

Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech  
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires  
le 22/02/2019

Par : Mehdi Echchelh

Titre : Approche multicritère du pilotage stratégique  
en assurance IARD

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de la filière*

Pierre Picard

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

Secrétariat :

Bibliothèque :

*Entreprise : Mazars*  MAZARS

*Nom :*

*Signature :*

*Directeurs du mémoire en entreprise :*

*Nom : Ibrahima Sow*

*Signature :*

*Nom : Romain Speisser*

*Signature :*

***Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)***

*Signature du responsable entreprise*

*Signature du candidat*



## Résumé

---

La directive *Solvabilité II* et en particulier le processus ORSA ont démocratisé le cadre de l'appétit au risque et la mise en place des démarches ERM auprès des assureurs. La dimension risque fait donc aujourd'hui plus que jamais partie intégrante du pilotage des entreprises d'assurance.

L'enjeu réside donc dans la prise de décisions permettant de poursuivre au mieux les objectifs de performance, de croissance et de rentabilité tout en respectant les différentes contraintes (réglementaires, financières, politiques...).

Ce mémoire s'inscrit ainsi dans le développement d'un outil d'aide à la décision donnant la possibilité de projeter et d'optimiser la stratégie de l'entreprise. Nous proposons ici une approche d'optimisation multiobjectif tenant compte de toutes les dimensions de l'entreprise (croissance, rentabilité, risque...) et des différentes contraintes de pilotage.

L'outil développé est appliqué à une entreprise d'assurance IARD. Nous nous restreignons dans l'exemple proposé dans ce mémoire à deux objectifs stratégiques (résultat comptable et SCR) et trois contraintes d'appétit au risque, dans le but de pouvoir facilement visualiser la frontière de Pareto.

Les solutions obtenues donnent lieu à des orientations de pilotage, non-seulement en scénario central mais également en situation post-choc, permettant ainsi de renforcer la robustesse du plan stratégique.

---

**Mots-clés :** *ORSA, Optimisation Multiobjectif/Multicritère, Pilotage Stratégique, Assurance Non-Vie/IARD, Appétit au risque, Algorithmes Évolutionnistes, Frontière efficiente, Frontière de Pareto*

## Abstract

---

The Solvency II directive and in particular the ORSA process have democratized the risk appetite framework and the implementation of ERM approaches among insurers. The risk dimension is now more than ever an integral part of the management of insurance companies.

The challenge lies in making decisions that allow us to best pursue the objectives of performance, growth and profitability while respecting the various constraints (regulatory, financial, political, etc.).

This thesis is part of the development of a decision support tool that gives the opportunity to project and optimize the company's strategy. We propose here a multiobjective optimization approach taking into account all the dimensions of the company (growth, profitability, risk ...) also as management constraints.

The developed tool is applied to a property and casualty insurance company. In order to easily view the Pareto border, we restrict ourselves to two strategic objectives (P&L and SCR) and three risk appetite constraints.

The solutions obtained give rise to steering orientations, not only in a central scenario but also in a post-shock situation, thus reinforcing the soundness of the strategic plan.

---

**Keywords :** *ORSA, Multicriteria/Multiobjective Optimization, Strategic Management, Casualty and Property Insurance, Risk Appetite, Evolutionary Algorithm, Pareto Front*

## Note de synthèse

---

Le cadre réglementaire de l'ORSA<sup>1</sup>, introduit par la norme *Solvabilité II*, a favorisé la démocratisation des démarches ERM et de la notion *d'appétit au risque*. L'appétit ou tolérance au risque se définit, selon la norme ISO 31000, comme le niveau de risque qu'une entreprise est prête à accepter, atteindre ou poursuivre afin de réaliser ses objectifs. La formalisation de cet appétit au risque ainsi que le respect de ses limites permettent d'assurer un pilotage sain de l'entreprise d'assurance. Cependant, ce cadre introduit par essence certaines contraintes de pilotage, rendant donc plus ardue l'optimisation de la performance.

La gouvernance des entreprises d'assurance s'inscrit par conséquent, plus que jamais, dans un pilotage simultané de la performance et du risque. Or les leviers à disposition du conseil d'administration sont multiples (stratégie de réassurance, d'allocation d'actif, ...) et leurs impacts sur les principaux indicateurs de pilotage ne sont pas toujours triviaux, en raison notamment de la possible existence d'effets croisés.

La difficulté de l'exercice réside donc dans la prise de décision permettant de satisfaire les contraintes de pilotage, tout en optimisant la performance de l'entreprise.

Afin de répondre à cette problématique, nous proposons, dans un premier temps, un modèle de projection de la stratégie de l'entreprise permettant d'évaluer et de comparer différentes stratégies de pilotage sur l'horizon du business plan. Ce modèle s'appuie sur certaines hypothèses de projections (primes, sinistralité, souscription, hypothèses économiques...) afin de construire des scénarios stochastiques pour les principales variables économiques ainsi que pour la sinistralité des différentes lignes d'activité de l'entreprise. Afin de tenir compte de pratiques de marché, les primes cédées au réassureur sont fixées de façon dynamique et dépendent de la sinistralité constatée sur chaque scénario.

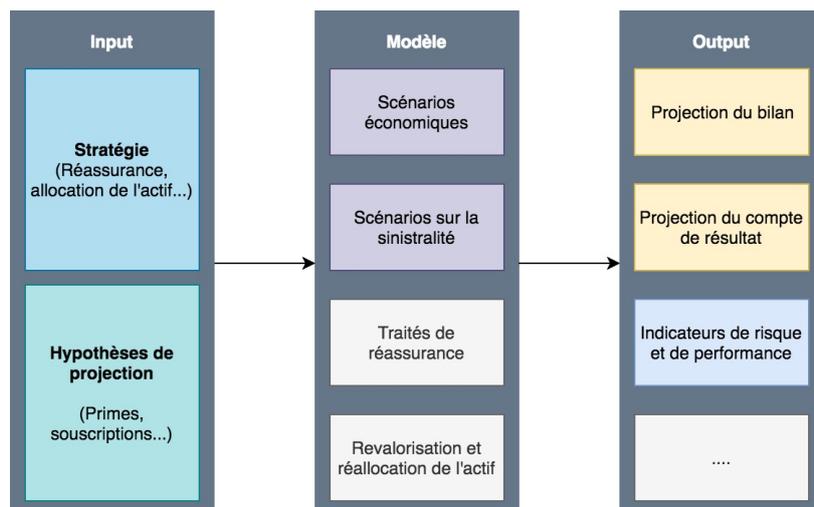


FIGURE 1 – Schéma du modèle de projection

Une fois le modèle de projection construit, nous nous intéressons à des méthodes

---

1. Own Risk and Solvency Assessment

d'aide à la décision permettant d'optimiser la stratégie de l'entreprise. Etant donné la multiplicité des indicateurs et des contraintes de pilotage, nous étudions le problème sous l'angle de l'optimisation multi-objectif. Le pilotage est ainsi formalisé tel que suit :

$$\min_{\omega \in \Omega} (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$$

Avec  $f_1, \dots, f_k$  différents indicateurs de pilotage (ROE, ratio de solvabilité, ratio combiné...),  $\Omega$  l'espace de décision et  $\omega$  une solution, ou stratégie dans notre cas.

Cette formalisation permet de prendre en compte la multiplicité des objectifs et des contraintes. Cependant, dans le cas où  $k > 1$ , tous les objectifs ne peuvent être optimisés simultanément et les solutions optimales sont généralement multiples.

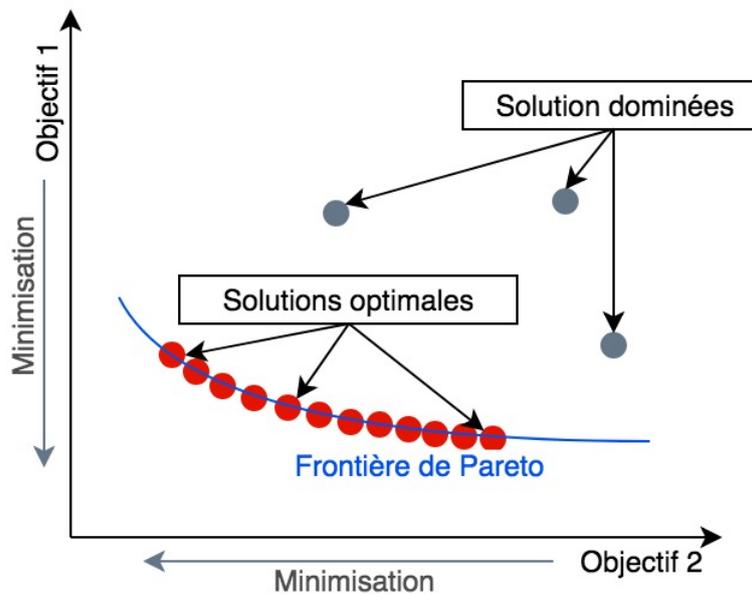


FIGURE 2 – Frontière de Pareto et solutions optimales

L'approche abordée dans ce mémoire est donc une approche dite *a posteriori*, dans laquelle l'objectif est de retrouver l'intégralité de la frontière de Pareto, puis de laisser au décideur le choix de l'orientation stratégique à retenir. Cette méthode permet de s'affranchir d'hypothèse sur la fonction d'utilité du décideur mais également de donner une plus grande flexibilité à l'outil développé.

Afin de parvenir à cet objectif, nous utilisons un algorithme évolutionniste populaire en optimisation multi-objectif, nommé NSGA-II. Le choix de cet algorithme est motivé, d'une part, par le fait que son utilisation permet de s'affranchir d'hypothèse de dérivabilité des fonctions "objectifs", ainsi que d'hypothèses de convexité de l'espace des objectifs atteignables. De plus il s'agit d'un algorithme dit "véritablement" multi-objectif, car il permet d'optimiser plusieurs critères simultanément et de rechercher l'intégralité de la frontière de Pareto.

Son implémentation s'appuie sur des méthodes inspirées de la théorie de l'évolution, la recherche des solutions optimales est effectuée de façon itérative en faisant évoluer une population de solutions vers la frontière de Pareto :

1. Un premier ensemble de  $N$  stratégies - dites *parents* - est initialisé de façon aléatoire.

2. Un deuxième ensemble de stratégies de taille  $N$  - dites *descendants* - est ensuite constitué via des opérateurs de "mutation" et de "croisement" appliqués à l'ensemble des *parents*
3. Les  $2N$  stratégies ainsi obtenues sont classées afin de ne retenir que les  $N$  meilleurs solutions. Ces solutions forment alors la nouvelle génération de *parents*.
4. Les étapes 2 et 3 sont répétées jusqu'à ce que le nombre d'itérations désirées soit atteint.

On note qu'initialement, l'algorithme NSGA-II proposé par l'auteur est appliqué à un espace de décision composé uniquement de variables quantitatives ( $\subset \mathbb{R}^n$ ). Or la stratégie d'une entreprise d'assurance (allocation d'actif, réassurance...) ne se prête pas naturellement à ce genre d'espace. A titre d'exemple le choix d'une stratégie de réassurance est soumis à la fois à des paramètres qualitatifs, comme le choix du type de traité (Quote-part, XS, ...) et des paramètres quantitatifs (taux de cession, priorité, portée, ...). Nous avons donc adapté l'algorithme d'optimisation, afin de prendre en compte les différentes variables qualitatives de l'espace de décision (cf figure 9).

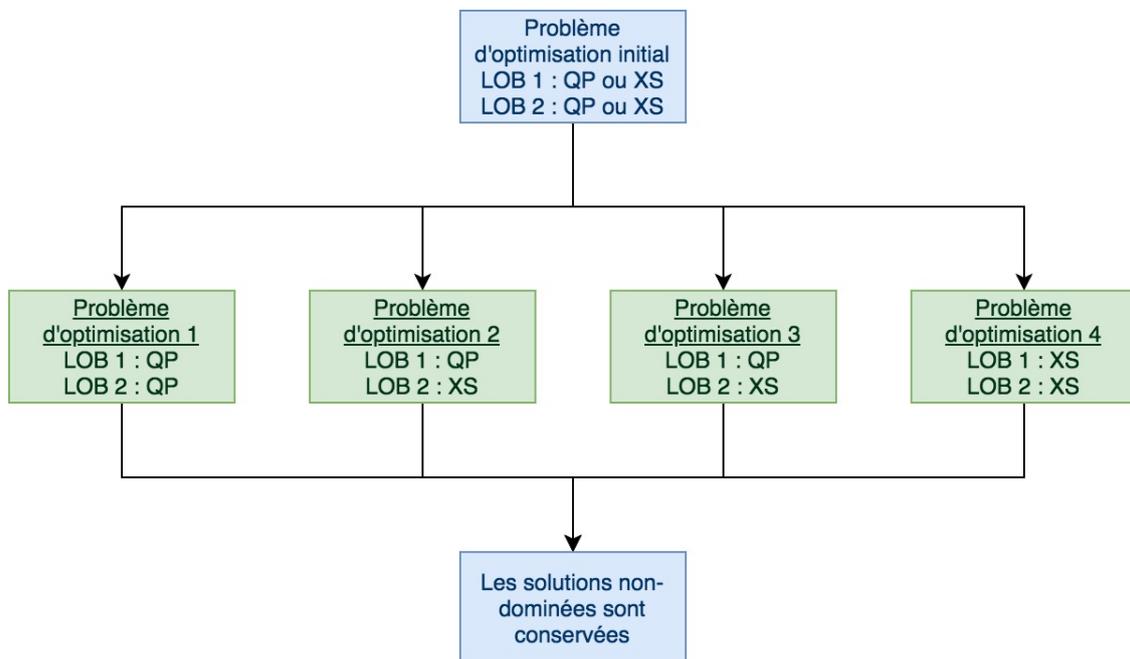


FIGURE 3 – Optimisation de stratégies de réassurance

Afin d'illustrer l'outil implémenté dans ce mémoire, nous avons donc appliqué le modèle de projection et l'algorithme d'optimisation à une entreprise fictive. Dans un premier temps, le modèle de projection nous a permis d'étudier les sensibilités des indicateurs de pilotage (SCR, résultat comptable, indicateurs d'appétit au risque...) aux différents leviers de l'entreprise. Cette étude de sensibilité met en exergue certaines orientations stratégiques favorables, sans toutefois mettre clairement en évidence les stratégies optimales.

Nous appliquons donc l'algorithme d'optimisation afin d'obtenir les solutions optimales au vues des objectifs stratégiques, ces solutions se matérialisent sous la forme d'une frontière (cf figure 10) sur laquelle sont représentées en bleue les solutions respectant les

contraintes d'appétit au risque. Cette frontière met alors en évidence deux orientations stratégiques optimales, notées A et B sur la figure 10. L'alternative A correspond à des stratégies prudentes privilégiant un ratio de solvabilité élevé, tandis que l'alternative B correspond à des stratégies plus orientées vers la rentabilité.

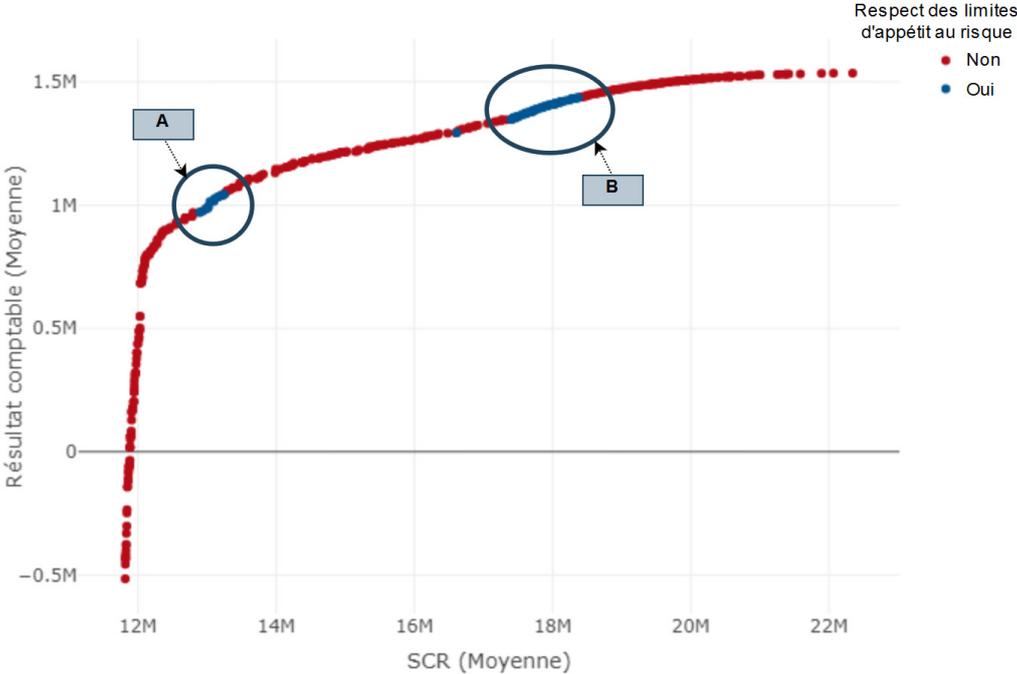


FIGURE 4 – Illustration de la frontière de Pareto obtenue

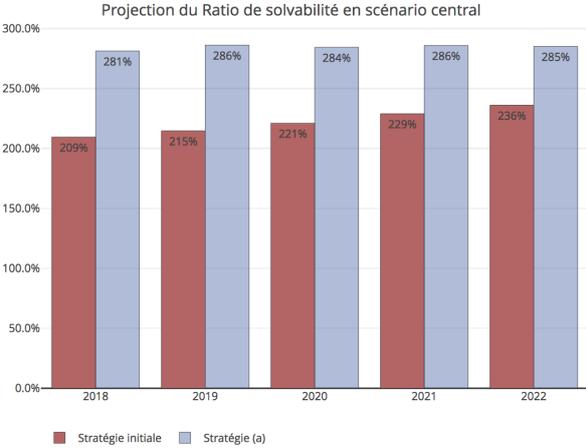


FIGURE 5 – Projection du ratio de solvabilité en scénario central avec la stratégie (a)

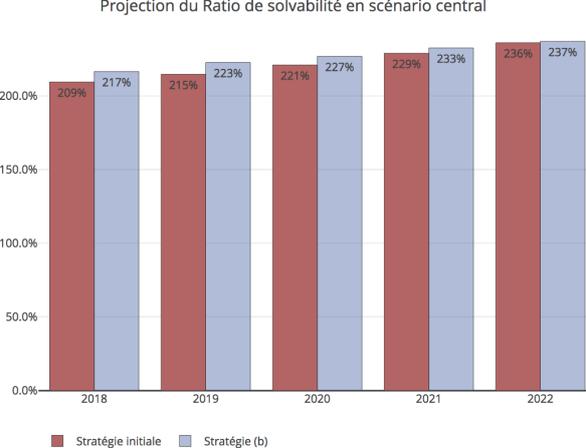


FIGURE 6 – Projection du ratio de solvabilité en scénario central avec la stratégie (b)

Afin de déterminer des stratégies permettant à l'entreprise de réagir à des scénarios de choc, nous appliquons l'algorithme d'optimisation dans le cadre d'un choc sur la sinistralité. Les stratégies obtenues permettent ainsi de ramener l'entreprise dans ses limites d'appétit au risque, tout en optimisant des indicateurs de pilotage (résultat comptable, SCR).

En conclusion l'outil développé permet non-seulement de proposer des orientations stratégiques en scénario central mais également en scénario post-choc, ce qui peut faciliter la mise en place d'un pilotage pérenne dans lequel l'entreprise s'assure d'avoir les moyens

de réagir en cas de crise. Les résultats obtenus restent cependant à nuancer, le modèle de projection développé s'appuie sur certaines hypothèses et nécessiterait éventuellement des ajustements dans une application réelle. En outre, nous nous sommes restreint dans ce mémoire à l'optimisation de deux objectifs - hors contraintes d'appétit au risque - afin de faciliter la visualisation de la frontière de Pareto. Il pourrait être intéressant d'explorer des méthodes d'analyses multicritère permettant d'orienter les décisions lorsque la frontière de Pareto ne peut être visualisée dans son intégralité.

## Executive summary

---

The regulatory framework of ORSA, introduced by the Solvency II standard, has promoted the democratization of ERM approaches and the concept of risk appetite. According to ISO 31000, risk appetite or risk tolerance is defined as the level of risk that a company is willing to accept, reach or pursue in order to achieve its objectives. Defining the risk appetite and respecting its limits make it possible to ensure a sound management of the insurance company. However, this framework introduces some driving constraints, making it more difficult to optimize the performance.

As a result, the governance of insurance companies is more than ever an management of both performance and risk. However the levers available to the board of directors are multiple (reinsurance strategy, asset allocation, ...) and their impacts on the main indicators of management are not always trivial, due in particular to the possible existence cross effects.

The difficulty of the exercise lies in making decision that meet the constraints of management while optimizing the performance of the company.

In order to answer this problem, we propose, as a first step, a cash flow projection model in order to evaluate and compare different management strategies. This model is based on projections assumptions (premiums, claims, underwriting, economic assumptions ...) for building stochastic scenarios for the main economic variables as well as for the loss of the various lines of activity of the company. In order to take into account market practices, premiums ceded to the reinsurer are set dynamically and depend on the claims experience on each scenario.

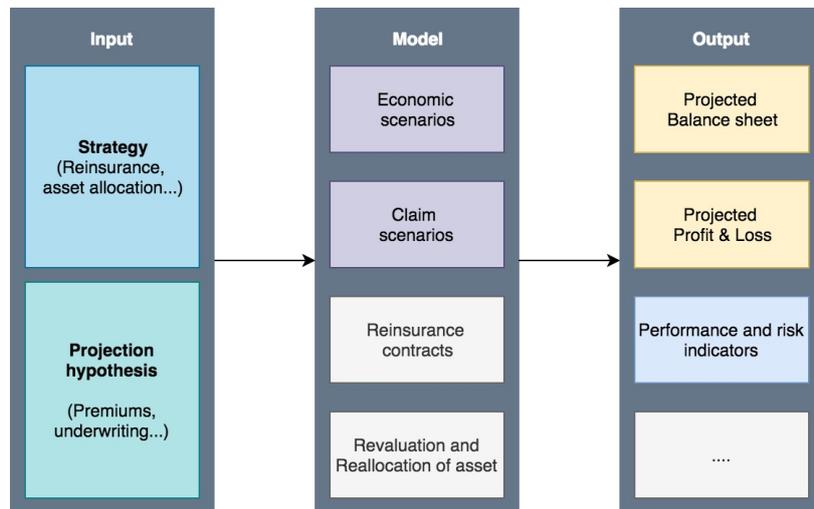


FIGURE 7 – Diagram of the projection model

Once the projection model is defined, we study some decision making methods for optimizing the company's strategy. Given the multiplicity of indicators and driving constraints, we study the problem from the perspective of multi-objective optimization. Management is thus formalized as follows :

$$\min_{\omega \in \Omega} (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$$

With  $f_1, \dots, f_k$  different monitoring indicators (ROE, solvency ratio, combined ratio ...),  $\Omega$  the *decision space* and  $\omega$  a *solution*, or strategy in our case.

This formalization makes it possible to take into account the multiplicity of objectives and constraints. However, in the case where  $k > 1$ , all the objectives can not be optimized simultaneously and the optimal solutions are generally multiple.

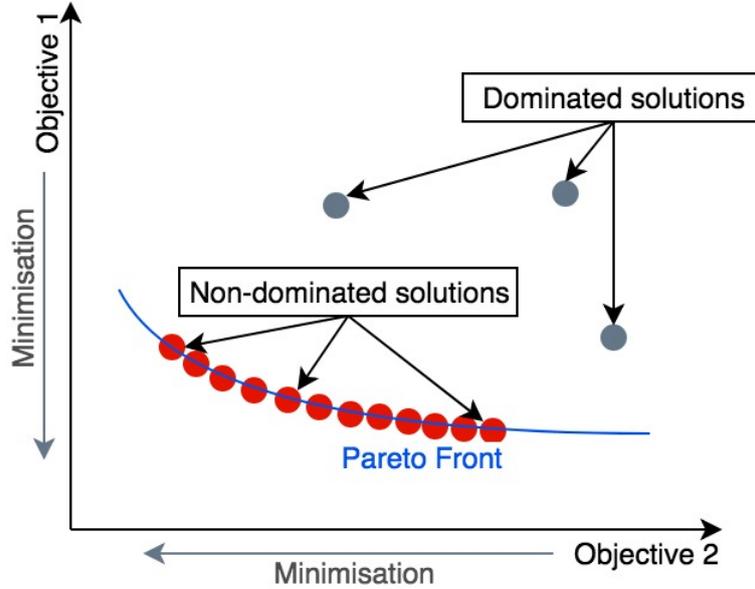


FIGURE 8 – Pareto front and optimal solutions

The approach studied in this thesis is a so-called *a posteriori* approach, in which the goal is to find the entire Pareto border and then to let the decision-maker choose the strategic orientation. This method makes it possible to dispense with hypothesis on the utility function of the decision maker but also to give greater flexibility to the tool developed.

In order to achieve this goal, we use a popular evolutionary algorithm in multi-objective optimization, named NSGA-II. The choice of this algorithm is motivated, on one hand, by the fact that its use makes it possible to dispense with hypothesis of differentiability of the "objective" functions, as well as assumptions of convexity of the space of attainable objectives. Moreover, it is a so-called "truly" multi-objective algorithm, because it makes it possible to optimize several criteria simultaneously and to find the entire Pareto front. Its implementation is based on methods inspired by the theory of evolution, the search for optimal solutions is performed iteratively by evolving a population of solutions to the Pareto front :

1. A first set of  $N$  strategies - called *parents* - is randomly initialized.
2. A second set of strategies of size  $N$  - called *descendants* - is then constituted by applying so-called operators of "*mutation*" and "*crossing*" to all *parents*.
3. The  $2N$  strategies thus obtained are ranked in order to retain only the  $N$  best solutions. These solutions then constitute the new generation of *parents*.

4. Steps 2 and 3 are repeated until the desired number of iterations is reached.

We note that initially, the algorithm NSGA-II proposed by the author is applied to a space of decision composed only of quantitative variables ( $\subset \mathbb{R}^n$ ). The strategy of an insurance company (asset allocation, reinsurance, etc.) is not naturally representable by this kind of space. By way of example, the choice of a reinsurance strategy is subject to both qualitative parameters, such as the choice of the type of treaty (Quota-share, XS, etc...) and quantitative parameters (Percentage of risk ceded for a quota-share, limit and priority, etc...). We have therefore adapted the optimization algorithm to take into account the different qualitative variables of the decision space (cf figure ??).

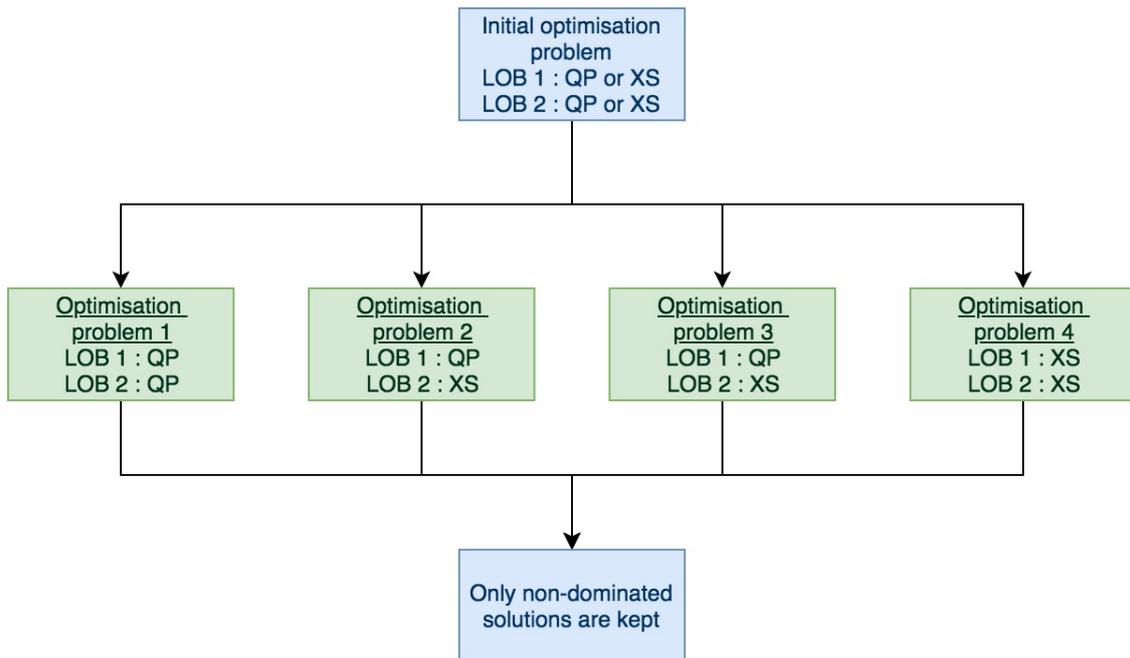


FIGURE 9 – Optimization of reinsurance strategy

To illustrate the tool implemented in this memory, we applied the projection model and the optimization algorithm to a fictional company. Initially, the projection model allowed us to study the sensitivities of the steering indicators (SCR, accounting result, risk appetite indicators ...) to the different levers of the company. This sensitivity study highlighted favorable strategic orientations, without, however, clearly highlighting the optimal strategies.

We therefore apply the optimization algorithm in order to obtain the optimal solutions according to the strategic goals, these solutions materialize in the form of a border (cf figure ??) on which are represented in blue solutions that respect risk appetite constraints. This boundary then highlights two optimal strategic orientations, denoted A and B in the figure ?. Alternative A corresponds to conservatives strategies with a high solvency ratio, while Alternative B corresponds to more profit-oriented strategies.

In order to determine strategies that allow the company to react to stressed scenarios, we apply the optimization algorithm in the context of a shock on the claims incurred. The strategies obtained thus make it possible to bring the company back to its limits of risk appetite, while optimizing management indicators (accounting result, SCR).

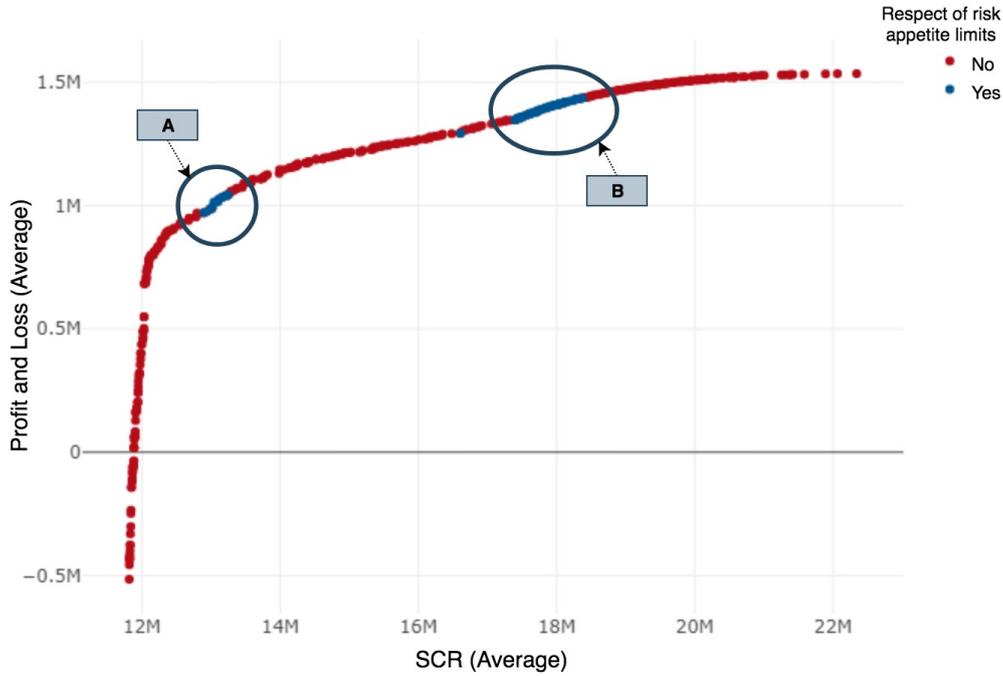


FIGURE 10 – Illustration of the Pareto front obtained

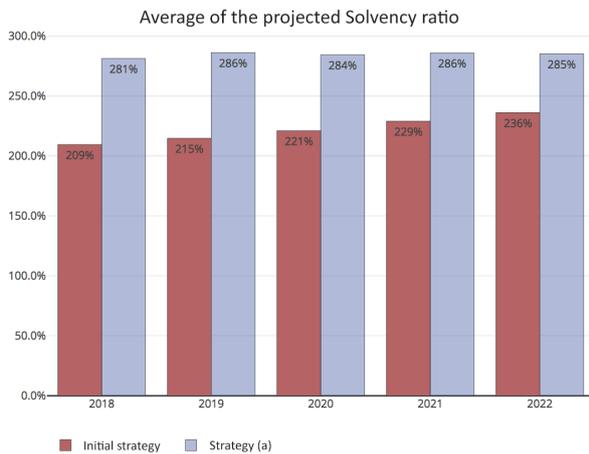


FIGURE 11 – Average of the solvency ratio projected with the strategy (a)

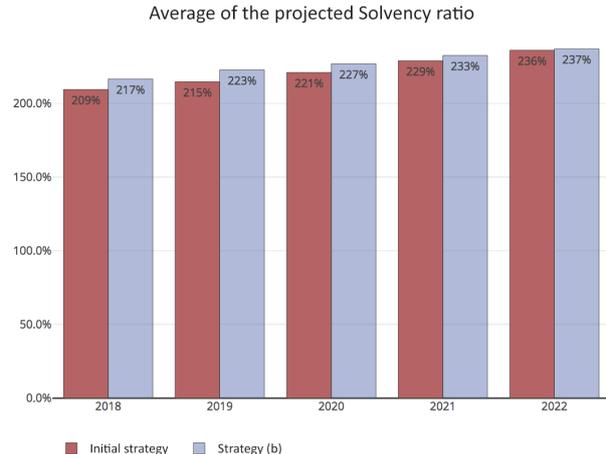


FIGURE 12 – Average of the solvency ratio projected with the strategy (b)

In conclusion, the tool developed makes it possible not only to suggest strategic orientations in central scenarios but also in post-shock scenarios, which can facilitate the setting up of a sustainable management in which the company makes sure to have the means to react in extreme situations. However it is important to note that the projection model developed is based on certain assumptions and may require adjustments in a real application. In addition, we have restricted ourselves to the optimization of two objectives - apart from risk appetite constraints - in order to facilitate the visualization of the Pareto front. It might be interesting to explore multicriteria analysis methods to guide decisions when the Pareto border can not be viewed in its entirety.

## Remerciements

---

Je tiens à remercier mes encadrants, Romain Speisser, Ibrahima Sow, Thierno Diallo et Gaëtan Le Gall, pour leur accompagnement tout au long de ce mémoire et pour les précieux conseils qu'ils m'ont prodigué.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance envers toute l'équipe de Mazars actuariat pour son accueil et pour l'aide qu'elle m'a apporté dans mon travail.

Je souhaite remercier aussi mon référent pédagogique Pierre Picard pour la qualité de ses enseignements ainsi que pour ses conseils.

Enfin je remercie ma famille de m'avoir soutenu tout au long de mes années d'études et je remercie Khaoula pour m'avoir épaulé dans la réalisation de ce mémoire.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>ORSA et pilotage</b>	<b>17</b>
2.1	Réglementation . . . . .	17
2.1.1	Cadre réglementaire et objectifs de l'ORSA . . . . .	17
2.1.2	Le besoin global de solvabilité . . . . .	18
2.2	La démarche <i>Enterprise Risk Management</i> . . . . .	19
2.3	Identification et évaluation des facteurs de risque . . . . .	20
2.4	Définition de l'appétit au risque . . . . .	22
2.4.1	Définition du cadre . . . . .	22
2.4.2	Formulation de l'appétit au risque . . . . .	23
2.4.3	Mesures de risque . . . . .	25
2.4.4	Déclinaison de l'appétit au risque . . . . .	27
2.4.5	Dashboard de suivi du risque . . . . .	32
2.4.6	Conclusion . . . . .	33
2.5	Leviers de pilotage . . . . .	34
2.6	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Modèle de projection</b>	<b>36</b>
3.1	Hypothèses générales . . . . .	36
3.2	Modélisation de la sinistralité . . . . .	36
3.2.1	Modélisation du cout ultime . . . . .	37
3.2.2	Règlement des sinistres . . . . .	37
3.3	Réassurance . . . . .	37
3.3.1	Quote-part . . . . .	37
3.3.2	Excédent de sinistre . . . . .	38
3.4	Modélisation des variables économiques . . . . .	39
3.4.1	Modélisation de la courbe de taux zéro-coupon . . . . .	39
3.4.2	Modélisation du rendement des actions . . . . .	40
3.5	Bilan économique . . . . .	40
3.5.1	Actif - Placements . . . . .	40
3.5.2	Passif . . . . .	43
3.6	Calcul du SCR . . . . .	45
3.6.1	BSCR . . . . .	45
3.7	Conclusion . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Optimisation multiobjectif</b>	<b>48</b>
4.1	Le cadre de l'optimisation multiobjectif . . . . .	48
4.2	Optimisation multiobjectif, pilotage et appétit au risque . . . . .	50
4.3	Les méthodes d'optimisation multiobjectif . . . . .	51
4.3.1	La classification des méthodes . . . . .	51
4.3.2	Les méthodes <i>a posteriori</i> . . . . .	52
4.4	Algorithmes évolutionnistes . . . . .	54
4.4.1	Fonctionnement des algorithmes évolutionnistes . . . . .	54
4.4.2	Intérêt des Algorithmes évolutionnistes . . . . .	55
4.4.3	Algorithme évolutionniste et optimisation multicritère . . . . .	56
4.5	Algorithme implémenté . . . . .	56
4.5.1	NSGA-II . . . . .	56

4.5.2	Application au pilotage sous contrainte d'appétit au risque . . . . .	60
4.6	Conclusion . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Application à une entreprise d'assurance non-vie</b>	<b>64</b>
5.1	Description de l'entreprise . . . . .	64
5.1.1	Données et bilan initial de l'entreprise . . . . .	64
5.1.2	Scénarios . . . . .	66
5.2	Description des leviers et de la stratégie de l'entreprise . . . . .	66
5.3	Leviers pris en considération pour l'étude . . . . .	67
5.4	Appétit au risque et objectifs de l'entreprise . . . . .	67
5.4.1	Projection de la stratégie initiale de l'entreprise . . . . .	68
5.5	Analyse de sensibilités . . . . .	68
5.5.1	Allocation d'actif . . . . .	69
5.5.2	Réassurance proportionnelle . . . . .	71
5.5.3	Réassurance non-proportionnelle . . . . .	74
5.5.4	Développement stratégique : commercialisation d'un produit de dom- mage aux biens . . . . .	75
5.5.5	Conclusion . . . . .	76
5.6	Optimisation et stratégies proposées . . . . .	76
5.6.1	Stratégie retenue par l'entreprise . . . . .	81
5.6.2	Conclusion . . . . .	82
5.7	Pilotage dynamique . . . . .	82
5.7.1	Scénario de choc . . . . .	82
5.7.2	Détermination de la stratégie post-choc . . . . .	84
5.8	Conclusion . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Application développée</b>	<b>89</b>
A.1	<i>Hypothèses</i> : Paramètres de l'entreprise . . . . .	89
A.2	<i>Stratégie</i> : Définition de la stratégie de l'entreprise . . . . .	89
A.3	<i>Résultats</i> : Visualisation des résultats . . . . .	90
A.4	<i>Optimisation</i> . . . . .	90
<b>B</b>	<b>Allocation du risque de prime et réserve</b>	<b>92</b>
B.1	Calcul du risque de prime et réserve en formule standard . . . . .	92
B.2	RORAC-compatibilité . . . . .	93
B.3	RORAC-compatibilité dans le cas de la formule standard . . . . .	94
<b>C</b>	<b>NSGA-II</b>	<b>95</b>
<b>D</b>	<b>Compléments sur les études de sensibilités</b>	<b>96</b>
<b>E</b>	<b>Compléments sur les résultats des stratégies (a) et (b)</b>	<b>97</b>
<b>F</b>	<b>Compléments sur les paramètres de l'entreprise fictive</b>	<b>99</b>
F.1	Paramètres de modélisation de la sinistralité . . . . .	99
F.1.1	Domage Auto . . . . .	99
F.1.2	RC Auto . . . . .	100
F.1.3	Domage aux biens . . . . .	100

<b>G</b>	<b>Compléments sur la calibration du modèle de Hull &amp; White</b>	<b>101</b>
G.1	Préliminaires . . . . .	101
G.1.1	Rappel modèle de Hull & White . . . . .	101
G.2	Approximation du taux court . . . . .	103
<b>H</b>	<b>Compléments sur les mesures de risque</b>	<b>104</b>
H.1	Propriété usuelles des mesures de risque . . . . .	104
H.2	Elicitableté (élicitability en anglais) . . . . .	104
H.3	Sous-additivité de la VaR . . . . .	105

# 1 Introduction

Les évolutions réglementaires de ces dernières années et plus particulièrement *Solvabilité II*<sup>2</sup> ont bouleversé profondément le pilotage des entreprises d'assurance et de réassurance.

Aujourd'hui, toute compagnie doit être en mesure de faire face à des fluctuations défavorables de son résultat, tout en en faisant preuve d'un niveau de solvabilité suffisant. La directive *Solvabilité II* définit ainsi, dans le *Pilier I*, le niveau fonds propres requis par chaque entreprise afin d'être en capacité de respecter les engagements souscrits.

En plus de cette exigence quantitative, le processus ORSA<sup>3</sup> impose aux compagnies d'assurance de définir leur besoin global de solvabilité. Ce besoin global doit tenir de la stratégie d'entreprise, du niveau de tolérance au risque (défini par le conseil d'administration) tout en tenant compte des exigences réglementaires du *Pilier I*.

Le pilotage des compagnies d'assurance est donc aujourd'hui soumis à de nombreuses contraintes qui peuvent être réglementaires, financières, opérationnelles ou même politiques. Toutefois l'ensemble des possibles - qui constitue les leviers d'actions - du conseil d'administration est vaste. Les interactions de ces leviers (programme de réassurance, stratégie de diversification géographique, d'allocation d'actif...) avec les indicateurs de performance et de suivi du risque sont parfois complexes.

L'enjeu réside donc dans la prise de décisions permettant de poursuivre au mieux les objectifs de performance, de croissance et de rentabilité tout en respectant les différentes contraintes auxquelles est soumis le conseil d'administration.

Ce mémoire s'inscrit dans le développement d'un outil d'aide à la décision permettant de projeter la stratégie de l'entreprise. Cet outil permettra également de mettre en place des indicateurs clés sur un portefeuille non-vie permettant au management d'avoir non seulement une meilleure compréhension de leur portefeuille mais aussi et surtout de mesurer l'impact de différentes stratégies dans leur processus de prise de décision.

Nous rappellerons dans un premier temps le cadre de l'ORSA, de l'appétit au risque et de l'allocation du risque et nous présenterons certains leviers de pilotage. Par la suite nous présenterons le modèle de projection du bilan de l'entreprise implémenté. Puis nous présenterons le contexte de l'optimisation multi-objectif et son application dans le cadre du pilotage. Enfin, nous présenterons une méthode d'optimisation de la stratégie d'entreprise et nous illustrerons son application sur une entreprise fictive.

---

2. cf [12]

3. *Own Risk and Solvency Assessment*

## 2 ORSA et pilotage

### 2.1 Réglementation

#### 2.1.1 Cadre réglementaire et objectifs de l'ORSA

L'ORSA (*Own Risk and Solvency Assesment* ou Evaluation Interne des Risques et de la Solvabilité) est un processus réglementaire d'identification, d'évaluation et de surveillance des risques. Son but est de permettre une meilleure intégration de la dimension risque dans le pilotage de la compagnie et dans la prise de décisions stratégiques à moyen et long terme. Ainsi le processus ORSA définit un cadre de dialogue entre gestionnaires de risques et conseil d'administration ou AMSB (Administrative Management or Supervisory Board) afin de définir la stratégie de l'entreprise et le besoin de solvabilité de façon cohérente avec le profil de risque de la compagnie.

En outre les risques pris en compte dans le processus ORSA doivent intégrer les risques difficilement quantifiables et éventuellement non-adressés par la formule standard du SCR<sup>4</sup>. Ainsi l'ACPR (Autorité de contrôle prudentiel et de résolution) note que, sur les ORSA rendus en 2016, les risques de réputation et de transformation digitale apparaissaient dans l'ensemble des risques pris en compte par les entreprises d'assurance et de réassurance<sup>5</sup>.

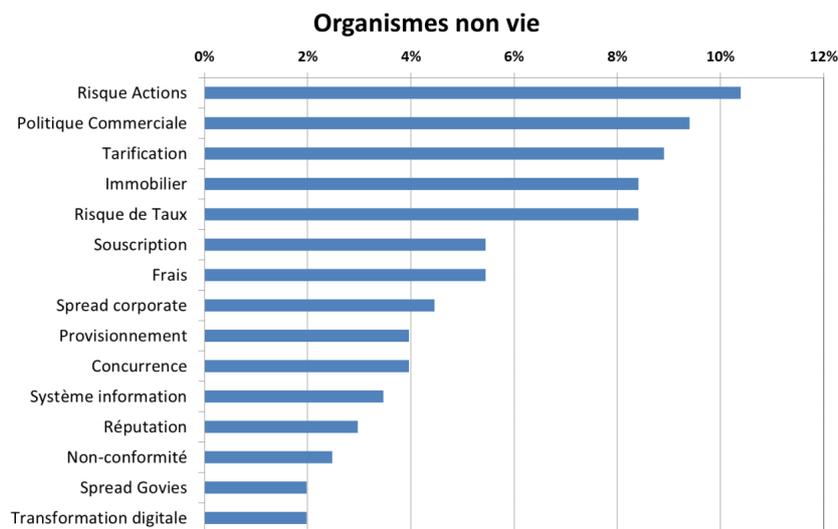


FIGURE 13 – Risques pris en compte dans l'ORSA 2016 pour les entreprises d'assurance non-vie. *Source* : Conférence de l'ACPR du 16 juin 2017. *Solvabilité II, un an après : quel bilan ? Quelles perspectives ?*

L'ORSA est définie par la directive européenne 2009/138/CE qui en fixe les grands principes réglementaires. Le Règlement délégué 2015/35 de la commission européenne complète alors ces principes en précisant l'exécution de la directive et en définissant les normes réglementaires. Enfin, l'EIOPA<sup>6</sup> a publié des recommandations et des instructions relatives à l'évaluation des risques<sup>7</sup> et à la gestion du système de gouvernance<sup>8</sup> ainsi qu'un retour sur les premiers ORSA rendu par les entreprises d'assurance et de réassurance en

4. *Solvency Capital Requirement*

5. Conférence de l'ACPR du 16 juin 2017. *Solvabilité II, un an après : quel bilan ? Quelles perspectives ?*

6. *European Insurance and Occupational Pensions Authority*

7. *Guidelines on forward looking assessment of own risks* [9]

8. *Final report on public consultation no. 14/017 on guidelines on system of governance* [8]

2016<sup>9</sup>.

L'article 45 de la directive Solvabilité II<sup>10</sup> définit les principes réglementaires de l'ORSA. Ce dernier doit porter au moins sur les 3 obligations suivantes :

- (a) **le besoin global de solvabilité**, compte tenu du **profil de risque spécifique**, des limites approuvées de **tolérance au risque** et de **la stratégie commerciale** de l'entreprise ;
- (b) le respect permanent des exigences de capital [...] et des exigences concernant les provisions techniques [...];
- (c) la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis prévu [...] calculé à l'aide de la formule standard ou avec un modèle interne partiel ou intégral [...].

Nous nous intéresserons dans ce mémoire au premier point évoqué ci-dessus, à savoir la définition du besoin global de solvabilité et des limites approuvées de tolérance au risque ainsi qu'à la définition d'une stratégie cohérente avec ces limites de tolérance au risque.

### 2.1.2 Le besoin global de solvabilité

La directive Solvabilité II [12] précise les normes d'évaluation du besoin global de solvabilité (BGS). Selon l'article 262, l'évaluation du BGS doit porter sur l'ensemble des éléments suivants :

- (a) les risques, y compris opérationnels, auxquels l'entreprise est ou pourrait être exposée, compte tenu des modifications que son profil de risque pourrait connaître à l'avenir sous l'effet de sa stratégie d'entreprise ou de l'environnement économique et financier ;
- (b) la nature et la qualité des éléments de fonds propres ou autres ressources adaptés à la couverture des risques visés au point a) du présent paragraphe.

De plus, selon l'article 262, l'évaluation du BGS doit tenir compte :

- (a) des **horizons temporels** pertinents pour la prise en compte des risques qu'encourt l'entreprise à long terme ;
- (b) de bases de valorisation et de comptabilisation adaptées à l'activité et au profil de risque de l'entreprise ;
- (c) des systèmes de contrôle interne et de gestion des risques de l'entreprise, ainsi que de ses limites approuvées de tolérance au risque.

Ainsi l'article 262 met l'accent sur certains points importants, à savoir le besoin global de solvabilité qui doit être évalué selon un horizon de temps pertinent avec les risques auxquels est exposé l'entreprise d'assurance. Ainsi le BGS n'est pas supposé être une copie du SCR, qui s'intéresse à la solvabilité à l'horizon d'une année.

De plus le périmètre de risques peut être différent de celui pris en compte dans le calcul du SCR. On note ainsi que sur les ORSA rendu en 2017, le besoin de solvabilité

---

9. EIOPA's Supervisory Assessment of the ORSA [7]

10. Directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009 [12]

était supérieur au SCR dans 54% des cas et inférieur dans plus de 15% des cas <sup>11</sup>.

## 2.2 La démarche *Enterprise Risk Management*

La notion d'appétit au risque est apparu initialement dans les recommandations du *COSO 2*<sup>12</sup> avec l'élaboration de la démarche "*Enterprise Risk Management*" (ERM) qui constitue aujourd'hui le cadre de référence en termes de gestion des risques.

Le Pilier II de la réglementation Solvabilité II incite à présent les entreprises à adopter la démarche ERM dans leur gestion des risques.



FIGURE 14 – Démarche ERM. Source : CAS (*Casualty Actuary Society*) - *Overview of Enterprise Risk Management* (2003).

La démarche ERM propose une approche *intégrée* pour le processus de gestion des risques. Les risques sont pris en compte au niveau global de l'entreprise et leur évaluation fait partie intégrante du pilotage et de l'organisation de l'entreprise, justifiant de ce fait le terme *intégrée*.

Le cadre ERM s'articule ainsi en différents points :

1. Établissement du contexte : Cette étape consiste à établir à la fois le contexte *externe*, *interne* mais aussi le contexte de *gestion des risques*.
  - Contexte *externe* : Le contexte *externe* fait référence à la relation de l'entreprise avec son environnement.
  - Contexte *interne* : La définition du contexte *interne* correspond à la compréhension des objectifs de l'entreprise, des KPI<sup>13</sup> et du système interne de gouvernance.
  - Contexte de *gestion des risques* : Le contexte de gestion des risques identifie les catégories de risque pertinentes pour l'entreprise et l'organisation du processus interne de gestion des risques
2. Identification des risques : L'étape d'identification des risques consiste à identifier et documenter les événements qui représentent une menace aux objectifs de l'entreprise
3. Analyse et Quantification des risques : Cette étape désigne la calibration des différents facteurs de risque. Elle peut s'appuyer sur des méthodes qualitatives (matrice

11. Source : Conférence de l'ACPR du 16 juin 2017. *Solvabilité II : un an après. Quel bilan ? Quelles perspectives ?*

12. Committee Of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission

13. Key Performance Indicator, indicateurs de pilotage

de risque fréquence/sévérité...) et quantitatives (loi de probabilité, simulations, analyse de sensibilité...) en fonction des données disponibles et de la nature des risques.

4. Intégration des risques : Agréger les risques en prenant en compte les effets issus de la diversification
5. Evaluation / Priorisation des risques : Cette étape vise à évaluer la contribution au risque global de chaque facteur de risque en prenant en compte les effets issus de la diversification du risque
6. Traitement et exploitation des risques : Ce point consiste à définir les traitements des facteurs de risques : atténuation, transfert, évitement, rétention, exploitation...
7. Suivi du risque : Suivi permanent de l'adéquation du système de gestion des risques au contexte de risque de l'entreprise

On observe que le cadre ERM ne définit pas de nouvelles procédures de gestion des risques, il vient formaliser les processus déjà présents dans les entreprises. Cette formalisation permet *in fine* de définir un cadre commun et d'unifier les pratiques actuarielles.

## 2.3 Identification et évaluation des facteurs de risque

La première étape du processus ERM, ainsi que du processus ORSA, est l'identification des risques auxquels est exposée l'entreprise. En général les entreprises d'assurance disposent déjà d'une cartographie des risques, interne ou bien donnée par la formule standard. Cependant, dans le cadre de l'ORSA, l'identification des facteurs de risque ne peut s'appuyer uniquement sur les risques de la formule standard. Il est nécessaire de prendre en compte d'autres risques tels que le risque de réputation, les risques émergents ou encore le risque de stratégie.

La cartographie proposée par la formule standard donne lieu à une approche *top-down* : en partant du risque global, différents facteurs de risques sont identifiés (Marché, Défaut, Souscription...). Une alternative à cette approche est la méthode *bottom-up*, qui consiste à identifier les risques résultants de chaque actif et de chaque garantie proposée par l'assureur, puis de déterminer le schéma selon lequel ces risques peuvent être agrégés en tenant compte des effets de diversification. L'approche *bottom-up* permet de vérifier le caractère exhaustif de la cartographie des risques de l'entreprise.

Nous retrouverons notamment les risques suivants :

- Risques pris en compte dans la formule standard :
  - **Souscription** : dans le cas d'une assurance non-vie, le risque de souscription peut s'identifier comme la combinaison des risques de prime, de réserve et de catastrophe.
  - **Marché** : le risque de marché comprend notamment les risques action, taux, spread, change et concentration.

- **Contrepartie** : le risque de contrepartie prend notamment en compte le risque de défaut des réassureurs. Plus les primes cédées aux réassureurs sont importantes, plus le risque de contrepartie sera élevé.
- Risques non-pris en compte dans la formule standard :
  - **Liquidité** : la littérature financière propose différentes mesures du risque de liquidité : *Cash at Risk* (*Liquidity at Risk*), ratio de Cooke, *Liquidity risk gap*, *Liquidity risk elasticity*<sup>14</sup>... Cependant, pour une assurance non-vie l'impact du risque de liquidité est relativement limité car en général la quantité d'actifs très liquides détenus (obligations d'état, actions liquides, etc.) est suffisamment importante. Toutefois, en cas de survenance d'un événement de type catastrophe naturelle, il est possible de se retrouver face à un problème de liquidité. Le risque de liquidité peut alors être mesuré comme le coût d'emprunt sur le marché permettant de faire face à un paiement/décaissement exceptionnel (catastrophe naturelle...) <sup>15</sup>. Ainsi pour évaluer ce risque, il est nécessaire d'identifier tous les événements probables pouvant mener à une crise de liquidité. Ces scénarios doivent être suffisamment documentés afin de pouvoir mener une évaluation pertinente du risque et des mesures d'atténuation envisageables.
  - **Réputation** : le risque de réputation n'est pas simple à évaluer et repose en général sur des avis d'experts. Notons que l'entreprise peut exiger une tolérance zéro sur ce risque dans la mesure où sa présence ne permet pas d'améliorer la rentabilité ou le chiffre d'affaires de l'entreprise.
  - **Opérationnel** : Le risque opérationnel est déjà pris en compte par la formule standard, toutefois, dans le cadre de l'ORSA les entreprises peuvent envisager une réévaluation de ce risque. Cette évaluation n'est cependant pas simple en raison du manque ou de l'absence possible de données. En pratique, la mesure de ce risque repose donc souvent sur un avis d'expert. Notons que la littérature scientifique au sujet de la modélisation du risque opérationnel a été relativement abondante ces dernières années. L'une des modélisations les plus utilisées est probablement l'approche dite LDA (*Loss Distribution Approach*) qui est assez familière aux actuaires car elle correspond à une décomposition fréquence/sévérité de la perte totale.

$$Loss_{\text{opérationnel}} = \sum_{i=1}^N X_i, \text{ avec } N \sim \mathbb{P}_N, X_i \sim \mathbb{P}_X$$

Le lecteur intéressé pourra se référer à E. Karam et F. Planchet (2012) (cf [11]) pour une présentation plus détaillée des méthodes ainsi que des aspects techniques inhérents au calibrage des modèles.

- **Autres risques** : D'autres risques pourraient être pris en compte : risque homme-clé, risque réglementaire, risque de modèle, risque de dépendance à un tiers (courtier, prestataire...), risque systémique, etc.

---

14. Christopher L. Culp *The Risk Management Process. Chapter 17 : Identifying, Measuring, and Monitoring Liquidity Risk.*

15. cf : Blair Nicholls Justin Skinner (2007) *Making use of DFA.* Institute of Actuaries of Australia

L'identification de ces facteurs de risque doit non-seulement permettre de mesurer le risque global auquel l'entreprise est exposé, mais également d'en déduire des indicateurs de suivi du risque (KRI : *Key Risk Indicators*). A titre d'exemple, la valeur de marché des différents actifs peut permettre de suivre les risques de marché.

Une fois les risques identifiés, le conseil d'administration doit formuler l'appétit au risque de l'entreprise et définir les mesures à déployer pour gérer ces risques.

## 2.4 Définition de l'appétit au risque

L'appétit au risque est défini par la norme ISO 31000 comme le niveau de risque qu'une entreprise est prête à accepter, atteindre ou poursuivre afin de tenir ses objectifs.

Ainsi le pilotage d'une entreprise d'assurance est par nature un pilotage de l'appétit au risque. Pour cause, l'assureur accepte un certain niveau de risque de ses assurés en contrepartie du paiement d'une prime.

En outre, les agences de notations accordent un poids du plus en plus important aux pratiques de gestion des risques dans l'évaluation du score de crédit. Citons par exemple Standard & Poors qui précise mettre un accent tout particulier sur l'intégration de l'appétit au risque dans la stratégie et la culture de l'entreprise : *"Standard & Poors examines whether an enterprise has a clearly articulated risk appetite and the degree to which this process is integrated with its strategy and culture"*<sup>16</sup>.

Le processus de formalisation de l'appétit au risque par le conseil d'administration est donc d'autant plus important pour permettre un pilotage sain de l'entreprise d'assurance ou de réassurance.

### 2.4.1 Définition du cadre

La littérature relative à l'appétit au risque a fait l'objet de discordances et d'ambiguïtés quant à la définition des notions clés. Bien qu'un consensus semble émerger, on note que les notions proposées ci-dessous peuvent différer selon les articles.

#### **Capacité de risque de l'entreprise - "Risk capacity" :**

La capacité de risque est définie comme le niveau maximal de risque sous lequel l'entreprise peut opérer. Lorsque ce niveau est dépassé, l'activité de l'entreprise est mise en danger. La capacité de risque doit être déterminée en amont du processus de gestion du risque. Son niveau permettra par conséquent de calibrer le niveau de tolérance au risque.

La capacité de risque est évaluée en prenant en compte les risques auxquels est exposée l'entreprise ainsi que sa capacité à les absorber. L'estimation de la capacité de risque prend notamment en compte le niveau de capital de l'entreprise ou la liquidité des actifs.

Son évaluation doit prendre en compte les exigences envers le régulateur et les différentes parties prenantes. Ainsi la définition de la capacité de risque doit être en accord les exigences réglementaires de solvabilité.

#### **Profil de risque - "Risk profile" :**

Le profil de risque est par définition le niveau de risque auquel est actuellement exposé l'entreprise. Son évaluation doit tenir compte de l'ensemble des risques auxquels la compagnie est assujettie et du niveau d'exposition pour chacun des risques.

---

16. Barnes, "Evaluating Risk Appetite"

### **Appétit au risque - "Risk appetite" :**

Nature et niveau des risques que l'entreprise est prête à accepter pour atteindre ses objectifs stratégiques. On peut noter que la littérature utilise parfois le terme de tolérance au risque ou encore de "risk criteria" <sup>17</sup> au lieu de celui de "risk appetite". Il est important de relever que la directive Solvabilité II, ne fait pas mention du terme *appétit au risque*, le terme utilisé par la réglementation est celui de *tolérance au risque*.

### **Formalisation de l'appétit au risque - "Risk appetite statement" :**

Le "Risk appetite statement" est défini comme la formalisation écrite de l'appétit au risque de l'entreprise, il doit définir l'appétit au risque au niveau global ainsi qu'au niveau opérationnel. Il doit permettre d'identifier clairement la nature des risques et les différentes parties impliquées dans la gestion et le suivi de ces risques ainsi que les niveaux de tolérance qui y sont associés.

L'objectif est de clarifier les rôles de suivi, de gestion du risque mais également d'améliorer la transmission de l'information au sein de l'entreprise. Suite à la formalisation de l'appétit au risque, le conseil d'administration peut procéder au suivi des risques via le *Risk appetite dashboard*

### **Risk appetite limit**

Niveaux limite de risque à partir desquels un plan de redressement est mis en place par le conseil d'administration et les opérationnels.

### **Risk target**

Niveau ciblé de risque déterminé par le conseil d'administration. Celui-ci pourra être déterminé conjointement au business plan de l'entreprise.

## **2.4.2 Formulation de l'appétit au risque**

Notons dans un premier temps que l'appétit au risque doit être défini de façon limpide pour le conseil d'administration, afin de faciliter son intégration dans le pilotage de l'entreprise.

Ainsi il est préférable que l'appétit au risque repose sur des indicateurs usuels du pilotage de l'entreprise tenant compte des principales dimensions sur lesquels opèrent le conseil d'administration (cf tableau 1).

Dimensions	Parties prenantes	Indicateurs
Résultat	Actionnaires	Résultat comptable, financier, technique, Embedded Value...
Valeur de l'entreprise	Actionnaires	Fonds propres économiques/French GAAP, Goodwill...
Solvabilité	Régulateurs, agences de notation, Agences de notation	Ratio de solvabilité, SCR, SST...
Liquidité	Agences de notation, actionnaires...	Valeurs des actifs liquides

TABLE 1

17. On trouve le terme "risk criteria" dans le standard ISO 31000 :2018 "Management du risque"

Bien qu'il n'existe pas de consensus sur la façon de formuler son appétit au risque, la plupart des approches s'appuient sur la définition de bornes sur des indicateurs (quantitatifs et qualitatifs).

En général plusieurs bornes ou seuils sont définis, ils permettent aux instances dirigeantes de réagir progressivement en cas de dégradation du profil de risque.

Au sujet de la formulation de l'appétit au risque, on peut trouver les approches suivantes dans la littérature :

— Définition de bornes sur un indicateur usuel de pilotage

Cette approche consiste à définir l'appétit au risque par des bornes sur des indicateurs de pilotage de l'entreprise. Elle permet une bonne appropriation du concept d'appétit au risque par le conseil d'administration, cependant, la déclinaison de l'appétit au risque avec cette méthode n'est pas immédiate. Il est nécessaire de définir "à la main" des limites opérationnelles pour chaque preneur de risque et s'assurer que ces limites respectent l'appétit au risque global.

Exemple :

Indicateur	Bornes
ROE	> 3%
Ratio Combiné	< 97%
Ratio de Solvabilité	> 190%

TABLE 2 – Définition de bornes sur certains indicateurs de pilotage

— Définition de bornes sur une mesure de risque

Dans cette approche l'appétit au risque est formulé en définissant des bornes sur une mesure de risque. Il s'agit d'une approche pour laquelle il existe tout un cadre mathématique donnant des méthodes de déclinaison de l'appétit au risque au niveau opérationnel. Ces méthodes s'appuient notamment sur des raisonnements économiques empruntés de la théorie des jeux. Ainsi nous nous intéresserons plus particulièrement à cette approche dans la suite du mémoire. Nous reviendrons notamment dans la partie 2.4.4 sur les méthodes d'allocation du risque qui en découle.

Exemple :

Indicateur	Bornes
$VaR_{10\%}^{5\text{ ans}}(ROE)$	> 1%
$STD(ROE)^{18}$	< 5%
$VaR_{10\%}^{5\text{ ans}}(\text{Ratio de Solvabilité})$	> 170%

TABLE 3 – Définition de bornes sur certaines mesures de risque

La dernière contrainte pourrait se formuler de la façon suivante : Le ratio de solvabilité doit être supérieur à 170% dans plus de 90% des scénarios sur l'horizon du business plan à 5 ans.

La formulation de l'appétit au risque doit permettre non seulement d'identifier les principaux indicateurs de risque à suivre mais aussi d'orienter la stratégie de l'entreprise. En effet, le business plan doit être établi de façon à respecter l'appétit au risque de l'entreprise, ce qui doit permettre in fine de pérenniser la création de valeur de l'entreprise.

Ainsi la formulation de l'appétit au risque s'inscrit comme une étape essentielle de création de valeur saine.

### 2.4.3 Mesures de risque

La notion de mesure de risque est une notion centrale dans le domaine de la gestion des risques. Or comme discuté précédemment, il est possible de définir l'appétit au risque de l'entreprise en définissant certaines bornes sur des mesures de risque. Dans cette partie nous évoquerons les principales mesures de risque utilisées et nous présenterons certaines des mesures suscitant un intérêt grandissant dans la littérature scientifique.

Mathématiquement, une mesure de risque  $\rho$  est une application qui, à une variable aléatoire  $X$ , associe  $\rho(X) \in \mathbb{R}$ . Cependant cette définition est remise en question par certains auteurs, tels qu'Acerbi et Tasche, pour lesquels une mesure de risque qui n'est pas cohérente ne peut être considérée comme une mesure de risque<sup>19</sup>.

**Définition 1** (Mesure de risque cohérente). *Soit  $V$  un ensemble de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\rho : X \in V \rightarrow \rho(X) \in \mathbb{R}$  est une mesure de risque cohérente au sens de Atzner et al. (cf [20]) si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Invariance par translation :  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall X \in V, \rho(X + a) = \rho(X) + a$*
2. *Sous-additivité :  $\forall X, Y \in V, \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$*
3. *Homogénéité positive :  $\forall \lambda > 0$  et  $\forall X \in V, \lambda X \in V \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$*
4. *Monotonie :  $\forall X \in V, X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$*

*D'autres propriétés (convexité, comonotonie...) présentées en annexe H peuvent être utiles.*

La réglementation Solvabilité II, à titre d'exemple, quantifie le risque d'insolvabilité en mesurant le niveau de fonds propres nécessaire pour garantir la solvabilité de l'entreprise à horizon d'un an avec une probabilité supérieure à 99.5%.

Le test Suisse de solvabilité s'intéresse quant à lui à l'*expected shortfall* pour le même niveau de probabilité (cf figure 15).

Nous avons listé, ci-dessous, quelques unes des mesures de risque les plus utilisées. Il est possible, cependant, de trouver des listes plus exhaustives (cf [17]).

- **Probabilité de ruine** : Probabilité de voir le passif de l'entreprise devenir supérieur à l'actif. Cette mesure ne donne cependant pas d'indications sur le montant des pertes.
- **Mesures basées sur les moments** :
  - **Ecart-type** : mesure populaire dans la théorie du portefeuille (Markowitz), cette mesure est néanmoins sujette à des critiques car elle considère à la fois les résultats négatifs et positifs.
  - **Semi-Variance** : afin de ne prendre en compte que les résultats négatifs, cette mesure introduit un seuil  $\tau$  :

$$Semi - STD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\min(0, X_i - \tau))^2}{n}}$$

---

19. Acerbi et Tasche : *in our opinion, speaking of non-coherent measures of risk is as useless and dangerous as speaking of non-coherent measures of temperature.* Source : Acerbi and Tasche (2001) Expected Shortfall : a natural coherent alternative to Value at Risk

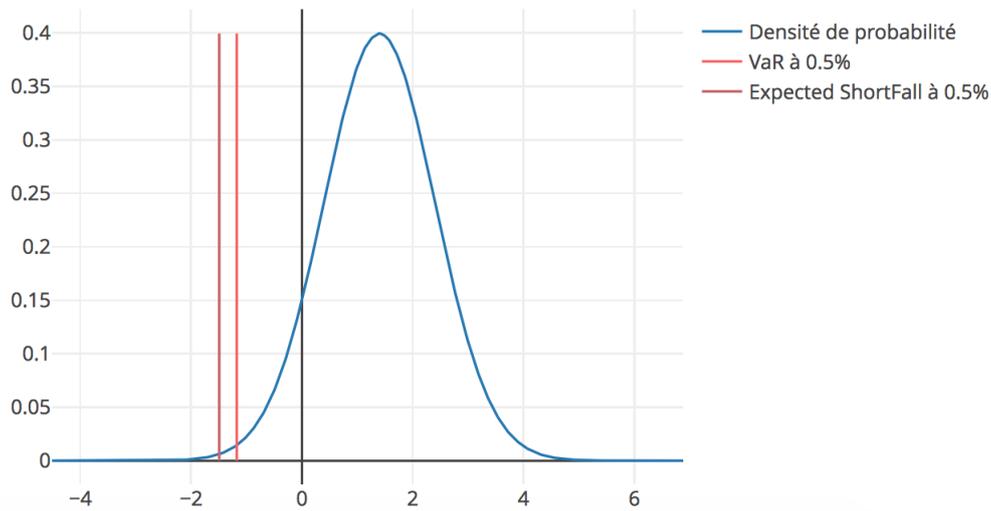


FIGURE 15 – Illustration VaR et Expected Shortfall

— **Mesures basées sur les quantiles :**

- **VaR** : Elle correspond au quantile d'une variable aléatoire pour un certain horizon de temps fixé.

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{l \in \mathbb{R} | F_L(l) > \alpha\}$$

Cette mesure est largement répandue dans le cadre réglementaire (Bâle III et Solvabilité II) et il s'agit d'une des métriques les plus utilisées par les banques pour mesurer le risque de marché. Cependant, il faut noter qu'en général la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité<sup>20</sup>. Ainsi la diversification ne permet pas de systématiquement réduire le risque associé à cette métrique.

- **TVaR** (appelée aussi CVaR ou AVaR ou Expected Shortfall) : elle correspond à l'une des mesures les plus utilisées après la VaR.

$$TVaR = \mathbb{E}[L | L \geq VaR_\alpha(L)] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du$$

Cette mesure de risque est cohérente contrairement à la VaR, ce qui en fait une mesure de risque intéressante pour prendre en compte les effets de la diversification.

- **EVaR (ou Expectiles)** : L'expectile est une mesure de risque cohérente qui a récemment été suggérée comme alternative à la VaR et à la TVaR. Il s'agit en outre d'une des seules mesures de risque vérifiant la propriété d'*elicibility* (littéralement : admissibilité) qui a reçu une attention grandissante car elle affirme l'existence d'une méthode "naturelle" de backtesting. Cette propriété est présentée plus en détail en annexe H.2.

Le lecteur intéressé pourra notamment s'orienter vers l'article de Bellini [13]

20. La propriété de sous-additivité ( $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ ) est vérifiée si la distribution jointe de X et Y vérifie certaines bonnes propriétés (cf Annexe H). Certaines familles de lois comme les lois normales vérifient la propriété de sous-additivité, cependant les distributions étudiées en assurance et en gestion des risque suivent rarement celle d'une loi normale.

Mesure de risque	Cohérente	Invariance en loi	Convexité
Probabilité de ruine		X	
Ecart-Type		X	X
Semi-Variance		X	X
VaR		X	
TVaR	X	X	X
EVaR (pour $\beta > 1/2$ )	X	X	X

TABLE 4 – Propriétés des mesures de risque

et vers l'ouvrage *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall* de Simona Rociletti [21] pour plus de précisions sur cette propriété et sur les comparaisons possibles entre la VaR, la TVaR et l'EVaR. Notons que la propriété d'*elicibility* est vérifiée par la VaR mais pas par l'Expected Shortfall.

**Définition 2** (EVaR). *Pour  $0 < \beta < 1$ , l'expectile de niveau  $\beta$ ,  $e_\beta(L)$ , est défini par la formule ci-dessous :*

$$e_\beta(L) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\beta \cdot (\max(l - L, 0))^2 + (1 - \beta) \cdot (\max(L - l, 0))^+]$$

Cette définition peut rappeler celle du quantile de niveau  $\alpha$ , qui peut se définir par la formule suivante :

$$q_\alpha(L) := \arg \min_{l \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\alpha \cdot (L - l)^- + (1 - \alpha) \cdot (L - l)^+]$$

L'un des avantages de cette mesure de risque est qu'elle permet de prendre en compte les deux queues de distribution (droite et gauche) en les pondérant selon le paramètre  $\beta$ . Ce paramètre  $\beta$  vérifie

$$\frac{\mathbb{E}[(L - e_\beta(L))^+]}{\mathbb{E}[(L - e_\beta(L))^-]} = \frac{\beta}{1 - \beta}$$

La VaR reste une mesure de risque très répandue en assurance et en finance, sa facilité d'interprétation en fait une métrique intéressante dans le pilotage de l'activité. On peut noter cependant que d'autres métriques comme la TVaR ou l'EVaR pourraient constituer des alternatives intéressantes à la VaR.

### **Horizon d'intérêt**

L'horizon utilisé pour la mesure de risque peut varier selon l'entité ou le risque pris en considération. Dans le cadre de l'ORSA, il est préférable de faire coïncider l'horizon sur lequel les risques sont évalués avec l'horizon du business plan.

La mesure de risque retenue dans la suite de ce mémoire sera donc la VaR associée à un horizon correspondant à celui du business plan (5 ans). Le niveau de probabilité et les indicateurs utilisés (ROE, ratio combiné..) seront présentés dans la partie 5.

#### **2.4.4 Déclinaison de l'appétit au risque**

La déclinaison de l'appétit au risque global en tolérance par catégories de risque est relativement complexe et reste sujette à débat. Elle consiste en deux volets :

- a. La détermination des limites de tolérance au risque
- b. La détermination des cibles de tolérance au risque

Sa complexité réside d'une part dans le fait qu'il n'existe pas ou peu de méthodes simples pour décliner ce risque et d'autre part, dans le fait que la déclinaison de ce risque est sujette à plusieurs contraintes :

- **Contrainte définie par l'appétit au risque global** : les limites de tolérance par catégories de risque doivent permettre de respecter l'appétit au risque global défini par le conseil d'administration
- **Contrainte stratégique** : en fonction de la stratégie de l'entreprise, le senior management peut avoir des préférences pour certaines catégories de risques et décider d'ajuster les limites de tolérance, en fonction de ces préférences.

### a. Détermination des limites de tolérance au risque :

La détermination des limites de tolérance au risque peut s'apparenter à une problématique d'allocation du capital (ou budget risque). L'allocation du capital consiste en l'allocation du risque global aux différentes catégories de risque en prenant en compte les effets de diversification.

Elle permet ainsi de mesurer le risque des différents facteurs de risque (action, taux, souscription...) au regard des effets de diversification entre ces facteurs.

Notons que ces méthodes supposent d'utiliser la même mesure de risque au niveau global et par catégories de risque.

Il existe plusieurs méthodes d'allocation du capital dans la littérature scientifique. Les principales méthodes d'allocation sont rappelées ci-dessous, présentées par ordre croissant de complexité d'implémentation<sup>21</sup> :

- **Méthode proportionnelle** : méthode la plus simple à mettre en oeuvre, les effets de la diversification sont alloués proportionnellement au niveau de risque de chaque module.

$$\rho(X_i|X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in \mathbf{I}} \rho(X_j)} \rho(X_{\mathbf{I}}) \quad (1)$$

avec  $\mathbf{I}$  l'ensemble des risques et  $\rho(X_{\mathbf{I}})$  le risque global.

Bien que cette méthode soit simple à implémenter, elle ne permet pas de prendre en compte l'impact marginal de chaque risque sur l'effet de diversification.

- **Méthode marginale (ou méthode incrémentale)** : méthode allouant les effets de la diversification selon *l'impact marginal* de chaque module au risque global.

$$\rho(X_i|X) = \frac{\rho(X_{\mathbf{I}}) - \rho(X_{\mathbf{I} \setminus \{i\}})}{\sum_{j \in \mathbf{I}} \rho(X_{\mathbf{I}}) - \rho(X_{\mathbf{I} \setminus \{j\}})} \rho(X_{\mathbf{I}}) = \frac{IM_i}{\sum_{j \in \mathbf{I}} IM_j} \rho(X_{\mathbf{I}}) \quad (2)$$

avec  $IM_i = \rho(X_{\mathbf{I}}) - \rho(X_{\mathbf{I} \setminus \{i\}})$  *l'impact marginal* du risque  $i$  sur le risque global.

L'un des inconvénients de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte des impacts marginaux de chaque module à des sous-ensemble du risque global. La méthode

---

21. Nous noterons dans la suite  $\rho(X)$  la mesure du risque  $X$  et  $\rho(X_i|X)$  l'allocation du risque au facteur de risque  $i$

d'Aumann-Shapley se présente ainsi comme une amélioration de la méthode marginale.

- **Méthode d'Aumann-Shapley** : Cette méthode fut développée initialement pour allouer le coût total entre joueurs (méthode tirée de la théorie des jeux), par la suite elle fut adaptée à l'allocation du capital. Il est important de noter que la méthode d'Aumann-Shapley s'applique dans le cas d'une mesure de risque sous-additive, ce qui n'est pas toujours le cas la VaR.

*Intuition* : L'allocation du risque global au module  $i$  est calculé comme la moyenne des contributions marginales du module  $i$  aux parties (coalitions) de  $\mathbf{I}$  contenant  $i$ . La contribution marginale apportée par le module  $i$  à la coalition  $S \subset \mathbf{I}$  est  $\rho(S) - \rho(S \setminus \{i\})$ . Il y a  $(|S| - 1)!$  ordres d'entrées possibles pour les modules de  $S \setminus \{i\}$  et  $(n - |S|)!$  pour les modules restants. Soit  $(|S| - 1)!(n - |S|)!$  façons de recevoir la contribution marginale  $\rho(S) - \rho(S \setminus \{i\})$ .

Ainsi l'allocation obtenue avec la méthode d'Aumann-Shapley est :

$$\rho(X_i|X) = \sum_{S \in \Delta_i} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} (\rho(X_S) - \rho(S \setminus \{i\})) \quad (3)$$

avec  $|S|$  le cardinal de  $S$  et  $\Delta_i$  l'ensemble des parties de  $\mathbf{I}$  contenant  $i$ .

En règle général la méthode d'Aumann-Shapley est l'une des méthodes les plus coûteuses en temps de calcul parmi les méthodes présentées.

- **Méthode d'Euler** : Les 3 premières méthodes présentées sont des méthodes dites discrètes car elles ne supposent pas les segments fractionnables. La méthode d'Euler, au contraire, est une méthode dite continue. Elle suppose les segments fractionnables<sup>22</sup> et alloue ainsi le risque selon l'impact marginal infinitésimal de chaque module sur le risque global.

$$\rho(X_i|X) = \lim_{u_i \rightarrow 0} \frac{\rho(X) - \rho(X - u_i X_i)}{u_i} \quad (4)$$

Ainsi dans le cas où  $f_\rho : u \in \mathbb{R}^n \rightarrow f_\rho(u) = \rho(X(u))$  est différentiable, on a :

$$\rho(X_i|X) = \frac{\partial f_\rho}{\partial u_i}(\mathbf{1})$$

Parmi les méthodes présentées ci-dessus, la méthode d'Euler est probablement l'une des plus populaires dans la littérature scientifique. Elle permet de donner des interprétations économiques aux capitaux alloués mais également de vérifier, sous certaines hypothèses, la propriété de RORAC-compatibilité<sup>23</sup>.

#### Un exemple : Allocation en formule standard

La méthode d'Euler peut aisément être appliquée à la mesure de risque définie par le SCR en formule standard.

En effet la formule standard de la directive *Solvabilité II* agrège les différents facteurs risques à partir de matrices de corrélations, le risque global s'écrit alors comme une combinaison de différents *sous-risques* ou modules :

22. Suppose que l'on puisse écrire  $X = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i X_i$  avec  $u_i \in \mathbb{R}$

23. Cette propriété est rappelé dans la partie suivante portant sur la détermination des niveaux cibles de risque.

$$SCR = \sqrt{\sum_{j,k \in [1,n]^2} \rho_{j,k} \cdot SCR_j \cdot SCR_k}$$

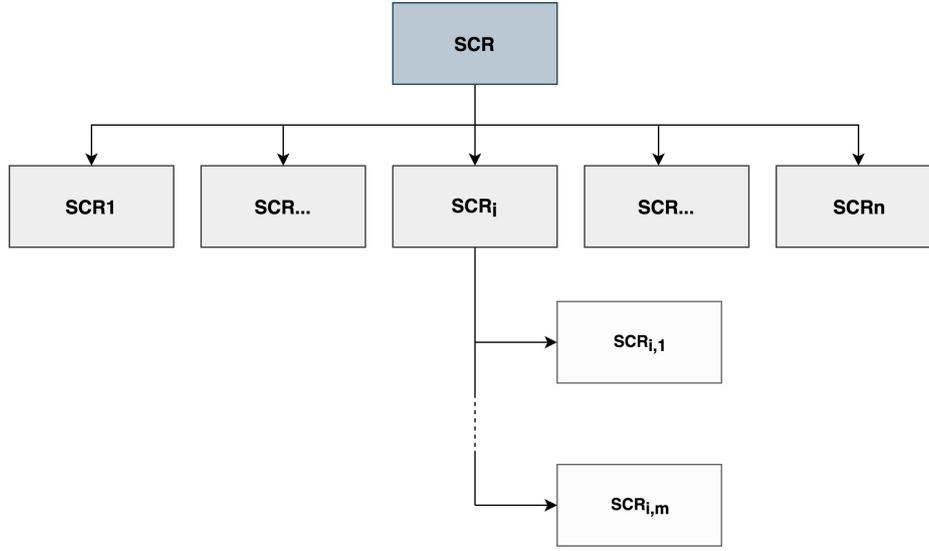


FIGURE 16 – Schéma d'agrégation

On remarque que l'application  $SCR_i \in \mathbb{R}^+ \rightarrow SCR$  est continuellement dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$ . Ainsi l'allocation du risque global au sous-module  $i$  est bien définie par la méthode d'Euler et vaut alors :

$$SCR_i|SCR = SCR_i \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i} = SCR_i \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \rho_{i,j} SCR_j}{SCR}$$

De la même façon le risque  $SCR_i$  du module  $i$  est calculé en agrégeant les risques  $SCR_{(i,j)}$  associés aux sous-modules  $(i, j)$ . Ainsi l'allocation du risque global au sous-module  $(i, j)$  est bien définie selon la méthode d'Euler et s'obtient en dérivant de la même façon que précédemment :

$$SCR_i = \sqrt{\sum_{j,k \in [1,m]^2} \rho_{j,k}^i \cdot SCR_{i,j} \cdot SCR_{i,k}}$$

D'où l'allocation du risque global au sous-module  $(i, j)$  :

$$\begin{aligned} SCR_{i,j}|SCR &= SCR_{i,j} \cdot \frac{\partial SCR_i}{\partial SCR_{i,j}} \cdot \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i} \\ SCR_{i,j}|SCR &= SCR_{i,j} \cdot \frac{\sum_{k=1}^m \rho_{j,k}^i SCR_{i,k}}{SCR_i} \cdot \frac{SCR_i|SCR}{SCR_i} \end{aligned} \quad (5)$$

La méthode d'allocation présentée ci-dessus nous permet ainsi d'allouer le risque global aux différents facteurs de risque de la formule standard. Cependant la maille proposée par la formule standard peut être adaptée à une maille de risque propre à l'entreprise. Nous présentons en annexe B.1 une méthode d'allocation du risque souscription à différentes lignes d'activité différentes de celles de la formule standard.

Une fois les limites de risque déterminées, il peut être utile de définir des niveaux de **vigilance** et des niveaux **cibles** de risque afin de parfaire le pilotage de l'entreprise. Le

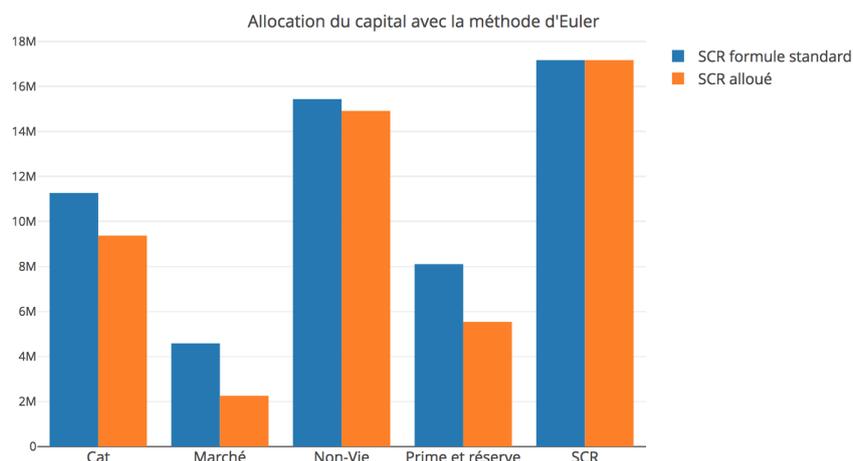


FIGURE 17 – Allocation du capital en utilisant la méthode d’Euler. Le "SCR formule standard" correspond au risque calculé via la formule standard du SCR. Le "SCR alloué" correspond à l’allocation obtenu avec la méthode d’Euler, il prend donc en compte les effets de diversification entre les différents modules.

niveau de vigilance correspond ici au niveau pour lequel un premier plan d’action peut commencer à être engagé avant que la limite ne soit atteinte. Le niveau cible correspond quant à lui au budget risque optimale pour l’entreprise, qui permet d’optimiser à la fois le rendement et le risque de l’assurance.

### b. Détermination des cibles de tolérance au risque :

La détermination du niveau cible de risque peut être rapprochée à l’optimisation d’un couple rentabilité/risque<sup>24</sup>. L’optimisation de ce couple n’est pas simple car rentabilité et risque sont généralement des objectifs contradictoires.

#### Optimisation de la rentabilité ajustée au risque : RORAC (ou RAROC)

Selon Granito et Angelis, la méthode d’allocation vue précédemment permet justement de définir un indicateur de performance ajustée au risque vérifiant la propriété de RORAC-compatibilité.

Cette propriété énoncée ci-dessous donne alors une interprétation économique intéressante à l’indicateur calculé : si la rentabilité d’une des lignes activités est supérieure à la rentabilité globale, alors il est possible d’améliorer la rentabilité globale en augmentant la part de cette activité dans le portefeuille.

**Définition 3** (RORAC-compatibilité). *Les contributions au risque  $\rho(X_i|X)$  sont RORAC-compatibles si  $\forall i \in [1, n]$ , il existe  $\epsilon_i$  tel que*

$$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + h X_i|X) > RORAC(X) \quad (\forall h \in [0, \epsilon_i])$$

Lorsque cette propriété est vérifiée, on vérifie alors aisément que la rentabilité ajustée au risque est maximale lorsque les rentabilités des différentes lignes d’activités sont égales. La figure 18 illustre cette propriété pour le calcul de la rentabilité ajustée au risque de primes et réserves.

24. cf Théorie moderne du portefeuille de Markowitz qui expose justement comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d’optimiser leur portefeuille

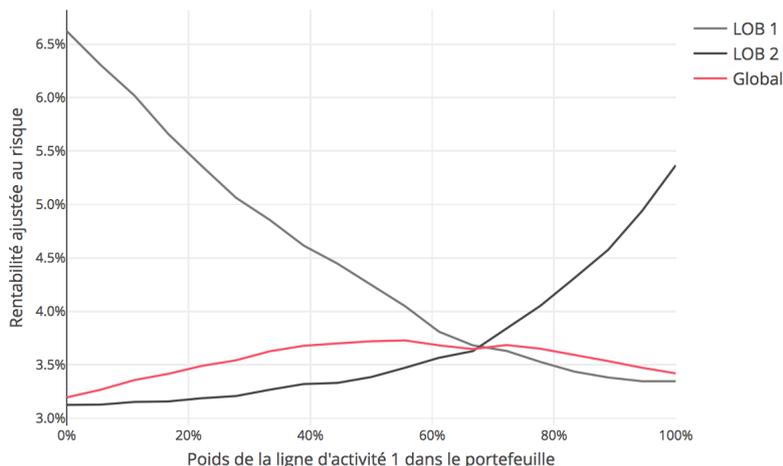


FIGURE 18 – Rentabilité ajustée au risque

Sur la figure 18 la rentabilité globale est maximale lorsque le poids de la ligne d'activité 1 représente 68% du portefeuille. Ce point correspond donc à une optimisation optimale du budget risque. Le niveau cible de risque pourrait correspondre au niveau de risque associé à ce point.

Notons néanmoins que le RORAC ne répond que partiellement au problème d'optimisation du couple rendement-risque, car il ne permet de prendre en compte qu'une seule mesure de risque.

Or aujourd'hui l'ORSA exige des entreprises d'assurance d'identifier et de gérer des risques associés non seulement à différents horizons de temps (court terme et long terme) mais aussi à différentes métriques (métriques associées au centre de la distribution, métriques associées à la queue de la distribution...).

Ainsi il est important de noter que de nouvelles approches tirées de l'informatique et de la recherche opérationnelle ont proposé de répondre à ce problème via le cadre de l'optimisation multicritère (cf [15] Schlottmann & al. (2005) *A Multi-objective Approach to Integrated Risk Management*). L'optimisation du couple rendement-risque est alors approché comme un problème multiobjectif prenant en compte plusieurs mesures de risque  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  :

$$\min_{X=(x_1, \dots, x_n), \sum_i x_i=1} (-return(X), \rho_1(X), \dots, \rho_k(X))$$

Finalement, bien que les méthodes présentées ci-dessus permettent de fournir un cadre mathématique pour la détermination des couples rendement-risque optimaux, le choix du niveau de rentabilité et de risque à suivre est soumis in fine aux préférences du conseil d'administration.

Une fois les facteurs de risques identifiés et les limites de tolérance au risque déterminées, il est nécessaire de mettre en place des outils permettant de suivre le respect de ces limites.

#### 2.4.5 Dashboard de suivi du risque

La réglementation précise que l'entreprise doit être en mesure de suivre l'adéquation de son profil de risque avec les limites qu'elle s'est fixée.

Afin d'assurer cette fonction, les entreprises doivent mettre en place "un système d'information et de reporting qui produise des informations complètes, fiables, claires, cohérentes, pertinentes et à jour sur les activités de l'entreprise, ses engagements et les risques auxquels elle est exposée"<sup>25</sup>.

Ce système d'information doit contenir des indicateurs pertinents et facilitant la communication entre conseil d'administration et opérationnel mais il doit également permettre d'évaluer le respect ou non des limites d'appétit au risque de l'entreprise.

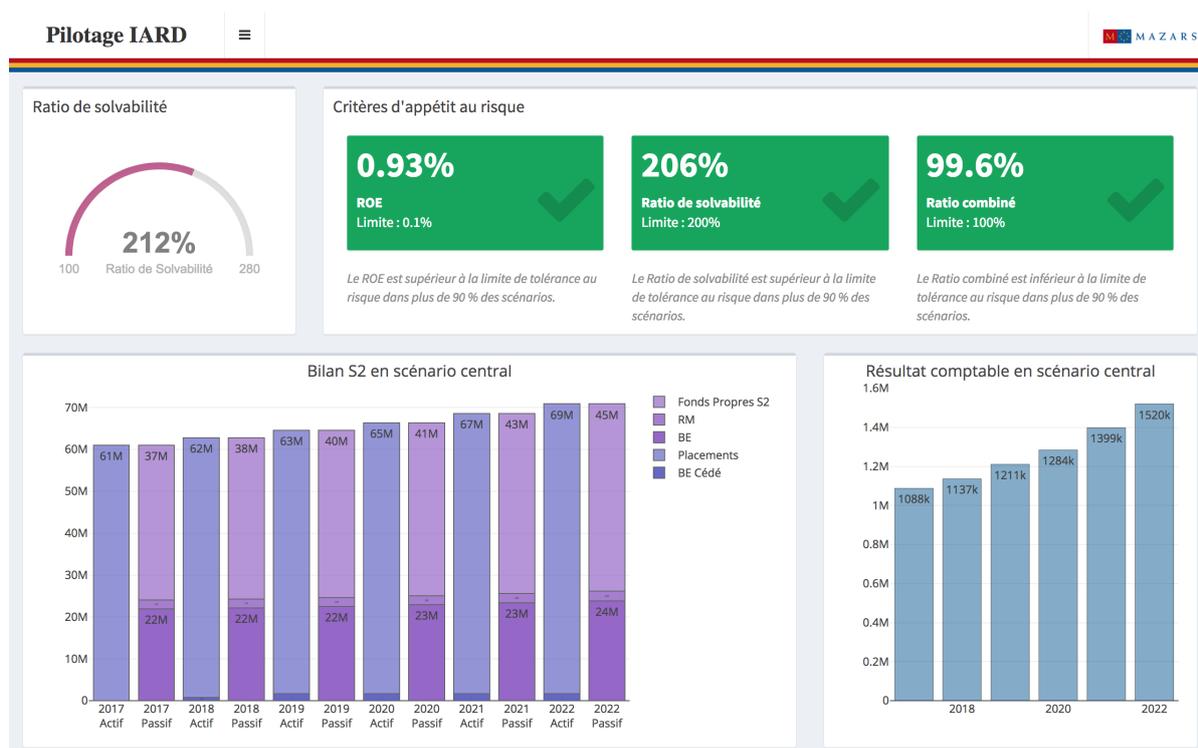


FIGURE 19 – Illustration de dashboard de suivi du risque

A titre d'exemple, la valeur de marché des actions peut représenter un indicateur pertinent du risque action. Ainsi le tableau de bord pourra contenir un ou plusieurs visuels donnant des indications notamment sur la valeur de marché des actions et leur poids dans le portefeuille d'actif.

## 2.4.6 Conclusion

Le cadre de l'appétit au risque introduit par l'ORSA doit permettre aux entreprises d'assurance d'intégrer la gestion des risques dans leur pilotage de l'entreprise. L'appétit au risque représente les limites au sein desquels le conseil d'administration cherche à optimiser sa stratégie. Ainsi l'ORSA place non seulement les gestionnaires de risque en étroite collaboration avec le conseil d'administration, mais elle amène également les entreprises à s'orienter vers un pilotage à trois dimensions, où risque, rentabilité et croissance doivent être optimisés simultanément.

25. cf. Règlement délégué Solvabilité II [18], Chapitre *Système de gouvernance* article 258 alinéa 1.

## 2.5 Leviers de pilotage

Nous avons défini dans un premier temps le cadre de l'appétit au risque introduit aux assureurs avec l'ORSA. Ce cadre pose un système d'évaluation des risques et donne un périmètre dans lequel le conseil d'administration peut opérer pour définir la stratégie de l'entreprise tout en respectant son appétit au risque.

Nous définissons ci-dessous certains leviers de pilotage envisageables par le conseil d'administration.

### Allocation d'actif :

L'actif des entreprises d'assurance est en général constitué majoritairement de placements (actions, obligations, immobilier...). La stratégie d'allocation de ces placements impacte à la fois le rendement, la liquidité mais aussi le SCR de l'entreprise. En effet la réglementation Solvabilité II pénalise fortement les entreprises possédant un fort taux d'actions dans leur portefeuille, la partie 5 illustrera la sensibilité du SCR au pourcentage d'actions en portefeuille.

### Développement / Rachat de portefeuille :

Le développement de nouveaux contrats, le rachat de portefeuille d'assurés ou le développement géographique sont des leviers de pilotage communs non seulement aux assurances mais à toutes les entreprises.

Cependant dans les cas d'une entreprise d'assurance, ces leviers revêtent une plus grande importance; ils permettent de diversifier le risque de l'assureur tout en augmentant le chiffre d'affaire.

Ces leviers peuvent donc permettre d'améliorer la rentabilité ajustée au risque de l'entreprise.

### Réassurance :

La réassurance constitue une des principales méthodes d'atténuation du risque. En cédant du risque, l'assureur accepte de perdre éventuellement une partie de son résultat technique, mais il peut ainsi limiter ses pertes extrêmes et réduire la variabilité de son résultat.

Dans le cas d'un contrat quote-part de taux de cession  $\alpha$ , l'assureur s'engage à céder la part  $\alpha$  des primes, en contrepartie de l'engagement du réassureur à régler la part  $\alpha$  des sinistres. La figure 20 illustre l'évolution de la distribution du résultat pour différents taux de cession. Lorsque le taux de cession augmente le résultat moyen tend à diminuer, tandis que la queue de la distribution tend également à s'aplatir.

Il existe une multitude de traités de réassurance (Quote-Part, Excédent de plein, Excédent de sinistre, ECOMOR...). Ces traités peuvent être "combinés" entre eux : un assureur peut par exemple choisir de céder 20% de son risque en quote-part, puis d'appliquer un excédent de plein sur les 80 % restant. Il est ainsi possible d'empiler plusieurs traités de réassurance de différentes natures.

En matière de stratégie de réassurance, les possibilités sont donc quasi-infinies, ce qui rend l'optimisation de la stratégie de réassurance d'autant plus compliquée.

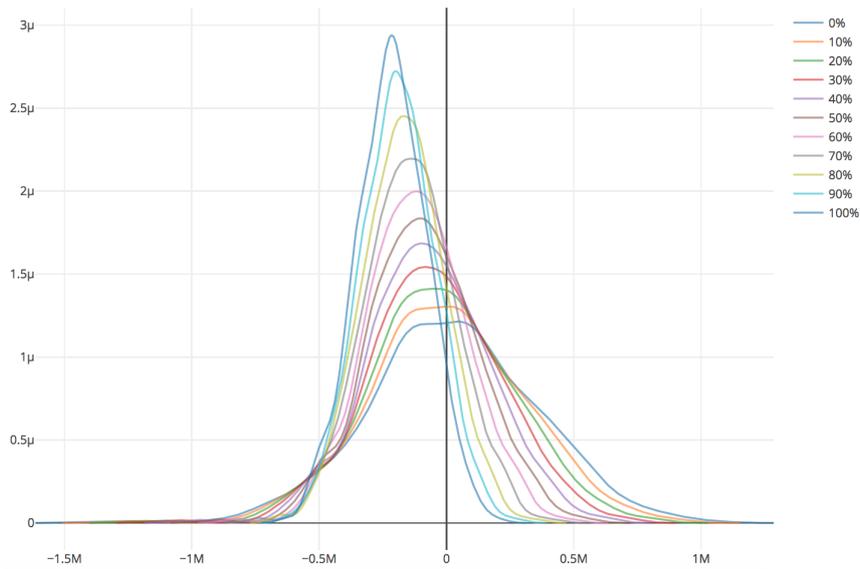


FIGURE 20 – Distribution du résultat en fonction du taux de cession en Quote-Part (Taux de commission de réassurance : 16%)

### Stratégie tarifaire :

La stratégie tarifaire correspond aux niveaux moyens de prime. Ceux-ci peuvent dépendre de plusieurs paramètres et ne correspondent pas forcément à la prime pure. La prime pure reflète le coût de l'assuré ( $P = \mathbb{E}(S)$  avec  $S$  les prestations payées). Cependant la loi de probabilité des sinistres payés n'est pas connue mais est estimée selon les données passées de l'assureur. Ainsi si le portefeuille de l'assureur se dégrade et se retrouve composé de plus gros risques, il peut être judicieux de monter le niveau des primes. Cependant par effet d'antisélection, l'augmentation des primes peut également en contrepartie faire fuir les "bons" risques. En pratique la segmentation effectuée par les équipes d'actuariat et les équipes commerciales doivent permettre de parer à cet effet. La stratégie tarifaire peut également être établie en proposant des produits d'appel. Les produits d'appels sont des produits dont l'objectif n'est pas de tirer un profit, mais d'induire des ventes dans d'autres produits sur lesquels l'assureur pourra obtenir un bénéfice. Le marché de l'assurance automobile en France est un exemple de produit d'appel.

## 2.6 Conclusion

Le cadre défini par l'ORSA vient renforcer la dimension risque dans le pilotage des entreprises d'assurance, ce qui augmente le nombre d'indicateurs et de contraintes de pilotage. La définition d'une stratégie de pilotage est donc plus que jamais un problème dans lequel de nombreux objectifs entrent en jeu (croissance, rentabilité, respect des contraintes d'appétit au risque...). Toutefois les leviers d'actions du conseil d'administrations sont multiples et leurs impacts sur les indicateurs de pilotage n'est pas simple à anticiper. Nous nous intéresserons dans la partie suivante à la construction d'un modèle de projection permettant de prévoir l'impact de stratégies de pilotage sur l'horizon du business plan de l'entreprise.

### 3 Modèle de projection

Ces dernières décennies, l'utilisation de modèles de projection s'est grandement démocratisé dans les entreprises d'assurance et de réassurance. C'est l'apparition des premiers modèles DFA<sup>26</sup> dans les années 80, avec notamment le modèle de Wilkie en 1986 et le développement de la puissance de calcul des ordinateurs qui ont permis de démocratiser l'utilisation de modèles ALM<sup>27</sup> en assurance vie. L'utilisation de tels modèles de projection s'est alors révélé être un outil essentiel à la bonne gestion des risques des entreprises d'assurance.

Aujourd'hui, l'utilisation de modèles de projection du bilan de l'entreprise a été rendue obligatoire en conséquence de la démocratisation des démarches ERM<sup>28</sup> et de nouvelles exigences des régulateurs<sup>29</sup>.

Actuellement, différentes approches existent pour la projection du bilan de l'entreprise ; certaines s'appuient sur l'utilisation de scénarios centraux et de scénarios stressés, tandis que d'autres s'appuient sur des scénarios stochastiques calibrés sur des données historiques. On note que la directive Solvabilité II précise que le processus ORSA doit comporter l'utilisation de scénarios stressés.

#### 3.1 Hypothèses générales

Le modèle de projection du bilan de l'entreprise repose sur certaines hypothèses générales listées ci-dessous :

- **Hypothèses concernant l'actif :**
  - Les actifs sont fractionnables de façon infinitésimale
- **Hypothèses de cash flow :**
  - Les prestations (de l'assureur et du réassureur) sont payées le 31/12/N
  - Les primes (perçues par l'assureur et le réassureur) sont payées le 31/12/N
  - Pour les obligations, le versement des coupons et le remboursement du nominal tombent le 31/12/N

Dans le cas de l'entreprise modélisée dans la partie 5, d'autres hypothèses simplificatrices seront prises en compte concernant les impôts, les dividendes ainsi que les coupons versés par les obligations.

#### 3.2 Modélisation de la sinistralité

Les scénarios stochastiques de sinistralité sont générés suivant un modèle collectif. La sinistralité totale est générée en simulant dans un premier temps le nombre de sinistres puis les coûts individuels de ces sinistres. En outre afin de prendre en compte des scénarios avec des sinistres de sévérité plus ou moins forte, la sinistralité globale est décomposée en sinistralité attritionnelle et grave (voir Figure 21).

La sinistralité des différentes lignes d'activité est simulée sans prise en compte de dépendance. En effet la prise en compte d'une dépendance entre les lignes d'activité nécessiterait de recourir à l'utilisation de copules, or l'estimation des paramètres s'avèrerait délicate car elle requiert de disposer d'un historique suffisant de données.

---

26. Dynamic Financial Analysis

27. Asset Liability Management

28. Enterprise Risk Management

29. Notamment avec le calcul de provisions *Best Estimate* en assurance vie.

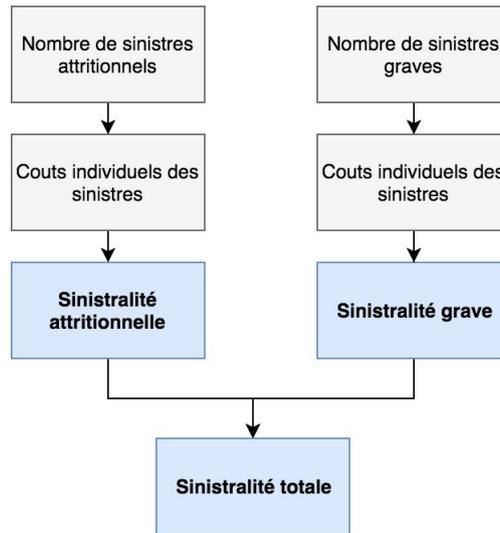


FIGURE 21 – Simulation de la sinistralité pour chaque ligne d’activité

### 3.2.1 Modélisation du cout ultime

La sinistralité globale de chaque ligne de business est décomposée en sinistralité attritionnelle et grave. Ainsi en notant  $S_{lob_i}$  la charge ultime pour la ligne de business  $i$ , on a la relation :

$$S_{lob_i} = S_{lob_i, attri} + S_{lob_i, grave}$$

Les sinistres attritionnels et graves sont alors modélisés par un modèle collectif, de loi  $\mathbb{P}_{N_{lob_i, attri}}$  pour le nombre de sinistres et  $\mathbb{P}_{X_{lob_i, attri}}$  pour le cout ultime des sinistres :

$$S_{lob_i, j} = \sum_{k=1}^{N_{lob_i, j}} X_{lob_i, j}^k,$$

$$j \in \{grave, attri\}$$

### 3.2.2 Règlement des sinistres

Le règlement des sinistres est supposé déterministe, tous les sinistres d’une même ligne d’activité sont réglés selon la même cadence. Ainsi les prestations payées l’année  $N_0 + j$  pour les sinistres survenus l’année  $N_0$  s’écrivent :

$$Prest_{lob_i}^{N_0, N_0+j} = \alpha_{lob_i}^j \cdot S_{lob_i}^{N_0}$$

Avec  $S_{lob_i, j}^{N_0}$  le cout ultime des sinistres survenus l’année  $N_0$ .

## 3.3 Réassurance

### 3.3.1 Quote-part

Les traités de réassurance de type quote-part sont définis par un taux de cession  $\alpha$  et un taux de commission de réassurance  $\beta$ . Le réassureur perçoit  $\alpha(1 - \beta)P$  (avec  $P$  le montant de l’assiette de prime du traité) et s’engage à payer  $\alpha \cdot S$  (avec  $S$  la charge des sinistres associés à l’assiette de primes prise en compte). Le taux de commission de réassurance fait l’objet d’une négociation entre l’assureur et le réassureur. En règle général

plus le ratio de sinistres à primes est "mauvais" plus le taux de commission de réassurance négocié sera faible.

Dans le modèle proposé ici le taux de cession est exogène et est fixé par l'utilisateur, tandis que le taux de commission de réassurance est endogène, il varie selon les simulations et les années de projection en fonction du ratio de sinistres à primes constaté sur la ligne d'activité concernée. Ainsi nous déterminerons le taux de commission de réassurance à chaque pas de temps par la formule suivante :

$$\beta_t = 0.8 \cdot \left(1 - \frac{\hat{S}_t}{\hat{P}_t}\right)^+ \quad (6)$$

Le ratio  $\hat{S}_t/\hat{P}_t$  ci-dessus est estimé à chaque date  $t$  sur la base des sinistres et des primes pris entre  $t - 1$  et  $t - 3$  :

$$\frac{\hat{S}_t}{\hat{P}_t} = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{t-i}}{\sum_{i=1}^3 P_{t-i}}$$

avec  $S_{t-i}$  et  $P_{t-i}$  respectivement les sinistres et les primes de l'année  $t - i$ .

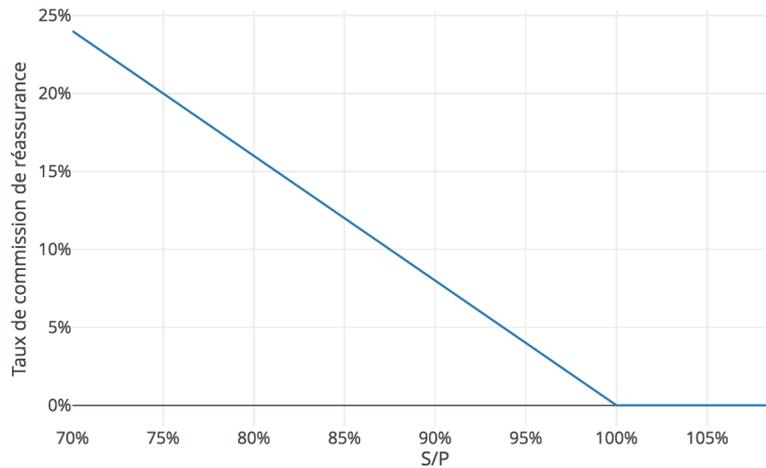


FIGURE 22 – Taux de commission de réassurance du modèle en fonction du S/P

La formule proposée pour le calcul de la commission de réassurance permet de partager les bénéfices espérés du réassureur avec l'assureur. Cependant on note que d'autres propositions auraient pu être faite pour le calcul de la commission de réassurance.

L'approche proposée ici se base sur les gains espérés par le réassureur et l'assureur, mais il aurait été possible, par exemple, de prendre en compte la variabilité de ces gains ou encore le coût du capital réglementaire nécessaire au réassureur pour couvrir son engagement vis à vis de l'assureur.

### 3.3.2 Excédent de sinistre

Les contrats dits *excédent de sinistre* sont caractérisés par une priorité  $a$  et une portée  $b$ . Le réassureur perçoit une prime  $P_{XS}$  de l'assureur et s'engage à verser l'excédent des sinistres dépassant la priorité, et ce dans la limite de la portée :

$$\min(\max(X - a, 0), b)$$

Dans le cas où il s'agit d'un excédent de sinistre par risque,  $X$  correspond au montant de prestation que doit payer l'assureur pour un sinistre associé au risque considéré. Dans le

cas d'un excédent de sinistre par événement,  $X$  correspond à l'agrégation des prestations que l'assureur doit payer suite à la survenance d'un événement touchant éventuellement plusieurs polices.

Dans le modèle proposé, la prime  $P_{XS}$  payée par l'assureur correspond à la prime pure :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N \min(\max(X_i - a, 0), b) \right), \text{ avec } N \text{ le nombre de sinistres}$$

La prime pure payée dans le modèle proposé est alors estimée en calculant la moyenne empirique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} (\min(\max(X_i^k - a, 0), b))$$

avec  $n$  le nombre de simulations,  $N_k$  le nombre de sinistres de la simulation numéro  $k$  et  $X_i^k$  le coût du  $i^{\text{me}}$  sinistre de la simulation  $k$ . Afin de gagner en temps de calcul, nous émettons l'hypothèse que les sinistres attritionnels sont systématiquement de montant inférieur à la priorité, ainsi les contrats XS sont uniquement appliqués aux sinistres graves.

### 3.4 Modélisation des variables économiques

La projection de l'actif de l'entreprise passe par l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques (GSE) permettant de simuler différentes variables économiques telles que les taux d'intérêts zéro-coupons ou le rendement des actions. Il est important de noter que le calibrage d'un GSE peut être effectué selon deux méthodes :

- *risque neutre* : le modèle est calibré sur les données de marché disponibles à l'instant du calibrage (les valeurs des *swaptions* par exemple pour les modèles de taux d'intérêt). Cette méthode est utile pour valoriser des produits financiers ou des contrats d'assurance vie via des méthodes de Monte Carlo. Cependant ce mode de calibrage repose sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ; cette hypothèse utile en valorisation devient alors une contrainte en gestion des risques
- *monde réel* ou *historique* : dans le cadre de la gestion des risques les modèles utilisés sont calibrés en monde réel<sup>30</sup>. Cela signifie que les données utilisées sont des données historiques, comme par exemple l'*EURIBOR 3-Mois* pris entre janvier 2017 et août 2018.

Le calibrage sur les données historiques étant la plus adaptée dans le cadre de l'ORSA, c'est donc cette méthode que nous utiliserons. Les variables modélisées ici sont les taux d'intérêts zéro-coupons et le rendement des actions. Les simulations obtenues permettront alors de projeter la valorisation des placements (actions, obligations et monétaire) mais aussi de valoriser le *Best Estimate* des provisions techniques.

#### 3.4.1 Modélisation de la courbe de taux zéro-coupon

La courbe de taux zéro-coupon est modélisée par un modèle Hull & White à un facteur. Ce choix résulte non seulement de la simplicité du modèle mais également du fait qu'il

---

30. Dans le cas de la gestion des risques d'une assurance vie, un modèle calibré en risque neutre devrait être utilisé conjointement à un modèle calibré en monde réel

permet de prendre en compte des taux d'intérêt négatifs ce qui est un atout étant donné le contexte économique actuel. Ainsi le taux court  $r_t$  suit la dynamique suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

Avec  $a > 0$  la vitesse de retour à la moyenne,  $\theta : t \in [0, T] \rightarrow \theta_t \in \mathbb{R}$  une fonction déterministe. En discrétisant l'équation précédente via le schéma d'Euler nous obtenons donc l'équation :

$$r_{t+\Delta t} \approx r_t + (\theta_t - ar_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

• **Simulation du taux court** : Une fois le modèle calibré la diffusion des taux courts est faite via l'approximation suivante (démonstration en Annexe G) :

$$r_{t+\Delta t} \approx r_t e^{-a\Delta t} + f^M(0, t) - e^{-a\delta t} f^M(0, s) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a}} \epsilon_t$$

• **Calcul des prix zéro-coupons** : Les prix des zéro-coupons sont alors obtenus grâce à la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}$$

Avec :

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left[ B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \right] \text{ et } B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

• **Calibrage du modèle** : Le modèle a été calibré en historique, en utilisant les données de "l'EURIBOR 3 Mois" prises entre le 1<sup>er</sup> janvier 2005 et le 19 juin 2017 afin de prendre en compte la volatilité associée à la crise de 2008.

### 3.4.2 Modélisation du rendement des actions

On simule le rendement des actions par le modèle de Black & Scholes, ainsi le rendement des actions est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

En discrétisant grâce au schéma d'Euler on obtient donc :

$$\ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \approx \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

De façon analogue aux calibrage des taux zéro-coupon, le modèle ci-dessus a été calibré en historique, en utilisant les données de rendement du CAC 40 entre le 1<sup>er</sup> janvier 2005 et le 19 juin 2017.

## 3.5 Bilan économique

### 3.5.1 Actif - Placements

En norme Solvabilité II, les placements sont comptabilisés suivant leur valeur de marché. La valeur des placements se déduit ainsi des variables économiques simulées, des décaissements/encaissement et de la stratégie de réallocation.

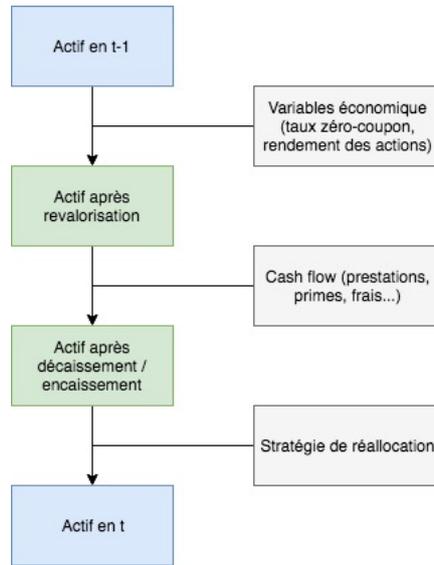


FIGURE 23 – Projection de l’actif

Notons  $M_t, S_t, B_t$  respectivement les valeurs de marché de l’actif monétaire, des actions et des obligations en  $t$ . La projection de la valeur de marché des ces actifs en  $t + 1$  est détaillé ci-dessous et résumée dans le schéma figure 23.

### Placements après revalorisation

#### • Actif monétaire

L’actif monétaire est revalorisé chaque année  $t$  au taux zéro-coupon d’échéance 1 an. Ainsi l’actif monétaire après revalorisation s’écrit :

$$\tilde{M}_{t+1} = M_t \cdot B(t, t + 1)^{-1} + C_{t+1}$$

Avec  $B(t, t + 1)$  le prix en  $t$  d’une obligation de maturité  $t + 1$  et  $C_{t+1}$  les coupons versés en fin d’année.

#### • Actions

Le rendement des actions  $\mu_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$  est simulé par le générateur de scénarios économiques. Ainsi la valeur des actions après revalorisation est :

$$\tilde{S}_{t+1} = S_t \cdot \mu_t$$

#### • Obligations

Le prix des obligations est obtenu via les prix des zéro-coupons,  $B(t, T)$ , simulés par le générateur de scénarios économiques :

$$\tilde{B}_{t+1} = \sum_{T_{mat}=1}^{10} \left( \sum_{T=t+1}^{T_{mat}} \frac{C_T^{T_{mat}}}{B(t, T)} + \frac{N^{T_{mat}}}{B(t, T_{mat})} \right)$$

Avec  $N^{T_{mat}}$  le nominal de maturités  $T_{mat}$  et  $(C_T^{T_{mat}})_{T \in [t+1, T_{mat}]}$  les coupons versés.

Les obligations sont achetées au pair et le taux de coupon  $\frac{C_T}{N}$  est ainsi égal au taux de rendement interne de l’obligation à la date d’achat.

## Placements après encaissement / décaissements

Le paiement des prestations, des frais et des primes d'assurance et de réassurance est effectué en fin d'année. Ces opérations donnent lieu à des encaissements et décaissements d'actif monétaire ainsi qu'à des ventes éventuelles d'actions voire d'obligations dans le cas où l'actif monétaire serait insuffisant.

Notons  $CF_{t+1}$  le *cash flow* dû aux encaissements et décaissements cités dans le paragraphe précédent. Les valeurs des actifs après prise en compte de  $CF_{t+1}$  explicités ci-dessous :

- **Actif monétaire**

$$\hat{M}_{t+1} = \max\left(\tilde{M}_{t+1} - CF_{t+1}, 0\right)$$

- **Actions**

Dans le cas où le monétaire ne serait pas suffisant pour absorber  $CF_{t+1}$ , on procède à la vente d'actions :

$$\hat{S}_{t+1} = \max\left(\tilde{S}_{t+1} - CF_{t+1}^1, 0\right)$$

avec  $CF_{t+1}^1 = -\min\left(\tilde{M}_{t+1} - CF_{t+1}, 0\right)$

- **Obligations**

Puis dans les cas où le monétaire et les actions ne seraient pas suffisant pour absorber  $CF_{t+1}$ , on procède à la vente d'obligations par ordre de maturité croissante. Les obligations de maturité résiduelle un an sont vendues en priorité, puis celles de maturité résiduelle 2 ans et ainsi de suite.

## Placements après réallocation

L'allocation cible est définie à la fois par classe d'actif (actions, obligations, monétaire) et par maturité d'obligation. L'allocation est exprimée en pourcentage de la valeur de marché totale des placements.

La réallocation de l'actif monétaire et des actions sont identiques, cependant la réallocation des obligations diffère selon s'il y a vente achat d'obligations pour atteindre l'allocation cible.

Notons  $\hat{y}_{actions}$ ,  $\hat{y}_{cash}$ ,  $\hat{y}_{obligations}$  les allocations cibles et  $\hat{y}_{actions,t}$ ,  $\hat{y}_{cash,t}$ ,  $\hat{y}_{obligations,t}$  la part des actions de l'actif monétaire et des obligations dans le portefeuille. Et notons  $A(t)$  la valeur de marché totale des placements.

- **Actif monétaire et actions**

L'actif monétaire et les actions sont réalloués en achetant le montant  $(\hat{y}_i - y_{it}) \cdot A_t$  avec  $i \in \{cash, actions\}$ . Dans le cas où  $\hat{y}_i - y_{it} > 0$  il y a achat de l'actif en question, dans le cas où  $\hat{y}_i - y_{it} < 0$  il y a vente de l'actif.

- **Obligations**

Dans le cas où  $\hat{y}_{obligations} - y_{obligations,t} < 0$ , il y a vente d'un montant  $(\hat{y}_{obligations} - y_{obligations,t}) \cdot A(t)$  d'obligations par ordre de maturité croissant de la même façon que dans

la partie précédente *Placements encaissement/décaissement*.

Dans le cas où  $\hat{y}_{obligations} - y_{obligations,t} > 0$ , il y a achat d'obligations de différentes maturités selon l'allocation cible définie par maturité. Notons  $(\hat{x}_i)_{i \in [1,10]}$  l'allocation cible par maturité ( $\hat{x}_i$  désigne l'allocation cible pour la maturité  $i$ ) et  $x_{i,t}$  la part dans le portefeuille des obligations de maturité  $i$ , le montant d'obligations de maturité  $i$  acheté est :

$$\frac{(\hat{x}_i - x_{i,t})^+}{\sum_{j=1}^{10} (\hat{x}_j - x_{j,t})^+} \cdot \hat{y}_{obligations} \cdot A(t)$$

En allouant l'actif obligataire de cette façon on évite ainsi de vendre éventuellement un montant important d'obligations uniquement dans le but de respecter l'allocation cible. La vente d'obligations oblige les assureurs à provisionner la réserve de capital.

### Best estimate cédé

Le *best estimate* des provisions cédées est calculé selon la méthode dite « indirect » (en référence au *Manuel BEL Non-Vie*, cf [5]).

Cette méthode consiste à déduire le *Best Estimate* cédé par différence entre les cash flows bruts ( $CF_{brut,t}$ ) et nets ( $CF_{net,t}$ ) de réassurance.

$$BE_{cede} = \sum (CF_{brut,T} - CF_{net,T}) \cdot B(t,T) = BE_{brut} - BE_{net}$$

Le calcul de  $BE_{brut} = \sum CF_{brut,t} \cdot B(t,T)$  est détaillé dans la partie suivante sur le calcul du *Best Estimate* des provisions techniques.

Cette méthode possède cependant certaines limites. Sur les branches à développement long, couvertes par des traités non proportionnels, l'exploitation des cash flows nets de réassurance peut amener à ne pas satisfaire aux exigences de l'article 81 concernant la différence temporelle entre recouvrement et paiement direct. En effet, la manifestation du sinistre et l'atteinte de la priorité du traité peuvent être décalées par rapport aux flux de paiements direct. Il faudra par conséquent utiliser une autre méthode dans en cas de modélisation de branches longues.

## 3.5.2 Passif

### Best estimate

Le "*best estimate*" (BE) des provisions techniques est obtenu grâce aux taux zéro-coupons simulés par le générateur de scénarios économiques et grâce aux prestations calculées via les sinistres simulés.

Le BE de sinistres correspond à la somme actualisée des prestations futures pour les sinistres survenus, selon la méthode donnée dans la section 3.2.2.

$$BE_{sinistres,t} = \sum_{T>t} \frac{Prestation_T}{B(t,T)}$$

Le BE de primes est estimé sous hypothèse de tacite reconduction des contrats 2 mois avant l'échéance et sans hypothèse de taux de chute de ces contrats.

En outre, le montant des sinistres non encore survenus est calculé en multipliant le ratio de sinistres à primes par les primes futures et les primes non-acquises.

$$BE_{prime,t} = \sum_{t>T} \left( \frac{S}{P} \cdot P_{non\ acquise} \cdot \alpha_t + Frais_{primes\ non\ acquises} \right) \cdot B(t,T) \\ + \sum_{t>T} \left( \frac{S}{P} \cdot P_{future} \cdot \alpha_t + Frais_{primes\ futures} \right) \cdot B(t,T)$$

## Risk Margin

Dans l'outil développé, la méthode de calcul de la *Risk Margin* ou marge de risque dépend du volet dans lequel le calcul est effectué :

- Projection d'une stratégie : Dans le cas où l'on projette une unique stratégie, la marge pour le risque est calculée sans méthodes simplificatrices. Elle est obtenue en projetant les SCR de l'entreprise sous hypothèse de *run-off*<sup>31</sup> de l'activité. La *Risk Margin* (RM) est alors calculée en actualisant le coût du capital des SCR projetés :

$$RM_t = CoC \cdot \sum_{T>0} \frac{SCR_{t+T}}{(1+r_t^T)^T}$$

avec  $r_t^T$  le taux zéro-coupon simulé en t par le générateur de scénarios économiques et  $CoC = 6\%$  le coût du capital défini par la réglementation.

Cette méthode est relativement coûteuse en temps de calcul car pour chaque année de projection et chaque simulation elle nécessite de projeter le calcul du SCR jusqu'à liquidation des engagements du portefeuille.

La projection des SCR est faite sous deux hypothèses nécessaires :

La première hypothèse concerne le module risque de contrepartie, pour lequel on émet le postulat que le programme de réassurance et la probabilité de défaut du réassureur sont constants dans le temps. La deuxième hypothèse concerne la non prise en compte du module risque de marché : il est négligé. Celui-ci n'est pas pris en compte dans le calcul en accord avec les indications présentes dans l'article 38 du *Règlement délégué* [12].

- Optimisation de la stratégie : dans le volet *Optimisation* développé au sein de l'outil, plusieurs stratégies sont testées afin de trouver les stratégies optimales, ainsi pour gagner en temps de calcul, l'évaluation de la marge de risque est effectuée selon la simplification numéro 4 proposée dans les *Orientations sur la valorisation des provisions techniques*. Selon cette méthode, la marge de risque est calculée comme pourcentage de la meilleure estimation des provisions techniques déduction faite de la réassurance à la date de valorisation.

---

31. Le run-off ou liquidation de portefeuille consiste à gérer les sinistres survenus et potentiels pour les engagements actuellement en portefeuille, sans souscriptions de nouveaux contrats.

### 3.6 Calcul du SCR

Nous calculerons ici le SCR en formule standard, les modules pris en compte sont les risques classiques auquel est soumis une assurance IARD, à savoir le risque marché, le risque de souscription non-vie ainsi que le risque de défaut. Cependant pour le risque de marché, les modules suivants ne seront pas pris compte :

- Le risque immobilier, car le portefeuille de la compagnie sera composé uniquement d'actions, d'obligations et d'actif monétaire.
- Le risque de concentration, sous hypothèse que chaque classe d'actif est suffisamment bien diversifiée.
- Le risque de change, car l'entreprise sera supposée exclusivement française et l'ensemble de son actif sera supposé en euros
- Le risque de spread car on émet l'hypothèse que les obligations achetées sont des obligations d'état

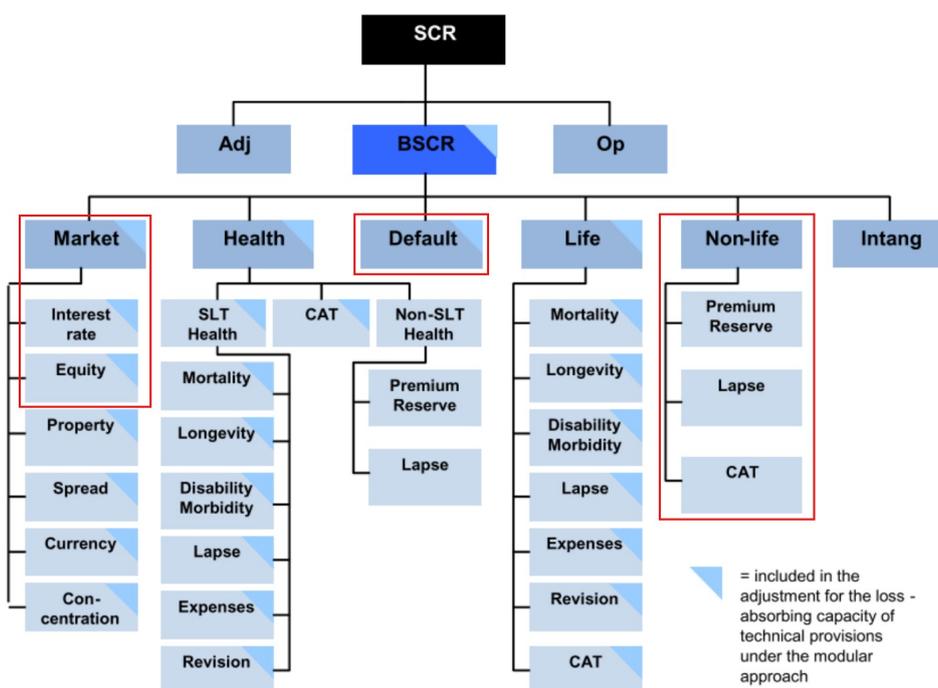


FIGURE 24 – Modules de la formule standard pris en compte pour le calcul du SCR

#### 3.6.1 BSCR

Le SCR en formule standard est constitué du BSCR, du Risque Opérationnel et d'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés. Pour le BSCR, le calcul est effectué en calculant un "SCR" pour chacun des modules (Marché, Défaut, Non-Vie,...) de la figure 24 - noté  $SCR_i$  - puis en agrégeant ces "SCR" avec les matrices de corrélations.

#### Marché

Les deux principaux modules du risque de "Marché" seront pour nous les modules "Taux d'intérêt" et "Action". Il est important de noter qu'en pratique le module "Action" représente généralement une part plus importante du  $SCR_{Marche}$  que le module "Taux

*d'intérêt".*

On supposera dans la partie 5 du mémoire que l'ensemble des actions de notre entreprise sont des actions de *type 1* au sens de la réglementation (cf [18]). Le  $SCR_{Action}$  correspond alors à un choc de 39% sur la valeur de marché des actions :

$$SCR_{Actions} = 39\% \text{Valeur de marché}_{Action}$$

En formule standard, le module "*Taux d'intérêt*" est calculé quant à lui comme la perte de fonds propre la plus défavorable entre celle due à un scénario de choc de la courbe de taux à la hausse et celle due à choc à la baisse.

On peut noter que l'entreprise sera plus sensible à la hausse de taux si la durée de l'actif est supérieure à celle du passif, tandis que dans le cas inverse, si la durée du passif est supérieure à celle de l'actif, ce sera un choc à la baisse qui affectera le plus négativement les fonds propres de l'entreprise. Ainsi le risque de taux d'intérêt peut être atténué en réduisant l'écart de durée entre l'actif et le passif de l'entreprise.

### Défaut/Risque de contrepartie

Le *risque de contrepartie* distingue différents types de contreparties. Les contreparties de type 1 recouvrent les contrats d'atténuation du risque (Réassureur, Véhicule de titrisation....) ainsi que d'autres expositions liées à des avoirs et engagements (banques, dépôts auprès des entreprises cédantes..). Les contreparties de type 2 recouvrent, quant à elle les risques, de crédit non couverts par le module risque de spread (créances, prêts hypothécaires...).

Dans la partie 5 de ce mémoire, le risque de contrepartie ne sera constitué que du risque de défaut vis à vis d'un unique réassureur. Par conséquent le risque de contrepartie sera directement proportionnel au Best Estimate des provisions cédées au réassureur.

### Souscription Non-Vie

Le *risque de souscription en non-vie* recouvre les risques de *Prime et Réserve*, *Cessation* et *Catastrophe*. Nous ne détaillerons pas dans ce paragraphe le calcul des ces différents risques, afin de ne pas alourdir le texte.

Cependant on peut noter que les risques *Catastrophe* et *Primes et réserve* peuvent être atténués en cédant une partie de l'exposition en réassurance proportionnelle. A titre d'exemple, dans le capital requis pour le risque de catastrophe *man-made* au titre de la garantie RC automobile peut s'écrire :

$$SCR_{\text{man-made}, \text{RC Auto}} = \max(\sqrt{\alpha N}, 6000000)$$

Avec  $\alpha$  le taux de cession en réassurance et  $N$  le nombre d'assurés. A contrario, la cession du risque en réassurance non-proportionnelle ne permet pas systématiquement d'atténuer le risque de *Catastrophe*, ce n'est le cas que sous certaines conditions à savoir notamment :

- Pour la réassurance non-proportionnelle par risque : "*si l'événement brut permet d'identifier les polices connues parmi les polices sous-jacentes exposées*" (cf [10])
- Pour la réassurance non-proportionnelle par événement : "*si la perte peut être divisée de manière appropriée*" (cf [10])

### 3.7 Conclusion

Nous avons à présent défini un modèle de projection du plan stratégique de l'entreprise. Ce modèle nous permettra d'anticiper l'impact des choix stratégiques (stratégie de réassurance, d'allocation d'actif, de développement...) mais aussi d'optimiser la stratégie de l'entreprise.

Notons néanmoins que, comme tout modèle de projection, celui-ci repose sur certaines hypothèses et limites, que nous avons exposées dans cette partie. Il est notamment important de veiller au bon calibrage des hypothèses de projection en entrée du modèle et en particulier des hypothèses de sinistralité.

## 4 Optimisation multiobjectif

Comme nous avons pu le souligner précédemment, la difficulté derrière le pilotage d'une compagnie d'assurance réside dans la prise en compte des intérêts des différentes parties prenantes. En effet, alors que l'intérêt des actionnaires sera en général tourné vers la rentabilité espérée de la compagnie, les régulateurs, eux, seront davantage soucieux de la solvabilité de l'entreprise et de sa capacité à gérer ses risques. Ce caractère multiobjectif du pilotage est d'autant plus important aujourd'hui avec la démocratisation des démarches ERM et le renforcement de la dimension risque dans le pilotage des entreprises d'assurance.

Désormais, le conseil d'administration doit être à l'écoute d'une multitude d'indicateurs (SCR, ROE, résultat comptable...). Par conséquent, le pilotage d'une entreprise d'assurance s'inscrit plus que jamais dans un problème d'optimisation multiobjectif.

### 4.1 Le cadre de l'optimisation multiobjectif

L'optimisation multiobjectif (aussi appelé optimisation multicritère, multiperformance ou optimisation vectorielle) est une branche de la recherche opérationnelle et de l'optimisation (mathématique) dont la particularité est de chercher à optimiser simultanément plusieurs objectifs d'un même problème :

$$\min_{\omega \in \Omega} (f_1(\omega), \dots, f_k(\omega)) = \min_{\omega \in \Omega} F(\omega)$$

Avec  $F(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_k(\omega))$

Dans le contexte de l'optimisation multiobjectif,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est généralement appelé l'espace de décision. Un élément  $\omega \in \Omega$  est désigné comme une solution ou un individu et  $f_1, f_2, \dots, f_k$  correspondent aux objectifs du problème d'optimisation.

**Exemple :** Si l'on cherche à optimiser le rendement et le risque d'un portefeuille composé d'actions, d'immobilier de monétaire (actif sans risque) et d'obligation, l'espace de décision  $\Omega$  pourra être représenté par l'ensemble suivant :

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_{action}, \omega_{immo}, \omega_{cash}, \omega_{bond}) \in [0, 1]^4, \sum_i \omega_i = 1 \right\}$$

et les fonctions objectifs seront donc  $f_1(\omega) = Rendement(\omega)$  et  $f_2(\omega) = Risque(\omega)$ .

Dans le cas du pilotage d'une entreprise d'assurance, l'espace de décision  $\Omega$  correspond non seulement à la stratégie d'allocation d'actif, mais aussi aux autres leviers de pilotage (stratégie de réassurance, de développement...). Les objectifs à optimiser  $f_1, f_2, \dots, f_k$  correspondent alors aux différentes contraintes et indicateurs de pilotage (Résultat comptable, ROE, Ratio de solvabilité...).

Notons que dans le cadre de l'optimisation multiobjectif, le problème d'optimisation est noté, par convention, comme un problème de minimisation. Cette convention n'a cependant pas de réel impact car maximiser une fonction  $f_i$  revient à minimiser  $-f_i$ , par conséquent afin de rester cohérent avec le cadre mathématique nous choisirons pour la suite du mémoire de garder la même convention.

Lorsque le problème d'optimisation est multiobjectif, on peut remarquer que très souvent il n'existe pas de solutions optimisant tous les objectifs à la fois. A titre, d'exemple, il n'est généralement pas possible de trouver un investissement maximisant le rendement et minimisant le risque.

Dans ce cas, le problème d'optimisation est alors dit non-trivial et le concept d'optimalité fait alors appel à la notion de solutions Pareto optimales. Afin de faciliter la compréhension de la suite du mémoire nous rappelons donc ces notions ci-dessous :

**Définition 4** (Pareto dominé). *Soit  $x, y \in \mathbb{R}^k$ ,  $x$  domine  $y$  au sens de Pareto (noté  $x \prec y$ ) si*

$$(\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i \leq y_i) \wedge (\exists j \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_j < y_j)$$

Autrement dit, la solution  $x$  domine donc la solution  $y$ , si elle meilleure ou équivalente pour chacun des objectifs du problème d'optimisation et qu'elle est strictement meilleure pour l'un de ces objectif. On peut voir sur la figure 25 une illustration de cette propriété dans le cas d'un problème de minimisation de deux objectifs.

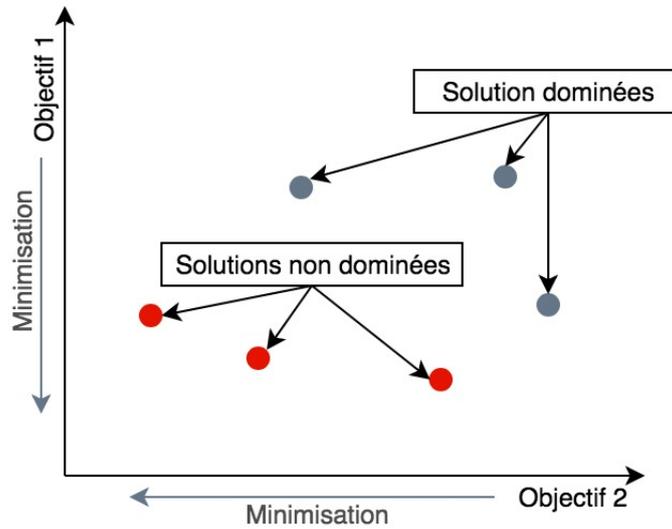


FIGURE 25 – Illustration Pareto dominé

Cette définition nous permet alors de définir les solutions optimales au sens de Pareto qui correspondent donc aux solutions d'intérêt dans le cadre de notre étude.

**Définition 5** (Pareto optimale). *Une solution  $\omega \in \Omega$  (stratégie dans notre contexte) est dite Pareto optimale si elle n'est dominée par aucune autre solution (stratégie) de l'espace de décision. Autrement dit si et seulement si :*

$$\forall \omega' \in \Omega, F(\omega) \prec F(\omega')$$

Dans le cadre de notre étude nous chercherons alors à retrouver l'ensemble des solutions Pareto optimales, cet ensemble porte ainsi le nom de frontière de Pareto (cf figure 26).

**Définition 6** (Frontière de Pareto). *On notera  $\mathcal{P}^* \subset \Omega$  l'ensemble des solutions Pareto optimales, qui est naturellement défini par l'ensemble suivant :*

$$\mathcal{P}^* = \{\omega \in \Omega \mid \nexists \omega' \in \Omega, F(\omega') \prec F(\omega)\}$$

La frontière de Pareto désignera alors l'ensemble  $\mathcal{PF}^* \subset \mathbb{R}^k$  défini par :

$$\mathcal{PF}^* = F(\mathcal{P}^*) = \{F(\omega) \mid \omega \in \mathcal{P}^*\}$$

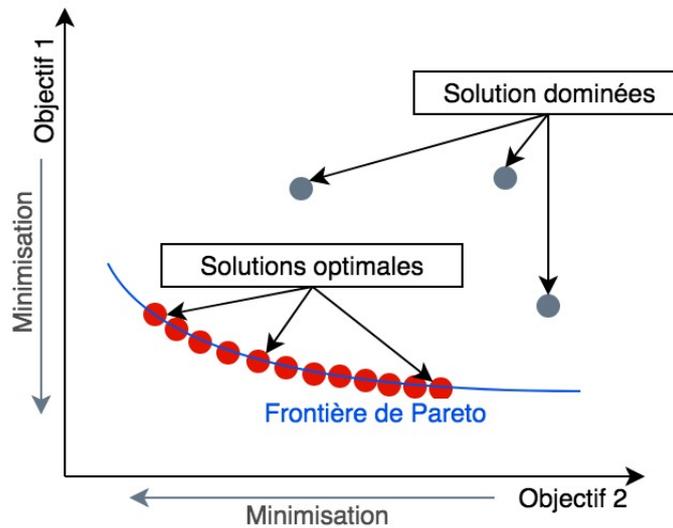


FIGURE 26 – Illustration frontière de Pareto

On peut d'ores et déjà remarquer que l'un des aspects non-trivial de l'optimisation multiobjectif réside dans la multi-dimensionnalité à la fois de l'espace de décision et de l'espace des objectifs, comme l'illustre la figure 27. Par conséquent, certaines méthodes classiques d'optimisation comme la descente de gradient ou la méthode de Newton-Raphson se retrouvent en porte-à-faux.

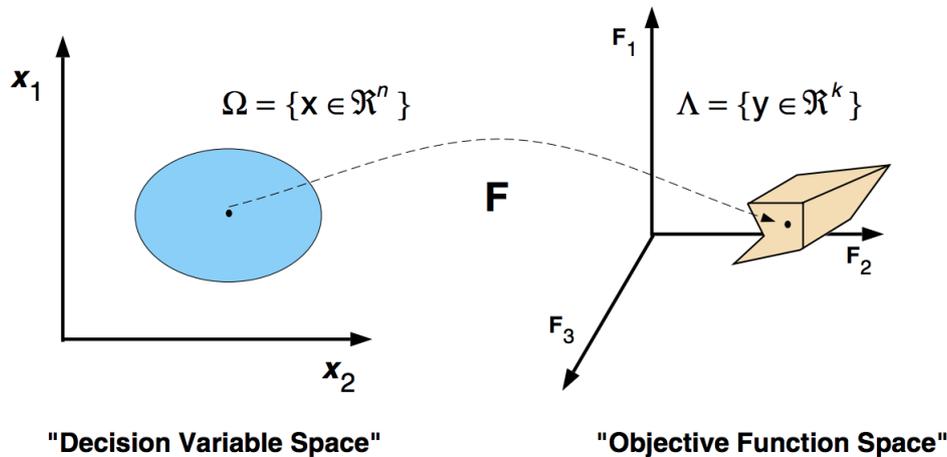


FIGURE 27 – Espace de décision et espace des objectifs.

Source : Coello et al. (2007) *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*.

## 4.2 Optimisation multiobjectif, pilotage et appétit au risque

La formalisation de l'appétit au risque comme définie dans la partie 2.4.1 précise que les entreprises d'assurance doivent définir le niveau de tolérance au risque. Le niveau cible et la stratégie de l'entreprise sont ensuite définis en accord avec ce niveau de tolérance.

Il n'existe pas actuellement de consensus sur le processus de définition de ces niveaux. L'approche proposée dans ce mémoire consiste à définir dans un premier lieu le niveau limite de tolérance au risque selon certains critères choisis par l'entreprise. Puis la stratégie

de l'entreprise et le niveau cible seront déterminés, sur un horizon de 5 ans, en optimisant la projection de certains indicateurs de performance et risque (ROE, RORAC, SCR, résultat comptable...).

La procédure sera donc la suivante :

1. Définition de la limite de l'appétit au risque : la limite de l'appétit au risque sera défini par l'entreprise. Elle pourra, par exemple, être déterminée comme un niveau limite sur la VaR (Value at Risk) du résultat comptable projeté sur un horizon de 5 ans.
2. Définition de la stratégie : Le niveau cible de l'appétit au risque et la stratégie de l'entreprise seront choisis conjointement en optimisant certains indicateurs. Etant

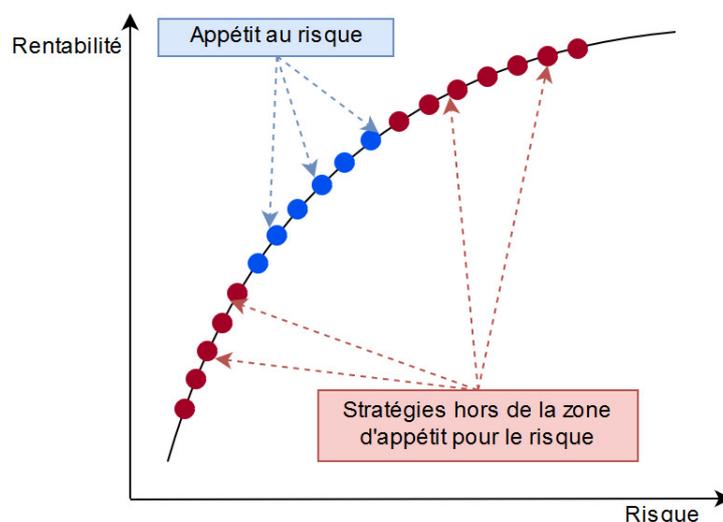


FIGURE 28 – Choix d'une stratégie optimale

donné la multiplicité des indicateurs, plusieurs stratégies peuvent se trouver sur la frontière de Pareto. Si les préférences du décideur sont connues il est alors possible de déterminer, après calcul, la ou les stratégies optimales (situées sur la même courbe d'iso-utilité). Cette approche possède cependant l'inconvénient de ne laisser in fine que peu de d'alternatives de pilotage au décideur.

Afin d'aboutir à un outil d'aide à la décision laissant la plus grande marge de manoeuvre nous ne ferons pas d'hypothèses sur les préférences du décideur et l'objectif sera de retrouver directement la frontière de Pareto. Le décideur pourra ainsi orienter la stratégie de l'entreprise après analyse de la frontière de Pareto et en sélectionnant une solution située sur celle-ci.

## 4.3 Les méthodes d'optimisation multiobjectif

### 4.3.1 La classification des méthodes

Il existe différentes classifications des méthodes d'optimisation multicritère, la plus populaire est probablement celle proposée par Cohon et Marks<sup>32</sup> qui définit les trois grandes

32. Cohon and Marks. A Review and Evaluation of Multiobjective Programming Techniques. April 1975.

familles suivantes :

- **Méthodes *a priori*** : ces méthodes s'appuient sur la connaissance de l'articulation des préférences du décideur. En pratique, une relation d'ordre est définie sur l'espace des objectifs, éventuellement via une fonction d'utilité. La recherche de la décision optimale est alors directement déterminée par l'articulation des préférences proposée.
- **Méthodes *a posteriori*** : ces méthodes visent à trouver ou du moins à approximer l'intégralité de la frontière de Pareto. Le décideur pourra ainsi choisir l'orientation stratégique de l'entreprise en s'appuyant sur la frontière de Pareto ainsi obtenue. La prise de décision se fait donc a posteriori de la recherche des solutions optimales. L'avantage de cette approche réside dans le fait de pouvoir proposer des solutions optimales sans faire d'hypothèses sur les préférences du décideur.
- **Méthodes *interactives*** : ces techniques reposent sur une articulation progressive des préférences avec le décideur. Ces méthodes sont des processus itératifs dans lequel les préférences du décideur sont définies préalablement puis elles sont ajustées au cours de la recherche des solutions optimales.

Le choix a été fait dans ce mémoire de s'orienter vers une approche *a posteriori*. Celle-ci offre la plus grande flexibilité car les préférences du décideur n'entrent en compte qu'après la phase d'optimisation, ainsi l'outil construit proposera des stratégies optimales indépendamment des préférences de l'utilisateur.

#### 4.3.2 Les méthodes *a posteriori*

Initialement les méthodes traitant des problèmes multiobjectifs consistaient généralement à se ramener à un objectif unique, puis à utiliser des algorithmes d'optimisation classiques. Nous présentons dans cette parties les méthodes *a posteriori* les plus populaires.

##### Combinaison linéaire ou encore "Scalarisation"

Les méthodes d'optimisation *a posteriori* visent à obtenir l'intégralité de la frontière de Pareto. Pour arriver à cette fin, une des approches les plus courantes consiste à transformer le problème d'optimisation multicritère en problème monocritère en pondérant les différents objectifs :

$$\min \sum_{i=1}^n \omega_i f_i$$

La résolution du problème d'optimisation monocritère nous permet alors (sous certaines conditions) d'obtenir une solution se trouvant sur la frontière de Pareto<sup>33</sup>. Le processus est alors itéré avec différents choix de poids  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  afin d'obtenir l'intégralité de la frontière de Pareto.

L'avantage de cette approche réside donc dans sa simplicité d'implémentation, car elle repose sur des méthodes d'optimisation monocritère classiques : descente de gradient, méthode de Newton, etc.

---

33. Sous réserve que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker soient vérifiées (condition du premier ordre et conditions de relâchement).

Cependant cette approche trouve ses limites lorsque le nombre de pondérations à tester devient *important*<sup>34</sup> - ce qui peut être le cas lorsque le nombre d'objectifs est important - car pour chaque pondération il est nécessaire de résoudre un problème d'optimisation ce qui peut rapidement décupler le temps de calcul.

### La méthode $\varepsilon$ -contrainte

L'idée de la méthode est de transformer le problème multiobjectif en problème d'optimisation sous contrainte. Le critère le plus "important" est défini comme l'objectif à optimiser tandis que les autres critères constituent les contraintes :

$$\min_{s.c. f_l(\omega) \leq \varepsilon_l, l \neq k} f_k(\omega)$$

En faisant alors varier les valeurs des  $\varepsilon_l$  il est possible de retrouver l'intégralité de la frontière de Pareto. Cependant le choix des bornes  $(\varepsilon_l)_{l \neq k}$  n'est pas évident. Afin de choisir correctement ces bornes il est nécessaire dans un premier temps de connaître les valeurs minimales que peuvent prendre chacun des objectifs.

### Méthodes évolutionnistes

Les méthodes d'optimisation évolutionnistes ont vu le jour initialement dans les années 80<sup>35</sup>, avec l'essor des algorithmes évolutionnistes. Ces méthodes proposent une approche totalement différente des deux approches précédentes (*varpesilon-contrainte* et *scalarisation*). Elles s'inspirent de la théorie de l'évolution avec des mécanismes de sélection dits "élitistes", croisements et mutations permettant de marier élitisme et diversité dans la recherche des solutions afin de reconstituer l'intégralité de la frontière de Pareto. On peut distinguer les méthodes évolutionnistes selon leur caractère "véritablement" multiobjectif ou "non-véritablement" multiobjectif.

#### Méthodes à dominance de Pareto ou méthodes "véritablement" multiobjectif

Les méthodes  *$\varepsilon$ -contrainte* et *scalarisation* vues plus haut s'appuyaient sur la transformation en un problème d'optimisation mono-objectif. Cependant le développement des algorithmes évolutionnistes a permis de creuser des méthodes dites "véritablement" multiobjectif ou aussi méthodes à dominance de Pareto (*Pareto-dominated methods*). Elles visent à retrouver l'intégralité de la frontière de Pareto sans passage par un problème mono-objectif.

L'algorithme NSGA, publiée en 1994, est probablement le premier algorithme à dominance de Pareto à avoir proposé une approche permettant de retrouver l'intégralité de la frontière de Pareto. Depuis, le nombre de méthodes "véritablement" multiobjectif s'est largement développée et de nombreux algorithmes ont vu le jour.

Ainsi dans le cadre de notre étude, nous nous sommes tout particulièrement intéressé aux méthodes multiobjectifs. Dans la section suivante nous présenterons le fonctionnement de ces algorithmes.

---

34. La notion de grand ou d'important dépend ici du problème considéré et des machines à disposition.

35. Le premier algorithme génétique d'optimisation multicritère est proposé en 1984 par David Schaffer : VEGA (Vector Evaluation Genetic Algorithm)

## 4.4 Algorithmes évolutionnistes

Les algorithmes évolutionnistes (ou *Evolutionary Algorithm*) constituent aujourd'hui l'une des méthodes classiques d'optimisation (multiobjectif et mono-objectif) et trouvent une application dans de nombreux domaines (transport optimal, industrie, finance, économie...). Nous explorerons ces méthodes dans le cadre d'une application à l'optimisation de la stratégie d'une entreprise d'assurance.

Cette partie sera consacrée au fonctionnement général et aux avantages des algorithmes évolutionnistes, ainsi qu'à l'algorithme implémenté dans l'outil développé.

### 4.4.1 Fonctionnement des algorithmes évolutionnistes

L'approche proposée par les algorithmes évolutionnistes s'appuie sur la théorie de l'évolution : il s'agit de faire évoluer un ensemble, ou *population*, de solutions données dans l'optique d'obtenir les meilleurs résultats possibles. La structure générale des algorithmes évolutionnistes peut être représentée par le processus itératif schématisé par la figure 29.

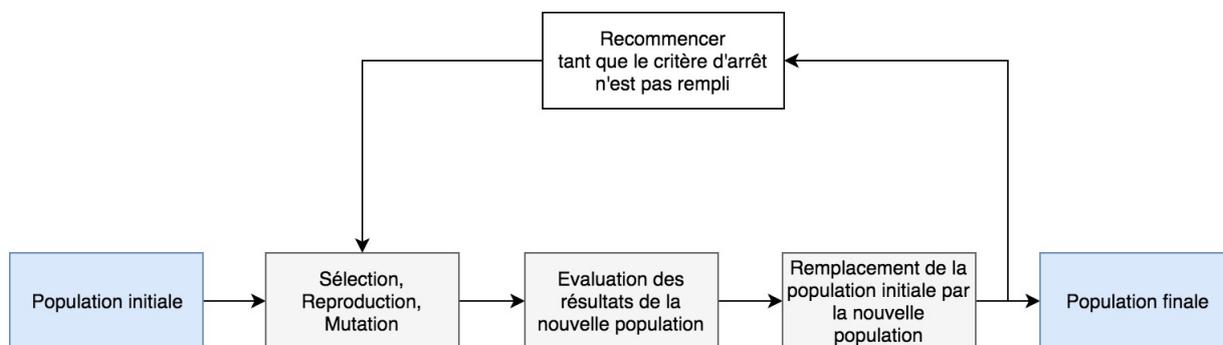


FIGURE 29 – Schéma général des algorithmes évolutionnistes

Les opérateurs de sélection, reproduction (aussi croisement ou recombinaison) et mutation ont pour objectif de maintenir à la fois une certaine diversité des solutions proposées (via l'opérateur mutation) tout en s'assurant un élitisme afin de converger vers les solutions optimales (via l'opérateur sélection).

- L'opérateur de sélection permet de sélectionner les solutions donnant les meilleurs résultats. Le choix de cet opérateur permet de favoriser plus ou moins l'élitisme.
- L'opérateur de croisement crée une nouvelle solution à partir de solutions existantes et permet ainsi de combiner les avantages de différentes solutions.
- L'opérateur de mutation doit permettre d'apporter de la diversité dans l'ensemble des solutions existantes et d'explorer des possibilités atypiques.

Ces trois opérateurs sont fonction du problème et de l'algorithme évolutionniste, selon les situations on préférera avoir un algorithme avec un élitisme ou une diversité plus ou moins forte. On peut noter par ailleurs qu'élitisme et diversité sont en général deux objectifs antagonistes dans la construction des algorithmes évolutionnistes. On retrouve ainsi en arbitrage classique en optimisation, à savoir la médiation entre exploration et exploitation.

Les opérateurs de sélection, reproduction et croisement retenus dans le cadre de notre étude seront présentés dans la partie 4.5.

#### 4.4.2 Intérêt des Algorithmes évolutionnistes

Les algorithmes évolutionnistes présentent un certains nombre d'avantages, dont nous explorerons la pertinence appliquée à notre étude.

##### Absence d'hypothèse de dérivabilité

Un certain nombre de méthodes d'optimisation très populaires (Newton-Raphson, etc) s'appuient sur le principe de descente de gradient. Leur fonctionnement est itératif, à chaque itération le gradient de la fonction à optimiser est calculé, puis les paramètres à optimiser sont déplacés dans la direction du gradient.

Ces méthodes permettent d'obtenir de très bons résultats ainsi qu'une convergence relativement rapide lorsque l'espace de décision et l'espace des objectifs vérifient certaines propriétés de dérivabilité<sup>36</sup> et de convexité.

Cependant dans le cadre de notre étude, cette hypothèse n'est pas systématiquement vérifiée pour les fonctions étudiées. A titre d'exemple, pour la réassurance en excédent de sinistre,  $(a, b) \rightarrow \mathbb{E}(\min((X - a)^+, b))$  n'est généralement pas différentiable.

Les méthodes évolutionnistes, quant à elles, s'affranchissent de l'hypothèse de dérivabilité car elles ne nécessitent généralement pas de calculer le gradient des fonctions à optimiser.

##### Convergence vers l'optimal global

Certaines méthodes d'optimisation classiques (Hill Climbing, descente de gradient évoquée précédemment, etc) s'inscrivent dans l'ensemble des méthodes dites de "recherche locale". Leur approche consiste à passer d'une solution à une autre solution proche dans l'espace de décision jusqu'à ce qu'une solution considérée comme optimale soit trouvée, ou que le temps imparti soit dépassé. Ces méthodes permettent d'obtenir une convergence relativement "rapide" vers un optimal local, mais la convergence vers l'optimal global n'est pas garantie lorsque l'espace des objectifs n'est pas convexe, comme par exemple sur la figure 31.

Les méthodes évolutionnistes s'inscrivent dans l'ensemble des méthodes dites de recherche "global", qui se définissent par opposition aux méthodes de recherche locale. Les méthodes de recherche globales permettent, en théorie, la convergence vers l'optimal global. Cependant, en pratique, la convergence vers l'optimal global n'est pas toujours obtenue et il peut être judicieux de combiner recherche global et local. Ces approches dites "hybrides", ne seront pas présentées dans ce mémoire afin de gagner en clarté et en simplicité, néanmoins une ouverture possible à notre étude serait l'application de ces méthodes. Le lecteur intéressé pourra se référer notamment à *Hybrid Evolutionary Algorithms* (2007) de Crina Grosan, Ajith Abraham and Hisao Ishibuchi et à *Hybrid Evolutionary Algorithms* (2016)

---

36. Dérivable une fois ou éventuellement plusieurs fois (Deux fois pour la méthode de Newton-Raphson)

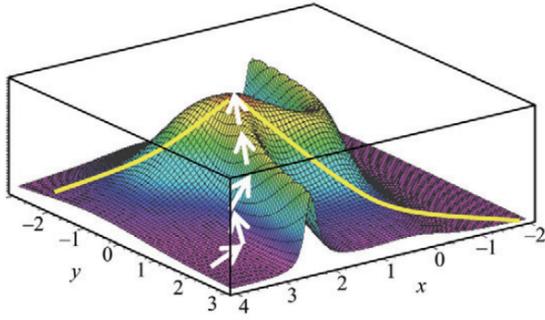


FIGURE 30 – Cas d’une fonction présentant un seul point optimal

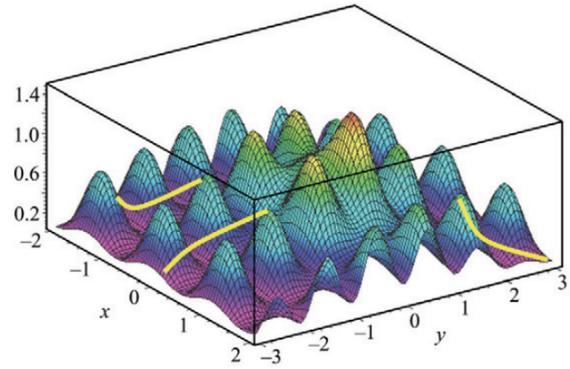


FIGURE 31 – Cas d’une fonction présentant plusieurs optimaux locaux

### 4.4.3 Algorithme évolutionniste et optimisation multicritère

Comme souligné précédemment, les méthodes évolutionnistes consistent en l’optimisation une population de solution via un processus itératif. Cette approche trouve un intérêt tout particulier en optimisation multiobjectif, car chaque itération de l’algorithme évolutionniste résulte en un ensemble de solution non-dominées et l’on dispose alors, dès les premières itérations, d’une approximation de l’ensemble de la frontière de Pareto.

L’un des points délicats dans la construction de l’algorithme évolutionniste reste la définition ou le choix de l’opérateur de sélection. En effet, dans le cadre de l’optimisation mono-objectif cette définition ne pose généralement pas de problème. La sélection des individus est faite en les ordonnant dans un premier temps selon la fonction à optimiser, puis l’opérateur de sélection est appliqué sur la population ordonnée.

Cependant, en optimisation multiobjectif, il n’existe pas *a priori* de relation d’ordre totale sur l’espace des objectifs. Toutes les solutions ne peuvent donc pas être ordonnées entre elles. Leur classification ne semble pas aussi simple que dans le cas d’un problème d’optimisation mono-objectif.

Dans la partie suivante nous présenterons l’algorithme évolutionniste utilisé ainsi que les opérateurs de sélection, croisement et mutation associés.

## 4.5 Algorithme implémenté

Il existe une très grande diversité d’algorithmes évolutionnistes. Selon la littérature, les travaux scientifiques associés à ces algorithmes ont davantage été tournés vers le développement de nouveaux algorithmes et leurs performances plutôt que sur leurs concepts fondamentaux. Cela explique qu’il existe aujourd’hui des possibilités multiples quant à la sélection d’un algorithme évolutionniste.

### 4.5.1 NSGA-II

L’algorithme qui sera utilisé par la suite se nomme NSGA-II pour *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (version 2). L’appellation *non dominated* correspond à la méthode

de classement des solutions entre-elles, tandis que la dénomination *genetic algorithm* correspond à la catégorie d'algorithmes évolutionnistes à laquelle appartient NSGA-II. Les algorithmes génétiques sont caractérisés par la manière dont les individus (ou solutions) sont représentés. Ils sont représentés par une chaîne de caractères, d'où la similitude avec l'encodage du génome humain qui est conventionnellement représenté par les lettres A, T, G et C.

Notre choix d'utiliser NSGA-II se justifie par la popularité de cet algorithme mais également par la mise en évidence, dans de précédents travaux, de résultats intéressants en gestion des risques<sup>37</sup>. Dans notre cas, ces résultats présentent un intérêt, plus particulièrement dans l'optimisation de programmes de réassurance cf. e. g. Osterreicher, Mitschele & Schlottmann [16]

### Description générale de l'algorithme

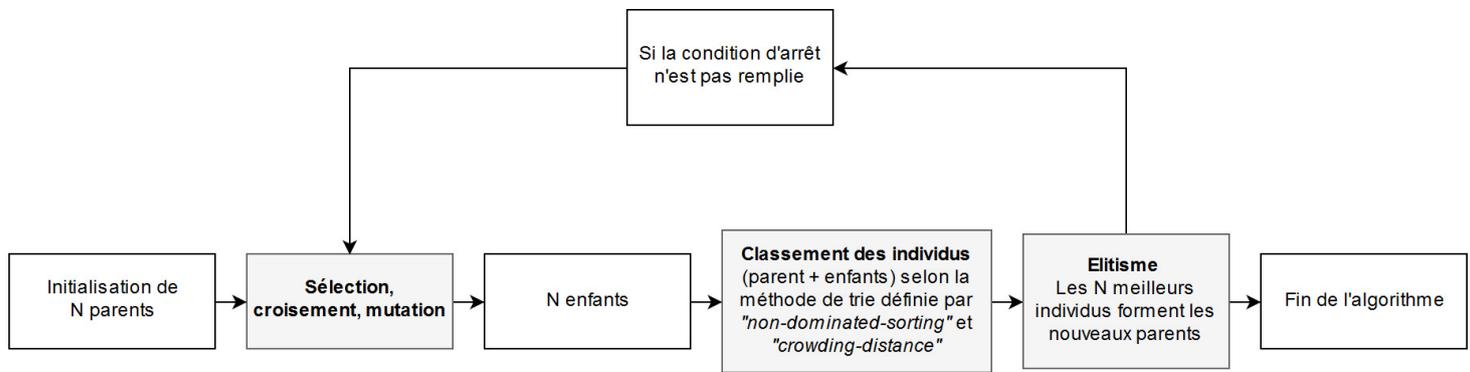


FIGURE 32 – Architecture de l'algorithme NSGA-II

L'architecture globale de l'algorithme NSGA-II est illustrée par la figure 32, nous nous intéressons dans un premier temps aux opérations de *classement des individus et d'élitisme*.

Il a été précisé dans la partie 6.3.2 qu'il est délicat d'ordonner les solutions entre elles lorsque plusieurs objectifs doivent être optimisés. La méthode utilisée par K. Deb consiste à classer les individus en deux temps.

Dans un premier temps la méthode *non-dominated-sorting* regroupe les individus par *frontières* de différents rangs. Dans un second temps, les individus de chaque frontière sont classés entre eux selon la valeur de leur *crowding-distance*.

La première phase de tri, "*non-dominated-sorting*", est la suivante :

- Regrouper les individus non dominés dans un premier groupe appelé  $F_1$  pour "frontière de rang 1"
- Parmi les individus dominés par  $F_1$ , regrouper les individus non dominés dans un second groupe appelé  $F_2$  pour "frontière de rang 2", et ainsi de suite. Les frontières

<sup>37</sup>. F. Schlottmann and D. Seese. *Financial applications of multi-objective evolutionary algorithms : Recent developments and future research*

F. Schlottmann, A. Mitschele, and D. Seese. *A Multi-objective Approach to Integrated Risk Management*. 2005

obtenues sont illustrées sur la figure 33.

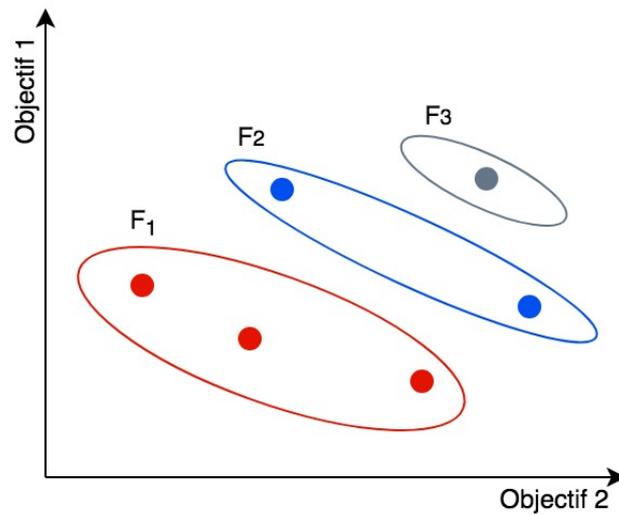


FIGURE 33 – Illustration de l'opération *non-dominated-sorting*.

Par exemple : la frontière  $F_1$  est constituée de 3 parents, la frontière  $F_2$  de 2 parents et la frontière  $F_3$  de 1 parent

La nouvelle génération de parents se constituera en intégrant les individus des frontières 1 puis 2 et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nombre désiré de parents soit atteint. Dans le cas de la figure 33, si nous désirons des populations de 5 parents, la nouvelle génération de parents sera ainsi constituée par les frontières 1 et 2. Dans le cas où le nombre voulu de parents aurait été 4, les individus de la frontière numéro 2 auraient été classés entre eux selon la valeur de leur *crowding-distance* et les meilleurs individus auraient ensuite été conservés.

La *crowding-distance* d'un individu donne une estimation de la densité de population l'entourant. Plus un individu est isolé, plus il aura de chances d'être sélectionné pour former les générations futures, permettant de maintenir une certaine diversité dans la population.

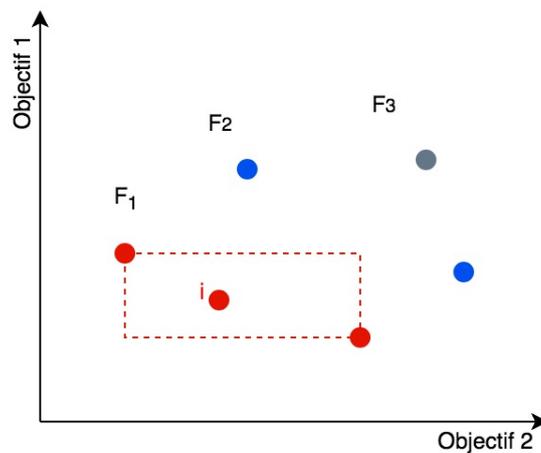


FIGURE 34 – Illustration du calcul de la *crowding-distance*. La *crowding distance* du point  $i$  vaut ici 1.

La *crowding-distance* est obtenue en sommant les *crowding-distances* des différents

objectifs. Celles-ci sont calculées de la façon suivante :

1. Les solutions sont triées selon leur valeur vis-à-vis de l'objectif en question. Pour l'objectif  $i$  on obtient donc :  $f_i(x_{i_1}) \leq f_i(x_{i_2}) \leq \dots \leq f_i(x_{i_N})$  avec  $i_1, \dots, i_N$  les indices des solutions triées
2. Une valeur de distance infinie est attribuée aux solutions limites (solutions avec la valeur de fonction objectif la plus petite et la plus grande) :  $d_i(x_{i_1}) = d_i(x_{i_N}) = +\infty$
3. Toutes les autres solutions intermédiaires ( $1 < j < N$ ) se voient attribuer la valeur de distance définie par :  $d(x_{i_j}) = \frac{f(x_{i_{j+1}}) - f(x_{i_{j-1}})}{f(x_{i_N}) - f(x_{i_1})}$

### Opérateurs de croisement et mutation

- Opérateur de mutation : *polynomial mutation*

L'opérateur de mutation utilisé est l'opérateur *polynomial mutation*. Il définit la mutation  $p'$  d'un des gènes d'un individu  $p$  via les formules ci-dessous :

$$p' = \begin{cases} p + \delta_L(p - x_i^{(L)}) & \text{si } u \leq 0.5 \\ p + \delta_U(p - x_i^{(U)}) & \text{si } u > 0.5 \end{cases} \quad (7)$$

Avec  $u \sim U([0, 1])$  (loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ ),  $x_i^{(L)}$  (resp.  $x_i^{(U)}$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) pour la valeur du gène  $i$  et :

$$\delta_L = (2u)^{1/(1+\eta_m)} - 1, \text{ pour } u \leq 0.5$$

$$\delta_U = 1 - (2(1-u))^{1/(1+\eta_m)}, \text{ pour } u > 0.5$$

A titre d'illustration, la figure 35 représente la densité de probabilité des gènes mutés pour un gène initial  $p = 3$ , borné par l'intervalle  $[1, 8]$  et avec  $\eta_m = 20$ .

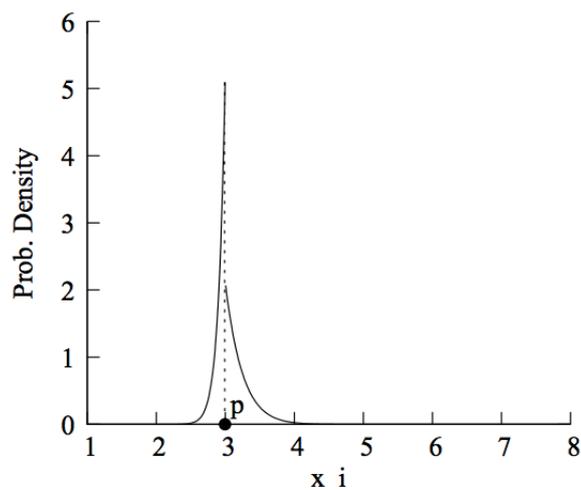


FIGURE 35 – Illustration de la densité de probabilité des mutations possibles

- Opérateur de croisement *Bounded Simulated Binary Crossover (bounded SBX)*

L'opérateur SBX permet de créer deux *descendants* à partir des caractéristiques de deux *parents*. Les caractéristiques des descendants sont déduites de celles des parents en tirant aléatoirement un paramètre dit de *spread* (noté ici  $\beta$ ). Ce paramètre permet de définir l'écart entre les enfants : plus le spread est grand, plus les gènes des enfants seront différents.

Notons,  $p_1^i$  et  $p_2^i$  (resp.  $c_1^i$  et  $c_2^i$ ) les valeurs du gène  $i$  pour les *parents* 1 et 2 (resp. pour les *descendants* 1 et 2).  $c_1^i$  et  $c_2^i$  sont calculés de la façon suivante :

$$c_1^i = \frac{p_1^i + p_2^i}{2} + \beta(p_2^i - p_1^i)$$

$$c_2^i = \frac{p_1^i + p_2^i}{2} - \beta(p_2^i - p_1^i)$$

Le paramètre  $\beta$  est tirée selon la loi de probabilité définie par la densité suivante :

$$f(\beta) = \begin{cases} 0.5(\eta_x + 1)\beta^{\eta_x} & \text{pour } \beta \leq 1 \\ 0.5(\eta_x + 1)\frac{1}{\beta^{\eta_x+2}} & \text{pour } \beta > 1 \end{cases}$$

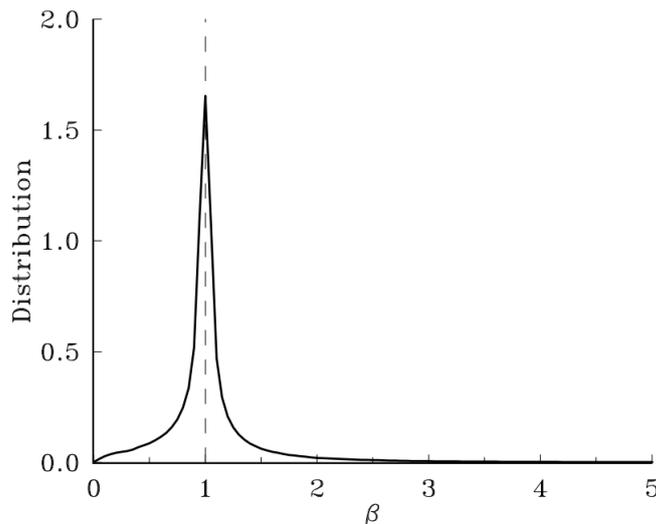


FIGURE 36 – Densité de la loi donnant le paramètre de spread pour  $\eta_x = 5$ .

Paramètre	$p_m$	$\eta_m$	$p_x$	$\eta_x$
Valeur	$1/n$	10	0.7	5

TABLE 5 – Paramètres retenus pour les opérateurs de croisement et de mutation. Avec  $n$  le nombre de gènes.

#### 4.5.2 Application au pilotage sous contrainte d'appétit au risque

Dans le cadre du pilotage d'une compagnie d'assurance, l'espace de décision correspond aux leviers de pilotage. Ainsi les leviers pris en compte dans ce mémoire sont la

stratégie de réassurance, la stratégie d'allocation d'actif et la stratégie de développement commercial (ajout/arrêt de la commercialisation d'une nouvelle ligne d'activité).

$$\min_{\omega \in \Omega, g_1(\omega) \leq 0, \dots, g_k(\omega) \leq 0} (f_1(\omega_1), \dots, f_k(\omega_k))$$

Avec  $g_1(\omega) \leq 0, \dots, g_k(\omega) \leq 0$  les contraintes (contraintes d'appétit au risque, contraintes réglementaires...).

### Gestion des contraintes

La gestion des contraintes a été adressée de différentes manières dans la littérature relative à l'optimisation multiobjectif, le lecteur intéressé pourra notamment se référer aux méthodes proposées dans [4] (chapitre 2.4 *Constraint-Handling Techniques*). L'approche qui s'est popularisée est d'intégrer les contraintes dans les objectifs du problème d'optimisation et de se ramener ainsi à un problème sans contrainte :

- **Transformation bi-objectif** : les contraintes sont agrégées via une somme pondérée, puis la contrainte agrégée ainsi obtenue est ajoutée à l'ensemble des objectifs. La pondération choisie pourra refléter les préférences du décideur et orientera *a fortiori* la recherche des solutions optimales.
- **Transformation multiobjectif** : les contraintes sont directement ajoutées à l'ensemble des objectifs. Il n'est donc pas nécessaire de définir des préférences entre les différentes contraintes du problème d'optimisation, ce qui est en cohérence avec l'approche *a posteriori* choisie dans le cadre de ce mémoire.

Nous avons donc retenu l'approche *transformation multiobjectif* dans ce mémoire car elle permet de s'affranchir d'hypothèses sur les préférences du décideur. L'espace des objectifs est donc composé ici des indicateurs de pilotage et des contraintes d'appétit au risque.

### Optimisation de traités de réassurance et d'allocation d'actif

Les opérateurs de croisement et de mutation proposés initialement par K. Deb pour l'algorithme NSGA-II sont définis pour des individus représentés par des vecteurs de  $[0, 1]^n$ . Cette représentation se prête bien à l'optimisation de paramètres quantitatifs (allocation d'actif, priorité et portée des traités XS...), cependant lorsque des paramètres qualitatifs entrent en jeu comme le choix entre une couverture de type XS ou une couverture en quote-part, cette représentation des individus pose problème. La solution prise dans le cadre de ce mémoire a été de considérer pour chaque paramètre qualitatif un problème d'optimisation à part entière.

Considérons le cas d'une entreprise d'assurance composée de deux lignes d'activité et pouvant réassurer chacune de ses lignes d'activité via des contrats de type quote-part ou XS. L'optimisation de la stratégie d'allocation d'actif et de réassurance de cette entreprise est alors effectuée en considérant 4 problèmes d'optimisation séparément comme représenté sur la figure 37. Les solutions données par les différents problèmes d'optimisation sont ensuite triées afin de ne garder que les solutions non-dominées.

Cette solution peut éventuellement s'avérer coûteuse en temps de calcul lorsque le

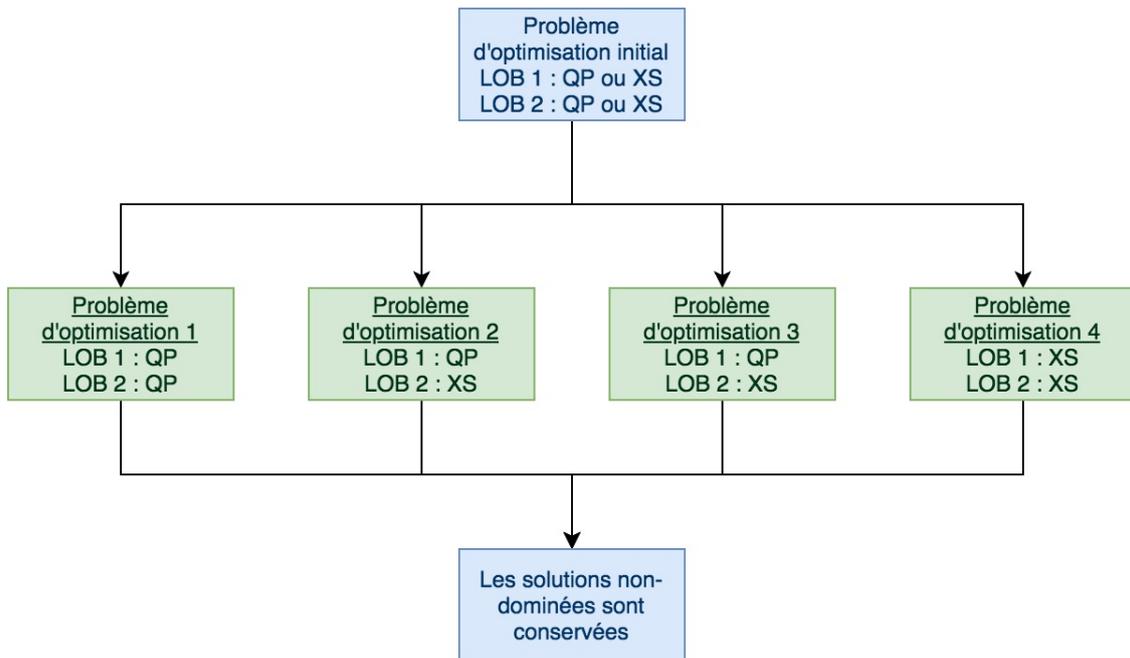


FIGURE 37 – Méthode d’optimisation

nombre de paramètres qualitatifs devient important (un grand nombre de lignes d’activité ou un grand nombre de systèmes de réassurance), néanmoins il s’agit de la méthode donnant la meilleure approximation de la frontière de Pareto, car toutes les possibilités sont explorées et optimisées. En outre, cette méthode possède l’avantage d’être facilement parallélisable et donc de pouvoir en perfectionner le temps de calcul. En effet chaque problème d’optimisation est indépendant des autres et peut donc être lancé sur un coeur ou une machine différente.

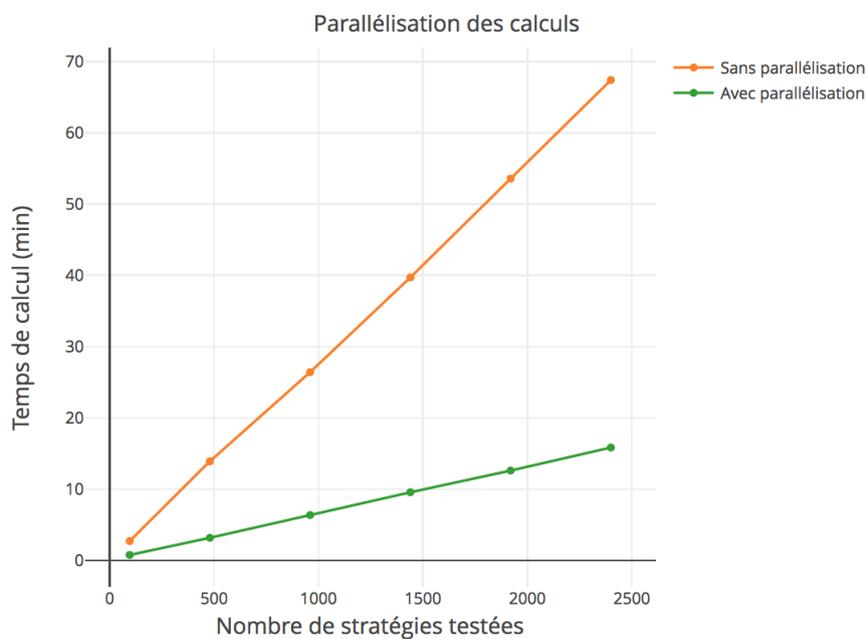


FIGURE 38 – Temps de calcul avec et sans parallélisation

Les calculs effectués dans le cadre de ce mémoire ont été fait sur un ordinateur com-

posé d'un processeur intel i7 doté de 6 coeurs<sup>38</sup>. Ainsi en utilisant le package *future* de R nous avons pu paralléliser les calculs sur les 6 coeurs et diviser ainsi le temps de calcul par plus de 4 (cf figure 38).

## 4.6 Conclusion

Le pilotage d'une compagnie d'assurance étant un problème où plusieurs objectifs doivent être poursuivis, nous avons présenté un rapide aperçu des méthodes d'optimisation multiobjectif.

Certaines de ces méthodes s'appuient sur une articulation des préférences du décideur et l'optimisation permet ainsi d'aboutir à une unique solution optimale. Cependant étant donné qu'il est délicat de définir les préférences du conseil d'administration d'une entreprise d'assurance et que celles-ci peuvent varier d'une entreprise à une autre, nous avons fait le choix, dans le cadre de ce mémoire, de s'intéresser à des méthodes sans a priori sur la fonction d'utilité du décideur.

Ainsi notre choix s'est finalement porté sur la méthode d'optimisation NSGA-II en raison de sa popularité et de son statut de benchmark dans le domaine de l'optimisation multiobjectif.

Enfin nous avons explicité l'application de cet algorithme dans le cadre de l'optimisation simultanée de plusieurs leviers (allocation d'actif, traités de réassurance...).

---

38. Intel i7 8700k 3.7GHz, 12 threads

## 5 Application à une entreprise d'assurance non-vie

Nous allons à présent appliquer le modèle et les méthodes vues dans les parties précédentes au cas d'une entreprise fictive d'assurance non-vie. Dans un premier temps, nous définirons la structure de l'entreprise ainsi que ses leviers d'actions. Nous établirons par la suite la limite de tolérance au risque de l'entreprise, pour enfin analyser les stratégies optimales proposées par l'algorithme d'optimisation.

### 5.1 Description de l'entreprise

L'entreprise fictive étudiée est une assurance non-vie composée initialement d'une unique branche automobile. Cette branche commercialise des contrats comportant systématiquement les garanties "dommage automobile" et "responsabilité civile automobile"<sup>39</sup>. Pour nous recontextualiser, cette étude nous place au moment de la clôture de l'exercice de 2018 et de l'établissement du business plan de l'entreprise, sur un horizon de 5 ans.

#### 5.1.1 Données et bilan initial de l'entreprise

NB. - *Bien qu'un certain soin ait été porté afin de rester relativement réaliste, les données proposées peuvent être sujettes à discussion. L'entreprise fictive prise en exemple ici ne prétend pas être une représentation type des entreprises d'assurance non-vie.*

- **Nombre de contrats**

Nous supposons ici un nombre d'affaires constant sur les lignes d'activités *RC Auto* et *Domage Auto*.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
RC Auto	50 000	50 000	50 000	50 000	50 000	50 000
Domage Auto	50 000	50 000	50 000	50 000	50 000	50 000

TABLE 6 – Nombre de contrats en portefeuille en fin d'année

En outre nous supposerons que l'entreprise considérée envisage la possibilité d'intégrer à son portefeuille une ligne d'activité *Domage aux biens*, correspondant par exemple à des engagements de type multi-risques habitation<sup>40</sup>. La projection du nombre de contrats pour cette ligne d'activité est la suivante :

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Dommages aux biens	0	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000

TABLE 7 – Nombre de contrats en portefeuille en fin d'année

- **Niveaux de prime**

Les primes sont supposées constantes dans le temps, toutefois soulignons la possibilité de considérer une revalorisation annuelle de celle-ci suivant l'inflation. Les niveaux de prime sont donc les suivants (tableau 8).

---

39. En référence aux lignes d'activité 4 et 5 de l'Annexe I du Règlement délégué 2009/138/CE (cf [12])

40. En référence à la ligne d'activité 7 du règlement délégué Solvabilité II (cf [18])

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
RC Auto	320	320	320	320	320	320
Domage Auto	90	90	90	90	90	90
Domage aux biens	0	110	110	110	110	110

TABLE 8 – Primes moyenne des contrats en stock

• **Niveaux de frais**

Les frais d'acquisition (respectivement d'administration) sont calculés comme un pourcentage des primes émises (respectivement acquises), tandis que les frais de gestion de sinistres sont calculés comme un pourcentage des montants de sinistres.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Frais d'acquisition	12%	12%	12%	12%	12%	12%
Frais d'administration des contrats	8%	8%	8%	8%	8%	8%
Frais de gestion de sinistres	8%	8%	8%	8%	8%	8%

TABLE 9 – Taux de frais des lignes d'activité *Domage Auto* et *RC Auto*

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Frais d'acquisition	20%	16%	14.7%	14%	13.6%
Frais d'administration des contrats	8%	8%	8%	8%	8%
Frais de gestion de sinistres	8%	8%	8%	8%	8%

TABLE 10 – Taux de frais d'acquisition de la lignes d'activité *Domage aux biens*

• **Sinistralité des lignes d'activité**

La simulation de la sinistralité est faite en projetant les sinistres attritionnels et les sinistres graves comme expliqué dans la partie 2.

Les paramètres de la sinistralité des différentes lignes d'activité ainsi que de la cadence de règlement sont disponibles en annexe F.

• **Placement initiaux**

Au 31/12/2018 la valeur de marché des différents placements est la suivante :

- Actions : 12M d'euros
- Obligations : 43M d'euros
- Monétaire : 6M d'euros

En s'appuyant sur les paramètres donnés ci-dessus et en supposant qu'ils sont constants pour les années antérieures à 2018<sup>41</sup>, nous obtenons finalement le bilan économique représenté par le schéma de la figure 39. Pour le calcul du Best Estimate et de la Risk Margin, se référer à la partie 2.

41. cette hypothèses est utilise pour l'estimation des règlements futures et donc pour le calcul du Best Estimate des provisions techniques

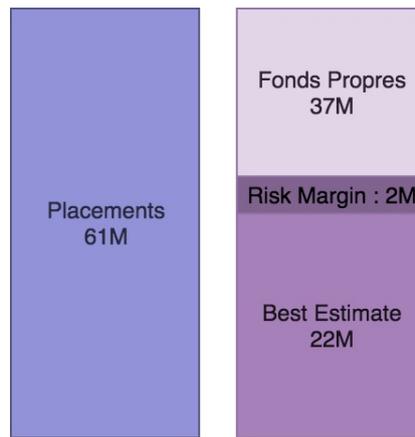


FIGURE 39 – Schéma du bilan économique de la société au 31/12/2018

## 5.1.2 Scénarios

### Scénarios économiques

- Taux

Comme précisé dans la partie 3, les taux du générateur de scénarios économiques sont simulés par modèle un Hull and White calibré en historique sur les données du 1er janvier 2005 au 19 juin 2017.

Sur les premières années de projection, pour les taux courts, les trajectoires obtenues sont donc négatives en scénario central.

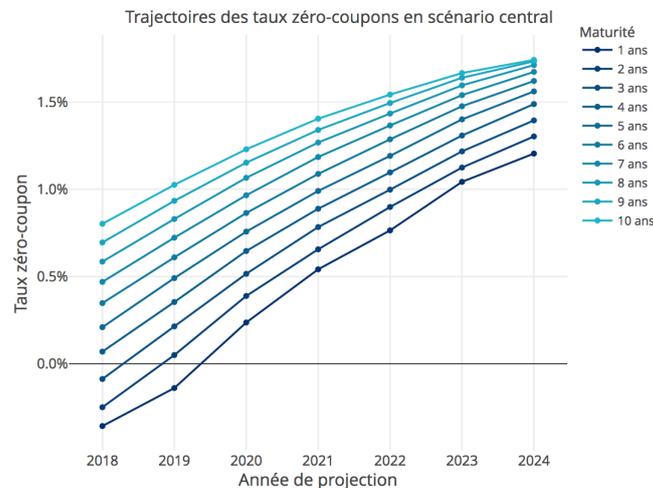


FIGURE 40 – Projection des taux zéro-coupons simulés par le générateur de scénario économique en scénario central

## 5.2 Description des leviers et de la stratégie de l'entreprise

Pour rappel, le conseil d'administration d'une entreprise d'assurance a, à sa disposition, un ensemble des possibles relativement vaste. Nous présentons dans cette partie les leviers retenus *in fine* pour notre entreprise fictive.

### 5.3 Leviers pris en considération pour l'étude

L'univers des possibles étant quasi-infini, nous nous sommes restreint à un certain nombre de leviers pour notre étude :

- **Réassurance** : les contrats de réassurance pris en compte seront les traités de type quote-part et excédent de sinistre (ou XS). Le programme de réassurance de chaque ligne d'activité ne sera composé que d'un seul type de contrat, soit XS soit quote-part. Ce choix nous permet de réduire l'univers des possibles et de gagner en temps de calcul lors de l'optimisation de la stratégie de réassurance, via l'algorithme génétique proposé dans la partie 4.5.
- **Allocation d'actif** :
  - Allocation par classe d'actif : L'allocation initiale par classe d'actif est définie dans le tableau 11 ci-dessous. L'allocation cible sera choisie selon les résultats du programme d'optimisation.

Actif	Actions	Obligations	Monétaire
Allocation initiale	20%	70%	10%

TABLE 11 – Allocation par classe d'actif

- Allocation par maturité d'obligation : en raison du contexte économique actuel, les taux zéro-coupon simulés par le modèle sont négatifs pour les maturités courtes. Par conséquent l'allocation cible sera choisie de façon à investir dans des obligations de maturité supérieures à 5 ans. Cependant, afin de ne pas avoir un écart de duration trop grand entre l'actif et le passif et de limiter la sensibilité aux taux, nous choisirons d'investir en priorité dans des obligations de maturité 5 et 6 ans.

L'allocation obligataire retenue pour notre entreprise est la suivante :

Maturité	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans
Allocation initiale	30%	30%	20%	10%	10%
Allocation cible	30%	30%	20%	10%	10%

TABLE 12 – Allocation par maturité d'obligation

- **Diversification de l'activité** : comme précisé le conseil d'administration envisage d'intégrer une nouvelle ligne d'activité "Dommage aux biens"<sup>42</sup>

### 5.4 Appétit au risque et objectifs de l'entreprise

L'appétit au risque global de l'entreprise est défini selon trois indicateurs : le ROE (*Return on Equity*), le ratio de solvabilité et le ratio combiné.

Ce choix permet donc de prendre en compte à la fois les intérêts des investisseurs et celui des régulateurs. L'appétit au risque de notre entreprise fictive est ainsi défini par les critères suivants :

---

42. En référence à la ligne d'activité 7 du règlement délégué Solvabilité II (cf [18])

- **Critère 1** : Le ROE doit être supérieur à 0.1% dans 90% des scénarios. Le ROE calculé ici correspond au taux de rendement annualisé des fonds propres sur 5 ans :

$$ROE = \left( \frac{AFR(5)}{AFR(0)} \right)^{1/5} - 1$$

avec *AFR* pour *Available Financial Resources*, le niveau de fonds propre économique.

- **Critère 2** : Le ratio de solvabilité doit être supérieur à 200% sur un horizon de 5 ans dans 90% des scénarios.
- **Critère 3** : Le ratio combiné doit être inférieur à 100% sur un horizon de 5 ans dans 90% des scénarios.

Initialement, seule la dernière contraintes d'appétit au risque est respectées comme on peut le voir sur la figure 41. Dans l'outil développé, le respect ou non des contraintes d'appétit au risque est visible via le tableau de bord de la figure 41. Dans le cas où l'appétit au risque n'est pas respecté, l'utilisateur peut choisir de modifier la stratégie de l'entreprise dans l'onglet stratégie<sup>43</sup> ou d'optimiser automatiquement la stratégie de l'entreprise<sup>44</sup> (via la méthode d'optimisation vue en partie 4.5) afin de respecter *in fine* l'appétit au risque.



FIGURE 41 – Appétit au risque initial. Illustration tirée du dashboard de l'application R/Shiny.

#### 5.4.1 Projection de la stratégie initiale de l'entreprise

### 5.5 Analyse de sensibilités

Nous étudions dans cette partie les sensibilités des indicateurs de performance et d'appétit au risque au regard des leviers de pilotage définis précédemment (allocation d'actif, réassurance et développement commerciale avec une lob *Dommmage aux biens*). Une telle démarche pourrait permettre en pratique d'en déduire des actions de pilotage permettant de définir une stratégie respectant l'appétit au risque de l'entreprise.

43. cf capture d'écran annexe A.2

44. cf capture d'écran annexe A.4

### 5.5.1 Allocation d'actif

Nous nous intéressons dans un premier temps à la stratégie d'allocation d'actif. Les placements de l'entreprise fictive sont constitués d'actions, d'obligations et de monétaire. Les montants alloués à ces 3 placements auront un impact à la fois sur le rendement global espéré mais aussi sur le niveau de risque auquel s'expose l'entreprise.

La stratégie d'allocation joue ainsi un rôle essentiel dans le pilotage de l'entreprise. Nous analysons donc dans la suite son impact sur des indicateurs de performance et de risque mais également sur les critères d'appétit au risque de l'entreprise.

#### Impact sur la projection du SCR moyen

Nous représentons sur la figure 42 la valeur du SCR marché pour différentes allocations d'actif. En ordonnée se trouve la part allouée aux actions ( $\omega_{action}$ ) et en abscisse la part allouée aux obligations ( $\omega_{obligation}$ ). La part allouée au monétaire correspond donc au complémentaire :  $100\% - \omega_{action} - \omega_{obligation}$ .

Les points situés sur la diagonale correspondent donc aux allocations pour lesquels le montant de monétaire est nul.

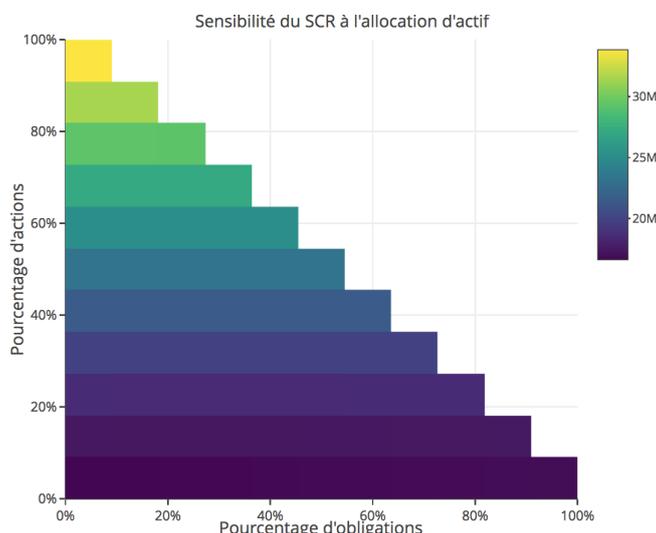


FIGURE 42 – Sensibilité du SCR projeté en N+1 (2018)

Nous pouvons remarquer que le SCR est très sensible à la part d'actions du portefeuille. En effet la formule standard pénalise fortement l'investissement en actions avec un choc de 39% si celle-ci sont dites de type I<sup>45</sup> et de 49% pour celles de type II. Dans le cadre de ce mémoire il a été considéré que l'intégralité des actions du portefeuille étaient de type I, ainsi le SCR actions, hors ajustement symétrique, s'écrit :

$$SCR_{actions} = 39\% \cdot \text{Valeur de marché des actions}$$

#### Impact sur le rendement espéré (évolution de l'actif espéré)

Nous avons pu voir que l'investissement en action était largement pénalisé par le SCR actions, cependant il s'agit aussi de l'investissement donnant la meilleure performance moyenne comme le montre la figure 43 : plus l'investissement en actions est important, plus la valeur de marché des placements connaît la plus forte croissance.

45. En référence à la définition du Règlement Délégué Solvabilité II (cf [18])

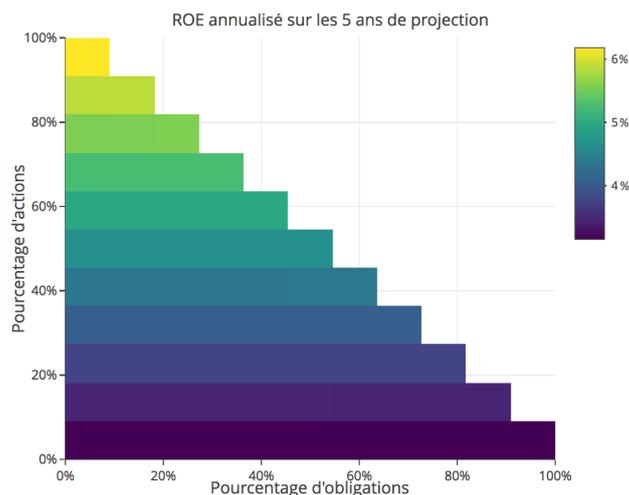


FIGURE 43 – Rentabilité de l'allocation d'actif

Ainsi la stratégie d'allocation d'actif est sujette à un arbitrage performance - risque. D'une part une allocation importante en action permet d'obtenir une meilleure performance de l'actif, d'autre part elle engendre une exposition aux risques de marché plus grande.

### Impact sur les critères d'appétit au risque

Nous avons défini trois critères d'appétit au risque pour notre entreprise fictive (cf figure 41). Parmi les indicateurs utilisés dans la définition de l'appétit au risque (ROE, ratio de solvabilité et ratio combiné), seuls le ROE et le ratio de solvabilité seront impactés par la stratégie d'allocation choisie. Les figures 44 et 45 représentent la sensibilité de ces indicateurs à l'appétit au risque.

Il apparaît sur ces graphiques que plus l'allocation en action est importante plus l'entreprise s'écarte du respect de son appétit au risque.

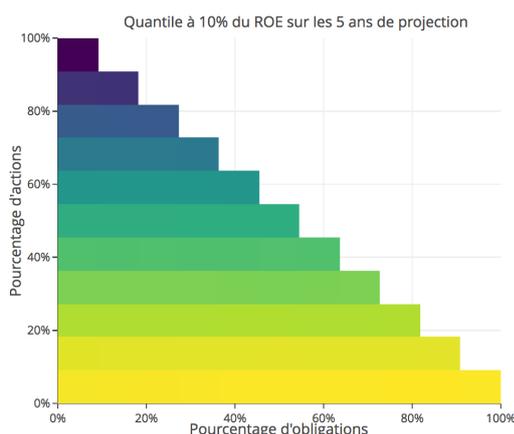


FIGURE 44 – Impact sur le quantile à 10% du ROE : seuil limite 0.1%

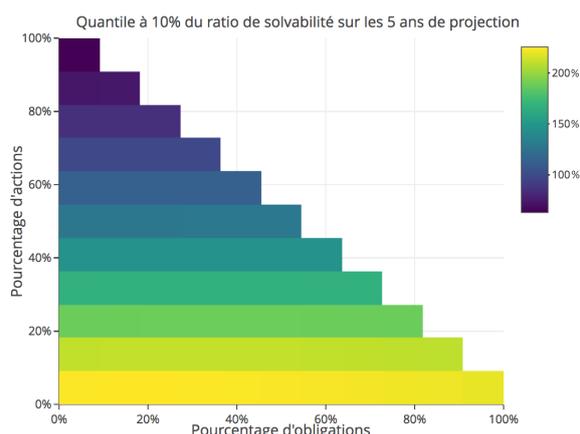


FIGURE 45 – Impact sur le quantile à 10% du ratio de solvabilité : seuil limite 200%

Ainsi les stratégies d'allocation d'actif permettant de respecter l'appétit au risque sont celles constituées d'au plus 10% d'actions.

## 5.5.2 Réassurance proportionnelle

La réassurance proportionnelle constitue un puissant levier de diminution de l'exposition au risque et donc du SCR. Cependant lorsque les branches cédées sont bénéficiaires, cette atténuation du risque s'accompagne également d'une perte de résultat technique en scénario central.

### Impact sur le SCR

La réassurance proportionnelle permet d'atténuer à la fois le risque de catastrophe naturelle et de catastrophe de type "man-made" dans le cadre de la formule standard.

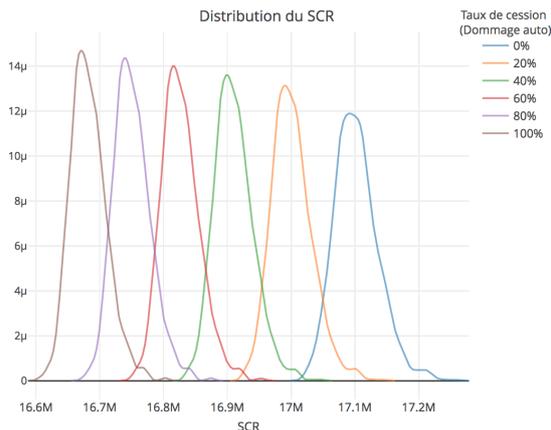


FIGURE 46 – Impact du taux de cession de la ligne d'activité Dommage Auto sur la distribution du SCR.

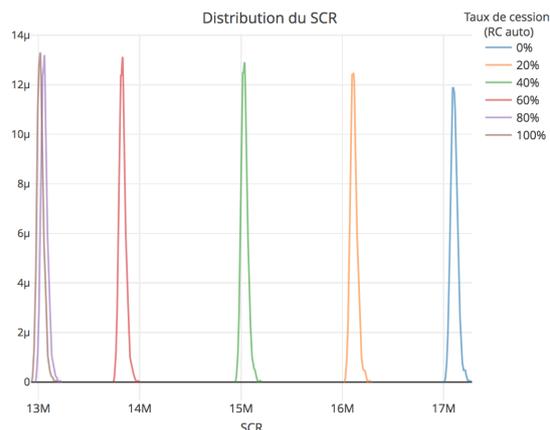


FIGURE 47 – Impact du taux de cession de la ligne d'activité RC Auto sur la distribution du SCR.

Les graphiques 46 et 47 illustrent cet effet, on peut remarquer que l'augmentation du taux de cession en réassurance vient diminuer le SCR global.

Cependant, notons qu'en raison des effets de diversification, le bénéfice marginal du taux de cession n'est pas constant. Pour la ligne d'activité Dommage Auto, par exemple, l'effet dû à la cession de 20% au lieu de 0% a un impact plus important que celui dû à la cession de 100% au lieu de 80%.

En outre, nous pouvons observer que l'augmentation du taux de cession vient diminuer la variabilité du SCR (la distribution devient moins étalée), ceci est dû au fait que la variabilité du *Best Estimate* des provisions techniques nettes de réassurance devient moins volatile quand le taux de cession augmente et donc la variabilité du SCR primes et réserves diminue également.

Ainsi en diminuant le SCR, la couverture en réassurance proportionnelle aura *a priori* un impact sur la projection du ratio de solvabilité. Cependant l'effet est en réalité double car la réassurance impacte également le résultat de l'entreprise. L'effet de la réassurance est donc à la fois sur le SCR et sur l'évolution des fonds propres de l'entreprise. Son impact sur la projection du ratio de solvabilité n'est par conséquent pas évident.

### Impact sur le résultat technique de la ligne d'activité

La réassurance est par essence une méthode d'atténuation du risque. Cependant la pertinence de cette atténuation dépend de la nature des sinistres : plus la variabilité et l'épaisseur de la queue de distribution sont importantes, plus le recours à la réassurance

est pertinent.

La garantie *RC automobile* de notre entreprise fictive est modélisée par une sinistralité plus variable que la garantie *dommage automobile*. On peut donc observer sur les figures 48 et 49 que la cession du risque permet effectivement de réduire les pertes extrêmes.

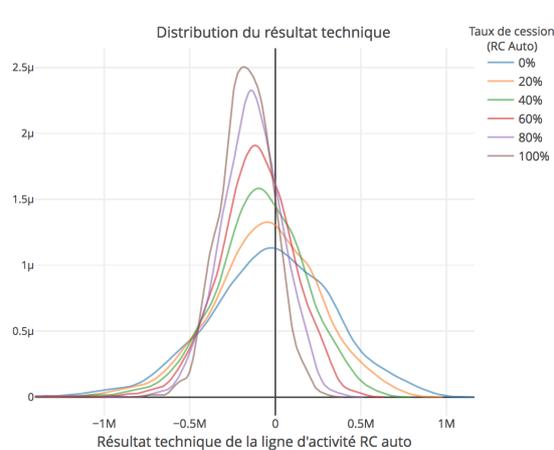


FIGURE 48 – Impact du taux de cession de la ligne d'activité RC Auto sur la distribution du résultat.

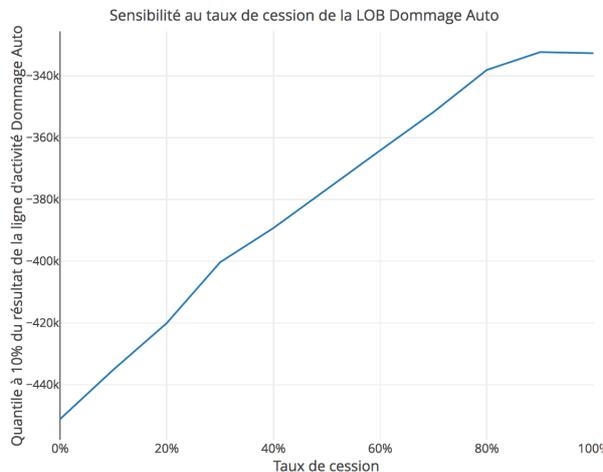


FIGURE 49 – Impact du quantile à 10% du taux de cession de la ligne d'activité RC Auto sur la distribution du résultat.

La garantie *dommage automobile* quant à elle connaît une sinistralité dont la queue de distribution est moins épaisse (cf paramètres en annexe F). La cession d'une partie du risque en Quote-Part a un impact différent sur la distribution du résultat : le résultat moyen est déplacé vers la gauche car la commission de réassurance ne permet pas de compenser intégralement les frais de l'assureur, en outre les "pertes extrêmes" (quantiles à 0.5%, 1%, 5%...) ne sont pas atténuées comme pour la garantie *RC automobile*.

L'impact de la réassurance sur le résultat technique n'est donc pas trivial, car son effet sur la distribution du résultat est double : d'une part la distribution vers la gauche (via le paiement de la prime), d'autre part la queue de la distribution devient moins épaisse et la distribution devient moins étalée (cf figure 50 et 48). Par conséquent, si la prime payée est trop importante, la distribution sera trop fortement décalée vers la gauche et l'effet d'atténuation du risque de perte extrême ne sera pas visible.

Dans le cas de notre entreprise fictive, les études de sensibilités nous montrent donc qu'il est intéressant de céder une partie du risque de *responsabilité civile automobile* mais de conserver le risque associé à la *garantie dommage automobile*.

Une telle stratégie pourrait permettre d'améliorer de façon significative le ratio solvabilité de l'entreprise étant donné l'impact du taux de cession en quote-part sur le SCR (cf 47).

### Impact sur les indicateurs d'appétit au risque

On remarque donc qu'en cédant 28% de la ligne d'activité *RC Automobile*, le ratio de solvabilité devient supérieur à 200% sur un horizon de 5 ans dans au moins 90% des scénarios. Une telle mesure permettrait de satisfaire à la contrainte d'appétit au risque sur le ratio de solvabilité de l'entreprise (cf figure 41). Cependant, elle viendrait également

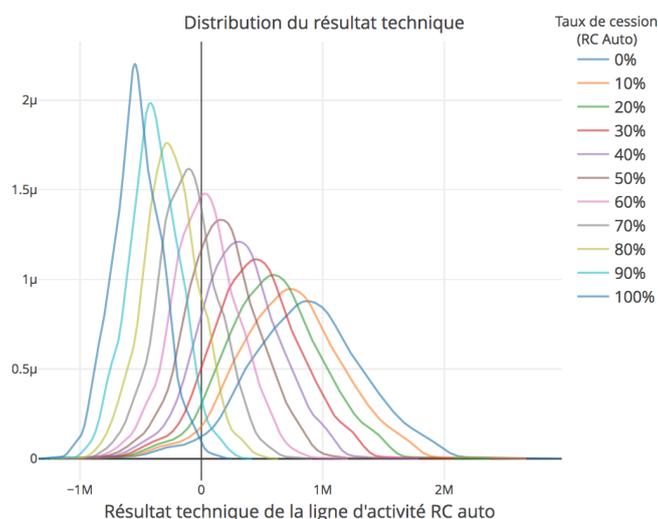


FIGURE 50 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité Dommage Auto sur la distribution du résultat.

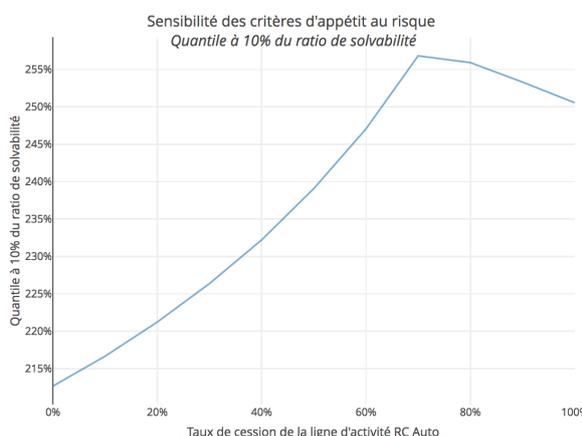


FIGURE 51 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité RC Auto le quantile à 10% du ratio de Solvabilité.

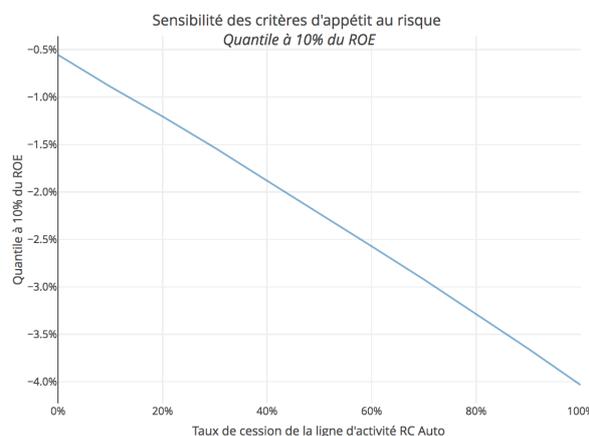


FIGURE 52 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité RC Auto le quantile à 10% du ROE.

dégrader le respect de la contrainte définie sur le ROE (cf figure 41 : le ROE doit être supérieur à 0.1% dans au moins 90% des scénarios).

En outre on remarque qu’il n’est pas intéressant de céder la ligne d’activité *Dommage Auto*. Ceci aurait pour effet de sortir l’entreprise de ses limites d’appétit au risque mais aussi de dégrader la performance de l’entreprise (cf figure 50 sur la sensibilité du résultat technique au taux de cession).

En conclusion il semble *a priori* intéressant de céder une partie de la garantie dommage auto, mais il faudrait compléter cette stratégie par d’autres actions permettant d’avoir un ROE supérieur à 0.1% dans au moins 90 scénarios.

### 5.5.3 Réassurance non-proportionnelle

Les traités de réassurance non-proportionnelle étudiés dans le cadre de ce mémoire sont les traités de type XS par risque. La réglementation stipule que ces traités ne peuvent être utilisés comme méthode d'atténuation du risque de catastrophe en non-vie, sauf si les risques sous-jacents sont identifiables<sup>46</sup>. La réassurance non-proportionnelle aura donc peu d'impact ici sur la projection du SCR.

De plus, elle n'aura pas d'impact non plus sur le résultat technique de l'entreprise en scénario central car le réassureur fait payer à l'assureur la *prime pure* (cf partie 3).

#### Impact sur le résultat technique

Le graphique 53, représente l'impact des paramètres des traités XS (priorité et portée) sur le quantile à 10% du résultat technique. On peut donc observer sans surprise sur ce graphique que plus la priorité est basse et la portée élevée et plus les pertes "extrêmes" (représentées ici par le quantile à 10%) sont atténuées.

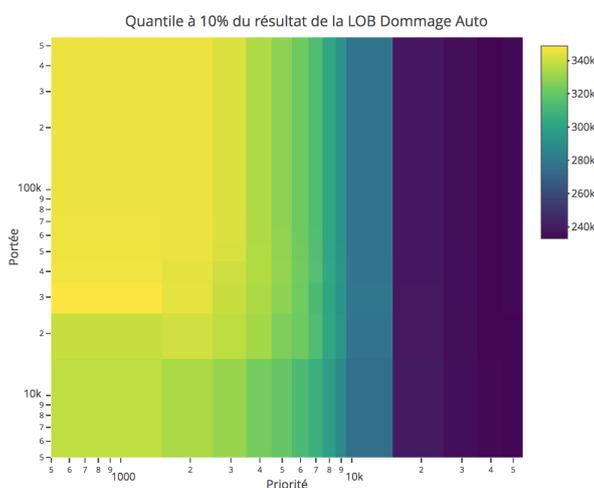


FIGURE 53 – Impact du taux de cession de la ligne d'activité Dommage Auto sur le quantile à 10% du ratio de Solvabilité

#### Impact sur les indicateurs d'appétit au risque

Les graphiques 92 et 93 donnent l'impact des paramètres des traités XS (priorité et portée) sur les indicateurs d'appétit au risque. Les impacts observés découlent directement des remarques faites précédemment sur l'impact des traités XS sur le résultat technique : plus la priorité est basse et la portée élevée et plus les pertes de résultat technique seront atténuées, ce qui aura également pour effet d'atténuer la probabilité d'avoir un ROE mais aussi un ratio de Solvabilité inférieur aux limites d'appétit au risque sur l'horizon de projection.

46. Orientation 20 sur l'application d'ententes de cession en réassurance (cf [10]) : *Pour les contrats de réassurance pour excédent de risque et les contrats de réassurance non proportionnelle facultative, les entreprises ne devraient utiliser cette réassurance non proportionnelle au titre de la formule standard que si l'événement brut permet d'identifier les polices connues parmi les polices sous-jacentes exposées.*

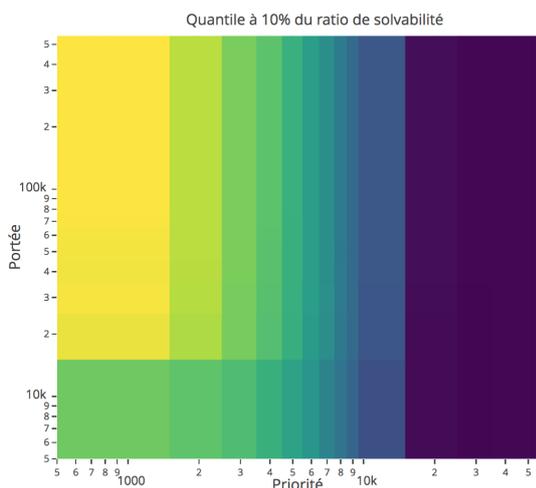


FIGURE 54 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité RC Auto le quantile à 10% du ratio de Solvabilité

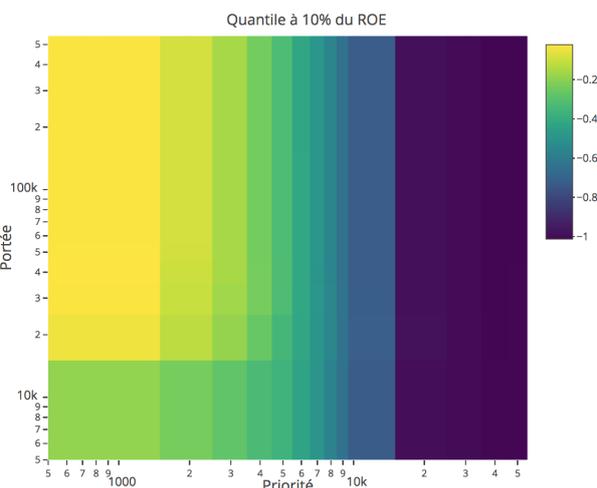


FIGURE 55 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité Dommage Auto sur le quantile à 10% du ROE

#### 5.5.4 Développement stratégique : commercialisation d’un produit de dommage aux biens

L’entreprise fictive considérée ici ne vend initialement que des garanties dommage et responsabilité civile automobile. Nous allons dans cette partie analyser l’impact de l’intégration d’une ligne d’activité *Dommage aux biens* à compter de la rentrée 2018.

Si l’on s’appuie sur les données de marché publiées par la FFA, l’intégration de cette nouvelle ligne d’activité pourrait permettre d’améliorer sensiblement le ratio combiné de l’entreprise fictive car le ratio combiné du marché français de l’assurance *Dommages aux biens des particuliers* était compris entre 88% et 91% sur les 3 dernières années, tandis que le ratio combiné de l’entreprise fictive se situe à 95% au moment de la cloture de 2018.

Les hypothèses de projection présentées en partie 5.1.1 ont donc été choisies de façon à avoir un ratio combiné de 91% sur la ligne d’activité *Dommages aux biens des particuliers*. Sous ces hypothèses, l’intégration de cette ligne d’activité permet donc d’améliorer le résultat comptable de l’entreprise en scénario central (cf tableau 13, mais elle permet également d’améliorer l’appétit au risque de l’entreprise (cf figure 56).

La limite d’appétit au risque définie sur le ratio combiné est sensiblement mieux respectée puisque que le ratio combiné devient inférieur à 99.4% dans 90% des scénarios, alors que la stratégie initiale prévoyait un ratio combiné inférieur à 99.9% dans 90% des scénarios.

	2019	2020	2021	2022	2023
Initialement	1.15	1.19	1.22	1.28	1.32
Avec la lob <i>Dommage aux biens</i>	1.15	1.24	1.33	1.46	1.59

TABLE 13 – Projection du résultat comptable (en millions) en scénario central

Le développement de la ligne d’activité *dommage aux biens* permet donc d’améliorer non seulement le résultat comptable de l’entreprise mais aussi le respect de son appétit au risque.

Cependant les limites d’appétit au risque définies sur le ROE et le ratio de solvabilité ne sont toujours pas respectées après intégration de la nouvelle ligne d’activité.



FIGURE 56 – Appétit au risque après intégration de la nouvelle ligne d'activité

Les mesures supplémentaires devraient être prises en compte, telles que l'ajustement de la stratégie d'allocation d'actif (cf partie 5.5.1), afin de respecter les critères d'appétit au risque tout en améliorant la performance.

### 5.5.5 Conclusion

En conclusion, l'étude de sensibilité nous a permis de dégager un ensemble de décisions stratégiques permettant d'améliorer la performance et le respect des limites d'appétit au risque.

Cependant cette approche présente certaines limites. D'une part l'étude des sensibilités aux différents leviers ne permet pas à elle seule d'en déduire simplement une stratégie de pilotage optimale car ces leviers ont généralement des impacts contradictoires sur les indicateurs de rentabilité et de risque.

D'autre part les éventuels effets croisés entre ces leviers ne sont pas simples à étudier. L'espace dans lequel est défini la stratégie de l'entreprise est ici un espace à huit dimensions (deux par programme de réassurance et deux pour l'allocation d'actif), notre étude de sensibilité s'est limitée à des droites ou des plans de cet espace multidimensionnel et ne pourrait s'appliquer à l'espace tout entier.

## 5.6 Optimisation et stratégies proposées

Le pilotage d'une entreprise d'assurance est par définition un problème d'optimisation multicritère. Plusieurs objectifs sont poursuivis par le conseil d'administration (rentabilité, solvabilité, respect de l'appétit au risque...) et en amont de ces objectifs se trouvent plusieurs leviers dont les effets ne sont pas toujours simples à anticiper (stratégie d'allocation d'actif, de réassurance...).

Nous proposons dans cette partie de formaliser le problème d'optimisation de l'entreprise et d'en déduire des solutions optimales via la méthode présentée en partie 4.

### Rappel sur le problème d'optimisation de l'entreprise

Le problème d'optimisation de notre entreprise fictive est contraint par les limites de son appétit au risque définies dans la partie 5.4 :

- ROE : le ROE annualisé doit être supérieur à 0.1% sur l'horizon de projection (5 ans) dans au moins 90% des scénarios.

$$g_{ROE} = \text{quantile}^{10\%}(ROE) - 0.1\% \geq 0$$

- Ratio de solvabilité : le ratio de solvabilité doit être supérieur à 200% sur l'horizon de projection dans au moins 90% des scénarios

$$g_{ratioSolvabilite} = \text{quantile}^{10\%}(\text{Ratio de Solvabilité}) - 200\% \geq 0$$

- Ratio combiné : le ratio combiné doit être inférieur à 100% sur l'horizon de projection dans au moins 90% des scénarios

$$g_{ratioCombine} = \text{quantile}^{90\%}(\text{Ratio Combiné}) - 100\% \leq 0$$

Le problème d'optimisation de l'entreprise fictive est de maximiser son résultat comptable et de minimiser son SCR en scénario central tout en respectant ses limites d'appétit au risque. Formellement le problème d'optimisation s'écrit donc :

$$\max(f_{resultatComptable}, -f_{SCR}, g_{ROE}, g_{ratioSolvabilite}, -g_{ratioCombine})$$

### Frontière de Pareto - Détermination des stratégies optimales

Les objectifs de pilotage sont au nombre de cinq (maximisation du Résultat comptable, minimisation du SCR en plus des trois contraintes d'appétit au risque). La frontière efficiente de Pareto n'est donc pas simple à visualiser puisqu'elle se trouve donc dans un espace à 5 dimensions.

Nous choisissons donc de projeter cette frontière suivant 2 axes (résultat comptable et SCR) et de marquer les points en fonction du respect ou non de l'appétit au risque de l'entreprise : les points marqués en bleu correspondent aux stratégies respectant l'appétit au risque, tandis que les points marqués en rouge ne respectent pas l'appétit au risque<sup>47</sup>.

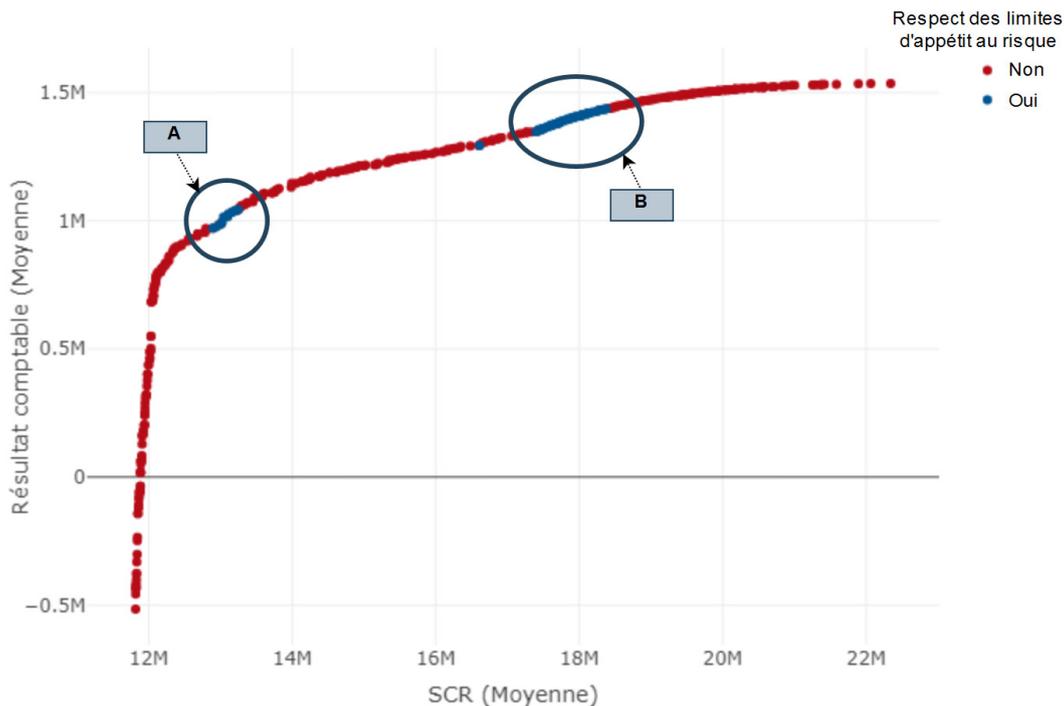


FIGURE 57 – Représentation de la Frontière de Pareto. Paramètres de l'algorithme génétique : 24 générations, 60 individus.

Nous pouvons remarquer que deux ensembles de stratégies (notés A et B) semblent se distinguer du reste de la frontière. Ces deux ensembles correspondent aux stratégies

47. Notons que l'outil développé permet d'avoir le détail de chaque stratégie en survolant le graphique avec la souris (cf figure 71 en annexe). Mais il permet aussi de visualiser les impacts de chaque stratégie en cliquant sur le graphique.

faisables par l'entreprise - au regard de son appétit au risque - et suggère deux alternatives de pilotage :

- A. pilotage "peu risqué" avec un SCR relativement faible mais avec une rentabilité (résultat comptable) plus faible
- B. pilotage "un peu plus risqué" mais offrant une meilleure rentabilité pour l'entreprise

Afin d'analyser plus en détail les stratégies proposées, le tableau 14 donne une liste des stratégies proposées.

N	Résultat Comptable	SCR	Allocation d'actif			Réassurance		
			Actions	Obligations	Monétaire	Domage Auto	RC Auto	Domage aux biens
1	971k	12.9M	3%	77%	20%	184k XS 5k	QP : 73%	QP : 27%
2	976k	12.9M	1%	95%	4%	460k XS 5k	QP : 75%	QP : 17%
3	987k	13M	0%	99%	1%	730k XS 5k	QP : 71%	QP : 16%
4	1.01M	13M	3%	97%	0%	840k XS 5k	QP : 73%	QP : 15%
5	1.01M	13.1M	2%	92%	7%	925k XS 5k	QP : 73%	993k XS 41k
6	1.01M	13.2M	4%	94%	2%	598k XS 5k	QP : 72%	556k XS 47k
7	1.35M	17M	8%	91%	1%	711k XS 5k	328k XS 9k	430k XS 71k
8	1.35M	17.5M	8%	91%	1%	879k XS 5k	616k XS 9k	715k XS 93k
9	1.37M	17.6M	9%	90%	1%	819k XS 5k	981k XS 9k	425k XS 75k
10	1.37M	17.7M	10%	90%	0%	547k XS 5k	715k XS 9k	148k XS 66k
11	1.39M	17.8M	11%	89%	0%	832k XS 5k	992k XS 9k	538k XS 7k
12	1.4M	17.9M	12%	88%	0%	748k XS 5k	645k XS 9k	279k XS 33k
14	1.41M	18M	13%	86%	1%	703k XS 5k	706k XS 9k	287k XS 88k
15	1.41M	18M	14%	86%	0%	779k XS 5k	555k XS 9k	279k XS 57k
16	1.42M	18.2M	15%	85%	0%	854k XS 5k	731k XS 9k	339k XS 6k
18	1.43M	18.3M	16%	84%	0%	941k XS 5k	856k XS 9k	466k XS 5k

TABLE 14 – Liste des stratégies respectant l'appétit au risque de l'entreprise (points bleus de la figure 57). Les 6 premières stratégies appartiennent à l'ensemble A, les suivantes appartiennent à l'ensemble B.

Nous pouvons remarquer que les solutions des ensembles A (lignes 1 à 6) et B (lignes 7 à 10) sont relativement proches en termes de stratégies proposées mais également de résultats (SCR et résultat comptable).

Toutes les stratégies proposées suggèrent de réduire la part des actions dans le portefeuille d'actifs (initialement à 20 %), ce qui vient conforter les résultats obtenus précédemment sur l'étude de sensibilité à la stratégie d'allocation d'actif (cf partie 5.5.1).

Concernant la stratégie de couverture en réassurance, les solutions proposées diffèrent selon l'alternative choisie. L'alternative A propose de céder en quote-part une partie de la garantie *Responsabilité civile automobile*, ce qui permet de réduire le SCR catastrophe "RC automobile" et donc de réduire le SCR<sup>48</sup>. Tandis que l'alternative B propose de réassurer la ligne d'activité RC Auto en excédent par risque, ce qui permet de dégager un meilleur résultat comptable au prix d'une exigence de capital réglementaire de solvabilité (SCR) plus important et d'un ratio de solvabilité plus faible.

48. L'effet dû à l'atténuation du SCR catastrophe est plus important que celui dû à la hausse du SCR Défaut de contrepartie (réassureur)

On observe cependant que les traités de réassurance proposés ont une priorité relativement basse par rapport aux contrats disponibles sur le marché. Ce résultat s'explique en partie par le fait que les paramètres de sinistralité utilisés donnent une queue de distribution relativement peu épaisse. Il serait intéressant de reprendre l'étude pour des paramètres donnant une queue de distribution de sinistre d'épaisseur plus importante.

On note finalement que suite à l'analyse des stratégies proposées, l'entreprise peut choisir une orientation stratégique optimale vis à vis de son appétit au risque et de ses objectifs de performance. Nous présentons ci-dessous deux stratégies optimales : une appartenant à l'ensemble A et une autre appartenant à l'ensemble B.

### Etude d'une stratégie optimale - Stratégie (a)

Nous désignons par la stratégie (a), la stratégie numéro 4 du tableau 14. Il s'agit donc d'une stratégie privilégiant une exposition aux risques relativement faible en contrepartie d'un résultat comptable modeste.

Cette stratégie est caractérisée notamment par la cession de 73% de la ligne d'activité *responsabilité civile automobile* et 15% de la ligne d'activité *dommages aux biens* ainsi que par un investissement en action de l'ordre de 3% seulement.

Allocation d'actif			Réassurance		
Actions	Obligations	Monétaire	Dommage Auto	RC Auto	Dommage aux biens
3%	97%	0%	840k XS 5k	73%	15%

TABLE 15 – Stratégie (a)

Ces mesures permettent ainsi d'augmenter de façon significative le ratio de solvabilité de l'entreprise<sup>49</sup> sur l'horizon de projection (cf figure 58) et de réduire la variabilité des résultats.

Cependant en cédant une part importante de son risque, l'entreprise accepte également de céder une partie de sa marge technique au réassureur et donc de réduire son résultat comptable (cf (figure 59)

La stratégie (a) serait donc intéressante pour une entreprise désirant asseoir sa stabilité financière. Cependant, au regard des ratios de solvabilité que l'on peut constater sur le marché, il semble *a priori* qu'un ratio aussi élevé ne soit pas nécessaire et pourrait être perçu par des actionnaires comme une sous-utilisation du capital.

### Etude d'une stratégie optimale - Stratégie (b)

La stratégie (b) correspond à la stratégie numéro 18 du tableau 14. Elle permet à l'entreprise de dégager un résultat comptable plus important tout en respectant l'appétit au risque défini par le conseil d'administration.

Elle se différencie de la stratégie (a) vue précédemment par une part plus importante investie en actions (8%) ainsi qu'une stratégie de réassurance composée exclusivement de contrats en excédent par risque.

49. Ratio de solvabilité de 280% au lieu des 200% initiaux

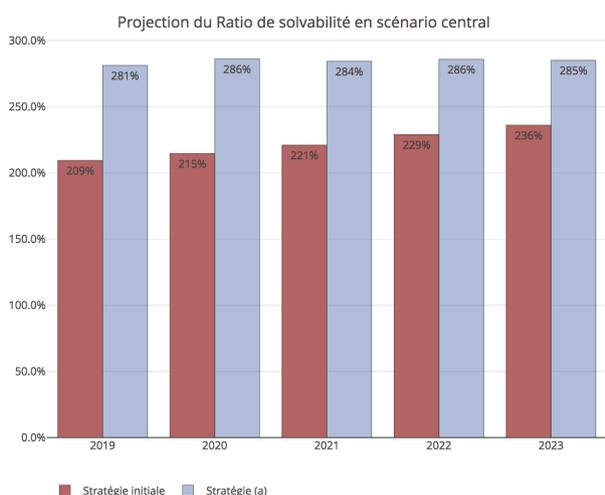


FIGURE 58 – Projection du ratio de solvabilité en scénario central avec la stratégie (a)

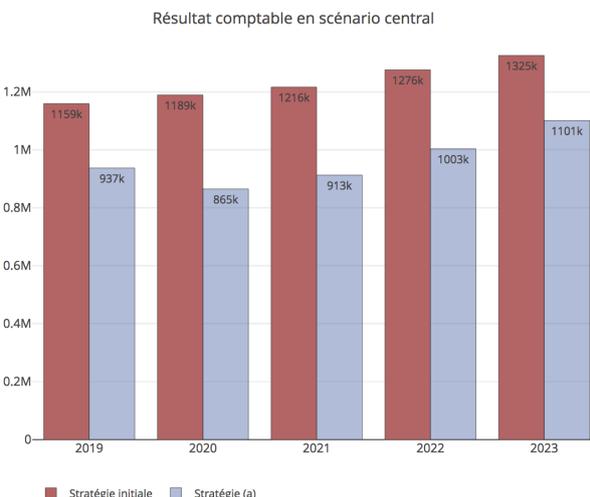


FIGURE 59 – Projection du résultat comptable en scénario central avec la stratégie (a)

Allocation d'actif			Réassurance		
Actions	Obligations	Monétaire	Dommage Auto	RC Auto	Dommage aux biens
16%	84%	0%	941k XS 5k	856k XS 5k	466k XS 5k

TABLE 16 – Stratégie (b)

Le résultat comptable est donc plus important qu'avec la stratégie initiale de l'entreprise (cf figure 61) car le développement du produit *dommage aux biens* permet de dégager une marge technique supplémentaire.

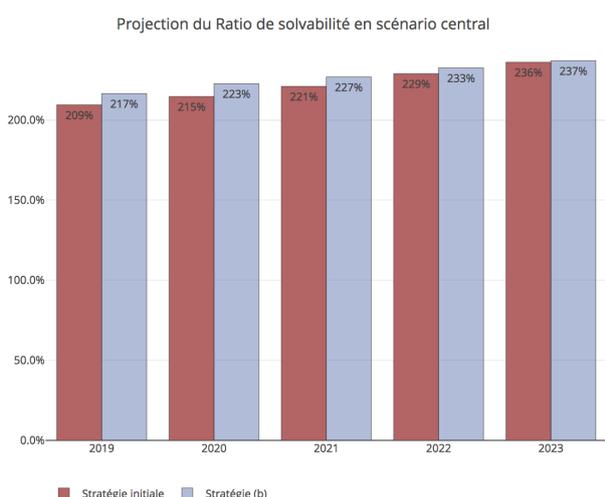


FIGURE 60 – Projection du ratio de solvabilité en scénario central avec la stratégie (b)

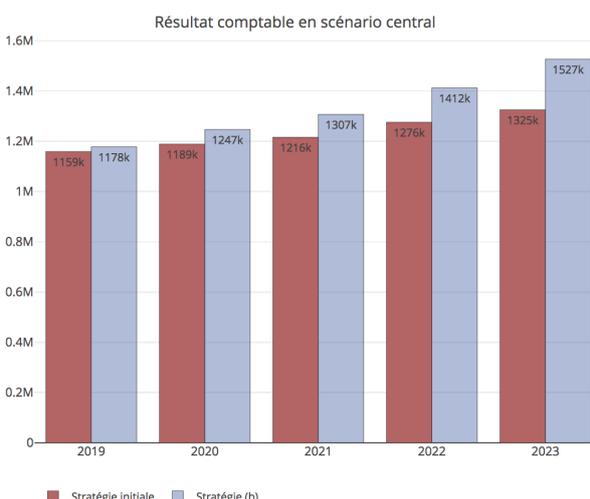


FIGURE 61 – Projection du résultat comptable en scénario central avec la stratégie (b)

Le ratio de solvabilité de l'entreprise en scénario central se situe entre 217% et 237% sur l'horizon de projection, ce qui reste relativement raisonnable en comparaison à la

moyenne du marché français qui s'échelonnait à 223% en 2017<sup>50</sup>.

En conclusion de cette partie, nous avons pu voir que l'approche d'optimisation multiobjectif développée dans ce mémoire a permis de mettre en exergue un ensemble de stratégies optimales. La méthode mise en oeuvre a permis de trouver des solutions, non seulement rapidement mais surtout des solutions permettant de respecter l'appétit au risque de l'entreprise tout en optimisant des objectifs stratégiques de risque et de rentabilité.

Nous pouvons également noter que la méthode d'optimisation développée a porté en évidence des stratégies cohérentes avec l'étude de sensibilité appliquée dans la partie précédente, ce qui ne peut que renforcer notre confiance dans les résultats obtenus.

### 5.6.1 Stratégie retenue par l'entreprise

L'optimisation de la stratégie de l'entreprise nous a permis de trouver des solutions permettant de ramener l'entreprise dans le respect de son appétit au risque. Les stratégies étudiées ci-dessus ont montré deux alternatives de pilotage : l'une préférant la rentabilité, l'autre cherchant la minimisation de l'exposition au risque.

En pratique la stratégie retenue *in fine* pourrait éventuellement être affinée afin d'être en parfaite adéquation avec les préférences du conseil d'administration.

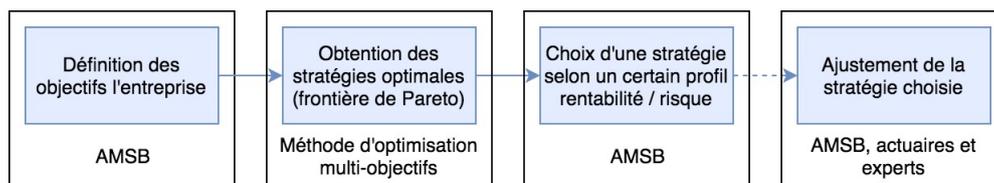


FIGURE 62 – Processus de décision de l'entreprise fictive

Un management plutôt averse au risque pourra *a priori* opter pour une stratégie proche de la stratégie (a) tandis qu'un conseil d'administration plutôt intéressé par la rentabilité de l'entreprise préférera une solution proche de la stratégie (b).

Nous supposons dans la suite de ce mémoire que la stratégie choisie *in fine* par le conseil d'administration est la stratégie résumée par le tableau 17. L'entreprise commercialise donc à compter du 01/01/2018 un contrat d'assurance de type dommage aux biens dont les caractéristiques ont été présentées dans la section 5.1.1<sup>51</sup>.

Allocation d'actif			Réassurance		
Actions	Obligations	Monétaire	Dommage Auto	RC Auto	Dommage aux biens
11%	85%	4%	500k XS 5k	500k XS 9k	500k XS 30k

TABLE 17 – Sous hypothèse que de tels contrats de réassurance soient disponibles

50. D'après les données de la FFA (Fédération Française de l'Assurance) : Conférence de presse du 15 mars 2018 - *Bilan de l'année 2017 et perspectives 2018* (cf [14])

51. Prime moyenne : 170. Taux de Frais d'acquisition : 20% (puis décroissant). D'administration : 8%. De gestion de sinistres : 8%.

Selon les hypothèses de projection décrites dans la partie 3, cette stratégie permet de respecter l'appétit au risque de l'entreprise. Le résultat et le bilan de l'entreprise en scénario central sont ainsi représentés sur la figure 63.

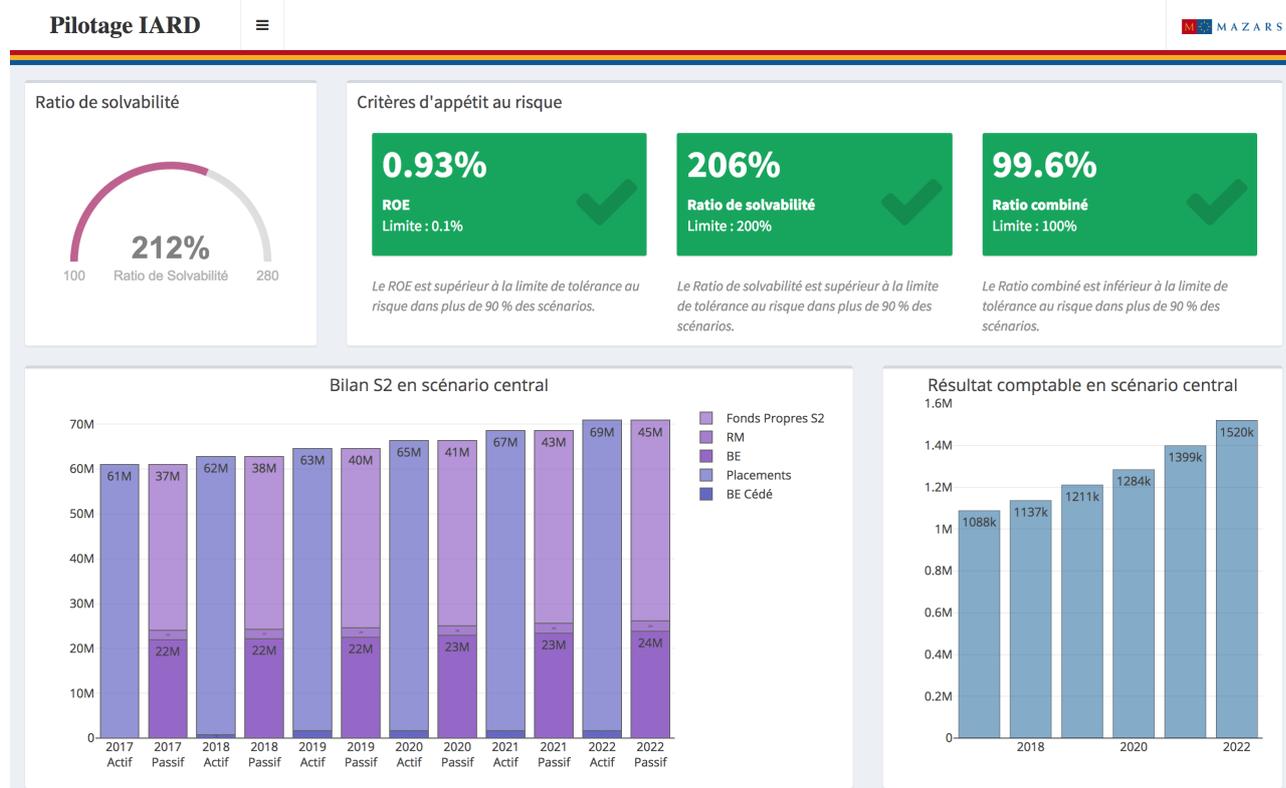


FIGURE 63 – Tableau de bord de l'appétit au risque suivant la nouvelle stratégie choisie par l'entreprise

## 5.6.2 Conclusion

Finalement l'outil développé dans le cadre de ce mémoire permet de présenter rapidement au conseil d'administration un panier de stratégies permettant de respecter l'appétit au risque de l'entreprise. La rapidité et la simplicité de mise en oeuvre de cet outil d'aide à la décision permet ainsi à l'entreprise de pouvoir réagir rapidement en cas d'écart de son profil de risque à son appétit au risque, ou de scénarios de chocs, ce qui peut faciliter le pilotage dynamique de l'entreprise.

## 5.7 Pilotage dynamique

Nous allons dans cette partie soumettre l'entreprise à un scénario de choc afin d'observer l'effet sur le bilan de l'entreprise et d'en déduire des orientations de pilotage post-choc.

### 5.7.1 Scénario de choc

Le scénario de choc étudié ici correspond à une sinistralité "exceptionnelle" sur l'année 2018. Il est calibré de la façon suivante : une sinistralité exceptionnelle de période de retour 100 ans sur la branche automobile (Dommage auto et RC auto). Le sinistralité de la branche automobile en 2018 correspond donc à la VaR de probabilité 0.1% dans notre

scénario de stress  $S_{choc} = VaR_{0.1\%}^{1\text{an}}(S_{RC\ Auto} + S_{Dommage\ Auto})$ <sup>52</sup>.

Afin de considérer le cas le plus averse, nous supposons dans notre scénario de choc que la stratégie de réassurance ne permet pas d'atténuer la charge des sinistres.

Dans le cas de la stratégie retenue par l'entreprise fictive, ce scénario correspondrait à un grand nombre de petits sinistres, de coût inférieur à la priorité du traité de réassurance.

### Impact sur le résultat comptable et le profil de risque

Le résultat est *a fortiori* impacté par le scénario et passe alors à -1.4M pour l'année 2019 (cf figure 64). Le résultat des années suivantes n'est cependant pas impacté par ce choc ponctuel.

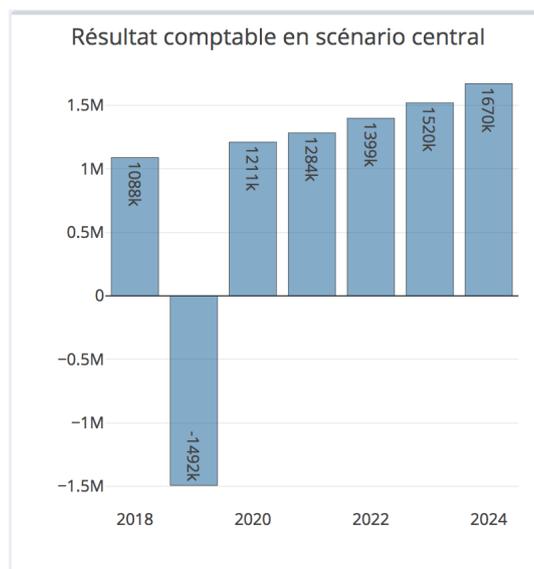


FIGURE 64 – Impact sur le résultat comptable

L'impact constaté sur le résultat comptable se répercute sur les fonds propres. Le profil de risque de l'entreprise est alors dégradé et sort des limites de tolérance au risque (cf figure 65).

Les stratégies optimales, obtenues dans la partie précédente, ne semblent pas adéquate pour corriger le profil de risque post-choc et le ramener dans les limites de tolérance au risque. Il est alors nécessaire de définir des stratégies post-choc adaptées.



FIGURE 65 – Impact sur l'adéquation du profil de risque au niveau de tolérance de l'entreprise

52. Avec S la charge des sinistres.

## 5.7.2 Détermination de la stratégie post-choc

Afin de déterminer la stratégie optimale post-choc de l'entreprise, on applique à nouveau les méthodes d'optimisation développées. Etant donné que le choc survient en 2019, la stratégie post-choc est donc optimisée pour la période 2020-2024.

On représente sur la figure 66 la nouvelle frontière de Pareto obtenue. On remarque que la nouvelle frontière obtenue a une allure sensiblement différente de la première. D'une part les stratégies respectant l'appétit au risque semblent moins nombreuses, d'autre part elles sont toutes regroupées dans un certain intervalle de rendement et de risque.

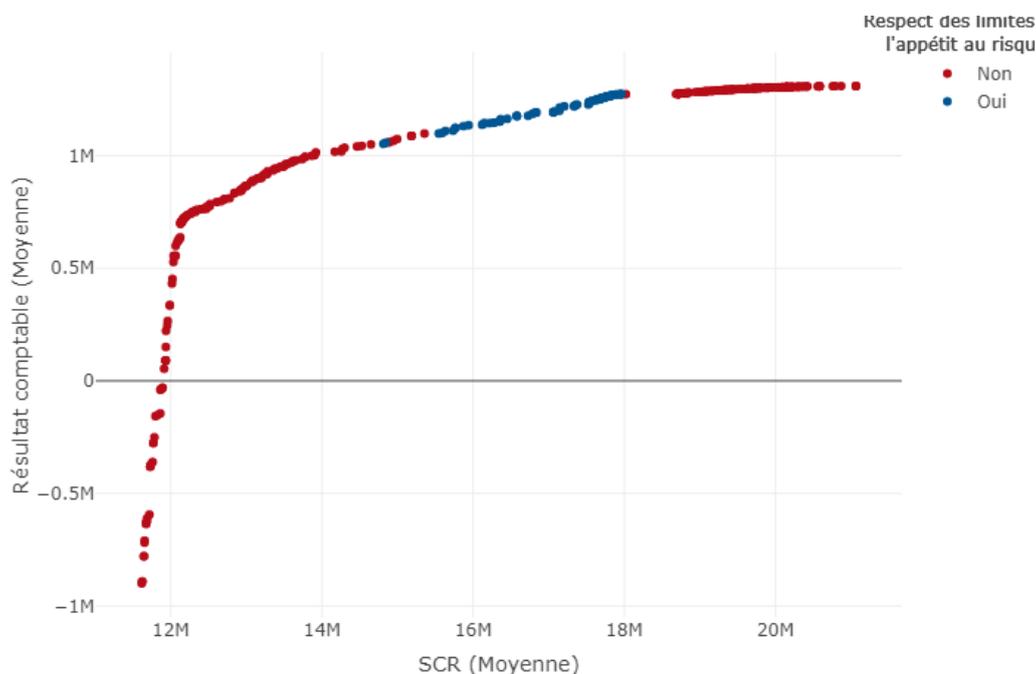


FIGURE 66 – Frontière de Pareto pour la stratégie post-choc

Le tableau 18 nous donne un aperçu des stratégies post-choc permettant de ramener l'entreprise dans son profil de risque. On observe une certaine logique dans les stratégies proposées :

- **Stratégie de réassurance** : Les stratégies de réassurance post-choc obtenues proposent de céder entre 10% et 40% de la ligne d'activité RC Auto, en fonction de la rentabilité et du niveau de risque voulu. Elles sont donc moins "prudentes" que les stratégies de type A vues précédemment, qui suggéraient de céder autour de 70% de la ligne RC Auto, mais elles restent plus prudentes/moins risquophile que les stratégies de type B, qui suggéraient de céder uniquement le risque excédent de sinistre.
- **Stratégie d'allocation d'actif** : En termes d'allocation d'actif les stratégies obtenues sont optimisées pour un contexte économique différent de celui avant choc. En effet, sur la période post-choc, les taux d'intérêt ont connu une remontée et se situent à un niveau supérieur à ceux de la période pre-choc. Les stratégies d'allocation d'actif optimales sont donc amenées à être sensiblement différentes de celles obtenues précédemment.

On observe que les stratégies obtenues suggèrent d'investir un montant plus important dans l'actif monétaire, ce qui est cohérent avec le fait que les taux à court

terme soient à un niveau plus haut après le choc, fin 2019, qu'avant le choc, fin 2018. En outre on remarque que les stratégies proposées suggèrent un investissement en action inférieur à 10%. De la même façon que pour la politique de réassurance, on observe donc que les stratégies post-choc, d'allocation d'actif, se situent entre les stratégies A et B obtenues précédemment.

N	Résultat Comptable	SCR	Allocation d'actif			Réassurance		
			Actions	Obligations	Monétaire	Domage Auto	RC Auto	Domage aux biens
1	1.01M	15M	8%	90%	2%	711k XS 5k	44%	430k XS 71k
2	1.11M	15.6M	8%	87%	5%	879k XS 5k	40%	715k XS 93k
3	1.13M	15.9M	9%	88%	3%	819k XS 5k	37%	669k XS 29k
4	1.14M	16.2M	8%	89%	3%	547k XS 5k	32%	815k XS 43k
5	1.18M	16.6M	9%	89%	2%	832k XS 5k	23%	580k XS 68k
6	1.19M	17M	9%	91%	1%	832k XS 5k	10%	772k XS 31k

TABLE 18 – Liste de stratégies respectant l'appétit au risque de l'entreprise (points bleus de la figure 66)

On remarque donc qu'en terme de couple rendement/risque, les stratégies post-choc sont situées entre les alternatives de type A et de type B observées précédemment. En effet, si les stratégies obtenues après choc sont moins prudentes et profitables que les stratégies de type B, elles le restent plus que les stratégies de type A (cf tableau 14). Les stratégies ainsi obtenues permettent de ramener le profil de risque de l'entreprise dans ses limites d'appétit au risque, tout en optimisant son résultat comptable et son SCR. L'outil développé permet non seulement d'optimiser la stratégie de l'entreprise en scénario central mais il donne également la possibilité d'anticiper des stratégies post-choc. Il permet ainsi de faciliter la maîtrise des résultats de l'entreprise et d'assurer un pilotage sain et robuste aux éventuels scénarios catastrophiques.

## 5.8 Conclusion

Nous avons étudié les sensibilités des indicateurs de pilotage d'une entreprise et nous avons également, pour optimiser sa stratégie en scénario central et en scénario post-choc, mis en application l'algorithme d'optimisation proposé en partie 4 .

Les travaux effectués ont mis en évidence l'intérêt des méthodes d'optimisation multiobjectif : alors que les études de sensibilité s'intéressent aux variations unidimensionnelles ou tridimensionnelles (et ne donnaient pas de stratégies respectant l'appétit au risque de l'entreprise), l'algorithme d'optimisation proposé nous a permis d'explorer des stratégies optimales dans un espace de plus grande dimension.

L'étude a cependant mis en évidence une certaine complémentarité entre les méthodes évolutionnistes et celles plus classiques de sensibilités. Les stratégies proposées par l'algorithme d'optimisation nécessitent d'être expliquées et interprétées afin d'assurer une plus grande maîtrise des décisions, effectuée grâce à l'étude de sensibilité.

Certaines pistes demeurent à explorer, les objectifs de l'entreprise étaient ici au nombre de deux - hors contraintes d'appétit au risque - ce qui facilitait la visualisation de la frontière de Pareto. Dans le cas où le nombre d'objectifs aurait été strictement supérieur à trois, la frontière de Pareto n'aurait pu être représentée dans son intégralité ayant pour conséquence un choix de stratégie optimale plus délicat. Ce sujet permet d'adresser de

nouvelles problématiques telles que l'intérêt de l'application de certaines méthodes multiobjectif d'aide à la décision (TOPSIS, ELECTRE, PROMETHEE...).

## 6 Conclusion

L'objet de ce mémoire est le développement d'un outil d'aide à la décision permettant de projeter et d'optimiser la stratégie d'une entreprise IARD dans le cadre de l'ORSA.

Nous avons dans premier temps rappelé le cadre de l'ORSA et de l'appétit au risque, mais nous avons également présenté certains leviers de pilotage (stratégie d'allocation d'actif, de réassurance, de positionnement tarifaire...). Ces leviers induisent des effets multiples et non triviaux sur les indicateurs de pilotage de l'entreprise. Cette première analyse a permis de mettre en évidence le caractère multi-dimensionnel du pilotage et ce en particulier dans le cadre de l'ORSA.

Afin d'anticiper les impacts de ces leviers sur le futur de l'entreprise, nous avons proposé un modèle de projection du bilan de l'entreprise et des principaux indicateurs de pilotage. Le modèle développé donne une modélisation stochastique de la sinistralité, des principales variables économiques mais également des traités de réassurance, ce qui nous permet d'obtenir, *in fine*, la distribution des principaux indicateurs et d'étudier leur valeur, non-seulement en scénario central mais aussi en scénarios extrêmes. Notons que dans le cas d'une application réelle, le modèle proposé nécessiterait certains ajustements ainsi qu'un calibrage particulièrement soigné des hypothèses de projection afin de garantir la robustesse du modèle de projection et des analyses qui en découlent.

En s'appuyant sur le modèle de projection développé, nous avons alors proposé un algorithme permettant d'optimiser la stratégie de l'entreprise. L'algorithme en question s'appuie sur des méthodes évolutionnistes et nous permet ainsi d'optimiser plusieurs objectifs simultanément, afin de reconstruire l'intégralité de la frontière de Pareto.

Cet algorithme a été appliqué à une entreprise fictive d'assurance IARD. En résultat, l'algorithme permet d'obtenir des stratégies respectant les contraintes d'appétit au risque de l'entreprise, tout en optimisant certains indicateurs stratégiques tels que le résultat comptable et le SCR. L'outil développé permet ainsi de proposer des orientations stratégiques de pilotage.

Il est important de noter que la méthode d'optimisation proposée n'est limitée ni par le nombre ni par le choix des indicateurs. Cependant lorsque le nombre d'objectifs à optimiser devient important, la frontière de Pareto ne peut plus être visualisée. Il semble donc important d'explorer de nouvelles méthodes permettant de déterminer l'orientation stratégique à retenir, pour ce faire de nombreuses approches sont à explorer telles que l'analyse multicritère (ELECTRE, PROMETHEE, TOPSIS...).

## Références

- [1] ACPR. Notice « Solvabilité II ». Évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA).
- [2] Xavier AGENOS. Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie. 2006.
- [3] Justin Skinner Blair Nicholls. Making use of dfa. *Institute of Actuaries of Australia*, 2007.
- [4] van Veldhuizen Coello, Lamont. *The book of MOEA : Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*.
- [5] Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Non-vie ». Manuel bel non-vie, avril 2016.
- [6] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. Janvier 2001.
- [7] EIOPA. Eiopa's supervisory assessment of the own risk and solvency assessment - first experiences.
- [8] EIOPA. Final report on public consultation no. 14/017 on guidelines on system of governance.
- [9] EIOPA. Guidelines on forward looking assessment of own risks (based on the orsa principles).
- [10] EIOPA. Orientations sur l'application d'ententes de cession en réassurance au sous-module « risque de souscription en non-vie ». 2014.
- [11] F.Planchet E.Karam. Operational risks in financial sectors. 2012.
- [12] Parlement européen. Directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009.
- [13] Alfred Müllerc Emanuela Rosazza Gianina Fabio Bellinia, Bernhard Klarb. Generalized quantiles as risk measures. 2013.
- [14] Fédération française de l'assurance. Conférence de presse du 15 mars 2018 : L'assurance d'un monde en mouvement - bilan de l'année 2017 et perspectives 2018. 2018.
- [15] Detlef Seese Frank Schlottmann, Andreas Mitschele. A multi-objective approach to integrated risk management.
- [16] F. Schlottmann. I. Oesterreicher, A. Mitschele. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms in optimizing combinations of reinsurance contracts.
- [17] Guy Kaplanski and Yoram Kroll. Var risk measures versus traditional risk measures : an analysis and survey.
- [18] Journal officiel de l'Union européenne. Règlement DÉLÉguÉ (ue) 2015/ 35 de la commission - du 10 octobre 2014.
- [19] I. Granito P. De Angelis. Capital allocation and risk appetite under solvency ii framework. Novembre 2015.
- [20] Jean-Marc Eber David Heath Philippe Artzner, Freddy Delbaen. Coherent measures of risk.
- [21] Simona Roccielletti. *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*. 2016.
- [22] Dirk Tasche. Capital allocation to business units and sub-portfolios : the euler principle. Juin 2008.

# A Application développée

L'application développée comporte 4 volets dont des captures d'écran sont présentées ci-dessous.

## A.1 Hypothèses : Paramètres de l'entreprise

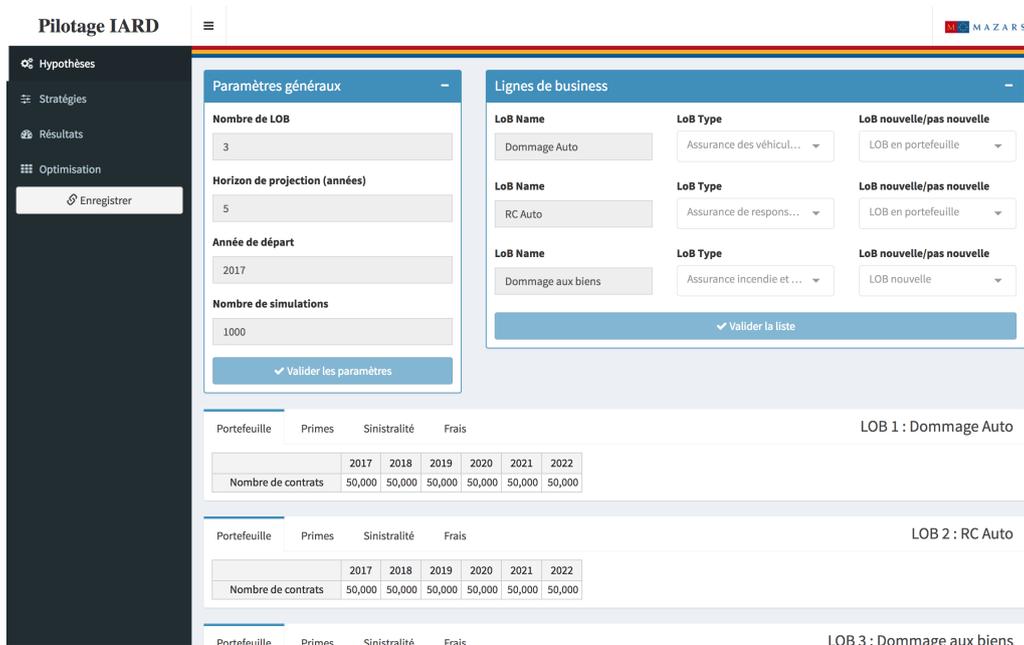


FIGURE 67 – Volet *Hypothèses*

## A.2 Stratégie : Définition de la stratégie de l'entreprise

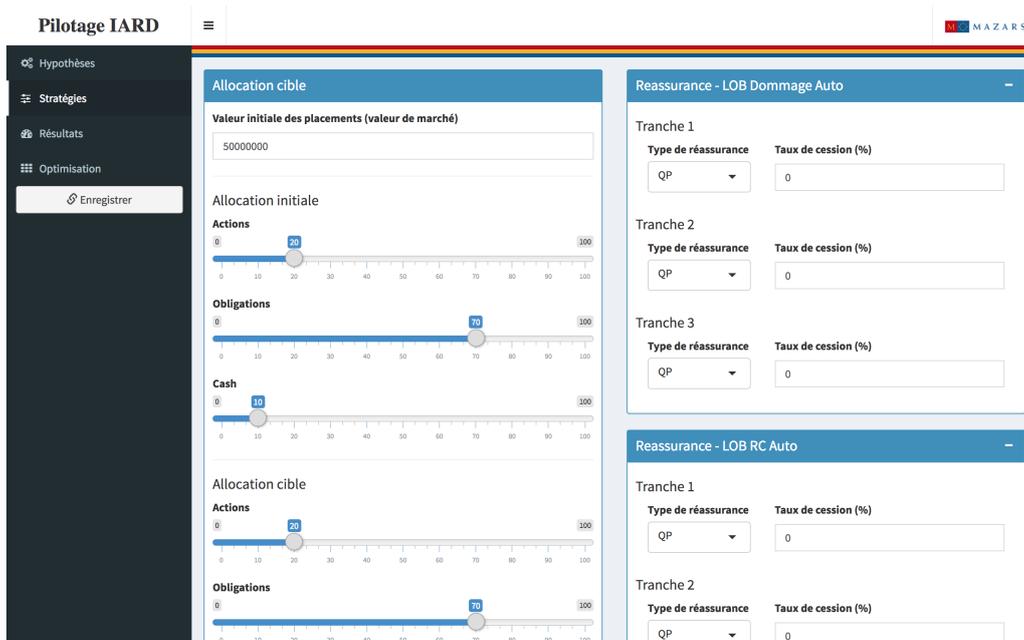


FIGURE 68 – Volet *Stratégie*

### A.3 Résultats : Visualisation des résultats

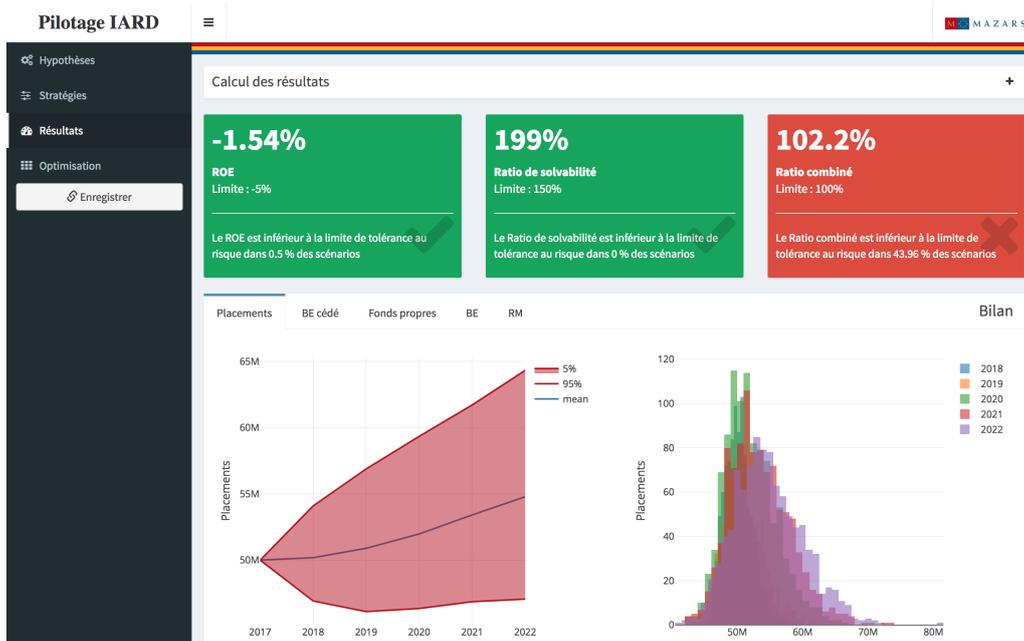


FIGURE 69 – Volet Résultats

### A.4 Optimisation

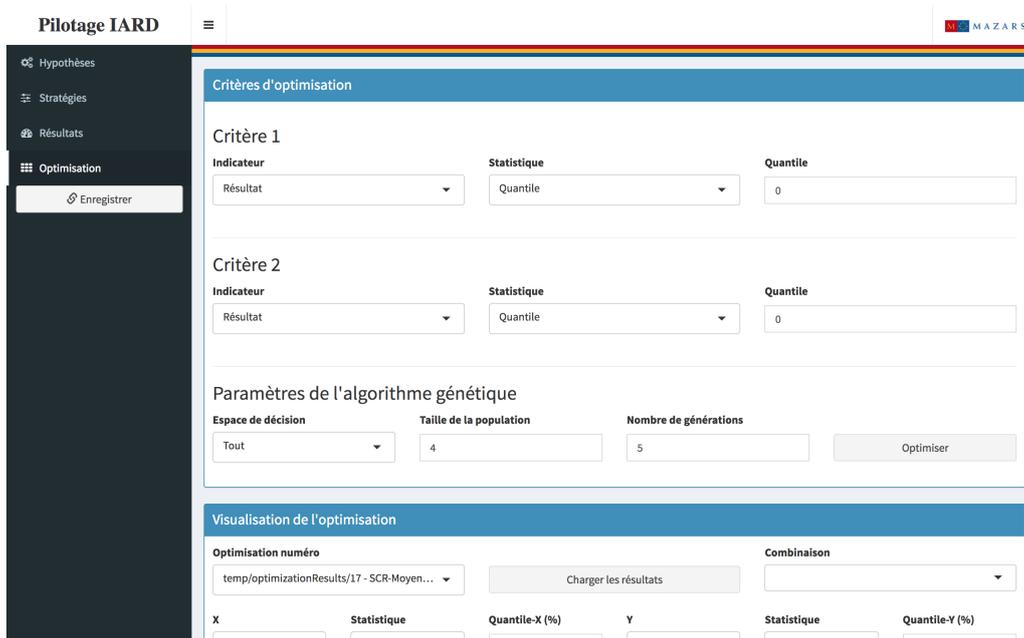


FIGURE 70 – Volet Optimisation

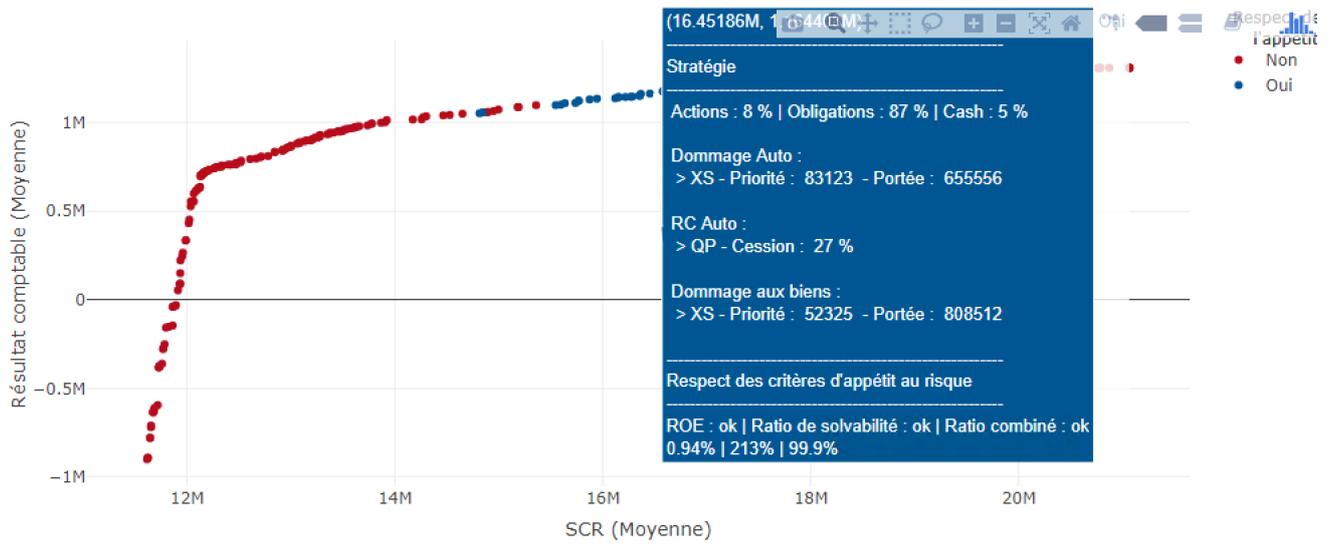


FIGURE 71 – Interaction graphique *Optimisation*

## B Allocation du risque de prime et réserve

Nous détaillons dans cette partie l'allocation du risque de prime et réserve suivant la méthode d'allocation proposée par I. Granito et P. de Angelis (cf [19]).

### B.1 Calcul du risque de prime et réserve en formule standard

Afin de faciliter la compréhension de la méthode d'allocation du risque nous présentons dans premier le calcul du SCR prime et réserve en formule standard noté  $SCR_{P\&R}$ . La réglementation définit le SCR associé à ce risque par la formule suivante :

$$SCR_{P\&R} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl}$$

$$SCR_{P\&R} = 3 \sqrt{\sum_{r,s \in [1,12]} \rho_{r,s} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_r \cdot V_r}$$

$$SCR_{P\&R} = \sqrt{\sum_{i,j \in [1,12]} \rho_{i,j} \cdot SCR_{P\&R,i} \cdot SCR_{P\&R,j}}$$

Avec  $\rho_{r,s}$  le coefficient de corrélation entre les segment  $r$  et  $s$  et  $SCR_{P\&R,s} = 3 \cdot \sigma_s \cdot V_s$ , ce que nous désignerons comme le risque de prime et réserve du segment  $s$ . Notons que cette appellation fait sens, car dans le cas où le segment  $s$  est le seul segment de l'entreprise, le risque de prime et réserve s'écrit alors :  $SCR_{P\&R} = SCR_{P\&R,s}$ .

Le calcul de  $SCR_{P\&R,s}$  est donné par la réglementation selon la formule :

$$SCR_{P\&R,s} = 3 \cdot \sigma_s \cdot V_s$$

$$SCR_{P\&R,s} = 3 \cdot \sqrt{\sigma_{s,prime}^2 \cdot V_{s,prime}^2 + \sigma_{s,reserve} \cdot V_{s,reserve} \cdot \sigma_{s,prime} \cdot V_{s,prime} + \sigma_{s,reserve}^2 \cdot V_{s,reserve}^2}$$

Soit :

$$SCR_{P\&R,s} = \sqrt{SCR_{s,prime}^2 + SCR_{s,prime} \cdot SCR_{s,reserve} + SCR_{s,reserve}^2}$$

avec  $SCR_{s,reserve} = 3 \cdot \sigma_{s,reserve} \cdot V_{s,reserve}$  et  $SCR_{s,prime} = 3 \cdot \sigma_{s,prime} \cdot V_{s,prime}$

$\sigma_{s,reserve}$  et  $\sigma_{s,prime}$  sont définis dans l'annexe du *Règlement délégué* pour chaque segment  $s$ .

$V_{s,reserve}$  est défini comme le *best estimate* des provisions techniques pour les engagements associés au segment d'activité  $s$ .

$V_{s,prime}$  correspond au volume de prime comme défini par le *Règlement délégué*.

Dans le cas où le segment  $s$  regroupe plusieurs lignes d'activité de l'entreprise (que nous noterons  $lob_1, \dots, lob_p$ ) les volumes de prime et de réserve s'écrivent alors :

$$V_{s,reserve} = \sum_{i=1}^p V_{reserve,lob_i}$$

$$V_{s,prime} = \sum_{i=1}^p V_{prime,lob_i}$$

Avec  $V_{reserve,lob_i}$  (resp.  $V_{prime,lob_i}$ ) le volume de réserve (resp. de prime) de la ligne d'activité  $i$ .

Nous pouvons donc écrire les 2 égalités ci-dessous, qui peuvent s'interpréter comme une agrégation du risque de prime (resp. réserve) avec une corrélation de 1 entre les lignes d'activité d'un même segment :

$$SCR_{s, reserve} = \sum_{i=1}^p SCR_{reserve,lob_i}^s$$

$$SCR_{s, prime} = \sum_{i=1}^p SCR_{prime,lob_i}^s$$

avec  $SCR_{prime,lob_i}^s = 3 \cdot \sigma_s \cdot V_{prime,lob_i}$  et  $SCR_{reserve,lob_i}^s = 3 \cdot \sigma_s \cdot V_{reserve,lob_i}$

En résumé l'agrégation du risque de prime et réserve peut être représenté par la figure 72.

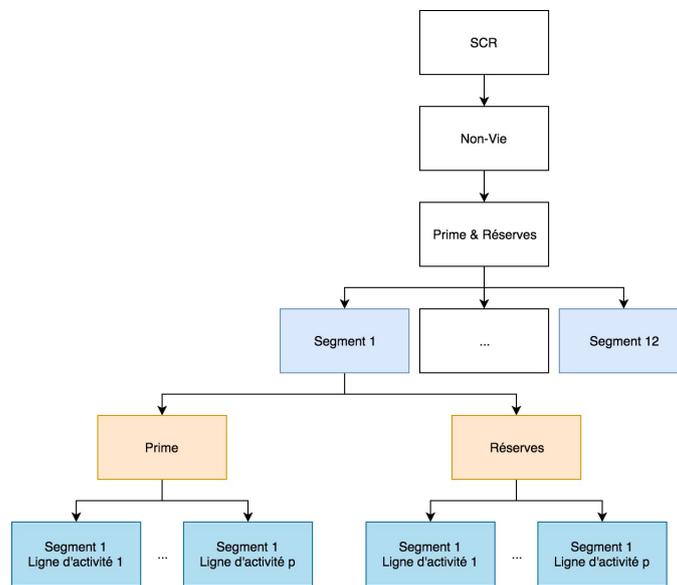


FIGURE 72 – Schéma des modules et sous-modules du risque de prime et réserve

La méthode d'allocation proposée par I. Granito et P. de Angelis peut être appliquée, comme vu dans la partie ??, afin d'en déduire le risque de prime et réserve associé à chaque ligne d'activité. Ces lignes d'activité sont ici propres à la vision de l'entreprise, nous avons donc bien défini ici une méthode d'allocation du risque de prime et réserve selon la segmentation de de l'activité définie par l'entreprise.

## B.2 RORAC-compatibilité

Une propriété intéressante et désirable pour un principe d'allocation est la propriété de RORAC-compatibilité. Cette propriété est énoncée ci-après et permet de donner une interprétation économique au RORAC : si le RORAC associé à un segment est plus élevé que le RORAC global alors on peut améliorer le RORAC global en augmentant la part de ce segment dans le portefeuille.

**Définition 7** (RORAC-compatibilité). *Les contributions au risque  $\rho(X_i|X)$  sont RORAC-compatibles si  $\forall i \in [1, n]$ , il existe  $\epsilon_i$  tel que*

$$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + h X_i|X) > RORAC(X) \quad (\forall h \in [0, \epsilon_i])$$

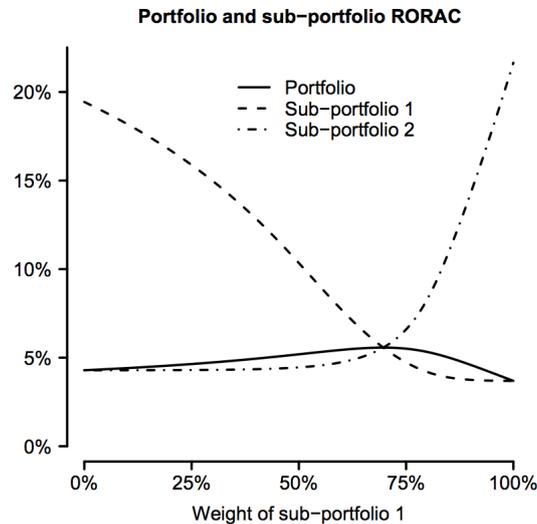


FIGURE 73 – Illustration de la propriété de RORAC-compatibilité. (source : Tasche 2008[22])

La figure 73 illustre cette propriété dans le cas de deux segments. Il est important de remarquer, dans le cas de méthodes d'allocation RORAC-compatibles, que le RORAC global est maximal lorsqu'il est égale au RORAC des différents segments.

### B.3 RORAC-compatibilité dans le cas de la formule standard

Notons  $R = \sum_i R_{lob_i}$  le résultat global, avec  $R_{lob_i}$  le résultat de la ligne d'activité  $i$ .

Suite à ce qui a été fait dans l'annexe B.1 nous pouvons montrer sous certaines hypothèses que l'indicateur défini par le rapport entre le résultat de chaque ligne d'activité ( $R_{lob_i}$ ) et le risque de prime et réserve vérifie une propriété similaire à la propriété de RORAC-compatibilité, bien que n'étant pas un indicateur de type RORAC.

Supposons en effet que le résultat, le volume de prime et le volume de réserve de chaque ligne d'activité soient linéaires en fonction du nombre de contrats en portefeuille. A titre d'exemple, ces hypothèses sont valides si l'on suppose que les contrats sont souscrits de façon linéaire dans l'année, que le nombre de contrats souscrit chaque année est constant et que tous les contrats présentent la même charge moyenne de sinistres.

Sous ces hypothèses, le SCR de prime et réserve de la ligne d'activité  $i$  est donc une fonction homogène de degré 1 du nombre contrats. Nous pouvons alors montrer qu'en notant  $\widehat{SCR}_{P\&R,lob_i}$  l'allocation du risque de prime et réserve à la ligne d'activité  $i$ , l'ajout d'une fraction  $h$  de contrats à cette ligne d'activité résulte alors en SCR prime et réserve noté  $SCR_{P\&R}(R + h \cdot R_{lob_i})$  et vérifiant :

$$SCR_{P\&R}(R + h \cdot R_{lob_i}) = SCR_{P\&R} + h \cdot \widehat{SCR}_{P\&R,lob_i}$$

Cette relation nous permet alors de montrer la propriété suivante qui est analogue à la propriété de RORAC-compatibilité :

$$\frac{R_{lob_i}}{\widehat{SCR}_{P\&R,lob_i}} > \frac{R}{SCR_{P\&R}} \implies \frac{R + h \cdot R_{lob_i}}{SCR_{P\&R}(R + h \cdot R_{lob_i})} > \frac{R}{SCR_{P\&R}}$$

## C NSGA-II

```

Data:  $N, N_{gen}$ ;
/*  $N$  : taille de chaque population;  $N_{gen}$  nombre de générations */
1 Initialisation :  $P_0$  aléatoire;  $t = 0, Q_0 = makeNewPop(P_0)$ ;
/*  $makeNewPop$  applique les opérateurs mutation sélection et croisement */
2 while  $t < N_{gen}$  do
3    $R_t = P_t \cup Q_t$ ;
4    $F = fast\text{-}non\text{-}dominated\text{-}sort(R_t)$ ;
/*  $F = (F_1, F_2, \dots)$  avec  $F_i$  la frontière de rang  $i$  */
5    $P_{t+1} = \emptyset$  et  $i = 1$ ;
6   while  $Cardinal(P_{t+1} \cup F_i) \leq N$  do
7      $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ ;
8      $i = i + 1$ 
9   end
10   $crowding\text{-}distance\text{-}assignment(F_i)$ ;
/* Trie  $F_i$  selon la relation d'ordre  $\prec_n$  */
11  ;
12   $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : N - Cardinal(P_{t+1})]$ ;
13   $Q_{t+1} = make\text{-}new\text{-}pop(P_{t+1})$ ;
14   $t = t + 1$ 
15 end

```

Algorithm 1: NSGA-II

## D Compléments sur les études de sensibilités

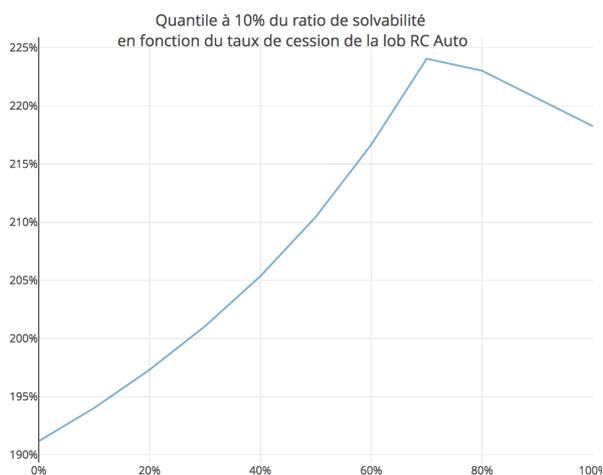


FIGURE 74 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité RC Auto le quantile à 10% du ratio de Solvabilité

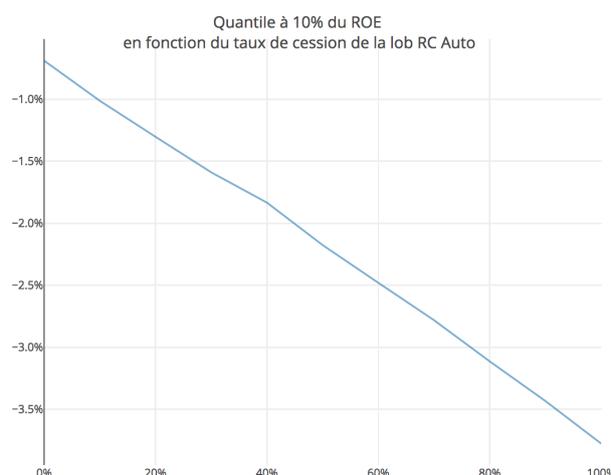


FIGURE 75 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité RC Auto le quantile à 10% du ROE

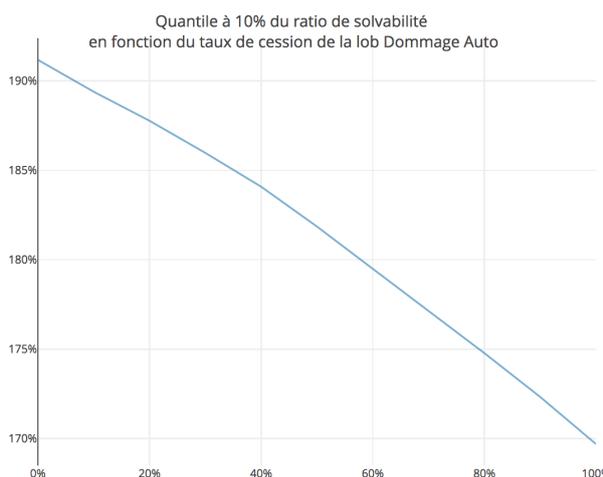


FIGURE 76 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité Dommage Auto sur le quantile à 10% du ratio de Solvabilité

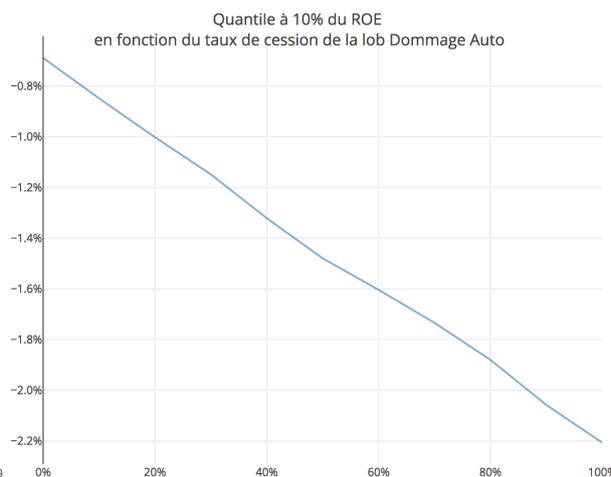


FIGURE 77 – Impact du taux de cession de la ligne d’activité Dommage Auto sur le quantile à 10% du ROE

## E Compléments sur les résultats des stratégies (a) et (b)

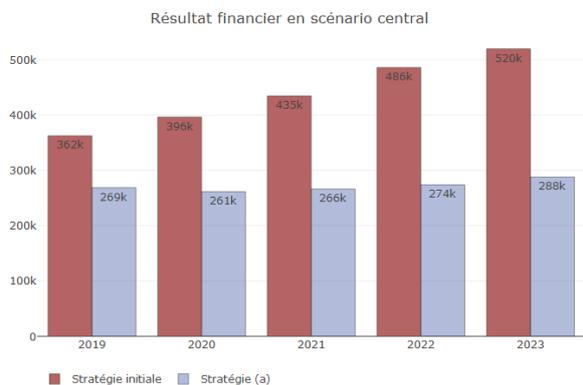


FIGURE 78 – Produits financiers - stratégie (a)

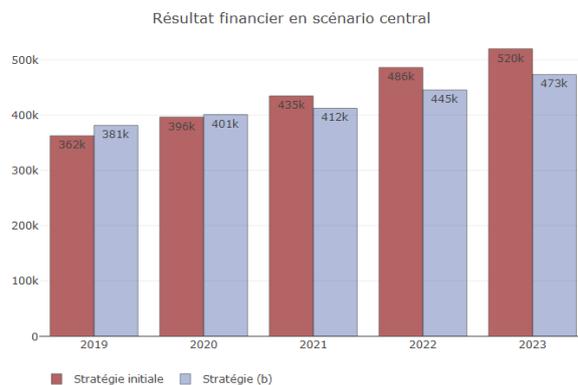


FIGURE 79 – Produits financiers - stratégie (b)

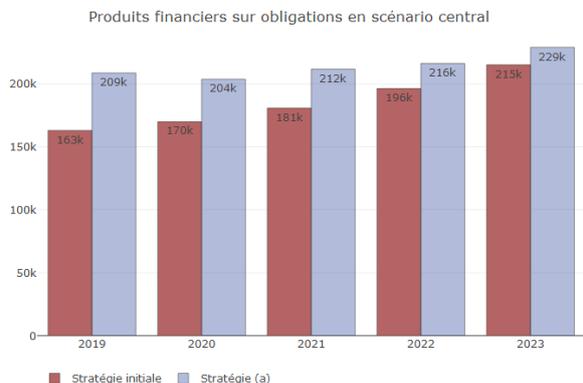


FIGURE 80 – Produits financiers sur obligations - stratégie (a)

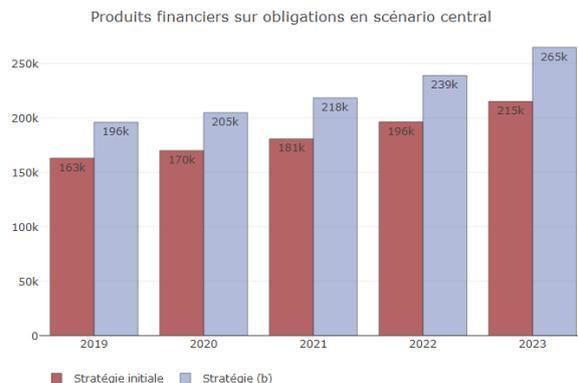


FIGURE 81 – Produits financiers sur obligations - stratégie (b)

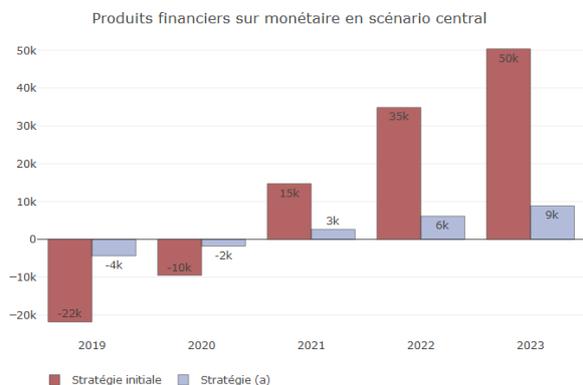


FIGURE 82 – Produits financiers sur monétaire - stratégie (a)

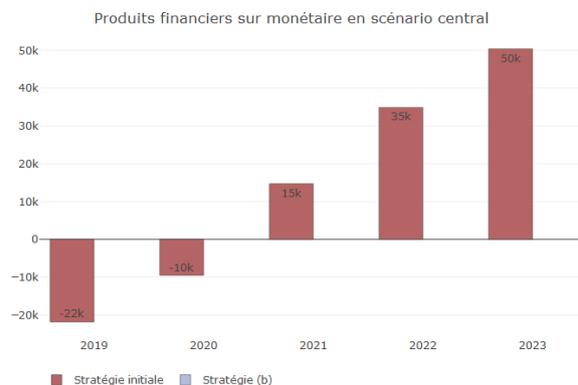


FIGURE 83 – Produits financiers sur monétaire - stratégie (b)

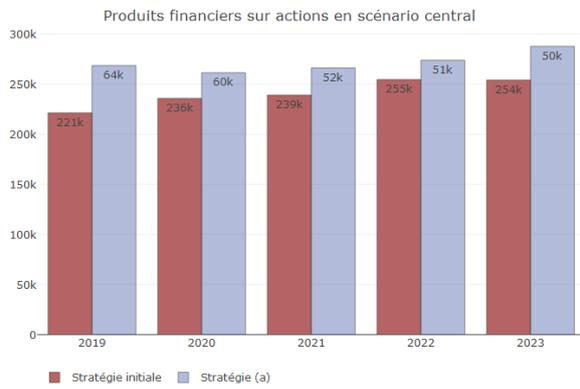


FIGURE 84 – Produits financiers sur actions - stratégie (a)

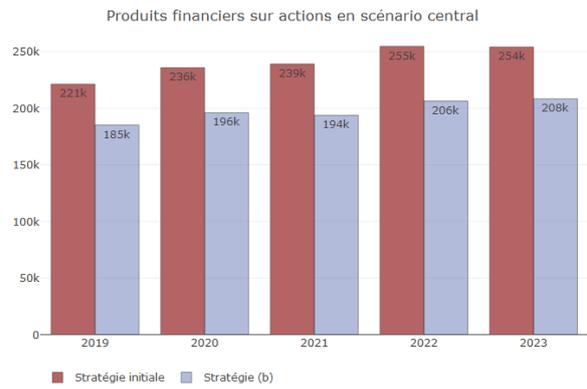


FIGURE 85 – Produits financiers sur actions - stratégie (b)

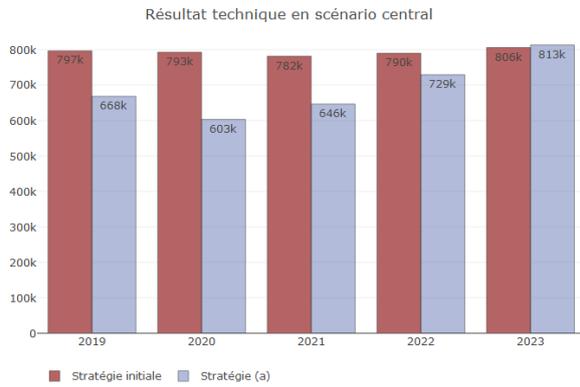


FIGURE 86 – Résultat technique - stratégie (a)

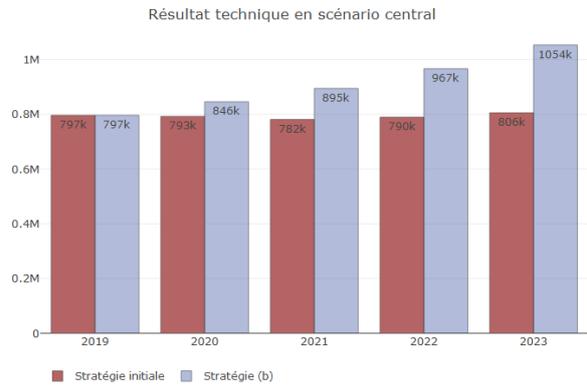


FIGURE 87 – Résultat technique - stratégie (b)

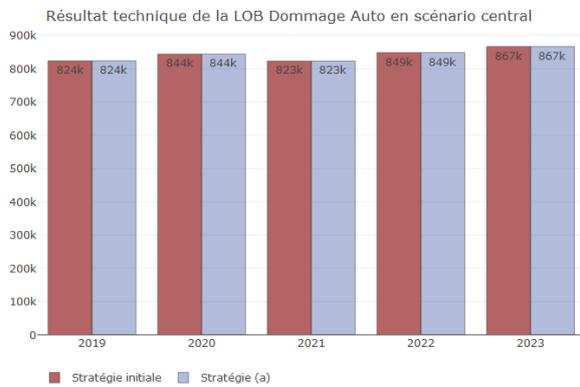


FIGURE 88 – Résultat technique de la LOB Dommage Auto - stratégie (a)

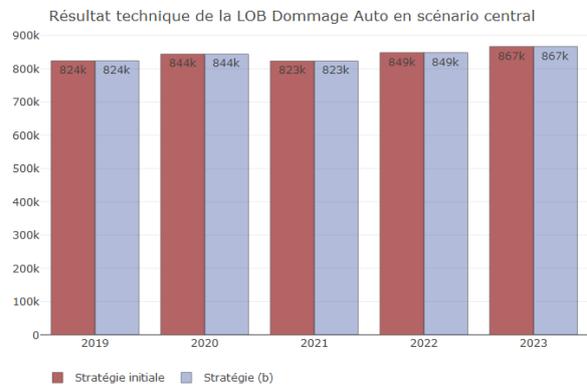


FIGURE 89 – Résultat technique de la LOB Dommage Auto - stratégie (b)

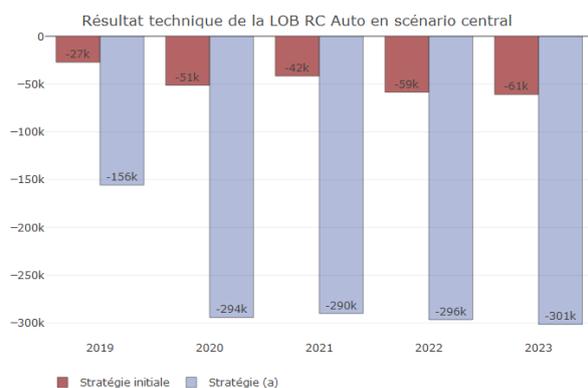


FIGURE 90 – Résultat technique de la LOB RC Auto - stratégie (a)

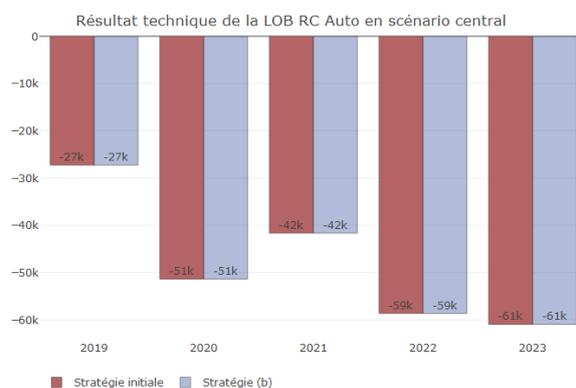


FIGURE 91 – Résultat technique de la LOB RC Auto - stratégie (b)

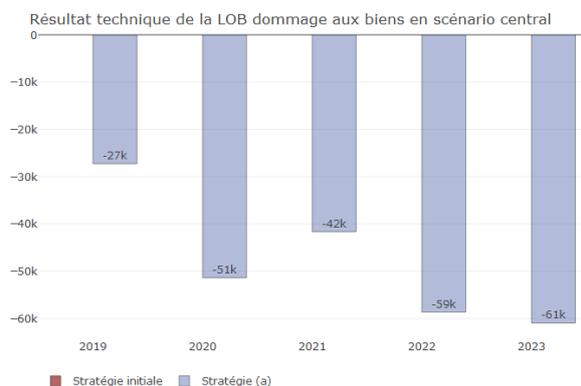


FIGURE 92 – Résultat technique de la LOB Dommage aux biens - stratégie (a)

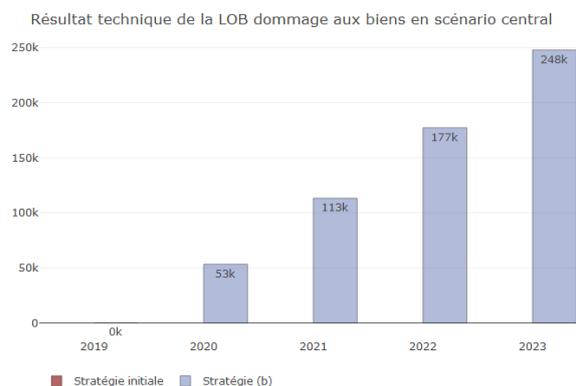


FIGURE 93 – Résultat technique de la LOB Dommage aux biens - stratégie (b)

## F Compléments sur les paramètres de l'entreprise fictive

Comme pour les autres paramètres vus dans la partie ??, les paramètres de sinistralité sont pris constant dans le temps.

### F.1 Paramètres de modélisation de la sinistralité

#### F.1.1 Dommage Auto

##### — Sinistres attritionnels

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi négative binomiale de moyenne 8% et de variance 12%.
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi gamma de moyenne 3500 et de variance 5000.

##### — Sinistres graves

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi de Poisson de moyenne 0.4%
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi de Pareto généralisée de seuil  $\mu = 5000$ , de paramètre d'échelle  $\sigma = 2700$  et de paramètre de forme  $\xi = 0.14$

##### Cadence de règlement

Année	0	1	2	3
Part de la charge totale	0.733	0.256	0.007	0.002

TABLE 19 – Cadence de règlement des sinistres de la ligne d’activité *Dommmage Auto*

### F.1.2 RC Auto

— **Sinistres attritionnels**

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi négative binomiale de moyenne 1% et de variance 2.2%.
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi gamma de moyenne 9 000 et de variance 35 000.

— **Sinistres graves**

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi de Poisson de moyenne 0.4%
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi de Pareto généralisée de seuil  $\mu = 9500$ , de paramètre d’échelle  $\sigma = 530$  et de paramètre de forme  $\xi = 0.767$

**Cadence de règlement**

Année	0	1	2	3	4	5	6
Part de la charge totale	0.082	0.404	0.249	0.165	0.057	0.034	0.009

TABLE 20 – Cadence de règlement des sinistres de la ligne d’activité *RC Auto*

### F.1.3 Dommagem aux biens

— **Sinistres attritionnels**

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi négative binomiale de moyenne 9.32% et de variance 10%.
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi gamma de moyenne 1180 et de variance 3000.

— **Sinistres graves**

- Le nombre  $N$  de sinistres est simulé par une loi de Poisson de moyenne 0.4%
- Les coûts individuels des sinistres sont modélisés par une loi de Pareto généralisée de seuil  $\mu = 5000$ , de paramètre d’échelle  $\sigma = 2700$  et de paramètre de forme  $\xi = 0.14$

**Cadence de règlement**

Année	0	1	2	3	4	5
Part de la charge totale	0.573	0.363	0.037	0.16	0.008	0.003

TABLE 21 – Cadence de règlement des sinistres de la ligne d’activité *Dommmage aux biens*

# G Compléments sur la calibration du modèle de Hull & White

## G.1 Préliminaires

### G.1.1 Rappel modèle de Hull & White

On rappelle sous le modèle de Hull & White, le taux court suit la dynamique suivante sous proba risque-neutre :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

Nous allons à présent montrer que le modèle de Hull & White permet de retrouver la courbe de taux zéro-coupon en  $t = 0$  pour  $\theta_t$  donné par :

$$\theta_t = \frac{df}{dt}(0, t) + a \cdot f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (8)$$

Ce résultat nous sera utile pour la section suivante afin de démontrer l'approximation :

$$r_t \approx r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) - e^{-a(t-s)} f(0, s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

### Démonstration de la distribution du taux court :

Nous allons montrer que le taux court suit une loi normale de variance et d'espérance données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t] = e^{-at}r_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta_u du \\ \mathbb{V}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \end{cases}$$

Démonstration : Soit  $X_t := e^{at}r_t$ , en utilisant le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$dX_t = e^{at}dr_t + ae^{at}r_t dt$$

En injectant  $dr_t$  dans la formule précédente, on obtient donc :

$$dX_t = e^{at}\theta_t dt + e^{at}\sigma dW_t$$

Ainsi, en intégrant entre 0 et  $t$  on en déduit alors l'égalité suivante pour le taux court :

$$r_t = e^{-at}r_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta_u du + \int_0^t e^{-a(t-u)}\sigma dW_u$$

On en déduit alors l'espérance et la variance de  $r_t$  :

$$\mathbb{E}[r_t] = e^{-at}r_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta_u du$$

$$Var[r_t] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t e^{-a(t-u)}\sigma dW_u \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

### Démonstration de la formule du prix du zéro-coupon :

Le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité  $T$ , notée  $P(t, T)$ , est donnée par la formule suivante :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right]$$

Pour calculer cette espérance, nous allons montrer dans un premier temps que  $\int_t^T r_s ds$  suit une loi gaussienne, conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ .

En intégrant entre  $t$  et  $T$  l'expression de  $r_t$  obtenue auparavant nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= \int_t^T e^{-as} r_0 ds + \int_t^T \int_0^s e^{-a(s-u)} \theta_u du ds + \int_t^T \int_0^s e^{-a(s-u)} \sigma dW_u ds \\ &= \int_t^T e^{-as} r_0 ds + \int_0^t \int_t^T e^{-a(s-u)} \theta_u ds du + \int_t^T \int_u^T e^{-a(s-u)} \theta_u ds du \\ &\quad + \int_0^t \int_t^T e^{-a(s-u)} \sigma ds dW_u + \int_t^T \int_u^T e^{-a(s-u)} \sigma ds dW_u \end{aligned}$$

Ainsi en posant  $B(t, T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= r_0 e^{-at} B(t, T) + e^{-at} B(t, T) \int_0^t e^{au} \theta_u du + \int_t^T B(u, T) \theta_u du \\ &\quad + e^{-at} \sigma B(t, T) \int_0^t e^{au} dW_u + \sigma \int_t^T B(u, T) dW_u \\ &= r_t B(t, T) + \int_t^T B(u, T) \theta_u du + \sigma \int_t^T B(u, T) dW_u \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t$  est une gaussienne de moyenne et de variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t \right] &= r_t B(t, T) + \int_t^T B(u, T) \theta_u du \\ \text{Var} \left[ \int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t \right] &= \sigma^2 \int_t^T B(u, T)^2 du \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité  $T$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{-r_t B(t, T) - \int_t^T B(u, T) \theta_u du + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_t^T B(u, T)^2 du} \\ &= e^{A(t, T) - B(t, T) r_t} \end{aligned}$$

$$A(t, T) = \int_t^T \left( \frac{1}{2} \sigma^2 B(u, T)^2 - B(u, T) \theta_u \right) du$$

### Démonstration de la formule explicite de $\theta_T$ :

En notant  $f(0, T)$  le taux forward instantané théorique observé à la date zéro pour la maturité  $T$ , nous avons la relation suivante :

$$f(0, T) = -\frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} = -\frac{\partial (A(0, T) - B(0, T) r_0)}{\partial T}$$

Or en dérivant  $A(t, T)$  on obtient :

$$\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2 B(T, T)^2 + \sigma^2 \int_0^T B(u, T) \frac{\partial B(u, T)}{\partial T} du - B(T, T)\theta_T - \int_0^T \frac{\partial B(u, T)}{\partial T} \theta_u du$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} f(0, T) &= -\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} + \frac{\partial B(0, T)}{\partial T} r_0 \\ &= \int_0^T e^{-a(T-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ \frac{1}{2}(1 - e^{-2aT}) - (1 - e^{-aT}) \right] + e^{-aT} r_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Puis en dérivant cette relation par rapport à  $T$  on en déduit que :

$$\frac{\partial f(0, T)}{\partial T} = \theta_T - a \int_0^T e^{-a(T-u)} \theta_u du + \frac{\sigma^2}{a} (e^{-2aT} - e^{-aT}) - ae^{-aT} r_0$$

En utilisant 9 on remplace  $\int_0^T e^{-a(T-u)} \theta_u du$  dans l'équation précédente et on aboutit au résultat suivant :

$$\boxed{\frac{\partial f(0, T)}{\partial T} = \theta_T - af(0, T) - \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2aT})} \quad (10)$$

Ainsi, en inversant la formule et en notant  $f^M(0, T)$  le taux forward instantané du marché, on en déduit que :

$$\boxed{\theta_T = \frac{\partial f^M(0, T)}{\partial T} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2aT})} \quad (11)$$

## G.2 Approximation du taux court

Nous avons montré dans la partie précédente, qu'en utilisant la formule d'Itô on obtenait :

$$r_t e^{at} = r_s e^{as} + \int_s^t \theta_u e^{au} du + \sigma \int_s^t e^{au} dW_u \quad (12)$$

Or l'équation 11 nous donne :

$$\int_s^t \theta_u e^{au} du = [e^{au} \alpha(u)]_s^t \quad (13)$$

avec  $\alpha(u) = f(0, u) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-au})^2$

En injectant la relation 13 dans l'équation 12 on en déduit donc que :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - e^{-a(t-s)} \alpha(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (14)$$

En approximant  $\alpha(t)$  par  $f(0, t)$ , on obtient donc finalement :

$$r_t \approx r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) - e^{-a(t-s)} f(0, s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (15)$$

# H Compléments sur les mesures de risque

## H.1 Propriétés usuelles des mesures de risque

**Définition 8** (Cohérence). Une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Invariance par translation :  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall X \in V, \rho(X + a) = \rho(X) + a$
- Sous-additivité :  $\forall X, Y \in V, \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- Homogénéité positive :  $\forall \lambda > 0$  et  $\forall X \in V, \lambda X \in V \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- Monotonie :  $\forall X \in V, X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$

**Définition 9** (Convexité).  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$

**Définition 10** (Additivité Comonotonique).  $X$  et  $Y$  sont dites comonotoniques si  $\forall \omega, \omega' \in \Omega, (X(\omega) - Y(\omega))(X(\omega') - Y(\omega')) \geq 0$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont comonotoniques, alors  $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ .

**Définition 11** (Invariance en loi). Si  $X \stackrel{d}{=} Y$  (ie.  $X$  et  $Y$  ont la même distribution), alors  $\rho(X) = \rho(Y)$ .

## H.2 Elicitabilité (élicitability en anglais)

Une mesure de risque  $\rho$  est élicitable relativement à un ensemble de fonctions de répartition noté  $\mathcal{F}$  s'il existe une fonction de score (ou fonction de perte) notée  $S$  telle que pour tout  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\rho(F)$  minimise la quantité  $\mathbb{E}_{Y \sim F}(S(x, Y))$

$$i.e. : \forall x \in X, \mathbb{E}_{Y \sim F}(S(\rho(F), Y))$$

**Définition 12** (Fonctionnelle statistique / Statistique fonctionnelle?). Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de fonctions de répartition, une fonctionnelle statistique  $\rho$  (dans notre cas une mesure de risque) est une application de l'ensemble  $\mathcal{F}$  vers un espace euclidien

$$\rho : F \in \mathcal{F} \rightarrow \rho(F) \in D$$

Avec  $D$  un sous-ensemble d'un ensemble euclidien (éventuellement  $\mathbb{R}$ ).

**Définition 13** (Consistance d'une fonction de score (ou fonction de perte)). Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de variables aléatoires, une fonction de score (ou fonction de perte) est dite consistante pour la fonctionnelle statistique  $\rho$  relativement à  $\mathcal{F}$  si :

$$\forall F \in \mathcal{F}, \forall r \in \rho(F), \forall x \in D, \mathbb{E}_F(S(r, Y)) \leq \mathbb{E}_F(S(x, Y))$$

Soit, si  $\text{Card}(\rho(F)) = 1$ ,

$$\forall F \in \mathcal{F}, \forall x \in D, \mathbb{E}_{Y \sim F}(S(\rho(F), Y)) \leq \mathbb{E}_{Y \sim F}(S(x, Y))$$

*Exemple* : Si la statistique considérée est le quantile de niveau  $\alpha$  (ie :  $\rho(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \overline{F(x)} \geq \alpha\}$ ) et si  $\mathbb{E}_{Y \sim F}(Y)$  est bien défini alors la fonction de score  $S(x, y) = (\mathbf{1}(x \geq y) - \alpha)(x - y)$  est consistante.

**Définition 14** (Elicitabilité (ou elicibility en anglais)). Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de variables aléatoires, une fonctionnelle  $\rho$  vérifie la propriété d'élicitabilité s'il existe une fonction de score consistante pour  $\rho$  relativement à la classe  $\mathcal{F}$ .

On remarque alors que la propriété d'élicitabilité nous donne directement une statistique de backtesting de l'estimateur de  $\rho$ . En effet, si la fonctionnelle  $\rho$  est élicitable, alors il est naturelle d'utiliser la statistique  $\hat{S}$ , ci-dessous :

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(\rho_i, Y_i)$$

Le backtesting est alors effectué en testant hypothèse suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \hat{S} = \mathbb{E}_{Y \sim F}(S(\rho(F), Y))$$

### H.3 Sous-additivité de la VaR

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires,  $X$  et  $Y$  vérifient la propriété de sous-additivité pour la mesure de risque  $\rho$  si :

$$\rho(X_1 + \dots + X_n) \leq \rho(X_1) + \dots + \rho(X_n)$$

En règle général cette propriété n'est pas vérifiée par la VaR. L'affirmation ou non de cette propriété dépend de la distribution jointe des variables  $X$  et  $Y$ . On vérifie la propriété de sous-additivité notamment lorsque les variables aléatoires ont une distribution elliptique :

$$\Phi_{X-\mu}(t) = \Psi(t'\Sigma t)$$

avec  $\Phi_{X-\mu}$  la fonction caractéristique de  $X - \mu$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et  $\Sigma$  une matrice définie positive de taille  $n$ .

*Exemple de familles de lois elliptiques :* Lois normales multivariées, lois multivariées de Student, lois logistiques multivariées