

Lilia TCHEMCHIROVA

# VARIABLE ANNUITIES Calcul des Provisions et du Capital

➤ ETABLISSEMENT D'ACCUEIL

**SWISS RE**

**Reserving Life and Health**

Zurich, Suisse

50/60 Mythenquai 8022

➤ MAITRE DE STAGE

Charles LUTZ

Director | Head Reserving L&H Zurich

Charles\_Lutz@swissre.com

➤ PERIODE DE STAGE

Du 03.03.2008 au 30.06.2008

➤ MEMOIRE CONFIDENTIEL

**Jusqu'à : 2018**

## Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de stage, Monsieur Charles Lutz, de m'avoir proposé de rejoindre dans le cadre de mon stage final, l'équipe du département « Reserving Life and Health » au sein de la Swiss Reinsurance Company.

Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée en me confiant un sujet important pour la compagnie. Je le remercie pour son encadrement et pour avoir eu la patience de répondre à toutes mes questions et de m'expliquer les points importants. Je le remercie également pour sa disponibilité et pour son soutien tout au long de mon stage.

Je tiens à adresser un grand merci à mes collègues de Corporate Actuarial, pour leur accueil et pour m'avoir aidé à me sentir à l'aise dans l'équipe. Je remercie M.Besner, Yadira Prieto, Ariane Dao, Monica Hancock, Silvano Rosian, et toutes les personnes avec lesquelles j'ai partagé ma vie de stagiaire pendant ces quatre mois.

Enfin, je ne saurais remercier mes parents qui m'ont toujours fait confiance et qui m'ont soutenu à chaque étape de ma vie.

## Sommaire

Résumé.....	5
Abstract.....	6
<b>INTRODUCTION</b> .....	7
<b>A. Le cadre de l'étude</b> .....	8
<b>I. Le rôle de la réassurance</b> .....	8
<b>II. Swiss Re</b> .....	9
1. Présentation Générale .....	9
2. Le département Reserving Life & Health .....	9
3. Les contrats Variable Annuities .....	10
3.1 US GAAP .....	11
3.2 Le cadre législatif.....	12
3.3 Méthodologie adoptée .....	13
<b>III. La problématique</b> .....	15
<b>B. Le cadre actuariel</b> .....	16
<b>NOTIONS DE BASE</b> .....	17
<b>A. Les Contrats Variable Annuities</b> .....	18
<b>I. Définitions</b> .....	19
1. Généralités.....	19
2. Le montant garanti .....	21
2.1 La garantie de base.....	21
2.2 Les options supplémentaires (=riders) .....	22
3. Les phases du contrat.....	25
<b>II. Les produits type des Variables Annuities</b> .....	26
1. Garantie en cas de Décès.....	26
2. Garantie en cas de Vie .....	27
2.1 GMAB : Guaranteed Minimum Accumulation Benefit .....	27
2.2 GMIB : Guaranteed Minimum Income Benefit .....	27
2.3 GMWB : Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit .....	27
3. Les garanties à vie.....	28
4. Comparaison des différents produits.....	28
<b>III. Le marché des VA</b> .....	30
1. Historique.....	30
2. Développement international.....	30
2.1 Europe .....	31
2.2 Asie.....	32
<b>IV. Les risques liés aux VA</b> .....	33
1. Les risques financiers .....	33
1.1 Les risques de marché.....	33

1.2 Les risques de crédit.....	34
2. Les risques actuariels .....	34
2.1 Les risques viagers .....	34
2.2 Les risques liés aux comportements des assurés .....	35
2.3 Les risques de souscription .....	36
<b>B. Notions Théoriques</b> .....	<b>37</b>
<b>I. Finance</b> .....	<b>37</b>
1. Processus stochastiques - Généralités .....	37
2. Processus des cours des actifs financiers.....	39
3. Le modèle de Black & Scholes .....	42
4. Evaluation d'un put européen .....	44
<b>II. Mesure de risque</b> .....	<b>45</b>
1. « Value at Risk ».....	45
2. « Conditional Tail Expectation » ou CTE.....	45
<b>A. L'approche actuarielle</b> .....	<b>47</b>
<b>I. La modélisation des cours des actifs</b> .....	<b>48</b>
1. La méthode Monte Carlo .....	48
2. Le marché américain.....	48
3. Autres marchés.....	49
3.1 Le générateur de scénarii .....	49
3.2 Paramétrisation.....	50
3.3 Implémentation du processus des cours des actifs financiers .....	55
3.4 Résultats .....	57
<b>II. Modélisation des produits</b> .....	<b>59</b>
1. Hypothèses Générales.....	60
1.1 Notations .....	60
1.2 Descriptif des hypothèses.....	60
2. Produit GMIB-GMDB .....	62
2.1 Spécificités .....	62
2.2 Résultats .....	64
3. Produit GMWB.....	65
3.1 Spécificités .....	65
3.2 Résultats .....	66
4. Conclusions.....	66
<b>B. L'approche financière</b> .....	<b>68</b>
<b>I. La couverture financière (Hedging)</b> .....	<b>68</b>
<b>II. Interactions avec l'approche actuarielle</b> .....	<b>69</b>
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>69</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>69</b>
<b>Liste des abréviations</b> .....	<b>69</b>
<b>Annexes</b> .....	<b>69</b>

## Résumé

De type "assurance épargne", les contrats en Variable Annuities (VA) permettent à l'assuré de bénéficier des mouvements favorables des marchés financiers, via des investissements dans des fonds communs. Ils proposent également un montant minimum garanti en cas de vie ou de décès de l'assuré. Il existe quatre produits de base sous l'appellation commune GMxB. De manière générale, les contrats en VA proposent une combinaison de ces produits et des avantages supplémentaires (ex. Ratchet, Roll up).

Avec la mise en place d'une garantie plancher, le preneur du risque s'engage à verser un montant minimum à l'échéance du contrat. De ce fait, la somme sous risque est soumise aux aléas du marché financier, de la vie et du comportement de l'assuré.

Ainsi, les risques inhérents à ces contrats sont non seulement de nature actuarielle, mais également de nature financière. Dans le passé, les risques financiers liés aux VA ont été peu pris en compte. Avec les mouvements défavorables des marchés financiers de ces dernières années cette démarche a été remise en cause.

Le transfert du risque vers un réassureur, s'avère alors, un choix judicieux pour les compagnies d'assurances. Outre une réassurance traditionnelle, le réassureur peut également prendre en charge la globalité des risques supportés par l'assurance via une couverture financière.

Le développement considérable des contrats VA, leur nature complexe et l'importance du risque transféré aux réassureurs justifient l'intérêt que nous portons à ces produits.

**En particulier nous allons nous intéresser dans ce mémoire au calcul du capital et des provisions des contrats Variable Annuities, qui permettent de faire face aux engagements envers les assurés.**

Après avoir présenté les caractéristiques de ces produits et en particulier les risques actuariels et financiers qui y sont liés, nous introduirons les notions techniques utilisées dans notre étude.

La deuxième partie du mémoire portera sur la mise en place pratique de la méthode actuarielle avec la création d'un logiciel, simplifié, de calcul des provisions. Nous discuterons des étapes de conception et les résultats obtenus.

## Abstract

Variable Annuities are an “equity-linked insurance” products that give the policyholder an opportunity to enjoy the benefits of financial investments in mutual funds. They also guarantee a minimum amount on death or surviving during the contract period. There are four base types of guarantees, with commonly used term « GMxB »: Guaranteed Minimum Death/Income/Accumulation/Withdrawal Benefit. Generally, VA contracts are a combination of these main products and have also additional riders like Ratchet and Roll Up.

With the guarantee, the insurer is due to pay a minimum amount at the end of the contract. Hence, the sum at risk depends on several uncertainties as the financial market movements, the policyholder behavior and its life duration.

Thus the inherent risks of these products are not only financial but also actuarial. The financial component of the risks related on VA contracts was less considered in the past. With the unfavorable evolution of financial market during the last years this approach was reevaluated.

The transfer of the risk to a reinsurer seems to be a wise choice for the insurance company. In addition to a traditional reinsurance, it can also provide financial security and deal with the total risk.

The substantial growth of the Variable Annuities sales, their complexity and the important level of risk which is transferred to the reinsurer, justify our interest for these products.

In particular, the purpose of this study is to present the calculation of capital and provisions for Variable Annuities.

First we will make an overview of VA contract features and the related financial and actuarial risks. Then we will introduce some technical concepts used in our study.

Finally we will present the creation of a simplified model which allows computing of provisions and capital and the results of several stress tests.

# INTRODUCTION

---

CONFIDENTIAL

## **A. Le cadre de l'étude**

### **I. Le rôle de la réassurance**

Depuis 2001, la part des contrats en Variable Annuities vendue sur le marché américain ne cesse de croître. Aujourd'hui ils ont déjà fait leur entrée auprès des assurés asiatiques et certains produits intéressent également les assureurs européens.

C'est un marché en pleine croissance où le savoir, les moyens techniques et la capacité des réassureurs sont de plus en plus sollicités. Ce transfert du risque est très prisé par les assureurs au vue de la complexité des produits et de l'exposition combinée aux risques financiers, actuariels et à ceux liés au comportement de l'assuré.

Tout de même, à cause de la spécificité des produits VA, une réassurance traditionnelle, ne permet pas de prendre en charge la totalité des risques. La compagnie d'assurance doit aussi bénéficier d'une couverture financière, afin de limiter le risque financier.

Cependant, les organismes de banques n'ont pas la possibilité de répondre entièrement aux besoins de protection de l'assurance, à cause des risques viagers inhérents à la garantie.

En effet, les contrats Variables Annuities présentent la spécificité d'avoir les risques actuariels et financiers indissociables d'où le besoin d'avoir une gestion commune des deux risques.

Dans ce contexte, la Swiss Re s'avère un acteur clé qui est en mesure de proposer une protection adéquate pour ce type de produit qui comprend les deux risques à la fois.



## II. Swiss Re

### 1. Présentation Générale

Swiss Re est un réassureur mondial de premier plan largement diversifié.

Fondé à Zurich, Suisse, en 1863, Swiss Re est une compagnie de réassurance internationale fournissant des solutions en matière de gestion des risques et du capital à des clients du monde entier.

Les activités principales du groupe sont le transfert et le financement des risques ainsi que la gestion d'actifs pour compte propre.

La réassurance est une composante indispensable du système d'assurance. Les clients bénéficient de l'expertise, de la couverture et de l'allègement de la charge du capital offert par Swiss Re.

Swiss est également un leader de la titrisation et du négoce des risques. La compagnie transfère les risques aux marchés financiers offrant ainsi une nouvelle source de capacité au marché.

La compagnie est organisée autour des fonctions « business » et « corporate » :

Les **fonctions business** sont détaillées ci-dessous :

- **Clients Market** : Europe, Americas, Asia, Global & Large Risks et Global Admin Re & Run-off
- **Products**: Property & Speciality, Casualty, Life & Health et Claims & Liability Management
- **Finance Services Products**: Credit & Rates, Equities, Alternative Investments et Third-party Asset Management

Les **fonctions corporate** sont détaillées ci-dessous :

- **Finance**
- **Risk Management**
- **Operations** : Communication & HR, Global IT et Group Legal

### 2. Le département Reserving Life & Health

J'ai effectué mon stage dans la division Europe du département « L&H Risk and Actuarial Management ». Ce département fait partie de « Risk Management ».

Les principales missions du département sont :

- Transaction and product review
- Local and global reserving
- Risk analysis and business performance

- Product control
- Risk governance
- Portfolio review

La division Europe est notamment responsable du provisionnement des affaires L&H cédées directement ou via rétrocession internes à la maison mère Swiss Re Zurich.

### 3. Les contrats Variable Annuities

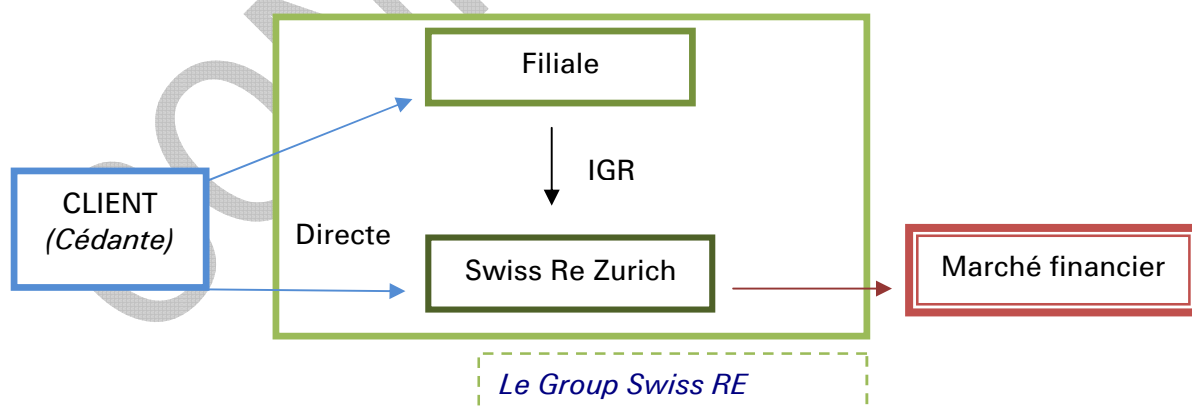
Actuellement, Swiss Re réassure des contrats VA vendus sur les marchés américains et asiatiques.

Le transfert du risque se fait suivant le principe de la réassurance proportionnelle en Quote Part (QP) à la prime commerciale.

**Réassurance en Quote Part** : La réassurance prend à sa charge une proportion  $\alpha$  des risques du portefeuille de la cédante et perçoit la même proportion  $\alpha$  des primes. Ainsi le portefeuille de l'assureur et celui du réassureur supportent, sauf clause particulière, les mêmes risques.

Le calcul des engagements se fait au niveau local par des actuaires qui ont une bonne connaissance du marché et suivant une méthodologie qui est définie au niveau du Groupe. Cette dernière comprend la définition des marges techniques et des modèles utilisés.

L'interaction entre les différents acteurs est la suivante :



Afin de se prémunir contre les risques inhérents aux contrats Variable Annuities, la *cédante*, autrement dit la compagnie d'assurance a la possibilité de transférer une partie, ou la totalité du risque qu'elle supporte au Groupe Swiss Re, via un traité de réassurance.

Le contrat peut être souscrit directement auprès de Swiss Re Zurich (SRZ), la maison mère, ou bien dans une des filiales du groupe. Ces dernières constituent des entités juridiques autonomes contrôlées par Swiss Re Zurich à travers un système de participation.

Etant donné la nature du risque souscrit par les filiales les produits VA souscrits sont réassurés par SRZ via des contrats de récession internes (IGR – « Intra Group Retrocession »). SRZ supporte donc l'ensemble des risques des affaires VA souscrites directement ou via IGR. Une partie des risques financiers est ensuite passée aux marchés financiers au moyen d'un programme de hedging.

Les principes comptables et les règles déterminant les dotations au provisions/capital varient en fonction de l'entité juridique considérée.

Pour le groupe SR les normes comptables US GAAP s'appliquent. Pour les filiales de Swiss Re les règles statutaires des pays concernés sont utilisées (par exemple « US Statutory Rules » pour les Etats-Unis).

<b>Entité</b>	<b>Principes applicables</b>
<b>SR Group</b>	<b>US GAAP</b>
<b>SR Filiale</b>	<b>Règles Statutaires en vigueur dans la filiale.</b> <i>Exemple : US Statutory</i>
<b>SR Zurich</b>	<b>Principes définis par la loi fédérale Suisse</b>

Swiss Re applique les principes US GAAP pour classier les produits VA entre les produits d'assurance et les produits d'investissement (voir section 3.1).

L'objet de ce stage porte sur le calcul des provisions et de capital de Swiss Re Zurich dans le cadre des contrats Variable Annuities. Nous étudierons le contexte législatif sous lequel opère SRZ qui, comme nous le verrons par la suite, est basé sur des principes plus que sur des règles (voir section 3.2).

### 3.1 US GAAP

Les règles US GAAP classifient les produits VA en deux catégories, « produit d'assurance » ou « produit d'investissement » et ces mêmes règles comptables s'appliquent dans le contexte de l'entité juridique SRZ.

US GAAP clarifie les conditions de classification dans le texte « SOP 03-01 - Statement of Opinion 03-01 ». Si les risques de mortalité et de morbidité associés aux garanties offertes dans un contrat sont limités ou de faible probabilité alors le produit doit être classifié comme un produit d'investissement. Dans le cas contraire il doit être classifié

comme produit d'assurance. Un contrat est considéré comme ayant un important risque de mortalité lorsque les montants assurés varient de manière significative en réponse à la volatilité des marchés financiers.

### Produit d'assurance (FAS 159)

- GMDB
- GMWB durant la phase de paiement si et seulement si la garantie est viagère (généralement lorsque l'assuré opte pour le retrait après 65 ans).

Jusqu'à la fin 2007, la méthodologie de calcul des provisions US GAAP pour ces produits cherchait essentiellement à produire un ratio profit/primes stable pendant la durée du contrat. La règle FAS 159 adoptée récemment donne l'option aux compagnies d'opter pour une évaluation « fair value ».

### Produit d'investissement (FAS 133)

- GMIB et GMAB
- GMWB pendant la phase d'épargne
- GMWB pendant la phase de paiement si et seulement si la garantie n'est pas viagère.

Ces instruments sont considérés comme des « embedded derivative ». La méthode consiste à évaluer le coût des produits dérivés en se basant sur des options (réplication) dont le prix est donné par les marchés financiers à la date d'évaluation.

## 3.2 Le cadre législatif

Notre étude se situe dans le cadre réglementaire de l'entité juridique Swiss Re Zurich.

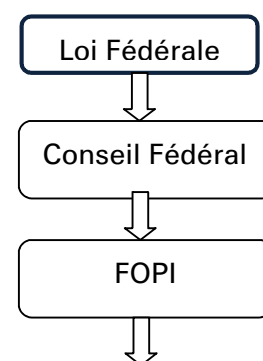
Il existe trois niveaux de législation qui traitent des principes de constitution des provisions techniques par les assureurs et par les réassureurs. Nous avons la hiérarchie suivante :

Tout d'abord nous avons la Loi Fédérale sur la surveillance des entreprises d'assurance (LSA) qui stipule que « *L'entreprise d'assurance est tenue de constituer des provisions techniques suffisantes pour l'ensemble de ses activités.* » cf. 961.01 (3.1)<sup>3</sup> art. 16

La loi présente également le rôle du Conseil fédéral et son interaction avec l'autorité de surveillance FOPI<sup>4</sup> (Federal Office of Private Insurance).

« *Le Conseil fédéral fixe les principes relatifs à la constitution des provisions techniques.* »

« *Il peut charger l'autorité de surveillance de fixer les modalités concernant les genres et les niveaux des provisions techniques* »



Réassureur / Assureur

<sup>3</sup> cf. Annexes Cadre Légal

<sup>4</sup> Office fédéral des assurances privées - OFAP

Dans l'article 24, de la même section (961.01 (3.1)), elle définit le rôle de l'actuaire responsable qui entre autre est tenu responsable de s'assurer que « *les bases techniques utilisées sont adéquates* » et que « *les provisions techniques constituées sont suffisantes* ».

L'ordonnance sur la surveillance précise dans l'art. 54 de 961.011(4.1.1) que les provisions comprennent :

- a. « *les provisions techniques en couverture des engagements attendus;*
- b. *les provisions pour fluctuations visant à compenser la volatilité des affaires, en tenant compte de la diversification, de l'importance et de la structure des portefeuilles d'assurance.* »

Enfin, c'est l'autorité de surveillance qui définit les détails concernant le genre et le volume des provisions techniques.

Ainsi nous remarquons que la loi ne présente pas de façon formelle une méthode de calcul des provisions. Le principe étant de constituer des provisions suffisantes, nous verrons dans la partie suivante, la méthode adoptée par Swiss Re.

Au niveau de la détermination du capital, le groupe Swiss Re est soumis aux règles du Swiss Solvency Test. Néanmoins, dans notre étude nous allons nous placer dans un cadre spécifique où le calcul du capital se fera de façon indépendante du groupe. Nous considérons les contrats Variable Annuities de manière isolée. Le capital sera calculé en considérant le caractère Long Terme du produit.

### **3.3 Méthodologie adoptée**

En absence d'une définition précise des techniques de calcul des provisions, la loi permet aux entreprises de développer une méthode individuelle de provisionnement. L'avantage de cette démarche est de permettre aux compagnies d'élaborer la méthodologie qui sera la mieux adaptée aux risques qu'elles supportent dans leurs portefeuilles.

La méthode adoptée par Swiss Re a été influencée par les techniques définies en Amérique du Nord, berceau des Variable Annuities. Les autorités américaines et canadiennes ont défini d'une manière complète les méthodes de provisionnement, de calibrage, de mesure du risque, ainsi que les niveaux de capital et de provisions requis.

Lors de la mise en place de sa méthodologie, Swiss Re s'est inspiré des principes de calcul proposés par les actuaires nord-américains. Les hypothèses utilisées sont spécifiques aux marchés et aux produits développés.

*La gestion des sub-accounts se fait au niveau de la cédante. Comme Swiss Re ne détient pas les comptes d'investissements des assurés, la compagnie doit modéliser la totalité du contrat.*

La technique de provisionnement est basée sur l'approche actuarielle.

Tout d'abord, elle consiste en la modélisation stochastique des cours des actifs financiers sous-jacents aux sub-accounts. Sous l'hypothèse que les rendements des actifs suivent une loi Log Normale, la méthode de Monte Carlo permet de produire des scénarii de mouvement des prix des actifs.

Ensuite, les scénarii sont introduits dans le modèle de calcul des provisions. Ce dernier met en relation les hypothèses actuarielles et financières et permet le calcul des Cash Flows futurs. Ils tiennent compte des engagements de la compagnie et de la cédante, ainsi que des coûts inhérents à l'activité. Le modèle introduit également des marges techniques (ou PAD : Provisions for Adverse Deviation).

L'objectif étant de valoriser les engagements à la date d'évaluation, les Cash Flows sont actualisés suivant un taux d'actualisation fixé.

La détermination des provisions et du capital se fait sous la mesure de risque CTE<sup>5</sup> pour un niveau de confiance.

Afin de proposer une réponse à l'ensemble des risques supportés par les cédantes, il existe la possibilité de faire un transfert du risque sur le marché financier via une couverture financière. Cette démarche permet de considérer qu'en cas de chute des marchés boursiers la perte éventuelle au niveau des contrats Variable Annuities sera (partiellement) inhibée par le bénéfice produit par les actifs de couverture. Ces derniers ont une variation asymétrique par rapport aux actifs sous-jacents aux contrats VA.

La mise en place d'une stratégie de couverture nécessite l'évaluation des Cash Flow futurs en valeur de marché.

Or, le capital sous risque<sup>6</sup> pour le réassureur à la date de sortie du contrat, s'apparente au paiement terminal d'un put. L'approche financière sera dans ce cas la mieux adaptée pour évaluer le montant des provisions. Au moyen de simulations stochastiques des cours des actifs en univers risque neutre, elle permet d'évaluer les cash flow futurs en valeur de marché. Ceci la rend compatible avec la construction d'une couverture financière. Les hypothèses actuarielles utilisées sont des Best Estimate.

A priori, la couverture financière semble une solution appropriée qui permettrait à la compagnie d'honorer ses engagements. Cependant, il n'existe pas de couverture parfaite, car les modèles utilisés pour sa mise en place ne reflètent pas entièrement l'environnement et les caractéristiques des marchés financiers.

Swiss Re a adopté la solution prudente suivant laquelle la compagnie considère un certain pourcentage d'efficacité de cette couverture.

Le montant des provisions et du capital va dépendre de la présence ou non d'une stratégie de couverture financière. En effet, les cash flow vont être modifiés par l'apport de la couverture. Il faut également considérer le coût de cette couverture.

Les modèles élaborés prévoient ainsi le calcul des provisions et du capital avec ou sans couverture financière.

---

<sup>5</sup> CTE : la mesure du risque Conditional Tail Expectation

<sup>6</sup> Pour un portefeuille donné, le capital sous risque correspond à la différence entre le montant de la garantie et la valeur des sub-accounts.

### III. La problématique

L'organisme de contrôle exige que les provisions techniques constituées soient « *suffisantes* ».

Afin de satisfaire cette recommandation nous devons être en mesure d'identifier les risques sous-jacents aux différents produits Variable Annuities et surtout de mieux comprendre la sensibilité des différents paramètres afin de définir les marges adéquates.

A travers cette étude nous essayerons de comprendre quels sont les concepts théoriques sous-jacents aux méthodes de provisionnement et ensuite de répliquer de manière simplifiée les modèles de calcul des engagements.

Ceci nous permettra d'être en mesure d'expliquer les résultats et les méthodes utilisées au niveau du groupe.

Dans notre étude nous allons nous appuyer sur la méthodologie définie par Swiss Re Zurich que nous avons présentée.

CONFIDENTIAL

## B. Le cadre actuariel

Les contrats Variable Annuities sont particulièrement intéressants lorsque l'assuré souhaite investir sur les marchés financiers tout en bénéficiant de la garantie d'un montant minimum versé à la fin du contrat.

Ainsi, le preneur du risque s'engage à verser le maximum entre la valeur des investissements de l'assuré et le montant de la garantie.

Si les marchés sont baissiers, la valeur de l'épargne personnelle,  $AV_t$  de l'assuré peut être inférieure à celle de la garantie,  $G$ . Dans ce cas, la compagnie doit compenser ce déficit. Ainsi, le capital sous risque s'écrit :  $\text{Max} (0; G - AV_t)$ .

L'exposition de la compagnie peut s'avérer, alors, très importante. Afin de pouvoir honorer ses engagements le preneur du risque doit constituer des provisions sous des hypothèses prudentes et en utilisant des modèles qui reflètent les risques inhérents aux VA.

Dans notre étude nous allons nous intéresser à deux approches de calcul des provisions.

L'approche **actuarielle** consiste à évaluer le montant des provisions sous la probabilité physique  $P$ , c'est-à-dire en Real World. Il s'agit d'utiliser la méthode de simulation Monte Carlo pour générer une multitude de scénarii d'évolution des actifs sous-jacents aux investissements. Ensuite, en intégrant des hypothèses actuarielles et comportementales prudentes, déduire le montant de la provision avec la méthode CTE pour un niveau de confiance.

L'**approche financière** apparente le capital sous risque au payoff<sup>7</sup> d'un *put* (option de vente). Ainsi l'engagement du preneur du risque sera évalué en univers risque neutre avec le modèle de Black & Scholes.

La mise en place de ces deux méthodes de provisionnement nécessite la combinaison de techniques actuarielles et financières. Dans la partie suivante nous exposerons les notions clés qui serviront d'appuis à notre étude.

En outre nous présenterons une définition plus détaillée des Variable Annuities et des risques liés à ces contrats.

---

<sup>7</sup> payoff : paiement terminal



## NOTIONS DE BASE

---

CONFIDENTIAL

## A. Les Contrats Variable Annuities

*Les profils de risque de l'assureur et du réassureur sont très proches. Nous allons présenter les risques liés aux VA du point de vue de la compagnie d'assurance.*

De manière traditionnelle, en assurance vie, l'assureur propose la garantie du versement d'une somme sous forme de capital ou de rente à la survenance de la mort ou en cas de survie de l'assuré pendant une période déterminée par le contrat d'assurance. Cette somme est perçue par l'assuré lui-même ou par sa famille en contrepartie d'une prime unique ou périodique qui représente l'engagement de l'assuré.

Aujourd'hui les particuliers s'intéressent d'avantages au monde de la finance et des profits qui y sont liés. Ceci a permis aux assureurs de mettre en place les contrats d'assurance vie du type "assurance épargne" qui sont évalués en valeur de marché. Les primes des contrats sont investies sur des supports ou des fonds plus ou moins risqués. Ils permettent de profiter des mouvements favorables du marché financier et d'une garantie sur la vie.

Il existe plusieurs dérivés de ce type de contrats et souvent leurs appellations et caractéristiques sont différentes en fonction de leur lieu d'origine.

Ainsi, en Europe, ce type d'assurance est le plus répandu sous la forme «unit-linked insurance» avec les contrats en unités de compte (ou UC). Ceux derniers sont évalués en nombre de parts d'un ou de plusieurs supports d'investissement.

Sous leur forme basique, les contrats en UC impliquent un transfert du risque financier sur l'assuré. En effet la compagnie d'assurance ne supporte pas ou très peu le risque d'investissement, puisqu'elle garantit le nombre de parts indépendamment de la valeur des supports. Afin de justifier le caractère « assurance » du contrat, les assureurs ont intégré une garantie plancher. Ainsi un montant minimum est versé à l'assuré à la fin du contrat, cet à dire à maturité ou en cas de décès.

En Amérique du Nord, nous avons les « segregate funds » au Canada et les Variables Annuities aux Etats Unis. Ces derniers seront définis en détail dans le chapitre suivant.

## I. Définitions

Les contrats en Variable Annuities permettent à l'assuré d'investir dans des fonds, dit *sub-accounts*, indépendants de l'assurance qui propose les contrats.

Apparentés aux fonds collectifs au niveau de la gestion, ces *sub-accounts* sont constitués des primes d'épargne (nettes ou brutes) investies sur les marchés financiers et des intérêts/dividendes qu'ils génèrent. Ainsi leur performance est étroitement liée à celle du marché financier.

Il existe un très large choix de fonds sur lesquels les gestionnaires peuvent investir en fonction des objectifs de rendement et le profil de risque des assurés (dynamique, prudent, équilibré).

Aux Etats Unis, les fonds sont majoritairement investis dans des actions (plus de 85% des primes). En outre, les assurés ont la possibilité de changer, au cours du contrat, leur profil et par conséquent la répartition de leur épargne dans les fonds sous-jacents.

En revanche, les fonds asiatiques ont une structure plus rigide. Le pourcentage obligations/actions est prédéfini et il reste inchangé jusqu'à la fin de l'engagement.

Enfin, l'appellation *Variable Annuities*, peut induire à confusion, car les garanties proposées sous cette appellation ne sont pas vraiment « variables » et pas toujours des « annuities » (=rentes). Pour mieux cerner cette subtilité nous examinerons, dans ce chapitre, les quatre différents produits proposés par ces contrats et les garanties qui leurs sont attachées.

Tout d'abord nous allons définir les engagements de l'assureur et de l'assuré, ainsi que le montant de la garantie proposé par les contrats VA.

### 1. Généralités

Le contrat d'assurance est la preuve juridique de l'accord qui lie l'assureur et l'assuré et des engagements respectifs auxquels ils doivent faire face jusqu'au terme du contrat.

#### Les engagements des parties

L'**engagement de l'assuré** s'exprime par le versement d'une prime unique ou périodique qui représente le prix du risque supporté par l'assureur. Investie<sup>8</sup> dans des sub-accounts, elle définit la valeur initiale de l'épargne personnelle de l'assuré. Ensuite, la valeur du compte d'épargne, notée  $AV_t$ <sup>9</sup>, va évoluer dans le temps en fonction des chargements appliqués par l'assureur et les mouvements financiers des supports d'investissement.

En contre partie, l'**assureur garantit** le versement, à la sortie du contrat en date **T**, du montant maximum (en capital ou en rente) entre la valeur des investissements personnels de l'assuré,  $AV_T$  et la valeur d'une garantie plancher prédéfinie, notée  $G$ .

Afin de faire face à ces engagements le preneur du risque doit constituer des provisions mathématiques qui correspondent à la différence entre l'engagement de l'assureur et celui

---

<sup>8</sup> La prime investie peut être nette ou brute

<sup>9</sup>  $AV_t$  : (Abréviation de l'anglais Account Value), valeur de l'épargne personnelle de l'assuré dans le fond collectif à la date t

de l'assuré. Dans l'assurance vie traditionnelle, le calcul des provisions se fait sur la base d'hypothèses actuarielles.

Ainsi suivant cette approche, le capital sous risque est défini par la somme assurée, diminuée du montant de la provision mathématique.

Or, dans le cas des contrats VA, à la date  $t$ , l'assureur détient la valeur de marché de l'épargne  $AV_t$ . Ainsi, le montant à charge de l'assureur, est défini par la différence entre la garantie et la valeur de l'épargne dans le fond à la date de sortie du contrat.

Par conséquent, le montant de la provision mathématique constituée pour couvrir ce montant à charge, va dépendre de la valeur de l'épargne et donc des hypothèses financières du marché.

Ainsi, nous avons la somme assurée et la provision qui varient avec l'évolution de la valeur du compte.

Ce caractère spécifique des contrats VA implique la définition suivante du capital sous risque,  $KSR_t$ , qui est fonction de la garantie et de la valeur de l'épargne.

A la sortie du contrat en date  $t$ ,

$$KSR_t = \begin{cases} G - AV_t, & \text{si } AV_t < G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Lorsque la valeur de l'épargne est supérieure à celle de la garantie, l'exposition de l'assureur est nulle. Néanmoins, les aléas financiers et actuariels influencent la variation du montant de l'épargne et le risque d'exposition est loin d'être négligeable. D'où le besoin de constituer une provision.

Ainsi, l'engagement de l'assureur s'écrit :

$$\underbrace{AV_t}_{\text{Valeur de l'épargne}} + \underbrace{Max(0; G - AV_t)}_{\text{Capital sous risque}}$$

## 2. Le montant garanti

### 2.1 La garantie de base

Sous sa forme la plus simple, la garantie représente un rendement minimum basé sur la prime initiale, notée  $IP_0$ , (ou sur la somme des primes périodiques).

Autrement dit, la garantie de base s'écrit :

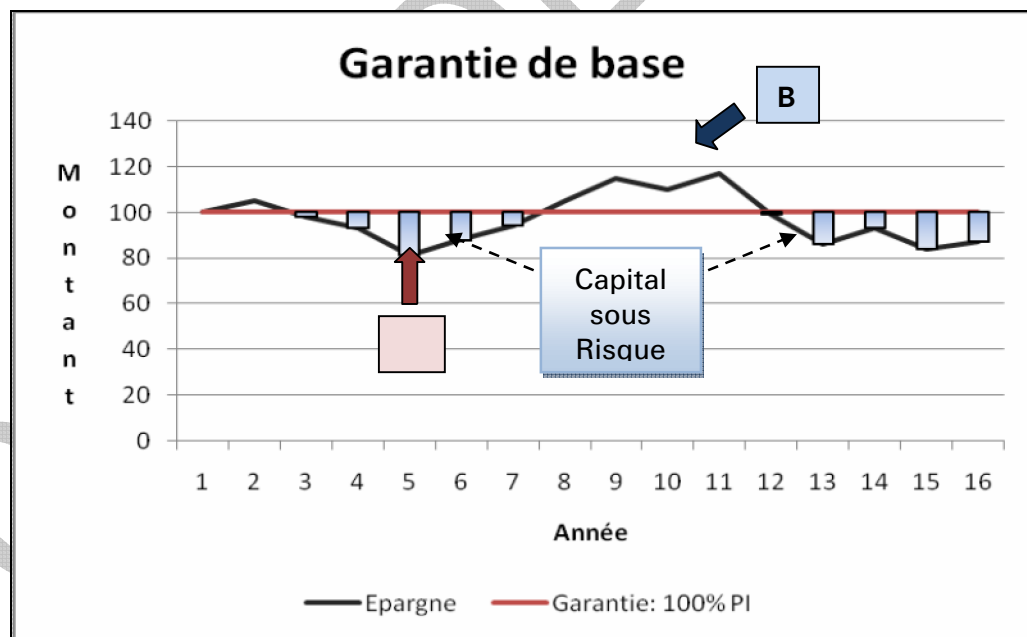
$$\text{Max} (AV_t, x\% \times IP_0)$$

Avec  $x\%$ , le rendement minimum

Ce rendement peut être nul et dans ce cas la garantie équivaut au montant investi initialement.

Graphique 1. Garantie de base : 100% de la Prime Initiale (IP)

Dans cet exemple, nous supposons que la prime initiale brute est investie dans les sub-accounts et que la garantie est égale à 100% de la prime initiale.



Le graphique nous permet d'illustrer l'importance de la performance du fond dans ce type de produit et son influence sur la somme sous risque de l'assureur et le montant perçu par l'assuré.

### Situation A

En cas de baisse de la valeur du fond, la valeur de l'épargne personnelle de l'assuré diminue également. Par contre, la somme sous risque pour l'assureur va augmenter. En effet, l'exposition de la compagnie est d'autant plus grande que les marchés financiers baissent. Nous sommes dans le cas d'une exposition asymétrique.

Si l'assuré sort du contrat (décès, sortie en rente, etc.) à la date A, il percevra le montant de la garantie, à savoir la prime initiale dans notre exemple. Le montant à charge pour l'assureur sera égal à la différence entre la garantie et la valeur du compte.

### Situation B

En cas de hausse des cours boursiers, qui permettra à la valeur du fond de dépasser le montant de la garantie (situation B), la situation s'avère avantageuse pour les deux parties. En effet, l'assuré touchera la valeur de son épargne (supérieure à celle de la garantie) et l'exposition du preneur du risque sera nulle.

**Remarque :** La garantie est payée seulement en cas de sortie du contrat (décès, maturité, sortie en rente). Si l'assuré chute, il touche uniquement la valeur de l'épargne.

## 2.2 Les options supplémentaires (=riders)

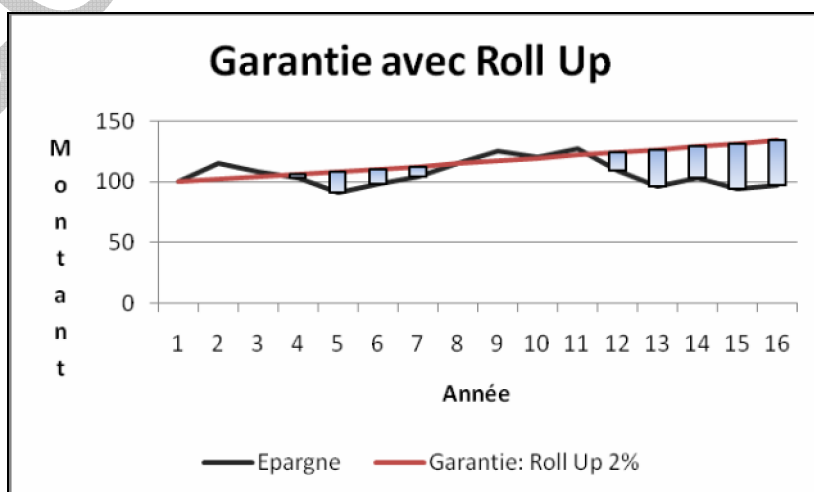
Il existe des clauses supplémentaires qui permettent à l'assuré d'avoir un montant garanti plus intéressant.

### a. Roll up (= Taux de capitalisation)

Cette clause prévoit la capitalisation à taux fixe de la prime initiale. Ce taux, noté  $tx_{kpt}$ , est identique pour tous les souscripteurs du même type de contrat. Ainsi le montant versé au bénéficiaire est égal au :

$$\text{Max} (AV_t, x\% \times IP_0 \times (1 + tx_{kpt}))$$

Graphique 2. Garantie avec taux de capitalisation à 2%



Le graphique illustre l'augmentation progressive de la garantie indépendamment de la valeur de l'épargne. Ainsi nous remarquons que l'exposition de l'assureur est plus importante que dans le cas d'une garantie de base.

Aux Etats Unis le taux de capitalisation peut atteindre 6% par an.

**b. Ratchet (= Cliquet)**

Il s'agit d'une clause supplémentaire très répandue sur le marché anglo-saxon.

Si le montant de l'épargne est supérieur à celui de la garantie à une date prédéfinie\*, l'option Ratchet prévoit l'accroissement du montant garanti au niveau du montant de l'épargne

\*Ex : à la date d'anniversaire de la souscription du contrat

Il conviendrait, dans ce cas, de noter  $G_t$ , la garantie estimée à la date  $t$  qui représente la meilleure performance du fond prise à des dates fixes antérieures à  $t$ .

$$G_t = \text{Max} (AV_{a+p}, AV_{a+2p}, \dots),$$

Avec  $a$ =date initial,  $p$ =période,  $a+xp < t, x=1 \dots \left\lceil \frac{t-a}{p} \right\rceil$

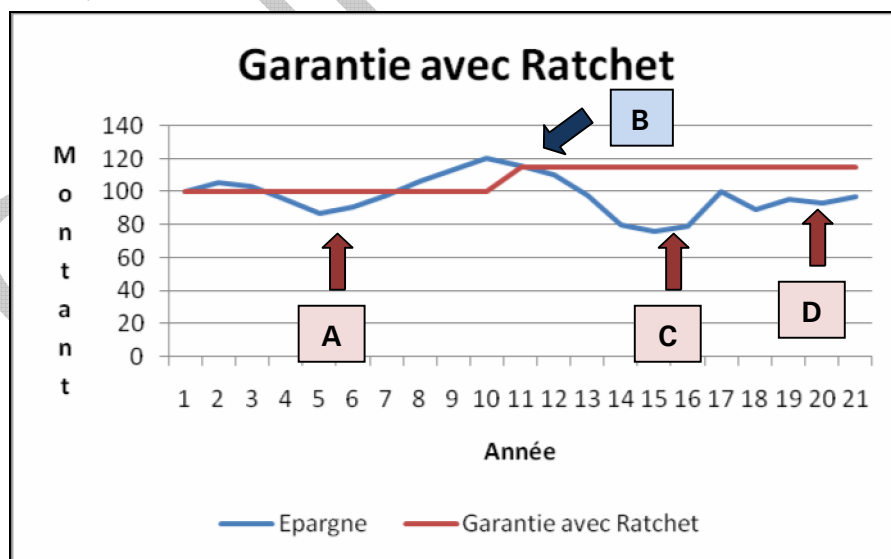
Ainsi, l'engagement de l'assureur s'écrit :

$$\text{Max} (AV_t, G_t).$$

Graphique 3. Garantie avec Ratchet quinquennal

Hypothèses :

$AV_0 = 100$  ;  $G_0 = 100$  ; maturité = 20 ans



Nous remarquons que pour  $t = 5$  (situation A),  $AV_5 < G_0$ , d'où, le montant de la garantie reste inchangé jusqu'à  $t = 10$  (situation B), où  $AV_{10} = 115 > G_0 = 100$ .

Par conséquent, la valeur de la garantie augmente à 115 (« locked in/step up » *en anglais*). Comme la valeur du fond ne dépasse plus le seuil de 115 jusqu'à la fin du contrat (*situations C et D*), la garantie payée sera de 115 en cas de sortie à la date  $t=20$ .

Cette clause est particulièrement intéressante pour l'assuré lorsque le mouvement des marchés financiers est favorable ou en cas de forte volatilité.

A la différence des garanties de Base ou avec Roll up, dont le montant est connu ou peut être estimé à la souscription, la garantie avec Ratchet peut être définie comme une garantie « variable ». En effet, c'est l'aléa financier qui déterminera le montant garanti.

\*\*\*

Les contrats en Variables Annuities proposent également la possibilité de combiner les options.

Dans ce cas le montant versé à l'assuré en cas de sortie s'écrit :

$$\text{Max} [AV_t, G_{\text{RollUp}}, G_{\text{Ratchet}}, G_{\text{Base}}]$$

### c. Target Rate (=Taux cible)

Il existe également la possibilité pour l'assuré de fixer un taux cible de retour. Il est exprimé en pourcentage de la prime initiale.

*Exemple :* TargetRate =  $120\% \times IP_0$

Si la valeur de l'épargne atteint 120% de la prime initiale, alors l'assuré sort automatiquement du contrat sans pénalités et il reçoit la valeur de son compte personnel dans le fond.

**De manière générale, afin de bénéficier de ces garanties supplémentaires l'assuré doit payer un chargement complémentaire.**



### 3. Les phases du contrat

Il existe deux phases dans les contrats Variable Annuities :

- « **Accumulation Period** »: période de paiement de la prime par l'assuré.
- « **Annuitisation Period** » : période de paiement à l'assuré du capital ou de la rente.



La mise en place d'une période d'accumulation dans un contrat VA revient à définir une période de sûreté pour l'assureur. Durant celle-ci, l'assuré ne pourra pas bénéficier de la garantie souscrite. Ainsi, l'assureur, est certain de toucher un montant minimum de primes qui couvrira (en partie) le risque supporté.

Encore une fois, le terme anglophone, « Annuitisation Period» laisse entendre qu'il s'agit d'une période de sortie en rente, mais en réalité le montant peut être perçu sous forme de capital.

Exception : la garantie en cas de décès. En raison de l'aléa sur la vie lorsque le contrat contient une garantie décès, cette dernière est payée lors de la phase d'accumulation.

CONFIDENTIAL

## II. Les produits type des Variables Annuities

Les contrats en Variable Annuities se décomposent en **deux grandes familles** : ceux qui proposent des garanties en cas de décès et ceux en cas de vie.

Ils existent quatre types de base des contrats VA qui appartiennent à l'une ou à l'autre famille suivant leurs caractéristiques. Ils sont connus sous la désignation commune :

### « GMxB » : Guaranteed Minimum « x » Benefit

#### 1. Garantie en cas de Décès

##### **GMDB : Guaranteed Minimum Death Benefit**

Le produit GMDB, garantit le paiement d'un montant en cas de décès de l'assuré. La somme est payée aux bénéficiaires de la police.

En général le montant minimum garanti est le retour de la prime initiale. Il peut aussi être assorti d'une clause de Roll up.

Pour l' (ré) assureur le profil du risque dépend alors :

- du capital sous risque
- de la mortalité de la population assurée
- et du taux de persistance<sup>10</sup> des assurés.

Le GMDB est souvent utilisé en combinaison avec d'autres produits. Dans ce cas la somme garantie sous GMDB est perçue lors de la période d'accumulation, comme nous l'avons déjà mentionné.

*Exemple:* Contrat : GMAB + GMDB, avec une période de sûreté de 10 ans.

En cas de décès pendant les 10 premières années du contrat les bénéficiaires reçoivent 80% de la prime initiale (IP) avec la garantie GMDB. Si l'assuré survit à la période d'accumulation il percevra, à maturité le montant garanti sous GMAB.

---

<sup>10</sup> Taux de persistance : pourcentage d'assurés qui ne rachètent pas leurs contrats

## 2. Garantie en cas de Vie

### 2.1 GMAB : Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

Dans le cas d'un produit GMAB, la prestation est versée en cas de survie de l'assuré à une période fixée par le contrat. Le paiement a lieu à la fin de la période d'accumulation.

Souvent le montant garanti est le retour de la prime initiale qui peut être assorti des options Roll Up et Ratchet. Dans ce cas le profil du risque pour l'assureur dépendra du montant sous risque, du taux de survie et du taux de persistance.

A la fin du contrat, l'assuré peut renouveler ce dernier et ainsi bénéficier d'une nouvelle garantie GMAB. On parle dans ce cas de *Reset*.

### 2.2 GMIB : Guaranteed Minimum Income Benefit

Le GMIB prévoit la garantie du versement d'une rente à la fin de la période d'accumulation. Le montant de la rente peut être exprimé en valeur nominale, en fonction de la prime initialement investie par l'assuré ou bien en pourcentage de la valeur de l'épargne à la fin du contrat.

Bien entendu, l'assuré a le choix de recevoir le montant sous forme de rente ou bien sous forme de capital et ce montant est le maximum entre la garantie plancher et la valeur de l'épargne.

Un dérivé de ce produit est lorsque l'assuré choisit de différer la rente une fois la période d'accumulation terminée sans effectuer des paiements supplémentaires de prime.

### 2.3 GMWB : Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit

Ce produit permet à l'assuré de percevoir des revenus en effectuant des retraits réguliers à partir de son compte d'épargne. Le contrat garantit un pourcentage de retrait fixe basé sur la prime initiale ou sur la valeur « locked in » en cas de l'option Ratchet.

En général, il n'existe pas de période de sûreté qui retarde le début des retraits. Ainsi, ils peuvent commencer rapidement après la souscription du contrat, ce qui représente un risque pour l' (ré) assureur, car cela diminue son assiette de charges.

Si l'épargne est épuisée, dans le cas d'un GMWB sans une garantie à vie, l'assureur effectue les versements jusqu'au paiement de la totalité du montant de la garantie.

A la différence du GMIB, en cas de décès, le produit GMWB prévoit le versement de l'épargne restante à la succession de l'assuré.

Il existe deux types d'incertitudes pour le preneur du risque :

- le moment où les retraits vont commencer
- le montant garanti, lorsque le produit inclut l'option Ratchet

### 3. Les garanties à vie

Les produits GMIB et GMWB sont également proposés avec une garantie des versements à vie.

Le début des retraits ou la sortie en rente se fait, en général à l'âge de la retraite. Ceci est justifié par une incitation fiscale qui prévoit, dans ce cas, une taxation moins importante, voir inexistante, des revenus.

Dans ce cas, nous parlons de : « **Guaranteed Living Benefit** »

### 4. Comparaison des différents produits

En résumé nous allons présenter les caractéristiques les plus répandues des contrats Variables Annuities sur le marché américain et la répartition parmi les ventes aux Etats-Unis

Caractéristiques Type des Contrats VA aux Etats-Unis

Type de Produit Etape de la vie	Nature de la garantie	Période d'accumulation	Garantie typique	Charges
<b>GMDB</b> Décès	Capital en cas de décès	Aucune	- Ratchet - 5% Roll Up, → jusqu'à 80 ans	15-35bp
<b>GMWB</b> Préretraite	Pourcentage garanti de retrait	Aucune	- 5-7% du montant garanti → jusqu'à épuisement	40-60bp
<b>GMIB</b> Retraite	Pourcentage garanti de rente	10 ans	- 5% Roll Up	50-75bp
<b>GMAB</b> Préretraite	Capital à maturité	10 ans	Remboursement de la prime initiale	25-75bp
<b>Life Time IB /WB</b> Retraite	Retrait/Rente viager (ère)	Jusqu'à l'âge de la retraite	- Ratchet - Roll Up	40-75bp

SOURCE : Présentation « The Actuarial Profession »

Répartition des Produits VA aux Etats-Unis

Garantie	Répartition des produits VA
<b>GMDB</b>	88%
<b>GMIB</b>	42%
<b>GMAB</b>	14%
<b>GMWB</b>	35%
<b>GLWB</b>	21%

*SOURCE : Watson Wyatt Limited*

CONFIDENTIAL

### **III. Le marché des VA**

#### **1. Historique**

Les contrats en Variable Annuities existent sur le marché américain depuis 1980 avec le GMDB. Dans les années 90, ils gagnent une part importante dans la vente des produits qui proposent des annuités avec l'apparition du GMIB en 1996. Les conditions favorables des marchés financiers et les progrès technologiques assurent leur croissance durant cette période.

A l'origine, les compagnies qui proposaient ce type de contrat se contentaient de supporter l'exposition au risque directement sur leur bilan.

En 2001, les crises économique et financière ont mise en évidence les faiblesses dans la méthode de provisionnement, dues à une analyse insuffisante des risques supportés et surtout le manque de couverture financière de ces produits. Les pertes financières pour les compagnies sont importantes et ceci se reflète par une baisse des vente de contrats VA.

Le développement des techniques de hedging (=couverture financière) et la présence sur le marche financier d'un large choix de produits dérivés compatibles avec les besoins de ce type de contrats, facilitent la mise en place d'une stratégie de gestion du risque pour les VA.

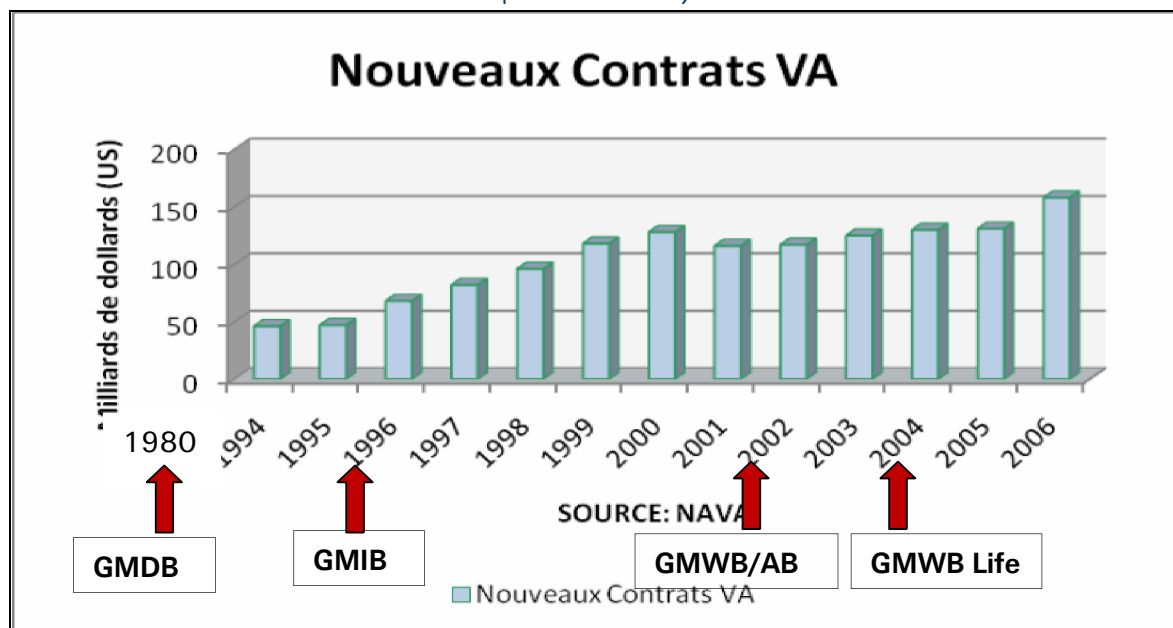
Les assureurs et les réassureurs s'orientent vers la construction de couvertures financières pour ces produits afin de limiter leur exposition en cas de baisse des cours boursiers. Ainsi, les ré/assureurs peuvent proposer des garanties intéressantes tout en limitant leur exposition face au risque de marché. Cette démarche, freine la chute dans les ventes des contrats VA et crée des opportunités dans la création de nouveaux produits.

#### **2. Développement international**

En 2002, le GMWB et le GMAB font leur entrée parmi les produits Variable Annuities et gagnent rapidement des parts du marché. Plus tard, les produits avec des garanties à vie, comme GMWB Life Time (GLWB), viennent compléter la famille des Variables Annuities.

Le graphique suivant témoigne du développement important des contrats Variable Annuities aux Etats Unis depuis 1994.

Graphique 4. La vente des contrats en Variable Annuities aux Etats Unis (1994-2006)



Les Variable Annuities ont séduit les assurés par les perspectives de profits élevés combinées à une garantie sur la vie. Après leur développement considérable aux Etats Unis, les contrats en VA intéressent également les marchés internationaux.

## 2.1 Europe

Les réformes des systèmes européens de retraite et la baisse des taux de remplacements poussent les futurs retraités à chercher un terrain d'investissement intéressant pour leur capital qui pourrait leur assurer un complément de retraite.

Ici s'inscrit un des avantages majeurs des Variables Annuities, qui peuvent être assimilés aux plans de retraite, avec les garanties viagères GMIB et GMWB. Ils bénéficient également d'avantages fiscaux qui incitent à une sortie en rente à l'âge de la retraite. Une différence est néanmoins notable, contrairement aux plans de retraite, il n'existe pas une limite pour le montant investi, dans le cas des VA.

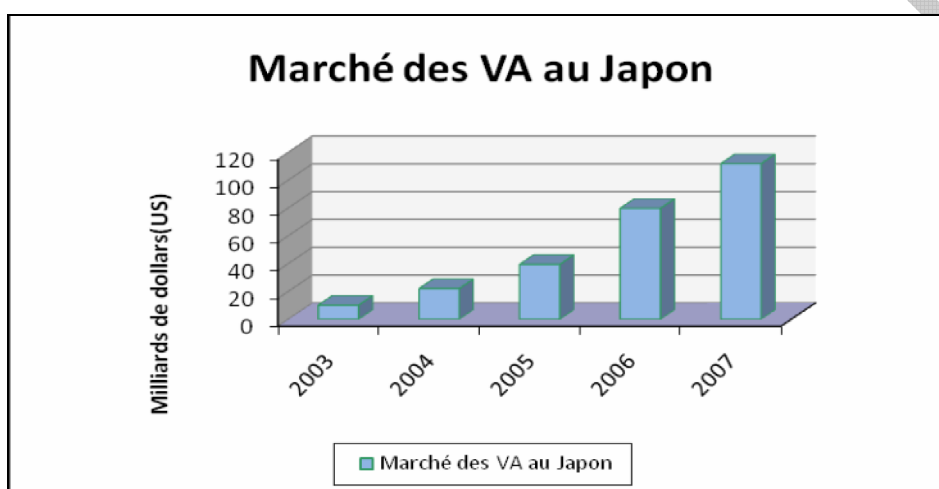
De manière générale, les VA sont des contrats à développement long, ce qui les inscrit parmi les produits intéressants pour la génération du baby-boom.

L'évolution des techniques de couverture et la diversité des produits dérivés disponibles sur le marché ont permis aujourd'hui aux assureurs de développer les produits VA et de les proposer à des prix plus compétitifs, ce qui justifie en partie leur expansion internationale.

## 2.2 Asie

Depuis leur entrée au Japon en 1999, ils ont rapidement conquis le marché. Les raisons de cette croissance importante sont multiples : un vieillissement rapide de la population, des taux d'intérêts faibles et une dérégulation du secteur bancaire.

Graphique 5. La vente des contrats Variable Annuities au Japon (2001-2006)



SOURCE : Milliman

Aujourd'hui cette tendance s'étend aux autres pays asiatiques tels que la Corée et la Thaïlande.

\*\*\*

Néanmoins l'exposition des assureurs dépend non seulement de facteurs financiers mais également de facteurs actuariels. Nous présenterons la diversité et la complexité des risques inhérents aux contrats Variables Annuities dans le chapitre suivant.



## IV. Les risques liés aux VA

Avec la mise en place d'une garantie, les contrats Variable Annuities dépassent le cadre financier des investissements à proprement dit. Désormais les compagnies sont soumises non seulement aux aléas du marché financier, mais également à ceux de la vie et du comportement de l'assuré.

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux risques inhérents aux contrats Variable Annuities.

### 1. Les risques financiers

De par leur conception les contrats VA sont hautement dépendants du mouvement des marchés financiers. De ce fait, les risques encourus se présentent à différents niveaux.

#### 1.1 Les risques de marché

Le risque de marché peut être décomposé en deux catégories : le risque directionnel et le risque de base.

##### a. Le risque directionnel

Tout d'abord nous avons le risque directionnel qui est commun à tous les produits GMxB. Ce n'est pas étonnant car un des objectifs des Variable Annuities est de protéger les assurés de la volatilité des marchés.

En effet, la compagnie s'engage à compenser le déficit, entre la valeur de l'épargne dans les fonds et le montant de la garantie, en cas de chute des marchés financiers. Ainsi, l'exposition de l'assureur, face aux mouvements défavorables des indices boursiers et donc à celle des variables du marchés (taux d'intérêt, volatilité) est très importante.

*Par exemple :*

**Une forte volatilité** augmente la probabilité d'avoir un scénario de mouvement défavorable du marché.

#### **Problématique :**

Dans le cas de contrats Variable Annuities tous les produits seront affectés par des éventuels mouvements défavorables du marché financier. A la différence de l'assurance traditionnelle, il est difficile de faire une diversification au sein de la population assurée.

En effet, tous les produits étant indexés aux cours boursiers, une chute éventuelle de ces derniers affectera toutes les polices. La loi des grands nombres ne peut pas s'appliquer et nous assistons même à une concentration du risque.

Si les mouvements du marché sont favorables, le montant payé par le ré/assureur au titre de la garantie, peut être négligeable, voir nul si la valeur des fonds est supérieure à celle de la garantie. Par contre, dans le cas de marchés mal orientés, le coût supporté peut être très significatif à cause de l'absence de diversification.

\*\*\*

Même si en théorie, il est possible d'éliminer le risque directionnel, au moyen d'une couverture financière (hedging) adéquate, en pratique il existe un risque de base et un arbitrage à faire entre le coût et l'efficacité de cette couverture.

### **b. Le risque de base**

Le risque de base survient, lorsque les actifs de couverture, ou bien les actifs de référence utilisés pour l'évaluation des engagements, ne correspondent pas au niveau des caractéristiques et donc de l'évolution, aux actifs qui composent les fonds. Cette divergence peut s'avérer coûteuse pour l'assureur. Le risque de base est difficile à quantifier, d'où la difficulté à estimer le montant suffisant de provisions pour le couvrir.

## **1.2 Les risques de crédit**

A la sortie du contrat, la compagnie aura besoin de liquidité afin d'effectuer les versements garantis à l'assuré. Elle devra convertir en valeur monétaire les actions et les obligations sous-jacentes aux sub-accounts. D'où l'exposition de l'assureur au risque d'absence de liquidité du marché et au risque de défaut des contreparties.

Celle-ci sera amplifiée, en cas de mise en place d'une stratégie de couverture, qui utilisera des produits et des structures financières.

## **2. Les risques actuariels**

Les risques actuariels des produits VA découlent du caractère « assurance » des contrats. Leur définition s'inscrit dans le cadre de l'assurance vie traditionnelle. Néanmoins, nous allons voir dans cette partie que leur impact peut être accentué en raison des aléas financiers.

### **2.1 Les risques viagers**

Les contrats Variable Annuities présentent une exposition aux risques de mortalité ou bien de longévité pour la compagnie. Ces deux facteurs peuvent avoir un impact tant sur la tarification des contrats que sur la détermination des engagements de l'assureur.

#### **a. Le risque de mortalité**

Le risque de mortalité est un risque typique de l'assurance vie. En général, il peut être limité par diversification. En effet, lorsque la population assurée est importante, la loi des grands nombres peut être appliquée et la probabilité pour la compagnie d'être affectée par le risque de mortalité diminue.

Par contre, lorsque l'on inclut un risque financier, quand le nombre d'assurés est petit, l'impact négatif d'éventuels mouvements défavorables des marchés financiers sur le résultat de la compagnie, peut être très important.

Bien entendu, en cas de crise financière qui se prolonge sur une grande période, même les portefeuilles avec un nombre important d'assurés peuvent être atteints.

#### **b. Le risque de longévité**

Le risque de longévité s'avère important dans le cas des produits GMWB et GMIB lors de versements à vie. La période des paiements dépend, alors, de l'espérance de vie des assurés. Ainsi, le coût pour l'assureur augmente avec durée de vie de l'assuré.

En cas d'un taux de chute important au sein de la population, l'assureur doit faire face au problème d'anti-sélection. En effet, souvent le portefeuille résultant est plus risqué que celui d'origine. Il est composé essentiellement d'une population qui présente un taux de persistance élevé et une mortalité plus faible que celle estimée au départ.

\*\*\*

Nous pouvons, déjà, remarquer l'impact du comportement des assurés que nous allons introduire dans la section suivante.

### **2.2 Les risques liés aux comportements des assurés**

Les risques de comportements sont liés aux décisions prises par l'assuré à l'égard de son profil de risque et du contrat d'assurance en général. En fonction des garanties, certains comportements peuvent avoir un impact très important sur le résultat de la compagnie.

#### **a. Le risque de chute**

Le taux de chute correspond à la probabilité que l'assuré met fin au contrat, soit parce qu'il souhaite arrêter les paiements des primes, soit parce qu'il souhaite récupérer la valeur du fond.

La chute met fin au contrat et généralement l'assuré récupère la valeur de son compte diminuée de pénalités qui sont calculées en fonction de la date de rachat.

#### **b. Le risque de retrait**

C'est le risque qu'un assuré prenne la décision de commencer à faire des retraits à un moment défavorable pour le réassureur.

Il est intéressant de noter que l'assuré n'exerce pas toujours cette option de manière optimale pour lui.

#### **c. Le risque d'allocation des fonds**

Certains contrats VA proposent à l'assuré l'option de choisir une série de fonds dans lesquels son épargne sera répartie. Cette possibilité permet à l'assuré d'allouer ses économies suivant son profil de risque.

Il existe des contrats qui permettent le changement des allocations au cours du contrat, ce qui peut jouer à l'encontre du réassureur.

Le coût de gestion de chacun des fonds augmente avec la volatilité des supports sous-jacents au fond, donc avec le degré de risque inhérent.

Comme la tarification de ce risque se fait sur la base d'une répartition moyenne parmi les actifs, une divergence entre répartition tarifée et l'allocation réelle peut induire un coût supplémentaire pour la compagnie.

\*\*\*

Difficilement modélisables, les hypothèses sur le comportement de l'assuré doivent être prudentes et nécessitent l'introduction de marges.

### **2.3 Les risques de souscription**

Les contrats Variable Annuities sont également soumis aux risques liés à la tarification des produits, à la modélisation des engagements des assureurs et au programme de couverture financière.

En effet, si les modèles ou les hypothèses utilisées pour les calculs tarifaires ou de provisionnement ne correspondent pas au profil réel du portefeuille, la rentabilité des contrats peut être sensiblement affectée.

\*\*\*

Les produits VA sont caractérisés par une forte interaction entre les risques financiers, actuariels et comportementaux. Leur modélisation exige une analyse approfondie de ces trois types de risque, ce qui justifie l'attention particulière que nous leur accordons.

## B. Notions Théoriques

### I. Finance

Il est important de rappeler quelques notions de finance afin de pouvoir aborder l'approche financière de calcul des provisions et la modélisation du cours d'un actif financier.

#### 1. Processus stochastiques - Généralités

L'évolution dans le temps, d'une variable aléatoire peut être représentée par un processus stochastique.

Nous pouvons faire la distinction entre :

- **un processus en temps discret**, lorsque les changements de valeurs de la variable aléatoire se produisent à des points fixes du temps.
- **un processus en temps continu**, lorsque les changements se font de manière continue, c'est-à-dire à n'importe quel moment.

Lorsque la loi de probabilité de la variable aléatoire est discrète, l'espace des états du processus est discret. De même si la loi de probabilité est continue nous définirons l'espace des états du processus comme continu.

Dans notre étude le phénomène aléatoire que nous souhaitons modéliser est l'évolution des cours des actifs financiers. Pour ce fait, nous allons utiliser un processus en temps continu et à espace d'états continus. Celui qui sera le mieux adapté à cette modélisation en raison de la fréquence importante de la variation des cours des actifs sur les marchés financiers.

Selon leurs propriétés, on peut distinguer plusieurs familles de processus stochastiques. Nous allons nous intéresser ici à un cas particulier des processus stochastiques, à savoir le processus de Markov.

Avant de poursuivre, rappelons brièvement la notion de filtration.

#### Définition : Filtration

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé, une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . La tribu  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représente l'information dont nous disposons à l'instant  $t$ .

Ainsi, une filtration définit l'ensemble de l'information connue à la date  $t$ .

Lorsque nous avons un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , celui-ci est adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable.

Le processus de Markov est un cas particulier de processus stochastique. Il est défini comme suit :

**Définition : Processus de Markov**

Un processus de Markov est une suite  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , de variables à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et telle que pour tout  $n \geq 0$  et pour tout fonction  $f$  -mesurable on ait la propriété suivante :

$$E[f((X_t) | \sigma(X_r, r \leq s))] = E[f((X_t) | \sigma(X_s))]$$

Autrement dit, l'état futur d'un processus de Markov ne dépend pas de l'histoire du processus mais seulement de l'état à l'instant présent.

Pour un processus de Markov homogène la fonction de transition entre deux états  $t$  et  $s$  ne dépend que de  $t - s$ .

Dans cet esprit nous pouvons introduire la définition d'un mouvement brownien standard qui est un exemple fondamental d'un processus de Markov homogène.

**Définition : Mouvement Brownien standard**

Un processus stochastique  $(W_t)_{t \geq 0}$  est appelé mouvement brownien (standard) si nous avons :

- $W_0 = 0$
- $(W_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants et stationnaires,
- pour tout  $s < t$ , la variable aléatoire  $W_t - W_s$  suit la loi normale  $N(0, \sqrt{t-s})$  de moyenne nulle et de variance  $t-s$ .

Ainsi, il décrit l'évolution d'une variable dont les variations sont normalement distribuées.

**Remarque :** la notation  $(W_t)_{t \geq 0}$  découle de l'autre appellation du mouvement brownien qui est processus de Wiener.

Nous pouvons généraliser la définition du mouvement brownien standard en introduisant un paramètre de tendance centrale  $a$ , appelé drift, et un bruit  $b$  qui est fonction du processus de  $W_t$  et qui vient perturber la trajectoire suivie par la variable aléatoire.

En effet pour un mouvement brownien standard, le drift est égal à 0

Nous obtenons ainsi le processus de Wiener général qui s'écrit pour une variable  $x$  :

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dW_t$$

Dans ce cas le drift et la variance sont constants. Or, nous pouvons s'approcher d'avantage d'une modélisation adéquate des prix des actifs en étudiant un processus d'Itô qui considère que les paramètres  $a$  et  $b$  dépendent de la variable modélisée  $x$  et du temps  $t$ .

Définissons à présent le processus d'Itô.

**Définition : Processus d'Itô**

Soient un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$  muni d'une filtration et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. Un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t C_s dW_s$$

Pour tout  $t \leq T$ ,  $X_0$  est  $F$ -mesurable et les processus  $(A_t)_{0 \leq t}$  et  $(C_t)_{0 \leq t}$  sont des processus adaptés à  $F$  et intégrables.

Nous avons l'équation différentielle suivante :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_t$$

Où  $W_t$  suit un processus de Wiener standard,  $a$  représente le drift, et  $b^2$  le paramètre de variance.

**2. Processus des cours des actifs financiers**

Pour la modélisation de l'actif nous supposons que le drift s'exprime en fonction de l'espérance de rentabilité de l'actif, noté  $\mu$  et la valeur de l'actif la date  $t$ . En ce qui concerne la volatilité, elle est également représentée en fonction du cours de l'actif.

Ainsi nous pouvons définir le processus suivi par la variation de cours d'un actif comme suit :

$$dS_t = S_t \cdot \mu \cdot dt + S_t \cdot \sigma \cdot dW_t$$

Autrement dit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

En particulier, il s'agit du modèle de Black & Scholes sous la probabilité  $P$ .

Essayons à présent de définir le processus suivi par  $S_t$ . Pour ce fait nous allons utiliser le lemme d'Itô.

**Définition : Lemme d'Itô**

Soit un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $dX_t = a(t) \cdot dt + b(t) \cdot dW_t$  et considérons une fonction  $f$  deux fois dérivable, et continue telle que  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  existent. Alors le processus  $f(t, X_t)$  admet la différentielle stochastique :

$$df(t, X_t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \times a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times b^2(t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x} \times b(t) \cdot dW_t$$

Avec  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien.

Appliquons à présent le lemme d'Itô pour trouver le processus de  $S_t$ .

Soit la fonction  $G = \ln(S_t)$ . D'après le lemme d'Itô nous avons :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial G}{\partial x} \cdot b \cdot dW_t$$

Avec  $W_t$  un processus de Wiener.

Nous remarquons que la fonction G suit également un processus d'Itô. Dans ce cas le drift est égal à :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot b^2 \right)$$

Le paramètre de la variance est égale à :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \cdot b^2$$

Nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

En posant :  $a = \mu \cdot S_t$  et  $b = \sigma \cdot S_t$  la dérivée de G s'écrit :

$$dG = \left[ \frac{1}{S_t} \times \mu \cdot S_t + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \right] dt + \frac{1}{S_t} \cdot \sigma \cdot S_t \cdot dW_t$$

D'où :

$$dG = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

Ainsi la variation de G entre les date t et une date future T, entre suit une loi normale de

moyenne  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)$  et de variance  $\sigma^2 \cdot (T - t)$ .

Comme,  $d \ln S(t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$  nous pouvons en déduire que :

$$\ln S(t) - \ln S(0) \rightarrow N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t); \sigma \cdot \sqrt{(T - t)} \right]$$

Et

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} \rightarrow N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t); \sigma \cdot \sqrt{(T - t)} \right]$$



Enfin nous avons :

$$\ln S(t) \rightarrow N \left[ \ln S(0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t); \sigma \cdot \sqrt{(T - t)} \right]$$

Comme  $\ln S(t)$  suit une loi normale alors  $S(t)$  suit une loi Log Normale.

Finalement le processus suivit pas  $S_t$  est décrit par :

$$S_{(t)} = S_{(0)} \cdot \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot dW_t \right)$$

Il s'agit du modèle de mouvement brownien géométrique.

Avec :

- $\mu$  est le rendement espéré ou drift
- $\sigma$  est la volatilité
- $W_t$  est un mouvement brownien standard sous P.

Posons  $\mu^* = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , pour une variation entre la date zéro et n'importe quelle date T

- Une espérance égale a :  $E(S_{(t)}) = S_{(0)} \cdot e^{\mu^* \cdot T}$
- Une variance égale a :  $Var(S_{(t)}) = S_{(0)}^2 \times e^{(2 \cdot \mu^* \cdot T)} \times (e^{\sigma^2 \cdot T} - 1)$

\*\*\*

Nous avons défini le processus d'évolution du cours de l'actif sous la mesure de probabilité P.

### 3. Le modèle de Black & Scholes

Dans cette partie nous allons présenter les éléments théoriques qui nous serviront dans le calcul des provisions suivant l'approche financière.

Comme nous l'avons remarqué le montant sous risque pour le réassureur peut être apparenté au payoff d'un put européen. En effet ce dernier s'écrit :

$$\text{Max}(0; G - AV_t)$$

Avec  $G$ , le montant garanti et  $AV_t$ , la valeur du compte de l'assuré à la date  $t$ .

Une option de vente européenne, autrement dit un put européen, donne le droit et non l'obligation de vendre à la date de maturité une quantité donnée d'un actif sous-jacent  $S_t$  au prix d'exercice  $K$ , dit *strike*. A maturité, la valeur de l'option est donnée donc par :

$$\text{Max}(0, K - S_t)$$

Par identification, le prix d'exercice sera égale au montant de la garantie et  $S_t$  représente la valeur du compte dans le fond.

Ainsi, l'évaluation de l'engagement du réassureur revient à calculer la valeur de l'option de vente. Nous pouvons effectuer ce calcul en utilisant le modèle de Black & Scholes dans un univers risque neutre.

#### Hypothèses du modèle de Black & Scholes

- Le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique
- Il n'y a pas de paiement de dividendes durant la vie de l'option
- L'option à évaluer est européenne
- La volatilité et le taux d'intérêt sont connus et constants
- Le marché est complet
- Absence d'opportunité d'arbitrage
- Il est possible d'acheter ou de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais : le marché est parfait
- les ventes à découvert sont autorisées

L'évaluation se fait en univers risque neutre (c'est-à-dire sous la probabilité  $Q$ ) ce qui implique que le taux de rendement de n'importe quel actif est égal au taux sans risque, noté  $r$ .

Or, le processus de l'actif que nous avons défini dans la partie précédente a été défini sous la probabilité  $P$ . Dans ce cas, le taux de rendement de l'actif est  $\mu$  qui dépend du degré d'aversion au risque. Ce qui ne correspond pas aux hypothèses d'évaluation en risque neutre, car nous considérons que les agents sont neutres au risque.

D'où le besoin de faire un changement de mesure de probabilité.

Afin d'introduire le théorème de Girsanov, qui nous permettra de faire ce changement nous allons nous intéresser d'abord à un autre processus stochastique : la martingale

**Définition : Martingale**

Soient un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$  et une filtration  $(F_t)_{t \geq 0}$  qui est une famille croissante de sous-tribus de  $F$ .

Une  $(F_t)_{t \geq 0}$ -martingale est un processus stochastique  $(M_t)_{t \geq 0}$  tel que :

$$E[M_t] < \infty, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

$$E[M_t | F_s] = M_s \text{ pour toute paire } s < t$$

Notons que l'espérance d'une martingale est constante et nous avons pour tout  $s \geq 0$ ,  $E[M_s] = E[M_0]$

Le mouvement brownien est aussi une martingale avec  $(F_t) := \sigma(W_s)_{s \leq t}$  car :

$$E[W_t] = E[N(0, t)] < \infty \text{ et } E[W_t - W_s | F_s] = E[W_t - W_s] = 0$$

Avec une loi de probabilité sur  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et une martingale continue positive, nous pouvons définir aisément une nouvelle loi de probabilité, absolument continue par rapport à loi initiale.

Ce théorème a été développé par Girsanov et il nous sera utile pour le passage entre la probabilité  $P$  et la probabilité risque neutre  $Q$ .

**Définition : Théorème de Girsanov**

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$  où  $(F_t)_{t \geq 0}$  et la filtration d'un mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$ . Nous avons un processus mesurable  $X$  adapté à  $(F_t)_{t \geq 0}$ , tel que :

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] < \infty \text{ pour tout } 0 < t < \infty$$

Soit  $Q$  la mesure de probabilité définie sur  $(F_t)_{t \geq 0}$  par la densité de Radon Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ \int_0^T X_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T X_t^2 dt \right\} \text{ pour tout } t < T$$

alors  $W'_t = W_t - \int_0^t X_s ds$  pour tout  $t \in [0, T]$  est un processus de Wiener sous la nouvelle mesure de probabilité  $Q$  et la filtration de  $W$ .

Il vient : Posons  $X_s = \frac{r - \mu}{\sigma}$  avec  $r$  le taux sans risque. Alors :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ \frac{r - \mu}{\sigma} \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 \cdot T \right\}$$

et  $\tilde{W}'_t = W_t - \int_0^t \frac{r-\mu}{\sigma} ds$  est un mouvement brownien.

Par conséquent :

$$dS_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot \left[ dW'_t + \frac{r-\mu}{\sigma} dt \right]$$

d'où :

$$dS_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot d\tilde{W}'_t + (r-\mu) \cdot S_t dt = r \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot d\tilde{W}'_t$$

En utilisant le même procédé que précédemment nous avons :

$$S_T = S_t e^{\left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \tilde{W}'_t (T-t) \right\}}$$

Remarque : le taux de rendement change mais pas la volatilité

#### 4. Evaluation d'un put européen

Nous avons sous la probabilité risque neutre, le prix du put qui est égal à l'espérance du payoff actualisé au taux sans risque.

La formule de Black and Scholes permet d'évaluer la valeur d'un put européen à la date zéro.

Notations :

- $S_0$  : cours de l'actif à la date 0
- $K$  : le prix d'exercice de l'option
- $r$  : taux d'intérêt sans risque continu
- $N(x)$  : Fonction de répartition d'une variable gaussienne
- $T$  : date de maturité
- $\sigma$  : volatilité de l'actif supposée constante

Ainsi, le prix du put européen s'écrit :

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

## II. Mesure de risque

La mesure de risque est exprimée par un nombre réel et permet de quantifier le risque supporté par la compagnie. Dans cette partie nous définirons la « Value at Risk » et la CTE (Conditional Tail Expectation).

### 1. « Value at Risk »

C'est une mesure de risque couramment utilisée en finance. Pour un niveau de confiance  $\alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) elle s'écrit :

$$V_\alpha(L_t) = \inf\{V : P[L_t \leq V] \geq \alpha\}$$

Avec  $L_t$  : le montant des pertes actualisés à la date  $t$  suivant un taux sans risque.

$V_\alpha$  est alors le montant minimal, vu à la date  $t$ , que la compagnie doit détenir afin de pouvoir faire face à ses engagements en cas d'un événement qui a une probabilité  $\alpha$  de se réaliser.

Cependant, la mesure du risque suivant cette approche n'est pas toujours optimale. En effet il est possible que l'espérance des pertes actualisés soit supérieure au montant défini par la VAR.

$$V_\alpha(L_t) \leq E[L_t]$$

Ainsi, nous pouvons présenter une alternative à cette mesure qui est la CTE.

### 2. « Conditional Tail Expectation » ou CTE

Cette mesure est également connue sous l'appellation « tail-VAR » et « expected shortfall ». Cette mesure est étroitement liée à la VAR. Elle dépend également d'un niveau de confiance  $\alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Sachant  $\alpha$ , la CTE est définie comme l'espérance de la perte sous la condition que celle-ci se situe dans le quantile supérieur  $(1 - \alpha)$  de la queue de distribution. Nous avons l'expression suivante :

$$CTE_\alpha(L) = E[L_t \mid L_t > V_\alpha]$$

Pour  $\alpha$  nul, nous avons  $CTE_\alpha(L) = E[L_t]$ . Nous pouvons en déduire que la CTE est toujours supérieure à la valeur de l'espérance de la perte, donc de la perte moyenne. Ainsi, la CTE se présente comme une bonne alternative à la mesure VaR.

\*\*\*

Dans notre modèle nous allons utiliser comme mesure du risque la CTE. Elle nous permettra de définir le niveau de provisions et de capital pour des niveaux  $\alpha$  déterminés.

Nous appliquerons le calcul à la distribution des cash flow générée à partir de simulations stochastiques en prenant les  $100(1 - \alpha)$  % réalisations les plus défavorables.

# Etude Pratique

---

CONFIDENTIAL

Dans ce chapitre nous allons présenter pas à pas le développement de notre étude et son application pratique.

Tout d'abord nous allons nous intéresser au calcul des provisions suivant l'approche actuarielle traditionnelle. Nous présenterons d'abord la modélisation des cours des actifs financiers, ensuite nous feront une étude pratique sur les produits GMIB GMDB.

Nous allons présenter et commenter les résultats que nous avons obtenus avec les tests de sensibilité des paramètres.

### A. L'approche actuarielle

Le principe de l'approche actuarielle est la modélisation des cash flows futurs dans un univers « real world ». Son avantage est la prise en compte des données historiques, ce qui justifie le caractère « réel » des résultats obtenus.

En particulier, dans le cas des Variable Annuities, qui sont des produits à développement long, elle permet de représenter la tendance à long terme d'évolution des engagements en ignorant les problèmes de volatilité à court terme.

Le développement de cette méthode se fait en deux étapes.

La première étape consiste dans la modélisation des actifs sous-jacents aux sub-accounts permettant de générer une multitude de scénarii d'évolution des prix des actifs.

La deuxième étape est l'intégration de ces scénarii dans un modèles de cash flow qui tient compte de l'ensemble des hypothèses actuarielles comportementales.

En particulier, l'actuaire déterminera les marges nécessaires pour faire face à un risque de changement de tendance par rapport aux hypothèses historiques.

Après avoir introduit la modélisation des cours des actifs et celle des produits GMxB, nous allons illustrer l'approche actuarielle à travers deux exemples de produits :

Produits Etudiés	Marché
A. GMIB et GMDB	Asiatique
B. GMWB	Américain

## I. La modélisation des cours des actifs

Comme nous l'avons déjà exposé, le capital sous risque du réassureur dépend du niveau de l'épargne personnelle des assurés. Or, les fonds sont gérés au niveau de la cédante. Ceci rend indispensable la modélisation des cours des actifs financiers sous-jacents.

Il existe plusieurs modèles qui représentent le cours des actifs : Log Normal, modèle de Wilkie, modèles autorégressifs...

Il n'existe pas une recommandation spécifique à l'égard des actuaires concernant le modèle utilisé.

Cependant le modèle Log Normale semble le plus populaire. Il est utilisé dans l'approche financière car il est en accord avec le modèle de Black and Scholes. Notre objectif étant de développer les deux approches, nous allons également adopter le modèle Log Normale pour la modélisation des cours en univers « real world ».

Les fondements théoriques du modèle ont été développés dans la partie « Notions de Base ». Ils nous serviront d'appuis pour la construction d'un générateur de scénarii des mouvements des actifs financiers.

### 1. La méthode Monte Carlo

#### **Définition : Méthode de Monte Carlo**

La méthode de Monte Carlo permet d'effectuer un nombre important de tirages aléatoires de la variable étudiée.

Dans notre cas nous l'utiliserons pour modéliser le processus de prix des actifs sous jacents aux fonds.

Ainsi nous avons défini les trois composantes utilisées pour la modélisation des prix des actifs dans un univers réel :

- Méthode : Monte Carlo (minimum 1000 scénarii)
- Distribution : Log Normale
- Données : Historiques (rendement et volatilité des actifs)

### 2. Le marché américain

Pour les produits vendus sur le marché américain, l'Académie Américaine des Actuaires (AAA), propose pour la modélisation en univers « real world », des scénarii d'évolution des actifs.

L'AAA a publié 10'000 scénarii pour 19 différents types d'actifs (U.S Treasure Yields, U.S Bonds, etc...). La liste complète est défini dans l'Annexe.



L'évolution des fonds est représentée par des facteurs d'accumulation exprimés en base mensuelle et ce, sur un horizon de 30 ans. Il est possible de combiner les scénarii en fonction du portefeuille détenu par l'entreprise.

### 3. Autres marchés

Pour les contrats Variable Annuities qui ne peuvent pas utiliser les scénarii développés par l'AAA, les entreprises peuvent développer ou se procurer un générateur de scénarii approprié. Les données historiques prises en compte seront les données spécifiques au marché local.

Nous avons développé sous VBA un tel générateur qui possède les trois caractéristiques définies antérieurement.

Dans la partie qui suit nous allons exposer les étapes de sa création en discutant des paramètres utilisés et des difficultés rencontrées. Enfin nous présenterons les résultats obtenus complétés par une analyse.

#### 3.1 Le générateur de scénarii

##### a. Cadre

Les primes des produits sont investies, à travers des fonds, dans des actions et des obligations, sur le marché local et sur le marché international.

Comme il n'existe que rarement un historique représentatif et suffisant qui décrit les mouvements des fonds dans le passé, nous allons travailler avec des indices de référence. Ces derniers sont choisis de sorte que leur évolution soit similaire à celle des fonds.

##### b. Procès

- Définir les paramètres financiers (rendement et volatilité historiques) des indices
- Définir une matrice de corrélation entre les indices
- Implémentation de la distribution Log-Normale et de la méthode de Monte Carlo
- Génération de 1000 scénarii sur  $n$  périodes en fonction des paramètres
- Représentation graphique
- Classification des résultats de la  $n^{\text{ème}}$  période

**Programmation.** Les calculs et le développement du générateur sont faits sous Excel avec VBA<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> VBA : Visual Basic Application

### 3.2 Paramétrisation

Il s'agit de déterminer une période d'observation et de relever les cours des différents titres. A partir de leur variation quotidienne et mensuelle, nous définissons leur rendement moyen et leur volatilité sur cette période.

Comme le développement des contrats Variable Annuities est long, il serait judicieux de prendre également une période d'observation importante.

Nous allons estimer de façon empirique le rendement et la volatilité observée sur le marché. A cet effet, nous considérons les indices boursiers prélevés quotidiennement sur  $n$  années.

#### Notations :

- $S_i$  : le cours de clôture pour la  $i^{\text{ème}}$  observation
- $n$  : le nombre d'observations
- $dt$  : la durée de l'intervalle de temps en années

#### a. Rendement historique

Nous considérons qu'il n'y pas de détachement de dividende. Ainsi, l'espérance de rentabilité, notée  $U_i$ , calculée sur une période, s'écrit :

$$U_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ avec } i=1, \dots, n$$

#### b. Volatilité historique

La volatilité historique représente l'incertitude sur la rentabilité de l'actif. Donc elle s'écrit en fonction de  $U_i$ .

L'estimation  $s$  de l'écart type des  $U_i$ , s'écrit :  $s = \sqrt{\frac{n \cdot \sum U_i^2 - (\sum U_i)^2}{n \cdot (n-1)}}$ .

Or, l'écart type des  $U_i$  est égal à  $\sigma\sqrt{dt}$ . D'où :  $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{dt}}$

Autrement, la volatilité estimée est définie par :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{dt}} \times \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( U_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n U_j \right)^2}$$

Exemple :

Soit les valeurs de l'indice ASIA 1 exprimé en JPY, sur la période du 15 Octobre au 14 Novembre 2007 ce qui revient à faire le calcul sur  $n=23$  périodes. Nous obtenons la volatilité et le rendement historiques suivants :

Jour	Date	Cours (JPY)	Rentabilité quotidienne
0	12.10.2007	1963.52	
1	15.10.2007	1961.11	-0.12%
2	16.10.2007	1923.02	-1.96%
3	17.10.2007	1893.49	-1.55%
4	18.10.2007	1914.15	1.09%
5	19.10.2007	1882.82	-1.65%
6	22.10.2007	1849.44	-1.79%
7	23.10.2007	1858.31	0.48%
8	24.10.2007	1850.38	-0.43%
9	25.10.2007	1831.71	-1.01%
10	26.10.2007	1862.37	1.66%
11	29.10.2007	1900.86	2.05%
12	30.10.2007	1901.71	0.04%
13	31.10.2007	1916.93	0.80%
14	01.11.2007	1935.51	0.96%
15	02.11.2007	1893.38	-2.20%
16	05.11.2007	1863.75	-1.58%
17	06.11.2007	1863.11	-0.03%
18	07.11.2007	1841.93	-1.14%
19	08.11.2007	1794.9	-2.59%
20	09.11.2007	1768.16	-1.50%
21	12.11.2007	1723.27	-2.57%
22	13.11.2007	1721.29	-0.11%
23	14.11.2007	1772.15	2.91%
<b>Total</b>			<b>-10.25%</b>

Nous avons à la date 1,

$$U_1 = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{1961.11}{1963.52}\right) = -0.12\%$$

Sur la totalité de la période le rendement mensuelle est égale à :

$$\sum U_i = -10.25\%$$

Le calcul de la volatilité estimée s'écrit alors :

$$\sum U_i^2 = 0.56\% \text{ et nous avons :}$$

$$s = \sqrt{\frac{0.56\%}{22} - \frac{(-10.25\%)^2}{22 * 23}} = 1.53\%$$

Dans notre exemple nous considérons que le nombre de jours de Bourse par an sont 250, d'où :

$$\hat{\sigma} = \frac{1.53\%}{\sqrt{\frac{1}{250}}} = 1.53\% \times \sqrt{250} = 24.2\%$$

**Remarque :** les cours sont pris à la date de clôture, entre lundi et vendredi, d'où le saut au niveau des dates.

Ainsi nous pouvons obtenir la volatilité et le rendement observés sur le marché. Pour notre exemple nous avons effectué le calcul sur une période d'observation de 8 ans et pour quatre indices différents.

\*\*\*

Nous allons nous intéresser maintenant à la corrélation entre les mouvements des différents actifs et le calcul de la matrice de corrélation.

### c. Matrice de corrélation

Il est important de remarquer qu'il existe une corrélation entre les variations des titres. Si nous considérons un portefeuille composé d'actions et d'obligations qui sont domestiques et internationales, le mouvement de chacune peut avoir une influence plus ou moins importante sur celui des autres.

Ainsi nous définissons une matrice de corrélation entre les titres qui est définie de la manière suivante.

**Pour étudier l'existence de corrélation entre deux variables nous utilisons comme mesure de la corrélation, le coefficient de corrélation de Pearson.**

La corrélation de Pearson, exprimée par le coefficient de corrélation  $r_p$ , reflète le degré de relation linéaire entre deux séries de variables aléatoires de même longueur.

Nous avons les cas suivants :

- $r_p = 1$  (ou  $r_p = -1$ ), la relation linéaire entre les deux variables est parfaitement positive (ou négative)
- $r_p = 0$ , les variables sont linéairement indépendantes
- $-1 < r_p < 1$ : renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte. Le coefficient de corrélation n'est pas sensible aux unités de chacune de nos variables.

#### Remarques

- $r_p$  n'est pas sensible aux unités de chacune de nos variables
- $r_p$  est très sensible à la présence de valeurs extrêmes ou illogiques dans l'ensemble de données (ex. valeurs très éloignées de la majorité des autres, pouvant être considérées comme des exceptions).

#### Formules

Le coefficient de corrélation est noté par  $r_p$ , où :

$$r_p = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Autrement dit,

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Avec,

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}), \text{ la covariance entre X et Y}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \text{ l'écart type de X}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i : \text{ la moyenne de X}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}, \text{ l'écart type de Y}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i : \text{ la moyenne de Y}$$

**La matrice de corrélation**

La matrice de corrélation pour quatre actifs  $S_{Ad}, S_{Od}, S_{Ai}, S_{Oi}$  se présente ainsi :

	$S_{Ad}$	$S_{Od}$	$S_{Ai}$	$S_{Oi}$
$S_{Ad}$	$r = (S_{Ad}, S_{Ad})$	$r = (S_{Ad}, S_{Od})$	$r = (S_{Ad}, S_{Ai})$	$r = (S_{Ad}, S_{Oi})$
$S_{Od}$	$r = (S_{Od}, S_{Ad})$	$r = (S_{Od}, S_{Od})$	$r = (S_{Od}, S_{Ai})$	$r = (S_{Od}, S_{Oi})$
$S_{Ai}$	$r = (S_{Ai}, S_{Ad})$	$r = (S_{Ai}, S_{Od})$	$r = (S_{Ai}, S_{Ai})$	$r = (S_{Ai}, S_{Oi})$
$S_{Oi}$	$r = (S_{Oi}, S_{Ad})$	$r = (S_{Oi}, S_{Od})$	$r = (S_{Oi}, S_{Ai})$	$r = (S_{Oi}, S_{Oi})$

Exemple : La matrice de corrélation

Notons par  $S_{Ad}$ ,  $S_{Od}$ ,  $S_{Ai}$  et  $S_{Oi}$  quatre actifs financiers, dont l'évolution est représentée dans le tableau de valeur ci-dessous. La matrice de corrélation suivante représente l'interdépendance des cours des actifs.

Indices
$S_{Ad}$ : Action domestique
$S_{Od}$ : Obligation domestique
$S_{Ai}$ : Action internationale
$S_{Oi}$ : Obligation internationale

Tableau de valeurs

date	$S_{Ad}$	$S_{Od}$	$S_{Ai}$	$S_{Oi}$
0	-0,27%	-0,39%	-3,31%	2,08%
1	-3,82%	0,18%	-0,88%	0,81%
2	-2,56%	0,08%	-0,72%	1,46%
3	-0,66%	-0,23%	2,77%	0,20%
4	0,00%	0,02%	1,26%	-0,04%

Matrice de corrélation

Actifs	$S_{Ad}$	$S_{Od}$	$S_{Ai}$	$S_{Oi}$
$S_{Ad}$	100%	-72%	20%	-16%
$S_{Od}$	-72%	100%	18%	-35%
$S_{Ai}$	20%	18%	100%	-91%
$S_{Oi}$	-16%	-35%	-91%	100%

Ainsi, la variation de l'action domestique a plus de poids sur la variation de l'obligation domestique que sur celle des titres internationaux. En outre, son influence sur l'action internationale est plus légèrement plus importante que sur l'obligation.

**La volatilité et le rendement historiques du « panier <sup>14</sup> » de titres financiers**

Nous pouvons à partir des méthodes présentées, calculer le rendement et la volatilité moyens d'un portefeuille composé de plusieurs titres.

Notons  $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$  le vecteur des poids respectifs des  $n$  titres qui composent notre portefeuille.

Soit la matrice de corrélation,  $\Sigma$  définie dans la partie des titres du panier et  $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$  le vecteur des variances.

Soit le vecteur  $W^* = {}^t V \cdot W$ . L'estimation de la volatilité historique du panier s'écrit :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{{}^t W^* \cdot \Sigma \cdot W^*}$$

<sup>14</sup> Le terme « basket » ou « panier » désigne un groupe d'instruments financiers

### 3.3 Implémentation du processus des cours des actifs financiers

#### a. Modèle

Nous avons développé dans la partie théorique les notions essentielles pour la modélisation du cours des actifs financiers.

#### Notations :

- $S_t$  : cours du à la date t
- $\mu$  : espérance de rentabilité
- $\sigma$  : volatilité de l'actif supposée constante
- $\varepsilon$  : variable normale centrée réduite

La rentabilité du sous-jacent est régie par un mouvement brownien et la variation de  $LN(S)$  entre les dates t et n'importe quelle date T suit une loi normale de moyenne  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (T - t)$  et de variance  $\sigma^2 \cdot (T - t)$ .

$$\ln S(t) - \ln S(0) \rightarrow N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t); \sigma \cdot \sqrt{(T - t)} \right]$$

$$\text{et } \ln \frac{S(t)}{S(0)} \rightarrow N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t); \sigma \cdot \sqrt{(T - t)} \right]$$

**Error! Objects cannot be created from editing field codes.**

Autrement dit :

**Error! Objects cannot be created from editing field codes.**

avec

$$\mu^* = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

En intégrant nous pouvons en déduire la formule qui nous servira lors de la programmation :

$$S_T = S_t \times e^{(\mu^* \times dt + \sigma \times \varepsilon \times \sqrt{dt})} \quad (1), \text{ avec } \varepsilon \approx N(0,1)$$

Le mouvement du prix de l'actif est régit par un taux de rendement déterministe exponentiel et par une fluctuation aléatoire dont la magnitude dépend de sigma.

Nous nous sommes basés sur l'équation (1) pour construire l'algorithme de calcul des scénarii d'évolution des cours boursiers.

Le programme permet :

- La simulation de l'évolution des cours de plusieurs actifs<sup>15</sup>.  
Ainsi nous pouvons travailler sur un *basket d'actifs*<sup>16</sup> ce qui correspond d'avantage aux caractéristiques des produits VA qui sont investis dans plusieurs fonds.
- Le choix du nombre de périodes sur lesquelles le mouvement des actifs est simulé.  
Ceci permet de générer des scénarii en fonctions du développement du produit. P.ex. : pour les contrats GMWB avec une garantie à vie nous avons besoin d'au moins 40 ans de projections.

Enonçons brièvement les étapes de l'algorithme.

### b. Etapes de calcul

*Etape 1. Simulation des variables aléatoires epsilon qui suivent une loi normale centrée réduite.*  
Au moyen de la fonction @Risk nous simulons pour chacun des fonds 1000 réalisations de la variable epsilon sur n périodes. Ceci nous donnera le caractère aléatoire de l'expression de la volatilité de l'actif.

Si nous considérons un basket de titres, les évolutions dans le temps des cours des actifs qui le composent sont, en général, corrélées. Pour implémenter cette dépendance dans le programme nous utilisons la décomposition de Cholesky<sup>17</sup> d'une matrice de corrélation préalablement fixée.

Etape 2. Nous effectuons une simulation Monte Carlo sur n périodes de la valeur de l'actif suivant l'équation (1). La volatilité et le rendement historiques de l'actif utilisés sont en valeurs annuels. Enfin, la partie aléatoire est contenue au niveau de la volatilité et lorsque nous travaillons sur plusieurs actifs, elle tient compte de l'interdépendance de ces derniers.

**Remarque :** Nous considérons que la valeur initiale de l'actif est égale à 1. Dans la modélisation des produits nous allons nous intéresser à la variation du prix de l'actif entre deux dates.

---

<sup>15</sup> Actuellement, le nombre maximal est fixé à quatre. Le programme permet avec quelques manipulations d'accroître ce nombre.

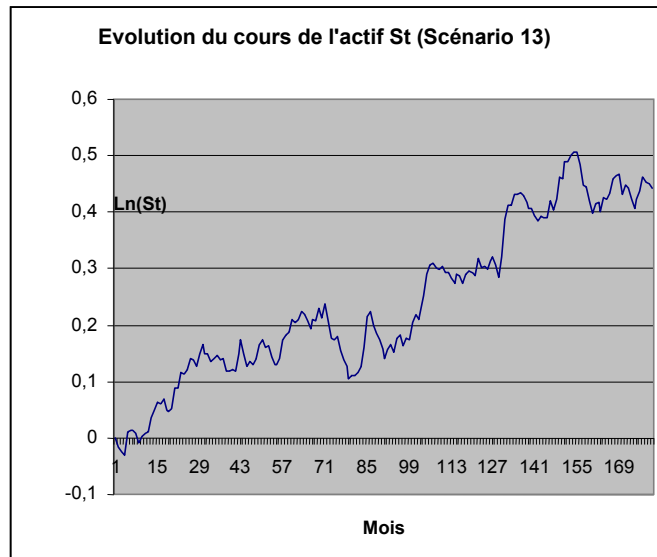
<sup>16</sup> Le terme « basket » ou « panier » désigne un group d'instruments financiers

<sup>17</sup> Permet de déterminer une matrice triangulaire inférieure L tel que :  $A=LL^T$  à partir d'un matrice A symétrique définie positive. Elle permet de déduire la corrélation entre le actifs dans le panier.



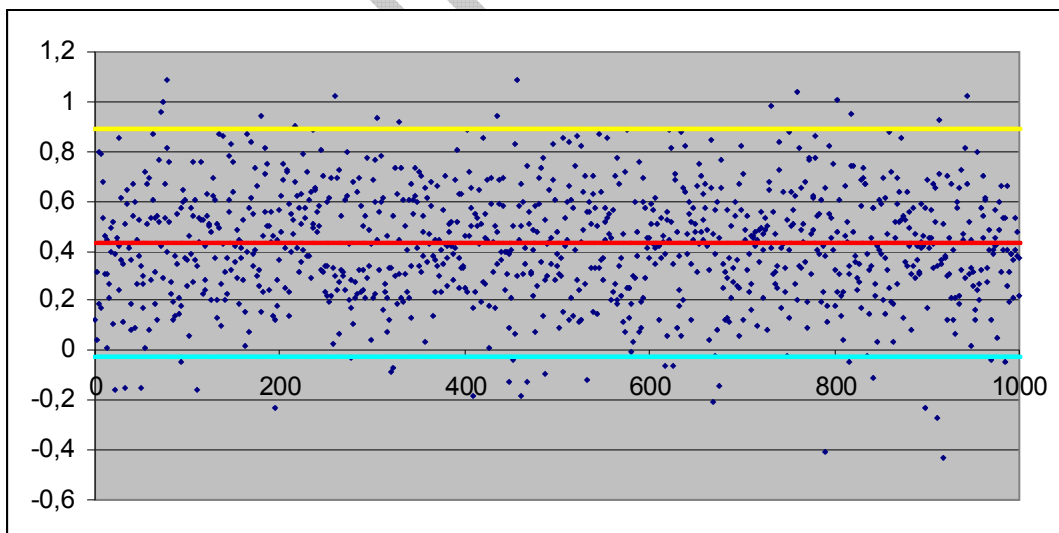
### 3.4 Résultats

- Voici un exemple de scénario unique d'évolution du prix d'un actif, noté  $St$  avec les hypothèses suivantes :  $\mu = 3\%$  ;  $\sigma = 6\%$  ;  $S_0 = 1$  ;  $n = 180$  Mois. Ici nous représentons  $\ln(St)$ .



- Voici comment se présente les simulations Monte Carlo sous les mêmes hypothèses.

En rouge nous retrouvons la moyenne, en jaune nous avons le niveau  $\mu^* + 2\sigma$  et en bleu le niveau  $\mu^* - 2\sigma$  à la date finale. (180<sup>ème</sup> mois)



Nous remarquons que 41 points sont en dehors des limites supérieures ou inférieures. Sur 1000 simulations nous avons 4,10% de valeurs extrêmes.

**Remarques :**

Nous pouvons soulever quelques points que nous devons prendre en compte :

- Le choix des indices de référence : il existe le risque de base qui est induit pas une différence entre l'évolution de l'indice de référence et l'évolution réelle du fond. L'écart entre les deux peut s'avérer coûteux pour la compagnie.
- La période d'observation : attention à ne pas considérer des événements exceptionnels qui ne seront pas représentatifs dans la modélisation.
- La pertinence du modèle Log Normale : ce modèle ne permet pas de représenter des mouvements extrêmes. En effet il ne permet pas de refléter de période de forte de volatilité. A travers la variable stochastique epsilon nous avons introduit un aléa sur la valeur de la variance log normale. Néanmoins nous remarquons que peu de scenarii peuvent être qualifiés d'extrêmes.

L'approche canadienne propose la calibration du modèle en modifiant la volatilité et le rendement. Cette démarche vise à réduire le risque de modèle.

\*\*\*

Après avoir modélisé le mouvement de l'actif financier nous pouvons intégrer cette dynamique dans le modèle de calcul des provisions. Dans la partie suivante montrerons le développement d'un modèle stochastique d'évaluation du passif. Notre objectif est de calculer les Cash Flows actualisés du produit et à partir d'une méthode CTE déterminer les niveaux de provision et de capital.

## II. Modélisation des produits

La modélisation des produits nécessite la définition des caractéristiques :

- du contrat (garantie modélisée, taux de chargements, etc.)
- des hypothèses actuarielles (table de mortalité, ect.)
- des hypothèses liées au comportement de l'assuré (taux de chute)

Précisons d'abord que les contrats Variable Annuities sont réassurés en Quote Part suivant le principe de la coassurance. Dans ce cas la compagnie d'assurance cède au réassureur un pourcentage du montant des primes commerciales perçues. Ce pourcentage, noté  $\alpha$  est défini dans le contrat de réassurance. Ainsi, notre modélisation des produits se fera sur la base des primes commerciales cédées.

Comme nous l'avons déjà exposé, le montant sous risque pour le preneur du risque dépend de l'évolution de l'épargne, d'où le besoin pour le réassureur comme pour l'assureur de modéliser de façon stochastique son passif en intégrant la dynamique des cours des actifs sous-jacents aux sub-accounts. Ainsi se définit la méthode que nous allons adopter pour le calcul des provisions et du capital.

Dans cette partie nous allons présenter la modélisation des produits suivants :

- **GMIB avec une garantie supplémentaire GMDB**
- **GMWB avec une garantie des versements à vie**

Nous allons supposer que le contrat GMIB/DB est vendu sur le marché asiatique et que le contrat GMWB est proposé sur le marché américain, ainsi nous pourrions avoir un aperçu des spécificités liées à ces deux marchés.

Les modélisations se font en univers « real world » avec des marges sur la mortalité et sur le taux de chute.

Avant d'introduire en détail les produits modélisés d'abord nous allons définir les hypothèses générales qui sont communes aux deux produits et les simplifications que nous avons adoptées dans la modélisation des contrats.

## 1. Hypothèses Générales

### 1.1 Notations

Présentons brièvement quelques notations générales.

- ${}_{t-1|}q_x$  : la probabilité qu'une tête d'âge  $x$  décède entre  $x+t-1$  et  $x+t$
- $f_T$  : taux de chargements
- $AV_t$  : la valeur du fond avant le prélèvement des charges
- $S_t$  : le cours de l'actifs sous-jacents à la date  $t$
- $IP$  : prime initiale

### 1.2 Descriptif des hypothèses

#### Structure du portefeuille

- Les contrats modélisés sont en run-off : nous considérons qu'il n'y pas de nouvelles souscriptions.
- Les contrats sont à prime unique.
- Le montant initial de l'investissement est identique à tout les assurés.

#### Hypothèses démographiques

- Nous travaillons avec un portefeuille d'âge moyen  $x$
- La population est composée de 60% d'hommes - 40% femmes
- Le contrat est souscrit sur une seule tête

#### Valeur du fond

La valeur du fond,  $AV_t$  à la date  $t$  est la somme des valeurs des comptes d'épargnes individuelles. Nous adoptons cette notation car nous travaillons sur un portefeuille moyen. Cette valeur va évoluer en fonction de la dynamique des actifs sous-jacents aux sub-comptes, des taux de chargements prélevés et du montant des indemnités payées aux assurés.

#### Chargements

Nous supposons que les chargements sont prélevés au début de chaque période du fond. Nous avons des chargements (= fees) :

- pour frais administratifs et de gestion de l'assureur
- au titre de la garantie et des options supplémentaires souscrites
- pour frais de gestion du fond
- pénalités de rachat

Certains contrats prévoient le prélèvement des pénalités à l'origine du contrat afin de décourager les rachats dans les premières années. En effet, dans ce cas la valeur du compte est diminuée ce qui peut inciter les assurés à ne pas racheter le contrat tout de suite.

### Taux de chute

Nous considérons que le **taux de chute est dynamique**. Le taux de chute de base varie en fonction du caractère « dans » ou en « dehors » de la monnaie de la garantie. A savoir, une garantie est « dans la monnaie » lorsque la valeur de celle-ci est supérieure à celle du fond.

Ainsi, nous avons une composante qui peut représenter un comportement rationnel de la part de l'assuré qui décide de racheter le contrat lorsque ceci est le choix optimal pour lui.

Le taux de chute de base est également une fonction des pénalités appliquées en cas de rachat.

### Les indemnités déduites du fond

Le fond est diminué des montants payés aux assurés qui ont racheté leur contrat ou bien qui sont sorti du contrat (décès, capital). Nous notons par  ${}_{t-1|}q_x$  la probabilité qu'une tête d'âge  $x$  décède entre  $x+t-1$  et  $x+t$ .

### Coûts du réassureur

Le réassureur paye au début du contrat une commission de réassurance. Nous devons prendre également en compte à chaque période des coûts de gestion interne (frais administratifs) et externes (participation du réassureur au frais de gestion de l'assureur direct)

CONFIDENTIAL

## 2. Produit GMIB-GMDB

### 2.1 Spécificités

- **La table de mortalité**

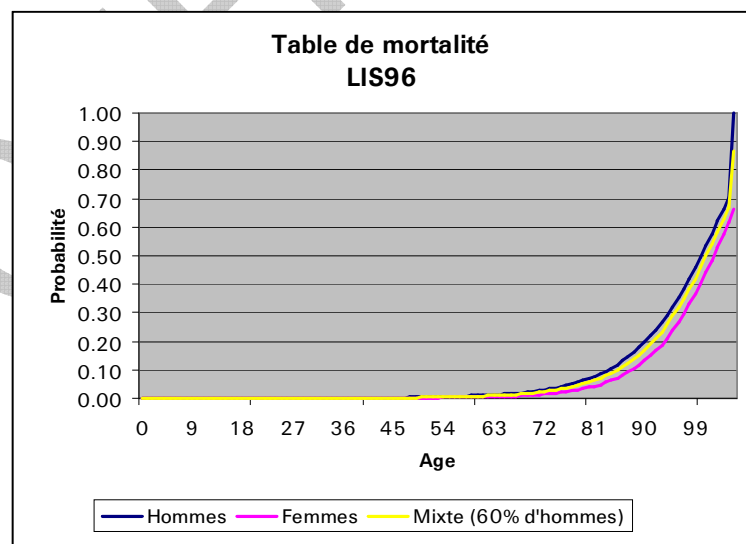
Nous utilisons comme base la table de mortalité LIS96 établie en 1996. A partir d'elle sont définies les probabilités de décès de la population étudiée en fonction de l'âge et le sexe. Nous utilisons un pourcentage de 70% de la table de mortalité afin de refléter l'amélioration de la mortalité entre 1996 et 2008. Cette table à 70% de la base originale constitue notre Best Estimate.

Nous considérons également une marge de sécurité, notée  $m$ , qui permet de se couvrir contre les variations de mortalité. Dans un produit uniquement GMDB, la marge de sécurité consiste à augmenter le quotient de mortalité comme suit :  $70\% \times (1 + m) \times Q_x$ .

Dans le cas d'un produit GMDB-GMIB une augmentation de la mortalité crée un surcoût pour la garantie décès mais réduit également la charge de la garantie GMIB. Dans ce cas on choisira l'option la plus prudente entre augmenter ou diminuer l'hypothèse de mortalité de base.

Le graphique présente les probabilités de décès pour les hommes, pour les femmes et pour une population mixte avec 60% d'hommes.

#### Exemple : 100% $Q_x$ table LIS96 (Japan)



Précisons maintenant quelques caractéristiques spécifiques au produit. Il faut noter que la modélisation se fait sur une base mensuelle, d'où le calcul des Cash Flows se fait aussi mensuellement

- **Garanties**

Le contrat étudié est une combinaison des produits GMIB et GMDB. Nous avons défini une période d'accumulation de 10 ans. Le contrat prévoit le paiement de la garantie GMDB si le décès survient durant la période d'accumulation. Dans le cas contraire les bénéficiaires perçoivent uniquement la valeur de l'épargne personnelle du défunt.

La garantie GMIB quant à elle, est valable uniquement après la période d'accumulation. Les deux produits garantissent un pourcentage de la prime initiale (entre 90 et 100%).

La combinaison des garanties GMIB et GMDB réduit partiellement la volatilité du risque.

- **Options supplémentaires**

Taux cible fixé à l'origine : si la valeur de l'épargne atteint, par exemple 120% du montant de la prime initiale, l'assuré chute immédiatement du contrat, sans payer de pénalités.

Nous avons implémenté dans le programme la possibilité de bénéficier d'options supplémentaires (Roll Up, Ratchet) même si elles ne sont pas définies dans le produit étudié.

- **Capital sous risque**

Le capital sous risque pour le réassureur correspond à :  $Max(0, G - AV_t)$

- **Chargements**

Les chargements sont calculés en pourcentage de la prime initiale  $IP$  et sont ensuite déduits de la valeur de l'épargne. Les chargements relatifs au coût de gestion des fonds font exception, car ils sont estimés en fonction de la valeur de l'épargne. Nous allons noter  $f_T$  le taux de chargement global.

- **Accroissement du fond**

L'accroissement des fonds se fait suivant les scénarii d'évolution des prix des actifs sous-jacents, notés  $S_t$ , modélisés avec le générateur de scénarii défini dans la partie précédente. Le produit permet l'allocation dans quatre fonds investis dans des actions et des obligations domestiques ou internationales. Comme la répartition de la prime entre les fonds est fixée à l'origine nous travaillons sur une hypothèse moyenne.

- **Sortie du contrat**

Dans la modélisation nous considérons deux possibilités. Soit tous les assurés qui arrivent à la fin de la période d'accumulation sortent immédiatement du contrat, soit la sortie se fait sur plusieurs périodes et dans ce cas nous définissons le pourcentage de sortie pour tout date  $t$ .

## 2.2 Résultats

Nous avons réalisé une série de tests de sensibilité sur les paramètres financiers et actuariels. Dans cette partie nous allons décrire nos observations.

L'analyse se fait au moyen de la mesure de risque CTE qui permet de définir le montant des provisions et du capital nécessaires pour couvrir les engagements du réassureur.

- L'une de nos premières constatations est que de la part la structure du produit le risque de mortalité a relativement peu d'impact.
- Le modèle est très sensible au facteur de volatilité. Il est très difficile de prédire l'évolution de cette dernière à long terme.

En cas de forte volatilité la probabilité que l'option Target rate prend effet est très importante. Dans ce cas les polices s'annulent très vite ce qui crée un problème pour l'amortissement des coûts d'acquisition.

- Pour les produits GMIB, les taux de chute dépendent de la « moneyness<sup>18</sup> ». Cependant il semble qu'ils doivent être également ajustés en fonction de la durée qui reste jusqu'à la fin de la période d'accumulation.
- Nous remarquons également une augmentation du montant des provisions lorsque le taux d'actualisation est bas, dans le cas de marchés à faible taux d'intérêt.
- Nous avons intégré également dans le modèle de façon déterministe des scénarii catastrophiques en supposant une chute importante du marché financier. Nous avons remarqué une augmentation importante des provisions. Le capital augmente également mais dans une moindre mesure.
- Nous avons calculé le capital en prenant un CTE à 99%, ceci a permis d'illustrer la présence de scénarii extrêmes - ceci est l'avantage principal d'une modélisation stochastique.
- Nous remarquons que le facteur qui influence le plus les résultats est le pourcentage de personnes sortie en GMIB. Le montant à charge du réassureur est très sensible au taux de chute.

---

<sup>18</sup> moneyness : caractère qui indique si la garantie est « dans » ou en « dehors » la monnaie



### 3. Produit GMWB

#### 3.1 Spécificités

##### Table de mortalité

Nous utilisons une table de mortalité de rentier par génération utilisant des hypothèses d'amélioration de mortalité par âge. Le produit a proposé également une option de rente sur deux têtes mais avons ignoré cette caractéristique dans notre modèle.

##### Garanties

Le contrat étudié GMWB donne la possibilité aux assurés de faire des retraits périodiques depuis la valeur de leur compte. Le montant de ces retraits est égal à 5% de la somme garantie. En plus, l'assuré a le choix de la date de commencement des retraits, car il n'y a pas de période d'attente obligatoire.

Si les retraits débutent avant l'âge de 65 ans, ils seront versés sur une période de 20 ans. Sinon, le contrat prévoit leur versement à vie.

Le contrat peut être souscrit sur deux têtes. Dans ce cas nous avons un chargement supplémentaire. Pour l'instant cette clause n'a pas été encore modélisée.

##### Options supplémentaires

Rachat annuel : si à la date d'anniversaire du contrat la valeur de l'épargne est supérieure à celle du montant garanti, la somme garantie augmente. Elle sera égale à la valeur de l'épargne à cette date. Cette option est valable pendant 10 ans. Contre le paiement d'un chargement, l'assuré a la possibilité de la renouveler pour une nouvelle période de 10 ans et ce, jusqu'à l'âge de 80ans.

##### L'engagement du réassureur

Le réassureur s'engage à verser le montant des retraits même lorsque la valeur du compte personnel est nulle, jusqu'au paiement de la totalité de la garantie pour les retraits de durée 20 ans et jusqu'à la mort de l'assuré dans le cas de versements à vie.

##### Chargements

Les chargements sont calculés en pourcentage du montant du fond  $AV_t$  et sont ensuite déduits de ce dernier.

##### Accroissement du fond

L'accroissement du fond se fait suivant les scénarii d'évolution des prix des actifs sous-jacents, notés  $S_t$ , qui proviennent des scénarii fournis par l'AAA.

### Taux de personnes qui commencent les retraits

Nous considérons que ces taux dépendent de l'âge de l'assuré. En effet, plus il s'approche de 65 ans, plus les taux diminuent. Dans ce cas, la probabilité qu'il commence les retraits est plus petite puisqu'il peut bénéficier d'une garantie à vie si ceux derniers débutent après l'âge de 65 ans.

### 3.2 Résultats

Les observations que nous pouvons apporter concernant le GMWB sont les suivantes :

La présence de l'option Ratchet qui permet d'établir la valeur de la garantie à un montant plus élevé quand la valeur de l'épargne est importante, présente comme nous pouvons s'y attendre une source de pertes potentielles importante pour le réassureur. De part notre analyse nous remarquons que le comportement de l'assuré joue un rôle déterminant.

- Nous remarquons également qu'il faut être prudent sur les différentes hypothèses, par exemple la répartition homme/femme, puisque l'espérance de vie des femmes est plus élevée que celle des hommes. S'il existe un décalage entre les hypothèses de base utilisées et la composition réelle du portefeuille ceci implique une probabilité de perte importante.
- L'exposition du réassureur avec ce produit se révèle d'être sur plusieurs niveaux : le risque de longévité, le risque de marché, et en particulier celui d'anti-sélection. C'est la combinaison et l'interaction de ces risques qui rend le choix des hypothèses de base très difficile.
- L'exposition du preneur de risque est forte lorsqu'on considère le cas de figure d'une hausse importante des marchés avec exercice de l'option « Ratchet », suivie ensuite d'une période baissière couplée à d'une proportion élevée de retraits. Il semble donc qu'à l'image du taux de chute dynamique, il est nécessaire de développer une corrélation entre les mouvements du marché et la proportion de personnes qui commencent les retraits.

### 4. Conclusions

Notre étude nous a permis de bien mettre en évidence le caractère particulièrement risqué de ces produits ce qui justifie le besoin de réassurance.

A travers la conception des modèles nous nous sommes rendu compte de la corrélation importante qui relie les trois risques (risque de marché, risque de comportement de l'assuré et risque actuariel) et surtout de la difficulté à refléter cette corrélation dans les hypothèses utilisées pour l'évaluation de provision et du capital.

Il existe un grand nombre d'incertitudes par rapport aux paramètres financiers, actuariels et comportementaux, ce qui provient du développement à long terme du produit. Il est difficile de prévoir la tendance du marché sur une période aussi importante. Or pour la plus part des produits il existe une période d'attente avant la sortie du contrat ce qui peut engendrer une différence

entre la base utilisée pour la modélisation et la réalité financière au moment de la sortie des contrats.

Certes, la période d'attente permet aux réassureurs de percevoir des revenus, mais certaines options (Target Rate) ainsi qu'un taux de chute important peuvent jouer à l'encontre du preneur du risque. Ici nous pouvons remarquer la complexité des contrats VA, qui permettent la combinaison de plusieurs garanties et options. Ce qui rend chaque contrat unique. Il en va de même pour les risques qu'ils supportent.

Par exemple, le risque de chute qui peut provoquer une anti-sélection dans le produit GMWB sous certaines conditions peut jouer en faveur du réassureur lorsqu'on est dans le cas d'un GMIB après une période donnée. En effet comme les pertes proviennent essentiellement lors de la sortie en GMIB, si le nombre de personne qui sort a diminué à cause des chutes, ceci a un effet bénéfique sur les résultats. Par contre si les chutes sont importantes au début du contrat le résultat est affecté négativement car le réassureur ne peut amortir ces coûts initiaux.

Ainsi, il n'existe pas une interprétation unique des risques. Cette dernière est étroitement liée aux caractéristiques des produits. Il peut y avoir une différence dans l'impact des risques à l'intérieur du même produit en fonction par exemple de la phase du contrat.

Pour les deux produits nous avons remarqué que le comportement de l'assuré joue un rôle primordial. Couplé à des scénarii de chute importante des marchés financiers, cela peut impliquer une perte conséquente pour le réassureur.

Nous aimerions modéliser les différents types de comportement de l'assuré pour essayer de voir comment il réagit dans des conditions extrêmes. Et c'est précisément cette situation qui intéresse le réassureur dans une approche CTE. La mise en place d'une telle modélisation complexe peut faire l'objet en soit d'une étude à part.

\*\*\*

Le risque de comportement ne peut pas être couvert, en revanche le risque financier peut être mitigé par un programme de couverture financière. Dans la partie suivante nous allons présenter uniquement l'évaluation des provisions et du capital dans un univers risque neutre, puisque une mise ne pratique n'a pas été encore développée.

## B. L'approche financière

### I. La couverture financière (Hedging)

Au début de chaque contrat entre le réassureur et la cédante, des couvertures financières sont mises en place. Cette couverture est de la forme d'un « Value Hedging », plutôt que « Cash Flow Hedging », ce qui demande un montant important de financement initial au début

Une stratégie de « Dynamic hedging » est adoptée ce qui implique un ajustement des positions de la couverture en ligne avec les mouvements du marché, les changements de la structure du portefeuille ou changements des hypothèses futures de mortalité et de taux de chute. Dans ce contexte il est important d'avoir des informations de bonne qualité sur le portefeuille.

Comme nous l'avons déjà présenté le montant sous risque pour les contrats Variable Annuities peut être représenté comme le paiement terminal d'un put européen. Ainsi la mise en place de la couverture repose sur le calcul des « Greeks », qui reflète la variation du prix de l'option « cachée » dans la garantie par rapport au marché.

L'approche recommandée pour la tarification et la l'évaluation des paramètres de la couverture est l'approche financière, autrement dit l'évaluation en univers risque neutre. Elle permet de prendre en compte la nature financière des garanties planchers et consiste à donner une valeur de marché aux engagements du réassureur.

Elle se base sur le modèle de Black& Scholes qui est très populaire dans le monde de la finance. Les hypothèses utilisées sont directement observables sur le marché ce qui facilite son implémentation.

Néanmoins il est important de souligner que le modèle tel qu'il est défini (cf. Notions de base), ne reflète pas de manière précise le monde réel. Certaines hypothèses comme l'absence de coûts de transactions, le non paiement de dividendes ou une volatilité constante sont irréalistes.

En outre dans le cas particulier des Variable Annuities il ne permet pas de prendre en compte les hypothèses actuarielles ou comportementales, et les caractéristiques spécifiques au produits (ex. target rate).

En raison de ces particularités, les prix des produits d'assurance ne sont pas directement observables sur le marché. Par conséquent, il est indispensable de construire un model spécifique à chaque garantie qui serait en accord avec les principes financiers.

En effet l'idée est d'arriver à une approche « mark to model ».

La méthodologie qui est appliquée est similaire à celle qui est utilisée pour RW, dans le sens ou nous avons besoin de générateur de scenarii et d'une modélisation stochastique du passif.

Cependant l'objectif étant d'évaluer les engagements en « valeur de marché », les paramètres utilisés sont implicites au marché une volatilité ou bien des hypothèses ajustées pour avoir une marge.

Le model d'évaluation comprend :

- Un algorithme des cash flows qui reflète les hypothèses actuarielles et le comportement asymétrique du risque par rapport au mouvement des marchés.
- Un générateur de scenarii risque neutre

Etant donne que cette méthode reflète les conditions de marché, il est quelque part sous entendu que les paramètres utilisés pour la modélisation en univers risque neutre seront évalués à partir des prix du marché.

**Les paramètres financiers utilisés :**

- Volatilité implicite au marché à la date d'évaluation : elle est déduite des prix de marché des différentes options cotées.
- Courbe de zéro coupon qui permet de déduire les taux forward pour chaque période.

Le model utilisera la volatilité implicite, une courbe de taux et une matrice de corrélations entre les différents fonds et va considérer la distribution de dividendes.

Les hypothèses actuarielles doivent être consistantes avec l'approche « best estimate ». Elles doivent comprendre une table de mortalité, des taux de chute dynamique et des hypothèses concernant le comportement de l'assuré.

Après avoir exprimé les cash flow futurs en fonction des facteurs financiers et actuariels nous allons calculer l'espérance de leur valeur actuelle.

## **II. Interactions avec l'approche actuarielle**

Dans le cadre de notre étude nous nous limitons au point de vue de Swiss Re Zurich. L'objectif est de déterminer quel est l'impacte de la couverture sur les cash flows des simulations RW.

Les régulateurs américains recommandent la prise en compte dans le calcul des réserves et du capital de la stratégie dynamic hedging et des coûts des re-balancements en cas de mouvements des actifs de la couverture.

Il est important de noter qu'en raison du caractère particulier du produit et ses risques démographiques, il n'existe aucune couverture financière parfaite. C'est pourquoi, il s'avère nécessaire de définir un taux de « Hedge effectiveness » qui déterminera à quelle hauteur le réassureur peut considérer la couverture efficace.

Nous accordons un intérêt tout particulier pour cette approche, dont l'étude pratique n'a pas pu être développée dans le cadre de ce mémoire.

# CONCLUSION

---

Cette étude nous a conforté dans notre perception initiale des produits Variable Annuities. Il s'agit de produits très complexes qui sont extrêmement sensibles aux hypothèses utilisées. En effet, lors de nos tests de sensibilité nous nous sommes aperçu que dans certains cas un changement « à priori » insignifiant peut engendrer une augmentation importante des besoins de provision et de capital.

L'analyse a relevé certains points, peu évidents sans une modélisation stochastique. En effet, sous certaines hypothèses, le ratio capital/provision est assez important. Ceci montre la présence d'un faible nombre de scénarii sous lesquels la réalisation de la perte est très importante. Le seuil de CTE considéré pour le calcul du capital étant de 99%, ces résultats illustrent l'exposition du preneur du risque à des scénarii extrêmes.

Nous avons également remarqué lors de la création du modèle qu'il faut être très vigilant dans l'implémentation des hypothèses. Ce point s'est avéré important lors de la modélisation du taux de chute et dans la création du modèle GMWB. L'accumulation de plusieurs options (par exemple Ratchet) et garanties (par exemple GMIB/DB) rend la modélisation plus difficile en raison de l'interaction qui existe entre les risques financiers, actuariels et comportementaux.

Or, les compagnies d'assurance, pour rester compétitives, proposent de plus en plus de garanties supplémentaire, ce qui rend indispensable d'avoir une bonne connaissance des produits, ainsi que des avantages et des inconvénients qui résultent de leur combinaison.

La modélisation des cours des actifs financiers sous l'approche actuarielle nécessite la mise en place d'hypothèses qui sont un bon compromis entre la prudence et le réalisme. Cet arbitrage est difficile car dans le développement de cette approche nous considérons des paramètres historiques, or la tendance future des marchés peut être toute différente. Outre la mise en place de marges de sécurité, le preneur du risque a la possibilité de construire une couverture financière qui lui permettra de minimiser ce risque financier. Elle viendra compléter l'approche actuarielle qui a le mérite de refléter d'avantage les risques actuariels et comportementaux.

Néanmoins au vu de la complexité des produits et des aléas des marchés il n'est pas raisonnable de considérer que la couverture est parfaite. La démarche prudente serait de reconnaître un pourcentage d'efficacité de cette dernière. Un autre élément important à prendre en considération est l'évolution du coût du programme de hedging dans le temps.

En outre, la question sur l'évaluation du risque lié au comportement de l'assuré reste, quant à elle ouverte. Même si les données historiques peuvent nous donner un aperçu de l'attitude de l'assuré face aux mouvements financiers, qui peut sous entendre un comportement rationnel, en réalité il est très difficile de modéliser ce risque car il peut également dépendre de facteurs non quantifiables. (Ex. raisons personnelles)

Notre étude va servir de base pour le développement ultérieur de ces deux questions. Elle nous a permis d'avoir une bonne vision des produits et des risques inhérents. En outre, nous avons eu la possibilité de nous familiariser avec les notions financières qui nous servirons dans l'implémentation de l'approche financière.

CONFIDENTIAL

## Bibliographie

### Articles

---

ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1998).  
*Coherent Measures of Risk*

AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES  
Recommended Approach for Setting Regulatory Risk-Based Capital Requirements for Variable Annuities and Similar Products  
*Salt Lake City, Utah—March 2005*

HARDY, M.R. (2001).  
A Regime-Switching model of Long-term Stock Returns.  
*North American Actuarial Journal (2001)*.

TASK FORCE ON SEGREGATED FUNDS (2000).  
Report of the Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees.  
*Canadian Institute of Actuaries (2000)*.

TONG W.  
Reserving for maturity guarantees under unitized with-profits policies

### Cours

---

ROGER, P.  
Finance, gestion du risque de taux.  
*Deuxième et troisième année d'Actuariat Strasbourg.*

RUBIO, A.  
Assurance-Vie I, II.  
*Première et deuxième année d'Actuariat Strasbourg.*

### Livres

---

BLONDEAU J., PARTRAT C.  
La Réassurance  
*Assurance Audit Actuariat*

HARDY M.  
Investement Guarantees  
*Wiley Finance (2003)*

HULL, J.C.  
Options, Futures and Other Derivatives Securities.  
*Prentice Hall (1993)*.



## Mémoires

---

FRANZ C.

Tarification Actuarielle contre financière des Contrats en Unités de Compte  
*Magistère d'Actuariat Strasbourg (2002).*

EL BAHTOURI L.

Techniques de provisionnement de la garantie plancher  
*Magistère d'Actuariat Strasbourg (2004).*

## Autre

---

Documentation interne Swiss Re

## Liste des abréviations

PAD : Pad for Adverse Deviation

CTE : Conditional Tail Expectation

SRZ : Swiss Re Zurich

GMIB : Guaranteed Minimum Income Benefit

GMDB: Guaranteed Minimum Death Benefit

GMAB: Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

GMWB: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit

AAA: American Academy of Actuaries

CONFIDENTIAL

**Annexes**

CONFIDENTIAL

## Notions Statistiques

### La loi Normale

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}$  et de variance  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{*+}$ , d'où :  $X \approx N(\mu; \sigma)$ .

Elle admet une densité de probabilité  $f$  telle que pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

La fonction de répartition de  $X$  est égale à :

$$N(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \frac{-t^2}{2} dt$$

Estimation de la moyenne  $\mu$  et de la variance  $\sigma^2$  :

- $\mu$  est estimée par  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ;

- $\sigma^2$  est estimée par :  $S^2 = \frac{1}{n-1} \times \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

### La loi Log Normale

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi Log Normale d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}$  et de variance  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{*+}$ , d'où :  $X \approx \text{LogN}(\mu; \sigma)$ .

Elle admet une densité de probabilité  $f$  telle que pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{x \times \sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

L'espérance de  $X$  est égale à :

$$E[X] = e^{\left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)}$$

La variance de  $X$  est égale à :

$$Var[X] = e^{(2\mu + \sigma^2)} \times (e^{\sigma^2} - 1)$$

**Matrice de variance covariance**

Soit  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_p \end{pmatrix}$  un vecteur de p variables aléatoires.

La matrice de variance covariance s'écrit :

$$\Sigma_{p \times p} = \sum_X = E[(X - E(X))^t (X - E(X))] = E \begin{pmatrix} \sigma^2(X_1) & Cov(X_1; X_2) & \dots \\ Cov(X_2; X_1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sigma^2(X_p) \end{pmatrix}$$

Avec  ${}^t X$  la transposée de  $X$ .

CONFIDENTIAL

## Cadre Légal

---

### **Loi fédérale sur la surveillance des entreprises d'assurance LSA**

du 17 décembre 2004 (Etat le 6 décembre 2005)

*L'Assemblée fédérale de la Confédération suisse,*

#### **Chapitre 3 Exercice de l'activité d'assurance**

##### **Section 1 Dotation financière**

###### **Art. 16 Provisions techniques**

- 1 L'entreprise d'assurance est tenue de constituer des provisions techniques suffisantes pour l'ensemble de ses activités.
- 2 Le Conseil fédéral fixe les principes relatifs à la constitution des provisions techniques. Il peut charger l'autorité de surveillance de fixer les modalités concernant les genres et les niveaux des provisions techniques.

###### **Art. 24 Tâches**

- 1 L'actuaire responsable porte les responsabilités suivantes :
  - a. la marge de solvabilité est calculée correctement et la fortune liée est conforme aux dispositions du droit de surveillance;
  - b. les bases techniques utilisées sont adéquates;
  - c. les provisions techniques constituées sont suffisantes.
- 2 S'il constate des insuffisances, il en informe immédiatement la direction de l'entreprise d'assurance.
- 3 En outre, il établit périodiquement un rapport à l'intention de la direction ou, pour les entreprises d'assurance étrangères, du mandataire général. Pour les insuffisances constatées, il indique dans son rapport les mesures qu'il a proposées pour régulariser la situation ainsi que celles qui ont été effectivement prises.
- 4 L'autorité de surveillance édicte des dispositions complémentaires concernant les tâches de l'actuaire responsable et le contenu du rapport qu'il est tenu d'établir.

##### **Ordonnance**

###### **sur la surveillance des entreprises d'assurance privées**

###### **(Ordonnance sur la surveillance, OS)**

du 9 novembre 2005 (Etat le 6 décembre 2005)

*Le Conseil fédéral suisse,*

##### **Titre 4 Provisions techniques et fortune liée**

###### **Chapitre 1 Provisions techniques**

###### **Section 1 Constitution et dissolution**

###### **Art. 54**

- 1 L'entreprise d'assurance dispose de provisions techniques suffisantes. Celles-ci comprennent :
  - a. les provisions techniques en couverture des engagements attendus;
  - b. les provisions pour fluctuations visant à compenser la volatilité des affaires, en tenant compte de la diversification, de l'importance et de la structure des portefeuilles d'assurance.

- 2 L'entreprise d'assurance dissout les provisions techniques devenues inutiles.
- 3 Elle indique dans son plan d'exploitation les conditions de constitution et de dissolution des provisions techniques. Elle documente les méthodes de constitution des provisions appliquées et leur évaluation.
- 4 L'autorité de surveillance règle les détails concernant le genre et le volume des provisions techniques.

## 961.011.1

**Règlement de l'OFAP  
sur la surveillance  
des entreprises d'assurance privées**  
(Ordonnance de surveillance de l'OFAP, OS-OFAP)  
du 9 November 2005 (Etat le 6 décembre 2005)  
*L'Office fédéral des assurances privées,*

### Article 2 Tâches

- 1 L'actuaire responsable ou les responsables actuariels est responsable de la tenue de la partie technique du plan d'affaires. Il ou elle décide quels sont les tarifs d'un produit de base.
2. Il ou elle établit chaque année un rapport détaillé à la direction de l'entreprise. Les autorités compétentes au sein de la société à lui ou à elle de fournir les informations nécessaires.
3. A propos des fondements essentiels des changements vis-à-vis des derniers rapports de l'information ou l'actuaire responsable de la direction de brefs délais.

### Article 3 Contenu du rapport

1. Le rapport présente la situation actuelle et les possibles évolutions de la société actuarielle vue, notamment, l'évolution d'assurance, qui la situation financière de l'entreprise en danger.
2. Le rapport contient toutes les informations nécessaires à l'article 24, paragraphe 1, points a à c VAG. En outre, il informe sur le résultat technique des produits.
3. Outre les constatations matérielles spécifiques, le rapport fait des déclarations :
  - a. quelles bases, les paramètres et les modèles ont été utilisés, et
  - b. la manière dont les résultats aux changements des paramètres de réagir.

### AAA : March 2005 Scenarios

---

- Money market
- 3-month U.S. Treasury yields
- 6-month U.S. Treasury yields
- 1-year U.S. Treasury yields
- 2-year U.S. Treasury yields
- 3-year U.S. Treasury yields
- 5-year U.S. Treasury yields
- 7-year U.S. Treasury yields
- 10-year U.S. Treasury yields
- 20-year U.S. Treasury yields
- 30-year U.S. Treasury yields
- U.S. intermediate-term government bonds
- U.S. long-term corporate bonds
- Diversified fixed income
- Diversified balanced allocation
- Diversified large cap U.S. equity
- Diversified international equity
- Intermediate risk equity
- Aggressive or specialized equity

Source : <http://www.actuary.org/pubs.asp>

CONFIDENTIAL