

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 27/05/2013

Par : Florent DIVARDJIAN et Marko NOVAKOVIC

Titre: Etude d'une police d'assurance pour les risques de catastrophes naturelles
dans les Caraïbes

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires

signature

Entreprise :

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Pierre PICARD, Eric STROBL

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Bibliothèque :

Etude d'une police d'assurance pour les risques de catastrophes naturelles dans les Caraïbes

FLORENT DIVARDJIAN ET MARKO NOVAKOVIC

Mots-clés : Ouragan, CCRIF, Simulations de la vitesse du vent, Fonction de dommage, Bootstrap, Prime pure, Théorie des Valeurs Extrêmes, GPD, Réassurance, ILS, Cat Bond, Markowitz

1. Introduction

Les pays des Caraïbes sont fortement exposés aux catastrophes naturelles comme les ouragans. Ces événements peuvent affecter l'économie d'une nation entière. En général dans le monde les sinistres causés par des désastres naturels sont de l'ordre de 2% du PIB du pays affecté. Mais depuis 1970, dans les Caraïbes, on a observé des dégâts atteignant jusqu'à 200% du PIB. Les risques principaux sont les ouragans à cause de leur capacité de destruction et de leur récurrence. On considère qu'un ouragan important frappe le bassin Caraïbéen une fois tous les deux ans et demi. Etant donné leur petite taille, les pays des Caraïbes ont des capacités financières très limitées pour faire face aux catastrophes naturelles. Afin de se prémunir contre ce risque, les pays des Caraïbes se sont rassemblés pour souscrire à une assurance paramétrique commune : le CCRIF (*Caribbean Catastrophe Risk Insurance Facility*).

2. Base de données

Le but principal de ce projet est de mener une évaluation du risque des pertes potentielles liées aux destructions causées par un ouragan en Jamaïque. Notre analyse va dépendre de trois facteurs :

1. Calculer la probabilité, au niveau local, d'être touché par un ouragan
2. Estimer l'exposition locale, la richesse pouvant être détruite.
3. Déduire une probabilité de dommages potentiels grâce aux deux premières étapes

2.1. Probabilité locale de destructions

Les dommages sont reliés à la force du vent générée par les ouragans. Les données historiques sur les ouragans dans les Caraïbes remontent jusqu'à 1851. Tout de même, cela ne représente pas assez d'événements pour obtenir une distribution de probabilité fiable de l'occurrence et de la force de ces derniers. Une alternative est de générer artificiellement un jeu d'ouragans obtenu à partir de modèles d'ouragans sous des conditions météorologiques particulières.

2.2 Exposition

L'impact des ouragans ne dépend pas seulement des caractéristiques de l'ouragan et des vents générés, mais aussi de la valeur immobilière exposée à ces vents. Malheureusement, les données relatives à l'activité économique locale sont rares, particulièrement pour les pays en voie de développement. Une solution est l'utilisation de données issues d'images satellites mesurant la lumière émise de nuit par un lieu. Nous utiliserons ces données comme un estimateur de l'exposition, en partant du postulat que l'utilisation d'électricité par les habitants et les industries est fortement corrélée avec la richesse locale. Dans cette étude, nous bénéficions des données pour la Jamaïque, qui est découpée en 12290 cellules de 1km². Nous détenons dans nos données, grâce aux modèles de simulations des vents, de la vitesse maximale des ouragans simulés en chacune des 12290 cellules.

2.3 Destructions locales potentielles

Les données locales sur la force du vent et sur la luminosité nous fournissent des estimateurs de l'exposition économique au risque d'ouragan. Nous pouvons alors obtenir une distribution des pertes matérielles suite à une catastrophe. Dans cette optique, nous avons étudié deux modèles :

a) Modèle du CCRIF

Soit I l'indice paramétrique lié à l'occurrence d'un ouragan :

$$I = I(V^1, \dots, V^{14}) = \alpha \sum_{i=1}^{14} \omega_i \times \max(V^i - V_{seuil}, 0)^\beta$$

avec :

- V^i la vitesse maximum du vent mesurée à la station $i \in \{1, \dots, 14\}$ pour un ouragan donné
- ω_i le poids de la station i dans le portefeuille, proportionnel à la richesse de la localité
- $V_{seuil} = 22.5$ m.s le seuil minimum de vitesse du vent
- $\beta = 4$ (valeur couramment utilisée) exposant pour la vitesse du vent qui fait apparaître la relation non linéaire entre la vitesse du vent et les pertes
- $\alpha = 1.082119$ un facteur d'échelle

Si on considère que K ouragans I_1, \dots, I_K ont touché l'île durant une année fixée, alors l'indice paramétrique annuel est $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^K I_k$. La fonction de paiement est définie comme :

$$Paiement = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{I} < Attachment \\ \frac{\mathcal{I} - Attachment}{Exhaustion - Attachment} \times Coverage Limit & \text{si } Attachment \leq \mathcal{I} \leq Exhaustion \\ Coverage Limit & \text{si } \mathcal{I} > Exhaustion \end{cases}$$

b) Modèle de K.Emanuel

K.Emanuel propose l'indice f suivant, qui capte la fraction des propriétés détruites. Pour toutes les cellules $i = 1, \dots, 14$, on a :

$$f_i = \frac{v_i^3}{1 + v_i^3} \in [0, 1]$$

avec,

$$v_i = \frac{\max(V_i - V_{seuil}, 0)}{V_{1/2} - V_{seuil}}$$

où :

- V_i est la vitesse maximum du vent mesurée à la station $i \in [1, 14]$ pour un ouragan donné
- V_{seuil} est la vitesse du vent en dessous de laquelle aucun sinistre ne survient
- $V_{1/2}$ correspond à la vitesse à laquelle la moitié des propriétés est détruite

On définit le paiement intégral suite à un unique ouragan comme étant :

$$Paiement = F \times Coverage Limit = \sum_{i=1}^{14} \omega_i f_i \times Coverage Limit$$

3. Calcul de la prime pure

Après avoir introduit les bases de la théorie du risque moderne, nous nous sommes penchés sur le calcul de la prime pure à l'aide des méthodes de Monte Carlo.

3.1. Algorithme

Soit N le nombre de simulations. Pour chaque simulation indexée $i = 1 \dots N$, on applique les opérations suivantes :

1. Choisir une année $i \in [1980, 2010]$ et relever la fréquence d'ouragans associée f_i .
2. Simuler une loi de Poisson de paramètre la fréquence relevée f_i . On note m_i la réalisation de la variable aléatoire $M_i \sim \mathcal{P}(f_i)$
3. Tirer au hasard (avec remise) m_i ouragans parmi les 115 simulations de l'année retenue.

4. Relever les pics de vitesses associés à ces ouragans dans les différentes stations et en déduire les indices paramétriques du CCRIF et d'Emanuel associés à chaque ouragan.
5. On obtient le montant des dédommagements par simple application de la fonction dommage à ces indices. On note S_i le montant des dommages.

On répète alors ces opérations N fois, puis on estime la prime pure par la moyenne empirique :

$$\bar{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$$

3.2 Résultats avec les deux fonctions de dommages

Nous avons calculé les primes avec les deux fonctions de dommages et $N = 50\,000$ simulations. Nous résumons ces résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombre de simulations	$Prime_{CCRIF}$	$Prime_{Emanuel}$
50 000	\$2 037 286	\$2 194 542

Grâce au théorème central limite, nous pouvons donner un intervalle de confiance pour ces deux estimateurs. Cet intervalle de confiance à 95% est de la forme :

$$IC_{95\%} = \left[\bar{X}_N - \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)} \sigma^2}{N}}, \bar{X}_N + \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)} \sigma^2}{N}} \right]$$

Si on note x la taille de l'intervalle de confiance à 95% and N le nombre de simulations, on a le lien entre ces deux variables suivant :

$$N \geq \frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)} \sigma^2}{(x/2)^2}$$

Ce lien est synthétisé dans le tableau suivant :

x	100	1000	10 000	100 000
N	10^{11}	10^9	10^7	10^5

Nous voyons que le nombre de simulations N explose avec la précision x . Pour résoudre ce problème, nous allons essayer de modéliser la distribution des sinistres par une loi issue de la Théorie des Valeurs Extrêmes.

4. Théorie des Valeurs Extrêmes

La Théorie des Valeurs Extrêmes est une branche des statistiques traitant du comportement de la distribution des maxima d'une suite de variables aléatoires. C'est un outil pratique pour évaluer les risques d'événements rares tels que les ouragans. Dans le but de mesurer un quantile extrême, nous avons décidé de modéliser les queues de distribution en faisant appel à la Théorie de Valeurs Extrêmes (TVE). Deux approches existent :

4.1 Approche basique

Cette approche fait appel au premier théorème de la Théorie des Valeurs Extrêmes :

Théorème de Fisher-Tippet-Gnedenko

Soit $(X_i)_{i=1..n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F . Soit $(M_i)_{i=1..n}$ tel que : $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

S'il existe :

- deux suites de constantes $(a_i)_{i=1..n}$ et $(b_i)_{i=1..n}$;
- une fonction de répartition non dégénérée H telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = H(x)$

Alors H appartient à la classe de fonction suivante :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

4.2 Théorie des excès au-delà d'un seuil

La méthode des excès au-delà d'un seuil (ou Peaks Over Threshold, POT) repose sur le second théorème principal de la Théorie des Valeurs Extrêmes.

Théorème de Balkema-de Haan-Pickands

Comme dans la méthode précédente, nous supposons qu'il existe une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i=1..n}$ indépendantes et identiquement distribuées de distribution F . Soit x_0 la limite supérieure finie ou infinie du support de la distribution F . Formellement, $x_0 = \sup(x \in \mathbb{R} \cup +\infty : F(x) < 1)$. Soit N_u le nombre d'excès au dessus d'un seuil élevé $u \in \mathbb{R}^+$. Nous nous intéressons alors aux observations au-dessus du seuil notées Y_1, \dots, Y_{N_u} telles que $Y_i = X_i - u$. Ces observations sont supposées indépendantes et identiquement distribuées.

5. Application de la Théorie des Valeurs Extrêmes

Dans le modèle utilisé par le CCRIF, les paiements sont nuls en dessous de *Attachment Point*. C'est pourquoi nous avons appliqué la méthode des excès pour modéliser la loi de l'indice paramétrique, en prenant l'*Attachment* comme seuil naturel.

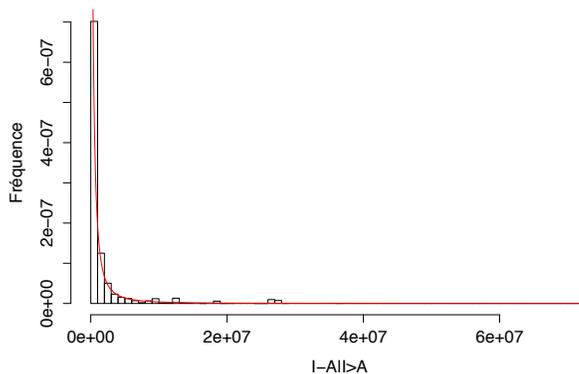


FIGURE 1 – Estimation GPD

Cette modélisation par une loi *GPD* est un succès. Cela nous permet d'obtenir une meilleure estimation des quantiles extrêmes comme l'*Exhaustion Point* et donc d'affiner l'estimation de la prime.

6. Risque de base

Ce produit basé sur un indice paramétrique permet d'éliminer la notion d'aléa moral. En contrepartie, cela expose les structureurs à des risques de base. Cette section a pour but de présenter les différents outils mis en place afin de faire baisser ce risque de base. D'un point de vue qualitatif et statistique, nous analysons quels outils étaient efficaces.

Notre principal outil était la cartographie précise de la Jamaïque découpée en 12290 cellules. Pour des raisons de commodité, nous avons basé nos calculs sur 1000 cellules réparties de façon aléatoire sur l'île. La modélisation de la force du vent avec 1000 cellules, plutôt que les 14 convenues dans le contrat CCRIF, ne s'est pas révélée très convaincante. Notre découpage initial en 14 cellules est donc suffisant, car nos données font apparaître une répartition géographique relativement uniforme de la vitesse du vent lors du passage d'un ouragan. Cependant ce découpage s'est révélé intéressant pour la modélisation précise de l'exposition économique du pays.

7. Réassurance

Pour couvrir ses risques, le CCRIF fait appel à la réassurance. Nous avons utilisé notre modèle afin de fixer les prix des différentes tranches dans un exemple de contrats entre le CCRIF et des réassureurs.

Nous avons de plus exposé d'autres façons de transférer le risque, comme la titrisation avec les ILS (*Insurance Linked Securities*) et le marché des Cat Bonds.

8. Conclusion

Les données du vent simulées ainsi que celles sur la luminosité nous ont permis de surmonter quelques difficultés de modélisation et de faire des statistiques.

Nous avons utilisé la théorie de l'assurance non-vie pour obtenir une prime à ce contrat d'assurance. Nous avons ensuite amélioré le modèle en utilisant la Théorie des Valeurs Extrêmes. Tout de même, d'autres modèles peuvent améliorer ce travail.

Malheureusement, nous nous sommes restreints aux données de la Jamaïque, et n'avons pas pu étendre notre étude à l'ensemble des Caraïbes. Il aurait été intéressant de créer une distribution de probabilité multidimensionnelle des seize indices (un par pays membre), qui ferait apparaître les corrélations entre les différents pays.

Design of a Caribbean Catastrophe Risk Insurance Facility

MARKO NOVAKOVIC AND FLORENT DIVARDJIAN

Keywords : Hurricane, CCRIF, Wind speed simulations, Damage function, Bootstrap, Premium, Extreme Value Theory , GPD, Reinsurance ILS, Cat Bond, Markowitz.

1. Introduction

Caribbean countries are highly exposed to natural disasters such as hurricanes. These events can affect an entire nation's economy as well as the human and physical environment. In the world, the damage caused by natural disasters average around 2% of the GDP of the countries affected. However, it can reach 200% of the GDP in the Caribbean. The main risks are hurricanes because of their destructive potential and their recurrence. It is estimated that a major hurricane hits the Caribbean basin every two and half years. Because of their small size, Caribbean countries have very limited financial capacity to respond to adverse natural disasters.

2. Database

The general purpose of this project is to conduct a risk assessment of potential losses due to hurricane destruction in Jamaica at a sub-national level. Such an analysis will depend on three factors :

1. Calculating the local probability of being subjected to the destructive forces of a hurricane.
2. Proxying the local potential economic exposure.
3. Deriving the local probability of potential damages using the two first steps.

2.1. Local probability

Conveniently, all the damages are related to the strength of winds generated by the hurricanes. Although historical data on hurricanes in the Caribbean region reach as far back as 1851, there are still too few events to derive a reliable probability distribution of their occurrence and strength. An alternative is to artificially generate a set of hurricanes derived from hurricane models under particular weather scenarios.

2.2. Economic exposure

The impact of hurricanes will not only depend on the characteristics of the storm itself and the winds generated, but also on the amount of potentially damageable property exposed to this wind. Unfortunately, direct data of economic activity are typically scarce at a very localized level, particularly for developing countries. An alternative solution is to use data derived from satellite images of nightlight as a proxy where the underlying justification is that the use of electricity by households and industry at night is strongly correlated with local wealth. Here these values are used to provide proxies of economic exposure across Jamaica, which is covered by 12290 cells of 1 km². Given the hurricane synthetic track data, the wind field model is used to derive the maximum wind speed experienced by centroid of each nightlight 1km² cell for each simulated storm.

2.3. Potential local destructions

Local wind speeds experienced and local nightlight intensity provide proxies of the probability of potential economic exposure to hurricanes. These can then be translated into distributions of expected property damage. In this regard, we have studied two models :

a) CCRIF model

Let I be the parametric index linked to a storm occurrence :

$$I = I(V^1, \dots, V^{14}) = \alpha \sum_{i=1}^{14} \omega_i \times \max(V^i - V_{thresh}, 0)^\beta$$

where :

- V^i is the maximum measured wind speed at station $i \in \{1, \dots, 14\}$ for a given hurricane
- ω_i the portfolio weight at station i , proportional to the economic exposure
- $V_{thresh} = 22.5$ m.s the wind speed threshold
- $\beta = 4$ (commonly accepted value) the exponent for the wind speed, accounts for non linear relationship between wind speed and loss
- $\alpha = 1.082119$ a multiplicative constant used to scale the index

If we consider that K storms I_1, \dots, I_K hurt the island during a fixed year, then the annual index is $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^K I_k$. The payout function is defined like :

$$Payout = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{I} < Attachment \\ \frac{\mathcal{I} - Attachment}{Exhaustion - Attachment} \times Coverage Limit & \text{if } Attachment \leq \mathcal{I} \leq Exhaustion \\ Coverage Limit & \text{if } \mathcal{I} > Exhaustion \end{cases}$$

b) K.Emanuel model

K.Emanuel proposes the following index f , capturing the fraction of property damaged :
For all cells $i = 1, \dots, 14$, we have :

$$f_i = \frac{v_i^3}{1 + v_i^3} \in [0, 1]$$

with,

$$v_i = \frac{\max(V_i - V_{thresh}, 0)}{V_{1/2} - V_{thresh}}$$

where :

- V_i is the maximum of the wind experienced at point i due to a given storm.
- V_{thresh} is the threshold below which no damages occurs.
- $V_{1/2}$ is the threshold at which half of the property is damaged.

We define the global payout function due to a unique storm to be :

$$Payout = F \times Coverage Limit = \sum_{i=1}^{14} \omega_i f_i \times Coverage Limit$$

3. Premium Computation

3.1 Catastrophe simulation model

Choose a number of simulations N . For each simulation :

1. Choose a specific year $i \in [1980, 2010]$. Note the associated frequency f_i
2. Compute a Poisson law with this frequency as a parameter. We write m_i the realization of the random $M_i \sim \mathcal{P}(f_i)$
3. Take randomly m_i hurricanes among the 115 simulations of the chosen year .
4. Identify the maximum wind speed associated to those hurricanes in the different stations and compute the corresponding parametric indexes : I_1, \dots, I_{m_i} .
5. Apply the damage function to this index to get the value of the damages, noted S_i . We can choose the CCRIF function, or the one introduced by K. Emanuel.

Repeat these operations N times, and take the mean to estimate the premium :

$$\bar{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$$

3.2 Results with the two damage functions

We have calculated premiums with both damage functions and $N = 50\,000$ simulations. We summarize these results in the table below :

Number of simulations	$Premium_{CCRIF}$	$Premium_{Emanuel}$
50 000	\$2 037 286	\$2 194 542

Thanks to the Central Limit theorem, we can give a confidence interval for those estimators. The form of this confidence interval at 95% is :

$$CI_{95\%} = \left[\bar{X}_N - \sqrt{\frac{q_{95\%}^{x^2(1)} \sigma^2}{N}}, \bar{X}_N + \sqrt{\frac{q_{95\%}^{x^2(1)} \sigma^2}{N}} \right]$$

If we note x the length of the confidence interval at 95% and N the number of simulations, we have a link between those two variables, which is :

$$N \geq \frac{q_{95\%}^{x^2(1)} \sigma^2}{(x/2)^2}$$

This link is summarized in the next table :

x	100	1000	10 000	100 000
N	10^{11}	10^9	10^7	10^5

We see that the number of simulations N explodes with the precision x . To solve this problem, we will try to modelize the claim distribution by an Extreme Value law.

4. Extreme Value Theory

Extreme Value Theory is a branch of statistics dealing with the behavior of the appropriately renormalized maximum of probability distributions. It is a useful tool for assessing risk for highly unusual events such as hurricanes. In order to measure an extreme quantile, we choose to model the distribution tail using Extreme Value Theory (EVT). Two approaches exist today :

4.1. The basic approach theory

In general this conforms to the first theorem in EVT :

Fisher-Tippett-Gnedenko theorem

Let $(X_i)_{i=1..n}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables (i.i.d), with the cumulative distribution function F .

Let $(M_i)_{i=1..n}$ be a sequence such that $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

If there exist two sequences of real numbers $(a_i)_{i=1..n}$ and $(b_i)_{i=1..n}$ and a non-degenerated cumulative distribution function H such that $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ converges in law to H , we say that F is in the maximum domain of attraction of H , then H belongs to the following family :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{if } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

4.2. The peak over threshold theory

Most common at this moment, the tail fitting approach based on the second theorem in EVT.

Pickands, Balkema and De Haan theorem

This approach consists in analyzing the sample of excess values that are above an appropriate threshold u . Let X be an i.i.d sample with the cumulative distribution function F . We now study the sample of the excesses $X_i - u$ for all i such that $X_i > u$. Using the Balkema-de Haan-Pickands theorem, if F verifies the first theorem hypothesis, the limiting conditional distribution of the excesses over a sufficiently high threshold follows the Generalized Pareto Distribution (GPD), which cumulative distribution function is given as :

$$G_{\xi, \sigma}(x) = \begin{cases} \left(1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \mathbb{1}_{x \in]0, -\frac{\sigma}{\xi}[} & \text{if } \xi < 0 \\ (1 - \exp(-\frac{x}{\sigma})) \mathbb{1}_{x \geq 0} & \text{if } \xi = 0 \\ \left(1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \mathbb{1}_{x \geq 0} & \text{if } \xi > 0 \end{cases}$$

5. Applying Extreme Value Theory to damage database

Payouts are null under the Attachment Point which provide a natural threshold. Then we used the Peak Over Threshold Model to estimate the law of the index above the Attachment Point.

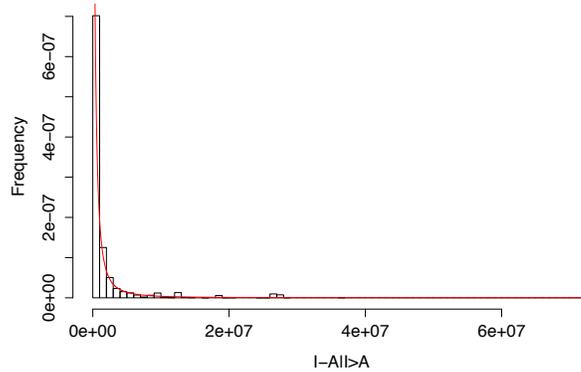


FIGURE 2 – GPD Estimation

As we can see, we have succeeded to fit the law by a GPD distribution. This modelization enables us to get a better estimation of the Exhaustion Point and then a better estimation of the premium.

6. Basis Risk

This security based on parametric triggers eliminates moral hazard but exposes hedgers to basis risk. This section aims at presenting the different tools used to reduce this basis risk. From a qualitative and statistical point of view, we analyse which tools were effectively useful. Our main tool was the precise cartography of Jamaica covered by 12290 cells. As a matter of convenience, we based our calculations on 1000 different cells. The use of those 1000 points for the computation of the wind speed law was not entirely efficient. Our initial 14 points were sufficient because the wind speed seems to have a uniform repartition on the country. However these cells were quite useful to modelize the precise economic exposure and gave strong results.

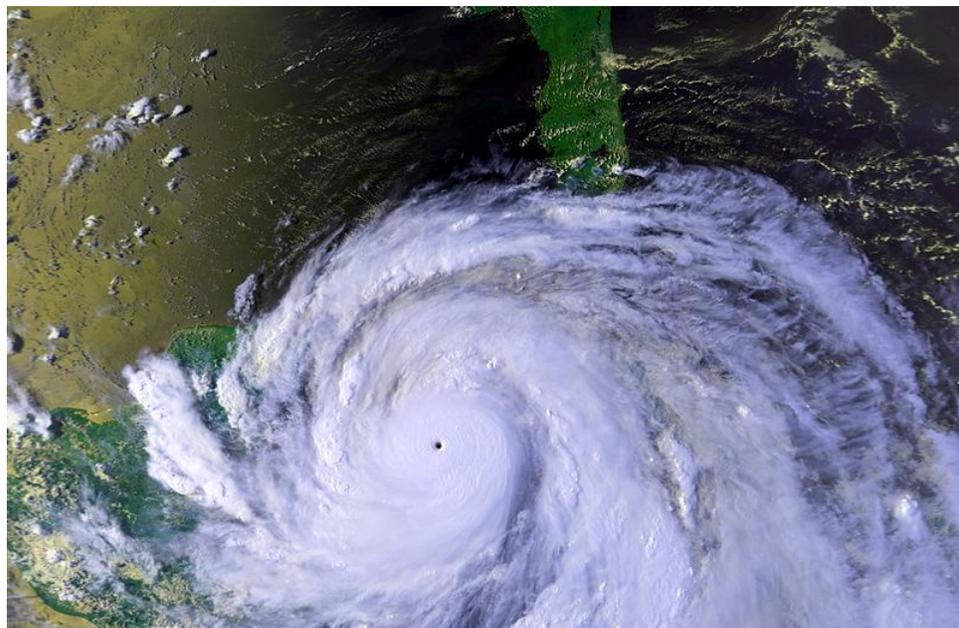
7. Reinsurance

The CCRIF aims at hedging his position working with reinsurers. We have used our model to price slices of reinsurance for each layer and give an example of a potential reinsurance deal. We also expose other ways to transfer risks, like securitization with Insurance Linked Securities and the Cat Bond market.

8. Conclusion

Simulated data and nightlight luminosity allows us to avoid some issues and to make statistics thanks to a bootstrap of our sample. We have been able to use Non Life Insurance Theory and Extreme Value Theory to find results and price a parametric insurance system. However other models can be proposed to improve this work. Unfortunately, with our research, we were only able to work with simulations of hurricanes in Jamaica. It would have been useful to be able to create a probability law concerning all of the Caribbean using correlations between those countries.

Etude d'une police d'assurance pour les risques de catastrophes naturelles dans les Caraïbes



Voie : Actuariat
Encadrants : Pierre Picard et Eric Strobl
Correspondant ENSAE : Xavier Milhaud
Date : 30 mai 2013

RÉSUMÉ

Suite à des événements de destruction majeurs, la première police d'assurance paramétrique inter-état a vu le jour : le CCRIF dans les Caraïbes. Le but de cet article est d'évaluer et de couvrir le risque d'ouragans dans cette zone. Nous avons basé notre étude sur des simulations d'ouragans en Jamaïque afin de générer une large base de données. Nous avons généré un modèle catastrophe composé d'une architecture classique en trois parties :

- un module risque, dont le but est de synthétiser la variabilité du climat dans un jeu d'évènements stochastiques,
- un module vulnérabilité, dont le but est de correctement évaluer les dommages causés par le phénomène physique,
- un module finance qui génère des sorties standardisées, composé d'un contrat d'assurance paramétrique et d'un système de réassurance pour couvrir ce risque.

Après avoir présenté la structure du CCRIF, nous avons essayé d'améliorer les modèles existants en réduisant le risque de base. L'utilisation de la Théorie des Valeurs Extrêmes nous a permis d'obtenir une distribution des pertes potentielles et d'automatiser cette méthode avec un modèle dynamique.

Mots-clés : Ouragan, CCRIF, Simulations de la vitesse du vent, Fonction de dommage, Bootstrap, Prime pure, Théorie des Valeurs Extrêmes, GPD, Réassurance, ILS, Cat Bond, Markowitz

ABSTRACT

Caribbean countries constituted the first-ever multi-country risk pool using parametric index. This article aims at assessing and hedging the risk of hurricanes in the Caribbean.

We have based our work on simulations of hurricanes in Jamaica to generate a large database, this is called a Catastrophe Model. A Catastrophe Model with a classic architecture is divided in three parts :

- a hazard module, whose aim is to summarize the natural variability of any given peril in a limited set of stochastic events,
- a vulnerability module, whose aim is to correctly assess the damage caused by physical phenomena,
- a financial module which generates standardized outputs, composed of a parametric insurance contract and a reinsurance system to hedge this risk.

After describing the structure of the CCRIF, we have tried to improve existing models reducing the basis risk. The use of Extreme Value Theory allows us to get the distribution of indexes of potential losses and to industrialize this method with a dynamic model.

Keywords : Hurricane, CCRIF, Wind speed simulations, Damage function, Bootstrap, Premium, Extreme Value Theory , GPD, Reinsurance ILS, Cat Bond, Markowitz.

Remerciements

Nous tenons à remercier Pierre PICARD et Eric STROBL pour l'encadrement de ce mémoire. Leur disponibilité et leurs conseils auront été bénéfiques au bon déroulement du projet. Nous adressons aussi nos remerciements à Ederm LEROUX (AXA GRM) qui a su se rendre disponible pour nous aider sur la partie Cat Bond et Réassurance de ce mémoire.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Présentation et problématique	5
2.1	Les ouragans, catastrophes naturelles dans les Caraïbes	5
2.1.1	Etat des lieux	5
2.1.2	Les ouragans	7
2.1.3	Echelle de Saffir-Simpson	8
2.2	Le CCRIF	10
2.2.1	Présentation	10
2.2.2	Rôle et liquidité	11
2.3	Assurance paramétrique et risque de base	13
2.3.1	Différents types d'assurance	13
2.3.2	Risque de base	14
2.3.3	Fonction de dommage et fonction de paiement	15
2.3.4	Indemnité	16
2.3.5	Fonction de dommage de Emanuel	19
2.4	Les Cat-Bonds	20
2.4.1	Avantages et inconvénients	20
2.4.2	Principe d'émission	21
2.4.3	Modèle catastrophe	22
2.4.4	Structure du CCRIF et Cat Bond	24
3	Présentation des données	25
3.1	Cartographie : découpage en 14 sections	25
3.2	Des données simulées	26
3.3	La richesse...vue du ciel	27
3.4	Statistiques descriptives	29
3.4.1	Statistiques des vitesses	29
3.5	Analyse critique	30
3.5.1	Comparaison CCRIF vs luminosité des 14 cellules	30
3.5.2	Les données simulées	33
3.5.3	Les données manquantes	33
4	Théorie de l'assurance non-vie	34
4.1	Modèle de base	34
4.2	Prime pure	35
4.3	Dans le cadre du CCRIF	36
4.4	Prime commerciale	37
5	Calcul de la prime pure	38
5.1	Prime pure : Méthode de Monte Carlo	38
5.2	Fonction dommage : CCRIF	39
5.2.1	Analyse numérique	40
5.2.2	Intervalle de confiance	41

5.3	Fonction dommage : K.Emanuel	42
5.3.1	Analyse numérique	45
5.4	Attachment et Exhaustion Points	45
5.5	Fonction de répartition et quantile empirique	46
5.5.1	Fonction de répartition empirique	46
5.5.2	Fonction quantile empirique	46
6	Théorie des Valeurs Extrêmes	51
6.1	Qu'est ce qu'un événement climatique extrême?	51
6.2	Présentation	51
6.3	Théorème de Fisher-Tippet-Gnedenko	52
6.4	Théorème de Balkema-de Haan-Pickands	53
6.5	Estimation	55
6.5.1	Estimation des paramètres	55
6.5.2	Estimation du seuil	56
7	Application : Estimation de la loi de l'indice	57
7.1	Introduction et quelques rappels	57
7.2	Modélisation de la queue de distribution	58
7.3	Relation Prime - Hauteur de couverture	60
7.3.1	Cas où x est linéaire	61
7.3.2	Cas où x est nul	63
8	Réduction de risque de base	65
8.1	Risque de base et modèle paramétrique	65
8.2	Approche temporelle et météorologique	65
8.3	Approche spatiale	66
8.3.1	Modélisation de l'exposition au risque	66
8.3.2	Découpage précis	68
8.4	Conclusion et ouverture	69
9	Réassurance	70
9.1	Le marché de la réassurance	70
9.1.1	Histoire	70
9.1.2	Définition	70
9.1.3	Les acteurs du marché de la réassurance	71
9.2	La réassurance du CCRIF	72
9.3	Détermination des prix des tranches de réassurance avec notre modèle	72
9.4	Le marché ILS (Insurance Linked Securities)	74
9.5	Le marché des Cat bonds	75
9.5.1	Agence de notations	75
9.5.2	Intérêt des Cat Bonds	75
9.5.3	Modèle de Markowitz et déplacement de la frontière efficiente	75
9.5.4	Analyse des prix de marché des Cat Bonds	78
9.6	Tarification des Cat Bonds	79
9.6.1	A partir des données de marché historique	79
9.6.2	Modélisation	80
9.7	Une aide à la micro assurance	81
10	Conclusion	82
A	Découpage en 14 cellules	83
A.1	Zones <i>CRESTA</i> de la Jamaïque	83
A.2	Coefficients affectés aux 14 zones dans le contrat du CCRIF	83
A.3	Matrice de corrélations entre les 14 cellules	84

B	Rappels de probabilités	85
B.1	Rappels sur la loi de Poisson	85
B.2	Test de Wald pour comparer les moyennes de deux échantillons indépendants de variance inconnue	85
B.2.1	Théorème Central Limit	86
B.2.2	Lemme de Slutsky	86
B.3	Test de Kolmogorov-Smirnov	86
C	Codes R	88
C.1	Prime Pure - CCRIF	88
C.2	Prime pure - K.Emanuel	89
C.3	Estimation GPD	90
C.4	Réassurance	91

Chapitre 1

Introduction

A cause du changement climatique actuel, le rythme de survenance des catastrophes naturelles de grande amplitude s'est intensifié. Cela met en péril certains pays situés dans des zones à haut risque de catastrophes naturelles. C'est notamment le cas des pays des Caraïbes qui sont exposés à des risques d'ouragan et de tremblement de terre. Afin de se prémunir contre ces risques, les états de cette région ont souscrit une assurance paramétrique commune à l'ensemble de la région : Le *Caribbean Catastrophe Risk Insurance Facility* (CCRIF).

Nous pouvons alors nous demander comment est structuré ce type d'assurance, comment est tarifé ce produit dont l'indemnisation est basée sur un indice ? Peut-on améliorer le modèle déjà existant ?

Cette étude a la tâche de présenter cette assurance paramétrique. Pour cela nous avons examiné sa structure, puis l'avons comparé à d'autres éléments du marché de l'assurance. Nous nous concentrerons sur la partie risque d'ouragans dans les contrats conclus entre les pays et l'organisme.

Nous avons ensuite expliqué la façon dont était mise en place la prime à payer par les pays. Afin d'analyser les résultats, nous avons bénéficié d'une base de données concernant l'île de la Jamaïque. C'est pourquoi nous nous concentrerons particulièrement sur le contrat passé entre la Jamaïque et le CCRIF. L'analyse pourra alors être généralisée à l'ensemble des îles du bassin Caraïben.

Après avoir décrit l'organisation de cette assurance dans sa globalité, nous avons tenté d'apporter une amélioration à la modélisation de la prime pure. Pour cela, nous avons introduit la Théorie des Valeurs Extrêmes et l'avons appliqué à ce type de risques.

Ces contrats d'assurances paramétriques possèdent malheureusement quelques inconvénients. La modélisation des indemnités basées sur un indice est sujette à un fort risque d'erreur. En effet, cet indice synthétique basé sur des éléments physiques lors du passage d'un ouragan, ne peut capter au mieux les réels dommages occasionnés. C'est ce que l'on appelle le risque de base. Nous allons tenter de réduire cet écart de modélisation.

Pour terminer la présentation, nous nous sommes penchés sur les différents moyens de couverture que cette organisation peut mettre en oeuvre. Nous verrons entre autre comment elle transfère ses risques auprès du marché de la réassurance.

Chapitre 2

Présentation et problématique

2.1 Les ouragans, catastrophes naturelles dans les Caraïbes

2.1.1 Etat des lieux

Les ouragans sont susceptibles de conduire à des pertes économiques considérables avec des conséquences dévastatrices durables sur les zones géographiques affectées. Les Caraïbes sont particulièrement concernées par ces catastrophes naturelles dans la mesure où il s'agit essentiellement de petites économies ouvertes avec peu de ressources pour leur permettre d'absorber des chocs localisés potentiellement très importants.

Il convient pour commencer de fournir quelques définitions basiques relatives au sujet :

Tout d'abord, qu'est ce qu'une catastrophe naturelle ?

Définition 2.1.1. *Une catastrophe naturelle est un événement d'origine naturelle, subi et brutal, qui provoque des bouleversements importants pouvant engendrer de grands dégâts matériels et humains.*

Nous pouvons donner une définition plus précise des catastrophes naturelles. En France, d'après l'article L125-1 du Code des Assurances :

Définition 2.1.2. *« Sont considérés comme effets des catastrophes naturelles, les dommages matériels directs non assurables ayant eu pour cause déterminante l'intensité anormale d'un agent naturel lorsque les mesures habituelles à prendre pour prévenir ces dommages n'ont pu empêcher leur survenance ou n'ont pu être prises. »*

Contrairement à des catastrophes industrielles du type l'incident nucléaire survenu à Tchernobyl en 1986, elles ne sont pas directement liées à une intervention humaine. Elles prennent le plus souvent la forme de catastrophes dites climatiques comme les tremblements de terre, les inondations et les ouragans. Elles engendrent d'une part une destruction à grande échelle et parfois de nombreuses pertes humaines. Mais elles freinent aussi considérablement le développement économique du pays affecté. Les pays en voie de développement sont les plus souvent touchés et l'événement marque une véritable cassure dans la continuité et les efforts mis en oeuvre pour assurer le progrès. On peut citer par exemple un pays comme Haïti, régulièrement touché, et qui doit presque repartir de zéro après chaque catastrophe.

Qu'est ce que le climat ?

Définition 2.1.3. *Le climat correspond à la distribution statistique des conditions atmosphériques dans une région donnée pendant une période de temps donnée. Les variables caractéristiques sont la température, le niveau des précipitations, l'ensoleillement et la vitesse du vent.*

Le climat ne peut plus être aujourd'hui considéré comme une information figée et permanente.

Qu'est ce que le changement climatique ?

Définition 2.1.4. *Un changement climatique correspond à une modification durable (de la décennie au million d'années) des paramètres statistiques (paramètres moyens, variabilité) du climat global de la Terre ou de ses divers climats régionaux. Ces changements peuvent être dus à des processus intrinsèques à la Terre, à des influences extérieures ou, plus récemment, aux activités humaines.*

A l'heure actuelle, on observe plutôt un réchauffement du climat. Le réchauffement climatique est une modification du climat de la Terre due à l'augmentation de la température moyenne des océans et de l'atmosphère sur plusieurs années. D'après les expertises du GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) il serait en grande partie lié à l'essor de l'activité humaine lors de ces 60 dernières années.

Il est intéressant de remarquer que le changement climatique ne correspond pas seulement à une modification statique du climat mais aussi à une augmentation de la variabilité des conditions météorologiques :

Le climat est devenu plus instable et plus volatil. Cette volatilité peut être la source d'événements catastrophiques difficiles à prévoir aux conséquences désastreuses pour l'homme. On peut donc prévoir une certaine influence du changement climatique sur l'activité économique de l'homme.

La gestion des catastrophes naturelles liées aux changements climatiques est ainsi devenue une préoccupation mondiale. La réduction des risques financiers causés par ces phénomènes représente un défi pour le développement économique.

Nous nous intéressons ici à la gestion financière de ces catastrophes. Pour faire face à ce risque, des stratégies financières ont été établies.

Il y a des avantages considérables liés à la gestion proactive des risques et à l'intégration des scénarios de gestion des catastrophes dans la planification économique. Il faut pour cela mettre à profit la technologie à disposition afin d'évaluer les risques naturels et leurs impacts potentiels avant la survenance des catastrophes. Ainsi les gouvernements pourront analyser et choisir les options de financement post-catastrophe.

Nous allons travailler sur un système d'assurance correspondant à ce type d'option.

Il s'agit donc de transférer le risque de catastrophes naturelles des gouvernements des pays pauvres vers des institutions capables de gérer ces risques afin de faciliter leur développement économique.

La gestion des catastrophes naturelles s'inscrit donc aussi dans le cadre de la lutte contre la pauvreté dans la mesure où les pays en voie de développement sont les plus souvent touchés. Ces événements ont un effet apocalyptique sur l'essor économique des pays pauvres.

2.1.2 Les ouragans

Le changement climatique observé semble bel et bien impacter les événements comme les ouragans. Cependant, l'hypothèse que ce changement augmente la fréquence des ouragans en général reste simplificatrice et ne reflète pas vraiment la réalité. En revanche les événements de grande amplitude de type catastrophes naturelles sont bel et bien de plus en plus fréquents. Les ouragans observés ne sont donc pas vraiment de plus en plus fréquents mais leur intensité est de plus en plus élevée. On observe davantage d'ouragans causant des dommages significatifs.

La formation des ouragans dépend essentiellement de la température et du niveau de l'eau ainsi que des courants marins. La température de l'eau est un facteur clé dans la formation d'un ouragan car le soleil frappe à la surface des océans toute la journée et plus l'eau devient chaude plus il y a de vapeurs pour nourrir l'ouragan. L'augmentation de la température des océans favorise ainsi la formation des ouragans. Cela déplace aussi leur zone d'impact. Les eaux normalement tempérées de l'hémisphère nord se réchauffent et l'on voit se produire des ouragans dans des régions peu coutumières du fait.

D'autres facteurs clés sont liés au changement météorologique comme le niveau de la mer, plus élevé à cause de la fonte des glaces, et les modifications des courants marins.

A cause de ce potentiel changement climatique, des ouragans plus puissants sont à craindre pour les années à venir, et ces tempêtes destructrices pourraient bien menacer les populations, les biens, l'agriculture et la sécurité alimentaire mondiale ainsi que de nombreuses activités économiques. Par exemple, les perturbations liées aux inondations et aux tempêtes pourraient affecter les approvisionnements en nourriture et faire augmenter les prix au niveau mondial.

En 2010 le réassureur Munich Re a déclaré qu'il y avait eu 950 catastrophes naturelles enregistrées, dont 90% étaient liées à des phénomènes climatiques tels que des tempêtes ou des inondations.

On observe en fait deux phénomènes conjugués :

- A cause du changement climatique, les ouragans frappent de plus en plus les régions peuplées et présentant des richesses. (phénomène de remontée vers le nord).
- De plus on observe une concentration des biens et des personnes sur les zones à risques (pays émergents notamment) : l'évolution de l'économie mondiale fait que les zones habituellement frappées sont des zones émergentes où la richesse et la population croissent très vite.

On a donc un changement climatique à l'origine d'une augmentation de l'intensité des phénomènes et une conjoncture économique qui crée davantage de capital à risque face à ces désastres. En effet, l'implantation de populations, d'infrastructures ou d'activités dans des zones soumises aux aléas naturels conditionne les conséquences économiques et humaines de ces catastrophes. Ainsi par exemple, la mortalité due aux catastrophes naturelles a augmenté de 60 pour cents entre 1980 et 2000. A cause de la croissance économique et de l'augmentation de la population mondiale, il naît un besoin croissant pour évaluer les risques et se couvrir contre les catastrophes naturelles.

Il est donc intéressant de remarquer que si les ouragans causent des dommages de plus en plus importants c'est certes à cause du changement climatique qui déplace leur barycentre vers le nord mais surtout à cause du développement économique qui augmente le capital à risque. Les dommages évalués sont plus forts car il y a davantage de biens et d'hommes exposés à l'aléa climatique. Le changement climatique reste très difficile à évaluer, en revanche l'émergence de l'activité humaine dans certaines régions à risques est une certitude. La croissance économique et l'augmentation de la population, de plus en plus concentrées dans de gigantesques mégapoles, sont des facteurs aggravant la sinistralité. À intensité donnée des phénomènes naturels (vitesse des vents, hauteur des précipitations, etc.), plus les richesses économiques exposées sont importantes, plus les populations sont nombreuses, plus les dommages peuvent être élevés.

Ces dernières remarques justifient le besoin de couverture croissant face aux ouragans. Il existe des critères pour hiérarchiser les ouragans et évaluer les dommages, ces critères permettent de constituer des échelles de mesure.

2.1.3 Echelle de Saffir-Simpson

L'échelle de Saffir-Simpson, établie à partir de la vitesse des vents, décrit les effets potentiels des ouragans sur les infrastructures. A l'instar de l'échelle de Richter pour les tremblements de terre, elle est une échelle de classification de l'intensité des ouragans tropicaux. Pour classer un ouragan, on mesure pendant une minute la vitesse du vent à 10 m d'altitude et on compare la moyenne aux classes définies. Cette échelle a été conçue par Herbert Saffir et Robert Simpson à la demande de l'organisation météorologique mondiale (OMM) en 1969 afin de décrire les effets potentiels d'un cyclone tropical sur les infrastructures humaines.

Son usage est courant pour les bassins cycloniques de l'hémisphère ouest dont font partie les caraïbes. Néanmoins elle est assez critiquée par les spécialistes scientifiques comme Kerry Emanuel. Nous pouvons nous y référer pour comparer nos résultats aux dommages envisagés par cette échelle.

Catégorie	Vents soutenus	Description des dégâts théoriques
1	32,8 à 42,5 m/s 118 à 153 km/h	Les cyclones de catégorie 1 ne causent habituellement aucun dégât structurel significatif aux bâtiments ; cependant, ils peuvent causer des dommages limités aux maisons mobiles, à la végétation et aux panneaux de signalisation. Des bardeaux ou tuiles faiblement fixés sur un toit peuvent s'envoler.
2	42,8 à 49,2 m/s 154 à 177 km/h	Les cyclones de catégorie 2 sont suffisamment puissants pour infliger des dégâts structurels aux maisons (toits et portes). Les maisons mobiles peuvent également souffrir de dégâts importants. Des coupures électriques et un manque d'eau potable peuvent survenir durant plusieurs jours.
3	49,4 à 58 m/s 178 à 209 km/h	Les cyclones de catégorie 3, ou plus élevée, sont qualifiés d'ouragans majeurs des bassins pacifiques et atlantiques. Ces cyclones peuvent causer quelques dommages structurels aux petites résidences et aux bâtiments.
4	58,3 à 66,7 m/s 210 à 240 km/h	Les cyclones de catégorie 4 produisent des dégâts considérables aux toits et aux façades légères. Des dégâts irréparables peuvent être causés aux petites habitations.
5	Plus de 69,4 m/s Plus de 250 km/h	Les cyclones de cette catégorie peuvent endommager considérablement les maisons et les bâtiments urbains, arracher entièrement leurs toits et même les détruire complètement. De fortes crues peuvent endommager sérieusement les premiers étages de tous les bâtiments près des côtes, et de nombreuses infrastructures côtières peuvent être détruites et balayées par la houle. Un très grand manque d'eau potable et des coupures d'électricité à long-terme peuvent être attendus et peuvent durer jusqu'à plusieurs mois.

FIGURE 2.1 – Echelle de Saffir-Simpson

Il existe d'autres échelles apparentées comme l'échelle de Fujita. Celle-ci se base sur les dommages observés post ouragans sur les arbres ou les bâtiments pour les classer. Elle est notamment utilisée par l' US National Weather Service . Elle va de la classe F0 (dommages mineurs) à la classe F5 (dommages extrêmes lors des plus sévères tornades). Elle fournit un moyen de quantifier le niveau de dommages causés par les ouragans historiques. Les vitesses mesurées lors de l'ouragan sont ensuite associées à posteriori aux dommages.

Catégorie	Vents (en km/h)	Fréquence	Description des dégâts théoriques
F0	60-120	82%	Dégâts légers sur : – les cheminées – les antennes de télévisions – les bardeaux – les arbres – les enseignes – les fenêtres
F1	120-180	11%	Dégâts modérés : – automobiles renversées – arbres déracinés
F2	180-250	4%	Dégâts importants : – toitures arrachées par le vent – hangars démolis – maisons mobiles renversées
F3	250-330	1,8%	Dégâts considérables : – murs extérieurs et toits projetés dans les airs – effondrements des maison et bâtiments de métal – forêts et récoltes abattues
F4	330-420	0,9%	Dégâts dévastateurs : – Effondrement des murs intérieurs des habitations – importants objets en acier, béton projetés à grande distance
F5	420-510	0,3%	Dégâts incroyables : – maisons rasées et projetées – dommages à de grosses structures

FIGURE 2.2 – Echelle de Fujita

2.2 Le CCRIF

2.2.1 Présentation

La survenance de catastrophes naturelles conduit à de fortes pertes économiques dans les pays touchés. Les événements récents qui ont affecté le Japon (2011) et Haïti (2010) en sont de réels témoignages. Les pertes liées aux catastrophes naturelles telles que les ouragans ou les tremblements de terre sont d'une plus grande intensité dans les pays des Caraïbes car ils sont plus fréquents et causent plus de dégâts relativement à la richesse de ces pays.

La localisation des états des caraïbes sur le parcours des ouragans naissants dans l'Atlantique explique la forte exposition aux risques de catastrophes naturelles de ces îles. On estime que les ouragans de forte intensité peuvent affecter la région une fois tous les deux ans et demi en moyenne. Les dégâts physiques infligés aux Etats des Caraïbes sont de l'ordre de 600M USD en moyenne annuelle. On retrouve ci-dessous un récapitulatif des événements majeurs dans cette région entre 1979 et 2005.

Les événements dévastateurs de 2004 (Ouragans Ivan et Jeanne) ont amené la communauté des états des Caraïbes (CARICOM) à demander une assistance auprès de la Banque Mondiale pour constituer une assurance efficace et abordable contre les risques de catastrophe naturelle. Les ravages des catastrophes naturelles sur des petits États insulaires sont dévastateurs comme dans le cas de la Grenade où les effets de l'ouragan Ivan ont été estimés à 200% du PIB alors que dans le reste du monde les catastrophes naturelles représentent 2% en moyenne du PIB. C'est ainsi qu'en 2007 fût créé le Caribbean Catastrophe Risk Insurance Facility (CCRIF).

1979	Dominica (David and Frederick)	72,100	44,650
1980	St. Lucia (Allen)	80,000	87,990
1988	Dominican Republic (Flood)	1,191,150	
1988	Haiti (Gilbert)	870,000	91,286
1988	Jamaica (Gilbert)	810,000	1,000,000
1989	Montserrat (Hugo)	12,040	240,000
1989	Antigua, St. Kitts/Nevis, Tortolla (Hugo)	33,790	3,579,000
1991	Jamaica (Flood)	551,340	30,000
1992	Bahamas (Andrew)	1,700	250,000
1993	Cuba (Storm)	149,775	1,000,000
1993	Cuba (Flood)	532,000	140,000
1994	Haiti (Storm)	1,587,000	
1995	St. Kitts and Nevis (Luis)	1,800	197,000
1995	U.S. Virgin Islands (Marilyn)	10,000	1,500,000
1998	Dominican Republic (Georges)	975,595	2,193,400
2000	Antigua/Barbuda, Dominica, Grenada, St. Lucia (Lenny)		268,000
2001	Cuba (Michelle)	5,900,012	87,000
2004	Cuba, Jamaica, Cayman Islands (Charley)	202,620	1,000,000
2004	Bahamas, Dominican Republic, Puerto Rico, Turks and Caicos (Frances)	8,450	
2004	Cayman Islands, Grenada, Jamaica, St. Vincent, Cuba, Barbados, Trinidad and Tobago, Haiti (Ivan)	419,805	3,431,564
2004	Haiti, Puerto Rico, Bahamas (Jeanne)	303,426	21,000
2005	Cuba, Haiti, Jamaica (Dennis)	2,523,000	1,400,000
2005	Cuba, Haiti, Jamaica, Bahamas (Wilma)	101,600	

FIGURE 2.3 – Principaux désastres naturels dans les Caraïbes (1979-2005)

Le CCRIF se présente comme une mutuelle d'assurance pour les 16 Etats du bassin Caribéen qui le composent. Ce regroupement permet une couverture d'assurance à moindre coût pour chacun des pays grâce au principe de diversification et au montant des réserves récolté par le fond auprès de donateurs institutionnels. Cette étude sera basée sur les données de la Jamaïque, mais il est évident qu'on pourra étendre nos résultats aux autres pays membres du CCRIF.

Les Etats membres du CCRIF sont Anguilla, Antigua-et-Barbuda, Bahamas, Barbade, Belize, Bermudes, Iles Caïmans, Dominique, Grenade, Haïti, Jamaïque, Saint-Christophe-et-Niévès, Sainte-Lucie, Saint-Vincent-et-les-Grenadines, Trinité-et-Tobago, îles Turks-et-Caïcos.

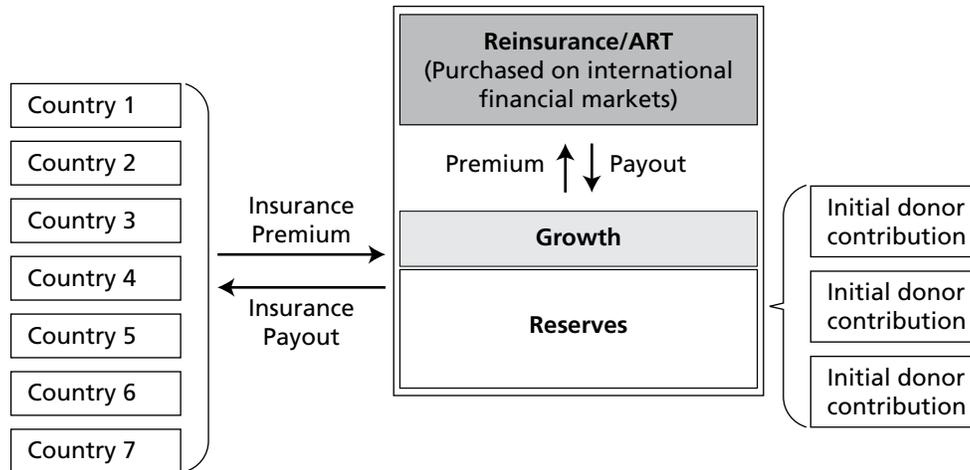


FIGURE 2.4 – Structure du CCRIF

2.2.2 Rôle et liquidité

Le fond CCRIF agit comme un intermédiaire entre ces états et les marchés internationaux de la réassurance. Il permet aux états souscripteurs de mutualiser leurs risques et d'accéder à une aide budgétaire immédiate en cas de catastrophes naturelles majeures afin de combler la chute des recettes fiscales et assumer les dépenses urgentes : rétablir l'eau courante et l'électricité dans les zones touchées.

Les pertes que le CCRIF va combler sont de différents types : les dommages aux bâtiments, l'infrastructure du gouvernement, la réduction annuelle sur la taxe au revenu (taxe sur importation, tourisme), l'aide aux victimes de la catastrophe.

Ce mécanisme est basé sur un système d'assurance paramétrique et ne couvre pas l'intégralité des pertes, il est en fait complémentaire de l'aide à la reconstruction dont les délais de mobilisation sont plus importants. En effet, étant donné la taille réduite des territoires, les conséquences humaines et financières des catastrophes sont particulièrement importantes : ces pays sont dans l'incapacité de faire jouer des compensations inter-régionales et ont un accès limité aux financements extérieurs. Les gouvernements des Caraïbes se heurtent à de sévères crises de liquidité post-catastrophes. La détermination des indemnités se fait non pas à partir d'évaluations de sinistres sur le terrain comme dans le cas de l'assurance traditionnelle, mais par référence à la vitesse du vent. Un modèle permet ensuite de déterminer une indemnité correspondant à cette force du vent, elle sera payée immédiatement après la survenance en attendant la suite des aides budgétaires. Cette assurance permet ainsi de disposer rapidement de liquidités après le passage d'un ouragan.

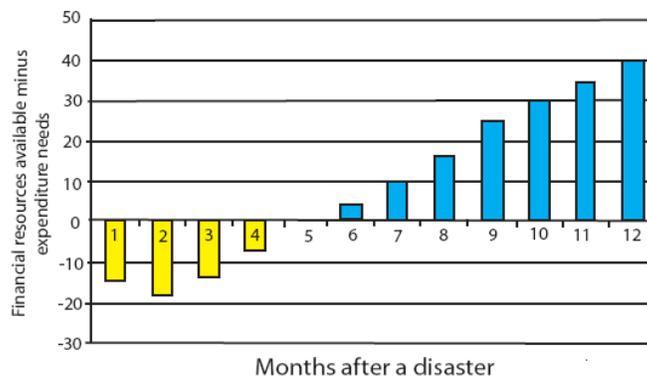


FIGURE 2.5 – Liquidités post catastrophe

Depuis sa création en 2007, le CCRIF a effectué déjà huit paiements à sept pays différents, pour un total de 32 Millions de dollars. Tous les versements ont été transféré aux gouvernements respectifs en moins d'un mois (et dans certains cas en moins d'une semaine). La rapidité d'exécution permet au pays de faire face au manque de liquidité enduré après une catastrophe. Ci-dessous, nous retrouvons les différentes indemnités détaillées selon les événements.

Evènement	Pays affecté	Indemnité (en \$)
Tremblement de terre Novembre 2007	Dominique	528 021
Tremblement de terre Novembre 2007	Sainte-Lucie	418 976
Cyclone Ike 2008	Iles Turks-et-Caicos	6 303 913
Tremblement de terre Janvier 2010	Haïti	7 753 579
Cyclone Earl Août 2010	Anguilla	4 282 733
Cyclone Tomas Octobre 2010	Barbade	8 560 247
Cyclone Tomas Octobre 2010	Sainte-Lucie	3 241 613
Cyclone Tomas Octobre 2010	Saint-Vincent-et-les-Grenadines	1 090 388
Total sur la période 2007-2010		32 179 470

2.3 Assurance paramétrique et risque de base

2.3.1 Différents types d'assurance

Il existe différents types d'assurance sur le marché selon la façon dont est quantifiée l'indemnité. Nous avons tout d'abord l'assurance indemnitaire classique. Son principe est d'évaluer le coût des pertes engendrées par le sinistre. L'indemnisation n'est alors rien d'autre que le coût effectif des dommages. Il existe cependant des inconvénients comme le temps que peut prendre l'évaluation des sinistres. En effet, cela peut durer plusieurs mois pour le risque de catastrophe naturelle lorsque des territoires entiers sont dévastés. Ce type d'indemnisation est donc adapté aux "petits risques" qui sont fréquents mais de faible intensité. On pense notamment aux assurances des ménages comme l'assurance automobile par exemple. Un deuxième inconvénient vient de la dose d'aléa moral qui peut demeurer dans ce type de contrat, de la part de l'assuré. Sachant que l'ensemble des frais suivant un sinistre sera pris en charge par l'assureur, le client peut être tenté de devenir moins prudent.

On comprend qu'il est bien compliqué de quantifier les dégâts suite à une catastrophe de grande ampleur. De plus, les catastrophes naturelles étant des événements extrêmement rares, il est difficile d'obtenir des statistiques pertinentes sur ce genre de sinistres, car les historiques sont bien trop inconsistants. C'est pourquoi dans le cas des catastrophes naturelles, on peut avoir recours à une modélisation des pertes. Sachant l'exposition, on utilise un modèle catastrophe pour quantifier les pertes. Ce modèle catastrophe est calibré de façon à simuler un nombre conséquent d'ouragans (ex.10 000 simulations) pour ainsi obtenir une estimation des pertes. Ces pertes modélisées sont alors utilisées comme les réelles pertes pour l'indemnisation. Cette technique requiert de connaître l'exposition. Dans un pays développé, l'assureur connaît exactement l'exposition de son portefeuille. Par contre dans le cas du CCRIF, on ne connaît pas l'exposition exacte d'un pays comme la Jamaïque. C'est pourquoi on voit d'ores et déjà que cette méthode ne pourra pas s'appliquer.

Il existe ensuite des assurances dont l'indemnisation est basée sur un indice. Dans un premier temps nous avons l'assurance dont l'indice est commun à toute l'industrie. On pense notamment à PERILS qui est une banque de données concernant le risque de tempête en Europe et d'inondation au Royaume-Uni. Cet indice est partagé par les assureurs de France, Allemagne, Royaume-Uni, Belgique, Pays-Bas, Luxembourg, Suisse, Danemark, Suède, Norvège et Irlande. L'avantage d'un tel indice est la transparence pour l'investisseur. De plus l'instauration d'un indice global regroupant plusieurs pays est un avantage car aujourd'hui, les grands groupes d'assurance sont déployés partout à travers le monde. Aux Etats-Unis nous trouverons de façon similaire le Property Claims Services (PCS), un agent statistique de l'industrie de l'assurance dans ce pays, qui a mis en place des indices pour différents types de risques.

Dans un second temps, nous avons l'assurance paramétrique dont l'indice est propre au contrat qui lie les deux parties. Dans ce cas les indemnités sont déclenchées lorsque l'indice dépasse un seuil défini à l'avance. Cet indice est fonction de facteurs physiques. Par exemple pour le risque d'ouragans, sachant que la majeure partie des destructions est causée par le vent, le facteur naturellement retenu est la vitesse du vent en différents points de mesure. L'introduction d'assurance paramétrique permet d'une part de réduire l'asymétrie d'information, car les conditions sont fixées à l'avance et connues de tous dans le contrat. L'introduction d'un indice basé sur des variables exogènes aux deux agents permet de réduire le risque d'aléa moral. D'autre part, cela permet un règlement des indemnités plus rapide car il n'y a pas de perte de temps dans l'évaluation réelle des dégâts, comme cela aurait été le cas pour une assurance indemnitaire. En effet, le temps moyen d'indemnisation pour une assurance paramétrique s'élève à deux semaines, alors qu'il nécessite plusieurs mois pour évaluer les dommages dans le cas d'une assurance classique.

Ce point est crucial, concrètement les pays pauvres subissant des catastrophes naturelles comme la Jamaïque se retrouvent désemparés et font face à de sérieux problèmes de liquidité. Nous pouvons citer l'exemple de Grenade dont les dégâts causés par l'ouragan Ivan en 2004 ont réduit par deux la productivité car le pays n'avait pas d'argent disponible pour rouvrir l'aéroport, les routes et les hôpitaux. L'assurance paramétrique permet un déclenchement des indemnités immédiat en appliquant la règle préétablie. Cela permet au pays de disposer rapidement des liquidités nécessaires pour subvenir aux besoins les plus urgents (assistance, eau courante, électricité...) afin de relancer son économie. En résumé, l'assurance paramétrique est un contrat

adapté à des pertes peu fréquentes mais de grande intensité. Un autre point positif, non négligeable dans ces pays, est que les coûts d'administration d'une telle assurance sont fortement réduits. En effet, on ne trouve pas de frais liés à l'évaluation des destructions.

2.3.2 Risque de base

Le risque de base est défini comme l'écart entre le coût réel d'un sinistre et le montant de l'indemnisation apportée par l'assureur. Il est clair qu'il n'existe aucun risque de base pour les contrats d'assurance classique, car l'indemnisation n'est rien d'autre que le coût réel du sinistre. Par contre l'assureur ne connaît pas le montant du sinistre juste après que celui-ci soit apparu. Dans le cas d'un contrat de réassurance par exemple, le réassureur doit attendre la fin de l'évaluation des pertes pour être au courant du montant du dédommagement, or cette évaluation peut prendre beaucoup de temps pour de "grands risques". L'introduction d'une modélisation des pertes réduit le temps d'évaluation des dommages, mais augmente le risque de base par essence.

Comme nous le disions auparavant, l'assurance paramétrique comporte un réel avantage en ce qui concerne la rapidité de dédommagement. Par contre le risque de base est un réel inconvénient. Dans ce type de contrat, l'indemnisation est fonction d'un indice qui dépend seulement de facteurs physiques. Ainsi, on ne prend pas du tout en compte l'exposition, ce qui entraîne des erreurs d'estimation majeures.

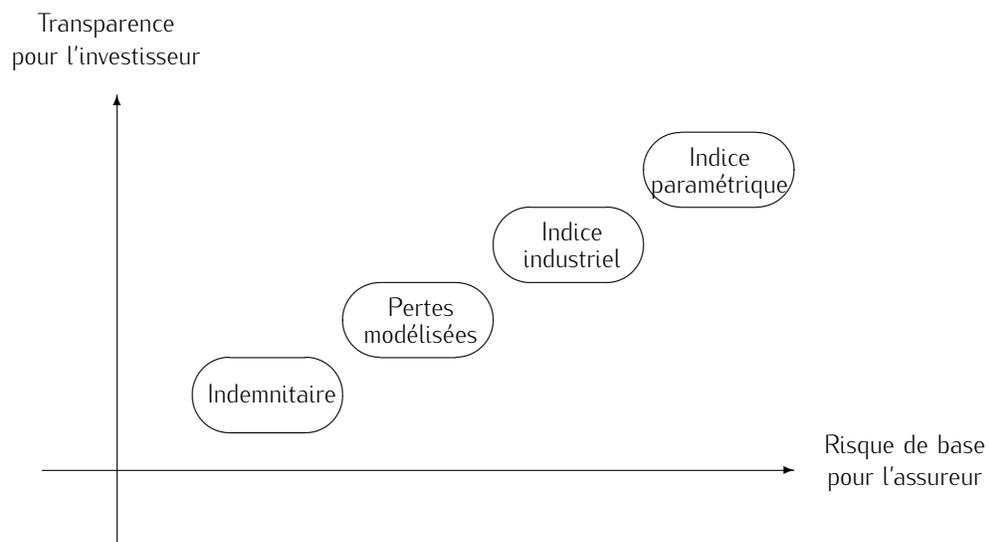


FIGURE 2.6 – Risque de base et transparence pour l'investisseur

Malgré un risque de base élevé, la rapidité de traitement prime, et c'est essentiellement pour cette raison que le CCRIF a décidé de proposer une assurance paramétrique à ses pays membres. Pour calculer l'indice lié au risque d'ouragan, le CCRIF fait appel aux données météorologiques fournies par l'U.S. National Hurricane Center. En ce qui concerne le risque de tremblement de terre, c'est l'échelle de Richter qui est utilisée. Les données sont alors fournies par l'U.S. Geological Survey. Voyons alors comment est construit l'indice paramétrique dans ce type d'assurance.

2.3.3 Fonction de dommage et fonction de paiement

Dans cette partie, nous allons voir comment la fonction de paiement est construite à partir de la fonction de dommage. En effet il existe une distinction entre ces deux fonctions. Tout d'abord nous avons la fonction de pertes qui exprime le montant réel des pertes. Cette fonction est très difficile à approcher, à cause du manque de données. Ensuite nous avons la fonction de paiement qui fixe les indemnités payées par le CCRIF au pays en fonction de l'intensité de la catastrophe. Par intensité, on parle des facteurs physiques comme la vitesse du vent pour les ouragans ou l'accélération du sol pour le risque de tremblement de terre. C'est justement l'indice paramétrique introduit auparavant qui va mesurer l'intensité de la catastrophe. Pour retranscrire la sévérité de la catastrophe en perte monétaire, on fait appel à une fonction dommage qui dépend de cet indice, mesurant l'intensité de la catastrophe. Cette fonction de dommage est spécifique aux types d'infrastructures et de bâtiments que l'on peut trouver sur le territoire assuré. La fonction dommage doit exprimer les pertes potentielles en trésorerie du gouvernement, mais aussi la baisse d'impôts récoltés suivant une catastrophe. De plus, elle doit couvrir les dépenses liées à la réhabilitation des propriétés ainsi que les frais d'aide aux victimes. Pour chacun des pays membres du CCRIF, la fonction de dommage a été modélisée en utilisant des informations spécifiques à l'économie de chaque Etat, à son régime de taxation et à son exposition au risque.

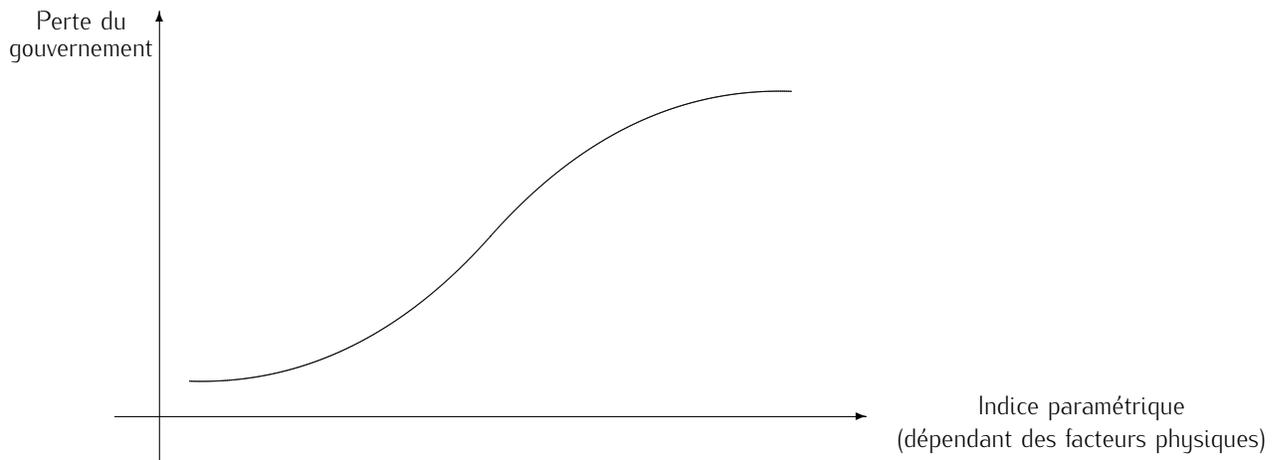


FIGURE 2.7 – Fonction de dommage

Pour assurer que l'indice reflète au mieux l'impact d'une catastrophe sur l'ensemble, les facteurs physiques sont relevés à différents endroits à travers le pays. Ceci permet de réduire le risque de base évoqué précédemment. Ces valeurs sont alors combinées grâce à des pondérations qui reflètent les pertes économiques potentielles suite au passage d'un ouragan. Chaque pondération représente l'importance de la contribution de cette localité dans les revenus du gouvernement.

Pour le risque d'ouragan, nous mesurons la vitesse maximale du vent en différents points. Soient V^1, \dots, V^n les pics de vitesse en m/s retenus aux localités 1 à n de la zone territoriale assurée. L'allure de la formule pour I généralement utilisée est :

$$I = I(V^1, \dots, V^n) = \alpha \sum_{i=1}^n \omega_i \times \max(V^i - V_{seuil}, 0)^\beta$$

Avec ω_i les pondérations affectées aux différentes localités assurées, $0 \leq \omega_i \leq 1, \forall i = 1 \dots n$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. C'est ainsi que l'on essaie de retranscrire l'importance de l'exposition des divers lieux. Logiquement, un endroit qui a une forte exposition est représenté par une plus grande pondération. α et β sont des paramètres d'échelle

spécifiés dans le contrat. De plus, le contrat stipule que seules les vitesses supérieures à un certain seuil sont prises en compte.

Exemple 2.3.1. Pour illustrer cette formule, nous allons donner l'exemple d'une assurance paramétrique émise par Swiss Re pour le compte d'EDF. A la suite des tempêtes Lothar et Martin qui ont traversé la France les 26, 27 et 28 décembre 1999, il y eut d'énormes dégâts sur le réseau de transport et de distribution d'électricité de France. Les montants liés aux réparations se sont élevés à plus de 800 millions d'euros. C'est pourquoi, en 2003, EDF a décidé de se couvrir contre d'éventuelles intempéries de la même ampleur, en émettant un Cat Bond par le biais d'un fonds commun de créance nommé Pylon II. Nous expliquerons un peu plus tard le principe d'émission d'un Cat Bond. Pour revenir à l'indice paramétrique, celui-ci est calculé à la suite du passage d'une tempête. L'indice est fonction des vitesses maximales enregistrées dans 139 stations réparties sur la France. Soit $V = (V^1, \dots, V^{139}) \in \mathbb{R}^{139}$ le vecteur des vitesses maximales enregistrées dans les différentes stations. La formule de l'indice est la suivante :

$$I = I(V) = 1.869 \times \sum_{i=1}^{139} \omega_i \times \max(V^i - 33, 0)^{3.25}$$

Ci-dessous, nous avons la localisation des différentes stations ainsi que la répartition des poids de ces stations.

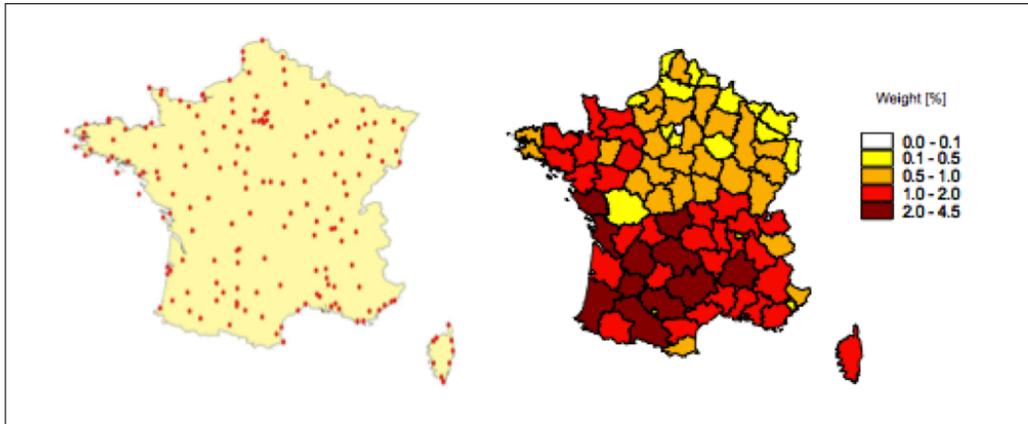


FIGURE 2.8 – Localisation des points de mesure et leur pondération

Indice paramétrique du CCRIF

Ayant introduit la formule générale de l'indice paramétrique, nous sommes amenés à nous demander ce que devient cette formule dans le cadre du CCRIF. Chaque contrat passé entre le CCRIF et un pays du CARICOM possède ses propres caractéristiques. Le contrat qui lie le CCRIF et la Jamaïque fixe tous les paramètres vus précédemment. Tout d'abord, les stations réparties sur le territoire sont au nombre de 14. Les localisations ainsi que les poids sont à retrouver en annexe. Soient V^1, \dots, V^{14} les vitesses de vent (en m/s.) relevées dans ces stations.

$$I = I(V^1, \dots, V^{14}) = 1.082119 \sum_{i=1}^{14} \omega_i \times \max(V^i - 22.5, 0)^4$$

2.3.4 Indemnité

Une fois que la fonction de dommage est contruite, il ne reste plus qu'à calquer la fonction de paiement. Pour cela, on fixe les deux bornes du contrat. La borne inférieure, communément appelée *Attachment Point* est fixée de façon à ce que tous les sinistres ayant un indice inférieur à cette borne soient pris en charge par

le pays même. On fixe une borne supérieure afin de limiter le montant de la prime. La frontière supérieure est usuellement nommée *Exhaustion point*. Ces limites sont définies comme des quantiles bien précis de la distribution de probabilité de l'indice paramétrique.

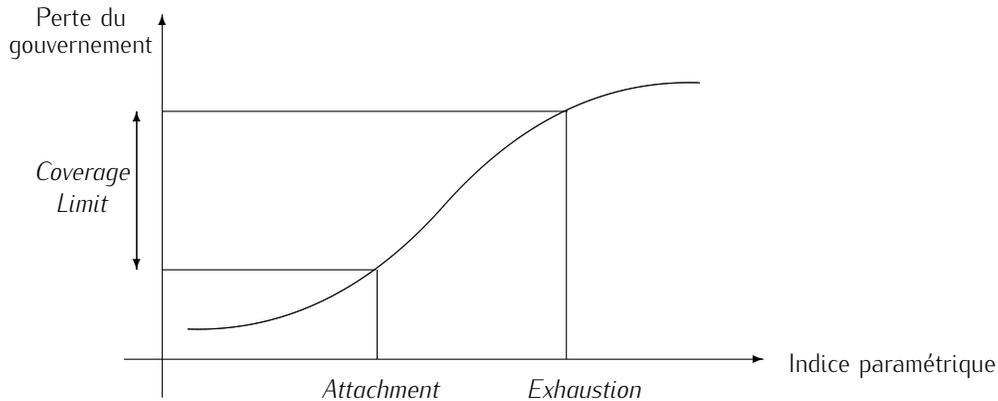


FIGURE 2.9 – Fonction de dommage faisant apparaître les bornes du contrat

Ci-dessus, nous avons placé les bornes du contrat sur la fonction de dommage, voyons alors comment se déduit la fonction de paiement des sinistres. La fonction de paiement est définie comme un pourcentage de destruction appliqué à un montant de couverture maximal. Ce montant de couverture maximum est noté *Coverage Limit*. Quant au pourcentage, il est fonction de l'indice paramétrique annuel \mathcal{I} .

Supposons que $K \in \mathbb{N}$ ouragans ont touché la Jamaïque pendant une année. Nous avons alors K indices notés I_1, \dots, I_K . L'indice paramétrique annuel vaut : $\mathcal{I} = \sum_{k=1}^K I_k$. L'indemnisation est toujours de la forme :

$$\text{Paiement} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{I} < \textit{Attachment} \\ \frac{\mathcal{I} - \textit{Attachment}}{\textit{Exhaustion} - \textit{Attachment}} \times \textit{Coverage Limit} & \text{si } \textit{Attachment} \leq \mathcal{I} \leq \textit{Exhaustion} \\ \textit{Coverage Limit} & \text{si } \mathcal{I} > \textit{Exhaustion} \end{cases}$$

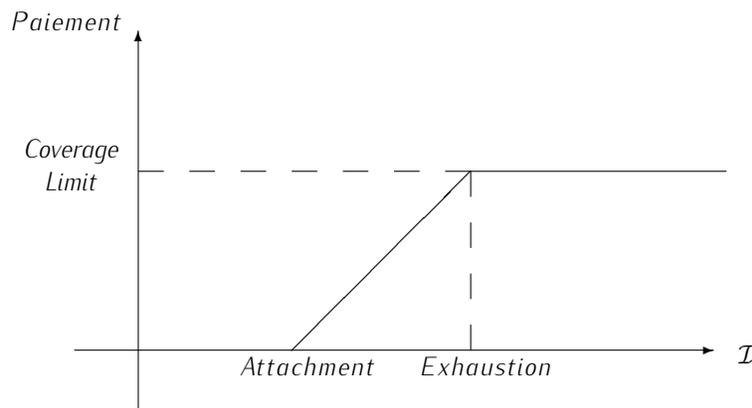


FIGURE 2.10 – Fonction de Paiement

Les points *Attachment* et *Exhaustion* sont les frontières de la police d'assurance. Tant que $\mathcal{I} < \textit{Attachment}$, l'indemnité est nulle. Dès que \mathcal{I} franchit ce seuil, la police d'assurance se déclenche. L'indemnisation est bornée supérieurement par la *Coverage Limit*. Cette limite est atteinte lorsque \mathcal{I} vaut

Exhaustion. La fonction de dommage est affine entre ses bornes. On voit bien que l'indemnité est le produit d'un pourcentage de destruction et d'un montant maximal de couverture. On peut représenter tout cela sous forme d'un schéma. En effet, jusqu'à l'*Attachment Point* les frais sont pris en compte par le pays membre. Dans la tranche entre *Attachment* et *Exhaustion*, l'indemnité est payée par le CCRIF proportionnellement au niveau de l'indice paramétrique, dans la limite de l'*Exhaustion*. Au-delà de ce plafond, c'est la pays qui prend en charge le reste des coûts.

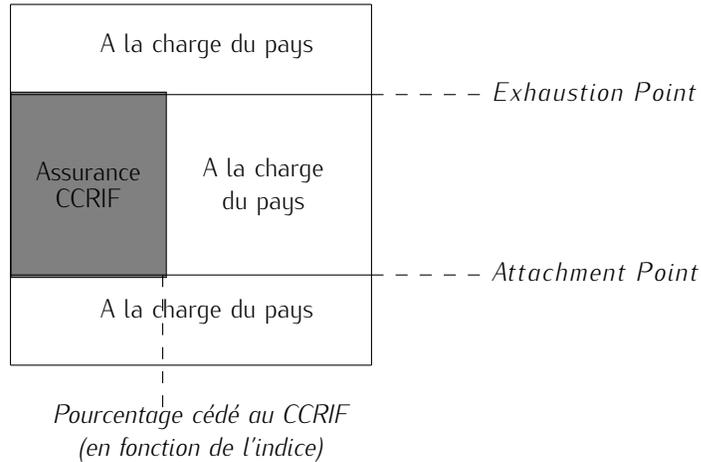


FIGURE 2.11 – Hauteur de dédommagement du CCRIF

Fonction dommage de la Jamaïque

Dans la police d'assurance qui lie les pays du CARICOM et le CCRIF, les paramètres sont fixés à l'avance dans le contrat. Nous avons les données chiffrées pour la Jamaïque. Dans ce contrat, nous apprenons que les paramètres sont définis comme suit :

Paramètres	Valeurs
<i>Attachment</i>	95 943
<i>Exhaustion</i>	3 632 980
<i>Coverage Limit</i>	\$57 659 009

Nous avons représenté graphiquement l'allure de l'indemnité en cas de sinistre en fonction de l'indice I . Or cet indice dépend lui-même de la force du vent dans différentes localités. Nous pouvons alors tracer l'indemnisation directement en fonction de la vitesse du vent mesurée lors du passage d'un unique ouragan. Nous supposons que l'ensemble des dommages est lié à un seul évènement, ainsi $\mathcal{I} = I_1$. De plus l'indice dépend des vitesses mesurées dans 14 stations. Par souci de simplicité, nous allons supposer que la force du vent est identique dans chaque localité : $V = V_1 = \dots = V_{14}$. Ainsi,

$$\mathcal{I} = 1.082119 \times \max(V - 22.5, 0)^4$$

En inversant cette formule, on voit que le point *Attachment* correspond à un vent qui souffle à 39,75m/s soit environ 143km/h. De même le point *Exhaustion* correspond à un ouragan dont les vents seraient de 65,3m/s, soit 235km/h. Ci-dessous nous avons tracé le graphique correspondant.

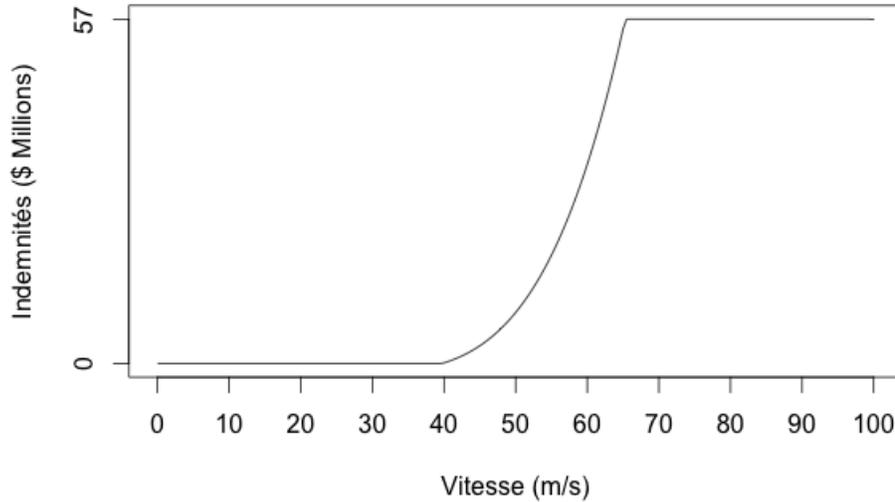


FIGURE 2.12 – Paiement en fonction de la vitesse moyenne – CCRIF

Nous voyons graphiquement que la fonction dommage est limitée par le haut au niveau du point *Exhaustion*. On suppose que cela a été réalisé dans des besoins de commodité. Un enjeu majeur dans la modélisation d'une assurance paramétrique est la réduction du risque de base. On peut donc se demander si cette fonction représente bien les pertes réelles suite à une catastrophe, et s'il n'existe pas des fonctions qui décrivent mieux ce lien entre la vitesse du vent et les pertes.

2.3.5 Fonction de dommage de Emanuel

Nous introduisons une nouvelle fonction de dommage qui a l'avantage d'être plus lisse que celle utilisée par le CCRIF, elle n'est pas tronquée à partir d'un seuil. Nous ne savons pas si une fonction est meilleure que l'autre, mais il ne demeure pas moins intéressant d'appliquer ces fonctions au cas du risque d'ouragan dans les Caraïbes et d'en comparer les résultats. Kerry Emanuel, chercheur météorologue des Etats-Unis, utilise cette fonction dans ses papiers de recherche pour modéliser les pertes liées à la force du vent. Cette nouvelle fonction de dommage s'articule, de la même manière que la précédente, comme un pourcentage de destruction appliqué à une capacité de couverture maximale.

Pour la capacité de couverture, nous reprenons le *Coverage Limit* que l'on a vu précédemment. Soit V la vitesse du vent en m/s. On note V_{seuil} la vitesse du vent à partir de laquelle on considère que des dommages sont engendrés. On peut rapprocher cela à l'*Attachment Point* que l'on a vu dans la formule précédente. De plus on introduit $V_{1/2}$ la vitesse du vent à laquelle la moitié du patrimoine est détruite. Le pourcentage de destruction f est déterminé de la façon suivante :

$$f = \frac{v^3}{1 + v^3} \in [0, 1]$$

Avec,

$$v = \frac{\max(V - V_{seuil}, 0)}{V_{1/2} - V_{seuil}}$$

Finalement, pour obtenir le montant de dédommagement suite à un ouragan, il suffit de prendre le produit entre le pourcentage de destruction et la limite de couverture :

$$Paiement = f \times Coverage\ Limit$$

Ci-dessous, un graphique représentant les deux courbes afin de pouvoir les comparer. En noir la courbe issue du modèle CCRIF, en rouge la fonction introduite par K.Emanuel.

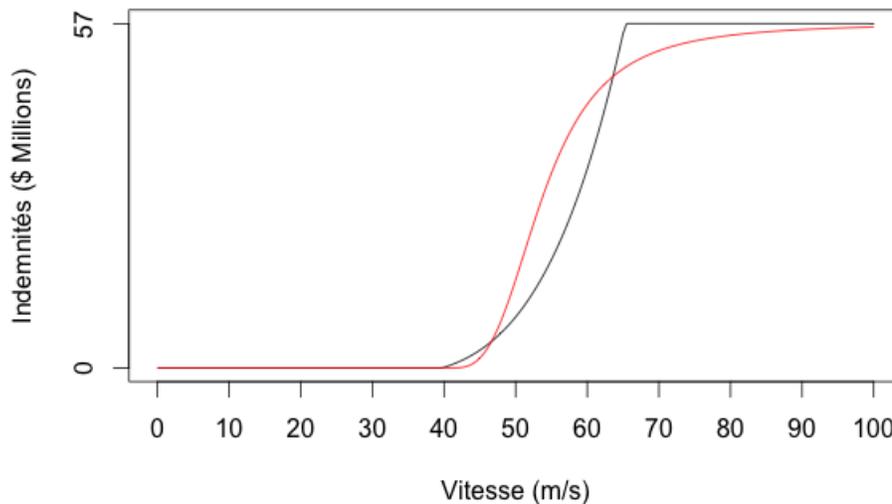


FIGURE 2.13 – Paiement en fonction de la vitesse moyenne - K.Emanuel

Maintenant que nous avons présenté le CCRIF dans sa globalité, nous pouvons dire que ses caractéristiques le rapprochent de celles des obligations catastrophes (ou Cat Bond). C'est pourquoi la section suivante explique le procédé des Cat Bond, afin d'expliquer le principe de fonctionnement du CCRIF.

2.4 Les Cat-Bonds

Avant d'expliquer le fonctionnement des Cat Bond, nous pouvons introduire les besoins qui ont amené à créer ces produits financiers. La survenance de catastrophes naturelles conduit à de fortes pertes humaines et économiques. Les pays paraissent démunis face à des événements d'une telle ampleur. En effet, les pertes liées aux catastrophes naturelles telles que les ouragans ou les tremblements de terre peuvent s'élever à plusieurs centaines de millions de dollars. De plus, la fréquence des catastrophes naturelles de grandes amplitudes tend à s'élever, du fait du changement climatique actuel. Cela explique le développement récent d'instruments financiers pour couvrir ces risques. L'industrie de l'assurance est fortement impactée par la survenance de tels événements, tandis que le marché financier est plus apte à les absorber de part sa taille. La titrisation des risques de catastrophe est apparue au milieu des années 1990 après les dégâts de l'ouragan Andrew en Floride en 1992 et le tremblement de terre de Northridge en Californie en 1994. En effet la réassurance traditionnelle était devenue impuissante devant les besoins des assureurs. La réassurance a donc cherché à se couvrir contre ce type de risques. Les Insurance Linked Securities (ILS) ont été créés dans le but de transférer le risque assurantiel sur les marchés financiers. La première obligation catastrophe a été émise par Hannover Re en 1994. Après des débuts compliqués, le marché de la titrisation des risques assurances s'est réellement développé pour atteindre un montant de 37 milliards en 2007.

2.4.1 Avantages et inconvénients

Il est clair que l'assureur ou le réassureur qui fait appel à une titrisation du type Cat Bond ne tire que des bénéfices de cette opération. En plus de couvrir son portefeuille, cela lui permet de libérer du capital et

d'alléger ses exigences en terme de capital réglementaire. Cet aspect est un enjeu majeur car les nécessités en capital de solvabilité se sont endurcies avec la mise en place récente de la directive européenne *Solvency II*. Comme nous le disions plus haut, le seul inconvénient qui subsiste est le risque de base, du fait de l'incorporation d'un indice paramétrique qui ne peut prendre en compte l'exposition du portefeuille assuré.

En ce qui concerne l'investisseur, les Cat Bond sont un bon moyen de diversification. En effet, on peut admettre que le risque catastrophe n'est en général pas corrélé aux autres risques que prend l'investisseur sur les marchés en action. De plus les rendements des obligations catastrophes sont très attractifs, mêmes s'ils tendent à baisser de part l'arrivée de plus en plus d'acteurs sur ce marché très séduisant. Enfin il n'existe aucun risque de crédit. Comme nous allons le voir, une société spécialisée est créée pour l'émission de l'obligation. Cette structure n'a aucun lien avec l'émetteur, de sorte que les fonds soient collatéralisés.

2.4.2 Principe d'émission

Afin de transférer le risque catastrophe au marché, le sponsor (en général l'assureur ou le réassureur) crée un fond commun de créances (*Special Purpose Vehicle - SPV* en anglais). Cette entité juridique indépendante du sponsor, généralement implantée dans un paradis fiscal, est uniquement créée pour cette opération de titrisation. Le *SPV* recueille la prime du sponsor et le nominal des investisseurs, puis va investir tout cela au taux sans risque.

A l'issue du contrat, si aucun sinistre n'a été déclaré, les investisseurs récupèrent le nominal accompagné du taux sans risque et d'un spread associé à la prime payée par le sponsor. En cas de sinistre, le sponsor va percevoir une indemnisation. Soit le principal est variable et dans ce cas les investisseurs perdent le principal (du moins une partie) au bénéfice de l'assureur (sponsor). Dans le cas contraire, si le principal est protégé, seuls les intérêts sont reversés au sponsor.

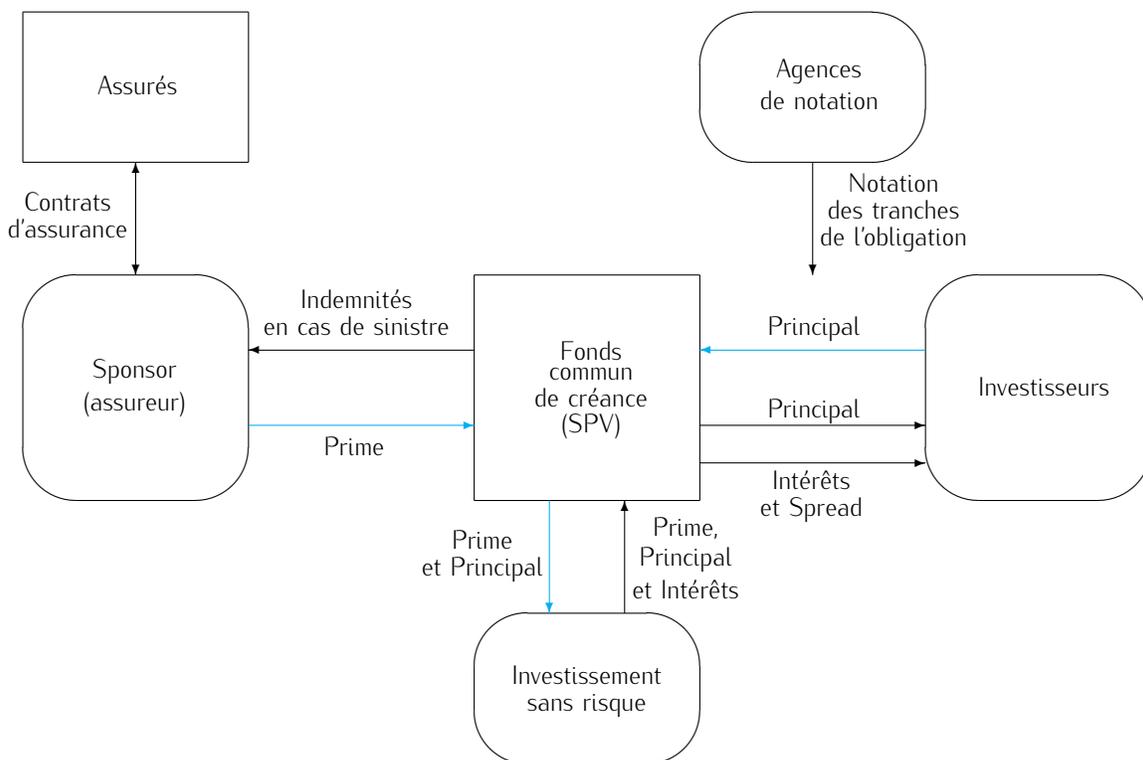


FIGURE 2.14 – Emission d'un Cat Bond

Le schéma précédent représente la structure de l'émission d'un Cat Bond. Les flèches bleues sont les montants échangés lors de l'émission de l'obligation. Les flèches désignant les montants échangés après expiration du Cat Bond ou à la suite d'un évènement déclencheur sont en noir. Pour faire le lien avec notre assurance paramétrique, le contrat se déclenche lorsque l'indice I dépasse un certain seuil défini dans le contrat : l'*Attachment Point*.

Après avoir introduit le principe de fonctionnement d'un Cat Bond, nous allons voir comment un tel produit est tarifé en théorie.

2.4.3 Modèle catastrophe

Comme nous le disions plus en avant, la faible fréquence d'évènements naturels rend les calculs actuariels hors d'usage. C'est pourquoi les assureurs ont recours à des modèles catastrophe. Ces modèles combinent les représentations mathématiques de l'occurrence des évènements et les caractéristiques physiques des périls pour générer des pertes. Ces modèles sont calibrés par des experts, utilisant des informations complémentaires tant quantitatives que qualitatives. La modélisation catastrophe s'est développée à la fin des années 1980, en même temps que les capacités de calculs informatiques se sont accrues.

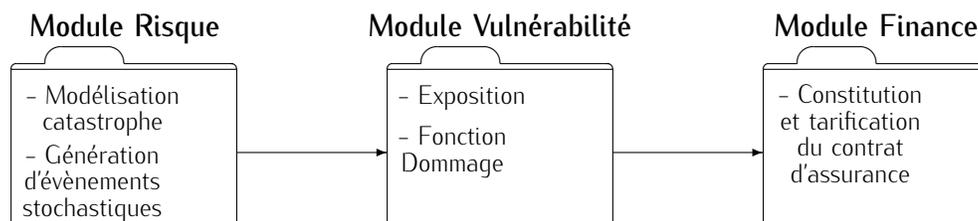
Ce marché est très mince, car il est partagé par seulement 3 entreprises :

- AIR (Applied Insurance Research), créée en 1987
- RMS (Risk Management Solutions), créée en 1988
- EQECAT, fondée en 1994

AIR et RMS ont été fondés à la suite d'importantes catastrophes, comme l'ouragan Gilbert (1988) qui a frappé le Mexique, la Jamaïque et Haïti. La première génération de modèles était basée sur une analyse statistique des catastrophes naturelles. Ces méthodes sont aujourd'hui obsolètes. Les développeurs utilisent dorénavant des techniques de pointe dans leurs modèles, grâce notamment à des partenariats avec des chercheurs d'université. Ces modèles se sont réellement démocratisés à la suite de l'ouragan Andrew (1992) qui a touché la Floride aux Etats-Unis. AIR avait alors modélisé des pertes d'environ 13 milliards de dollars alors que les dernières estimations à la suite de l'ouragan étaient entre 15,5 milliards et 17 milliards de dollars. Selon le type de catastrophe et la zone géographique, certains modèles sont meilleurs que d'autres. Cela est connu des assureurs. Dans le cas du CCRIF, c'est le modèle EQECAT qui a été retenu.

Tous les modèles catastrophes ont une structure standard qui s'articule en 3 modules.

1. Module risque. Modélisation des catastrophes naturelles et génération d'évènements stochastiques.
2. Module vulnérabilité dont le but est de transformer les dommages liés aux catastrophes naturelles en pertes monétaires.
3. Module finance qui va tarifer le produit.



Module Risque

Comme nous le stipulons plus haut, ce premier module a pour but de représenter la complexité physique d'un péril. Cela est produit par la construction d'événements stochastiques dépendants de caractéristiques physiques différentes. C'est ensuite sur ces caractéristiques physiques qu'est basé l'indice de l'assurance paramétrique. Plutôt que de nous baser sur les événements historiques, nous nous basons sur une ample base de données simulées constituée par des experts météorologues. Cette base de données regroupe les caractéristiques des événements catastrophes simulés. On y trouve les paramètres physiques de chaque événement simulé (cf. Tableau ...) ainsi que la probabilité annuelle d'occurrence. Cette probabilité est inversement proportionnelle à l'intensité de l'événement.

Catastrophe	Paramètres retenus
Tempête	Pression atmosphérique Vitesse maximale Trajectoire
Tremblement de terre	Magnitude Localisation de l'épicentre
Inondation	Épaisseur d'eau Intensité des précipitations Trajectoire

Module Vulnérabilité

Le but de cette étape est d'évaluer les pertes engendrées par une catastrophe. Cela revient à concevoir une fonction dommage qui dépend des caractéristiques physiques d'une catastrophe. Dans ce module, les experts vont estimer au mieux cette courbe qui va retranscrire les pertes réelles suite à un désastre. Il existe deux façons différentes de construire cette courbe :

- Faire appel à des méthodes économétriques utilisant les caractéristiques des catastrophes naturelles antérieures et les dommages liés.
- Mesurer, tester en laboratoire la résistance des matériaux (tuiles, fenêtres...) à des événements extrêmes, afin de créer cette courbe de vulnérabilité. Connaissant la composition du portefeuille des assurés à un endroit donné, le modélisateur pourra alors exactement connaître les pertes liées à une catastrophe en ce lieu.

On voit bien que ces deux méthodes comportent des lacunes. Pour la méthode statistique, on fait référence une fois de plus au manque de données. En ce qui concerne l'étude physique des matériaux, cette méthode pointue requiert de parfaitement connaître le portefeuille d'assurés. On sait très bien que cela est difficile dans des pays comme la Jamaïque. Néanmoins, il est toujours possible de recourir à des calibrations ultérieures.

Module Finance

C'est à cette étape que l'on met en place les termes du contrat de titrisation. On définit la prime, le principal, l'événement déclencheur de la police. La prime est calculée grâce à la courbe de vulnérabilité et aux probabilités associées aux différents événements stochastiques. Il faut noter que pour éviter que la prime ne soit trop importante, on fixe des limites au contrat, c'est à dire une borne supérieure qui définira le montant maximum couvert. On peut aussi inclure une franchise dans le contrat, ce que l'on a appelé *Attachment*.

2.4.4 Structure du CCRIF et Cat Bond

Nous avons décrit le principe de fonctionnement d'un Cat Bond, pour le mettre en lien avec l'activité du CCRIF. De façon identique aux obligations catastrophes, le CCRIF a conçu un *Special Purpose Vehicle (SPV)* basé dans les îles Cayman. Celui-ci se charge de transférer le risque catastrophe des pays clients sur le marché de la réassurance.

De plus, comme nous l'avons expliqué, l'ensemble des titrisations de risques de désastres naturels utilise des modèles catastrophes conçus par des experts dans le domaine que sont *AIR*, *RMS* et *EQECAT*. Chaque modèle a ses forces et ses faiblesses selon la zone géographique et le type de catastrophe modélisé. Pour le risque d'ouragan dans les Caraïbes couvert par le CCRIF, c'est le modèle *EQECAT* qui a été adopté. La modélisation du risque catastrophe est divisée en trois modules que nous avons définis précédemment. Dans le cas du CCRIF, nous avons déjà abordé le module Vulnérabilité lorsque nous avons présenté la fonction de dommage (cf. section 2.3.3). En effet nous avons vu comment, à partir de la courbe des dommages, était construite la fonction de paiement. Malheureusement nous n'avons aucune information sur la façon dont est modélisée la fonction de destruction, car ce sont des informations privées.

Il nous reste les modules risque et finance à parcourir. Une fois que nous aurons exploré tous les modules, nous obtiendrons une tarification de la police d'assurance et son moyen de couverture. Plongeons nous alors dans le premier module et ainsi dans la modélisation statistique du phénomène naturel. Avant cela, nous allons présenter les données sur lesquelles nous travaillons.

Nous disposons de plus dans notre base de données de subdivisions plus précises. En effet la Jamaïque est scindée en 12290 cellules de 1km² référencées par la latitude et la longitude de leur centre. Cette précision nous permet de mieux appréhender le risque de base en identifiant les cellules de mesure du CCRIF pour tester si elles sont pertinentes, combien faudrait-il en conserver...

3.2 Des données simulées

Comme nous l'avions vu dans la partie traitant des Cat Bond, la mise en place d'un contrat de couverture contre le risque de catastrophe passe par le « Module Risque ». Ainsi, nous commençons par la modélisation statistique du risque d'ouragan. Pour modéliser la fréquence des ouragans nous utilisons des données météorologiques.

La principale source de difficultés liée aux données vient de la faible fréquence d'occurrence des ouragans par rapport à d'autres risques en assurance. On dispose de trop peu de données historiques pour calculer une distribution de probabilités des dommages. Nous n'utilisons ainsi pas des données historiques mais des données simulées. Cette approche par des données simulées peut permettre de réduire les incertitudes. En effet les données historiques peuvent présenter de sérieux défauts dans le cas d'évènements rares comme les catastrophes naturelles. Une approche basée sur des données historiques repose sur l'hypothèse très forte que la distribution des événements passés est représentative de ce que l'on peut espérer dans le futur. Des événements imprévisibles récents comme le Tsunami de 2004 ou l'ouragan Katrina de 2005 mettent en défaut cette théorie. De plus les données historiques réagissent fortement à l'occurrence d'un ouragan. C'est un autre point faible des données historiques, car si on avait à calculer la prime à partir des données historiques, celle-ci réagirait énormément à la réalisation d'un nouvel événement.

On part de plus de l'hypothèse que les dégâts provoqués par l'ouragan sont liés directement à la force du vent, c'est à dire à la vitesse du vent. De ce fait, on ne considère pas les dégâts collatéraux liés aux inondations suivant un ouragan par exemple. En effet, ils sont estimés minimes comparés aux dégâts directement liés à la force du vent.

Les météorologues peuvent simuler des tempêtes sous des conditions climatiques particulières. Ces conditions sont la température, la température à la surface des océans, l'humidité... Leur modèle a permis de réaliser les simulations de 115 ouragans potentiels sur la Jamaïque. On considère ensuite le climat de 1980 à 2010. C'est à dire que chaque année correspond à des données climatiques spécifiques.

Pour chaque année on fait diffuser les ouragans simulés et on regarde si ces ouragans se seraient effectivement produits. S'ils se réalisent effectivement, ils auront des caractéristiques différentes, c'est à dire une répartition de vitesses différentes, d'une année sur l'autre :

Cela permet de constituer la table "Synthetic" qui nous fournit la fréquence d'occurrence des ouragans chaque année (dans les conditions climatiques de l'année). Cette table est composée de trois variables :

Variable	Définition
<i>id_storm</i>	Identifiant de l'ouragan
<i>year</i>	Année de référence pour la simulation de l'ouragan
<i>frequency</i>	Fréquence annuelle des ouragans

Par exemple, on teste les 115 ouragans simulés dans les conditions climatiques de l'année 1980, il ressort qu'en moyenne, 1,84 ouragans auraient effectivement eu lieu cette année là. La plupart des tempêtes générées par le modèle échouent donc à se transformer en réels ouragans. Cette table a été réalisée par des climatologues pour le CCRIF et fait partie de nos données de départ.

Cela permet aussi d'étoffer les données : on obtient $115 \times 31 = 3565$ ouragans potentiels. Les trajectoires des ouragans simulés sont utilisées comme input dans le modèle de champs de vent afin d'obtenir les estimations de vitesse du vent (dans chaque cellule géographique de 1km^2 d'un maillage territorial recouvrant l'ensemble de la Jamaïque).

Notre base de données a donc été constituée à l'aide d'ouragans simulés par des climatologues associés à des conditions climatiques spécifiques. Ces ouragans diffusés sur toute la Jamaïque constituent alors une nouvelle base de données précieuse. Le fichier "Wind" nous donne la mesure des pics de vitesse pour chaque ouragan dans les 12290 cellules. Ce sont les maximums de vitesse observés qui sont retenus. Ce qui est logique puisque l'on s'intéresse in fine aux dégâts occasionnés par les fortes vitesses du vent. La table "Wind" est composée des variables suivantes :

Variable	Définition
<i>cid</i>	Identifiant de la cellule
<i>id_storm</i>	Identifiant de l'ouragan
<i>wind</i>	Vitesse maximale retenue dans la cellule

En résumé les 115 ouragans initiaux i sont comme des fonctions $(f_i)_{i=1..115}$ de plusieurs variables. Les années étudiées j sont des paramètres $((x, y, z, \dots)_j)_{j=1980..2010}$. Les ouragans potentiels $f_i((x, y, z)_j)$ nous fournissent une base de données des vitesses d'ouragans dans chaque cellule dans la table "Wind". Nous avons donc la vitesse de chaque ouragan simulé et le fichier "Synthetic" nous donne les fréquences d'occurrence de ces ouragans simulés potentiels.

3.3 La richesse...vue du ciel

Il n'existe pas de bases de données sur l'exposition au risque local (cellules par cellules) dans les Caraïbes. En effet dans d'autres régions du monde plus riches et où les richesses sont surtout mieux répertoriées, il est possible d'obtenir par exemple une liste exhaustive de tous les biens assurés. Ce genre de données est disponible pour des projets sur les côtes américaines comme la Floride. Pour pallier cet écueil lié au manque de données statistiques fiables dans les pays en voie de développement comme la Jamaïque nous avons dû réfléchir à un moyen d'approximer ces richesses. Cela nous a conduit à choisir la luminosité nocturne comme estimateur des actifs susceptibles d'être endommagés.

L'argument principal est que l'utilisation de l'électricité par les industries et les ménages est fortement corrélée à la richesse locale. Nous nous concentrons de plus sur l'utilisation de nuit car nous pouvons la quantifier grâce aux images satellites.

En effet il existe déjà une littérature dans laquelle cette donnée est utilisée comme estimateur de l'activité économique locale. Elles résultent d'un besoin d'améliorer la qualité des données socio-économiques des pays pauvres. Ces méthodes ont déjà été employées notamment par Chen et Nordhaus [13] dans une étude publié à l'"Arizona State University" en 2011. Pour mettre en avant l'intérêt de cette approximation, ils ont effectué des régressions entre le PIB et la mesure de l'intensité lumineuse en Jamaïque. Grâce à des données satellites sur la période 1992-2008, ils ont pu mettre en évidence une forte corrélation entre ces deux facteurs, l'évolution de l'intensité lumineuse semble suivre l'évolution du PIB. Il est intéressant de remarquer que dans la conclusion de leur étude, les auteurs affirment que ce estimateur semble utile et consistant pour les pays en voie de développement mais n'est pas aussi robuste pour les pays riches. Ces derniers de toute manière possèdent en général de solides bases de données.

Ainsi nous utilisons comme solution alternative les images satellites de nuit de la Jamaïque associées au découpage cartographique défini plus haut. Nous disposons alors dans nos données d'un indicateur de la luminosité par cellule géographique comme estimateur de la richesse exposée au risque dans la cellule. Cette

table, dénommée "Nightlight", associe à chaque cellule (identifiée par sa longitude et sa latitude), l'intensité lumineuse mesurée allant de 0 (pas de luminosité) à 63 (luminosité maximale). Ces données sont fournies par le DMSP (Defense Meteorological Satellite Program). Ils utilisent un filtre mis au point par le NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). La NOAA a en effet développé au début des années 1990 un moyen de filtrer les événements aléatoires indépendants de la richesse humaine comme les feux de forêts qui peuvent biaiser les résultats. Notamment lorsque une intensité lumineuse apparaît moins de trois fois au même endroit elle est considérée comme erratique et n'est pas prise en compte. Il ne reste alors que les luminosités récurrentes et stables causées par l'activité humaine. Les trois variables définissant la table "Nightlight" sont :

Variable	Définition
<i>cid</i>	Identifiant de la cellule
<i>latitude</i>	La latitude du centre de la cellule
<i>longitude</i>	La longitude de son centre de la cellule
<i>nightlight</i>	La valeur de l'indice mesurant la luminosité dans la cellule

En résumé, notre base de données est constituée de trois tables : Synthetic, Nighlight, Wind. La première associe aux ouragans simulés leur fréquence d'occurrence dans les conditions climatiques de l'année. La seconde fournit le découpage en 12290 cellules de la Jamaïque (longitude et latitude de chaque centre de cellules) et l'intensité lumineuse de chaque cellule. La troisième donne le maximum de la vitesse du vent observée dans chacune des 12290 cellules pour chacun des 3565 ouragans.

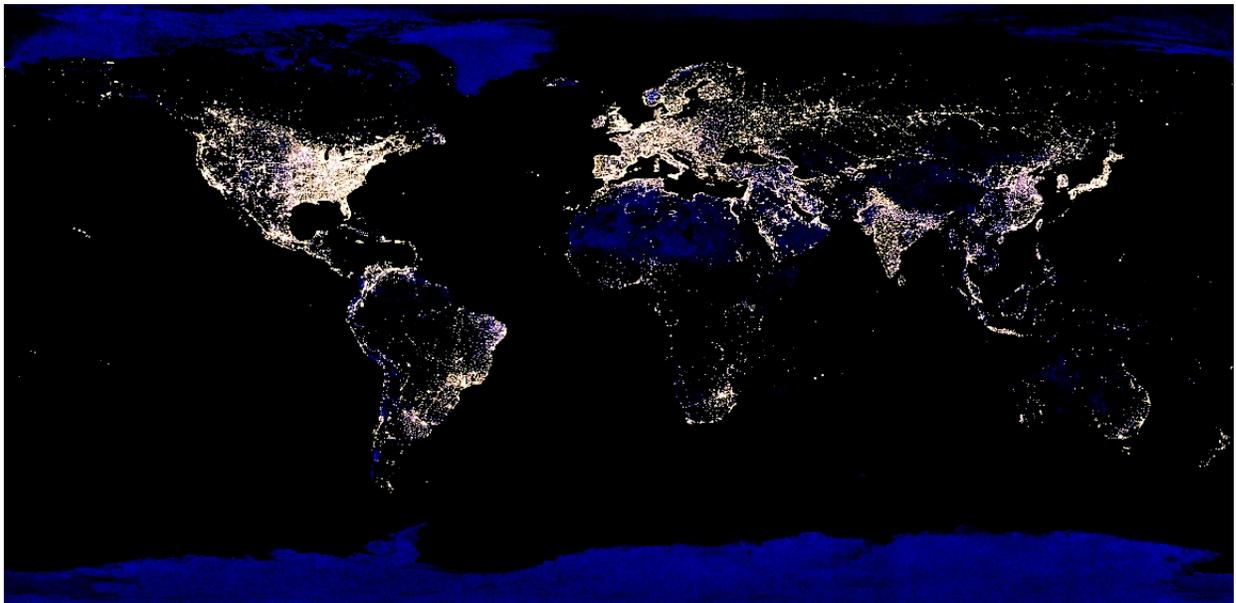
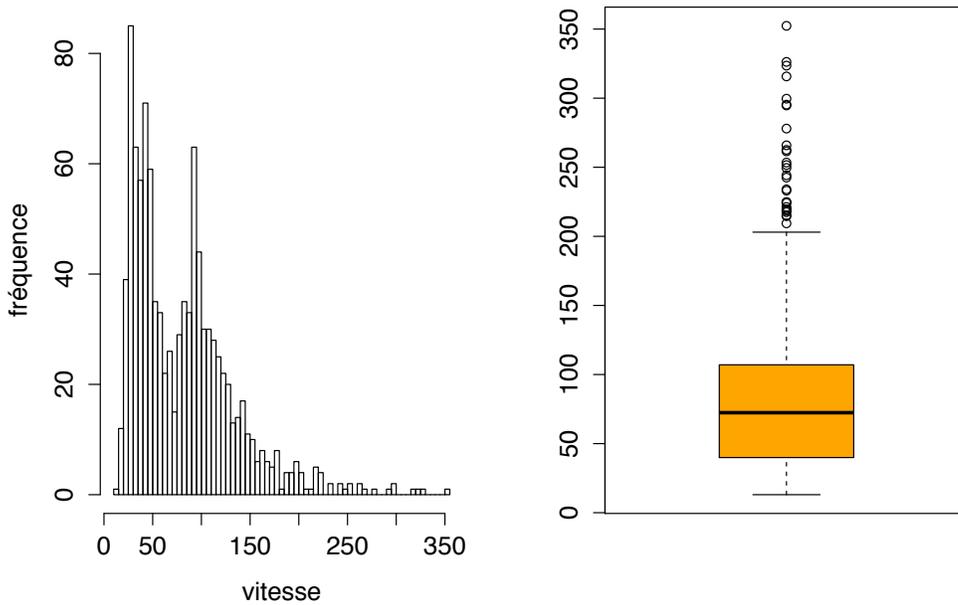


FIGURE 3.2 – Vol de nuit

3.4 Statistiques descriptives

3.4.1 Statistiques des vitesses

Une étude de statistiques descriptives sur les données simulées nous permet de mieux visualiser la distribution des vitesses. Pour cela nous avons commencé par tracer l'histogramme de la force du vent dans une cellule au hasard. C'est bien évidemment la force du vent mesurée lors du passage d'un ouragan. Ainsi dans l'histogramme qui suit nous ne pouvons retranscrire la probabilité d'occurrence d'un ouragan. Nous ne faisons que décrire notre base de données.



(1) Histogramme des vitesses

(2) Boxplot des vitesses

FIGURE 3.3 – Statistiques descriptives - Vitesses du vent dans un cellule

Nous avons de plus calculé les moyennes de vitesses dans les 14 cellules du CCRIF. Cela se résume dans le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
83.26	83.70	84.10	83.55	82.41	83.70	80.96	84.16	84.40	84.69	83.66	82.52	83.24	81.11

On remarque notamment sur nos 14 cellules du CCRIF que l'écart type est très faible, les vitesses observées aux quatre coins de l'île sont donc très proches les unes des autres. Cela peut aisément se comprendre car la Jamaïque est un petit pays contrairement aux habituels souscripteurs de police d'assurance contre les ouragans comme les USA. Pour confirmer cela nous avons imprimé la matrice de variance/covariance en annexe. On observe bien que les cellules sont très corrélées.

Nous pouvons aussi observer cette répartition grâce à une boîte à moustache sur laquelle nous faisons apparaître la médiane, le premier et le troisième quartile.

3.5 Analyse critique

3.5.1 Comparaison CCRIF vs luminosité des 14 cellules

Nous avons vu dans la partie sur la modélisation des dommages, que les coefficients ω_i utilisés par le CCRIF permettent de pondérer la fonction dommage par un coefficient représentant la richesse de la région i en question. Le CCRIF se basait sur les taxes payées pour évaluer le niveau de richesse de chaque région. Cependant ces coefficients datent de 2010 et il ne semble pas qu'ils aient été réévalués. L'inconvénient de cette méthode repose donc sur le caractère statique de ces coefficients qui peuvent ne pas être à jour au moment de calculer.

Nous avons choisi d'utiliser à la place des pondérations réalisées à partir des données de luminosité. Si on note L_j un indicateur de la luminosité dans la cellule j , le poids de cette cellule sera alors :

$$\omega_j = \frac{L_j}{\sum_i L_i}$$

Ainsi nous avons bien : $\sum_i \omega_i = 1$

Voici une photo satellite de nuit de la Jamaïque :

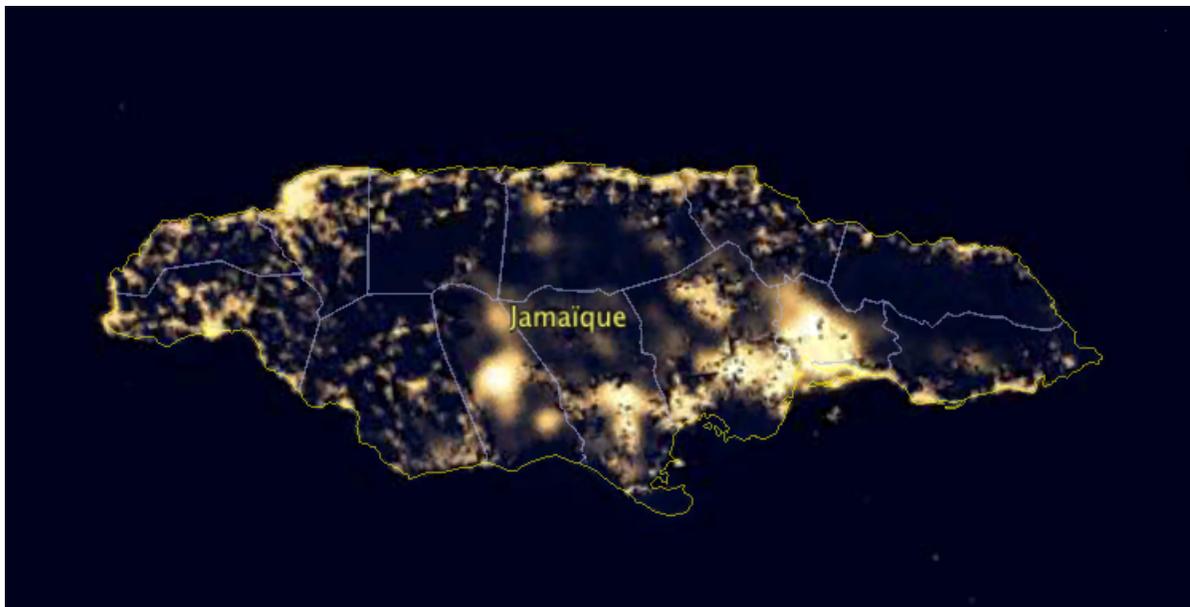


FIGURE 3.4 – Jamaïque – Intensité lumineuse de nuit

Et voici une carte schématisant l'intensité lumineuse via nos données. Nous avons représenté :

- En rouge, les zones avec une très forte intensité lumineuse
- En jaune, les zones avec une forte intensité lumineuse
- En vert, les zones avec une intensité lumineuse moyenne
- En bleu, les zones avec une faible intensité lumineuse
- En blanc, les zones à intensité nulle

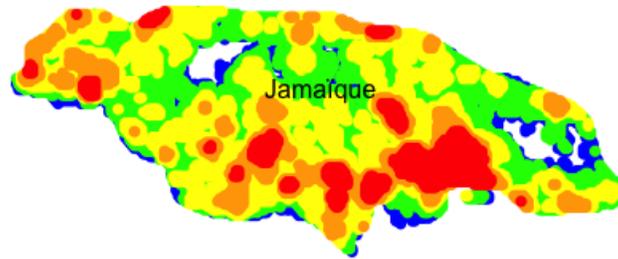


FIGURE 3.5 – Jamaïque – Un regard de nuit à travers nos données

On peut remarquer que nos données calquent parfaitement bien la réalité de la luminosité nocturne. Nous avons alors comparé ces coefficients à ceux du CCRIF. Pour cela, nous les avons représentés sur un graphique comme ci-dessous :

- en abscisse les zones étudiées.
- en ordonnée les coefficients CCRIF en bleu et les coefficients obtenus via la luminosité en rouge.

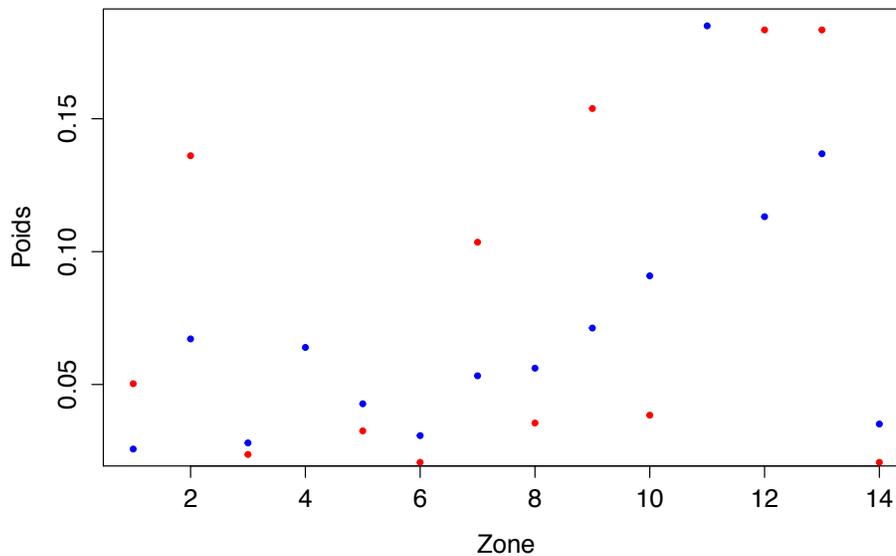


FIGURE 3.6 – Comparaison des poids

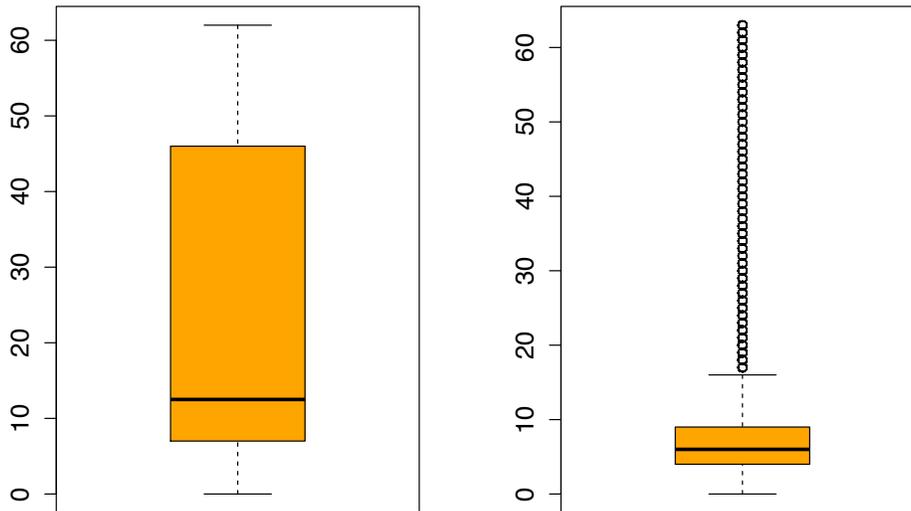
On peut tout d'abord remarquer que la tendance est globalement la même. Dans l'ensemble, les zones pauvres et les zones riches correspondent. Seules quelques cellules (4 et 11) semblent avoir des coefficients contradictoires.

Cependant l'écart type de nos coefficients est supérieur à celui des coefficients du CCRIF. Notre méthode semble ainsi mieux discriminer les différentes zones en fonction de la richesse locale, ce qui est exactement le but de ce type de pondération.

Nous avons de plus vérifié que ces coefficients étaient cohérents en utilisant simplement un logiciel de cartographie. Grâce à notre table "Nightlight" nous disposons de la latitude et de la longitude de chaque centre de cellule de 1km². Nous avons tout d'abord récupéré la longitude et la latitude des 14 zones concernées puis nous avons obtenu une vision satellite de cette zone de 1km² via le logiciel de cartographie. Il apparaît que les zones les plus riches d'après nos coefficients sont bien des zones urbaines en bord de mer, alors que les zones les plus pauvres sont des régions rurales, forestières parfois même totalement dépourvues d'habitations ou de présence humaine. Ce qui explique les coefficients nuls trouvés : il n'y a pas de capital humain en danger dans ces zones. De même pour les deux cellules 4 et 11, la vision satellite nous confirme qu'il y a peu d'infrastructures. Nos coefficients semblent être plus proches de la réalité.

En conclusion on peut donc considérer que ces données de luminosité sont préférables aux coefficients actuellement en vigueur car elles permettent de mieux évaluer les richesses à un instant t mais aussi parce qu'elles sont vraisemblablement plus faciles à mettre à jour puisqu'il suffit de récupérer les photos satellites de météorologues. Pour les calculs, nous avons d'abord utilisé les coefficients du CCRIF. En effet, cela nous a permis de vérifier que nos modèles étaient appropriés. Ensuite nous avons utilisé les pondérations issues de l'intensité lumineuse pour tenter d'améliorer le modèle.

Voici ci-dessous les "boîtes à moustache" de l'intensité lumineuse de nuit sur les 14 cellules CRESTA et sur les 12290 cellules de toute la Jamaïque.



(1) Boxplot avec 14 cellules

(2) Boxplot avec 12290 cellules

FIGURE 3.7 – Boîtes à moustache de l'intensité lumineuse

On peut remarquer que la médiane des 14 ainsi que les quantiles à 75% et 90% sont supérieurs à ceux des 12290 cellules. Ces 14 cellules sont donc utiles pour capter les richesses du pays et se concentrer sur les zones correspondantes afin de mieux les assurer.

3.5.2 Les données simulées

Nous utilisons des ouragans simulés ce qui signifie que nous partons d'un éventail d'ouragans assez complet et pas des quelques dernières données historiques où seuls tels ou tels niveaux d'ouragans sont enregistrés. Nous nous basons sur les conditions climatiques récentes correspondant au changement climatique observé ces dernières années.

Grâce à ces deux éléments et à des méthodes statistiques nous allons pouvoir constituer une véritable base d'ouragans contenant des événements extrêmes. Cela nous permettra notamment d'utiliser un processus de comptage tel la loi de poisson.

3.5.3 Les données manquantes

Ces données présentent donc de nombreux avantages. Cependant nous avons remarqué des données manquantes dans une des tables. Dans certaines cellules, il arrive qu'il manque la vitesse correspondant à tel ouragan. Cela est assez paradoxal avec des données simulées qui devraient fournir des données uniformément quelle que soit la cellule. Nous n'avons pas pu savoir pourquoi dans ces quelques cas, les vitesses n'étaient pas enregistrées.

Pour pallier ce défaut, nous avons regardé les vitesses observées pour cet ouragan dans les cellules voisines et nous avons remplacé la valeur manquante par la vitesse moyenne observée dans les cellules environnantes. Cela suppose notamment que si l'ouragan affiche des vitesses de passage v proches les unes des autres, à l'est et à l'ouest ou au sud et au nord de la cellule en question, on peut considérer qu'il est aussi passé dans cette zone à une vitesse proche de ces vitesses v .

Ayant présenté le CCRIF dans sa globalité, ainsi que les données en notre possession, nous pouvons passer à l'analyse statistique de la prime d'assurance.

Chapitre 4

Théorie de l'assurance non-vie

Avant de passer au calcul de la prime pure, nous allons tout d'abord introduire les fondements théoriques de l'assurance non-vie.

4.1 Modèle de base

Les bases des mathématiques en assurance non-vie ont été posées en 1903 par Filip Lundberg, un actuaire suédois à l'origine de la « Risk Theory ». La *théorie du risque* [41], comme il l'a bâtie, a pour but de modéliser les sinistres et de donner un avis sur la prime à faire payer afin d'éviter la faillite de la compagnie d'assurance. Le modèle qu'il a introduit est le suivant :

- Les sinistres se produisent à différents moments $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$
- On appelle $(X_i)_i$ la suite des montants des sinistres qui se sont produits aux temps $(T_i)_i$. La suite $(X_i)_i$ est une suite de variables aléatoires positives ou nulles et indépendantes entre elles. De plus l'ensemble de la suite des montants est indépendante des temps d'arrivées $(T_i)_i$.

Remarque 4.1.1. *La propriété d'indépendance des montants reflète qu'il y a une structure d'homogénéité probabiliste dans le portefeuille de l'assureur. L'hypothèse que les montants et les temps d'arrivée des sinistres soient indépendants paraît naturelle d'un point de vue intuitif. Mais cette hypothèse est essentielle, car elle simplifie les calculs mathématiques.*

Dorénavant, nous allons regarder le processus du nombre de sinistres :

$$N(t) = \# \{i \geq 1 : T_i \leq t\} = \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}_{T_i \leq t}, t \geq 0$$

$(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de comptage, et $N(t)$ est le nombre de sinistres arrivés jusqu'à l'instant t .

Définition 4.1.2. *Un processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus à temps continu et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, croissant, continu à droite avec $N(0) = 0$.*

Nous allons considérer le processus de comptage le plus commun en tarification d'assurance non-vie : le processus de Poisson.

Définition 4.1.3. *Un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires tel que $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.*

Le montant global des sinistres au temps $t \geq 0$, aussi appelé processus de Poisson composé, vaut :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

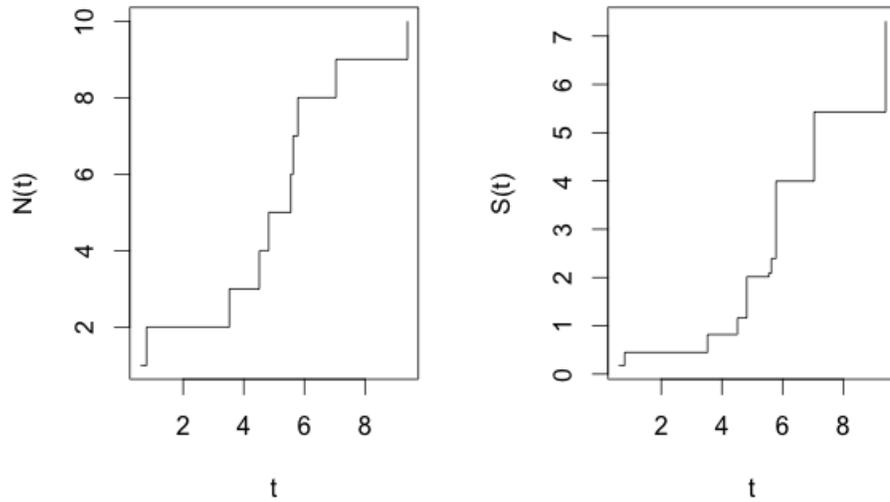


FIGURE 4.1 – Processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et son processus de sinistres de loi sous-jacente $\chi^2(1)$

4.2 Prime pure

Sachant qu'un assureur veut éviter la ruine sur un horizon fixé t_0 (1 an par exemple), on peut supprimer la dépendance en t . Ainsi $N = N(t_0) \sim \mathcal{P}(\lambda_0)$ et,

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Si on suppose que m individus ont signé le contrat d'assurance, la prime pure (PP) est solution de :

$$m \times PP = \mathbb{E}(S)$$

Nous avons supposé l'indépendance des montants et des temps d'arrivées des sinistres. Cela se traduit par l'indépendance entre N et les variable aléatoires $X_i, i \geq 1$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right) \\ &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) \end{aligned}$$

Finalement la prime pure individuelle vaut,

$$\begin{aligned} PP &= \frac{1}{m} \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) \\ &= \frac{\lambda_0}{m} \mathbb{E}(X_1), \text{ car } N \sim \mathcal{P}(\lambda_0) \end{aligned}$$

4.3 Dans le cadre du CCRIF

Dans cette partie, nous allons expliquer comment adapter la théorie de l'assurance non-vie vue précédemment au risque d'ouragan en Jamaïque. Le CCRIF a décidé de faire payer une prime spécifique à chaque pays, car ceux-ci n'ont vraisemblablement pas les mêmes caractéristiques. En effet les montants assurés ne sont pas les mêmes d'un pays à l'autre. Un Etat comme Haïti dont la population avoisine les 10 millions d'habitants aura nécessairement un *Coverage Limit* supérieur à un petit pays comme Saint-Vincent-et-les-Grenadines dont la population globale n'est que de 100 000 habitants. De plus leur exposition face au risque d'ouragan est sûrement différente d'un pays à l'autre. Leurs localisations géographiques différentes, impliquent que certains pays sont plus exposés au risque de catastrophe naturelle que d'autres. C'est pour ces raisons qu'on ne peut pas considérer le risque d'ouragan à l'échelle des 16 pays membres du CCRIF, mais qu'on doit découper notre analyse pays par pays. Dans cet étude, nous allons nous concentrer sur la Jamaïque.

Ainsi :

- $m = 1$ car on considère seulement le contrat liant la Jamaïque et le CCRIF
- N est le nombre d'ouragans ayant frappé la Jamaïque durant un exercice (1 an). Nous pouvons reprendre une loi de Poisson pour simuler cette variable aléatoire.
- S désigne le montant total annuel versé par le CCRIF à la Jamaïque. Le contrat qui lie la Jamaïque et le CCRIF est une assurance paramétrique, c'est à dire que les indemnités sont basées sur un indice qui est lui-même fonction de la vitesse maximale du vent mesurée lors du passage d'un ouragan. L'indemnité suite à un ouragan est donc une fonction déterministe du vent. Ainsi, prévoir la distribution de probabilité des indemnités revient à estimer la distribution des vents sur la Jamaïque.

Pour rappel, l'indice est fonction de la vitesse maximale mesurée dans les 14 zones *CRESTA* de la Jamaïque. Notons $V = (V^1, \dots, V^{14})$ le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^{14} des vitesses maximales mesurées dans ces stations. Soit I l'indice paramétrique associé au contrat liant la Jamaïque et le CCRIF. I est de la forme :

$$I = I(V) = 1.082119 \sum_{j=1}^{14} \omega_j \times \max(V^j - 22.5, 0)^4$$

Avec les $\omega_j, j = 1, \dots, 14$, les poids attribués à chacune des zones *CRESTA*. Soit $N \in \mathbb{N}$ le nombre d'ouragans survenus une année. On note $(V_i)_{i=1, \dots, N}$ la suite des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^{14} des vitesses mesurées lors du passage d'un ouragan. A chaque vecteur aléatoire de la suite, on associe une valeur de l'indice, $I_i = I(V_i)$. Nous pouvons étudier de façon équivalente la suite $(V_i)_i$ ou $(I_i)_i$.

Nous rappelons que la fonction de paiement est de la forme :

$$F(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I < \textit{Attachment} \\ \frac{I - \textit{Attachment}}{\textit{Exhaustion} - \textit{Attachment}} \times \textit{Coverage Limit} & \text{si } \textit{Attachment} \leq I \leq \textit{Exhaustion} \\ \textit{Coverage Limit} & \text{si } I > \textit{Exhaustion} \end{cases}$$

Finalement, la charge totale des sinistres est la fonction de paiement appliquée à $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^N I_i$. Donc l'indemnisation annuelle du CCRIF suite aux dommages subis par le pays est déterminée de la façon suivante :

$$S = F(\mathcal{I}) = F\left(\sum_{i=1}^N I_i\right) = F\left(\sum_{i=1}^N I(V_i)\right)$$

De ce fait la prime pure (*PP*), ou l'Expected Loss (*EL*) vaut :

$$PP = \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left[F\left(\sum_{i=1}^N I(V_i)\right)\right]$$

4.4 Prime commerciale

Après avoir vu comment est quantifiée la prime pure, nous allons voir comment est composée la cotisation que paie chaque pays membre au CCRIF. La prime commerciale s'organise de la façon suivante :

$$\text{Prime Commerciale} = \text{Prime Pure} + \text{Frais de Gestion} + \text{Chargement Catastrophe}$$

Nous avons vu précédemment que la *prime pure* était le coût moyen annuel des pertes. Celle-ci peut être exprimée en pourcentage de la capacité de couverture (*Coverage Limit*).

Les frais de gestion regroupent les frais qui permettent de couvrir les charges opérationnelles de l'assureur, comme les frais de souscription, les salaires, les loyers, mais aussi les frais de développement dans le cas de lancement d'un nouveau produit.

Jusqu'à présent, ces éléments (*prime pure* et *frais de gestion*) sont communs à tous les types d'assurance. Ce qui distingue le CCRIF par rapport aux autres assureurs classiques est la partie *Chargement catastrophe*. Quand nous avons introduit le modèle de base de l'assurance non-vie, nous avons supposé que les montants des sinistres étaient indépendants. Or, cette hypothèse n'est plus vérifiée dans le cas des catastrophes naturelles. En effet, il existe une certaine corrélation géographique, car l'occurrence d'un évènement d'une telle ampleur dévaste des régions entières et peut même toucher plusieurs pays du bassin caribéen. En conséquence de ces pertes importantes probables, les assureurs constituent des réserves d'un haut niveau pour être capables de payer les indemnités. Le *Chargement catastrophe* est le coût du capital associé à ces réserves. Bien évidemment les réserves constituées doivent respecter les besoins réglementaires en solvabilité.

Le fait d'appliquer un chargement supplémentaire lié à la corrélation géographique des pays, nous amène à nous demander si la mutualisation est une bonne chose. N'aurait-il pas été préférable pour les pays de souscrire à des contrats de couverture individuels? Nous voyons en réalité deux avantages apportés par la constitution du CCRIF. Tout d'abord la corrélation n'est pas totale. En effet un ouragan ne peut pas dévaster les seize pays membres du CCRIF à la fois. En général, il peut arriver que deux ou trois îles soient touchées, mais pas les seize simultanément. Deuxièmement, la création du CCRIF a été combinée par des dons de la part de la Banque Mondiale et du Japon pour composer le capital initial. Ainsi, comparé à une assurance individuelle, le capital réglementaire est augmenté, ce qui fait baisser le montant de la prime.

Nous venons de décrire de façon théorique comment était calculée la prime. Passons donc à l'application pratique, et de ce fait au calcul de la prime.

Chapitre 5

Calcul de la prime pure

5.1 Prime pure : Méthode de Monte Carlo

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur le calcul actuariel de la prime pure associée au contrat liant le CCRIF et la Jamaïque. Ainsi que nous l'avons expliqué, la prime pure est définie comme la perte supposée. Plus formellement, c'est l'espérance mathématique des pertes subies sur la durée du contrat. Pour estimer cette espérance, nous calculons la moyenne empirique des pertes annuelles. La convergence est assurée par la loi forte des grands nombres.

Théorème 5.1.1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, intégrables. Alors,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$$

Nous avons vu que nos données simulées nous permettaient de passer outre la difficulté du peu d'occurrence des événements catastrophes. Comme nous l'avons présenté lors de l'explication des Cat Bonds, pour modéliser les événements stochastiques, les modèles catastrophes associent une probabilité d'occurrence à chaque ouragan simulé. C'est ce que nous retrouvons dans le fichier "Synthetic" que nous avons décrit plus tôt. Grâce à tout cela, nous pouvons simuler la loi des destructions, puis en déduire une estimation de l'espérance des pertes par la moyenne empirique.

Algorithme

On choisit un nombre de simulations élevé. Soit N le nombre de simulations. Pour chaque simulation indiquée $i = 1 \dots N$, on applique les opérations suivantes

1. Choisir une année au hasard entre 1980 et 2010 et relever la fréquence d'ouragans associée. On note cette fréquence f_i .
2. Simuler une loi de Poisson de paramètre la fréquence relevée. On note m_i la réalisation de la variable aléatoire $M_i \sim \mathcal{P}(f_i)$
3. Tirer au hasard (avec remise) m_i ouragans parmi les 115 simulations de l'année retenue.
4. Relever les pics de vitesses associés à ces ouragans dans les différentes stations et en déduire les indices paramétriques l_1, \dots, l_{m_i} associés à chaque ouragan. On somme ces indices pour obtenir l'indice paramétrique annuel $\mathcal{I}_i = \sum_{k=1}^{m_i} l_k$. Sachant cet indice annuel, on peut obtenir le montant des dédommagements par simple application de la fonction dommage à \mathcal{I}_i . On note le montant des dommages $S_i = F(\mathcal{I}_i)$

On répète alors ces opérations N fois, puis on estime la prime pure par la moyenne empirique :

$$\overline{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathcal{I}_i)$$

Au moment, d'appliquer la fonction dommage, nous allons aussi bien choisir celle utilisée par le CCRIF que la fonction introduite par K.Emanuel. Nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide de chacune des deux fonctions.

Cette approche *fréquence-sévérité* n'est en général pas utilisée sur la modélisation des risques de catastrophes reposant sur des données historiques. En effet elle suppose que les événements passés peuvent être représentatifs de ce que seront les événements futurs. Les récents événements comme le Tsunami de 2004 ou l'ouragan Katrina en 2005 étaient pourtant des désastres sans précédent. L'utilisation de données simulées balayant un large éventail d'ouragans potentiels nous permet de passer outre cet écueil.

Nous avons de plus utilisé un processus de Poisson comme processus de comptage. Dans le cas des modèles catastrophes, cela n'est pourtant pas recommandé. La loi de Poisson est appropriée quand les événements sont indépendants de l'échelle de temps. En pratique cette hypothèse est souvent trop forte pour les événements climatique. En Europe par exemple, les ouragans peuvent dépendre de conditions atmosphériques qui créent des séries d'ouragans : la séquence Lothar et Martin en 1999 en France par exemple. Les cyclones tropicaux dépendent aussi des conditions atmosphériques et de la température de la surface des océans. Les variations de ces paramètres engendrent aussi une périodicité avec par exemple le phénomène "El Niño" dans l'océan Pacifique.

Cependant, notre base d'ouragans simulés associée à un rééchantillonnage basé sur ces conditions climatiques variables nous permet d'utiliser un véritable *cluster* d'ouragans. Les événements stochastiques sont alors regroupés par année selon un modèle météorologique et non pas aléatoirement comme c'est le cas dans un modèle « fréquence-sévérité » simple.

Ainsi grâce à ces données sophistiquées nous pouvons utiliser une loi de poisson pour modéliser la fréquence d'occurrence des événements.

5.2 Fonction dommage : CCRIF

Nous avons donc simulé la loi des pertes annuelles liées aux ouragans. Nous pouvons commencer par tracer l'histogramme des pertes (Figure 5.1).

Les pertes sont distribuées entre 0 et 57 Millions de dollars, avec un pic prépondérant en 0. Cela s'explique par deux facteurs :

- La rareté des ouragans évidemment
- Quand bien même un ouragan est mesuré, il faut que son indice paramétrique dépasse le seuil *Attachment* pour que la police d'assurance paie une indemnité.

Etant donné que la majorité des paiements sont nuls, nous avons alors tracé l'histogramme des pertes strictement positives pour y voir plus clair (Figure 5.2). Si on note X la variable aléatoire positive ou nulle des paiements, nous regardons le comportement de $X \mid X > 0$.

On observe un pic au niveau du *Coverage Limit*, cela s'explique par la caractère tronqué de notre fonction de paiement. En effet celle-ci est tronquée au point *Ehaustion*. Dans la fonction, tous les indices au-dessus de ce niveau ont un paiement égal au *Coverage Limit*.

FIGURE 5.1 – Histogramme des fréquences de paiements – CCRIF

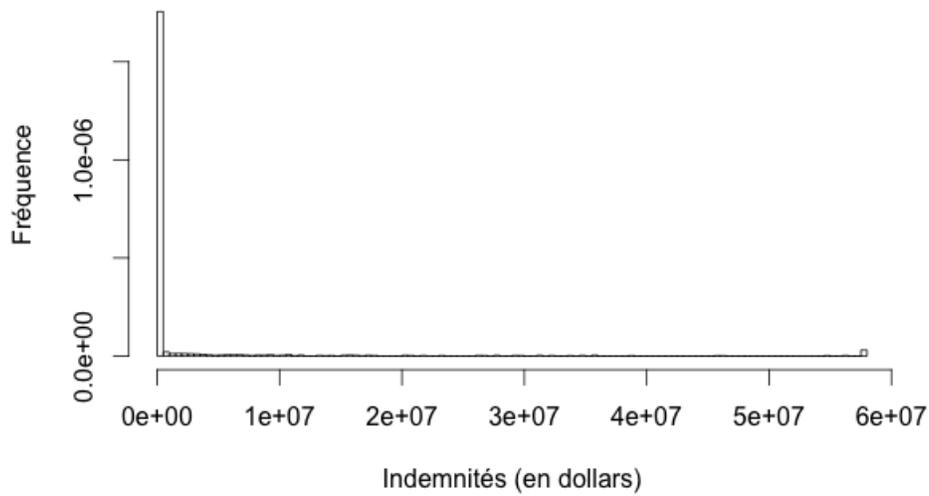
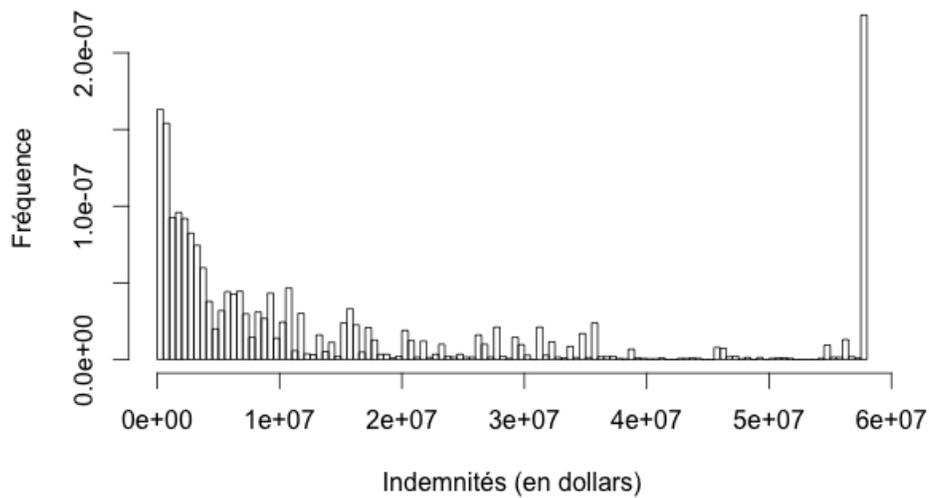


FIGURE 5.2 – Histogramme des fréquences de paiements strictement positifs – CCRIF



5.2.1 Analyse numérique

Ayant simulé la loi des pertes annuelle avec $N = 50\,000$ simulations, nous avons calculé la prime pure par le biais de la moyenne empirique. Dans le cas précis de la fonction dommage utilisée par le CCRIF, la

prime pure vaut :

$$PP_{CCRIF} = \$2\,037\,286$$

Cela est en adéquation avec les informations que l'on a sur le contrat signé entre la Jamaïque et le CCRIF. En effet, incluant les différents chargements, la Jamaïque paie une prime annuelle de \$2 124 818.

5.2.2 Intervalle de confiance

On ne peut pas parler de l'estimation d'une moyenne, sans préciser l'intervalle de confiance. N'ayant pas de loi sous-jacente, nous allons regarder l'intervalle de confiance asymptotique.

Nous rappelons le théorème Central Limit :

Théorème 5.2.1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, appartenant à $L^2(\Omega)$, d'espérance commune μ et de variance commune σ^2 , alors :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

On note μ la réelle valeur de la prime pure, et $X_i, i = 1 \dots N$ les différentes simulations des indemnités.

Si on pose

$$T_N = \sqrt{N} \frac{(\bar{X}_N - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{loi} \mathbb{N}(0, 1)$$

alors,

$$T_N^2 \xrightarrow{loi} \chi^2(1)$$

On a alors asymptotiquement,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(T_N^2 \leq q_{95\%}^{\chi^2(1)} \right) &= 95\% \\ \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left((\bar{X}_N - \mu)^2 \leq \frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2 \right) &= 95\% \\ \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bar{X}_N - \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2} \leq \mu \leq \bar{X}_N + \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2} \right) &= 95\% \end{aligned}$$

Ainsi, l'intervalle de confiance asymptotique à 95% est de la forme :

$$IC_{95\%} = \left[\bar{X}_N - \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2}, \bar{X}_N + \sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2} \right]$$

On peut se demander quel nombre de simulations est nécessaire pour que l'écart entre la réelle valeur de la prime pure et notre estimateur soit inférieure à $x \geq 0$ avec probabilité 95%. Cela revient à résoudre :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)}}{N} \sigma^2} &\leq x \\ \Rightarrow N &\geq \frac{q_{95\%}^{\chi^2(1)} \sigma^2}{(x/2)^2} \end{aligned}$$

Dans le tableau qui suit, nous avons inscrit l'ordre de grandeur du nombre de simulations pour obtenir une taille de $x \geq 0$ pour l'intervalle de confiance asymptotique à 95%. Pour établir ce tableau, nous avons évalué la variance σ^2 par son estimateur empirique.

x	100	1000	10 000	100 000
N	10^{11}	10^9	10^7	10^5

On voit que pour une précision d'environ \$100 000, cela nécessite au moins 100 000 simulations. Pour une meilleure précision, le nombre de simulations croît de façon exponentielle. Il sera utile de voir une autre façon d'estimer la prime pure.

5.3 Fonction dommage : K.Emanuel

Nous avons fait de même avec la fonction de dommage de K. Emanuel. La forme générale de cette fonction dommage est définie en section 1.3.5 . Pour rappel, la forme de la fonction dommage est :

$$f = \frac{v^3}{1 + v^3} \in [0, 1]$$

Avec,

$$v = \frac{\max(V - V_{seuil}, 0)}{V_{1/2} - V_{seuil}}$$

On peut noter que nos données simulées nous sont encore ici très utiles. Dans la fonction utilisée par K.Emanuel, le principal point faible semble être ces deux données nécessaires : V_{seuil} et $V_{1/2}$. En effet si la fonction paraît cohérente et intuitive, il n'était pas précisé dans les recherches de K.Emanuel comment les seuils étaient calculés. La méthode que nous avons utilisée dans le calcul de la prime pure du CCRIF nous permet d'afficher une distribution des vitesses. Ainsi en considérant que le niveau de dommages *Attachment* correspond au seuil minimal causant des dommages significatifs et en prenant la vitesse correspondant à un quantile de 50% de dommages pour le deuxième seuil on peut utiliser cette méthode.

Pour la vitesse minimale V_{seuil} nous avons décidé de prendre la vitesse correspondant à l'*Attachment Point* soit $V_{seuil} = 39.75\text{m/s}$.

Il a ensuite fallu paramétrer la vitesse du vent à laquelle la moitié du patrimoine est détruite $V_{1/2}$. Pour cela, nous sommes repartis des résultats de l'étude de la loi de destruction utilisant la fonction de dommage du CCRIF. Nous avons pris la vitesse médiane dans la loi des destructions. Ainsi $V_{1/2} = 53.8\text{m/s}$. Donc,

$$v = \frac{\max(V - 39.75, 0)}{53.8 - 39.75} = \frac{\max(V - 39.75, 0)}{14.05}$$

De façon identique que dans le cas de la fonction de paiement introduite par le CCRIF, l'indice est calculé dans 14 cellules correspondant au découpage *CRESTA*. Ainsi on obtient 14 coefficients de destruction f_1, \dots, f_{14} , que nous combinons à l'aide d'une somme pondérée avec les poids issus du contrat entre la Jamaïque et le CCRIF.

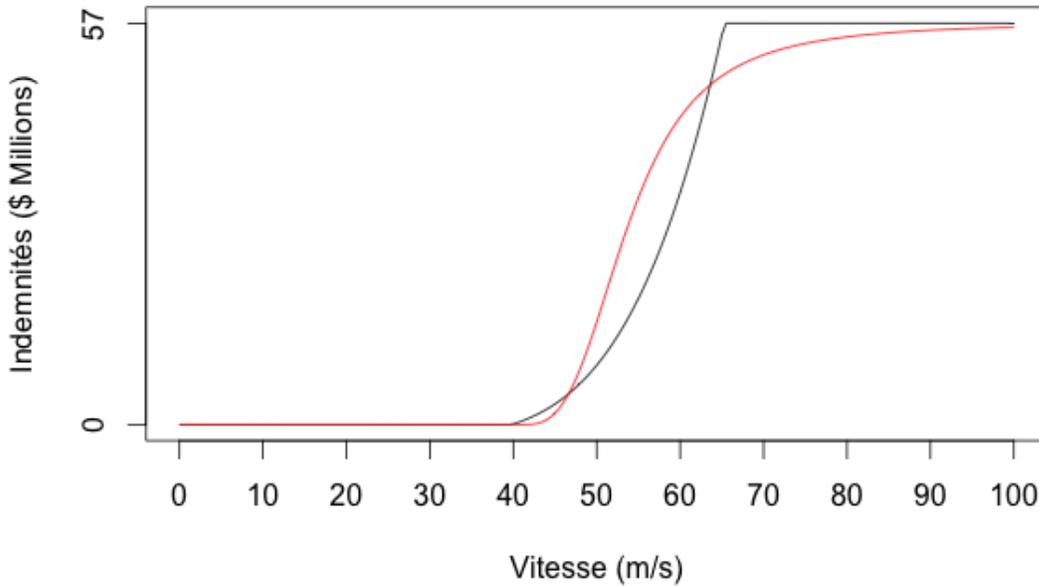
$$F = \sum_{i=1}^{14} \omega_i f_i$$

Si on suppose qu'il se produit $K \geq 1$ ouragans durant l'année. On obtient alors F^1, \dots, F^K indices de destruction. Ainsi l'indice de destruction finale vaut :

$$\mathcal{F} = 1 - \prod_{k=1}^K (1 - F^k)$$

Finalement, pour obtenir le montant de dédommagement suite à un ouragan, il suffit de prendre le produit entre le pourcentage de destruction finale et la limite de couverture :

$$\text{Paiement} = \mathcal{F} \times \text{Coverage Limit}$$



Nous avons de nouveau tracé ces deux fonctions de dommage. On peut essayer de comparer les deux courbes de manière qualitative. Celle de K.Emanuel (en rouge) est légèrement en dessous pour les dommages légers et les dommages extrêmes. On peut considérer que cela n'est pas très important pour les petites valeurs et de plus la différence des indemnités payées pour les dommages élevés n'est pas très significative en proportion.

En revanche pour les vitesses d'ouragans moyennes, on peut observer parfois une nette différence, le modèle de K.Emanuel assure plus d'indemnités. Il semble avoir plus de sensibilité dans la partie la plus incertaine de la courbe. Comme le niveau d'indemnités est majoré et au vu de la forme des courbes les variations de paiements autour des vitesses centrales semblent être les plus importantes.

Pour mieux les comparer, nous avons calculé l'intégrale de ces deux courbes. Soient F_{CCRIF} et $F_{Emanuel}$ les deux fonctions de dommage dépendant de la vitesse du vent. Le support de calcul de ces intégrales est l'intervalle $[0, 100]$ (en m/s), ce qui revient à $[0,360]$ (en km/h). On estime qu'il est rare que la vitesse d'un ouragan dépasse cette borne supérieure. On a calculé ces intégrales de façon numérique. On obtient :

$$I_{CCRIF} = \int_0^{100} F_{CCRIF}(x)dx = 2433.985$$

$$I_{Emanuel} = \int_0^{100} F_{Emanuel}(x)dx = 2496.754$$

$$I_{CCRIF} < I_{Emanuel}$$

On en déduit que la courbe introduite par K.Emanuel est "en moyenne" au-dessus de celle du CCRIF. Cela se traduit-il par une hausse ou une baisse de la prime pure ?

Nous avons donc fait tourner notre modèles avec cette nouvelle fonction de destruction. Voici l'histogramme des paiements en utilisant la fonction de K.Emanuel.

Comme dans le cas précédent, on n'arrive pas bien à distinguer la distribution des paiements à cause du pic prépondérant pour les paiements nuls. Cela s'explique par la rareté des événements. Pour y voir plus clair, on peut se demander ce que deviendrait la loi des paiements sachant qu'au moins un ouragan a eut lieu durant l'année. Cela se traduit par la loi du paiement sachant que celui-ci est strictement positif. Nous avons tracé l'histogramme de cette variable aléatoire.

FIGURE 5.3 – Histogramme des fréquences de paiements – Emanuel

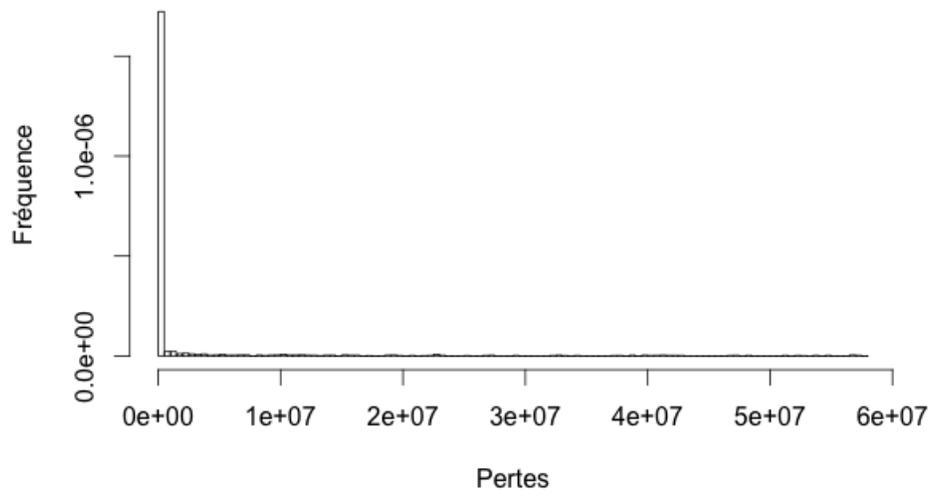
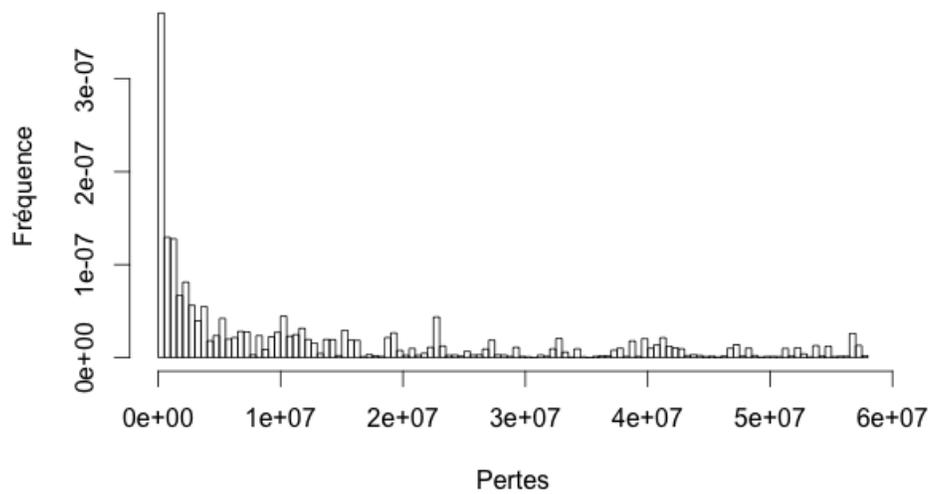


FIGURE 5.4 – Histogramme des fréquences de paiements strictement positifs – Emanuel



5.3.1 Analyse numérique

De façon identique que dans le modèle utilisant la fonction présente dans le contrat du CCRIF, nous avons simulé la loi des pertes annuelles avec $N = 50\,000$ simulations, nous avons calculé la prime pure par le biais de la moyenne empirique. Dans le cas précis de la fonction dommage introduite par K.Emanuel, la prime pure vaut :

$$PP_{Emanuel} = \$2\,194\,542$$

On voit que la prime pure est supérieure en utilisant la fonction d'Emanuel. Pour confirmer cette observation, nous avons procédé à un test unilatéral asymptotique. Celui-ci a validé notre appréciation, grâce à une p_{valeur} inférieur à 1%. En annexe, nous rappelons brièvement comment s'articule un test de Wald pour comparer les moyennes de deux échantillons différents.

Cela confirme notre première intuition sur les fonctions de paiement. En effet nous avons expliqué que la fonction introduite par Kerry Emanuel était "en moyenne" au-dessus de celle utilisée par le CCRIF. Cela implique que cette première fonction "indemnise plus", et cela se fait ressentir sur la prime pure à payer, car celle-ci est supérieure à la prime pure issue du contrat CCRIF.

5.4 Attachment et Exhaustion Points

Dans cette section, nous allons revenir à l'assurance introduite par le CCRIF. En théorie, les bornes *Attachment* et *Exhaustion* sont fixées comme étant des seuils dont la probabilité d'excès est de $\frac{1}{30}$ ans pour l'*Attachment Point* et de $\frac{1}{150}$ ans pour l'*Exhaustion Point*. En d'autres termes, ces points sont fixés comme les quantiles respectifs à 96.7% et 99.3% de la variable aléatoire qui simule l'indice paramétrique. Pour rappel, nous avons noté \mathcal{I} cette variable aléatoire.

Dans nos données simulées, l'*Attachment Point* et l'*Exhaustion Point* correspondent respectivement aux quantiles (estimés) à 86.5% et 98.5% de la variable aléatoire \mathcal{I} qui modélise l'indice paramétrique. Pour les applications numériques suivantes, nous allons choisir ces quantiles issus de notre échantillon. Nous rappelons la définition d'un quantile.

Définition 5.4.1. On appelle quantile d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ de la distribution de probabilités F , tout réel q_α vérifiant :

$$q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq \alpha\}$$

Une fois les bornes fixées, le CCRIF peut calculer la prime pure. En effet la prime pure se définit comme l'espérance mathématique des paiements de l'assureur au profit de l'assuré. Ces paiements sont fonction de l'*Attachment Point* et de l'*Exhaustion Point*. C'est donc de façon logique que la prime dépend du taux de couverture. Nous pouvons nous demander ce que deviendrait la prime si on faisait varier ces bornes.

Nous avons tracé l'histogramme des fréquences de la variable aléatoire qui modélise l'indice paramétrique. La droite verticale en rouge représente l'*Exhaustion Point*, c'est à dire le quantile à 98.5%. Nous voyons que ce quantile est très bas comparé à l'indice maximum. L'indice maximal de l'ordre de 72 Millions est quasiment 20 fois supérieur au quantile à 98.5% qui vaut *Exhaustion* = 3 632 980. Ceci est lié au caractère "extrême" de la distribution.

Supposons alors que le pays décide d'augmenter sa couverture et souhaite passer d'un quantile à 98.5% à un quantile à 99.5% pour l'*Exhaustion Point*. Il existe deux méthodes pour réévaluer ce quantile :

1. Nous avons réussi à estimer une loi qui modélise l'indice paramétrique. Il suffit alors de choisir le quantile à 99.5% de cette loi.
2. Dans le cas présent, nous n'avons pas de loi pour modéliser la variable aléatoire \mathcal{I} . On estime le quantile par sa version empirique. Nous sommes amenés à évoquer quelques rappels sur les quantiles empiriques.

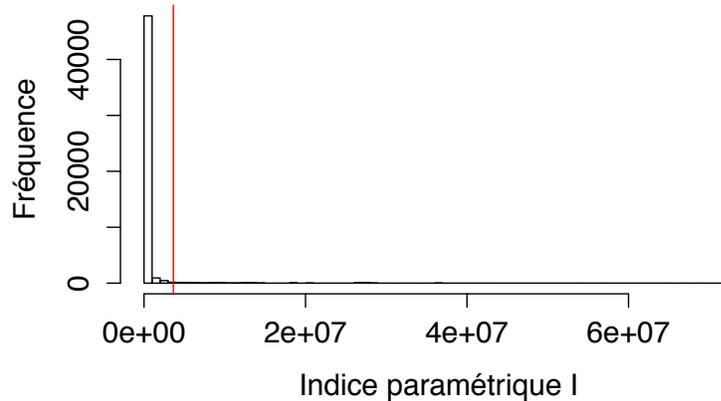


FIGURE 5.5 – Histogramme des fréquences de l'indice paramétrique faisant apparaître l'Exhaustion Point

5.5 Fonction de répartition et quantile empirique

Dans cette section, nous rappelons quelques bases de probabilités sur l'estimation non paramétrique. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi F .

5.5.1 Fonction de répartition empirique

Définition 5.5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction de répartition empirique $F_n(x)$ est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq x}$$

Propriété 5.5.2. Pour x fixé, sous les conditions d'intégrabilité, on a les propriétés suivantes :

1. $nF_n(x)$ suit la loi binomiale d'espérance $nF(x)$ et de variance $nF(x)(1 - F(x))$.
2. Par la loi forte des grands nombres :

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} F(x)$$

3. D'après le Théorème Central Limit :

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x)))$$

Théorème 5.5.3. Le théorème de Glivenko-Cantelli montre la convergence uniforme de la fonction de répartition empirique :

$$\sup |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$$

5.5.2 Fonction quantile empirique

Définition 5.5.4. Ayant défini la fonction de répartition empirique $F_n(x)$, on appelle fonction quantile empirique, la fonction q_n définie par :

$$q_n(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_n(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Remarque 5.5.5. On notera de façon identique $q_n(\alpha)$ ou $q_{n,\alpha}$ le quantile empirique d'ordre $\alpha \in]0, 1[$

Pour déterminer le quantile empirique, nous allons utiliser la méthode par classification. On définit l'échantillon ordonné :

$$X_{1,n} = \min(X_1, \dots, X_n) \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

. Lorsque F est continue, les égalités surviennent avec une probabilité nulle et peuvent être négligées. On peut donc supposer dans ce cas $X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{n,n}$ et on a alors,

$$q_{n,\alpha} = X_{k,n}, \text{ pour } \frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n}$$

La convergence forte de $q_{n,\alpha}$ vers q_α résulte directement de la convergence uniforme de la fonction de répartition, vue dans le théorème de Glivenko-Cantelli.

La loi asymptotique des quantiles empiriques est donnée par le résultat suivant :

Théorème 5.5.6. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuées de densité f . Si $\alpha \in]0, 1[$ et $f(q_\alpha) > 0$, alors :

$$\sqrt{n}(q_{n,\alpha} - q_\alpha) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \omega_\alpha^2) \text{ et } \omega_\alpha^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(q_\alpha)}$$

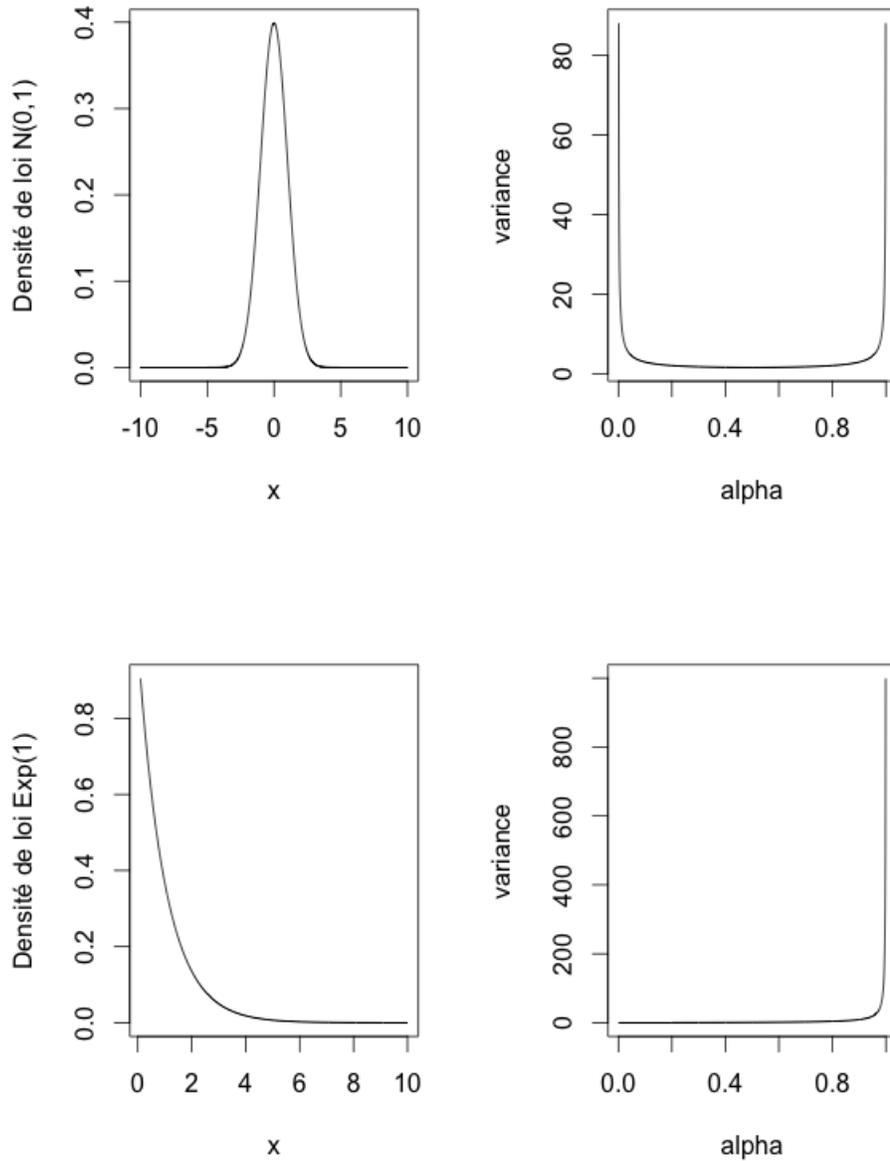


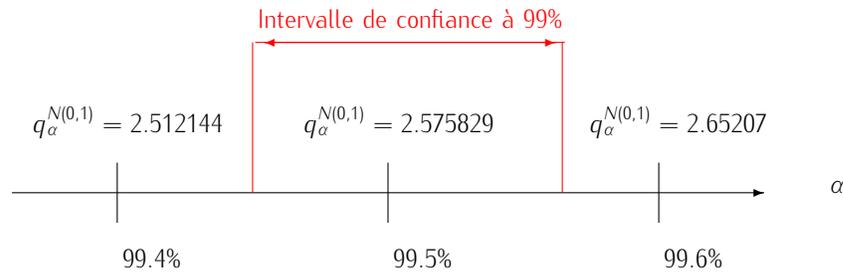
FIGURE 5.6 – Loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Loi Exponentielle $E(1)$ – Densité de probabilité et ω_α^2 en fonction de α

Remarque 5.5.7. Nous constatons que la variance asymptotique dépend de α et de la densité en q_α . Le terme $\alpha(1 - \alpha)$ est petit pour les α correspondant aux queues de distribution, mais cet effet est contrebalancé par celui du dénominateur. En effet, le dénominateur est composé de la densité au carré dans les queues de distribution. Cette quantité est très faible quand on se trouve dans la queue de distribution. Ainsi, la variance explose et rend l'estimation des quantiles moins précise dans les régions à faible densité. Les figures ci-dessus nous montre comment la précision asymptotique dépend de α dans le cas de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et de la loi $\text{Exp}(1)$. On voit nettement que l'effet du dénominateur l'emporte sur celui du numérateur pour des valeurs de α correspondant aux queues de distribution. Cela se traduit donc par une grande variabilité de l'estimateur du quantile pour une valeur de α très élevée. Or, notre but est d'estimer l'Exhaustion Point qui est le quantile

à 99.5% de la variable \mathcal{I} . A travers cette remarque, on voit que pour bien estimer le quantile par sa version empirique, il nous faut augmenter drastiquement le nombre d'observations. Nous allons nous rendre compte de cette observation à travers un exemple.

Application numérique : Loi Normale

On a décidé de travailler avec une loi Gaussienne, par souci de simplicité pour l'exemple. Nous nous intéressons à l'intervalle de confiance asymptotique du quantile d'ordre 99.5% d'une loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$, que l'on note $q_{99.5\%}^{N(0,1)}$. On s'intéresse à la queue de distribution, car l'*Exhaustion Point* est fixé comme le seuil dépassé 1/200 ans. On cherche un intervalle de confiance au niveau 99% de $q_{99.5\%}^{N(0,1)}$. Les quantiles à 99.4% et 99.6% correspondent respectivement à des probabilités de retour de $\frac{1}{166}$ ans et $\frac{1}{250}$ ans. On voit bien que l'intervalle de confiance doit être suffisamment petit pour bien cerner le quantile à 99.5%



Si on note x la taille de l'intervalle de confiance, avec $x \leq \min(|q_{99.4\%} - q_{99.5\%}|, |q_{99.5\%} - q_{99.6\%}|) = 0.06$, alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|q_{n,99.5\%} - q_{99.5\%}| \leq x) &= 99\% \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n} |q_{n,99.5\%} - q_{99.5\%}| \leq b) &= 99\% \text{ avec } b = \sqrt{nx} \\ \Leftrightarrow P(|\mathcal{N}(0, \omega_{99.5\%}^2)| \leq b) &= 99\% \text{ d'après le théorème précédent} \\ \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{b}{\omega_{99.5\%}}\right) - 1 &= 99\% \text{ avec } \Phi \text{ la fonction de répartition d'une loi } \mathcal{N}(0, 1) \\ \Leftrightarrow b &= \Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right) \times \omega_{99.5\%} \text{ avec } \Phi^{-1} \text{ la fonction quantile d'une loi } \mathcal{N}(0, 1) \\ \Rightarrow n &= \left(\frac{b}{x}\right)^2 = \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right) \times \omega_{99.5\%}}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que pour obtenir un intervalle de confiance à 99% de taille x , il nous faut au moins

$$n \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right) \times \omega_{99.5\%}}{x}\right)^2 \text{ simulations}$$

Ci-dessous, nous avons tracé le graphique de n en fonction de la taille de l'intervalle de confiance. On voit bien que plus on cherche à avoir un intervalle précis, plus le nombre de simulations augmente de façon exponentielle.

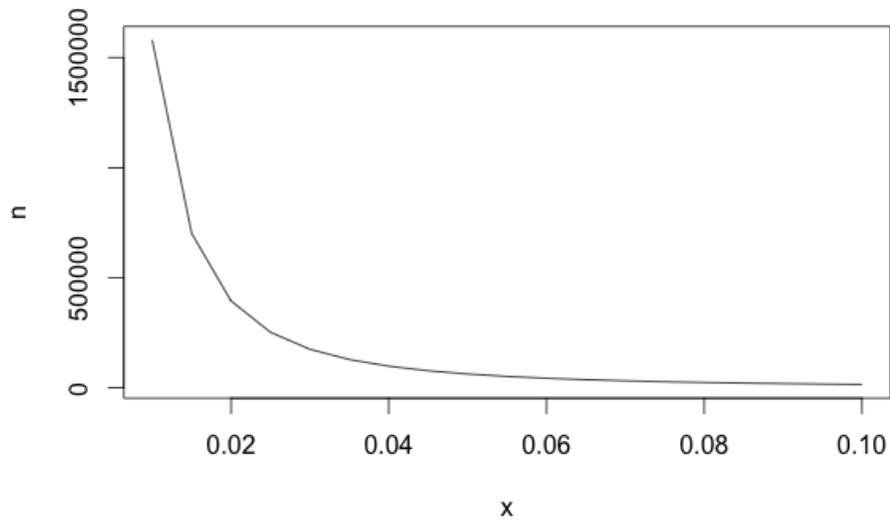


FIGURE 5.7 – Nombre de simulations et taille de l'intervalle – le cas Gaussien

Grâce à cet exemple, nous avons vu que l'estimation empirique des quantiles de la queue de distribution est compliquée car cela nous demande un grand nombre de simulations. Or c'est exactement ce qui nous intéresse, car nous souhaitons évaluer l'*Exhaustion Point* qui est défini comme le seuil de dépassement à $\frac{1}{200}$ ans. Pour contrer ce problème, nous pouvons modéliser la queue de distribution à l'aide des modèles de valeurs extrêmes. C'est exactement ce que nous allons voir dans le prochain chapitre dédié à la Théorie des Valeurs Extrêmes.

Chapitre 6

Théorie des Valeurs Extrêmes

6.1 Qu'est ce qu'un événement climatique extrême ?

La définition donnée par les climatologues dans un rapport du Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat (GIEC)(IPCC, 2007) est centrée simplement sur le caractère rare de l'événement : « Un phénomène climatique extrême est un phénomène qui est rare dans le cadre de sa distribution de référence statistique à un endroit spécifique. Les définitions de « rare » varient, mais un phénomène climatique extrême doit être normalement aussi rare ou plus rare que le 10ème ou 90ème percentile ». Cette définition permet de considérer deux caractéristiques importantes des extrêmes : leur fréquence et leur intensité. Elle ne prend en compte cependant uniquement l'occurrence et l'évaluation intrinsèque de l'événement. Dans ce cas un ouragan dévastateur ayant lieu en pleine mer loin de toutes habitations serait comptabilisé alors qu'il ne cause aucun dommage.

D'autres définitions plus complètes existent : Beniston et Stephenson en 2004, proposent trois définitions du phénomène climatique extrême, qui reposent sur différentes notions.

- Comme précédemment, la définition peut être basée sur la rareté d'un phénomène climatique ; on doit donc considérer sa fréquence d'occurrence.
- Elle peut également être basée sur l'intensité d'un phénomène ; ceci implique la considération des dépassements d'un seuil par des variables climatiques associées à ce phénomène.
- Enfin on peut introduire la notion d'impact et s'appuyer sur les dégâts socio-économiques causés par un phénomène.

Ce dernier point est dans notre cas crucial. Nous nous plaçons du point de vue des assureurs et réassureurs et nous nous concentrons donc davantage sur les deux derniers points de la définition de Beniston et Stephenson. De plus l'intérêt récent de la communauté scientifique porté aux événements extrêmes est lié, en partie, à l'augmentation quasi-exponentielle des pertes économiques attribuées à ces événements, ainsi qu'à l'augmentation apparente du nombre de victimes de ces phénomènes au cours des trente dernières années.

6.2 Présentation

La modélisation des événements extrêmes (ouragan, tremblement de terre ou inondation, crues, crises financières, krachs, chocs pétroliers) est aujourd'hui un champ de recherches particulièrement actif, notamment par l'importance de leurs impacts économiques et sociaux. Les modèles statistiques usuels et les approximations avec des distributions normales ne conviennent plus lorsqu'il s'agit de traiter d'événements extrêmes. En effet, du fait de l'occurrence d'événements extrêmes les queues de distribution deviennent épaisses comparées à une loi normale, qui est une distribution à queue fine.

C'est pour pouvoir étudier le comportement de ces queues de distribution que la Théorie des Valeurs Extrêmes a vu le jour. Ainsi la Théorie des Valeurs Extrêmes ne s'intéresse non pas à une distribution totale mais seulement aux queues de cette distribution grâce à des lois spécifiques que nous allons étudier. Cette théorie mathématique paraît donc bien appropriée pour étudier les événements de grande intensité et de faible fréquence. De ce fait les domaines d'applications de cette théorie sont très variés. On pense bien évidemment

au domaine de la météorologie où l'étude de la vitesse du vent, par exemple, permet d'évaluer le degré de résistance des matériaux face à la pression exercée par le vent (au cours d'une tempête par exemple) sur les bâtiments. Une autre application qui recoupe avec la première est en assurance pour la prise en compte des « grands risques ».

La Théorie des Valeurs Extrêmes repose sur deux grands théorèmes débouchant sur deux types d'approches distinctes :

1. la méthode des maxima.
2. la méthode des seuils.

La différence entre les deux théorèmes repose sur les données. Le premier est basé sur l'ensemble des simulations alors que le second est établi seulement pour des simulations dépassant un certain seuil.

6.3 Théorème de Fisher-Tippet-Gnedenko

Historiquement, les premiers résultats en Théorie des Valeurs Extrêmes sont attribués à Fisher et Tippet qui énoncèrent le théorème portant leurs noms en 1928. Ce théorème adopte l'approche du maximum d'une suite de variables aléatoires. La preuve de celui-ci a été formulée à plusieurs reprises. Le premier à donner une version complète a été Gnedenko en 1943.

Théorème 6.3.1. Soit $(X_i)_{i=1..n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F . Soit $(M_i)_{i=1..n}$ tel que : $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

S'il existe :

- deux suites de constantes $(a_i)_{i=1..n}$ et $(b_i)_{i=1..n}$;
- une fonction de répartition non dégénérée H telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = H(x)$

Alors H appartient à la classe de fonction suivante :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

H_ξ est la famille de lois des valeurs extrêmes (ou GEV pour Generalized Extreme Values), et ξ est le paramètre de forme ou de queue. Cette famille paramétrique de distribution a été proposée par Von Mises (1954) et Jenkinson (1955). La GEV rassemble trois distributions particulières selon les valeurs de ce paramètre :

- Si $\xi < 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Weibull.
- Si $\xi = 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel.
- Si $\xi > 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

On dit qu'une distribution F appartient au max-domaine d'attraction de H , et on note $F \in MDA(H)$ lorsque la distribution du maximum normalisée converge vers H . Les lois usuelles peuvent être répertoriées selon leur domaine d'attraction :

Domaine d'attaction	Weibull $\xi < 0$	Gumbel $\xi = 0$	Fréchet $\xi > 0$
Loi usuelles	Uniforme Beta	Exponentielle Gaussienne Gamma Lognormale	Cauchy Student Pareto

Nous pouvons représenter les densités de probabilité de ces lois GEV. Pour cela il suffit de dériver chaque fonction de répartition.

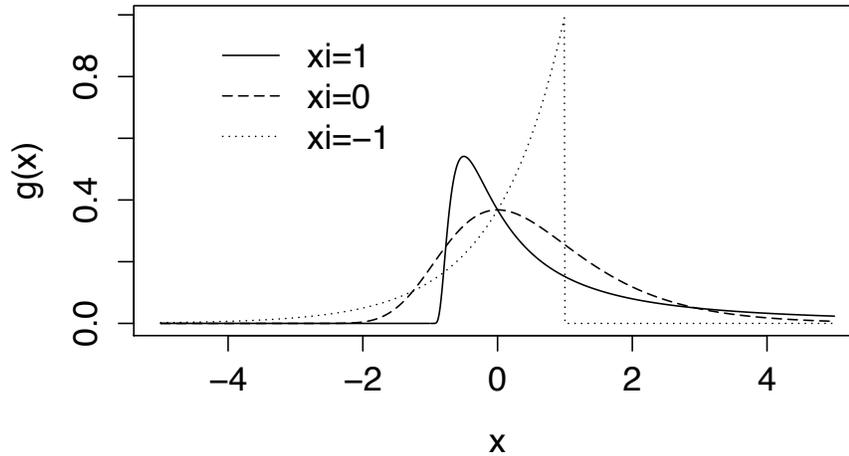


FIGURE 6.1 – Densité de la distribution $GEV(\xi)$

6.4 Théorème de Balkema-de Haan-Pickands

La méthode des excès au-delà d'un seuil (ou Peaks Over Threshold, POT) repose sur le comportement des valeurs observées au-delà d'un seuil donné. Ces modèles ont surtout été développés dans le domaine de l'assurance, où le réassureur prend en charge les pertes supérieures à un montant élevé. Cette théorie a été introduite au milieu des années 1970 par Pickands.

Comme dans la méthode précédente, nous supposons qu'il existe une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i=1..n}$ indépendantes et identiquement distribuées de distribution F . Soit x_0 la limite supérieure finie ou infinie du support de la distribution F . Formellement, $x_0 = \sup(x \in \mathbb{R} \cup +\infty : F(x) < 1)$. Soit N_u le nombre d'excès au dessus d'un seuil élevé $u \in \mathbb{R}^+$. Nous nous intéressons alors aux observations au-dessus du seuil notées Y_1, \dots, Y_{N_u} telles que $Y_i = X_i - u$. Ces observations sont supposées indépendantes et identiquement distribuées.

Nous définissons la fonction de distribution des excès au dessus du seuil u de la façon suivante :
Soit $x \in [0, x_0 - u]$,

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{P(X - u \leq x, X > u)}{P(X > u)} = \frac{P(u < X \leq x + u)}{P(X > u)} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

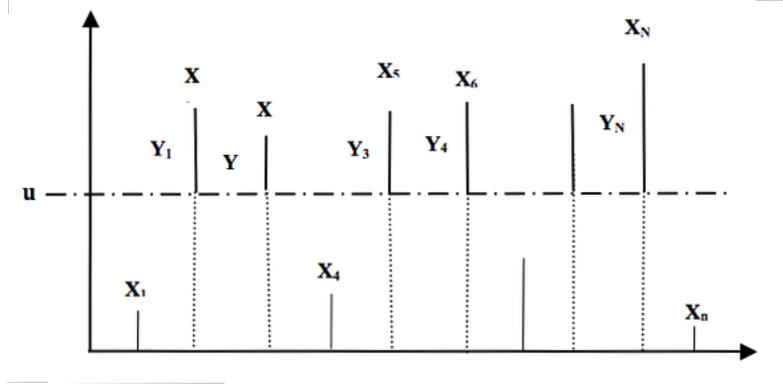


FIGURE 6.2 – Simulation des excès

Définissons maintenant la famille de loi de Pareto Généralisée (*Generalized Pareto Distribution* - GPD) :

$$G_{\xi, \sigma}(x) = \begin{cases} \left(1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \mathbb{1}_{x \in]0, -\frac{\sigma}{\xi}[} & \text{si } \xi < 0 \\ (1 - \exp(-\frac{x}{\sigma})) \mathbb{1}_{x \geq 0} & \text{si } \xi = 0 \\ \left(1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \mathbb{1}_{x \geq 0} & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

La GPD regroupe trois distributions selon les valeurs du paramètre de forme :

- $\xi > 0$, c'est la loi Pareto usuelle
- $\xi < 0$, nous avons la loi de Pareto de type II
- $\xi = 0$ donne la loi exponentielle.

La famille peut être étendue en ajoutant le paramètre de localisation μ : la GPD $G_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ n'est rien d'autre que $G_{\xi, \sigma}(x - \mu)$. Comme dans le cas de la GEV, nous avons tracé la fonction de densité de GPD selon différentes valeurs de ξ .

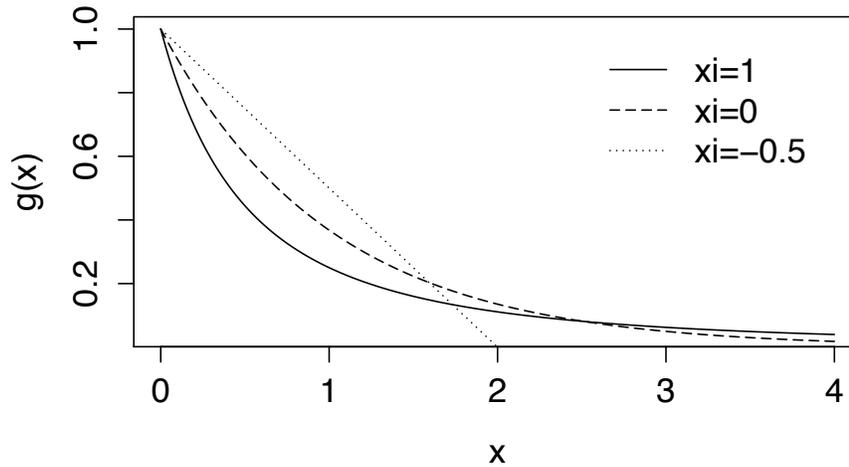
Nous allons enfin énoncer le théorème de Balkema-de Haan-Pickands

Théorème 6.4.1. *Il existe une fonction σ positive mesurable telle que :*

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq x < x_0 - u} |F_u(x) - G_{\xi, \sigma(u)}(x)| = 0$$

si et seulement si F appartient au domaine d'attraction de la loi H_{ξ} qui est une GEV(ξ).

On voit rapidement que cette deuxième modélisation convient mieux à notre problème, car nous voulons estimer les pertes au-dessus d'un certain seuil. Voyons comment nous pouvons déterminer ce seuil et comment nous pouvons modéliser notre loi GPD grâce à nos données.


 FIGURE 6.3 – Densité de la distribution $GPD(\xi, 1)$

6.5 Estimation

Sachant la valeur du seuil u , nous pouvons caractériser les paramètres ξ et σ . Pour cela, nous avons recours à la méthode du maximum de vraisemblance.

6.5.1 Estimation des paramètres

Cas $\xi = 0$

Dans ce premier cas, nous estimons simplement le maximum de vraisemblance d'une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$ avec $\lambda = \frac{1}{\sigma}$ de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Nous avons notés Y_1, \dots, Y_{N_u} l'échantillon des excès. Soit $y = y_1, \dots, y_{N_u}$ la réalisation de cet échantillon avec $y_i \geq 0 \forall i = 1 \dots N_u$. Alors, la vraisemblance s'écrit

$$\begin{aligned} L(\lambda, y) &= \prod_{i=1}^{N_u} f(y_i) \\ &= \prod_{i=1}^{N_u} \lambda e^{-\lambda y_i} \mathbb{1}_{y_i \geq 0} \\ &= \lambda^{N_u} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{N_u} y_i\right) \end{aligned}$$

La log-vraisemblance s'exprime alors :

$$\begin{aligned} l(\lambda, y) &= \log(L(\lambda, y)) \\ &= N_u \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{N_u} y_i \end{aligned}$$

Cette fonction est C^2 pour tout $\lambda > 0$, de plus elle est concave. En annulant la dérivée première, on trouve que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ est $\hat{\lambda} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} x_i$

Cas $\xi \neq 0$

Dans ce second cas, nous nous intéressons à la densité d'une loi *GPD* qui est de la forme $g(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$ pour x bien déterminé. Sous de bonnes conditions sur $y = y_1, \dots, y_{N_u}$, nous pouvons calculer la vraisemblance :

$$\begin{aligned} L(\xi, \sigma, y) &= \prod_{i=1}^{N_u} g(y_i) \\ &= \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi y_i}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \end{aligned}$$

La log-vraisemblance s'exprime alors :

$$\begin{aligned} l(\xi, \sigma, y) &= \log(L(\xi, \sigma, y)) \\ &= -N_u \log(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^{N_u} \log\left(1 + \frac{\xi y_i}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

En dérivant la log-vraisemblance par rapport à ξ et σ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} l(\xi, \sigma, y) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^{N_u} \log\left(1 + \frac{\xi y_i}{\sigma}\right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\frac{y_i}{\sigma}}{1 + \frac{\xi y_i}{\sigma}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} l(\xi, \sigma, y) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{N_u}{\sigma} + \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\xi y_i}{\sigma(\sigma + \xi y_i)} = 0 \end{aligned}$$

Ces équations qui nous permettent d'aboutir aux estimateurs par maximum de vraisemblance peuvent uniquement être résolues de façon numérique.

6.5.2 Estimation du seuil

Il est important de choisir intelligemment le seuil pour modéliser la queue de distribution. Nous voulons étudier les valeurs extrêmes, ce seuil doit donc être suffisamment grand. Cependant un seuil trop élevé limite le nombre de données. Il doit rester suffisamment de valeurs au dessus du seuil afin de pouvoir faire des statistiques.

Nous utilisons pour cela la méthode "Mean excess function" : Pour déterminer le seuil, nous calculons la fonction moyenne des excès :

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

Cette fonction vérifie une linéarité en u pour les lois *GPD*. Il suffit donc de la tracer et de repérer à partir de quel seuil elle est linéaire.

Chapitre 7

Application : Estimation de la loi de l'indice

7.1 Introduction et quelques rappels

Nous allons utiliser la Théorie des Valeurs Extrêmes pour affiner notre modèle afin de proposer un calcul de prime pure en fonction de la couverture désirée. Nous utiliserons aussi notre modèle pour établir des tranches de réassurance.

Le fait que les paiements ne soient effectués qu'au-delà d'un seuil, l'*Attachment*, nous a naturellement conduit à utiliser une modélisation dite "POT" (Pic Over Threshold). Nous sommes partis de cette intuition pour créer un caractère dynamique dans la couverture de l'assuré contre les dommages liés au passage d'un ouragan.

En empruntant le vocabulaire de la théorie des jeux, nous allons nous placer dans un jeu entre deux agents : le pays client (la Jamaïque) et le CCRIF. Ce jeu se déroulera en deux temps. Dans un premier temps, on considère que le CCRIF fixe le point *Attachment*. Cela nous réfère à la mise en place d'une franchise dans le cas une assurance classique. Le CCRIF ne souhaite pas prendre en compte les dommages inférieurs à ce seuil, dans le but de limiter la fréquence de paiement. Ensuite, sachant le niveau *Attachment*, le pays décidera de l'amplitude de sa couverture. Typiquement, il cherchera à répondre aux questions :

- Combien cela coûte de s'assurer jusqu'à un montant X ? ($X=Exhaustion$)
- Que peut-on acheter comme couverture avec un montant Y ?
- En résumé, quel est le lien entre le niveau de couverture *Exhaustion* et la prime à payer?

Nous devons pour cela modéliser par une loi de probabilité l'indice paramétrique annuel \mathcal{I} . Rappelons comment est défini cet indice.

Soit $K \in \mathbb{N}$ le nombre d'ouragans référencés qui traversent l'île en une année. On note $(V_k)_{k=1, \dots, K}$ la suite des pics de vitesse mesurés dans les 14 stations durant un ouragan, ie $V_k = (V_k^1, \dots, V_k^{14}) = (V_k^1, \dots, V_k^{14}) \in \mathbb{R}^{14} \forall k = 1, \dots, K$. L'indice paramétrique associé à chaque ouragan $k = 1, \dots, K$ vaut :

$$I_k = I(V_k^1, \dots, V_k^{14}) = 1.082119 \sum_{i=1}^{14} \omega_i \times \max(V_k^i - 22.5, 0)^4, \quad \forall k = 1, \dots, K$$

Ainsi, l'indice paramétrique annuel est défini par :

$$\mathcal{I} = \sum_{k=1}^K I_k = 1.082119 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{14} \omega_i \times \max(V_k^i - 22.5, 0)^4$$

Cet indice étant une transformation des pics de vitesses, dans la mesure où nous disposons de données stochastiques sur les vitesses, nous pouvons modéliser la loi de \mathcal{I} . Cette loi de probabilité servira à déterminer

le niveau d'*Exhaustion* souhaité par le pays membre.

7.2 Modélisation de la queue de distribution

Dans ce qui suit, nous allons modéliser l'indice paramétrique annuel et tenter d'expliquer la relation entre l'*Exhaustion* et la prime pure. Nous rappelons le but de l'opération. Dans notre jeu en deux temps, le CCRIF fixe l'*Attachment* comme le quantile bien précis de la loi de \mathcal{I} . Connaissant cette valeur pour la borne inférieure, le pays va décider de la hauteur de sa couverture par le biais de l'*Exhaustion*. Cela peut être par exemple un point dont la probabilité d'excès est de $\frac{1}{200}$ ans. Malheureusement l'obtention d'un estimateur précis de ce quantile placé en queue de distribution requiert un nombre conséquent de simulations. Pour contrer ce problème nous avons décidé de recourir à la modélisation *GPD*.

Notons $A = \text{Attachment}$ et $E = \text{Exhaustion}$

Soit $R = \left(\frac{\mathcal{I}-A}{E-A}\right) \mathbf{1}_{A \leq \mathcal{I} \leq E} + \mathbf{1}_{\mathcal{I} > E}$ le ratio que l'on applique à la limite de couverture pour obtenir le paiement final.

Ainsi, le paiement vaut

$$\text{Paiement} = R \times \text{Coverage Limit}$$

La prime pure, comme espérance des paiements, vaut :

$$PP = \mathbb{E}(\text{Paiement}) = \mathbb{E}(R \times \text{Coverage Limit}) = \mathbb{E}(R) \times \text{Coverage Limit}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R) &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\mathcal{I}-A}{E-A} \right) \mathbf{1}_{A \leq \mathcal{I} \leq E} + \mathbf{1}_{\mathcal{I} > E} \right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\frac{\mathcal{I}-A}{E-A} \right) \mathbf{1}_{A \leq \mathcal{I} \leq E} \right]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{I} > E)}_{(2)} \end{aligned}$$

L'espérance en (1) devient :

$$\begin{aligned} (1) &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\mathcal{I}-A}{E-A} \right) \mathbf{1}_{A \leq \mathcal{I} \leq E} \right] \\ &= \frac{1}{E-A} \mathbb{E}[(\mathcal{I}-A) \mathbf{1}_{A \leq \mathcal{I} \leq E}] \\ &= \frac{1}{E-A} \mathbb{E}[(\mathcal{I}-A) \mathbf{1}_{\mathcal{I} \leq E} \mid \mathcal{I} \geq A] \times \mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A) \\ &= \frac{1}{E-A} \underbrace{\mathbb{E}[(\mathcal{I}-A) \mathbf{1}_{\mathcal{I}-A \leq E-A} \mid \mathcal{I} \geq A]}_{(3) X \sim GPD} \times \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A)}_{\text{Déterminé par le CCRIF}} \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons apparaître la distribution *GPD*. Comme nous l'avions introduit, nous faisons appel à cette distribution pour modéliser les événements « Pic Over Treshold ». Dans ce cas, nous regardons la valeur de l'indice au-dessus de l'*Attachment Point*. Nous rappelons que ce seuil est fixé par le CCRIF, de façon à ce que la probabilité d'excès de ce point soit faible. C'est pourquoi la probabilité $\mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A)$ est fixée à l'avance par le CCRIF. L'*Attachment Point* correspond en théorie au quantile 96.7% ($\frac{1}{30}$ ans) de la distribution de l'indice \mathcal{I} . En pratique, il équivaut au quantile 86.5% avec notre jeu de données. On considère que l'*Attachment Point* ainsi déterminé est un seuil assez élevé pour la modélisation *GPD*.

Finalement, nous avons estimé les coefficients ξ et σ de la variables aléatoire X dans (3). Cette estimation a été faite numériquement pour finalement obtenir les estimateurs suivants :

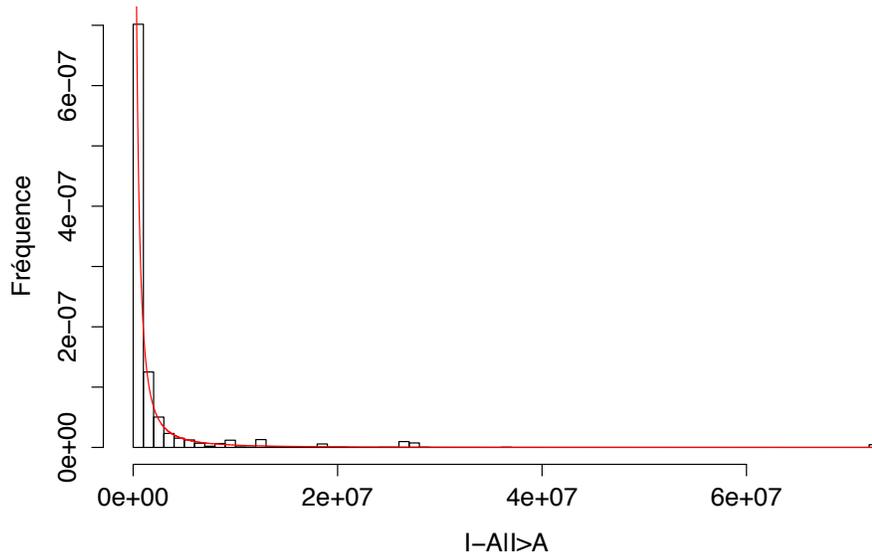


FIGURE 7.1 – Estimation de la loi GPD

Paramètre	Son estimation
ξ	$\hat{\xi} = 1.091867$
σ	$\hat{\sigma} = 267275.6$

Pour conclure sur l'espérance (1), si on note $X \sim GPD(\hat{\xi}, \hat{\sigma})$, on a :

$$(1) = \frac{1}{E - A} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \leq E - A}) \times \mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A) \tag{7.2.2}$$

Pour calculer cette formule, nous devons déterminer précisément le point *Exhaustion*. En revenant à l'expression de l'espérance de R , nous sommes amenés à calculer :

$$\begin{aligned} (2) &= \mathbb{P}(\mathcal{I} > E) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{I} > E, \mathcal{I} \geq A) \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{I} - A > E - A, \mathcal{I} \geq A) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{I} - A > E - A \mid \mathcal{I} \geq A)}_{(3) X \sim GPD} \times \mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{I} > E)}_{\text{Exigé par le pays}} &= \mathbb{P}(X > E - A) \times \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A)}_{\text{Fixé par le CCRIF}} \\ \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X > E - A)}_{1-\alpha} &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{I} > E)}{\mathbb{P}(\mathcal{I} \geq A)} = \frac{1 - \alpha_E}{1 - \alpha_A} \\ \Rightarrow \alpha &= 1 - \frac{1 - \alpha_E}{1 - \alpha_A} = \frac{\alpha_E - \alpha_A}{1 - \alpha_A} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la modélisation *GDP* nous obtenons comme estimation pour l'*Exhaustion* :

$$\hat{E} = A + q_{\alpha}^X, \text{ où } X \sim GPD(\hat{\xi}, \hat{\theta})$$

Pour résumer, le calcul de l'espérance du ratio devient :

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1}{\hat{E} - A} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \leq \hat{E} - A}) \times \underbrace{(1 - \alpha_A)}_{\text{Imposé par le CCRIF}} + \underbrace{(1 - \alpha_E)}_{\text{Exigé par la Jamaïque}}$$

Exemple 7.2.1. Nous avons testé cette méthode avec nos données. Pour cela, dans notre jeu en deux étapes, nous avons supposé que le CCRIF a choisi un Attachment Point de probabilité de dépassement $1 - \alpha_A = \frac{100 - 86.5}{100} = 13.5\%$. Cela revient à prendre le même Attachment que dans le contrat. Si on suppose que le pays souhaite une couverture à $\alpha_E = 98.5\%$, on obtient une estimation de *Exhaustion* :

$$\hat{E} = 3\,633\,944$$

Nous voyons que cette valeur se rapproche beaucoup de la vraie valeur de l'*Exhaustion* stipulée dans le contrat.

L'estimation de la prime pure en passant par la modélisation des valeurs extrêmes est un succès puisqu'on retrouve une valeur très proche pour le montant de la prime.

$$PP_{MonteCarlo} = 2\,037\,286$$

$$PP_{GDP} = 1\,954\,190$$

7.3 Relation Prime - Hauteur de couverture

En reprenant nos données, on voit que l'*Exhaustion* est défini comme le quantile (empirique) à 98.5%. Admettons que la Jamaïque souhaite revaloriser son contrat à une probabilité d'excès de 0.5% soit $\frac{1}{200}$ ans. Comment cette hausse de couverture se traduit-elle ?

Pour cela, nous devons reprendre la définition de la fonction paiement et comment celle-ci est construite.

Comme nous l'avons déjà signalé, la fonction de perte est obtenue à partir de la fonction de dommage. Ci-dessus, nous avons tracé la fonction de pertes. On voit que si on augmente la couverture en augmentant l'*Exhaustion*, cela se traduit par une hausse de la limite de couverture d'un montant x inconnu. Ce montant x dépend de la modélisation de la fonction de dommage par *EQECAT*, or nous n'avons aucune information sur la façon dont *EQECAT* modélise cette fonction.

Nous rappelons que la prime pure s'exprime comme :

$$PP = \mathbb{E}(R) \times \text{Coverage Limit}$$

Comme nous l'avons vu, $\mathbb{E}(R)$ dépend de l'*Exhaustion*. Nous voyons aussi que la limite de couverture dépend de l'*Exhaustion*. La prime pure est donc fonction de l'*Exhaustion* à travers le ratio et la limite de couverture. Afin d'analyser la dépendance entre la prime pure et le montant de couverture, nous allons faire différentes suppositions sur x .

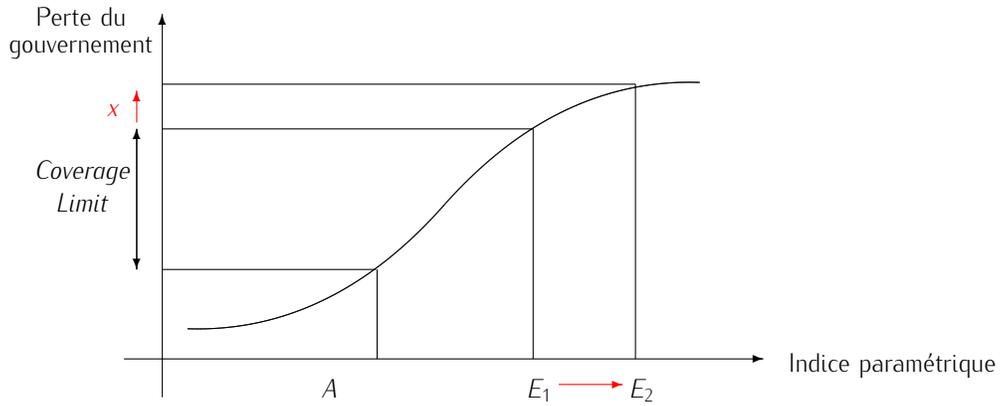


FIGURE 7.2 – Fonction de dommage : Hausse de l'Exhaustion Point

7.3.1 Cas où x est linéaire

Dans cette première partie, on estime que x croît de façon linéaire en fonction de l'écart entre E_1 et E_2 .

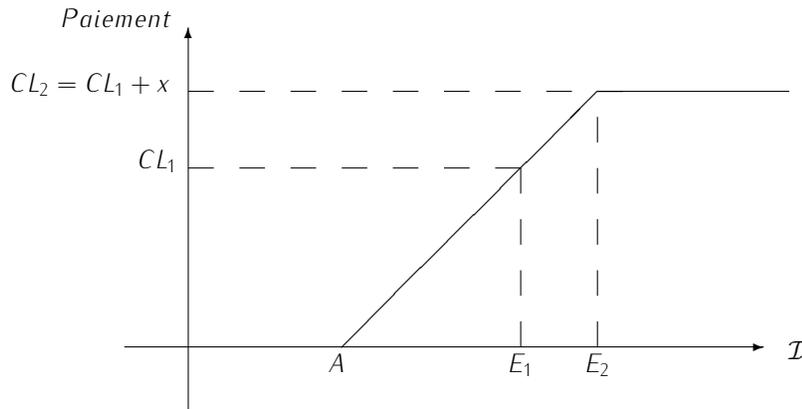


FIGURE 7.3 – Fonction de Paiement : Hausse de l'Exhaustion Point et du Coverage Limit

Si on note

- CL_1 le Coverage Limit associé au niveau d'Exhaustion E_1 fixé comme le quantile à 98.5%
- $CL_2 = CL_1 + x$ le nouveau Coverage Limit associé au niveau d'Exhaustion E_2 fixé comme le quantile à 99.5%

Alors, x vérifie :

$$\frac{CL_1}{E_1 - A} = \frac{x}{E_2 - E_1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{CL_1(E_2 - E_1)}{E_1 - A}$$

Finalement, la prime à payer par le pays est

$$PP_2 = \mathbb{E}(R_2) \times CL_2$$

Avec,

$$CL_2 = CL_1 + x = CL_1 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 - A} \right)$$

Conclusion

Pour résumer, nous sommes partis de l'*Exhaustion Point* présent dans le contrat entre la Jamaïque et le CCRIF, que l'on a noté E_1 . Celui-ci correspond à un quantile de la loi de l'indice à 98.5%. Nous faisons la supposition que le pays souhaite augmenter son niveau de couverture. En admettant que dans son nouveau contrat, le pays souhaite placer l'exhaustion point de sorte à ce que ce plafond ne soit dépassé qu'une fois tous les 200 ans. Cela revient à choisir un nouvel *Exhaustion*, noté E_2 , valant le quantile à 99.5% de la loi de l'indice paramétrique annuel. Cette hausse se traduit par une baisse de l'espérance du ratio, compensée par une hausse du *Coverage Limit*.

Ci-dessous, nous avons tracé la courbe exprimant le montant de la prime à payer en fonction de la probabilité d'excéder l'*Exhaustion Point*. Nous remarquons, dans le cas où x croît de façon linéaire, que la prime grimpe à plus de \$30 Millions pour un *Exhaustion Point* équivalent au quantile à 99.5% de la loi de \mathcal{I} .

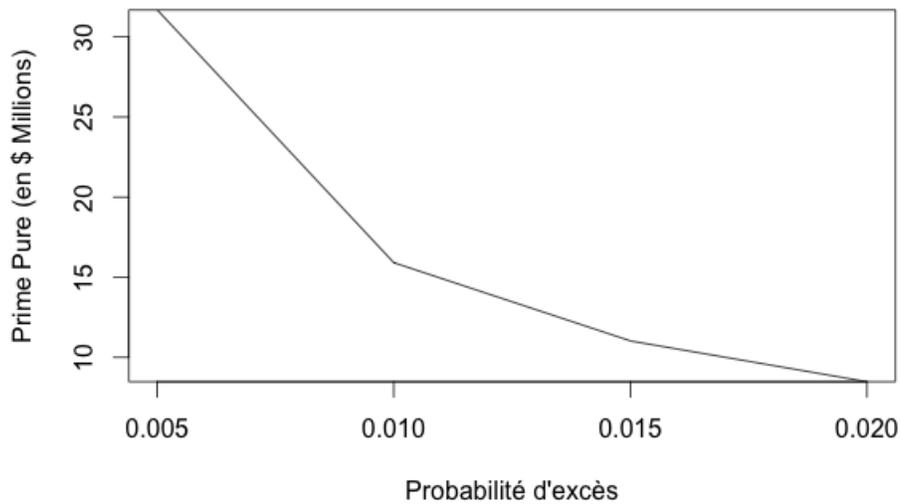


FIGURE 7.4 – Prime pure en fonction de la probabilité d'excéder l'*Exhaustion Point*

D'un point de vue différent, on peut se demander ce qui arriverait si x était nul, en d'autres termes si la *Coverage Limit* ne varie pas en fonction de l'*Exhaustion*.

7.3.2 Cas où x est nul

Il est important de noter que dans la formule de dommage du CCRIF, le point *Exhaustion* représente le niveau que le \mathcal{I} doit atteindre pour que le ratio atteigne 100% et que le nominal entier soit remboursé. A nominal fixé, avec un point d'attachement fixé, plus l'exhaustion est faible, meilleure est la qualité de la couverture.

On peut étudier le graphique ci-contre pour le mettre en évidence :

- En abscisse le niveau du \mathcal{I} avec les stades *Attachment* et *Exhaustion*.
- En ordonnée le ratio à appliquer au nominal assuré pour déterminer le remboursement des sinistres.

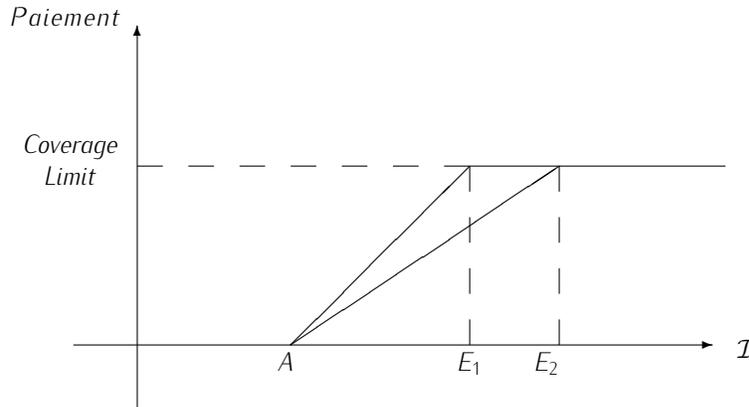


FIGURE 7.5 – Fonction de Paiement : Hausse de l'*Exhaustion Point* à *Coverage Limit* fixé

On remarque que le niveau d'exhaustion caractérise en quelque sorte la vitesse de convergence vers le remboursement maximal.

L'exhaustion est toujours supérieur à l'attachement. Plus il est faible, plus la pente de la droite est élevée et plus la couverture est de bonne qualité :

En comparant les deux droites du graphe, on remarque en effet, que pour un même niveau de mesure \mathcal{I} , c'est-à-dire pour un même niveau de vitesses d'ouragans, le ratio est plus élevé dans le cas rouge ce qui explique un meilleur remboursement.

Nous allons relier cette qualité de couverture (via le niveau d'exhaustion) à une gamme de prix. A chaque niveau est associé un prix, plus la couverture est bonne plus le prix est cher.

Grâce à la même modélisation que pour le calcul de la prime pure du CCRIF, nous pouvons établir la distribution du \mathcal{I} .

Cette forme avec une forte occurrence des valeurs faibles et une légère queue épaisse avec des événements extrêmes qui arrivent de manière épisodique nous conduit à modéliser cette distribution en utilisant une loi extrême.

Puisque l'*Attachment* est le seuil minimal à atteindre pour déclencher des indemnités nous le choisissons comme seuil. L'*Attachment* correspond à la survenance d'un ouragan de vitesse moyenne sur l'île de 143 km/h. Ce seuil correspond donc déjà à un niveau élevé de la vitesse du vent.

Pour modéliser la loi au delà du seuil *Attachment* nous allons utiliser une loi de Pareto généralisée dite GPD. Ainsi c'est la queue de distribution des valeurs extrêmes du \mathcal{I} que nous modélisons par une GPD. Les niveaux d'exhaustion, valeurs extrêmes, correspondront alors à des quantiles de cette loi.

Pour vérifier que ce seuil est acceptable, nous pouvons utiliser la méthode "Mean excess" expliquée précédemment.

Nous traçons donc la fonction $e(u) = E(X - u | X > u)$

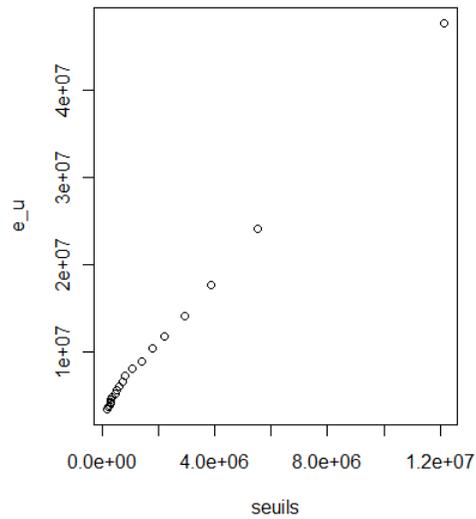


FIGURE 7.6 – Fonction moyenne des excès

On remarque la tendance linéaire dès les premières valeurs de $u > 0$. De plus on observe de nombreuses valeurs supérieures à l'*Attachment point*. Ce dernier nous paraît donc bien être un seuil approprié pour notre modélisation GPD. Sachant $seuil = Attachment$, nous avons dû estimer les autres paramètres de la loi par maximum de vraisemblance.

Après avoir paramétré, la loi GPD, à l'aide d'une fonction R nous avons calculé la prime pour chaque niveau de couverture.

Les résultats pour des niveaux d'exhaustion allant du quantile à 96% au quantile à 99.5% sont affichés dans le tableau suivant.

La ligne *Exhaustion* donne la valeur de "l'exhaustion point" correspondant au quantile de la loi.

La ligne "angle" caractérise la forme du graphe du paiement en fonction de l'indice, plus l'angle est élevé plus le ratio à appliquer au nominal est élevé.

$$angle = \text{Arctan} \left(\frac{\text{Coverage Limit}}{\text{Exhaustion} - \text{Attachment}} \right)$$

qui caractérise la vitesse de convergence des indemnités payées vers le coverage limit. Plus l'angle approche 90 degrés, plus la pente est élevée, plus le paiement maximal est atteint rapidement.

Résultats

Quantile	0.96	0.965	0.97	0.975	0.98	0.985	0.99	0.995
<i>Exhaustion</i>	1035898	1236728	1507548	1891752	2477353	3473310	5521196	11948715
Angle en degrés	89.06605	88.86655	88.59757	88.21608	87.63494	86.647745	84.62475	78.38372
Prime Pure	3910762	3588106	3285040	2900111	24723278	2043956	1566308	920618

Chapitre 8

Réduction de risque de base

8.1 Risque de base et modèle paramétrique

L'intérêt de l'utilisation d'assurance paramétrique via la modélisation d'indices réside dans la réduction totale de l'aléa moral. Pour des événements aussi difficiles à quantifier, à mesurer et mettant en jeu de très grandes indemnités potentielles, l'existence d'un aléa moral peut paraître prohibitif et freiner l'expansion de cette industrie de l'assurance des grands risques. Cependant cette amélioration à un prix : le risque de base induit par l'indice paramétrique et la méthodologie choisis.

Un autre avantage de la modélisation paramétrique est le côté "carré" de ces contrats : la standardisation des contrats et le report des pertes est plus facile, ce qui entraîne une réduction des coûts de transaction et une liquidité plus élevée. Ainsi cette approche peut faciliter "l'industrialisation" de contrats d'assurance pourtant très spécifiques.

L'assureur sait exactement ce qu'il devra payer en cas d'occurrence d'événements extrêmes. Il peut donc provisionner en fonction et faire face aux indemnités éventuelles à payer. Cet aspect est aussi intéressant du point de vue de l'image de l'assureur, il limite ainsi la probabilité de faire défaut et réduit le risque réputationnel.

8.2 Approche temporelle et météorologique

La première étape dans la réduction du risque de base a été l'utilisation de données simulées. Après les avoir rééchantillonnées en utilisant les conditions météorologiques on obtient une base de données exhaustives nous permettant de faire un travail statistique. On élimine ainsi le problème du peu d'occurrence de ces événements extrêmes. L'utilisation des données météorologiques de 1980 à 2010 permet aussi de travailler dans un cadre climatique et temporel cohérent. Nos simulations sont effectuées dans un cadre climatique récent, voire actuel. Ce qui est primordial en période de réchauffement climatique.

A l'inverse, le peu d'événements historiques conduit à utiliser des plages de temps très élevé (150 ans par exemple) pour capter des occurrences d'ouragans significatifs. Cependant ces événements anciens peuvent avoir eu lieu dans des conditions météorologiques obsolètes. De plus les dégâts de l'époque causés par un certain ouragan ne représentent pas les mêmes montants qu'aujourd'hui avec un ouragan de mêmes caractéristiques. Même en essayant d'actualiser ces montants, des erreurs importantes peuvent subsister.

De plus, grâce au rééchantillonnage "Poissonien" on peut contrôler la part d'importance des différentes années. Alors qu'avec un événement rare survenant une année λ , on a une prépondérance de cette année dans les données historiques qui peut biaiser les résultats finaux.

8.3 Approche spatiale

8.3.1 Modélisation de l'exposition au risque

Comme nous l'avons précisé, l'exposition de l'île ressort dans la formule de l'indice \mathcal{I} à travers les pondérations (cf. section 2.3.3). Les poids retranscrivent l'importance des différentes zones géographiques dans l'exposition globale de l'île.

Ces poids ont été fixés par le pays concerné en collaboration avec le CCRIF. Comment peut-on être sûr que cette pondération particulière retranscrit au mieux la réelle exposition. Pour tester cela, nous avons décidé de comparer ces poids à ce qu'on aurait obtenu en nous basant sur l'intensité lumineuse émise par ces différentes zones géographiques. En effet, comme l'ont introduit Chen et Nordhaus [13], nous utilisons l'intensité lumineuse comme variable explicative de la richesse d'une zone géographique. Nous disposons des images satellites nocturnes de la Jamaïque et d'une méthode pour quantifier la richesse d'une région via la luminosité observée, estimateur de la consommation électrique et donc des infrastructures en place et de la richesse locale. Ainsi nous pouvons choisir une échelle pour constituer les zones à observer et affiner la cartographie du capital à risque.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie sur l'étude statistique des données, l'utilisation de la luminosité nocturne comme estimateur de richesse couplée au découpage précis nous permet d'obtenir une meilleure pondération des richesses et de réduire ainsi le risque de base du modèle. Nous rappelons comment sont répartis ces poids selon les zones géographiques. En bleu, nous avons représenté les poids issus du contrat entre le CCRIF et la Jamaïque et en rouge les poids obtenus grâce à l'intensité lumineuse.

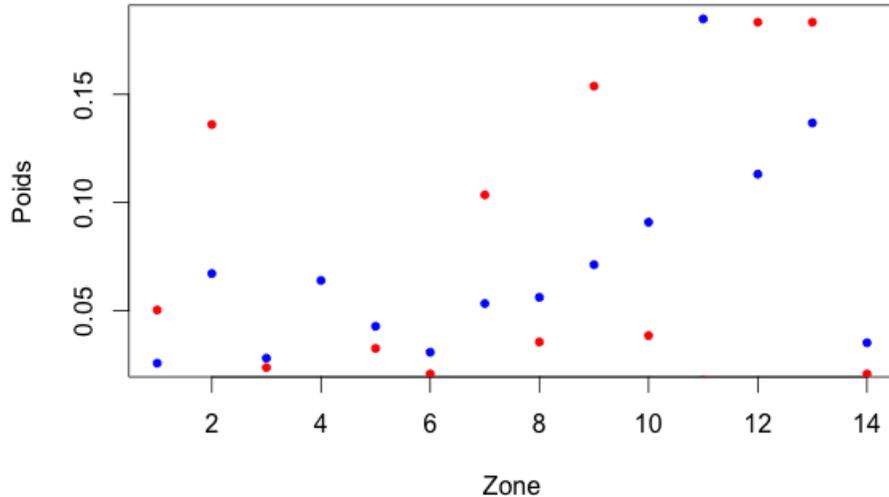


FIGURE 8.1 – Comparaison des poids

Afin de mieux représenter ces différences, nous avons décidé d'étudier l'indice paramétrique selon les deux formes de pondération. Nous rappelons, que nous avons une base de données d'ouragans simulés importante. Ces ouragans ont les caractéristiques physiques d'ouragans réels. Ainsi, nous allons utiliser cette banque de données pour calculer l'indice paramétrique correspondant à chaque pondération. Nous nous sommes uniquement concentrés sur les ouragans dont la vitesse moyenne dépasse 143km/h. C'est approximativement la vitesse (moyenne sur les 14 cellules) à partir de laquelle le contrat entre la Jamaïque et le CCRIF se déclenche. Nous avons alors calculé les deux indices paramétriques sur ces ouragans simulés. Nous avons

tracé la valeur de chacun de ces indices en fonction de la vitesse moyenne de chaque ouragan. Ci-dessous, le graphique en question avec l'indice avec les poids du contrat CCRIF (en noir) et le nouvel indice basé sur l'intensité lumineuse (en rouge).

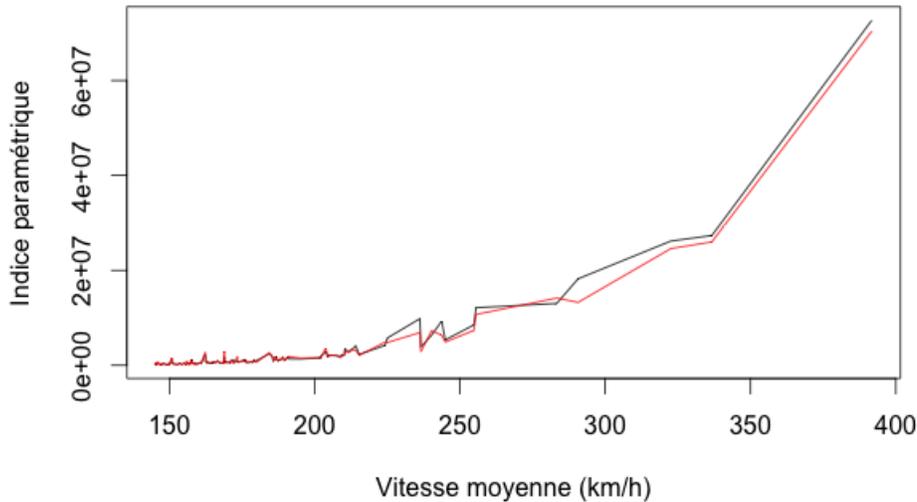


FIGURE 8.2 – Comparaison des deux indices

On remarque que les deux courbes sont sensiblement identiques. On note tout de même que la courbe basée sur les intensités lumineuses (en rouge) est globalement légèrement inférieure à celle fondée sur les pondérations du CCRIF (en noir). Nous allons voir si cette légère différence se transfère aux paiements et donc à la prime pure. Pour cela, nous avons simulé nos paiements dans les deux cas et les avons comparé.

Ci-dessous, nous avons noté les différentes valeurs de la prime pure estimées en fonction du nombre de simulations. Cette prime pure a été calculée pour les deux types de pondération. De plus, nous avons testé une égalité potentielle entre ces valeurs de prime pure. Nous avons effectué cette vérification à l'aide d'un test de Wald. Nous pouvons lire les résultats de ces tests à l'aide de la *p-valeur*. Nous voyons que nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle d'égalité des deux primes.

N	CCRIF	Intensité lumineuse	<i>p-valeur</i>
10 000	2 144 616	2 063 015	0.51
50 000	2 097 937	2 027 329	0.20
100 000	2 057 922	2 069 671	0.76

Le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov nous confirme que la pondération n'influe pas la distribution des paiements. En effet, nous pouvons dire que les deux échantillons ont la même distribution grâce à ce test. Nous rappelons la théorie sur le test de Kolmogorov-Smirnov en annexe. Cela valide notre intuition à la vue des deux courbes très proches (Figure 8.2).

N	<i>p-valeur</i>
10 000	0.9888
50 000	0.1413

On voit que l'utilisation de l'intensité lumineuse des zones géographiques pour constituer la pondération n'apporte aucune amélioration comparée à la pondération déjà utilisée par le CCRIF. Cela peut s'expliquer par une faible différence entre les deux pondérations. Il se peut aussi que le découpage soit trop grossier. C'est pourquoi, pour tenter de réduire le risque de base nous allons étendre notre analyse à un découpage en 1000 cellules au lieu de 14 jusqu'à maintenant.

8.3.2 Découpage précis

Notre principale idée pour réduire le risque de base repose sur une cartographie très précise de la Jamaïque : un découpage en 12290 cellules de 1km^2 . En augmentant le nombre de cellules, nous pensons que nous aurons un découpage plus fin de l'exposition de la Jamaïque et que cela fera baisser le risque de base.

Plutôt que de travailler sur l'ensemble des cellules de la Jamaïque, nous avons décidé de nous concentrer sur un échantillon de 1000 cellules. Ce choix est motivé par le gain en temps de calcul significatif. Cette sélection nous paraît cohérente, car on divise par 12 le temps de calcul tout en conservant un échantillon vaste, puisque celui-ci est 70 fois plus important que l'échantillon de cellules utilisé par le CCRIF.

Comme dans la partie précédente nous avons comparé ce modèle à celui utilisé par le CCRIF. Pour cela, nous avons simulé les indemnités dans les deux cas.

Pour la simulation avec 1000 cellules, nous avons sélectionné les 14 cellules employées dans la modélisation du CCRIF, auxquelles nous avons rajouté $1000 - 14 = 986$ cellules réparties de façon aléatoire sur l'île. Pour assurer le calcul de l'indice paramétrique, nous avons choisi de répartir de l'intensité lumineuse pour déterminer les poids affectés à chacune des stations.

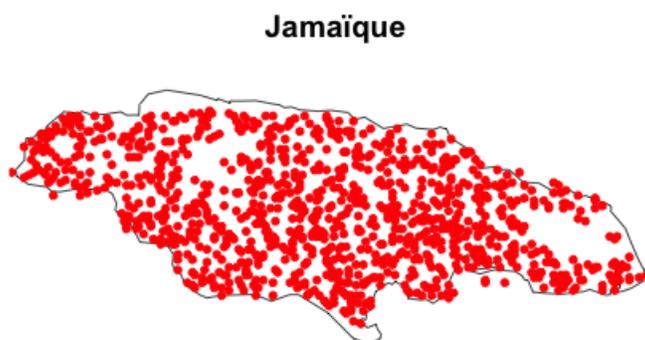


FIGURE 8.3 – Répartition géographique des stations

Nous avons donc simulé les indemnités en utilisant les conditions du CCRIF d'un côté, et le découpage en 1000 cellules d'un autre côté. Nous avons alors comparé les résultats concernant la prime pure.

N	14 Stations	1000 Stations	<i>p-valeur</i>
10 000	2 093 266	2 096 564	0.98
50 000	2 160 177	2 102 672	0.30

Une fois de plus, en utilisant un Test de Wald, nous pouvons conclure que les indemnités sont sensiblement équivalentes et qu'il n'existe pas de différence en terme de prime pure. Nos conclusions quant à la réussite de cette méthode sont nuancées. Ce découpage a été utile pour observer les pics de vitesse point par point et pour modéliser de manière très précise la richesse pouvant être détruite dans chaque cellule. Malheureusement la variation de mesure de l'exposition ne se ressent pas sur la prime à payer. Cela a été efficace dans le cas de l'exposition au risque, moins au niveau des simulations de vitesse.

8.4 Conclusion et ouverture

Le découpage en 1000 cellules ne s'est pas vraiment révélé utile pour affiner le modèle en fonction du nombre de mesure de vitesse. On n'obtient pas de différence significative entre le calcul de prime pure avec les 14 cellules du CRESTA et le calcul avec les 1000 cellules réparties sur l'ensemble du pays. Nous pouvons expliquer ce phénomène par la taille de l'île. En effet, la Jamaïque est un petit pays. Sa superficie est de seulement 10 991 km². Pour avoir un ordre de grandeur, l'île de France possède une superficie de 12 011 km².

Lors du passage d'un ouragan, les cellules de mesure étant assez proches, il n'existe pas de différences significatives entre les vitesses de vent relevées dans chaque point. On peut dire qu'il existe une forte corrélation entre les cellules. Cela est confirmé par la matrice de corrélations entre les 14 stations du CRESTA. En analysant cette matrice, on voit bien que les cellules sont très corrélées.

Malgré un découpage fin de l'exposition, nous ne parvenons pas à baisser le risque de base puisque les caractéristiques physiques d'un ouragan et la taille de l'île font qu'il n'existe pas une différence significative dans la mesure du vent en les différents points. Ainsi l'exposition traduite à travers les poids dans la formule de l'indice paramétrique perd de son effet à cause de la distribution statistique des vitesses.

Cela signifie aussi que les 14 cellules semblent refléter le climat global et les richesses du pays. Il semble que 14 stations soient suffisantes pour évaluer les dégâts. Pour aller plus loin dans l'analyse, on pourrait se demander si un seul point de mesure suffirait pour construire un indice paramétrique stable.

Finalement, on ne peut améliorer le modèle utilisé par le CCRIF. En effet, les changements que l'on a apportés au découpage et à la pondération n'ont que trop peu d'impact sur le résultat final, c'est à dire la prime pure. Pour améliorer la modélisation du risque de catastrophe, il faut alors se tourner vers un autre type de fonction de paiements. Nous avons introduit la fonction proposée par K.Emanuel à la section 3.5.2. Nous avons prouvé que cela a apporté des changements. Malheureusement nous n'avons pas pu vérifier la véracité de cette fonction, car nous ne pouvons nous procurer une base de donnée sur l'exposition locale.

Maintenant que l'on a vu comment le CCRIF tarifie ses produits aux pays membres, et comment on pouvait améliorer le modèle de tarification, nous allons regarder comment l'organisation se charge de transférer les risques sur les marchés, particulièrement celui de la réassurance. En effet, comme nous l'avons stipulé plus en avant, le CCRIF possède la structure d'un *Special Purpose Vehicle (SPV)* dont le but est de titriser les risques catastrophes des pays du CARICOM. Nous abordons donc le troisième module : le module Finance.

Chapitre 9

Réassurance

9.1 Le marché de la réassurance

9.1.1 Histoire

Historiquement, le concept de réassurance a vu le jour en 1370 à Gênes via le transport maritime. On peut remarquer qu'il est apparu fort longtemps après l'assurance classique déjà développée pour les échanges en mer depuis l'antiquité.

La réassurance moderne et à grande échelle est apparue en Allemagne vers la fin du 19^{ème} siècle. Elle a été essentiellement développée dans la région du Rhin. Elle a connu un essor très important au 19^{ème} siècle grâce au contexte économique de l'époque. L'accumulation des risques liés à l'industrialisation de la société fut alors à l'origine d'une explosion quasi exponentielle des besoins de réassurance des sociétés d'assurance. Cette tendance s'est confirmée au cours du 20^{ème} siècle. De nos jours l'agence de notation Standard and Poor's a d'ailleurs dénombré près de 200 réassureurs professionnels.

9.1.2 Définition

Dans les articles du code de commerce allemand, la réassurance est l'assurance des sociétés d'assurance. C'est à dire d'après M.Grossman dans "Une introduction à la réassurance" :

Définition 9.1.1. *"Le fait, pour un assureur direct, de répercuter une partie des périls ou des risques qu'il assume pour le preneur d'assurance au titre de contrats d'assurance ou de dispositions juridiques, sur un deuxième assureur qui n'est pas directement en contact avec le preneur d'assurance, c'est à dire le réassureur."*

Remarque 9.1.2. *On appelle "cédante" l'assurance qui transfère son risque.*

La réassurance permet ainsi à l'assureur d'encadrer et de limiter les fluctuations des sinistres qui lui incombent et d'être couvert en cas de catastrophes de forte amplitude (sinistres très élevés). Elle permet en effet aux cédantes de faire face aux pics de sinistralité exceptionnels du type tempête Lothar de 1999 ou attentats du World Trade Center. La réassurance peut donc aider à empêcher la faillite d'un assureur qui n'a pas les fonds disponibles en cas de très grandes catastrophes car les assureurs peuvent se décharger de la partie des risques qui excède leur capacité de remboursement.

Ainsi le réassureur réduit la probabilité de ruine de l'assureur direct en prenant en charge les risques catastrophiques, ce qui permet notamment à l'assureur de libérer des fonds propres affectés à la couverture des risques. En se réassurant, la cédante dispose d'une plus grande capacité et d'une sûreté financière, elle peut donc souscrire plus d'affaires qu'elle ne l'aurait pu si elle n'avait pas de réassureurs et ne disposait que de ses fonds propres. La réassurance permet ainsi de lisser les bilans et résultats financiers des cédantes d'une année sur l'autre en intervenant les années où il existe de nombreux sinistres chez la cédante. Ainsi la cédante a une plus grande stabilité financière sur moyen et long terme. Le réassureur est bien sûr rémunéré

pour cette prise en charge.

Enfin, témoin de l'utilité réelle de cette activité, on observe une pression des autorités réglementaires, des agences de notation ou même des actionnaires qui poussent les sociétés d'assurance à se réassurer dans certaines branches.

On peut noter que les autorités ont intérêt à pousser les assureurs à passer par des réassureurs plutôt que de constituer des réserves toujours plus grandes, ces dernières étant exonérées d'impôts.

De plus ce mécanisme aide à la titrisation des grands risques, en effet sur un même contrat de réassurance, il y a en général une seule cédante détentrice du risque original qu'elle transfère mais plusieurs contreparties : les réassureurs se partagent la prise en charge du risque en question. Celui qui prend en charge la plus grande partie du risque est appelé le réassureur apêteur.

En plus de cet effet de transfert et de titrisation du risque, les réassureurs ont souvent des portefeuilles internationaux géographiquement variés et sont présents dans des branches distinctes et non corrélées entre elles (VIE, NON VIE, catastrophes naturelles...). Ils sont donc plus à même de supporter certains risques grâce à cet effet de diversification.

9.1.3 Les acteurs du marché de la réassurance

Traditionnellement, on répartit les réassureurs en trois groupes en fonction de leurs activités ou de leurs localisations :

- Le Big four : constitué des quatre plus grands réassureurs au monde : Swiss Re, Munich Re, Hannover Re et Berkshire Hathaway. On peut ranger dans cette catégorie les autres réassureurs continentaux comme Scor par exemple, réassureur français.
- Les "syndicats" avec notamment la Lloyd's qui à l'origine n'est pas une entreprise mais un syndicat. La Lloyd's de Londres n'est pas une compagnie d'assurance mais un marché d'assurance constitué de plusieurs « syndicats » qui sont eux des assureurs à part entière.
- Les "bermudiens", de petits réassureurs spécialisés basés dans les Bermudes pour raisons fiscales. Par exemple, XL Re, Axis...

Le marché des "bermudiens" nous intéresse particulièrement car il est très actif dans le domaine des catastrophes naturelles.

En août 1992, l'ouragan Andrew a frappé de manière violente la Floride. Cela a créé un besoin urgent de capacité de protection de réassurance contre les phénomènes naturels aux États-Unis. Ainsi, plusieurs réassureurs sont apparus aux Bermudes. Le marché bermudien a en fait été un marché principalement à vocation industrielle et à but fiscal. Cela a été une source de réassurance pour pallier la crise de la responsabilité civile aux États-Unis dans les années 1980. Dès 1993, ce marché a alors servi à pourvoir les cédantes américaines en capacités de réassurance dommages catastrophes, puis ces réassureurs ont recherché un meilleur équilibre de leurs expositions mondiales en se développant principalement au Japon puis en Asie, et enfin en Europe. Ils ont cherché à se diversifier géographiquement pour mieux gérer leur risque. Leurs résultats sont cependant assez volatiles car liés aux occurrences de catastrophes naturelles.

9.2 La réassurance du CCRIF

Nous avons vu que le dispositif d'assurance prend la forme d'une captive d'assurances permettant aux états membres de la CARICOM d'augmenter leur résilience en cas d'occurrence d'un sinistre naturel majeur. Cette captive permet une couverture en réassurance moins onéreuse, grâce à la mutualisation des risques qu'elle induit et à sa capacité de rétention.

Pour assurer sa stabilité financière, le CCRIF a recours à la réassurance afin de transférer une partie du risque qu'il assume. Il a ainsi collaboré avec les réassureurs du marché international comme Swiss Re, Munich Re, Partner Re, Hannover Re.

Nous avons vu que pour la Jamaïque, la somme maximale assurée est le *Coverage Limit* = \$57M. Pour l'ensemble des 16 pays assurés cette somme atteint en réalité \$620M. Le CCRIF va réduire son exposition en transférant des tranches de dommages aux réassureurs.

9.3 Détermination des prix des tranches de réassurance avec notre modèle

Nous ne disposons que de données concernant la Jamaïque. Nous allons donc nous concentrer sur la Jamaïque pour réaliser un modèle de réassurance basé sur nos résultats. Naturellement l'idéal aurait été de réaliser ce même modèle sur une loi et des résultats basés sur les données de tous les pays concernés par le CCRIF. Pour cela il nous aurait fallu les données statistiques de tous les pays du bassin caribéen. Nous supposons donc que pour le CCRIF, qui dispose de ces données pour constituer la loi hypothétique "Caraïbes" (loi déterminée sur les sinistres potentiels des 16 pays des caraïbes et prenant en compte la corrélation entre les occurrences de sinistres dans les différents pays) l'application de notre modèle peut permettre une stratégie de réassurance tranche par tranche.

Dans le schéma classique vu plus haut, la première tranche fait office de franchise. Les dommages inférieurs au niveau correspondant à l'*Attachment* ne sont pas pris en compte par le CCRIF : ils restent à la charge du pays. Cela permet d'éviter de faire de trop nombreuses déclarations de sinistres et de limiter les frais de gestion. Cependant l'effet sur l'aléa moral n'est ici pas mis à profit puisque nous utilisons une assurance paramétrique. Néanmoins c'est aussi un moyen de diminution du tarif indépendamment de la fréquence qui peut permettre aux pays en voie de développement de s'offrir ce genre de contrats.

Remarque 9.3.1. *Il peut y avoir un abus de langage lorsque'on parle des seuils Attachment et Exhaustion. En effet ceux-ci désignent les seuils de l'indice paramétrique \mathcal{I} , mais ils peuvent aussi s'apparenter comme les niveaux de paiements limites du contrat. Pour éviter toute incompréhension, nous noterons les niveaux de paiements Attachment* et Exhaustion*.*

Le CCRIF va ensuite choisir un nouveau seuil : le montant maximal qu'elle souhaite assurer. Elle ne garde à sa charge que les sinistres compris entre le niveau *Attachment** et ce seuil que nous appelons *Exhaustion**₁. On définit alors d'autres seuils supérieurs à ce dernier : *Exhaustion**_{i=2,3} par exemple avec *Exhaustion**₃ = *Coverage Limit* total, c'est à dire la somme maximale assurée.

En résumé :

- La tranche 0 : $[0, Attachment^*]$ est à la charge de l'assuré
- La tranche 1 : $[Attachment^*, Exhaustion_1^*]$ est à la charge de l'assureur, le CCRIF
- La tranche 2 : $[Exhaustion_1^*, Exhaustion_2^*]$ est à la charge d'un premier réassureur.
- La tranche 3 : $[Exhaustion_2^*, Exhaustion_3^*]$ est à la charge d'un second réassureur.

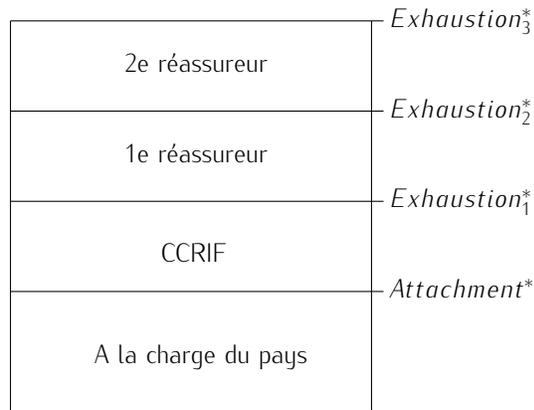


FIGURE 9.1 – Tranches de réassurance

Les réassureurs doivent être rémunérés pour cette prise en charge. Nous avons jusqu'ici calculé les primes pures payées par l'assuré à l'assureur en fonction des niveaux d'*Exhaustion* à niveau d'*Attachment* fixé. Nous allons regarder maintenant la prime que doit verser l'assureur au réassureur pour lui céder une tranche de niveau de risques.

Pour déterminer les seuils en question nous utilisons notre loi de l'indice paramétrique. L'utilisation des quantiles nous fournit un moyen de quantifier ces seuils. Nous avons déjà :

- $Attachment = 95\ 943$
- $Exhaustion_3 = Exhaustion = 3\ 632\ 980$

Nous prenons de plus par exemple deux quantiles compris entre ces deux extrêmes :

1. $Exhaustion_1 =$ quantile à 96.5 % de l'indice $\mathcal{I} \Rightarrow Exhaustion_1^* = \$1\ 361\ 349$
2. $Exhaustion_2 =$ quantile à 98 % de l'indice $\mathcal{I} \Rightarrow Exhaustion_2^* = \$2\ 484\ 336$

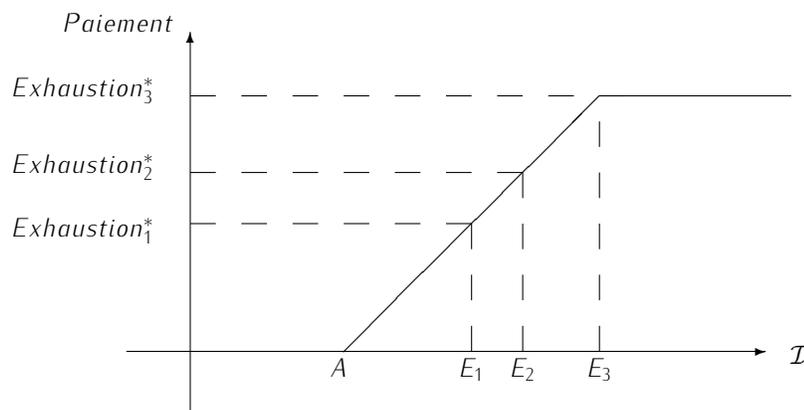


FIGURE 9.2 – Fonction de Paiement : Plusieurs tranches

Les bornes des tranches sont obtenues grâce au graphique précédent.

- $Attachment^* = 0$
- $Exhaustion_1^* = \$20\,628\,013$
- $Exhaustion_2^* = \$38\,934\,394$
- $Exhaustion_3^* = \$57\,659\,008$

On détermine alors le nominal (CL_i $i = 1, 2, 3$) associé à chaque tranche en faisant la différence des bornes des tranches :

- $CL_1 = Exhaustion_1^* - Attachment = 20\,628\,013$
- $CL_2 = Exhaustion_2^* - Exhaustion_1^* = 18\,306\,381$
- $CL_3 = Exhaustion_3^* - Exhaustion_2^* = 18\,724\,614$

Naturellement, on observe $Coverage\ Limit = CL_1 + CL_2 + CL_3$

Nous allons conserver notre modèle utilisé pour le calcul de la prime pure et calculer les primes avec :

1. $Attachment = Exhaustion_i$,
2. $Exhaustion = Exhaustion_{i+1}$
3. et le $Coverage\ Limit$ correspondant.

La prime pure associée à chaque tranche est alors :

- $PP_1 = \$1\,243\,201$
- $PP_2 = \$480\,429$
- $PP_3 = \$338\,069$

On retrouve bien logiquement là aussi : $\sum_{i=1}^3 PP_i = PP$, où les PP_i sont les primes pures associées à chaque tranche et PP la prime pure payée par l'assuré.

Si les tranches sont à peu près de même amplitude, on trouve des différences significatives dans les prix. Plus la tranche est une tranche "haute", proche du seuil maximal de 57 M USD, moins elle coûte cher. Cela peut paraître paradoxal puisqu'elle correspond aux sinistres les plus élevés, néanmoins ces sinistres sont aussi beaucoup moins fréquents. Les tranches inférieures sont en fait plus risquées en terme d'occurrence de l'événement et le réassureur demandera plus d'argent contre la prise en charge de ce risque.

En supposant que le CCRIF ne garde à sa charge que la première tranche, il encaisse la prime pure de \$2 061 699 de l'assuré et dépense $480\,429 + 338\,069 = \$818\,498$ pour payer les réassureurs. Cette somme peut d'ailleurs être facturée aux assurés en appliquant un chargement à la prime pure.

9.4 Le marché ILS (Insurance Linked Securities)

Dans le contexte d'interdépendance des marchés financiers, les risques d'assurance représentent pour les investisseurs une source intéressante de diversification. En effet, les risques liés aux assurances ont la particularité de correspondre en général à des événements indépendants des risques de marché. La probabilité de survenance d'un ouragan en est un exemple significatif.

La titrisation des risques d'assurance est un marché très jeune, vieux de quelques années seulement et actuellement en pleine croissance. Cela consiste à reconditionner des risques d'assurance sous forme de titres négociables de type obligataire. En raison de la nature spécifique de ces risques, ces titres permettent de

diversifier un portefeuille d'investissements et d'en améliorer le rapport performance/risque. Cela fournit donc un outil moderne et complémentaire à l'assurance qui devrait permettre d'apporter plus d'efficacité au niveau mondial, notamment dans le domaine des risques de catastrophes naturelles.

C'est justement pour ces raisons, que le CCRIF réfléchit à émettre un Cat Bond pour couvrir ses risques d'ouragans. Cela lui permettra de diversifier ses moyens de couverture, car pour le moment cet organisme ne fait que passer par la réassurance. Regardons un peu l'intérêt d'un tel produit et la façon de le tarifer.

9.5 Le marché des Cat bonds

9.5.1 Agence de notations

Dans le cas des Cat bonds, les pertes à rembourser par le réassureur peuvent être très élevées et il faut s'assurer que celui-ci est bel et bien capable de rembourser. Ainsi les Cat Bonds sont notés par les agences de notation comme Standard and Poor's ou Moody's afin de déterminer la probabilité de défaut de celui qui achète le Cat Bond. Elles peuvent aussi évaluer les modèles catastrophes développés et le risque de base induit.

9.5.2 Intérêt des Cat Bonds

Le marché des Cats Bonds est incomplet et illiquide à cause de la rareté des investisseurs. Cependant l'intérêt pour ce marché a augmenté depuis la dernière crise des "subprimes" qui a révélé qu'il était indépendant du marché des actions.

En effet ces produits présentent de nombreux avantages :

- un rendement élevé.
- un effet de diversification car non corrélés avec les risques traditionnels des marchés financiers.
- une couverture naturelle dans les secteurs influencés favorablement par la catastrophe naturelle.

9.5.3 Modèle de Markowitz et déplacement de la frontière efficiente

On peut mettre en évidence ces avantages comme le rendement élevé et la décorrélacion avec les marchés actions en exposant la théorie de gestion de portefeuille pour établir la frontière efficiente.

Soit un portefeuille de composition $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, \underline{a})$:

1. un actif sans risque a_0 , avec :
 - r_t le taux entre t et $t+1$
2. n actifs risqués a_1, \dots, a_n de rendements gaussiens. On note :
 - $p_{i,t}$ la valeur en t de l'actif risqué i
 - $y_{i,t+1} = p_{i,t+1}/p_{i,t}$ le rendement brut supposé gaussien $N(\mu_t, \Omega_t)$

On note V_t la valeur du portefeuille de composition a en t

$$V_t = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \times p_{i,t})$$

La valeur du portefeuille de composition a en $t + 1$ est alors :

$$V_{t+1} = a_0 \times (1 + r_t) + \sum_{i=1}^n (a_i \times p_{i,t} \times y_{i,t+1})$$

En utilisant la notation suivante : $\omega_a = \text{diag}(p_t) \times \underline{a} = (a_1 \times p_{1,t}, \dots, a_n \times p_{n,t})'$

On peut écrire :

$$V_{t+1} = a_0 \times (1 + r_t) + \omega'_a \times y_{t+1}$$

avec $y_{t+1} = (y_{1,t+1}, \dots, y_{n,t+1})$ le vecteur des rendements bruts.

En prenant l'espérance et la variance, on obtient :

$$\mathbb{E}(V_{t+1}) = a_0 \times (1 + r_t) + \omega'_a \times \mu_t$$

$$\mathbb{V}(V_{t+1}) = \omega'_a \times \Omega_t \times \omega_a$$

On écrit alors le programme de maximisation de l'espérance sous la contrainte Variance = σ_t^2 et avec une richesse initiale $V_0 = v$.

$$\text{Max}(a_0 \times (1 + r_t) + \omega'_a \times \mu_t)$$

$$\text{s.c.} : \omega'_a \times \Omega_t \times \omega_a = \sigma_t^2$$

La richesse initiale est fixée à v , ce qui s'écrit $v = \sum_{i=0}^n a_i \Leftrightarrow a_0 = v - \sum_{i=1}^n a_i$.

Ans, le programme de maximisation devient :

$$\text{Max}(\omega'_a \times \mu_t)$$

$$\text{s.c.} : \omega'_a \times \Omega_t \times \omega_a = \sigma_t^2$$

On peut alors écrire le Lagrangien correspondant et résoudre ce programme :

$$L(\omega_a, \lambda) = \omega'_a \times \mu_t - (\lambda/2) \times (\omega'_a \times \Omega_t \times \omega_a - \sigma_t^2)$$

où λ est le paramètre d'aversion au risque

La solution est obtenue pour :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\mu'_t \Omega_t^{-1} \mu_t}}{\sigma_t}$$

$$\omega_a = \frac{\Omega_t^{-1} \mu_t}{\lambda}$$

Ce qui donne au final :

$$\mathbb{E}(V_{t+1}(\lambda)) = a_0 \times (1 + r_t) + (1/\lambda) \times (\mu'_t \Omega_t^{-1} \mu_t)$$

$$\mathbb{V}(V_{t+1}(\lambda)) = (1/\lambda^2) \times (\mu'_t \Omega_t^{-1} \mu_t)$$

Graphiquement :

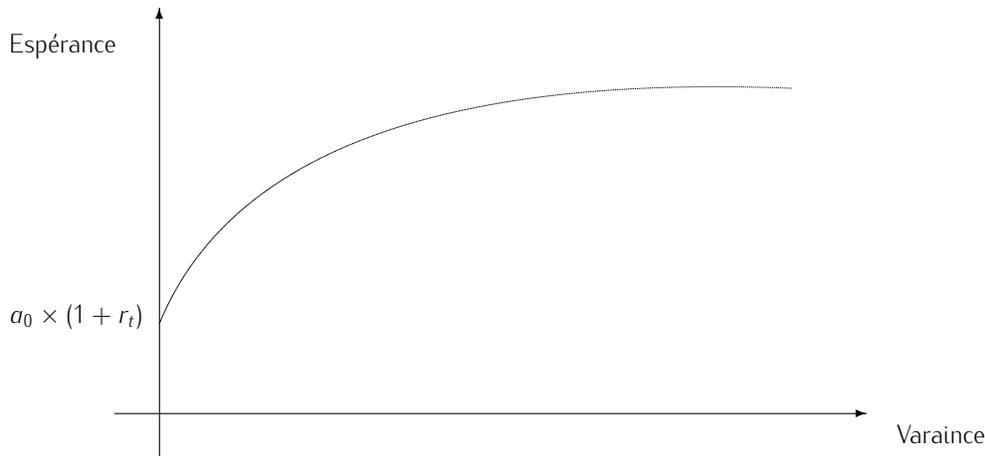


FIGURE 9.3 – Frontière efficiente

Chaque point de la courbe correspond à une valeur du coefficient d'aversion au risque λ . Chacun de ces points est un portefeuille efficient. La frontière efficiente représente en fait les portefeuilles vérifiant le critère Moyenne-Variance.

Pour les investisseurs gérant des portefeuilles, le plus intéressant est naturellement d'augmenter l'espérance de rendements tout en contrôlant la prise de risque. L'introduction d'un actif de type Cat bond peut dans ce cas se révéler utile.

Considérons maintenant le cas où l'on introduit un Cat Bond dans le portefeuille. Nous avons donc :

- un actif sans risque a_0
- n actifs risqués de rendements gaussiens $a = (a_1, \dots, a_n)$
- le Cat bond, c'est à dire un actif complémentaire C de rendement aléatoire : risque élevé, rendement moyen élevé, non corrélé avec les autres actifs. Ce dernier a un rendement non gaussien (grande probabilité de pertes nulles et faible probabilité de très grandes pertes).

On a donc le portefeuille initial que l'on note P et le Cat Bond C . La composition du nouveau portefeuille peut s'écrire :

$$P_{cat} = \alpha C + (1 - \alpha)P$$

avec α la proportion du nouveau portefeuille investie dans le Cat Bond.

En notant ρ la corrélation du Cat Bond avec le reste du portefeuille, $\mathbb{V}(C) = \sigma_{cat}^2$ et $\mathbb{V}(P) = \sigma^2$, l'espérance et la variance du portefeuille comportant le Cat Bond deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P_{cat}) &= \alpha * \mathbb{E}(C) + (1 - \alpha)\mathbb{E}(P) \\ \mathbb{V}(P_{cat}) &= \alpha^2 \sigma_{cat}^2 + 2\rho\alpha(1 - \alpha)\sigma_{cat}\sigma + (1 - \alpha)^2 \sigma^2 = \sigma_{P_{cat}}^2 \end{aligned}$$

L'écart type du portefeuille contenant le Cat Bond peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{cat}} &= \sqrt{\mathbb{V}(P_{cat})} \\ &= (1 - \alpha)\sigma + O(\alpha^2) + O(\rho\alpha) \end{aligned}$$

Or nous savons que ρ est très faible puisque l'actif Cat Bond incorporé au portefeuille est décorrélé du marché et des actifs initiaux. De plus, cet actif étant peu sensible aux mouvements de marché, on peut

considérer que son écart type σ_{cat} est faible également. Pour terminer, la proportion investie dans cet actif α est également faible, il s'agit juste d'un actif rajouté au portefeuille pour un effet de diversification mais pas d'un placement majeur.

Avec ces hypothèses, on peut considérer que les termes additionnels $O(\alpha^2) + O(\rho\alpha)$ sont négligeables et ainsi :

$$\sigma_{P_{Cat}} = (1 - \alpha)\sigma < \sigma = \text{Ecart Type de P}$$

De plus comme les rendements du Cat Bond sont des rendements très élevés supérieurs au rendement du marché :

$$\mathbb{E}(C) > \mathbb{E}(P) \Rightarrow \mathbb{E}(P_{Cat}) = \alpha\mathbb{E}(C) + (1 - \alpha)\mathbb{E}(P) > \mathbb{E}(P)$$

On a donc une meilleure espérance pour une variance plus faible, on améliore le critère moyenne-variance. L'introduction du Cat bond entraîne un déplacement vers le haut et vers la gauche de la frontière d'efficience.

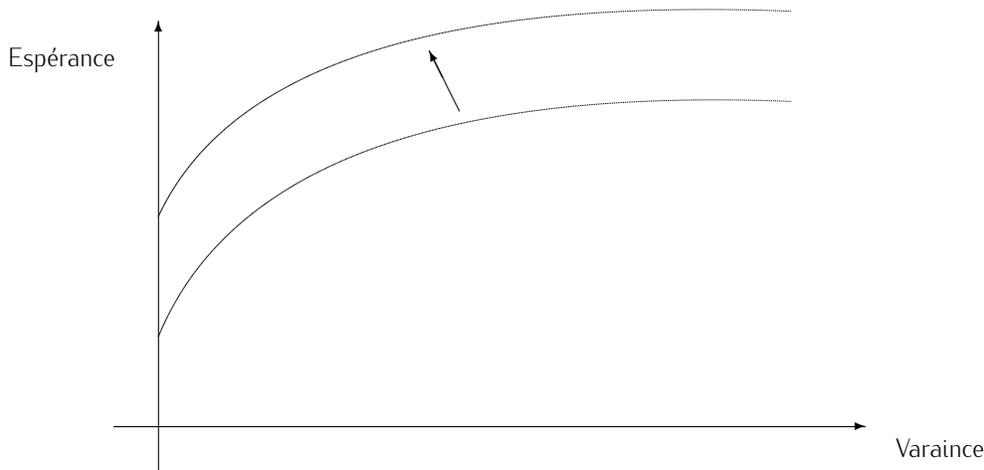


FIGURE 9.4 – Déplacement de la frontière efficiente

Ce décalage nord-ouest correspond bel et bien en effet à une augmentation de l'espérance des rendements pour un même niveau de risque. Ou inversement à espérance fixée, le niveau de risques encourus est plus faible. D'où l'intérêt d'ajouter ce type d'actif à son portefeuille.

9.5.4 Analyse des prix de marché des Cat Bonds

Lorsqu'une compagnie d'assurance ou de réassurance décide d'émettre un Cat-bond pour se couvrir, elle fait alors appel à une ou plusieurs banque/compagnie de réassurance/courtier dits structureurs pour trouver des investisseurs dans le Cat-bond.

Le structureur va démarcher les investisseurs en Cat-Bonds en leur décrivant le Cat-bond qui couvre tel ou tel péril (Tremblement de terre, Ouragan, etc), et en leur donnant les caractéristiques clés comme l'*Expected loss* par exemple. Pour établir ces pertes moyennes, les réassureurs passent généralement par des entreprises spécialisées et reconnues comme RMS, AIR, EQECAT qui modélisent les probabilités de catastrophes naturelles. Cette modélisation ressemble à celle que l'on a utilisé dans cette étude pour calculer la prime pure de la Jamaïque.

Dans les faits, l'investisseur fournit du capital pour le Cat Bond, ce capital est alors disponible pour couvrir toutes pertes liées à la catastrophe naturelle clairement définie dans le contrat. En échange de cet investissement, l'investisseur touche un intéressement pendant la durée du contrat. Si pendant la durée du contrat l'événement catastrophique s'est produit, il ne récupère qu'une partie (potentiellement rien du tout) de son investissement, sinon il récupère l'intégralité de son nominal à échéance.

L'intéressement perçu prend la forme d'un coupon que l'on peut séparer en deux parties. Puisqu'il fournit de l'argent sur une durée, l'investisseur récupère un taux qui rémunère la valeur temps de cet argent. Ce taux est généralement indexé sur le LIBOR. Il perçoit de plus un coupon additionnel en contrepartie du risque qu'il assume. Ce coupon supplémentaire s'exprime en pourcentage du nominal, on le nomme "spread" ou "premium spread". Ce spread est apporté par le "sponsor" ou la "cédante" comme on l'a appelé.

En résumé :

$$\text{Coupon final} = \text{Libor} + \text{Spread}$$

La partie LIBOR ne concerne que la détention du capital, nous allons donc nous intéresser au "spread" qui correspond au prix du transfert de risque que constitue l'émission du Cat Bond.

En pratique c'est le structureur qui va donner une fourchette de prix indiquant le "spread" qu'il est prêt à payer pour ce contrat : 8.5 – 10% par exemple. Ensuite l'investisseur va indiquer quelle taille il est prêt à acheter pour les différents spread de la fourchette.

Spread	8.50%	8.70%	9%	9.50%	10%
Montants (en euro)	0	5 000 000	20 000 000	30 000 000	40 000 000

Le structureur fait ensuite la synthèse des demandes de chaque investisseur. Une fois que tous les investisseurs ont fait leur demande, le structureur les « sert » à un spread déterminé.

9.6 Tarification des Cat Bonds

9.6.1 A partir des données de marché historique

Les Cat bonds sont un nouvel exemple de produits dérivés où les sous-jacents ne sont pas des actifs ou des commodités avec des prix observables. Il est donc difficile de proposer une modélisation standard des prix des Cat Bonds sur le marché. Le spread est fixé par l'offre et la demande au moment de l'émission du Cat-Bond.

En considérant que la prime versée (le *spread*) dépend essentiellement de l'espérance des pertes (*Expected Loss*), on peut essayer de retrouver une expression pour approcher cette prime grâce aux données historiques des prix des Cat Bonds.

On peut notamment utiliser un modèle linéaire :

$$\text{Premium Spread} = a + b \times \text{Expected Loss}$$

où a et b sont des constantes déterminées par la régression des données historiques.

En pratique on observe une courbe qui a la forme suivante :

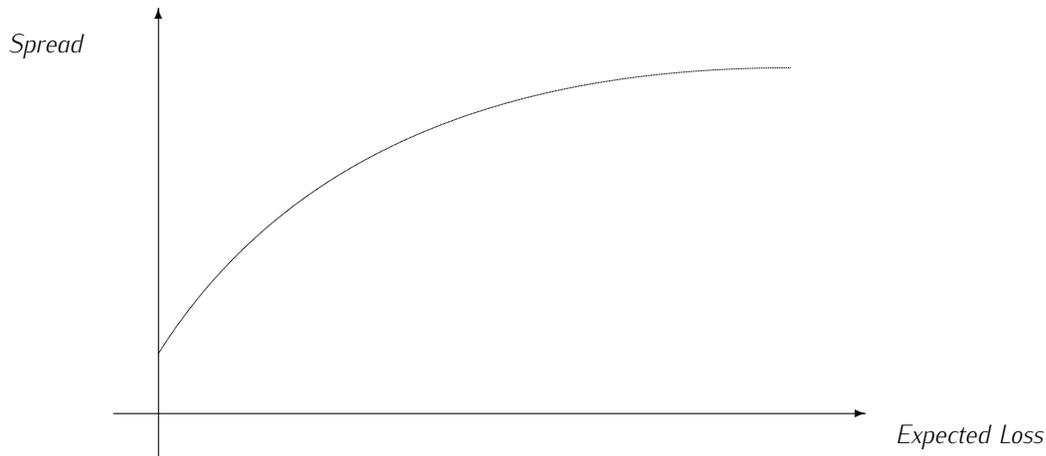


FIGURE 9.5 – *Expected Loss - Spread*

Les structureurs se servent de cette modélisation pour proposer un prix "spread" en fonction de l' "expected loss" du modèle.

9.6.2 Modélisation

Dans la mesure où les flux futurs engendrés par le Cat Bond sont aléatoires, il faut trouver un moyen de les modéliser. Dans le cas de modèle paramétrique, on sait que ces paiements sont fonction de l'indice sous-jacent. On peut alors essayer de modéliser la dynamique du sous-jacent pour tarifier le Cat Bond.

Les catastrophes naturelles sont souvent modélisées par l'introduction d'un processus à sauts dans le processus sous-jacent, qu'il s'agisse d'un indice paramétrique ou de pertes. Les marchés financiers sont incomplets dans cette situation. Il n'est donc pas possible de mettre en oeuvre une stratégie de réplique de portefeuille pour évaluer un instrument financier, et la mesure martingale équivalente n'est pas unique.

De plus le sous-jacent, l'indice n'est pas un bien négociable sur les marchés.

On suppose pour simplifier que les investisseurs sont neutres par rapport au risque de catastrophes naturelles.

On peut comme pour tout actif financier considéré que le prix est égal à la somme des flux futurs actualisés. Si on suppose qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, il existe une probabilité risque neutre telle que :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} = \sum_{t=1}^T \frac{c(t)}{[1 + r_0] \times [1 + r_1] \times \dots \times [1 + r_{t-1}]}$$

en notant $c(t)$ le montant versé en t et r_t le processus stochastique du taux d'intérêt sur la période $[t - 1, t]$. Avec $c(t)$ fonction de l'indice qui suit un processus à saut.

En utilisant les notations suivantes :

N le nominal investi dans le Cat Bond.

$\alpha \in [0, 1]$ la fraction du nominal remboursé si survenance de la catastrophe

τ le temps d'arrêt correspondant à la survenance d'une catastrophe : $\tau = t$ si la catastrophe survient entre $t - 1$ et t .

- Si $\tau = t$ on rembourse le coupon et une fraction du nominal seulement.
- Si le sinistre ne survient pas en t , alors :
 - si $\tau > T$, on rembourse le nominal et le coupon.
 - si $\tau = T$, on rembourse le coupon et une fraction du nominal seulement.

En notant :

$$P_t = \sum_{t=1}^T \frac{1}{[1 + r_0] \times [1 + r_1] \times \dots \times [1 + r_{t-1}]}$$

On peut écrire pour simplifier :

$$c(t) = \begin{cases} c\mathbb{1}_{\tau>t} + (\alpha N + c)\mathbb{1}_{\tau=t} & \text{si } t = 1, 2, \dots, T - 1 \\ (c + N)\mathbb{1}_{\tau>t} + (\alpha N + c)\mathbb{1}_{\tau=t} & \text{si } t = T \end{cases}$$

On peut alors écrire le prix du Cat Bond :

$$p = c \sum_{t=1}^T \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau > t)P_t + (N + c)\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau > T)P_T + (\alpha N + c) \sum_{t=1}^T \mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau = t)P_t$$

$\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau > t)$ est la probabilité risque neutre qu'aucune catastrophe ne survienne avant le temps t et $\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau = t)$ est la probabilité risque neutre qu'une catastrophe survienne en t . La principale difficulté consiste donc à connaître cette probabilité de déclenchement.

Déterminer de manière numérique l'instant où le Cat Bond est déclenché constitue un problème analogue à celui de l'évaluation des options barrières à temps continu. Il s'agit de détecter l'instant où l'indice de catastrophe atteint un niveau prédéterminé, en l'occurrence le seuil de déclenchement du Cat Bond.

Des recherches ont été réalisées sur ce sujet mais nous ne nous sommes pas concentrés sur ce point. En effet ces modèles sont compliqués et difficiles à mettre en place d'un point de vue opérationnel. Il est difficile d'obtenir des formules fermées de prix des obligations catastrophes. En pratique les investisseurs se réfèrent au prix de marché et à la courbe précédente, régulièrement mise à jour.

9.7 Une aide à la micro assurance

La titrisation via ces obligations catastrophes peut permettre aux assureurs d'élargir leur champ d'action et de se lancer dans les produits d'assurance contre les catastrophes naturelles dans les pays en voie de développement. Cette industrie peut donc être potentiellement un facteur de lutte contre la pauvreté en offrant à des pays démunis une couverture contre ces risques majeurs.

Par exemple, dans les pays en voie de développement, la principale source de revenu des habitants est l'agriculture. Cependant, les incertitudes liées au changement climatique et aux catastrophes naturelles récurrentes fragilisent les petits exploitants. Elles peuvent entraîner la perte totale des récoltes mais surtout créent un contexte risqué qui rend l'accès au crédit difficile. Ce qui constitue un frein au développement de projets à cause du manque de garanties. Le risque d'ouragans par exemple représente donc bien une entrave au développement.

Chapitre 10

Conclusion

Notre mémoire propose une police d'assurance paramétrique basée sur un modèle catastrophe. Nous sommes pour cela partis du système d'assurance du CCRIF que nous avons cherché à améliorer au niveau de la tarification et de la réduction du risque de base. Ne disposant que de données relatives à la Jamaïque nous nous sommes concentrés sur un système d'assurance pour ce pays. Cette étude est cependant transposable à d'autres pays à condition de pouvoir travailler sur le même type de données. Pour le CCRIF, une étude des corrélations entre les différents pays serait de plus indispensable afin de calculer les primes de chaque pays souscrivant un contrat. Pour mener à bien ce projet nous avons dû premièrement réaliser notre propre modèle catastrophe capable de calculer la fréquence des ouragans et le capital à risque. Nous avons ensuite utilisé différentes fonctions dommage pour obtenir la distribution des pertes et en déduire la prime pure associée au contrat d'assurance.

Afin de réduire le risque de base, nous nous sommes appuyés sur des données originales, des données simulées pour balayer un éventail complet d'ouragans potentiels et la luminosité nocturne pour estimer la richesse locale. Ces données furent nécessaires à la réalisation de statistiques significatives mais n'ont néanmoins que faiblement participé à la diminution du risque de base.

Nous avons cependant vérifié avec le modèle de K.Emanuel que nous trouvions une prime pure proche de celle associée au modèle du CCRIF. Ces résultats sont de plus proches de ceux observés dans le contrat réel qui relie la Jamaïque au CCRIF.

Pour améliorer le modèle existant nous avons eu recours à des outils théoriques basés sur la Théorie des Valeurs Extrêmes afin de mieux modéliser ces événements rares. Cela nous a de plus permis de proposer une gamme de prix en fonction du niveau de couverture souhaité par le pays.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux différents outils à la disposition des assureurs pour transférer ce genre de risques et pérenniser leurs activités. Nous avons à cet effet, à partir de notre modèle, déterminé des prix de tranches de réassurance. Ainsi nous avons pu aborder la problématique de la couverture de ces risques de catastrophes naturelles selon différents points de vue : assuré/assureur/réassureur.

Ces risques de catastrophes naturelles sont singuliers car ils sont indépendants du reste de l'activité économique, décorrélés de la sphère des marchés financiers. Ainsi ils peuvent attirer des investisseurs soucieux de diversifier leur portefeuille. Nous présentons dans ce mémoire quelques caractéristiques de marchés en lien avec les catastrophes naturelles et en expansion ces dernières années comme le marché des obligations catastrophes.

Annexe A

Découpage en 14 cellules

A.1 Zones *CRESTA* de la Jamaïque



A.2 Coefficients affectés aux 14 zones dans le contrat du CCRIF

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ω_i	0.026	0.067	0.028	0.064	0.043	0.031	0.053	0.056	0.071	0.091	0.185	0.113	0.136	0.035

A.3 Matrice de corrélations entre les 14 cellules

cellule	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1.00	0.97	0.93	0.89	0.81	0.78	0.96	0.93	0.91	0.89	0.87	0.84	0.84	0.79
2	0.97	1.00	0.96	0.93	0.86	0.83	0.94	0.91	0.93	0.91	0.90	0.88	0.88	0.82
3	0.93	0.96	1.00	0.97	0.92	0.89	0.89	0.88	0.92	0.92	0.93	0.92	0.91	0.87
4	0.89	0.93	0.97	1.00	0.95	0.93	0.86	0.85	0.92	0.92	0.96	0.95	0.94	0.90
5	0.81	0.86	0.92	0.95	1.00	0.96	0.76	0.75	0.84	0.84	0.92	0.94	0.92	0.90
6	0.78	0.83	0.89	0.93	0.96	1.00	0.75	0.74	0.82	0.83	0.91	0.94	0.93	0.94
7	0.96	0.94	0.89	0.86	0.76	0.75	1.00	0.96	0.94	0.91	0.86	0.83	0.84	0.78
8	0.93	0.91	0.88	0.85	0.75	0.74	0.96	1.00	0.95	0.94	0.88	0.84	0.86	0.79
9	0.91	0.93	0.92	0.92	0.84	0.82	0.94	0.95	1.00	0.97	0.94	0.90	0.91	0.86
10	0.89	0.91	0.92	0.92	0.84	0.83	0.91	0.94	0.97	1.00	0.96	0.92	0.93	0.87
11	0.87	0.90	0.93	0.96	0.92	0.91	0.86	0.88	0.94	0.96	1.00	0.97	0.98	0.92
12	0.84	0.88	0.92	0.95	0.94	0.94	0.83	0.84	0.90	0.92	0.97	1.00	0.99	0.95
13	0.84	0.88	0.91	0.94	0.92	0.93	0.84	0.86	0.91	0.93	0.98	0.99	1.00	0.95
14	0.79	0.82	0.87	0.90	0.90	0.94	0.78	0.79	0.86	0.87	0.92	0.95	0.95	1.00

Annexe B

Rappels de probabilités

B.1 Rappels sur la loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire dénombrable X , à valeurs dans \mathbb{N} , suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si et seulement si, pour tout entier naturel k ,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $\mathcal{P}(\lambda)$ cette loi, et on montre alors que son espérance et sa variance vérifient

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$$

B.2 Test de Wald pour comparer les moyennes de deux échantillons indépendants de variance inconnue

- Soit $(X_i^1)_{i=1 \dots n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance μ_1 et de variance σ_1^2 .
- Soit $(X_i^2)_{i=1 \dots n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance μ_2 et de variance σ_2^2 .
- Les suites X^1 et X^2 sont supposées indépendantes.

On pose $Y_i = X_i^1 - X_i^2$. Alors, $(Y_i)_{i=1 \dots n}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance commune $\mu = \mu_1 - \mu_2$ et de variance $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

D'après le Théorème Central Limit :

$$\sqrt{n} (\bar{Y}_n - \mu) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ainsi,

$$\sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n^1 - \bar{X}_n^2 - (\mu_1 - \mu_2))}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

On définit les variances empiriques par :

$$s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^1 - \bar{X}_n^1)^2 \xrightarrow{proba.} \sigma_1^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \bar{X}_n^2)^2 \xrightarrow{proba.} \sigma_2^2$$

D'après le Lemme de Slutsky :

$$\sqrt{n} \frac{(\overline{X}_n^1 - \overline{X}_n^2 - (\mu_1 - \mu_2))}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Si on veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ il suffit de prendre la statistique de test est

$$T = \sqrt{n} \frac{(\overline{X}_n^1 - \overline{X}_n^2)}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \xrightarrow[H_0]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

T converge sous H_0 . L'erreur de première espèce asymptotique devient donc pour un seuil α petit :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{H_0}(T > \text{seuil}) &= \alpha \\ \Leftrightarrow P_{H_0}(\mathcal{N}(0, 1) > \text{seuil}) &= \alpha \\ \Rightarrow \text{seuil} &= q_{1-\alpha}^{\mathcal{N}(0,1)} \end{aligned}$$

Ainsi le seuil est le quantile : $q_{1-\alpha}^{\mathcal{N}(0,1)}$ et on rejette H_0 au seuil α dès que $T > q_{1-\alpha}^{\mathcal{N}(0,1)}$.

B.2.1 Théorème Central Limit

Théorème B.2.1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, appartenant à $L^2(\Omega)$, d'espérance commune μ et de variance commune σ^2 , alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

B.2.2 Lemme de Slutsky

Lemme B.2.2. Soient (X_n) , (Y_n) deux des suites de variables aléatoires à valeur respectivement dans \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q .

Si (X_n) converge en loi vers X , et si (Y_n) converge en probabilité vers une constante c , alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers le couple (X, c) .

B.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

Nous exposons ici le principe général du test de Kolmogorov-Smirnov. Pour cela, voici une proposition intermédiaire :

Proposition B.3.1. (Kolmogorov-Smirnov)

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi F . Soit F_n la fonction de répartition empirique définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si F est continue, on a :

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{loi}} \mathbb{B},$$

avec \mathbb{B} la loi du maximum d'un pont Brownien. Cette loi est indépendante de F .

Objectif : Tester l'adéquation de notre loi à un loi F_0 .

$$H_0 : F = F_0 \text{ contre } H_1 : F \neq F_0$$

Si on cherche un test de niveau α (petit), alors la région de rejet asymptotique de niveau α est :

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \left\{ \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geq q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}} \right\}$$

avec $q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi \mathbb{B} défini par : $\mathbb{P}(\mathbb{B} > q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}}) = \alpha$

Annexe C

Codes R

C.1 Prime Pure - CCRIF

```
N=50000
Attachement=95943
Exhaustion=3632980
CovLim=57659009

TC_function=function(X){
  1.08212*t(pmax(X/3.6-22.5,0)^4)*%weight
}

loi_CCRIF <- function(N){
  Payment=matrix(nrow=N,ncol=1)

  for (i in 1:N){
    annee=sample(1980:2010,1)
    x=which(global[,16]==annee)
    lambda=global[x[1],17]
    k=rpois(1,lambda)
    if(k!=0){
      TC=apply(global[sample(x,k,replace=T),c(2:15)],1,TC_function)
      Payment[i,1]=pmax(pmin(sum(TC),Exhaustion)-Attachement,0)/
        (Exhaustion-Attachement)*CovLim
    }
    else{
      Payment[i,1]=0
    }
    i=i+1
  }
  return(Payment)
}

Paielement_CCRIF=loi_CCRIF(N)
Prime=mean(Paielement_CCRIF)
```

C.2 Prime pure - K.Emanuel

```

N=50000
CovLim=57659009

f_function=function(X){
v=pmax(1.96*X/3.6-80.5,0)/(105.5 - 80.5)
g=(v)^3/(1+(v)^3)
f=g%*%weight
return(f)
}

# En utilisant la fonction dommage de Emanuel:
#V_half = 105.5 noeudet V_treshold=80.5 noeud

loi_emanuel <- function(N){
Payment=matrix(nrow=N,ncol=1)
for (i in 1:N){
annee=sample(1980:2010,1)
x=which(global_no_NA[,16]==annee) #5=3+2 => 16=14+2
lambda=global_no_NA[x[1],17] ##6=3+3 => 17=14+3
k=rpois(1,lambda)
if(k!=0){
f=apply(global_no_NA[sample(x,k,replace=T),c(2:15)],1,f_function)
f[is.na(f)]=0
Payment[i,1]=(1-prod(1-f))*CovLim
}
else{
Payment[i,1]=0
}
i=i+1
}
return(Payment)
}

Paielement_emanuel=loi_emanuel(N)
Prime=mean(Paielement_emanuel)

```

C.3 Estimation GPD

```

library(evir) #estimation valeurs extremes
N=50000
TC_function=function(X){
  1.08212*t(pmax(X/3.6-22.5,0)^4)%*%weight
}
loi_index <- function(N){
  Payement=matrix(nrow=N,ncol=1)
  for (i in 1:N){
    annee=sample(1980:2010,1)
    x=which(global[,16]==annee)
    lambda=global[x[1],17]
    k=rpois(1,lambda)
    if(k!=0){
      TC=apply(global[sample(x,k,replace=T),c(2:15)],1,TC_function)
      Payement[i,1]=sum(TC)
    }
    else{
      Payement[i,1]=0
    }
    i=i+1
  }
  return(Payement)
}

TC=loi_index(N)

# estimation GPD de TC
Attachement=95943
Exhaustion=3632980
CovLim=57659009
x_m=Attachement

Fn=ecdf(TC)
P_attachement=Fn(Attachement)
P_exhaustion=Fn(Exhaustion)

loi_GPD<-gpd(TC,x_m, method = c("ml"))
loi_GPD

xi=1.148792
beta=373681.3

q=(1-P_exhaustion)/(1-P_attachement)
exhaustion=qgpd(1-q,xi=xi,mu=0,beta=beta)+x_m

x=rgpd(10000,xi=xi,mu=0,beta=beta)
y=x
y[y>exhaustion-x_m]=0
mean(y)
E_Z=(mean(y)*(1-P_attachement))/(exhaustion-x_m)
PP=(E_Z+(1-P_exhaustion))*CovLim
PP

```

C.4 Réassurance

```

N=50000
Attachement=95943
Exhaustion=3632980
CovLim=57659009

# Determination des Exhaustion Points et des Coverage Limits

TC=loi_index(N)
Fn=ecdf(TC)
P_Exhaustion=Fn(Exhaustion)
P_Attachement=Fn(Attachement)
E_1=quantile(TC,0.965)
E_2=quantile(TC,0.98)

CL1=CovLim*(E_1-Attachement)/(Exhaustion-Attachement)
CL2=CovLim*(E_2-E_1)/(Exhaustion-Attachement)
CL3=CovLim*(Exhaustion-E_2)/(Exhaustion-Attachement)

#Calcul de la prime pure dans chaque tranche
loi_tranche <- fonction(N,Attachement,Exhaustion,CovLim){
  Payement=matrix(nrow=N,ncol=1)

  for (i in 1:N){
    annee=sample(1980:2010,1)
    x=which(global[,16]==annee)
    lambda=global[x[1],17]
    k=rpois(1,lambda)
    if(k!=0){
      TC=apply(global[sample(x,k,replace=T),c(2:15)],1,TC_fonction)
      Payement[i,1]=pmax(pmin(sum(TC),Exhaustion)-Attachement,0)/
        (Exhaustion-Attachement)*CovLim
    }
    else{
      Payement[i,1]=0
    }
    i=i+1
  }
  return(Payement)
}

p1=loi_tranche(N,Attachement,E_1,CL1)
mean(p1)
p2=loi_tranche(N,E_1,E_2,CL2)
mean(p2)
p3=loi_tranche(N,E_2,Exhaustion,CL3)
mean(p3)

```

Table des figures

1	Estimation GPD	4
2	GPD Estimation	4
2.1	Echelle de Saffir-Simpson	8
2.2	Echelle de Fujita	9
2.3	Principaux désastres naturels dans les Caraïbes (1979-2005)	10
2.4	Structure du CCRIF	11
2.5	Liquidités post catastrophe	12
2.6	Risque de base et transparence pour l'investisseur	14
2.7	Fonction de dommage	15
2.8	Localisation des points de mesure et leur pondération	16
2.9	Fonction de dommage faisant apparaître les bornes du contrat	17
2.10	Fonction de Paiement	17
2.11	Hauteur de dédommagement du CCRIF	18
2.12	Paiement en fonction de la vitesse moyenne - CCRIF	19
2.13	Paiement en fonction de la vitesse moyenne - K.Emanuel	20
2.14	Emission d'un Cat Bond	21
3.1	Découpage CRESTA de la Jamaïque	25
3.2	Vol de nuit	28
3.3	Statistiques descriptives - Vitesses du vent dans un cellule	29
3.4	Jamaïque - Intensité lumineuse de nuit	30
3.5	Jamaïque - Un regard de nuit à travers nos données	31
3.6	Comparaison des poids	31
3.7	Boîtes à moustache de l'intensité lumineuse	32
4.1	Processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et son processus de sinistres de loi sous-jacente $\chi^2(1)$	35
5.1	Histogramme des fréquences de paiements - CCRIF	40
5.2	Histogramme des fréquences de paiements strictement positifs - CCRIF	40
5.3	Histogramme des fréquences de paiements - Emanuel	44
5.4	Histogramme des fréquences de paiements strictement positifs - Emanuel	44
5.5	Histogramme des fréquences de l'indice paramétrique faisant apparaître l' <i>Exhaustion Point</i>	46
5.6	Loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Loi Exponentielle $E(1)$ - Densité de probabilité et ω_α^2 en fonction de α	48
5.7	Nombre de simulations et taille de l'intervalle - le cas Gaussien	50
6.1	Densité de la distribution $GEV(\xi)$	53
6.2	Simulation des excès	54
6.3	Densité de la distribution $GPD(\xi, 1)$	55
7.1	Estimation de la loi GPD	59
7.2	Fonction de dommage : Hausse de l' <i>Exhaustion Point</i>	61
7.3	Fonction de Paiement : Hausse de l' <i>Exhaustion Point</i> et du <i>Coverage Limit</i>	61
7.4	Prime pure en fonction de la probabilité d'excéder l' <i>Exhaustion Point</i>	62

7.5	Fonction de Paiement : Hausse de l' <i>Exhaustion Point</i> à <i>Coverage Limit</i> fixé	63
7.6	Fonction moyenne des excés	64
8.1	Comparaison des poids	66
8.2	Comparaison des deux indices	67
8.3	Répartition géographique des stations	68
9.1	Tranches de réassurance	73
9.2	Fonction de Paiement : Plusieurs tranches	73
9.3	Frontière efficiente	77
9.4	Déplacement de la frontière efficiente	78
9.5	<i>Expected Loss – Spread</i>	80

Bibliographie

- [1] E. BOOSE, M. SERRANO, D. FOSTER (2004). "Landscape and Regional Impacts of Hurricanes in Puerto Rico", *Ecological Monograph*, 74(2) : 335-352.
- [2] E.R. BOOSE, K.E. CHAMBERLIN, D.R. FOSTER, "Landscape and Regional Impacts of Hurricanes in New England".
- [3] K. EMANUEL (2011). "Global Warming Effects on U.S. Hurricane Damage, Weather, Climate and Society, October, 2011.
- [4] K. EMANUEL, F. FONDRIEST, J. KOSSIN, "Potential Economic Value of Seasonal Hurricane Forecasts".
- [5] R. ELLIOT, E. STROBL, P. SUN, "The Impact of Typhoons on Economic Activity in China".
- [6] "Results of Preparation Work on the Design of a Caribbean Catastrophe Risk Insurance Facility", World-Bank
- [7] "CCRIF, a natural Catastrophe Risk Insurance Mechanism for the Caribbean", CCRIF
- [8] "Caribbean catastrophe risk insurance facility", CCRIF policy document.
- [9] "Understanding CCRIF's Hurricane and Earthquake Policies", CCRIF.
- [10] "Un exemple d'un projet visant à augmenter la résilience des pouvoirs publics en cas de catastrophes (CCRIF)", Groupe agence française de développement.
- [11] J. POLLNER, J. KRYSPIN-WATSON, S. NIEUWEJAAR, "Disaster Risk Management and Climate Change Adaptation in Europe and Central Asia".
- [12] J. AUGROS et M. QUERUEL, "Les dérivés climatiques et naturels : de nouvelles opportunités pour les investisseurs", 2001.
- [13] X. CHEN, W.D. NORDHAUS (2011). "Using luminosity data as a proxy for economic statistics", *PNAS*, May, 2011.
- [14] J.D. CUMMINS, D. LALONDE, R.D. PHILLIPS, "The Basis Risk of Catastrophic-Loss Index Securities".
- [15] X. GUYON, "Statistique spatiale", Université Paris 1, 2007.
- [16] E. DUBREUIL, P. VENDE, "Les couvertures indicelles en réassurance Catastrophe. Prise en compte de la dépendance spatiale dans la tarification"
- [17] "Global Proxy Exposure for Loss Estimation" Kinetic analysis corporation.
- [18] "Multi-hazard Parallel Risk Evaluation System" Kinetic analysis corporation.
- [19] B.J. REICH, M. FUENTES, "A multivariate semiparametric bayesian spatial modeling framework for hurricane surface wind fields", North Carolina State University.
- [20] A. CHARPENTIER, M. DENUIT, "Mathématiques de l'assurance non-vie".
- [21] A. CHARPENTIER, "Les modèles en réassurance", Université de Rennes I et École polytechnique.
- [22] D. CHENAL, G. KAYO DE KAYO, R. KELHIOUEN, X. MILHAUD, C. SAUSER, S. LOISEL, "Projet transfert alternatif du risque : titrisation du risque de catastrophe naturelle".
- [23] A.L. CAILLAT, C. DUTANG, T. NGUYEN, Q. TRAN, T. THUY, "Titrisations des Risques d'Assurance", avril 2008, ISFA.
- [24] P.E. THÉRON, "Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière", Thèse Université Claude Bernard – Lyon 1, 2007.

- [25] D.PAPACHRISTOU, "Statistical analysis of the spreads of catastrophe bonds at the time of issue".
- [26] A. CHARPENTIER, "Titrisation des risques catastrophes" , 2002.
- [27] G.GORGE, "Insurance Risk mMnagement and Reinsurance".
- [28] J.M.ZAKOIAN, "Econométrie de la finance".
- [29] D.HAINAUT, "Econométrie de l'assurance".
- [30] N. BENLAGHA, M.Grun-Réhomme, Université Paris 2, "Application de la théorie des valeurs extrêmes en assurance automobile".
- [31] A.CHAOUICHE, J.N. Bacro, "Un test simple pour le paramètre de forme d'une loi de Pareto généralisée".
- [32] G.TOULEMONDE, "Estimation et tests en théorie des valeurs extrêmes", Thèse de doctorat de l'université Paris VI.
- [33] G.KATERINA, "Une étude des événements climatiques extrêmes sur l'Europe et le bassin Méditerranéen et de leur évolution futur",Thèse de doctorat de l'université Paris VI.
- [34] B.RAGGAD, "Fondements de la théorie des valeurs extrêmes, ses principales applications et son apport à la gestion des risques du marché pétrolier".
- [35] B.MICHEL, "Modélisation de la production d'hydrocarbures dans un bassin pétrolier", Thèse Université Paris XI, 2008.
- [36] LABDENOUR, "Etude et comparaison des estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes", Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Faculté des sciences, 2010.
- [37] P.CLAUSS, "Statistique des risques extrêmes, application à la mesure du risque de marché", Cours ENSAI, Filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière
- [38] P.CLAUSS, "Atelier de théorie des valeurs extrêmes, application en finance quantitative", ENSAI, Filière Génie Statistique.
- [39] T.Mikosch, "Non-Life Insurance Mathematics"

Les mémoires de l'Institut des Actuaire

- [40] C.VALAT, "Tarification des traités catastrophes au Canada" , ISFA 2008.
- [41] A.T.NGUYEN, "Théorie du Risque et Réassurance", Université Paris Dauphine Département MIDO Master d'Actuariat ,2008-2009.
- [42] B.BOURGEOIS et G.POUGNET, "Réassurance et techniques financières de transfert de risques. Exemple du mortality bond : une obligation indexée au risque de sur mortalité", CEA 2008.
- [43] B.FINAS et S.GILLES, "La gestion indicielle du risque climatique. Application à l'énergie éolienne", ENSAE 2011.
- [44] X.SERVEL, S.TRAN, "Application de la Théorie des Valeurs Extrêmes dans le Cadre de l'Implémentation d'un Modèle Interne", ENSAE 2012.