



Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : M. Benoît Garnier

Mesure du risque de crédit d'un portefeuille obligataire

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : Assurances du Crédit Mutuel

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom : Mounia Khamlich

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)*

Signature du responsable
entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

Remerciements

Je tiens à remercier personnellement Mounia Khamlich des Assurances du Crédit Mutuel pour la qualité de son encadrement tout au long de mon stage. Sa patience et ses nombreux conseils m'ont permis de mener à bien ce mémoire dans les meilleures conditions. Je la remercie également de sa disponibilité.

Je remercie aussi l'équipe obligataire des Assurances du Crédit Mutuel pour leurs conseils et leurs points de vue.

Introduction

La directive Solvabilité II, adoptée en 2009 par le Conseil et Parlement européens, va refondre entièrement le cadre prudentiel du secteur de l'assurance en se substituant en 2014 au régime Solvabilité I, issu de directives des années 70. Tout en maintenant un niveau élevé de protection des assurés, Solvabilité II vise à moderniser les exigences prudentielles et à harmoniser le cadre européen de l'assurance.

Solvabilité II offrira un nouveau cadre prudentiel au secteur de l'assurance selon une approche en trois « piliers », comparable à celle de Bâle II pour la banque :

- Le premier pilier porte sur les exigences quantitatives en capital (niveau minimal de fonds propres qu'une entreprise doit détenir pour offrir des produits d'assurance ; calcul des provisions techniques...) ;
- Le deuxième pilier concerne les exigences qualitatives (gestion des risques notamment) et la gouvernance des assureurs.
- Le troisième pilier porte sur les informations à fournir aux autorités de supervision et au public.

Sur le premier pilier, l'exigence en fonds propres reflétera désormais tous les risques de l'entreprise, à l'actif comme au passif : risques de souscription, d'investissement, de contrepartie et risque opérationnel. Ce mode de calcul des exigences en capital devrait donc inciter les entreprises à mieux appréhender leurs risques, et à garantir que les entreprises aient une probabilité de ruine inférieure à 0,5% à l'horizon à un an. L'entreprise doit donc avoir en permanence des fonds propres en quantité et qualité suffisantes pour que les assurés ne pâissent pas d'une liquidation.

Le risque de crédit représente une part importante des risques financiers supportés par les assureurs, car ces derniers investissent une grande partie de leur actif sur les marchés *fixed income*. Dans le cas des obligations, la formule standard du calcul du SCR au titre du risque de crédit retient une approche *marked-to-market* : elle consiste à mesurer la variation de valeur des actifs suite à un choc de leurs *spreads* de crédit. Nous verrons que cette méthode ne prend pas en compte le risque de défaut de la contrepartie.

L'objet de ce mémoire est de déterminer une méthode d'évaluation du risque de défaut. Il est essentiel que ce modèle soit opérationnel, simple et adaptable à tous types de portefeuilles.

Nous disposons pour cela de différents modèles existants dans le milieu bancaire. Ces modèles ont été développés dans le cadre de la réforme Bâle II. Nous étudierons les trois principaux modèles disponibles sur le marché afin d'analyser les méthodes utilisées, les paramètres nécessaires... Cette étude nous permettra de connaître les avantages et les inconvénients de chaque modèle. Nous

choisirons ensuite l'un de ces modèles que nous étudierons plus en détails. Nous analyserons les résultats obtenus sur un portefeuille obligataire ce qui nous conduira à une étude de sensibilité aux différents paramètres du modèle.

Le mémoire s'articulera en quatre parties. Dans un premier temps, nous situerons le contexte réglementaire. Ensuite, nous comparerons les trois principaux modèles de calcul du risque de crédit. La troisième partie traitera de la mise en place du modèle CreditRisk⁺ : après une présentation détaillée du modèle, le choix des paramètres sera justifié, puis nous étudierons la sensibilité du modèle à l'aide d'un portefeuille obligataire. Enfin, nous présenterons dans la quatrième partie un moyen de se prémunir contre le risque de crédit : les CDS.

Table des matières

Introduction.....	3
I La réglementation en assurance et la mesure du risque de crédit.....	9
1 La directive Solvabilité II	10
1.1 Spécificité du secteur de l'assurance	10
1.2 La réglementation actuelle et la directive Solvabilité II.....	10
1.2.1 Le cadre réglementaire actuel	10
1.2.2 La directive Solvabilité II	11
1.2.3 Les études quantitatives	12
1.3 Les 3 Piliers.....	12
1.3.1 Pilier 1 : L'exigence de fonds propres	13
1.3.2 Pilier 2 : La gouvernance des risques.....	13
1.3.3 Pilier 3 : La discipline de marché.....	13
1.4 Exigence des fonds propres	13
1.4.1 Marge de solvabilité.....	13
1.4.2 Le calcul du SCR avec l'approche standard	14
2 Le risque de crédit et Solvabilité II	16
2.1 Le risque de crédit des assureurs.....	16
2.1.1 Le marché obligataire.....	16
2.1.2 Le risque de crédit.....	19
2.1.3 Valorisation d'une obligation.....	20
2.1.4 Nature du <i>spread</i> de crédit	22
2.2 Mesure du risque de crédit dans le QIS 5	24

2.2.1	Le module <i>Risque de spread</i>	24
2.2.2	Exigence en capitaux propres pour les obligations <i>corporate</i>	25
2.3	Prise en compte du risque de défaut.....	26
II	La modélisation du risque de défaut.....	28
3	Les différents modèles de risque de crédit.....	29
3.1	Les notions du défaut	29
3.1.1	Définition du défaut	29
3.1.2	Paramètres de défaut	30
3.1.3	Indicateurs de risque d'une distribution de pertes	33
3.2	Modèle de Vasicek.....	35
3.2.1	Méthodes proposées par Bâle II.....	35
3.2.2	Le modèle de Merton	36
3.2.3	Le modèle de Vasicek sous l'hypothèse de granularité infinie du portefeuille	37
3.2.4	Les corrélations	41
3.3	Différents modèles de mesure de risque de crédit	41
3.3.1	CreditRisk ⁺	42
3.3.2	CreditMetrics	42
3.3.3	Portfolio Manager	42
3.3.4	Comparaison des trois modèles.....	43
4	Le modèle CreditRisk⁺	45
4.1	La démarche	45
4.2	Cas où les taux de défaut sont fixes	45
4.2.1	Occurrence de défauts	45
4.2.2	Pertes de défaut	47
4.2.3	Procédure de calcul et distribution des pertes	48
4.3	Passage à des taux de défauts aléatoires	49
4.3.1	Incertitude des taux de défaut	49
4.3.2	Analyse par secteur	50
4.3.3	Occurrence de défauts	50
4.3.4	Distribution des pertes	52

4.3.5	Commentaires sur le modèle.....	53
4.4	Calibrage des paramètres du modèle	54
4.4.1	La probabilité de défaut et sa volatilité.....	54
4.4.2	L'exposition au défaut	55
4.4.3	La perte en cas de défaut.....	55
III	Calcul de la Value-at-Risk d'un portefeuille obligataire.....	57
5	Données en input	58
5.1	Constitution du portefeuille	58
5.1.1	Répartition des expositions	58
5.1.2	Répartition des <i>ratings</i>	60
5.1.3	Séniorité des titres	60
5.2	Diversification du portefeuille	61
6	Sensibilité du modèle aux différents paramètres	62
6.1	Paramètres de référence	62
6.2	Comparaison avec le modèle de Vasicek.....	63
6.3	Etude de la sensibilité aux paramètres d'entrée	64
6.3.1	Sensibilité aux probabilités de défaut et à leurs volatilités	64
6.3.2	Sensibilité à la perte en cas de défaut (<i>LGD</i>).....	65
6.3.3	Sensibilité à l'unité d'exposition.....	66
6.4	Sensibilité à la diversification du portefeuille.....	66
IV	Un produit pour se couvrir contre le risque de crédit : le CDS	68
7	Présentation et valorisation d'un CDS.....	69
7.1	Principe d'un CDS	69
7.2	Valorisation d'un CDS.....	71
	Conclusion.....	73
	Bibliographie	75

Annexes	77
Annexe 1 : Exigence en capital pour les dérivés de crédit.....	77
Annexe 2 : Exigence en capital au titre du risque de contrepartie.....	77
Annexe 3 : CreditRisk ⁺ par la transformée de Fourier rapide.....	79

Première partie

La réglementation en assurance et la mesure du risque de crédit

Chapitre 1

La directive Solvabilité II

1.1 Spécificité du secteur de l'assurance

L'assurance est un secteur très spécifique par rapport aux autres secteurs d'activité, dans la mesure où son cycle de production est inversé.

En effet, dans la plupart des activités commerciales (qu'il s'agisse de la vente de biens ou de services), le coût du bien ou de la prestation peut être calculé en amont, puisque, au moment de la vente, l'entreprise sait généralement combien elle a dû dépenser pour fabriquer son produit. Schématiquement (c'est-à-dire sans tenir compte des coûts de distribution et de promotion), c'est en fonction du coût de production du produit que la société pourra alors en déterminer le prix de vente.

Dans le cas de l'assurance, secteur d'activité où les acteurs économiques vendent une protection contre le risque (événement dommageable futur dont la réalisation est incertaine), il est impossible aux compagnies de savoir avec certitude combien la prestation qu'elles vendent leur coûtera, la prime étant payée par le client avant que la prestation (indemnisation en cas de sinistre) n'ait été fournie par l'assureur.

En observant de plus près le marché français, on constate qu'une grande partie des actifs des assureurs sont constitués de produits financiers et notamment de produits de crédit (obligations, dérivés). L'assureur supportera donc non seulement un risque assurantiel, lié aux sinistres couverts, mais également un risque financier, lié à l'actif du bilan. C'est ce constat, couplé aux évolutions récentes du système financier mondial, qui a amené les régulateurs à s'interroger sur la pertinence du système réglementaire actuel et sur ses évolutions possibles.

1.2 La réglementation actuelle et la directive Solvabilité II

1.2.1 Le cadre réglementaire actuel

Le régime actuel « Solvabilité I » date de 1973. Il impose aux assureurs européens de disposer d'un montant de fonds propres (appelé marge de solvabilité) supérieur au seuil minimal réglementaire (appelé exigence de marge de solvabilité). Cette exigence de marge est calculée à l'aide d'une formule ne faisant intervenir que les risques spécifiques liés à l'activité d'assurance :

les primes encaissées et les sinistres réglés pour l'assurance non-vie, et les provisions mathématiques en assurance-vie. Une minoration est ensuite appliquée aux sinistres couverts par un réassureur.

Nous remarquons que ne sont pris en compte que les risques assurantiels, tandis que les risques financiers (marché, crédit,...) associés à l'actif du bilan sont ignorés. Ces actifs devenant de plus en plus complexes et afin de tenir compte des autres risques inhérents à l'activité des compagnies d'assurances, les régulateurs ont été amenés à repenser le cadre réglementaire auquel celles-ci sont rattachées.

Les principales critiques qui sont adressées à Solvabilité I sont le manque de proportionnalité et de sensibilité au risque. D'autre part, le manque de convergence des pratiques ne facilite pas les conditions de surveillance par les autorités au niveau Européen. Pour pallier ces carences, un nouveau cadre réglementaire « Solvabilité II » est en cours de définition et ses grands principes ont été posés.

1.2.2 La directive Solvabilité II

Ce n'est pas la première fois que le système prudentiel d'un secteur économique sera revu et corrigé. Le domaine bancaire a connu pareil changement avec les accords de Bâle II (2004). Leurs objectifs étaient de consolider le système financier mondial en cernant mieux les risques auxquels les banques sont exposées et en allouant des capitaux propres adaptés à la couverture de ces risques.

La crise des *subprimes* a cependant montré les limites de cette réforme, et les accords de Bâle III, prévus initialement pour le 1^{er} janvier 2013, seront la réponse des régulateurs aux nouveaux risques identifiés lors de cette crise. Dans ses travaux, la Commission européenne s'est inspirée des expériences du secteur bancaire. Elle a également tenu compte des nouvelles normes comptables IFRS. L'objectif de ces dernières étant d'une part d'évaluer le bilan assurantiel en valeur de marché, et d'autre part de modéliser de manière plus robuste le besoin en capital.

Consciente des limites de Solvabilité I, l'UE instaure le projet Solvabilité II dès 1999. Le principal objectif est de pallier les limites de Solvabilité I tout en gardant l'esprit de la directive de 1973, où le législateur souhaitait renforcer la protection des assurés en améliorant le contrôle prudentiel.

Solvabilité II doit répondre aux attentes des assurés, des assureurs, des contrôleurs et des marchés financiers. La protection des assurés passera par une amélioration de la sécurité financière des assureurs, tout en garantissant une tarification plus juste des produits d'assurance. Du côté des assureurs et des contrôleurs, une plus grande transparence dans la gestion des risques assurantiels et financiers est souhaitée.

Le *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* (CEIOPS), en charge des spécifications techniques, a adopté la procédure "Lamfalussy". Cette procédure se décline en quatre niveaux : élaboration de la législation, élaboration des mesures d'exécution, transposition dans le droit national et contrôle du respect du droit. Parallèlement, des études quantitatives d'impact (*Quantitative Impact Studies*, QIS) sont lancées afin d'évaluer les répercussions quantitatives du futur système de solvabilité.

1.2.3 Les études quantitatives

Afin d'apprécier l'impact de la nouvelle directive, les QIS sont lancées par la Commission Européenne dès 2006.

Voici les différentes études réalisées ainsi que leurs objectifs :

- **QIS 1** : Evaluation des provisions techniques,
- **QIS 2** : Evaluation du besoin en capital et de prise en compte de la diversification des risques,
- **QIS 3** : Obtenir un calibrage des formules standards pour le calcul du MCR et du SCR et introduire la problématique spécifique des groupes,
- **QIS 4** : Déterminer les mesures techniques d'application,
- **QIS 5** : Définir l'impact de Solvabilité II sur le bilan des entreprises et vérifier la cohérence des propositions faites face aux objectifs visés.

Les résultats de cette dernière étude ont été publiés le 14 mars 2011 par l'EIOPA. 68% des entreprises affectées par Solvabilité II ont participé à l'étude. Cette étude a permis d'une part d'estimer de manière plus précise les volumes de capitaux qui seront exigés des assureurs à l'entrée en vigueur de Solvabilité II, et d'autre part de savoir dans quelle mesure ceux-ci sont déjà couverts par les fonds propres des compagnies :

- L'**exigence de marge minimale** (MCR) totale s'élève à 39 Md€. Elle est couverte par 174 Md€ d'éléments exigibles, soit un excès de couverture de 135 Md€.
- La **marge de solvabilité** (SCR) exigée au titre de la formule standard QIS 5 s'élève à 101 Md€ au total. Elle est largement couverte puisqu'un excès de couverture de 82 Md€ est dégagé sur l'ensemble des participants.

QIS 5 était aussi, au-delà du test des exigences quantitatives, un excellent exercice d'entraînement en vue du passage à Solvabilité II. L'analyse des réponses montre que *« si des améliorations sensibles sont constatées depuis QIS 4, pour beaucoup d'organismes, des efforts importants restent encore à faire quant à leur préparation au futur régime prudentiel »*¹.

1.3 Les 3 Piliers

A l'instar des accords de Bâle II, une approche par piliers a été retenue pour Solvabilité II. Le premier pilier concerne l'exigence en fonds propres, le second est plus qualitatif et traite de la gouvernance des risques, tandis que le troisième est axé sur les informations financières à communiquer au public et aux autorités de contrôle.

¹ Autorité de Contrôle Prudentiel, ACP, mars 2011

1.3.1 Pilier I : L'exigence de fonds propres

Le premier pilier de Solvabilité II a pour objectif de définir les normes quantitatives de calcul de provisions techniques et des fonds propres. L'exigence de fonds propres se traduit par deux notions :

- Le **MCR** (*Minimum Capital Requirement*), volume minimal en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique,
- Le **SCR** (*Solvency Capital Requirement*), capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur.

Le SCR a cette particularité d'être fondé sur l'exposition aux risques, en incorporant tous les risques liés à l'activité de la compagnie (risque de souscription, risque de crédit...). Pour le calcul de ce SCR, les assureurs et mutuelles auront le choix entre la formule standard, un modèle interne développé par la compagnie elle-même (basé sur leur structure de risque spécifique) ou un mode de calcul hybride.

1.3.2 Pilier 2 : La gouvernance des risques

Ce pilier a pour but de fixer les normes qualitatives de gouvernance et de suivi des risques en interne et la manière dont l'autorité de contrôle devra exercer ses pouvoirs de surveillance. L'objectif est d'encourager les compagnies à mettre en place des dispositifs internes indépendants capables d'apprécier et de mesurer leurs risques.

1.3.3 Pilier 3 : La discipline de marché

Ce troisième pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées auxquelles le public et les autorités de contrôle auront accès dans un but d'information ou de surveillance.

A présent, examinons plus en détail le calcul du MCR et du SCR avec l'approche standard.

1.4 Exigence des fonds propres

1.4.1 Marge de solvabilité

Comme nous l'avons vu précédemment, il existe deux seuils d'exigence de fonds propres sous Solvabilité II : le SCR qui correspond au capital économique et le MCR qui correspond au capital réglementaire.

Afin d'éviter l'intervention des autorités de contrôle, la compagnie d'assurance ou de réassurance doit impérativement avoir des capitaux supérieurs au SCR. Si ses fonds propres étaient inférieurs au MCR, les intérêts des assurés seraient menacés et l'autorité de contrôle serait alors en droit de prendre le contrôle de la compagnie. En dernier lieu, la directive Solvabilité II prévoit également le retrait de l'agrément. Voici le bilan simplifié d'une compagnie sous Solvabilité II :

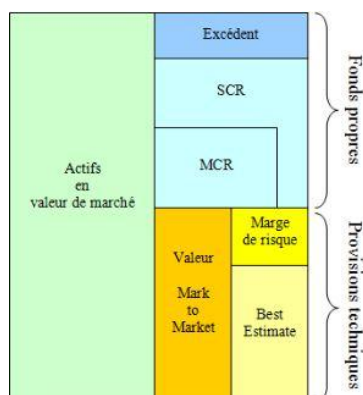


FIGURE 1.1 – Bilan d'une compagnie d'assurance sous Solvabilité II

Le MCR est fonction des provisions et des primes annuelles ($MCR_{Linéaire}$) et du SCR :

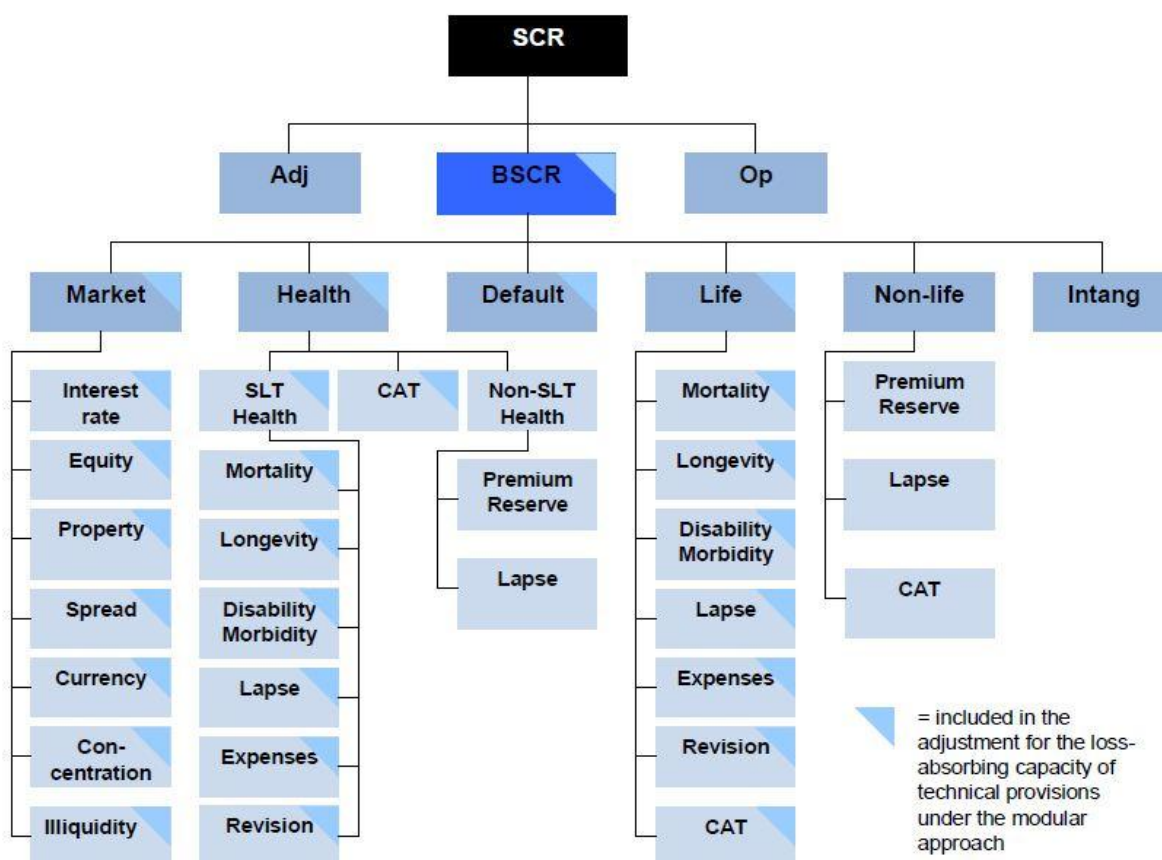
$$MCR = \min(\max(MCR_{Linéaire}, 0.25 * SCR), 0.45 * SCR)$$

Le calcul du SCR est plus complexe et dépend de l'approche choisie par la compagnie : l'approche standard (formule définie dans le QIS 5), le modèle interne développé par la compagnie ou le modèle hybride. L'approche standard est décrite dans la partie suivante.

1.4.2 Le calcul du SCR avec l'approche standard

En approche standard, le SCR correspond à une VaR à horizon un an de 99.5%, ce qui correspond à une faillite tous les deux cents ans.

Le calcul du SCR se fait selon une approche modulaire, chaque module correspondant à un risque auquel l'assureur est exposé.

FIGURE 1.2 – Décomposition du SCR en approche standard²

Le BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*) regroupe les risques issus de l'activité d'assurance et directement supporté par le portefeuille, auxquels viennent s'ajouter les risques opérationnels et un facteur d'ajustement.

Le SCR global s'obtient en agrégeant les SCR de chaque risque, eux-mêmes résultant de l'agrégation des sous-modules qui les composent. Ces agrégations se font via des matrices de corrélation définies dans le OIS 5.

² Technical specification for QIS 5, European Commission, Février 2011

Chapitre 2

Le risque de crédit et Solvabilité II

Les assureurs investissent principalement dans le marché obligataire. L'un des risques inhérent aux produits de ce marché est le risque de crédit. Dans ce chapitre, nous allons définir ce risque puis nous présenterons la méthodologie proposée par Solvabilité II pour le mesurer.

2.1 Le risque de crédit des assureurs

Le marché du crédit est devenu un marché indispensable pour le fonctionnement de l'économie. C'est l'un des moyens de financement de l'Etat et des entreprises. Nous allons donc commencer par une présentation de la structure de ce marché.

2.1.1 Le marché obligataire

Les marchés primaire et secondaire

Le marché primaire correspond au marché des émissions. Une fois l'obligation émise, elle s'échangera ensuite sur le marché secondaire. Sur ces deux marchés, les obligations sont cotées.

Lorsqu'un investisseur achète une obligation, il doit tenir compte, entre autres, du risque de crédit et du risque de taux qui peuvent chacun faire varier le prix de l'obligation. Il est à noter que ce marché est beaucoup moins liquide que celui des actions. L'investisseur doit donc également prendre en compte ce risque de liquidité, car la vente d'un titre peut s'avérer difficile.

Depuis la crise des dettes souveraines, il est devenu hasardeux de parler d'« obligation sans risque ». Néanmoins les *Bunds* allemands émis par l'Etat fédéral sont considérés comme une valeur refuge et font référence. C'est d'ailleurs par rapport à ces taux que sont exprimés les taux (en *spread*) des autres Etats de l'Union Européenne.

Principe de l'obligation

Une obligation est un contrat entre un emprunteur (l'émetteur) et les différents détenteurs successifs du titre. Il s'agit d'une dette que l'émetteur s'engage à rembourser selon des modalités fixées à l'émission du titre (remboursement du nominal, paiement des intérêts).

Le remboursement du nominal peut se faire de trois manières :

- **in fine** : la totalité du nominal est remboursé à l'échéance du titre.
- **linéaire** : le nominal est remboursé d'un montant identique tous les ans.
- **à annuités constantes** : le montant versé (nominal + intérêts) est identique chaque année.

Le paiement des intérêts selon un échéancier est défini à l'émission. A chaque date est versé un coupon. Ces coupons sont principalement mensuels, trimestriels, semestriels ou annuels. Il existe différents type de coupons :

- **coupons fixes** : le taux de coupon est constant à chaque date de paiement.
- **coupons variables** : le taux de coupon est indexé sur une référence (LIBOR, EURIBOR,...). L'acheteur du titre ne sait donc pas à l'avance le montant des intérêts qu'il va percevoir.

De par leurs activités, les assureurs privilégient largement les obligations à taux fixes.

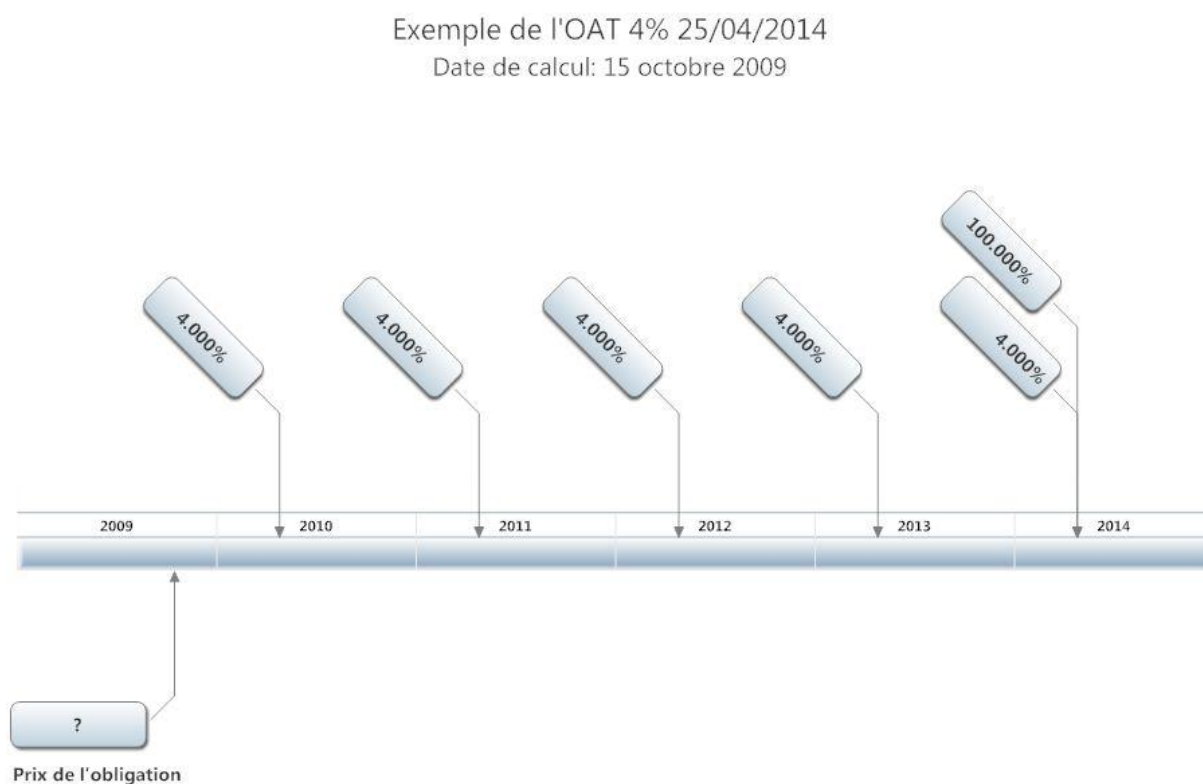


FIGURE 2.1 – Flux de remboursement d'une obligation d'Etat à taux fixe³

³ <http://www.iotafinance.com>

Qualité de crédit d'une obligation

Le taux de coupon est directement lié à la qualité de crédit de l'émetteur du titre. Plus le placement sera risqué, plus la rémunération sera forte. Afin d'évaluer la qualité de crédit d'un émetteur le marché se réfère au *rating* de l'émetteur.

Ce rating est accordé pour la durée de l'émission de l'obligation mais soumis à une surveillance continue qui peut entraîner une révision.

Ces notes sont attribuées par des agences de notation financières indépendantes. Les principales agences de notation le plus fréquemment citées sont Moody's, Standard & Poor's et Fitch Ratings.

Signification de la note	Moody's		Standard & Poor's		Fitch Ratings	
	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme
Prime Première qualité	Aaa	P-1 Prime -1	AAA	A-1+	AAA	F1+
High grade Haute qualité	Aa1		AA+		AA+	
	Aa2		AA		AA	
	Aa3		AA-		AA-	
Upper medium grade Qualité moyenne supérieure	A1		A+	A-1	A+	F1
	A2		A		A	
	A3	P-2	A-	A-2	A-	F2
Lower medium grade Qualité moyenne inférieure	Baa1		BBB+		BBB+	
	Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3
	Baa3		BBB-		BBB-	
Non-investment grade, speculative Spéculatif	Ba1	Not prime	BB+	B	BB+	B
	Ba2		BB		BB	
	Ba3		BB-		BB-	
Highly speculative Très spéculatif	B1		B+		B+	
	B2		B		B	
	B3		B-		B-	
Risque élevé	Caa1	Non prime	CCC+	C	CCC	C
Ultra spéculatif	Caa2		CCC			
En défaut, avec quelques espoirs de recouvrement	Caa3		CCC-			
	Ca		CC		CC	
			C/C/R		C	
En défaut sélectif	C		SD	D	RD	D
En défaut			D		D	

FIGURE 2.2 – Echelle de notation des trois principales agences (source : Wikipédia)

La crise financière de 2008 a montré que les différents *ratings* peuvent être revus rapidement à la baisse. Certaines agences de notation ont par ailleurs été largement critiquées du fait de notations largement surévaluées.

La majorité des entreprises est notée par au moins une agence de notation. Cependant, ce service étant payant, certaines entreprises n'ayant pas les fonds suffisants ne possèdent pas de *ratings*. Ce sont en effet les entreprises qui paient les agences de notation afin qu'elles établissent leurs *ratings*. Cette situation fait d'ailleurs planer le doute quant à de possibles conflits d'intérêts.

Il est à noter que différents titres d'un même émetteur peuvent ne pas avoir la même note. En effet, cette notation dépend aussi de la séniorité du titre. Un titre sécurisé (ou *covered bond*) sera par exemple mieux noté à l'émission qu'un titre subordonné.

2.1.2 Le risque de crédit

Le risque de crédit peut être défini comme la perte potentielle que peut subir un agent économique suite à un événement de crédit touchant l'une de ses contreparties. De manière plus précise, le risque de crédit englobe deux notions qui diffèrent en fonction de l'événement de crédit à l'origine des pertes :

- **le risque de défaut** : ce risque correspond à l'incapacité de l'emprunteur à honorer ses engagements, c'est-à-dire de rembourser sa dette (principal + coupons). Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles de subir une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant dû.
- **le risque de dégradation de la qualité de crédit** : ce risque correspond à une détérioration de la santé financière de la contrepartie. Il en résulte une hausse de la prime de risque (ou *spread*).

Ces deux types de risques sont fortement corrélés. En effet la dégradation de la qualité de crédit d'une contrepartie peut être à l'origine d'un événement de défaut et inversement un événement de défaut entraîne obligatoirement une dégradation de la qualité de crédit.

De manière générale, une hausse de *spread* est un signe annonciateur d'un *downgrading*.

L'existence de ces deux types de risques conduit à deux approches différentes pour modéliser le risque de crédit :

- L'approche **Default only** consiste à ne considérer que le défaut éventuel de la contrepartie. La perte engendrée est ensuite estimée : l'emprunteur ne récupérera qu'une partie de son investissement initial. Cette approche est adaptée pour la stratégie du *hold-to-maturity* (HTM) qui consiste à porter les titres jusqu'à leur échéance, sans chercher à réaliser de plus-values sur leurs reventes.
- L'approche **Marked-to-market**, elle, tient compte de la dégradation de la qualité de crédit de la contrepartie et quantifie l'impact de cette dégradation sur la valeur de marché du titre. Cette approche est celle retenue par Solvabilité II dans le cadre de la formule standard, comme nous le verrons dans la partie 2.2.

L'un des moyens de se prémunir contre le risque de crédit, et que la dernière crise financière a rendu « célèbre », est un produit dérivé appelé *Credit Default Swap* (CDS). Il s'agit d'un contrat qu'un investisseur A signe auprès d'une contrepartie C afin de se protéger contre le risque de défaut d'une contrepartie B dans laquelle A a investi. Dans ce contrat, A verse une prime annuelle à C et en cas de défaut de B, C s'engage à rembourser A du montant de son investissement.

2.1.3 Valorisation d'une obligation

Nous allons ici rappeler la méthode de valorisation d'une obligation tout en introduisant le concept de *spread* de crédit.

Soit une obligation in fine, de nominal N , d'échéance T et de coupons annuels $(C_i)_{i \in [1, T]}$ versés aux dates $t_1, \dots, t_T$.

Le prix de l'obligation est obtenu en faisant la somme des flux de coupons et du remboursement final, actualisés chacun au taux de rendement r sur la période t qui est, pour chaque flux, la durée entre la date de valorisation et la date de tombée du flux.

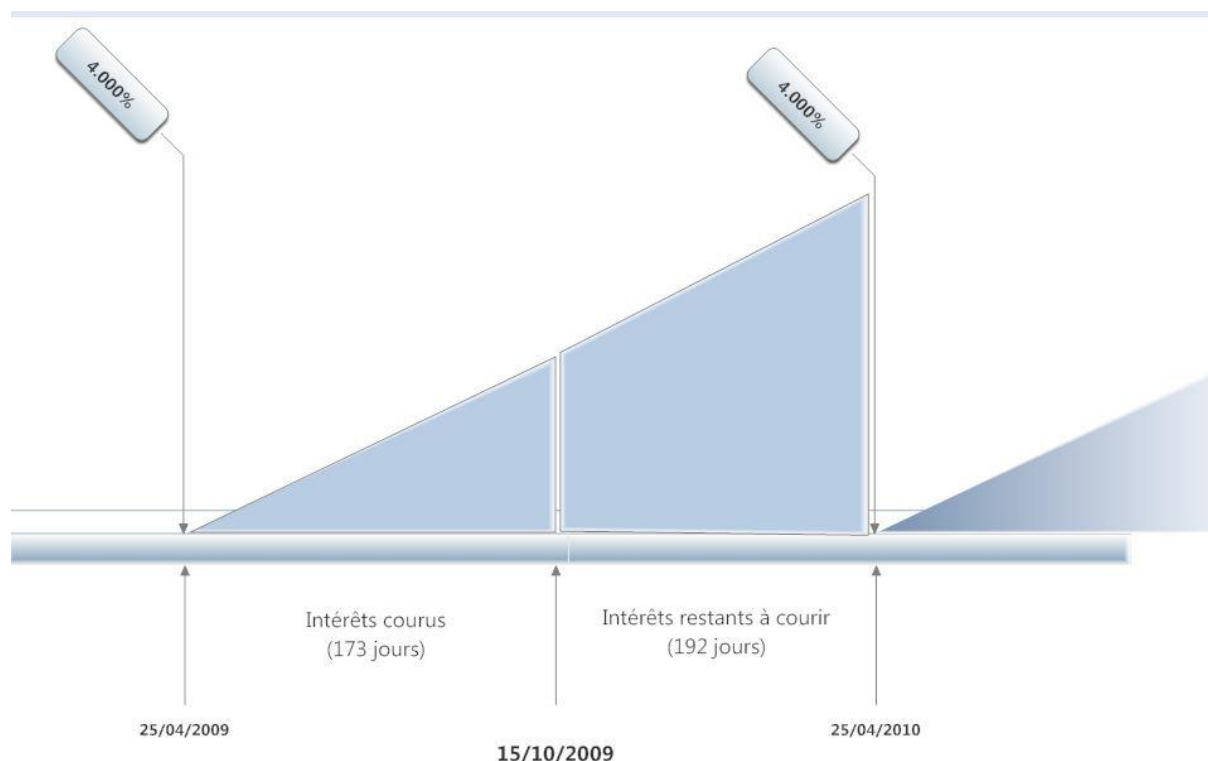
Ainsi, la valeur de marché V de l'obligation à la date t , qui correspond à la somme du prix de cette obligation et du coupon couru, est donnée par :

$$V(t) = P(t) + CC(t) = \sum_{i \text{ tels que } t_i > t} C_i * B_0(t, t_i) + N * B_0(t, t_T)$$

Où $B_0(t_1, t_2)$ est le prix d'un zéro-coupon calculé en t_1 et d'échéance t_2 . Le prix $P(t)$ est appelé prix pied de coupon ou *clean price*. La somme de ce prix pied de coupon et du coupon couru est appelé prix plein de coupon ou *dirty price*.

Le coupon couru en t est calculé de la manière suivante :

$$CC(t) = C_i * \frac{t - t_i}{365}$$

FIGURE 2.3 – Illustration du calcul du coupon couru⁴

Le taux actuariel ou taux de d'actualisation de l'obligation r_0 est obtenu en égalisant la valeur de marché de l'obligation (observée sur le marché) et la valeur actualisée des flux futurs $V(t)$:

$$V(t) = \sum_{i \text{ tels que } t_i > t} C_i * e^{-r_0(t_i - t)} + N * e^{-r_0(t_T - t)}$$

Si le taux actuariel est inférieur au taux de coupon, on dit que l'obligation cote avec une prime. Si le taux actuariel est supérieur au taux de coupon, on dit que l'obligation cote avec un rabais. Si le taux actuariel est égal au taux de coupon, on dit que l'obligation cote au pair.

Le taux actuariel permet de mesurer le risque de crédit.

Nous avons vu précédemment que l'un des risques porté par l'investisseur est que l'émetteur de l'obligation devienne incapable de rembourser sa dette. Dans ce cas, l'investisseur peut récupérer une partie de son investissement. Le pourcentage de la valeur du nominal qu'il perçoit est appelé taux de recouvrement ou *recovery rate*. Ce risque se mesure grâce au *spread* de crédit et qui correspond à la différence entre le taux actuariel de l'obligation et la taux sans risque :

$$\text{Spread de crédit} = \text{taux actuariel} - \text{taux sans risque}$$

⁴ <http://www.iotafinance.com>

Plus le *spread* est élevé, plus l'investissement est risqué et rémunérateur. Dans la réalité, le *spread* de crédit intégrera non seulement le risque de défaut, mais également des termes d'illiquidité et de volatilité de marché.

2.1.4 Nature du *spread* de crédit

Les marchés de crédit utilisent principalement deux indicateurs afin de mesurer le risque de crédit :

- la notation des émetteurs, comme nous l'avons vu, qui permet aux investisseurs de hiérarchiser la qualité de ceux-ci et ainsi de déduire une marge de crédit par référence aux conditions de négociation de titres d'émetteurs de même notation,
- le *spread* de crédit, pouvant en théorie se définir comme l'unité de marché qui rémunère les investisseurs pour le risque de défaut inhérent à tout instrument de dette non considéré comme sans risque.

Si ces deux indicateurs sont censés être proches, il n'en est rien dans la réalité du fait de plusieurs facteurs :

- l'incapacité des agences de notation à réagir en temps réel suite à un événement de crédit. L'étude de Wakeman (1998)⁵ montre que les changements de *ratings* (à la hausse comme à la baisse) ne font que refléter des informations qui sont depuis longtemps incorporées dans le prix des titres sur le marché ;
- la nature des *spreads* de crédit, qui subit des distorsions par des facteurs exogènes et ne constitue pas une mesure « pure » du risque de crédit.

Une première approche du risque de crédit

En première approche le risque de crédit peut-être défini comme la compensation (la prime de risque) attendue par un investisseur. Il dépend de deux paramètres :

- la probabilité de défaut de l'emprunteur,
- le taux de recouvrement R .

Prenons un cas simple permettant d'appréhender le *spread* de crédit. Nous considérons un zéro-coupon risqué d'échéance un an et de principal P . Deux cas sont possibles :

- l'émetteur fait défaut et la valeur V à l'échéance s'écrit :

$$V = P - P * (1 - R) = P * R$$
- l'emprunteur ne fait pas défaut et rembourse le principal P à l'échéance :

$$V = P$$

Il est possible d'exprimer la valeur moyenne de la position comme :

$$V_m = q * [P - P * (1 - R)] + (1 - q) * P$$

⁵ The Real Function of Bond Rating Agencies, 1998, L. Macdonald Wakeman

Où q est la probabilité de défaut à un an.

Dans un monde parfait, le *spread* de crédit (noté S) est censé compenser l'investisseur pour son risque de perte (noté X). Dans ce cadre la perte peut s'exprimer des deux manières suivantes :

- $X = P - V_m$
- $X = S * P$

Nous en déduisons une relation simple :

$$S = q * (1 - R)$$

Cette équation permet de confirmer nos intuitions sur le *spread* de crédit. Celui-ci augmente avec la probabilité de défaut et diminue quand le taux de recouvrement augmente. Ce qui explique pourquoi, pour un même émetteur, le *spread* de crédit d'une dette subordonnée est supérieur à celui d'une dette senior.

Les autres facteurs affectant le risque de crédit

S'il intègre le risque de défaut de l'émetteur, le *spread* de crédit ne peut cependant pas s'expliquer uniquement au travers de cette notion de défaut. Les travaux d'Altman (1998)⁶ sur la performance de la dette à haut rendement montrent que l'excès de rendement sur des titres risqués *corporate* par rapport aux bons du Trésor américain ne peut être entièrement justifié par l'historique de défaut de ces titres. Le *spread* de crédit est généralement influencé par d'autres composantes comme :

- l'équilibre global offre-demande sur les marchés de crédit,
- la liquidité du titre.

En 1998, la Banque des Règlements Internationaux déclara que « *l'abondance de liquidités partout dans le monde et les pressions concurrentielles associées semblent avoir retardé une reconsidération du risque de crédit par les principaux prêteurs* ». Les conditions de tarification sur le marché du crédit sont donc également dictées par l'équilibre de l'offre et de la demande. Cette situation mène structurellement à une sous-tarification du risque de crédit en période de sur-offre, et inversement.

La liquidité du titre peut également intervenir dans la détermination de la marge de crédit. En effet, la liquidité est étroitement liée à la taille et au placement de l'émission. Les investisseurs accordent généralement une prime aux émissions liquides qui leur permettent de sortir facilement de leurs positions. Au contraire, une émission obligataire placée presque entièrement auprès de particuliers se traite plus difficilement dans le marché et se négocie à un niveau de marge de crédit supérieure.

En résumé, le *spread* de crédit peut s'exprimer comme la somme de trois facteurs :

⁶ The Anatomy of the High Yield Bond Market, 1998, Edward I. Altman

$$\text{Spread de crédit} = s_{\text{défaut}} + s_{\text{marché}} + s_{\text{liquidité}}$$

Comme nous allons le voir par la suite, Solvabilité II propose dans le QIS 5 de mesurer le risque de crédit d'une obligation en évaluant sa sensibilité aux variations des *spreads* de crédit.

2.2 Mesure du risque de crédit dans le QIS 5

Comme nous l'avons vu précédemment, le risque de crédit englobe le risque de défaut et le risque de dégradation. Cette distinction est intégrée dans l'approche standard du QIS 5, puisque le premier va être mesuré au sein du sous-module *Risque de spread* (Mkt_{sp}) contenu dans le module de *Risque de Marché*, tandis que l'autre va être mesuré via le module *Risque de défaut* (SCR_{def}). Ce dernier module prend en compte les produits tels que les CDS, les contrats de réassurance, les dépôts...

2.2.1 Le module *Risque de spread*

Le *Risque de spread* est l'un des risques les plus coûteux en immobilisation de capital au sein du *Risque de marché*. Il représente, avant effet de diversification, 30% du SCR de marché pour les entités solo et 43% pour les groupes, d'après les résultats du QIS 5 publiés par l'EIOPA.

La directive Solvabilité II définit le risque de *spread* comme la « *sensibilité de la valeur des actifs, des passifs ou des instruments financiers aux changements affectant le niveau ou la volatilité des spreads de crédit par rapport à la courbe des taux sans risque* ».

Les produits pris en compte dans le calcul de ce risque sont les suivants :

- les obligations : approche selon le *rating* et la maturité. Il est à noter que le risque de crédit associé aux obligations garanties par un Etat de l'OCDE n'est pas pris en compte, ce qui revient à les considérer comme sans risque.
- les produits structurés de crédit (ABS, CDO,...) : approche selon le *rating* et la maturité des actifs sous-jacents.
- les dérivés de crédit (CDS, CLN,...) : approche basée sur des scénarios de risques.

Pour chacune de ces trois catégories, un montant de capital nécessaire à la couverture est déterminé. L'exigence en capitaux pour le risque de *spread* correspond à la somme de ces montants :

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cd}$$

Notre étude concerne un portefeuille obligataire, nous allons donc nous restreindre à la présentation du calcul du risque de *spread* pour les obligations (Mkt_{sp}^{bonds}). Le risque de *spread* pour les dérivés de crédit (Mkt_{sp}^{cd}) sera présenté en partie V.

2.2.2 Exigence en capitaux propres pour les obligations *corporate*

La formule permettant le calcul du montant en capital exigé est la suivante :

$$Mkt_{sp}^{bond} = \sum_i VM_i * duration_i * F^{up}(rating_i)$$

VM_i est la valeur de marché de l'obligation i . Pour la valorisation des actifs, Solvabilité II se base sur les nouvelles normes comptables IFRS, qui comptabilisent les actifs en valeur de marché et non plus en valeur historique comme c'était le cas jusqu'à présent en comptabilité française.

$duration_i$ est la duration de l'obligation i . Il existe un plancher (ou *floor*) de un an et un plafond (ou *cap*) qui dépend du rating de l'obligation. Ce *cap* a été mis en place afin d'éviter que les capitaux réglementaires nécessaires à la couverture des obligations ne soient pas trop importants, voire ne dépassent leur valeur de marché.

$F^{up}(rating_i)$ est un facteur multiplicatif calibré pour simuler un choc sur la valeur de marché des obligations, équivalent à un élargissement ou à un resserrement des *spreads* de crédit dont la probabilité d'occurrence serait inférieure à 0.5%. Le but est d'obtenir une estimation de la $Var_{99,5\%}$ du portefeuille d'obligations.

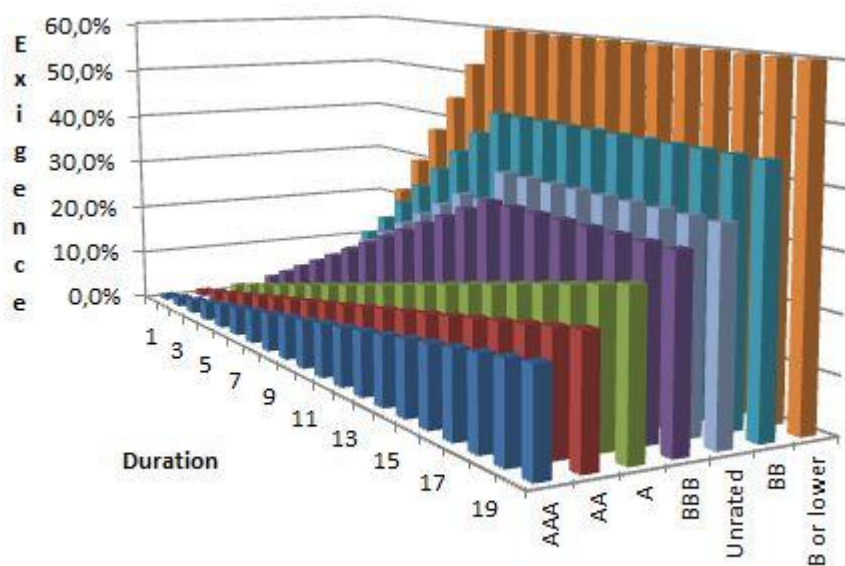
	F^{up}	Duration Floor	Duration Cap
AAA	0,9%	1	36
AA	1,1%	1	29
A	1,4%	1	23
BBB	2,5%	1	13
BB	4,5%	1	10
B or lower	7,5%	1	8
Unrated	3,0%	1	12

FIGURE 2.4 – Facteur multiplicatif, *duration floor* et *duration cap* des *spreads* de crédit⁷

Afin de mieux appréhender cette formule, prenons un exemple simple. Nous considérons une obligation notée AA et une obligation notée BBB. L'exigence en capital de l'obligation AA sera de 11% et celle de l'obligation BBB 25%.

Le graphique suivant illustre de manière plus exhaustive le volume de fonds propres nécessaires en fonction de la duration et du *rating* des obligations.

⁷ Technical specification for QIS 5, European Commission, Février 2011

FIGURE 2.5 – Exigence en capital pour une obligation *corporate*

Il faut préciser que la formule de calcul du SCR d'un portefeuille d'obligations présentée ici ne couvre que le risque de crédit. Les risques de taux et de liquidités par exemple sont traités par la formule standard au sein des modules correspondant. La diversification du portefeuille n'est également pas prise en compte ici ; elle est évaluée dans le sous-module *Risque de concentration*.

2.3 Prise en compte du risque de défaut

Dans le cadre de Solvabilité II, l'évaluation du risque de crédit des obligations se fait en *marked-to-market* : l'approche repose sur l'estimation de la variation de la valeur de marché suite à un choc sur les *spreads* de crédit. Nous allons montrer que cette approche comporte une limite : elle ne tient pas compte du risque de défaut.

Nous reprenons la décomposition du *spread* de crédit vu précédemment, en ne tenant pas compte du terme sur la liquidité car ce terme est déterminé au sein d'un autre module :

$$\text{spread de crédit} = S_{\text{défaut}} + S_{\text{marché}}$$

Comme nous l'avons vu dans la partie 2.1.4, le *spread* de défaut ($S_{\text{défaut}}$) s'exprime en fonction de la probabilité de survie et du taux de recouvrement. De plus, le choc s'effectue à classe de risque constante et la probabilité de défaut (et donc de survie) n'est pas modifiée. Le taux de recouvrement reste également constant.

Nous comprenons donc que la variation de *spreads* de défaut sera nulle : le choc n'impacte que la composante de marché.

Cette méthode apparaît donc insuffisante pour un assureur cherchant à mesurer son risque de crédit. C'est pourquoi nous allons par la suite mettre en place un modèle permettant l'estimation de ce risque.

Deuxième partie

La modélisation du risque de défaut

Chapitre 3

Les différents modèles de risque de crédit

Le but de ce chapitre est de choisir un modèle de calcul de risque de crédit parmi ceux existants sur le marché. Le domaine bancaire ayant déjà été soumis à la réforme réglementaire Bâle II, il existe plusieurs modèles de risque de crédit provenant de ce domaine.

Bâle II s'inscrit dans une démarche mondiale de réglementation de la profession bancaire. L'objectif est de prévenir les faillites par une meilleure adéquation entre fonds propres et risques encourus. Pour répondre à cet objectif, les accords de Bâle II fixent des règles pour une meilleure évaluation des risques. Les normes de Bâle II doivent remplacer les normes mises en place par Bâle I en 1988 et visent notamment à la mise en place du ratio de McDonough – le nouveau ratio de solvabilité – destiné à remplacer le ratio de Cooke.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les différents modèles de calcul de capital économique mis en place par les banques afin d'orienter notre choix vers un modèle pertinent de mesure du risque de défaut. Les méthodes utilisées dans ces différents modèles sont assez similaires, nous allons donc les comparer afin de sélectionner le plus adapté.

Afin de benchmarker le modèle de risque que nous retiendrons, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Vasicek, sur lequel repose la formule standard de risque de crédit de Bâle II (méthode IRB). Ce modèle présente l'avantage d'être assez simple à mettre en œuvre.

Dans un premier temps, nous rappellerons les problématiques inhérentes à l'estimation des paramètres de défaut, puis nous détaillerons le modèle de Vasicek. Et enfin, nous présenterons les trois principaux modèles de mesure de risque de crédit utilisés sur le marché : *PortfolioManager*, *CreditMetrics* et *CreditRisk* +.

3.1 Les notions du défaut

Nous allons dans un premier temps donner une définition du défaut.

3.1.1 Définition du défaut

La notion de défaut d'une entreprise ne touche pas seulement au non-paiement de ses coupons ou de son principal. Le Comité de Bâle fournit une définition du défaut :

« Un défaut de la part d'un débiteur intervient lorsque l'un des deux événements ci-dessous se produit, sinon les deux :

- La banque estime improbable que le débiteur rembourse en totalité son crédit au groupe bancaire sans qu'elle ait besoin de prendre des mesures appropriées telles que la réalisation d'une garantie (si elle existe).
- L'arriéré du débiteur sur un crédit important dû au groupe bancaire dépasse 90 jours. Les découverts sont considérés comme des créances échues dès que le client a dépassé une limite autorisée ou qu'il a été averti qu'il disposait d'une limite inférieure à l'encours actuel. »

De plus, le Comité précise les éléments pouvant être considérés comme des signes indiquant que l'engagement ne sera probablement pas honoré : «

- la banque attribue à une exposition le statut de créance en souffrance ;
- la banque comptabilise une annulation ou constitue une provision spécifique après avoir constaté une détérioration significative de la qualité de crédit par rapport à l'ouverture de l'exposition ;
- la banque cède la créance en enregistrant une perte économique importante ;
- la banque autorise la restructuration forcée de la créance, impliquant le plus souvent une réduction de l'engagement financier du fait de l'annulation, ou du report, d'une part importante du principal, des intérêts ou, le cas échéant, des commissions ;
- la banque demande la mise en faillite du débiteur ou l'application d'une mesure similaire au titre de son obligation vis-à-vis du groupe bancaire ;
- le débiteur demande à être mis en faillite ou sous protection similaire, pour éviter ou retarder le remboursement de son obligation vis-à-vis du groupe bancaire. »

Avec cette définition, nous comprenons qu'un titre peut être jugé douteux si les pertes sont avérées, mais également si les pertes sont fortement probables. Une contrepartie peut donc être mise en défaut et ne pas engendrer de perte dans le futur. Les paramètres de défaut tiennent compte de cette distinction entre défaut et pertes avérées.

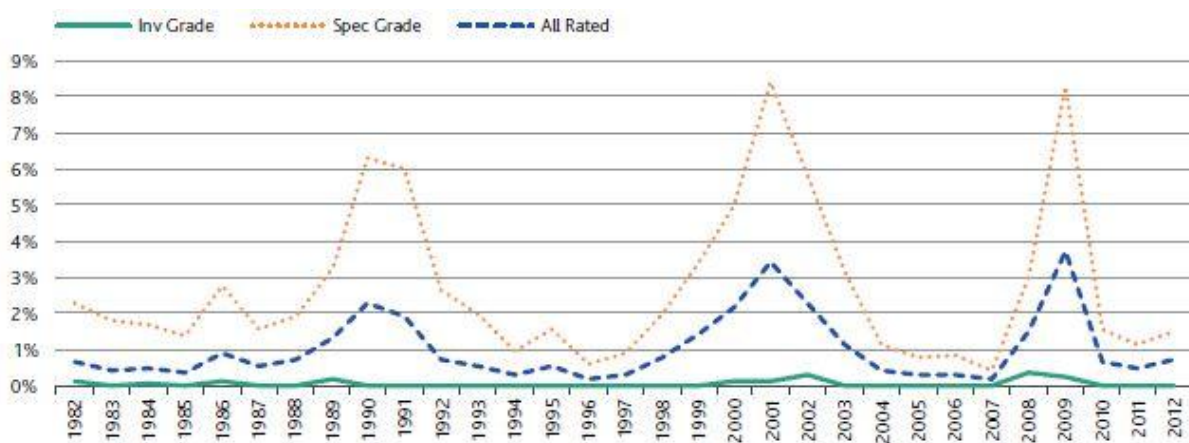
3.1.2 Paramètres de défaut

Nous allons ici présenter les différents paramètres nécessaires à la mesure du défaut : la probabilité de défaut, l'exposition au défaut et la perte en cas de défaut.

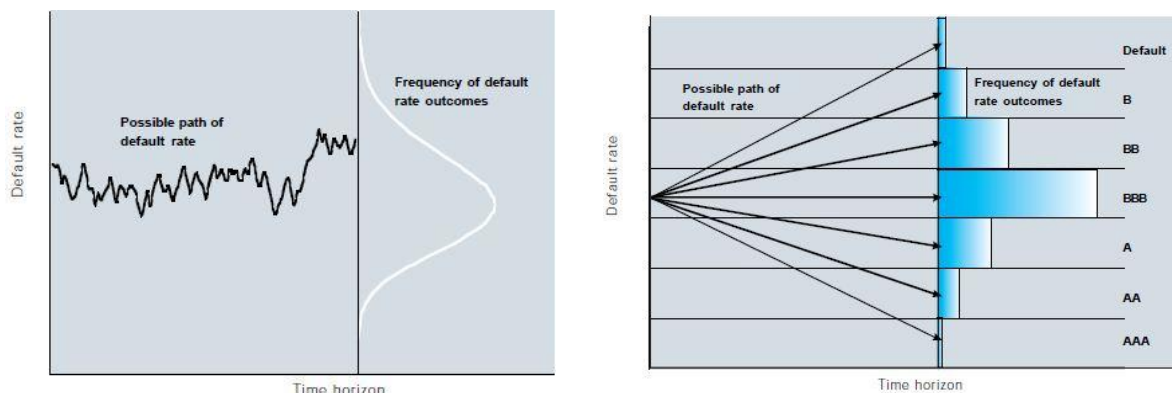
Probabilité de défaut

La probabilité de défaut d'une contrepartie est la probabilité que cette contrepartie fasse défaut à un horizon de temps donné. Généralement, un horizon de un an est retenu.

En parcourant les rapports annuels des agences de notation, nous remarquons que ces probabilités de défaut sont sensibles aux cycles économiques. En effet, en période de récession, les taux de défaut sont plus élevés. Le graphe suivant illustre cette sensibilité en distinguant les entreprises suivant leur *rating*.

FIGURE 3.1 – Evolution des taux de défaut en fonction du rating⁸

En analysant le graphique, il paraît judicieux de modéliser la probabilité de défaut par une variable aléatoire. Celle-ci pourra être représentée de deux manières : soit comme une variable aléatoire continue, à laquelle on associera une distribution qui sera spécifiée par un taux de défaut moyen et une volatilité de taux de défaut, soit comme une variable aléatoire discrète. Cette approche, plus simple, se fait en associant à une probabilité de défaut un rating d'agence ainsi qu'une matrice de transition à horizon fixé.

FIGURE 3.2 – Modélisation continue ou discrète du taux de défaut⁹

⁸ Annual Default Study : Corporate Default and REcovery Rates, 1920-2012, 2013, Moody's

⁹ CreditRisk+, Credit Suisse

Rating as of first of month	#	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-	CC	SD
AAA	4,878	88.2	6.0	2.0	2.0	0.0	0.1	0.1	0.6	0.0	0.1	0.0	1.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
AA+	1,280	30.2	47.6	17.4	4.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
AA	972	10.4	23.7	38.9	15.8	6.7	3.6	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
AA-	586	1.2	17.6	34.5	17.9	6.7	8.2	2.1	1.4	3.1	5.5	0.0	2.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
A+	567	0.0	4.2	12.4	30.9	17.8	13.8	2.3	2.8	6.9	6.7	1.9	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
A	1,117	0.0	0.0	2.0	12.4	26.4	36.6	8.8	1.2	4.5	4.2	1.6	0.2	0.2	0.0	0.3	0.0	0.1	0.1	0.0	0.6	
A-	945	0.0	0.0	0.0	3.7	6.7	36.3	27.8	11.5	4.9	5.4	1.9	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
BBB+	533	0.0	0.0	0.0	0.4	7.1	12.6	33.2	21.4	14.1	6.8	4.1	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
BBB	774	0.0	0.0	0.0	0.0	7.1	14.0	20.2	18.6	23.6	8.1	0.9	1.0	0.0	0.0	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	3.9	
BBB-	1,089	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	5.2	13.3	19.7	21.6	17.4	9.6	4.8	0.1	0.0	0.7	0.5	0.9	0.2	0.0	5.5	
BB+	891	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.1	3.7	3.0	13.5	20.8	21.0	26.8	8.1	0.3	1.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.5	
BB	1,036	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.8	2.8	16.7	22.8	37.9	5.3	5.0	1.2	0.0	0.0	0.0	1.2	4.2	
BB-	884	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.8	0.0	5.1	9.7	33.8	10.6	12.8	5.4	8.4	0.0	0.0	0.0	12.0	
B+	908	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.9	1.3	6.1	3.0	3.3	14.4	24.3	20.3	12.6	1.7	0.2	0.0	10.5	
B	875	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.3	2.4	1.0	2.1	18.4	17.6	23.7	4.8	1.9	0.3	0.7	15.7	
B-	489	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.2	1.8	2.5	2.3	14.9	24.5	19.4	18.6	3.1	0.0	0.0	11.7	
CCC+	112	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	7.1	0.0	0.0	14.3	8.0	8.9	0.9	60.7	
CCC	42	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	40.5	0.0	0.0	0.0	0.0	59.5	
CCC-	20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100.0	
CC	19	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100.0	

FIGURE 3.3 – Exemple de matrice de transition¹⁰

Exposition au défaut (*Exposure At Default*)

L'exposition en cas de défaut (EAD) est l'exposition encourue par un créancier en cas de défaut de son débiteur. Dans le cas d'une obligation, elle correspond au montant de nominal qui ne sera pas remboursé. Dans le cas de produits plus complexes comme les produits dérivés ce montant est plus difficile à déterminer.

Perte en cas de défaut (*Loss Given Default*)

Lors du défaut d'une contrepartie, le recouvrement de la dette, qui prime sur la rémunération des actionnaires, s'effectue sur l'actif de l'entreprise en défaut. Le recouvrement portera sur le principal et les intérêts après déduction du montant des garanties préalablement recueillies. Le taux de recouvrement ou *recovery rate* (RR) se définit donc comme le pourcentage de dette qui a pu être remboursée lors du défaut. La perte en cas de défaut (LGD) correspond au montant de la dette qui n'a pu être récupérée :

$$LGD = 1 - RR$$

Plusieurs facteurs influent sur la détermination de RR : la séniorité de la dette, le collatéral, le type d'emprunteurs (souverain, entreprise), la zone géographique,...

Le graphique suivant présente un historique des taux de recouvrement observés suivant la séniorité de la dette (Moody's 2013) :

¹⁰ Sovereign Defaults and Rating Transition Data, 2013, Standard and Poor's

Lien Position	Issuer-weighted		
	2012	2011	1982-2012
1st Lien Bank Loan	67.0%	70.9%	66.0%
2nd Lien Bank Loan*	17.4%	68.3%	29.8%
Sr. Unsecured Bank Loan*	n.a.	23.1%	47.1%
Sr. Secured Bond	51.2%	63.4%	51.6%
Sr. Unsecured Bond	43.4%	39.7%	37.0%
Sr. Subordinated Bond	29.7%	36.7%	30.9%
Subordinated Bond	35.4%	35.4%	31.5%
Jr. Subordinated Bond	n.a.	n.a.	24.7%

FIGURE 3.4 – Exemple de taux de recouvrement suivant la séniorité de la dette ¹¹

3.1.3 Indicateurs de risque d'une distribution de pertes

Avec les trois paramètres présentés précédemment (probabilité de défaut, exposition au défaut et perte en cas de défaut), nous pouvons déterminer une distribution des pertes du portefeuille. Il faut pour cela prendre aussi en compte les corrélations entre les différentes expositions afin d'intégrer d'éventuels effets de diversification.

Une fois cette distribution de pertes obtenue, il convient ensuite de mesurer le risque du portefeuille. Nous disposons pour cela de différents indicateurs de risques comme la *Value-At-Risk* (VaR), des mesures de pertes attendues ou inattendues.

La *Value-At-Risk*

La VaR au niveau α et à horizon h correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité de $\alpha\%$ sur un horizon h . Elle correspond donc au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution des pertes du portefeuille à horizon h :

$$VaR_h(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} | P(\text{pertes} \leq x) \geq 1 - \alpha\}$$

¹¹ Sovereign Defaults and Rating Transition Data, 2013, Standard and Poor's

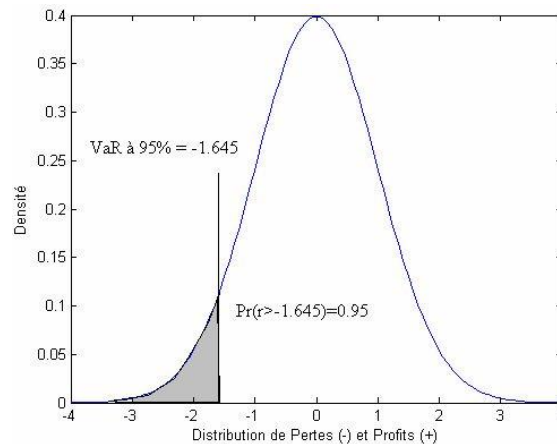


FIGURE 3.5 – Value-At-Risk d'une distribution normale centrée réduite

La VaR est fonction de trois paramètres : la distribution des gains et pertes du portefeuille, le niveau de confiance et l'horizon. Lorsque le niveau de confiance augmente, le nombre d'occurrences au-delà de la VaR diminue, ce qui réduit la qualité de la mesure.

L'une des principales critiques que l'on peut faire à la VaR est que la distribution de perte du portefeuille n'est pas forcément normale. De plus, il s'agit d'une fonction non convexe, ce qui fait que fusionner deux portefeuilles ne réduit pas forcément le risque (fonction non sous-additive).

Expected Shortfall

La perte anticipée ou *expected shortfall* (ou CVaR) est définie comme la moyenne des pertes au-delà d'un niveau de confiance donné. L'*expected shortfall* au niveau α correspond donc à l'espérance conditionnelle de la perte sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau $1 - \alpha$:

$$ES_h(\alpha) = E(\text{pertes} | \text{pertes} > VaR_h(\alpha))$$

Expected Loss

Les pertes attendues ou *expected loss* représentent l'espérance de pertes associées au portefeuille sur un horizon h . Il s'agit de la perte agrégée moyenne à laquelle le gérant doit raisonnablement s'attendre sur l'horizon h . Cette espérance s'exprime en fonction des trois paramètres décrits dans le paragraphe précédent :

$$EL_h = \sum_i PD_{i,h} * LGD_i * EAD_i$$

Unexpected Loss

Les pertes inattendues ou *unexpected loss* caractérisent l'incertitude afférente à une situation sans laquelle les pertes effectives peuvent très bien dépasser les pertes attendues. Elles se calculent de la manière suivante :

$$UL_h(\alpha) = VaR_h(\alpha) - EL_h$$

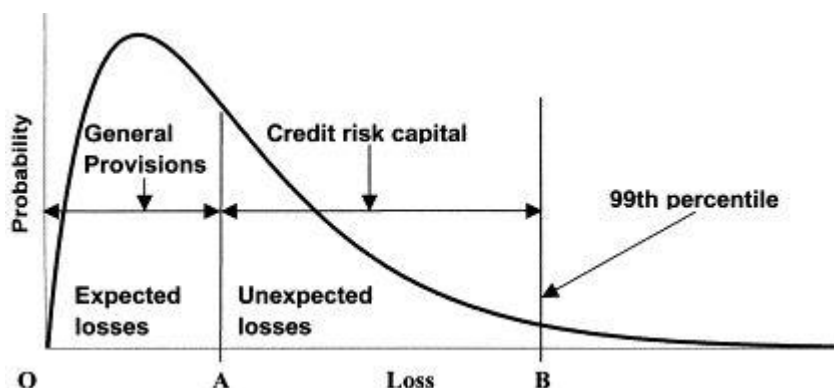


FIGURE 3.6 – Illustration des concepts d'*expected loss* et *unexpected loss*

Nous allons à présent étudier les différents modèles de risque de défaut. Nous commencerons par le modèle de Vasicek.

3.2 Modèle de Vasicek

Le modèle de risque de crédit retenu dans le projet Bâle II repose sur le modèle de Vasicek. Ce modèle met en relation de manière assez simple les différents paramètres présentés auparavant. Il apparaît donc comme un choix adapté de *benchmarking* du modèle que nous allons retenir.

3.2.1 Méthodes proposées par Bâle II

Trois choix sont offerts aux banques en matière de gestion du risque de crédit selon Bâle II : l'approche standard, l'approche par les notations internes ou *Foundation Internal Ratings Based Approach* (IRBF) et l'approche IRB avancée ou *advanced IRB Approach* (IRBA). Ces trois approches reposent sur la formule standard, fondée sur le modèle de Vasicek et fournie par le régulateur et permettant de calculer l'exigence de marge en fonds propres.

La différence entre ces trois méthodes est l'implication des institutions financières dans le calcul des paramètres. Dans l'approche standard, les paramètres sont directement issus d'organismes externes. Avec les approches IRBF et IRBA, les banques ont en revanche la possibilité de produire certains paramètres à partir de données internes. Elles fournissent ainsi les probabilités de défaut en IRBF et bénéficient de plus de liberté en IRBA en produisant les paramètres suivant :

- la probabilité de défaut p_i à un an pour chaque contrepartie i du portefeuille,
- la perte en cas de défaut LGD_i associée à l'exposition de chaque contrepartie i ,
- l'exposition au moment du défaut EAD_i de chaque contrepartie,
- la maturité M_i de chaque exposition.

Le modèle de Vasicek permet ensuite d'obtenir la distribution de pertes du portefeuille. Celle-ci repose sur le modèle de Merton, que nous allons détailler maintenant.

3.2.2 Le modèle de Merton

L'approche structurelle du risque de crédit est fondée sur les méthodes d'évaluations des options mises en place par Black et Scholes (1973) et Merton (1974). Ils'agit d'une approche relativement intuitive dans la mesure où le risque de crédit encouru par le détenteur d'une obligation est directement relié à la structure économique de la firme : le défaut intervient dès que la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée.

Le bilan de la firme est synthétisé de la manière suivante :

ACTIF	PASSIF
Actif V_t	Actions E_t Dettes D_t

FIGURE 3.7 – Bilan simplifié de la firme dans le modèle de Merton

Dans ce modèle, V_t et E_t sont des processus aléatoires dépendants du temps. La dette de la firme D_t est supposée indépendante du temps. On se place dans un premier temps à l'échéance de la dette T . A cette date, le défaut de la firme est déclaré si la valeur des actifs est inférieure à une certaine barrière qui correspond à la valeur de la dette.

A la date T , deux cas se présentent :

- Si la valeur de l'actif de la firme est inférieure à la valeur de la dette, c'est-à-dire si $V_T < D$, le défaut est déclaré. Le droit des faillites stipule que les actifs de la firme deviennent la propriété des créanciers qui récupèrent donc la valeur V_T . Les actionnaires perdent la totalité des sommes investis en fonds propres.
- En revanche, si la valeur de l'actif de la firme est supérieure au montant de sa dette, la totalité de la dette est remboursée et l'excédent revient aux actionnaires sous forme de dividendes.

Nous en déduisons qu'à l'échéance T , la valeur des actions est : $E_T = (V_T - D)^+$

Ce résultat peut s'étendre à tout instant $t \leq T$: $E_t = (V_t - D)^+$

Afin de déterminer la valeur probable de E_t , il faut spécifier le processus suivi par l'actif de la firme (V_t). Merton utilise la dynamique suivante :

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Où W est un mouvement brownien, μ est le rendement de l'actif et σ sa volatilité.

Sous ces hypothèses, on peut obtenir une probabilité de défaut p à horizon t :

$$p_t = \mathbb{P}(V_t < D)$$

Où $\mathbb{P}$ est la probabilité de défaut historique.

Grâce à la formule de Black et Scholes sur les options, cette relation s'évalue de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(V_t - D) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{D}{V_0}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Les limites de ce modèle sont nombreuses du fait des hypothèses simplificatrices posées (valeur constante de la dette et définition du défaut notamment) et du calibrage des paramètres, mais il permet de relier le défaut d'une firme à son activité économique et est progressivement devenu l'une des principales références de modélisation du risque de crédit.

3.2.3 Le modèle de Vasicek sous l'hypothèse de granularité infinie du portefeuille

Dans l'approche standard, le risque de crédit comporte deux composantes : le risque systémique et le risque idiosyncratique. Le risque systémique représente l'impact de phénomènes extérieurs sur les performances des contreparties (marché, activités économiques,...). Cette source de risque est commune à l'ensemble des contreparties, mais certaines y seront plus sensibles que d'autres. Le risque idiosyncratique représente le risque spécifique à chaque contrepartie (secteur d'activité, zone géographique,...).

Le modèle retenu pour la formule standard de Bâle II ne prend pas en compte la distribution des risques idiosyncratiques car ce modèle fait l'hypothèse d'infinie granularité du portefeuille, c'est-à-dire :

- qu'il est composé d'un grand nombre de contreparties,
- que la valeur de chaque exposition est négligeable devant l'exposition totale du portefeuille.

Modélisation du défaut

Soit un portefeuille composé de n contreparties. Le modèle Bâle II se place dans une approche *Default Only* : les dégradations de crédit ne sont pas prises en compte. Seuls les défauts sont comptabilisés. De la même manière que le modèle de Merton, une contrepartie i sera en défaut si son rendement R_i passe en dessous d'un certain seuil, noté γ_i .

Soit D_i l'indicatrice de défaut de la contrepartie i . Conditionnellement au risque systémique noté G , les indicatrices suivent des lois de Bernoulli de paramètres $p_i(G)$. Nous avons par définition :

$$\mathbb{E}(D_i|G) = p_i(G) \text{ et } \mathbb{V}(D_i|G) = p_i(G)(1 - p_i(G))$$

Le modèle fait l'hypothèse que les défauts ne sont pas indépendants. En effet, la corrélation des rendements au facteur G induit une dépendance entre les différentes indicatrices.

Modélisation du rendement de l'actif

Soit G la variable aléatoire modélisant le risque systémique. Conditionnellement à la réalisation de G , le rendement des actifs de chaque contrepartie est modélisé par :

$$\forall i \in [1; n] \quad R_i = \sqrt{\rho_i}G + \sqrt{(1 - \rho_i)}\varepsilon_i$$

Où ρ_i est la sensibilité de la firme i au risque systémique et ε_i est le facteur de risque idiosyncratique. Les variables aléatoires G et ε_i sont supposées indépendantes, de loi $N(0,1)$. La probabilité de défaut conditionnelle $p_i(G)$ vaut donc :

$$\begin{aligned} p_i(G) &= \mathbb{E}(D_i|G) \\ &= \mathbb{P}(R_i < \gamma_i|G) \\ &= \mathbb{P}\left(\varepsilon_i < \frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i}G}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \\ p_i(G) &= \Phi\left(\frac{\gamma_i - \sqrt{\rho_i}G}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \end{aligned}$$

De plus, la probabilité inconditionnelle de défaut $\bar{p}_i$ vaut :

$$\bar{p}_i = \mathbb{P}(R_i < \gamma_i) = \Phi(\gamma_i)$$

Dans le cadre IRB, la probabilité de défaut $\bar{p}_i$ est fournie par les banques à l'aide d'une échelle interne de ratings par exemple. La barrière γ_i se déduit de ce paramètre :

$$\gamma_i = \Phi^{-1}(\bar{p}_i)$$

Nous en déduisons l'expression de la probabilité de défaut conditionnelle au facteur systémique :

$$p_i(G) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_i) - \sqrt{\rho_i}G}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right)$$

Calcul des pertes attendues du portefeuille

Soit L la perte inconditionnelle du portefeuille :

$$L = \sum_{i=1}^n EAD_i * LGD_i * 1_{R_i \leq \gamma_i}$$

Deux hypothèses sont posées :

- les événements de défaut des contreparties, conditionnellement au facteur de risque G sont supposés deux à deux indépendants,
- les pertes en cas de défaut (LGD) sont des variables aléatoires admettant une espérance et une variance indépendantes des événements de défaut.

Soient μ_i l'espérance de la perte en cas de défaut de la contrepartie i (LGD_i) et σ_i sa variance. Sous ces hypothèses, la valeur espérée des pertes du portefeuille conditionnellement à G s'écrit :

$$\mathbb{E}[L|G] = \sum_{i=1}^n EAD_i * \mathbb{E}[LGD_i] * \mathbb{E}[D_i|G]$$

$$\mathbb{E}[L|G] = \sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_i) - \sqrt{\rho_i}G}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

De même, la variance de la distribution des pertes vaut :

$$\mathbb{V}[L|G] = \sum_{i=1}^n EAD_i^2 * (\mu_i^2 * p_i(G)(1 - p_i(G)) + \sigma_i^2 * p_i(G))$$

Sous l'hypothèse d'infinie granularité du portefeuille, la variance des pertes conditionnelles tend vers zéro. La démonstration en est fournie par T. Wilde (*IRB Approach Explained*) : nous approchons le portefeuille infiniment granulaire de la façon suivante :

Le portefeuille initial de n contreparties est remplacé par un portefeuille équivalent, où chacune des n expositions est remplacée par m expositions indépendantes de valeur $\frac{EAD_i}{m}$, de perte en cas de défaut LGD_i et de probabilité de défaut inconditionnelle p_i . Soit L_n les pertes de ce portefeuille équivalent. Nous avons :

$$\mathbb{E}[L_n|G] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{EAD_i}{m} * \mathbb{E}[LGD_i] \right) * \mathbb{E}[D_i|G]$$

$$\mathbb{E}[L_n|G] = \mathbb{E}[L|G]$$

Et par ailleurs,

$$\mathbb{V}[L_n|G] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{EAD_i^2}{m^2} \right) * (\mu_i^2 * p_i(G)(1 - p_i(G)) + \sigma_i^2 * p_i(G))$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n EAD_i^2 * (\mu_i^2 * p_i(G)(1 - p_i(G)) + \sigma_i^2 * p_i(G))$$

$$\mathbb{V}[L_n|G] = \frac{1}{m} \mathbb{V}[L|G]$$

Lorsque n tend vers l'infini, le portefeuille devient infiniment granulaire. En effet, il est alors constitué d'une infinité de contreparties, d'expositions négligeables devant l'exposition totale. La variance de ce portefeuille tend vers zéro. Nous en déduisons que les pertes conditionnelles du portefeuille infiniment granulaire sont déterministes, le seul aléa étant porté par le facteur de risque systémique :

$$L_n|G \sim \mathbb{E}[L_n|G]$$

Nous en déduisons que le quantile d'ordre α des pertes inconditionnelles du portefeuille peut s'écrire simplement. En posant :

$$\phi_{i,G} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\overline{p}_i) - \sqrt{\rho_i} G}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L \leq x) &= \mathbb{E}[1_{L \leq x}] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[1_{L|G \leq x} | G] \right] \\ &\sim \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[1_{\mathbb{E}[L|G] \leq x} | G] \right] \\ &\sim \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[1_{\sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \phi_{i,G} \leq x} | G \right] \right] \\ \mathbb{P}(L \leq x) &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \phi_{i,G} \leq x \right) \end{aligned}$$

Or la fonction $g \rightarrow \phi_{i,g}$ est strictement décroissante car la fonction de répartition de la loi normale est strictement croissante et que les coefficients $(\rho_i)_i$ sont strictement positifs. Notons $q_{1-\alpha}(G)$ le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la variable G . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(L \leq \sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \phi_{i,q_{1-\alpha}(G)} \right) &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n EAD_i * \mathbb{E}[LGD_i] * \phi_{i,G} \leq \sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \phi_{i,q_{1-\alpha}(G)} \right) \\ &= \mathbb{P}(G \geq q_{1-\alpha}(G)) \\ \mathbb{P} \left(L \leq \sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \phi_{i,q_{1-\alpha}(G)} \right) &= \alpha \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression du quantile d'ordre α de la distribution des pertes du portefeuille :

$$q_{\alpha}(L) = \sum_{i=1}^n EAD_i * \mu_i * \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}_i) - \sqrt{\rho_i} \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right)$$

Cette formule traduit un résultat essentiel : le risque du portefeuille, ici modélisé grâce au quantile q_{α} , s'exprime comme une somme linéaire des contributions au risque de chaque actif. Cela a des conséquences directes, notamment dans la gestion du risque du portefeuille, puisqu'il est alors possible de mesurer la contribution marginale de chaque exposition au risque du portefeuille. Cependant, ce résultat repose sur une hypothèse très forte d'infinie granularité, qui peut être mise en défaut dans la pratique.

3.2.4 Les corrélations

Le Comité de Bâle a mis en place une formule permettant de mesurer la sensibilité de chaque contrepartie au climat économique global (risque systémique). En effet, il est nécessaire d'estimer ces corrélations pour chacune des contreparties car cette corrélation dépend du secteur d'activité, de la santé financière de la contrepartie,...

Il a été retenu pour les corrélations ρ_i une formule dépendant des probabilités moyennes de défaut à un an, de manière à ce qu'elles soient comprises entre 12% et 24% :

$$\rho_i = 12\% * \left(\frac{1 - \exp(-50 * \bar{p}_i)}{1 - \exp(-50)} \right) + 24\% * \left(1 - \frac{1 - \exp(-50 * \bar{p}_i)}{1 - \exp(-50)} \right)$$

La méthodologie retenue par le Comité de Bâle permet donc de mesurer les besoins réglementaires en fonds propres des banques au titre de leur risque de crédit. Parallèlement, le régulateur encourage au sein du Pilier 2 une meilleure gouvernance des risques suivis dans le Pilier 1 : le calcul d'un capital économique doit notamment permettre une meilleure adéquation des fonds propres avec le profil risque spécifique à chaque banque.

3.3 Différents modèles de mesure de risque de crédit

Les accords de Bâle II autorisent les banques à développer leur propre modèle interne de mesure du risque de crédit. Ce modèle ne doit pas seulement être un outil de calcul : il doit également servir d'outil de décision stratégique.

Une étude menée par l'ISDA (*Convergence of Credit Capital Models*, Février 2006) fait ressortir que la quasi-totalité des institutions financières ayant opté pour un modèle interne utilisent soit l'un des trois principaux modèles commercialisés sur le marché, soit un modèle dérivé d'un de ces trois modèles. Ces trois principaux modèles sont les suivants :

- CreditRisk⁺, développé par Credit Suisse.
- CreditMetrics, développé par RiskMetrics Group, filiale de JP Morgan,
- Portfolio Manager, développé par KMV pour Moody's.

A l'origine, ces modèles ont été développés pour les besoins de leurs concepteurs, puis ont été commercialisés par la suite. Les spécifications techniques de CreditRisk⁺ et CreditMetrics sont publiques. Cependant, le modèle Portfolio Manager étant toujours vendu par Moody's, ses spécifications ne sont pas disponibles.

Nous allons maintenant présenter les grands principes de ces trois modèles puis nous les comparerons afin d'en retenir un.

3.3.1 CreditRisk⁺

Le modèle CreditRisk⁺ apparaît comme une alternative aux deux autres modèles car il est fondé sur une approche analytique. Cela signifie que la distribution des pertes n'est plus approchée par simulation, mais qu'elle est obtenue de manière exacte via une formule fermée. Le modèle considère le taux de défaut comme une variable aléatoire continue. La prise en compte d'une volatilité du taux de défaut associée à une analyse par secteur permettent de rendre compte à la fois de l'incertitude du niveau de défaut et des éventuels corrélations existantes entre plusieurs obligations.

Les événements de défaut sont supposés indépendants, ce qui permet de modéliser la fonction génératrice de la distribution du nombre de défauts à l'aide de calculs simples. La distribution des pertes du portefeuille est ensuite obtenue sur la base d'hypothèses simplificatrices, notamment des taux de pertes en cas de défauts constants et des expositions discrétisées.

3.3.2 CreditMetrics

CreditMetrics permet de mesurer la variation de valeur en *marked-to-market* d'un portefeuille obligataire à la suite de défauts ou de dégradations des notes des émetteurs. Ce modèle tient donc compte des risques de défauts et de *downgrading*. C'est un modèle structurel et simulateur qui permet d'approcher la distribution des pertes du portefeuille.

Ce modèle nécessite la connaissance de probabilité de défaut et de matrice de transition. Ces paramètres sont obtenus à partir de données historiques fournies par les agences de notation. A chaque état du monde correspondant à un *rating* atteignable, est associé le prix de l'obligation dans cet état du monde. Il s'agit donc de disposer de la courbe de taux sans risque et des courbes de taux *forward* suivant le rating. On obtient alors la distribution des variations de valeur pour ce titre.

3.3.3 Portfolio Manager

Le modèle Portfolio Manager ou KMV permet d'obtenir la distribution des pertes d'un portefeuille suite au défaut d'émetteurs de dette. C'est un modèle structurel et simulateur.

En effet, de la même manière que le modèle de Merton présenté auparavant, Portfolio Manager repose sur la structure économique et financière des entreprises. Le rendement de l'actif des entreprises est modélisé via un modèle à un facteur de risque, et le défaut est déclaré lorsque la valeur de l'actif devient inférieure à celle de la dette. L'une des spécificités du modèle consiste à introduire la notion de distance au défaut ou *distance-to default*. Celle-ci est calculée au regard de la barrière qui déclenche de défaut.

Une fois ce paramètre obtenu pour chaque émetteur, il est traduit en termes de probabilités de défaut à horizon de temps fixé ou *expected default frequency*. C'est l'un des principaux avantages du modèle, puisque cette probabilité ne repose pas sur les données des agences de notation.

La structure de dépendance entre les actifs est traduite par les corrélations entre entreprises du même pays et du même secteur via la modélisation factorielle des rendements d'actifs. La loi jointe des rendements d'actifs, supposée normale, est simulée afin d'obtenir un vecteur de probabilité de défaut. Parallèlement, un vecteur de pertes en cas de défaut est également simulé. En associant ces deux paramètres, nous obtenons le montant de pertes associées. Ce processus est itéré un grand nombre de fois afin d'obtenir une distribution de pertes, qui permet ensuite de calculer les pertes attendues ainsi que les quantiles.

3.3.4 Comparaison des trois modèles

Les principales différences entre ces trois modèles sont les suivantes :

- l'approche : analytique ou simulateur,
- la modélisation : structurelle ou non,
- la prise en compte ou non du risque de migration de *ratings*.

Comme nous pouvions nous y attendre, chacun des trois modèles présente des avantages et des inconvénients.

Portfolio Manager, en introduisant la notion de distance au défaut, permet de rendre le modèle plus sensible au marché. Il distingue de plus les entreprises par leur structure et leur taille grâce au modèle de Merton. Cependant, le modèle reste simpliste dans sa modélisation de la dette par des zéro-coupons : une hypothèse peu réaliste. De plus, le modèle peut être difficile à mettre en place car il nécessite de nombreuses données en entrée comme la structure de la dette et de l'actif.

Le principal avantage de CreditMetrics est qu'il prend en compte les deux risques de crédit : défaut et changement de notation. Néanmoins, le modèle se repose sur des matrices de transition qui ne permettent pas de prendre en compte les particularités de chaque entreprise : une grande entreprise aura les mêmes probabilités de transition qu'une entreprise plus petite pour peu qu'elles aient le même *rating*. Une autre limite du modèle tient dans l'estimation des corrélations entre actifs. En effet, ces corrélations sont estimées à partir des corrélations entre actions, ce qui reste très approximatif.

Pour finir, CreditRisk⁺ présente un gros avantage par rapport aux deux précédents modèles : sa rapidité de calcul. En effet, les deux autres modèles nécessitant un grand nombre de simulations, l'approche analytique de CreditRisk⁺ permet de produire un résultat beaucoup plus rapidement. De plus, le modèle ne nécessite que très peu de données en entrée. Toutefois, cette simplicité apporte son lot de limites. Le modèle ne spécifie pas de loi pour la perte en cas de défaut (déterministe), ce qui peut paraître contestable. De plus, le principe du modèle qui consiste à discrétiser les expositions et à les regrouper peut entraîner une perte d'informations. Enfin, il n'y a pas de relations de dépendance explicite entre les lignes du portefeuille : la seule présence de corrélations se trouve dans la prise en compte de la volatilité du taux de défaut.

L'objectif étant de produire les VaR de plusieurs portefeuilles tous les mois, l'utilisation d'un modèle rapide et simple est requise. C'est pourquoi il paraît raisonnable de choisir le modèle CreditRisk⁺. C'est donc ce modèle que nous allons maintenant présenter afin de mieux comprendre sa méthodologie.

Chapitre 4

Le modèle CreditRisk⁺

Le modèle CreditRisk⁺ propose de calculer la distribution des pertes liées à des défauts d'émetteurs d'un portefeuille. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il s'agit d'une approche analytique. Le principal avantage de cette méthode réside dans sa simplicité, puisque qu'elle propose une formule fermée de la distribution de pertes du portefeuille.

4.1 La démarche

Les concepts clés à la base de CreditRisk⁺ sont les suivants :

- les taux de défaut sont stochastiques,
- le niveau du taux de défaut a une incidence sur l'occurrence du défaut, mais il n'y a pas de relations causales entre ces occurrences.

Afin de faciliter la compréhension du modèle, nous présenterons d'abord le cas où les taux de défaut sont fixes. Une fois la distribution des pertes obtenue dans un cas simple, nous intégrerons la volatilité des taux de défaut dans le processus. Nous montrerons alors l'existence de cas où le modèle à volatilité converge vers le cas simple. Nous présenterons enfin l'estimation des paramètres d'entrée retenus.

4.2 Cas où les taux de défaut sont fixes

4.2.1 Occurrence de défauts

Les défauts de crédit ne peuvent pas être prévus ni dans leur date, ni dans leur nombre. CreditRisk⁺ tente donc de modéliser globalement le risque crédit d'un portefeuille.

Nous considérons un portefeuille composé de N obligations. Nous supposons que chacun des titres du portefeuille possède une probabilité de défaut à horizon de un an connue :

$$P_A = \text{Probabilité annuelle de défaut de l'émetteur } A$$

Afin d'analyser la distribution des pertes, nous introduisons la fonction génératrice des probabilités :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ défauts}) z^n$$

Pour chaque émetteur, il n'y a que deux possibilités : soit l'émetteur fait défaut, soit il ne fait pas défaut. Ainsi la fonction génératrice des probabilités pour un émetteur s'exprime facilement :

$$F_A(z) = 1 - P_A + P_A z = 1 + P_A(z - 1)$$

Or, les événements de défauts sont supposés indépendants. Ainsi, la fonction génératrice des probabilités pour tout le portefeuille est le produit des fonctions génératrices des probabilités individuelles. Ce qui induit :

$$F(z) = \prod_A F_A(z) = \prod_A (1 + P_A(z - 1))$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\log F(z) = \sum_A \log(1 + P_A(z - 1))$$

Nous faisons ensuite l'hypothèse que les probabilités de défaut sont faibles. Cela permet d'obtenir une approximation de cette dernière expression par un développement limité au premier ordre :

$$\log(1 + P_A(z - 1)) \approx P_A(z - 1)$$

En utilisant cette approximation dans l'expression de la fonction génératrice des probabilités, nous avons :

$$F(z) = e^{\sum_A P_A(z-1)} = e^{\mu(z-1)}$$

Avec

$$\mu = \sum_A P_A$$

En fait, μ est l'espérance du nombre de défaut sur un an. Pour identifier la distribution correspondant à cette fonction génératrice de probabilités, nous développons la série de Taylor de F :

$$F(z) = e^{\mu(z-1)} = e^{-\mu} e^{\mu z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n$$

Nous en déduisons donc que :

$$P(n \text{ défauts}) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Finalement, sous les hypothèses faites plus haut, le nombre de défaut à survenir suit une loi de Poisson de paramètre μ . Ce paramètre est l'unique inconnue du modèle : il ne dépend ni du nombre de titres présents dans le portefeuille, ni des probabilités individuelles de défaut de chaque émetteur, pourvu qu'elles soient suffisamment petites pour valider les approximations effectuées.

Cependant, les hypothèses faites ne cadrent pas avec la réalité. Toutefois, ces résultats seront utiles pour la suite, notamment pour le passage à des taux variables et à l'introduction de volatilité des taux de défaut.

4.2.2 Pertes de défaut

A partir de la distribution du nombre de défaut, nous pouvons considérer la distribution des pertes du portefeuille. Or, un même niveau de perte peut être obtenu par un seul « gros » défaut aussi bien que pour de nombreux « petits » défauts. Le modèle va donc regrouper les expositions contenues dans un portefeuille par tranche d'exposition. Ceci a pour effet de réduire considérablement le nombre de données à l'entrée pour l'implémentation. Cette approximation sera d'autant plus légitime que les tranches d'expositions seront nombreuses et étroites en comparaison avec l'exposition moyenne du portefeuille. Ainsi, ces approximations seront utiles sans pour autant modifier significativement les résultats.

Nous posons :

- P_A : probabilité de défaut de l'émetteur A,
- L_A : exposition de l'émetteur A,
- λ_A : pertes attendues pour l'émetteur A,
- L : unité d'exposition (en % du montant engagé)

L'exposition et les pertes attendues sont exprimées en L , qui représente une unité arbitraire choisie, si bien que pour chaque émetteur A, on définit ε_A et ν_A de la manière suivante :

$$L_A = L * \varepsilon_A \text{ et } \lambda_A = L * \nu_A$$

Ainsi, ε_A est l'exposition de A, exprimée comme un multiple de L . De même, ν_A est la perte attendue de A.

Ensuite, chaque ν_A est arrondi à l'entier le plus proche. Ainsi, si L est correctement choisie, il n'y aura que peu de valeurs possibles pour ν_A . Le portefeuille se retrouve donc réparti en m tranches d'exposition ou « bandes d'exposition ». Et nous pouvons écrire, pour chaque bande d'exposition j :

$$\varepsilon_j = \nu_j * \mu_j \text{ d'où } \mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} = \sum_{A: \nu_A = \nu_j} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$$

Nous posons aussi :

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j$$

4.2.3 Procédure de calcul et distribution des pertes

De la même manière que pour le nombre de défauts, nous définissons la distribution des pertes agrégées à travers sa fonction génératrice :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pertes agrégées} = n * L) z^n$$

Les expositions sont supposées indépendantes. En conséquence, les bandes d'exposition sont elles aussi indépendantes et la fonction génératrice des pertes globales n'est autre que le produit des fonctions génératrices des bandes :

$$G(z) = \prod_{i=1}^m G_i(z)$$

Or, pour chaque bande nous avons :

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ défauts}) z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = e^{-\mu_j} e^{\mu_j z^{v_j}}$$

Et donc en revenant au portefeuille global :

$$G(z) = \prod_{j=1}^m e^{-\mu_j} e^{\mu_j z^{v_j}} = e^{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}$$

Nous venons d'obtenir la fonction génératrice des pertes pour l'ensemble du portefeuille. Afin d'en déduire la distribution des pertes, nous introduisons un polynôme P :

$$P(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right) z^{v_j}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right)}$$

La fonction génératrice des pertes agrégées peut donc s'écrire sous la forme :

$$G(z) = e^{\mu(P(z)-1)} = F(P(z))$$

La fonction G fait ressortir deux sources d'incertitude provenant de la loi de Poisson pour la fréquence des défauts et de la variabilité des montants d'exposition à l'intérieur du portefeuille.

Toutefois, la dernière expression de G n'est pas très maniable et ne nous renseigne pas explicitement sur la distribution des pertes. Aussi nous sommes amenés à déterminer les probabilités associées à une perte de $n * L$ par un autre algorithme. Pour cela, nous effectuons un développement limité de G :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} z^n$$

Or, nous avons :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pertes agrégées} = n * L) z^n$$

Soit A_n la probabilité de perdre $n * L$. Nous en déduisons :

$$A_n = P(\text{Pertes agrégées} = n * L) = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

En utilisant la formule de Leibnitz et après plusieurs transformations, nous établissons la formule de récurrence suivante :

$$A_0 = G(0) = F(P(0)) = e^{-\mu} = e^{-\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j}}$$

$$A_n = \sum_{j: v_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-j}$$

Cette récurrence permet d'établir la distribution des pertes du portefeuille dans le cas de taux de défaut fixes.

4.3 Passage à des taux de défauts aléatoires

4.3.1 Incertitude des taux de défaut

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des portefeuilles composés d'obligations dont le taux de défaut était connu et fixe. CreditRisk⁺ prend en compte le fait que ces taux sont difficiles à déterminer et sont sujets à une variabilité non négligeable pour des titres semblables. De plus, les statistiques publiées sur la fréquence des défauts montrent des variations assez importantes d'une année sur l'autre. La situation se résume alors en trois points :

- Les probabilités de défaut sont volatiles dans le temps, même pour des émetteurs de qualité de crédit comparable.

- La variabilité des probabilités de défaut peut être expliquée par des variabilités sous-jacentes d'un petit nombre de variables liées à l'environnement économique.
- Un changement dans l'économie ou d'un autre facteur ayant de l'influence sur la variabilité des taux de défaut ne doit pas nécessairement induire un défaut. Le défaut d'une contrepartie est un événement rare.

4.3.2 Analyse par secteur

Le second point énoncé souligne l'existence de facteurs susceptibles d'agir sur la qualité de crédit de plusieurs émissions à la fois. Pour mesurer cet effet, et donc être en mesure de quantifier l'impact des volatilités des taux de défauts individuelles au niveau du portefeuille, le modèle a recours à une analyse par secteur. L'économie est alors divisée en K secteurs et le modèle suppose que chaque secteur peut être modélisé par un unique facteur sous-jacent. C'est ce facteur qui va nous permettre d'expliquer la variabilité dans le temps du nombre total de défaut mesuré pour ce secteur.

Pour chaque secteur k , nous introduisons une variable aléatoire x_k représentant le taux de défaut moyen du secteur k . L'espérance de x_k est notée μ_k et son écart-type σ_k .

Nous avons :

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}}$$

Où $m(k)$ est le nombre d'émetteurs du secteur k .

Pour obtenir une estimation semblable de l'écart-type du taux de défaut pour chaque secteur, nous sommes contraints d'assigner un écart-type pour le taux de défaut de chaque émetteur du secteur considéré. Une manière pratique de faire cela revient à supposer que cet écart-type dépend de la qualité de crédit de l'émetteur. On obtient donc σ_k à partir des σ_A , sachant que la probabilité de défaut de chaque émetteur appartenant au secteur k sera considérée comme proportionnelle à la variable aléatoire x_k :

$$x_A = \frac{\varepsilon_A}{v_A} \frac{x_k}{\mu_k}$$

Cela nous permet d'avoir :

$$\sum_{A \in k} \sigma_A = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{v_A} \frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sigma_k}{\mu_k} \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{v_A} = \sigma_k$$

4.3.3 Occurrence de défauts

En suivant la même démarche que dans la partie sur les taux de défaut fixes, la fonction génératrice des probabilités est donnée par :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ défauts}) z^n$$

Les secteurs étant supposés indépendants entre eux, F peut s'écrire comme le produit des fonctions génératrices des probabilités de chaque secteur :

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z)$$

En s'inspirant de l'équation de la section précédente concernant la fonction génératrice des probabilités, nous pouvons écrire :

$$F_k(z) | [x_k = x] = e^{x(z-1)}$$

Soit f_k la fonction de densité de x_k :

$$P(x \leq x_k \leq x + dx) = f_k(x) dx$$

Nous avons donc :

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ défauts}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{x=0}^{\infty} P(n \text{ défauts} | x) f_k(x) dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} f_k(x) dx$$

Afin d'obtenir une formule explicite pour la fonction génératrice des probabilités, CreditRisk⁺ fait l'hypothèse que x_k suit une loi Gamma de moyenne μ_k et d'écart-type σ_k .

Pour chaque secteur, les paramètres de cette loi Gamma sont donc :

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}$$

Avec cette hypothèse, nous avons :

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} \frac{e^{-\frac{x}{\beta_k}} x^{\alpha_k-1}}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} dx \\ &= \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} \int_{y=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\beta_k^{-1} + 1 - z} \right)^{\alpha_k-1} e^{-y} \frac{dy}{\beta_k^{-1} + 1 - z} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_k)}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k) (1 + \beta_k^{-1} - z)^{\alpha_k}} \end{aligned}$$

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} (1 + \beta_k^{-1} - z)^{\alpha_k}}$$

Où encore :

$$F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k} \quad \text{avec} \quad p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}$$

Nous obtenons ainsi une expression de F :

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}$$

4.3.4 Distribution des pertes

Nous reprenons l'approche définie dans le cas où les taux de défaut étaient fixes, et nous généralisons ce procédé en y incorporant la volatilité de ces taux de défaut. On obtient alors des expressions semblables à celles rencontrées plus haut :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z)$$

Nous introduisons le polynôme P_k tel que $G_k(z) = F_k(P_k(z))$:

$$P_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^k}{\nu_j^k} \right) z^{\nu_j^k}$$

En combinant les deux dernières expressions, nous obtenons :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^k}{\nu_j^k} z^{\nu_j^k}} \right)^{\alpha_k}$$

Pour être exploitable, la fonction génératrice doit être mise sous forme de série entière. Or, pour arriver à cette forme, nous sommes amenés à traiter la dernière expression de G et à mettre en évidence les coefficients A_n . Il existe plusieurs algorithmes permettant de transformer une fraction rationnelle en polynôme de degré infini. Ces algorithmes sont plutôt techniques et ne méritent pas d'être détaillés ici. Néanmoins, il est intéressant de comprendre le raisonnement suivi :

Nous cherchons donc les A_n tels que :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Supposons que G satisfasse l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dz}(\log(K(z))) = \frac{1}{K(z)} \frac{dK(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Où A et B sont deux polynômes tels que :

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_r z^r \quad \text{et} \quad B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_s z^s$$

Sous ces contraintes, une relation de récurrence est établie :

$$b_0(n+1)A_{n+1} = \sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1}(n-j)A_{n-j}$$

Pour déterminer les coefficients des polynômes A et B , nous utilisons la relation suivante, en la réduisant au même dénominateur :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{G'_k(z)}{G_k(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\frac{p_k \alpha_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^k z^{v_j^k - 1}}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^k}{v_j^k} z^{v_j^k}}$$

Ainsi, nous obtenons la série des A_n (distribution de pertes explicite) grâce à la formule de récurrence. Cette série nous permet ensuite de calculer la VaR 95% à un an.

4.3.5 Commentaires sur le modèle

Tout d'abord, notons que cette approche peut être généralisée en considérant l'éventuelle appartenance d'un émetteur à plusieurs secteurs. Le modèle fait alors intervenir des coefficients $\theta_{A,k}$ qui, pour chaque émission A , donnent la proportion de l'influence (à estimer) de son taux de défaut par la variable x_k . Cette hypothèse est traitée dans CreditRisk⁺.

De plus, nous remarquons que la notion de corrélation n'apparaît pas explicitement dans le modèle, mais est prise en compte indirectement dans les volatilités de taux de défaut. Nous pouvons toutefois calculer les contributions marginales de chacun des titres ainsi que les corrélations entre ces mêmes titres a posteriori. Les étapes nécessaires pour aboutir à ces contributions sont détaillées dans la note explicative de CreditRisk⁺.

Enfin, le principal reproche adressé à CreditRisk⁺ réside dans le fait que le modèle ne prend pas en compte l'éventuelle évolution du rating de l'émetteur.

4.4 Calibrage des paramètres du modèle

Dans la section précédente, nous avons détaillé les différentes étapes de calcul du modèle qui nous amènent à la distribution des pertes du portefeuille obligataire. Nous allons maintenant nous intéresser aux paramètres d'entrée du modèle, à savoir :

- la probabilité de défaut à un an de l'émetteur,
- la volatilité de cette probabilité de défaut,
- l'exposition de l'émetteur,
- la perte en cas de défaut.

Le fait qu'il y ait si peu de paramètres en entrée constitue l'une des principales forces du modèle CreditRisk⁺.

4.4.1 La probabilité de défaut et sa volatilité

La probabilité de défaut est un paramètre sensible au cycle économique. C'est pourquoi le modèle introduit le paramètre de volatilité. Ainsi la probabilité de défaut évolue autour d'une moyenne qui dépend de son rating d'agence.

Dans notre étude, nous avons décidé de différencier les probabilités de défaut suivant le secteur d'appartenance de l'émetteur. En l'occurrence, nous avons choisi deux secteurs : souverain et « corporate ». Nous avons choisi cette division car les agences de notation publient annuellement des études sur les probabilités de défaut et font la distinction entre ces deux secteurs. Ainsi, la probabilité de défaut qui sera assignée à un émetteur sera fonction du secteur de l'émetteur et de son *rating*.

Pour le secteur « corporate », nous avons décidé de retenir les probabilités de défaut à vingt ans issues du rapport annuel de 2010 de Standard & Poor's. Nous ré-annualisons ensuite ces probabilités pour obtenir des probabilités de défaut à un an.

Pour le secteur souverain, nous utilisons les probabilités de défaut issues des études de 2011 de Moody's. De la même manière que pour le secteur « corporate », nous récupérons les taux de défaut à dix ans que nous ré-annualisons.

Pour les volatilités de taux de défaut, nous nous sommes basés sur les données de Moody's de 2011.

Rating	Taux de défaut souverain (en %)	Taux de défaut "corporate" (en %)	Ecart-type
AAA	0,09	0,01	0,00
AA+	0,12	0,04	0,00
AA	0,16	0,12	0,00
AA-	0,22	0,20	0,41
A+	0,29	0,22	0,23
A	0,40	0,38	0,10
A-	0,53	0,43	0,13
BBB+	0,71	0,43	0,29
BBB	0,71	0,69	0,28
BBB-	1,78	0,97	0,77
BB+	2,07	1,60	1,10
BB	2,07	1,81	0,79
BB-	3,24	3,94	1,97
B+	3,24	5,24	2,29
B	7,52	5,10	5,49
B-	7,52	5,07	8,24
CCC	7,52	8,39	17,21
SN		0,97	0,77

FIGURE 4.4 – Calibrage des moyennes et volatilités des taux de défaut en fonction du *rating*

Nous voyons ici combien le modèle est dépendant des données des agences de notation.

4.4.2 L'exposition au défaut

Dans le cas des obligations, la détermination de l'EAD est relativement simple, d'autant que le modèle CreditRisk⁺ ne tient compte que de la perte associée au défaut de remboursement du nominal et exclut les pertes éventuellement engendrées par le non-remboursement de tout ou partie des coupons.

Nous pourrions donc penser à deux méthodes de détermination : la première consiste à utiliser le principal de l'obligation, c'est-à-dire le montant que recevra le créancier à la maturité de l'obligation (si le contrat est *in fine*). Cette première approche paraît la plus naturelle car c'est bien le principal que le créancier risque de ne pas recevoir en cas de défaut.

Une autre méthode consiste à considérer le prix d'achat de l'obligation. En effet, en comptabilité non-IFRS, les obligations sont valorisées en valeur d'achat au bilan de l'entreprise car ce sont des produits dépendant de l'article R332-2 du Code des Assurances.

Dans notre étude, nous avons décidé de retenir la deuxième méthode.

4.4.3 La perte en cas de défaut

Dans le modèle CreditRisk⁺, la LGD est déterministe. Néanmoins, dans la réalité, nous savons que cette LGD dépend des caractéristiques de l'émetteur et du titre comme la séniorité de la dette (*covered*, *senior*, *subordonnée*,...), le secteur d'activité, la zone géographique...

Après l'étude de différents articles sur le sujet et en nous inspirant des taux de recouvrement fournis par les agences de notation, nous avons décidé d'utiliser des LGD qui dépendent de la séniorité du titre considéré et de son secteur (souverain ou « corporate ») :

$$LGD_{covered} = 50\%$$

$$LGD_{senior} = 63.3\%$$

$$LGD_{souverain} = 69\%$$

$$LGD_{subordonné} = 90\%$$

Troisième partie

Calcul de la Value-at-Risk d'un portefeuille obligataire

Chapitre 5

Données en input

Afin de tester notre modèle, nous allons considérer un portefeuille composé d'obligations d'Etats et d'obligations « corporate ». Nous pourrions ainsi étudier la sensibilité du modèle CreditRisk⁺ aux différents paramètres. Dans un premier temps, nous allons donc décrire le portefeuille. Puis nous calculerons la VaR 95% à un an du portefeuille grâce au modèle CreditRisk⁺ et au modèle de Vasicek. Enfin, nous testerons la sensibilité du modèle.

5.1 Constitution du portefeuille

Notre portefeuille est composé de 691 titres différents pour une valeur nette comptable de 8 577 603 851 euros. La totalité des titres sont des obligations. Nous allons étudier plus en détails la diversification du portefeuille en termes d'expositions, de *rating* et de séniorité.

5.1.1 Répartition des expositions

Comme nous l'avons vu précédemment, il est important de distinguer le *rating* de l'émission d'un titre et le *rating* de l'émetteur. En effet, le *rating* de l'émission dépendra bien entendu du *rating* de la société émettrice, mais aussi de la séniorité du titre émis : un titre sécurisé ou « covered » sera mieux noté qu'un titre senior à émetteur équivalent.

Notre portefeuille tient compte de cette distinction dans le classement par émetteur. Par exemple, un titre BNP senior aura pour émetteur : « BNP PARIBAS Sénior ».

Notre portefeuille est constitué de 288 émetteurs différents. Le graphe suivant présente la répartition des expositions par émetteur.

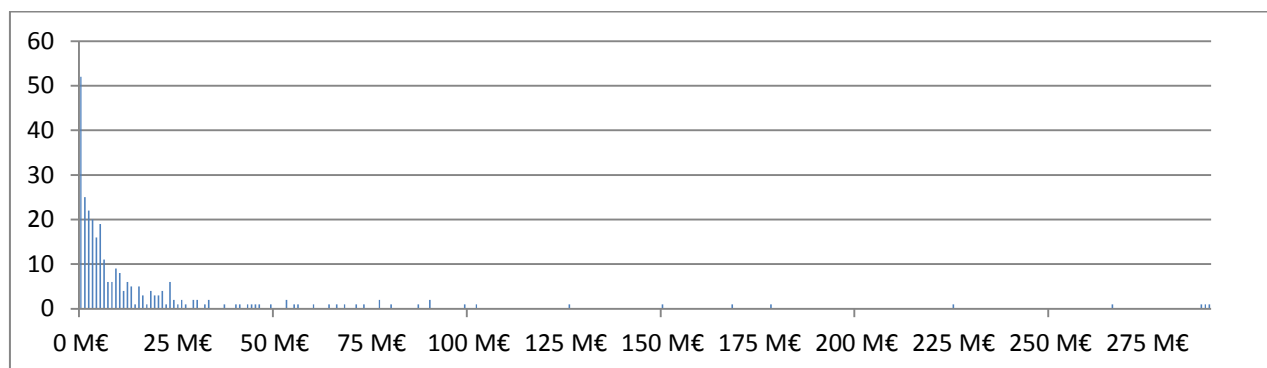


FIGURE 5.1 – Distribution des expositions du portefeuille par émetteur

Nous constatons sur ce graphe que la majorité des expositions relatives à un émetteur sont peu élevées en comparaison de la taille du portefeuille. En effet, près de 53% des expositions par émetteur sont inférieures ou égales à 6 Millions d'euros et près de 40% sont comprises entre 6 et 70 Millions d'euros. Le portefeuille est donc bien diversifié en termes de volumes d'exposition. Il est à noter que certaines expositions n'apparaissent pas sur le graphe en raison de leurs expositions trop importantes.

De manière plus précise, dix contreparties présentent des expositions supérieures à 100 Millions d'euros. Nous présentons dans le tableau suivant leurs caractéristiques :

Emetteur	Exposition (en €)	Secteur	Nombre de lignes	Rating médian
ABN AMRO Sénior	102 881 806	Corporate	4	A
BNP PARIBAS Sénior	126 649 823	Corporate	13	A+
BFCM Tier1	150 269 500	Corporate	4	BBB-
BFCM Sénior	168 242 413	Corporate	15	A+
CIE DE FI FONCIER CB	178 931 779	Corporate	19	AAA
BQ EUROP. D'INVEST.	225 233 861	Supranational	13	AAA
ITALIE	266 456 172	Etat	25	BBB
CADES	289 053 707	Corporate	22	AA+
CAISSE REFI HABIT CB	348 069 844	Corporate	31	AAA
France	3 277 069 172	Etat	82	AA+

FIGURE 5.2 – Détails des expositions du portefeuille supérieures à 100 Millions d'euros

Le *rating* médian correspond au *rating* médian des trois principales agences de notation (S&P, Moody's et Fitch).

Nous remarquons qu'une exposition est clairement supérieure par rapport à toutes les autres : celle de l'Etat français. Cette particularité vient du fait que notre portefeuille est inspiré d'un portefeuille d'assureur français et contient donc forcément beaucoup d'OAT.

5.1.2 Répartition des ratings

Nous nous intéressons maintenant à la notation des émetteurs présents dans le portefeuille. Le graphe suivant présente la répartition des ratings pondérée par la valeur nette comptable :

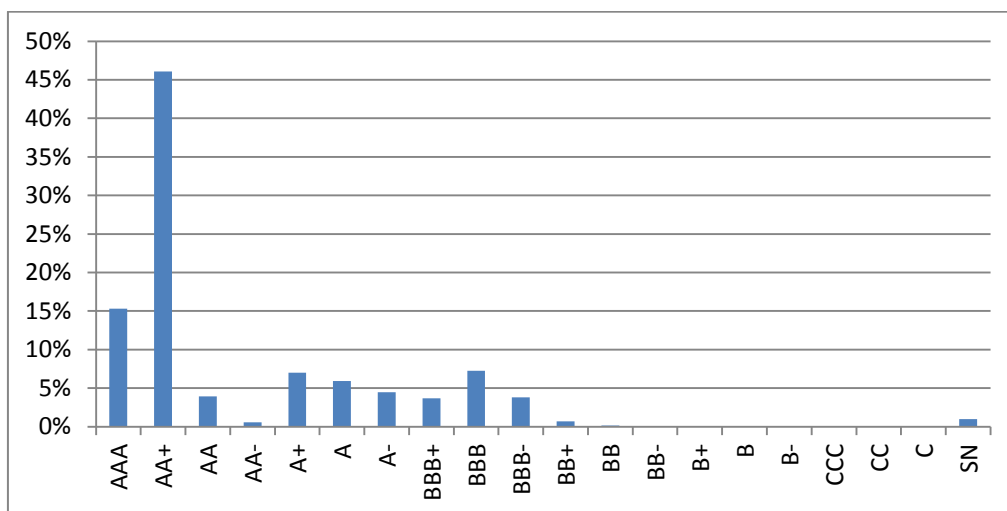


FIGURE 5.3 – Contribution de chaque note à l'exposition globale du portefeuille

Nous constatons que plus de 83% de l'exposition totale repose sur des obligations dont le *rating* est supérieur à A-, dont près de 66% entre AA- et AAA. L'exposition *Investment grade*, dont le *rating* est supérieur à BBB-, représente 98% du portefeuille. L'exposition *Speculative grade*, dont le *rating* est inférieur à BB+, représente moins de 1% du portefeuille. Moins de 1% des titres du portefeuille ne sont pas notés.

5.1.3 Séniorité des titres

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la perte en cas de défaut dépend de la séniorité du titre. Il est donc important de connaître la répartition des titres du portefeuille suivant leur séniorité.

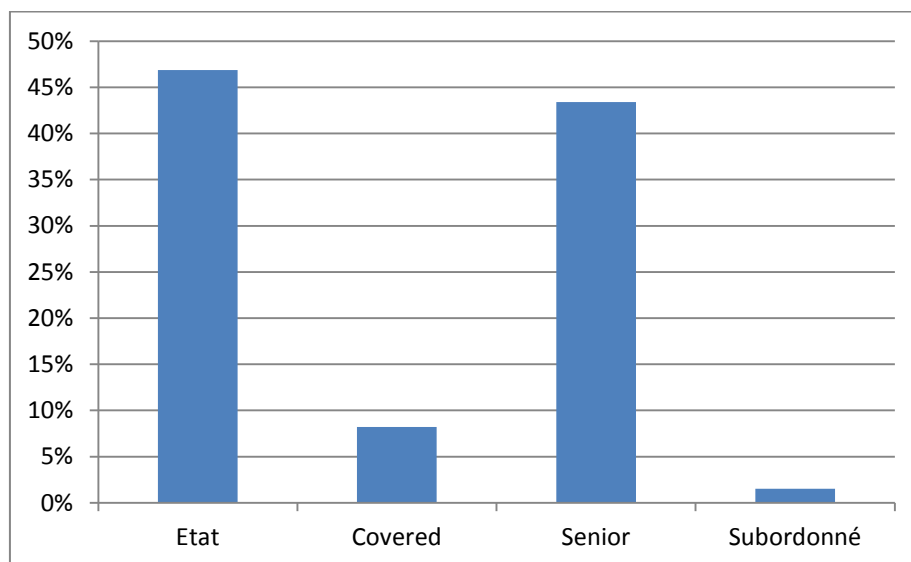


FIGURE 5.4 – Répartition de la séniorité des titres pondérée par la valeur nette comptable

Sans surprise pour un portefeuille de type assurance la majorité des titres est de type senior ou souverain.

5.2 Diversification du portefeuille

La diversification d'un portefeuille est un facteur essentiel pour la réduction des risques. Un portefeuille diversifié supportera mieux les chocs économiques qu'un portefeuille où tous les titres sont concentrés dans le même secteur d'activité. Il est donc important de tenir compte des éventuelles dépendances entre les titres.

CreditRisk⁺ propose de modéliser ces dépendances en décomposant le portefeuille en secteurs. Comme nous l'avons notifié auparavant, nous disposons de deux courbes de taux de défaut des agences de notation : l'une pour les émetteurs souverains et l'autre pour les émetteurs « corporate ». Nous avons donc décidé de scinder notre portefeuille en deux secteurs : souverain et « corporate ».

Notre portefeuille se décompose de la manière suivante : environ 47% des obligations sont issues d'émetteurs souverains et le reste provient d'émetteurs « corporate ».

Chapitre 6

Sensibilité du modèle aux différents paramètres

Après avoir détaillé le contenu du portefeuille dans le chapitre précédent, nous allons maintenant étudier la sensibilité du modèle CreditRisk⁺ aux différents paramètres d'entrées. Nous pourrions ainsi en déduire la contribution de chaque paramètre au calcul de la VaR et essayer de faire ressortir de ces résultats les forces et faiblesses du modèle.

Dans un premier temps, nous allons détailler la distribution de perte du portefeuille avec les paramètres présentés précédemment. Puis nous comparerons ces résultats avec ceux du modèle de Vasicek. Et enfin, nous étudierons la sensibilité du modèle aux paramètres d'entrée.

6.1 Paramètres de référence

Nous allons donc ici décrire la distribution de perte du portefeuille en utilisant les paramètres présentés jusqu'à maintenant. Ensuite nous effectuerons des modifications sur l'un ou l'autre de ces paramètres afin d'apprécier l'impact de ces changements sur la distribution initiale. Voici un rappel des paramètres utilisés (que nous nommerons paramètres de référence par la suite) :

- **Ratings** : nous utilisons le *rating* médian des trois principales agences de notation (S&P, Moody's et Fitch).
- **Probabilités de défaut (PD)** : nous considérons deux courbes de défaut suivant le secteur de l'émetteur : souverain (issue des études 2011 de Moody's) ou « corporate » (issue des études 2010 de Standard & Poor's). Ces taux de défaut sont définis en fonction du *rating* de l'émetteur.
- **Volatilité des probabilités de défaut** : elles sont issues des études 2011 de Moody's et sont communes pour les deux courbes de probabilités de défaut.
- **Exposition au défaut (EAD)** : Valeur nette comptable.
- **Perte en cas de défaut (LGD)** : elle dépend de la séniorité du titre et de son secteur (souverain ou « corporate »). Nous l'estimons à 50% pour les « covered », 63.3% pour les senior, 69% pour les souverains et 90% pour les subordonnés.
- **Unité d'exposition** : CreditRisk⁺ laisse le choix à l'utilisateur pour définir cette unité qui servira de base à la constitution des bandes d'exposition. Nous l'avons fixée à 1% de l'exposition maximale à risque du portefeuille.
- **Type d'agrégation** : par émetteur.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus avec ces paramètres pour le modèle CreditRisk⁺. Le programme fournit des quantiles de pertes, l'espérance de pertes (*EL*) et l'*unexpected loss* ($UL = VaR_{\alpha\%} - EL$) pour différents niveaux de confiance.

Quantiles de pertes	VaR à un an (en k€)
75%	4 510
90%	25 305
95%	45 056
97%	68 639
99%	155 133
99,5%	200 176

Mesure de risque	Valeur (en k€)
Expected loss (EL)	15 132
UL à 99,0%	140 000
UL à 99,5%	185 044

FIGURE 6.1 – Quantiles de pertes et mesure de risque obtenus avec les paramètres de référence

L'*Expected Loss* du portefeuille est d'environ 15 Millions d'euros, ce qui peut paraître faible comparé à la taille globale du portefeuille (8.58 Milliards d'euros). Cela s'explique par le fait que le portefeuille contient une très grande majorité de titres de grandes qualités (*ratings* supérieurs à A-), ce qui implique que les probabilités de défaut correspondantes sont très faibles.

En ce qui concerne la VaR, son évolution en fonction du seuil de confiance par rapport à l'*Expected Loss* montre bien que la distribution de perte est étalée sur la droite. De plus, on constate que, lorsque le seuil de confiance choisi atteint des niveaux élevés, la VaR augmente très rapidement. D'où l'importance du choix du niveau de confiance dans le calcul du besoin en capitaux.

6.2 Comparaison avec le modèle de Vasicek

Nous allons maintenant comparer ces résultats à ceux que nous obtenons avec le modèle de Vasicek.

Rappelons tout d'abord que ce modèle avait été choisi comme *benchmark* de notre modèle en raison de son utilisation dans le projet Bâle II et de sa simplicité. En effet, ce modèle ne nécessite que peu d'informations en entrée. Afin d'obtenir la comparaison la plus correcte possible, nous utilisons les mêmes paramètres de référence que pour CreditRisk⁺.

Voici les résultats obtenus :

Quantiles de pertes	CreditRisk+ (en k€)	Vasicek (en k€)
75%	4 510	15 927
90%	25 305	37 244
95%	45 056	60 036
97%	68 639	80 813
99%	155 133	137 682
99,5%	200 176	182 500

Mesure de risque	CreditRisk+ (en k€)	Vasicek (en k€)
Expected loss (EL)	15 132	15 132
UL à 99,0%	140 000	122 550
UL à 99,5%	185 044	167 367

FIGURE 6.2 – Comparaison des résultats avec le modèle de Vasicek

Tout d'abord, nous observons une certaine similitude entre les deux distributions. Ce qui n'était pas forcément évident au départ, étant donné que les méthodes utilisées sont complètement différentes.

Il est à noter que le modèle de Vasicek présente l'avantage de pouvoir calculer la contribution au risque de chaque ligne au risque globale, ce que ne fait pas CreditRisk⁺.

Il est assez difficile de tirer des conclusions après des tests sur un seul portefeuille, néanmoins les résultats obtenus nous confortent dans le choix de notre modèle.

6.3 Etude de la sensibilité aux paramètres d'entrée

Dans cette partie, nous allons faire varier les différents paramètres d'entrée du modèle CreditRisk⁺ afin d'apprécier leur impact sur la distribution des pertes du portefeuille. Nous étudierons d'abord les probabilités de défaut, puis la perte en cas de défaut (*LGD*) et enfin le choix de l'unité d'exposition.

6.3.1 Sensibilité aux probabilités de défaut et à leurs volatilités

Commençons donc par étudier l'impact du choix des probabilités de défaut et de leur volatilité. Plusieurs possibilités s'offrent à nous : faire uniquement varier les probabilités de défaut, les volatilités de celles-ci ou les deux en même temps. Nous allons effectuer les tests suivants : dans un premier temps, nous allons faire varier les probabilités de défaut et les volatilités séparément et constater les résultats sur différents quantiles ; puis, dans un second temps, nous étudierons de manière plus précise la VaR 95% en faisant varier les deux paramètres en même temps.

Le premier test consiste donc à faire varier les probabilités de défaut. Cela consiste à effectuer différents chocs sur les deux courbes de référence (une pour le souverain et une pour les « corporate »). Voici les résultats obtenus :

Quantiles de pertes	Avec courbes de référence (en k€)	Choc de -50% (en k€)	Choc de +50% (en k€)	Choc de +100% (en k€)
90%	25 305	11 030	40 528	54 092
95%	45 056	22 926	66 994	93 132
97%	68 639	39 613	114 297	134 451
99%	155 133	110 137	193 522	210 051
99,5%	200 176	151 092	225 366	250 409

FIGURE 6.3 – Quantiles de pertes obtenus en faisant varier les *PD*

Comme nous pouvions nous y attendre, le paramètre « probabilité de défaut » influe énormément sur le résultat final. Nous constatons que pour les quantiles élevés, un choc de +100% sur les courbes entraîne un doublement de la VaR. Sur les quantiles extrêmes, cet effet se dissipe peu à peu.

Etudions maintenant l'influence de la volatilité des probabilités de défaut. De la même façon que pour les probabilités de défaut, ce test consiste à effectuer des chocs à la hausse et la baisse sur la courbe de volatilité (commune pour émetteurs souverains et « corporate »). Le tableau suivant présente ces résultats :

Quantiles de pertes	Avec courbes de référence (en k€)	Choc de -50% (en k€)	Choc de +50% (en k€)	Choc de +100% (en k€)
90%	25 305	24 889	25 777	26 047
95%	45 056	44 196	48 065	51 339
97%	68 639	66 131	74 623	79 871
99%	155 133	153 262	158 153	166 175
99,5%	200 176	197 431	205 877	219 871

FIGURE 6.4 – Quantiles des pertes obtenus en faisant varier les volatilités des *PD*

Il ressort de ce test que les volatilités de taux de défaut n'ont pas une grande influence sur le modèle. Cela peut s'expliquer par le fait que le portefeuille contient une très grande majorité de titres très bien notés et donc avec une volatilité de taux de défaut faible.

Pour terminer, nous allons étudier plus en détails la VaR 95% en faisant varier les deux paramètres en même temps. Voici les résultats que nous obtenons :

VaR 95% (en k€)		Probabilités de défaut						
		-50%	-25%	-10%	0%	10%	25%	50%
Volatilités des probabilités de défaut	-50%	22 229	36 367	41 554	44 196	48 806	56 673	65 823
	-25%	22 441	36 871	41 968	44 571	49 772	57 398	66 338
	-10%	22 593	37 234	42 273	44 851	50 468	57 926	66 718
	0%	22 926	37 494	42 495	45 056	50 967	58 307	66 994
	10%	23 290	37 765	42 731	45 373	51 488	58 707	67 287
	25%	23 783	38 184	43 105	46 371	52 299	59 336	67 751
	50%	24 410	38 898	43 770	48 065	53 696	60 434	69 656

FIGURE 6.5 – VaR 95% en faisant varier les *PD* et leurs volatilités

Cette étude confirme nos attentes quant à l'évolution de la VaR : celle-ci augmente avec les probabilités de défaut et la volatilité même si cette dernière a finalement peu d'impact.

6.3.2 Sensibilité à la perte en cas de défaut (*LGD*)

La perte en cas de défaut est un paramètre très important car il détermine la part de l'exposition susceptible d'être perdue en cas de défaut. Son choix est donc essentiel. Comme nous l'avons précisé lors de la description de ce paramètre, son niveau dépend de la séniorité du titre, de la présence ou non de collatéral, de la zone géographique,... En nous inspirant des agences de notation, nous avons fixé des taux de pertes suivant la séniorité et le secteur de l'émetteur (souverain ou « corporate »).

Nous allons effectuer différents chocs aux *LGD* afin d'en apprécier les conséquences. Voici le tableau que nous obtenons :

Quantiles de pertes	LGD de référence	50 % des LGD de référence	LGD -10% (absolu)	LGD +10% (absolu)
90%	25 305	12 653	21 399	29 481
95%	45 056	22 528	38 180	51 728
97%	68 639	34 319	57 199	78 380
99%	155 133	77 566	145 874	177 386
99,5%	200 176	100 088	171 821	229 284

FIGURE 6.6 – Quantiles des pertes obtenus avec différentes LGD (en k€)

Ces résultats confirment l'importance du choix des *LGD*. De manière générale, la variation de *LGD* sur la distribution des pertes est proportionnelle à celle-ci.

6.3.3 Sensibilité à l'unité d'exposition

Comme nous l'avons expliqué lors de la présentation du modèle CreditRisk⁺, la méthodologie repose sur le regroupement des expositions par bandes d'exposition. L'utilisateur a le choix quant à l'unité permettant de définir ces bandes. Nous avons décidé de la fixer à 1% de l'exposition à risque maximale.

Afin de nous assurer que le choix de cette unité n'a pas d'impact significatif sur le résultat final, nous allons faire varier cette unité. Voici les quantiles obtenus :

Quantiles de pertes	Unité d'exposition de référence	25 % de l'unité de référence	200 % de l'unité de référence
90%	25 305	28 425	27 840
95%	45 056	48 424	44 111
97%	68 639	71 434	77 092
99%	155 133	165 297	150 183
99,5%	200 176	194 231	210 402

FIGURE 6.7 – Quantiles des pertes obtenus pour différentes unité d'exposition (en k€)

Il ressort de ces résultats qu'en faisant varier l'unité d'exposition autour de sa valeur initiale, les VaR ne changent pas significativement.

Néanmoins, il ne faut pas oublier que le choix de cette unité doit être pertinent : il faut tenir compte de la taille du portefeuille, de la taille des expositions, du temps de calcul nécessaire...

6.4 Sensibilité à la diversification du portefeuille

La diversification du portefeuille est un facteur très important à prendre en compte car il permet de réduire de manière significative le risque de pertes.

Regardons dans quelle mesure la VaR est sensible à la granularité du portefeuille. Jusqu'ici, nous avons agrégé les lignes en les regroupant par émetteur (soit 288 lignes). Nous allons maintenant calculer les quantiles de pertes sans agrégation (soit 691 lignes).

<i>Quantiles de pertes</i>	<i>Agrégation par émetteur (en k€)</i>	<i>Sans agrégation (en k€)</i>
90%	25 305	30 487
95%	45 056	52 702
97%	68 639	75 562
99%	155 133	151 711
99,5%	200 176	202 450

FIGURE 6.8 – Quantiles de pertes obtenus avec ou sans agrégation par émetteur

Nous constatons que les quantiles augmentent légèrement quand les lignes ne sont pas agrégées et que l'écart tend à se réduire quand le seuil de confiance augmente. Nous pensons que ce résultat n'est pas significatif car il n'y a pas assez de différence entre le nombre de lignes agrégées (288) et le nombre de lignes non agrégées (691). Si le portefeuille comptait plus de lignes différentes par émetteur, le résultat serait plus marqué : la VaR devrait diminuer.

Quatrième partie

Un produit pour se couvrir contre le risque de crédit : le Credit Default Swap (CDS)

Chapitre 7

Présentation et valorisation d'un CDS

Le marché des CDS (credit default swaps) a connu une formidable expansion au cours de ces dernières années. Ces instruments dérivés de gré (ou OTC, *Over The Counter*) sont utilisés pour transférer le risque de défaut. En cela, ce sont des outils très utiles qui permettent de gérer et de diversifier le risque de crédit facilement.

Toutefois, la crise financière et plus particulièrement la faillite de Lehman Brothers et le sauvetage d'AIG – ces derniers étant deux grands acteurs du marché des CDS - ont mis à jour le risque systémique que les CDS pouvaient faire courir à l'ensemble du système financier mondial. Afin de réduire ce risque systémique, les différents régulateurs de part et d'autre de l'Atlantique ont décidé d'imposer l'introduction de chambre de compensation sur le marché des CDS.

7.1 Principe d'un CDS

Un CDS (*Credit Default Swap*) est un contrat d'assurance contre le risque de défaut d'une entité donnée. En achetant un CDS, le détenteur d'obligations émises par l'entité de référence cherche à se protéger contre une éventuelle défaillance future de l'émetteur. Ainsi, il va verser un flux de manière régulière au vendeur du CDS qui, en contrepartie, s'engage à lui compenser les pertes qu'occasionnerait un défaut de l'entité de référence.

Exemple : Un gérant obligataire détient en portefeuille une obligation dont il souhaite couvrir le risque de défaut. Il achète alors à une banque un CDS de nominal 5 millions d'euros, pour une prime annuelle de 0,5% de maturité 3 ans. La banque vendeuse reçoit donc 25 000 € par an. Si l'entreprise émettrice de l'obligation fait faillite au cours de la vie du CDS, alors la banque vendeuse de protection doit verser 5 millions d'euros au gérant obligataire qui, en échange, lui livre les obligations¹².

En général, les CDS ont une maturité de 3 ou 5 ans et leur nominal est de 5 ou 10 millions d'euros. De plus, le versement des flux fixes a lieu le plus souvent de manière trimestrielle.

¹² Il s'agit ici d'un exemple de compensation physique, par opposition à une compensation cash.

Un CDS permet donc un transfert synthétique du risque de défaut puisqu'aucun n'actif n'est échangé. Il pourrait être assimilé à deux autres instruments financiers : un swap ou put, présentant chacun des particularités par rapport aux swaps et puts classiques.

Assimilé à un swap, la jambe fixe est représentée par les flux réguliers et constants que verse l'acheteur de protection jusqu'à l'échéance du contrat ou bien jusqu'à la survenance d'un défaut de l'entité de référence. La particularité réside dans la jambe variable : contrairement à un swap traditionnel, le flux variable est conditionnel, c'est-à-dire qu'il n'est versé qu'en cas de réalisation d'un événement de crédit et il met fin au contrat.

Un CDS pourrait également être comparé à une option de vente sur obligation : l'acheteur de CDS a le droit de revendre son obligation à un certain prix fixé dès le début du contrat. La différence principale avec un put classique est que le paiement de la prime n'a pas lieu en une seule fois à la conclusion du contrat mais de façon étalée dans le temps, de la même manière qu'un taux d'intérêt.

Evénement de crédit :

Les CDS sont des instruments de couverture contre le risque de défaut. Plus précisément, ils protègent contre un « événement de crédit » qui affecterait l'entité sous-jacente. L'ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*), qui a pour fonction principale de fournir des standards pour les dérivés de gré à gré, a défini les événements de crédits que couvrent les CDS. Ils sont au nombre de trois :

- Faillite de l'entité de référence.
- Défaut de paiement de l'entité de référence.
- Restructuration de dette : la dette de l'entreprise a été rééchelonnée, changement de taux non prévus par les contrats etc.

Enfin, pour les CDS sur obligations d'Etat, il faut ajouter à la liste précédente les possibilités de répudiation et de moratorium. Le premier cas concerne les Etats ne reconnaissant plus la dette qu'ils ont contractée (peut se produire après une révolution). Le second cas concerne les Etats qui, ne pouvant plus assumer les intérêts de leur dette, font un moratoire pour suspendre provisoirement le paiement des intérêts.

Lorsqu'un événement de crédit survient, l'acheteur de protection a alors le choix entre deux types de dénouement (ou de règlement) :

- Dénouement physique (*physical settlement*) : l'acheteur de protection livre les titres de dettes au vendeur de protection qui les lui achète à leur valeur nominale. Il s'agit de la méthode la plus utilisée.
- Dénouement cash (*cash settlement*) : le vendeur de protection verse à l'acheteur un montant égal à la différence entre la valeur nominale des obligations et leur valeur de marché.

Il faut également ajouter que l'acheteur de protection paye, au moment de la compensation, le dernier coupon calculé *prorata temporis*.

En théorie, *physical settlement* et *cash settlement* sont strictement équivalents. Toutefois, en pratique, des différences peuvent apparaître pour deux raisons. Tout d'abord, il peut exister des difficultés à donner une valeur de marché aux obligations, notamment en raison d'une faible liquidité.

La seconde raison pour laquelle règlements physique et cash ne sont pas toujours équivalents est que, dans certains contrats, une liste de titres livrables en cas d'événement de crédit a été déterminée dès le départ. Ainsi, l'acheteur de protection dispose d'une option de choix du titre à livrer (« moins cher à livrer » ou « *cheapest to deliver* ») qui peut lui être bénéfique.

7.2 Valorisation d'un CDS

La méthode la plus répandue pour évaluer un CDS repose sur les modèles dits « à intensité de défaut ». L'idée est de valoriser un CDS sur le même principe qu'un swap de taux d'intérêt, c'est-à-dire de distinguer la jambe fixe et la jambe variable sachant que, comme tout swap, la valeur à la date 0 du CDS doit être nulle. Il faut donc trouver le *spread* qui permet d'égaliser jambe fixe et jambe variable.

La valeur de la jambe variable V_v est :

$$V_v = \sum_{t=1}^T e^{-r_t * t} * p(t) * N * (1 - \alpha)$$

Avec :

- T la maturité du CDS,
- r_t le taux zéro-coupon sans risque de maturité t ,
- $p(t)$ la probabilité de défaut à la date t ,
- N le nominal du CDS,
- α le taux de recouvrement.

Cette formule est en fait la valeur actualisée de l'espérance de perte que fera le vendeur de protection si un événement de crédit a lieu : il devra verser le nominal N mais en récupérera une partie grâce au taux de recouvrement.

La valeur de la jambe fixe V_f est :

$$V_f = \sum_{t=1}^T e^{-r_t * t} * q(t) * s * N$$

Avec :

- $q(t)$ la probabilité de survie à la date t ,
- s le *spread* annuel du CDS exprimé en pourcentage du nominal.

Il s'agit donc de la somme actualisée des coupons que devra verser l'acheteur du CDS, pondérés par la probabilité de survie à chaque date ; survie qui conditionne le versement de la prime sans quoi le CDS prend fin.

Les deux jambes devant être égales en zéro, on trouve :

$$s = \frac{(1 - \alpha) \sum_t e^{-r_t * t} * p(t)}{\sum_t e^{-r_t * t} * q(t)}$$

En réalité, la formule ci-dessus est simplifiée. En effet, en pratique, le calcul de la jambe fixe tient compte des durées exactes pour calculer les coupons. Nous notons D_t la durée exacte des périodes des coupons :

$$D_t = \frac{\text{Nombre de jours entre } (t - 1) \text{ et } t}{365}$$

Un coupon à la date t vaut donc $N * s * D_t$. En outre, nous faisons l'hypothèse que, si événement de crédit il y a, alors il aura lieu au milieu d'une période. Cela implique qu'au moment de la compensation, l'acheteur devra verser au vendeur un dernier coupon, calculé *prorata temporis*, soit $n * s * D_t / 2$.

Ainsi, la valeur de la jambe fixe devient :

$$V_f = s * N * \left[\sum_{t=1}^T e^{-r_t * t} * q(t) * D_t + \sum_{t=1}^T e^{-r_t * (t - \frac{1}{2})} * p(t) * \frac{D_t}{2} \right]$$

La valeur du *spread* qui égalise les deux jambes est donc :

$$s = \frac{(1 - \alpha) \sum_t e^{-r_t * t} * p(t)}{\sum_t e^{-r_t * t} * q(t) * D_t + \sum_t e^{-r_t * (t - \frac{1}{2})} * p(t) * \frac{D_t}{2}}$$

Cette formule, plus précise, contient tout de même des approximations. Nous pouvons en effet remarquer que, alors même que le calcul des coupons se fait avec des durées exactes, l'actualisation se fait avec des durées fixes. Toutefois, l'erreur semble négligeable.

Conclusion

Nous avons commencé par étudier la mesure du risque de crédit des produits *fixed income* dans le cadre de Solvabilité II. Cette méthode comptabilise les obligations en valeur de marché et repose sur l'estimation de la variation de la valeur du portefeuille suite à un choc sur le *spread* de crédit. Nous avons vu que ce *spread* de crédit pouvait être décomposé en trois termes (liquidité, défaut et marché), mais nous avons vu que le choc ne portait en réalité que sur la composante marché. Autrement dit, le risque de défaut n'est pas intégré dans la mesure du risque de crédit standard.

Cela nous a amené à construire un modèle de mesure de risque de défaut d'un portefeuille. Dans un premier temps, nous avons étudié les différents paramètres inhérents au risque de défaut, à savoir la probabilité de défaut, la perte en cas de défaut et l'exposition au défaut. Nous avons ainsi pu constater les difficultés à estimer ces paramètres. La probabilité de défaut nous est fournie par les agences de notation (dépendance vis-à-vis des agences). La perte en cas de défaut dépend de plusieurs facteurs (séniorité de la dette, collatéral, zone géographique,...). Nous avons ensuite étudié différents modèles de mesure de risque de crédit utilisés sur le marché.

Notre choix s'est porté sur les modèles Portfolio Manager, CreditMetrics et CreditRisk⁺. Nous avons exposé le principe général de chaque méthode afin d'en déduire leurs forces et leurs faiblesses. Nous avons choisi CreditRisk⁺ car ce modèle présente l'avantage de ne demander que peu de paramètres en entrée et il utilise une approche analytique : deux atouts qui font de CreditRisk⁺ un outil simple d'utilisation et rapide.

Nous nous sommes ensuite intéressés de près au modèle que nous avons choisi. Chaque émetteur se voit attribué une probabilité de défaut construite en fonction de son *rating* et à partir d'un modèle à facteurs. Ces facteurs intègrent un paramètre de volatilité et tiennent compte des dépendances entre émetteurs. Grâce à un portefeuille fictif composé d'obligations, nous avons pu ensuite tester le modèle et en étudier la sensibilité aux différents paramètres. Nous avons pu constater que le modèle est très sensible aux choix des probabilités de défaut moyennes et aux *LGD*. En revanche, la volatilité des probabilités de défaut n'a que peu d'impacts sur le résultat final. De plus, le choix de l'unité d'exposition, qui permet la discrétisation des expositions, n'a pas de conséquences significatives sur les quantiles de perte. Notre portefeuille test ne comportant que peu d'émetteurs par rapport aux nombres de lignes totales, nous n'avons pas obtenu de résultat concluant sur la sensibilité du modèle à la granularité du portefeuille. Néanmoins, il paraît cohérent de dire que le modèle y est sensible, de par sa méthodologie de calcul.

Nous devons avoir un regard critique sur nos résultats : le modèle CreditRisk⁺ présente des défauts. Le fait qu'il y ait peu de paramètres en entrée peut rendre le modèle trop « souple » et pas assez rigoureux ou précis. Par exemple, il est très compliqué d'évaluer les contributions individuelles au risque global du portefeuille. De plus le modèle a besoin de probabilités de défaut en entrée : ces probabilités de défaut nous sont fournies par les agences de notation, ce qui entraîne

une dépendance vis-à-vis de ces agences. Néanmoins, ce modèle reste très efficace et simple d'utilisation.

Enfin, nous avons présenté dans la dernière partie un produit permettant de réduire son risque de perte : les CDS. Il serait intéressant de voir les possibilités d'intégration de ce type de produit dans le modèle afin de tenir compte de la protection qu'il procure et ainsi de mesurer l'impact qu'ils ont sur le risque de crédit.

Bibliographie

Documents réglementaires

- [1] Technical specification for QIS 5, European Commission, Février 2011
- [2] Basel Committee on Banking Supervision – An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions, Juillet 2005
- [3] Comité de Bâle sur le contrôle bancaire – Vue d'ensemble du nouvel accord de Bâle sur les fonds propres, Avril 2003
- [4] Revised Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations, EIOPA, Décembre 2012
- [5] Directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II)

Rapports d'agence

- [6] Corporate Default and Recovery Rates 1920-2010, Moody's 2011
- [7] Sovereign Government Rating Methodology and Assumptions, Standard & Poor's 2011

Descriptifs de modèles

- [8] Credit Suisse – First Boston, CreditRisk⁺, A Credit Management Framework, 1997
- [9] CreditMetrics – Technical Document, JP Morgan, 1997

Articles

- [10] A comparative analysis of current risk models, Journal of Banking and Finance, M. Crouhy, D. Galai, R. Mark, 2000
- [11] Modeling Default Risk, KMV, 2002
- [12] On Default Correlation : A Copula Function Approach, David X. Li, 2000
- [13] Credit Risk Management through CreditRisk⁺, Dr Howard Haughton

Cours

- [14] Gestion des risques et risqué de credit, Vivien Brunel, 2009
- [15] Introduction à la gestion des Risques, Thierry Roncalli, 2001
- [16] Statistique des Risques Multiples – Application à la Mesure du Risque de Crédit, Pierre Clauss

Mémoires

- [17] La gestion du risque – Cas des dérivés de crédit, Fêmin Houndonougbo, 2009
- [18] Utilisation de la méthode affine pour l'évaluation du risque crédit. Comparaison avec les méthodes classiques, Chloé Blanchard, 2008
- [19] Budgétisation des consommations en fonds propres dans le cadre d'un portefeuille de Crédit, Olivier Goachet, 2008

Annexes

Annexe 1 : Exigence en capital pour les dérivés de crédit (CDS, CLN,...) :

$$SCR_{sp}^{deriv}$$

Pour ce type de dérivés, le QIS 5 A recourt à une approche par scénario. Cela concerne en particulier les CDS (*Credit Default Swap*), les TRS (*Total Return Swap*) et les CLN (*Credit Linked Note*) dans le cas où l'assureur ne détient pas le sous-jacent et que le dérivé n'est pas utilisé comme un instrument de réduction de risque.

Le scénario retenu pour calculer ce SCR consiste en un élargissement de 600% ou un resserrement de 75% des *spreads* de crédit. Le capital alloué correspond au maximum obtenu parmi ces deux scénarios.

Annexe 2 : Exigence en capital au titre du risque de contrepartie : SCR_{def}

Le module *Risque de contrepartie* est destiné à couvrir les risques de crédit non pris en compte par le sous-module *spread*, notamment les risques de contrepartie supportés par certains dérivés de crédit ou encore les contrats de réassurance. Il intègre les expositions suivantes :

- créances,
- contreparties intervenant dans la réduction des risques (émetteur de CDS,...)
- toute autre exposition au risque de crédit non couverte par le sous-module *spread*.

Les expositions sont ensuite classifiées en deux types suivant leurs caractéristiques, puis traitées séparément :

- Type 1 : Contreparties notées et non diversifiées (Réassurance, dérivés,...).
- Type 2 : Contreparties non-notées et potentiellement très diversifiées (Créances, dettes des assurés,...)

Les risques de type 1 sont étudiés séparément et incluent la spécification d'une perte en cas de défaut (LGD) et d'une probabilité de défaut (PD) liée au rating de chaque contrepartie, tandis que les risques de type 2 sont calculés simplement sur la base des expositions. Les capitaux réglementaires pour les expositions de type 1 et 2 sont ensuite agrégés suivant la formule suivante, afin de tenir compte d'un léger effet de diversification :

$$SCR_{def} = \sqrt{SCR_{def1}^2 + 1.5SCR_{def1}SCR_{def2} + SCR_{def2}^2}$$

Il est important de préciser ici que les risques de contrepartie portés par des pays de l'OCDE ou par des organismes nationaux garantis par des pays de l'OCDE ne sont pas pris en compte dans le QIS 5.

Pour les expositions de type 1

Les inputs principaux du module risque de contrepartie sont la LGD de l'exposition et la PD associée à la contrepartie. Nous avons :

$$SCR_{def1} = \min\left(\sum_i E_i * LGD_i ; q * \sqrt{V}\right)$$

Avec :

- E_i est la valeur de l'exposition de type 1 de la contrepartie i ,
- LGD_i est la perte en cas de défaut de la contrepartie i ,
- q est le facteur quantile, où

$$q = 3 \text{ si } \sqrt{V} \leq 5\% * \sum_i LGD_i \\ = 5 \text{ sinon}$$

- V est la variance de la distribution des pertes.

La variance V est donnée par :

$$V = \sum_j \sum_k u_{j,k} * y_j * y_k + \sum_j v_j * z_j$$

En regroupant les contreparties indépendantes i au sein de chaque classe de rating j , nous calculons :

$$y_j = \sum_j E_j * LGD_j \quad \text{et} \quad z_j = \sum_j (E_j * LGD_j)^2$$

Les $u_{j,k}$ et les v_j sont définis en parcourant chaque classe de rating de probabilité de défaut p_j selon la formule :

$$u_{j,k} = \frac{p_j(1-p_j)p_k(1-p_k)}{(1+\gamma)(p_j+p_k)-p_jp_k} \quad \text{et} \quad v_j = \frac{(1+2\gamma)p_j(1-p_j)}{2+2\gamma-p_j} \quad \text{avec } \gamma = 0.25$$

Les probabilités de défaut par rating et à horizon un an p_j retenues par le QIS 5 sont présentées ci-dessous :

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC or lower
Probability of default $p_i PD_i$	0.002 %	0.01 %	0.05%	0.24%	1.20%	4.175 %	4.175 %

FIGURE 1 – Probabilités de défaut par rating

La LGD se calcule suivant une formule donnée par le QIS 5.

Pour les expositions de type 2

Les besoins en capital pour couvrir le risque de défaut des expositions de type 2 se calculent à partir d'un modèle à facteurs :

$$SCR_{def2} = x * E_{\leq T} + y * E_{> T}$$

Avec :

- x facteur de risque pour les expositions de type 2 de maturité inférieure à T mois,
- $E_{\leq T}$ somme des expositions de type 2, à l'exception des créances de plus de T mois,
- y facteur de risque pour les expositions de type 2 de maturité supérieure à T mois,
- $E_{> T}$ somme des expositions de type 2 de plus de T mois.

Le QIS 5 propose les calibrages suivants : $T = 3 \text{ mois}$, $x = 15\%$, $y = 90\%$.

Annexe 3 : CreditRisk⁺ par la transformée de Fourier rapide

Un article publié par Mario R. Melchiori étudie la possibilité d'optimiser la méthode utilisée dans CreditRisk⁺ en passant par la transformée de Fourier rapide (FFT).

L'approche de la transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform*, FFT) repose sur l'utilisation de la fonction caractéristique plutôt que sur la fonction génératrice des probabilités. Les principaux avantages de cette méthode sont sa rapidité d'exécution et sa robustesse.

Soit F la transformée de Fourier de la fonction f dans le cas continu :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

Et la transformée inverse est :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{2\pi i k x} dk$$

De le cas discret, la transformée de Fourier est :

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n / N}$$

Et la transformée inverse discrète :

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i k n / N}$$

De manière générale, cette approche transforme une séquence de nombres réels en une séquence de nombres complexes. La transformée de Fourier rapide (FFT) est un algorithme de transformation dans le cas discret qui réduit le temps de calcul.

Dans l'approche de CreditRisk⁺, la fonction génératrice des probabilités calculée est discrète : nous pouvons donc appliquer la technique de la FFT afin d'obtenir la fonction caractéristique de la distribution. La méthode est la suivante :

Tout d'abord, comme dans CreditRisk⁺, le portefeuille est divisé en secteur. Pour chaque secteur, nous calculons le « vecteur des probabilités », $l_k = [l_1^k, l_2^k, \dots, l_m^k]$ avec :

$$l_i^k = \frac{\sum_{j:j=v_i} \mu_j}{\sum_{j:j \in k} \mu_j}$$

Ensuite, nous calculons la FFT de chacun de ses vecteurs de probabilités. Nous obtenons donc la fonction caractéristique de chaque secteur. Afin d'obtenir, la distribution de pertes du secteur, il nous faut calculer la fonction génératrice de pertes, termes à termes à partir de la fonction caractéristique :

$$\tilde{l}_i^k = \left[1 - \sum_{j=1}^m \mu_j \beta (l_i^k - 1) \right]^{-\alpha} \text{ pour tout } i$$

Avec :

$$\alpha = \left(\frac{\sum_{j:j \in k} p_j}{\sum_{j:j \in k} \sigma_j} \right)^2 \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{\sum_{j:j \in k} \sigma_j}{\sum_{j:j \in k} p_j} \right)^2$$

Nous avons donc obtenu la fonction génératrice des probabilités de chaque secteur.

Les secteurs sont supposés indépendants entre eux. Ainsi la fonction génératrice du portefeuille est égale au produit des fonctions génératrices. Nous multiplions donc les fonctions génératrices de

chaque secteur entre elles. Puis, nous transformons la fonction obtenue grâce à la transformée de Fourier inverse. Nous obtenons ainsi la distribution des pertes pour tout le portefeuille.

Comme nous l'avons dit précédemment, le principal avantage de cette méthode est sa rapidité d'exécution. Cet avantage vient du fait que la méthode repose sur le calcul de la transformée de Fourier rapide. De plus, ce modèle présente l'avantage d'être simple à implémenter (par exemple, il est facile de rajouter un ou plusieurs secteurs) et se révèle très robuste (d'après les études menées sur le sujet).