

**Mémoire présenté le : 08/07/2014**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Mlle MEYRAN Adeline

Titre : La réassurance comme outil de pilotage de l'ORSA

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.*

*Membres présents du jury de l'IA*

Mme PIGEON  
MM DUBOIS  
MM ECKERT

*Signature*

Entreprise AON Benfield

Nom : *LE FLOC'H*

Signature : 

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : *DERIEN*

Signature : 

Invité

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



*Secrétariat :*

Mme Marie-Claude MOUCHON

*Bibliothèque :*

Mme Patricia BAROLO



# La réassurance comme outil de pilotage de l'ORSA

Mémoire d'actuariat

MEYRAN Adeline



Tuteur entreprise : DERIEN Anthony,  
Tuteur école : LOISEL Stéphane

## Résumé

Mots-clés : ORSA, réassurance, pilotage, appétence aux risques, volatilité.

Le 1er janvier 2016 la réforme Solvabilité II entrera en vigueur. Elle prévoit notamment que les entreprises d'assurance évaluent leur profil de risque et leur solvabilité au sein d'un processus appelé l'ORSA (*Own Risk and Solvability Assessment*).

C'est un processus de gestion des risques qui mesure les impacts des orientations stratégiques de l'assureur sur sa solvabilité actuelle et future. En s'appuyant sur l'ORSA, l'entreprise pourra envisager des mesures de risque alternatives ou encore prendre en compte de manière plus approfondie les programmes de réassurance, notamment pour les traités de réassurance non proportionnels.

Ce mémoire explicite différentes possibilités d'appétence aux risques pour une société d'assurance non vie ; le niveau cible agrégé de risque permettant à la fois d'atteindre les objectifs de croissance et de rentabilité, tout en conservant un niveau jugé acceptable de solvabilité.

A cette fin, plusieurs risques présents dans la matrice de risque Solvabilité II sont étudiés dans le cadre d'un assureur non vie : le risque de prime, de réserve, catastrophe, ainsi que le risque de défaut des contreparties dû à la réassurance.

Il est considéré par la suite, qu'il est nécessaire à l'entreprise d'avoir un intervalle de confiance entourant l'indicateur de risque retenu. Cela permet de prendre du recul sur les résultats obtenus et de mieux gérer l'aléa entourant le risque assuré.

La réassurance est un élément important dans le processus de gestion des risques. Son intégration dans le calcul des fonds propres n'est souvent pas aisée puisqu'elle est parfois dispersée dans plusieurs services de l'entreprise sans qu'il y ait forcément d'échange entre les différentes équipes.

La réassurance permet de transférer une partie du risque souscrit par l'assureur. Cette dernière peut se présenter comme un procédé d'optimisation du capital économique. Ainsi, elle offre une possibilité de pilotage du niveau de risque. Il est montré dans ce mémoire qu'elle permet également de réduire la volatilité entourant les indicateurs de solvabilité pouvant être retenus par l'entreprise.

Jusqu'ici, les cédantes choisissaient leur réassurance en fonction de deux critères principalement : l'efficacité de la protection et le budget. Dorénavant, l'entreprise pourra également tenir compte de la réduction de la volatilité entourant son niveau de ruine. Ce sont ces différents paramètres qui sont étudiés dans ce mémoire.

## Abstract

Key words : ORSA, reinsurance, companies' strategy, risk appetite, volatility.

The Solvency II project aims to review the prudential regime for insurance and reinsurance undertakings in the European Union. In December 2013, the Council of the EU adopted the Directive scheduling the application date of the Solvency II Directive to be implemented as of 1 January 2016.

Solvency II includes the Own Risk and Solvency Assessment : the ORSA. It is defined as a set of processes constituting a tool for decision-making and strategic analysis. It aims to assess, in a continuous and prospective way, the overall solvency needs in relation to the specific risk profiles of the insurance company. It shall be an integral part of the business strategy.

Insurance company need to demonstrate that their Enterprise Risk Management framework is appropriate to the nature, scale and complexity of the risks within their businesses. They would need to identify their business scenarios in order to formulate the possible risk appetite.

This thesis explains the different possibilities for a non-life insurance company to define its risk appetite. The goal is to achieve the objectives of economic growth, while maintaining the level of solvency.

In order to do this, we study non-life premium and reserve risk as well as the risk of default by the reinsurance counterparties. These risks are modeled following assumptions : including parameters used.

It has been subsequently considered that the company may need confidence intervals around the chosen risk indicator. Indeed, this would help to gain a more accurate perspective on the results and improve the management hazards surrounding the insured risk.

Reinsurance is an important element in a risk management process. Its integration in the calculation of solvency capital is not often easy because sometimes the decisions taken are dispersed throughout several departments of the company.

Reinsurance is used to transfer a portion of the risk underwritten by the insurer. Thus, it gives it a chance to control its level of risk. It is demonstrated in this paper that it also reduces the volatility surrounding the solvency indicators that can be retained by the company.

So far, insurance companies have chosen to use two parameters for their reinsurance programs : the level of protection and the budget. Now, they should consider adding a third parameters : the additional capital required if protection is inadequate or if the chosen reinsurer is not sufficiently rated . These are the various parameters that are discussed in this paper.

## Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe d' AON Benfield Analytics pour son soutien, sa disponibilité et sa bonne humeur. Chacun ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie en particulier Anthony Derien, passionné, compétent et toujours disponible pour répondre à mes nombreuses questions. Sans son implication et ses conseils avisés, ce mémoire ne serait sans doute pas ce qu'il est aujourd'hui.

Je remercie également Stéphane Loisel pour l'attention qu'il m'a accordé lors de l'écriture de ce document.

Je remercie enfin les différentes personnes qui ont participé aux nombreuses relectures.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Solvabilité II</b>	<b>5</b>
1.1 Le cadre . . . . .	5
1.1.1 Les principaux indicateurs du pilier 1 . . . . .	5
1.1.2 La procédure de surveillance de la gestion des fonds propres dans le pilier 2 . . . . .	6
1.1.3 ORSA . . . . .	6
1.1.4 Mise en place de L'ORSA au niveau de l'entreprise . . . . .	7
1.2 La réassurance . . . . .	8
1.2.1 Les différents modes de réassurance . . . . .	9
1.2.2 Les différentes formes de traités de réassurance . . . . .	9
1.2.3 Impact de la réassurance . . . . .	9
1.2.4 La réassurance sous solvabilité II . . . . .	10
<b>2 ORSA Non Vie</b>	<b>11</b>
2.1 Cadre de l'étude . . . . .	11
2.1.1 Les différents niveaux de maillage . . . . .	11
2.1.2 Analyse de la sinistralité au sein d'une maille de risque . . . . .	13
2.2 Les risques traités dans le cadre de l'étude . . . . .	15
2.2.1 Le risque non vie . . . . .	16
2.2.2 Agrégation des risques correspondant à plusieurs mailles de risque . . . . .	25
2.2.3 Le risque de défaut des contreparties de réassurance . . . . .	26
2.2.4 Les bénéfices de la diversification . . . . .	27
2.2.5 Exemple de mise en œuvre du modèle . . . . .	28
<b>3 Etude de la volatilité du SCR Non Vie</b>	<b>31</b>
3.1 Le maximum de vraisemblance . . . . .	32
3.2 Approximations basées sur les moments . . . . .	34
3.2.1 Approximation Normale . . . . .	34
3.2.2 Approximation Normal Power . . . . .	35
3.2.3 Approximation Gamma de Bowers . . . . .	36
3.2.4 Application et limites des approximations . . . . .	36
3.2.5 Application de la réassurance . . . . .	44
3.3 Convergence de la probabilité de ruine vers une distribution gaussienne . . . . .	49
3.3.1 Contenu de l'article " <i>Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin</i> " . . . . .	49

3.3.2 Applications . . . . .	53
<b>A Annexe</b>	<b>67</b>
A.1 Triangles de liquidation des sinistres . . . . .	67
A.2 Détermination des lois et des paramètres utilisés pour la simulation . . . . .	72
A.2.1 Modélisation du nombre de sinistres . . . . .	72
A.2.2 Modélisation de la sévérité . . . . .	75
A.3 Calculs de $E[S^I]$ pour différentes lois de $W$ . . . . .	76
A.3.1 le montant des sinistres $W$ suit une loi Lognormale $(a; b)$ . . . . .	76
A.3.2 le montant des sinistres $W$ suit une loi $Pa(\alpha, \beta)$ . . . . .	77
A.4 Etude des variations de la VaR . . . . .	78

# Introduction

A l'heure où de nombreux économistes proposent une sortie de la zone Euro, l'assurance fait un bond en avant vers une Europe unie et équilibrée. Après de longues concertations entre les entreprises et les autorités Européennes, Solvabilité II sera mis en œuvre pour l'ensemble du marché des assurances le 1er janvier 2016.

Avant cette date butoir, les entreprises doivent rendre un premier état de leurs comptes en septembre 2014 en remplissant le *reporting* préparatoire.

La mise en œuvre de Solvabilité II engendre toute une démarche, un processus, que les entreprises d'assurance et de réassurance doivent suivre. Le but est de les amener à une gestion des risques plus sûre et mieux adaptée à leur profil.

Sur cette thématique, l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment* ou Evaluation interne des risques et de la solvabilité), élément principal du pilier 2, est incontournable pour une gestion des risques optimale.

L'assureur a besoin d'une méthodologie stable et complète, qui reflète les spécificités de son profil de risque et de sa sensibilité. Afin de pouvoir relever ce défi, nous proposons un processus aidant les entreprises à construire leur ORSA.

Dans un premier temps, nous montrons, que des réflexions sur les risques souscrits, les niveaux de limites à retenir, les indicateurs propres aux besoins internes et les choix des programmes de réassurance adéquates sont indispensables.

Notre étude se base sur la sinistralité réelle de la compagnie sur plusieurs années afin de rendre les résultats propres à la compagnie. Grâce à la méthode de Monte-Carlo, on construit une sinistralité future en adéquation avec les prévisions de l'entreprise, tout en prenant en compte les recommandations des autorités prudentielles.

L'avantage de ce processus est que l'entreprise ne disposera pas seulement d'un niveau de VaR à 99.5 % (*Value at Risk*), mais de toute la distribution de sinistralité pour un horizon de temps qu'elle aura choisi en fonction de ses données disponibles et de son business plan. Ainsi, elle pourra prétendre à un niveau d'exigence plus haut, ou connaître le niveau de prudence auquel elle se situe actuellement, si elle le désire.

Cependant, connaître ce montant peut se révéler insuffisant pour la compagnie. Elle souhaite avoir également un intervalle de confiance autour de celui-ci.

Plusieurs méthodes sont envisagées dans cette étude. La première utilise des approximations de la fonction de distribution de la sinistralité et analyse les variations du montant de la VaR

en fonction des paramètres du modèle. Deux difficultés découlent de cette méthode : d'une part, ces approximations ne fournissent qu'un intervalle réduit autour de la VaR et d'autre part, elles s'avèrent complexes à mettre en œuvre lorsque la réassurance gagne en complexité.

Une seconde méthode utilise la convergence de la probabilité de ruine en temps fini vers une variable normale.

Cette convergence est décrite dans les articles *Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin* et *Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes* de Loisel, S., Mazza, C. and Rullière, D.

C'est donc à l'aide du montant de fond propre correspondant à son niveau d'exigence, mais aussi de l'intervalle de confiance qui l'entoure, que l'entreprise pourra, à la fois gérer ses risques et répondre aux exigences des autorités de contrôle.

# Chapitre 1

## Solvabilité II

Depuis les années deux mille, les limites de la législation Solvabilité I sont de plus en plus pointées du doigt. Certains risques nouvellement prépondérants tels que le risque de taux, de défaut, opérationnel, ne sont pas pris en compte et les besoins en fonds propres s'éloignent du niveau d'exposition aux risques des assureurs.

Un autre aspect à prendre en considération est l'agrandissement des filiales à l'étranger. En effet, cela peut modifier la typologie du profil de risque d'une compagnie (sommes assurées, âge des assurés, etc.)

Afin de s'adapter à ces évolutions, les autorités prudentielles ont réagi.

L'objectif de la réforme Solvabilité II est d'effectuer une révision de l'ensemble des règles de calcul des fonds propres que doivent détenir les assureurs. En prenant en compte de nouveaux types de risques, notamment qualitatifs, elle leur permet de quantifier le capital nécessaire à couvrir les risques qu'ils détiennent. Cette révision offre également aux compagnies une harmonisation du cadre prudentiel au niveau européen. Ainsi, elles pourront se développer plus facilement à l'étranger tout en maintenant un bon niveau de protection à leurs assurés.

### 1.1 Le cadre

Solvabilité II repose sur trois piliers ayant chacun des préconisations propres.

Dans cette partie, il sera décrit dans un premier temps les principales mesures de risque retenues par les autorités et utilisées dans le premier pilier. Ensuite, les attentes du législateur pour le deuxième pilier seront explicitées.

#### 1.1.1 Les principaux indicateurs du pilier 1

Le premier pilier a pour objectif de définir les normes quantitatives du calcul des provisions techniques et des fonds propres. Ces niveaux règlementaires sont définis par deux indicateurs : le MCR et le SCR.

Le MCR (Minimum de Capital Requis) représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique et pourra entraîner le retrait de l'agrément de l'entreprise.

le SCR (*Solvency Capital Requirement*) est le capital cible imposé aux sociétés d'assurance pour garantir leur solvabilité. Il doit permettre d'absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle.

En pratique, le CEIOPS<sup>1</sup> et la Commission Européenne ont retenu une probabilité de ruine de 0,5 % et une mesure du risque de type *Value-at-Risk* (VaR). La notion de VaR s'est originellement développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans les problématiques assurantielles.

Cette mesure de risque a le mérite de reposer sur un concept simple : la  $VaR_{99,5\%}(X)$  est le montant couvrant les sinistres du risque X avec une probabilité de 99,5 %.

Elle est définie comme :

$$VaR_{99,5\%}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1 - 99,5\%\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 99,5\%\}$$

Le MCR et le SCR sont les niveaux de capitaux requis pour que la probabilité de ruine à un an soit inférieure à 15 % et à 0.5 % respectivement.

### 1.1.2 La procédure de surveillance de la gestion des fonds propres dans le pilier 2

Le deuxième pilier encourage les compagnies à adopter une démarche ERM (*Enterprise Risk Management*) afin qu'elles soient en mesure par elles-mêmes d'apprécier et de mesurer leurs risques. Cela se fait notamment via l'application du dispositif "*Own Risk and Solvency Assessment*" (ORSA).

### 1.1.3 ORSA

Au cœur de la réforme, l'ORSA se définit comme un processus conduisant à un outil d'analyse décisionnelle et stratégique. Il doit permettre aux administrateurs de prendre des décisions afin de gérer prudemment la compagnie avec une vision claire des risques pesant sur l'entreprise et des capitaux à immobiliser. L'ORSA est un processus que toute entreprise d'assurance ou de réassurance doit mettre en place. Ainsi, elles vont évaluer de manière continue et prospective, le besoin global de solvabilité lié au profil de risque de plusieurs années.

Présent dans la directive, l'ORSA est défini dans l'article 45, comme "Un processus au minimum annuel par lequel chaque entreprise d'assurance et de réassurance se doit d'identifier et d'évaluer son profil de risque. Cela comprend les risques à court et à long terme existants, ainsi que ceux auxquels elle pourrait être exposée ultérieurement". L'ORSA doit également prendre en compte les limites des risques tolérées par l'entreprise et la stratégie commerciale de celle-ci.

L'article 45 rappelle également que "l'entité se doit de respecter en permanence les exigences de capital et les exigences concernant les provisions techniques". Le processus doit donc systématiquement en tenir compte.

---

1. Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors

Un *Issues Paper* dédié à l'ORSA a été publié en 2008. Il précise que l'ORSA est "un processus propre à l'entreprise" et qu'il n'y a pas de formulaire sous une forme prédéfinie à remplir. L'ORSA doit être un processus pluriannuel, à l'image du business plan de l'entreprise. Il doit également se faire suivant les différentes natures, complexités et niveaux de risques encourus. L'évaluation peut être faite par un groupe spécifiquement formé au sein de l'entreprise pour la mise en place du processus.

L'objectif étant d'identifier les sociétés "les plus risquées". Les autorités de contrôle auront en leur pouvoir la possibilité de réclamer à ces sociétés de réduire leur exposition aux risques, et / ou de détenir un capital plus élevé que le montant suggéré par le calcul du SCR. Ce montant de l'éventuelle exigence de fonds propres supplémentaires est appelé *capital add-on*.

#### 1.1.4 Mise en place de L'ORSA au niveau de l'entreprise

A l'aide des *guidelines* des dernières publications, les autorités précisent leurs attentes et les interactions de l'ORSA avec les autres exigences. Il existe cependant une certaine souplesse au niveau des dispositifs et des choix techniques à mettre en œuvre. Par exemple, l'entreprise peut choisir les risques à cibler. Elle peut également choisir le calibrage des stress tests à appliquer, les indicateurs de déclenchement, ainsi que les techniques de projection des SCR.

L'entité est amenée à se poser des questions :

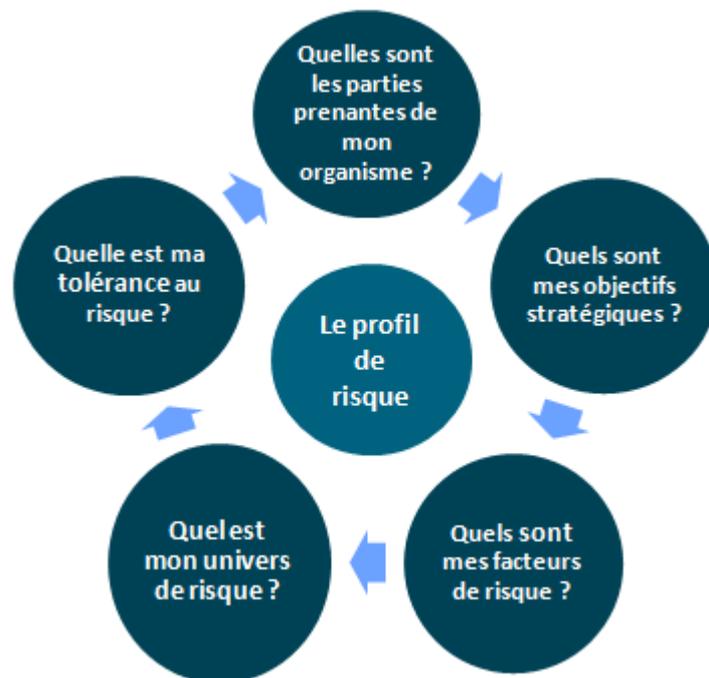


FIGURE 1.1 – Mise en place d'un processus ORSA : la définition du profil de risque de l'entreprise

L'entreprise identifie les risques auxquels elle est soumise en lien avec sa structure, son organisation et son profil d'activité. Une attention particulière est portée sur les risques qui ne sont pas ou mal pris en compte dans le cadre de l'évaluation du SCR dans le pilier 1 ou sur les risques futurs.

Cette démarche doit être faite en impliquant l'ensemble des services en charge.

Dans un premier temps, l'entité définit son appétence aux risques. Il s'agit du niveau maximal de risque agrégé qu'un organisme accepte de prendre, en vue de la poursuite de son activité, ou de son développement.

L'appétence aux risques est généralement décidée par le conseil d'administration de l'entreprise. Elle peut être l'exigence que les fonds propres couvrent 150 % du SCR dans 95 % des cas selon les scénarii par exemple.

L'appétence aux risques introduit généralement trois paramètres :

- une dimension à suivre telle que le niveau global des fonds propres ou un SCR spécifique,
- un niveau requis,
- une probabilité d'occurrence associée.

Dans un second temps, la direction générale définit la tolérance aux risques de l'entreprise. C'est le niveau de risque que l'assureur accepte de prendre à un échelon moins macro. Cela peut être, par exemple, le montant de perte probable que l'entreprise peut supporter au niveau d'une branche, ou encore, le fait que la part du SCR alloué aux risques de défaut doit représenter 5% du SCR total.

Afin de rendre opérationnelle l'analyse précédente, il est nécessaire de traduire la politique d'appétence et de tolérance aux risques de la compagnie au niveau opérationnel. Cela peut être traduit par exemple par une entente avec la cellule des placements en réassurance afin de choisir un apériteur mieux noté, ou encore un programme de réassurance différent tout en arbitrant de manière à maintenir les niveaux de budgets souhaités.

Lors de la conception du processus, l'ensemble des directions de la compagnie sont impliquées, l'ORSA est un véritable projet d'entreprise *Top to Down*. Ce n'est pas une capture de la situation financière de l'entreprise au 31/12, mais c'est une véritable aide au pilotage stratégique sur le long terme. De plus l'ORSA offre de grandes possibilités de personnalisation du risque, puisque l'entreprise prend en compte les risques qui découlent directement de son *business plan*.

## 1.2 La réassurance

La réassurance est un des outils principaux de la gestion des risques d'une compagnie d'assurance. Elle permet de piloter et de déterminer l'exposition des fonds propres d'un organisme assureur.

### 1.2.1 Les différents modes de réassurance

Trois modes de réassurance existent. Tout d'abord, la réassurance peut être obligatoire. L'assureur, appelé "cédante", s'engage à céder tout risque correspondant aux conditions définies dans le traité sans effectuer aucune sélection. De son côté, le réassureur s'engage à accepter l'ensemble des risques.

Un deuxième mode de réassurance est la réassurance facultative. L'accord s'établit pour chaque police. Ainsi, la cédante est libre de proposer les risques qu'elle souhaite au réassureur qui peut les accepter ou non.

Le dernier mode de réassurance est la réassurance facultative/obligatoire. Pour ce mode, la symétrie est brisée. Comme pour la réassurance facultative, la cédante est libre de céder ou non les risques de son portefeuille. En revanche, le réassureur est obligé d'accepter les risques qui lui sont proposés.

### 1.2.2 Les différentes formes de traités de réassurance

Chaque mode de réassurance précédant peut exister soit sous forme de réassurance dite proportionnelle, soit sous forme de réassurance dite non-proportionnelle. Une explication détaillée est faite dans [2].<sup>2</sup>

La réassurance proportionnelle est nommée ainsi car la prime de réassurance et l'indemnisation des sinistres de la cédante par le réassureur se calculent selon le même pourcentage. Les résultats du réassureur dépendent donc directement de la qualité de souscription de la cédante. Les bénéfices mais aussi les pertes éventuelles sont partagés.

La réassurance non proportionnelle, n'implique pas de relation de proportionnalité entre prime cédée et participation du réassureur dans les sinistres. Ce type de réassurance a pour but de protéger la cédante de la survenance d'événements catastrophiques/exceptionnels.

### 1.2.3 Impact de la réassurance

La réassurance permet à la cédante d'obtenir une réduction de son engagement sur des risques individuels ainsi qu'une protection contre des pertes multiples ou importantes. Elle garantit une meilleure solvabilité de l'assureur. L'utilisation de traités non proportionnels permet d'homogénéiser l'ensemble des risques, en ramenant la rétention de la compagnie à un niveau unique. Elle diminue efficacement la volatilité puisque le réassureur prend à sa charge la partie supérieure des sinistres importants.

La réassurance proportionnelle effectue un simple partage de risque, au même titre que la coassurance. C.Partrat indique dans [2] : "En terme de risque de ruine, la réassurance proportionnelle a un effet équivalent à une augmentation de capital".

---

2. Blondeau J., Partrat C. (2004) *La Réassurance, approche technique*

#### 1.2.4 La réassurance sous solvabilité II

Solvabilité II établit les niveaux de capitaux propres en relation avec le risque. Il est donc logique que la réassurance soit prise en compte dans la réforme. Avec Solvabilité I, le bénéfice de la réassurance est limité. La réassurance proportionnelle permet de réduire l'exigence de marge jusqu'à 50 % en non-vie. La situation est différente pour la réassurance non proportionnelle ; elle est prise en compte uniquement les années suivant un sinistre majeur. Son impact sur l'exigence de marge est faible.

Dans Solvabilité II, la réassurance est prise en compte dans le bilan, par une créance de réassurance. Elle est calculée en faisant la différence entre les *Best Estimate* brut et net de réassurance, et ajustée en fonction de la probabilité de ruine des réassureurs.

Cet actif génère une charge en capital au titre du risque de contrepartie.

Il doit être calculé selon les mêmes principes que le calcul du *Best Estimate* en intégrant la probabilité de défaut du réassureur. Pour cela, les valeurs actuelles probables des flux de trésorerie futurs doivent prendre en compte la probabilité de défaut des contreparties et le montant moyen des pertes qui en résulteraient.

Le calcul doit être mené pour chaque réassureur et pour chaque LoB (*Line of Business*).

Le risque de défaut inattendu du réassureur, pouvant survenir dans un scénario défavorable, est quant à lui capturé dans le SCR de contrepartie (module Default). L'évaluation de ce risque fait intervenir, entre autres, la notation du réassureur ou le ratio de solvabilité pour déterminer la probabilité de défaut, ainsi que les nantissements du réassureur dans le calcul des pertes en cas de défaut.

On peut cependant regretter que la formule standard n'apprécie les effets de la réassurance proportionnelle que de manière imparfaite, et encore moins ceux de la réassurance non-proportionnelle. Seuls les traités en excédent de sinistres sont pris en compte dans le risque de souscription et le risque catastrophe non-vie.

Les entreprises ont fait de nombreux retours à l'EIOPA sur ce sujet, et sur les difficultés qu'elles ont rencontrées en remplissant le QIS 5.

Cette limite de la formule standard provient de la volonté du législateur de conserver une approche suffisamment simple pour pouvoir être mise en œuvre par l'ensemble des acteurs du marché. Pour affiner la prise en compte de la réassurance, les assureurs peuvent mettre en place un modèle interne complet ou partiel. De cette façon ils pourront modéliser leur propre programme de réassurance, ce qui leur offre davantage de flexibilité en termes de pilotage du capital réglementaire.

De la même manière, les traités de réassurance sont pris en compte dans le processus ORSA.

La réassurance est un outil très souple pour le *capital management*, cependant sa modélisation et la détermination des besoins en réassurance afin de déterminer les bornes des traités sont complexes.

Solvabilité II modifie le besoin en réassurance, soit en quantité, soit en qualité. Cela peut conduire à de nouvelles formes de couverture, comme la titrisation et l'appel aux marchés financiers. Tout dépend ensuite de l'orientation stratégique donnée par la direction générale.

## Chapitre 2

# ORSA Non Vie

Le but de l'entreprise est de mettre en place un format efficace d'ORSA qui permet d'associer de manière cohérente l'appétence aux risques et la solvabilité. La vision de l'ORSA est pluriannuelle.

Le processus pourra ainsi être bénéfique à l'entreprise.

### 2.1 Cadre de l'étude

Au niveau mondial, les primes d'assurance cumulées représentent plus de 4.000 milliards d'euros réparties de la manière suivante : 57 % en vie et 43 % en non vie. Les primes de réassurance représentent environ 190 milliards d'euros, la Non Vie représentant 70 % de ces primes. La réassurance est donc principalement présente en non-vie, et environ 80 % de l'activité d'AON Benfield repose sur ce type de traités.

Pour ce mémoire, il a été fait le choix de centrer l'étude d'impact de la réassurance sur les besoins en capitaux couvrant le risque non vie.

La méthodologie développée au cours de cette étude peut guider les cédantes, qui possèdent des protections en réassurance non vie, à mettre en place un ORSA avec une réassurance optimale en termes de choix stratégiques personnels à l'entreprise.

#### 2.1.1 Les différents niveaux de maillage

Lors de la mise en place de l'ORSA, l'entreprise doit s'accorder sur le niveau de détail qu'elle utilisera tout au long du processus. Quels que soient les éléments modélisés, il convient de se placer à un niveau de granularité et de sophistication adapté.

Au niveau macro, le risque étudié peut être segmenté par branche ; Responsabilité Civile Automobile (RCA), dommages aux biens, Responsabilité Civile Générale (RCG)... A un niveau plus fin, l'étude peut se faire par garantie ou par réseau de distribution. Enfin à un niveau micro, le risque peut être réparti par produit.

L'assureur peut choisir un niveau encore plus petit, mais une finesse excessive engendre un besoin important d'hypothèses associées et donc, un manque de robustesse. Il est important de se baser à un niveau de maillage adapté, permettant une modélisation fiable et réaliste de l'activité.

Ci-dessous sont présentés des exemples de granularités possibles pour la branche dommages aux biens par type de garanties :

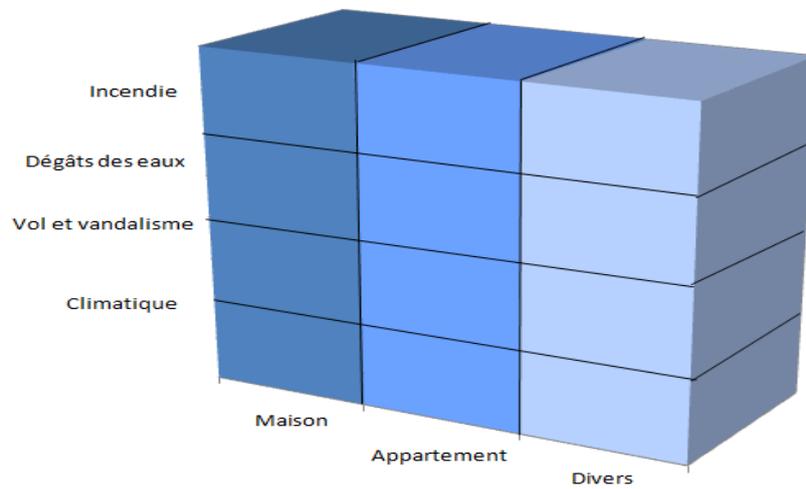


FIGURE 2.1 – Granularités par type de garanties pour la branche dommages aux biens

Ou encore par type de branches :

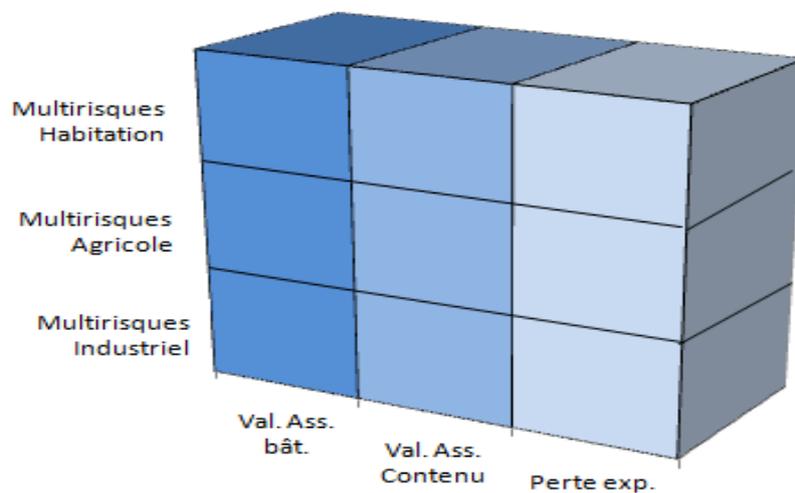


FIGURE 2.2 – Par type de branches

L'entreprise doit donc choisir, pour chacun des risques sur lesquels elle s'est engagée, un maillage adapté qu'elle utilisera tout au long du processus.

Dans la suite de cette étude, nous prendrons comme hypothèse que nous sommes à l'intérieur d'une case que nous appelons : "une maille".

### 2.1.2 Analyse de la sinistralité au sein d'une maille de risque

Solvabilité II demande aux sociétés d'avoir une vision précise des risques qu'elles assurent. Pour cela l'assureur doit observer sa sinistralité et être capable de la modéliser.

#### Partition de la sinistralité

Un moyen utilisé pour simuler la sinistralité de la maille étudiée est de la partitionner. On distingue généralement trois types de sinistralité :

- Les sinistres attritionnels : ce sont des sinistres qui présentent une forte fréquence et un coût faible. Ce sont les événements récurrents. Cette sinistralité sera modélisée par une charge globale.
- Les sinistres graves se distinguent de ce qui est de l'ordre du récurrent. Ce type de sinistre est souvent très coûteux pour l'assureur. Malgré leur faible occurrence, leur poids en montant n'est pas négligeable. On les définit souvent comme des sinistres dont l'indemnisation dépasse un certain montant. Par rapport aux sinistres attritionnels, ils ont un impact plus important sur le résultat de l'assureur et une volatilité accrue. Pour les modéliser, on adopte un "modèle collectif". La fréquence et l'intensité des sinistres sont simulés séparément.

Un modèle collectif est défini comme la somme aléatoire de sinistres :

$$S_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$$

Où  $N_t$  est la v.a du nombre (la fréquence) de sinistres touchant la maille pendant la période  $[0,t]$  et  $X_i$  est la suite de variables aléatoires des montants individuels de sinistres.  $S_t$  est la sinistralité totale de la période  $[0,t]$ .

- Les sinistres catastrophiques sont des événements provoquant des dommages simultanés à un grand nombre de biens ou de personnes, ayant pour conséquence un montant global de sinistres très élevé. Il s'agit du risque de pointe d'une compagnie d'assurance.

On obtient ainsi une partition de la sinistralité plus fine et donc une connaissance plus précise de la sinistralité.

En reprenant l'exemple de la branche Dommages aux biens, voici une représentation du découpage Attritionnel / Grave / Catastrophe :

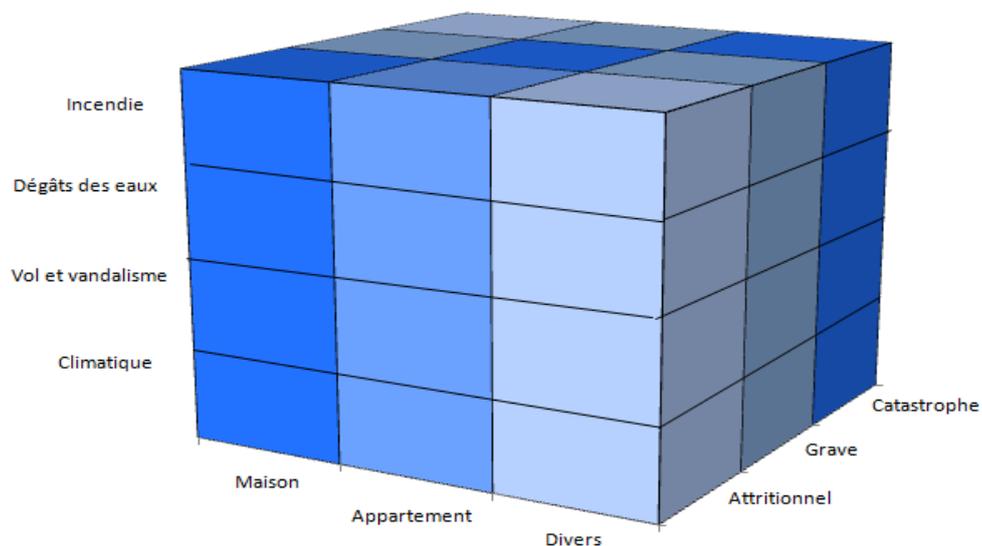


FIGURE 2.3 – Découpage de la sinistralité : Attritionnel / Grave / Catastrophe

Dans cette étude, nous nous plaçons dans une maille que nous partitionnons en plusieurs segments afin d'obtenir le découpage suivant :

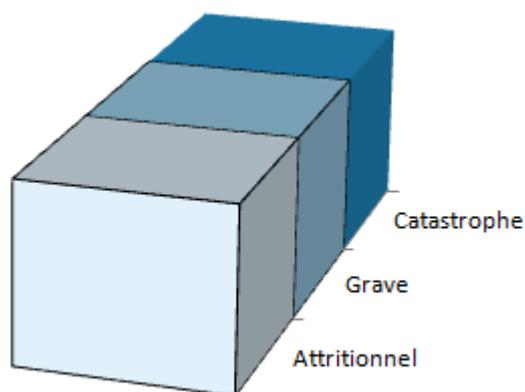


FIGURE 2.4 – Découpage de la sinistralité d'une maille de risque

## 2.2 Les risques traités dans le cadre de l'étude

Cette étude traite des différents modules qui impactent les traités de réassurance non vie :

- le module de risque Non Vie (Prime, réserve, catastrophe, rachat)
- le module de risque de défaut

Ces risques sont présentés dans la matrice suivante :

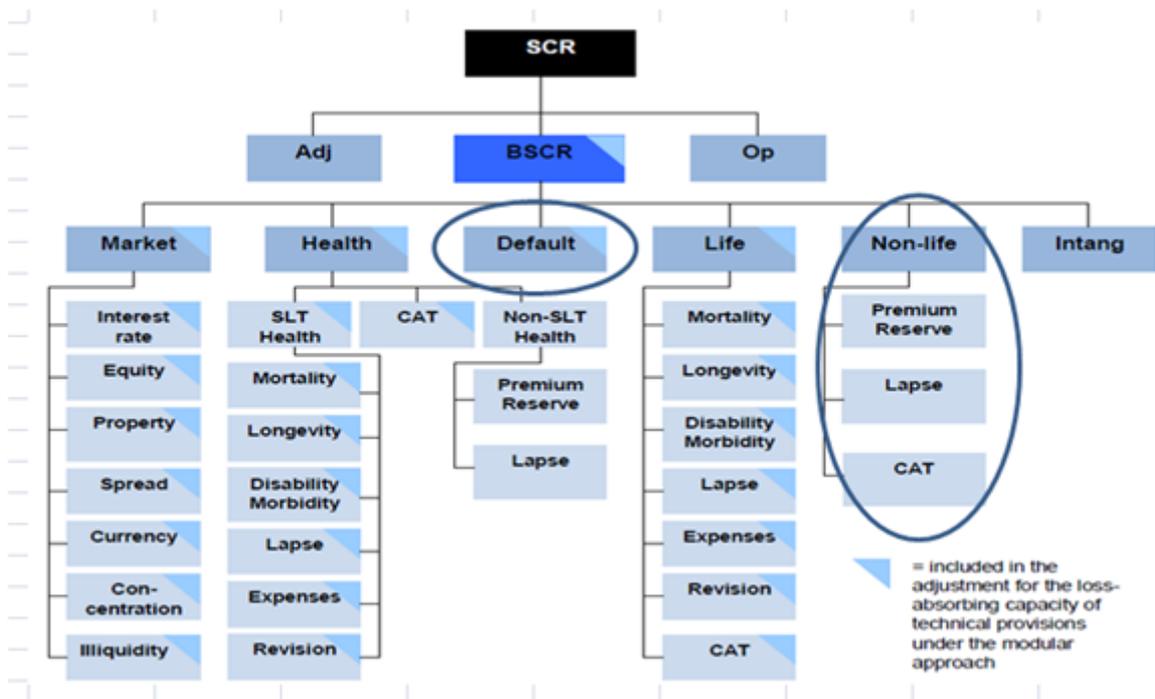


FIGURE 2.5 – Modules de risque étudiés

Il a été choisi d'utiliser la matrice des risques issue du pilier 1 car le processus ORSA mis en place doit à tout moment répondre aux exigences de Solvabilité II. Ainsi, en utilisant cette méthode, la compagnie d'assurance sera garantie de respecter au minimum les exigences du pilier 1, tout au long du processus.

Malgré l'utilisation de la matrice standard, l'étude des modules sera propre à chaque cédante. En effet, le but recherché n'est pas l'application d'une formule standard mais plutôt un processus ORSA basé sur une méthodologie de modèle interne. La sinistralité est simulée à partir de données issues de la compagnie d'assurance, et les traités de réassurance appliqués sont ceux envisagés pour celle-ci.

Dans un premier temps, un focus sera réalisé sur les méthodes de calcul des montants de fonds propres nécessaires pour couvrir chacun des modules de risque étudiés. Dans un second temps, ces capitaux seront agrégés et la volatilité entourant ces résultats sera étudiée.

### 2.2.1 Le risque non vie

Les risques de primes et de provisionnement sont agrégés dans un même sous module, cela montre leur lien. Le risque de rachat (*Lapse*) est introduit à la matrice de risque par le QIS 5, pour les contrats ayant une option de renouvellement unilatérale (côté assuré). Enfin, le risque catastrophique couvre les événements d'origine naturelle et humaine. Ce dernier module correspond à la partie catastrophe de la sinistralité segmentée précédemment.

#### Risque de souscription

Le sous module de risque de souscription Non Vie (*Premium-Reserve*) permet de déterminer le besoin de fonds propres lié à une sous estimation de la prime et/ou du provisionnement, ainsi qu'à la volatilité entourant ces deux quantités. La volatilité peut provenir soit des cycles de souscription, soit de phénomènes sociaux, juridiques ou économiques comme la baisse des taux.

Pour calculer le besoin en fonds propres, on s'appuie sur la sinistralité passée de la maille de risque. Avant de les utiliser pour la modélisation, il est indispensable d'actualiser les montants de ces observations en calculant les montants *as if* des sinistres. Le montant *as if* est le coût du sinistre s'il survenait maintenant, avec les mêmes caractéristiques. Ainsi la modélisation des sinistres tient compte des évolutions aussi bien économiques, juridiques que fiscales. On peut ensuite dissocier les sinistralités de la maille de risque (voir figure 2.4)

En découpant ainsi la sinistralité, on obtient une plus grande précision du risque qu'encourt l'assureur. Ce n'est cependant pas encore suffisant. La problématique rencontrée par l'assureur est liée à la nature même de l'activité d'assurance, à savoir l'inversion du cycle de production. L'assureur a pris l'engagement d'indemniser tous les sinistres survenus durant la période de couverture. Il convient donc de constituer des provisions pour indemniser les victimes, même si le sinistre n'est déclaré, puis clôturé, que des années plus tard. Or, la vie d'un sinistre peut être longue, par exemple certains sinistres peuvent être déclarés des années après leur survenance. Ainsi, dans certaines branches d'assurance, appelées à déroulement long (RC par exemple), on estime que les sinistres seront étalés sur une période de 10 à 15 ans. Afin de prendre en compte cet aspect de la sinistralité il convient de construire des triangles de liquidation pour chacun des types de sinistralité et de les compléter.

Plusieurs méthodes pour compléter les triangles de liquidation peuvent être utilisées : Chain Ladder, London Chain, Bootstrap . . . Plus de détails peuvent être trouvés dans "Provisionnement technique en assurance non vie", de Partrat C [11].<sup>1</sup>

---

1. Partrat C., Lecoœur E., Nisipasu E., Nessi M. et Reiz O. (2007) "*Provisionnement technique en assurance non vie*"

En supposant que les sinistres s'écoulent sur une période maximale de 11 ans, on obtient :

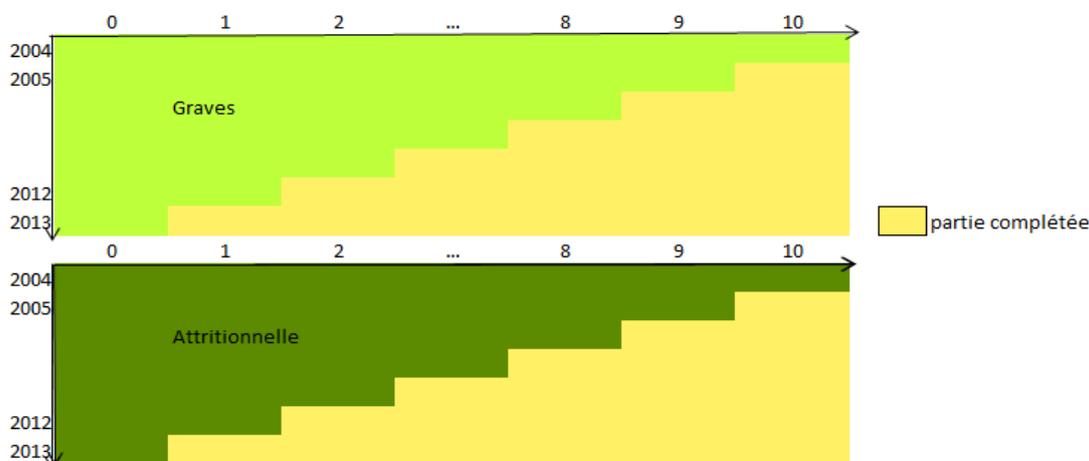


FIGURE 2.6 – Triangles de liquidation pour la sinistralité attritionnelle et grave

On additionne ensuite les triangles des deux sinistralités et la sinistralité est projetée sur l'année 2014 en fonction des hypothèses que l'entreprise a faites en construisant son business plan ORSA.

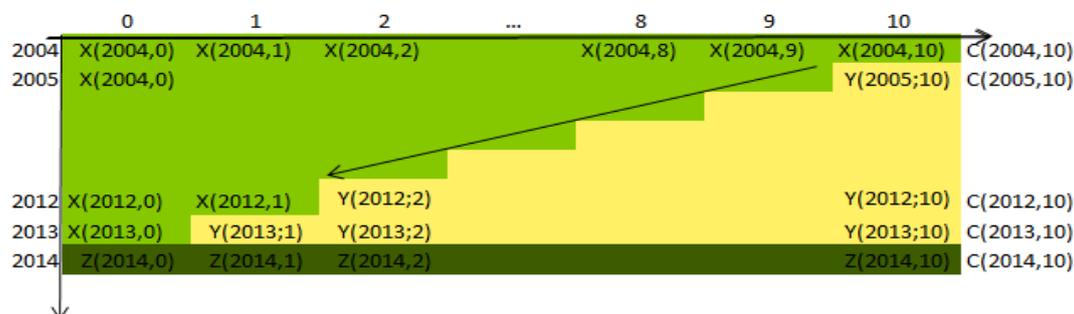


FIGURE 2.7 – Somme des triangles de liquidation pour la sinistralité grave et attritionnelle

- $X_{(2011;1)}$  correspond au total des montants payés au cours de l'année 2012 (= 2011 + 1) pour des sinistres attritionnels et graves survenus au cours de l'année 2011.
- $Y_{(2011;2)}$  est le montant qui devrait être payé en 2013 (= 2011 + 2) pour la sinistralité grave et attritionnelle issue de 2011.

Notons également :

- $C_{2004;9} = X_{(2004;0)} + X_{(2004;1)} + \dots + X_{(2004;9)}$  le montant cumulé des paiements des sinistres survenus l'année 2004 vu après 9 années
- L'information disponible à la fin de l'année 2012 sera notée :  $F_{2012} = \{(C_{i;j}), 0 \leq i + j \leq 2012\} = \{(X_{i;j}), 0 \leq i + j \leq 2012\}$ .
- $R_{2011;2} = \sum_{j=3}^{10} Y_{(2011;j)} = C_{2011;10} - C_{2011;2}$  le coût total des paiements restant à effectuer à la date 2013 (2011+2) pour la sinistralité 2011.

Les difficultés que rencontrent les assureurs pour le provisionnement est de déterminer l'ensemble des  $\{R_{i;2013-i}, 2004 \leq i \leq 2013\}$  du triangle.

En effet, lorsque l'ensemble :  $R = \sum_{i=2004}^{2013} R_{i;2013-i}$  est additionné, le montant obtenu correspond à l'ensemble des sinistres survenus lors des exercices précédents non encore réglés. La somme s'interprète comme étant les provisions pour les sinistres à payer.

Le montant de provisions estimé fin 2012 pour l'année de survenance 2005 est tel que

$$\widehat{R}_{2005;7} = \mathbb{E}(R_{2005;7} | F_{2012}) = \mathbb{E}(C_{2005;10} | F_{2012}) - C_{2005;7}$$

On dit faire un **boni** pour l'année de survenance 2005 entre 2012 et 2013 si

$$\mathbb{E}(C_{2005;10} | F_{2012}) > \mathbb{E}(C_{2005;11} | F_{2013})$$

De même, on parle de **mali** si  $\mathbb{E}(C_{2005;10} | F_{2012}) < \mathbb{E}(C_{2005;10} | F_{2013})$  Le cours d'Arthur Charpentier "Boni-Mali et provisionnement" permet d'approfondir le sujet[4]<sup>2</sup>.

Pour le calcul du risque de prime de l'année 2014, on ne s'intéresse qu'à la partie basse du triangle. On peut l'écrire comme  $Z = \sum_{k=0}^{10} Z_{(2014;k)}$ . Ainsi, l'ensemble des montants de sinistres attritionnels et graves issus 2014 qui devront être payés, sont regroupés.

Afin de calculer les risques les sinistralités attritionnelles et graves doivent être simulées. En effet, l'ORSA étant un processus prospectif, il faut donc modéliser la sinistralité future à partir de la sinistralité observée et des hypothèses du *business plan*. A partir des modélisations, des triangles de liquidation pour les années futures sont construits. On en déduit les besoins en fonds propres correspondants.

Les calculs sous Solvabilité II sont basés sur l'utilisation de la VaR de niveau 99.5 %. Une manière de l'obtenir est la méthode des simulations de Monte Carlo. On simule n fois la sinistralité afin d'obtenir une courbe de "densité de probabilité" sur laquelle on pourra lire directement la VaR de niveau 99.5 %.

Ainsi, le processus consiste à :

- simuler n fois les sinistralités attritionnelle et grave pour chaque année de 2004 à 2014, on en déduit n vecteurs  $C_{Attri} = [C_{2004;10}, C_{2005;10}, \dots, C_{2014;10}]$  et  $C_{Grave} = [C_{2004;10}, C_{2005;10}, \dots, C_{2014;10}]$
- construire à partir des vecteurs C et des cadences de règlement de chaque année, les triangles de liquidation complétés pour chaque type de sinistralité
- additionner les  $Y_{(i;j)}$  pour chacun des triangles afin d'obtenir n fois les provisions pour les sinistres à payer. Ainsi avec ces n résultats nous pouvons construire une courbe de densité de probabilité et lire la VaR qui sera le SCR de réserve pour l'année étudiée.

En lisant la VaR de niveau 99.5 % sur la courbe de densité de probabilité de la somme des  $Z_{(i;j)}$  les SCR de prime des différentes années sont obtenus.

---

2. Charpentier A.(2009) *Boni-Mali et provisionnement*, Formation SEPIA-INSTITUT DES ACTUAIRES

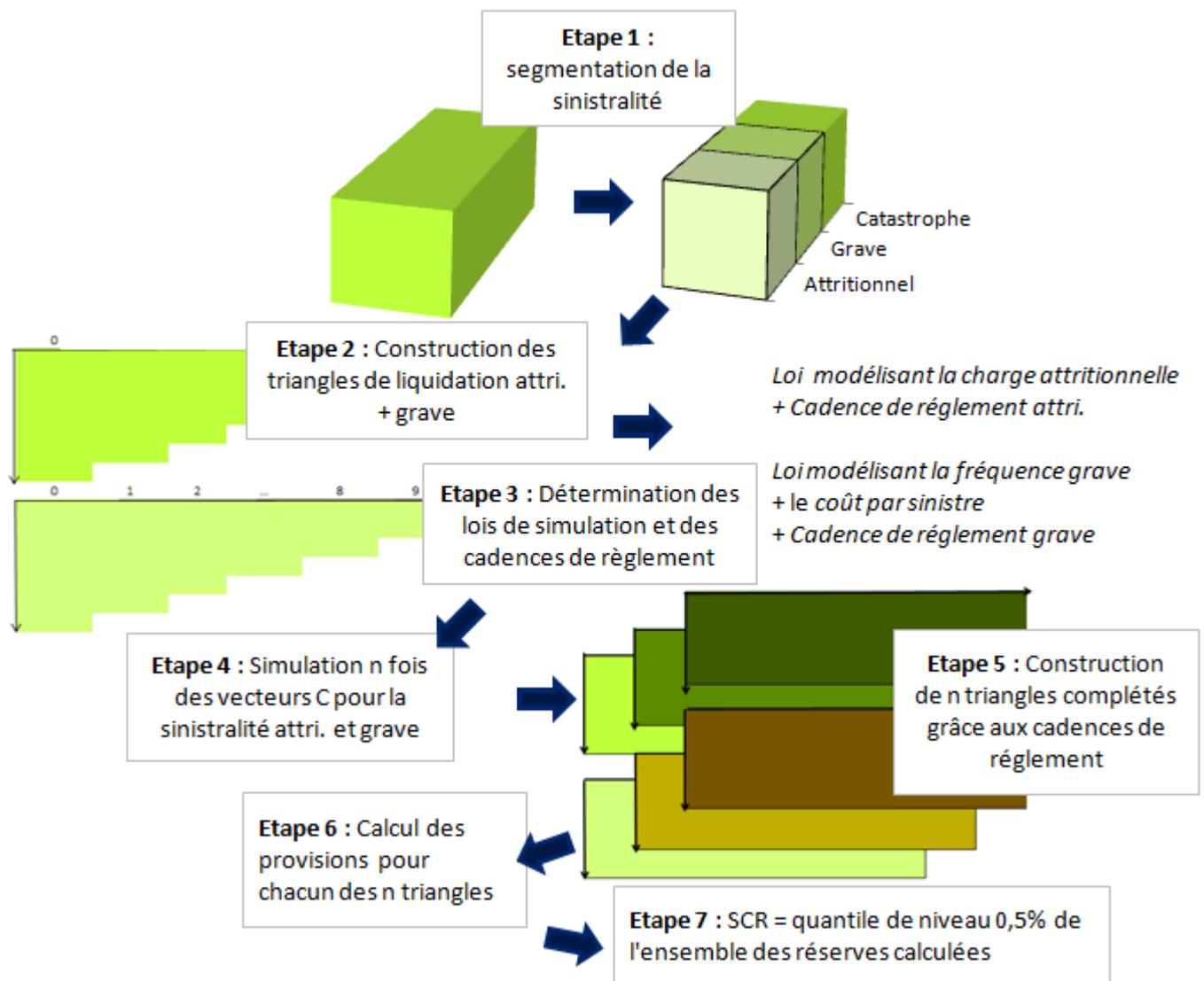


FIGURE 2.8 – Les trois piliers de Solvabilité II

Les calculs du SCR de réserve et de prime ainsi effectués permettent de mieux analyser leurs similitudes. En effet, ce sont les mêmes méthodes de détermination qui sont utilisées.

### Net de réassurance :

Pour calculer les SCR de réserve et de prime net de réassurance, il faut appliquer les traités de réassurance aux sinistralités simulées puis suivre le même processus que précédemment. Les programmes de réassurance à utiliser sont ceux existants pour l'ensemble des simulations des années passées, ainsi que les programmes envisagés dans l'étude d'appétence pour la sinistralité future.

Cela peut être compliqué à modéliser lorsqu'il s'agit de réassurance non proportionnelle. La prise en compte de la priorité, de la portée ou de la clause de stabilisation peuvent présenter quelques difficultés (pour les détails sur les clauses particulières en réassurance se référer à "La Réassurance, approche technique" par Jacques BLONDEAU et Christian PARTRAT [2]). Certains outils informatiques utilisés pour cette étude permettent la simulation des différentes clauses de réassurance sur une sinistralité donnée.

### Risque catastrophe

Le second module de risque, présent dans la partie Non Vie de la matrice des risques de Solvabilité II, est le module de risque catastrophique (Cat). Cette partie de la sinistralité est la troisième observée lors de la segmentation présentée précédemment.

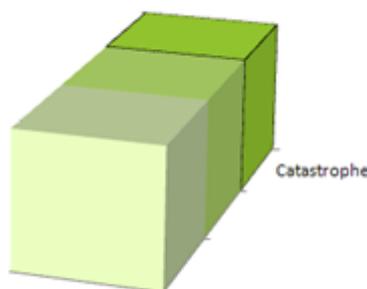


FIGURE 2.9 – Représentation de la sinistralité catastrophe au sein de la maille de risque

Les sinistres catastrophes sont en général des sinistres survenus à cause d'un événement rare et coûteux. Selon leur origine, ils peuvent être classés dans deux sous catégories : les catastrophes naturelles et les catastrophes humaines.

Par définition, les catastrophes naturelles sont des événements de faible fréquence et de forte sévérité tels les tremblements de terre, les tempêtes ou encore les inondations.

Les catastrophes humaines " man made ", sont des sinistres liés à des activités humaines tels l'explosion d'une usine ou un acte terroriste.

Ces événements sont difficiles à capturer statistiquement. Il n'est pas facile d'établir une base de données historiques suffisante du fait de leur faible fréquence. Afin de pallier cette difficulté, la sinistralité catastrophique est modélisée.

Pour calculer le SCR Cat net de réassurance, une nouvelle sinistralité est calculée en appliquant les traités de réassurance à la sinistralité obtenue par simulation.

La sinistralité catastrophique est simulée à l'aide de logiciels modélisant la probabilité que de tels sinistres arrivent. Les logiciels les plus utilisés sur le marché sont AIR, EQECAT, et RMS. Certains seront privilégiés selon la spécificité du risque étudié. En effet, chaque logiciel a sa particularité : AIR est principalement utilisé par les réassureurs, particulièrement aux US et aux Bermudes, EQECAT est très utilisé sur les marchés asiatiques, quant à RMS il est particulièrement utilisé en Europe et en Amérique du nord.

Ces logiciels fonctionnent selon une logique en quatre modules : l'aléa, la vulnérabilité, l'exposition et enfin le volet financier.



FIGURE 2.10 – Exemple de bibliothèque d'événements

**L'aléa** : L'aléa est un processus qui va permettre la construction de modèles stochastiques à partir de données historiques. Les différents événements historiques ayant touché le territoire ainsi que les paramètres physiques issus de ces événements (les mesures sismiques, les mesures GPS, les études de zones inondables) sont recensés.

Ensuite, certains paramètres physiques sont changés. Cela peut être la taille de l'événement, son empreinte etc. Pour une tempête, on peut modifier la vitesse du vent, la direction, ou encore pour un tremblement de terre, la magnitude, la situation de l'épicentre etc. A chacun de ces changements une probabilité est associée, elle est liée à la possibilité qu'une telle transformation apparaisse. Ainsi, sont créés des scénarii joints à des probabilités d'occurrence. Une fois ce processus terminé, une bibliothèque d'événements est obtenue, elle est supposée répertorier l'ensemble des événements susceptibles de survenir sur un territoire donné.

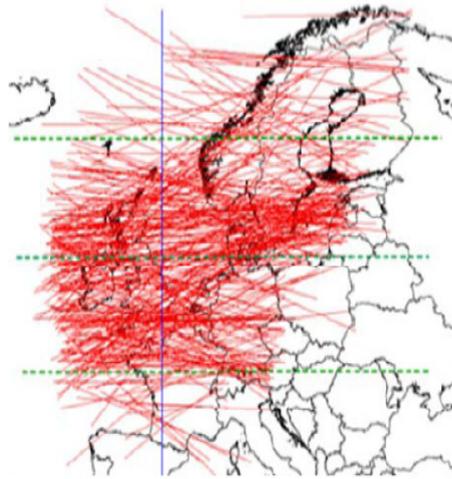


FIGURE 2.11 – Exemple de bibliothèque d'événements tempête sur le nord de l'Europe

**La vulnérabilité** Par la suite, les zones de vulnérabilité du territoire étudiées sont recherchées et chacune se verra associée des courbes de vulnérabilité.

Une courbe de vulnérabilité est une fonction mathématique donnant des taux de dommages attendus sur des biens exposés en fonction des intensités des événements. Les fonctions sont calculées à partir de données empiriques (observation de sinistres) ou de données de laboratoire et d'études d'ingénierie. L'endommagement est directement lié aux propriétés physiques (résistance) de chaque enjeu (bâtiments, voitures etc.). Le taux d'endommagement pour un même événement est donc différent selon le type de bâtiment (matériaux de construction, toiture, hauteur, etc.) et selon sa localisation. Les typologies de construction varient, quant à elles, essentiellement en fonction, des régions et du climat.

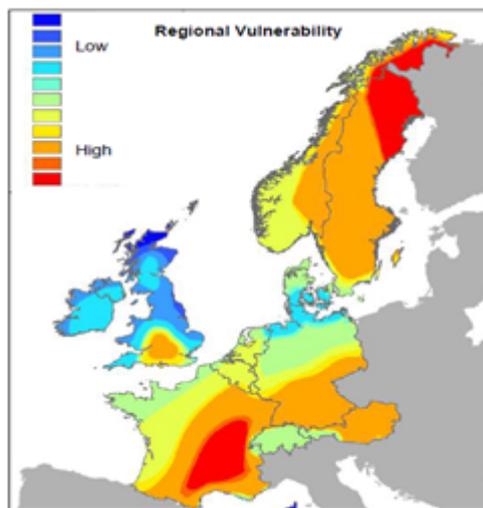


FIGURE 2.12 – Exemple issu de AIR pour le risque tempête

**L'exposition** L'exposition du portefeuille dépend de la localisation des biens assurés et des sommes assurées. Le niveau de précision de l'exposition est fonction du nombre de paramètres utilisés. Certains modèles disposent de plus de six cents paramètres distincts tels que la nature des constructions, leur âge, le type de toiture ou encore le type branches d'activité (résidentielle, commerciale, industrielle etc.)

On observe fréquemment que les logiciels ont un niveau de précision très élevé. Cependant, les systèmes d'informations mis en place chez les assureurs ne disposent pas forcément d'un niveau de détail équivalent ce qui peut réduire l'exactitude des résultats.

Par ce processus, un ensemble de scénarii est construit. Chaque scénario associe une sinistralité moyenne, un écart type autour de celle-ci, une exposition maximale et une probabilité d'occurrence.

Nom du scénario	Sinistralité attendue	Ecart type	Exposition maximale	Probabilité d'occurrence
5498562	XXX	XXX	XXX	5.2E-10
5498563	XXX	XXX	XXX	5.0E-10
5498564	XXX	XXX	XXX	5.1E-10
5498565	XXX	XXX	XXX	5.0E-10

TABLE 2.1 – Table de sinistralité catastrophique

Afin d'obtenir la sinistralité catastrophique simulée, un certain nombre de scénarios sont tirés aléatoirement dans la table créée. On applique ensuite les limites, les franchises et la réassurance existante.

## Risque de rachat

La mise en place du risque de rachat dans le module non vie fut longtemps un sujet de débat entre les acteurs de l'assurance. L'EIOPA a confirmé son existence dans le QIS 5 pour les contrats ayant une option de renouvellement unilatérale.

De plus, depuis juillet 2013, la loi défendue par Benoît Hamon, entend faciliter la résiliation des contrats d'assurance des particuliers. En effet, les assurés peuvent désormais résilier à tout instant au-delà d'une année d'engagement leurs contrats d'assurance automobile, multirisque habitation (MRH) ainsi que leurs contrats d'assurance dits affinitaires (associés à l'achat d'un bien ou d'un service comme la téléphonie mobile).

Le projet de cette loi a entraîné de nombreux débats entre le cabinet du ministre délégué à la Consommation et les assureurs. Pour certains le texte de loi n'allait pas assez loin pour la protection des consommateurs lors de la souscription d'un emprunt immobilier. La résiliation annuelle de l'assurance emprunteur en cours de prêt a été le sujet d'amendements déposés à l'initiative des sénateurs Philippe Dallier et Catherine Procaccia. Cependant, il n'ont pas été adoptés par le sénat en seconde lecture.

Le risque de rachat est donc un risque sujet à débat quant à son domaine d'application. Il ne porte, pour le moment, qu'uniquement sur les contrats pluriannuels. Or, très peu de cédantes possèdent des contrats pluriannuels. Il est donc choisi de ne pas traiter le risque de rachat au cours cette étude.

### Agrégation des risques au niveau du module non vie

Afin que l'étude mesure au mieux la réalité du risque porté par l'assureur, le SCR non vie doit être calculé à partir de l'ensemble de la sinistralité attritionnelle, grave et catastrophique. Dans les parties précédentes, il a été expliqué qu'à partir de données historiques, il était possible de déterminer les cadences de règlement, ainsi qu'un processus de simulation de chaque type de sinistralité (attritionnelle, grave et catastrophique). Une fois les simulations faites, on construit les triangles de liquidation correspondants.

Pour estimer le besoin en fonds propres nécessaire pour couvrir le risque du module non vie (risque de souscription et de catastrophe) les triangles complétés de chaque type sont additionnés.

Pour l'année 2015 le triangle sera ainsi défini :

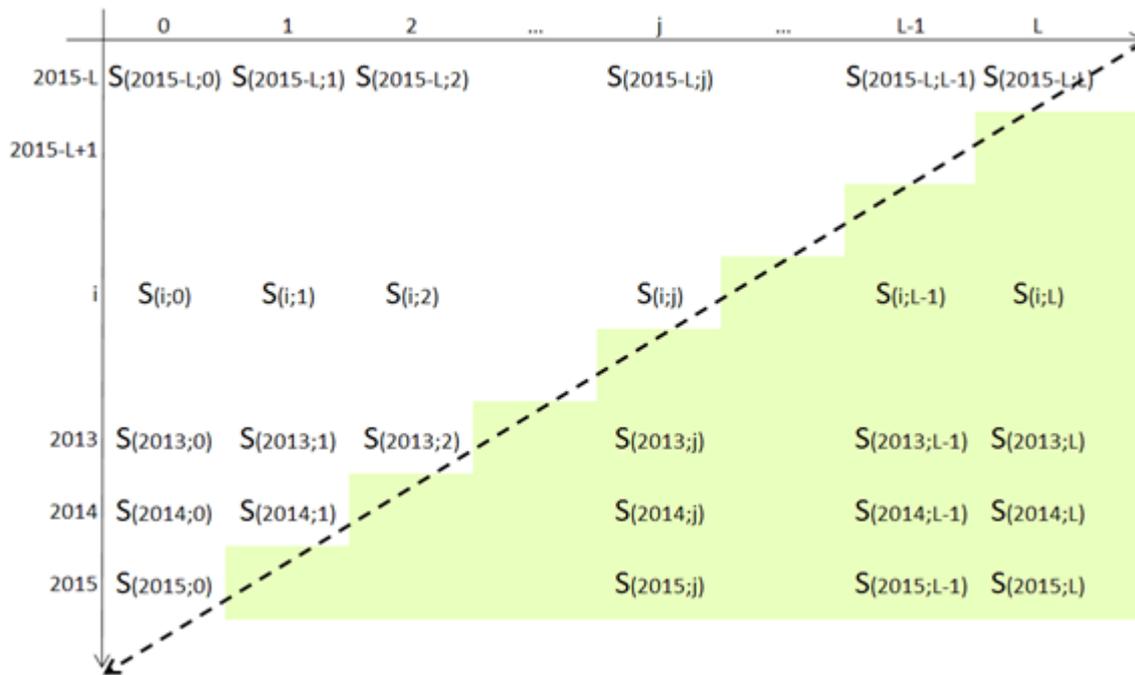


FIGURE 2.13 – Triangle de liquidation de l'ensemble de la sinistralité

Où  $L$  est la longueur maximale des cadences de règlement des trois sinistralités de chacune des branches, et  $S(2014 ; j)$  est la sinistralité attritionnelle, grave et catastrophique issue de l'année 2014 et payée en  $2014+j$ .

En utilisant le même procédé que précédemment, c'est-à-dire en additionnant l'ensemble des  $S$  verts, en répétant la simulation  $n$  fois et en construisant la courbe de densité de probabilité. Ainsi, en lisant la VaR, on obtient le SCR correspondant au module Non Vie.

## Remarques

On note que le choix de la taille des mailles choisie par l'entreprise lors de la partition de la sinistralité est très importante, puisque chaque portion apporte une lourdeur supplémentaire au modèle (plus de simulations différentes, plusieurs triangles de liquidation). Cependant, la partition apporte une plus grande précision dans les modélisations, et permet à l'entreprise d'affecter des scénarii précis à chaque maille de risque.

Par exemple, la loi de finance rectificative de 2012, votée le 29 décembre 2012 vise à régler le problème de financement du fond de garantie des assurances obligatoires (FGAO). Les conséquences de cette réforme sont des sources d'incertitudes qui impacteront le risque de prime et de réserve de la branche RC automobile. Il est donc important d'avoir des scénarii particuliers pour chacune de ces branches, afin d'obtenir une précision plus grande dans la simulation de la sinistralité.

### 2.2.2 Agrégation des risques correspondant à plusieurs mailles de risque

La démarche suit la logique expliquée précédemment.

Dans un premier temps, on segmente la sinistralité de chaque maille (attritionnelle, grave et catastrophe) afin de pouvoir simuler au mieux chacune de ces sinistralités.

On fera attention à ce que les événements tirés au sort pour modéliser la sinistralité catastrophiques des différentes mailles de risque soient les mêmes. En effet, lorsqu'un événement tiré au sort comprend une catastrophe touchant plusieurs mailles, il faut que la sinistralité de l'ensemble des mailles soit impactée.

Par exemple, un événement impliquant de la grêle touchera la maille contenant la branche automobile mais aussi la maille contenant la branche multirisques habitation.

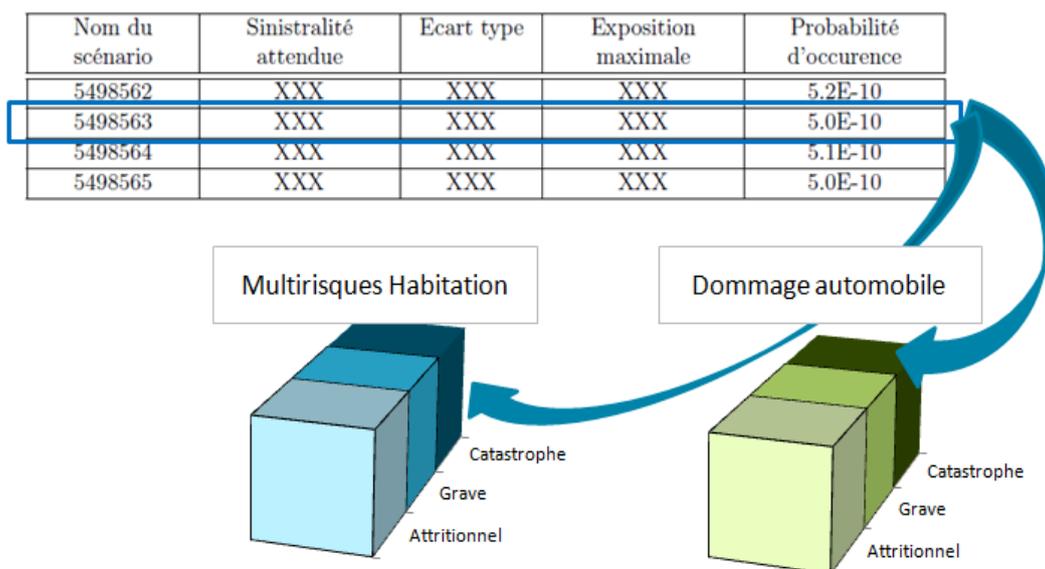


FIGURE 2.14 – Événement touchant plusieurs mailles

Dans un deuxième temps, on construit des triangles de liquidation complétés que l'on va ensuite additionner de façon à obtenir un triangle pour les sinistralités de l'ensemble des mailles observées.

Enfin, en faisant la somme des éléments de la partie inférieure du triangle et en itérant  $n$  fois le processus on peut déterminer la courbe de densité de probabilité de la sinistralité. Et ainsi déterminer la VaR de niveau 99.5 % qui est le SCR Non Vie de l'ensemble des mailles de risque observées.

### 2.2.3 Le risque de défaut des contreparties de réassurance

Le risque de défaut est le risque de perte résultant d'une défaillance imprévue ou d'une dégradation de la note de crédit des contreparties ou des débiteurs de contrats de réduction des risques, tels que des dispositifs de réassurance. Le risque de contrepartie doit couvrir les contrats de réduction des risques suivants :

- les traités de réassurance ;
- les produits dérivés et de titrisation ;
- les créances auprès d'intermédiaires ;
- toute autre exposition de crédit non couverte dans le sous-module risque de spread.

Le risque de défaut concerne donc, entre autre, la défaillance des réassureurs. Certains peuvent être insolvable. Or, seul l'assureur est tenu d'indemniser l'assuré en cas de sinistre.

En effet, l'assureur doit indemniser son assuré en cas de sinistre même si le réassureur ne respecte pas son engagement, car le contrat de réassurance ne lie juridiquement que l'assureur à son réassureur.

Afin de mesurer le risque de défaut, on utilise les rating des réassureurs. C'est une note déterminée par des agences de notation telles que Fitch Ratings, Moody's ou Standard and Poor's. Les agences scrutent tous les éléments de rentabilité des réassureurs : notation de la dette, de la solidité financière, de la crédibilité des dirigeants, de la cohérence stratégique et donnent une note au réassureur. Cette note peut aller de AAA à D avec 21 étapes intermédiaires (AA+, AA, AA- etc.).

On utilise également les probabilité de passage d'un rating à un autre ainsi que la probabilité de défaut par note. Les calculs de ces probabilités s'appuient sur des données historiques sur l'actualité économique ainsi que les tendances boursières etc. Les résultats de ces recherches sont présentés sous forme de matrice :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & AAA & AA+ & AA & \dots & Pb\ de\ ruine & Taux\ de\ recouvrement \\
 AAA & \left( \begin{array}{c} P_{(AAA;AAA)} \\ P_{(AAA;AA+)} \\ \vdots \end{array} \right. & \begin{array}{c} P_{(AAA;AA+)} \\ P_{(AA+;AA+)} \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} P_{(AAA;AA)} \\ P_{(AAA;AAA)} \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} R_{(AAA)} \\ R_{(AA+)} \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} S_{(AAA)} \\ S_{(AA+)} \\ \vdots \end{array} \\
 AA+ & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

où  $P_{(AAA;AA+)}$  est la probabilité qu'un réassureur noté AAA soit rétrogradé en AA+,  $R_{(AAA)}$  est la probabilité de défaut d'un réassureur noté AAA et  $S_{(AAA)}$  son taux de recouvrement. Ce taux représente la partie de la dette qui sera recouvrée en cas de défaut du réassureur. S'il

n'existe pas d'estimation fiable de ce taux, aucun taux supérieur à 50 % ne peut être utilisé. Le calcul de ce taux doit tenir compte du risque de crédit du réassureur ainsi que de l'ensemble des couvertures de risque que le réassureur garantit à l'assureur (nantissements, etc.).

Pour calculer le SCR de défaut, il faut dans un premier temps simuler l'ensemble des sinistralités étudiées précédemment brut et net de réassurance, afin de déterminer la partie de la sinistralité prise en charge par les réassureurs. Une fois la charge incombant au réassureur déterminée, pour chaque réassureur et chaque traité, on utilise la matrice précédente pour trouver le pourcentage des charges sujet à défaut. C'est le *Loss given default*. En renouvelant n fois ce processus, on obtient un ensemble de montants dont on prend le quantile à 0,5 %.

## 2.2.4 Les bénéfices de la diversification

L'intérêt de calculer l'ensemble des SCR des sous modules, puis les SCR de chaque classe de risque est de pouvoir observer les effets de la diversification des risques.

On parle de bénéfice de diversification lorsque le SCR calculé pour l'agrégat des classes considérées est inférieur à la somme des SCR pour chacune des classes.

Ainsi, en comparant les différents SCR calculés, l'entreprise pourra observer si la diversité de son activité lui est bénéfique ou non en terme de capitaux immobilisés.

Voici un exemple de graphique illustrant le bénéfice de diversification de l'activité d'un assureur.

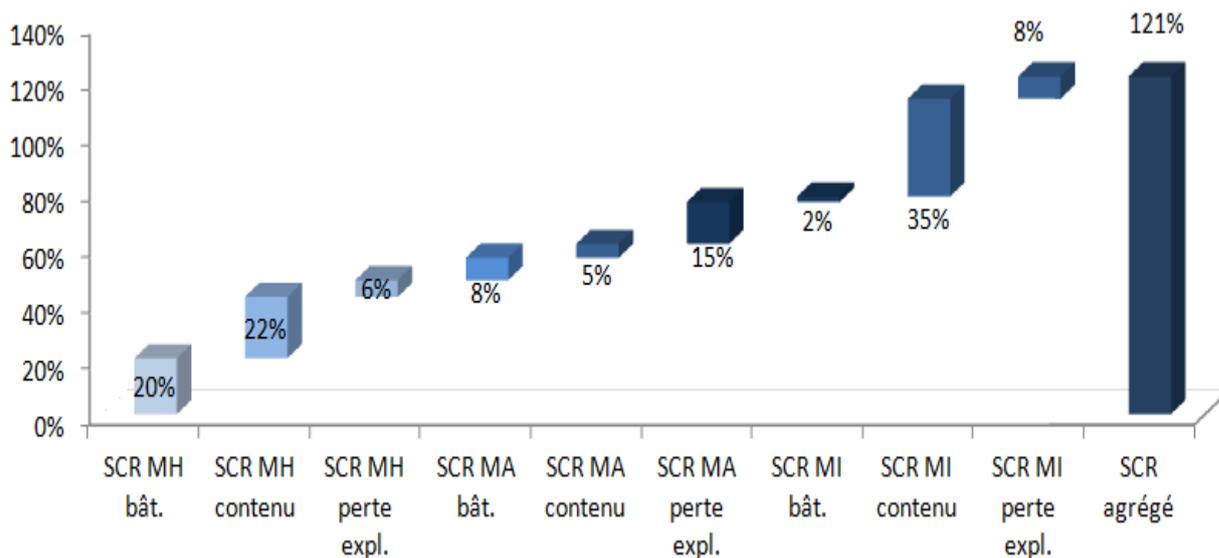


FIGURE 2.15 – Répartition des différents SCR de chaque classe de risque dans le SCR non vie global

Ce graphique se lit de gauche à droite. Les SCR de chaque maille de risque sont exprimés en pourcentage du SCR agrégé. On observe que l'entreprise fait un gain de 21 % du SCR agrégé grâce à la diversification de ses risques.

En calculant l'ensemble des SCR, l'assureur peut également analyser le besoin en fonds propres requis par chaque classe de risque. Ainsi, les classes à forte consommation de fonds propres pourront faire l'objet d'une attention particulière.

### 2.2.5 Exemple de mise en œuvre du modèle

Une compagnie d'assurance possède 2 branches non vie. La direction décide que la granularité choisie pour préparer l'ORSA sera macro, il y aura ainsi 2 mailles de risque. Le business plan prévoit pour la branche 1 une augmentation du portefeuille de 10% pour les cinq prochaines années. En effet, une grosse campagne de publicité a été faite et ils en attendent des résultats. Ils considèrent que la moyenne de sinistralité par assuré restera constante, ils envisagent donc une hausse de 10 % de sinistralité pour les cinq prochaines années.

Pour la branche 2, ils anticipent une augmentation constante de 2 %, du portefeuille et de la sinistralité, pour les cinq ans à venir.

L'entreprise définit également son appétence aux risques, elle souhaite que ses fonds propres couvrent 150 % du SCR global. En matière d'allocation de capital, la direction a choisi d'utiliser une méthode proportionnelle. En effet ne possédant que deux branches, la méthode proportionnelle est la plus simple en terme de communication.

En étudiant la sinistralité de chaque branche, l'entreprise segmente les mailles et obtient les lois et les coefficients afin de simuler les sinistralités attritionnelle et grave. La bonne connaissance de leur portefeuille leur permet également de modéliser la sinistralité catastrophe de chaque branche.

En combinant ces éléments, le business plan et les programmes de réassurances envisagés, l'entreprise est en capacité de modéliser des triangles complétés pour chacune des branches pour les 5 années futures. Ainsi, elle en déduit les montants des SCR de chaque branche, les  $SCR_{NV}$  et les SCR de défaut pour les 5 ans :

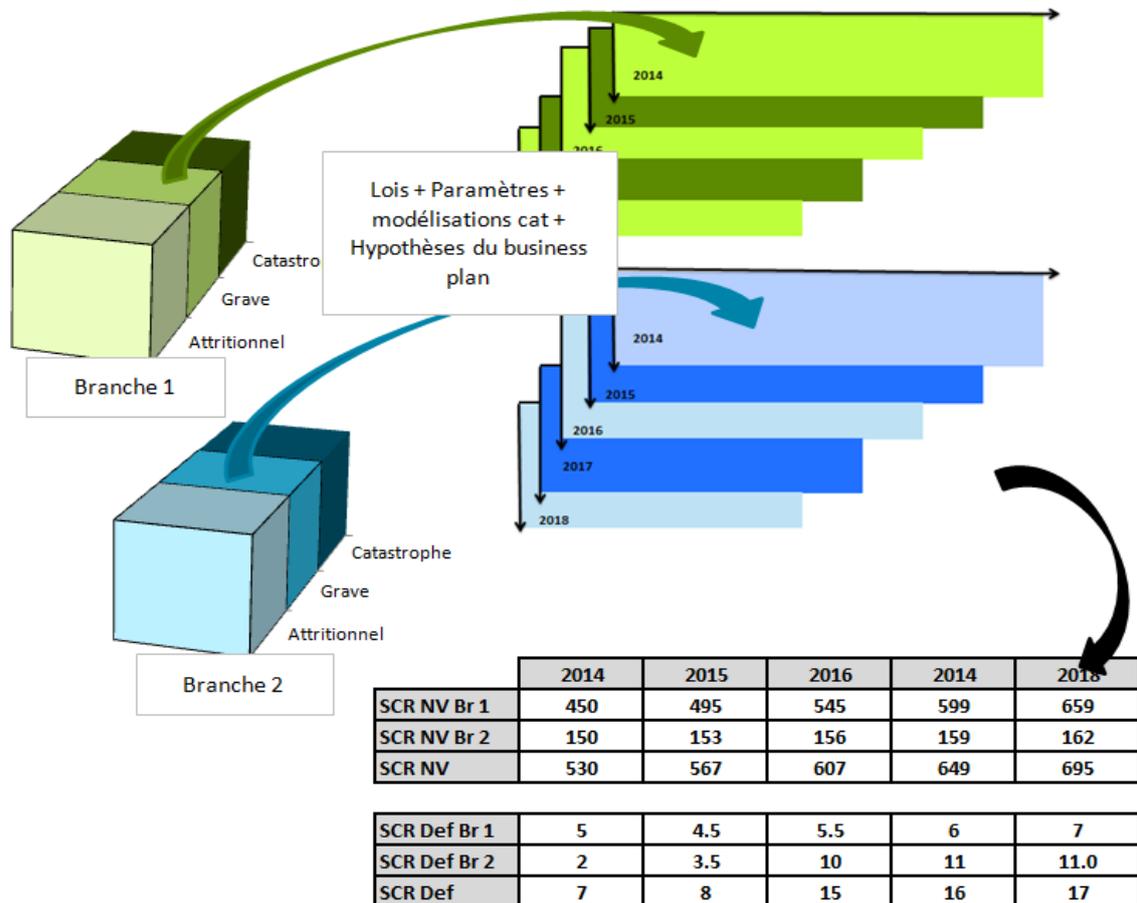


FIGURE 2.16 – Exemple de mise en place d'un ORSA au sein d'une entreprise (en EUR millions)

L'entreprise contrôle ainsi également, le bénéfice que lui apporte la diversification de ses branches.

A partir des  $SCR_{NV}$ , des  $SCR_{Def}$  et de sa définition de l'appétence aux risques précisée précédemment, l'entreprise en déduit son besoin en capitaux propres au global :

$$BSCR = \sqrt{0.5 \times SCR_{NV} \times SCR_{Def} + SCR_{NV}^2 + SCR_{Def}^2}^3 \text{ et Fonds Propres} = 150\% \times BSCR$$

3.  $BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$  où  $\rho_{i,j}$  correspond à la corrélation entre les risques  $i$  et  $j$  issue de la formule standard. 0.5 est le coefficient de corrélation entre le risque NV et le risque de défaut

	2014	2015	2016	2017	2018
BSCR (EUR millions)	534	571	614	657	703
Fonds propres (EUR millions)	800	857	922	986	1055

TABLE 2.2 – Calculs des BSCR pour chaque année selon l'appétence aux risques définie par l'entité

Enfin, ses capitaux seront alloués par branche de manière proportionnelle :

	2014	2015	2016	2017	2018
BSCR alloué BR1 (EUR millions)	400	435	472	513	558
BSCR alloué BR2 (EUR millions)	134	136	142	144	145

TABLE 2.3 – Allocation du BSCR par branche

On observe dans cet exemple que le  $SCR_{Def}$  ne bénéficie pas de la diversification des branches et qu'il ne cesse d'augmenter pour la branche 2 alors que sa sinistralité n'évolue pratiquement pas. L'entreprise doit dans ce cas s'interroger sur son programme de réassurance, son efficacité et le *rating* des réassureurs impliqués.

## Chapitre 3

# Etude de la volatilité du SCR Non Vie

Les parties précédentes ont permis d'obtenir des montants correspondants à différents SCR (prime, réserves, cat etc.). Cependant, il peut être nécessaire à l'entreprise d'avoir un intervalle de confiance entourant le SCR obtenu. En effet, cela permet à l'entreprise de prendre du recul sur les résultats obtenus, de mieux gérer l'aléa entourant le risque assuré et également de pouvoir lisser les effets engendrés par des problèmes de données. Plusieurs facteurs peuvent engendrer de la volatilité : le choix de la distribution, le choix des paramètres utilisés lors de la simulation de la sinistralité, l'utilisation d'approximations, ou encore le nombre de simulations.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la volatilité engendrée par le choix des paramètres. Pour cela, dans un premier temps, une approximation paramétrique de la distribution de la charge des sinistres est utilisée.

De telles approximations existent, elles sont définies avec les moments de  $S$  et s'expriment à partir de ceux de  $N$  et  $X$ .

Dans un second temps, nous étudierons la convergence de la probabilité de ruine vers une distribution gaussienne, ce qui nous permettra d'obtenir la volatilité entourant la VaR désirée.

Comme il a été expliqué précédemment, ce mémoire est centré sur l'assurance non vie. En effet, ce type d'assurance est le plus présent sur le marché de la réassurance. Cependant l'appellation non vie est très large et peut regrouper toutes sortes d'assureurs. Nous allons ici réduire notre champs d'étude en se concentrant sur les mutuelles d'assurance non vie et les banques assureurs. Ce choix est fait car ce sont ces entreprises, qui en premier lieu, ont recourt aux réassureurs pour diminuer leur besoin en fonds propres.

Notre vision de la compagnie d'assurance en tant que courtier est réduite. Elle se limite généralement à quelques branches. Il est donc difficile pour nous d'avoir les données suffisantes pour faire une étude sur le capital à détenir au global. Le reste de cette étude sera donc concentré sur l'étude d'une branche, *Line of Business* ou produit suivant la granularité retenue.

### 3.1 Le maximum de vraisemblance

Avant d'étudier la volatilité engendrée par les choix des paramètres, nous pensons qu'il est utile de déterminer un intervalle de confiance entourant ces paramètres. Une méthode régulièrement appliquée est celle du maximum de vraisemblance.

C'est une méthode développée par Fisher en 1912 dans [5]<sup>1</sup>. Le maximum de vraisemblance permet de trouver le paramètre  $\theta$  d'une loi qui maximise la probabilité d'obtention de l'échantillon que l'on cherche à approcher. Pour se faire on définit la fonction de vraisemblance :

$$L(\theta, X) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$$

où  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est l'échantillon que l'on cherche à approcher et  $f$  sa densité.

Voici un exemple d'utilisation de cette méthode :

supposons que la loi choisie soit une loi de Pareto, la méthode du maximum de vraisemblance va permettre de déterminer les paramètres  $(m, k)$  de la loi telle que la vraisemblance soit maximale.

Soit  $f(x, k) = \frac{km^k}{x^{1+k}}$ ,  $m \leq x < \infty$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  la distribution de Pareto.

Nous supposons que  $m$  est déterminé au préalable, car, comme nous l'avons expliqué précédemment, la sinistralité grave est souvent déterminée comme étant la sinistralité dépassant un certain seuil. Ce seuil sera le paramètre  $m$ .

La fonction de vraisemblance s'écrit alors :

$$L(k, X) = (km^k)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i^{(1+k)}}$$

On cherche maintenant à maximiser cette fonction en la variable  $k$ .

En appliquant la fonction logarithme :  $\log L(k, X) = n \log(km^k) - (1+k) \sum_{i=1}^n \log X_i = \Lambda(k)$  puis en dérivant selon  $k$  on obtient le maximum :

$$\frac{\partial \Lambda(k)}{\partial k} = \frac{n(k \log(m) + 1)}{k} - \sum_{i=1}^n \log X_i = 0$$

d'où :

$$\hat{k} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i - n \log(m)}$$

Si au contraire, c'est une loi LogNormale de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$  qui est choisie, la fonction de vraisemblance s'écrit :  $L(\mu, \sigma, X) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i \sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln(X_i) - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ .

En résolvant

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \Lambda(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{\log(X_i) - \mu}{\sigma} \\ 0 = \frac{\partial \Lambda(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(\log(X_i) - \mu)^2}{\sigma^3} \end{cases}$$

---

1. Fisher R. "On an absolute criterion for fitting frequency curves"

Et l'on obtient  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}$  :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (\log(X_i))^2 - 2\hat{\mu} \sum_{i=1}^n \log(X_i) + n\hat{\mu}^2 \end{cases}$$

Maintenant, la question est de quantifier la précision de l'estimation. Pour cela il faut estimer la forme de la distribution de probabilité de  $k$  dans le cas de la loi de Pareto ou de  $\mu$  et  $\sigma$  dans le cas de la loi LogNormale, autour des valeurs données par les estimateurs  $\hat{k}$  ou  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}$ .

On l'obtient à partir d'un développement limité à l'ordre 2.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul paramètre à trouver (comme dans le cas de la loi Pareto) cela revient à étudier l'égalité suivante :

$$\Lambda(k) = \Lambda(\hat{k}) - \frac{k^2}{2} \mathbb{I}(\hat{k}) + o(k^2)$$

où  $\mathbb{I}(\hat{k}) = \frac{\delta^2 \Lambda(\hat{k})}{\delta^2 k}$  est l'information de Fisher relative à  $k$  au point de maximum de vraisemblance.

On a alors :

$$\hat{k} - k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\mathbb{I}(\hat{k})}\right)$$

Dans le cas de la loi de Pareto, on a :

$$\frac{1}{\mathbb{I}(\hat{k})} = -\frac{n}{\hat{k}}$$

ainsi on s'aperçoit que plus  $n$  est grand plus l'estimation obtenue du paramètre est précise.

Lorsqu'il y a plusieurs paramètres, comme c'est le cas avec la loi LogNormale, l'information de Fisher n'est plus définie comme un scalaire mais comme une matrice de covariance :

$$\mathbb{I}(\mu, \sigma) = E \left[ \begin{pmatrix} \frac{\delta \Lambda(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\delta \mu} \\ \frac{\delta \Lambda(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\delta \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta \Lambda(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\delta \mu} \\ \frac{\delta \Lambda(\hat{\mu}, \hat{\sigma})}{\delta \sigma} \end{pmatrix} \right]$$

On retrouve alors la même propriété que précédemment, en posant les vecteurs  $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  et  $\theta = (\mu, \sigma)$  on a :

$$\hat{\theta} - \theta \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\mathbb{I}(\hat{\theta})}\right)$$

Ainsi il est possible de quantifier la précision des estimations obtenues.

Une fois les paramètres et la volatilité les entourant estimés, il est important de vérifier l'adéquation entre le modèle et les données. Plusieurs pistes sont envisageables.

Les vérifications peuvent se faire par la comparaison des modèles au moyen de leur vraisemblance : plus elle est élevée, meilleure est la modélisation.

Elles peuvent également se faire en comparant la fonction de densité estimée à l'histogramme des données ou encore en examinant la droite de Henri (ou *Q-Q plot*). Plus les points sont

rapprochés de la droite, meilleur est l'ajustement.

Enfin des méthodes de vérification statistiques existent : le test du Khi-deux, ou la statistique de Kolmogorov Smirnov (plus la valeur obtenue est petite, plus le modèle est adapté). Ces méthodes et d'autres sont détaillées par Klugman dans [7]<sup>2</sup>.

Une modélisation telle que décrite dans cette partie permet un meilleur contrôle des risques et de leurs impacts sur l'entreprise, en fournissant une information fiable et robuste pour les décideurs.

Cependant, si les modèles actuels sont suffisamment sophistiqués pour que l'on puisse les considérer comme des outils utiles et performants, il ne faut pas oublier qu'un modèle a ses limites et ne donne qu'une image imparfaite de la réalité. Les modèles doivent être utilisés de façon souple. Il reste toujours une composante individuelle comportementale non observée à prendre en compte.

## 3.2 Approximations basées sur les moments

Une étude des différentes approximations de  $S$  par les moments a été faite par Buchwalder et al [3]<sup>3</sup>.  $S$  est toujours considéré comme étant la charge des sinistres pour une maille de risque et un horizon donné.

Dans la suite, la fonction de répartition de  $S$  sera notée  $F_S$ .

Nous allons considérer les approximations de  $F_S$ ; elles permettent d'obtenir une expression paramétrique de la probabilité de ruine  $\mathbb{P}[S \leq x]$ . Ainsi, il est possible d'étudier les variations de la VaR, utilisée pour le calcul du SCR, selon les paramètres choisis lors de la modélisation de la sinistralité :

$$VaR_{99,5\%}(S) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[S \leq x] \leq 99,5\%\}$$

### 3.2.1 Approximation Normale

Elle consiste en l'approximation de  $F_S(x)$  par :

$$F_S(x) \simeq \Phi\left(\frac{x - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right)$$

Avec

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \text{Var}[S] = \mathbb{E}[N]\text{Var}[X] + \text{Var}[N]\mathbb{E}^2[X]$$

Dans le cas d'une approche individuelle, si une maille de risque est constituée de  $K$  contrats homogènes et indépendants de charges  $X_1, X_2, \dots, X_K$  admettant un moment d'ordre 2, on

2. Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. *Loss Models : From Data to Decisions*

3. Buchwalder M., Chevallier E. et Kluppelberg C. (1993) *Approximation methods for the total claims size distributions - an algorithmic and graphical presentation*

utilise le théorème Central limite pour prouver l'approximation. En effet, en l'appliquant à  $S = \sum_{k=1}^K X_K$  on obtient :

$$\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Or dans le cas du modèle collectif qui nous intéresse, N le nombre de sinistres sur la période étudiée est trop petit pour appliquer le théorème central limite.

L'approximation est justifiée pour une classe composée poissonnienne ou Binomiale Négative dont la fréquence moyenne de sinistres est «grande»(voir Partrat et Besson [1] pour plus de détails<sup>4</sup>)

L'approximation Normale utilise les moments d'ordre 1 et 2 de S. Il est également possible d'utiliser le moment d'ordre trois. C'est ce que font Kauppi L. et Ojantaken P. dans [6]<sup>5</sup> en introduisant l'approximation Normal Power.

### 3.2.2 Approximation Normal Power

Cette approximation de  $F_S$  est une extension de l'approximation Normale basée sur les trois premiers moments de S (supposés exister) :  $\mathbb{E}[S]$ ,  $\text{Var}(S)$  et  $\beta(S)$

$\beta(S)$  le coefficient de skewness de S est défini par :

$$\beta(S) = \frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}(S))^3]}{\text{Var}(S)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\beta(S) = \frac{\mathbb{E}[S^3] - 3\mathbb{E}[S]\text{Var}(S) - \mathbb{E}[S]^3}{\text{Var}(S)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

L'approximation Normal Power permet d'estimer pour  $\beta(S) > 0$  :

$$Z = \frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} \approx \tilde{Z} + \frac{\beta(S)}{6}(\tilde{Z}^2 - 1)$$

où  $\tilde{Z}$  est une variable Normale centrée réduite.

L'approximation de Normal Power est alors :

$$\mathbb{P}[S \leq x] \approx \Phi \left[ \sqrt{1 + \frac{6(x - \mathbb{E}[S])}{\beta(S)\sqrt{\text{Var}[S]}} + \frac{9}{\beta(S)^2} - \frac{3}{\beta(S)}} \right]$$

Pour  $\beta(S) = 0$  on a  $\mathbb{F}_Z(z) \simeq \Phi(z)$ .

4. Besson J.L., Partrat C. (2004) "Assurance Non Vie : Modélisation, Simulation "

5. Kauppi L., Ojantaken P. (1969) : "Approximations of the generalized Poisson function"

Une troisième façon d'approximer  $F_S$  est d'utiliser une loi asymétrique à la place d'une loi Normale (symétrique). En effet, on remarque que la distribution empirique est décalée à droite de la médiane, ce qui indique un coefficient d'asymétrie  $\beta(S)$ , supérieur à 0. De telles approximations existent, comme l'approximation de Gamma de Bowers.

### 3.2.3 Approximation Gamma de Bowers

L'approximation Gamma de Bowers approxime la charge totale de sinistres par une loi Gamma translatée.

On rappelle que  $Z$  suit une loi Gamma translatée de paramètres  $(\nu, \beta, x_0)$  si  $Z - x_0$  suit une loi Gamma  $\gamma(\nu, \beta)$ .

Or si  $X$  suit une loi Gamma  $\gamma(\nu, \beta)$  on a alors :

$$f(x) = \frac{\beta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\beta x}, \quad F(x) = \Gamma(\nu, \beta x)$$

et les moments d'ordre  $k$  de  $X$  sont :

$$m_k = \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+k-1)}{\beta^k}$$

$\Gamma(\nu, \cdot)$  est la fonction  $\Gamma$ -incomplète qui à tout couple  $(\nu, x)$  dans  $R_+^2$  associe :

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt$$

(une documentation plus complète sur les propriétés des fonctions  $\Gamma$  se trouve dans Partrat et Besson [1])

Pour l'approximation Gamma, les paramètres  $\nu, \beta$  et  $x_0$  sont choisis de sorte à ce que les trois premiers moments coïncident :

$$\mathbb{E}[S] = x_0 + \frac{\nu}{\beta}, \quad \text{Var}[S] = \frac{\nu}{\beta^2}, \quad \mathbb{E}(S^3) = \frac{2\nu}{\beta^3}$$

d'où :

$$\beta = \frac{2\text{Var}[S]}{\mathbb{E}(S^3)}, \quad \nu = \frac{4\text{Car}[S]^3}{\mathbb{E}(S^3)^2}, \quad x_0 = \mathbb{E}[S] - 2\frac{\text{Var}[S]^2}{\mathbb{E}(S^3)}$$

On obtient l'approximation :

$$\boxed{F_S(x) \simeq \Gamma[\nu, \beta(x - x_0)] \quad (x > x_0)}$$

### 3.2.4 Application et limites des approximations

On se place dans le cas d'une loi Poisson de paramètre  $N \sim \mathbb{P}(\lambda)$ . Les expressions des différents moments de la sinistralité s'écrivent alors :

$$\mathbb{E}[S] = \lambda\mathbb{E}[X], \quad \text{Var}[S] = \lambda\mathbb{E}[X^2], \quad \mathbb{E}(S^3) = \lambda\mathbb{E}[X^3] \text{ et } \beta(S) = \frac{\mathbb{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda\mathbb{E}[X^2]^{3/2}}}$$

Dans cet exemple  $N \sim \mathbb{P}(5)$  et la sévérité  $X$  est modélisée par une loi Pareto d'espérance 3,000,000 et d'écart type 1,000,000.

Les distributions suivantes sont observées pour les différentes approximations de  $P(S > x)$ . On peut visualiser en rouge la fonction de survie de la variable empirique, et en vert et bleu les fonctions de survie des différentes approximations.

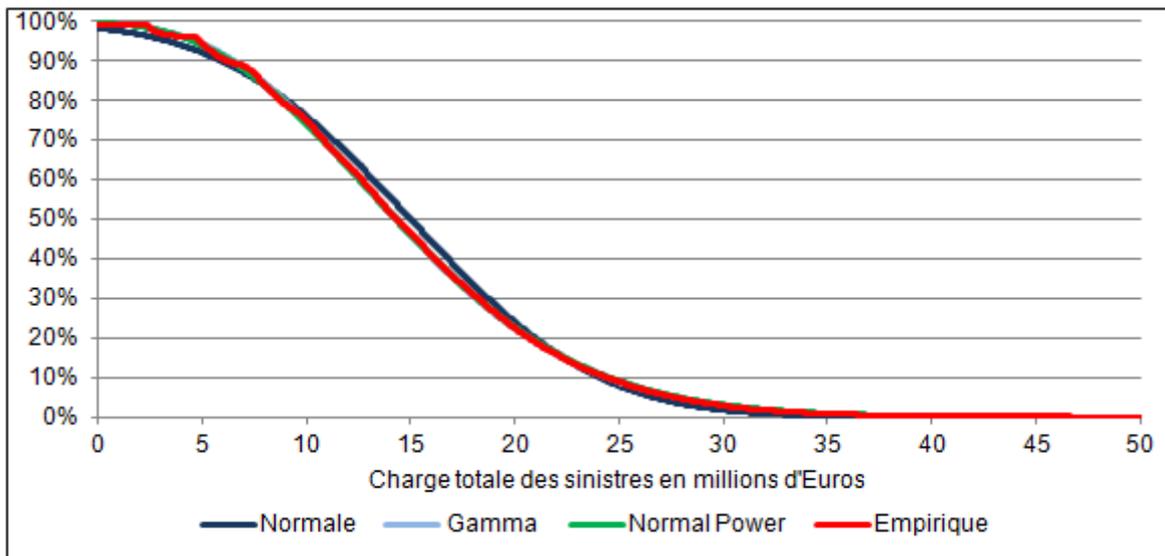


FIGURE 3.1 – Comparaison des différentes fonctions de répartition selon les approximations

On note que les approximations Gamma et Normal Power sont trop proches pour pouvoir être distinguées l'une de l'autre.

On remarque également, que l'approximation Normale a tendance à sous estimer le risque. Cela peut provenir du fait que la distribution utilisée pour modéliser la sévérité est une distribution à queue épaisse (la loi de Pareto).

La sous estimation des queues épaisses est une faiblesse de l'approximation Normale, de par la finesse de sa queue de distribution, la loi normale utilisée pour l'approximation est peu adaptée à la modélisation des queues épaisses, comme l'explique Pentikäinen.T dans [12]<sup>6</sup>.

Un exemple avec une distribution à queue *plus fine* est faite par la suite.

6. Pentikäinen.T (1997) "On the Approximation of the total amount of claims"

En zoomant sur les queues des fonctions de répartition, on obtient :

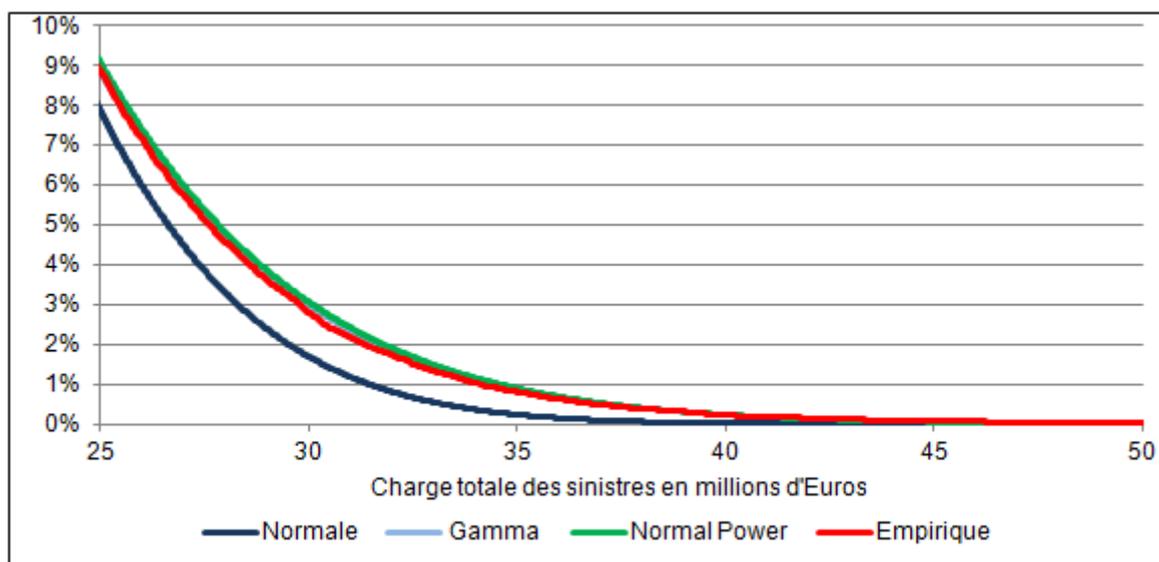


FIGURE 3.2 – Plus grande précision des approximations en utilisant l'égalité de trois moments

On constate que les approximations utilisant l'égalité de trois moments sont plus précises.

Pour confirmer cette impression donnée par le graphique, on cherche les différents quantiles des approximations  $\mathbb{P}[S \leq x] \leq p \%$ , et on compare ensuite au quantile de la distribution empirique. On obtient : (en milliers d'Euros)

p	95 %	99.5 %
Empirique	27,624	36,914
Normale	26,630	33,213
Normal Power	27,837	37,195
Gamma	27,706	37,146
Différences		
Empirique / Normale	-3.60 %	-10.03 %
Empirique / Normal Power	0.77 %	0.76 %
Empirique / Gamma	0.30 %	0.63 %

TABLE 3.1 – Comparaison des différentes approximations : Normal Power et Gamma sont meilleures

Ces résultats confirment que les approximations Normal Power et Gamma sont meilleures notamment au niveau des queues de distribution. L'ensemble des approximations diffère très peu de la distribution empirique lorsque l'on regarde le quantile à 5 %. Cependant, lorsque l'on observe les quantiles à 0.5 %, l'écart est plus grand pour l'approximation Normale. On peut considérer comme très bonne les approximations Normal Power et Gamma.

Un second exemple est fait en utilisant une distribution Lognormale d'espérance 3,000,000 et d'écart type 1,000,000 pour modéliser la sévérité X.

La loi Lognormale est une loi à queue fine. On peut donc penser que l'approximation Normale sera meilleure.

Voici un zoom sur les queues des fonctions de répartition obtenues :

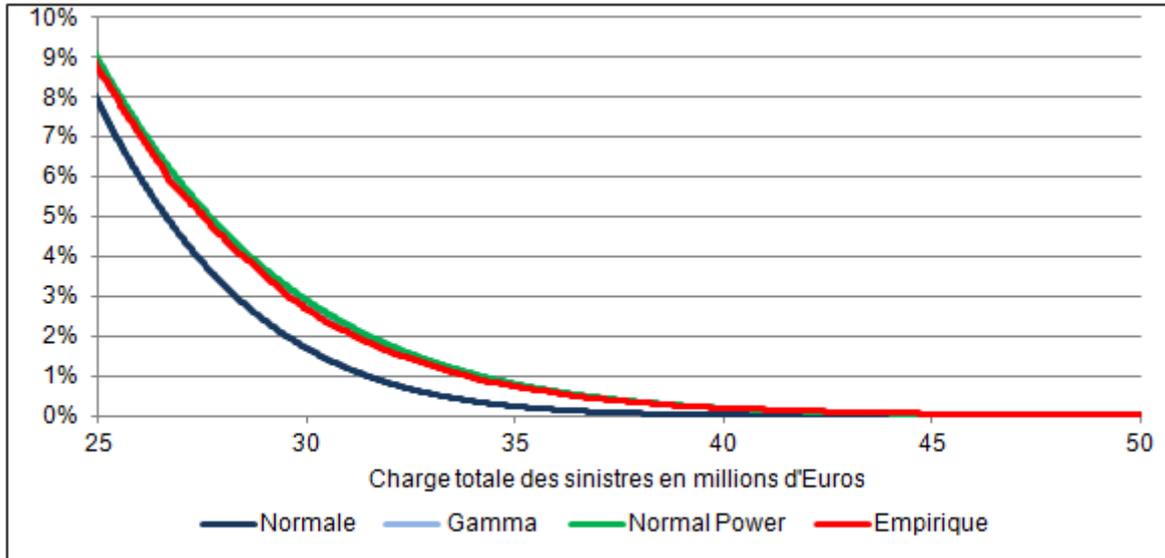


FIGURE 3.3 – Amélioration de l'approximation lorsque la modélisation est faite avec une loi Lognormale

p	95 %	99.5 %
Empirique	27,535	36,403
Normale	26,629	33,213
Normal Power	27,683	36,690
Gamma	27,583	36,656
Différences		
Empirique / Normale	-3.29 %	-8.76 %
Empirique / Normal Power	0.54 %	0.79 %
Empirique / Gamma	0.17 %	0.69 %

TABLE 3.2 – Comparaison des différentes approximations lorsque la sinistralité est modélisée avec une loi Lognormale

On note une légère amélioration de l'approximation normale, même si il y a toujours un plus large écart lorsque l'on s'intéresse au quantile à 0.5 %.

Globalement, nous pouvons considérer que les approximations sont assez bonnes, même pour des quantiles très petits. Elles nous fournissent avec précision le montant de la  $VaR_{99.5\%}(S)$  définissant les fonds propres pour satisfaire les exigences des autorités. Cependant, ce n'est pas suffisant. Comme mentionné précédemment, l'assureur a besoin de connaître la volatilité qui entoure ce montant. Pour cela, nous allons étudier l'influence d'une variation des différents paramètres de modélisation sur la  $VaR_{99.5\%}$ .

Pour la suite, au vu des résultats précédents, nous utiliserons l'approximation "Normal Power".

Pour cela, supposons à nouveau que la sévérité  $X$  est modélisée par une distribution Lognormale de paramètres  $(a; b)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in [0, +\infty[$ . En remplaçant  $\mathbb{E}[S], Var[S]$  ainsi que  $\beta_S$  par des expressions dépendant des paramètres utilisés, on obtient une approximation de  $VaR_{9,5\%}(S)$  fonction de  $a, b$  et  $\lambda$  que l'on nomme :  $f(a, b, \lambda)$ .

Les dérivées partielles premières  $\frac{\partial f(a,b,\lambda)}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial f(a,b,\lambda)}{\partial b}$  et  $\frac{\partial f(a,b,\lambda)}{\partial \lambda}$  permettent d'étudier les variations entourant la VaR.

En utilisant l'approximation de Normal Power, on obtient :

$$VaR_{99,5\%}(S) = inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[S \leq x] \leq 99,5\% \}$$

$$\approx inf\{x \in \mathbb{R} : \Phi \left[ \sqrt{1 + \frac{6(x - \mathbb{E}[S])}{\beta_S \sqrt{Var[S]} + \frac{9}{\beta_S^2} - \frac{3}{\beta_S}} \right] \leq 99,5\% \} \quad (3.2)$$

Or, par définition :  $E[X] = e^{a+\frac{b^2}{2}}$  et  $Var[X] = (e^{b^2} - 1)e^{2a+b^2}$

D'où :

$$VaR(\alpha) = \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] \left( \frac{exp(a+\frac{b^2}{2})}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda} exp(a+b^2) + \lambda exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right)$$

En utilisant  $a=14.86$  et  $b=0.325$  de manière à avoir  $E[X]=3,000,000$  et  $\sqrt{Var[X]}=1,000,000$  on obtient pour  $\lambda=5$  :  $VaR(\alpha) = 36,692,194$ .

Dans un premier temps examinons la volatilité engendrée par  $\lambda$  autour de cette valeur. Pour cela nous notons la VaR,  $VaR(\lambda)$  de manière à montrer que seul le coefficient  $\lambda$  varie, et que les autres restent constants.

$\lambda$  est le coefficient de la loi de poisson modélisant la fréquence de sinistres.  $VaR(\lambda)$  est donc défini pour tout  $\lambda \in ]0, +\infty[$ . La dérivée de  $VaR(\lambda)$  selon  $\lambda$  est définie par :

$$\frac{\delta VaR(\lambda)}{\delta \lambda} = \frac{\Phi^{-1}(\alpha) exp(a+b^2)}{2\sqrt{\lambda}} + exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right)$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

$\lambda$	0	$+\infty$
$\frac{\delta VaR(\lambda)}{\delta \lambda}$		+
$VaR(\lambda)$		$+\infty$ $VaR(0^+)$ 

Examinons la variation de  $VaR(\lambda)$  lorsque  $(\lambda)$  varie de +/- 4 % autour de 5.

Variations autour de $\lambda$	-4 %	-3 %	-2 %	-1 %	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$\lambda'$	4.80	4.85	4.90	4.95	5	5.05	5.10	5.15	5.20
$VaR(\lambda')$ (en milliers)	35,724	35,966	36,209	36,450	36,692	36,933	37,173	37,413	37,652
Variation par rapport à $VaR(\lambda)$	-2.64%	-1.98 %	-1.32 %	-0.66 %	0 %	0.66 %	1.31 %	1.97 %	2.62 %

TABLE 3.3 – Etude de la variation de la VaR lorsque  $\lambda$  varie

Cela peut également être représenté sous forme de graphique :

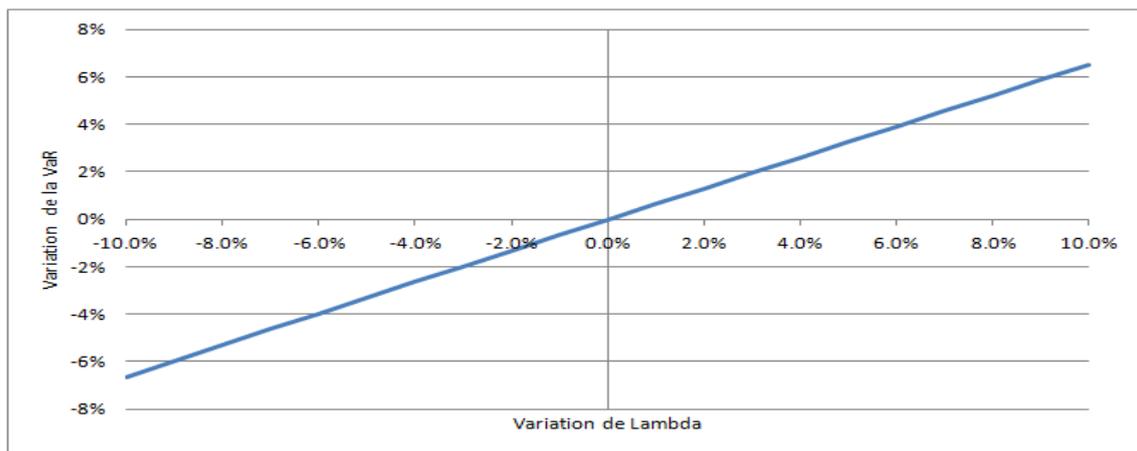


FIGURE 3.4 – Faible sensibilité de la VaR à une variation de  $\lambda$

On observe que la variation de  $VaR(\lambda)$  est quasi-linéaire à celle de  $\lambda$ , et lorsque  $\lambda$  varie de 4 % alors  $VaR(\lambda)$  évolue d'environ 2.6 %. Cela montre une faible sensibilité de la  $VaR$  à  $\lambda$ .

Examinons maintenant la volatilité engendrée par  $a$  autour de la VaR, pour cela nous la notons  $VaR(a)$  de manière à montrer que seul le coefficient  $a$  varie, et que les autres restent constants.

La dérivée partielle selon  $a$  a pour expression :

$$\frac{\delta VaR(a)}{\delta a} = \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] \left( \frac{\exp\left(a + 5\frac{b^2}{2}\right)}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\lambda}\exp(a + b^2) + \lambda\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \quad (3.3)$$

On remarque que l'expression de la dérivée est la même que celle de la fonction. Cette fonction est donc indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et croissante. On en déduit que plus  $a$  sera grand, plus la volatilité entourant la VaR sera grande (les autres paramètres restant constants).

Observons les variations de  $VaR(a)$  lorsque  $a$  varie autour de 14.86 :

Variations autour de $a$	-2 %	-1.5 %	-1 %	-0.5 %	0 %	0.5 %	1 %	1.5 %	2 %
$a$	14.56	14.64	14.71	14.78	14.86	14.94	15.01	15.05	15.16
$VaR(a')$ (en milliers)	27,258	29,360	31,625	34,064	36,692	39,522	42,571	45,855	49,392
Variation par rapport à $VaR(a)$	-25.71%	-19.98 %	-13.81 %	-7.16 %	0 %	7.71 %	16.02 %	24.97 %	34.61 %

TABLE 3.4 – Une variation exponentielle de  $VaR(a)$  lorsque la paramètre  $a$  varie

Sous forme de graphique on a :

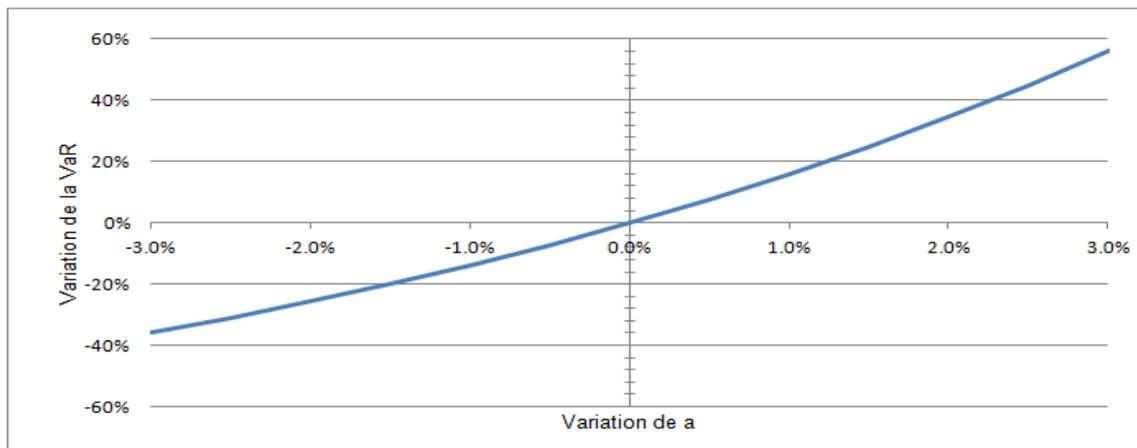


FIGURE 3.5 – Forte sensibilité de la VaR aux variations de  $a$

On observe que la VaR est très sensible aux variations de  $a$ . En effet, lorsque  $a$  diminue de 0.5 % alors le montant de la  $VaR$  diminue de 7.16 %.

Or, le fait de changer l'espérance de la loi Lognormale de 3,000,000 à 3,100,000 engendre une augmentation de  $a$  de 0.25 % et donc une variation de la VaR de 3.8 %.

Le moindre changement dans le paramétrage de la Loi Lognormale engendre donc des variations importantes au niveau de la VaR.

Examinons dans un dernier temps la volatilité engendrée par  $b$  autour de la VaR, pour cela nous la notons  $VaR(b)$ .

La dérivée partielle selon  $b$  a pour expression :

$$\frac{\delta VaR(b)}{\delta b} = \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] 5b \left( \frac{\exp\left(a + 5\frac{b^2}{2}\right)}{6} \right) + 2b\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\lambda}\exp(a + b^2) + b\lambda\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \quad (3.4)$$

Observons les variations de  $VaR(b)$  lorsque  $b$  varie autour de 0.325 :

Variations autour de $a$	-4 %	-3 %	-2 %	-1 %	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$b$	0.312	0.315	0.318	0.321	0.325	0.328	0.331	0.334	0.338
$VaR(b')$ (en milliers)	36,406	36,478	36,549	36,620	36,692	36,765	36,839	36,913	36,989
Variation par rapport à $VaR(b)$	-0.77%	-0.58 %	-0.39 %	-0.20 %	0 %	0.20 %	0.40 %	0.60 %	0.81 %

TABLE 3.5 – Etude de la variation de la VaR lorsque le paramètre  $b$  varie

Sous forme de graphique, cela se traduit par :

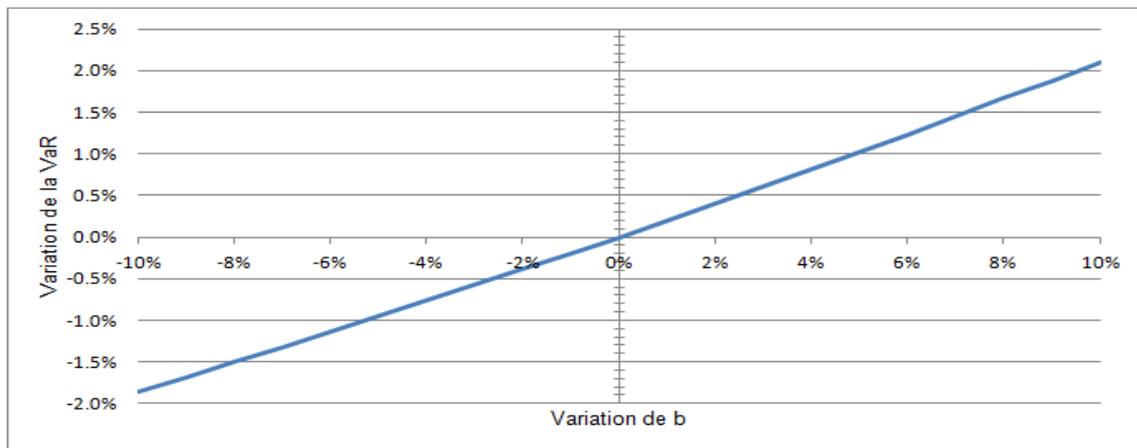


FIGURE 3.6 – Faible dépendance de la VaR à la variable  $b$

On observe que la VaR est moins sensible au paramètre  $b$  qu'elle ne l'est au paramètre  $a$ . Lorsque  $b$  diminue de 4 % alors  $VaR(b)$  ne diminue que de 0.8 %, de même lorsque  $b$  augmente de 10 % alors  $VaR(b)$  augmente de 2 %.

On peut donc conclure que le paramètre  $a$  est le paramètre influant le plus sur la volatilité de la VaR. C'est donc prioritairement à partir de ce paramètre que l'assureur peut construire l'intervalle de confiance entourant le montant de la  $VaR_{99,5\%}(S)$ . Pour cela il faut déterminer

un intervalle pour le paramètre  $a$  puis, grâce à la méthode utilisée précédemment en déduire un intervalle entourant  $Var_{99.5\%}(S)$ .

Ainsi, par exemple si  $a \in [14.5; 15]$  alors  $Var_{99.5\%}(S) \in [30, 793, 000; 39, 764, 000]$ . L'intervalle de confiance entourant  $a$  peut être déterminé par la méthode du maximum de vraisemblance expliquée précédemment.

Cette méthodologie peut être utilisée assez simplement sur la sinistralité brute de réassurance. Il est intéressant ensuite d'étudier les effets de ces mêmes variations de paramètres lorsque l'on applique un programme de réassurance à la sinistralité.

### 3.2.5 Application de la réassurance

Chacune des approximations décrites précédemment permet d'approximer l'expression de la VaR utilisée pour le calcul du SCR.

Les approximations de la VaR ainsi décrites dépendent des moments de  $S$ . Or, on note que l'application d'une réassurance change l'expression analytique de  $S$  et donc des approximations.

La réassurance modifie  $S$  en agissant sur la distribution de la sévérité  $X_i$  ou directement sur la charge.

Différentes formes de réassurance existent, comme nous l'avons vu précédemment.

En pratique, une *Quote-part* avec une cession de  $\alpha\%$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  implique  $S = \sum_{i=1}^N \alpha X_i$ .

Ou encore, un *excess of loss*  $A$   $X$   $S$   $B$  revient à modifier la fonction de distribution de la sévérité conservée par :

$$X_i^{ras} = X_i - \min(\max(X_i - B; 0); A)$$

Ce type de réassurance impacte la sévérité.  $S$  peut également être modifié "directement", c'est le cas lorsque l'on applique un traité *stop loss*. En effet, un *stop Loss* est un traité qui se déclenche pour limiter la perte de l'assureur, il permet de protéger le résultat d'une branche en équilibrant le bilan annuel. Ainsi, un *ILL XS 120%* avec une assiette de prime  $M$  donne  $S$  tel que :  $S = \min\left(\sum_{i=1}^N X_i; 120\% M\right)$ .

Une fois les changements sur  $S$  effectués, il faut calculer  $\mathbb{E}[S], Var[S]$  ainsi que  $\beta_S$ . Leur expression peut être plus ou moins complexe selon la loi retenue pour simuler le nombre de sinistres et la sévérité.

En reprenant l'exemple précédent,  $N \sim \mathbb{P}(\lambda)$  et  $X_i$  suit une loi Lognormale de paramètres  $(a, b)$ , on a alors en appliquant un traité de réassurance *ILL XS B* (cf annexes pour le détail des calculs) :

$$\mathbb{E}[S_R] = \lambda \left[ B \phi\left(\frac{a - \ln(B)}{b}\right) - \mathbb{E}[X] \left[ \phi\left(\frac{a + b^2 - \ln(B)}{b}\right) - 1 \right] \right]$$

$$Var[S_R] = \lambda \left( B^2 \phi\left(\frac{a - \ln(B)}{b}\right) - \left[ \mathbb{E}[X^2] \left( \phi\left(\frac{a + 2b^2 - \ln(B)}{b}\right) - 1 \right) \right] \right)$$

et

$$\beta_{S_R} = \frac{-\exp\left(3a + \frac{9b^2}{2}\right) \left[\phi\left(\frac{a+3b^2-\ln(B)}{b}\right) - 1\right] + B^3 \left[\phi\left(\frac{a-\ln(B)}{b}\right)\right]}{\sqrt{\lambda} \left(\left[-\exp(2(a+b^2)) \left(\phi\left(\frac{a+2b^2-\ln(B)}{b}\right) - 1\right)\right] + B^2 \left[\phi\left(\frac{a-\ln(B)}{b}\right)\right]\right)^{(3/2)}}$$

Prenons la loi Lognormale précédente d'espérance 3,000,000 et d'écart type 1,000,000 pour modéliser la sévérité X et une loi de Poisson de paramètre 5 pour la fréquence. On applique à la sinistralité ainsi modélisée, le traité de réassurance *excess of loss* : ILL XS 3,740,000. 3,740,000 a été choisi de manière à correspondre au quantile à 80 % de la distribution de sévérité.

Grâce aux calculs explicités précédemment, on obtient les fonctions de répartition des différentes approximations :

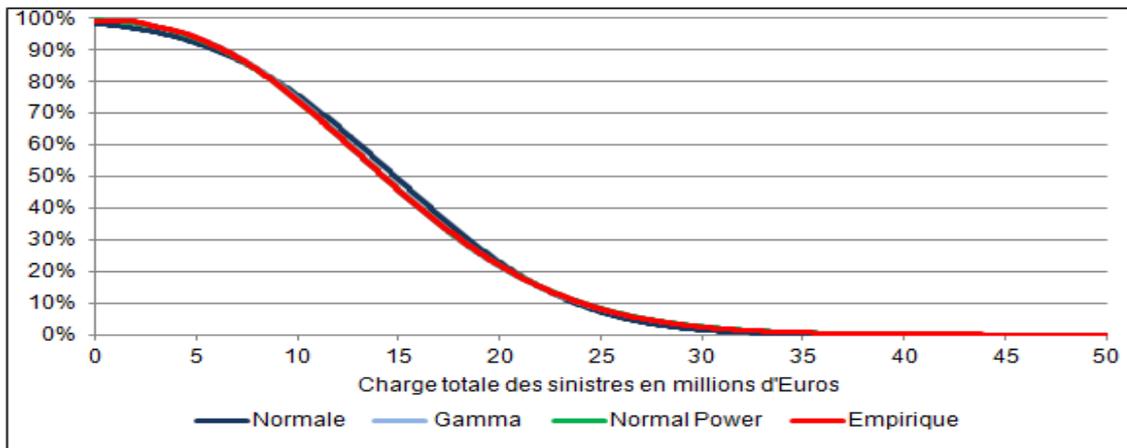


FIGURE 3.7 – Fonctions de répartition obtenues en présence d'un programme de réassurance en zoomant sur les queues de distribution, on a :

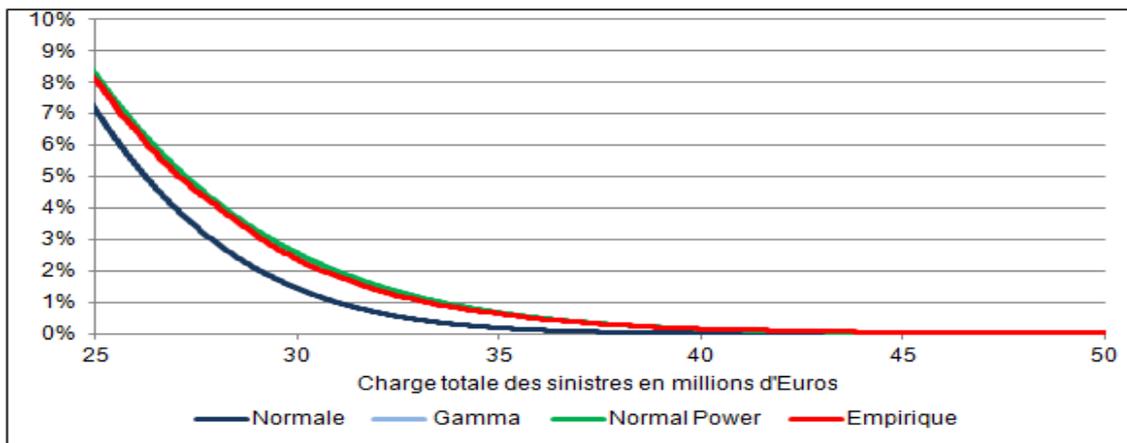


FIGURE 3.8 – Approximation de meilleure qualité avec application de la réassurance

En rouge on observe la distribution de la variable empirique. On s'aperçoit que les approximations sont très bonnes et que le fait qu'un traité de réassurance soit appliqué, ne change pas le fait que les approximations Normal Power et Gamma soient trop proches l'une de l'autre pour être distinguées sur le graphique.

En cherchant les quantiles à 95 % et 99.5 % de la distribution empirique et des approximations on obtient : (en milliers d'Euros)

	95 %	99.5 %
Empirique	25,877	34,073
Normale	24,962	31,053
Normal Power	25,860	34,018
Gamma	25,782	33,992
Différences		
Empirique / Normale	-3.53 %	-8.86 %
Empirique / Normal Power	-0.17 %	-0.16 %
Empirique / Gamma	-0.37 %	-0.24 %

TABLE 3.6 – Comparaison des approximations lorsqu'un programme de réassurance est appliqué

On en conclut que les approximations sont toujours bonnes même avec l'application d'un programme de réassurance en XS par sinistre.

On peut donc continuer le processus, en observant les variations de la VaR comme nous l'avons fait précédemment lorsque la sinistralité est modifiée par ce programme de réassurance.

L'expression de la VaR avec réassurance est :

$$VaR_R(\alpha) = (\Phi^{-1}(\alpha))^2 \left( \frac{\beta_{S_R} \sqrt{Var[S_R]}}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{Var[S_R]} - \frac{\beta_{S_R} \sqrt{Var[S_R]}}{6} + \mathbb{E}[S_R]$$

En utilisant les mêmes coefficients que précédemment pour  $a$ ,  $b$  et  $\lambda = 5$  on a :  $VaR_R(\alpha) = 34,019,344$  ce qui est inférieur à  $VaR(\alpha) = 36,692,194$ .

Cela nous conforte dans l'idée que la réassurance permet de réduire le risque lié à la volatilité de la sinistralité.

Dans un premier temps nous allons étudier la volatilité engendrée par le coefficient  $\lambda$ , lorsqu'il varie autour de 5.

Variations autour de $\lambda$	-4 %	-3 %	-2 %	-1 %	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$\lambda'$	4.80	4.85	4.90	4.95	5	5.05	5.10	5.15	5.20
$VaR_R(\lambda')$ (en milliers)	33,110	33,338	33,565	33,792	34,019	34,245	34,471	34,696	34,921
Variation par rapport à $VaR_R(\lambda)$	-2.67%	-2.00 %	-1.33 %	-0.67 %	0 %	0.66 %	1.33 %	1.99 %	2.65 %

TABLE 3.7 – Etude de la variation de la VaR lorsque le paramètre  $\lambda$  varie

On observe que les variations de  $VaR_R(\lambda)$  sont les mêmes que celles de  $VaR(\lambda)$ . L'application du programme de réassurance en XS sur les sinistres ne joue pas sur la sensibilité de la VaR à  $\lambda$ .

Cette conclusion est valable seulement pour des programmes de réassurance changeant la sévérité des sinistres. En effet, un programme de réassurance influant sur le nombre de sinistres ou possédant un AAD (*Annual Aggregate Deductible*) ou un AAL (*Annual Aggregate Limits*) n'aurait certainement pas les même résultats.

Examinons maintenant la volatilité engendrée par  $a$  autour de la VaR lorsque  $a$  varie autour de 14.86 :

Variations autour de $a$	-2 %	-1.5 %	-1 %	-0.5 %	0 %	0.5 %	1 %	1.5 %	2 %
$a$	14.56	14.64	14.71	14.78	14.86	14.94	15.01	15.05	15.16
$VaR_R(a')$ (en milliers)	33,503	33,488	33,538	33,701	34,019	34,517	35,198	36,044	37,016
Variation par rapport à $VaR_R(a)$	-1.52%	-1.56 %	-1.41 %	-0.93 %	0 %	1.46 %	3.47 %	5.95 %	8.81 %

TABLE 3.8 – Etude de la variation de la VaR lorsque le paramètre  $a$  varie

Sous forme de graphique on a :

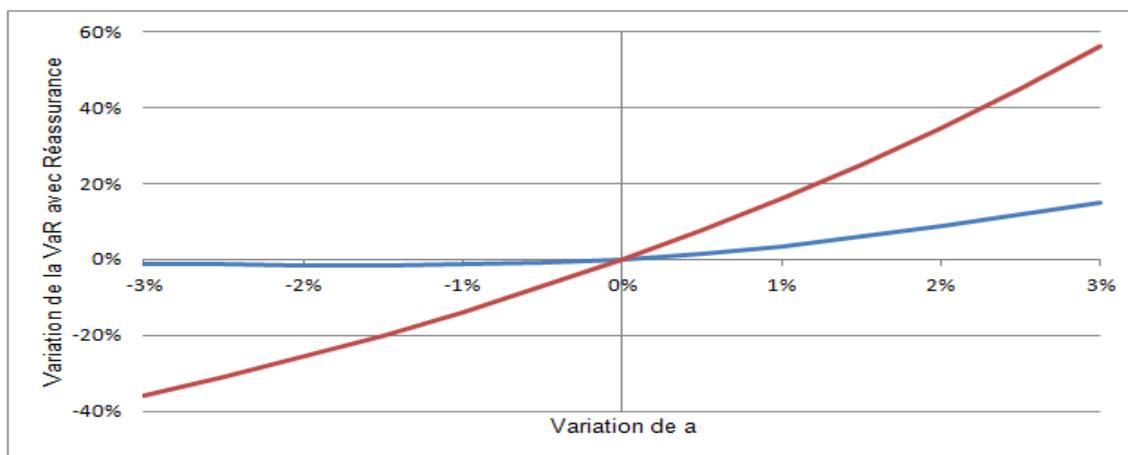


FIGURE 3.9 – Réduction de la sensibilité de la VaR aux variations de  $a$  par la réassurance

La courbe rouge représente la sensibilité de la VaR lorsqu'il n'y a pas de réassurance, celle en bleu avec le programme de réassurance décrit précédemment.

On rappelle que le paramètre  $a$  était celui qui amenait le plus de volatilité autour de la VaR. On observe que la  $VaR_R$  est moins sensible aux variations de  $a$ . Ainsi, la réassurance a permis de réduire considérablement la volatilité engendrée par le coefficient  $a$ . En effet, auparavant une variation de -2 % de  $a$  engendrait une variation de 25.7 % de  $VaR(S)$  contre seulement 4.3 % avec la réassurance.

Examinons dans un dernier temps la volatilité engendrée par  $b$  autour de la VaR, lorsque  $b$  varie autour de 32.46 % :

Variations autour de $a$	-4 %	-3 %	-2 %	-1 %	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$b$	0.312	0.315	0.318	0.321	0.325	0.328	0.331	0.334	0.338
$VaR(b')$ (en milliers)	34,083	34,067	34,051	34,035	34,019	34,003	33,987	33,972	33,956
Variation par rapport à $VaR(b)$	-0.18%	-0.14 %	-0.09 %	-0.04 %	0 %	0.04 %	0.09 %	0.13 %	0.18 %

TABLE 3.9 – Etude de la variation de la VaR lorsque le paramètre  $b$  varie

On rappelle que la VaR est moins sensible au paramètre  $b$  qu'elle ne l'est au paramètre  $a$ , il en est de même lorsque l'on applique un traité de réassurance.

On en conclue que l'application d'un *excess of loss* permet de diminuer la volatilité engendrée lorsque celle-ci est forte. En reprenant l'exemple donné précédemment, si  $a \in [14.5; 15]$  alors  $VaR_{(R)99.5\%}(S) \in [33, 535, 024; 35, 198, 543]$ , là où l'intervalle sans réassurance était :  $[30, 793, 000; 39, 764, 000]$ .

Ainsi, la réassurance a permis de réduire l'intervalle de plus de 40 %.

Cependant, cette méthodologie a des limites.

Il est difficile de savoir quel intervalle retenir pour chacun des paramètres (le paramètre  $a$  dans notre exemple). En effet, un intervalle large permettrait de considérer un éventail maximal de possibilités, seulement cela aurait pour conséquence un intervalle de confiance pour la  $VaR_{99.5\%}(S)$  démesuré. Ce qui n'aurait, au final, plus grande signification.

De même, l'ajout d'un AAD (*Annual Aggregate Deductible*) s'avère complexe à mettre en œuvre, alors que c'est une clause relativement courante dans les programmes de réassurance en excédent de sinistre. En effet, cela revient à rajouter une franchise  $F$  sur la sinistralité totale. Cependant, les calculs des deux autres moments de  $S_{Ras}$ , requièrent de nombreuses approximations, ce qui biaiserait les résultats obtenus .

Enfin, certaines autres clauses de réassurance comme les clauses de reconstitution sont difficilement modélisables avec cette méthode, tout comme les types de contrats *excess aggregate*.

De plus cette méthodologie d'approximation de la fonction de répartition de la probabilité de ruine ne permet pas de prendre en compte de manière simple, les liens qui peuvent exister entre plusieurs branches d'assurance. L'étude de la volatilité qui entoure un SCR regroupant plusieurs branches, ne pourra donc pas être pertinente.

Toutes ces raisons nous obligent à nous tourner vers une méthode alternative.

### 3.3 Convergence de la probabilité de ruine vers une distribution gaussienne

Une méthode alternative est envisagée dans l'article "*Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*" de S.Loisel, C.Mazza et D.Rullière[8]<sup>7</sup>. Il y est démontré la convergence de la probabilité empirique de ruine en temps fini vers une distribution gaussienne. Nous allons nous appuyer sur l'article et les résultats obtenus pour trouver un intervalle de confiance autour du SCR calculé.

#### 3.3.1 Contenu de l'article "*Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*"

Les auteurs de cet article montrent la convergence faible de la probabilité empirique de ruine en temps fini vers une distribution gaussienne. Puis, en utilisant *l'influence function* et ses propriétés, ils mesurent la robustesse des calculs de SCR.

Le cadre est similaire à celui décrit dans les parties précédentes. Cela signifie que le montant cumulé des sinistres jusqu'à l'instant  $t$  est s'écrit  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ .

On note également :  $R_t = u + ct - S_t$  pour  $t \geq 0$  où  $u$  est le montant du capital initial et  $c > 0$  est le montant de prime annuelle. Ainsi,  $ct$  est la prime perçue pour la période  $[0, t]$ .

Les auteurs de cet article étudient la robustesse de la probabilité de ruine utilisée dans les calculs de SCR afin de mesurer la volatilité qui l'entoure.

En d'autres termes, ils mesurent l'impact qu'un changement de données peut avoir sur la probabilité de ruine globale. Pour cela ils utilisent *l'influence function*.

C'est une fonction qui permet de mesurer l'effet de la présence de données contaminées sur la fonction de répartition de  $R_t$ . Un exemple de données contaminées peut être les garanties forfaitaires ou encore, en réassurance, le fait que les données reçues de la part de la cédante sont habituellement les montants de sinistres dépassant un seuil.

Notons  $F^{(s,x)}$  la fonction de répartition de la série de données contenant des données "contaminées".

$F^{(s,x)}$  est définie pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < s < 1$  et  $u \in \mathbb{R}$  par :

$$F^{(s,x)}(u) = s\mathbb{1}_{x \geq u} + (1 - s)F(u)$$

où  $F(u)$  est la fonction de répartition de la série de données originale.

---

7. S.Loisel, C.Mazza et D.Rullière (2008) "*Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*"

Voici un exemple avec  $x=0.1$  et  $s=0.3$  :

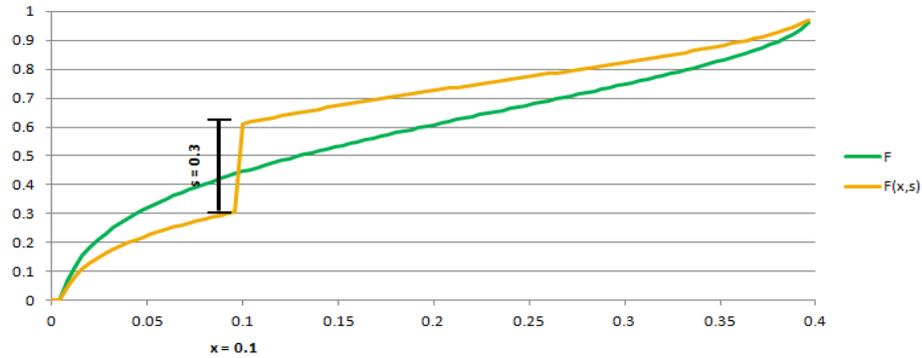


FIGURE 3.10 – Saut de hauteur 0.3 de la fonction de répartition contaminée

On remarque que  $F^{(s,x)}(u)$  ainsi définie correspond à une augmentation de  $s \times (\text{nbr de donnes de l'ensemble})$  du nombre de données ayant pour valeur  $x=0.1$  dans l'ensemble de données initial.

Soit  $T$  une fonction de  $F$ , l'influence function compare  $T(F)$  à  $T(F^{(s,x)})$ . Elle est définie comme :

$$IF_x[\mathbf{T}] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(F^{(s,x)}) - \mathbf{T}(F)}{s}$$

Voici l'allure de la courbe de l'influence function d'une probabilité de ruine  $IF_X[\psi(u, t)]$ . Les coefficients utilisés pour la modélisation de la sinistralité sont :  $\lambda = 1$ ,  $X$  suit une loi  $exp(1)$ , le capital initial  $u = 0$ , la prime annuelle est de 1.1 et  $t = 10$  ans. Nous supposons également que les montants de sinistres sont des multiples de  $\delta = 0.1$ .

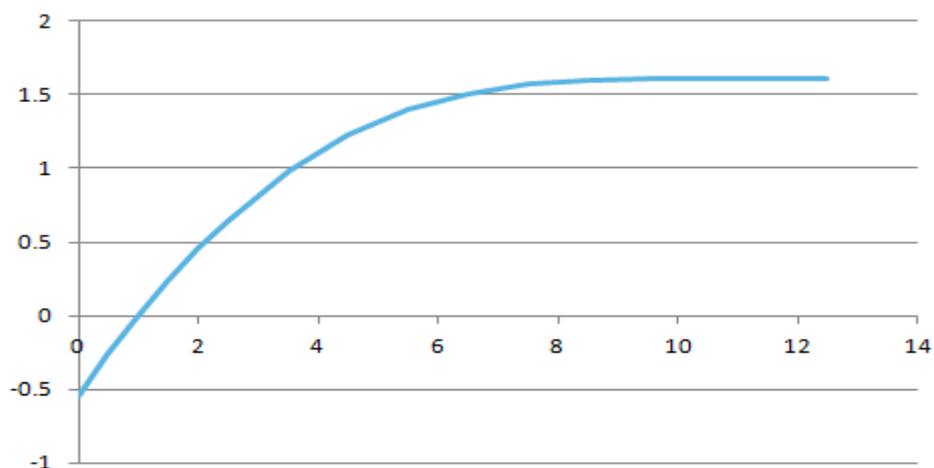


FIGURE 3.11 – Allure de l'influence function  $IF_X[\psi(0, t)]$  comme fonction de  $X$  avec  $\lambda = 1$ ,  $X$  suit une loi  $exp(1)$ ,  $u = 0$  et  $t=10$

Ainsi, l'*influence function* permet de mesurer l'impact d'un changement de données sur la fonction  $T$ . Elle permet également, sous certaines conditions, de connaître la variance asymptotique lorsque la différence entre  $T(F)$  et  $T(F^{(s,x)})$  converge vers une distribution gaussienne. C'est en particulier cette dernière propriété qui nous intéresse.

En effet, en prouvant la convergence vers une loi normale de la différence entre une probabilité de ruine contaminée et une non contaminée, nous pourrions utiliser l'*influence function* pour étudier l'effet de cette contamination.

Concrètement, nous supposons que les données contaminées sont les données issues du portefeuille, et les données non contaminées seront celles issues des simulations. Nous introduirons également un programme de réassurance à cette étude.

On note la probabilité de ruine :  $\psi(u, t)$  où  $u \geq 0$  et  $t > 0$ ; la probabilité de non ruine est alors telle que :  $\varphi(u, t) = 1 - \psi(u, t)$

Cela peut être vu comme la probabilité que le moment auquel arrive la première situation de ruine  $T_u$  est tel que  $T_u > t$ , c'est à dire  $S_i < u + ci$  pour  $1 \leq i \leq t$ . Cette vision est représentée dans le graphique suivant :

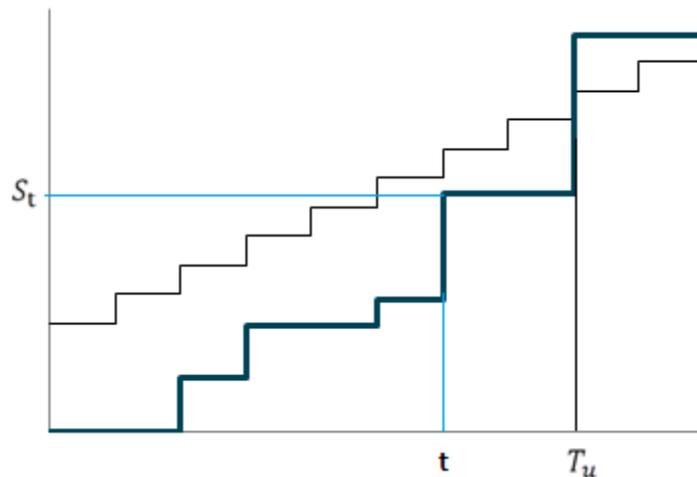


FIGURE 3.12 – Evolution de la prime et des sinistres, premier temps de ruine  $T_u > t$

Sur ce graphique, on peut lire le montant de prime cumulé années après années en noir, et les montants de sinistres cumulés en bleu. C'est lorsque la courbe des montants de sinistres rencontre celle des primes ( $T_u$ ) que la ruine a lieu.

Voici un théorème présent dans l'article [9]<sup>8</sup> décrivant la convergence vers une loi normale de la différence entre une probabilité de ruine contaminée et une non contaminée.

8. Loisel, S., Mazza, C., Rullière, D. (2009), *Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes*

**Théorème 3.3.1.** Soit  $\varphi^N(u, t)$  la probabilité de non ruine issue d'une série de données empiriques de taille  $N$ .

Soit  $\varphi(u, t)$  la probabilité de non ruine issue d'une série de données modélisées à partir des données empiriques.

On a alors :

$(\varphi(u, t) - \varphi^N(u, t))$  converge en distribution vers  $Z$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$

avec  $Z \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, V_u)$  et  $V_u = \mathbf{V}_Y [IF_Y [\varphi(u, t)]] / N$

Afin de donner une expression plus explicite de  $V_u$  nous définissons la probabilité de ruine  $\varphi^{(X)}$  associée à un processus modifié :  $R_X^s = R_s - X1_{\{U < s\}}$  où  $s \geq 0$  et  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, t]$ .

On a alors

$$\boxed{V_u = \mathbf{V}_X \left[ \lambda t \varphi^{(X)}(u, t) \right] / N} \quad (3.5)$$

En utilisant l'influence function, cela peut s'écrire :

$$V_u = \mathbf{V}_Y [IF_Y [\varphi(u, t)]] / N \text{ avec } IF_Y [\varphi(u, t)] = \lambda t \left[ \varphi^{(Y)}(u, t) - E_X \left[ \varphi^{(X)}(u, t) \right] \right]$$

Nous notons que l'approximation de  $\psi^N(u, t) = 1 - \varphi^N(u, t)$  pour  $u \geq 0$  est particulièrement utile dans le cadre de la recherche d'intervalles de confiance autour du SCR car il existe alors une approximation du quantile  $(1 - \varepsilon)$  de  $\psi^N(u, t)$  notée  $\psi_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(u, t)$  et définie par :

$$\psi_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(u, t) = \inf_{s \geq 0} P [\psi^N(u, t) \geq s] \leq \varepsilon$$

Cette approximation notée  $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(u, t)$  est telle que :

$$\boxed{\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(u, t) = \psi(u, t) + \sqrt{V_u} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon),} \quad (3.6)$$

où  $\Phi$  est la fonction de distribution de la loi normale standard.

Cette approximation est prouvée par simulation pour  $u \geq 0$  dans l'article [8]<sup>9</sup>, puis mathématiquement dans l'article [9]<sup>10</sup>.

9. S.Loisel, C.Mazza et D.Ruilière (2008) *Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*

10. Loisel, S., Mazza, C., Ruilière, D. (2009), *Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes*

Notons  $u_\eta$  et  $u_{\eta,\varepsilon}$  les capitaux initiaux nécessaires respectivement à ce que :

$$\psi(u_\eta, t) \leq \eta \quad \text{et} \quad \psi_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(u_{\eta,\varepsilon}, t) \leq \eta$$

La différence entre ces deux capitaux :  $u_\eta - u_{\eta,\varepsilon}$  est le montant additionnel nécessaire pour prendre en compte le risque d'estimation dans les résultats.

Un choix judicieux indiqué dans l'article est de prendre  $\varepsilon = 2.5\%$ . En effet, le percentile de niveau 97.5 % de la distribution d'une variable normale  $(\mu, \sigma^2)$  peut être approximé par  $\mu + 2\sigma$ .

On obtient ainsi différentes distributions d'erreur sur l'ensemble de la courbe de répartition de la probabilité de ruine.

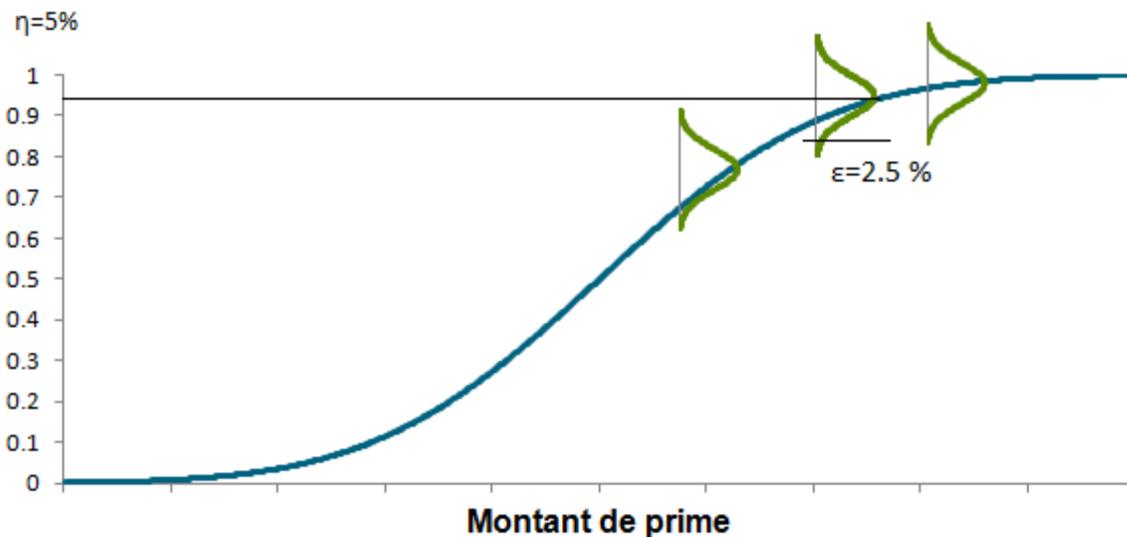


FIGURE 3.13 – Distribution de la probabilité de non ruine suivant le montant de prime avec  $\varepsilon = 2.5\%$  et  $\eta = 5\%$

### 3.3.2 Applications

Comme nous l'avons précisé précédemment, cette étude porte principalement sur les mutuelles non vie et les banques assureurs. En effet, ce sont ces entités qui ont le plus recourt à la réassurance.

Les banques assureurs ont généralement uniquement les fonds propres minimum car ils transfèrent les excédents à la partie banque de l'entreprise. Les mutuelles, elles aussi, ont souvent peu de fonds propres et ne peuvent faire appel à des actionnaires pour l'augmenter. Deux solutions complémentaires s'offrent alors à ces compagnies : augmenter les primes et/ou mettre en place un programme de réassurance.

En faisant cela elles diminueront et stabiliseront leur probabilité de ruine, ce qui aura pour conséquence un capital requis par Solvabilité II plus faible.

Nous allons poursuivre cette étude en partant de l'hypothèse que l'assureur ne modifie sa probabilité de ruine que par le biais d'un changement de prime ou de programme de réassurance.

Ainsi, dans la suite si nous nous apercevons que la probabilité de ruine dépasse ses attentes, alors nous chercherons à modifier le programme de réassurance, puis à ajuster la prime de manière à atteindre nos objectifs.

Nous rappelons que dans le cadre de l'ORSA l'assureur n'est pas obligé d'atteindre un niveau de non ruine égal à 99.5 % à un horizon supérieur à un an. Il se doit seulement de répondre à cette obligation pour l'année suivante. Ainsi, l'objectif pourra être d'atteindre une probabilité de non ruine de 95 % ou même moins selon les directives du business plan.

Ces hypothèses nous amènent à supposer que le montant de capital initial  $u$  est nul.

Lorsque  $u=0$ , d'après [8] la formule (3.5) devient :

$$V_0 = \mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] / N \text{ avec } \varphi^{(Y)}(0, t) = E \left[ \frac{1}{ct} (ct - Y - S_t)_+ \right]$$

$Y$  est une variable aléatoire suivant la même loi que  $X$ , dans ce cas une loi exponentielle d'espérance 1.

Nous allons dans un premier temps utiliser les coefficients de loi suivants :  $\lambda = 1$  et  $X$  suit une loi  $exp(1)$ . Nous supposons également que les montants de sinistres sont des multiples de  $\delta = 0.1$ .

Ces paramètres ne reflètent pas une situation réelle, cependant ce sont des paramètres simples avec une volatilité faible. Ils permettront de valider les résultats avancés par le théorème.

Dans un second temps nous utiliserons une loi  $LN(3M, 1M)$  et  $\lambda = 5$  pour simuler la sinistralité. Puis, nous appliquerons un programme de réassurance à la sinistralité afin d'en observer les effets.

### Applications numériques avec $\lambda = 1$ , $X$ suit une loi $exp(1)$ et $u = 0$

Nous regardons les valeurs de la probabilité de ruine ainsi que les valeurs de  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$  pour plusieurs années  $t=1, 3, 5, 10$ .

t	1	3	5	10
$\psi(0, t)$	0.463522	0.6559457	0.7196397	0.7855532
$\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$	0.09439716	0.072843256	0.06530332	0.04477859

TABLE 3.10 – Diminution de la variance au fil des ans

Il est intéressant de voir que la variance diminue avec les années, ce qui est logique puisque en  $t=1$  on ajoute un sinistre supplémentaire  $Y$  à la sinistralité d'une année. En  $t=10$ , on ajoute un sinistre supplémentaire  $Y$  à la sinistralité de 10 années. Cet effet est assez fort pour contrer le fait que l'on multiplie la probabilité de ruine par  $\lambda t^2$ . Par contre la probabilité de ruine augmente avec les années.

5,000,000 simulations de sinistralité ont été utilisées pour trouver ces résultats. On rappelle que :  $\psi(0, t) = 1 - E \left[ \frac{1}{ct} (ct - S_t)_+ \right]$  et  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] = (\lambda t)^2 V_Y \left[ \frac{1}{ct} (ct - Y - S_t)_+ \right]$

Afin de vérifier graphiquement la normalité du théorème précédent, nous traçons l'histogramme de 5,000 probabilités de ruine  $\psi(0, t)$  pour  $N=1,000$ .

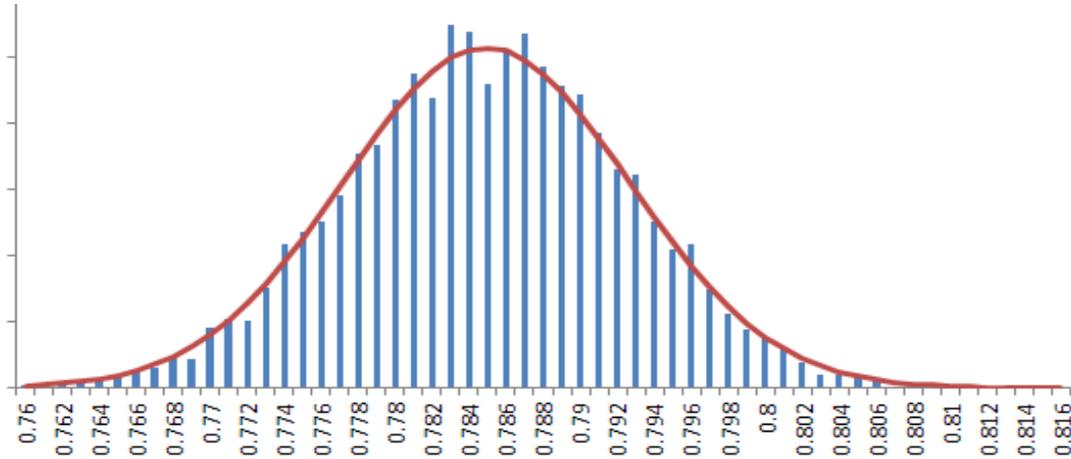


FIGURE 3.14 – Histogramme de 5,000  $\psi(0, t)$  pour  $N=1,000$  et l'approximation Normale de moyenne  $\psi(0, t)$  et de variance  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] / N$ ,  $c=1.1$ ,  $t=10$

Nous avons utilisé  $N=1,000$  car d'après [8]<sup>11</sup>, lorsque  $\lambda = 1$  et  $X$  suit une loi Exponentielle d'espérance 1, c'est à partir de  $N= 1,000$  que l'on est certain d'avoir la normalité.

En utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov nous obtenons  $p\text{-value} = 0.7056$  et  $D = 0.0099$ . La normalité est donc validée aussi bien graphiquement, que par le test de normalité numérique.

Dans ce cas, avec  $\alpha = 2.5\%$  et  $t=10$  nous avons :

$$\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(0, t) = \psi(0, t) + \sqrt{V_0} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) = 79.87\%$$

### Applications numériques avec $\lambda = 5$ et $X$ suit une LN d'espérance 3,000,000 et d'écart-type 1,000,000

Examinons les valeurs de  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$  pour plusieurs années  $t=1, 3, 5, 10$  avec une prime d'assurance annuelle  $c=18,000,000$ .

t	1	3	5	10
$\psi(0, t)$	0.7409556	0.8001712	0.8155685	0.8276925
$\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$	0.04306938	0.02602284	0.0192854	0.0125846

TABLE 3.11 – Variance et probabilité de ruine lorsque l'on utilise une loi Lognormale pour modéliser la sinistralité

Nous testons dans un premier temps la normalité de la probabilité de ruine pour différentes valeurs de  $N$ .

11. S.Loisel, C.Mazza et D.Rullière (2008) *Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*

N	50	100	200	500	1,000
$D_{KS}$	0.1125	0.0214	0.0189	0.0188	0.0155
$p - value_{KS}$	<0.001	0.01145	0.05892	0.08993	0.65846

TABLE 3.12 – Tests de normalité pour différents N

Généralement la normalité est acceptée lorsque la p-value est supérieure à 5 %. Dans notre cas par sécurité nous allons supposer que l'on accepte la normalité pour  $N \geq 500$ .

Dans un second temps, on se doit de vérifier la normalité de la probabilité de ruine pour différents n où n est le nombre de  $\psi(0, t)$  simulées.

En effet, au niveau opérationnel la distribution de  $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(0, t)$  est faite par simulation; or, le nombre de simulations correspond à n. Afin d'optimiser le temps de simulation, il est intéressant de savoir à partir de quel n nous obtenons la normalité.

Dans l'exemple précédent n était égal à 5,000.



FIGURE 3.15 – Distribution de  $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N, robuste}(0, t)$ , construite à partir de n simulations

Pour cela, nous utilisons deux tests différents : le test de Kolmogorov-Smirnov et le test de Shapiro-Wilk

n	100	500	1,000	3,000	5,000
$D_{KS}$	0.1006	0.0356	0.0311	0.0236	0.0155
$p - value_{KS}$	0.264	0.5495	0.1962	0.07116	0.65846
$W_{SW}$	0.9982	0.9984	0.9986	0.9996,	0.9997
$p - value_{SW}$	>0.25	>0.25	>0.25	>0.25	>0.25

TABLE 3.13 – Tests de normalité pour différents n

Pour chacun de ces tests nous avons utilisé N=1,000 car nous avons vu précédemment qu'avec un N aussi grand et n=5,000 nous atteignons la normalité.

Chacun des tests valide la normalité avec des résultats variant selon le nombre de simulations.

Cependant ces tests sont très influencés par la taille de l'échantillon qui varie dans ce cas puisque l'échantillon testé pour sa normalité est de taille n. De fait, les approches empiriques,

notamment graphiques, gardent toute leur importance.

Pour cela, nous traçons les histogrammes de  $n\psi(0, t)$  pour  $N=1,000$ .

Nous constatons que la normalité est plus ou moins présente pour chacune des distributions, cependant la prudence conduirait à utiliser  $\geq 3,000$ .

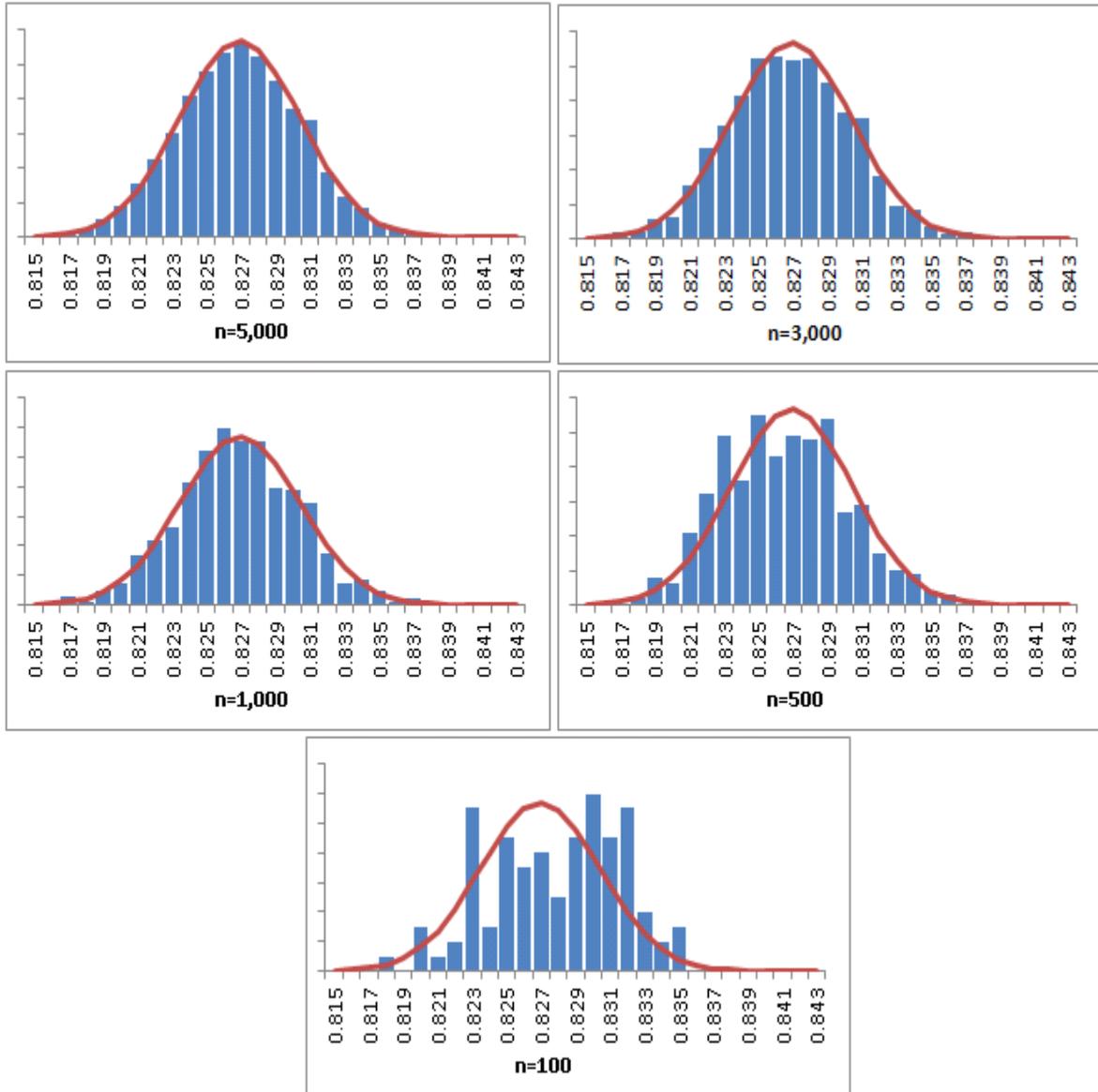


FIGURE 3.16 – Histogrammes de  $n\psi(0, t)$  pour différents  $n$  et pour  $N=1,000$  Approximation Normale de moyenne  $\psi(0, t)$  et de variance  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] / N$ ,  $c=18,000,000$  en  $t=10$

Dans ce cas, avec  $\alpha = 2.5\%$  et  $t=10$  nous avons :

$$\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(0, t) = \psi(0, t) + \sqrt{V_0} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) = 83.46\%$$

### Applications d'un traité de réassurance

Dans un premier temps nous appliquons un programme de réassurance ILL XS 3,700,000 tel que présenté dans le chapitre précédent. La prime de réassurance annuelle est  $c' = 500,000$ . Le même programme est appliqué pendant les 10 années.

Regardons les valeurs de la probabilité de ruine  $\psi_R(0, t)$  et les valeurs de  $\mathbf{V}_{R,Y} [\lambda t \varphi_R^{(Y)}(0, t)]$  pour plusieurs années  $t=1, 3, 5, 10$ .

t	1	3	5	10
$\psi_R(0, t)$	0.7246361	0.7602358	0.7716983	0.7872776
$\mathbf{V}_{R,Y} [\lambda t \varphi_R^{(Y)}(0, t)]$	0.04128681	0.02508303	0.01863223	0.01177776

TABLE 3.14 – Réduction de la probabilité de ruine et de la variance grâce à la réassurance

5,000,000 simulations de sinistralité ont été faites, on rappelle :  $\psi_R(0, t) = 1 - E \left[ \frac{1}{ct} (ct - S_{R,t} - c't)_+ \right]$ , et  $\mathbf{V}_{R,Y} [\lambda t \varphi_R^{(Y)}(0, t)] = (\lambda t)^2 V_{R,Y} \left[ \frac{1}{ct} (ct - Y_R - S_{R,t} - c't)_+ \right]$

Nous notons que la réassurance permet de réduire d'une part la probabilité de ruine, mais également  $V_0$ . C'est donc un moyen de diminuer le capital ainsi que l'intervalle de confiance l'entourant.

Testons maintenant la normalité pour différents N :

N	50	100	200	500	1,000
$D_{KS}$	0.0859	0.0114	0.0187	0.0152	0.0045
$p - value_{KS}$	0.01522	0.15236	0.14412	0.54896	0.65225

TABLE 3.15 – Normalité avec l'application d'un programme de réassurance pour différents N

Nous remarquons que la normalité est vérifiée pour  $N \geq 200$ . Elle est donc plus rapidement atteinte avec une sinistralité nette de réassurance.

Vérifions maintenant pour différents n.

n	100	500	1,000	3,000	5,000
$D_{KS}$	0.0548	0.03051	0.0286	0.0201	0.0111
$p - value_{KS}$	0.51232	0.06561	0.41234	0.41578	0.36575

TABLE 3.16 – Normalité avec l'application d'un programme de réassurance pour différents n

La normalité est acceptée selon le test de Kolmogorov-Smirnov pour tout n. Cependant ce test n'est pas probant car les échantillons testés sont de tailles différentes comme nous l'avons précisé précédemment. On remarque notamment, que lorsque  $n=500$  la normalité n'est pas acceptée avec le test de Kolmogorov-Smirnov.

On observe sur les histogrammes suivants une amélioration de la normalité pour des n petits. Cela indique que la réassurance permet également une convergence de la probabilité de ruine

vers une loi Normale plus rapide. Cependant par prudence, il est préférable d'utiliser pour la modélisation  $n \geq 3,000$ .

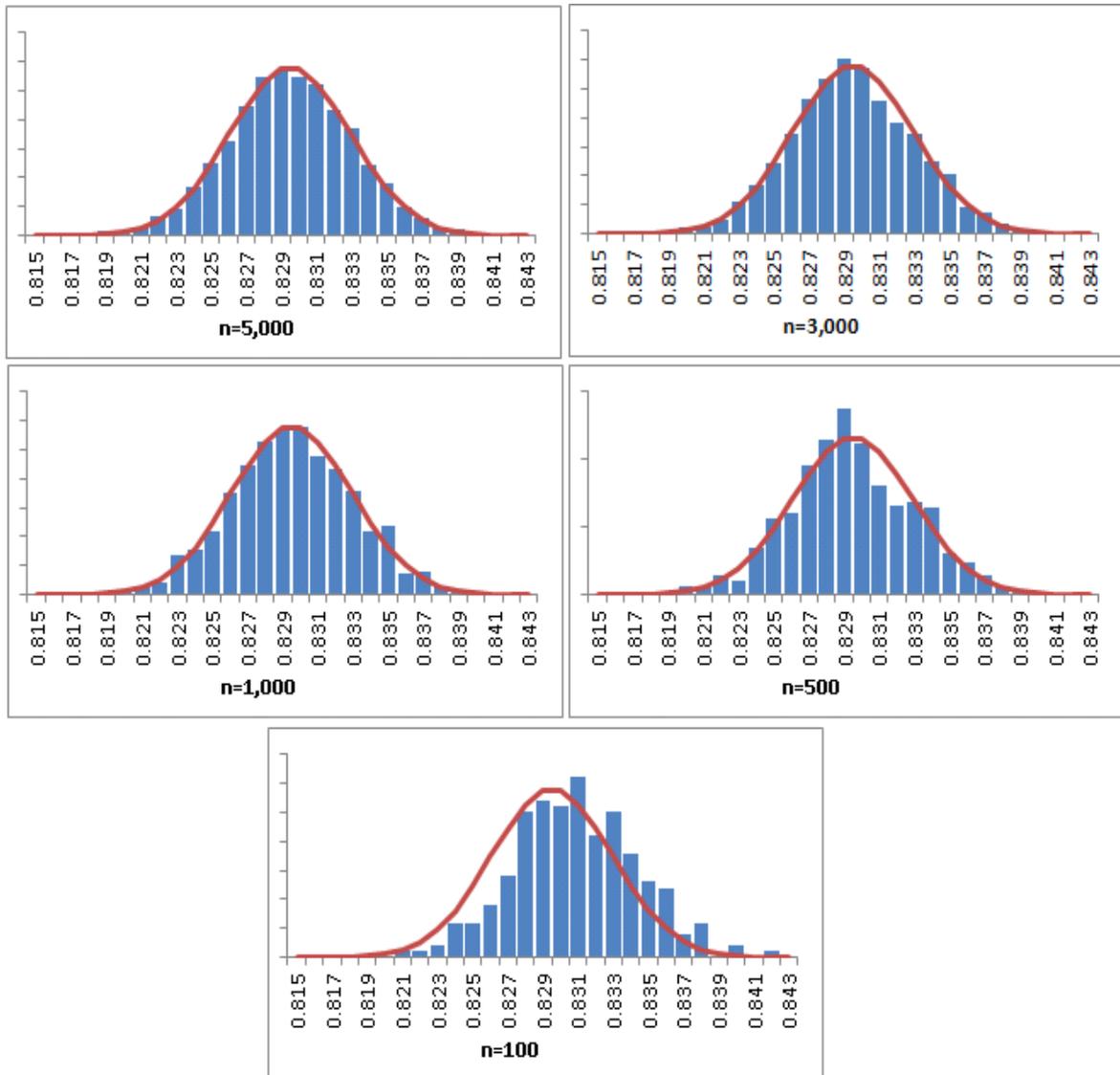


FIGURE 3.17 – Histogrammes de  $n \psi(0, t)$  pour différents  $n$  et pour  $N=1,000$  Approximation Normale de moyenne  $\psi(0, t)$  et de variance  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] / N$ ,  $c=18,000,000$  en  $t=10$

Dans ce cas, avec  $\alpha = 2.5\%$  et  $t=10$  nous avons :

$$\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(0, t) = \psi(0, t) + \sqrt{V_0} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) = 79.40\%$$

### Application avec un traité de réassurance comprenant un AAD

La probabilité de ruine  $\psi(0, t)$  lorsque le programme de réassurance précédent est appliqué uniformément à horizon 10 ans est proche de 78 % (voir partie précédente).

Supposons que l'entreprise veuille réduire sa réassurance en incluant une clause AAD de manière à approcher  $\psi(0, 10)=80\%$ .

Nous allons essayer de voir quelle est la sensibilité de la probabilité de ruine à l'ajout d'un AAD et si la normalité est toujours acceptable.

Pour cela, le programme de réassurance ILL XS 3,700,000 est changé pour un programme en deux tranches : 1,260,000 XS 3,700,000 et ILL XS 5,000,000 avec un AAD de 1,260,000 sur la première tranche.

La clause de franchise *Aggregate* a pour but de restreindre l'engagement du réassureur, et donc de diminuer le coût de la réassurance. Elle se comporte comme une franchise annuelle, appliquée à la somme des montants qui seraient normalement dus par le réassureur sans l'application de cette clause : la cédante garde à sa charge le ou les premiers sinistres supérieurs à 3,700,000 jusqu'à ce que leur cumul dépasse 1,260,000.

La prime de réassurance est 300.

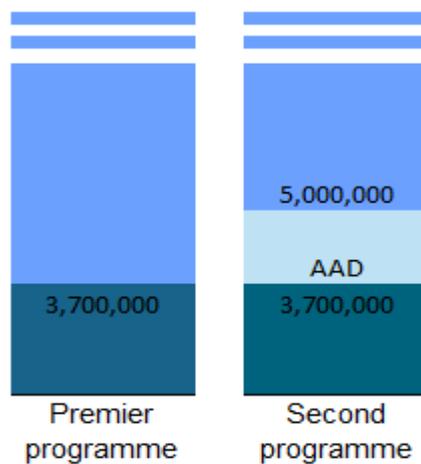


FIGURE 3.18 – Programmes de réassurance appliqués à la sinistralité

Examinons la probabilité de ruine avec ce nouveau programme de réassurance, ainsi que les valeurs de  $\mathbf{V}_{R,Y} [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$

t	1	3	5	10
$\psi_R(0, t)$	0.7366195	0.771063	0.7873059	0.7967759
$\mathbf{V}_{R,Y} [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)]$	0.04307388	0.02539598	0.01789259	0.01379626

TABLE 3.17 – Baisse de la probabilité de ruine malgré la présence d'un AAD

On remarque que la probabilité de ruine a augmenté mais elle reste tout de même inférieure à la probabilité de ruine brute de réassurance.

Vérifions maintenant la normalité pour différents  $N$  :

$N$	50	100	200	500	1,000
$D_{KS}$	0.0895	0.0412	0.0214	0.0198	0.0064
$p - value_{KS}$	0.01484	0.10541	0.11254	0.63224	0.66985

TABLE 3.18 – Normalité avec l'application d'un programme de réassurance contenant un AAD pour différents  $N$

Nous remarquons que la normalité est vérifiée pour  $N \geq 200$ . Elle est donc encore une fois plus rapidement atteinte malgré l'application d'un AAD.

Vérifions maintenant pour différents  $n$ .

$n$	100	500	1,000	3,000	5,000
$D_{KS}$	0.0652	0.0412	0.0322	0.0238	0.0214
$p - value_{KS}$	0.45896	0.12859	0.36985	0.38126	0.51236

TABLE 3.19 – Normalité avec l'application d'un programme de réassurance contenant un AAD pour différents  $n$

La normalité est acceptée selon le test de Kolmogorov-Smirnov pour tout  $n$ .

On observe sur les histogrammes suivants que la normalité est conservée malgré la mise en place d'un ADD au programme de réassurance.

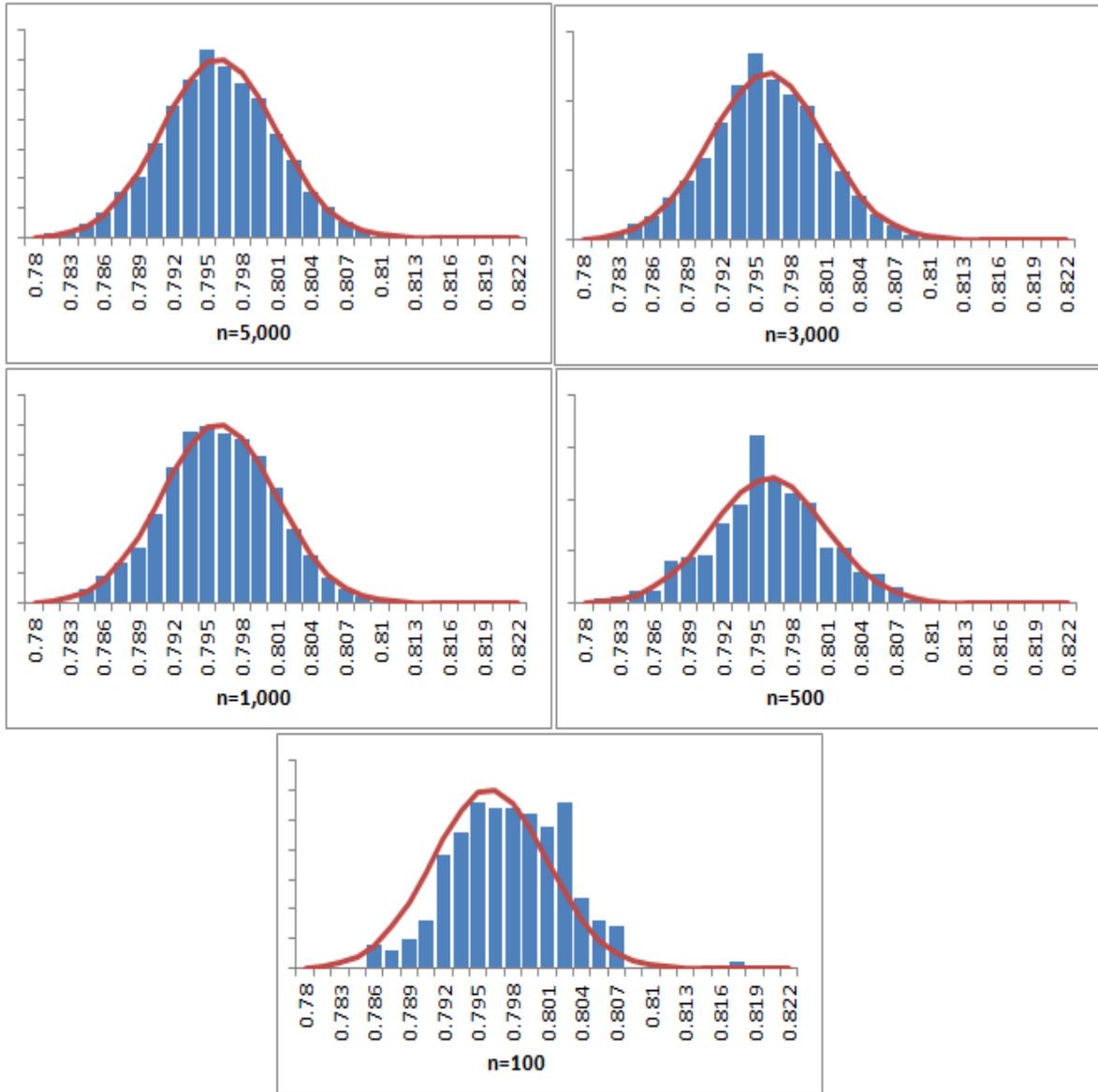


FIGURE 3.19 – Histogrammes de  $n \psi(0, t)$  pour différents  $n$  et pour  $N=1,000$  Approximation Normale de moyenne  $\psi(0, t)$  et de variance  $\mathbf{V}_Y [\lambda t \varphi^{(Y)}(0, t)] / N$ ,  $c=18,000,000$  en  $t=10$ ,

Nous arrivons à  $\psi(0, 10) = 79.7\%$ , or nous souhaitons  $\psi(0, 10) = 80\%$ . Afin d'atteindre ce niveau nous allons tester différents montants de prime annuelle  $c$ .

Nous obtenons :

$c$	17,800,000	17,850,000	17,900,000	17,900,000
$\psi(0, 10)$	0.803623	0.8019115	0.8001998	0.7984879

TABLE 3.20 – Probabilité de ruine cible en faisant varier la prime

C'est en prenant  $c = 17,900,000$  que nous arrivons au plus près de l'objectif.

Cependant, il est intéressant de savoir qu'avec un prime  $c=18,000,000$ ,  $\alpha = 2.5\%$  et  $t=10$  nous avons :

$$\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(0, t) = \psi(0, t) + \sqrt{V_0}\Phi^{-1}(1 - \varepsilon) = 80.41\%$$

L'entreprise peut déterminer sa prime selon si elle souhaite que  $\psi(0, 10) = 80\%$  ou  $\tilde{\psi}_{1-\varepsilon}^{N,robuste}(0, t) = 80\%$ .

La méthodologie développée dans ce dernier chapitre permet d'obtenir des distributions d'erreur sur l'ensemble de la courbe de répartition de  $\psi(0, t)$ . Cela donne la possibilité d'avoir un intervalle de confiance aussi précis que souhaité entourant l'ensemble des niveaux de probabilité de ruine.

L'article [8]<sup>12</sup> montre la convergence de la probabilité de ruine vers une distribution gaussienne pour une sinistralité brute. Dans un premier temps, nous avons vérifié cette convergence avec des paramètres de modélisation usuellement utilisés dans nos modèles (une loi de poisson pour la fréquence et une loi LogNormale pour la sévérité). Dans un second temps, nous avons vérifié la convergence en appliquant différents traités de réassurance. Contrairement à la méthode utilisant les approximations, la réassurance n'est pas un élément bloquant. Nous observons que la réassurance permet d'accélérer la convergence de la probabilité de ruine vers une distribution gaussienne.

---

12. S.Loisel, C.Mazza et D.Rullière (2008) *Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*

# Conclusion

Dans un marché où les entreprises grandissent et se diversifient de plus en plus, les risques changent et s'accroissent rapidement. Les compagnies se doivent d'en tenir compte dans le calcul des fonds propres à détenir à l'avenir.

A cette fin, la Commission Européenne a lancé un vaste projet : Solvabilité II bâti sur trois piliers. En particulier, la construction d'un ORSA , élément principal du pilier 2, est incontournable pour toute compagnie d'assurance.

Dans un premier temps, il a été rappelé le contexte dans lequel la réforme Solvabilité II a été mise en place, puis les différentes évolutions qu'elle a subi au cours des années. Un focus particulier sur l'ORSA a montré les bénéfices qu'une entreprise peut en tirer si elle choisit de l'intégrer totalement dans le processus de management.

Ainsi, tout au long de ce mémoire, il a été présenté une méthodologie pouvant aider les entreprises à concevoir leur ORSA. Elle permet d'associer de manière cohérente l'appétence aux risques à la solvabilité actuelle et future.

Dans un second temps, il a été montré que la réassurance est un des outils principaux de la gestion des risques. En effet, l'ORSA met en évidence des situations défavorables contre lesquelles l'entreprise va chercher à se prémunir. Grâce à la réassurance, elle pourra piloter et minimiser son exposition aux risques, diminuant ainsi son besoin global en fonds propres. La réassurance entraîne également une baisse de la volatilité autour des résultats ce qui nous a permis de réduire l'intervalle de confiance entourant la probabilité de ruine.

Le travail entrepris dans ce mémoire pourrait être poursuivi en intégrant une vision multi-branches à l'étude.

En tant que courtier en réassurance, notre accès aux données des assureurs se limite généralement à quelques branches. C'est d'ailleurs ce qui a motivé notre choix de nous concentrer sur la construction d'un intervalle de confiance de la probabilité de ruine d'une seule branche. Il serait intéressant de mener cette étude pour plusieurs branches et d'établir ensuite une méthodologie pour les réunir. Ainsi, un intervalle de confiance pourrait alors être construit autour de la probabilité de ruine globale. Ceci permettrait à l'assureur d'avoir un processus ORSA complet, comprenant le calcul d'un SCR spécifique à sa sinistralité et l'aléa l'entourant.

Cependant, la modélisation de l'ensemble des corrélations existantes entre les branches peut exiger de nombreuses hypothèses qui devront être expliquées et documentées.

La mise en place du processus ORSA est jugée par beaucoup d'entreprises comme un exercice difficile, or, il serait inexact de penser que cette démarche est nouvelle. Chaque compagnie possède un processus interne lui permettant de gérer et d'anticiper le futur via un business plan. L'ORSA apporte une sensibilité supplémentaire à ces pratiques en y associant l'exigence de solvabilité.

# Bibliographie

- [1] Besson J.L., Partrat C. (2004) "*Assurance Non Vie : Modélisation, Simulation*", Economica
- [2] Blondeau J., Partrat C. (2004) "*La Réassurance, approche technique*", Economica
- [3] Buchwalder M., Chevallier E. et Kluppelberg C. (1993) "*Approximation methods for the total claimsize distributions - an algorithmic and graphical presentation*" Mitteilungen SVVM 187-227
- [4] Charpentier A.(2009) "*Boni-Mali et provisionnement*", Formation SEPIA-INSTITUT DES ACTUAIRES.
- [5] Fisher R. (1997) "*On an absolute criterion for fitting frequency curves*", Statistical Science Vol. 12, No. 1 pp. 39-41
- [6] Kauppi L., Ojantakanen P. (1969) : "*Approximations of the generalized Poisson function*", Astin Bulletin.
- [7] Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. (1998) "*Loss Models : From Data to Decisions*", Wiley
- [8] S.Loisel, C.Mazza et D.Rullière (2008) "*Robustness analysis and convergence of empirical finite-time ruin probabilities and estimation risk solvency margin*", Insurance : Mathematics and Economics Volume 42, Issue 2, April 2008, Pages 746-762
- [9] Loisel, S., Mazza, C., Rullière, D. (2009), "*Convergence and asymptotic variance of bootstrapped finite-time ruin probabilities with partly shifted risk processes*", Insurance : Mathematics and Economics, vol. 45, 3, pages 374-381
- [10] Panjer & Wilmott(1992)"*Insurance Risk Models*", Society of Actuaries
- [11] Partrat C.,Lecoeur E., Nisipasu E., Nessi M. et Reiz O. (2007) "*Provisionnement technique en assurance non vie*", Economica
- [12] Pentikäinen.T (1997) "*On the Approximation of the total amount of claims*", ASTIN Bulletin, 9 :3, 1977, p. 281.

## Annexe A

# Annexe

### A.1 Triangles de liquidation des sinistres

En découpant ainsi la sinistralité, on obtient une plus grande précision du risque qu'en-court l'assureur. Ce n'est cependant pas encore suffisant. La problématique rencontrée par l'assureur est liée à la nature même de l'activité d'assurance, à savoir l'inversion du cycle de production. L'assureur a pris l'engagement d'indemniser tous les sinistres survenus durant la période de couverture. Il convient donc de constituer des provisions pour indemniser les victimes, même si le sinistre n'est déclaré, puis clôturé, que des années plus tard. Or la vie d'un sinistre peut être longue, par exemple certains sinistres peuvent être déclarés des années après leur survenance. Ainsi dans certaines branches d'assurance, appelées à déroulement long (RC par exemple), on estime que les sinistres seront étalés sur une période de 10 à 15 ans. Or cette période de couverture du risque peut être mal anticipée et donc conduire à une mauvaise prise en compte du risque.

Pour analyser les délais de paiement auxquels il est soumis, l'assureur va utiliser les données de sinistres des années précédentes en séparant les composantes attritionnelle, grave et catastrophe.

Pour chaque maille les données sont organisées sous forme de matrice : les éléments situés sur une même ligne sont relatifs à une même année de survenance tandis que ceux dans une même colonne correspondent à un même décalage de paiement par rapport à l'année de survenance. Cette matrice est appelée triangle de liquidation.

En voici un exemple :

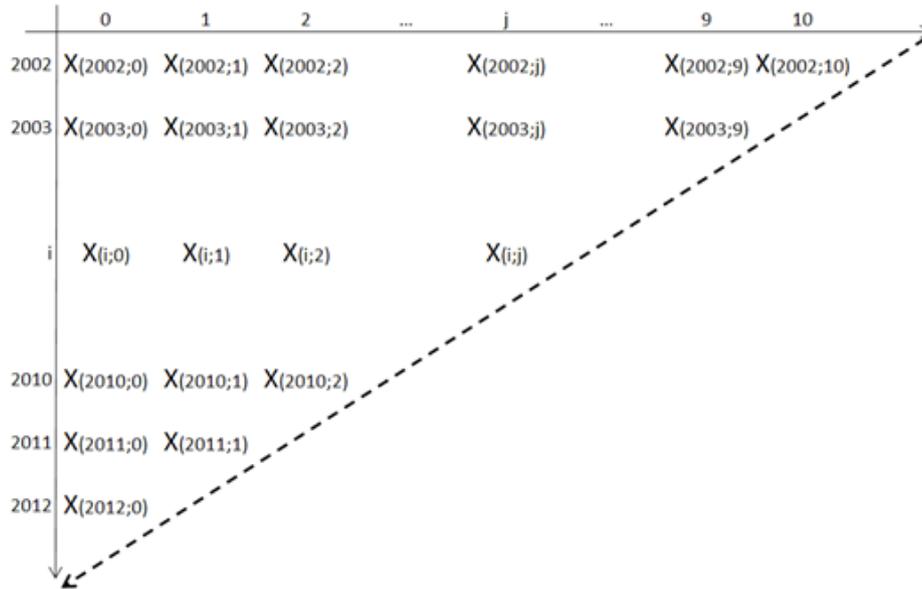


FIGURE A.1 – Triangle de liquidation

$X_{(i;j)}$ , correspond au total des montants payés au cours de l'année  $i+j$  pour des sinistres survenus au cours de l'année  $i$ . On remarque que si on additionne l'ensemble des éléments de la première ligne,  $\sum_{k=0}^{10} X_{(2002;k)}$  on obtient la sinistralité issue de l'année de survenance 2002 payée jusqu'à aujourd'hui. Il en est de même pour chacune des lignes.

Notons  $C_{i;j} = X_{(i;0)} + X_{(i;1)} + \dots + X_{(i;j)}$  le montant cumulé des paiements des sinistres survenus l'année  $i$  vu après  $j$  années. L'information disponible à la fin de l'année 2012 sera notée :  $F_{2012} = \{(C_{i;j}), 0 \leq i + j \leq 2012\} = \{(X_{i;j}), 0 \leq i + j \leq 2012\}$ .

On remarque également qu'en 2012 il n'y a qu'une seule case; cela est du au fait que les sommes payées au cours de l'année 2013 pour la sinistralité 2012 ne soient pas encore connues.

Introduisons également comme notation  $F_t^k$ , il s'agit de l'information disponible à la date  $t$  pour les  $k$  premières années de survenance ie :

$$F_t^k = \{(C_{i;j}), 0 \leq i + j \leq t, i < k\} = \{(X_{i;j}), 0 \leq i + j \leq t, i < k\}$$

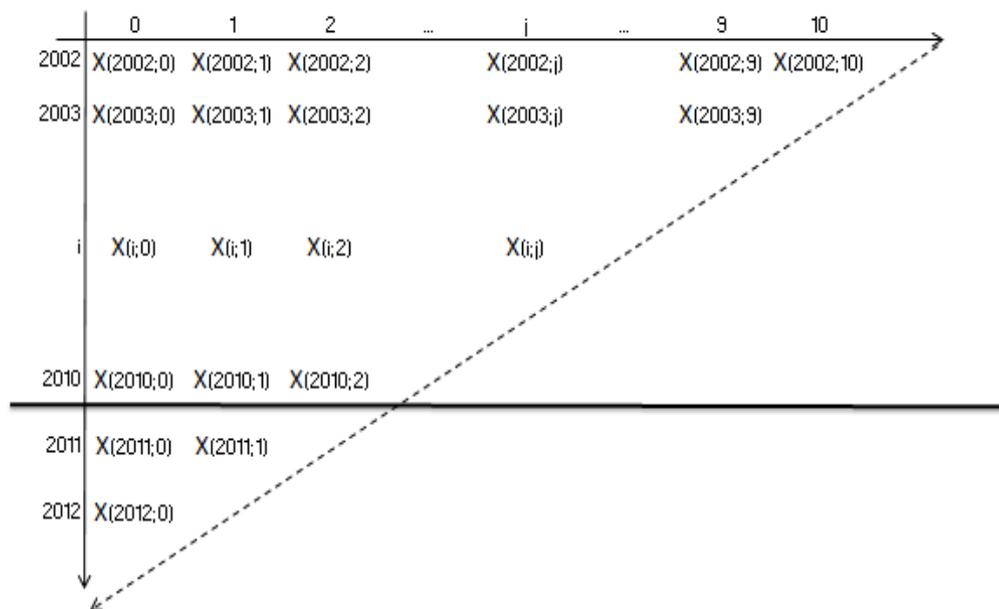


FIGURE A.2 – Information disponible fin 2012 pour les 9 premières années de survenance

$$F_{2012}^9 = \{(C_{i;j}), 0 \leq i + j \leq 2012, i < j\} = \{(X_{i;j}), 0 \leq i + j \leq t, i < j\}$$

A partir de ce triangle, l'assureur calcul une cadence de règlement des sinistres pour la maille de risque étudiée. Pour cela on suppose qu'il existe un coefficient  $f_j$  qui permet de passer de la colonne  $j$  à la colonne  $j + 1$  :  $X_{(i;j+1)} = f_j * X_{(i;j)}$ .

On le définit ainsi :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{2012-j-1} X_{(i;j+1)}}{\sum_{i=0}^{2012-j-1} X_{(i;j)}}$$

Un coefficient est calculé pour chacune des colonnes, ce qui nous donne une cadence de règlement propre à la sinistralité du segment de risque étudié :  $f_0, f_1, f_2, \dots$ . Cette cadence de règlement permet ensuite de compléter le triangle et d'estimer les sommes restantes à payer pour les années de survenance passées et présentes.

Cette méthode est appelée la méthode de "Chain Ladder" [11].

Cette méthode suppose que les sinistres soient réglés de manière identique d'une année sur l'autre.

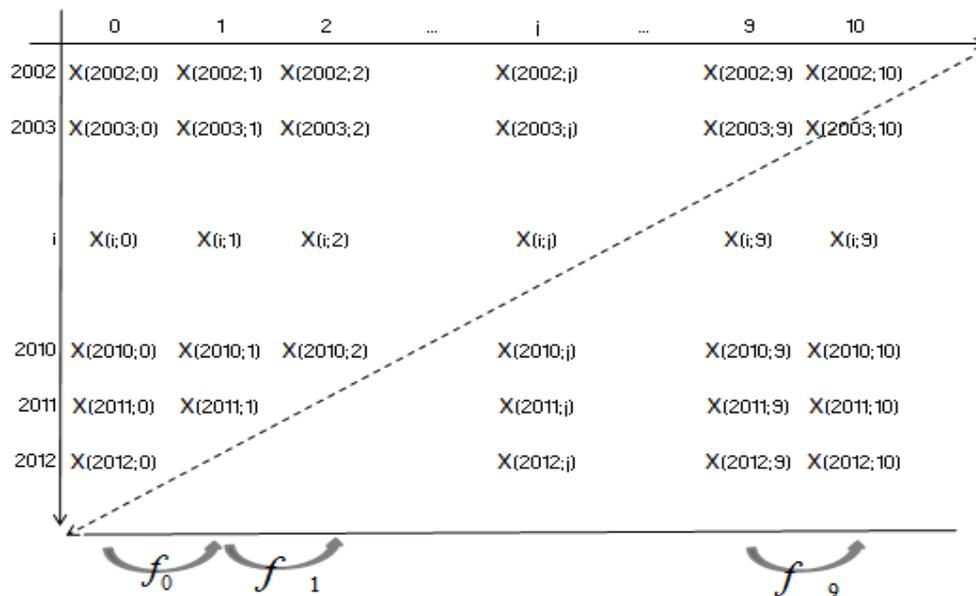


FIGURE A.3 – Triangle de liquidation complété

Cependant la modélisation des montants futurs à payer s’appuie sur des observations passées. Il est indispensable d’actualiser les montants de ces observations avant de les inscrire dans le triangle. Cela se fait en calculant les montants *as if* des sinistres. Le montant *as if* est le coût du sinistre s’il survenait dans l’environnement présent, avec les mêmes caractéristiques. Ainsi les paiements futurs calculés tiennent compte des évolutions aussi bien économiques que juridiques ou fiscales.

On note  $C_{i;\infty}$  le coût total des sinistres (inconnu) pour les sinistres survenus l’année  $i$ . Le coût total des paiements restant à effectuer à la date  $i+t$  pour l’année de survenance  $i$  est alors :

$$R_{i;t} = C_{i;\infty} - C_{i;t} = \sum_{j>t} X_{(i;j)}$$

Les deux méthodes présentées, la partition de la sinistralité et la construction des triangles de liquidation, permettent une modélisation plus juste de la sinistralité, et ainsi une meilleure prise en compte du risque dans le processus ORSA.

Comme nous l’avons vu précédemment, la partie grave de la sinistralité est simulée par une fréquence et un coût par sinistre, la partie attritionnelle quant à elle est simulée par une charge.

Le savoir-faire et la bonne connaissance de l’entreprise d’assurance peuvent être d’une grande aide pour les choix liés à la modélisation. Cependant pour faciliter cette décision plusieurs tests peuvent être utilisés : Anderson Darling, Kolmogorov Smirnov ou encore le test du Khi2. Une fois la loi choisie, les paramètres peuvent être déterminés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance (développée dans le chapitre III)

En procédant ainsi, à partir de la sinistralité passée *as if* nous obtenons :

- une loi simulant la charge de la sinistralité attritionnelle,
- une loi simulant le nombre de sinistres graves,
- une loi simulant la charge de chaque sinistre grave

Les paramètres utilisés pour la simulation de la sinistralité future (de l'année 2015 par exemple) doivent tenir compte des hypothèses décidées lors de l'étude de l'appétence aux risques faite au préalable par l'entreprise.

Supposons que le scénario choisi prévoit l'augmentation du nombre d'assurés de 5 % par an, alors les paramètres des lois simulant le nombre de sinistres graves et la charge de sinistralité attritionnelle futurs, devront en tenir compte.

Parmi les hypothèses, l'entreprise doit choisir un horizon temps pour son processus ORSA. Pour des raisons pratiques il s'agit souvent de l'horizon utilisé dans le business plan.

Dans cette étude, le choix a été fait de prendre un horizon de 5 ans. Cela est suffisant pour pouvoir prévoir les premiers effets des politiques actuelles, tout en ne requérant pas d'hypothèses sur le très long terme.

On remarque que le choix de la finesse du maillage, fait en amont par l'entreprise, est très important. En effet, si le maillage est trop large, l'entreprise ne pourra pas faire apparaître les particularités de chaque maille dans un scénario global.

Au contraire, si le maillage est trop fin, les données historiques ne sont pas assez nombreuses pour construire une simulation juste.

## A.2 Détermination des lois et des paramètres utilisés pour la simulation

Lors de la construction d'un modèle stochastique, il est important de déterminer les lois adéquates ainsi que leurs paramètres associés. C'est en utilisant les résultats issus des simulations que l'assureur détermine les montants de primes ainsi que les niveaux de fonds propres qu'il doit détenir. Une erreur dans les choix de modélisation peut engendrer de grandes conséquences quant à la pérennité de l'entreprise.

Il a été vu précédemment (cf 2.1.2) que la sinistralité grave correspond à une modélisation du type modèle collectif. La sinistralité est caractérisée par une fréquence ( $N$  le nombre de sinistres) et une sévérité ( $X_i$  le montant du  $i$ ème sinistre).

On suppose que  $X_i \geq 0$  et on dénote par

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

le montant total des sinistres généré par un portefeuille pendant une période donnée  $t$ .

Par la suite, les hypothèses suivantes seront prises :

- $N_t$  est une variable aléatoire discrète, à valeurs entières
- $X_1, \dots, X_N$  sont des variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) dont la fonction de répartition est notée :  $F(X)$
- la variable  $N_t$  est supposée indépendante de la suite  $X_1, X_2, \dots$

En d'autres termes, le montant des sinistres et leur occurrence sont supposés indépendants, c'est à dire que le montant des sinistres n'est pas affecté par le nombre de sinistres, ni par le montant des autres sinistres.

En conséquence,  $S$  est une somme de variables aléatoires dont la loi dépend de celles de  $N$  et des  $X_i$ . Cette représentation du risque aléatoire encouru par l'assureur est avantageuse, d'une part parce qu'elle permet de départager l'impact du comportement aléatoire de  $N$  et des  $X_i$  sur le montant total des réclamations. Mais aussi parce qu'il est plus simple de modéliser séparément ces deux composantes.

Dans les prochaines sections un état des différents modèles stochastiques classiques associés aux distributions de  $N$  et des  $X_i$  sera fait. Pour plus de détails on peut se référer aux travaux de Panjer et Willmot (1992) [10].

### A.2.1 Modélisation du nombre de sinistres

Notons  $Im_i(h, SCR_{NV})$  l'indicateur d'impact marginal de la branche sur le  $SCR_{NV}$ , après cession d'une fraction de la classe de risque. Il s'agit du taux d'accroissement mesurant la baisse obtenue sur le  $SCR_{NV}$  après cession d'une fraction de la branche.

L'impact marginal est un indicateur qui permet par exemple, en considérant l'ensemble des mailles de risque, d'évaluer la contribution au  $SCR_{NV}$  d'une maille en particulier.

Il existe également l'indicateur RORAC (*Return On Risk Adjusted Capital*) qui est un indicateur de rentabilité défini comme le quotient d'un indicateur de performance et d'un indicateur de risque. Avec le RORAC il est possible dans certaines conditions de piloter l'activité. Le ROE (*Return in Equity*) est également un indicateur, il rapporte le résultat de la période au capital immobilisé pendant cette période. Il s'interprète comme le taux de rémunération du capital immobilisé sur une année.

Le choix d'un modèle approprié se fait en se basant sur les valeurs observées sur plusieurs périodes. Toutefois, dans la pratique, il est nécessaire d'avoir une loi modélisant cette fréquence. En effet, les données empiriques de  $N$  fournissent une information sur une période finie et souvent courte, or il faut également assigner des probabilités à des valeurs de  $N$  en dehors de l'étendue observée.

Les lois usuellement utilisées pour modéliser la distribution empirique de  $N$  sont les lois de Poisson, binomiale, binomiale négative et Poisson inverse gaussienne, ainsi que les classes de distributions  $(a; b; 0)$  et  $(a; b; 1)$ . Un exposé complet des modèles pour  $N$  se trouve dans Klugman et coll. (1998) [7].

Les lois de Poisson, binomiale, et binomiale négative sont le plus utilisées pour la modélisations de la sinistralité grave.

La fonction de probabilité de la loi de **Poisson** est de la forme :

$$p_n = P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

où  $\lambda$  est l'espérance de  $N$ .

Lorsque l'on utilise la loi de Poisson avec paramètre  $\lambda$  pour modéliser la distribution de  $N$ , on suppose implicitement que l'espérance du nombre de sinistres est égale à sa variance. Cette hypothèse d'équidispersion est assez restrictive.

Dans la pratique, du fait de la présence de valeurs nulles dans les données et de la présence de quelques valeurs extrêmes, la variance est fréquemment supérieure à la moyenne. On parle alors de sur-dispersion de la variable  $N$ .

L'utilisation de la loi de Poisson peut donc impliquer une sous estimation de l'écart type et donc une mauvaise simulation de la fréquence. Pour cela, il est utile d'utiliser un modèle de comptage alternatif, basé sur la loi binomiale négative, qui prend en compte cette sur-dispersion par l'introduction d'un paramètre supplémentaire  $\alpha$ .

La **binomiale négative** a une fonction de probabilité telle que :

$$p_n = P(N = n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r (1-p)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

où  $r$  est un entier et  $0 \leq p \leq 1$ .

L'espérance est :  $E(N) = \frac{r(1-p)}{p}$  et la variance est :  $Var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ , elles sont donc bien différentes l'une de l'autre.

La distribution géométrique est un cas particulier de la binomiale négative dans lequel  $r = 1$ . C'est une loi sans mémoire, ce qui signifie que si  $m$  sinistres ont déjà été enregistrés, alors la distribution de probabilité du nombre de sinistres supplémentaires ne dépend pas de  $m$ .

On peut considérer la binomiale négative comme étant une généralisation de la loi Poisson. Elle peut être obtenue comme le mélange d'une Poisson de paramètre  $\Lambda$  inconnu obéissant à une loi Gamma de paramètres  $\alpha = r$  et  $\beta = \frac{1-p}{p}$ .

En effet si  $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  et

$N|\Lambda = \lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , on a :

$$\begin{aligned}
 P(N = n) &= \int_0^\infty P(N = n|\Lambda = \lambda)g(\lambda)d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\beta}d\lambda \\
 &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}n! \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\alpha+n} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+n-1} \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\alpha+n}}{\Gamma(n+\alpha)} e^{-\lambda(\beta+1)/\beta} d\lambda
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

En intégrant la fonction de densité d'une loi Gamma avec paramètres  $\alpha + n$  et  $\beta/(\beta - 1)$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 P(N = n) &= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\beta^\alpha \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{\alpha+n} \Gamma(\alpha)n!} \\
 &= \frac{(n+\alpha-1)!}{(\alpha-1)!n!} \left(\frac{1}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^n \\
 &= \frac{(n+\alpha-1)!}{(\alpha-1)!n!} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^n
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

ce qui est la fonction de probabilité d'une loi binomiale négative avec paramètres  $r = \alpha$  et  $p = 1/(1 + \beta)$ .

En pratique, il existe plusieurs situations où le paramètre  $\lambda$  de la Poisson varie d'un assuré à l'autre au sein d'une même classe ; dans de telles circonstances, il est naturel de le considérer comme aléatoire.

La troisième loi souvent employée lors de la modélisation du nombre de sinistres est la loi **binomiale**. Elle est particulièrement utile lorsque la variance de  $N$  est inférieure à son espérance. La fonction de probabilité est définie par :

$$p_n = P(N = n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \quad 0 \leq n \leq m$$

où  $m$  est entier et  $0 \leq p \leq 1$ .

$m$  représente le nombre de risques potentiels et  $n$  le nombre aléatoire de sinistres avérés.

On trouve une littérature abondante sur l'utilisation de ces modèles, notamment : Greene et Wooldridge [?]

### A.2.2 Modélisation de la sévérité

Dans cette section un aperçu des différentes lois usuellement utilisées pour modéliser la sévérité est rédigé.

Comme il a été vu dans les parties précédentes, l'épaisseur de la queue de distribution de  $X$  est d'un intérêt tout particulier pour les assureurs. Les compagnies sont préoccupées par la possibilité qu'un contrat génère des sinistres élevés et mette en difficulté la santé financière de l'entreprise.

Plusieurs fonction associées à la densité  $f_X$  de  $X$  peuvent être utilisées pour caractériser le comportement de la queue de distribution. La fonction de survie par exemple :

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{\infty} f_X(y)dy$$

donne la probabilité qu'un sinistre soit supérieur à  $x$ . Si la fonction de densité a une queue lourde,  $\overline{F}_X(x)$  sera grand.

Une autre fonction utilisée est le taux de panne, défini par :

$$\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)} = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

La queue de distribution de  $X$  est d'autant plus lourde que  $\lambda_X(x)$  est petit.

En assurance non vie les modèles choisis ont généralement des taux de panne décroissants, en revanche des modèles utilisés en vie auront des taux de panne croissants.

Les distributions les plus utilisées pour la modélisations de la sévérité grave sont les suivantes :

Loi	paramètres
Log-Normale	$\mu, \sigma$
Pareto	$\alpha, \beta$
Gamma	$\alpha, \beta$
Exponentielle	$\lambda$
Pareto généralisée	$\alpha, \tau, \theta$
Weibull	$\delta, \beta$

Parmi ces lois, seule l'exponentielle a un taux de panne constant (égal à son espérance), les autres ont des taux de panne décroissants.

Les lois exponentielle et Gamma ont toutes deux des queues légères, alors que la Log-Normale a une queue moyenne et la Weibull a une queue épaisse pour  $0 < \delta < 1$ .

Chaque distribution a des caractéristiques spécifiques : fonction de densité, de répartition, espérance, variance, fonction génératrice des moments... autant de données qui vont les rendre plus ou moins appropriées selon le type de portefeuille à modéliser.

Dans la pratique, le choix des lois énumérées dans le tableau nécessite également un choix de valeurs particulières pour les paramètres. Ils doivent être choisis judicieusement en fonction des données historiques. Afin de déterminer ces coefficients des méthodes existent, la plus utilisée est la méthode du maximum de vraisemblance.

### A.3 Calculs de $E[S^I]$ pour différentes lois de W

#### A.3.1 le montant des sinistres W suit une loi Lognormale $(a; b)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_a] &= \mathbb{E}[W\mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M\mathbf{1}_{W > M}] = \int_0^M W \frac{\exp\left(\frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2}\right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW + \int_M^\infty M \frac{\exp\left(\frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2}\right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW \\
&= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \left( -\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \right) \operatorname{erf}\left(\frac{a + b^2 - \ln(W)}{\sqrt{2}b}\right) \right]_0^M + \left[ -M \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{berf}\left(\frac{a - \ln(W)}{\sqrt{2}b}\right) \right]_M^\infty \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( -\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \right) \operatorname{erf}\left(\frac{a + b^2 - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) - \left( -\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \right) + M \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( -\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \right) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a + b^2 - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) + 1 - 2 \right] + 2M \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) \right] \right] \\
&\tag{A.3}
\end{aligned}$$

or

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

d'où :

$$\mathbb{E}[W_a] = \left( -\exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \right) \left[ \phi\left(\frac{a + b^2 - \ln(M)}{b}\right) - 1 \right] + M\phi\left(\frac{a - \ln(M)}{b}\right) \tag{A.4}$$

et

$$\mathbb{E}[S^I] = \lambda \left[ M\phi\left(\frac{a - \ln(M)}{b}\right) - \mathbb{E}[W] \left[ \phi\left(\frac{a + b^2 - \ln(M)}{b}\right) - 1 \right] \right] \tag{A.5}$$

de même nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_a^2] &= \mathbb{E}[W^2\mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M^2\mathbf{1}_{W > M}] = \int_0^M W^2 \frac{\exp\left(\frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2}\right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW + \int_M^\infty M^2 \frac{\exp\left(\frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2}\right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW \\
&= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \left( \left[ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} b \exp(2(a + b^2)) \operatorname{erf}\left(\frac{a + 2b^2 - \ln(W)}{\sqrt{2}b}\right) \right]_0^M + \left[ -M^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{berf}\left(\frac{a - \ln(W)}{\sqrt{2}b}\right) \right]_M^\infty \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left[ -\exp(2(a + b^2)) \left( \operatorname{erf}\left(\frac{a + 2b^2 - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) + 1 - 2 \right) \right] + M^2 2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a - \ln(M)}{\sqrt{2}b}\right) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left[ -\exp(2(a + b^2)) \left( 2\phi\left(\frac{a + 2b^2 - \ln(M)}{b}\right) - 2 \right) \right] + M^2 2 \left[ \phi\left(\frac{a - \ln(M)}{b}\right) \right] \right) \\
&= \left[ -\exp(2(a + b^2)) \left( \phi\left(\frac{a + 2b^2 - \ln(M)}{b}\right) - 1 \right) \right] + M^2 \left[ \phi\left(\frac{a - \ln(M)}{b}\right) \right] \\
&\tag{A.6}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{V}ar[S^I] = \lambda \left( M^2 \phi \left( \frac{a - \ln(M)}{b} \right) - \left[ \mathbb{E}[W^2] \left( \phi \left( \frac{a + 2b^2 - \ln(M)}{b} \right) - 1 \right) \right] \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_a^3] &= \mathbb{E}[W^3 \mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M^3 \mathbf{1}_{W > M}] = \int_0^M W^3 \frac{\exp \left( \frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2} \right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW + \int_M^\infty M^3 \frac{\exp \left( \frac{-(\ln(W)-a)^2}{2b^2} \right)}{Wb\sqrt{2\pi}} dW \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ -\exp \left( 3a + \frac{9b^2}{2} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{a + 3b^2 - \ln(M)}{\sqrt{2}b} \right) + \exp \left( 3a + \frac{9b^2}{2} \right) \right] + M^3 \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{a - \ln(M)}{\sqrt{2}b} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\exp \left( 3a + \frac{9b^2}{2} \right) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{a + 3b^2 - \ln(M)}{\sqrt{2}b} \right) + 1 - 2 \right] + 2M^3 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{a - \ln(M)}{\sqrt{2}b} \right) \right] \right) \\ &= -\exp \left( 3a + \frac{9b^2}{2} \right) \left[ \phi \left( \frac{a + 3b^2 - \ln(M)}{b} \right) - 1 \right] + M^3 \left[ \phi \left( \frac{a - \ln(M)}{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Enfin

$$\beta_{SI} = \frac{-\exp \left( 3a + \frac{9b^2}{2} \right) \left[ \phi \left( \frac{a + 3b^2 - \ln(M)}{b} \right) - 1 \right] + M^3 \left[ \phi \left( \frac{a - \ln(M)}{b} \right) \right]}{\sqrt{\lambda} \left( \left[ -\exp \left( 2(a + b^2) \right) \left( \phi \left( \frac{a + 2b^2 - \ln(M)}{b} \right) - 1 \right) \right] + M^2 \left[ \phi \left( \frac{a - \ln(M)}{b} \right) \right] \right)^{(3/2)}} \quad (\text{A.9})$$

### A.3.2 le montant des sinistres $W$ suit une loi $Pa(\alpha, \beta)$

on suppose que  $\alpha > 1$ , ie  $E[W] < \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_a] &= \mathbb{E}[W \mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M \mathbf{1}_{W > M}] = \int_\beta^M W \frac{\alpha \beta^\alpha}{W^{\alpha+1}} dW + \int_M^\infty M \frac{\alpha \beta^\alpha}{W^{\alpha+1}} dW \\ &= \frac{\alpha \beta^\alpha}{M^{\alpha-1}(1-\alpha)} - \frac{\alpha \beta^\alpha}{\beta^{\alpha-1}(1-\alpha)} + \frac{M \alpha \beta^\alpha}{M^\alpha \alpha} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{M^{\alpha-1}(1-\alpha)} (\alpha + (1-\alpha)) - \frac{\beta^\alpha}{(1-\alpha)} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\alpha-1} - \frac{\beta^\alpha}{\alpha-1} M^{1-\alpha} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta}{M} \right)^{\alpha-1} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}[S^I] = \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta}{M} \right)^{\alpha-1} \right) \lambda \mathbb{E}[W]$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_a^2] &= E[W^2 \mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M^2 \mathbf{1}_{W > M}] = \int_{\beta}^M W^2 \frac{\alpha \beta^\alpha}{W^{\alpha+1}} dW + \int_M^\infty M^2 \frac{\alpha \beta^\alpha}{W^{\alpha+1}} dW \\
&= \frac{\alpha \beta^\alpha}{M^{\alpha-2}(2-\alpha)} + \frac{\alpha \beta^\alpha}{\beta^{\alpha-2}(\alpha-2)} + \frac{M^2 \alpha \beta^\alpha}{M^\alpha \alpha} \\
&= \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha-2)} + 2 \frac{\beta^\alpha}{M^{\alpha-2}(2-\alpha)} \\
&= \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha-2)} \left( 1 - 2 \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta}{M} \right)^{\alpha-2} \right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\text{Var}[S^I] = \left( 1 - 2 \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\beta}{M} \right)^{\alpha-2} \right) \lambda \mathbb{E}[W^2]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_a^3] &= \mathbb{E}[W^3 \mathbf{1}_{W \leq M}] + \mathbb{E}[M^3 \mathbf{1}_{W > M}] = \int_{\beta}^M W^3 \frac{\alpha \beta^\alpha}{(W)^{\alpha+1}} dW + \int_M^\infty M^3 \frac{\alpha \beta^\alpha}{(W)^{\alpha+1}} dW \\
&= \frac{\alpha \beta^\alpha}{M^{\alpha-3}(3-\alpha)} + \frac{\alpha \beta^3}{(\alpha-3)} + \frac{\beta^\alpha}{M^{\alpha-3}} \\
&= \frac{\alpha \beta^3}{(\alpha-3)} + 3 \frac{\beta^\alpha}{M^{\alpha-3}(3-\alpha)}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_{St} = \frac{\frac{\alpha}{(\alpha-3)} + 3 \frac{\beta^{\alpha-3}}{M^{\alpha-3}(3-\alpha)}}{\sqrt{\lambda} \left( \frac{1}{(\alpha-2)} \left( \alpha - 2 \left( \frac{\beta}{M} \right)^{\alpha-2} \right) \right)^{3/2}}$$

#### A.4 Etude des variations de la VaR

$$\alpha = \mathbb{F}[x] \approx \Phi \left\{ \sqrt{1 + \frac{6(x - \mathbb{E}[S])}{\beta_S \sqrt{\text{Var}[S]}} + \frac{9}{\beta_S^2} - \frac{3}{\beta_S}} \right\}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\text{VaR}(\alpha) &= \left[ \left[ \left( \Phi^{-1}(\alpha) + \frac{3}{\beta_S} \right)^2 - \frac{9}{\beta_S^2} - 1 \right] \frac{\beta_S \sqrt{\text{Var}[S]}}{6} \right] + \mathbb{E}[S] \\
&= (\Phi^{-1}(\alpha))^2 \left( \frac{\beta_S \sqrt{\text{Var}[S]}}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\text{Var}[S]} - \frac{\beta_S \sqrt{\text{Var}[S]}}{6} + \mathbb{E}[S]
\end{aligned} \tag{A.10}$$

le montant des sinistres  $W$  suit une loi Lognormale  $(a; b)$

$$\begin{aligned}
VaR(\alpha) &= (\Phi^{-1}(\alpha))^2 \left( \frac{\exp\left(3a + 9\frac{b^2}{2}\right)}{6\exp\left(2a + 4\frac{b^2}{2}\right)} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda \exp\left(2a + 4\frac{b^2}{2}\right)} - \frac{\exp\left(3a + 9\frac{b^2}{2}\right)}{6\exp\left(2a + 4\frac{b^2}{2}\right)} + \lambda \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \\
&= \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] \left( \frac{\exp\left(3a + 9\frac{b^2}{2}\right)}{6\exp\left(2a + 4\frac{b^2}{2}\right)} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda \exp\left(2a + 4\frac{b^2}{2}\right)} + \lambda \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \\
&= \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] \left( \frac{\exp\left(a + 5\frac{b^2}{2}\right)}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda} \exp\left(a + b^2\right) + \lambda \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

d'où

$$\frac{\delta VaR(\alpha)}{\delta \lambda} = \frac{\Phi^{-1}(\alpha) \exp\left(a + b^2\right)}{2\sqrt{\lambda}} + \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \tag{A.12}$$

$$\frac{\delta VaR(\alpha)}{\delta a} = \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] \left( \frac{\exp\left(a + 5\frac{b^2}{2}\right)}{6} \right) + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda} \exp\left(a + b^2\right) + \lambda \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \tag{A.13}$$

$$\frac{\delta VaR(\alpha)}{\delta b} = \left[ (\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1 \right] 5b \left( \frac{\exp\left(a + 5\frac{b^2}{2}\right)}{6} \right) + 2b\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\lambda} \exp\left(a + b^2\right) + b\lambda \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \tag{A.14}$$