



Lyon 1

Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES



**Mémoire présenté  
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances  
pour l'obtention  
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

**le 26 mars 2010**

Par : Mickaël CATALDO

Titre: Projection d'un portefeuille de prévoyance individuelle dans un contexte MCEV

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Membre du jury de l'Institut des Actuaires*

M. Pierre Emmanuel THEROND

*Entreprise :*

Winter & Associés

*Membres du jury I.S.F.A.*

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Jean-Paul LAURENT

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Didier RULLIERE

*Directeur de mémoire en entreprise :*

M. Frédéric PLANCHET

*Invité :*

***Autorisation de mise en ligne sur  
un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

*Secrétariat*

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

*Bibliothèque :*

Mme Michèle SONNIER

## Résumé

---

Afin d'améliorer et d'homogénéiser au niveau Européen les méthodes de calcul de l'*Embedded Value* des compagnies d'assurance, le CFO Forum a publié plusieurs documents établissant des principes de calcul.

En effet, les principes de la *Market Consistent Embedded Value* vont dans le sens des dernières réformes réglementaires qui visent à la convergence des procédés et des outils utilisés pour la valorisation des risques et des portefeuilles.

L'un des objectifs de ce mémoire est de construire une projection dans le contexte suggéré par les principes de la *Market Consistent Embedded Value*. Nous nous pencherons plus précisément sur la garantie arrêt de travail d'un portefeuille de prévoyance individuelle.

Afin de calculer des provisions au plus proche de la réalité du portefeuille, nous baserons une série de projections et d'estimations sur des tables d'expérience de survenance et de maintien en incapacité.

Nous mettrons ainsi en évidence les différences de provisionnement obtenues avec des tables d'expérience et les tables réglementaires du BCAC. Comme le montre les résultats de la partie III, les écarts de provisions sont significatifs, ce qui a une incidence directe sur l'*Embedded Value*.

Enfin nous introduirons les toutes dernières réformes en termes de valorisation de portefeuille, amenées par les normes IFRS 4, qui pourraient réorienter les méthodes *Market Consistent* vers des méthodes basées sur les valeurs de transferts ou les flux de trésorerie.

### Mots clés :

Incapacité, arrêt de travail, tables d'expérience, *Embedded Value*, Kaplan Meier, projection, taux d'inflation, Modèle de Brennan et Xia, crédibilité, table de survenance, table de maintien en incapacité.

## Abstract

---

In order to improve and standardize at the European level the evaluation of insurer's Embedded Value, the CFO Forum published several guidelines of calculation.

Indeed, the Market Consistent Embedded Value principles, like the recent reforms, tend to homogenize mathematics tools and methods to evaluate the risks and the value of a portfolio.

One of the purposes of this report is to develop a method of projection based on the Market Consistent Embedded Value Principles. This study is focused on stoppage.

Reserves will be evaluated by using experience tables, in order to represent the reality of the portfolio.

We will also highlight the difference of reserving due to the use of experience table. Part III shows that there is a real gap, and this has an important impact on the Embedded Value.

In the last part, we will introduce recent reforms about valuation, named IFRS 4. It seems that the Market Consistent Embedded Value could be replaced by the *Current Exit Value* or the *Current Fulfilment Value*.

### Key words :

Embedded Value, stoppage, credibility, Kaplan Meier, inflation rate, experience table, projection, Brennan and Xia, disability

## Remerciements

---

Je remercie Frédéric PLANCHET et Véronique MAUME DESCHAMPS pour leurs conseils.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont apporté de l'aide pour l'élaboration de ce mémoire.

## Table des matières

---

Résumé.....	2
Abstract .....	3
Remerciements .....	4
Table des matières .....	5
Introduction .....	7
<b>PARTIE 1 : CONTEXTE ET OBJECTIFS .....</b>	<b>9</b>
Chapitre 1 : Contexte général.....	10
Section 1 : Présentation du CFO Forum.....	10
Section 2 : Mise en place de la Market Consistent Value .....	11
Chapitre 2 : Présentation de l'Embedded Value .....	13
Section 1 : La <i>Traditional Embedded Value</i> .....	13
Section 2 : L' <i>European Embedded Value</i> .....	15
Section 3 : La <i>Market Consistent Embedded Value</i> .....	18
Chapitre 3 : Aspects règlementaires liés à l'arrêt de travail.....	23
Section 1 : Définition de l'arrêt de travail.....	23
Section 2 : Couverture de la Sécurité Sociale .....	23
Section 3 : Ouverture des droits .....	24
Section 4 : Indemnités journalières de la Sécurité Sociale.....	24
Section 5 : Obligations du malade.....	25
Section 6 : Durée d'attribution des indemnités journalières .....	25
Chapitre 4 : Objectifs et intérêts.....	27
Section 1 : Objectifs .....	27
Section 2 : Intérêts.....	27
<b>PARTIE 2 : MODELISATION DU PASSIF .....</b>	<b>29</b>
Chapitre 1 : Prise en compte de l'expérience du portefeuille .....	30
Section 1 : Les tables règlementaires .....	30
Section 2 : Méthodes de construction .....	31
Chapitre 2 : Modélisation des risques du passif.....	44
Section 1 : Les frais .....	44
Section 2 : les primes .....	46
Section 3 : Traitement du taux d'actualisation.....	47
Section 4 : Modélisation de l'inflation.....	47
Section 6 : Modélisation des résiliations.....	50
Chapitre 3 : Mise en forme opérationnelle.....	51
Section 1 : Mise en place du processus de projection .....	51
Section 2 : Détail des probabilités utilisées.....	52
Section 3 : Calcul des provisions mathématiques .....	54
Chapitre 4 : Détail du processus de projection.....	57
Section 1 : Principe général.....	57
Section 2 : Estimation de la durée de maintien .....	60
Section 3 : Estimation de la durée de vie et de la durée de l'état sain .....	61

<b>PARTIE 3 : APPLICATIONS A UN PORTEFEUILLE ASSURE .....</b>	<b>63</b>
Chapitre 1 : Présentation du portefeuille.....	64
Section 1 : Portefeuille d'assurés .....	64
Section 2 : Portefeuille projeté .....	66
Chapitre 2 : Construction des tables d'expérience .....	68
Section 1 : Construction des tables de survenance en incapacité.....	68
Section 2 : Construction des tables de maintien en incapacité.....	75
Section 3 : Comparaison des tables d'expérience et du BCAC .....	84
Chapitre 3 : Résultats des simulations.....	87
Section 1 : Projection de la population.....	87
Section 2 : Nombre de personne en incapacité .....	88
Section 3 : Nombre de survenances en incapacité .....	90
Section 4 : Durées passées en incapacité .....	91
Section 5 : Projection des frais .....	93
Section 6 : Comparaison des provisions .....	94
Section 7 : Etude de la sensibilité sur la PVFP .....	98
 <b>PARTIE 4 : LE DEVENIR DE LA MCEV .....</b>	 <b>99</b>
 Conclusion générale .....	 102
Bibliographie.....	104
Annexes.....	106

## Introduction

---

Une des problématiques des compagnies d'assurance est la détermination de la valeur de leurs portefeuilles et leur positionnement dans le marché de l'assurance. De plus, les compagnies d'assurance ont besoin de communiquer sur leur valeur, dans un premier temps pour certaines opérations financières, et dans un second temps, pour la transmission de l'information aux marchés.

De par son activité et le cycle inversé de production, les compagnies d'assurance utilisent aujourd'hui des modèles stochastiques afin de calculer l'*Embedded Value* ou « Valeur Intrinsèque ».

Au-delà d'un instrument de mesure des performances financières d'un portefeuille d'assurance, l'EV (*Embedded Value*) est un outil stratégique d'aide à la décision indispensable à toute compagnie d'assurance. C'est par exemple une référence pour l'introduction en bourse d'une société d'assurance, ou encore lors de rachat ou de rapprochement entre compagnies. C'est un véritable baromètre de l'état financier d'un portefeuille d'assurance.

En mai 2004, et dans le but d'assurer la cohérence des différentes *Embedded Value* à travers toute l'Europe, le CFO Forum a publié un premier document à destination des assureurs. L'un des buts du CFO Forum est de permettre aux analystes financiers et autres experts de comparer les différents établissements en imposant une mesure homogène à toute l'Europe, et, de surcroît, d'augmenter la pertinence et la qualité des évaluations.

En Juin 2008, avec pour but d'accroître la comparabilité des *Embedded Value* Européennes, le CFO Forum introduit une nouveauté dans les principes de calcul qui conduit à la MCEV (*Market Consistent Embedded Value*). Le principal changement réside dans le calcul *Market Consistent*, il a notamment été décidé de supprimer un certain nombre de points subjectifs tels que la détermination de la valeur des garanties financières ou le choix du taux d'actualisation. Désormais, l'*Embedded Value* évalue le contrat d'assurance dans une logique de prix de marché.

En pratique, la détermination de l'*Embedded Value* requiert des projections de comptes de résultats. Ce mémoire s'attache à décrire une méthode de projection d'un portefeuille de prévoyance individuelle, en se penchant notamment sur les problématiques spécifiques de l'arrêt de travail, et plus particulièrement de l'incapacité temporaire de travail.

Les garanties « incapacité » font référence à un nombre élevé de règles du code de la Sécurité Sociale, ce qui les rend complexes à étudier. La modélisation d'un portefeuille requiert notamment une table d'entrée en incapacité et une table de maintien en incapacité.

Pour ce dernier cas, les tables de référence, basées sur des données issues de la population des salariés de l'assurance sur la période 1987-1992 construites par le Bureau Commun d'Assurances Collectives (BCAC), ne permettent pas une évaluation *best estimate* des provisions.

Ce mémoire propose donc d'apporter une solution à ce problème par la construction de tables d'expérience. Diverses méthodes seront mises en avant.

Une comparaison de la projection d'un provisionnement basé sur les tables règlementaires issues du BCAC, et d'un provisionnement basé sur des tables d'expérience est effectuée. De par l'importance des capitaux engagés, le choix des tables, non négligeable dans la gestion de l'activité d'assurance, peut avoir un impact substantiel sur le résultat d'une compagnie et donc sur la valeur de l'*Embedded Value*.



# **PARTIE 1 :**

## **CONTEXTE ET OBJECTIFS**

## **Chapitre 1 : Contexte général**

---

Mesure, du point de vue des actionnaires, de la valeur des actifs alloués à l'activité d'assurance, l'*Embedded Value* permet de mieux appréhender la valeur d'une activité à long terme comme l'assurance vie, que les informations comptables ne traduisent que partiellement.

Aujourd'hui cette mesure de référence est devenue un outil incontournable de communication entre la compagnie d'assurance et le monde financier. Plus aucune fusion-acquisition, introduction en bourse ou encore transfert de portefeuille ne se fait sans la consultation des résultats détaillés de l'EV. Il s'agit pour les investisseurs d'un indicateur précieux de la santé de la compagnie d'assurance, qui vient compléter les différentes variétés de mesures comptables.

L'*Embedded Value* reflète l'impact des actions et des décisions dues au management. Les conséquences de la mise en place d'une stratégie gagnante impacteront directement l'*Embedded Value*, et par la même seront immédiatement détectables, mais resteront longtemps invisibles dans les comptes de base.

Pour ces raisons, l'*Embedded Value* offre aux investisseurs un complément au bilan et compte de résultat, et éclaire de manière différente l'état de la compagnie.

Le calcul de l'*Embedded Value* a connu plusieurs évolutions. Aujourd'hui, Le CFO Forum est chargé de l'homogénéisation au niveau européen.

### **Section 1 : Présentation du CFO Forum**

Le CFO Forum est un groupe de discussion formé en 2002 et assisté par les directeurs financiers des principales compagnies d'assurance européennes cotées en bourse, et de quelques compagnies non cotées. Son objectif premier est de proposer de nouvelles normes comptables dans le domaine de l'assurance, et de rendre ce marché plus transparent pour les investisseurs.

Aujourd'hui, les compagnies d'assurance doivent être préparées à adopter des démarches encadrées. Le rôle du CFO Forum est d'aider à gérer ces processus, et de fournir une certaine stabilité, une certaine cohérence et surtout transparence aux investisseurs.

Les activités du CFO Forum sont complémentaires à ceux des différents organes représentatifs de l'industrie de l'assurance européenne. Le CFO Forum fournit une aide pertinente sur les discussions concernant les impacts potentiels de toute nouvelle réglementation, et a pour vocation d'anticiper et de détecter les impacts des nouveaux standards. Le CFO Forum a également la responsabilité de l'implémentation des nouvelles normes auprès des assureurs européens.

Le CFO Forum se réunit environ tous les mois afin d'échanger sur les rapports de groupes de travail constitués de représentants de compagnies d'assurance.

## **Section 2 : Mise en place de la Market Consistent Value**

Dès 1959 (ANDERSON (1959)) des techniques visant à évaluer certains produits ainsi que l'*in force business*, c'est-à-dire la valeur des affaires couvertes, se répandent auprès des assureurs. Mais la mise en place de méthode complète d'évaluation ne s'est faite que dans les années 90. Aussi, les méthodes déterministes ont été remplacées par des méthodes plus performantes faisant intervenir des approches stochastiques. Ces dernières avancées ont été possibles grâce aux progrès technologiques en termes de puissance de calcul informatique.

Mais par l'absence de standardisation sur le calcul et la présentation, les *Embedded Values* de différentes compagnies d'assurance étaient par le passé difficilement comparables, ce qui motivait une plainte récurrente de la part des investisseurs. Une efficacité optimale requiert des principes de calcul identiques pour toutes les compagnies.

En mai 2004, le CFO Forum, dans le but d'assurer la cohérence des différentes *Embedded Value* des compagnies Européennes, publie les *European Embedded Value Principles*. Précis et accompagnés de commentaires explicatifs, ces principes contiennent des informations clés ainsi que la démarche à suivre pour un calcul homogénéisé au niveau Européen. Mais au-delà du fait d'homogénéiser le cadre de calcul, ces principes augmentent la pertinence des évaluations en exigeant l'évaluation des options et des garanties financières, qui exige l'estimation d'une valeur temps.

Mais le CFO Forum ne s'arrête pas là, et le 4 Juin 2008 il publie de nouveaux principes de calcul de l'*Embedded Value* : la *Market Consistent Embedded Value* (MCEV). C'est alors qu'un nouveau concept apparaît, celui d'évaluation « Market Consistent ». Cette nouvelle notion est un élément sur lequel nous reviendrons un peu plus précisément dans la suite de ce rapport. Nous nous prêterons, plus loin, à examiner les différents principes qui nous seront utiles afin d'effectuer la projection d'un portefeuille de prévoyance individuel dans un contexte MCEV.

Désormais, l'*Embedded Value* évalue le contrat d'assurance au prix que lui donnerait le marché (pour autant qu'il existe). L'assimilation de garanties d'assurance à un instrument financier n'est toutefois pas simple. En effet, la finance fait référence à des hypothèses simplificatrices nombreuses permettant de développer un ensemble de réflexions mathématiques rigoureuses. Transposer ces hypothèses dans le monde de l'assurance est complexe, par exemple lorsqu'il s'agit de modéliser les choix du management ou les choix des assurés.

De tels changements ne sont pas sans conséquences quant aux efforts à fournir de la part des compagnies d'assurance. La mise en place d'une MCEV impose une modélisation actif/passif faisant intervenir une démarche stochastique, contrairement au caractère déterministe d'une *Embedded Value* traditionnelle. La méthode MCEV impose également une approche *Bottom Up* dans la détermination du taux d'actualisation.

Dans ce mémoire nous ne prendrons en compte que la partie passif d'un portefeuille de prévoyance individuelle. La détermination de la MCEV ne sera donc pas effectuée de manière exhaustive. Néanmoins, certaines grandeurs relatives à l'*Embedded Value* pourront être calculées.

L'aboutissement des travaux du CFO Forum est la création d'un véritable environnement *market consistent*, où des règles précises doivent être respectées.

Dans ce mémoire, nous nous appliquerons à projeter le passif de la société selon les critères définis par le CFO Forum, notamment en ce qui concerne le taux d'actualisation à employer dans les diverses évaluations, les frais et les primes.

Cette projection fera intervenir des tables d'expérience, afin de produire une meilleure estimation des provisions à constituer. Nous ferons également une comparaison des résultats obtenus avec les tables réglementaires.

## **Chapitre 2 : Présentation de l'*Embedded Value***

---

Afin de permettre une évaluation standardisée d'une activité d'assurance, le CFO Forum a introduit le concept de « *Traditional Embedded Value* » (ou TEV). Cette grandeur, de par son inhomogénéité entre les différentes compagnies d'assurance l'ayant adopté a laissé la place à « l'*European Embedded Value* » (ou EEV), beaucoup plus précise dans les méthodes de conception puis à la « *Market Consistent Embedded Value* » (ou MCEV).

Les *Market Consistent Embedded Value Principles* sont publiés le 4 Juin 2008 par le CFO Forum, dans un document visant à assurer la cohérence des différentes *Embedded Values* publiées en Europe, et à assurer la transparence des résultats aux investisseurs. Ces principes sont au nombre de 17 mais dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons qu'à ceux qui concernent directement la projection du passif. Nous nous attacherons donc, dans les prochains paragraphes, à décrire les traitements des frais, de la prise en compte des primes futurs, et enfin de la problématique du taux d'actualisation.

Tout d'abord, définissons brièvement l'évolution de l'EV ainsi que ses progrès.

### **Section 1 : La *Traditional Embedded Value***

La TEV (*Traditional Embedded Value*) est la somme de deux éléments : l'actif net réévalué et la valeur de l'*In force Business*.

#### **1.1. L'actif net réévalué**

L'Actif Net Réévalué peut être définie comme l'actif net comptable corrigé par des ajustements, dans un but de cohérence avec les hypothèses retenues pour la modélisation de la valeur du portefeuille. Voici quelques exemples :

- Plus ou moins values latentes sur actifs de placements nettes de contraintes de distribution aux assurés.
- Ajustements sur provisions techniques par rapport aux contraintes réglementaires ou économiques et nettes de contraintes de distribution aux assurés.
- Les éventuelles non-valeurs (frais d'acquisition reportés, actifs incorporels, survaleurs) sont dépréciées.
- Plus- ou moins-values latentes sur créances ou dettes contractées.

#### **1.2. La valeur de l' "*In-Force Business* "**

La VIF (Valeur de l'*In Force*) est la valeur actuelle des profits ou pertes futures distribuables, donc nets d'impôts, générée par le portefeuille de contrats souscrits à la date de calcul. Cette grandeur peut être vue comme la valeur actuelle des profits futurs (PVFP) – dont le terme

anglophone est *Present Value of Futur Profits* – qui est un résultat industriel, diminuée du coût du capital (CoC pour *Cost Of Capital*).

### 1.2.1. La "Present Value of Futur Profits"

La *Present Value of Futur Profits* (PVFP) est égale à la valeur actuelle des profits ou pertes futurs industriels, nets d'impôts, générés par le portefeuille de contrats en cours. En d'autres termes, la *Present value of Futur Profits* est la valeur actualisée des résultats futurs.

Considérons un contrat prenant fin à la date  $n$ . Soit  $R_k$  le résultat de l'année  $k$  sur le portefeuille observé,  $i$  le taux d'actualisation. La PVFP peut être représentée de la manière suivante :

$$PVFP = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^k}$$

Où  $R_k$  est déterminé comme ci-dessous :

- +Primes
- +Produits financiers
- Prestations
- Participations des assurés aux excédents
- Variation des provisions techniques
- Frais d'acquisition, d'administration et autres
- Divers

---

Résultat disponible de l'année  $k$ ,  $R_k$

Le taux d'actualisation représente généralement le taux de retour attendu par l'investisseur, et le risque associé à ce rendement.

Le taux d'actualisation présenté ci-dessus a fait l'objet de polémiques dans le milieu de l'assurance et de la finance, et a contribué à l'apparition de l'EEV et des *MCEV principes*. Un paragraphe sera consacré à ce taux, plus loin dans ce mémoire.

### 1.2.2. Le coût du capital

Le coût du capital doit être retranché de la PVFP afin d'obtenir une valeur ajustée des pertes ou bénéfices distribuables. Ce coût peut être vu comme le coût de portage de la marge de solvabilité réglementaire. Il représente le coût d'immobilisation des fonds propres nécessaires à l'activité.

Notons :

- $A_k$  le besoin de marge de clôture pour l'année  $k$ ,
- $t^{rd}$  le taux de rendement des actifs,
- $t^{IS}$  le taux d'imposition sur les sociétés.

Le produit financier sur fonds propres net d'impôt sur les sociétés l'année  $k$  peut être représenté par :

$$B_k = A_k \times t^{rd \text{ actifs}} \times (1 - t^{IS})$$

Le *cash flow* dégagé des fonds propres pour l'année  $k$  est égale à la différence entre le besoin en marge de l'année  $k-1$  et celui de l'année  $k$ , augmenté du produit financier sur fonds propres net d'impôt sur les sociétés l'année  $k$ .

L'expression du coût du capital, ou *Cost Of Capital*, peut alors s'écrire :

$$CoC = \sum_{k=0}^{+\infty} [A_{k-1} - A_k] \frac{t^{rd \text{ actifs}} \times (1 - t^{IS})}{(1 + i)^k}$$

### **Les limites de la TEV**

Plusieurs limites de la TEV peuvent-être citées :

- Une grande latitude est laissée aux compagnies d'assurance, rendant les EV inhomogènes. Il est donc difficile de les comparer.
- La TEV se base sur des hypothèses déterministes, ce qui introduit un biais dans l'évaluation des risques liés aux options et garanties financières.

## **Section 2 : L'European Embedded Value<sup>1</sup>**

Pour palier aux limites de la TEV, le CFO Forum publie les *European Embedded Value Principles*, dans le but d'homogénéiser les méthodes de calcul.

### **2.1. Définition de l'EEV**

L'*Embedded Value* mesure la valeur, du point de vue de l'actionnaire, du portefeuille de la compagnie d'assurance. L'EEV est une amélioration apportée à la TEV.

### **2.2. Présentation des European Embedded Value Principles**

Pour la définition de l'*Embedded Value*, le CFO Forum a publié 12 principes :

- Principe 1 : Définition de l'*Embedded Value* (voir paragraphe précédent).
- Principe 2 : Les affaires couvertes doivent être clairement identifiées et publiées.

---

<sup>1</sup> CFO Forum (2004) *EEV Principles*

- Principes 3, 4, 5 et 6 : Ces principes définissent les composantes de l'*Embedded Value* qui serviront à déterminer les intérêts distribuables aux actionnaires (ces composantes sont détaillées dans les paragraphes suivants).
- Principe 7 : Les garanties et options financières doivent être stochastiquement modélisées dans la détermination de l'EV.
- Principe 8 : Ce principe précise les modalités de prise en compte des affaires nouvelles.
- Principe 9 : Les paramètres de projections doivent être déterminés de façon *Best Estimate*. Ce principe donne notamment quelques directives dans la détermination des hypothèses non économiques (démographie, imposition...)
- Principe 10 : Ce principe précise quelques hypothèses de calcul pour les paramètres économiques.
- Principe 11 : Le taux de participation au bénéfice des assurés doit également être modélisé.
- Principe 12 : Ce principe précise la forme des publications de l'EV.

### **2.3. Composition de l'EEV**

D'après les principes édictés par le CFO Forum, l'EEV est la somme des trois éléments suivants :

- le capital requis (*Required Capital*)
- le capital libre (*Free Surplus*)
- la « *Present Value of Futur Shareholder cash flow from in-force covered business* » (ou PVIF). Il s'agit de la valeur actualisée des profits futurs générés par le portefeuille considéré.

#### **2.3.1. Le *Required Capital***

Il s'agit du capital minimal à affecter à l'activité d'assurance, du fait des contraintes réglementaires ou économiques, net de son coût d'immobilisation (ou coût du capital).

#### **2.3.2. Le *Free Surplus***

Le *Free Surplus* est défini comme le capital disponible au-delà du capital requis. Il est égal à la valeur de marché des actifs alloués à l'activité couverte, au-delà du capital minimal et des réserves réglementaires liées au portefeuille constitué.

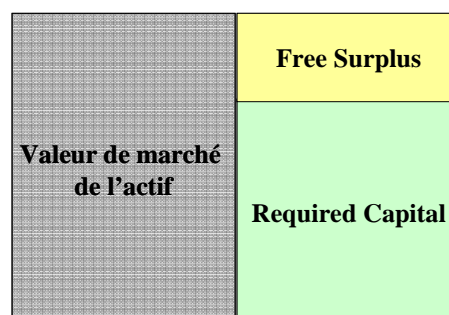


fig.1 : schéma du Free Surplus



### **2.3.3. La PVIF**

La valeur actuelle des profits futurs est défini comme la valeur actuelle des *cash flows futurs* à destination des actionnaires générés par le portefeuille considéré en « *run-off* » ; c'est-à-dire que cette valeur est calculée sans prendre en compte les affaires nouvelles

### **2.4. Options et garanties financières**

Les options et garanties financières doivent être prises en considération dans le calcul de l'EEV. Ce point représente une évolution importante dans la méthode de calcul de la valeur de la compagnie entre la TEV et l'EEV.

La valeur temps de ces options et garanties doit être déduite de la *Present Value of In-Force business* (VIF).

Les options et garanties financières sont liées aux évènements corrélés au contexte financier. Les garanties et options les plus courantes chez les assureurs sont :

- les options de participation aux bénéfices
- les garanties plancher
- les options de rachat
- etc...

La valeur temps d'une option est définie comme la différence entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque. La valeur intrinsèque est définie comme la valeur de l'option si elle était exercée immédiatement.

### **2.5. Autres hypothèses**

#### **2.5.1. Hypothèses de projection**

Les hypothèses de projection sont énoncées dans les principes 9 et 10 des *EEV principes*, et dans le principe 11 des *MCEV principes*.

- la construction des hypothèses pour la projection de l'expérience future doit être élaborée au regard de l'expérience passé, présente et future attendue.
- la projection doit être « *best estimate* ».
- les hypothèses doivent être activement mises à jour, au moins annuellement.

Une provision *Best Estimate* correspond à la valeur actuelle espérée de tous les flux futurs jusqu'à extinction du portefeuille

## 2.5.2. Taux d'actualisation

Le principe numéro 10 des *EEV principles* définit le taux d'actualisation comme la somme d'un taux sans risque et d'une marge pour risque (rappelons que les *EEV principles* comportent 12 principes rédigés par le CFO Forum). Ce principe souligne le fait que les hypothèses économiques doivent être cohérentes avec le marché. Il donne notamment des précisions sur le taux d'inflation et le taux d'actualisation à utiliser pour la modélisation. Pour plus de précisions, voir CFO Forum (2004) *EEV Principles*.

### Synthèse de l'EEV

Ainsi, l'approche EEV améliore le calcul de l'*Embedded Value*, et rend celui-ci plus précis, notamment avec la prise en compte des options et garanties financières. Néanmoins, quelques points, comme la détermination du taux d'actualisation, restent à éclaircir.

## Section 3 : La Market Consistent Embedded Value

Le terme « *Market Consistent* » signifie que chaque flux de la valeur de l'*in-force business* doit être actualisé au taux qui serait utilisé sur les marchés financiers pour valoriser un flux semblable, pour assurer une cohérence avec ce qui est observé sur les marchés financiers.

Pour ce faire, un certain nombre de techniques peuvent être appliquées, telle que la technique de l'« équivalent certain », de l'« évaluation risque neutre » ou encore l'utilisation des déflateurs.

Les principales nouveautés et améliorations apportées par la *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) sont :

- une cohérence avec les risques du marché
- une méthodologie détaillée et précise pour la prise en compte des options et garanties financières
- une méthodologie détaillée pour la mise en place du taux d'actualisation
- une meilleure définition des méthodes de calcul stochastique
- une meilleure définition des éléments constituant l'*Embedded Value*.

### 3.1. Présentation des Market Consistent Embedded Value Principles

Pour la définition de la *Market Consistent Embedded Value*, le CFO Forum a publié 17 principes. Certains définissent les mêmes éléments que les principes de l'EEV.

- Principe 1 : Définition de la *Market Consistent Embedded Value* (voir paragraphe précédent).
- Principe 2 : Les affaires couvertes doivent être clairement identifiées et publiées.

- Principes 3, 4, 5 et 6 : Ces principes définissent les composantes de la *Market Consistent Embedded Value* qui serviront à déterminer les intérêts distribuables aux actionnaires.
- Principe 7 : Les garanties et options financières doivent être stochastiquement modélisées dans la détermination de l'EV à partir d'éléments comparatifs sur le marché financier.
- Principe 8 : Le calcul doit prendre en compte les frais liés au capital requis (ex : coût d'investissement des actifs financiers).
- Principe 9 : Une allocation doit être faite entre les différents types de risques (couvrables et non couvrables).
- Principe 10 : Ce principe précise les modalités de prise en compte des affaires nouvelles.
- Principe 11 : Les paramètres de projections doivent être déterminés de façon *Best Estimate*. Ce principe donne notamment quelques directives dans la détermination des hypothèses non économiques (démographie, imposition...)
- Principe 12 : Ce principe précise quelques hypothèses de calcul pour les paramètres économiques.
- Principes 13 et 14 : Ces principes concernent le taux d'actualisation.
- Principe 15 : Ce principe précise quelques modalités pour le modèle stochastique.
- Principe 16 : Le taux de participation au bénéfice des assurés doit également être modélisé.
- Principe 17 : Ce principe précise la forme des publications de l'EV.

### **3.2. Composition de la MCEV**

D'après les principes édictés par le CFO Forum, la MCEV est la somme des trois éléments suivants :

- le capital libre alloué aux affaires couvertes (*Free surplus*)
- le capital requis (*Required capital*)
- la « *Value of in-force covered business* » (ou VIF). Il s'agit de la valeur actualisée des profits futurs générés par le portefeuille considéré.

La définition générale ne diffère pas beaucoup de celle de l'EEV. Seule la VIF remplace la PVIF, dont la définition est donnée ci-dessous.

#### **Définition de la VIF**

La *Value of in-force business* est constituée des éléments suivants:

- + la *present value of future profits* (PVFP)
- la valeur temps des options et garanties financiers
- le *Frictionnal cost of required capital* (coût de friction du capital requis) : il s'agit des frais de gestion et des coûts liés à la fiscalité.
- le *Cost of residual non hedgeable risks* : il s'agit du coût des risques non couvrables.

### **3.3. Les éléments nécessaires à la projection**

#### **3.3.1. Les frais**

Ce paragraphe s'appuie sur le principe 11 des *Market Consistent Embedded Value Principles*.

L'essentiel de ce principe réside dans le fait que la globalité des frais futurs du portefeuille considéré en *run-off* doit être prise en compte dans les hypothèses.

Les frais futurs tels que les frais de renouvellement et autres dépenses récurrentes nécessaires à la gestion des contrats doivent correspondre au montant attendu afin de gérer les affaires couvertes à la date de calcul. L'inflation future est également à prendre en compte.

Les changements de coûts unitaires comme les gains de productivité ne doivent pas être pris en considération dans la projection, à une exception près : pour les opérations en développement prenant naissance pendant l'exercice, et dont les coûts nécessaires n'ont pas encore atteint leur niveau sur le long terme, les frais doivent être pris en compte sur la base de leur montant futur.

En ce qui concerne les coûts exceptionnels pouvant impacter la rémunération des actionnaires, ceux-ci doivent être clairement séparés des autres frais, et divulgués.

Les frais généraux doivent être alloués entre les affaires nouvelles, les affaires déjà existantes et les projets en développement d'une manière semblable aux allocations passées, en tenant compte du business plan actuel et des attentes futures.

#### **3.3.2. La prise en compte des primes futures**

La prise en compte des primes futures fait l'objet du principe G10 des *MCEV Principles*.

Rappelons le calcul de l'*Embedded Value* s'effectue sur des portefeuilles considérés en *run-off* c'est-à-dire sans affaires nouvelles, sachant que ce principe définit les affaires nouvelles de la manière suivante :

Une affaire nouvelle est une affaire émergeant de la vente d'un nouveau contrat, mais aussi une extension d'un contrat déjà existant.

Une distinction importante doit être établie entre affaire nouvelle et renouvellement de contrat. Les renouvellements de contrats déjà existants ne sont pas considérés comme des affaires nouvelles pour les principes de l'EV. Par conséquent, les primes issues de ces renouvellements de contrats sont prises en compte dans les hypothèses de calcul.

De ce fait, le calcul de la valeur de l'*in-force business* doit anticiper les renouvellements des contrats couverts, avec des variations « raisonnables » dans les primes de renouvellement.

Ainsi les primes futures sont constituées par les variations des primes de renouvellement de l'*in-force business* et des primes récurrentes revalorisées.

### 3.3.3. La participation aux bénéfices techniques

L'évaluation de la participation aux bénéfices est essentielle dans le cas de l'étude de contrats d'épargne en euro.

Pour la participation aux bénéfices techniques, tout comme la participation aux bénéfices financiers, la méthode de calcul doit prendre en compte des hypothèses de projection des taux de distribution futurs. La projection doit respecter en tout point la réglementation imposée en termes de participation aux bénéfices.

Dans le cas d'un résidu de résultat, ce surplus devra être redistribué avant la fin de la période de projection.

Dans notre cas, nous n'aborderons pas ce point. Mais la prise en compte de la participation au bénéfice technique dans les contrats de prévoyance pourrait être une extension à cette étude.

### 3.3.4. La problématique du taux d'actualisation

Dans les méthodes de calcul TEV et EEV, les hypothèses considèrent un unique taux d'actualisation, le « *risk discount rate* », obtenu en additionnant une marge pour risque au taux sans risque ; la marge pour risque représentant les risques inhérents à la compagnie d'assurance.

Plusieurs critiques ont été faites sur ce taux d'actualisation ;

- Chaque compagnie était libre de déterminer la méthode de calcul du « *risk discount rate* », ce qui impliquait une inhomogénéité des hypothèses entre les compagnies d'assurances.
- Ce taux ne prenait pas en considération les changements du marché.
- De plus, le choix d'un unique taux d'actualisation ne caractérisait pas les risques différents associés à chaque flux.

Pour palier à ces limites, les techniques évoquées dans les *MCEV Principles* proposent de valoriser chaque flux à un taux qui reflète le risque, ce qui implique l'utilisation d'un taux différent pour chaque flux

#### **Principe général**

Il s'agit du principe 13 des *MCEV principles*.

La ligne directrice est la suivante :

Chaque flux de la valeur de l'*in-force business* doit être actualisé au taux qui serait utilisé sur les marchés financiers pour valoriser un flux semblable. Un certain nombre de techniques peuvent être appliquées, telle que la technique de l'« équivalent certain », l'« évaluation risque neutre » ou encore l'utilisation des déflateurs.

Avant même d'exposer ces cas, il est utile de donner la définition du taux de référence, ou « *Reference Rate* »

## **Définition du taux de référence**

Le taux de référence à utiliser dans le calcul de l'*Embedded Value* doit être, autant que faire se peut, la courbe des taux SWAP (dans la devise du flux considéré).

Si cette courbe des taux SWAP n'est pas représentée sur une période assez longue, une prolongation peut se faire à l'aide de diverses méthodes. Une des méthodes consiste à considérer que les taux *spot* et *forward* conservent le même niveau que le taux SWAP sur le long terme. S'il existe une courbe des taux d'obligations d'état qui est plus longue que la courbe des taux SWAP, la courbe des taux SWAP peut même être prolongée par cette première en maintenant une marge constante dès l'aboutissement de la courbe des taux SWAP et en considérant qu'elle reste au même niveau par la suite.

S'il existe des durations auxquelles la courbe des taux SWAP n'est pas disponible, le taux instantané peut être calculé par des méthodes d'interpolation.

## **Alternatives**

Le principe 13 des *MCEV principes* prévoit des taux alternatifs dans le cas où ceux qui seraient utilisés sur les marchés financier sont inappropriés pour l'évaluation du risque associé.

Si les flux ne dépendent pas, ou ne varient pas linéairement avec les mouvements du marché, une alternative consiste à valoriser ceux-ci à l'aide du taux de référence présenté plus haut.

Si les flux concernent les options et garanties financières et ne varient pas linéairement avec le marché financier, l'actualisation peut se faire à l'aide de modèles stochastiques risques neutres. Une méthodologie se basant sur les déflateurs peut également être utilisée. Dans les deux méthodes citées précédemment, le taux de référence doit être utilisé comme taux sans risque.

## **Synthèse**

Cette partie a permis d'avoir une vision globale de la définition de l'*Embedded Value*. Dans l'objectif d'homogénéiser et d'améliorer la valorisation des compagnies d'assurance, les *MCEV principes* ont précisé le cadre de calcul, et défini des principes à respecter. Ainsi, le CFO Forum a donné plus de précisions sur le taux d'actualisation, la valeur temps des options et garanties financières et la référence aux marchés financiers.

Dans ce mémoire, nous appliquerons certains des principes de la MCEV dans la projection d'un portefeuille de prévoyance individuelle. Mais avant, présentons le fonctionnement général de la prévoyance individuelle, et plus précisément de l'arrêt de travail.

## **Chapitre 3 : Aspects règlementaires liés à l'arrêt de travail<sup>2</sup>**

---

Les assurés sociaux et leurs ayants droit bénéficient des prestations en nature ou en espèce de l'assurance maladie. Les assurés qui, du fait de leur maladie, se trouvent contraints d'interrompre leur activité professionnelle bénéficient d'indemnités journalières.

### **Section 1 : Définition de l'arrêt de travail**

D'après le code de la sécurité sociale, une personne est considérée en incapacité temporaire de travail si, à la suite d'un accident ou d'une maladie, elle se trouve dans l'impossibilité complète et continue d'exercer sa profession ou de gérer ses affaires. Cette impossibilité doit être constatée par un médecin qui lui prescrira un arrêt de travail.

### **Section 2 : Couverture de la Sécurité Sociale**

Les indemnités journalières versées par la Sécurité Sociale vont dépendre du régime auquel est affilié l'assuré :

- Régime général
- Régime des fonctionnaires civils et militaires de l'État
- Régime des collectivités locales
- Régimes spéciaux, régimes spéciaux d'entreprise et assimilés
- Régime des marins
- Régime des français à l'étranger
- Régime des étudiants
- Régime spécifique des assemblées
- Régime agricole
- Régimes des non salariés non agricoles

Le plus courant étant le Régime général dont voici la définition :

*Sont affiliées obligatoirement aux assurances sociales du régime général, quel que soit leur âge et même si elles sont titulaires d'une pension, toutes les personnes quelle que soit leur nationalité, de l'un ou de l'autre sexe, salariées ou travaillant à quelque titre ou en quelque lieu que ce soit, pour un ou plusieurs employeurs et quels que soient le montant et la nature de leur rémunération, la forme, la nature ou la validité de leur contrat.*

(Code de la Sécurité Sociale art. L311-2).

---

<sup>2</sup> Se référer au site de la Sécurité Sociale

### **Section 3 : Ouverture des droits**

Pour bénéficier des indemnités journalières versées par la Sécurité Sociale, l'assuré doit être dans l'incapacité physique de reprendre ou de continuer son travail. Les prestations en espèce ne peuvent être servies qu'à l'assuré à l'exclusion de ses ayants droits, et si l'assuré a effectivement arrêté son travail pour raison médicale. Cette incapacité doit être constatée par un médecin.

Certaines conditions sont à remplir afin de justifier des indemnités journalières de la Sécurité Sociale. Pendant les six premiers mois de l'arrêt de travail, l'assuré doit justifier soit :

- que le montant des cotisations dues au titre des assurances maladie, maternité, invalidité, décès assises sur les rémunérations qu'il a perçues pendant les six mois civils précédents est au moins égal au montant des mêmes cotisations dues pour un salaire égal à 1 015 fois la valeur du SMIC au premier jour de la période de référence.
- d'avoir effectué au moins 200 heures de travail salarié ou assimilé au cours des trois mois civils ou des 90 jours précédents.

Pour avoir droit aux indemnités journalières, après le sixième mois d'incapacité, l'assuré doit avoir été immatriculé depuis 12 mois au moins et justifier soit :

- D'un montant de cotisations sur les rémunérations perçues pendant les 12 mois civils précédents, au moins égal à celles dues sur un salaire de 2 030 fois la valeur du SMIC au 1<sup>er</sup> janvier précédent, dont 1 015 fois au moins la valeur de SMIC au cours des 6 premiers mois.
- qu'il a effectué au moins 800 heures de travail salarié ou assimilé au cours des 12 mois civils ou des 365 jours précédents, dont 200 heures au moins au cours des 3 premiers mois.

### **Section 4 : Indemnités journalières de la Sécurité Sociale**

L'assuré obligé par la maladie d'interrompre son travail peut obtenir des prestations en espèce sous la forme d'indemnités journalières. Par ailleurs, le salaire peut lui être maintenu par l'employeur sous certaines conditions.

Pendant son arrêt de travail, le salarié perçoit des indemnités journalières de la sécurité sociale. En outre, à compter du 11<sup>e</sup> jour d'absence, l'employeur doit lui verser les indemnités complémentaires prévues par la loi du 19 janvier 1978 sur la mensualisation (à défaut de dispositions plus favorables de la convention collective) si le salarié remplit les conditions suivantes :

- envoyer un certificat médical dans les 48 heures
- être pris en charge par la Sécurité Sociale
- être soigné sur le territoire français ou dans un pays membre de l'Union Européenne
- se soumettre le cas échéant à une contre visite médicale



Les 10 premiers jours d'absence n'étant pas indemnisés par l'employeur, ils donnent lieu à une retenue sur salaire qui doit se faire selon la méthode reconnue par la Cour de Cassation, et qui consiste à garantir une stricte proportionnalité entre la durée de l'absence et la durée réelle de travail durant le mois considéré. Il est également important de noter que les absences consécutives à un accident de travail (à l'exclusion des accidents de trajet) ou à une maladie professionnelle sont indemnisées dès le premier jour d'absence.

Pendant son arrêt de travail, le salarié a droit à une rémunération brute de :

- 90 % pendant 30 jours d'absence
- 66,66 % pendant les 30 jours suivants

De ces montants garantis, l'employeur doit déduire :

- les indemnités journalières versées par la sécurité sociale, qui sont égales à 50 % du gain journalier de base dans la limite du plafond de la Sécurité Sociale.
- les prestations complémentaires versées par un régime de prévoyance

Les temps d'indemnisation sont augmentés de 10 jours par période entière de 5 ans d'ancienneté, sans que chacun d'eux puisse excéder 90 jours

Pendant une période de trois années consécutives, l'assuré ne doit pas percevoir au titre d'un ou plusieurs arrêts pour affections ou maladies ordinaires, plus de 360 indemnités journalières.

## **Section 5 : Obligations du malade**

L'incapacité de travail doit être médicalement constatée. Le médecin délivre à l'assuré une prescription d'arrêt de travail signée sur laquelle est indiquée la durée probable de l'interruption de travail.

L'employeur doit attester que le salarié a bien cessé de travailler. Cette attestation, indispensable pour commencer à payer les indemnités journalières, doit comporter la date et le motif de l'arrêt de travail, la date de reprise du travail, etc...

Il faut qu'il y ait interruption effective et médicalement justifiée du travail pour que l'indemnité journalière soit due.

## **Section 6 : Durée d'attribution des indemnités journalières**

Les indemnités journalières sont dues pour toutes les journées d'arrêt de travail, qu'elles soient ouvrables ou non. Le début de l'indemnisation est fixé à compter du quatrième jour. Les trois premiers jours d'interruption de travail, qui constituent le délai de carence, ne sont pas indemnisables. Ce délai s'applique à l'occasion de chaque arrêt de travail.

Un nouveau délai de carence n'est pas appliqué si :

- la reprise d'activité entre deux périodes d'interruption de travail n'a pas dépassé 48 heures
- les arrêts de travail sont dus à une affection de longue durée
- la maladie survient au cours d'une période indemnisée au titre de la législation des accidents du travail.

## **Chapitre 4 : Objectifs et intérêts**

---

Définissons dès à présent, et pour plus de clarté dans la suite de ce mémoire, les objectifs et les intérêts de cette étude.

### **Section 1 : Objectifs**

La projection d'un portefeuille de prévoyance individuelle incapacité constitue le principal objectif de ce mémoire.

Les différentes hypothèses de projection sont déterminées en respectant les principes de la MCEV, notamment pour la modélisation des risques du passif (frais, taux d'actualisation...)

De plus une étude comparative est réalisée sur les impacts de l'utilisation des différentes tables d'entrée et de maintien en incapacité.

En effet, les tables règlementaires établies par le bureau Commun des Assurances Collectives ne sont mises à jour que ponctuellement. Aujourd'hui, il est pertinent de s'interroger sur le sens de l'utilisation des ces tables, dont les dernières datent de 1993, et qui sont donc, dans un certain sens, « obsolètes » à la vue des récentes évolutions en terme de condition de travail, de médecine, etc...

Encadrées par les textes règlementaires, les compagnies d'assurance sont désormais en mesure d'établir des tables d'expérience. Ainsi, sous condition de certification par une organisation extérieure, les compagnies d'assurance peuvent utiliser leurs propres tables d'entrée en incapacité, de maintien en incapacité et invalidité, de passage de l'incapacité à l'invalidité, et de mortalité pour le provisionnement et la tarification des différents risques.

Dans la suite de ce mémoire, nous construirons une table d'expérience d'entrée en incapacité selon les données historisées de la DREES (Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques).

L'idéal pour une compagnie d'assurance est de construire ces tables d'expérience à l'aide de ces propres données afin d'être plus proche de la réalité de son portefeuille assuré, mais cette étude nécessite de disposer d'un historique important.

Par la suite nous établirons une comparaison des provisions d'un portefeuille de prévoyance obtenues à l'aide de projections sur la base des tables BCAC règlementaire d'une part, et sur la base des tables d'expérience d'autre part.

### **Section 2 : Intérêts**

Les provisions mathématiques doivent être calculées, selon la notion de *Best Estimate*, en fonction du niveau d'exposition au risque réel, ainsi l'assureur peut ensuite ajuster sa marge de sécurité selon le niveau de fonds propres. Dans le cas de l'arrêt de travail, l'utilisation des

tables règlementaires du BCAC, de par l'ancienneté de leur construction, ne semblent pas assurer une représentation fidèle de l'incapacité/invalidité.

Construire de nouvelles tables d'expérience de maintien offre la possibilité d'être plus proche de la réalité de son portefeuille assuré.

Entre autre, les tables BCAC ne prennent pas en compte les diverses avancés médicales, ou autres évolutions modifiant le risque d'incapacité/invalidité. Une mauvaise estimation du risque peut entraîner notamment un sur-provisionnement, ce qui impliquerait également une cotisation plus élevées et un impact commerciale pour la compagnie ; ou un sous-provisionnement.

Vient également la question de la gestion actif-passif. Plus les provisions sont élevées, plus l'assureur obtiendra des bénéfices sur les placements financiers (dans le cas où ces investissements se font sur des supports non risqués) et plus les rétrocessions perçues seront fortes. Un sur-provisionnement, toutefois utile à l'assureur pour faire face à ses engagements, lui permettrait de dégager un bénéfice financier plus important.

Cela montre comment le choix d'une table peut être stratégique, autant sur un plan commercial que financier. Il aura un impact direct sur l'*Embedded Value* publiée, le résultat financier et la participation aux bénéfices techniques.

# **PARTIE 2 :**

## **MODELISATION DU PASSIF**

# **Chapitre 1 : Prise en compte de l'expérience du portefeuille**

## **Section 1 : Les tables réglementaires**

### **1.1. Le contexte**

La plupart des assureurs utilise des tables règlementaires de référence pour leur provisionnement et tarification. Toutefois, il est possible de déroger à ce principe par la construction de table d'expérience, c'est-à-dire des tables construites à partir de leurs propres données. La réglementation prévoit les conditions dans lesquelles l'organisme peut utiliser ses propres tables. Ce contexte est défini par les articles A335-1 du Code des Assurances, dont voici un extrait :

*Article. \*A.335-1 (A. 19 mars 1993 ; A. 28 mars 1995, art.5)*

*Les tarifs pratiqués par les entreprises d'assurance sur la vie et de capitalisation comprennent la rémunération de l'entreprise et sont établis d'après les éléments suivants :*

- *Un taux d'intérêt technique fixé dans les conditions prévues à l'article A.132-1.*
- *Une des tables suivantes :*
  - *tables établies sur la base de données publiées par l'Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques, et homologuées par Arrêté du ministre de l'économie et des finances ;*
  - *tables établies par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuair indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaires reconnues par la commission de contrôle des assurances.*

*Pour les contrats de rentes viagères, le tarif déterminé en utilisant les tables visées au deuxième tiret du 2° ne peut être inférieur à celui qui résulterait de l'utilisation des tables visées au premier tiret du 2°.*

*Pour les contrats collectifs en cas de décès résiliables annuellement, le tarif peut appliquer les tables visées au premier tiret du 2° avec une méthode forfaitaire si celle-ci est justifiable.*

### **1.2. La certification des tables d'expérience**

La procédure d'agrément des actuaires indépendants habilités à certifier les tables de mortalité d'expérience et les lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité est définie, en France, par l'Institut des Actuaires, sous la supervision de l'Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles (ACAM).

## Section 2 : Méthodes de construction

La construction des tables d'expérience peut se faire selon plusieurs méthodes. Dans ce mémoire, nous développerons trois méthodes :

- Soit la table est entièrement construite à partir des données disponibles. Pour cette méthode nous utiliserons la modélisation de Kaplan-Meier.
- Soit un taux correctif est appliqué à une table de référence.
- Soit la table est construite proportionnellement en fonction d'une table de référence et de l'expérience. Pour cette méthode, nous utilisons la théorie de la crédibilité.

### 2.1. Construction directe des lois – Modèle de Kaplan-Meier

La méthode énoncée ci-dessous est une méthode souvent employée dans la construction de table d'expérience. Il s'agit de la méthode non paramétrique de Kaplan-Meier (pour plus de précisions, voir PLANCHET et THEROND (2006)).

#### **2.1.1. Mode de calcul**

##### Notations

Introduisons d'ores et déjà quelques notations :

Soient :

- $T$  la durée de vie d'un individu
- $T_x$  la durée de vie résiduelle d'un individu conditionnellement au fait qu'il soit vivant à l'âge  $x$ . En d'autre terme,  $T_x = [T - x | T > x]$
- $S_x$  une loi discrète de la forme  $(a_i; s_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ , les  $a_i$  étant des dates connues entre  $x$  et  $x+1$ , et les  $s_i$  des valeurs prises par  $S_x$  en  $a_i$ . On a  $t \in [0; a_m]$ .  $S_x(t)$  représente la probabilité de survie d'un individu après un instant  $t$ , sachant qu'il a déjà survécu jusqu'en  $x$ .  $S_x$  est donc un fonction de survie conditionnelle.
- $S$  la fonction de survie. Avec les notations ci-dessus, nous avons  $S(t) = P(T > t)$ .
- $q_i$  la probabilité de décéder en  $a_i$
- $n_i$  le nombre d'individus vivants en  $a_i$
- $d_{i-1}$  le nombre de personnes décédées en  $a_i$
- $c_{i-1}$  le nombre de personnes censurées sur  $]a_{i-1}; a_i]$
- $t_{i-1}$  le nombre de personnes censurées à gauche.

Pour rappel, soient un échantillon de durée de survie  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $C$  un réel strictement positif. Il y a censure à droite pour cet échantillon si, au lieu d'observer directement  $(X_1, \dots, X_n)$  on observe  $(T_1, D_1), \dots, (T_n, D_n)$  avec :

$$T_i = X_i \wedge C \text{ et } D_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i \leq C \\ 0 \text{ si } X_i > C \end{cases}$$

En résumé, on observe la sortie uniquement si elle a lieu avant la data C.

Le type de censure présenté est une censure fixe. Il existe d'autre type de censure (« arrêt au r-ième décès, censure aléatoire). Pour plus de précisions à ce sujet, se référer à PLANCHET et THEROND (2006).

### Méthode

La méthode de Kaplan Meier consiste à dire que la probabilité de ne pas entrer en incapacité à l'âge  $x$  est le produit des probabilités de ne pas entrer en incapacité à chaque date située dans l'intervalle  $[x; x+1[$ .

Dans l'optique de construction de la table d'entrée en incapacité, on recherche  $q_x$  la probabilité de décès dans la classe d'âge  $[x; x+1[$ . On a la relation bien connue :

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

On cherche donc d'abord à estimer  $S_x$ , la fonction de survie sur l'intervalle  $[x; x+1[$ .

Or  $\forall t \in [0; a_m]$ ,  $S_x(t)$  vérifie :

$$S_x(t) = \prod_{r/a_r < t} (1 - q_r)$$

### Calculs

Une construction explicite, assez intuitive, de l'estimateur de Kaplan-Meier est proposée ci-dessous.

Remarquons que la probabilité de survivre au-delà de  $t > s$  peut s'écrire :

$$S(t) = P(T > t | T > s) P(T > s) = P(T > t | T > s) S(s)$$

En renouvelant l'opération, le produit des termes en  $P(T > t | T > s)$  apparaît. Si on choisit comme instant de conditionnement les instants où se produit un évènement (que se soit une sortie ou une censure), on se ramène à estimer des probabilités de la forme :

$$p_i = P(T > T_i | T > T_{i-1})$$



$p_i$  est la probabilité de survivre sur l'intervalle  $]T_{i-1}, T_i]$  sachant que l'individu était vivant à l'instant  $T_i$ .

$\forall i \in [1, m]$ , un estimateur naturel de  $q_i$  est  $\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i}$ .

On obtient donc la formule suivante :  $\forall t \in [0, a_m]$  :

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{i/a_i < t} \left( 1 - \frac{d_i}{n_i} \right)$$

On en déduit alors une expression de  $\hat{q}_x$  de la forme :

$$\hat{q}_x = 1 - \prod_{i=a_2}^{a_m} \left( 1 - \frac{d_i}{n_i} \right)$$

avec  $n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1} + t_{i-1}$ .

L'estimateur de Kaplan Meier converge presque sûrement en chaque point (se référer à l'ouvrage de DROESBEKE et al. (1989)).

Remarquons que dans le cas où il y a des arrivées en cours de période, cette expression reste valable en tenant compte de celle-ci dans le calcul de  $n_i$ . L'estimateur ne bouge qu'au moment des sorties non censurées.

### 2.1.2. Quelques propriétés de l'estimateur de Kaplan-Meier

L'estimateur de Kaplan-Meier possède un certain nombre de propriétés. Cet estimateur est l'estimateur naturel empirique de la fonction de répartition en présence de censure. Il est convergent, cohérent et estimateur du maximum de vraisemblance généralisé.

La cohérence signifie que la propriété suivante est vérifiée :

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{T_i > t} + \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq t, D_i = 0\}} \frac{\hat{S}(t)}{\hat{S}(T_i)}$$

Cette formule signifie que les survivants au-delà de  $t$  sont la somme des individus ni morts ni censurés avant  $t$ , et des individus qui, censurés en  $T_i$  avant  $t$ , survivent après  $t$  avec la

probabilité conditionnelle  $\frac{\hat{S}(t)}{\hat{S}(T_i)}$ .

On utilise en général l'estimateur de Greenwood pour estimer la variance de  $S$ . Une présentation plus formelle est proposée dans DROESBEKE et al. (1989). Cet estimateur permet de calculer des intervalles de confiance asymptotiques.

Ce paragraphe est inspiré de PLANCHET et THEROND (2006).

En outre l'estimateur de Kaplan Meier est asymptotiquement gaussien. (Une démonstration de cette proposition à été faite par Gill en 1980).

## **2.2. Utilisation d'une référence externe**

Cette méthode nécessite l'emploi d'une table de référence, qui peut par exemple être les tables BCAC ou une table INSEE. L'intérêt réside dans la recherche du positionnement d'une table d'expérience par rapport à cette table de référence. Ce procédé est très répandu dans le domaine actuariel, notamment pour les compagnies ne disposant pas d'une base de données assez importante pour la création d'une table d'expérience.

### **2.2.1. Aspects théoriques**

Dans la suite de ce paragraphe, nous exposons un procédé très utilisé dans l'emploi de la référence externe : l'application d'un taux d'abattement ou de majoration aux taux de la table de référence.

Dans cette méthode, le coefficient recherché devra être fonction des données observées par la compagnie d'assurance. Pour la suite, nous supposons que la fonction de hasard entre deux âges entiers reste constante.

### **Quelques rappels de définitions**

Considérons une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$ .

*Définition : Fonction de hasard*

La fonction de hasard représente un taux de décès, un taux de panne, etc...selon le contexte. Il est de la forme suivante :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$$

où  $S(t)$  représente la fonction de survie de  $T$  et  $f(t)$  représente la densité de  $T$ .

Ainsi, la fonction de survie peut s'écrire en fonction de la fonction de hasard :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$$

Définition : Fonction de hasard cumulée

L'expression de la fonction de hasard cumulée est la suivante :

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds$$

Remarque

La fonction de hasard cumulée  $H(T)$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

En effet on peut démontrer :

$$P(H(T) > x) = P(T > H^{-1}(x)) = S(H^{-1}(x)) = \mathbf{exp}(-H(H^{-1}(x))) = \mathbf{exp}(-x)$$

### **Détermination du coefficient de proportionnalité**

Première méthode

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer un coefficient  $\alpha$  tel que  $\mu_x^{ex} = \alpha \times \mu_x^{ref}$ .

Le quotient de mortalité étant la version discrète du taux de hasard, il vient que :

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x)$$

Ainsi nous cherchons  $\alpha$  tel que :

$$1 - q^{ex} = (1 - q^{ref})^\alpha$$

Il s'agit d'un modèle à hasard proportionnel et l'expression du taux de hasard du modèle peut s'écrire :

$$\ln\left(\frac{\mu_x^{ex}}{\mu_x^{ref}}\right) = \ln(\alpha)$$

Et la fonction de survie peut s'écrire de la manière suivante :

$$S(x) = \mathbf{exp}\left(-\mathbf{exp}(\ln(\alpha))H_{ref}(x)\right)$$

avec  $H_{ref}$  la fonction de hasard cumulée de référence.

En effet, en partant de la relation de base :  $S(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$ , on obtient :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha \mu_x^{ref} dt\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{ref} dt \times \alpha\right) = \exp\left(-\exp(\ln(\alpha)) H_{ref}(x)\right)$$

A la vue de la forme de la fonction de survie, intéressons nous à la variable transformée  $V = \ln(H_{ref}(X))$ .

Considérons le modèle suivant :  $v = \ln(\alpha) + \varepsilon$ , qui est en fait un modèle linéaire. Nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} P(\varepsilon > t) &= P(\ln H_{ref}(x) - \ln \alpha > t) \\ &= P(H_{ref}(x) > \exp(\ln \alpha) \exp(t)) \end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$P(\varepsilon > t) = S\left(H_{ref}^{-1}\left(\exp(\ln \alpha) \exp(t)\right)\right) = \exp(-\exp(t))$$

Cela démontre que la loi du résidu  $\varepsilon$  est une loi de Gumbel, dont nous rappelons la définition.

Loi de Gumbel :

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Gumbel de paramètres  $a$  et  $b$  si sa fonction de répartition est de la forme

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\right)$$

L'espérance de  $X$  est alors

$$E(X) = a + b\gamma$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler, et sa variance vaut :

$$V(X) = \frac{\pi^2}{6} b^2$$

Dans notre modèle, nous avons  $a = 0$  et  $b = -1$ .

À l'aide de la formule de l'espérance, nous calculons un estimateur de  $\ln(\alpha)$  :

$$\ln(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln H_{ref}(x_i) + \gamma$$

Par la suite, l'estimateur du taux d'abattement<sup>3</sup> est :

$$\alpha = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln H_{ref}(x_i) + \gamma\right) = e^\gamma \left[\prod_{i=1}^n H_{ref}(x_i)\right]^{1/n}$$

<sup>3</sup> Pour plus de précision sur cet estimateur d'abattement, se référer à Planchet et Thérond (2006)

## Seconde méthode

Une autre méthode est de considérer le paramètre  $\alpha$  comme l'écart entre le nombre de d'occurrences de la variable  $T$  observées et le nombre d'occurrences théoriques déterminé avec la table de référence modifiée du taux d'abattement ou de majoration.

En prenant la notation  $L_x^{obs}$  pour l'effectif sous risque à l'âge  $x$  dans la population, le nombre d'occurrences obtenu par la table de référence modifiée est :

$$\alpha \times q_x^{ref} \times L_x^{obs}$$

Posons la contrainte suivante : l'égalité entre le nombre total d'occurrence obtenu à l'aide de la table le nombre d'occurrences observées.

Nous obtenons alors le résultat ci-dessous pour l'expression de l'estimateur du taux d'abattement :

$$\alpha = \frac{\sum_x D_x^{obs}}{\sum_x q_x^{ref} \times L_x^{obs}}$$

où  $D_x^{obs}$  représente le nombre d'occurrences observées à l'âge  $x$ .

## **2.3. Utilisation de la théorie de la crédibilité**

La théorie de la crédibilité permet d'ajuster une table de survenance (table de décès ou d'entrée en incapacité...) en fonction de la réalité du portefeuille. Cette théorie apporte donc un complément à la méthode d'utilisation d'une référence externe.

En effet, au lieu d'appliquer un unique taux d'abattement ou de majoration à la table de référence, nous utiliserons une pondération entre une valeur collective et une valeur individuelle. Ainsi cette théorie est utile pour les compagnies disposant de petits portefeuilles, dont la quantité de données n'est pas suffisante pour construire ses propres tables.

### **2.3.1. Crédibilité et tables d'expérience**

Cette partie, qui s'appuie sur HARDY et PANJER (1998), sur l'approche du risque de mortalité par la théorie de la crédibilité, montre l'efficacité que pourrait avoir la théorie de la crédibilité de Bühlmann-Straub face à la difficulté de construction d'une table d'expérience.

Étudions la variable aléatoire représentant le ratio entre le nombre de sinistres de la compagnie et le nombre de sinistres attendus calculé à l'aide d'une table de référence.

## Notations

Dans la suite de cette partie, l'indice  $i$  désigne la compagnie numéro  $i$ , avec  $i = 1, 2, \dots, N$ . L'indice  $j$  désigne l'année d'observation, avec  $j = 1, 2, \dots, n_i$  (où  $n_i$  désigne le nombre d'années d'observation de la compagnie numéro  $i$ ).

Notons :

- $S_{i,j}$  le montant des sinistres pour la compagnie  $i$  l'année  $j$
- $P_{i,j}$  le montant attendu des sinistres pour la compagnie  $i$  l'année  $j$  d'après les tables standard de mortalité utilisées par les compagnies d'assurance
- $X_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{P_{i,j}}$  le *loss ratio* de la mortalité pour la compagnie  $i$  l'année  $j$
- $P_i = \sum_{j=1}^{n_i} P_{i,j}$  le montant total attendu des sinistres pour la compagnie jusqu'à l'année  $n$

### Hypothèse 1

La distribution des  $X_{i,j}$  dépend d'un paramètre de risque fixé mais inconnu  $\theta_i$  et du volume de risque  $P_{i,j}$ . La distribution des *loss ratio* annuels de mortalité  $X_{i,j}$  pour une compagnie dépend d'un paramètre de risque fixé pour chaque compagnie mais inconnu, et du montant annuel attendu pour les sinistres de la compagnie en question.

### Hypothèse 2

Pour tout  $j=1 \dots N$ , les variables aléatoires  $X_{i,j}$ , conditionnellement à  $\theta_i$ , sont indépendantes et ont pour espérance et variance :

$$E(X_{i,j} | \theta_i) = \mu(\theta_i) \text{ et } \text{Var}(X_{i,j} | \theta_i) = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{i,j}}.$$

Le moment d'ordre 4 de  $X_{i,j}$  vaut :  $\frac{3}{P_{i,j}^2} \sigma^4(\theta_i)$ .

Conditionnellement au paramètre de risque, les variables aléatoires *loss ratio* annuels de mortalités sont indépendantes avec une moyenne fonction du paramètre de risque - nous remarquons donc que les « vrais » *loss ratio* de mortalité n'évoluent pas au cours du temps - et une variance fonction du paramètre de risque et des montants annuels attendus pour les sinistres de la compagnie. Cette variance est en fait inversement proportionnelle aux poids que l'on se donne, c'est-à-dire au nombre de sinistres attendus.

Ces deux premières hypothèses sont les hypothèses classiques du modèle de Bühlmann-Straub.

### Hypothèse 3

Les paramètres de risque  $\theta_i$  peuvent être traités comme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres mots, les risques sont considérés indépendants, les sinistres engendrés par deux contrats différents ne sont pas corrélés.

#### Hypothèse 4

Les  $(\theta_i, X_{i,j})$  et  $(\theta_k, X_{k,j})$  sont des vecteurs indépendants si  $k \neq i$ . Cela signifie que les résultats d'une entreprise sont indépendants des résultats des autres entreprises, et les résultats des différentes années d'une même compagnie sont indépendants les uns des autres.

### 2.3.2. Le *best estimate* du *loss ratio* de mortalité

Le *best estimate* quantifie une grandeur aléatoire à partir de méthode et d'hypothèses qualifiées de raisonnables, c'est-à-dire reflétant au mieux la réalité.

Dans ce mémoire, nous chercherons à déterminer le « *best estimate* » de  $E(X_{n+1} | \theta_i) = \mu(\theta_i)$  étant donné les valeurs observées de la compagnie  $i$   $X_i = X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ .

Nous utiliserons un estimateur de  $\mu(\theta_i)$  déterminé selon la méthode Bühlman-Straub de la théorie de la crédibilité. Notons cet estimateur  $\mu_i^*$ .

$\mu_i^*$  est défini comme la quantité linéaire en les données  $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ , qui minimise la fonction

$$F_i(u) = E\left((u - \mu(\theta_i))^2\right).$$

On cherche un estimateur linéaire en les observations.  $\mu_i^*$  s'exprime donc sous la forme :

$$\mu_i^* = a_i + \sum_j b_{i,j} X_{i,j}$$

où les coefficients  $(a_i, b_{i,j})$  minimisent la fonction :

$$E\left(\left(\mu(\theta_i) - a_i - \sum_j b_{i,j} X_{i,j}\right)^2\right)$$

Or la distribution des *loss ratio* de mortalité est invariante par permutation des  $X_{i,j}$  donc :

$$b_{i,1} = \dots = b_{i,n_i}$$

Notre estimateur devient donc :

$$\mu_i^* = a_i + b_i \overline{X_i}$$

avec  $\bar{X}_i$  est la moyenne des *loss ratio* passés de la compagnie  $i$  pondérée par le nombre attendu de sinistres  $P_{ij}$

$$\bar{X}_i = \frac{1}{\sum_j P_{i,j}} \sum_{j=1}^n P_{i,j} X_{i,j}$$

En réinsérant cette expression dans la fonction à minimiser, nous obtenons :

$$E\left(\left(\mu(\theta_i) - a_i - b_i \bar{X}_i\right)^2\right)$$

Pour résoudre cette équation, il faut dériver cette expression par rapport aux paramètres que nous cherchons à définir. Nous obtenons les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$E\left(\mu(\theta_i) - a_i - b_i \bar{X}_i\right) = 0 \text{ et } Cov\left(\bar{X}_i, \mu(\theta_i)\right) - b_i Var\left(\bar{X}_i\right) = 0$$

En résolvant cette équation, nous trouvons le meilleur estimateur linéaire de  $E\left[\mu(\theta_i) | \underline{X}_i\right]$  de la forme :

$$\tilde{\mu}_i = Z_i \bar{X}_i + (1 - Z_i) E(\mu(\theta_i))$$

où  $Z_i$  est le facteur de crédibilité de la compagnie  $i$  et donc  $\bar{X}_i$  est la moyenne des *loss ratio* passés de la compagnie  $i$  pondérée par le nombre attendu de sinistres  $P_{ij}$ .

On a :

$$Cov(\tilde{\mu}_i, \bar{X}_i) = Z_i Cov(\bar{X}_i, \bar{X}_i) = Cov(\mu_i, \bar{X}_i)$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{Cov(\mu_i, \bar{X}_i)}{Var(\bar{X}_i)} \\ &= \frac{E\left[Cov(\mu_i, \bar{X}_i | \theta_i)\right] + Cov\left(\mu_i, E[\bar{X}_i | \theta_i]\right)}{V(\bar{X}_i)} \\ &= \frac{0 + V(\mu_i)}{V(\mu_i) + E(\sigma^2(\theta_i)) / P_i} \end{aligned}$$

Ce facteur  $Z_i$  s'exprime de la manière suivante :



$$Z_i = \frac{P_i}{P_i + \phi} \text{ avec } \phi = \frac{E(\sigma^2(\theta_i))}{V(\mu(\theta_i))}.$$

Ce résultat est le résultat classique d'un modèle de Bühlmann-Straub. En effet, nous retrouvons le coefficient de crédibilité  $\phi$  dont la racine carrée s'interprète comme le rapport entre la variabilité interne du risque et l'hétérogénéité du portefeuille.

Notons que les  $\theta_i$  étant indépendants et identiquement distribués,  $\phi$  et  $E(\mu(\theta_i))$  sont les mêmes pour toutes les compagnies.

Nous remarquons que plus  $P_i$  est grand, c'est-à-dire plus le nombre attendu de sinistres de la compagnie  $i$  est grand, plus le facteur de crédibilité se rapproche de 1, et donc plus le passé sinistre de la compagnie  $i$  aura d'importance dans le calcul de l'estimateur recherché.

### 2.3.3. Calcul de la variance des *loss ratio* de mortalité

Pour calculer le coefficient de crédibilité et donc le facteur de crédibilité, il nous faut d'abord calculer la variance des *loss ratio* de mortalité..

Dans le modèle que nous utilisons, la variance réelle (mais inconnue) des *loss ratio* de mortalité  $X_{ij}$  pour une compagnie  $i$  dans une année future, sachant le nombre<sup>4</sup> de sinistres attendus  $P_{ij}$  est :

$$\frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{i,j}}$$

Selon la théorie de la crédibilité, l'estimateur de  $\sigma^2(\theta_i)$  est la plus proche fonction linéaire en  $s_i^2$  de :

$$E[\sigma^2(\theta_i)|X_i] = E[P_{ij}V[X_{ij}|\theta_i]|X_i].$$

Cet estimateur est de la forme (Centeno, 1989) :

$$\tilde{\sigma}_i^2 = C_i s_i^2 + (1 - C_i) E[\sigma^2(\theta_i)]$$

où

$$s_i^2 = \frac{1}{(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)$$

---

<sup>4</sup> Obtenu à l'aide de l'hypothèse 2

et où

$$C_i = \frac{1}{1 + \frac{2}{n_i - 1} \varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{E[\sigma^4(\theta_i)]}{V[\sigma^2(\theta_i)]}.$$

Tous les facteurs  $E[\sigma^4(\theta_i)]$ ,  $E[\sigma^2(\theta_i)]$ ,  $V[\sigma^2(\theta_i)]$  sont indépendants de la compagnie considérée. Ils sont donc identiques à toutes les compagnies.

En fait, la seule variable qui dépend des compagnies est le facteur  $C_i$  qui dépend du nombre d'années d'observation pour la compagnie étudiée.

### 2.3.4. Estimation des paramètres de structure

Les paramètres de structures sont des paramètres communs à toutes les compagnies car les  $\theta_i$  sont identiquement distribués.

Ces paramètres de structure peuvent être calculés à partir des données de l'ensemble des compagnies. Ces estimateurs sont tous non biaisés, mais d'autres estimateurs pertinents peuvent être envisagés.

L'estimateur de  $E[\mu(\theta_i)]$  utilisé par Hardy et Panjer est :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^N Z_i}.$$

L'estimateur de  $E[\sigma^2(\theta_i)]$  qui est utilisé dans le modèle est le suivant :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N C_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N C_i}.$$

L'estimateur de  $V[\mu(\theta_i)]$  utilisé est  $\hat{v} = \frac{PW - \hat{\sigma}^2}{\Pi P}$ , où

$$\Pi = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{P} \left(1 - \frac{P_i}{P}\right)}{\left\{ \left( \sum_{i=1}^N n_i \right) - 1 \right\}} \quad \text{et} \quad W = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{P_{ij}}{P} (X_{ij} - \tilde{\mu})^2}{\left\{ \left( \sum_{i=1}^N n_i \right) - 1 \right\}}.$$

L'estimateur de  $E[\sigma^4(\theta_i)]$  est présenté ci-dessous :

$$\widehat{\sigma}^4 = \frac{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)(s_i^2)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i + 1)}.$$

Enfin, l'estimateur de  $V[\sigma^2(\theta_i)]$  est :

$$\widehat{V}_{\sigma^2} = \left\{ \left( \sum_{i=1}^N (n_i - 1)(s_i^2 - \widetilde{\sigma}^2)^2 \right) - 2\widehat{\sigma}^4 (N - 1) \right\} / R \quad \text{où} \quad R = \sum_{i=1}^N (n_i - 1) - \frac{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)}.$$

Ces estimateurs sont convergents.

## **Chapitre 2 : Modélisation des risques du passif**

---

Dans ce chapitre, une modélisation de différents postes du passif est réalisée, en respectant les principes de la MCEV établis par le CFO Forum évoqués dans la première partie de ce mémoire.

Dans ce mémoire, nous modéliserons le risque d'incapacité pour un portefeuille d'assurés ayant souscrit à la garantie « arrêt de travail ».

### **Section 1 : Les frais**

La modélisation des frais s'articule autour de trois grandeurs :

- un montant de base par contrat,
- un montant forfaitaire,
- un montant proportionnel au coût du sinistre indemnisé.

Les trois paragraphes suivant apportent des précisions quant à leur élaboration.

#### **1.1. Montant de base**

Tous les contrats en cours engendrent des frais de gestion récurrents, de frais de renouvellement, etc. Dans la suite de ce mémoire nous affecterons un montant de frais de base récurrent à chaque contrat présent dans le portefeuille à la date de projection.

Notons  $MtBase$  le montant mensuel de base.

#### **1.2. Montant forfaitaire**

Chaque sinistre survenu engendre des frais de dossier nécessaires à l'indemnisation des sinistrés. Plusieurs modélisations de ce montant forfaitaire sont possibles selon le CFO Forum, comme un système de frais croissants ou décroissants avec le nombre de sinistres passés ou la prise en compte de l'inflation.

Différents cas sont détaillés dans les paragraphes suivants.

Notons  $MtForf$  ce montant annuel forfaitaire

$i \in N^*$  l'indice du mois de projection.

##### **1.2.1. Frais décroissants avec le nombre de sinistres passés**

Nous pouvons modéliser l'évolution du montant des frais par une fonction décroissante.

Soit  $f$  une fonction continue et définie sur  $[0; +\infty[$ , décroissante et à valeurs dans  $]0; 1[$ . La dérivée première de cette fonction représente la vitesse de décroissance des frais forfaitaires par rapport au nombre de sinistres.

Soit  $FD_{i,j}$  le montant des frais de dossier pour le mois  $i$  et pour le contrat  $j$ .

Dans ce contexte, le montant forfaitaire pour le mois  $i$  et pour le contrat  $j$  est exprimé de la manière suivante :

$$Mtforf_{i,j} = FD_{i,j} * f(N)$$

Où  $N$  représente le nombre de sinistres passés de l'assuré.

### **1.2.2. Prise en compte de l'inflation**

Le CFO Forum prévoit la prise en compte de l'inflation dans les projections.

Notons  $I(i)$  le taux d'inflation attendu pour le mois de projection  $i$ <sup>5</sup>.

Dans ce contexte, le montant forfaitaire pour le mois  $i$  et pour le contrat  $j$  est exprimé de la manière suivante :

$$Mtforf_{i,j} = FD_{i,j} * (1 + I(i))$$

### **1.2.3. Prise en compte de plusieurs critères**

Pour le montant forfaitaire, plusieurs critères peuvent être pris en compte. Dans notre cas, l'expression du montant forfaitaire est impactée par le nombre de sinistres passés et par l'inflation.

Avec les notations prises précédemment, le montant forfaitaire des frais peut s'écrire de la manière suivante :

$$Mtforf_{i,j} = FD_{i,j} * (1 + I(i)) * f(N)$$

## **1.3. Montant proportionnel au coût du sinistre**

Ce montant constitue le troisième élément du montant global de frais.

Notons  $Mtprop$  le montant proportionnel au coût du sinistre.

$CS_{i,j}$  le coût du sinistre pour le mois de projection  $i$  et pour le contrat  $j$ .

---

<sup>5</sup> Une modélisation de l'inflation est proposée à la section 5 de ce chapitre.

Nous pouvons écrire :

$$Mtprop_{i,j} = CS_{i,j} * \alpha$$

Où  $\alpha$  représente la proportion de frais par rapport au montant du sinistre.

### **Synthèse de la modélisation des frais**

Nous modélisons donc les frais à l'aide de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} Mt_{frais_{i,j}} &= Mt_{base_{i,j}} + Mt_{forf_{i,j}} + Mt_{prop_{i,j}} \\ &= M_{base_{i,j}} + FD_{i,j} * (1 + I(i)) * f(N) + CS_{i,j} * \alpha \end{aligned}$$

## **Section 2 : les primes**

Le pas de projection choisi dans cette étude est un pas mensuel. Nous faisons l'hypothèse que chaque affaire de l'*in-force business* de notre portefeuille verse une prime mensuelle en début de période.

Il existe plusieurs causes de non paiement des primes par l'assuré, qui devront être prises en compte dans la modélisation :

- L'assuré a atteint l'âge de la retraite (nous considérerons que tous les assurés partent à la retraite à 65 ans)
- L'assuré est décédé

La prime payée par l'assuré  $j$  l'année  $i$  est notée  $p_{i,j}$ , et son expression générale est de la forme :

$$p_{i,j} = P * 1_{(T_{x_j} > i) \cup (x_{i,j} < 60) \cup (non AT)}$$

Où  $T_{x_j}$  représente la durée de survie de l'individu  $j$ ,

$P$  le montant de la prime prévue au contrat,

$x_{i,j}$  sont l'âge à l'instant  $i$ .

Une revalorisation des primes peut être également envisagée. Contrairement à une garantie décès, l'assuré peut entrer en incapacité plusieurs fois. L'évènement d'entrée en incapacité peut être traité comme un sinistre d'assurance dommage, d'où la possibilité d'appliquer un modèle bonus-malus.

Dans un but de simplification, nous considérerons, dans la projection, qu'il y a absence de changement de garantie : il n'y aura donc pas de transfert ou d'évolution de garantie à prendre en compte.

### **Section 3 : Traitement du taux d'actualisation**

Le taux d'actualisation appliqué va dépendre du type de flux considéré.

#### **3.1. Flux certain**

Dans le cas d'un flux certain, comme par exemple une annuité immédiate, la valorisation se fera à l'aide du taux sans risque.

#### **3.2. Flux incertain, mais incertitude non systématique**

Il s'agit des flux non corrélés avec le marché et liés au risque de mortalité. Les *MCEV Principes* prévoient l'utilisation de la théorie de l'équivalent certain

#### **3.3. Flux systématiquement incertain**

Il s'agit des flux corrélés avec le marché financier.

La méthode des équivalents certains :

Cette méthode consiste à égaliser le *cash flow* espéré au *cash flow* sans risque. L'ajustement par rapport au risque se fait au niveau du montant du *cash flow*, et non sur le taux d'actualisation utilisé. L'équivalent certain d'un flux est nécessairement inférieur à ce même flux car il corrige le risque inhérent au flux prévisionnel.

A taux d'actualisation et taux sans risque donnés, la formule de l'équivalent certain s'écrit :

$$EC_t = CFE_t * \lambda'$$

Où  $\lambda$  est appelé coefficient d'équivalent certain et dont l'expression est de la forme :

$$\lambda = \frac{1 + R_f}{1 + \text{Taux d'ajustement par rapport au risque}}$$

Il suffit ensuite, une fois que les *cash-flows* sont réduits à leur équivalent certain, de les actualiser au taux sans risque.

### **Section 4 : Modélisation de l'inflation**

Comme le préconise le CFO Forum, les éléments de projection, et plus particulièrement les frais, doivent tenir compte de l'inflation.

Les modèles existants sont nombreux. Le choix du modèle se fait selon différents critères :

- le modèle doit être cohérent sur le long terme. En effet, une compagnie d'assurance propose des produits, et établie ses engagements sur le long terme.

- la cohérence sur le court terme : l'évolution du bilan financier et technique d'une compagnie d'assurance est très importante sur le court terme, puisqu'elle détermine les décisions stratégiques à court terme.
- le nombre de paramètres à estimer : un modèle sur-paramétré serait trop complexe à exploiter. De plus, il n'est pas toujours pertinent d'augmenter le nombre de paramètre, car si le modèle devient plus précis, le risque d'erreur sur les estimations des paramètres est accru.
- un bon ajustement au passé : le modèle doit se baser au maximum sur l'expérience passée.
- la structure ne doit pas être trop sensible aux données aberrantes qui pourraient perturber la projection du taux.

Dans la suite de ce mémoire, nous présenterons le modèle de Brennan et Xia pour la modélisation de l'inflation.

### **Modèle de BRENNAN et XIA**

Nous nous intéressons à la partie inflation du modèle de Brennan et Xia, qui traite de la détermination de la dynamique d'une obligation sous contrainte inflationniste.

L'inflation est modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dI = \alpha(\bar{I} - I)dt + \sigma_I dW_t$$

où  $\alpha > 0$ ,  $\sigma_I > 0$  et  $\bar{I}$  (qui représente l'inflation à long terme) sont les paramètres à estimer.

En appliquant une discrétisation d'Euler (développement de Taylor d'ordre 1) à l'équation précédente, nous obtenons :

$$I_{t+\Delta T} - I_t = \alpha(\bar{I} - I_t)\Delta T + \sigma_I \sqrt{\Delta T} \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .

Plus le pas de discrétisation choisi est petit, plus nous nous approchons de processus continu d'origine. Dans notre modèle, nous appliquons l'année comme pas de discrétisation, qui pour la période de projection (50 ans) est un pas assez petit.

Cette équation peut s'écrire comme un processus autorégressif AR(1) :

$$I_{t+\Delta T} = I_t(1 - \alpha\Delta T) + \alpha\bar{I}\Delta T + \sigma_I \sqrt{\Delta T} \varepsilon_t$$

L'homoscédasticité conditionnelle du modèle est remise en cause. En effet, la volatilité et la variance de l'inflation n'est pas constante au cours du temps. Cependant, nous utiliserons ce modèle en étant conscient de cette limite.



Une alternative serait l'utilisation de processus ARCH / GARCH qui prennent en compte l'hétéroscédasticité.

## Historique de l'inflation

Dans la suite, nous nous baserons sur un historique du taux d'inflation de 1955 à 2008<sup>6</sup>.

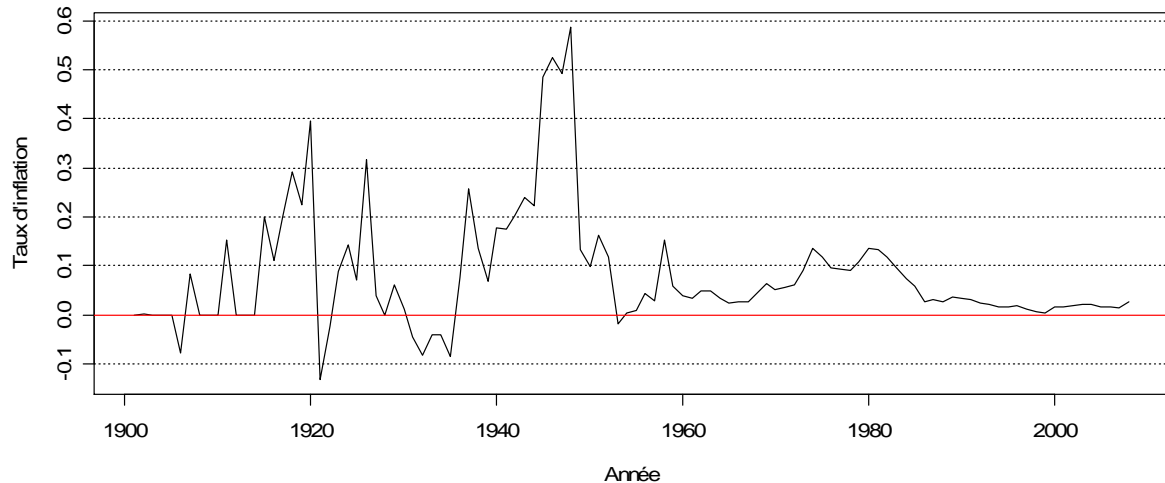


fig.2 : Inflation annuelle moyenne en France de 1901 à 2008

Les détails concernant la détermination des paramètres et la validité du modèle utilisé sont présentés en annexe.

A l'aide du logiciel R et d'un processus ARMA(1,0) nous obtenons une estimation des coefficients :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0,92 \\ \hat{I} &= 4,98 \% \\ \hat{\sigma}_I &= 5,31 \%\end{aligned}$$

Remarquons que l'inflation à long terme  $\hat{I}$  est élevée, ce qui s'explique par les nombreux pics à la hausse durant la période observée. Notons également que le coefficient de retour à la moyenne  $\hat{\alpha}$  est positif.

<sup>6</sup> L'historique du taux d'inflation (de 1955 à 2008) a été récupéré sur le site de l'INSEE

## **Section 6 : Modélisation des résiliations**

Nous supposons que les contrats sont reconduits chaque année par tacite reconduction. Néanmoins l'assuré a la capacité de résilier son contrat. Par simplification, nous supposons que l'assuré résilie son contrat en fin d'année.

Les données disponibles pour cette étude ne sont pas suffisantes pour élaborer un taux de résiliation par âge et par ancienneté satisfaisant. Le taux de résiliation, pour un individu donné, sera donc construit sur un modèle théorique basé sur l'utilité que retire l'assuré à maintenir son contrat d'assurance pour arrêt de travail.

Le taux de résiliation sera modélisé par une fonction décroissante avec l'utilité de l'assuré vis à vis de son contrat. L'utilité de l'assuré sera déterminée avec la durée cumulée en incapacité depuis la souscription et la durée écoulée depuis le dernier arrêt de travail.

De plus un taux minimum et un taux plafond seront fixés pour tous les assurés.

### **Notations**

Prenons les notations suivantes :

- $taux_{i,j}^{res}$  le taux de résiliation de l'assuré  $i$  pour le mois de projection  $j$ .
- $taux_{min}^{res}$  le taux de résiliation minimum du portefeuille.
- $N_{i,j}$  le nombre de mois passés en incapacité par l'assuré  $i$  pour le mois de projection  $j$ , depuis la souscription de son contrat.
- $n_{i,j}$  le nombre de mois sains pour l'assuré  $i$  et le mois de projection  $j$ , depuis le dernier arrêt de travail de l'assuré.
- $taux_{max}^{res}$  le taux de résiliation plafond.

### **Construction**

Ainsi le modèle s'écrit :

$$taux_{i,j}^{res} = \text{Min} \left( \text{Max} \left( \frac{N_{i,j}}{n_{i,j}^2 + 1}; taux_{min}^{res} \times 100 \right); taux_{max}^{res} \times 100 \right) / 100$$

## Chapitre 3 : Mise en forme opérationnelle

---

Ce chapitre a pour but d'exposer les méthodes de simulations retenues et les algorithmes de calcul employés.

### Section 1 : Mise en place du processus de projection

#### 1.1. Représentation

Le suivi de l'état de chaque assuré peut être schématisé par la chaîne de Markov suivante.

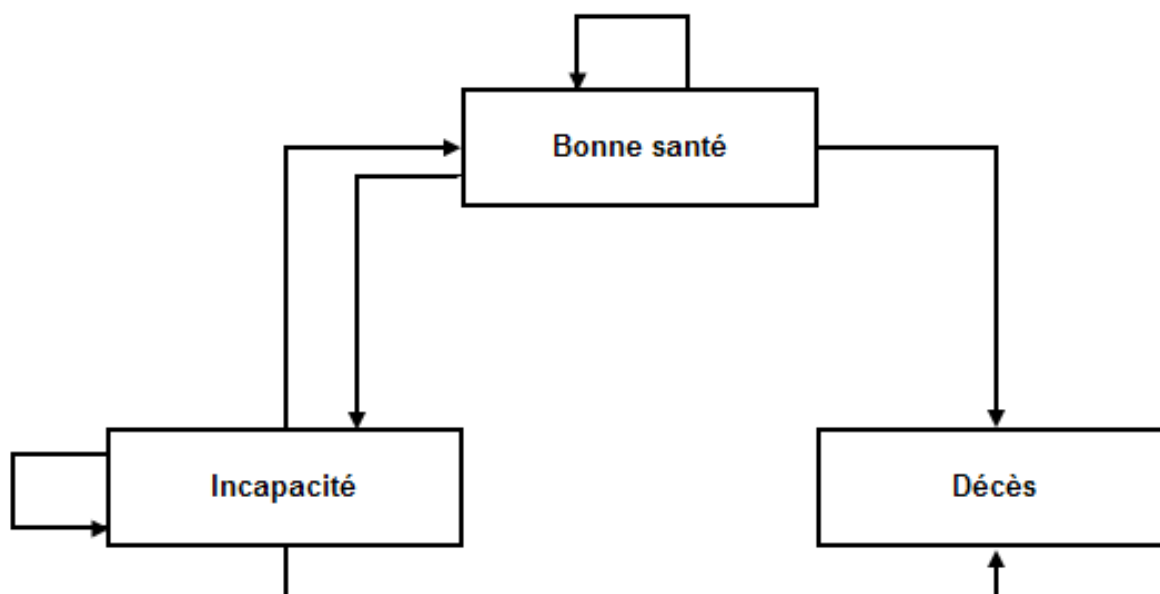


fig.3 : Suivi des états des assurés

Les probabilités évoluant au cours du temps, cette chaîne de Markov est inhomogène.

Dans ce mémoire nous nous intéresserons plus spécifiquement à la garantie incapacité, l'état d'invalidité ne sera pas pris en compte dans la modélisation.

#### 1.2. Règles à respecter

Ce paragraphe expose les contraintes réglementaires à respecter :

- La durée maximale de maintien en incapacité est de 36 mois. Au-delà, l'assuré passe automatiquement en état d'invalidité.
- A partir d'un certain âge (65 ans dans notre modèle), l'assuré est mis en retraite et ne peut plus avoir le statut d'incapable ou d'invalidé. Ainsi, à partir de 65, l'assuré sort du périmètre de notre étude.

## **Section 2 : Détail des probabilités utilisées**

Le pas de projection choisi est le mois. Ce choix est dû au fait que les tables de maintien livrent les taux mois par mois.

### **2.1. Table d'entrée en incapacité**

La table d'entrée en incapacité dépend de l'âge de l'assuré.

Cette table suit le cheminement d'une génération fictive de 10 000 individus en âge de travailler (20 ans) où l'on observe le nombre d'individus restant dans l'état sain (non entrés en incapacité) à chaque année jusqu'à l'âge de la retraite (65 ans).

Cette table donne donc une probabilité d'entrée en incapacité par année selon l'âge de l'assuré.

Pour obtenir une probabilité selon notre pas de projection, nous avons linéarisé la table entre deux âges.

Ainsi notons  $l(x)$  le nombre d'individus sains à l'âge  $x$  (entier) que renvoie la table.

Soit  $T$  la variable aléatoire « âge d'entrée en incapacité ». Nous faisons l'hypothèse que pendant tous les mois d'une même année, le nombre de personnes tombant en incapacité est constant. A l'aide de la table nous déterminons la probabilité  $P(T < x+t | T > x)$  qu'un assuré entre en incapacité avant avoir atteint l'âge  $x+t$  mois :

$$P(T < x+t | T > x) = 1 - \frac{l(x) + (l(x+1) - l(x)) \times \frac{t}{12}}{l(x)}$$

### **2.2. Table de maintien en incapacité**

La table de maintien en incapacité dépend de deux variables : l'âge d'entrée dans l'état incapable et l'ancienneté de l'arrêt.

Cette table se base sur une population de  $N$  individus entrés à l'âge  $x$  et détermine le nombre  $l_x(t)$  de personnes restant en incapacité  $t$  mois.

Soit  $T_x$  la variable aléatoire « âge de sortie de l'état incapable pour un assuré entré à l'âge  $x$  ».

Avec cette table nous déterminons la probabilité  $P(T_x > t+n | T_x > t)$  qu'un assuré entré en incapacité à l'âge  $x$  et ayant déjà passé  $t$  mois dans cet état, reste en incapacité  $n$  mois supplémentaires :

$$P(T_x > t+n | T_x > t) = \frac{l_x(t+n)}{l_x(t)}$$

### **2.3. Table de maintien en invalidité**

Tout comme la table de maintien en incapacité, la table de maintien en invalidité dépend de deux variables : l'âge d'entrée dans l'état invalide et l'ancienneté de l'état. Cette table garde de le même principe que la table de maintien en incapacité.

### **2.4. Table de passage de l'état incapable à l'état d'invalide**

Cette table se présente également sous forme d'un tableau à deux entrées. Elle donne le nombre d'incapables reconnus invalides en fonction de l'âge et de l'ancienneté, ce nombre étant rapporté à un effectif originel de 10 000. Les probabilités déduites de cette table ne sont pas des probabilités conditionnelles au maintien car elles incluent déjà le maintien en incapacité. Pour une bonne utilisation, on déduira les probabilités de sorties instantanées de l'incapacité pour cause d'invalidité en divisant terme à terme les valeurs de cette table par celles de la table de maintien en invalidité.

Les deux dernières tables citées ne seront pas prises en compte dans ce mémoire, où seule l'incapacité sera étudiée.

### **2.5. Mortalité pour les incapables**

L'objectif de ce mémoire est de comparer une projection de portefeuille de prévoyance individuelle avec les tables règlementaires du BCAC et des tables d'expériences construites à partir de données d'une compagnie d'assurance. Deux observations :

- Les tables de maintien en incapacité prennent en compte la mortalité dans les taux de sortie. Il ne faut donc pas utiliser la table de mortalité quand un assuré se trouve en incapacité lors de la projection.
- Les personnes ayant traversé des périodes d'incapacité peuvent être exposées à une surmortalité (dans certains cas, comme après une maladie grave, etc...). Dans un but de simplification, nous supposons que la mortalité de ces assurés ne diffère pas de celle des autres. Une unique table de mortalité sera utilisée.

## **Section 3 : Calcul des provisions mathématiques**

### **3.1. Hypothèses préalables**

#### **3.1.1. Taux d'actualisation**

Le taux d'actualisation utilisé dans la projection est le taux de référence préconisé par le principe 14 des *MCEV Principes*. Il s'agit de la courbe des taux SWAP. Les valeurs prises par cette courbe sont présentées en annexe.

#### **3.1.2. Table de mortalité**

La mortalité est basée sur les tables TGF/TGH 05.

#### **3.1.3. Taux de revalorisation des salaires**

Nous revaloriserons les salaires selon le taux d'inflation modélisé par un modèle de Brennan et Xia.

### **3.2. Calcul des engagements**

#### **Notations**

- $x$  : âge de l'assuré à l'instant  $t = 0$ .
- $v$  : facteur d'actualisation.
- $IJ_t$  : indemnité journalière versée à l'instant  $t$ .
- $entrée\_inc_x$  : probabilité d'entrée en incapacité pour un assuré d'âge  $x$ .
- $main\_inc_{x,k}$  : probabilité de maintien en incapacité pendant  $k$  mois pour un assuré entré dans l'état à l'âge  $x$ .
- $P_i$  : montant de la prime mensuelle due par l'assuré pendant l'année  $i$ .
- $f$  : durée de franchise en nombre de mois.

#### **3.2.1. Calcul des engagements de l'assureur**

L'assureur s'engage, à l'instant initial, à verser à l'assuré des indemnités journalières garanties si celui-ci entre en incapacité durant la période définie contractuellement.

Dans notre cas, une période correspond à une année, le contrat étant reconduit d'année en année par tacite reconduction sauf si l'assuré résilie son contrat.

Les indemnités journalières ne sont versées qu'après une période de franchise définie dans le contrat.

Réglementairement, dans le cas d'une incapacité déclarée, le versement de l'assureur ne peut pas excéder une période de trente six mois consécutifs (soit trois ans), auquel cas l'assuré serait déclaré invalide et sortirait donc du cadre de notre étude.

### Représentation graphique de l'engagement de l'assureur

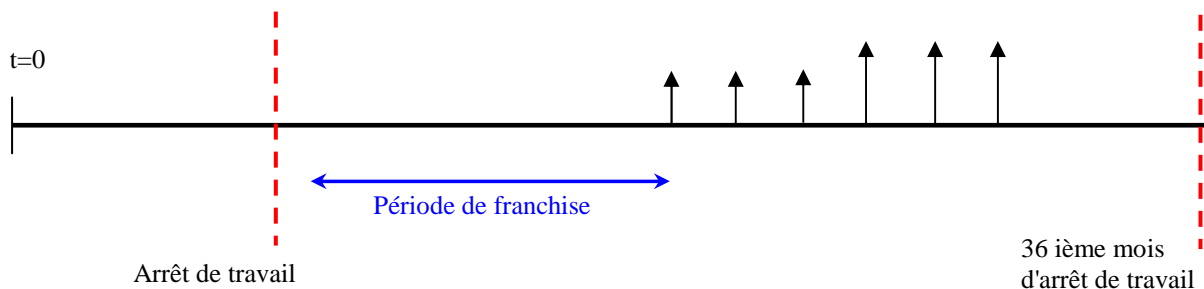


fig.4 :Schéma de l'engagement de l'assureur

### Calcul de la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur

La valeur actuelle probable de l'assureur  $VAP_{assureur}$  s'exprime de la façon suivante :

$$VAP_{assureur} = \left[ \sum_{k=1+f-1}^{12} \text{entrée}_{inc_{x+(k-f)/12}} \sum_{i=k}^{36-f+k} \text{main}_{inc_{x,k}} \cdot v^k \cdot IJ_k \right] \cdot 1_{\{x+k/12\} \leq 65}$$

Cette formule prend en compte le fait que l'assuré peut entrer en incapacité chaque mois de l'année. S'il tombe en incapacité, l'assureur pourra payer des prestations jusqu'à 36 mois maximum (selon la période de franchise). L'expression ci-dessus représente la somme des flux futurs probabilisés. Le paiement des indemnités cesse obligatoirement à l'âge de 65 ans.

#### **3.2.2. Calcul des engagements de l'assuré**

L'assuré s'engage, à l'instant initial, à verser une prime  $P_i$  périodique mensuelle pendant l'année  $i$ .

Le paiement des primes cesse soit lors du départ à la retraite de l'assuré, c'est-à-dire à ses 65 ans, soit avec le décès de celui-ci, soit en cas de résiliation.

Il est important de préciser que l'assuré doit payer cette prime même lorsqu'il se trouve en incapacité (absence de la garantie exonération de primes).

## Représentation graphique de l'engagement de l'assuré

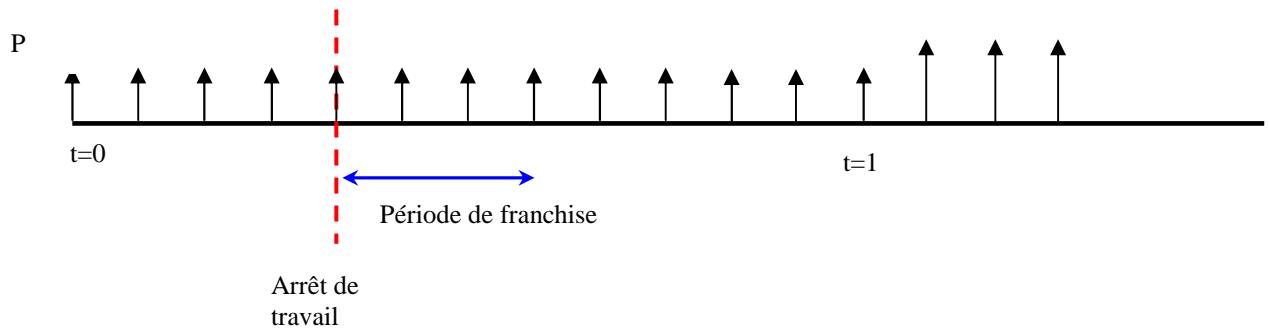


fig.5 :Schéma de l'engagement de l'assuré

## Calcul de la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur

La valeur actuelle probable de l'assuré  $VAP_{assuré}$  s'exprime de la façon suivante :

$$VAP_{assuré} = \left[ P_i \cdot \sum_{k=1}^{12} p_{x+k/12} \cdot v^{k/12} \right] \cdot 1_{\{x+k/12\} \leq 65}$$

Cette formule illustre le fait que l'assuré paie de façon périodique une prime (qui peut être revalorisée), et ce jusqu'à son décès ou jusqu'à l'âge de la retraite.



## Chapitre 4 : Détail du processus de projection

Ce chapitre décrit en détail le processus et les méthodes employés pour la projection du portefeuille.

Compte tenu de l'impossibilité d'aboutir à une formule fermée pour la modélisation de notre portefeuille, nous utilisons des techniques de simulations de manière directe sans optimisation par les méthodes de Monte Carlo.

D'autres solutions peuvent être envisagées, comme des processus de réduction de la variance.

L'ensemble des fonctionnels à estimer possédant une variance les estimateurs empiriques de type Monte Carlo fournissent des approximations convergentes du résultat exact.

Par ailleurs, les individus alimentant le modèle sont considérés comme indépendants les uns des autres. Ainsi, la loi des grands nombres et le théorème central limite s'appliquent.

De plus le processus de projection de la population a été effectuée de manière à optimiser le temps de traitement. En effet, le temps de traitement est une contrainte majeure dans ce type d'étude pour les compagnies d'assurance.

### Section 1 : Principe général

Ce paragraphe expose le principe général de la projection, c'est-à-dire les différentes étapes afin d'obtenir une projection de la population cohérente avec les hypothèses.

Plusieurs principes de projection ont été envisagés. Ces principes de projection sont exposés ci-dessous.

#### 1.1. Premier principe de projection

Le principe de projection, pour un individu, peut se représenter schématiquement de la manière suivante :

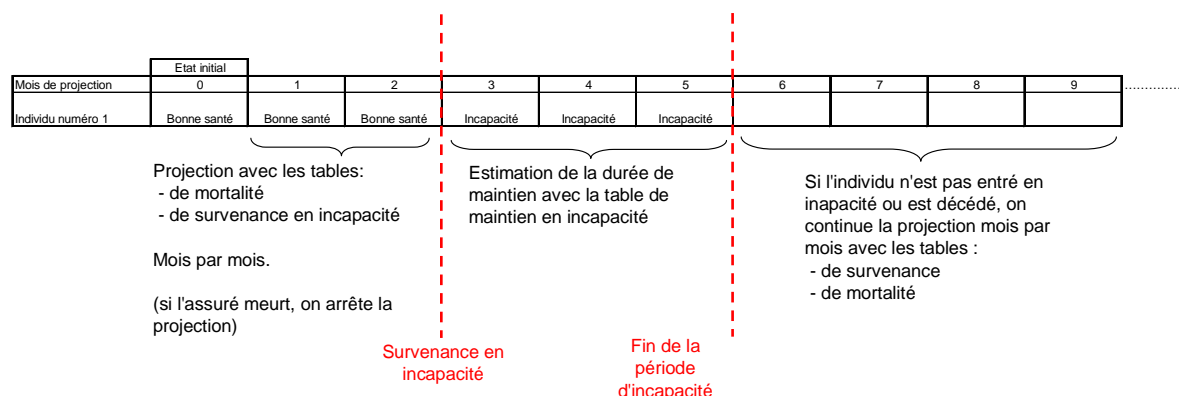


fig.6 :Premier principe de projection

La description ci-dessous implique que l'état initial de l'assuré soit « sain ».

- Dans un premier temps, on teste mois par mois si l'individu tombe en incapacité ou décède. Ce test s'effectue à l'aide des tables d'entrée en incapacité et de la table de mortalité. Ce test est réitéré jusqu'à ce que l'assuré décède ou entre en arrêt de travail.
- Quand l'individu se trouve en arrêt de travail (soit par accident, soit par maladie), on détermine sa durée de maintien à l'aide des tables de maintien en incapacité. Il est important de noter que les tables de maintien prennent en considération la mortalité. Il ne faut donc pas appliquer de table de mortalité sur cette période.
- A la fin de la période d'arrêt de travail, l'individu peut soit :
  - être en bonne santé, dans ce cas le processus se répète et on détermine sa probabilité de décès ou d'entrée en incapacité,
  - être décédé, dans ce cas, l'individu sort de l'étude
- l'assuré sort de l'étude dès que la période de projection excède ses 65 ans (âge de départ à la retraite)

Si l'assuré est initialement en incapacité, la durée déjà passée en arrêt est prise en compte dans la projection.

Les algorithmes utilisés décrivant le cheminement de l'individu dans différents états n'utilisent aucune fonction de nature à amplifier de manière pénalisante les erreurs d'échantillonnage (pas d'exponentiel dans les formules utilisées), le volume pour un degré de précision donné reste donc limité.

### **Remarque :**

Cette méthode de projection réalisée sous VBA s'avère très longue (environ 30 minutes pour un portefeuille de 1 000 assurés) car plusieurs calculs sont effectués à chaque pas de projection, et pour chaque assurés. A moins de disposer de la puissance informatique nécessaire, il n'est pas souhaitable d'utiliser ce processus de projection. De plus, l'objectif est de produire plusieurs trajectoires d'évolution de la population, ce qui n'est pas envisageable avec cette méthode.

## **1.2. Second principe de projection**

Afin de tenir compte du délai d'exécution du programme de projection, il a été nécessaire de développer un processus optimisé, sans pour autant perdre en précision de calcul.

Le principe de projection, pour un individu, peut se représenter schématiquement de la manière suivante :

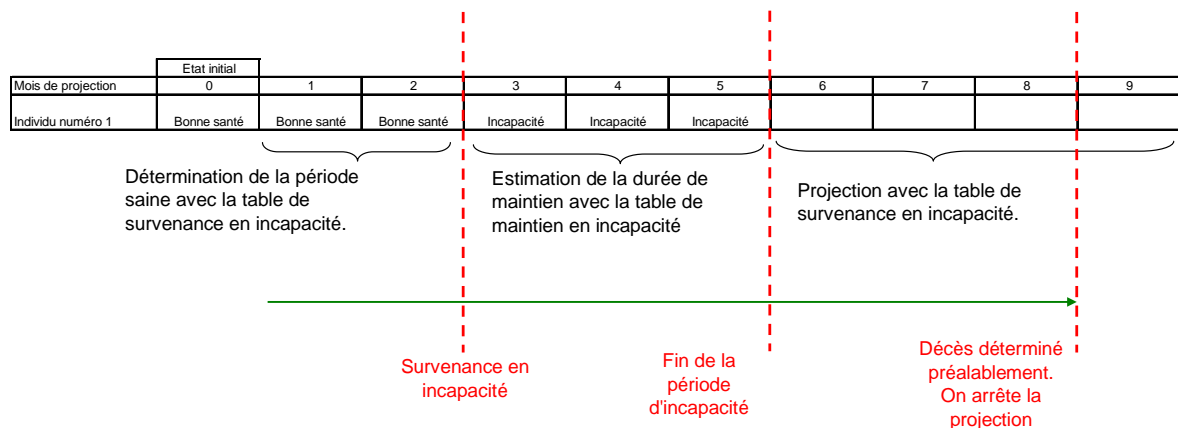


fig.7 : Second principe de projection

La description ci-dessous implique que l'état initial de l'assuré soit « sain ».

- Dans un premier temps, on estime la durée de vie de l'assuré.
- On estime ensuite la durée pendant laquelle il reste en bonne santé, à l'aide des tables de survie.
- A la fin de cette période (si elle est inférieure à sa durée de vie et arrive avant son départ à la retraite), l'assuré rentre en incapacité, on estime donc sa durée de maintien.
- L'assuré rentre en bonne santé, et le processus se répète.
- l'assuré sort de l'étude dès que la période de projection excède sa durée de vie ou ses 65 ans.

Cette procédure amène quelques points délicats à traiter :

- Si la date de décès de l'assuré tombe pendant une période d'incapacité, le décès est déclaré en fin de période d'incapacité (on confirme le fait que le décès est déjà compris dans les tables de maintien en incapacité).
- Toutes les périodes cumulées ne doivent pas dépasser les 65 ans de l'assuré.

### **Remarque :**

Cette méthode s'avère plus rapide que la première, car les calculs ne sont pas effectués mois par mois. Le temps de simulation est de 1 minute pour un portefeuille de 1 000 assurés. Ce temps reste relativement long pour une simulation sur 100 000 assurés.

### **1.3. Méthode retenue**

La méthode retenue pour la suite de l'étude est tout naturellement la seconde qui s'avère plus rapide. Mais nous nous restreignons à un portefeuille de 10 000 assurés respectant au mieux la répartition par âge et par sexe du portefeuille initial.

Contrôle de précision : Nous avons déterminé la taille de notre population de départ, reste à déterminer le nombre de simulations à appliquer. Nous utiliserons l'écart type comme mesure

de contrôle. Si l'écart type des projections est inférieur à 1 % de l'espérance alors nous validerons la précision de la projection. Sinon, le nombre de simulations devra être augmenté. Par la suite, nous verrons que 1 000 simulations suffisent pour chacune des projections effectuées.

## **Section 2 : Estimation de la durée de maintien**

Cette partie décrit le principe de détermination de la durée de maintien, à partir des tables de maintien en incapacité, pour un individu nouvellement entré en arrêt de travail.

### **Notations**

Soient :

- $l_{x,k}$  le nombre d'individus présents en incapacité de travail après  $k$  mois d'arrêt, d'après la table de maintien en incapacité, entrés à l'âge  $x$ .
- $p_{x,k}$  la probabilité de rester exactement  $k$  mois en incapacité pour un individus entré à l'âge  $x$ .
- $T_x$  la variable aléatoire représentant la durée de maintien en incapacité d'un individu d'âge  $x$ .

### **Principe**

Le principe est de déterminer la probabilité  $p_{x,k}$  de rester exactement  $k$  mois en incapacité, puis par méthode de découpage, d'affecter une période de maintien.

La méthode de découpage se fait à l'aide de la simulation d'une loi uniforme entre les bornes 0 et 1. L'intervalle  $[0;1]$  est découpé en  $n$  sous-intervalles de longueur  $p_{x,k}$ , pour  $k = 1, \dots, n$ .

### **Détermination des probabilités de maintien**

Un individu reste exactement  $k$  mois en incapacité si la durée de son incapacité  $T$  est strictement supérieure à  $k - 1$  et inférieure ou égale à  $k$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
p_{x,k} &= P(k-1 < T_x \leq k | T_x > 0) \\
&= \frac{P(k-1 < T_x \leq k, T_x > 0)}{P(T_x > 0)} \\
&= \frac{P(k-1 < T_x \leq k, T_x > k-1)}{P(T_x > 0)} \\
&= \frac{P(k-1 < T_x \leq k, |T_x > k-1) P(T_x > k-1)}{P(T_x > 0)} \\
&= P(k-1 < T_x \leq k, |T_x > k-1) \frac{P(T_x > k-1, T_x > 0)}{P(T_x > 0)} \\
&= P(k-1 < T_x \leq k, |T_x > k-1) P(T_x > k-1 | T_x > 0) \\
&= \frac{l_{k-1} - l_k}{l_{k-1}} \frac{l_{k-1}}{l_0} \\
&= \frac{l_{k-1} - l_k}{l_0}
\end{aligned}$$

### **Section 3 : Estimation de la durée de vie et de la durée de l'état sain**

La durée de vie et la durée de maintien dans l'état sain d'un individu sont estimées de la même manière que la durée de maintien en arrêt de travail, sur la base respectivement de la table de mortalité et de la table d'entrée en incapacité.

#### **Notations**

Soient :

- $l_k$  le nombre d'individus en vie (respectivement en bonne santé) à l'âge  $k$ , d'après la table de mortalité (respectivement la table d'entrée en incapacité) utilisée.
- $p_k$  la probabilité de rester exactement  $k$  année en vie (respectivement en bonne santé).
- $T$  la variable aléatoire représentant la durée de vie d'un individu (respectivement la durée de maintien dans l'état sain).

#### **Principe**

Le principe de détermination de la durée de vie (respectivement la durée de maintien dans l'état sain) est le même que celui de la détermination de la durée de maintien en incapacité. Il s'agit d'une méthode de découpage.

### **Détermination des probabilités vie (respectivement des probabilités de maintien dans l'état sain)**

Un individu reste en vie (respectivement reste en bonne santé) exactement  $k$  années si sa durée de vie (respectivement la durée de maintien dans l'état sain)  $T$  est strictement supérieure à  $k - 1$  et inférieure ou égale à  $k$ . Ainsi :

$$p_k = \frac{l_{k-1} - l_k}{l_0}$$

Cette méthode de détermination induit qu'un individu meurt (respectivement entre en incapacité) à la date d'anniversaire, ce qui n'est pas restrictif pour la suite de l'étude.

Ainsi nous projetons notre portefeuille de 10 000 assurés jusqu'à la sortie totale de chaque assuré.

La partie suivante présente les résultats de cette application.

# **PARTIE 3 :**

## **APPLICATIONS A UN PORTEFEUILLE ASSURE**

# Chapitre 1 : Présentation du portefeuille

---

Ce chapitre a pour objectif de présenter le portefeuille de données et le portefeuille projeté.

## Section 1 : Portefeuille d'assurés

Cette section présente quelques statistiques sur le portefeuille d'assurés considéré. Ce descriptif est nécessaire pour le déroulement de la projection. En effet, le processus de projection s'avère long, malgré les points d'optimisation apportés (1 minute pour 1000 assurés). Le portefeuille, après retraitements, est composé de plus de 150 000 assurés. Une projection sur la totalité du portefeuille n'est donc pas envisageable. Plusieurs approches ont été envisagées.

### Première approche

Cette approche consiste à travailler sur un portefeuille agrégé. Les contrats présentant les mêmes caractéristiques d'âge, d'ancienneté, de garantie, etc. seraient regroupés afin d'optimiser le temps de traitement informatique. Cette hypothèse est très forte, car nous supposons que les assurés présentant les mêmes caractéristiques tombent en incapacité en même temps et pour une même durée.

Afin de tester cette approche, nous effectuons deux simulations : nous projetons la population du portefeuille initial, et la population du portefeuille agrégé.

Les résultats en termes de provisions mathématiques, sur 1000 simulations, sont très comparables, ce qui signifie que cette approche peut être envisagée. Néanmoins, il semble que l'hypothèse d'agrégation ait un impact non négligeable sur la volatilité du modèle.

Pour exemple, étudions la volatilité due aux décès. Prenons un exemple basé sur les hypothèses suivantes :

- Le portefeuille étudié est composé de 1000 contrats de caractéristiques identiques.
- Le seul risque est le décès.
- La probabilité de décès est de  $p = 5\%$  pour tous les assurés en portefeuille.

D'après le principe de projection établi dans la partie II, le processus de décès peut être représenté par le schéma de Bernoulli suivant :

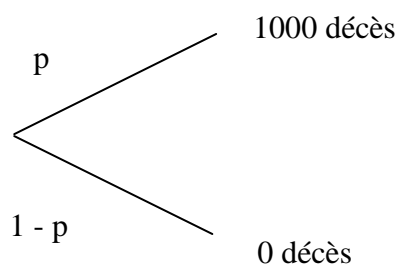


fig.8 : Schéma de Bernoulli des données agrégées



L'espérance de ce processus est de  $1000 \times p = 50$ .

La variance de ce processus est de  $1000^2 \times p - 1000 \times p = 47500$ .

Dans le cas des données non agrégées, le processus est représenté par le schéma suivant :

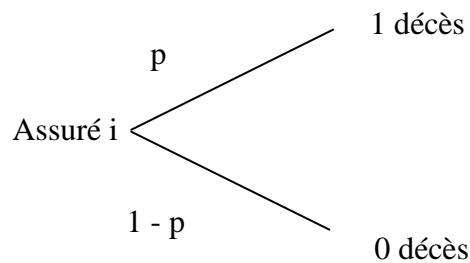


fig.9 : Schéma de Bernoulli des données non agrégées

Ceci est valable pour chaque assuré *i* du portefeuille.

L'espérance de ce processus est de  $1000 \times p = 50$ .

La variance de ce processus est de  $1000 \times (p \times 1^2 - p^2) = 47,5$ .

Par les deux méthodes, nous obtenons la même espérance, mais la variance du modèle est inversement proportionnelle à la taille de la population.

## Deuxième approche

La deuxième approche se base sur la projection d'un portefeuille fictif. Néanmoins, pour rester le plus fidèle possible au portefeuille de départ, le portefeuille devra satisfaire les points suivants :

- suivre la pyramide des âges (en proportion) du portefeuille de départ.
- les assurés présents dans le portefeuille projeté devront directement être issus du portefeuille de départ.

## Pyramide des âges du portefeuille de départ

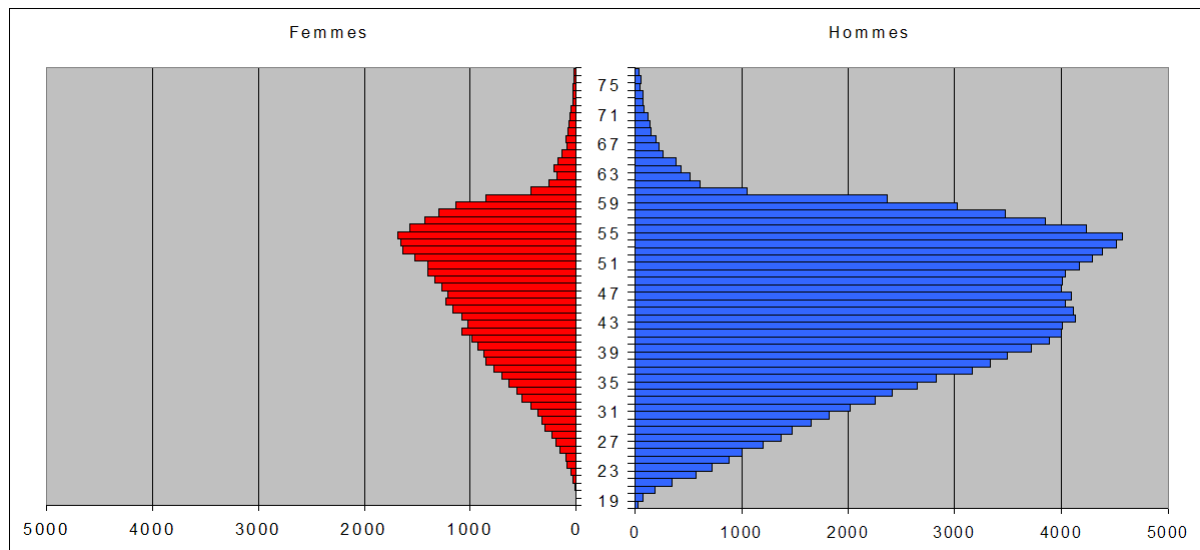


fig.10 : Pyramide des âges du portefeuille de départ en nombre de personnes

Une disproportion entre hommes et femmes est mise en évidence (77 % d'hommes contre 23 % de femmes). La tranche d'âge la plus représentée est la tranche 55-60 ans.

## Section 2 : Portefeuille projeté

Pour obtenir des résultats cohérents avec le portefeuille de départ, et pour que la divergence de projection soit moindre, la population du portefeuille projeté devra suivre en proportion la pyramide des âges du portefeuille de départ.

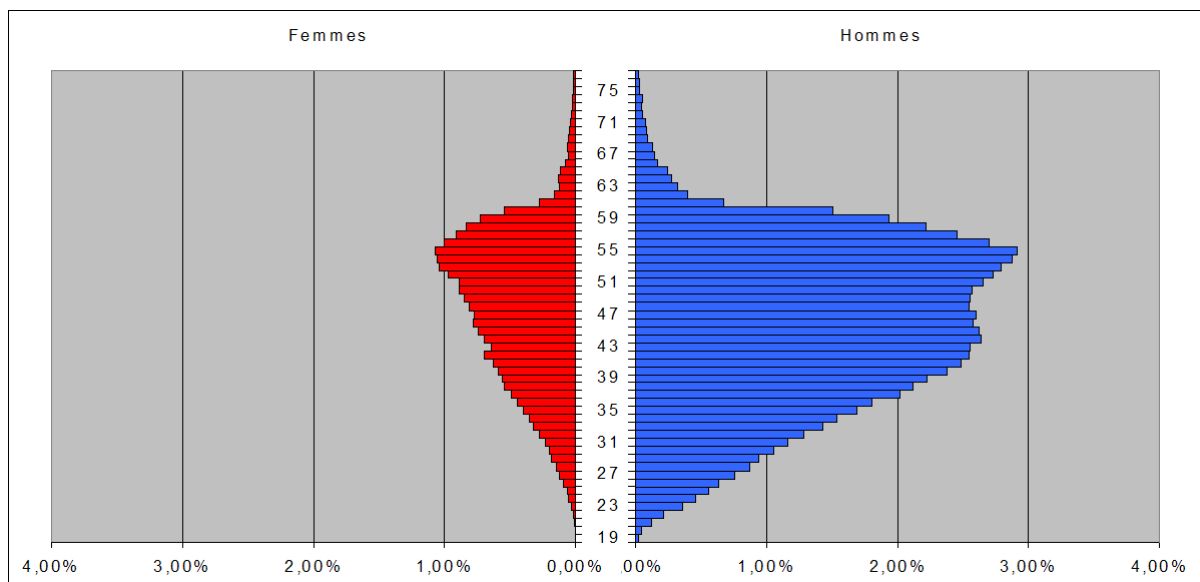


fig.11 : Pyramide des âges du portefeuille de départ en pourcentage

La taille du portefeuille projeté a été fixée à 10 000 personnes, compte tenu du temps de projection.

Cette approche présente néanmoins quelques inconvénients, notamment seule une partie du portefeuille est projetée. Mais la qualité des résultats équivaut à la première méthode (selon le même portefeuille test) sans dénaturer la variance.

## **Chapitre 2 : Construction des tables d'expérience**

---

Ce chapitre décrit les bases de données utilisées pour mener la construction des tables de survenance et de maintien en incapacité temporaire, ainsi que le portefeuille assuré. L'exploitation de ces données s'est faite sous le logiciel SAS.

Les tables de survenance et de maintien en incapacité temporaire ont été produites à partir des mêmes bases. La base utilisée concerne les dossiers ayant fait l'objet d'un mouvement quel qu'il soit (ouverture, versement de prestations, modification de provision, clôture...) entre le 01/01/2006 et le 31/12/2006.

Il y a initialement 303 366 observations.

Pour la construction des ces tables, nous avons besoin des variables décrites ci-dessous :

- Pour les tables de survenance :
  - La date de naissance de l'assuré, afin de déterminer son âge calculé en millésime.
  - La date d'entrée en observation.
  - La date de fin d'observation.
  - La date éventuelle de survenance d'un sinistre (accident ou maladie).
  
- Pour les tables de maintien en incapacité temporaire :
  - La date de naissance de l'assuré, afin de déterminer son âge.
  - La date d'entrée en observation.
  - La date de fin d'observation.
  - La date d'entrée en incapacité.
  - La date de sortie de l'état d'incapacité.

### **Section 1 : Construction des tables de survenance en incapacité**

#### **1.1. Construction de tables d'expérience**

##### **1.1.1. Sélection des données**

Dans le cadre de la construction des tables d'expérience de survenance en incapacité, un certain nombre d'informations a été collecté via des tables de données. Ces informations sont stockées dans des bases de données qui font l'objet d'un traitement pour les homogénéiser et les mettre en forme pour les travaux de construction.

La sélection des données s'est également faite sur la base de codes internes de repérages informatique, propre à chaque compagnie d'assurance. D'un point de vue technique, les

garanties mises en jeu sont repérées selon un code GN (Garantie Normalisées) ; ces codes sont croisés avec les codes des sous-catégories de réassurance (SCReass) pour sélectionner les sinistres réellement concernés par le provisionnement par les tables certifiées.

L'information reçue des Caisses Régionales a dû être retraitée afin de la rendre cohérente avec la construction des tables. Tous les travaux de cohérence et de nettoyage ont été effectués avec le logiciel SAS.

### **Nature des données**

Ce sont les dossiers d'arrêts observés durant la période 2000-2006 avec une description des périodes d'incapacité (nombre de jours indemnisés, montants des indemnités, date de survenance du sinistre). La description des périodes d'incapacité servira essentiellement à la construction des tables de maintien. Dans cette partie, seules les dates de survenance sont vraiment pertinentes.

### **Données de la base**

Le fichier de donnée contient 303 366 observations.

Voici la liste des variables utilisées dans les opérations de traitement des données :

- Numéro de souscripteur
- Numéro de personne
- Première partie du code GN
- Sexe du sinistré
- Situation de la GN sinistrée
- Numéro de caisse régionale
- Catégorie socioprofessionnelle du souscripteur
- Catégorie socioprofessionnelle du sinistré
- Seconde partie du code GN
- Nature du sinistre
- Nom du contrat
- Date de survenance du sinistre
- Année de survenance du sinistre
- Date du premier jour indemnisé en arrêt de travail
- Date de début de l'arrêt de travail
- Date du dernier jour indemnisé en arrêt de travail
- Date de fin de l'arrêt de travail
- Date de naissance du sinistré
- Indemnité journalière
- Montant d'indemnités cumulées
- Numéro de sinistre
- Franchise
- Durée de l'arrêt de travail
- Age de l'assuré au premier jour de l'arrêt de travail

## Travaux sur les données

Les traitements suivants ont été mis en place pour rendre la base de données cohérente avec la construction des tables de survie en incapacité.

- suppression des codes « garantie normalisée » n'entrant pas dans le périmètre de l'étude.
- suppression des codes « garantie tarifée » et des codes de sous catégories de réassurance hors périmètre.
- suppression des observations dont la date de naissance n'est pas renseignée.
- suppression des observations dont la date de naissance est incohérente.

### 1.1.2. Construction des tables de survie

La période d'observation retenue s'étale du 01/01/2000 au 31/12/2006.

Deux tables distinctes ont été construites : une pour la survie accident, et l'autre pour la survie maladie.

La méthode utilisée pour la construction est celle de Kaplan Meier exposée en partie II.

## Résultats et observations de la courbe générale

Voici les taux bruts d'entrée en incapacité représentés graphiquement :

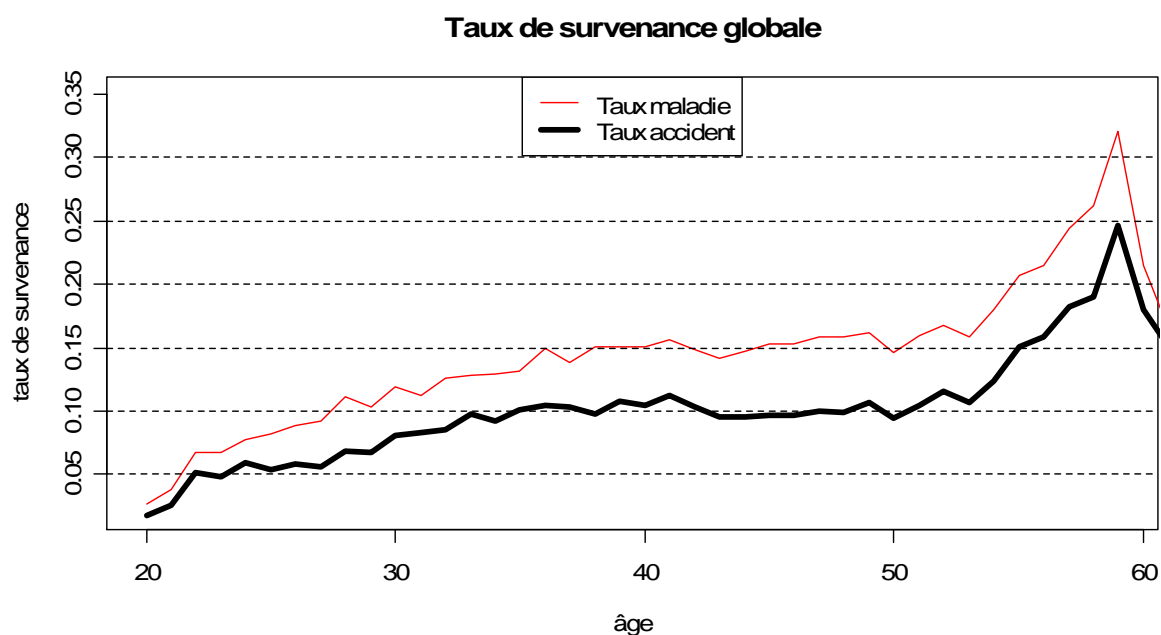


fig.12 : Impact sur le taux de survie

A la vue de ces résultats, quelques observations peuvent être faites :

- le taux d'entrée en incapacité par maladie ne cesse d'augmenter avec l'âge de l'assuré. Sur le graphe, on voit que les courbes décroissent avant les 60 ans ; mais ce phénomène est dû à la faible quantité de données à partir de cette tranche d'âge.
- les deux taux croissent plus rapidement à partir de 50 ans.

L'anomalie sur les données des assurés ayant plus de soixante ans est un biais dans le calcul des provisions. Une possibilité serait de linéariser le taux de survie sur les dernières tranches d'âges. Cependant le but de cette étude est de comparer différentes projections. Ce phénomène n'est donc pas gênant pour la suite de ce mémoire.

### Résultats et observations de la courbe par sexe

Il est justifié de penser que le comportement des hommes et des femmes est différent face à l'entrée en incapacité par maladie et par accident. Aussi, pour une projection plus précise de la population assurée, une construction des tables de survie par sexe est nécessaire. Ci-dessous les résultats sous forme graphique :

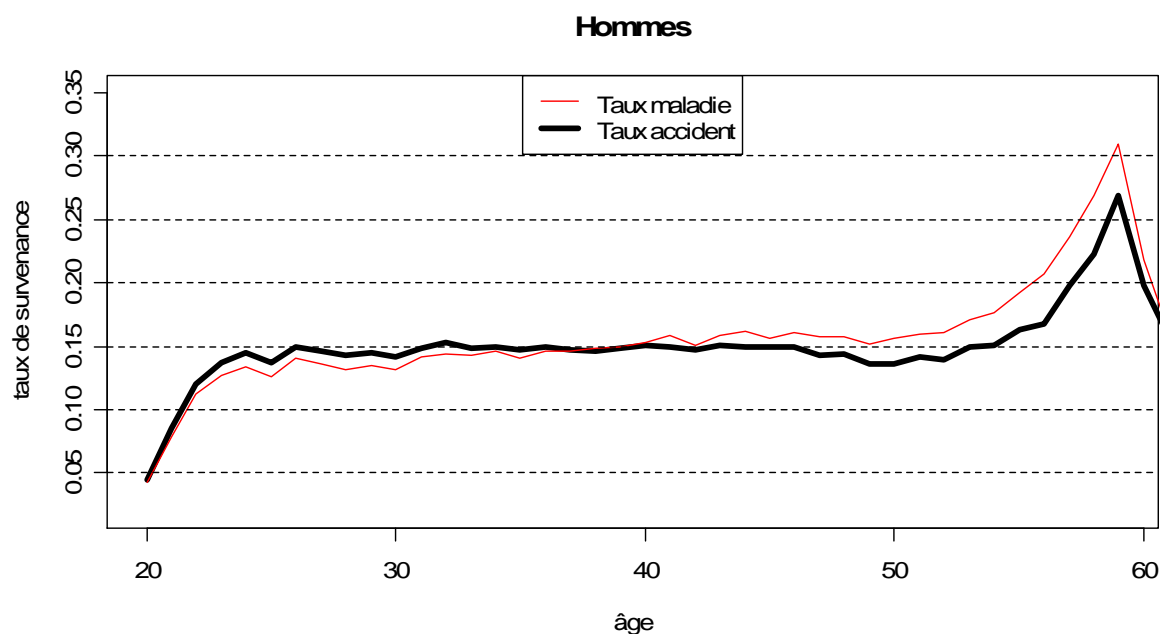


fig.13 : Taux bruts de survie accident et maladie des hommes

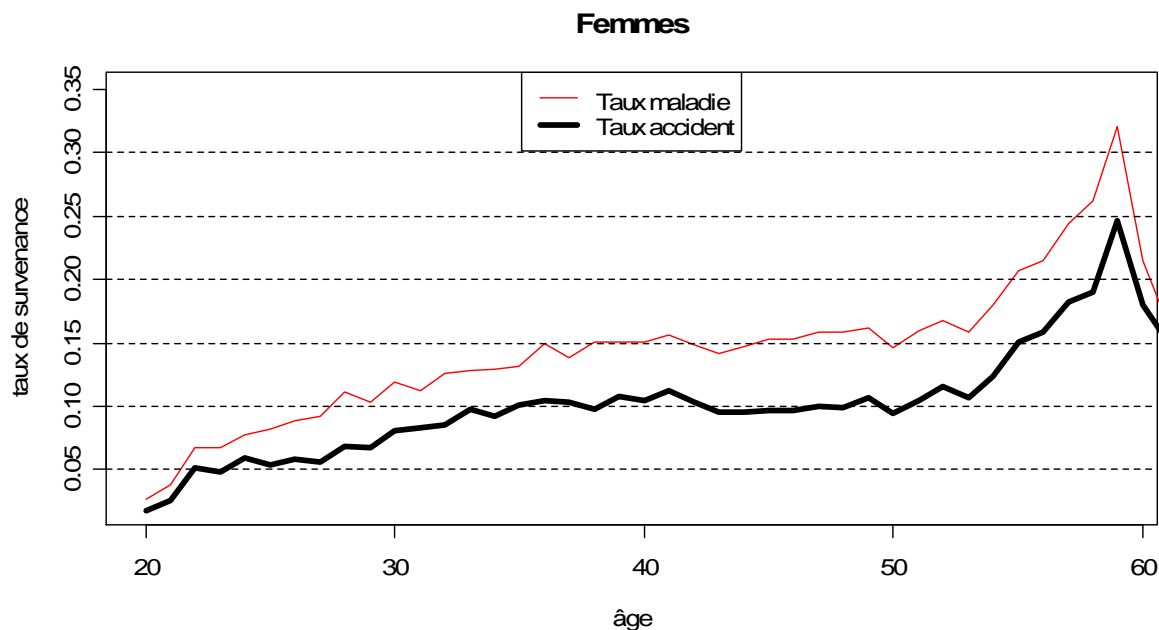


fig.14 : Taux bruts de survenance accident et maladie des femmes

### **Interprétation et commentaires**

Pour les hommes et les femmes, de manière générale, l'âge est un facteur aggravant pour l'entrée en incapacité. Chez les femmes, le taux d'entrée en incapacité par accident est bien en dessous du taux de survenance par maladie (environ 5 points d'écart quelque soit l'âge). La courbe de survenance par accident des femmes est bien en dessous de celle des hommes. Ceci peut s'expliquer par une différence d'exposition aux risques physiques.

#### **1.1.3. Lissage des tables de survenance**

Un retraitement des données brutes est nécessaire afin d'éliminer certaines irrégularités qui ne reflètent pas le phénomène que l'on cherche à mesurer, et obtenir une représentation plus fidèle de la loi estimée. La méthode choisie pour le lissage des lois de survenance est celle de Whittaker-Henderson. Les résultats de ce lissage sont présentés en annexe de ce mémoire.

### **1.2. Utilisation de données publiques**

Il n'existe pas de table réglementaire d'entrée en incapacité, mais quelques rares études sont disponibles au grand public.

La table de survenance exploitée dans ce chapitre se base sur une étude de la DREES (Direction de la Recherche des Etudes de l'Evaluation et des statistiques), qui concerne les interruptions de l'activité pour raison de santé au cours de la vie professionnelle.

Cette étude a été réalisée sur plus de 35 000 français, interrogés sur leur état de santé entre octobre 2002 et septembre 2003. L'objectif de cette enquête était triple :



- relever la morbidité individuelle déclarée.
- évaluer l'état de santé de la population.
- expliciter les relations entre la santé, la consommation et les caractéristiques sociodémographiques des personnes interrogées.

Il s'agissait d'une étude rétrospective permettant de quantifier les interruptions de travail à travers deux principales questions:

- nombre de mois en inactivité durant la vie professionnelle.
- cause des inactivités (chômage, arrêt de moins de 6 mois pour raison de santé, arrêt de plus de 6 mois pour raison de santé, autre...).

Cette étude se focalise sur les interruptions d'activité d'au moins quatre semaines consécutives et pour raison de santé. Les arrêts de travail pour cause d'accident ne sont donc pas traités. Elle porte sur une population âgée de 15 ans et plus, en activité ou ayant déjà exercé une activité professionnelle, et ayant interrompu cette même activité pour des raisons de santé.

### **1.2.1. Les principaux résultats de l'étude**

Ces informations offrent une vision plus large que les autres études sur les arrêts de travail, qui ne s'intéressent principalement qu'aux salariés actuellement en emploi. Voici les résultats de cette étude :

- plus de 6 % des actifs ou anciens actifs déclarent avoir cessé leur activité pendant plus de six mois pour une raison de santé.
- les jeunes femmes déclarent plus souvent que les hommes avoir eu des arrêts maladie de longue durée.
- davantage d'arrêts de travail de longue durée pour les actifs de l'industrie et du bâtiment.
- des arrêts de travail pour raison de santé plus fréquents chez les ouvriers que chez les cadres.
- davantage d'arrêts d'activité prolongés chez les ouvriers et les employés.
- les personnes ayant cessé leurs activités durablement déclarent davantage de maladies chroniques et sont davantage limitées dans leurs activités quotidiennes.

### **1.2.2. Probabilité de cesser son activité pour raisons de santé**

L'étude de la DREES aboutie à la construction du tableau ci-dessous.

Deux modèles ont été construits, un pour les arrêts inférieurs à 6 mois, et l'autre pour les arrêts supérieurs à 6 mois.

	Modèle 1		Modèle 2
	Hommes	Femmes	Ensemble
Probabilité de la situation de référence	6,5 %	9,9 %	2,6 %
<b>Ecart de probabilité relativement à la situation de référence</b>			
Age			
15 - 24 ans (vs 25 - 44 ans)	-4,4	-4,5	-1,9
45 - 64 ans (vs 25 - 44 ans)	2,3	2,2	1,3
65 ans et plus (vs 25 - 44 ans)	ns	-3,1	ns
Niveau d'instruction			
Moins que le Bac (vs plus que le Bac)	1,8	ns	ns
Bac seulement (vs plus que le Bac)	ns	ns	ns
Etat de santé déclaré			
très bon (vs bon)	-3	-3,9	-1,3
moyen (vs bon)	5,5	9,8	4,6
mauvais ou très mauvais (vs bon)	10,8	22,2	10,9
Age au premier emploi			
moins de 16 ans (vs 20 ans et plus)	2,8	2,9	1,1
17 - 19 ans (vs 20 ans et plus)	ns	2,1	0,7
Catégories socioprofessionnelles			
Agriculteurs (vs cadres)	-2,6	-4,4	ns
Indépendants (vs cadres)	ns	-3,9	ns
Professions intermédiaires (vs cadres)	1,7	ns	1,2
Employés (vs cadres)	2,1	ns	1,5
Ouvriers (vs cadres)	2,6	ns	1,6
Sexe			
Femme (vs homme)	-	-	-0,5

La lecture de ce tableau se fait de la manière suivante :

### Pour le modèle 1

La probabilité qu'un cadre âgé de 25 à 44 ans ayant débuté dans le monde professionnel après 20 ans, titulaire d'un diplôme supérieur et s'estimant en bonne santé, interrompe son activité professionnelle au moins un mois pour raison de santé est égale à 6,5 %.

Prenons le même individu mais jugeant son état de santé mauvais ou très mauvais, la probabilité qu'il interrompe son activité sera de 17,3 % (6,5 % + 10,8 %).

### Pour le modèle 2

La probabilité qu'un cadre âgé de 25 à 44 ans ayant débuté dans le monde professionnel après 20 ans, titulaire d'un diplôme supérieur et s'estimant en bonne santé, interrompe son activité professionnelle pendant plus de 6 mois pour raison de santé est égale à 2,6 %.

En considérant un individu qui ne se différencie du précédent que par son état de santé qu'il juge mauvais ou très mauvais, la probabilité qu'il interrompe son activité pendant plus de 6 mois sera de 13,5 % (2,6 % + 10,9 %).

Si un individu se différencie sur plusieurs critères, les probabilités ne sont pas additionnables entre elles.

## **Section 2 : Construction des tables de maintien en incapacité**

### **2.1. Les données**

#### **2.1.1. Sélection des données**

La base utilisée pour la construction des tables de maintien en incapacité est la même que celle utilisée pour la construction des tables de survenance. Cette partie s'appuie sur une étude passée du portefeuille d'assurés.

#### **2.1.2. Nature des données**

La nature des données reste la même, c'est-à-dire qu'il s'agit des dossiers d'arrêts observés durant la période 2000-2006 avec une description des périodes d'incapacités (nombre de jours indemnisés, montants des indemnités, dates de survenance du sinistre).

#### **2.1.3. Données de la base**

Voici la liste des variables utilisées dans les opérations de traitement des données :

<b>Description</b>	<b>valeur minimale</b>	<b>valeur maximale</b>
date de survenance du sinistre	01/01/2000	28/12/2006
date du premier jour indemnisé en arrêt de travail	07/01/2000	29/12/2006
date de début de l'arrêt de travail	01/01/2000	27/12/2006
date de fin de l'arrêt de travail	08/01/2000	28/02/2004
date de naissance du sinistré	05/01/1947	04/06/2006

#### **2.1.4. Travaux sur les données**

Les traitements suivants ont été mis en place pour rendre la base de données cohérente avec la construction des tables de maintien en incapacité.

- suppression des codes « garantie normalisée » n'entrant pas dans le périmètre de l'étude.
- suppression des codes « garantie tarifée » et des codes de sous catégories de réassurance hors périmètre.
- suppression des observations dont la date de naissance n'est pas renseignée.
- suppression des observations dont la date de naissance est incohérente.
- suppression des observations dont la date de premier jour de sinistre est antérieure à la date de survenance du sinistre.
- suppression des observations dont le montant des indemnités journalières moyenne dépasse 200 €.
- suppression des observations non indemnisées. Les observations dont le premier jour potentiel d'indemnisation (date de survenance + franchise) est antérieur à la

- date de fin d'observation mais dont la durée d'indemnisation et le montant d'indemnité journalière moyens sont nuls.
- suppression des observations dont la date de début d'indemnisation ou dont la durée de franchise n'est pas renseignée.
  - suppression des observations dont la durée indemnisée n'est pas connue.
  - suppression des doublons.
  - suppression des observations totalement censurées. Les observations présentant une date de sortie par censure identique à la date d'entrée en incapacité de travail sont supprimées du périmètre de l'étude.

## **2.2. Méthode de calcul des taux bruts**

Cette partie a pour objectif de décrire les méthodes de calcul retenues pour l'élaboration des lois de maintien en incapacité, basé sur les données précédemment épurées.

### **2.2.1. Méthode de calcul retenue**

La méthode de calcul des taux bruts retenue est la méthode de Kaplan Meier exposée dans la deuxième partie de ce mémoire. Cette méthode a été choisie en raison de la présence de censures. La méthode de Kaplan Meier permet d'obtenir un estimateur  $\hat{S}_{KM}$  de la fonction de survie. De cet estimateur est déduit un estimateur des taux de sortie par âge et ancienneté suivant :

$$\hat{q}_{x,t} = \frac{\hat{S}_{KM}(x,t) - \hat{S}_{KM}(x,t+1)}{\hat{S}_{KM}(x,t)}$$

Où  $\hat{q}_{x,t}$  représente l'estimateur du taux de sortie après  $t$  mois pour un assuré entré en incapacité à l'âge  $x$ .

$\hat{S}_{KM}(x,t)$  représente l'estimateur de la fonction de survie (ici la fonction de survie mesure la probabilité de rester dans l'état incapable) calculé selon la méthode de Kaplan Meier.

Les données de la base permettent d'effectuer un calcul de la fonction de survie par âge et par jour d'ancienneté. Les taux de sortie par âge et jour d'ancienneté sont déduits de la fonction de survie en appliquant un pas mensuel.

### **2.2.2. Regroupement d'âge**

Dans le but de lisser l'effet âge, la construction des tables de maintien s'est effectuée par « tranche d'âge ». Ceci a pour conséquence d'augmenter la taille de l'échantillon pour un âge considéré en comptabilisant un même individu dans plusieurs tranches d'âges. Ainsi chaque classe d'âge comptabilise une durée de 5 ans. Plus précisément, la classe d'âge  $x$  comprend tous les assurés d'âge  $x-2$  à  $x+2$ .

$$\text{Classe}_{-} \hat{age}_x = Age_{x-2} + Age_{x-1} + Age_x + Age_{x+1} + Age_{x+2}$$

### 2.2.3. Les périodes de franchise

La présence de franchise induit une troncature des observations à gauche avant la franchise : il n'y a pas de sinistres dont la durée est inférieure à la franchise.

Les sorties de l'état d'incapacité (et non pas par censure) sont prises en compte avant les troncatures gauches. Cette hypothèse se justifie par le fait que la probabilité d'un individu sorte de l'état d'incapacité le jour même de la fin de la période de franchise est très faible. Ainsi, un individu présentant une période de franchise de  $N$  jours est considéré comme faisant partie de l'effectif sous risque le  $(N + 1)^{ième}$  jour.

Le nombre de contrats présentant une période de franchise nulle est très élevé. Ceci s'explique par de nombreux gestes commerciaux.

### 2.2.4. Les sinistres non clos

Les données sont basées sur les dossiers d'arrêts de la période de 2000 à 2004. Les sinistres non clos au 31/12/2006 ne sont pas dans leur intégralité. Ils sont considérés comme censurés à droite. On fait l'hypothèse que les sorties sont prises en compte avant les censures droites. Par conséquent, l'effectif sous risque pour le calcul du taux de sortie à l'instant  $t$  tient compte uniquement des censures intervenues avant l'instant  $t$ , ce qui permet d'augmenter l'effectif sous risque et de fournir des taux de sortie prudents.

## 2.3. Méthode de lissage

Les valeurs des taux bruts obtenus présentent certaines irrégularités liées à l'imperfection des données et des conditions d'expérience. Afin de représenter de manière plus fidèle la loi que nous voulons estimer, nous procédons à un lissage.

### 2.3.1. Méthode de lissage retenue

La méthode retenue pour le lissage des lois de maintien en incapacité est celle de Whittaker-Henderson. Cette méthode est très répandue en dimension un. Elle permet de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité, et de rechercher les valeurs qui minimisent une combinaison linéaire de ces deux critères.

Mais la méthode en dimension un ne permet pas de capter les relations de dépendance entre les deux composantes (âge et ancienneté) des taux de sortie. Ainsi, la méthode utilisée pour le lissage des tables de maintien est celle de Whittaker-Henderson en dimension deux.

Il s'agit dans ce cas de minimiser un critère de fidélité combiné vertical associé à un critère de régularité vertical et un critère de régularité horizontale.

### 2.3.2. Critère de fidélité et de régularité

Le critère de fidélité est de la forme :

$$F = \sum_{i=21}^{65} \sum_{j=0}^{35} w_{ij} \left( p_{ij} - \hat{p}_{ij} \right)^2$$

Les  $w_{ij}$  correspondent aux poids attribués au barème de provisionnement pour l'assuré d'âge  $i$  et d'ancienneté  $j$

Le critère de régularité horizontal (respectivement vertical) est défini par la fonction  $S_h$  (respectivement  $S_v$ ) :

$$S_h = \sum_{j=1}^{65} \sum_{i=0}^{35-z} (\Delta_h^{z_h} p_{ij})^2$$

$$S_v = \sum_{j=0}^{35} \sum_{i=21}^{65-z} (\Delta_v^{z_v} p_{ij})^2$$

Où  $z_h$  représente le degré de lissage horizontal et  $z_v$  le degré de lissage vertical.

L'algorithme de Whittaker-Henderson a pour but de minimiser la valeur :

$$M = F + \alpha \times S_v + \beta \times S_h$$

Le poids de chacun des trois termes étant contrôlé par les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

### 2.3.3. Construction des coefficients de provisionnement

Les tables de provisionnement (construites à partir des tables de maintien) donnent pour chaque âge de survénance et par ancienneté le montant de provision associé à une prestation mensuelle de 1€.

Le montant de la provision à constituer pour un assuré âgé de  $x$  ans et pour une durée d'arrêt indemnisée  $anc$  est donné par l'expression suivante (pour une durée maximale de versement de 36 mois) :

$$P(x, anc) = \frac{1}{2} \sum_{k=anc}^{35} \left[ \frac{l_k^x}{l_{anc}^x} v^{(k-anc)} + \frac{l_{k+1}^x}{l_{anc}^x} v^{(k+1-anc)} \right]$$

Avec :

- $anc \leq 35$
- $v = \frac{1}{1+i}$ ,  $i$  étant le taux d'actualisation mensuel.

Le lissage est effectué sur la table de provisionnement construite sur la base d'un taux technique de 0 %.

### 2.3.4. Construction des lois de maintien

Les lois de maintien émanent des tables de provisionnement lissées par la relation suivante :

$$l_{anc+1}^x = l_{anc}^x \frac{P(x, anc) - \frac{1}{2}}{P(x, anc + 1) + \frac{1}{2}} \quad \forall anc \leq 35$$

avec  $P(x, 36) = 0$ .

### 2.3.5. Calibrage des paramètres

Cette partie a pour but de calibrer les paramètres du processus de Whittaker-Henderson exposé plus haut par des tests d'impact sur les provisions mathématiques.

#### Garantie accident

Deux tests ont été effectués pour les paramètres de lissage  $z_h$  et  $z_v$  avec les valeurs 2 et 3.

Il s'agit de tester la valeur des provisions mathématiques par rapport à celles obtenues avec les taux bruts. L'objectif est de déterminer les valeurs des paramètres qui amènent des provisions proches de celles obtenues avec les taux bruts, tout en restant suffisamment prudent.

Ces tests ont révélé que le fait d'appliquer un lissage d'ordre 3 sur les âges et les anciennetés entraîne une sous estimation des paramètres de provisionnement par rapport aux taux bruts, quelque soit les poids affectés à ces deux paramètres. Cette sous estimation peut être amoindrie en favorisant le critère de fidélité par rapport aux deux critères de régularité. Cependant le lissage obtenu n'est pas très satisfaisant.

Ces tests révèlent également qu'un lissage d'ordre 2 sur les âges et les anciennetés conduit à un barème de provisionnement suffisamment prudent par rapport aux taux bruts.

Un lissage horizontal et vertical d'ordre 2 a donc été retenu pour la suite de cette étude. Les poids attribués au critère de régularité horizontal et vertical ont été déterminés de façon à obtenir une surface de taux de provisionnement suffisamment fine. Plus les poids attribués au critère de régularité sont élevés, plus la surface de provisionnement obtenue est lisse et présente des valeurs élevées.

Les poids à affecter aux critères de régularités ont été déterminés en comparant le montant de provision à passer au 31 décembre 2005 calculé d'une part avec la table brute et d'autre part avec la table lissée.

Les dossiers permettant de calculer le montant de provisions correspondent aux dossiers déjà entrés en état d'incapacité et non clos au 1<sup>er</sup> janvier 2006. Au total 3 028 dossiers

correspondent à ce critère. La provision est estimée pour un montant d'indemnité mensuelle de 1 €.

De manière synthétique les tests effectués sur les différents poids conduisent aux résultats suivants :

Poids du lissage vertical	Poids du lissage horizontal	Provision taux brut	Provision taux lissé	Ecart
0,05	0,05	13 133	13 168	0,3 %
0,15	0,15	13 133	13 245	0,9 %
0,25	0,25	13 133	13 306	1,3 %
0,75	0,25	13 133	13 308	1,3 %
0,45	0,45	13 133	13 401	2,0 %
0,50	0,50	13 133	13 424	2,2 %
1,00	1,00	13 133	13 595	3,5 %

Les couples (0,45 ; 0,45), (0,5 ; 0,5) et (1 ; 1) sont ainsi retenus.

Un test de Student, figurant en annexe, est effectué sur ces trois couples. Il s'agit d'un test sur les valeurs de provision. Le but de ce test est de comparer le montant moyen de la provision issu des tables lissées à celui obtenu avec les tables brutes. Le test de Student conduit à rejeter les couples (0,5 ; 0,5) et (1 ; 1) et donc à retenir le couple (0,45 ; 0,45).

### Garantie maladie

Les tests effectués sont semblables à ceux effectués pour la garantie accident. Il s'agit également de tester la valeur des provisions mathématiques par rapport à celles obtenues avec les taux bruts. L'objectif est de déterminer les valeurs des paramètres qui amènent des provisions proches de celles obtenues avec les taux bruts, tout en restant suffisamment prudent.

Les tests de comparaison des provisions (identiques à ceux présentés ci-dessus) ont révélé que le fait d'appliquer un lissage horizontal et vertical d'ordre 3 entraîne une sous-estimation des barèmes de provisionnement, et qu'un lissage horizontal et vertical d'ordre 2 les surestime. Il est toutefois nécessaire de pondérer faiblement les coefficients afin d'obtenir des barèmes suffisamment fins.

Ordre horizontal	Ordre vertical	Poids du lissage vertical	Poids du lissage horizontal	Provision taux brut	Provision taux lissé	Ecart
3	3	0,05	0,05	20 879	20 868	-0,1 %
3	3	0,25	0,25	20 879	20 853	-0,1 %
3	3	0,50	0,50	20 879	20 846	-0,2 %
2	2	0,05	0,05	20 879	21 014	0,6 %
2	2	0,10	0,10	20 879	20 893	0,1 %
2	2	0,25	0,25	20 879	20 945	0,3 %



Le lissage retenu correspond à un lissage horizontal et vertical d'ordre 2 pondéré par 0,05. Le test de Student appliqué sur ces résultats présente une valeur de 0,30.

## 2.4. Résultats

### 2.4.1. Garantie maladie

L'application de l'algorithme de Kaplan Meier conduit à la représentation graphique suivante :

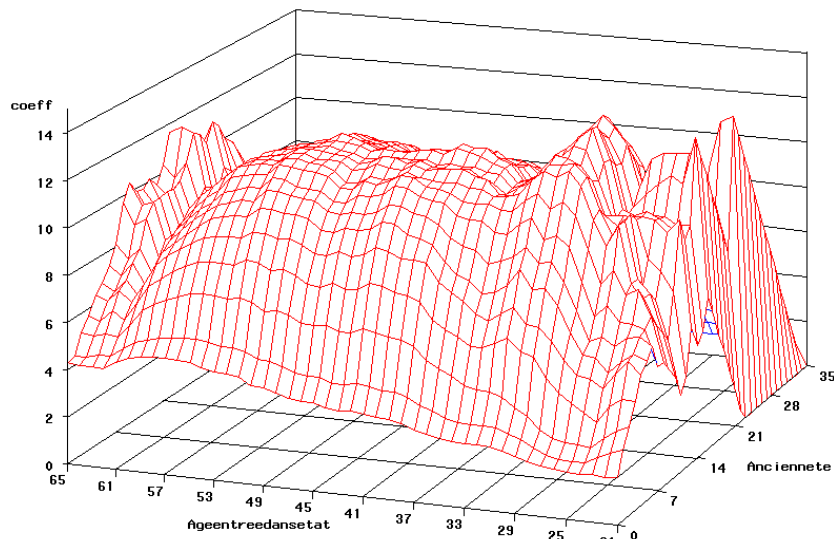


fig.15 : Barème de provisionnement brut de la garantie maladie

Le lissage de Whittaker Henderson conduit à la représentation graphique suivante :

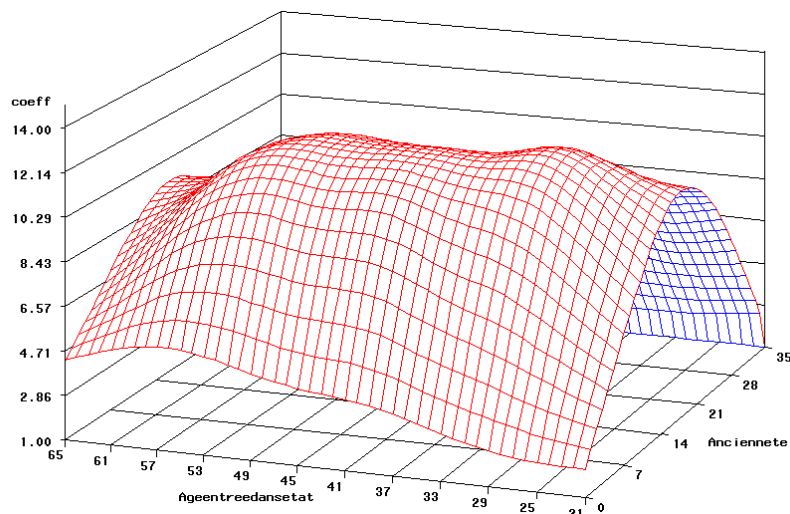


fig.16 : Barème de provisionnement lissé de la garantie maladie

Ci-dessous le rapport du barème de provisionnement lissé sur le barème de provisionnement brut :

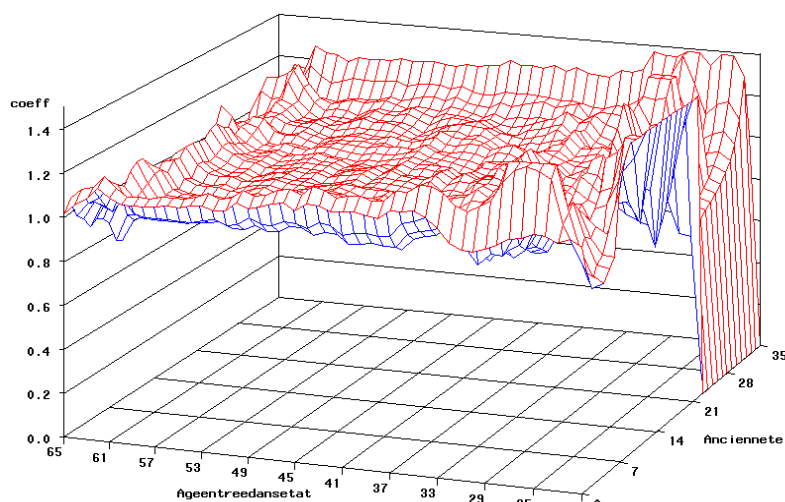


fig.17 : Comparaison barème de provisionnement lissé et brut de la garantie maladie

Le rapport des deux provisionnements fluctue autour de 1. Ce qui montre que le lissage ne dénature pas le calcul de provisions. Toutefois, aux données extrêmes, le rapport s'accroît, ce qui est dû à l'irrégularité du taux brut aux bords.

#### 2.4.2. Garantie accident

L'application de l'algorithme de Kaplan Meier conduit à la représentation graphique suivante :

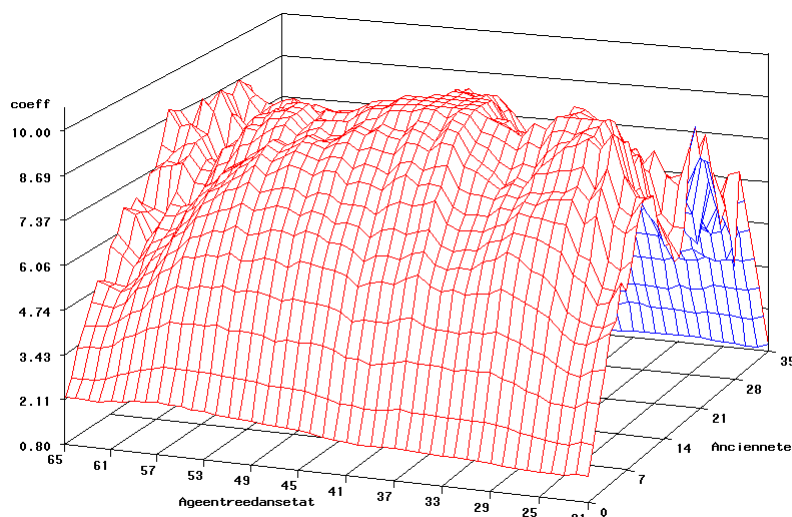


fig.18 : Barème de provisionnement brut de la garantie accident

Le lissage de Whittaker Henderson conduit à la représentation graphique suivante :

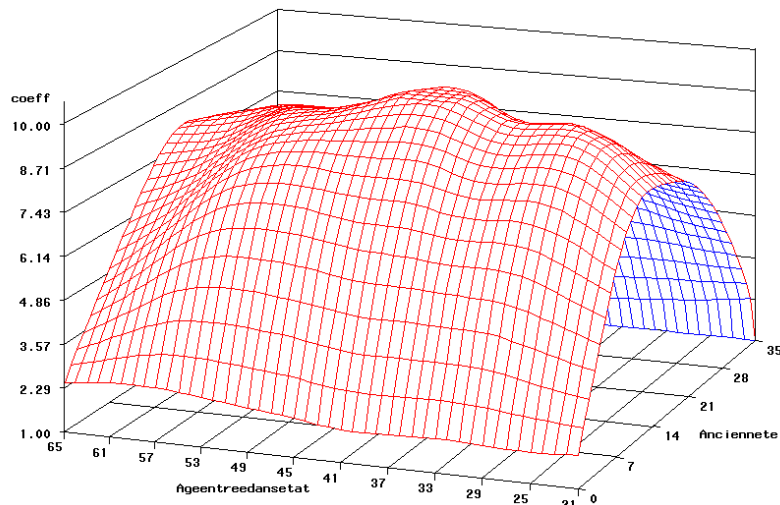


fig.19 : Barème de provisionnement lissé de la garantie accident

Ci-dessous le rapport du barème de provisionnement lissé sur le barème de provisionnement brut :

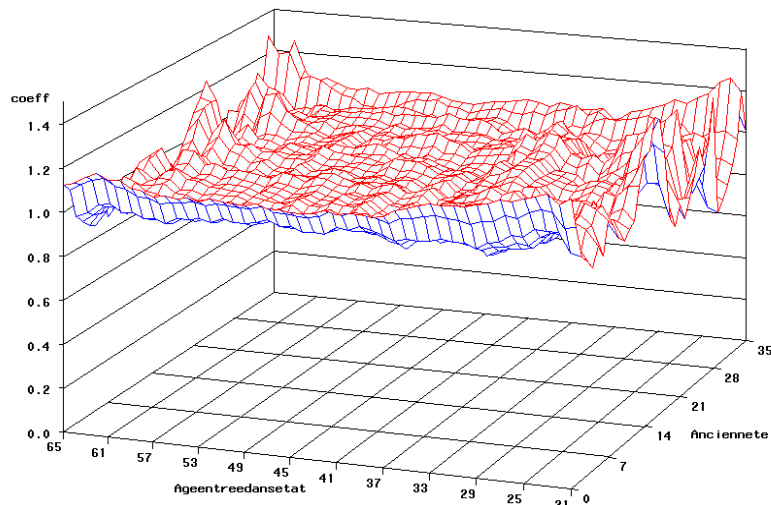


fig.20 : Comparaison barème de provisionnement lissé et brut de la garantie accident

Toutes ces courbes présentent une forme «en cloche » typique de ce genre de problématique. Cette forme est la résultante de deux effets :

- Plus de la moitié des incapables, en moyenne, sortent au cours du premier mois. Ainsi lorsque l'ancienneté depuis la survenance augmente, la probabilité de sortie de l'état d'incapacité diminue fortement. Ce phénomène accroît la provision à constituer.
- Parallèlement, le nombre maximum de mois restant indemnisable diminue, ce qui a tendance à faire diminuer la provision.

### Section 3 : Comparaison des tables d'expérience et du BCAC

L'objet de cette section est de comparer les barèmes de provisionnement issus des tables du BCAC et les barèmes de provisionnement issus des tables d'expérience. Ces opérations permettront d'appréhender les résultats des différentes projections.

#### 3.1. Barème de provisionnement du BCAC

Le barème de provisionnement du BCAC est construit d'une manière similaire à celle des barèmes de provisionnement d'expérience.

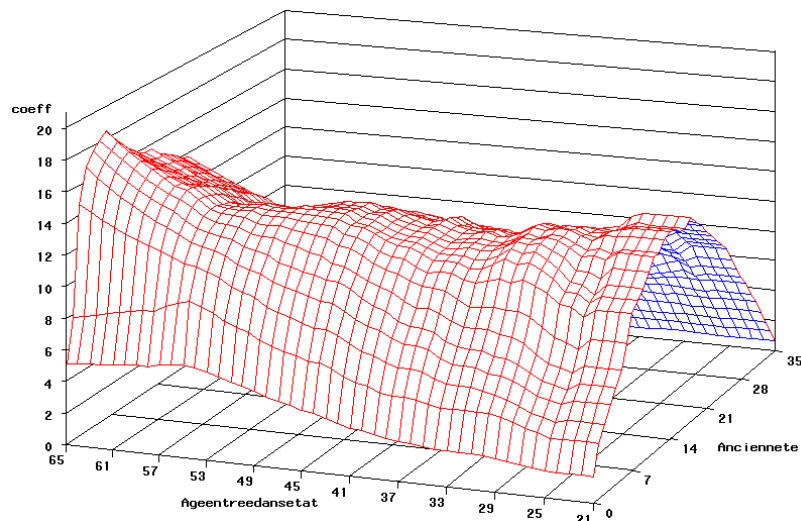


fig.21 : Barème de provisionnement BCAC

Le barème de provisionnement du BCAC est irrégulier. Cette tendance est une conséquence de l'utilisation de taux de sortie non ajustés.

#### 3.2. Comparaisons

Soient :

- $Coeff_{x,t}^{BCAC}$  le coefficient de provisionnement issu de la table du BCAC pour un individu d'âge  $x$  et pour une ancienneté  $t$ .

- $Coeff_{x,t}^{exp}$  (prenant les valeurs  $Coeff_{x,t}^{expmaladie}$  et  $Coeff_{x,t}^{expaccident}$ ) le coefficient de provisionnement issu d'une des tables d'expérience, pour un individu d'âge  $x$  et pour une ancienneté  $t$ .

La comparaison des coefficients de provisionnement se base sur le calcul de la grandeur :

$$\frac{Coeff_{x,t}^{BCAC} - Coeff_{x,t}^{exp}}{Coeff_{x,t}^{exp}}$$

## Comparaison provisionnement maladie lissé / BCAC

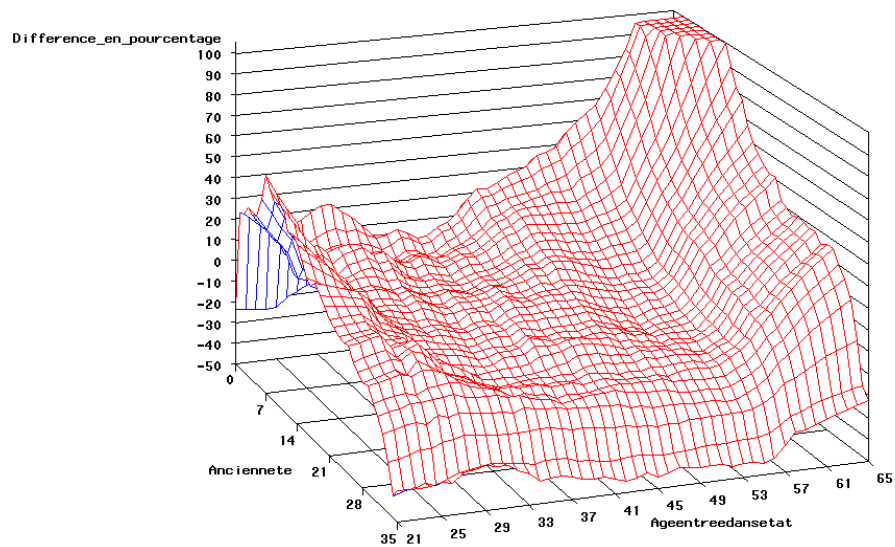


fig.22 : Comparaison provisionnement maladie lissé / BCAC

Sous un autre angle :

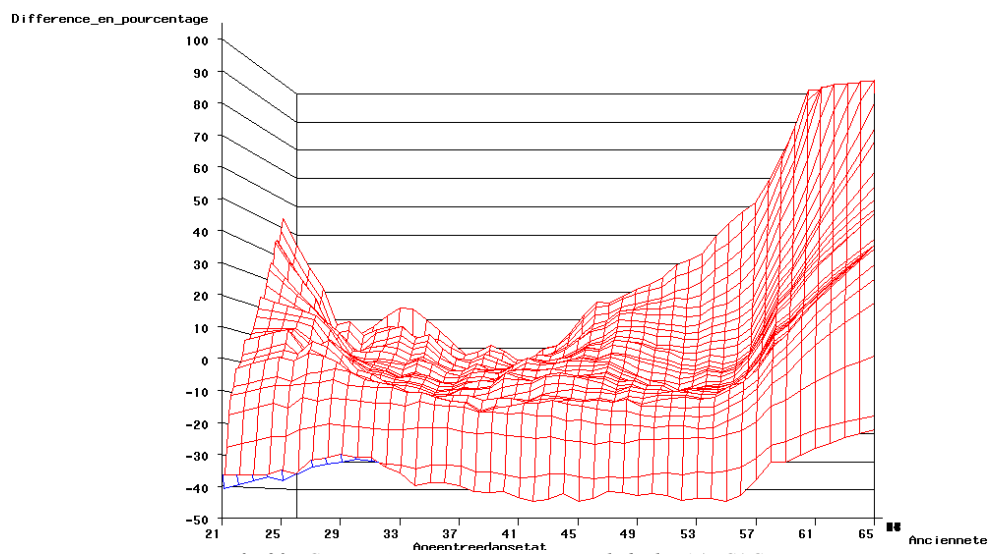


fig.23 : Comparaison provisionnement maladie lissé / BCAC

Pour les anciennetés élevées, la table du BCAC conduit à sous-provisionner, tandis que pour les anciennetés faibles, la table du BCAC conduit à sur-provisionner. En milieu de table, les deux provisionnements sont semblables. Globalement, les différences entre les deux tables justifient l'utilisation de la table d'expérience maladie de maintien en incapacité.

## Comparaison provisionnement accident lissé / BCAC

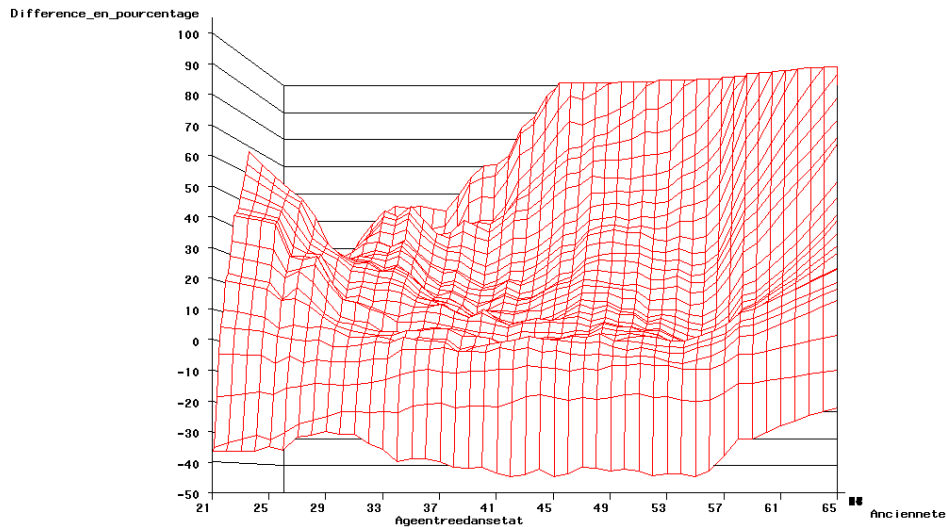


fig.24 : Comparaison provisionnement accident lissé / BCAC

La comparaison fait ressortir des écarts très importants de provisionnement entre la table du BCAC et la table d'expérience accident de maintien en incapacité. On constate un surprovisionnement très fort de la table du BCAC pour les âges élevés et les anciennetés faibles. Tout comme avec la comparaison avec la table maladie, en milieu de table, les deux provisionnements sont similaires. Les différences entre les deux tables justifient l'utilisation de la table d'expérience accident de maintien en incapacité.

## Chapitre 3 : Résultats des simulations

---

Le chapitre suivant expose les résultats des diverses simulations lancées. Commençons par la première étape : la projection de la population.

Il est important de noter que toutes les simulations dans cette partie sont réalisées avec des hypothèses communes :

- Table de mortalité TGF/TGH O5.
- Taux de référence comme taux d'actualisation.
- Respect des principes MCEV.
- Méthode de projection présentée plus haut.

Dans ce chapitre, différents tests vont être effectués. Nous allons projeter le portefeuille suivant les hypothèses présentées plus haut, et suivant différentes hypothèses de maintien et de survénance, afin de mesurer l'impact du choix de chacune des tables.

### Section 1 : Projection de la population

Cette étape est primordiale pour la validité du modèle de projection. Le but est d'observer la population sous risque projetée. Cette étape est réalisée en fonction de la démographie de la population du portefeuille et simule les décès, les résiliations ainsi que les départs en retraite. Ainsi, nous pourrions observer à quelle vitesse la population sous risque décroît tout au long de la projection (cette projection à été effectuée avec les tables de survénance d'expérience, et la table de maintien du BCAC).

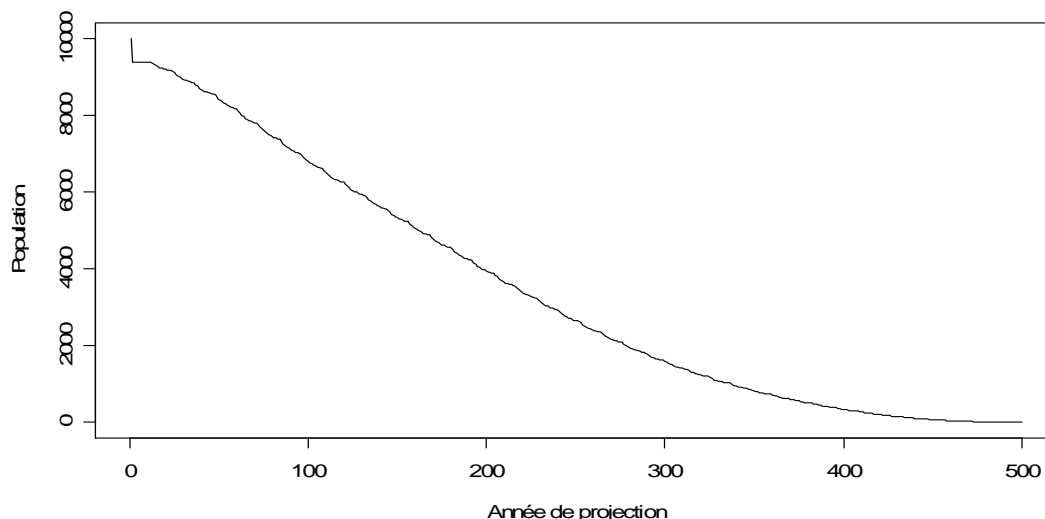


fig.25 : Nombre de personnes composant la population sous risque au cours des années de projection

Cette courbe représente la moyenne de 1000 simulations de la population. Nous observons une décroissance stable du nombre de survivants. Il faut en moyenne 500 mois de projection, soit environ 42 ans, pour que la population du portefeuille s'éteigne, ce qui détermine ainsi la durée de projection pour le reste des simulations.

## Remarque

La brusque chute de première année est due à la sortie des âges proches de 65 ans de la population sous risque.

## Section 2 : Nombre de personne en incapacité

Le nombre de personnes en incapacité est directement lié à la table de survenance, et à la table de maintien utilisée. Des comparaisons à plusieurs niveaux sont envisageables, c'est-à-dire avec des tables de survenance différentes mais avec une table de maintien identique, avec une table de survenance identique mais avec des tables de maintien différentes.

Ce point est très important dans la détermination de la valeur du portefeuille. En effet, le résultat technique varie sensiblement en fonction des tables utilisées, ce qui a un impact direct sur l'*Embedded Value*.

Dans la suite de cette section, nous effectuons plusieurs tests démontrant l'impact du choix des tables.

### Test 1

L'objectif de ce test est de mesurer l'impact du choix de la table de maintien sur le nombre de personnes en incapacité durant la projection. Le test s'effectue de la manière suivante : avec une table d'entrée en incapacité identique (table d'expérience), nous projetons la population avec la table de maintien du BCAC puis avec les tables de maintien d'expérience. Nous observons l'impact du choix de la table de maintien en incapacité :

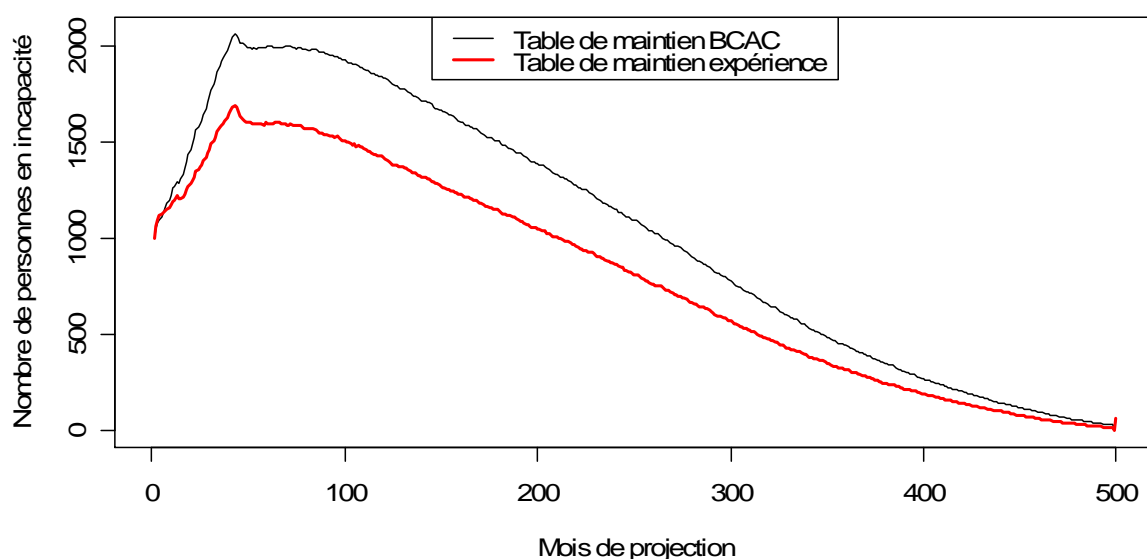


fig.26 : Nombre de personnes en incapacité (table de survenance d'expérience)



Les résultats montrent une très nette différence entre les tables de maintien. Tout au long de la projection, le nombre de personnes en incapacité est moins élevé avec les tables d'expérience. Cette différence atteint les 500 personnes durant les cinquante premiers mois. Ce test montre bien que la table de maintien du BCAC ne reflète pas bien la réalité du portefeuille d'assurés.

## Test 2

L'objectif de ce test est de mesurer l'impact du choix de la table de survenance en incapacité sur le nombre de personnes en incapacité durant la projection. Ce test se déroule de la manière suivante : on effectue des projections avec la même table de maintien en incapacité (tables d'expérience), mais avec des tables de survenance en incapacité différentes (tables de survenance publiques). Nous pourrions ainsi comparer les résultats des projections effectuées sur la base des tables de survenance publiques suivant les différents scénarii (scenario bon = assuré en bonne santé, scenario moyen et scenario mauvais). Regardons le nombre de personnes en incapacité Les résultats de ce test sont exposés dans le graphique suivant :

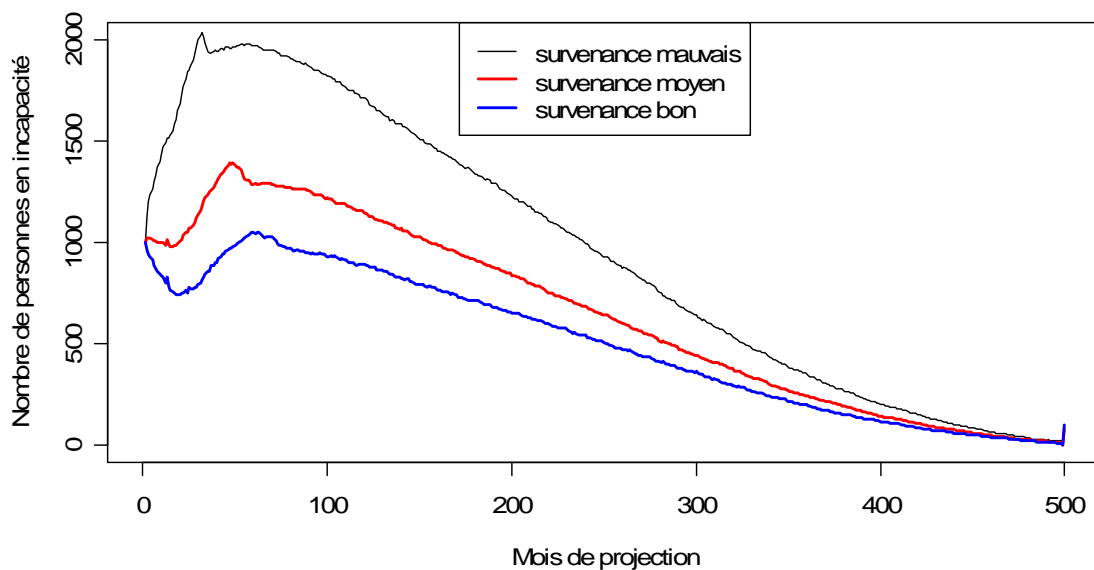


fig.27 : Nombre de personnes en incapacité selon différentes hypothèses de survenance

Ce test nous fait part de la sensibilité du nombre de personnes en incapacité selon différentes hypothèses de survenance. Les écarts de nombre peuvent être significatifs, atteignant jusqu'à plus de 1000 personnes incapables de différence. La bonne calibration de l'hypothèse de survenance est donc primordiale dans la projection.

Ces écarts de provisions sont donc un enjeu non négligeable pour les compagnies.

### **Section 3 : Nombre de survenances en incapacité**

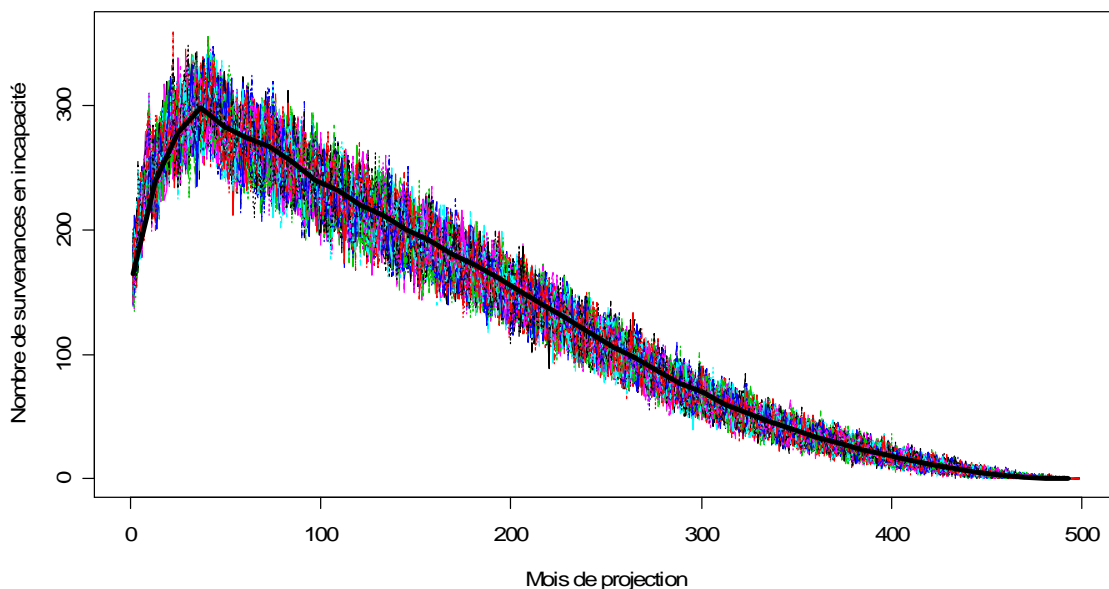
Le test suivant a pour but de mesurer l'impact du choix de la table de survenance sur la projection de la population. Nous allons donc lancer deux types de projection :

- Des projections avec les tables de survenance d'expérience.
- Des projections avec les table de survenance publiques.

Toute les projections sont réalisées avec la table de maintien du BCAC.

#### **Survenances avec la table d'expérience**

Le graphique ci-dessous présente le nombre d'entrées en incapacité d'après les tables d'expérience de survenance construites. Ce test a été effectué sur la base de 1000 simulations (avec la table de maintien du BCAC). La moyenne de ces observations est tracée en gras.



*fig.28 : Nombre de survenances en incapacité (table d'expérience)*

Nous observons que d'une simulation à une autre, pour un mois donné, le nombre de survenances en incapacité varie jusqu'à plus ou moins 100 survenances de différence. Effectuons le même graphique avec la table de survenance publique.

#### **Survenances avec la table publique**

Avec l'utilisation de la table de survenance maladie publique, plusieurs scénarii devront être simulés. Effectivement, l'utilisation de cette table requiert un certain nombre d'informations non disponibles, comme l'état de santé déclaré, ou encore l'âge au premier emploi. Nous effectuerons donc trois tests :

- Un scénario «bon », dans lequel les personnes composant le portefeuille se sont déclarées en très bonne santé, ont un niveau d'étude supérieur au bac, et exerce un métier ne présentant pas de surexposition au risque.

- Un scénario « moyen », où les assurés du portefeuille présentent des caractéristiques en ligne avec une exposition au risque médiocre.
- Un scénario dit « mauvais » dans lequel les personnes assurées présentent de grands risques de tomber en incapacité (déclarés en mauvaise santé à la souscription, dans une catégorie socioprofessionnelle à risque, etc...).

Les résultats sont exposés dans le graphique suivant (avec la table de maintien du BCAC):

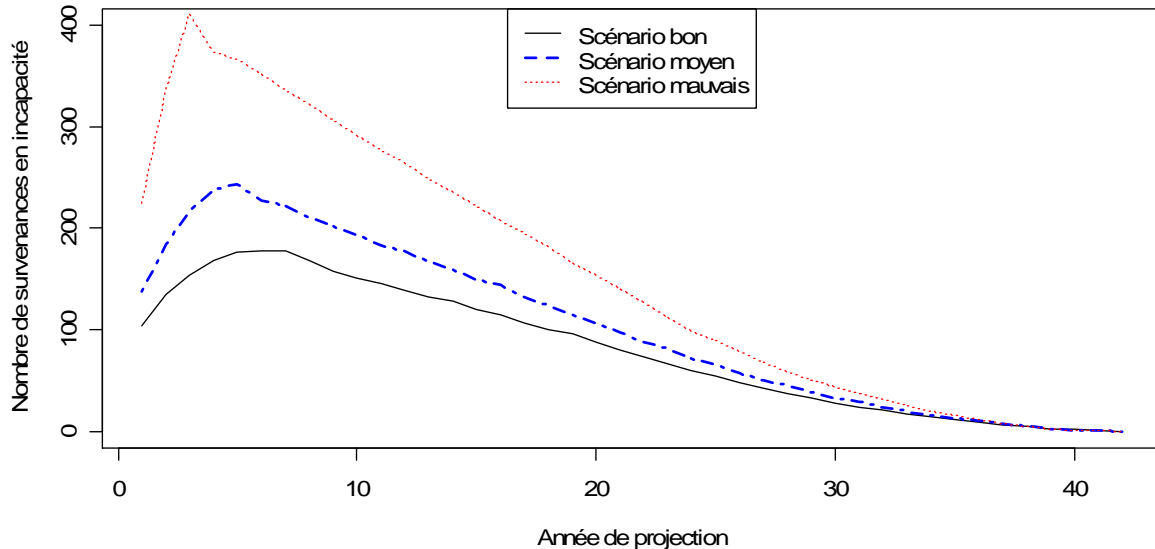


fig.29 : Nombre de survenances en incapacité, suivant trois scénarii de niveau de risque différents

Les résultats sont très sensibles aux caractéristiques du portefeuille. Le nombre de survenances dans le scénario mauvais atteint jusqu'à quatre fois plus de sinistres que le scénario bon. L'utilisation de la table de survenance publique ne peut pas satisfaire les exigences des assureurs. Une table d'expérience sera toujours préférée, et sera toujours plus proche de la réalité de la population sous risque.

#### **Section 4 : Durées passées en incapacité**

Il est intéressant de se pencher sur le problème de la durée passée en incapacité, qui va impacter directement les provisions mathématiques calculées. Cette durée est liée aux tables de maintien utilisées. Les tables d'expériences offrent une vision plus précise de cette grandeur, en distinguant l'accident et la maladie. La durée moyenne passée en incapacité sera calculée par tranches d'âge de cinq ans.

L'objet de ce test est de déterminer, pour un assuré d'âge  $x$  à l'instant initial, la durée moyenne de ces périodes d'incapacité futures. Les résultats sont présentés dans le graphique suivant, et ont été obtenus sur la base des tables de survenance d'expérience. Les durées sont exprimées en mois.

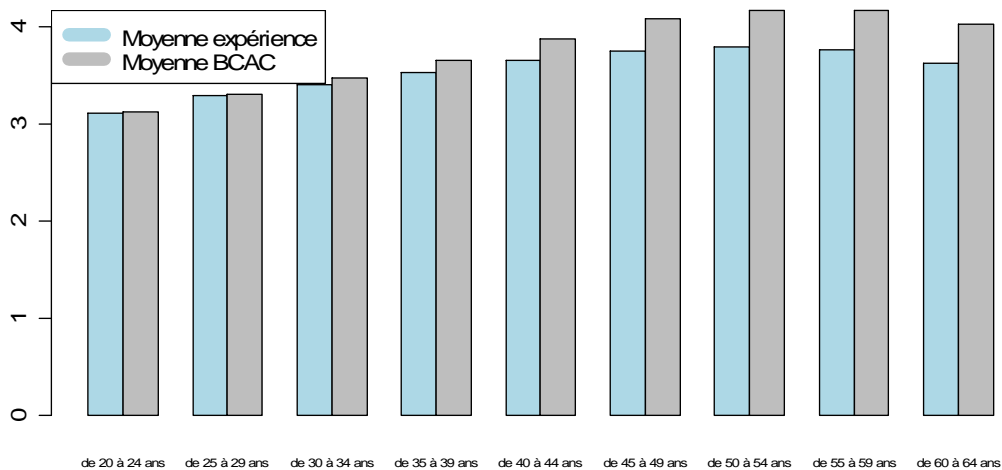


fig.30 : Durées moyennes futures d'incapacité pour un individu initialement dans la tranche d'âge

Ces durées ne sont pas à confondre avec les durées moyennes d'incapacité pour des individus d'âge  $x$ . Ici, il s'agit des durées moyennes futures projetées pour un individu qui avait l'âge  $x$  à l'instant initial.

Ce graphique offre une vision de l'évolution des tables de maintien. La durée moyenne obtenue par la table du BCAC est constamment supérieure à celle obtenue par les tables d'expérience, et cela pour chaque tranche d'âges. Même si la différence ne dépasse pas un demi-mois, l'impact sur la projection du portefeuille sera d'autant plus important que le portefeuille sera grand.

Nous observons également que la différence de durée augmente significativement avec l'âge. La tranche d'âges comprise entre 20 et 24 ans n'est pas beaucoup impactée par le changement de table de maintien.

La surestimation avec les tables BCAC n'est pas à généraliser. En effet, les tables d'expérience reflètent la réalité du portefeuille. Donc le résultat inverse (durée moyenne obtenue par la table du BCAC inférieure à celle obtenue par les tables d'expérience) pourrait également être observé avec l'étude d'un autre portefeuille.

Il est vrai qu'environ la moitié des personnes tombant en incapacité restent moins d'un mois (à la vue des tables de maintien). Mais ces durées atteignent trois mois et plus car elles prennent en compte les durées en incapacité des âges élevés, et à ces âges il est bien plus probable de rester plus d'un mois en incapacité.

Une durée de maintien plus importante entraîne également des provisions et une tarification plus élevées, et donc un résultat technique dégradé. Tous ces points vont jouer sur la détermination de l'*Embedded Value*.

## Section 5 : Projection des frais

La projection des frais reflète la survenance, et le nombre de personnes en incapacité, car le calcul est basé sur le nombre de mois passé en incapacité l'année précédente. Plusieurs simulations avec différentes tables de survenance ont été effectuées. Les frais représentent un poste important dans la projection du compte de résultat. Le montant des frais tient compte d'un vecteur de taux d'inflation. Les résultats sous forme graphique sont exposés ci-dessous.

### Test1

Ce test a pour but de mesurer l'impact de la table de maintien utilisée dans la projection sur le niveau de frais de la compagnie. Toujours avec la table de survenance d'expérience, nous procédons à deux séries de tests : une avec la table de maintien du BCAC et l'autre avec les tables de maintien d'expérience.

Rappelons la forme générale de la structure des frais pour le mois de projection  $i$  et pour le contrat  $j$  :

$$\begin{aligned} Mt_{frais_{i,j}} &= Mt_{base_{i,j}} + Mt_{forf_{i,j}} + Mt_{prop_{i,j}} \\ &= M_{base_{i,j}} + FD_{i,j} \times (1 + I(i)) \times f(N) + CS_{i,j} \times \alpha \end{aligned}$$

Comparons, à table de survenance identique (expérience), les frais obtenus par les projections avec les tables de maintien du BCAC et les tables de maintien d'expérience.

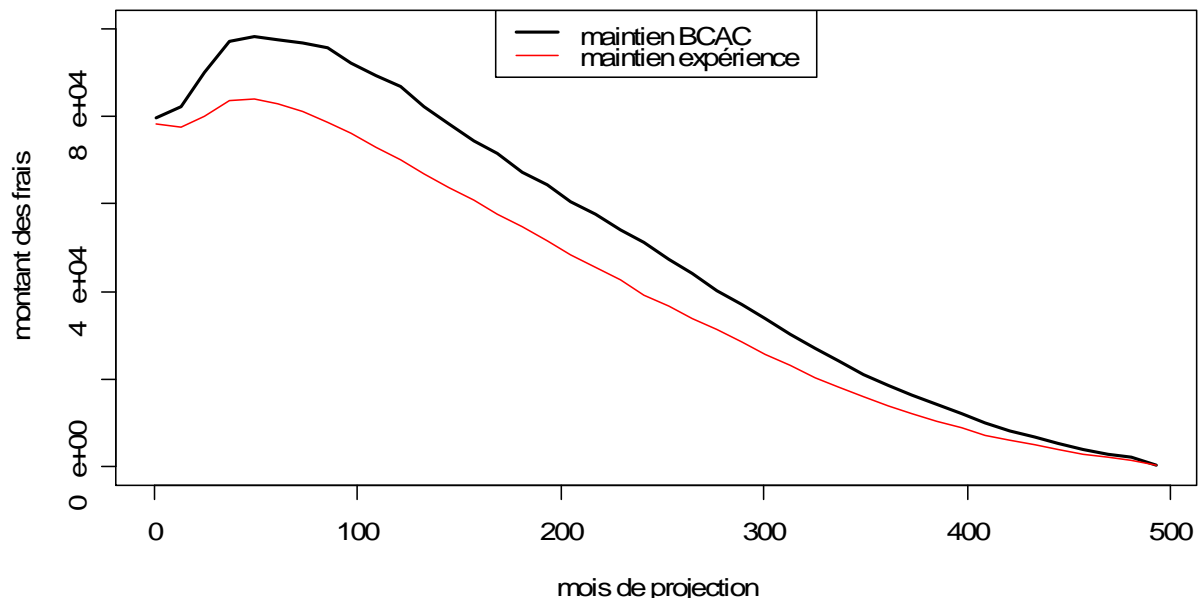


fig.31 : Comparaison des frais BCAC/expérience (sur la base de la table de survenance d'expérience)

Conformément aux résultats précédents, les frais obtenus avec la table de maintien du BCAC sont plus élevés, du fait du nombre d'incapable et des durées de maintien plus importantes.

## Test 2

Ce test a pour but de mesurer l'impact de la table de survenance utilisée dans la projection sur le niveau de frais de la compagnie. Toujours avec les tables de maintien d'expérience, nous procédons à trois séries de tests sur les différents niveaux de survenance (sur la base de la table de survenance publique).

Comparons, à table de maintien identique (expérience), les frais obtenus avec les scénarii mauvais, moyen et bon de survenance.

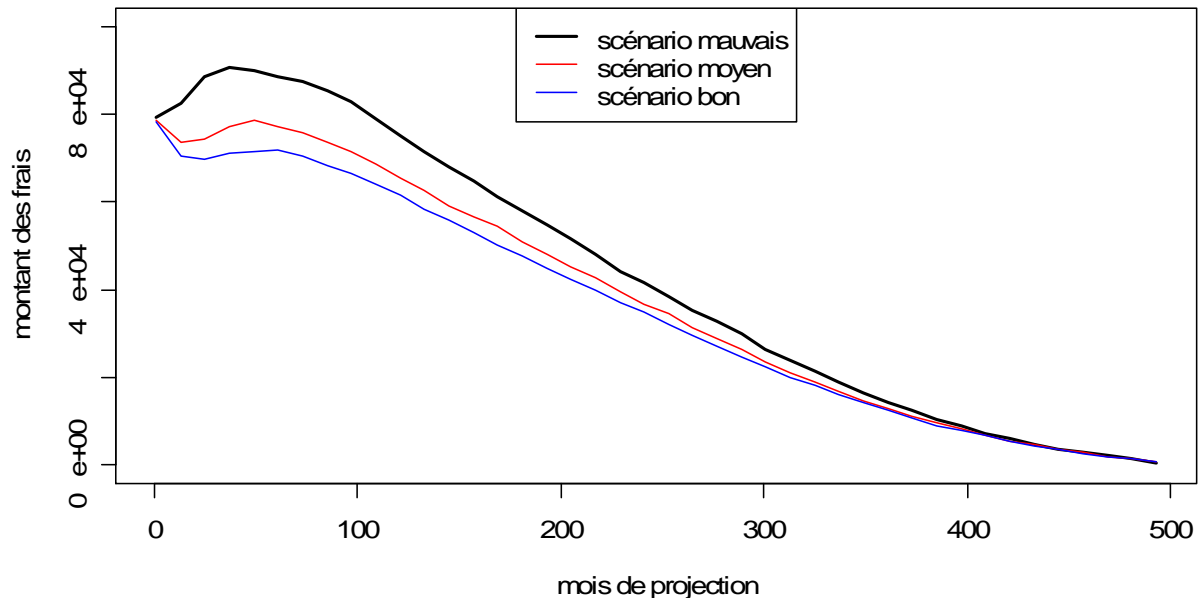


fig.32 : Comparaison des frais scénarii mauvais moyen bon (sur la base de la table de maintien d'expérience)

Conformément aux attentes, plus les taux de survenance sont élevés, plus les frais projetés sont élevés.

## Section 6 : Comparaison des provisions

Différentes projections ont été effectuées. Comme nous le montrent les résultats précédents, des écarts significatifs sont attendus entre les projections effectuées sur la base des tables de maintien règlementaires et d'expérience, et sur les tables de survenance publiques et d'expérience.

Mesurons l'impact du choix des tables sur le niveau de provisionnement. Pour cela nous effectuons deux tests de sensibilité :

- Test 1 : impact du choix de la table de maintien
- Test 2 : impact du choix de la table de survenance

D'autres solutions peuvent être envisagées pour mesurer le risque d'incertitude lié au choix des tables, comme utiliser un modèle à hypothèses stochastiques.

## Test 1

Deux séries de projections sont effectuées : une avec les tables de maintien d'expérience et l'autre avec la table de maintien du BCAC. Toutes les projections utilisent la table de survenance d'expérience.

Le premier graphique renseigne le niveau de provisionnement, et le deuxième la situation par rapport à une référence qui sera la chronologie des provisions obtenue avec les tables de survenance d'expérience et la table de maintien du BCAC.

Nous obtenons les résultats suivants sur le niveau de provisionnement (les pointillés représentent les intervalles de confiance à 95 %) :

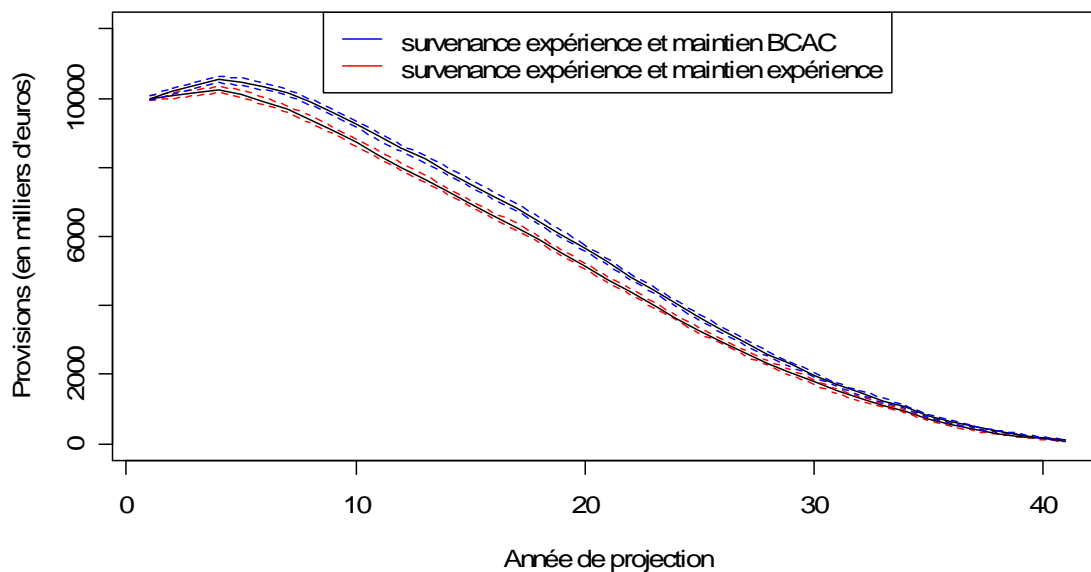


fig.33 : Comparaison maintien BCAC / maintien expérience (sur la base de la table de survenance d'expérience)

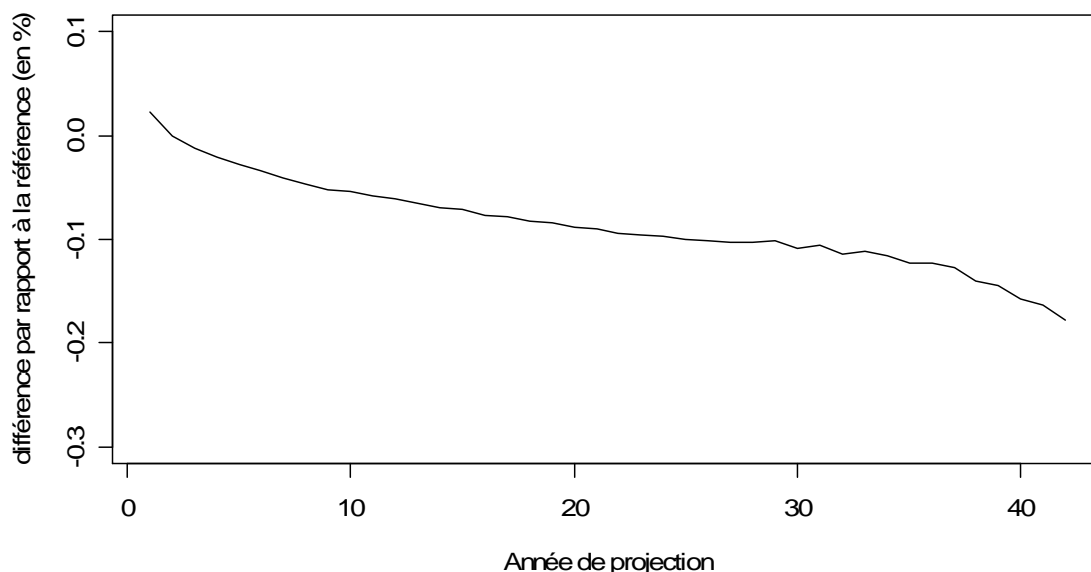


fig.34 : Rapport maintien BCAC / maintien expérience (sur la base de la table de survenance d'expérience)

Les résultats montrent que les provisions obtenues par la projection sont moins importantes avec la table de maintien d'expérience. Cette différence se chiffre en moyenne à 10 % durant les quarante premières années de projection. Les dernières années de projection n'ont pas été représentées à cause de la volatilité forte entre les deux scénarios, du au faible nombre d'assurés encore présents.

## Test 2

Nous allons comparer les résultats des projections avec les tables de maintien d'expérience et les tables de survénance (scénarii mauvais, moyen, bon) par rapport à une situation de référence, qui sera la chronologie des provisions obtenues avec les tables de survénance d'expérience et les tables de maintien d'expérience.

Nous obtenons les résultats suivants (les pointillés représentent les intervalles de confiances à 95 %) :

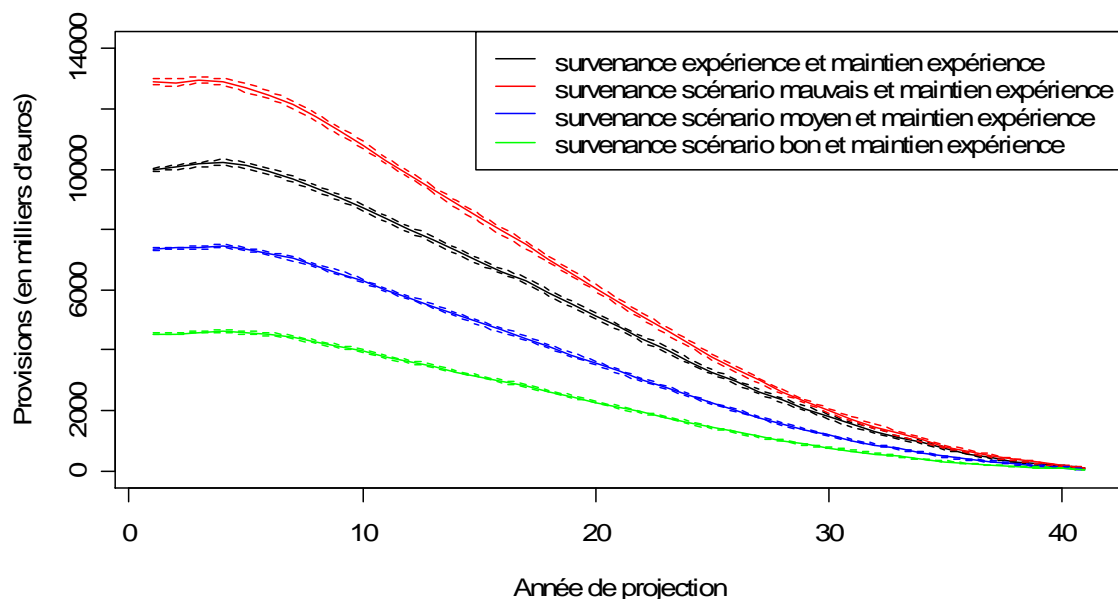


Fig.35 : Comparaison survénance scénarii mauvais, moyen, bon / survénance expérience (sur la base de la table de maintien d'expérience)



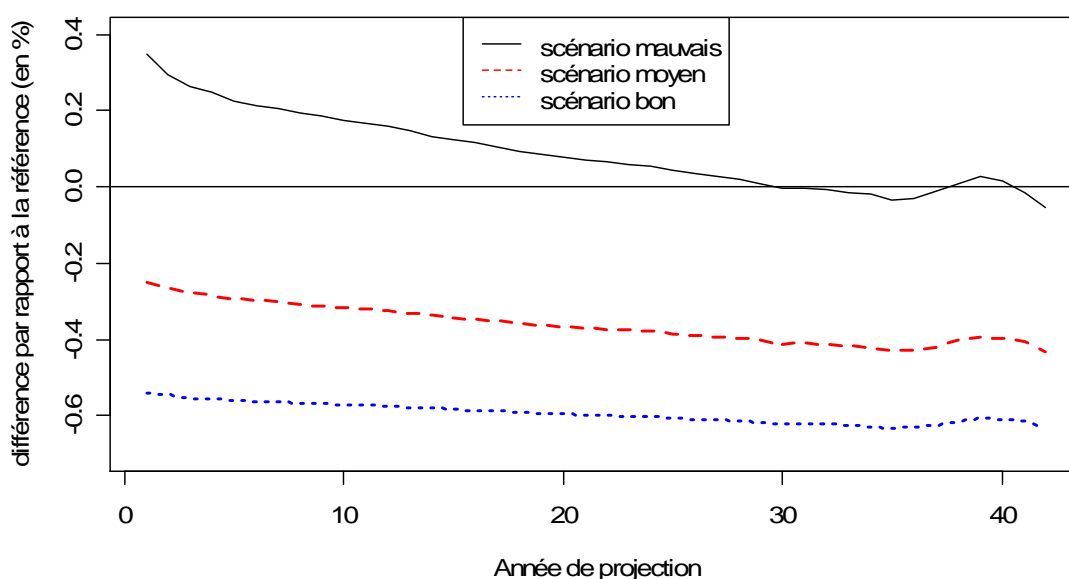


fig.36 : Rapport survenance scénario mauvais,moyen,bon / survenance expérience (sur la base des tables de maintien d'expérience)

Comme nous pouvions le prévoir, plus les taux de survenance sont bas, plus les provisions calculées sont faibles. Ce graphique nous permet de mesurer l'impact du niveau de survenance. Notons que le scénario « bon » et le scénario « mauvais » affichent une différence presque constante au cours de la projection d'environ 100 %.

Remarque : le contrôle de précision est validé pour les deux projections. En effet, pour toutes les projections, nous obtenons un écart-type de l'ordre de 0,2 % des résultats sur la somme des montants de provision actualisés selon la courbe des taux swap :

	Moyenne de la somme des provisions actualisées (en milliers d'euros)	écart-type (milliers d'€)	rapport écart-type / moyenne
survenance expérience, maintien BCAC	137 626	289	0,210 %
survenance expérience, maintien expérience	131 381	281	0,214 %
survenance scénario mauvais, maintien BCAC	163 462	361	0,221 %
survenance scénario moyen, maintien BCAC	94 476	207	0,219 %
survenance scénario bon, maintien BCAC	59 180	125	0,211 %

Etudions cet impact de table dans le calcul de la PVFP

## **Section 7 : Etude de la sensibilité sur la PVFP**

La PVFP (*Present Value of Futur Profits*) est la valeur actualisée des résultats techniques futurs. Il est intéressant de mesurer l'impact des différentes tables sur cette grandeur.

### **Test 1**

Ce test consiste à comparer la PVFP obtenue avec une projection sur la base de tables de maintien BCAC et de tables de survenance d'expérience avec la PVFP obtenue sur la base d'une table de maintien d'expérience et de tables de survenance d'expérience. Les résultats sont exprimés en pourcentage du premier scénario cité.

	<b>Survenance : expérience, maintien : expérience</b>
<b>Différence PVFP (exprimé en % par rapport à la situation de référence)</b>	5,0 %

A même table de survenance (expérience), la PVFP est plus élevée pour la projection avec la table de maintien d'expérience. Cette différence est estimée à 5 % par les simulations.

### **Test 2**

Désormais la situation de référence est la projection avec les tables de survenance d'expérience et les tables de maintien d'expérience. Le but de ce test est de faire varier la survenance pour en mesurer l'impact sur la PVFP. Comme plus haut, nous nous baserons sur trois scénarii, un bon, un moyen et un mauvais.

	<b>Scénario bon</b>	<b>Scénario moyen</b>	<b>Scénario mauvais</b>
<b>Différence PVFP (exprimé en % par rapport à la situation de référence)</b>	62,9 %	33,1 %	-46,6 %

Plus la survenance est forte, plus la PVFP est faible. Ce résultat est conforme à l'intuition, qui pousse à penser que plus la survenance est forte, plus le résultat technique est faible, et plus la PVFP est faible.

Ce résultat est la résultante de plusieurs éléments :

- Une survenance forte entraîne des provisions plus fortes.
- Une survenance forte entraîne des primes plus fortes.
- Une survenance forte entraîne un total de prestations plus fort.

Dans un scénario de survenance en incapacité forte, les primes ne couvrent plus les prestations (plus d'incapables). Le résultat technique est donc plus faible.

# **PARTIE 4 :**

## **LE DEVENIR DE LA MCEV**

## **Le cadre Market Consistent**

L'approche *Market Consistent* implique une cohérence avec le marché financier. Le terme *Market Consistent* signifie que chaque flux doit être actualisé au taux qui serait utilisé pour valoriser un flux semblable sur les marchés financiers.

## **L'évolution de la valorisation du passif**

La MCEV, solvabilité II et les normes IFRS définissent des référentiels relativement convergents. Ce rapprochement permettra d'établir une cohérence dans les reportings financiers des sociétés d'assurance.

Les récentes avancées dans le projet IFRS, avec le projet IFRS 4, remettent en cause la notion de valorisation *Market Consistent*. Rappelons que les normes IFRS entraînent le passage d'une valorisation du passif historique à une évaluation en juste valeur. Le coût historique complexifie le rapprochement et la comparabilité des résultats entre les compagnies. La juste valeur introduit une standardisation de l'évaluation, permettant ainsi d'homogénéiser les informations diffusées.

L'IASB a défini la norme IFRS 4 en deux phases :

- La phase I laisse aux sociétés d'assurance la liberté d'évaluation de leur passif.
- La phase II définit un cadre unique et cohérent avec le marché, dans la lignée des *MCEV Principles*.

Nous distinguons deux situations dans l'évaluation des passifs d'une société d'assurance:

- pour les éléments répliquables, la valeur est obtenue à partir des observations des marchés financiers.
- pour les éléments non répliquables, qui constituent la majorité du passifs des compagnies d'assurance. Leurs évaluations est sont alors effectuées à l'aide de modèle.  
Pour palier aux problèmes posés par les éléments non répliquables, l'IASB a défini deux méthodes d'évaluation.

## **La Current Exit Value**

L'évaluation du passif se fait à partir de la valeur de transfert de l'élément entre deux assureurs, c'est-à-dire de la valeur à laquelle l'assureur pourrait céder son passif. Les provisions calculées se décomposent en plusieurs éléments :

- Une partie *Best Estimate*.
- Une marge pour risque (liée aux risques de transfert).
- Une marge pour service.

L'évaluation en *Current Exit Value* est aujourd'hui remise en cause, dans le cadre de la réforme IFRS 4.

## La Current Fulfilment Value

L'évaluation du passif se fait à partir des flux de trésorerie auxquels est confronté l'assureur afin d'honorer ses engagements.

Plusieurs méthodes sont étudiées par l'IASB.

Cette évaluation est très similaire à la *Current Exit Value*. La différence vient d'une marge additionnelle pour la *Current Fulfilment Value*.

Trois méthodes ont été élaborées pour la détermination de la *Current Fulfilment Value* :

### Méthode 1

Cette méthode fait intervenir une marge pour risque à verser en contrepartie du transfert de risque. Il s'agit de la valeur actuelle des flux futurs des prestations payées aux assurés.

### Méthode 2

En plus d'une marge pour risque, cette méthode fait intervenir une marge additionnelle qui comprend une marge pour service (compensation pour assurer les services annexes).

### Méthode 3

Cette méthode fait apparaître une marge pour risque calibrées sur la prime.

Le choix d'une des deux méthodes d'évaluation n'a pas encore été déterminé, mais une courte majorité se dessine en faveur de la *Current Fulfilment Value*.

Ainsi, la convergence des nouvelles réformes (Solvabilité II, IFRS, MCEV) s'oriente vers l'abandon des principes MCEV, à la vue de l'émergence des dernières méthodes de calculs, telle que l'évaluation en *Current Fulfilment Value*.

## Conclusion générale

---

Aujourd'hui, faire référence à une table d'expérience souligne le désir de l'assureur de provisionner à un niveau représentatif de son portefeuille. Tout un panel de méthodes est à disposition des actuaires afin de construire ces tables d'expérience. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées, par exemple faire appel à une table de référence externe, ou encore la théorie de la crédibilité.

Dans ce mémoire, la méthodologie utilisée est la plus courante actuellement : il s'agit de la méthode de Kaplan Meier.

Nous avons pu déterminer l'impact de l'utilisation des tables d'expérience par rapport aux tables règlementaires, et mesurer par exemple les différences de nombre de personnes en incapacité et les différences de durée de maintien. Ces éléments ont un impact direct sur le niveau des provisions mathématiques, et donc sur le résultat technique.

Ces tables d'expérience sont également un enjeu dans la détermination de la valeur d'activité d'assurance pour la communication avec le marché extérieur.

Le principal outil de communication des assureurs vis-à-vis des investisseurs et des financiers est l'*Embedded Value* (EV). Cette mesure a beaucoup évolué, pour aboutir aujourd'hui à la *Market Consistent Embedded Value* (MCEV).

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés seulement au passif d'un produit de prévoyance, la MCEV du portefeuille n'a donc pas été déterminée dans son intégralité ; néanmoins, quelques grandeurs, comme la PVFP ont pu être calculées.

Pour ce faire, nous avons mis en place une méthode de projection du portefeuille à l'aide des tables d'expérience créées. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux attendus avec les tables réglementaires du BCAC.

Pour compléter la projection du portefeuille, nous avons également modélisés certains postes du passif, comme les frais, mais aussi certains comportements comme les résiliations, et l'inflation selon plusieurs modèles.

De plus, afin d'optimiser le temps de calcul, la projection a été effectuée sur la base d'un portefeuille réduit, respectant proportionnellement la répartition du portefeuille initial par âge et par sexe.

Les résultats ont montré que l'utilisation des tables d'expérience, que ce soit pour la survenance ou bien le maintien, ont un impact très important sur le niveau de provisionnement, le résultat technique, la PVFP, et donc sur l'*Embedded Value*. Ce qui a un impact direct sur la communication des résultats, que ce soit envers les organismes de contrôles, comme l'ACAM, ou bien envers les salariés. En effet, certains assureurs basent l'intéressement des salariés sur la *New Business Value*, c'est-à-dire sur la valeur de la nouvelle production de l'année.

Ce mémoire n'aborde pas cette mesure, mais son principe est le même que pour la MCEV, appliquer seulement à la *New Business* (alors que la MCEV englobe le stock déjà présent au début de l'année, augmenté des affaires nouvelles).

Les nouvelles réformes sur normes IFRS ont remis en cause la notion de *Market Consistent*. En effet, les dernières publications de l'IASB définissent des normes de mesure comme la *Current Exit Value* ou encore la *Current Fulfilment Value*. Ainsi, les portefeuilles seraient évalués à partir de leurs valeur de transferts entre compagnies, ou encore à partir des flux de trésorerie auxquels est confronté l'assureur afin d'honorer ses engagements.

## **Bibliographie**

---

### **Ouvrages**

DROESBEKE, al. (1989) *Analyse statistique des durées de vie*, Economica.

PLANCHET F., THEROND P.E. (2006) *Modèles de durée*, Economica.

PLANCHET F., WINTER J. (2006) *Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective*, Economica.

### **Articles**

ANAES (2004) *Arrêts maladie : état des lieux et propositions pour l'amélioration des pratiques*.

ANDERSON J. C. H. (1959) *Gross premium calculations and profit measurement for nonparticipating insurance*.

BRENNAN M. J., XIA Y. (2000) *Dynamic Asset Allocation Under Inflation*.

HARDY M.R., PANJER H.H. (1998) *A credibility approach to mortality risk*. Astin Bulletin vol 28, 269-283.

### **Mémoires et projets d'étude**

ALLAG L. (2008) *Modélisation et Allocation d'Actifs dans le cadre du nouveau référentiel Solvabilité 2*.

CATALDO M, LEGROS J., NGUYEN A. (2008) *Mortalité d'expérience : révision des estimations*.

CHARVET S. (2009) *European Embedded Value / Market Consistent Embedded Value, Options et garanties financières*.

GAUMET A. (2001) *Construction de tables d'expérience pour l'entrée et le maintien en incapacité*.

### **Supports de cours**

PLANCHET F. (2008) *Cours sur les modèles de durée (ISFA)*.

THEROND P.E. (2008) *Cours sur la théorie de la crédibilité (ISFA)*.



## **Rapports du CFO FORUM**

CFO Forum (2004) *EEV Principles*.

CFO Forum (2004) *Basis For Conclusions*.

CFO Forum (2005) *EEV Disclosures and Sensitivities*.

CFO Forum (2008) *MCEV Principles*.

CFO Forum (2008) *MCEV Basis For Conclusions*.

## **Autres**

DREES (2005) *Les interruptions d'activité pour raison de santé au cours de la vie professionnelle*.

GROUPAMA (2007) *Presentation de l'Embedded Value 2007*.

THEROND P.E., PALERM T. (2007) *Valorisation de portefeuilles d'assurance : de nouveaux standards d'Embedded Value*.

OPTIMIND – Dossier Technique (2009) *Les normes IFRS en assurance - Principes de valorisation et de convergence*

## Annexes

---

### 1. Courbe des taux SWAP

Taux de références évalués au 31/12/2007

Maturité	Taux SWAP	Maturité	Taux SWAP	Maturité	Taux SWAP
0	0,0391600000	24	0,0496471456	50	0,0463306508
3 mois	0,0468400106	25	0,0496228536	51	0,0462186103
6 mois	0,0470713210	26	0,0495034196	52	0,0461108903
1	0,0469600000	27	0,0493928446	53	0,0460072457
2	0,0452624626	28	0,0492901783	54	0,0459074495
3	0,0450972960	29	0,0491946015	55	0,0458112912
4	0,0453300604	30	0,0491054043	56	0,0457185755
5	0,0455291660	31	0,0489317351	57	0,0456291209
6	0,0457968987	32	0,0487689464	58	0,0455427581
7	0,0461367379	33	0,0486160467	59	0,0454593296
8	0,0465285749	34	0,0484721614	60	0,0453786885
9	0,0469752515	35	0,0483365162	61	0,0453006972
10	0,0474173024	36	0,0482084230	62	0,0452252273
11	0,0478425456	37	0,0480872681	63	0,0451521585
12	0,0481970467	38	0,0479725028	64	0,0450813779
13	0,0485080911	39	0,0478636344	65	0,0450127798
14	0,0487747741	40	0,0477602200	66	0,0449462647
15	0,0490059542	41	0,0475857778	67	0,0448817392
16	0,0491965672	42	0,0474196693	68	0,0448191153
17	0,0493647839	43	0,0472613114	69	0,0447583101
18	0,0495143324	44	0,0471101738	70	0,0446992457
19	0,0496481571	45	0,0469657739	71	0,0446418482
20	0,0497686139	46	0,0468276709	72	0,0445860482
21	0,0497339072	47	0,0466954617	73	0,0445317797
22	0,0497023567	48	0,0465687768	74	0,0444789807
23	0,0496735505	49	0,0464472772	75	0,0444275922

## 2. Lissage des taux bruts de survenance en incapacité

Le lissage des taux bruts de survenance en incapacité, pour les hommes et pour les femmes, s'est fait par la méthode classique de Whittaker-Henderson. (Pour plus de précision sur cette méthode de lissage, se référer à PLANCHET F., THEROND P.E. (2006)).

Le choix du paramètre, noté  $h$ , se fait en fonction de l'intensité du lissage souhaité. Ce choix a été effectué en tenant compte de deux critères :

- un critère visuel : la courbe lissée doit rester le plus fidèle possible à la courbe des taux bruts.
- un critère prudentiel : la courbe lissée en doit en aucun cas être moins prudente que la courbe des taux bruts.

Ci-dessous sont représentés les différents tests sur la valeur du paramètre.

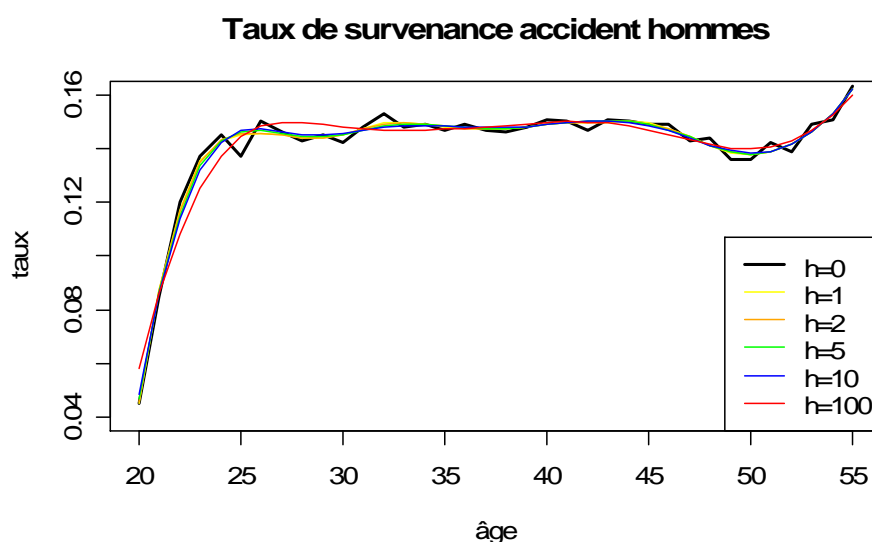


fig.37 : Taux lissés de survenance accident des hommes

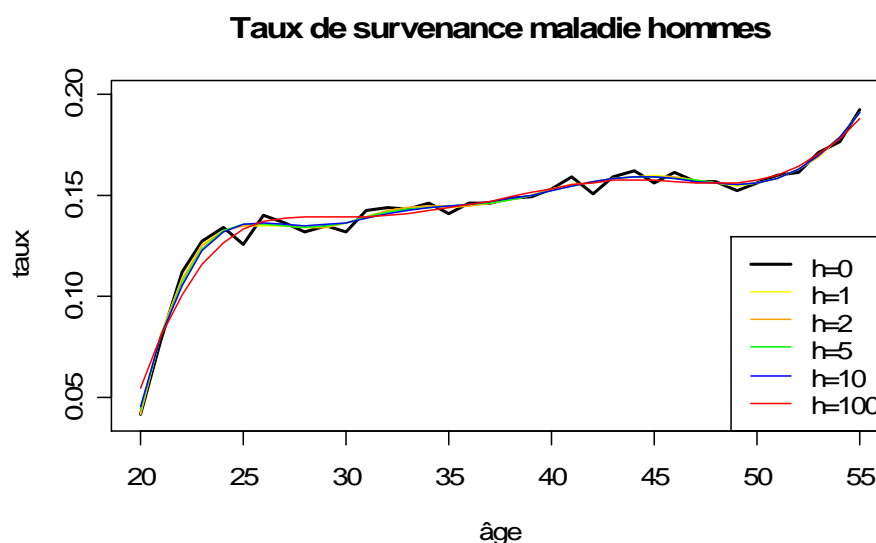


fig.38 : Taux lissés de survenance maladie des hommes

### Taux de survenance accident femmes

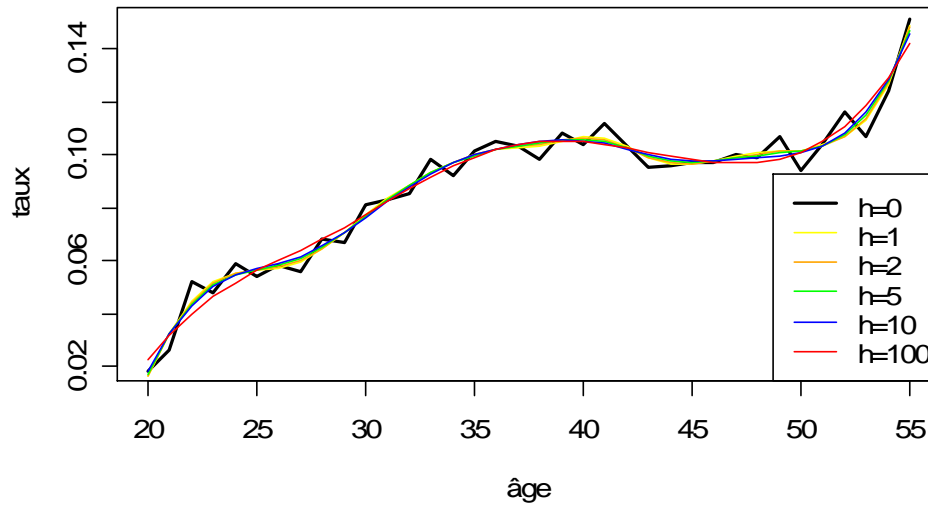


fig.39 : Taux lissés de survenance accident des femmes

### Taux de survenance maladie femmes

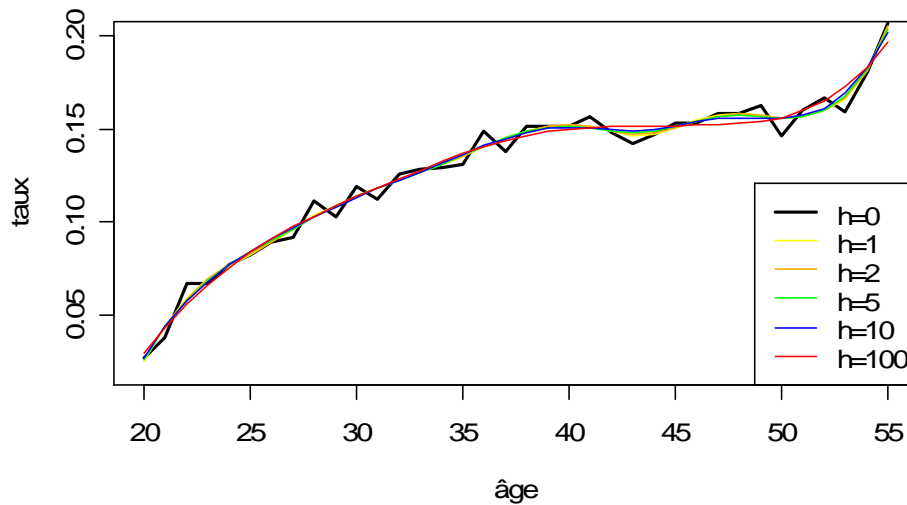


fig.40 : Taux lissés de survenance maladie des femmes

Ces tests montrent que le critère visuel est satisfait quelque soit la valeur du paramètre  $h$ . Graphiquement, il n'est pas possible d'apprécier la prudence des différentes courbes lissées. En moyenne, la courbe lissée est la plus prudente pour  $h = 10$ , cette valeur est donc retenue.

### **3. Test de Student pour la garantie accident**

Un test d'adéquation de Student est effectué sur les couples (0,45 ; 0,45), (0,5 ; 0,5) et (1 ; 1). Il s'agit d'un test d'hypothèse sur les valeurs de provision. L'objectif étant de comparer le montant moyen de la provision issu des tables lissées à celui obtenu à l'aide des tables brutes. Cette dernière valeur étant la référence à atteindre.

Le principe consiste donc, à tester si la provision moyenne issue des tables lissées ( $m_{tl}$ ), peut être considérée comme égale à celle issue des tables brutes ( $m_{tb}$ ).

Ceci revient donc à tester au risque de première espèce  $\alpha$  l'hypothèse nulle  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$ ,  $H_0$  et  $H_1$  étant définies par :

$H_0$  : les écarts observés entre les résultats issus des tables lissées et ceux des tables brutes sont en adéquation.

$H_1$  : les écarts observés entre les résultats issus des tables lissées et ceux des tables brutes sont significatifs.

Par soucis de simplicité, nous supposons que le montant de la provision inscrite sur chaque dossier  $X$  suit une distribution de type loi normale. En effet par indépendance entre les dossiers considérés, l'application du Théorème Central Limite pour une ancienneté et un âge donné nous permet de conclure que la somme des provisions à passer pour tous les individus de même âge et de même ancienneté suit approximativement une loi normale. Le montant moyen de la provision issue des tables lissées est donné par la formule :

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

où  $n$  représente le nombre de dossiers étudiés et  $x_i$  le montant de la provision inscrite au dossier  $i$ .

La variance  $\sigma^2$  inconnue est estimée par la relation suivante :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Pour choisir entre les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  nous utilisons la statistique  $t$  définie par :

$$t = \frac{\bar{x} - m_{tb}}{s/\sqrt{n}}$$

Si l'hypothèse  $H_0$  est vraie, alors la statistique  $t$  suit une loi de Student à  $n-1$  degrés de liberté (comme  $n$  est ici supérieur à 50,  $t$  suit une loi gaussienne centrée réduite). L'hypothèse nulle est alors retenue si  $t$  est inférieur au quantile d'ordre  $1-\alpha/2$  d'une

gaussienne centrée réduite. En fixant l'erreur de première espèce du test à 5 % les résultats obtenus sont les suivants :

Poids du lissage vertical	Poids du lissage horizontal	Valeur du test	Seuil du test
0,45	0,45	1,89	1,96
0,50	0,50	2,05	1,96
1,00	1,00	3,34	1,96

Ainsi le test de Student conduit à rejeter les couples (0,5 ; 0,5) et (1 ; 1) et donc à retenir le couple (0,45 ; 0,45).

#### **4. Détail de la construction du modèle de taux d'inflation**

Avant toute chose, intéressons nous à l'indépendance entre les variables aléatoires. Pour pouvoir projeter de manière efficace une suite finie de variables aléatoires, il faut que ces variables admettent entre elles de la dépendance. Le test de Portemanteau démontre la dépendance des variables aléatoires.

Nous allons pouvoir désormais regarder si la série est stationnaire. La représentation graphique de la fonction d'auto-corrélation est la suivante :

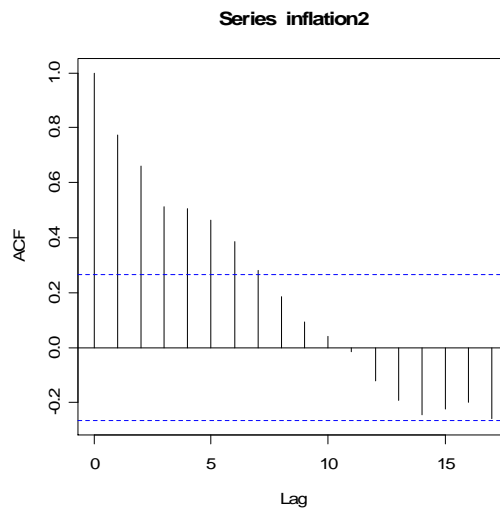


fig.41 : Fonction d'auto-corrélation

Le corrélogramme s'estompe assez rapidement, indiquant que la série est stationnaire.

La série ne semble pas gaussienne. Pour en être persuadé, nous effectuons un test de Shapiro. Ce test indique que la série n'est pas gaussienne. Le test de Student ne peut donc pas être utilisé afin de vérifier si la série est centrée. Nous utilisons alors le test de Wilcoxon. Ce test montre que la série n'est pas centrée.

Une étude plus poussée, en utilisant également la fonction d'autocorrélation partielle, montre que le processus ARMA(1,0) est un modèle approprié.

L'allure des résidus de ce modèle est de la forme suivante :

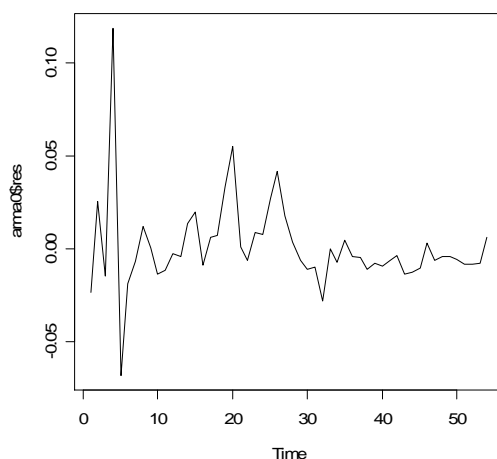


fig.42 : Allure des résidus de l'ARMA(1,0)

Pour vérifier si les résidus de ce modèle forment un bruit blanc nous allons utiliser le test de Ljung box.

La p-valeur de ce test (0,3) est conséquente, statistiquement on ne refuse pas l'hypothèse que les résidus de ce modèle forment un bruit blanc. De plus, d'après le test de Shapiro, les résidus formeraient un bruit blanc gaussien. Le modèle ARMA(1,0) est donc validé.

### Détermination des coefficients

Le logiciel R nous donne l'estimation des coefficients suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0,92 \\ \hat{I} &= 4,98 \% \\ \hat{\sigma}_I &= 5,31 \%\end{aligned}$$

Le critère AIC (Akaike Information Criterion) est satisfaisant.

L'inflation à long terme  $\hat{I}$  est importante, ce qui s'explique par le fait que durant la période d'historique, l'inflation à connu des pics hauts. Notons également que le coefficient de retour à la moyenne est positif.

La simulation ci-dessous porte sur 10 000 simulations. Seules 50 simulations sont tracées, pour des raisons de visibilité.



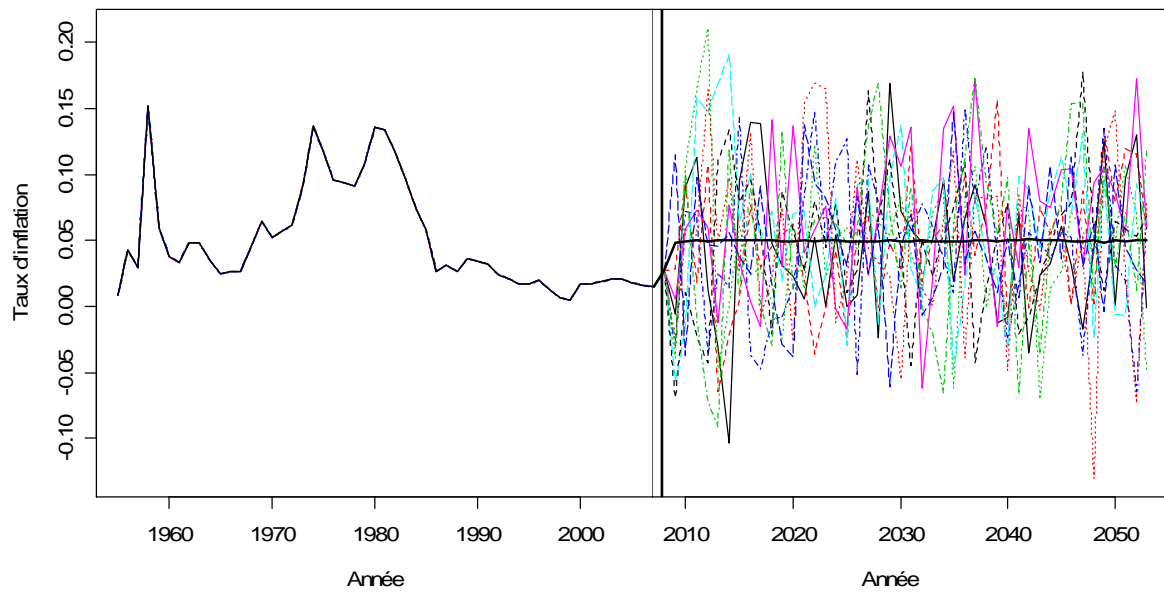


fig.43 : Taux d'inflation projeté sur 45 ans

La courbe en gras représente la moyenne des 10 000 simulations. Cette courbe se stabilise assez rapidement sur la valeur du taux d'inflation à long terme. Une première simulation à été faite précédemment pour mesurer l'adéquation du modèle aux données réelles.