des dépendants de 20%
- Augmentation des taux d'incidence +20%
- Baisse du taux technique à 2%

Et en calculant le tarif pour une démographie ayant les caractéristiques suivantes :

Nombre de salariés	% hommes	Salaire moyen	Age moyen	% gestion évolutive
162	59%	27 243 €	44.85	67%

Le tarif collectif pour la garantie en constitution est le suivant :

Prime moyenne doublement CC, <i>prélevée sur chaque prime</i>	0.51%
--	-------

Alors qu'avec le scénario central, le tarif est le suivant :

Prime moyenne doublement CC, <i>prélevée sur chaque prime</i>	0.40%
--	-------

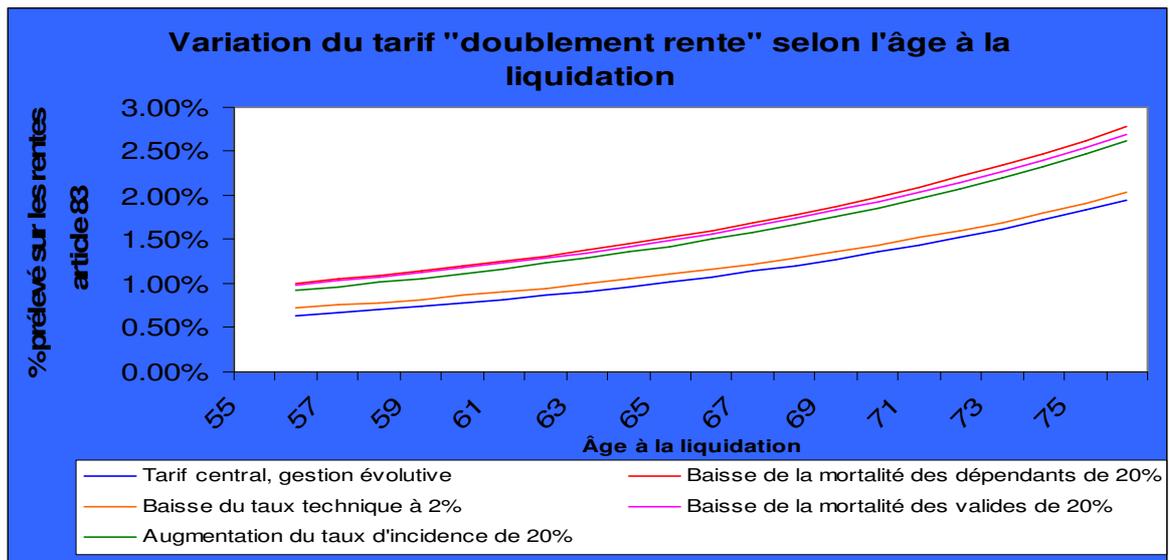
Il faudrait que l'assureur augmente ses tarifs de 10% durant 3 ans pour que cette perte soit compensée:  $0.36\% * 1.1^3 = 0.48\% > 0.46\%$ .

### 6.1.3.3. Sensibilité en phase de restitution

Le tarif en pourcentage est proportionnel au capital constitué, **il varie selon l'âge de l'assuré au départ en retraite** mais n'est pas sensible à l'âge de souscription.

Une augmentation du taux de revalorisation des rentes entraîne une hausse tarifaire importante, mais nous n'étudierons pas ce scénario car l'assureur est maître de ce risque.

Pour un assuré de sexe masculin qui souscrit à 20 ans, en gestion évolutive, les tarifs sont les suivants :



Le scénario qui influe le plus sur le tarif est la baisse de la mortalité des dépendants. En effet, la garantie en restitution est une rente, la baisse de la mortalité des dépendants impliquerait de payer les rentes plus longtemps.

De même pour les valides, une baisse de leur mortalité entraîne une hausse des taux d'incidence, où une hausse de la prévalence, donc une augmentation du tarif.

L'augmentation du taux d'incidence fait varier le tarif de façon importante, car plus l'incidence est élevée plus il y aura de prestations à payer, toutes choses égales par ailleurs.

Enfin, la baisse du taux technique fait sensiblement augmenter le tarif, mais cette augmentation reste modérée.

Plus l'assuré liquide sa retraite jeune, moins le tarif est élevé, car le capital constitutif est plus faible, donc la rente de l'assuré à doubler en cas de dépendance sera également plus faible.

La plus forte augmentation de tarif est de l'ordre de 45% ; elle correspond à un assuré qui liquide sa retraite tard, dans le cas d'une baisse de la mortalité des dépendants. Il faudrait un peu moins de 4 ans à l'assureur pour pallier à ce coût supplémentaire en augmentant ses tarifs de 10% chaque année.

## **6.2. Mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite**

Nous souhaiterions étudier la mutualisation du risque dépendance avec le risque retraite.

Une fois les comptes de résultats de la retraite et de la garantie dépendance établis, notre produit présentera l'avantage de compenser les gains/pertes techniques de la dépendance par ceux de la retraite.

Afin de pouvoir revaloriser les rentes article 83, **une limite de prélèvement dans les bénéfices de la retraite de 0.50% par an est fixée.**

On distingue parmi les comptes de résultats les comptes de résultat techniques et les comptes de résultat financiers.

La partie concernant les frais n'est pas l'objet du mémoire, le compte de résultat de gestion ne sera donc pas abordé.

De plus, on considère seulement la population des rentiers, car c'est en restitution que les engagements de l'assureur sont le plus importants.

L'objet de cette partie est d'étudier dans quelle mesure les pertes du compte technique lié à la garantie dépendance peuvent être mutualisées par un résultat positif du compte de participation aux bénéfices de l'ensemble de la population.

### **6.2.1. Compte de résultat technique**

Le compte technique a pour but d'analyser la sinistralité afférente à un exercice. En cas de variation importante du nombre de dépendants, les prestations à servir vont augmenter : c'est un risque technique.

On distingue deux types de dérive technique. La première est liée à l'estimation des lois par l'écart existant entre la loi théorique et la loi observée. La seconde est liée à la non application de la loi des grands nombres dans le cas de la dépendance, vus les faibles effectifs observés.

#### **6.2.1.1. Description**

##### Charges

- PM à la fermeture
- Arrérages
- Frais

##### Produits

- PM à l'ouverture
- Primes
- Intérêts techniques
- Réincorporation de participation aux bénéfices

En l'absence de déviation de la population, le solde du compte de résultat technique qui est égal à la différence entre les produits et les charges sera nul.

Le solde sera négatif si les charges sont plus importantes que les produits, donc si les PM (engagement de l'assureur en restitution) et les arrérages sont plus importants que les produits reçus.

En cas de baisse de la mortalité des assurés, ou en cas d'augmentation de l'incidence sans compensation par des produits, le solde serait négatif.

### 6.2.1.2. Comptes de charges

#### 6.2.1.2.1. PM à la fermeture

On considère la population des rentiers. Parmi eux, nous distinguons trois sous-groupes :

- les dépendants
- les valides
- la population des vivants (rentiers de l'article 83)

Les **PM de fin** sont le résultat de la **somme des PM d'ouverture, et des produits financiers de l'exercice minoré de la marge de l'assureur.**

Soient :

$x$  = âge de la liquidation

$${}^R a_x^H = \sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot {}_k p_x \cdot R_{x+k}^H$$

$l_x^d$  le nombre d'individus dépendants projetés d'âge  $x$

$l_x$  le nombre d'individus vivants projetés (qu'ils soient valides et dépendants) d'âge  $x$

$R_x^H = \frac{CC_x}{\ddot{a}_x^H}$  le montant de la rente annuelle fractionnée trimestriellement et revalorisée

avec  $CC_x$  le capital constitutif d'un assuré d'âge  $x$

$\ddot{a}_x^H$  la rente annuelle payable trimestriellement ( $H=4$ )

#### Population des vivants

Concernant l'article 83, les retraités ont déjà payé leurs primes à l'assureur lors de la phase d'épargne. Seul l'assureur a des engagements en phase de restitution.

On note  $PMg_t^F(x)$  la provision mathématique au 31/12 des rentiers pour la population générale, à l'âge  $x+t$ .

On a alors :

$$PMg_t^F(x) = l_{x+t+1} \cdot {}^R a_{x+t+1}^H$$

#### Population des dépendants

Chaque dépendant d'âge  $x+t$  est bénéficiaire d'une rente annuelle de  $R\text{€}$ , revalorisée annuellement et versée trimestriellement.

La PM de dépendants au 31/12 pour la population des dépendants à l'âge  $x+t$ , est notée  $PMd_t^F(x)$  et vaut :

$$PMd_t^F(x) = {}^R a_{x+t+1}^{d,H} \cdot l_{x+t+1}^d$$

### Population des valides

Les valides paient pour la garantie dépendance. La PM des valides au 31/12 vaut :

$$PMv_t^F(x) = \left[ \prod_{x+t+1} - \frac{(\Pi_x - T_x)}{a_x^H} \cdot a_{x+t+1}^H \right] J_{x+t+1}^v$$

#### **6.2.1.2.2. Arrérages versés**

Soient :

$Ag_{x+t}$  les prestations versées par l'assureur à un assuré vivant d'âge  $x+t$ ,

$Ad_{x+t}$  les prestations versées par l'assureur à un assuré dépendants.

Population des vivants :

$$Ag_{x+t} = R_{x+t}^H \cdot J_{x+t}$$

Population des dépendants :

$$Ad_{x+t} = R_{x+t}^H \cdot J_{x+t}^d$$

### **6.2.1.3. Comptes de produits**

#### **6.2.1.3.1. PM à l'ouverture**

Soient :

Les provisions mathématiques au 01/01 de l'année  $x+t$ , notées  $PMg_t^O(x)$  pour la population générale.

Les provisions mathématiques au 01/01 de l'année  $x+t$ , notées  $PMd_t^O(x)$  pour la population des dépendants.

Ces provisions représentent les provisions mathématiques au 31/12 de l'année  $x+t-1$ , c'est pourquoi c'est un poste de produit.

De la même façon que précédemment, on calcule les PM à l'ouverture:

- population générale :  $PMg_t^O(x) = l_{x+t} \cdot {}^R a_{x+t}^H$
- population des dépendants :  $PMd_t^O(x) = {}^R a_{x+t}^{d,H} \cdot l_{x+t}^d$
- Population des valides :  $PMv_t^O(x) = \left[ \Pi_{x+t} - \frac{(\Pi_x - T_x)}{a_x^H} \cdot a_{x+t}^H \right] \cdot l_{x+t}^v$

### 6.2.1.3.2. Primes

Soient :

$T_x = \frac{R_x^H}{H}$  le terme d'avance trimestriel calculé à l'âge  $x$  de liquidation, qui finance la garantie offerte en restitution

$\Pi_x^H$  la prime unique de la garantie offerte en restitution, calculée à l'âge  $x$

$a_x^{v,H}$  la rente annuelle payable trimestriellement, à terme échu

$P_x$  la prime reçue par l'assureur pour tous les assurés d'âge  $x$

Les primes reçues par l'assureur en phase de restitution sont les primes prélevées sur les rentes des vivants au titre de la garantie dépendance.

Le trimestre de liquidation est différent des trimestres suivants car l'assureur reçoit le terme d'avance de l'article 83 de tout les assurés, en financement de leur garantie dépendance.

En  $x$  (année de la liquidation), les primes reçues par l'assureur valent :  $P_x = T_x \cdot l_x^v$

Les trimestres suivants, les primes reçues valent :  $P_{x+t} = \frac{(\Pi_x^H - T_x)}{a_x^{v,H}} \cdot l_{x+t}^v$

### 6.2.1.3.3. Intérêts techniques

Les intérêts techniques sont fictifs. Ils servent à évaluer les intérêts financiers réellement produits, sans le taux technique compris dans l'élaboration du tarif.

Les intérêts techniques sont réalisés par l'assureur sur le placement du montant suivant :

$$(PMg_t^O(x) + PMd_t^O(x) + PMv_t^O(x) + P_{x+t}) - (Ag_{x+t} + Ad_{x+t})$$

### 6.2.1.3.4. Réincorporation de PB

Le compte technique est crédité en  $N+1$  du débit du compte financier « revalorisation de la rente » en  $N$ .

## **6.2.2. Compte de résultat financier**

### **6.2.2.1. Comptes de produits**

#### **6.2.2.1.1. Intérêts financiers résultant du compte technique**

Le placement de  $(PMg_t^o(x) + PMd_t^o(x) + PMv_t^o(x) + P_{x+t}) - (Ag_{x+t} + Ad_{x+t})$  produit des intérêts financiers.

Soient :

$\varphi$  le taux d'intérêt financier

$IF_t$  les intérêts financiers de l'assureur l'année où la population est âgée de  $x+t$  ans

Il vient alors naturellement que :

$$IF_t = [(PMg_t^o(x) + PMd_t^o(x) + PMv_t^o(x) + P_{x+t}) - (Ag_{x+t} + Ad_{x+t})] * \varphi$$

#### **6.2.2.2. Comptes de charges**

##### **6.2.2.2.1. Les intérêts techniques**

Ils créditent le compte technique et débitent le compte de résultat financier.

##### **6.2.2.2.2. Compte de participation aux résultats**

Le montant minimal de la participation aux résultats est la somme des postes suivants :

- 90% du compte technique créditeur (100% si le compte technique est débiteur)
- 85% du compte financier
- 100% du solde de réassurance cédé

Ce montant minoré des intérêts techniques représente la participation aux bénéfices.

**Il est donc possible de prélever un solde positif en résultat financier pour compenser un solde négatif en résultat technique.**

De plus, la répartition des bénéfices entre les différentes catégories et générations de contrats est libre.

La participation aux bénéfices peut être affectée soit **directement aux provisions mathématiques** ou aux prestations, soit totalement ou partiellement à la provision pour participation aux bénéfices.

Elle doit obligatoirement être distribuée au cours des huit exercices suivants.

### **6.2.3. Application**

On étudie une population fermée de 10 000 personnes âgées de 64 ans, année de la liquidation de leur retraite.

Par hypothèse, il n'y a aucun dépendant l'année de la liquidation dans la population étudiée, donc aucun arrérage la première année.

Ces assurés ont souscrit à 40 ans, cotisent 3% par an pour l'article 83, ont bénéficié d'une revalorisation de salaire de 2% par an et d'une revalorisation de leurs rente de 1% par an.

On fait le choix d'étudier une population en gestion évolutive, car le risque est plus important qu'avec une gestion en euros, comme nous l'avons montré dans la partie précédente.

La perte supportée par l'assureur en cas de dérive du risque sera toujours beaucoup plus importante sur les provisions mathématiques que sur les arrérages.

C'est pourquoi dans un souci de temps, nous étudierons seulement la perte engendrée par les provisions mathématiques, et non pas pour le compte de résultat dans sa globalité.

#### **6.2.3.1. Pertes liées à la dépendance relativement à l'encours global**

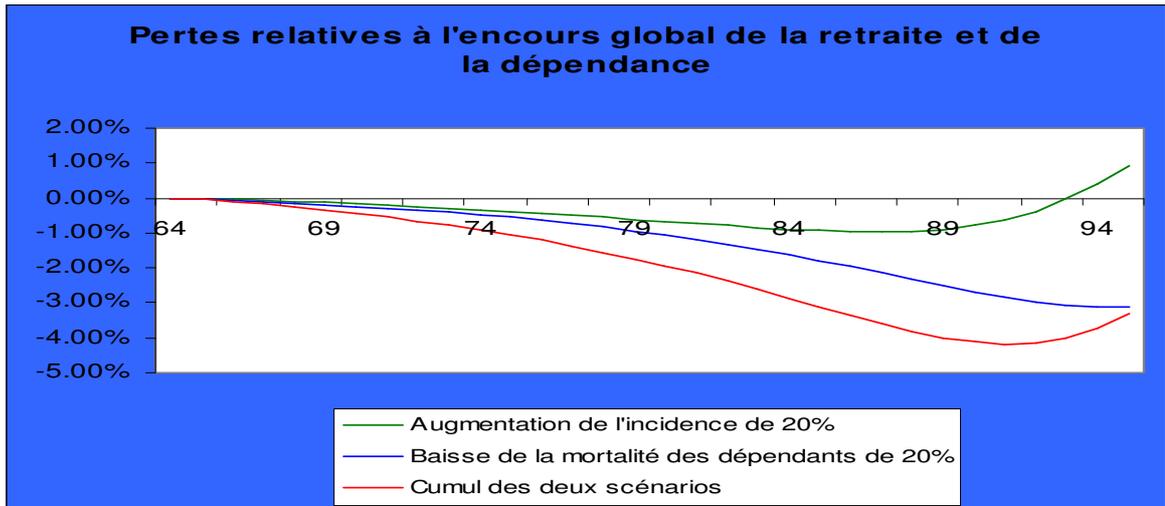
Après avoir simulé l'évolution de la population dans le cas de chaque scénario, les provisions mathématiques de la population correspondante sont calculées pour chaque scénario.

Afin de pouvoir évaluer les pertes techniques engendrées par un scénario relativement à l'encours global de la retraite (représenté par les provisions mathématiques des vivants), les PM suivantes sont calculées:

- **PM dépendance** = PM de valides + PM de dépendants
- **PM de dépendance « déformées »**, selon 3 scénarios
  - o Augmentation des taux d'incidence de 20%
  - o Baisse mortalité des dépendants de 20%
  - o Cumul des 2
  
- **PM retraités** : PM à constituer au titre de l'article 83

Puis les pertes techniques sont représentées graphiquement:

$$\text{Perte techn. relative} = \frac{(\text{PM dépendance} - \text{PM dépendance déformée})}{(\text{PM retraités} + \text{PM dépendance})}$$



Les produits financiers du fonds en euros net de frais sont d'environ 4.3%.

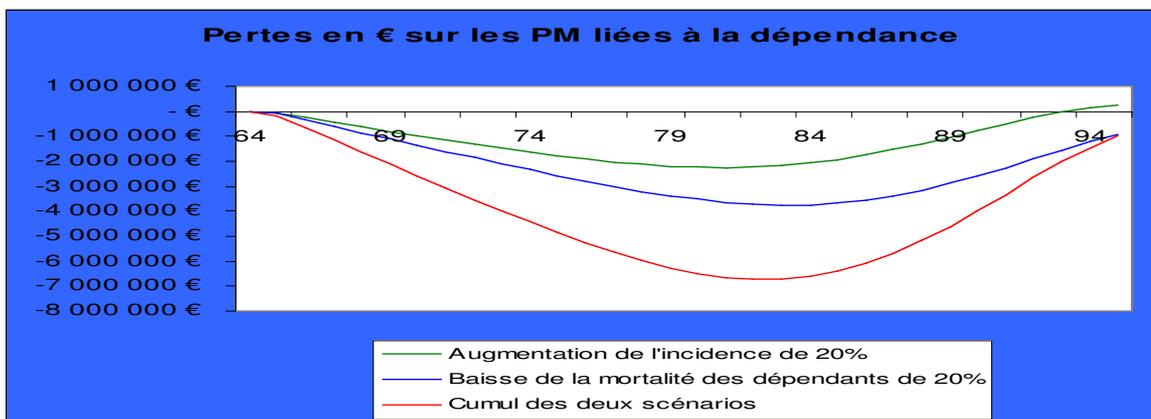
En soustrayant à ce montant le taux technique, il reste 2.05% des produits financiers, qui pourraient compenser une perte technique.

En cumulant les scénarios, la **perte technique relative maximale est de 4%**, les **produits financiers restant ne suffiraient pas à compenser cette perte**. Une étude complémentaire d'analyse de rentabilité et de gestion actif/passif devrait être réalisée, par manque de temps et parce que ce n'est pas l'objet du mémoire, cette étude ne sera pas traitée.

### 6.2.3.2. Pertes liées à la dépendance, en Euros

De la même façon que dans le paragraphe précédent, les pertes en euros sont représentées par les valeurs suivantes :

$$\text{Perte techn. en Euros} = \text{PM dépendance} - \text{PM dépendance déformée}$$



Ce graphique représente les pertes techniques en euros liées à la déformation de la dépendance, pour un portefeuille de 10 000 assurés dont les caractéristiques sont décrites plus haut.

La perte maximale pour les deux scénarios testés s'élève à 6,7 millions d'euros.

La **probabilité de réalisation de ces scénarios est difficile à appréhender**, les seules estimations disponibles sur la dépendance étant celles de l'INSEE, présentées dans la première partie de ce mémoire.

## **7. Conclusion**

Dans le cadre de ce mémoire, un nouveau produit a été conçu, permettant au département AXA Direction Epargne Retraite Entreprise de diversifier sa gamme retraite collective, en la complétant par des garanties dépendance.

Afin d'optimiser la combinaison entre le coût et les garanties offertes, nous avons mené une étude approfondie des aspects technique, marketing, juridique et fiscal, de la retraite collective comme du risque dépendance.

Le fait que le produit soit collectif et obligatoire permet de « familiariser » les salariés avec l'assurance dépendance. Par ailleurs, la dépendance touchera de plus en plus d'individus de notre entourage, car c'est un risque grandissant dans notre société actuelle. Les assureurs doivent donc se préparer à répondre à ce marché.

De plus, le produit créé permet d'offrir de nouvelles garanties dont le financement n'apparaît pas comme une charge lourde à l'assuré. En effet, tout au long de la vie du contrat, l'assuré ne paie jamais de prime « directement ». Le calcul de la rente du contrat de retraite est réalisé à terme d'avance, et ce terme est alloué en intégralité au financement de la garantie dépendance. Le reste du financement se fait par le prélèvement en amont de faibles pourcentages sur les flux entre l'assureur et l'assuré.

Du point de vue de l'employeur, ce contrat présentera un avantage supplémentaire dans sa politique de ressources humaines, sans présenter de coût additionnel à sa charge.

Une fois les caractéristiques du produit définies, sa mise en place a démarré.

Tout d'abord, un travail de recherche et d'étude des lois applicables à la dépendance a été réalisé. Puis, le modèle de dépendance multi-états a été développé par l'approche markovienne. Cependant la tarification n'a pas pu aboutir en raison d'absence de loi fiable relative à la dépendance partielle.

Ensuite, les travaux réalisés ont permis de construire le produit autour des agrégats suivants :

- Modélisation d'un fond de pension par des modèles stochastiques
- Tarification du produit dépendance proportionnellement au contrat retraite
- Création d'un outil Excel/VBA qui automatise la tarification et le provisionnement au niveau de l'entreprise. En effet, la principale difficulté de cette étude repose sur le fait que le département AXA Direction Epargne Retraite Entreprise ne disposait pas d'outils lié à la dépendance.

L'étude de la sensibilité du tarif et des provisions mathématiques à la loi d'incidence et aux lois de maintien en dépendance a montré que le pilotage du risque est un élément essentiel pour l'assureur, et qu'il passe par un suivi attentif de l'évolution de son portefeuille.

Enfin, l'historique de sinistralité relatif au risque dépendance étant encore faible à ce jour, il est difficile de maîtriser les futurs résultats du produit. La mutualisation entre les risques retraite et dépendance permet de minimiser l'impact d'une dérive des lois relatives à la dépendance.

La projection des provisions mathématiques de la retraite et de la dépendance sous divers scénarios et sur une population fermée a montré qu'un résultat positif lié à la retraite peut compenser un résultat négatif lié à la dépendance.

Une étude plus poussée de la mutualisation entre retraite et dépendance devrait être réalisée, par la projection des comptes de résultats retraite et dépendance du produit.

De par son côté innovant, ce produit pourrait donc constituer un produit « d'appel » à une nouvelle gamme liant les risques retraite collective et dépendance.

## **8. Bibliographie**

### **8.1. Mémoires**

- Boscher Pierre-Alain ‘ Mise en place et suivi actuariel d’un contrat d’assurance dépendance ‘  
Mémoire ISFA 2002
- Helms Florian, Czado ‘Calculation of LTC premiums based on direct estimates of transition  
Claudia, Gschlibl probabilities’ 2004  
Susanne
- Jarrier Sylvain ‘ La dépendance : Application des méthodes DFA ‘  
Mémoire ISFA 2001
- Levy Jonathan, ‘ Dépendance et Assurance vie ‘ 1996  
Cabasson Olivier, Axa  
DERE
- Mace Virginie, Axa ‘ La gestion par Horizons : construction d’une grille d’allocation évolutive’  
DERE Mémoire CNAM
- Nouet Sébastien ‘L’assurance dépendance et son marché: une approche économétrique’  
2007

### **8.2. Articles et Ouvrages**

- Code des Assurances
- Assous Laurence, Ronan ‘L’assurabilité de la dépendance et sa prise en charge par le secteur privé’  
Mathieu Revue économique – vol.53, N°4, juillet 2002
- Bagur Anne -Lise ‘L’assurance privée face à la dépendance’  
La Documentation française, retraite et société 2003/2 - n° 39
- Breuil-Genier Pascal ‘Aides aux personnes âgées dépendantes : la famille intervient plus que les  
professionnels’ 1998
- Brutel Chantal, Omalek ‘Projections démographiques pour la France, ses régions et ses départements  
Laure à l’horizon 2030’
- Cedelle Jean-Michel ‘L’assurance dépendance : problématique humaine et stratégie patrimoniale’
- Croguennec Yannick, ‘L’épargne retraite en 2007’  
DRESS
- Debout Clotilde, Dordet- ‘Durée de perception de l’APA : un modèle de prévision’  
Bernadet Vincent

Déléglise Marie-Pascale, Hess Christian, Nouet Sébastien	‘Tarification, Provisionnement et pilotage d’un contrat dépendance’
Denuit Michel, Robert Christian	‘Actuariat des assurances de personnes’ Economica
Duée Michel, Rebillard Cyril	‘La dépendance des personnes âgées : une projection à long terme’ Document de travail INSEE - 2004
Duée Michel, Rebillard Cyril	‘La dépendance des personnes âgées : une projection en 2040’ INSEE 2006
Dufour-Kippelen Sandrine	‘Les contrats d’assurance dépendance sur le marché français en 2006’
FFSA	‘Les contrats d’assurance dépendance en 2007’ Enquête - mai 2008
FFSA	‘Couverture du risque dépendance : quelques pistes de réflexion...’
FFSA	‘Modélisation du risque dépendance à partir des données HID’ 2005
FFSA	‘Attitudes et comportements face au risque dépendance’ Enquête de clientèle – mai 2006
Gallou Jean-Claude, OCIRP	‘La dépendance : les avantages du contrat collectif en entreprise’
Gaymu Joëlle, Population et Sociétés, INED	‘Comment les personnes dépendantes seront-elles entourées en 2030 ? Projections européennes’ 2008
Justens D., Hulin L.	‘Théories actuarielles’
JWA	‘Quelques extraits des cahiers pratiques de l’argus dépendance’
Laversanne Pierre, Shahidi Niousha	‘Comment provisionner le risque dépendance ?’
Les dossiers techniques d’information Optimind	‘La dépendance, éclairages sur un enjeu sociétal majeur’ –décembre 2007
Leung Edward	‘A multiple state model for pricing and reserving private long term care insurance contracts in Australia’
Nouet Sébastien, Plisson Manuel	‘Structuration du portefeuille dépendance de l’assureur’
Pinquet Jean, Guillen Montserrat	‘Long-Term care : risk description of a Spanish portfolio and economic analysis of the timing of insurance purchase’
Rapport de l’Inspection générale des affaires	‘La dépendance des personnes âgées’ août 2007

sociales

- Revue d'économie financière, bibliothèque ENSAE 'Les personnes âgées dépendantes, quelle définition ?'
- Robert-Bobée Isabelle, INSEE 'Projections de population pour la France métropolitaine à l'horizon 2050 : La population continue de croître et le vieillissement se poursuit' 2006
- Roger Muriel, Walraet Emmanuelle 'Social security and Well-being of the Elderly : the case of France'
- Roussel Pascale, Sanchez Jésus 'La compensation des incapacités au travers de l'enquête HID'
- Simonet Guy 'La comptabilité des entreprises assurances'
- Taleyson Lucie 'L'assurance dépendance privée, deux types de produits : forfaitaires et indemnitaire'
- Weber Amandine 'Regards sur l'APA trois ans après sa création'

## **9. Annexes**

## 9.1. Outil de tarification modèle final

L'entreprise doit fournir sa démographie, afin de calculer le tarif qui sera appliqué à toute l'entreprise.

Tous les calculs de l'outil évoluent automatiquement en fonction de la démographie de l'entreprise.

### 9.1.1. Démographie fournie par l'entreprise

Les champs à fournir dans la démographie de l'entreprise sont les champs visibles ci-dessous :

Matricule	Noms	Prénoms	sexe	Date naissance	Catégorie
255	ABALAM	JEANNETTE	1	01/01/1979	Divers

Date d'entrée	salaire annuel	Âge à la souscription	Gestion choisie
01/01/1978	20 000.00	30	0

### 9.1.2. Résultats de l'outil

A partir de ces données, l'outil remplit les données du tableau ci-dessous, qui vont permettre de calculer le tarif individuellement.

		hommes	femmes
age	age		
	age de départ de l'entreprise	64	
	age de départ à la retraite	64	
salaire	salaire moyen à l'âge d'adhésion		
	revalo salaire moyenne	2.00%	
Taux d'actualisation		2.25%	
cotisation	cotisation moyenne à l'article 83	3.00%	
revalo	revalorisation annuelle moyenne des rentes	1.00%	
Type de gestion		En euros	Evolutive
		0	1
Provisionnement	âge de l'assuré à la date de provisionnement		

Le tarif individuel est calculé puis enregistré dans un tableau, pour chaque salarié.

Prime doublement CC	% prélevé sur primes "doublement CC"	Prime double rente	PU/Garantie "double rente"	% prélevé sur primes "double rente"
217.37 €	0.75%	1 843.98 €	42.10%	1.00%

Les provisions à constituer sont d'abord calculées à titre individuel, à partir de 2009 et durant les x prochaines années.

Parmi la démographie étudiée, les premiers retraités apparaissent à partir de 2014, c'est pourquoi il n'y a pas de provisions pour sinistres à payer (PSP) avant cette date.

2 009		2 010		2 011	
PRC	PSP	PRC	PSP	PRC	PSP
0	-	9.58	-	19.31	-

Et jusqu'en en 2043 à la liquidation par exemple :

2 041		2 042		2 043	
PRC	PSP	PRC	PSP	PRC	PSP
125.05	-	70.50	-	-	-

Ensuite, le montant total à provisionner pour toute la démographie est calculé chaque année. Prenons l'exemple des provisions pour risques croissants (PPRC) :

	2009	2010...	...2014	2015
PPRC	0.00	792.77	3 863.20	4583.50

Enfin, l'outil calcule les primes à payer pour toute l'entreprise en moyennant les primes à prélever en pourcentage sur chaque assuré.

Nous obtenons les tarifs suivants :

Prime moyenne doublement CC, <i>prélevée sur chaque prime</i>	0.36%
--	-------

Prime moyenne double rente, <i>prélevée sur chaque rente</i>	1.62%
---	-------

### 9.1.3. Méthodologie

L'outil se présente sous la forme de plusieurs onglets :

- « Démographie » : contient tout les paramètres de l'application (Cf. ci-dessus).
- « Rendement » : contient les tables exportées des simulations SAS des rendements moyens des actifs, et de l'évolution du capital constitutif, avec une gestion en euros, ou avec une gestion évolutive et selon l'âge de l'assuré (selon les travaux présentés dans la partie « article 83 », modélisation des actifs).

Ainsi, le rendement moyen sera fonction des âges où l'assuré est présent dans le contrat (car la gestion évolutive alloue les actifs selon l'horizon de placement), et du mode de gestion choisi par l'assuré.

Âge	Fonds en Euro	Fonds évolutif							Rendement moyen
	Rendement net monétaire moyen	Rendement net monétaire moyen	Rendement net obligataire moyen	Rendement net action moyen	Allocation Monétaire	Allocation Obligation	Allocation Action	Rendement moyen fonds évolutif	
18	4.147%	4.14%	4.79%	8.36%	0	0	1	8.36%	8.36%
19	4.154%	4.14%	4.79%	8.44%	0	0	1	8.44%	8.44%
20	4.148%	4.15%	4.84%	8.57%	0	0	1	8.57%	8.57%
21	4.149%	4.15%	4.81%	8.60%	0	0	1	8.60%	8.60%
22	4.149%	4.14%	4.78%	8.58%	0	0	1	8.58%	8.58%

- « Constitution » : contient les calculs des flux de l'article 83(primes et rentes). Les rentes sont calculées selon son capital constitutif et selon le coût de 1€ de rente ( $a_x$ ). Ces rentes sont revalorisées par hypothèse de 1% chaque année.
- « Doublement Capital Constitutif » : calcul la prime unique de la garantie doublement capital constitutif si l'assuré devient dépendant en phase de constitution et s'il est présent dans l'entreprise à ce moment là. On utilise la formule :

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{n-1} p_x^v \cdot i_{x+k} \cdot v^{k+0.5} \cdot CC_{x+k}$$

Le capital constitutif est issu des simulations SAS.

- « doublement rente » : calcul de la prime unique de la garantie doublement rente article 83 si l'assuré devient dépendant en phase de restitution. On utilise la formule :

$$\Pi_x = v^m \cdot {}_m p_x^v \cdot \left( \sum_{k=0}^{w-x} p_{x+m}^v \cdot i_{x+m+k} \cdot v^k \cdot {}^R a_{x+m+k}^d \right)$$

$$\text{vec } {}^R a_{x+k}^d = \sum_{j=1}^{w-x-k} v^j \cdot {}_j p_{x+k}^d \cdot R'$$

Chaque terme est calculé séparément avant d'obtenir la prime unique.

- « Provisions » : calcul des provisions pour risques croissants et des provisions pour sinistres à payer selon l'âge de l'assuré, le sexe, l'âge à la date de provisionnement
- « Base H » : contient les taux d'incidence, tables de mortalité de référence, lois de maintien en dépendance...
- « Base dépendants » : calcul des  ${}^R a_{x+k}^d$
- « Base population générale » : calcule les  $a_x$  et les  $\ddot{a}_x$  de la population générale (dépendants et valides confondus).

## 9.2. Programme de modélisation du fonds article 83

```
/*-----*/
/*      IMPORTATION DONNEES SOURCES      */
/*-----*/
PROC IMPORT datafile='P:\04 -- gaelle\flux.xls' OUT=prime DBMS=excel REPLACE;
RUN;

/*-----*/
/*      MODELISATION DES ACTIFS          */
/*-----*/

%MACRO FINANCE(NBAN=,NFACT=,NFACT2=,NBSIM=,OUT=,SEED=);

/* Calcul la decomposition de Cholesky pour chaque covariance matrix, */
/* création de factor avec les corrélations attendues */

DATA CHOL (KEEP=CHOL1-CHOL&NFACT2);
  ARRAY COVSQ(&NFACT,&NFACT) COVSQ1-COVSQ&NFACT2;
  ARRAY CHOL(&NFACT,&NFACT) CHOL1-CHOL&NFACT2;

  /* Read the covariance matrix and store it in array 'COVSQ'.*/
  CorMA=0;          /* correlation monétaire action*/
  CorMT=0.1;       /* correlation monétaire taux investment grade*/
  CorAT=0.32;      /* correlation Taux Action*/

  COVSQ(1,1)=1;
  COVSQ(2,2)=1;
  COVSQ(3,3)=1;
  COVSQ(1,2)=CORMT;
  COVSQ(1,3)=CORMA;
  COVSQ(3,1)=CORMA;
  COVSQ(2,1)=CORMT;
  COVSQ(2,3)=CORAT;
  COVSQ(3,2)=CORAT;

/* Calcul Cholesky */

DO I=1 TO &NFACT;
  DO J=1 TO &NFACT;
    SELECT;
      WHEN(J>I) CHOL(I,J)=0;
      WHEN(J=I) DO; SUM=0;
        DO K=1 TO I-1;
          SUM=SUM+CHOL(I,K)**2;
        END;
        CHOL(I,I)=SQRT(COVSQ(I,I)-SUM);
      END;
    OTHERWISE DO; SUM=0;
      DO K=1 TO J-1;
```

```

        SUM=SUM+CHOL(I,K)*CHOL(J,K);
    END;
    CHOL(I,J)=(COVSQ(I,J)-SUM)/CHOL(J,J);
    END;
END;
END;
END;

RUN;
%DO K=1 %to &NBSIM;

    DATA SIMU&K;
        SET CHOLE;
        ARRAY RO(&NBAN) RO1-RO&NBAN;
        ARRAY RA(&NBAN) RA1-RA&NBAN;
        ARRAY R(&NBAN) R1-R&NBAN;
        ARRAY ROn(&NBAN) ROn1-ROn&NBAN;
        ARRAY RAn(&NBAN) RAn1-RAn&NBAN;
        ARRAY Rn(&NBAN) Rn1-Rn&NBAN;
        ARRAY RANNUM(&NFACT) RANNUM1-RANNUM&NFACT;
        ARRAY VECT(&NFACT) VECT1-VECT&NFACT;
        ARRAY CHOL(&NFACT,&NFACT) CHOL1-CHOL&NFACT2;

        /* parametre du fonds monétaire*/
        C=0.8352;
        D=0.0467;
        R(1)=D;
        VOLMO=0.0036;
        ESPMO=LOG(1+0.025);

        /* parametre du fonds obligataire*/
        A=0.99;
        B=0.056;
        RO(1)=B;
        VOLOB=0.041;

        /* parametre de B&S du fonds action */
        MUMARK=0.1023;          /* esperance rdmt annuel de markowitz*/
        ESP=LOG(1+MUMARK); /* passage en taux continu*/
        VOLAC=0.1726;

        DO L=1 to &NBAN;
            /* Utilisation de Cholesky matrix, introduction de random */
            DO I=1 TO &NFACT;
                RANNUM(I)=RANNOR(&SEED);
            END;
            DO I=1 TO &NFACT;
                SUM=0;
                DO J=1 TO &NFACT;
                    SUM=SUM+CHOL(I,J)*RANNUM(J);
                END;
                VECT(I)=SUM;
            END;
        END;
    END;

```

```

/* Simulation des différents rendements bruts*/

R(L)=R(MAX(L-1,1))+C*(D-R(MAX(L-1,1)))+VOLMO*VECT(1);
RO(L)=RO(MAX(L-1,1))+A*(B-RO(MAX(L-,1)))+VOLOB*VECT(2);
RA(L)=EXP(ESP-0.5*VOLAC*VOLAC+VOLAC*VECT(3))-1;

/* Simulation des différents rendements nets de frais*/
Rn(L)=(1+R(L))*(1-0.005)-1;
ROn(L)=(1+RO(L))*(1-0.0075)-1;
RAn(L)=(1+RA(L))*(1-0.015)-1;
END;

RUN;
DM LOG 'clear' EDITOR;
DATA TOTAL;
IF &K=1 then set SIMU&K;
ELSE SET TOTAL SIMU&K;
RUN;

%END;
/*CLEAN LIBRARY WORK*/
PROC DATASETS LIB=WORK NOLIST;
DELETE SIMU1-SIMU&NBSIM;
RUN;

DATA RDMT (KEEP=CHOL1 LIGNE Rn1-Rn&NBAN ROn1-ROn&NBAN RAn1-
RAn&NBAN FLUX1-FLUX&NBAN ACT1-ACT&NBAN OBL1-OBL&NBAN MON1-
MON&NBAN);
MERGE TOTAL PRIME;
BY CHOL1;
RUN;

%MEND;

%FINANCE(NBAN=57,NFACT=3,NFACT2=9,NBSIM=10000,OUT=LOSSES,SEED=0)

```

```

/*-----*/
/*    CAPITAL CONSTITUTIF A ECHEANCE    */
/*-----*/

%MACRO PM(NBAN=);

    DATA PM;
        SET RDMT;
        ARRAY Rn(&NBAN) Rn1-Rn&NBAN;
                ARRAY ROn(&NBAN) ROn1-ROn&NBAN;
        ARRAY RAn(&NBAN) RAn1-RAn&NBAN;
        ARRAY VF(&NBAN) VF1-VF&NBAN;
        ARRAY FLUX(&NBAN) FLUX1-FLUX&NBAN;
        ARRAY ACT(&NBAN) ACT1-ACT&NBAN;
                ARRAY OBL(&NBAN) OBL1-OBL&NBAN;
                ARRAY MON(&NBAN) MON1-MON&NBAN;

        VF(1)=0;
        %DO N=1 %TO &NBAN;
            VF(&N)=(VF(MAX(&N-
1,1))+0.99*FLUX(&N))*(1+ACT(&N)*RAn(&N)+OBL(&N)*ROn(&N)+MON(&N)*Rn(&N))
*(1-0.005);/*supposition rebalancement annuel*/
        %END;
/* on tient compte de 1% de frais d'entrée et de 0.5% de frais sur en en cours*/

PROC UNIVARIATE DATA=PM;
    VAR VF57;
HISTOGRAM /ENDPOINTS=0 TO 3000 by 50 vaxislabel='Frequency' rtinclude cfill=grey;
    RUN;

PROC UNIVARIATE DATA=PM NOPRINT;
    VAR VF&NBAN;
    OUTPUT OUT=STAT MIN=MINI MAX=MAXI MEAN=MOY MEDIAN=MEDIANE
STDMEAN=VOL P1=VaR1 P5=VaR5 P10=VaR10 Q1=VaR25 Q3=VaR75 P90=VaR90
P95=VaR95 P99=VaR99 ;
    RUN;
DATA pm2 (KEEP=CHOL1 LIGNE Rn1-Rn&NBAN ROn1-ROn&NBAN RAn1-RAn&NBAN
FLUX1-FLUX&NBAN );
    set pm;
    RUN;
%MEND;
%PM(NBAN=57)

```