

**Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine
pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 20 novembre 2012

Par : Dyani JOUSSET

Titre: Modèles de durée et segmentation en assurance vie : impact de la *gender directive*

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaires :*

ECARY Brigitte

HESS Christian

Signature :

Entreprise :

Nom : AXA FRANCE

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

*Membres présents du jury du Master
Actuariat de Dauphine :*

ELIE Romuald

PIERRE LOTI VIAUD Daniel

Nom : RAYBAUD Violaine

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat :

**Modèles de durée et segmentation en assurance vie : impact de la
*gender directive.***

**Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine pour l'obtention du diplôme du
Master Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaire**

Candidat : Dyani JOUSSET

Directeur du mémoire en entreprise : Violaine RAYBAUD

Tuteur académique : Daniel PIERRE-LOTI-VIAUD

2012



Modèles de durée et segmentation en assurance vie : impact de la *gender* directive.

Note de synthèse

Contexte réglementaire

La directive 2004/113/CE de 2004 dite « gender directive » interdit toute discrimination fondée sur le sexe dans l'accès aux services.

L'arrêt « test-achat » de la Cour de Justice Européenne du 1^{er} mars 2011 a généralisé la « *gender directive* » aux contrats d'assurance vie qui bénéficiaient jusque-là d'une dérogation, lorsque cette discrimination était fondée sur des critères actuariels. A compter du 21 décembre 2012, il ne sera plus possible pour les assurances d'avoir une tarification différente en fonction du sexe du client.

Constat

La clientèle traditionnelle des produits viagers d'assurance vie est majoritairement composée d'hommes (environ 60%). L'un des paramètres utilisé pour la tarification des produits viagers est la mortalité. La mortalité des hommes étant supérieure à celle des femmes, les tarifs pour les hommes des produits viagers sont actuellement inférieurs à ceux pour les femmes (l'assureur paye en moyenne moins longtemps la rente à un homme qu'à une femme).

Pistes d'études

Dans ce mémoire, nous avons cherché à identifier et à quantifier les impacts techniques de la directive pour l'assureur mais aussi les impacts en termes d'enjeux commerciaux (comment faire pour que les hommes restent clients des produits viagers ? Les produits viagers resteront-ils des produits attractifs ?...).

Nous avons mesuré les impacts de la directive afin d'en anticiper les principales conséquences. Pour ce faire, nous avons mené une étude sur la mortalité du portefeuille afin de comparer son niveau par rapport à celui des tables réglementaires. Nous avons construit une table de mortalité par génération d'expérience (avec une proportion d'hommes et de femmes fixée) afin de pouvoir quantifier les impacts de la directive.

Ensuite, nous avons étudié, grâce à la théorie des jeux, les enjeux commerciaux potentiels de la directive et plus généralement le comportement des assurés face aux risques.

Enfin, nous présentons une méthode applicable en pratique de segmentation des clients pour créer des groupes homogènes de mortalité.

Démarche

La première partie de notre étude a été consacrée à l'estimation de la mortalité. Pour ce faire, nous avons utilisé l'estimateur de Kaplan-Meier afin de tenir compte des phénomènes de censure et de troncature. Pour des raisons opérationnelles, nous avons observé les individus au jour le jour. Les tables de mortalités brutes obtenues ont été lissées avec la méthode de Whittaker-Henderson. Cette approche nous a permis d'avoir une idée du niveau général de la mortalité du portefeuille.

Cependant, les engagements viagers sont ancrés par définition dans la durée. Pour obtenir la dynamique de la mortalité, nous avons calculé les taux annuels de diminution de la mortalité par âges. Ayant une forte volatilité dans nos résultats, nous avons utilisé des données de la population française pour calculer les taux annuels de diminution de la mortalité par âge. Nous avons gardé cette même forme de diminution de la mortalité française et nous l'avons adaptée à notre population d'assurés.

A partir des résultats précédents et en nous inspirant des méthodes des triangles de liquidation de l'assurance dommage, nous avons reconstitué la mortalité des générations 1940 à 1980. Pour ce faire nous avons calculé la mortalité de la génération 1940 à partir de la mortalité lissée construite avec l'ensemble des données du portefeuille. Nous avons ensuite projeté la mortalité de la génération 1940 pour construire la mortalité des générations suivantes. La fermeture de la table a été effectuée avec le modèle de Denuit & Goderniaux. Nous avons *capé* la mortalité avec un taux maximal de 0,6.

La table d'expérience nous a permis de calculer le coût d'une rente viagère pour différentes générations. Nous l'avons comparé à celui calculé à partir des tables réglementaires actuellement en vigueur. Il s'avère que la mortalité sans prise en compte du sexe se situe entre les tables réglementaires par génération et fluctue en fonction de la proportion d'hommes et de femmes dans le portefeuille (au cours de notre étude nous avons considéré cette proportion constante). Néanmoins, la diminution de la mortalité de génération en génération prévue par la table réglementaire est inférieure à celle que nous avons constatée ce qui présente un risque si les tables actuellement en vigueur continuent d'être utilisées pour les générations supérieures à 1965.

En partant de nos résultats, nous avons étudié l'impact de la directive en termes de tarification, de résultat technique et de provisionnement. Les impacts sur le provisionnement risquent d'être négligeables. Le tarif va probablement rester inchangé pour les femmes et augmenter pour les hommes. L'augmentation du tarif pour les hommes va entraîner une hausse du résultat technique.

On distingue deux catégories de produits viagers en assurance vie individuelle :

- L'épargne convertible en rente. Pour ces produits la conversion de l'épargne en rente viagère émane d'un choix du client.
- Les produits de retraite réglementés (Loi Madelin, Perp...). Pour ces produits, la conversion en rente viagère est obligatoire (sous certaines conditions, il est possible de sortir en capital, par exemple, pour le perp il est possible de sortir 20% du montant de l'épargne en capital).

En tarification unisexe, un homme anticipant que sa longévité sera inférieure à celle du groupe des rentiers (incluant les femmes) ne souscrira plus d'assurance vie avec sortie en rente viagère facultative. En poussant ce raisonnement à son extrême et en utilisant la théorie des jeux, on arrive rapidement à la conclusion qu'à terme, les portefeuilles de produits retraites non réglementés seront composés à 100% de femmes. Cette vision est certes très catastrophiste mais permet de saisir les enjeux de la directive. Nous avons abordé la théorie des jeux et la sélection adverse pour comprendre le comportement des clients face aux risques. Nous avons montré que les assureurs peuvent, en utilisant une table de mortalité femme et en jouant avec les différents frais et la participation aux bénéfices, retomber dans la pratique sur des tarifs revenant à l'utilisation de tables par sexe.

Dès lors, pour pouvoir capter toute la clientèle potentielle, il apparaît nécessaire d'avoir un tarif qui corresponde aux risques réellement encourus, en ayant recours à une segmentation des clients sur d'autres critères que celui du sexe. Par exemple, on peut proposer différents produits en fonction de la capacité d'épargne du client. En effet, plus le client a un pouvoir d'épargne important, plus sa longévité sera importante. Cette segmentation peut aussi se faire par des critères qui reviennent à une fragmentation par sexe, conformément aux lignes directrices de l'application de la directive qui précise que « L'utilisation de facteurs de risque susceptibles d'être corrélés au sexe reste par conséquent possible, dès lors qu'il s'agit bel et bien de facteurs de risque réels ». Nous présentons un modèle de classification permettant la mise en place de cette segmentation.

Conclusion

Actuellement, les conditions de souscription ne sont pas suffisamment strictes, si bien que, même si la mortalité en nombre est supérieure à la mortalité des tables réglementaires, les marges techniques des assureurs sont basses mais restent prudentes. C'est-à-dire qu'une petite fraction de rentier possédant des montants de rente importants vit plus longtemps que la moyenne et diminue ainsi fortement les gains des assureurs.

La baisse de mortalité anticipée par les tables réglementaires actuellement en vigueur est inférieure à celle constatée. Les tables en vigueur sont prudentes pour les produits actuellement en phase de rente, mais ne le seront plus lorsque les produits actuellement en phase d'épargne sortiront en rente. Si bien que La directive va probablement avoir l'avantage d'introduire une marge de prudence supplémentaire qui va permettre de couvrir ces risques futurs.

La directive va toutefois introduire une distorsion au niveau de la tarification. Le prix payé par le client ne correspondra plus au risque réellement couru par l'assureur (car tarification unisexe alors que le sexe est un facteur de risque important). Ce qui, sans réaction des assureurs, peut entraîner une baisse du chiffre d'affaires.

Dès lors, l'assureur peut opter pour une segmentation importante de son offre commerciale et modifier ses conditions de souscription pour mieux appréhender le risque en créant des groupes de mortalité homogènes. Une autre approche peut également être de développer les produits viagers tels que les rentes à annuités garanties ou les rentes à annuités variables où la part de la table de mortalité utilisée dans le tarif est inférieure à celle des produits viagers classiques.

Summary note

Statutory context

The directive 2004 / 113 / CE of 2004 said "directive gender" forbids any discrimination established on the sex in the access to services

The ruling "test-achat" of the European Court of justice of March 1st, 2011 widen "gender directive" to the life insurance policies which benefited up to there from a dispensation, when this discrimination was established on actuarial criteria. As from December 21st, 2012, it will not be possible any more for the insurances to have a different pricing according to the sex of the customer.

Report

The traditional clientele of life insurance products mainly consists of men (approximately 60 %). One of the parameters used for the pricing of life insurance products is the mortality. The mortality of the men is superior than women mortality, the price rates for the men of life products is lower than those for the women (the insurer pays on average less for a long time the pension to a man than to a woman).

Main studies

In this report, we tried to identify and to quantify the technical impacts of the directive for the insurer but also the impacts in terms of commercial stakes (how is that the men remain customers of life products ? Will life products remain attractive?).

We measured the impacts of the directive to anticipate the main consequences. In order to do it, we led a study on mortality of the portfolio to compare its level with the statutory mortality tables. We built a life table by generation of experience (with a proportion of men and women fixed) to be able to quantify the impacts of the directive.

Then, we studied with game theory the potential commercial stakes of the directive and more generally the behavior of the insurants in front of risks.

Finally, we present an applicable method in practice of segmentation of the customers to create homogeneous groups of mortality.

Approach

The first part of our study was dedicated to the estimation of the mortality. To do it, we used the Kaplan-Meier estimator to take into account phenomena of censorship and truncation. For operational reasons, we observed the individuals from day to day. The obtained life tables were smoothed with the method of Whittaker-Henderson. This approach allowed us to have an idea of the general level of the mortality of the portfolio.

However, the commitments for life are anchored by long-term definitions. To obtain the dynamics of the mortality, we calculated the annual rates of decrease of the mortality by ages. Having a strong volatility in our results, we used data of the French population to calculate the annual rates of decrease of the mortality by age. We kept the same shape of decrease of the French mortality and we adapted it to our population of insureds.

From the previous results and by inspiring us from methods of the triangles of liquidation of the property and casualty insurance, we reconstituted the mortality of the generations 1940 to 1980. To do it we calculated the mortality of the generation 1940 from the smoothed mortality built with all the data of the portfolio. Then we planned the mortality of the generation 1940 to build the mortality of the following generations. The closure of the table was made with the model of Denuit and Goderniaux. We capped the mortality with a maximal rate of 0,6.

The table of experience allowed us to calculate the cost of a life annuity for various generations. We compared it to those calculated from the current statutory tables. It turns out that the mortality without consideration of the sex is situated between the statutory tables by generation and fluctuates according to the proportion of men and women in the portfolio (during our study we considered this proportion as constant). Nevertheless, the decrease of the mortality from generation to generation planned by the statutory table is lower than that we noticed which presents a risk if the current tables continue to be used for the generations superior in 1975.

With our results, we studied the impact of the directive in terms of pricing, technical result and funding. The impacts on the funding may be unimportant. The price rate is probably going to remain unchanged for the women and to increase for the men. The increase of the price rate for the men is going to lead to an increase of the technical result.

We distinguish two categories of life annuities product in individual life insurance

- The savings convertible into pension. For these products the conversion of the savings in life annuity emanates from a choice of the customer.
- The products of pension regulated by laws (Madelin law, Perp). For these products, the conversion in life annuity is compulsory (under certain conditions, it is possible to go out in capital, for example, for the perp it is possible to take out 20 % of the amount of the savings in capital).

In unisex pricing, a man anticipating that his longevity will be lower than that of the group (including the women) will take no more life insurance with exit in optional life annuity. By pushing this reasoning to its extreme and by using the game theory, we quickly arrive at the conclusion that portfolios pensions will consist to 100 % of women.

This vision is certainly very catastrophist but allows to measure the challenge of the directive. We approached the games theory and the adverse selection to understand the behavior of the customers in front of risks. We showed that the insurers can, by using a woman life table and by playing with the various expenses and the profit-sharing, lead into the practice on rates returning to the use of tables by sex.

From then on, to be able to get all the prospect, it seems necessary to have a price rate which match to the really incurred risks, by turning to a segmentation of the customers on the other criteria that the sex. For example, we can propose various products according to the capacity of savings of the customer. Indeed, the more the customer have an important power of savings, the more his longevity will be important. This segmentation can also be made by criteria which return to a fragmentation by sex, according to the guidelines of the application of the directive which specifies that "The use of risk factors susceptible to be correlated in the sex remains consequently possible, since it is well and truly a real risk factors". We present a model of classification allowing the implementation of this segmentation.

Conclusion

At present, the conditions of subscriptions are not strict enough, so that, even if the mortality in number is superior to the mortality of the statutory tables, the technical margins of the insurers are low but remain careful. That is a small fraction of person possessing important amounts of pensions lives longer than the average and decreases so strongly the earnings of the insurers.

The reduction in mortality anticipated by the current statutory tables is lower than that noticed. The current tables are careful for products at present phase of pension, but will not be it any more when products at present phase of savings shall go out in pension. The directive is probably going to have the advantage to introduce a margin of additional caution which is going to allow to cover these future risks.

The directive is however going to introduce a distortion at the level of the pricing. The price paid by the customer will not correspond any more to the risk really run by the insurer (because unisex pricing while the sex is an important risk factor). Without reaction of the insurers, can lead to a reduction in the figure of business.

From then on, the insurer can opt for an important segmentation of his sales offer and modify his conditions of subscription to dread better the risk by creating homogeneous groups of mortality. Another approach can also be to develop products for life such as the pensions with guaranteed annuities or the pensions with variable annuities where the part of the life table used in the price rate is lower than that of the classic products for life.

Mots clefs : *gender directive*, table de mortalité, estimateur de Kaplan Meier, lissage Whittaker-Henderson, diminution de la mortalité, antisélection, segmentation, classification.

Résumé :

L'arrêt « test-achat » de la Cour de Justice Européenne du 1er mars 2011 a entraîné la généralisation de la 'gender directive' aux contrats d'assurance vie qui bénéficiaient jusque-là d'une dérogation lorsque cette discrimination était fondée sur des critères actuariels. Cette directive étend l'interdiction de la discrimination liée au sexe pour les contrats d'assurance vie avec pour date d'application le 21 décembre 2012. Dès lors, il sera impossible pour les nouveaux contrats de tarifier en fonction du sexe de l'individu.

Dans ce contexte, il est fondamental pour les assureurs d'avoir une vision précise de leur portefeuille pour pouvoir anticiper les conséquences de la directive.

La directive va conduire à une offre commerciale plus vaste de la part des assureurs. Cette offre aura pour but d'augmenter la segmentation des clients dans une optique de contrôle du risque d'antisélection et du risque viager.

Key words: *gender directive*, mortality table, Kaplan Meier estimator, Whittaker-Henderson, deceleration of mortality, adverse selection, statistical classification.

Abstract:

The ruling "test-achat" of the European Court of justice of March 1st, 2011 has lead the implementation of the 'gender directive ', generalized to life insurance policies which benefited up to there from a dispensation when this discrimination was established on actuarial criteria. This directive widens the ban on the discrimination connected to the sex for life insurance policies with for date of application on December 21st, 2012. From then, it will be impossible for the new contracts to fix the price according to the sex of the customer.

In this context it is fundamental for the insurers to have a clear vision of their portfolio to be able to anticipate the consequences of the directive.

The directive is going to lead to a vaster sales offer of the insurers. This one aiming at increasing segmentation of customers in order to control adverse selection and longevity risks.

Remerciements

Je souhaite en premier lieu exprimer ma gratitude envers ma tutrice de stage Violaine Raybaud pour ses conseils avisés, pour la rigueur qu'elle a su me transmettre et enfin pour sa gentillesse et sa patience.

Je remercie mon tuteur académique, Daniel Pierre-Loti-Viaud pour tous les conseils qu'il a pu me prodiguer.

Je remercie Caroline Atlani, mon manager au sein d'AXA France, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, pour sa disponibilité, sa gentillesse, et pour la confiance qu'elle m'a accordée dès le début de mon stage.

Je remercie également les consultants Winter&Associés et Fixage de la direction marché de l'épargne d'AXA pour les conseils qu'ils ont pu me donner mais aussi pour les moments passés ensemble lors des pauses et des repas.

Je remercie les équipes des Comptes, du RMF, de l'AGIPI avec qui j'ai travaillé et échangé tout au long de ma mission.

Je remercie Olivier Wintemberger et Romuald Elie qui m'ont donné la chance d'intégrer le master 2 actuariat de l'université paris 9 Dauphine. Je remercie Judith Ntsame pour sa gentillesse et sa bienveillance.

Je remercie l'ensemble des équipes pédagogiques du Master 2 actuariat pour la qualité des cours dispensés.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien tout au long de cette formidable épreuve.

SOMMAIRE

1. Introduction.....	17
1.1. Impact technique de la directive	18
1.2. Impact marketing de la directive	19
1.3. Pistes d'études	20
2. Impact technique de l'application de table unisexe.....	21
2.1. Estimation de la mortalité du portefeuille	21
2.1.1. Les données utilisées pour l'analyse	22
2.1.2. Estimation de la mortalité brute.....	25
2.1.3. Lissage des tables obtenues	38
2.2. Estimation de la diminution de la mortalité et comparaison avec les tables réglementaires. 53	
2.2.1. Etude de l'effet cohorte	53
2.2.2. Construction d'une table d'expérience unisexe par projection des taux estimés	58
2.3. Utilisation de la table d'expérience pour mesurer les impacts techniques de la directive	63
2.3.1. Tarification.....	63
2.3.2. Provisionnement.....	66
2.3.3. Résultat technique	67
2.3.4. Contrat en stock & réseau de distribution.....	67
2.4. Conclusion	68
3. Impact marketing	69
3.1. théorie des jeux.....	69
3.1.1. Bref description d'un jeu.....	69
3.1.2. Présentation d'un jeu simple	70
3.2. Application de la théorie des jeux en assurance vie.....	71
3.3. Sélection adverse en assurance vie	73
4. Etude produit.....	75
4.1. Diminuer le risque d'antisélection.....	75
4.1.1. Inciter les clients à dévoiler leur profil de risque et à s'auto-segmenter	75
4.1.2. Segmenter les clients sur des critères objectifs	77

4.2.	Conclusion	80
5.	Conclusion.....	81
6.	Table des représentations graphiques.....	82
7.	Bibliographies.....	83
8.	Annexes	85
8.1.	Annexe 1 : Définition	85
8.2.	Annexe 2 : Variance de l'estimateur de Kaplan Meier	86
8.3.	Annexe 3 : Calcul des intervalles de confiance pour l'estimateur de Kaplan Meier	87
8.4.	Annexe 4 : Lissage par moyennes mobiles :	88
8.5.	Annexe 5 : Adaptation de la loi de Makeham à une table d'expérience.....	89
8.6.	Annexe 6 : Lissage relationnel.....	93
8.7.	Annexe 7 : Article A335-1	94
8.8.	Annexe 8 : Notations actuarielles	95
8.9.	Annexe 9 : Estimateur actuariel, binomial, troncature-censure	95

Note importante

Afin de ne pas rendre ce mémoire confidentiel, l'ensemble des données d'expérience AXA utilisées ont été modifiées. Les données issues d'autres sources restent conformes à la réalité.

1. INTRODUCTION

Depuis le début de l'année 2012, l'assurance-vie enregistre une collecte nette négative de 5 milliards d'euros. L'encours des contrats d'assurance vie (provisions mathématiques + provisions pour participation aux bénéficiaires¹) s'élève à 1 371,5 milliards d'euros.

En 2011, les régimes obligatoires de retraite ont versé 275,4 milliards d'euros de prestations. De leur côté, selon une estimation FFSA-GEMA², les organismes d'assurances complémentaires et les organismes gestionnaires de Perco ont versé 6,2 milliards d'euros de prestations (hors indemnités de fin de carrière et garanties en capital), soit 2,2 % de l'ensemble des prestations versées au titre de la retraite. Les contrats de particuliers enregistrent une nette progression (+ 6 %) de leurs cotisations. Ce bon résultat permet de compenser partiellement la baisse générale de l'ensemble des cotisations (-5 %) provoquée par la diminution de 13 % des cotisations des contrats de retraite d'entreprises.

Les contrats de retraite « Madelin » représentent la part la plus importante (25 %) des cotisations des contrats retraite de particuliers. Ils se situent devant les Perp (13 %) et les contrats « Madelin agricole » (3 %).

Pour les contrats d'entreprises, les contrats à cotisations définies « article 83 » représentent 21 % des cotisations. Viennent ensuite les contrats à prestations définies « article 39 » (17 %), les contrats d'indemnités de fin de carrière (12 %) et les autres contrats de retraite d'entreprises (3 %).

Au 31 décembre 2011, les montants des engagements d'assurance au titre des contrats d'assurance retraite des particuliers s'élèvent à 136,8 milliards d'euros, soit une progression de 2 % sur un an.

Les provisions consacrées à la retraite ont été multipliées par 2,3 en dix ans et représentent 10 % de l'ensemble des provisions mathématiques des contrats d'assurance vie.

La structure de la population française ne va pas permettre au système de retraite obligatoire de maintenir le niveau de vie des Français. Ce fait, combiné avec des offres fiscalement intéressantes (type loi Madelin, Perp...), entraîne une augmentation des sorties en rente des produits d'épargne individuelle.

L'un des principaux critères utilisés pour segmenter les portefeuilles en assurance vie est le sexe de l'assuré.

¹ Définition annexe 1

² Fédération française des sociétés d'assurances et Groupement des entreprises mutuelles d'assurance.

L'arrêt « test-achat » de la Cour de Justice Européenne du 1er mars 2011 a généralisé la 'gender directive' aux contrats d'assurance vie qui bénéficiaient jusque-là d'une dérogation lorsque cette discrimination était fondée sur des critères actuariels. Cette directive étend l'interdiction de la discrimination liée au sexe pour les contrats d'assurance vie avec pour date d'application le 21 décembre 2012. Dès lors, il sera impossible pour les nouveaux contrats de tarifier en fonction du sexe de l'individu.

Quels sont les impacts de la directive en termes d'enjeux commerciaux (comment faire pour que les hommes restent clients des produits viagers, les produits viagers vont-ils rester des produits attractifs...), ainsi que les impacts techniques pour l'assureur ? Dans la première phase de l'étude, il s'agira de quantifier le risque viager d'un portefeuille de rentiers pour voir comment il se situe par rapport aux tables de mortalité réglementaires en vigueur. Ensuite, il sera question de l'impact potentiel au niveau des ventes.

En effet, cette augmentation des tarifs pour les hommes (plus de 60% de la clientèle) peut entraîner une désertification des produits viagers pour les bas risques qu'ils représentent. Afin de mieux comprendre ce phénomène potentiel, nous l'aborderons à travers la théorie des jeux³.

Quoi qu'il en soit, il sera toujours possible d'utiliser des critères de souscription, corrélés au sexe de l'individu ou en fonction de critères permettant de créer des groupes homogènes en termes de durée de vie (catégorie socio-professionnelle par exemple).

1.1. IMPACT TECHNIQUE DE LA DIRECTIVE

Dans ce contexte, il apparaît intéressant pour les assureurs d'analyser la mortalité des leurs rentiers et d'étudier l'impact de la directive en termes de :

- Tarification & Résultat technique : L'article A335-1 du code des assurances stipule qu'en cas d'utilisation d'une table d'expérience, celle-ci ne peut pas être moins prudente que les « tables homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances, établies par sexe, sur la base de populations d'assurés pour les contrats de rente viagère ». De plus, en cas d'application d'une table unique, celle-ci doit être la plus prudente. Dans l'état actuel des choses, il s'agit donc de la table tgf-05.
- Provisionnement : l'article A331-1-1 du code des assurances prévoit que les tables utilisées pour les provisions des contrats viagers doivent être établies d'après « les tables de mortalité appropriées mentionnées à l'article A. 335-1 en vigueur à l'époque de l'application du tarif ».

³ Définie dans la partie 3.1 de ce mémoire

- Le périmètre : dans quelle proportion la directive va-t-elle impacter le portefeuille ? Qu'en sera-t-il pour les contrats en stock (contrats souscrits avant la mise en place de la directive) et pour les affaires nouvelles (contrats souscrits après la mise en place de la directive). Par exemple, une association qui transfère son risque à un assureur ne modifie pas son contrat avec l'assureur lorsqu'un nouveau client adhère à l'association, dans quel cas serons-nous (ancien contrat ou nouveau contrat) ? Comment communiquer aux réseaux de distribution et quelle stratégie commerciale adopter ?

1.2. IMPACT MARKETING DE LA DIRECTIVE

En tarification unisexe, un homme anticipant que sa longévité sera inférieure à celle du groupe des rentiers (incluant les femmes) ne souscrira plus d'assurance vie avec sortie en rente viagère. En poussant ce raisonnement à son extrême et en utilisant la théorie des jeux, on arrive rapidement à la conclusion qu'à terme, les portefeuilles seront composés à 100% de femmes. Cette vision est certes très catastrophiste mais permet de saisir les enjeux de la directive.

Des lors, pour pouvoir capter toute la population, il apparaît nécessaire d'avoir un tarif qui corresponde aux risques réellement courus en ayant recours à une segmentation de la clientèle sur d'autres critères que celui du sexe. Cette segmentation peut se faire par des critères qui reviennent à une fragmentation par sexe, conformément aux lignes directrices de l'application de la directive qui précise que « L'utilisation de facteurs de risque susceptibles d'être corrélés au sexe reste par conséquent possible, dès lors qu'il s'agit bel et bien de facteurs de risque réels ».

Par exemple, il est possible en assurance auto d'utiliser la puissance de la voiture qui est un facteur de risque réel concernant particulièrement les hommes. Ce même facteur peut être utilisé en assurance vie. En effet, les accidents mortels sont plus importants avec des voitures puissantes. Il reste donc possible d'utiliser le sexe, pour différencier le portefeuille. Néanmoins l'utilisation d'une table de mortalité réglementaire unique (ou d'expérience plus prudente) peut poser problème pour avoir des tarifs moindres pour les bas risques. Cependant, jouer avec les différents frais et avec la participation aux bénéfices permet dans la pratique de retomber sur des tarifs revenant à l'utilisation de tables par sexe.

1.3. PISTES D'ETUDES

Nous cherchons à mesurer les impacts de la directive afin d'en anticiper les principales conséquences. Pour ce faire nous allons mener une étude de la mortalité du portefeuille pour voir son niveau par rapport à celui des tables réglementaires. Nous construirons ensuite une table d'expérience par génération afin de pouvoir quantifier les impacts de la directive avec une proportion d'hommes et de femmes fixée.

Ensuite nous étudierons, grâce à la théorie des jeux, les enjeux potentiels de la directive et plus généralement le comportement des assurés face aux risques.

Nous ferons une étude des critères permettant cette segmentation et la mise en place d'une méthode applicable en pratique.

2. IMPACT TECHNIQUE DE L'APPLICATION DE TABLE UNISEXE

Traditionnellement les critères de segmentation en assurance vie sont le sexe de l'assuré, l'âge et la catégorie fumeur/non-fumeur. Le passage à une tarification unisexe va avoir un impact technique important suite aux modifications des tables de mortalité. En effet, l'article A 335-1 du code des assurances précise qu'en cas d'utilisation d'une table unique, celle-ci doit être la plus prudente. De plus l'introduction d'une table intermédiaire entre celle des femmes et des hommes est peu probable car la directive peut entraîner une fuite des hommes, ainsi on se retrouverait avec une table intermédiaire pour couvrir une majorité de femmes.

Afin de mesurer de manière précise les impacts du passage en unisexe sur le périmètre épargne individuelle nous allons dans un premier temps estimer la mortalité du portefeuille afin de voir comment elle se situe par rapport aux tables en vigueur, à savoir tgh/tgf-05. Ensuite nous construirons une table de mortalité d'expérience et enfin mesurerons les conséquences en termes de tarification, résultat technique, provisionnement.

2.1. ESTIMATION DE LA MORTALITE DU PORTEFEUILLE

L'estimation de la mortalité du portefeuille se décompose en trois grandes étapes :

- Traitement des données afin d'éliminer les données qui perturberaient l'étude.
- Estimation de la mortalité brute.
- Lissage des tables ainsi obtenues afin de gommer les aléas liés à l'estimation (par exemple une diminution de la mortalité entre deux âges).

2.1.1. LES DONNEES UTILISEES POUR L'ANALYSE

2.1.1.1. LA BASE DE DONNEES

Les données concernant les rentes sont stockées dans un système de gestion sous Access. Il s'agit d'une base de données contenant toutes les informations sur les rentes. Ainsi pour chaque ligne de la base nous avons à notre disposition plus de 100 variables pouvant aller du nom du produit jusqu' à l'adresse du client. Nous disposons de toutes les variables nécessaires pour mener à bien notre analyse.

Dans un premier temps la base qui a été retenue pour l'analyse a été celle du 31 décembre 2011. Puis, pendant que nous menions notre analyse, la base a été mise à jour. La mise à jour n'a pas entraîné de modification de nos codes SAS, ainsi nous avons finalement retenu pour l'étude la base du 31/05/2012. Elle contient 92 213 observations initiales. Cette base doit faire l'objet d'un retraitement pour deux raisons essentielles :

- Elle comporte l'ensemble des rentes AXA (rentes issues des contrats Vie Individuelles, mais également rentes issues des contrats IARD, ...).
- Elle doit être « épurée » (élimination des observations aberrantes, par exemple, un rentier décédé avant la liquidation de sa rente viagère).

2.1.1.2. LE TRAITEMENT APPLIQUE A LA BASE DE DONNEES

La base contient toutes les observations depuis sa création. Ainsi elle est très complète et nécessite un retraitement. Par exemple, lorsqu'il y a des erreurs de saisie dans la base, la rente n'est pas effacée, elle est clôturée pour motif '*erreur de saisie*' et une nouvelle ligne est créée dans la base.

Les étapes principales du traitement des données ont été :

- Sélection des rentes épargne (Branche 'EP') : 59 253 lignes.
- Sélection des contrats « Vie Individuelles » grâce à la variable unité juridique. Nombre d'observations éliminées : 7 361.
- Restriction du périmètre aux rentes présentant un risque viager (suppression des rentes certaines). Nombre d'observations éliminées : 1 218.
- Elimination des variables inutiles pour l'étude (celles qui ne donnent aucune indication sur la mortalité), par exemple le numéro de téléphone.
- Suppression des observations aberrantes (rentes clôturées avant leur liquidation, décès avant liquidation de la rente viagère...). Nombre d'observations éliminées : 6 745. Il s'agit principalement de rachat de produit. La rente est liquidée et clôturée en même temps.
- Traitement des multi détenteurs par la construction d'une seconde base pour l'estimation de la mortalité avec une observation par individu avec :

- Minimisation de la date d'entrée dans la base. On prend comme date d'entrée la première fois que l'individu entre dans la base, ce qui dépend de la date de liquidation de ses rentes.
- Maximisation de la date de sortie, bien que dans la quasi-totalité des cas, pour un même détenteur, la date de sortie soit la même pour tous ses contrats (car la sortie s'effectue principalement par décès).

La base nettoyée contient 44 159 rentes appartenant à 32 151 individus distincts. Ainsi un rentier possède en moyenne 1,37 rente.

2.1.1.3. STATISTIQUES DESCRIPTIVES DES DONNEES

Le portefeuille est constitué majoritairement d'hommes et la quasi-totalité des rentes sont viagères. Le motif principal de sortie de la base est le décès. Les rentes clôturées pour '*autres motifs de sortie*' (par exemple le rachat du contrat) représentent environ 2% rentes

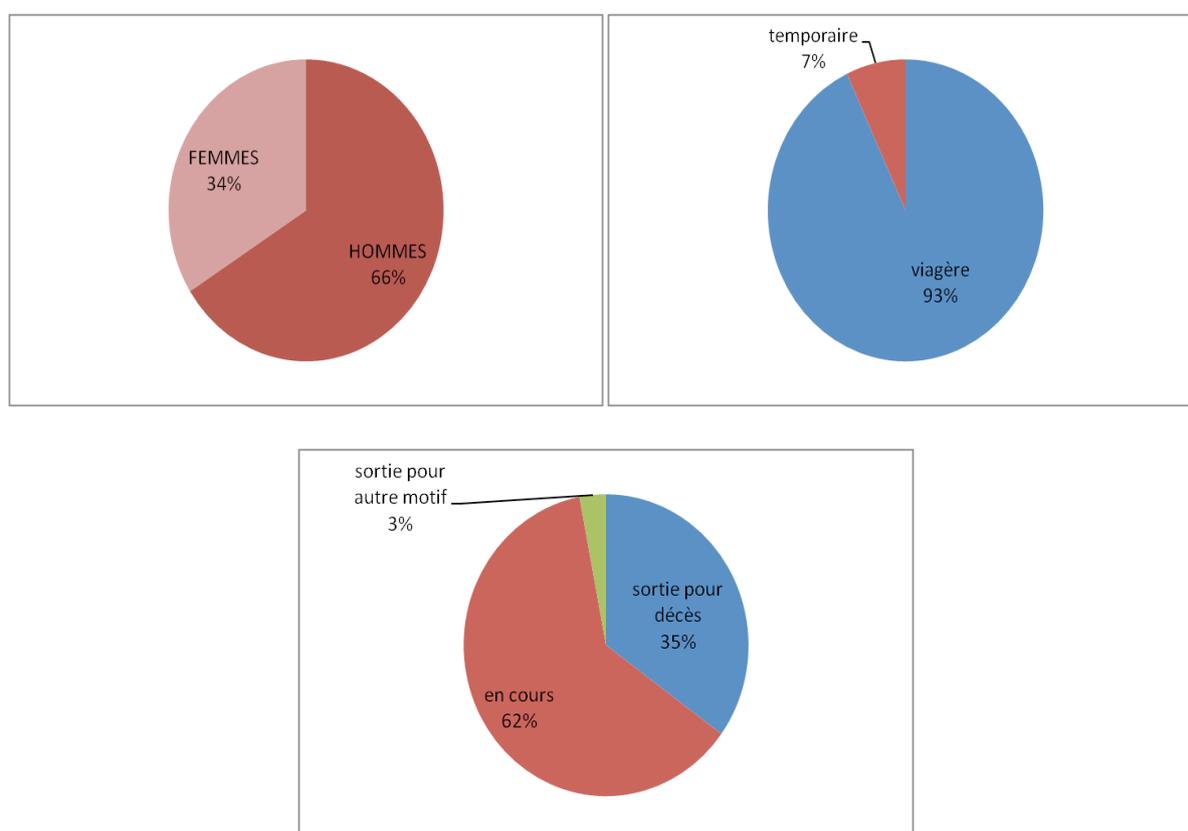


Figure i : proportion d'hommes et de femmes, type de rente et motif de sortie.

Les effectifs sous risque augmentent au cours des années et le nombre de décès fluctue peu, ce qui semble à première vue surprenant.

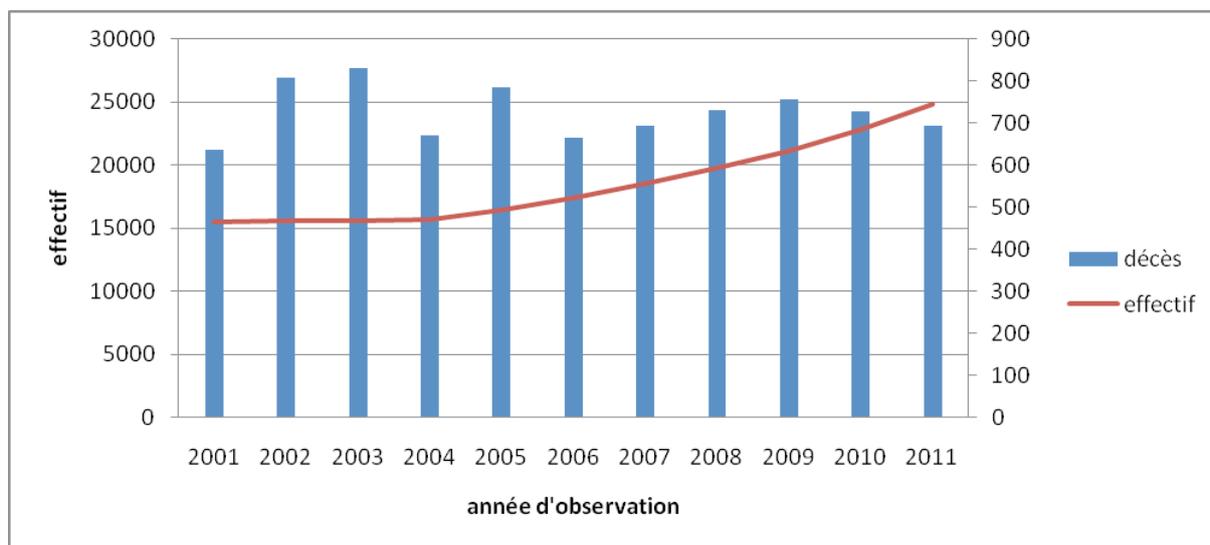


Figure ii : effectif sous risque et décès par année d'observation.

Afin de comprendre ce phénomène nous allons regarder la répartition des effectifs sous risque par âge pour les années 2001, 2006 et 2011.

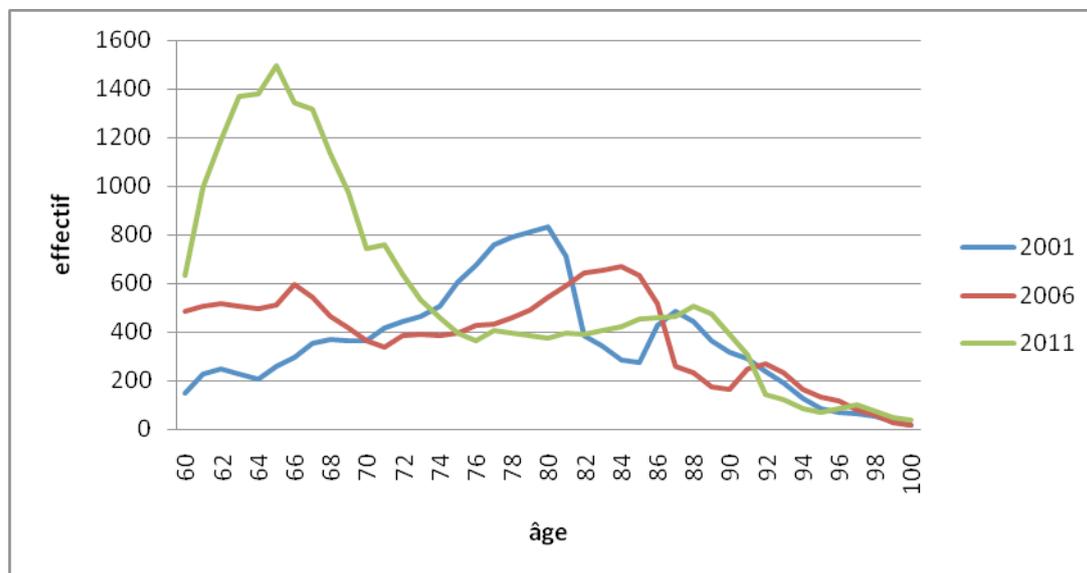


Figure iii : effectif sous risque par âge pour les années 2001, 2006, 2012.

On constate qu'il y a un très fort rajeunissement du portefeuille, ainsi l'augmentation des effectifs sous risque est principalement due à l'arrivée de jeunes retraités, ce qui n'entraîne pas une augmentation du nombre de décès proportionnelle. Pour l'année 2011, il y a deux « pics ». Le même genre de pic que le second est également présent sur les années 2006 et 2001 (avec un décalage de 5 et 10 ans par rapport à celui de 2001). Après analyse des données ce pic correspond principalement aux

produits commercialisés dans les années 1980-1990. Quant au premier pic, il est principalement constitué de produits commercialisés à la fin des années 1990 et années 2000. Il est en majorité constitué de produits dits « Madelin ».

2.1.2. ESTIMATION DE LA MORTALITE BRUTE

Ces données traitées, nous avons gardé une seule observation par rentier, celle qui maximise sa période d'observation. Nous avons utilisé sa date de naissance, sa date de sortie, la cause de sa sortie, son genre. Grâce à ces éléments, nous avons pu calculer les âges d'entrée et de sortie et ainsi estimer la mortalité brute pour pouvoir avoir un premier aperçu des conséquences de la directive.

2.1.2.1. CHOIX DE L'ESTIMATEUR

Afin de choisir notre estimateur nous en avons confronté plusieurs :

- L'estimateur binomial classique⁴.
- L'estimateur actuariel. Il s'agit d'une amélioration de l'estimateur binomial qui permet de prendre en compte les censures et les troncatures. En considérant les entrées et les sorties sur l'intervalle $[X, X+1]$. L'estimateur actuariel est estimé par $q_x = \frac{d_x}{n_x - \frac{c_x}{2} + \frac{T_x}{2}}$ avec q_x le taux de mortalité à l'âge x , d_x les décès, c_x les censures et T_x les troncatures (censure et troncature sont expliqués dans la section suivante). L'inconvénient de cet estimateur est qu'il ne prend pas en compte le moment des évènements.
- Un estimateur de troncature/censure (on pondère les individus par leur présence dans l'année. On pondère les décès par la durée les séparant de la fin de l'année).
- L'estimateur de Kaplan Meier où l'on a observé les individus au jour le jour et non pas les dates des évènements afin de gagner en temps de calcul.

Nous avons estimé la mortalité avec ces estimateurs ;

Nous avons confronté le nombre de décès observé au nombre de décès prédit par les modèles en appliquant le taux de mortalité estimé au nombre d'individus pondéré par leur durée de présence.

Notre choix s'est porté sur l'estimateur de Kaplan Meier car il présente de meilleurs résultats que les autres. Nous ne rentrerons pas dans le détail des autres estimateurs, cependant le lecteur intéressé pourra les trouver en annexe. Nous présentons l'estimateur de Kaplan-Meier dans la section suivante.

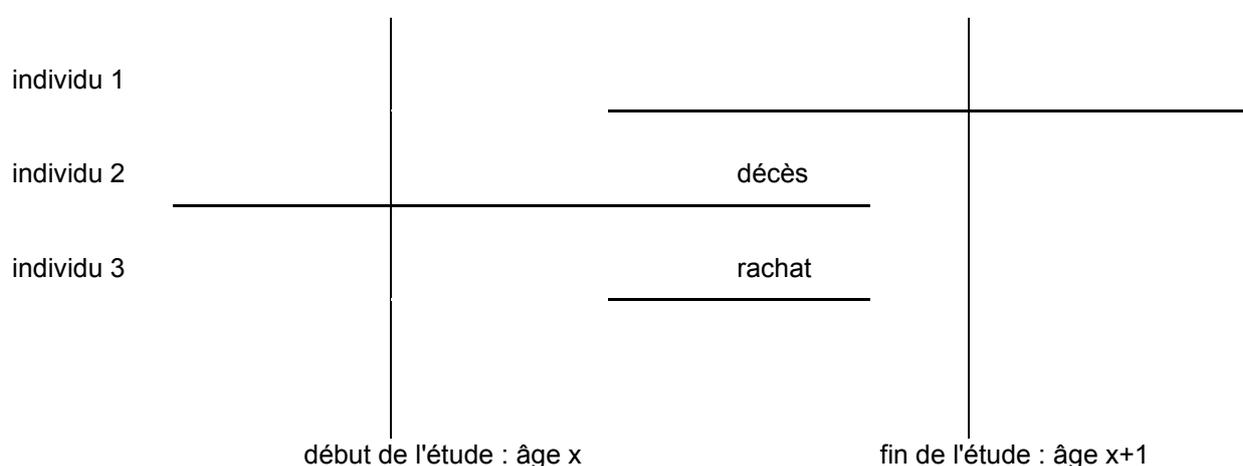
⁴ Pour plus de détail sur cet estimateur et les suivants, se rapporter aux annexes.

2.1.2.2. KAPLAN MEIER

2.1.2.2.1. L'ESTIMATEUR DE KAPLAN MEIER⁵

L'estimateur de Kaplan-Meier (KM) est un estimateur non paramétrique qui permet d'estimer la fonction de survie (notée $S(t)$). Cet estimateur est utilisé pour la construction de tables de mortalité d'expérience, il permet de tenir compte des phénomènes de censure et de troncature :

- Donnée tronquée à gauche : l'individu est déjà dans sa x ème année au moment de l'étude.
- Donnée censurée à droite : l'individu sort de l'étude (pour une cause autre que le décès).



Par exemple, l'individu 1 entre en cours d'étude et sa sortie n'est pas observée, l'individu est tronqué à gauche car il est observé sur une partie de sa x ème année, conditionnellement au fait qu'il soit en vie.

L'individu 3 entre en cours d'étude, sort avant la fin de l'étude pour une cause autre que le décès. Il est donc censuré à droite et tronqué à gauche.

Le taux de mortalité est défini comme $q_x = P(x \leq T \leq x+1 | T = x)$ avec T représentant la variable aléatoire de la durée de vie. Il s'agit de la probabilité que l'individu décède au cours de sa x ème année sachant qu'il a atteint l'âge x .

⁵ Le calcul de la variance de l'estimateur de Kaplan Meir ainsi que la construction d'IC sont en annexe 1 et 2

$$\begin{aligned}
q_x &= P(x \leq T \leq x+1 | T = x) \\
&= 1 - P(T \geq x+1 | T \geq x) \\
&= 1 - \frac{P((T \geq x+1) \cap (T \geq x))}{P(T \geq x)} \\
&= 1 - \frac{P(T \geq x+1)}{P(T \geq x)} \\
&= 1 - \frac{S(x)}{S(x+1)}
\end{aligned}$$

D'où $\hat{q}_x = 1 - \frac{\hat{S}(x)}{\hat{S}(x+1)}$. Dans le cas où il n'y a pas de censure, on a alors directement $\hat{q}_x = \frac{d_x}{N_x}$ avec

d_x le nombre de personnes d'âge x qui décèdent au cours de l'année, N_x le nombre de personnes d'âge x .

La censure et la troncature entraînent une perte d'information sur l'individu. On note t_1, t_2, \dots, t_k les âges de sorties (par décès ou par censure). Il est impossible d'avoir un décès et une censure le même jour, cependant dans la pratique on considère toujours, qu'en cas de simultanéité, les observations non censurées précèdent les censurées. Pour le moment on ne considère que les censures. On note :

$$\begin{cases} d_i = 0 \text{ si sortie par censure} \\ d_i = 1 \text{ si sortie par décès} \end{cases}$$

L'estimateur de Kaplan-Meier est donné par :

$$\hat{S}(t) = \prod_{\hat{t}_i \leq t} \left(1 - \frac{1}{n-i+1} \right)^{d_i} \text{ avec } n \text{ le nombre de présents au début de l'étude, ce qui peut se}$$

$$\text{réécrire : } \hat{S}(t) = \prod_{\hat{t}_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n-i+1} \right).$$

Dans le cas où il y a des entrées au cours de la période d'observation, on peut réécrire l'estimateur de KM de la fonction de survie :

$$\hat{S}(t) = \prod_{\hat{t}_j \leq t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right) \text{ avec } \begin{cases} d_j = \text{nombre de décès à l'âge } t_j \\ n_j = \text{nombre de présents à l'âge } t_j \\ c_j = \text{nombre d'individus censurés entre } t_j \text{ et } t_{j+1} \\ \tau_j = \text{nombre de personnes tronquées à gauche} \\ \text{entrées dans l'étude entre } t_j \text{ et } t_{j+1} \\ n_j = n_{j-1} - d_{j-1} - c_{j-1} + \tau_{j-1} \end{cases}$$

Or, on a vu que $\hat{q}_x = 1 - \frac{\hat{S}(x)}{\hat{S}(x+1)}$, en remplaçant par l'estimateur de KM, il vient :

$$\hat{q}_x = 1 - \prod_{\hat{t}_j \leq x+1} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right)$$

Cette méthode permet d'obtenir les \hat{q}_x bruts affranchis de la censure et de la troncature. En effet, les individus qui sortent au cours de la période d'observation ne sont pas comptabilisés pour le calcul des décès suivants. Réciproquement, ceux qui entrent sont comptabilisés conditionnellement au fait qu'ils sont en vie au moment de leur entrée. Ceci n'est pas problématique car l'estimateur de Kaplan Meier a pour but de donner une image fidèle de la mortalité d'expérience.

L'estimateur obtenu rend donc bien compte de la mortalité du portefeuille. Cependant, cette méthode rend compte de la mortalité du portefeuille à un moment donné et ne permet pas d'anticiper le risque de longévité (on ne sait pas ce que devient un individu toujours en vie à la fin de la période d'observation). Si la mortalité du portefeuille est inférieure et a la même forme que celle d'une table de référence, alors il est raisonnable de supposer que la mortalité pour les âges qui ne sont pas observés sera aussi inférieure à cette même table et on peut ainsi anticiper un accroissement de la longévité.

L'estimateur de la fonction de survie de Kaplan Meier est convergent, c'est un estimateur de maximum de vraisemblance généralisé pour la fonction de survie en présence de données censurées, il est biaisé positivement⁶. En présence d'un grand nombre de données, le temps de calcul est très long. Une solution consiste à ne pas considérer les âges précis qu'ont les individus au moment des évènements, mais des intervalles d'âges. Cependant, cette méthode prend moins bien en compte les données censurées. L'utilisateur devra donc trouver, en fonction de ses données, le juste milieu entre temps de calcul et précision de l'estimateur.

⁶ Démonstration dans l'ouvrage de T. Fleming et D. Harrington : *Counting processes and survival analysis*. Wiley, New-York, 1991

2.1.2.2.2. MISE EN PLACE OPERATIONNELLE DE L'ESTIMATEUR DE K&M

De manière pratique, pour calculer l'estimateur de Kaplan Meier nous observons les individus au jour le jour, c'est-à-dire que nous exprimons l'âge en jour. Ainsi les individus entrent dans l'étude à un âge $j \in [0;43380]$ (43 380 jours = 120 ans). La sortie de l'étude peut se faire par décès ou par censure. Cette approche présente un avantage en termes de temps de calcul : on ne cherche pas le nombre d'individus présents à un évènement particulier. On calcule pour chaque individu son âge d'entrée, de sortie et si la sortie se fait par décès ou pas. Ainsi on a juste à effectuer une jointure avec une table comportant tous les âges exprimés en jour pour obtenir la table avec les entrées et les sorties au jour le jour. Ensuite, à l'aide d'Excel, on calcule le nombre d'individus sous risque et les taux de décès grâce à une relation de récurrence.

Le nombre d'individus présent à l'âge j dans l'étude est égal :

- Au nombre présent en $j-1$
- + les entrées à l'âge j
- - les décès en $j-1$
- + les censures à l'âge j

On considère ensuite une population hypothétique.

On suppose que cette population à 0 jours est composée de $l_0 = 100\,000$ individus. A chaque décès ayant lieu à l'âge j , on calcule un taux de mortalité $q_j = \frac{d_j}{n_j}$. On a ainsi le jour j : $l_j = l_{j-1} * (1 - q_j)$.

Le taux de mortalité annuel pour l'âge $k \in [0;120]$ ans s'exprime comme :

$$\begin{aligned} q_k &= 1 - \frac{l_{365*(k+1)}}{l_{365*k}} \\ &= 1 - \frac{l_{365*k}}{l_{365*k}} * \prod_{j=1}^{365} \left(1 - \frac{d_{j+365*k}}{n_{j+365*k}}\right) \\ &= 1 - \frac{S(k+1)}{S(k)} \end{aligned}$$

On retombe bien sur l'estimateur de Kaplan Meier. De plus, $S(j) = \frac{l_j}{100000}$. Cette approche a l'avantage d'être très précise et rapide. De plus, lorsque nous construisons deux tables, l'une sur l'année d'observation 2008 et l'autre sur 2009, il suffit d'additionner les deux tables pour construire

une table sur la période 2008-2009. En effet, un individu qui entre dans l'étude de l'année 2008 à l'âge de 25 000 jours en sort par censure à 25 365 jours. Il entre dans l'étude pour l'année 2009 à 25 365 jours et décède à 26 700 jours. Donc, en faisant la somme de la censure de la première année et de la troncature de la seconde, il y a un télescopage. Cela revient à une entrée à 25 000 jours et à un décès à 26 700 jours. Avec cette méthode, en construisant des tables annuelles par sexe, on peut facilement aboutir à des tables pour des périodes plus grandes sans prise en compte du sexe.

2.1.2.3. APPLICATION AUX DONNEES

2.1.2.3.1. CONSTRUCTION SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE

Nous voulons estimer la mortalité par sexe et en unisexe pour l'ensemble de nos observations. Afin de rendre plus visible les graphiques, nous les présenterons en échelle logarithmique base 10 lorsque cela permet une meilleure visibilité (les taux de mortalité sont exponentiels) sinon ils seront présentés avec une échelle classique). De plus, les intervalles de confiance seront présents lorsque cela sera possible. Toutes les représentations ne commencent et ne finissent pas au même âge, ce choix a été fait par rapport aux données disponibles. Les taux de mortalité des hommes ont pu être estimés pour des âges de 3 à 5 ans inférieurs à ceux des femmes car l'espérance de vie des femmes est plus longue et les rentes réversibles se font principalement au bénéfice des femmes.

2.1.2.3.1.1. CONSTRUCTION SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE POUR LES HOMMES

Les données utilisées débutent au 1^{er} janvier 2001 et se terminent au 31 décembre 2011. Nous avons inclu les tables réglementaires par génération dans nos représentations. Cette représentation est prudente car on utilise uniquement la génération la plus jeune qui a servi pour la construction des taux bruts. Cependant, cette approche peut-être trop prudente car nous comparons un taux construit en moyenne avec l'année d'observation 2006 à une génération plus jeune de 5 ans. Par exemple un individu ayant 60 ans en 2006 est né en 1946 ou en 1945 ; un individu ayant 60 ans en 2011 est né en 1951 ou en 1950. Dans notre étude, en moyenne les individus ayant 60 ans sont de la génération 1946. Néanmoins, on utilise les générations 1941 à 1951 pour construire le taux de mortalité à 60 ans, c'est pour cela que l'on compare avec la génération la plus jeune (car diminution de la mortalité à un âge fixé en fonction de la génération) ayant servi à construire le taux, dans ce cas la génération 1951.

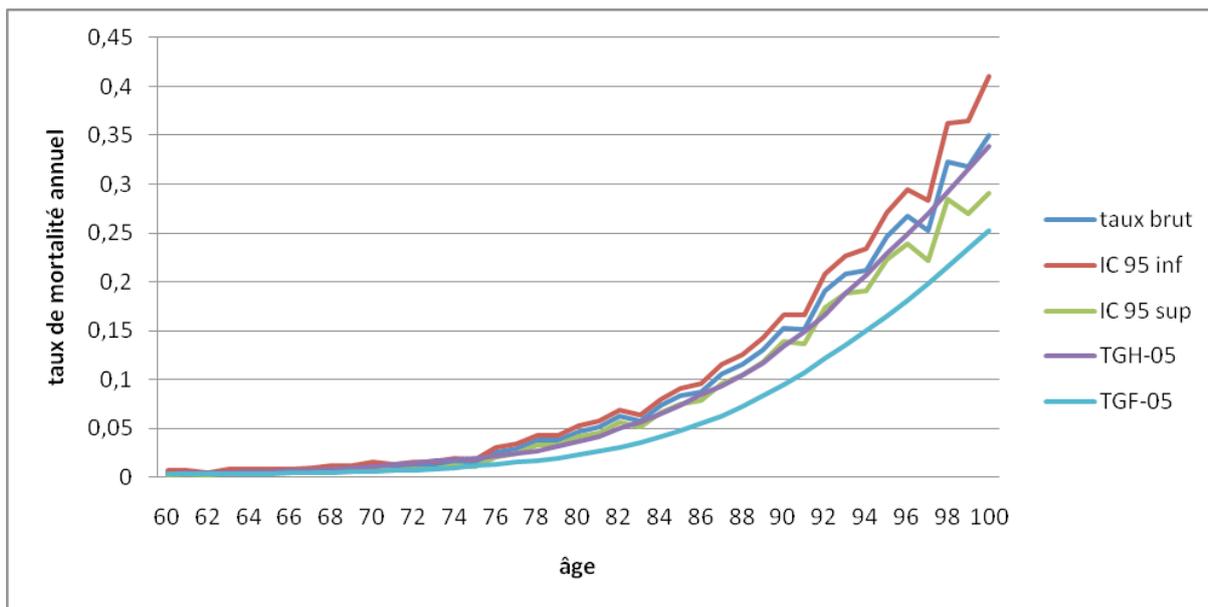


Figure iv : mortalité des hommes du portefeuille

On observe que la mortalité du portefeuille est supérieure à celle de la TGH-05. La représentation de la TGH05 reste néanmoins dans l'intervalle de confiance à 95%. Ainsi, la TGH-05 est une table prudente pour la population des rentiers homme, du moins en termes de nombre de décès. La mortalité des hommes du portefeuille est supérieure à 7% en moyenne non pondérée et 8% en moyenne pondérée (effectif de la tranche d'âge considérée divisé par effectif total).

2.1.2.3.2. CONSTRUCTION SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE POUR LES FEMMES

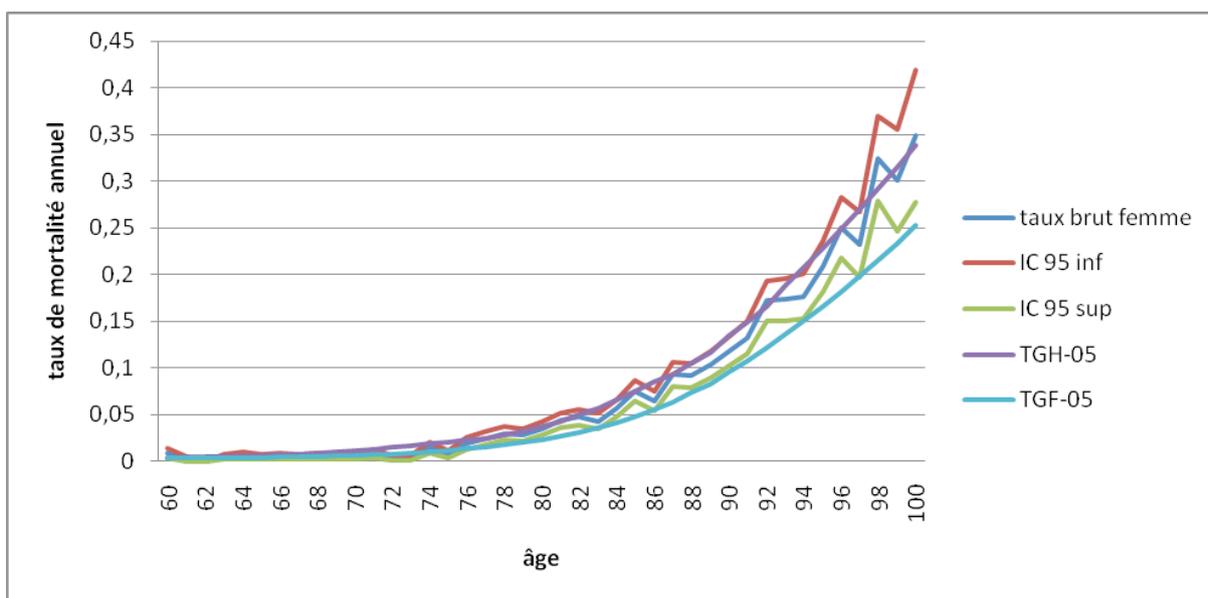


Figure v : mortalité des femmes du portefeuille

Les intervalles de confiance se situent environ au niveau de la tgh05 (borne supérieure) et au-dessous de la tgf05 (borne inférieure de la mortalité). La mortalité des femmes du portefeuille est supérieure à 19,5% en moyenne non pondérée et 7,2% en moyenne pondérée (effectif de la tranche d'âge considérée divisé par effectif total). A première vue la tgf05 est une table très prudente. Cependant, les différences dépendent des âges. Ainsi la tgf05 surestime la mortalité pour les âges jeunes (en dessous de 75 ans) et la sous-estime au-delà. Cette structure explique la différence entre écart brut et écart pondéré. En effet, les effectifs sont plus importants aux âges jeunes, ce qui donne un poids plus important aux taux de mortalité qui sont inférieurs à la table réglementaire. On attire l'attention sur le fait qu'il s'agit de la mortalité à un moment donné et qu'elle ne représente pas la dynamique de la mortalité qui est le principal risque dans le cadre de produits viagers.

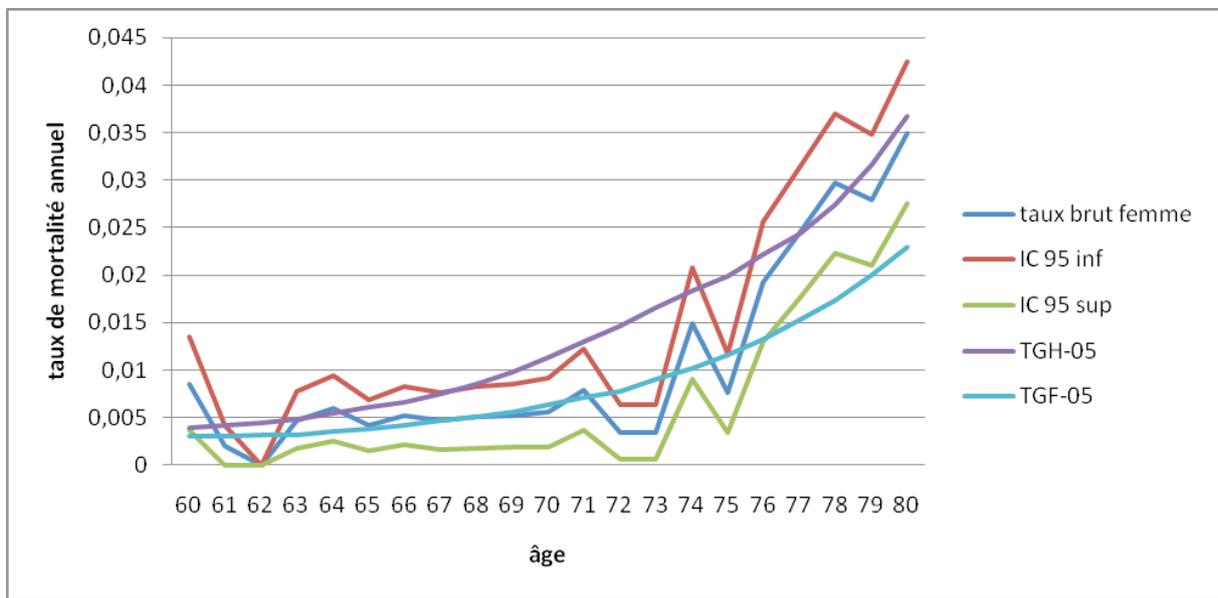


Figure vi : zoom sur la mortalité des femmes du portefeuille aux âges inférieurs à 80 ans

2.1.2.3.3. CONSTRUCTION SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE

La proportion d'hommes et de femmes n'est pas constante dans le portefeuille. En effet, des fluctuations annuelles sont présentes. Plus on avance en âge, plus la proportion de femmes est importante. Deux explications :

- La première est évidente, il s'agit du fait que les femmes vivent plus longtemps.
- La seconde est que les réversions se font à plus de 90% vers des femmes. Les rentiers hommes sont remplacés par des rentiers femmes au moment de leur décès.

La construction d'une table de mortalité avec l'ensemble du portefeuille représente une image à un instant et reflète aussi la composition du portefeuille.

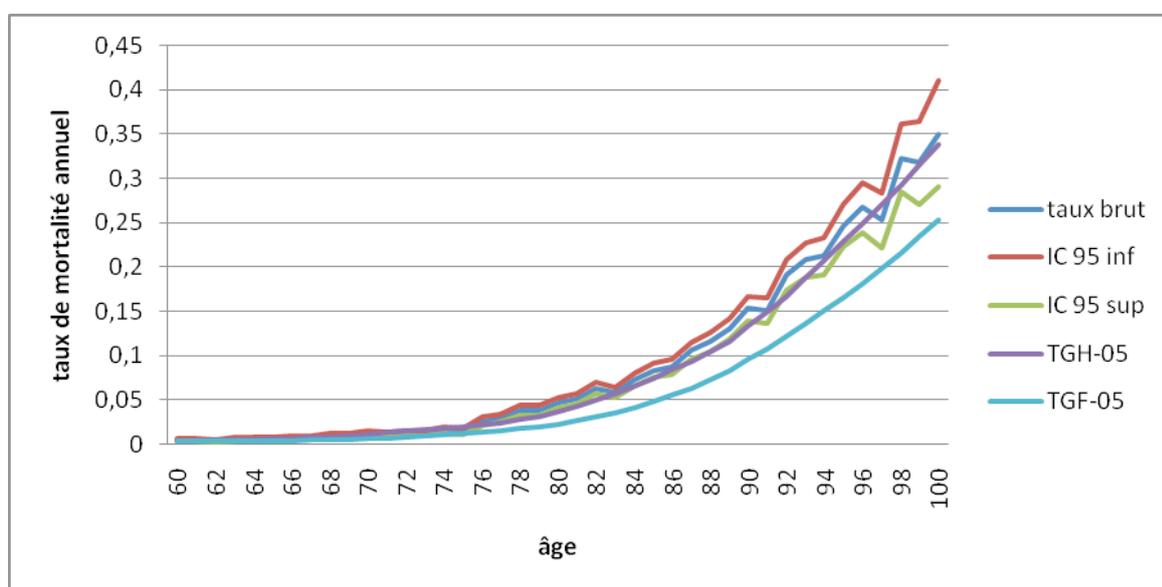


Figure vii : mortalité de l'ensemble du portefeuille (hommes+femmes)

La mortalité globale pondérée du portefeuille est supérieure de 40% à celle de la TGF-05 (ce nombre est à nuancer car ce sont les âges jeunes qui ont le poids le plus important, et les taux de mortalité à ces âges sont très faibles). Cependant, on constate que notre mortalité a une forme différente de celle des tables réglementaires car les écarts ne sont pas les mêmes en fonction des âges.

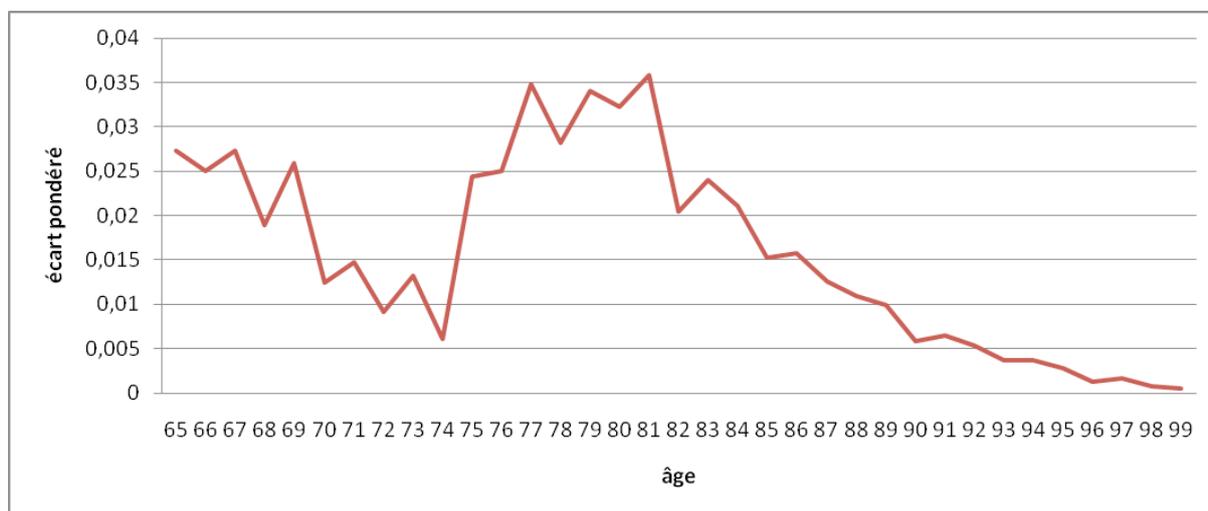


Figure viii : écarts pondérés entre table d'exp brute et tgf

2.1.2.3.4. CONSTRUCTION PAR ANNEE D'OBSERVATION

L'approche précédente nous a permis d'avoir une idée générale de la mortalité, cependant on a une représentation du niveau général de la mortalité mais pas de la baisse de la mortalité de génération en génération. Or, c'est précisément la vitesse d'augmentation de l'espérance de vie qui pourrait être sous-estimée dans les tables règlementaires et ainsi conduire à un risque technique sur les provisions de l'assureur pour risque viager.

Afin d'étudier ce phénomène, nous estimons la mortalité par année d'observation. Ainsi par exemple, le taux de mortalité à 60 ans pour l'année 2001 est construit avec les générations 1951 et 1950. Nous avons effectué ces calculs. Cependant, pour des raisons d'effectifs insuffisants, la mortalité ne peut pas être estimée correctement. A titre d'exemple, le critère de Cochran n'est validé que pour 75% des âges entre 60 et 95 ans. Nous ne présentons donc pas les résultats et passons à la partie suivante.

2.1.2.3.5. CONSTRUCTION PAR GROUPE D'ANNEES D'OBSERVATION

Afin de diminuer la volatilité présente dans l'estimation précédente, nous groupons par paquet de deux années d'observation (durée la plus pertinente avec les données disponibles). Nous construisons avec la méthode de KM 5 tables de mortalité, la première avec les années 2002-2003, la seconde avec 2004-2005, etc. Nous allons pouvoir capter le phénomène d'augmentation de

l'espérance de vie tout en étant plus robuste sur nos estimations. Néanmoins, le fait de grouper par un nombre pair alors que l'historique est de 11 ans entraîne la non-utilisation d'une année de données. Nous faisons le choix de ne pas utiliser l'année 2001 car nous disposons de plus d'observations pour l'année 2011 que pour l'année 2001.

2.1.2.3.5.1. CONSTRUCTION PAR GROUPE D'ANNEES D'OBSERVATION POUR LES HOMMES

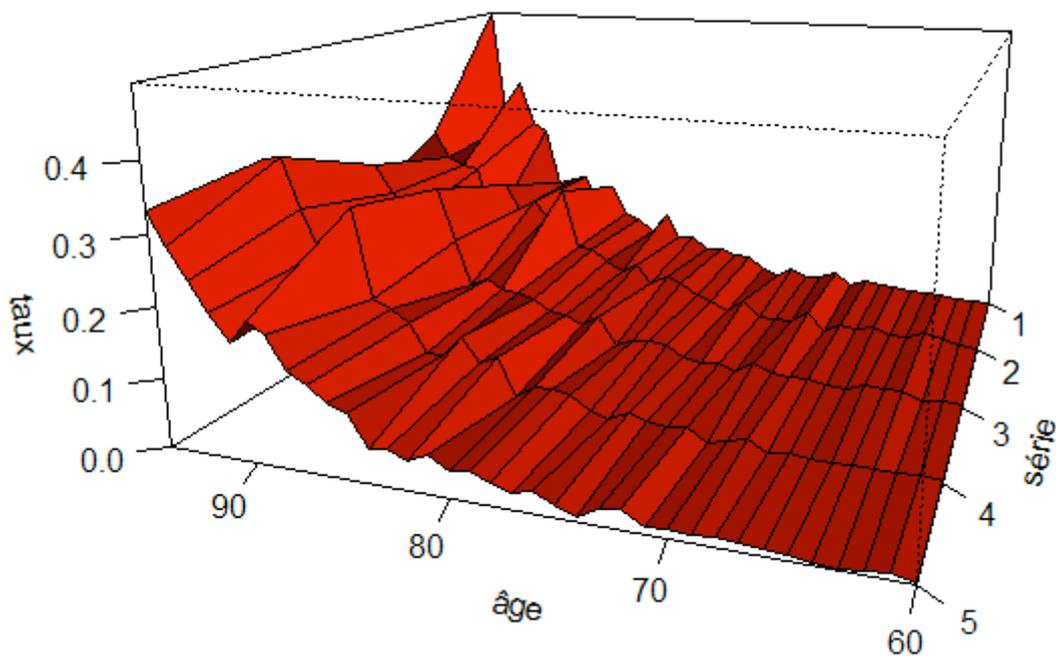


Figure ix : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour les hommes Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011

On constate un pic pour la première série (qui a lieu en 2002-2003). Ce pic correspond probablement à la canicule de 2003. A l'œil, il est difficile de se rendre compte de quoi que ce soit sur ce graphique et d'en tirer une conclusion en termes de dérive de la mortalité. Au niveau des données, on a des fluctuations à âge fixe. Ces fluctuations représentent principalement un bruit et non une tendance générale (du moins elle n'est pas perceptible à partir de nos données brutes).

2.1.2.3.5.2. CONSTRUCTION PAR GROUPE D'ANNEES D'OBSERVATION POUR LES FEMMES

Nous attirons l'attention sur le fait que cette représentation commence 5 ans après la précédente et se termine 5 ans plus tard.

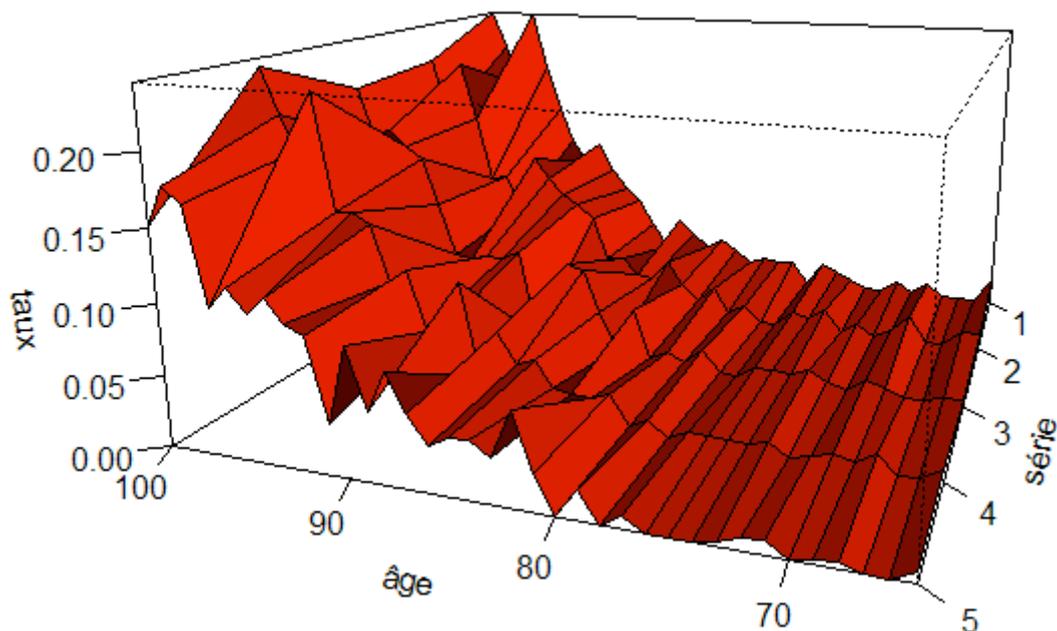


Figure x : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour les femmes Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011

L'impact de la canicule est plus marqué pour les femmes que pour les hommes, ce qui se voit au niveau des données. En effet il y a eu une croissance des décès de 10,8% entre 2002 et 2003 pour les femmes contre 4,2% pour les hommes.

2.1.2.3.5.3. CONSTRUCTION PAR GROUPE D'ANNEES D'OBSERVATION POUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE

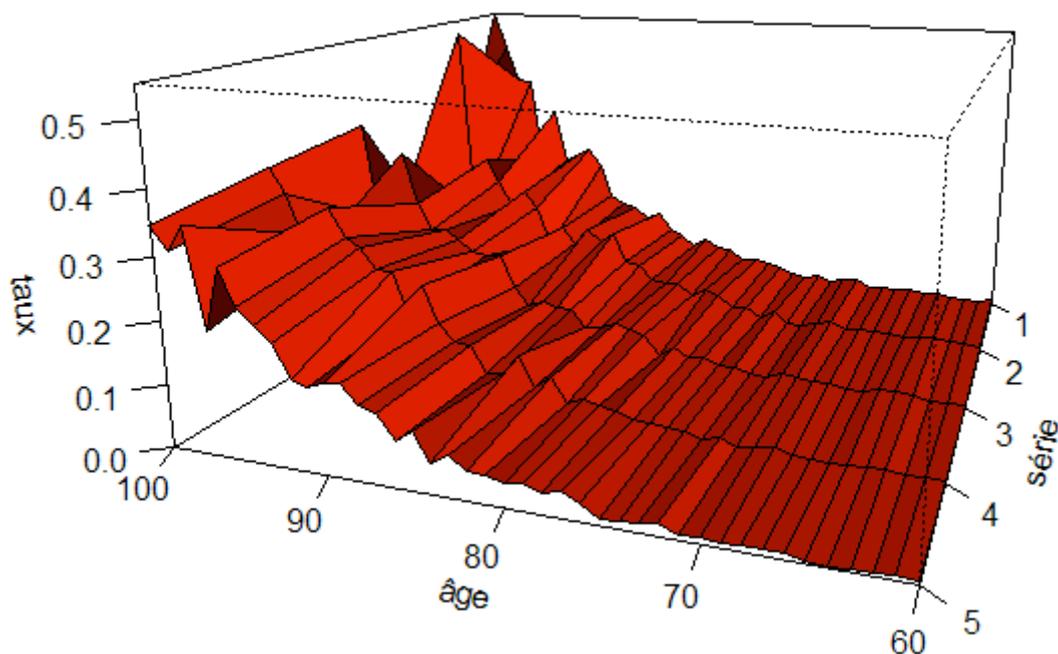


Figure xi : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour l'ensemble du portefeuille Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011

La canicule de 2003 reste présente. De plus pour la série 2 (qui correspond aux années 2004-2005) il y a une diminution de la mortalité aux grands âges. La manière dont fonctionnent les rentes viagères fait que les rentiers sont alimentés par les âges compris entre 60 et 75 ans. Ainsi, nous pouvons supposer raisonnablement que cette diminution est liée au fait que les individus 'fragiles' qui 'devaient' décéder sur la période 2003-2005 sont principalement décédés en 2003 suite au choc de la canicule. Donc, au lieu que les décès soient uniformément répartis sur cet intervalle, ils se sont accumulés en 2003. La baisse de la mortalité pour les années 2004-2005 peut s'expliquer aussi par la canicule de 2003.

2.1.2.4. PREMIERES CONSTATATIONS

En termes d'augmentation de l'espérance de vie en fonction des générations, il est difficile de se faire une idée précise. Cependant, on observe que, sans segmentation par génération, la mortalité des hommes est inférieure sur la tranche d'âge 60-100ans à celle des tables réglementaires qui prennent en compte une augmentation de la durée de vie. Afin d'avoir une vision plus claire sur ces tendances, nous allons lisser les tables brutes estimées.

2.1.3. LISSAGE DES TABLES OBTENUES

Lorsque les données utilisées pour la création d'une table de mortalité d'expérience sont peu nombreuses, les taux bruts obtenus peuvent présenter une irrégularité. Par exemple, une diminution des taux de mortalité entre deux âges est fréquente. Afin de se rapprocher de la « réalité », le lissage des tables est nécessaire.

2.1.3.1. CHOIX DES METHODES DE LISSAGE

Il existe 3 grands types de familles de lissages.

Lissage relationnel. Il s'agit d'utiliser une référence externe (telle qu'une table INSEE, ffsa ou autre). Ces méthodes sont bien adaptées lorsqu'il y a peu de données. Or, nous pensons que la mortalité du portefeuille a une forme spécifique. De plus, la diminution de la mortalité de notre échantillon ne correspond à aucune table par génération disponible. Nous avons essayé cette méthode en la testant sur 50 tables (tables INSEE de 1970 à 2005, tgf-05, tgh-05, tprv93...). Afin de choisir la table utilisée nous avons procédé comme suit :

- Un algorithme calcule le critère d'Akaike lors de l'ajustement des tables.
- Nous sélectionnons la table qui minimise ce critère et nous ré-effectuons l'ajustement pour pouvoir mieux le contrôler (significativité des coefficients, etc.). Nous testons ensuite la normalité des résidus et effectuons un test d'adéquation entre la table lissée et la table brute

Lissage paramétrique : Ces méthodes consistent à calibrer une loi paramétrique des données. Ainsi on utilise la représentation des données. Ces méthodes ont pour avantage de se rapprocher des formes empiriques de la mortalité, cependant le choix de la loi est important et il faut faire une spécification de loi (qui ne correspond pas nécessairement aux données). Par exemple, dans notre cas, on a vu sur les taux bruts que la mortalité aux âges élevés n'a pas la même forme pour les hommes et pour les femmes, il ne serait donc pas cohérent d'envisager la même forme paramétrique pour les hommes et les femmes. Nous avons étudié la loi de Makeham (cf annexe).

Lissage non paramétrique. Il s'agit d'utiliser les données et de les lisser par différents critères qui ne font appel à aucune spécification de loi.

Nous avons étudié les différentes méthodes de lissage. Nous avons retenu le lissage non paramétrique pour deux raisons :

- Il permet de mieux 'respecter' les données. Ainsi en appliquant la table lissée aux effectifs on est plus proche qu'avec les autres méthodes de la mortalité réellement constatée.
- Il peut se généraliser en dimension 2 ce qui permet de lisser simultanément en fonction de l'âge et de la génération (on gomme ainsi les aspérités temporelles).

2.1.3.2. LISSAGE PAR WHITTAKER HENDERSON

Le lissage de Whittaker Henderson appartient à la famille des lissages non-paramétriques.

2.1.3.2.1. METHODE

Cette méthode combine 2 critères :

- Un critère de fidélité (Fit, noté F), qui mesure la distance euclidienne entre la mortalité brute \hat{q}_x et la mortalité lissée q_x^l , chaque distance est pondérée par w_x :

$$F = \sum_{x=1}^{\omega} w_x (q_x^l - \hat{q}_x)^2$$

w_x Peut être choisi quelconque, cependant, pour tenir compte de l'effectif de chaque âge et ne pas avoir une surpondération des âges avec peu d'effectif, une solution peut être de prendre

$w_x = \frac{N_x}{\bar{N}}$, $x=1, \dots, \omega$, avec N_x l'effectif de l'âge x , et $\bar{N} = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} N_x}{\omega}$ l'effectif moyen de la plage d'âges de l'étude. Ou encore avec la provision mathématique ou le capital constitutif, pour avoir un lissage représentant la mortalité technique. Afin de mieux comprendre cette notion de mortalité technique, prenons un exemple simple. Soit un portefeuille composé de deux rentiers. Le capital constitutif du premier rentier est de 100 € et de 10 000 € pour le second. Les rentiers décèdent à 85 et 95 ans. En moyenne le décès a lieu à 90 ans. Or, pour l'assureur le rentier qui a un petit capital constitutif a un impact technique très faible. En termes de mortalité technique, l'âge moyen au décès est donc de $94,9 = \frac{10000 \times 95 + 85 \times 100}{10100}$.

- Un critère de régularité (smoothness, noté S). Ce critère utilise les dérivées discrètes définies comme suit :

$$\begin{cases} \Delta q_x = q_{x+1} - q_x \\ \Delta^2 q_x = \Delta(\Delta q_x) = \Delta(q_{x+1} - q_x) = q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x \\ \dots \\ \Delta^z q_x = \Delta(\Delta^{z-1} q_x) = \Delta(\Delta(\Delta^{z-2} q_x)) = \dots \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=1}^{\omega-z} (\Delta^z q'_x)^2 \text{ avec } \omega \text{ le dernier \u00e2ge observ\u00e9.}$$

$$\text{Ainsi pour } Z=1 \text{ on a } S = \sum_{i=1}^{\omega-1} (q'_{x+1} - q'_x)^2$$

Pour lisser les taux bruts il faut minimiser le crit\u00e8re de Wittaker-Henderson (not\u00e9 C) qui est la somme du Fit et du Smoothness pond\u00e9r\u00e9 :

$$C = F + hS = \sum_i \omega_i (q'_x - \hat{q}_x)^2 + h \sum_{i=1}^{\omega-z} (\Delta^z q'_x)^2 \text{ o\u00f9 } h \geq 0 \text{ est choisi en fonction du lissage d\u00e9sir\u00e9}$$

(plus h est \u00e9lev\u00e9, plus le crit\u00e8re Smoothness est important). En g\u00e9n\u00e9ral, z est choisi ≤ 3 .

Les valeurs liss\u00e9es q'_x , $x=1, \dots, \omega$ sont celles qui minimisent C. Pour avoir les q'_x , une condition n\u00e9cessaire (et suffisante car C est convexe) est que les ω \u00e9quations des d\u00e9riv\u00e9es partielles par rapport \u00e0 q'_x soient nulles, soit $\frac{\partial C}{\partial q'_x} = 0$ pour $x=1, \dots, \omega$. Afin de r\u00e9soudre ce programme,

nous allons le poser de mani\u00e8re matricielle.

Nous notons

$$\begin{cases} q^1 = (q'_i)_{1 \leq i \leq \omega}; & \hat{q} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq \omega} \\ W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_\omega \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow F = (q^1 - \hat{q})^T W (q^1 - \hat{q})$$

En posant $\Delta^z q^1 = (\Delta^z q'_x)_{1 \leq x \leq \omega-z}$ on a alors $S = (\Delta^z q^1)^T \Delta^z q^1$. Nous allons r\u00e9\u00e9crire $\Delta^z q^1$ en utilisant une matrice not\u00e9e K_z contenant les coefficients binomiaux sur les diagonales avec une alternance de signes. Ainsi nous pouvons \u00e9crire $\Delta^z q^1 = K_z q^1$. Par exemple, pour $z = 2$, nous avons :

$$\Delta^2 q' = K_z q' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_1 \\ \vdots \\ q'_\omega \end{pmatrix}$$

Ces notations permettent de réécrire le critère de Wittaker-Hendersen :

$$\begin{aligned} C &= (q' - \hat{q})^T W (q' - \hat{q}) + h q'^T K_z^T K_z q' \\ &= q'^T W q' - 2 q'^T W \hat{q} + \hat{q}^T W \hat{q} + h q'^T K_z^T K_z q' \end{aligned}$$

On cherche q'^* qui minimise C, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial q'} &= \left(\frac{\partial C}{\partial q'_x} \right)_{1 \leq x \leq \omega} \\ &= 0 \\ &= 2Wq' - 2W\hat{q} + 2hK_z^T K_z q' \end{aligned}$$

Il vient $q'^* = (W + hK_z^T K_z)^{-1} W\hat{q}$.

Si le résultat n'est pas satisfaisant, l'utilisateur peut recommencer le calcul en modifiant les paramètres W , z et h jusqu'à obtention du lissage désiré.

Extension avec prise en compte de l'évolution temporelle

La matrice des taux bruts s'écrit $\hat{q} = (\hat{q}_{xt})_{1 \leq x \leq \omega, 1 \leq t \leq t_{\max}}$ avec x l'âge et t l'année.

Il s'agit d'une généralisation de la méthode précédente, ainsi on passe à 3 critères :

- Le critère de fidélité $F = \sum_{t=1}^{t_{\max}} \sum_{x=1}^{\omega} W_{xt} (q'_{xt} - \hat{q}_{xt})^2$
- Le critère de régularité se sépare en deux :
 - Régularité verticale qui agit sur \hat{q}_{xt} à t fixé avec l'opérateur Δ_v^z défini dans la section précédente. Le critère de régularité verticale s'écrit $S_v = \sum_{t=1}^{t_{\max}} \sum_{x=1}^{\omega-z} (\Delta_v^z \hat{q}_{xt})^2$
 - De même, on a le critère de régularité temporelle $S_t = \sum_{t=1}^{t_{\max}} \sum_{x=1}^{\omega-z} (\Delta_t^z \hat{q}_{xt})^2$

Le critère devient $C = F + \alpha S_v + \beta S_t$. Ce critère doit être minimisé, pour cela nous nous ramenons à un cas unidimensionnel. On construit un vecteur \hat{q}^* unidimensionnel à partir de

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{11} & & \hat{q}_{1t_{\max}} \\ & \ddots & \\ \hat{q}_{\omega 1} & & \hat{q}_{\omega t_{\max}} \end{pmatrix} \text{ et on pose } \hat{q}^{*T} = (\hat{q}_{11} \quad \dots \quad \hat{q}_{1t_{\max}} \quad \hat{q}_{21} \quad \dots \quad \hat{q}_{2t_{\max}} \quad \dots \quad \hat{q}_{\omega 1} \quad \dots \quad \hat{q}_{\omega t_{\max}})$$

Le vecteur \hat{q}^* a pour taille $\omega \times t_{\max}$. Ainsi $\hat{q}_{xt} = \hat{q}^*_{t_{\max}(x-1)+t}$

La matrice des poids est $W = \begin{pmatrix} W_{11} & & W_{1t_{\max}} \\ & \ddots & \\ W_{\omega 1} & & W_{\omega t_{\max}} \end{pmatrix}$, on construit à partir de W une matrice W^* dont les

éléments de la diagonale sont les lignes de W , soit :

$$W^* = \begin{pmatrix} W_{1,1} & 0 & & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \\ & & W_{1,t_{\max}} & & & & \\ & & & W_{2,1} & & & \\ \vdots & & & & \dots & & \vdots \\ & & & & & W_{\omega-1,1} & \\ & & & & & & W_{\omega,1} \\ & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots & & & 0 & W_{\omega,t_{\max}} \end{pmatrix}$$

On a ainsi $W_{x,t} = W^*_{t_{\max}(x-1)+t, t_{\max}(x-1)+j}$

On procède de la même manière pour réécrire $K_z^v K_y^t$

Le critère se réécrit :

$$\begin{aligned} C &= (q' - \hat{q})^T W^* (q' - \hat{q}) + \alpha q'^T (K_z^v)^T K_z^v q' + \beta q'^T (K_z^t)^T K_z^t q' \\ &= q'^T W^* q' - 2q'^T W^* \hat{q} + \hat{q}^T W^* \hat{q} + \alpha q'^T (K_z^v)^T K_z^v q' + \beta q'^T (K_z^t)^T K_z^t q' \end{aligned}$$

On cherche q'^* qui minimise C, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial q'} &= \left(\frac{\partial C}{\partial q'_{xt}} \right)_{1 \leq x \leq \omega, 1 \leq t \leq t_{\max}} \\ &= 0 \\ &= 2W^* q' - 2W^* \hat{q}^* + 2\alpha (K_z^v)^T K_z^v q' + 2\beta (K_z^t)^T K_z^t q' \end{aligned}$$

$$\text{Il vient } \boxed{q'^* = \left(W^* + \alpha (K_z^v)^T K_z^v + \beta (K_z^t)^T K_z^t \right)^{-1} W^* \hat{q}^*}$$

Nous avons codé sous R cette méthode de lissage.

2.1.3.2.2. APPLICATION

Afin de faciliter la lecture des graphiques, les intervalles de confiance des taux bruts n'ont pas été représentés. Cependant, on précise que les courbes lissées restent dans les intervalles pour toutes les valeurs. De plus, nous faisons des tests d'adéquation entre les taux bruts et les taux lissés. Cependant, nous allons lisser plusieurs courbes, alors, afin de ne pas être redondant nous présenterons le test d'adéquation uniquement pour le premier lissage.

2.1.3.2.2.1. LISSAGE SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE

2.1.3.2.2.1.1. LISSAGE SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE POUR LES HOMMES

Le lissage est effectué avec la méthode de Whittaker Henderson. Afin de pouvoir mieux se rendre compte de la mortalité, nous passons en échelle log sur le graphique. Les paramètres utilisés pour ce lissage et les suivants sont :

- $h=70$ (plus h est élevé, plus le critère *Smoothness* est important).
- $z=3$ (ordre des dérivées partielles)

- $w_x = \frac{N_x}{\bar{N}}$, $x=1, \dots, \omega$, avec N_x l'effectif de l'âge x , et $\bar{N} = \frac{\sum_{x=1}^{\omega} N_x}{\omega}$ l'effectif moyen de la plage d'âges de l'étude.

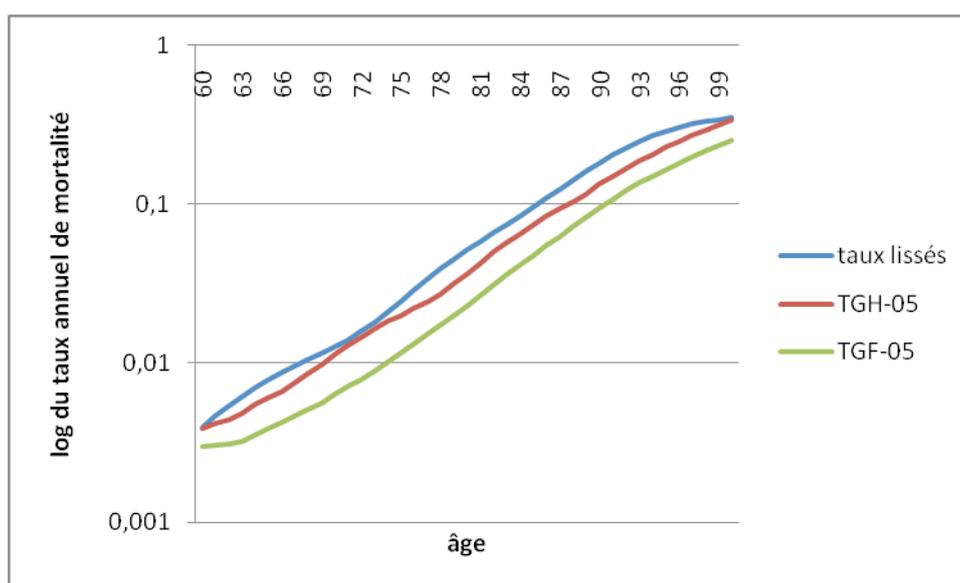


Figure xii : mortalité homme lissée

La mortalité est supérieure à celle de la TGH-05. Cependant des disparités apparaissent. Ainsi la mortalité du portefeuille correspond à la TGH-05 jusqu'à 75 ans. Ensuite la TGH-05 sous-estime la mortalité du portefeuille. Nous avons à nouveau un croisement des courbes autour de 95 ans. Il semble que le TGH-05 anticipe une croissance constante de la mortalité, alors que sur nos données, il semble que cette croissance soit faible à partir de 95 ans. Afin de tester l'adéquation entre nos données brutes et nos données lissées, nous effectuons un test d'adéquation non paramétrique de KOLMOGOROV SMIRNOV.

```
> ks.test(brut,lissee)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: brut and lissee
D = 0.022, p-value = 0.9689
alternative hypothesis: two-sided
```

La p-value est significative, nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle de même distribution entre les taux brut et les taux lissés.

Nous obtenons des résultats significatifs pour toutes les tables lissées par la suite. Ce résultat était prévisible car il s'agit d'un lissage non paramétrique.

2.1.3.2.2.1.2. LISSAGE SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE POUR LES FEMMES

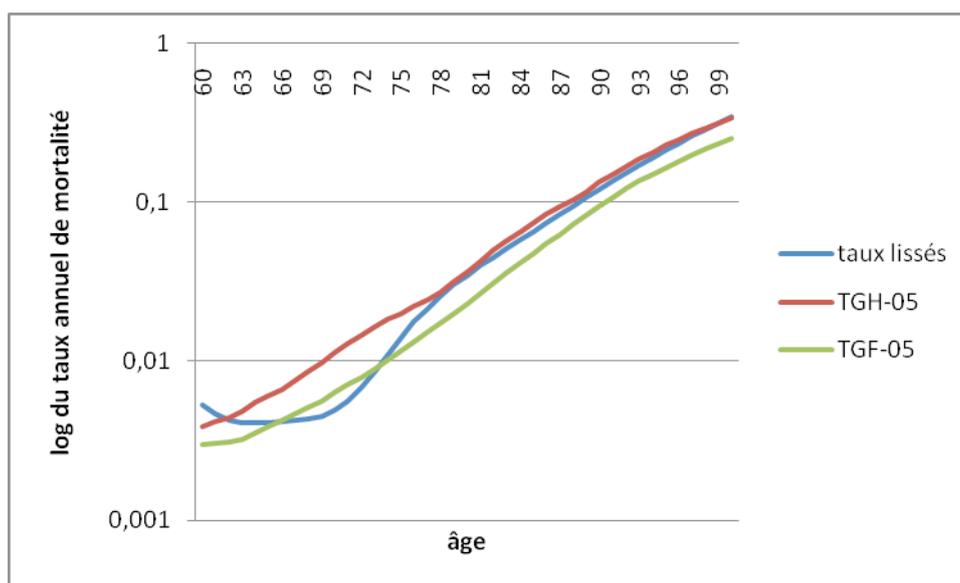


Figure xiii : mortalité femme lissée

On constate que nous avons une forme de mortalité différente de celle des hommes. En effet, le ralentissement constaté chez les hommes pour les âges élevés n'apparaît pas. De plus, la mortalité est décroissante entre 63 et 67 ans. Sinon, la forme est relativement proche de celle des hommes et la comparaison avec la tgf05 est la même : surestimation de la mortalité avant 76 ans et une sous-estimation au-delà. Ainsi les écarts entre mortalité du portefeuille et celle de la tgf-05 sont de 11,8% en moyenne pondérée et de 10,5% en moyenne non pondérée. La tgf-05 est une table prudente pour les rentiers femmes.

2.1.3.2.2.1.3. LISSAGE SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE SANS PRISE EN COMPTE DU SEXE

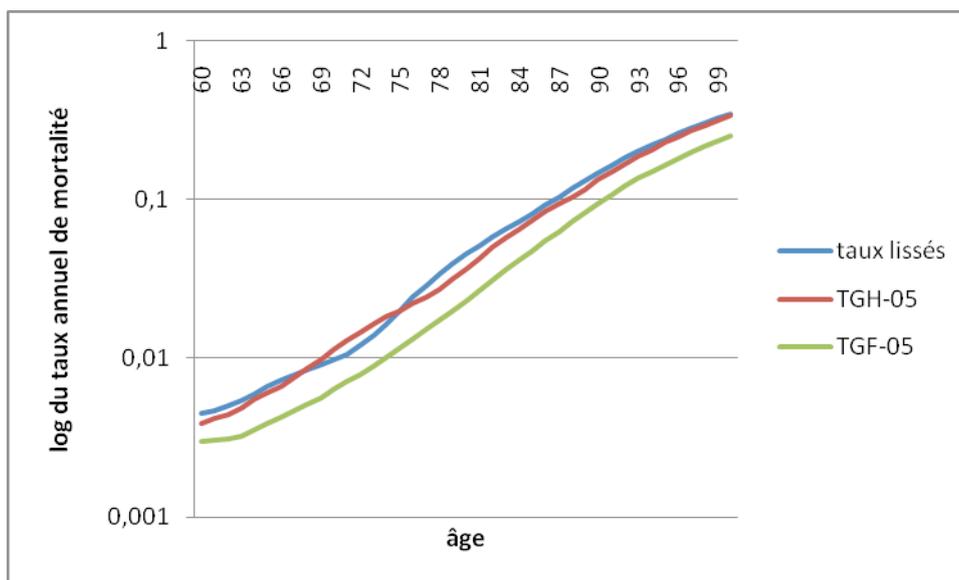


Figure xiv : mortalité sur l'ensemble du portefeuille lissée

Par rapport à la tgf05, on est sur des écarts moyens de mortalité annuelle de l'ordre de 37 % en pondéré et de 31 % en non pondéré.

2.1.3.2.2.2. LISSAGE DES TABLES PAR GROUPE DE GENERATIONS

Nous utilisons la méthode de Whittaker Henderson en 2 dimensions. Un lissage en fonction de l'âge et de la génération est effectué. Le choix des paramètres de lissage a été fait arbitrairement en fonction du lissage désiré. Cependant, nous avons mis plus de poids sur le lissage vertical (i.e. en fonction de l'âge) que sur le lissage horizontal (i.e. en fonction de la génération). Les poids utilisés sont construits comme ceux de la section précédente.

2.1.3.2.2.2.1. LISSAGE DES TABLES PAR GROUPE DE GENERATIONS POUR LES HOMMES

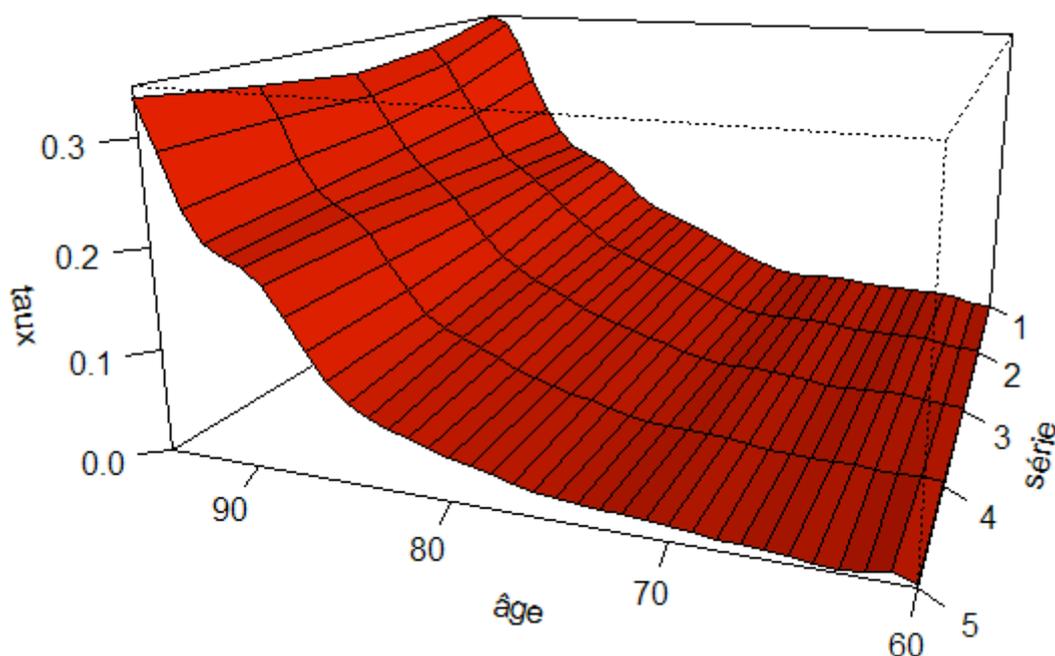


Figure xv : taux de mortalité lissés par paquet de deux ans pour les hommes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, etc.

On constate une baisse de la mortalité pour un âge fixé en fonction de la génération. Cette baisse est d'autant plus importante entre l'année 1 et l'année 2 car la première tranche englobe l'année 2003 de la canicule.

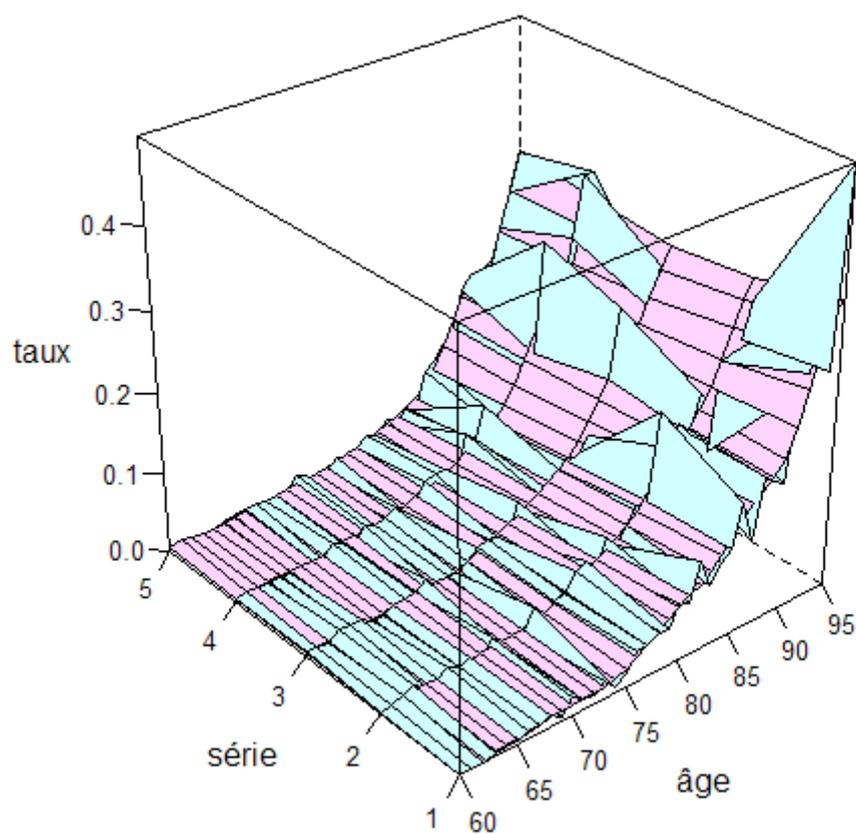


Figure xvi : taux de mortalité lissés et bruts par paquet de deux ans pour les hommes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, etc.

Le lissage agit par bande : il y alterne une sur et une sous-mortalité de la table lissée par rapport à la table brute. Le lissage gomme les sauts de mortalité comme celui de l'année 1 (correspondant aux années 2002-2003).

2.1.3.2.2.2. LISSAGE PAR GROUPE DE GENERATION POUR LES FEMMES

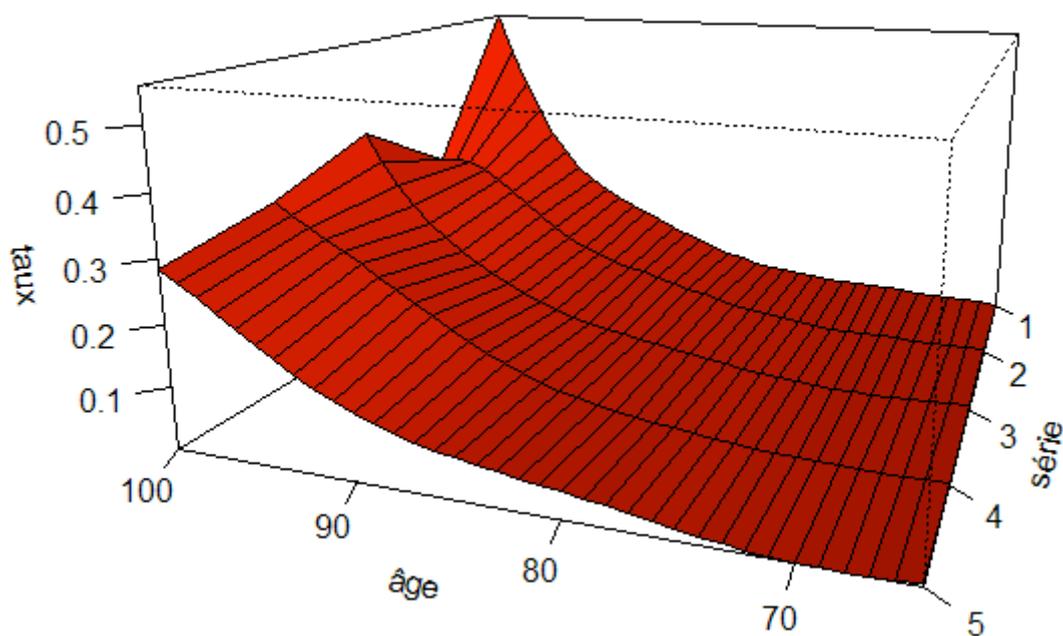
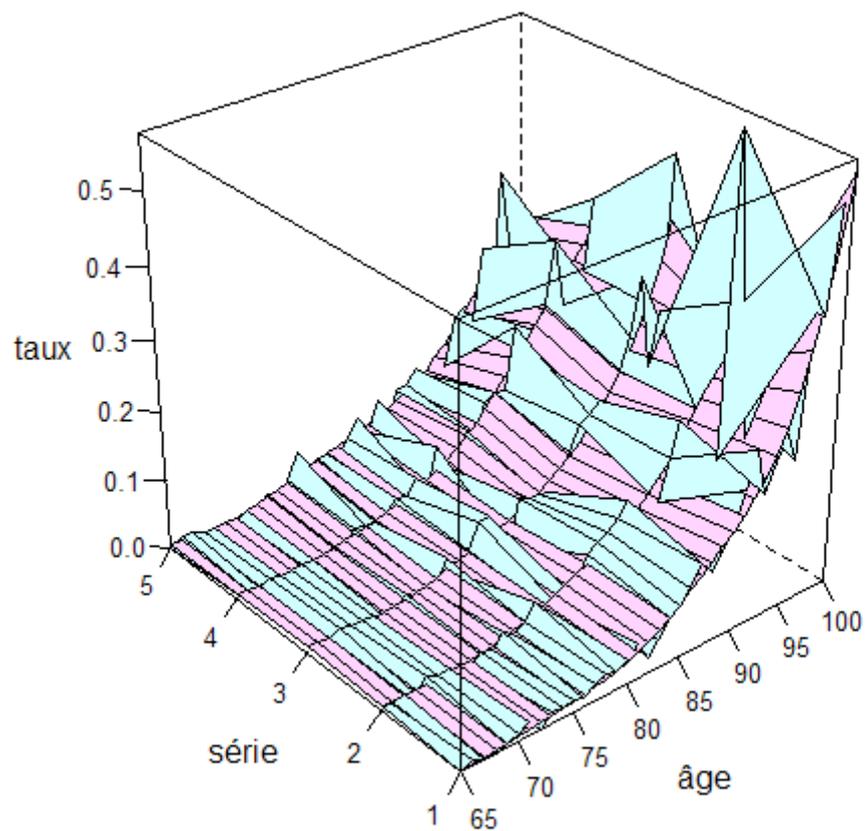


Figure xvii : taux de mortalité lissés par paquet de deux ans pour les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011

La baisse de la mortalité en fonction de la génération est plus marquée que sur le groupe des hommes, ce qui semble surprenant par rapport aux données de la population générale.

Au niveau des données, on peut expliquer cette diminution par la forte baisse de la mortalité aux grands âges due à la canicule de 2003.



[Figure xviii : taux de mortalité lissés et bruts par paquet de deux ans pour les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011](#)

La mortalité lissée surestime la mortalité brute entre les âges de 70 à 75 ans et entre les âges de 85 à 90 ans

2.1.3.2.2.2.3. LISSAGE PAR GROUPE DE GENERATION SUR L'ENSEMBLE DU PORTEFEUILLE

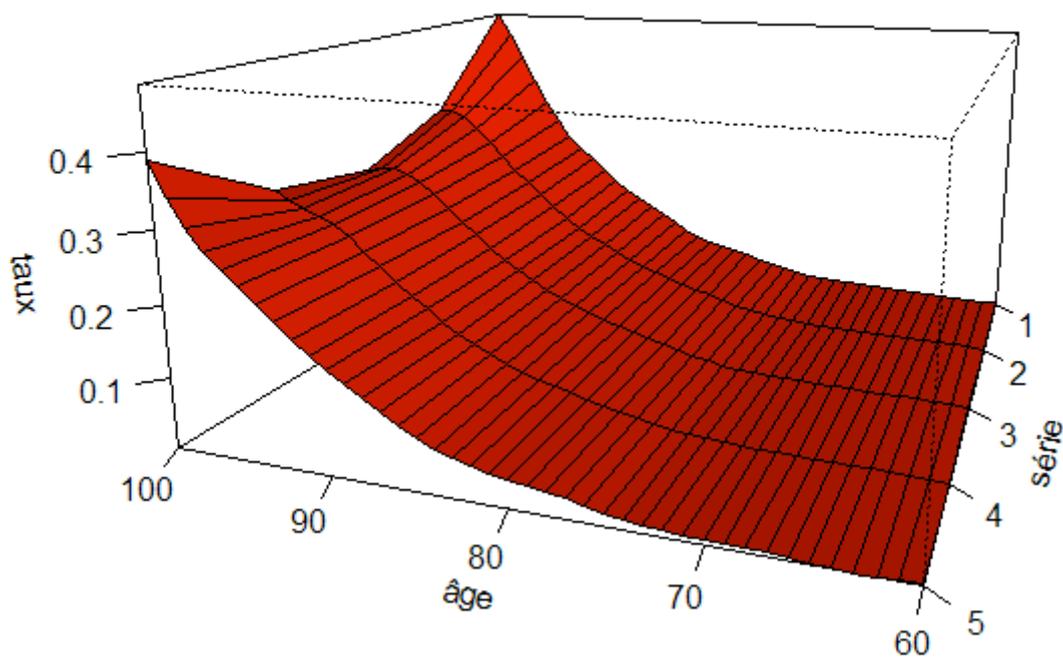


Figure xix : taux de mortalité bruts par paquet de deux ans pour les hommes et les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 :2004-2005, etc.

On observe les mêmes phénomènes que ceux observés précédemment. Toutefois, la mortalité diminue aux grands âges pour ensuite remonter.

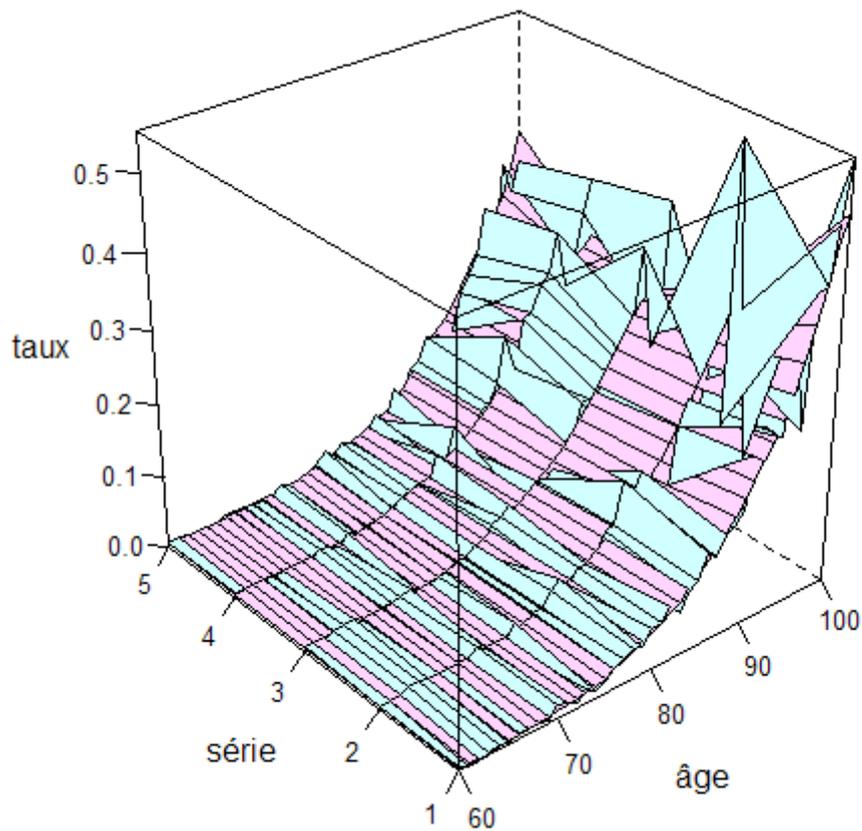


Figure xx : taux de mortalité bruts et lissés par paquet de deux ans pour les hommes et les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011

Le lissage sous-estime la mortalité aux grands âges pour les deux derniers groupes (2008-2009 et 2010-2011).

2.2. ESTIMATION DE LA DIMINUTION DE LA MORTALITE ET COMPARAISON AVEC LES TABLES REGLEMENTAIRES

Nous voulons étudier la diminution de la mortalité de génération en génération. En effet, cette diminution qui est prise en compte dans les tables réglementaires par génération ne correspond pas à ce qui est visible sur le portefeuille. Dans un premier temps, nous chercherons à quantifier la diminution de la mortalité pour un âge fixe en fonction de la génération. Ensuite, nous appliquerons ce coefficient à notre table lissée unisexe sur l'ensemble du portefeuille pour avoir les taux estimés par génération.

2.2.1. ETUDE DE L'EFFET COHORTE

Nous souhaitons analyser la vitesse de diminution de la mortalité à un âge fixé en fonction de la génération

2.2.1.1. CHOIX DES METHODES

Nous avons envisagé des modèles paramétriques du type :

$$\hat{q}_x^t = \hat{q}_x^0 + \alpha t + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \text{ un paramètre d'erreur ou encore :}$$

$\text{logit}(\hat{q}_x^t) = \text{logit}(\hat{q}_x^0) + \alpha t + \varepsilon_t$ cependant, le nombre de données disponibles ne nous permet pas de le calibrer de manière robuste.

Nous avons finalement retenu deux approches qui se ressemblent.

2.2.1.1.1. ESTIMATION DE LA DERIVE PAR MOYENNE SIMPLE

Nous partons des taux lissés par groupe de génération avec Whittaker-Henderson.

Nous calculons le taux de décroissance d'une série à l'autre à partir de la relation $\hat{q}_x^{t+1} = (1 - \text{taux})\hat{q}_x^t$

$$\text{Ainsi on a } \text{taux} = 1 - \frac{\hat{q}_x^{t+1}}{\hat{q}_x^t}$$

Nous obtenons ainsi une matrice de taux de croissance de taille nombre de x*(nombre de série -1)

Nous faisons ensuite une moyenne simple des taux obtenus. Entre chaque série, on a en moyenne 2 ans.

Nous avons ainsi $1 - \text{taux} = (1 - \hat{i})^2$ avec \hat{i} le taux annuel de variation de la mortalité.

On obtient donc $1 - \sqrt{1 - \text{taux}} = \hat{i}$.

L'inconvénient de cette approche est qu'elle suppose que le taux de diminution de la mortalité est constant au cours du temps et qu'il est constant en fonction de l'âge. Cependant, elle a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre.

2.2.1.1.2. ESTIMATION DE LA DERIVE ENTRE DEUX PERIODES

Nous construisons et lisons avec les méthodes exposées aux sections précédentes, deux tables espacées :

- La première avec des données de 2001 à 2003 (2003 est une année avec une mortalité exceptionnelle pour les âges supérieurs à 80 ans, le choix de l'inclure peut paraître discutable. Néanmoins, après confrontation de nos résultats avec ceux des collectives, nous trouvons une diminution semblable).
- La seconde avec des données de 2009 à 2011.

Nous calculons ensuite le taux moyen de mortalité par tranche de 5 ans (de 60 à 100 ans).

Nous avons testé plusieurs tranches d'âge et plusieurs paquets de génération, celui que nous avons retenu permet qu'il n'y ait aucun individu présent dans la même tranche d'âge entre les deux intervalles (un individu ayant 60 ans en 2003 aura 66 ans en 2009).

Nous faisons l'hypothèse que nos tables sont centrées autour de l'année centrale, par exemple la table construite entre 2001 et 2003 est centrée en 2002. On considère qu'une seule génération a servi à calculer le taux de mortalité q_x , c'est la génération 2002-x.

Nous cherchons ensuite le taux i tel que le taux moyen de la première tranche soit égal à celui de la seconde tranche

$$\hat{q}_{[x,x+5]}^{01-03} (1 - \hat{i})^8 = \hat{q}_{[x,x+5]}^{09-11} \text{ Soit } \hat{i} = 1 - \left(\frac{\hat{q}_{[x,x+5]}^{09-11}}{\hat{q}_{[x,x+5]}^{01-03}} \right)^{1/8} .$$

2.2.1.2. APPLICATION

La diminution de la mortalité de génération en génération a été calculée selon les deux méthodes présentées précédemment.

Nos données et la profondeur de l'historique ne nous permet pas d'être suffisamment robuste. Par mesure de prudence, nous ne calculons pas ces taux de diminution sur les taux de mortalité, mais sur les intervalles de confiance à 95%. Le passage de la série t à la série $t+1$ est donc calculé de la borne supérieure de la série t à la série $t+1$.

Nous avons étudié cette diminution par sexe, et avec les taux bruts et lissés.

		Méthode 1	Méthode 2
homme	lissés	1,28%	1,93%
	bruts	2,29%	2,50%
femme	lissés	1,76%	1,61%
	bruts	1,53%	1,81%
homme & femmes	lissés	1,63%	1,77%
	bruts	1,76%	1,8%

Une chose étrange se produit lorsque l'on travaille par paquet d'âge, en effet, contrairement à ce que nous attendions, le taux sans prise en compte du sexe n'est pas compris entre le taux des hommes et celui des femmes ce qui confirme le manque de robustesse.

2.2.1.3. DIMINUTION DE LA MORTALITE DE LA POPULATION FRANÇAISE

Comme nos données ne nous permettent pas d'estimer correctement la vitesse de diminution de la population, nous utilisons des données issues de la population française.⁷

Nous avons utilisé les tables de mortalité de population française. Nous avons pris les données les plus anciennes que nous avons trouvées, c'est-à-dire la mortalité annuelle de 1816 à 2009.

⁷ Source Human Mortality Database, www.mortality.org

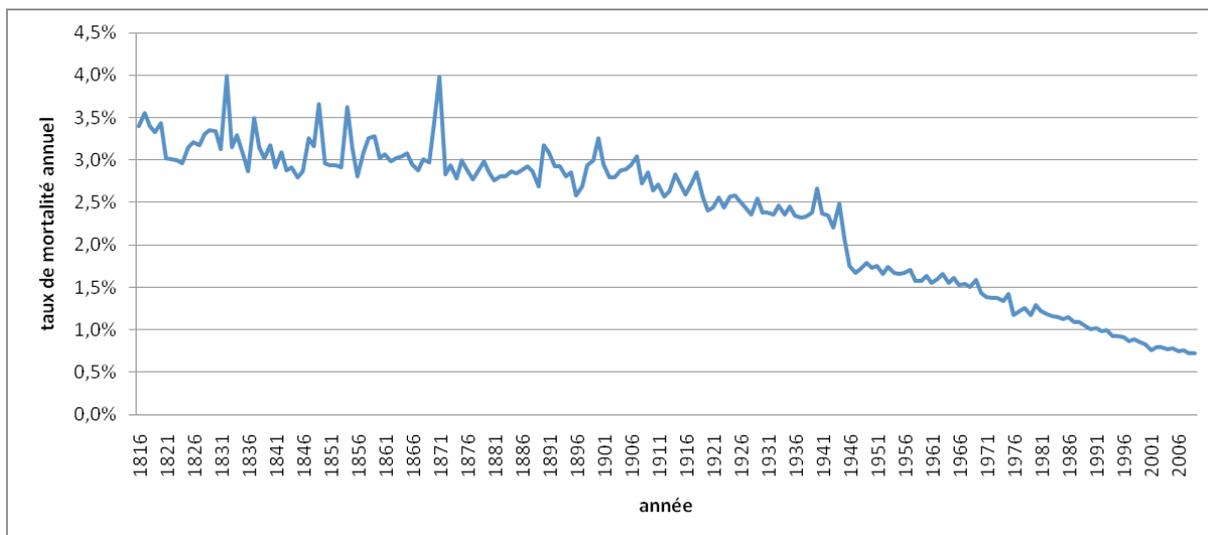


Figure xxi : taux de mortalité annuel à 60 ans de la population française

La mortalité diminue avec une cassure après la seconde guerre mondiale. Des pics de mortalité ont lieu au moment des guerres (1914-18, 1939-45, 1870-71).

Les chutes après les guerres s'expliquent par de forts progrès médicaux, notamment en chirurgie.

Nous nous focalisons sur la série des diminutions de la mortalité par âge entre 60 et 95 ans. Nous traitons chaque âge mais nous ne présentons que les résultats à 60 ans.

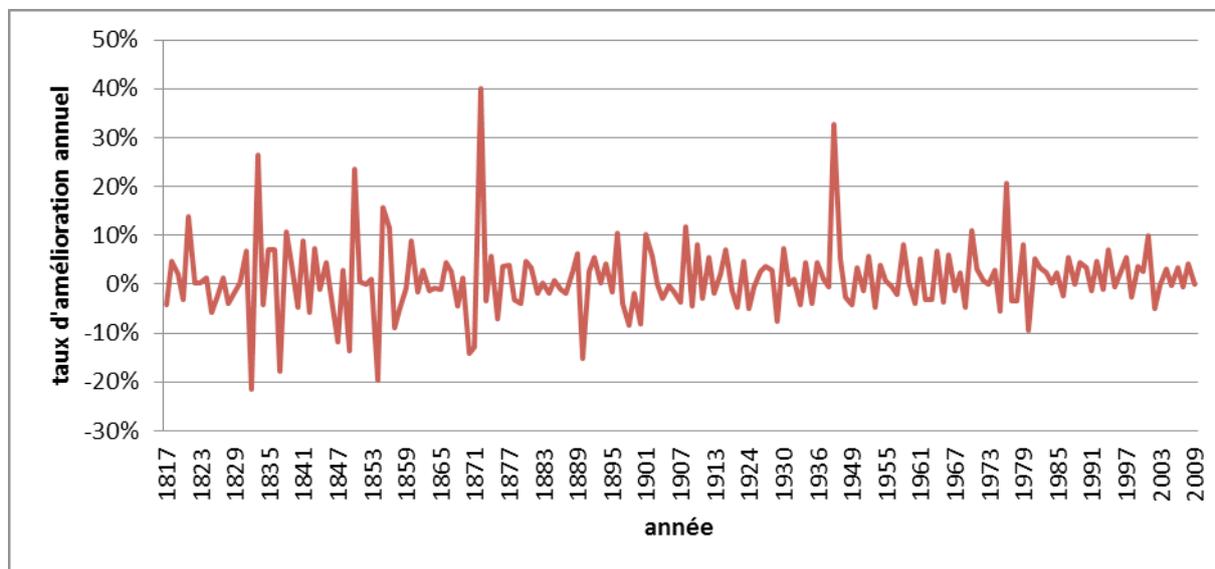


Figure xxii : taux annuel de diminution de la mortalité à 60 ans pour la population française

Il y a une forte volatilité de la diminution annuelle de la mortalité.

Notre but est d'estimer la diminution de la mortalité et aussi de caractériser sa dynamique afin de pouvoir prévoir celle-ci pour les générations futures. Nous gardons les séries de 1946 à 2009.

Dans un premier temps, nous testons la stationnarité des séries avec le test de racine unitaire de Dickey-Fuller. L'hypothèse nulle de non-stationnarité n'est pas acceptée avec des p value variant de 0,02 à 0,0001. Il n'y a donc pas de tendance temporelle marquée.

Au vu des séries, nous pensons à un processus arma. En fonction des séries, on est en présence de ma(1) ou d'un ar(1). Cependant les tests de bruits blancs (Box-Pierce, Portemanteau) ne rejettent pas l'hypothèse que les séries peuvent être modélisées par des bruits blancs.

Sur les dernières 60 années, nous obtenons une baisse annuelle de la mortalité lissée :

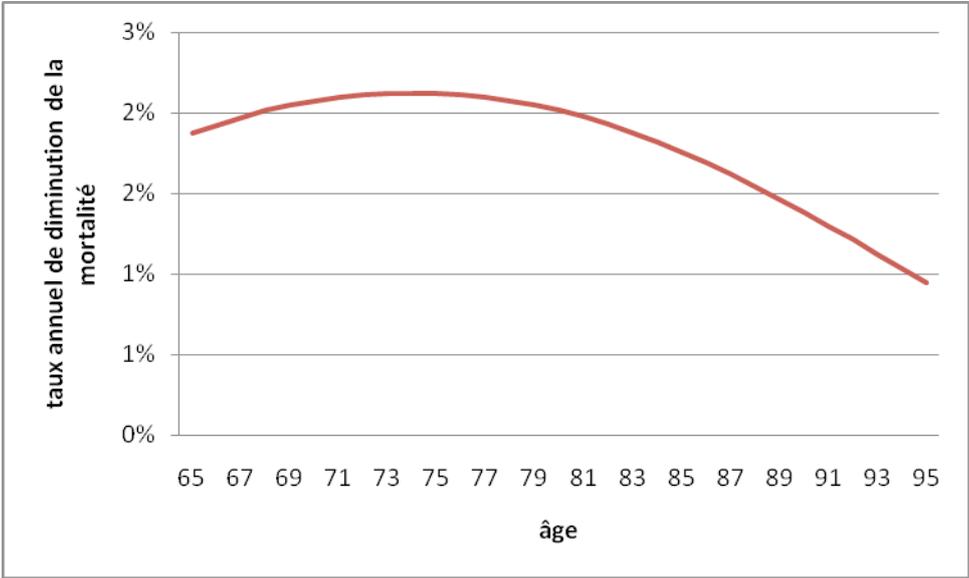


Figure xxiii : [taux annuel de diminution de la mortalité lissé de la population nationale française](#)

Nous ajustons la diminution de la mortalité pour l'adapter à celle de notre portefeuille de rentier. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que l'amélioration du portefeuille a la même forme que celle de la population générale. Nous considérons que sur la période le taux de diminution est égal au plus haut des taux déterminés dans la section précédente, soit le taux homme brut qui est de 2,5% .Nous effectuons une translation de la courbe obtenue pour arriver à une amélioration de 2,50% sur l'intervalle considéré. Ce qui revient à augmenter les taux précédents de 0,81%.

2.2.2. CONSTRUCTION D'UNE TABLE D'EXPERIENCE UNISEXE PAR PROJECTION DES TAUX ESTIMES

Nous voulons construire une table de mortalité d'expérience. Notre but est d'avoir une image fidèle de ce qui se passe (et se passera) dans le portefeuille tout en gardant une approche prudente. Cependant, notre approche est prudente en nombre de décès, et non pas en risque technique qui lui est lié aux montants des rentes. Ainsi à partir de cette table, nous allons pouvoir analyser les impacts de la directive unisexue dans le cadre d'un groupe de rentiers avec une anti-sélection homogène à l'entrée.

2.2.2.1. METHODE ET APPLICATION

Notre but est d'avoir une table de mortalité pour les rentes viagères, nous devons donc adopter une approche prudente.

Nous partons de la mortalité lissée que nous avons obtenue en considérant l'ensemble du portefeuille. Ainsi chaque taux de mortalité est estimé par 11 générations. Un taux de mortalité à l'âge x , en faisant l'hypothèse d'une diminution de la mortalité constante au cours du temps, représente donc la mortalité

de la génération $\frac{2011 + 2001}{2} - x$.

C'est ici que la prudence est introduite dans notre table : nous considérons que le taux de mortalité ainsi calculé correspond à la mortalité de la génération 2005- x . Il s'agit bien d'une mesure de prudence. En effet, la mortalité à x fixé diminue en fonction de la génération. Nous considérons donc que la mortalité à x ans de la génération 2005- x est plus basse que ce qu'elle est réellement. Le fait de sous-estimer la mortalité est une mesure de prudence car nous considérons les rentes viagères où le principal risque est que les assurés décèdent moins que prévu.

A partir de la table lissée nous avons donc la diagonale suivante :

génération 1910		génération 1940
		$\hat{q}_{65}^{gen 940}$
	...	
$\hat{q}_{95}^{gen 910}$		

Avec l'estimation de la diminution de la mortalité que nous avons déterminée dans la partie précédente nous construisons la table pour la génération 1940

génération 1910	génération i	génération 1940
		$\hat{q}_{65}^{gen1940}$
	\hat{q}_{2005-i}^{geni}	$\hat{q}_{2005-i}^{gen1940} = \hat{q}_{2005-i}^{geni} (1 - \hat{r}_x)^{1940-i}$
$\hat{q}_{95}^{gen1910}$	$\hat{q}_{95}^{geni} = \hat{q}_{95}^{gen1909} (1 - \hat{r}_{95})^{i-1910}$	$\hat{q}_{95}^{gen1940} = \hat{q}_{95}^{gen1910} (1 - \hat{r}_{95})^{30}$

Nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\hat{q}_x^{geni+1} = (1 - \hat{r}_x) \hat{q}_x^{geni}$$

Dans la section précédente, nous avons estimé la mortalité de 60 à 100 ans. Cependant pour avoir une mortalité robuste, nous retenons uniquement les âges où la quantité de données permet d'avoir une vision fiable soit de 65 à 95 ans. (Nous avons le critère de Cochran supérieur à 20 pour tous ces âges).

Nous pouvons ainsi projeter la mortalité entre 65 et 95 ans pour les générations suivantes. Nous projetons jusqu'à la génération 1980 (si sortie en rente à 67 ans, alors la sortie aura lieu en 2047).

Fermeture de la table

Nos données ne nous permettent pas de savoir ce qu'il se passe au-delà de 95 ans.

Nous utilisons le modèle de Denuit et Goderniaux qui stipule que le logarithme des taux de mortalité aux grands âges a une forme quadratique. $\log(\hat{q}_x) = a + bx + cx^2 + \varepsilon_x$ avec ε_x qui suit une $N(0, \sigma^2)$

Avec pour contrainte

$$\begin{cases} \hat{q}_{130} = 1 \\ \hat{q}'_{130} = 0 \end{cases}$$

Une réécriture des contraintes donne $a + bx + cx^2 = a(130^2 - 260x + x^2)$

Nous estimons la fermeture de la génération 1940, la normalité des résidus est validée par test.

Avec ce modèle nous fermons la génération 1940.

Nous faisons l'hypothèse, en accord avec la littérature sur le sujet, qu'il existe un âge pivot tel que le taux de mortalité à cet âge est de 0,5

$$q_{pivot} = at + b$$

Nous l'estimons par moindres carrés sur les données de la population générale. Par mesure de prudence, lorsque le taux à 0,5 est compris entre deux âges, nous prenons l'âge supérieur. Le a estimé est de 0,1072. C'est-à-dire qu'environ tous les 10 ans, l'âge auquel la mortalité vaut $\frac{1}{2}$ s'incrémente.

Nous cherchons ensuite le taux de diminution de la mortalité pour chaque âge compris entre 96 ans et 130 ans tel que l'âge pivot augmente de 0,1072/ans par an. Nous appliquons ensuite ces taux de décroissance à la mortalité de la génération 1940 pour avoir la fermeture de la table par génération. Enfin, nous supposons que le taux maximum de mortalité est de 0,6 (conformément aux recherches sur la mortalité). Nous gardons le $\min(q_x, 0,6)$.

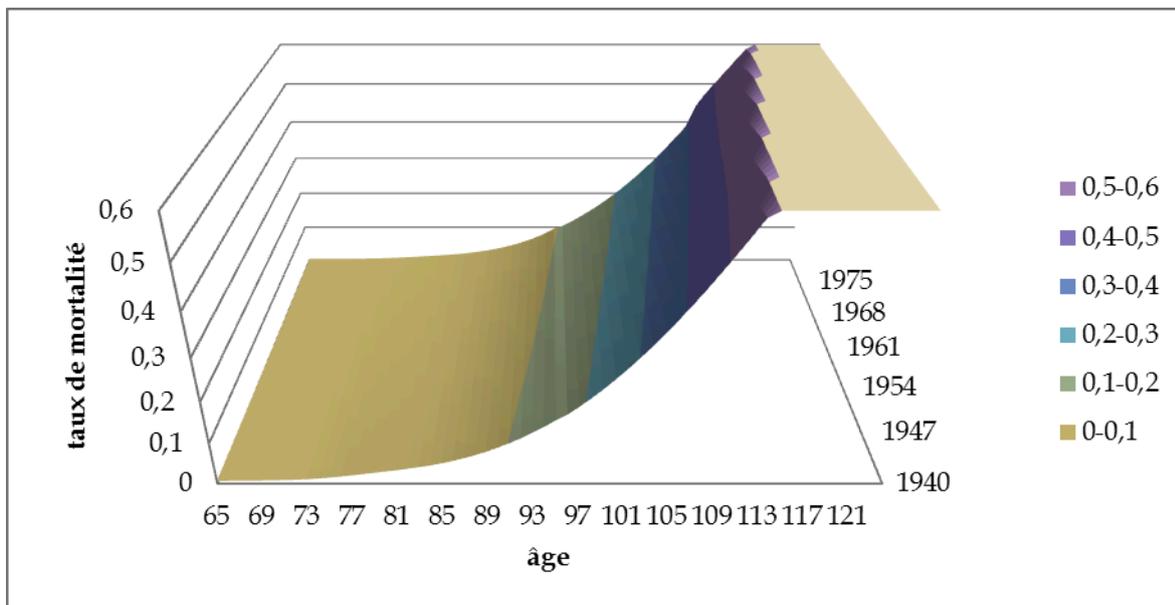


Figure xxiv : table de mortalité d'expérience unisexé

On sait que $q_x = \frac{l_{x+1} - l_x}{l_{x+1}}$, à partir de là on a donc $l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$. On suppose que $l_{60} = l_{60}^{tgf-05}$. On

construit ainsi notre table des vivants. Nous supposons de plus, que, pour les âges en dessous de 65 ans, la mortalité est celle de la tgf-05.

On peut calculer l'espérance de vie et d'autres indicateurs qui vont nous permettre de confronter nos résultats à ceux des tables réglementaires.

2.2.2.2. COMPARAISON AVEC LES TABLES REGLEMENTAIRES.

Nous disposons de notre table d'expérience unisexe. Il faut noter que cette table repose sur beaucoup d'hypothèses, notamment la plus importante est que la proportion hommes/femmes dans le portefeuille reste constante et égale à celle du portefeuille sur la période d'observation.

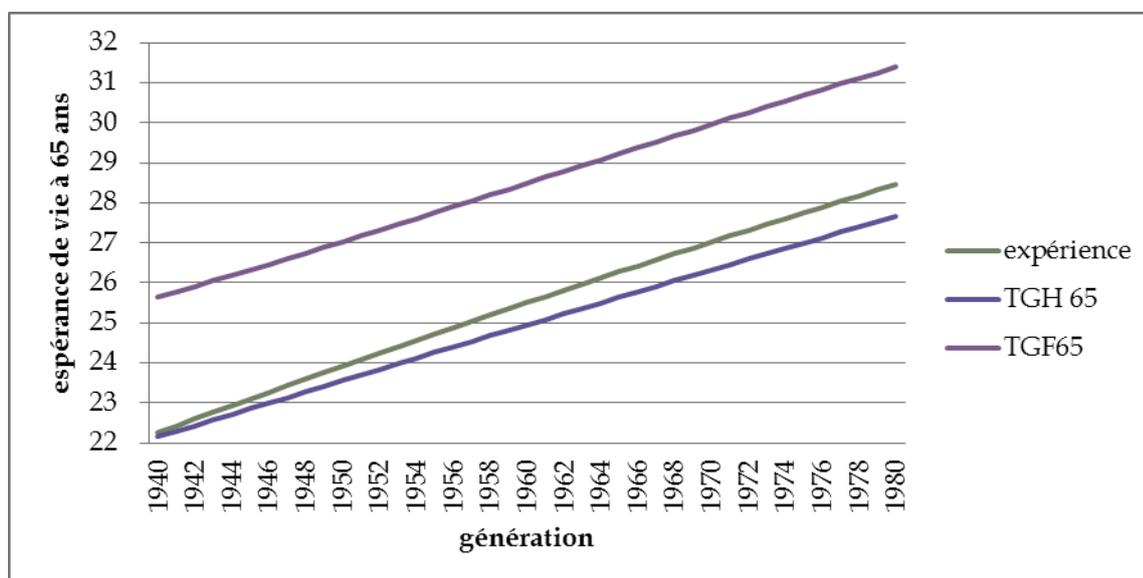


Figure xxv : espérance de vie à 65 ans

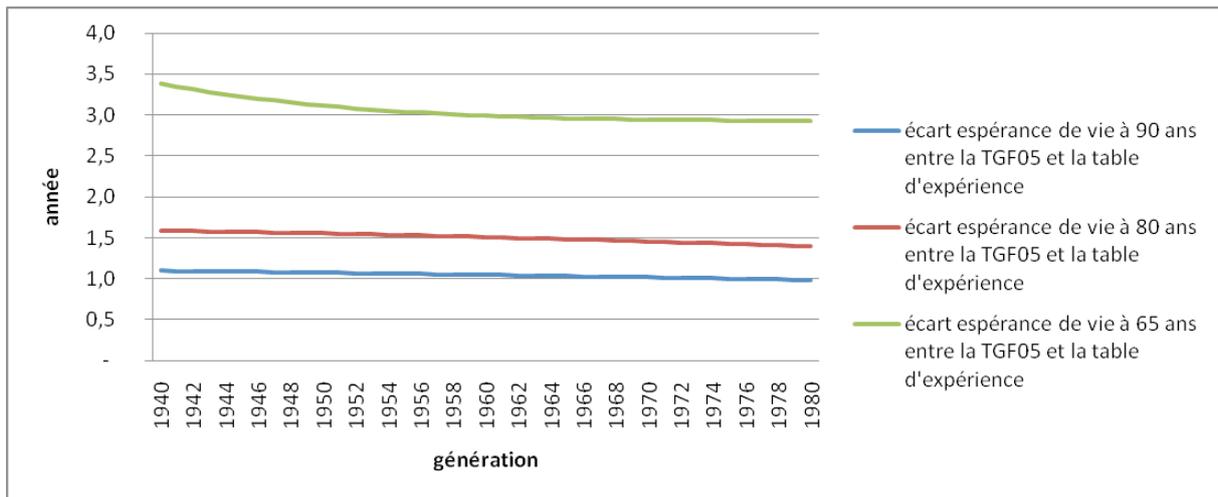


Figure xxvi : écart d'espérance de vie entre tqf-05 et table d'expérience

Les écarts d'espérance de vie ne sont pas constants au cours du temps, ils varient entre 3,45 ans et 2,9 ans à 65 ans.

A 90 ans, les différences d'espérance de vie diminuent. Il s'agit d'un écart quasi linéaire entre la TGF05 et la table d'expérience. Notre table d'expérience présente donc une espérance de vie inférieure à celle de la TGF05, cependant l'accroissement de l'espérance de vie de la TGF05 se fait grâce à une diminution de la mortalité à tous les âges. Nos gains d'espérance de vie sont principalement liés à la rectangularisation de la fonction de survie. C'est-à-dire que les individus, au lieu de décéder progressivement, atteignent un âge seuil et décèdent de manière massive. Cette rectangularisation se produit grâce aux taux d'améliorations de la mortalité aux grands âges qui sont tels que l'âge pivot (où le taux de mortalité vaut 0,5) augmente moins rapidement que les améliorations des âges entre 65 et 95 ans.

2.3. UTILISATION DE LA TABLE D'EXPERIENCE POUR MESURER LES IMPACTS TECHNIQUES DE LA DIRECTIVE

La construction de notre table a été réalisée en modélisant le nombre des décès, cette approche nécessite une homogénéité des montants de rentes entre les contrats. Cependant, dans notre portefeuille ce n'est pas le cas : une antisélection a lieu, ainsi un rentier ayant une rente viagère importante vit en moyenne plus longtemps qu'un rentier ayant une petite rente. Si bien que le passage de la mortalité en nombre à une mortalité technique (reflétant le risque financier réellement couru) diminue les répercussions de la mortalité. La taille de notre portefeuille ne nous permet pas d'estimer la mortalité « technique ».

2.3.1. TARIFICATION

2.3.1.1. TARIFICATION DE PRODUIT AVEC NOTRE TABLE D'EXPERIENCE

La tarification d'un produit d'assurance vie type rente viagère utilise des éléments généraux tels que :

- Un taux technique qui est « au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus »,
- Une table de mortalité définie dans l'article A335 du code des assurances.
- Des frais d'arrérages, généralement exprimés en % (compris entre 1% et 3% pour la plupart des produits). Ces frais peuvent également être fixes, par exemple 5€ par arrérage.

Ensuite, elle utilise des éléments qui dépendent du produit et des options choisies :

- Le fractionnement de la rente (mensuel, trimestriel, semestriel, annuel...)
- Le terme (échu ou d'avance)
- D'un différé (augmente le montant de la rente)
- Réversion (diminue le montant de la rente).

Afin d'étudier les impacts de la directive nous allons tarifier un produit classique : une rente viagère immédiate à terme échu avec un fractionnement trimestriel.

Le montant à verser par l'assuré pour un tel produit est la valeur actuelle probable des flux futurs.

Dans un premier temps, nous ne prenons pas en compte les frais d'arrérages.

Nous utilisons pour simplifier le calcul les notations actuarielles usuelles (cf annexe).

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ le taux technique} \\ v = \frac{1}{1+i} \\ l_x \text{ le nombre de vivants à l'âge } x \\ \textit{frac} \text{ le fractionnement de la rente} \end{array} \right.$$

On cherche le coût d'une rente annuelle unitaire, soit d'une rente fractionné de $\frac{1}{\textit{frac}}$

coût de la rente à l'âge $x = \sum_{i>x} \text{probabilité que l'individu soit vivant au } i \text{ eme versement actualisé}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\textit{frac}} \sum_{i=0}^{\omega-x} \sum_{t=1}^{\textit{frac}} \frac{1}{l_{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}}} v^{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}} \\ &= \frac{1}{\textit{frac}} \sum_{i=0}^{\omega-x} \sum_{t=1}^{\textit{frac}} \frac{D_{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}}}{D_x} \end{aligned}$$

On cherche $D_{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}}$, par interpolation linéaire et hypothèse de distribution uniforme des décès au

cours de l'année on a

$$\begin{aligned} \frac{D_{x+i+1} - D_{x+i}}{1} &= \frac{D_{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}} - D_{x+i}}{\frac{t}{\textit{frac}}} \\ D_{x+i+\frac{t}{\textit{frac}}} &= (D_{x+i+1} - D_{x+i}) \frac{t}{\textit{frac}} + D_{x+i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{coût de la rente à l'âge } x &= \frac{1}{\text{frac}} \sum_{i=0}^{\omega-x} \sum_{j=1}^{\text{frac}} \frac{(D_{x+i+1} - D_{x+i}) \frac{f}{\text{frac}} + D_{x+i}}{D_x} \\
&= \frac{1}{\text{frac}} \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{\omega-x} \sum_{j=1}^{\text{frac}} \left((D_{x+i+1} - D_{x+i}) \frac{f}{\text{frac}} + D_{x+i} \right) \\
&= \frac{1}{\text{frac}} \left(\frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{\omega-x} \text{frac} D_{x+i} + \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{\omega-x} (D_{x+i+1} - D_{x+i}) \frac{1}{\text{frac}} \sum_{f=1}^{\text{frac}} f \right) \\
&= \frac{N_x}{D_x} - \frac{(\text{frac}+1) D_x}{2 \text{frac} D_x} \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{D_x}{D_x} - \frac{(\text{frac}+1)}{2 \text{frac}} \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{\text{frac}-1}{2 \text{frac}}
\end{aligned}$$

Nous faisons le calcul du montant du capital constitutif nécessaire pour avoir une rente viagère unitaire avec un fractionnement trimestriel échu et des frais d'arrérages de 3%. Ce qui nous donne comme résultat :

coût à 67 ans d'une rente viagère unitaire en fonction de la table et de la génération	TGF-05	TGH-05	table expérience
génération 1940	20,96€	18,50€	18,58€
génération 1960	23,92€	19,98€	20,7€
génération 1980	25,8€	21,86€	22,59€

Le coût avec la table d'expérience se situe entre la table réglementaire TGH05 et la TGF05. Ce qui était prévisible car l'espérance de vie d'expérience est comprise entre ces mêmes tables.

2.3.1.2. IMPACT DE LA DIRECTIVE

La directive va engendrer l'augmentation du coût des produits viagers pour les hommes et le diminuer pour les femmes. Si seule la tgf-05 reste comme table réglementaire alors notre table d'expérience ne peut pas être utilisée car elle est moins prudente (et pas certifiée). Ce qui va entraîner, à paramètres de tarification hors table de mortalité fixés, une stagnation des tarifs pour les femmes et une hausse pour les hommes.

2.3.2. PROVISIONNEMENT

Nous voulons connaître l'impact de la directive en termes de provisionnement. Une question préliminaire est de se demander si l'utilisation de table par sexe reste possible pour le provisionnement. En cas de passage en table de mortalité unisexe pour le provisionnement, va t'il concerner uniquement les affaires nouvelles ou va t'il falloir re-provisionner les contrats souscrits avant le 21 décembre 2012 ?

L'article A 331-1-2 précise que « Les provisions mathématiques de tous les contrats individuels et collectifs de rentes viagères en cours de service au 1^{er} janvier 2007 ou liquidées à compter de cette même date, doivent être calculées en appliquant aux dits contrats, lors de tous leurs inventaires annuels, à partir de cette date, les tables de mortalité appropriées mentionnées à l'article A. 335-1 applicables aux contrats de rente viagère souscrits à compter de cette même date ».

La directive unisexe va entraîner le changement du A 335-1 (utilisation pour le tarif de la table réglementaire ou d'une table d'expérience si elle est plus prudente. En cas d'utilisation d'une table unique, utilisation de la plus prudente). Il est probable que la section sur le provisionnement soit modifiée aussi.

L'arrivée des tables TGH/TGF-05 a entraîné le re-provisionnement des contrats. Afin de ne pas engendrer un choc financier trop important pour les assureurs, une période de lissage a été autorisée : article A331-1-2, « Les entreprises peuvent répartir sur une période de quinze ans au plus les effets sur le provisionnement résultant de l'utilisation des tables de génération homologuées par arrêté du ministre de l'économie. »

L'espérance de vie et la mortalité étant comprises entre les tables TGH-05 et TGF-05 ainsi il en sera de même pour le provisionnement.

Les écarts en termes de provisionnement sont à peu de chose près du même ordre que les écarts en termes d'espérance de vie.

2.3.3. RESULTAT TECHNIQUE

Le résultat technique est la différence entre les ressources et les dépenses. Les dépenses sont les sommes attribuées aux assurés, les frais de gestion et les commissions, les ressources sont les cotisations et produits financiers.

En cas de non diminution des ressources, les dépenses vont diminuer. En effet, la directive impose l'utilisation d'une table de mortalité unique qui sera la plus prudente ce qui entraîne mécaniquement une baisse des dépenses et donc une hausse du résultat technique.

L'utilisation de notre table d'expérience représente le risque couru par AXA. Cependant une marge de prudence a été introduite, l'assureur va donc a priori réaliser des gains techniques.

2.3.4. CONTRAT EN STOCK & RESEAU DE DISTRIBUTION

Une question au niveau du réseau de distribution se pose : faut-il inciter les hommes à souscrire avant le 21 décembre 2012 des contrats d'épargne avec garantie de table en cas de sortie en rente ?

Afin d'arriver à faire souscrire en masse, il faut une grande campagne d'information. Cependant, une telle communication aura un impact positif à court terme au niveau des ventes, mais pourrait pénaliser l'assurance vie à partir de 2013. En effet, les futurs clients pourraient ne plus souscrire d'assurance vie (du moins les hommes) car ils auront une image de produits financièrement peu intéressants.

De plus, les garanties de table de mortalité au moment de la sortie en rente peuvent entraîner des pertes techniques importantes. En effet, ce type de garantie engage l'assureur à très long terme. Il faut donc avoir une très bonne visibilité de la mortalité à long terme. Les tables TV 88-90 ont montré leur insuffisance de prudence, il en est peut-être de même avec les TGH/F-05. C'est pour cela que les conditions générales actuelles de la plupart des contrats précisent « condition en vigueur au moment de la sortie en rente » afin d'éviter les erreurs du passé avec des tables peu prudentes et des taux techniques élevés.

Ainsi aucune campagne d'information d'importance n'a été lancée.

2.4. CONCLUSION

Les tables utilisées sont prudentes pour les anciennes générations et ne le sont pas suffisamment pour les nouvelles. En effet, les taux de diminution de la mortalité de génération en génération des tables réglementaires sont inférieurs à ceux calculés avec nos données. Si bien que les tables réglementaires sont prudentes pour les générations 1900-1965 mais ne seront pas prudentes pour les générations supérieures à 1965. Cependant, la majeure partie des produits qui offrent des garanties de table de mortalité au moment de la conversion en rente ont ces garanties jusqu'à une date butoir. Ainsi actuellement, elle est fixée aux alentours de 2035, ce qui signifie qu'il s'agit des personnes nées avant 1970 qui sont concernées.

Au niveau technique la directive va introduire une prudence supplémentaire qui va engendrer des gains techniques. Cependant la hausse des tarifs peut générer une baisse du chiffre qui peut rapidement effacer les gains réalisés par la prudence accrue introduite.

3. IMPACT MARKETING

La directive interdit l'utilisation du sexe comme facteur discriminant. A partir de là se posent deux questions

- comment avoir un tarif actuariellement juste ?
- comment avoir un tarif qui n'entraîne pas la fuite d'une sous-population (celle des hommes) ?

Nous faisons l'hypothèse, comme le suggère le code des assurances à l'heure actuelle (art 335-1) que la table qui va être retenue comme table unisexe (du moins dans un premier temps) est la table TGF-05.

Afin de mieux comprendre les enjeux de la directive du côté comportement des clients nous allons présenter des éléments de la théorie des jeux.

3.1. THEORIE DES JEUX

La théorie des jeux correspond aux outils d'analyses permettant d'évaluer les comportements optimaux pour un agent (une entreprise, un particulier,...) dans une situation de choix dans l'incertain. Dans la plupart des cas ce comportement optimal dépend des anticipations du comportement des autres agents. La théorie des jeux permet une « analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres ».

3.1.1. BREF DESCRIPTION D'UN JEU

Un jeu est une situation dans laquelle un choix stratégique doit s'effectuer, il se compose comme suit :

- Qui ? dans notre cas il s'agit de client et de compagnie d'assurance.
- Quoi ? les actions à effectuer, dans notre cas il s'agit pour le client de souscrire ou de ne pas souscrire une garantie. Pour la compagnie il s'agit de savoir si elle accepte la souscription du client ou commercialise ou non un produit.
- Quand ? Le déroulement du jeu. Ici c'est la compagnie qui joue la première, elle met en place un produit et ensuite le client choisit ou non de souscrire.
- Combien ? Le gain pour chaque joueur. Dans le cas de l'assurance vie ce point est délicat car le risque principal est le risque de longévité (les autres risques sont plus encadrés par la réglementation). Or, le risque de longévité est un risque qui se réalise longtemps après la souscription du produit.

3.1.2. PRESENTATION D'UN JEU SIMPLE

3.1.2.1. LE DILEMME DU PRISONNIER

Nous allons présenter le dilemme du prisonnier⁸.

Deux joueurs doivent effectuer un choix simultanément, la matrice des gains de chacun des joueurs est la suivante :

		joueur A	
		ne pas dénoncer B	dénoncer B
joueur B	ne pas dénoncer A	(5 ; 5)	(-10 ; 10)
	dénoncer A	(10 ; -10)	(0 ; 0)

Les gains sont les suivants (gain joueur B ; gain joueur A) ;

Dans une telle situation le joueur A va anticiper que B va le dénoncer car

- Si B dénonce A, alors le gain de B est -10 ou 0 ; alors B va jouer dénoncer car $0 > -10$.
- Si B ne dénonce pas A, alors le gain de B est 5 ou 10 ; alors B va jouer dénoncer car $10 > 5$.

De même pour l'autre joueur. Aucun agent n'a intérêt de dévier de sa position qui est de dénoncer l'autre ce qui entraîne un gain de 0 pour chacun, ce qui est inférieur à s'ils avaient coopéré et joué 'ne pas dénoncer'.

Il s'agit d'un équilibre de NASH, qui se définit comme « une situation d'équilibre où aucun des agents n'a intérêt à dévier de sa position. »

3.1.2.2. APPLICATION DE CE JEU AU CAS DE LA DIRECTIVE UNISEXE

Le jeu suivant n'est que pure fiction.

La gender directive concerne les contrats d'assurance vie. Supposons qu'une certaine interprétation de la directive puisse laisser entendre que dans l'état actuel du code des assurances les contrats dit « Madelin » pourront toujours bénéficier de la segmentation par sexe. La proportion d'hommes et de femmes sur ce genre de contrat est de 65%/35%.

⁸Présenté pour la première fois par Albert W. Tucker en 1950

La matrice des gains pour les Madelins est la suivante. Nous supposons également que la demande de produit Madelin reste constante.

		Assureur A	
		tarif unisexe	tarif différencié
assureur B	tarif unisexe	(12 ; 12)	(3,5 ; 16,5)
	tarif différencié	(16,5 ; 3,5)	(10 ; 10)

L'assureur B anticipe que A va pratiquer un tarif différencié car $16,5 > 10$ et $10 > 3,5$. Symétriquement il en est de même pour l'autre assureur. Ainsi, si un assureur pratique un tarif différencié, les autres assureurs vont faire de même et un tarif différencié va être appliqué par l'ensemble des assureurs. S'ils s'étaient entendus (dans la limite des lois sur la concurrence), ils auraient gagné d'avantage en appliquant un tarif unisexe (car gain technique sur les hommes).

Cependant afin d'éviter ce genre de situation, les joueurs peuvent communiquer pour se mettre d'accord sur la meilleure stratégie à adopter (dans le cas de l'assurance, la ffsa permet aux acteurs d'avoir une position commune).

3.2. APPLICATION DE LA THEORIE DES JEUX EN ASSURANCE VIE

Un même produit ayant deux tarifs en fonction du sexe de l'assuré : $tarif_{homme}$ et $tarif_{femme}$. Si on constate une proportion constante d'hommes et de femmes au fil des générations qui est respectivement α et β alors le tarif unisexe devrait être de manière simpliste $tarif_{unisexe} = \alpha tarif_{homme} + \beta tarif_{femme}$.

Dans un premier temps il semble qu'un tarif qui soit intermédiaire entre le tarif homme et le tarif femme ne soit pas applicable en pratique (car utilisation de la table femme). Cependant le tarif réel d'un produit est constitué :

- Table de mortalité
- Frais de gestion

La rente est revalorisée avec la Participation aux Bénéfices (avec un minimum réglementaire de 85%).

Nous allons montrer que dans la pratique tous les tarifs entre le tarif homme et le tarif femme sont atteignables.

Une étude rapide des produits de rente viagère commercialisés nous montre que les frais d'arrérages sont autour de 3%, et la participation aux bénéfices à 90%

La tarification d'un produit de rente viagère immédiate à terme échu à un âge y avec fractionnement annuel s'écrit

$$\text{Coût rente (1 + frais d'arréage)} = \frac{l_{y+1}}{l_y} \frac{1}{1+i} + \frac{l_{y+2}}{l_y} \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \dots + \frac{l_{\omega}}{l_y} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\omega-y-1}$$

Entre une tarification homme et femme ce qui change sont les l_x utilisés.

Ainsi, sur les bases de la tgf-05 pour une femme et la tgh-05, le prix d'une rente viagère unitaire à 67 ans avec fractionnement annuel échu et taux technique de 1,5% est de

	Table homme	Table femme
Frais d'arréage 3%	18,6€	21,1€
Frais d'arréage 0%	18,1€	20,5€

Même avec des frais d'arrérages nuls pour une rente avec une tarification utilisant la table femme on est supérieur à une rente homme avec des frais de 3%.

Le taux technique utilisé est précompté dans la participation aux bénéfices.

Si le rendement financier réalisé est de 3,43% (selon la ffsa, le rendement moyen de fonds en euros en 2010 a été entre 3,20% et 3,40% contre 3,70% en 2009) et si le produit femme a une participation aux bénéfices de 100% et le produit homme de 90% alors il est financièrement équivalent d'avoir le produit femme avec une PB à 100% et des frais de 0% ou le produit homme avec une PB à 90% et des frais à 3%.

Ainsi, même avec l'obligation d'utiliser une table femme pour tous les produits, sous certaines conditions, cela peut équivaloir à un produit homme.

Sans prendre des hypothèses extravagantes, on arrive à la conclusion que la gender directive « peut » ne pas avoir d'impact sur le prix des produits viagers (si on arrive à identifier les hommes et les femmes).

Cependant l'hypothèse la plus invraisemblable utilisée est que la mortalité est correctement estimée. En effet, il est certes financièrement équivalent d'avoir l'un des deux produits, mais aucun assureur ne prendra le risque de créer de tels produits qui ne seront rentables qu'au décès des individus, soit environ 35 ans après leur mise en place.

Sans aller jusqu'à là, il apparaît possible d'avoir un tarif qui corresponde au risque couru par l'assureur soit

$$\text{tarif}_{unisexé} = \alpha \text{tarif}_{homme} + \beta \text{tarif}_{femme}$$

Supposons que les hommes et les femmes retirent une utilité de souscrire à des produits viagers qui soient, à garantie fixée, de la forme $U(\text{agent}, \text{tarif}) = cste + f(\text{agent}, \text{tarif})$ avec un paramètre constant qui correspond à la couverture de l'aversion au risque (viager). On considère que la fonction f est décroissante par rapport au tarif.

Avec la directive, l'augmentation pour les hommes va entraîner le fait que la garantie apportée au client homme ne correspondra plus à son tarif, ainsi il ne sera plus suffisamment intéressant pour un homme de souscrire. Symétriquement pour les femmes, il risque d'y avoir un afflux massif d'affaires nouvelles. Cette modification des proportions va entraîner une hausse du tarif pour rester en phase avec le risque couru. De proche en proche, on arrive à la conclusion que le tarif d'équilibre est le tarif femme et que la composition du portefeuille sera à terme essentiellement féminine.

3.3. SELECTION ADVERSE EN ASSURANCE VIE

Les travaux de G. Akerlof ont introduit la notion d'antisélection (ou sélection adverse), selon laquelle l'incertitude sur la qualité de l'objet induit la possibilité de fraudes qui, du fait qu'elles peuvent être anticipées, débouchent sur des stratégies pour s'en protéger (anticipation d'une longévité plus importante pour la population des rentiers que pour la population nationale). Dans ce contexte, la sélection adverse représente l'incapacité à obtenir une information exhaustive sur les caractéristiques des clients apparemment identiques. Il s'agit d'un problème d'opportunisme précontractuel résultant du fait que les individus détiennent des informations privées non accessibles à l'assureur.

G. Akerlof (1970, *Market for lemons*) étudie le marché des voitures d'occasion et indique que les acheteurs et les vendeurs sont en situation d'asymétrie d'information. Les vendeurs connaissent mieux l'état de leur véhicule que les acheteurs et le dissimulent s'il est mauvais. Si l'on ne peut distinguer les bons des mauvais véhicules, un prix unique s'établira sur le marché. A ce prix, les possesseurs de voitures en bon état refuseront de vendre, jugeant qu'ils pourraient obtenir un meilleur prix. Il ne reste donc plus sur le marché que les mauvaises voitures. Les acheteurs, en raisonnant de façon similaire, penseront n'avoir à faire qu'à des véhicules en mauvais état et n'achèteront pas au prix du marché. Ainsi, lorsque les individus ne disposent pas de la même information, les mécanismes de marché peuvent conduire à des impasses.

Concernant l'assurance vie, le phénomène d'antisélection apparaît lorsque le client conserve, même après un examen attentif par l'assureur des informations disponibles, un avantage informationnel sur

l'assureur. Le partage inéquitable du savoir concernant le risque de longévité attaché aux rentiers rend problématique l'identification des bons rentiers (Homme ou femme ayant une espérance de vie identique à celle de la population nationale). Ainsi, à défaut de pouvoir fixer une table de mortalité qui corresponde au risque effectif du client, l'assureur applique une table reflétant l'espérance de vie moyenne des rentiers (avec une marge de prudence). Une telle pratique conduit alors à pénaliser les individus ayant une espérance de vie moyenne en leur faisant payer une prime de risque plus élevée que leur risque effectif, et avantage inversement les rentiers détenant une longévité élevée ; la prime de risque facturée étant inférieure au risque réel de l'assureur.

Comme sur le marché des voitures d'occasion d'Akerlof, les bons risques vont quitter le marché : il y a antisélection.

Les contrats incomplets comportent des asymétries d'information, c'est-à-dire qu'il y a une répartition inégale de l'information entre l'assureur et le client. Ces asymétries d'informations rendent possible des comportements opportunistes. Par exemple, un rentier potentiel se sachant en bonne santé optera pour une sortie de son contrat d'épargne en rente viagère alors qu'un client anticipant que sa longévité sera inférieure à celle anticipé par l'assureur préférera sortir en capital.

Dans le cas de l'assurance vie, il s'agit d'un opportunisme précontractuel. En assurance, en cas de décès, un opportunisme pré et post-contractuel intervient. En effet, le client peut avoir un comportement qu'il n'avait pas avant de souscrire. Par exemple, avoir des comportements plus risqués sachant que sa famille recevra un capital s'il décède. Cependant les contrats d'assurance décès anticipent ces comportements en excluant certain cas de décès (par exemple, pratique de sports extrêmes). L'opportunisme post-contractuel est marginal en assurance vie contrairement à l'assurance dommage.

La directive interdit d'utiliser le sexe de l'individu, en revanche il reste possible d'utiliser des facteurs corrélés au sexe tant qu'ils constituent « des facteurs de risques ».

Nous allons chercher à créer des groupes de risques homogènes pour les produits. Le but est de trouver une sous-population qui présente une mortalité homogène.

Nous nous dirigeons vers deux approches

- trouver des variables qui permettent de retomber sur le sexe de l'individu
- trouver des groupes où le niveau de mortalité est homogène au sein des rentiers.

4. ETUDE PRODUIT

Nous avons étudié dans les sections précédentes les impacts de la directive et le comportement théorique des individus. Nous allons maintenant chercher des solutions aux problèmes observés et voir comment aborder cette problématique de manière opérationnelle.

4.1. DIMINUER LE RISQUE D'ANTISELECTION

4.1.1. INCITER LES CLIENTS A DEVOILER LEUR PROFIL DE RISQUE ET A S'AUTO-SEGMENTER

Une des problématiques montrée dans la section précédente est le risque lié à l'antisélection. Pour diminuer celle-ci une approche consiste à faire dévoiler à l'individu son profil de risque.

4.1.1.1. MELANGER LES GARANTIES EN CAS DE VIE ET EN CAS DE DECES

Un client présentant un risque de longévité important a tendance à s'orienter vers un produit viager. Un client sachant que sa longévité sera inférieure à celle anticipée par les assureurs se dirigera plus facilement vers un produit en cas de décès.

Pour remédier à ce problème, une approche consiste à coupler une garantie en cas de vie et en cas de décès. En effet les risques portés par l'assureur sont antagonistes :

- Dans un produit en cas de vie le risque principal est le risque de longévité
- Dans un produit en cas décès, le risque est que l'assuré décède rapidement (les primes sont capitalisées moins longtemps que prévu)

En proposant un produit qui combine ces deux garanties, l'assureur s'affranchit de l'antisélection présente sur les produits viagers classiques.

4.1.1.2. PROPOSER DES PRODUITS AVEC DES VERSEMENTS PLAFONNES OU MINORES

Il y a une corrélation entre le montant du capital constitutif et le risque de longévité. Cette corrélation vient du lien entre catégorie socioprofessionnelle et capacité d'épargne.

Pour l'assureur, le coût d'un produit est constitué de divers paramètres dont une part de coûts fixes liés aux frais de gestion et frais administratifs.

Ces coûts sont donc identiques d'un contrat à un autre. Il existe un montant seuil de rente pour lequel il n'est pas intéressant pour l'assureur d'avoir un produit viager. Ce montant est défini par le code des

assurances comme étant de 40 euros de rentes par mois (Article A160-2, Rachat par les entreprises d'assurance sur la vie des rentes inférieures à un certain montant minimal).

Il faut que les clients aillent vers des produits qui correspondent à leur profil de risque.

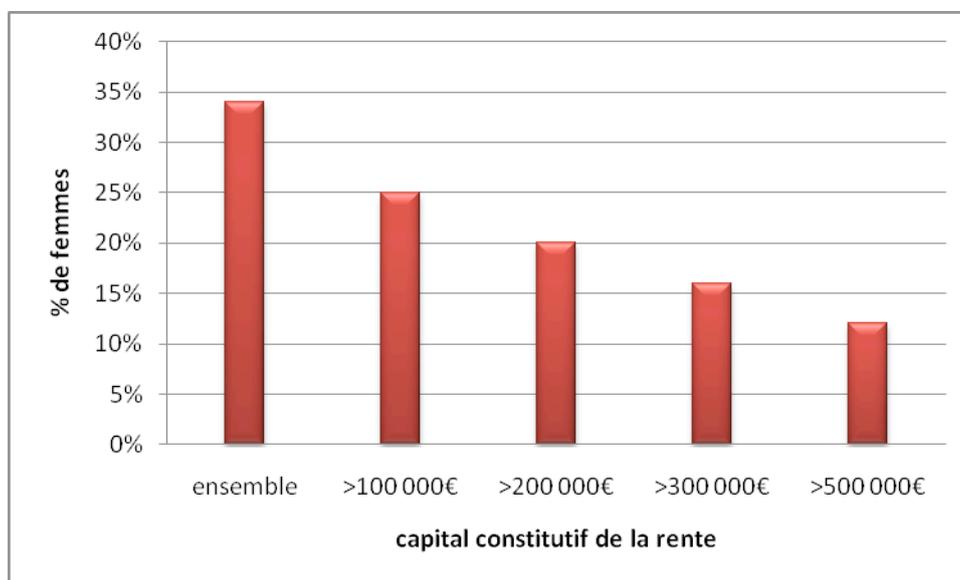


Figure xxvii : pourcentage de femmes dans le portefeuille en fonction du capital constitutif de la rente

Pour les montants de capital constitutif supérieurs à 150 000€ on oscille entre une proportion de femmes de 15% à 20 %.

Avoir des produits avec des minima élevés de versements libres ou de versement libres programmés pour les produits viagers élimine les bons risques (homme ayant une csp -) et une partie des mauvais risques (les femmes ayant une csp - et+ car le montant de leur versement est significativement inférieur à celui des hommes). On a donc 80% d'hommes ayant une csp + et une longévité supérieure à celle des hommes 'normaux' et 20 % de femmes ayant une longévité supérieure à celle des femmes 'classiques'.

Pour un tel produit l'assureur à intérêt à mettre des frais importants (exprimés en % pour être moins visible par le client) car la prudence des tables réglementaire actuelle n'est pas suffisante pour couvrir le risque viager de ces catégories de rentiers.

4.1.2. SEGMENTER LES CLIENTS SUR DES CRITERES OBJECTIFS

Une approche consiste à se rapporter à une segmentation par sexe à partir d'autres critères corrélés au sexe. Par exemple, les contrats vendus par le réseau salarié de l'assureur sont vendus à une population presque paritaire alors que les produits vendus par les courtiers le sont à une population principalement composée d'hommes. Donc, une première approche consiste à segmenter les produits selon le réseau de distribution. Une seconde approche est d'utiliser des critères de souscriptions. Nous allons étudier un modèle de classification permettant cette segmentation.

4.1.2.1. PRESENTATION D'UN MODELE DE CLASSIFICATION

4.1.2.1.1. SELECTION DES DONNEES

Dans un premier temps, il nous faut faire un recueil de données sur une population assurée. Dans l'idéal, nous gardons 2/3 des données pour construire le modèle et 1/3 pour sa validation. Nous voulons un modèle qui soit prédictif.

Nous gardons l'ensemble des variables disponibles sur les clients dans le cadre des contrats d'assurance vie. De plus, par recoupement avec les clients qui ont des assurances santé ou IARD, nous pouvons avoir une quantité de variables non négligeables. Il faut faire attention à supprimer les variables qui ont un lien direct avec le sexe de l'assuré et qui ne sont pas des facteurs de risque afin de ne pas fausser l'étude (par exemple le nom de jeune fille)

Le sexe de l'individu correspond à la variable à expliquer il s'agit d'une variable qui peut prendre uniquement deux valeurs (h ou f, 0 ou 1).

Nous voulons pouvoir affecter les individus sans connaître leur sexe dans une catégorie ou une autre. L'idée sous-jacente est que pour chaque produit d'assurance vie il y ait deux sous-produits : un destiné aux hommes et un destiné aux femmes et fixer des critères de souscription qui dépendent de variables corrélées au sexe.

Or, le code des assurances imposera l'utilisation de la même table pour les hommes et pour les femmes. Les produits peuvent donc différer en fonction des frais d'arrérages et/ou des taux de participation aux bénéficiaires (dans la mesure où ils sont supérieurs au minimum réglementaire).

La méthode consiste à utiliser des critères pour segmenter en deux groupes.

Les variables qui peuvent être utilisées par exemple : Age à la souscription, niveau d'étude, profession, sports pratiqués, ...

4.1.2.1.2. MODELE DE REGRESSION LOGISTIQUE

Nous disposons d'une variable à expliquer, il s'agit du sexe de l'individu, nous la notons Y . Cette variable peut prendre deux valeurs 0 (homme) ou 1 (femme). Nous notons $X = (X_1, \dots, X_j)$ les variables explicatives. Afin de pouvoir appliquer le modèle logistique, il faut que les X_j soient des variables continues ou des variables binaires. Cette contrainte ne pose pas un problème majeur car nous pouvons recoder les variables qualitatives en variables quantitatives binaires. Par exemple, si la variable csp prend les modalités « ouvrier », « cadre du privé », « cadre de la fonction publique » alors nous pouvons la recoder en 3 variables binaires (0 pour non et 1 pour oui).

4.1.2.1.2.1. LE MODELE

Nous notons

- $P(1)$ et $P(0)$ la probabilité à priori de la variable Y . Dans le cas de l'assurance vie $P(1) = 0,4$ et $P(0) = 0,6$
- $P(X/Y)$ la distribution conditionnelle des variables explicatives sachant le sexe
- $P(Y/X)$ la distribution conditionnelle du sexe sachant les variables explicatives (il s'agit de la probabilité à postériori)

Le modèle s'écrit $\text{logit}(P(1|X)) = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_j X_j$ avec $\text{logit}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Avec la fonction réciproque de la fonction logistique nous avons :

$$P(1|X) = \frac{e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_j X_j}}{1 + e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_j X_j}}. \text{L'estimation des paramètres se fait par maximum de vraisemblance.}$$

4.1.2.1.2.2. ESTIMATION DES PARAMETRES DE LA REGRESSION LOGISTIQUE

L'estimation par moindres carrés nécessite un nombre de données qu'il est difficile d'avoir en pratique, car on doit avoir toutes les combinaisons de X . L'estimation de $P(1|X)$ et de $P(0|X)$ de manière fiable se fait donc par maximum de vraisemblance.

La probabilité d'un individu i d'appartenir au groupe des hommes ou au groupe des femmes peut se voir comme sa contribution à la vraisemblance qui se note comme :

$$P(Y(i)=1|X(i))^{Y(i)} \times (1 - P(Y(i)=1|X(i)))^{1-Y(i)}$$

On en déduit la vraisemblance sur l'ensemble du modèle comme étant :

$$L = \prod_i P(Y(i)=1|X(i))^{Y(i)} \times (1 - P(Y(i)=1|X(i)))^{1-Y(i)}$$

La maximisation de la vraisemblance conduit à chercher les estimateurs du maximum de vraisemblance qui sont les $(\hat{\alpha}_k)_{k=0,\dots,j}$. On peut estimer ces paramètres par un algorithme du type Newton Raphson, ou avec le solveur Excel par exemple.

Une fois les paramètres estimés, on peut tester leur validité par des tests. Par exemple on peut effectuer un test de Wald :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\alpha}_j = 0 \\ H_a : \hat{\alpha}_j \neq 0 \end{cases}$$
 où la statistique de test a la forme $\frac{\hat{\alpha}_j^2}{V(\hat{\alpha}_j)}$ qui suit une loi du khi deux à 1 degré de liberté.

Pour effectuer l'affectation à un groupe d'un individu i on utilise la loi de Bayes :

$$\begin{cases} Y(i) = 1 \text{ si } P(Y(i)=1|X(i)) \geq P(Y(i)=0|X(i)) \\ Y(i) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

D'où $P(Y(i)=1|X(i)) \geq 0,5$

Avec la fonction logistique, la condition précédente est équivalente à

$$P(Y(i)=1|X(i)) \leftrightarrow \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_1^i + \dots + \hat{\alpha}_j X_j^i > 0$$

Nous pouvons facilement affecter un individu à son groupe estimé.

4.1.2.1.2.3. VALIDATION

Afin de tester notre modèle nous l'appliquons au tiers des données mises de côté et nous construisons une matrice de confusion.

		Données		
		homme	Femme	somme
modèle	homme	a	B	a+b
	femme	c	D	c+d
	somme	a+c	b+d	a+b+c+d

Si le pouvoir prédictif du modèle est parfait alors on a $c=b=0$.

Même si la prédiction n'est pas bonne, elle permet de quantifier l'erreur moyenne d'affectation. En appliquant cette erreur au tarif, nous tombons sur une tarification de produit unisexe pour le groupe des bons risques (hommes)

$$\text{tarif}_{\text{unisexe}}^{\text{bon risques}} = \frac{a}{a+c} \text{tarif}_{\text{homme}} + \left(1 - \frac{a}{a+c}\right) \text{tarif}_{\text{femme}}$$

4.2. CONCLUSION

Une mise en place de nouveaux produits peut permettre aux assureurs de ne pas pâtir des conséquences de la directive. Ces nouveaux produits nécessitent une meilleure connaissance des particularités de la clientèle. Une autre approche peut être de proposer plus de produits type *variable annuités* avec des rachats programmés.

5. CONCLUSION

Actuellement, les conditions de souscription ne sont pas suffisamment strictes, si bien que, même si la mortalité en nombre est supérieure à la mortalité des tables réglementaires, les marges techniques des assureurs sont basses mais restent prudentes. C'est-à-dire qu'une petite fraction de rentiers possédant des montants de rente importants vit plus longtemps que la moyenne et diminue ainsi fortement les gains des assureurs.

La baisse de mortalité anticipée par les tables réglementaires actuellement en vigueur est inférieure à celle constatée. Les tables en vigueur sont prudentes pour les produits actuellement en phase de rente, mais ne le seront plus lorsque les produits actuellement en phase d'épargne sortiront en rente. Si bien que la directive va probablement avoir l'avantage d'introduire une marge de prudence supplémentaire qui va permettre de couvrir ces risques futurs.

La directive va toutefois introduire une distorsion au niveau de la tarification. Le prix payé par le client ne correspondra plus au risque réellement couru par l'assureur (car tarification unisexe alors que le sexe est un facteur de risque important). Ce qui, sans réaction des assureurs, peut entraîner une baisse du chiffre d'affaires.

Dès lors, l'assureur peut opter pour une segmentation importante de son offre commerciale et modifier ses conditions de souscription pour mieux appréhender le risque en créant des groupes de mortalité homogènes. Une autre approche peut également être de développer les produits viagers tels que les rentes à annuités garanties ou les rentes à annuités variables où la part de la table de mortalité utilisée dans le tarif est inférieure à celle des produits viagers classiques.

6. TABLE DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

<i>Figure i : proportion d'hommes et de femmes, type de rente et motif de sortie</i>	23
<i>Figure ii : effectif sous risque et décès par année d'observation.</i>	24
<i>Figure iii : effectif sous risque par âge pour les années 2001, 2006, 2012.</i>	24
<i>Figure iv : mortalité des hommes du portefeuille</i>	31
<i>Figure v : mortalité des femmes du portefeuille</i>	31
<i>Figure vi : zoom sur la mortalité des femmes du portefeuille aux âges inférieurs à 80 ans</i>	32
<i>Figure vii : mortalité de l'ensemble du portefeuille</i>	33
<i>Figure viii : écarts pondérés entre table d'exp brute et tgf</i>	34
<i>Figure ix : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour les hommes Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011</i>	35
<i>Figure x : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour les femmes Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011</i>	36
<i>Figure xi : taux de mortalité brut par paquet de deux ans pour l'ensemble du portefeuille Série 1 correspond à 2002-2003, série 2 : 2004-2005, et série 5 : 2010-2011</i>	37
<i>Figure xii : mortalité homme lissée</i>	44
<i>Figure xiii : mortalité femme lissée</i>	45
<i>Figure xiv : mortalité sur l'ensemble du portefeuille lissée</i>	46
<i>Figure xv : taux de mortalité lissés par paquet de deux ans pour les hommes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, etc.</i>	47
<i>Figure xvi : taux de mortalité lissés et bruts par paquet de deux ans pour les hommes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, etc.</i>	48
<i>Figure xvii : taux de mortalité lissés par paquet de deux ans pour les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011</i>	49
<i>Figure xviii : taux de mortalité lissés et bruts par paquet de deux ans pour les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011</i>	50
<i>Figure xix : taux de mortalité bruts par paquet de deux ans pour les hommes et les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, etc.</i>	51
<i>Figure xx : taux de mortalité bruts et lissés par paquet de deux ans pour les hommes et les femmes. Année 1 correspond à 2002-2003, année 2 : 2004-2005, et année 5 : 2010-2011</i>	52
<i>Figure xxi : taux de mortalité annuel à 60 ans de la population française</i>	56
<i>Figure xxii : taux annuel de diminution de la mortalité à 60 ans pour la population française</i>	56
<i>Figure xxiii : taux annuel de diminution de la mortalité lissé de la population nationale française</i>	57
<i>Figure xxiv : table de mortalité d'expérience unisexe</i>	60
<i>Figure xxv : espérance de vie à 65 ans</i>	61
<i>Figure xxvi : écart d'espérance de vie entre tgf-05 et table d'expérience</i>	62
<i>Figure xxvii : pourcentage de femmes dans le portefeuille en fonction du capital constitutif de la rente</i>	76

7. BIBLIOGRAPHIES

- [1] George A. Akerlof, The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 84, No. 3. (Aug., 1970), pp. 488-500.
- [2] Cours de Retraite et Prévoyance Dauphine promotion 2012, Behar Thomas
- [3] Olivier CLEMENT, Mémoire EURIA 2003, Elaboration d'une table d'expérience : comparaison de méthodes de lissage analytique et d'ajustement statistique.
- [4] Code des assurances
- [5] Cours de modèles de durée, ISUP promotion 2010.
- [6] Cours Méthodes d'analyse de données de survie Institut de Santé Publique, d'Epidémiologie et de Développement, Université Victor Segalen Bordeaux 2.
- [7] T. Fleming et D. Harrington : Counting processes and survival analysis. Wiley, New-York, 1991
- [8] Hamilton (1994), Time Series Analysis, Princeton University Press
- [9] Aymric Kamega Frédéric Planchet 24/11/2010, Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience (doc pdf)
- [10] Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, E. L. Kaplan and Paul Meier, Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, No. 282 (Jun., 1958), pp. 457-481
- [11] Small Sample Moments of Some Estimators of the Variance of the Kaplan-Meier and Nelson-Aalen Estimators, John P. Klein, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 18, No. 4 (1991), pp. 333-340
- [12] La tribune de l'assurance n°142, décembre 2009
- [13] Between Zeus and the Salmon, Committee on Population Commission on Behavioral and Social Sciences and Education National Research Council NATIONAL ACADEMY PRESS Washington, D.C.
- [14] GOURIEROUX C., MONFORT A. Séries temporelles et modèles dynamiques. ECONOMICA 1990
- [15] NGUYEN Dinh Thanh, Mémoire ISFA 2005, Construction d'une table d'expérience pour les rentes viagères.
- [16] Laurent PECHINOT, Mémoire 1990, Le risque technique des rentes viagères
- [17] Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business by Ermanno Pitacco, Michel Denuit, Steven Haberman & Annamaria Olivieri, Oxford University Press – 2008.
- [18] F. Planchet, P. Therond, Modèle de durée, Applications actuarielles, Economica

[19] Modele d'extrapolation de la mortalité aux grands âges. AKI QUASHIE & MICHEL DENUIT
Institut des Sciences Actuarielles & Institut de Statistique Université Catholique de Louvain Louvain-la-
Neuve, Belgium 13 février 2005

[20] Saporta G. (2011). , Probabilités, Analyse des données et statistiques, édition TECHNIP

[21] John von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior
(1944), Princeton University Press,

[22] Des définitions sont inspirées du Larousse 2010, du code des assurances, de wikipédia,
<http://www.lexique-assurance.com>, <http://theoriefinance.canalblog.com/>

[23] Cours Demographie et tables de mortalité, dauphine promotion 2012, professeur Yahia SALHI.

8. ANNEXES

8.1. ANNEXE 1 : DEFINITION

Participation aux bénéfices : Le Code des assurances oblige les compagnies d'assurance à redistribuer au minimum 85% des bénéfices qu'elles réalisent à leurs assurés. Cette redistribution doit intervenir au plus tard dans les 8 ans qui suivent le constat des bénéfices.

Toutefois, si les bénéfices réalisés une année sont supérieurs à ce qui avait été envisagé, deux possibilités s'offrent à l'assureur.

- Il peut décider de les affecter immédiatement au contrat. Le versement des bénéfices à l'assuré augmente momentanément le taux de revalorisation de son contrat.
- L'assureur peut également choisir d'en différer, pour tout ou partie, le versement afin de constituer une provision sur les prochaines années. L'assureur constitue alors une Provision pour Participations aux Excédents. La Provision pour participation aux excédents (PPE) est une réserve de participation aux bénéfices. Elle permet soit de lisser les rendements du contrat et d'offrir ainsi une rémunération stable, soit de palier les résultats d'une année marquée à la baisse.

PERCO : Le Plan d'Epargne pour la Retraite Collectif (PERCO) permet aux salariés d'une entreprise de se constituer un capital, qu'ils pourront utiliser au moment de leur retraite, celui-ci leur étant alors versé sous la forme d'une rente ou, le cas échéant, d'un versement unique.

Une table de mortalité est une construction qui permet de suivre minutieusement le destin d'une population. Cet outil est utilisé pour étudier le nombre de décès, les probabilités de décès ou de survie et l'espérance de vie selon l'âge et le sexe. Il existe deux types de tables de mortalité : la table de mortalité du moment et la table de mortalité par génération.

8.2. ANNEXE 2 : VARIANCE DE L'ESTIMATEUR DE KAPLAN MEIER

Le calcul repose sur l'hypothèse que les laps de temps entre les évènements sont considérés comme indépendants.

On part de l'hypothèse que d_i suit une loi $Bin(n_i, 1 - \frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)})$. Dans la suite on pose $p_i = \frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}$ et

$$q_i = 1 - \frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}.$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{S}(t)) &= \text{var}\left(\prod_{i|t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)\right) \\ &= E\left[\prod_{i|t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)^2\right] - E^2\left[\prod_{i|t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)\right] \\ &= \prod_{i|t_i \leq t} E\left[\left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)^2\right] - \prod_{i|t_i \leq t} E^2\left[\left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)\right] \\ &= \prod_{i|t_i \leq t} \left[\text{var}\left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right) + E^2\left[\left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)\right]\right] - \prod_{i|t_i \leq t} E^2\left[\left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)\right] \\ &\text{ or } d_i \text{ suit une loi binomiale} \\ &= \prod_{i|t_i \leq t} \left[\frac{p_i q_i}{n_i} - p_i^2\right] - \prod_{i|t_i \leq t} p_i^2 \\ &= \prod_{i|t_i \leq t} \left[p_i^2 \left(\frac{q_i}{p_i n_i} - 1\right)\right] - S^2(t) \\ &= S^2(t) \left(\prod_{i|t_i \leq t} \left[\frac{q_i}{p_i n_i}\right] - 1\right) \\ &\approx S^2(t) \left(\sum_{i|t_i \leq t} \left[\frac{q_i}{p_i n_i}\right]\right) \\ &\approx S^2(t) \left(\sum_{i|t_i \leq t} \left[\frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}\right]\right) \end{aligned}$$

Cet estimateur de la variance de l'estimateur de KM est l'estimateur de Greenwood

8.3. ANNEXE 3 : CALCUL DES INTERVALLES DE CONFIANCE POUR L'ESTIMATEUR DE KAPLAN MEIER

La fonction de survie correspond à une proportion. Ainsi si la fonction de survie est proche de 1, cela signifie que le nombre de décès par rapport à l'effectif a été faible. Si on est proche de 0 cela signifie que le nombre d'individus sous risque est faible.

Pour vérifier les conditions d'approximation normale pour la construction de l'intervalle de confiance nous utilisons le critère de Cochran⁹, à savoir :

$$\begin{cases} n_x q_x \geq 5 \\ n_x (1 - q_x) \geq 5 \end{cases}$$

Sous ces conditions nous pouvons construire un intervalle de confiance pour la fonction de survie

$$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{S}(t) \pm Q_{\alpha\%} \sqrt{\text{var}(\hat{S}(t))} \right] \text{ avec } Q_{\alpha\%} \text{ le quantile } \alpha \text{ d'une } N(0,1)$$

Cet intervalle de confiance est symétrique et les bornes peuvent descendre en deçà de 0 ou aller au-delà de 1, ce qui n'est pas cohérent avec les propriétés de la fonction de survie. Ces cas se produisent lorsque $\hat{S}(t)$ est proche de 0 ou de 1 et/ou lorsque la variance de $\hat{S}(t)$ est grande.

Afin de respecter les propriétés de la fonction de survie nous privilégions donc l'intervalle de confiance de Rothman qui permet de rester dans la bande [0 ; 1].

$$IC_{\alpha\%} = \frac{Z}{Z + Q_{\alpha\%}^2} \left[\hat{S}(t) + \frac{Q_{\alpha\%}^2}{2Z} \pm Q_{\alpha\%} \sqrt{\text{var} \left(\hat{S}(t) + \left(\frac{Q_{\alpha\%}}{2Z} \right)^2 \right)} \right]$$

Avec

$$\begin{cases} Q_{\alpha} \text{ le quantile d'une } N(0,1) \\ Z = \frac{\hat{S}(t)(1 - \hat{S}(t))}{\text{var}(\hat{S}(t))} \end{cases}$$

⁹ Voir Saporta 2005 pour la justification

Lissage d'une table de mortalité par des méthodes non paramétriques

Lorsque les données utilisées pour la création d'une table de mortalité d'expérience sont peu nombreuses, les taux bruts obtenus peuvent présenter une irrégularité. Par exemple, une diminution des taux de mortalité entre deux âges est fréquente. Afin de se rapprocher de la « réalité », le lissage des tables est nécessaire. Il existe trois familles de lissage : le lissage paramétrique, non paramétrique et le lissage relationnel. Nous allons présenter le lissage non paramétrique. Ces méthodes sont à appliquer aux taux bruts de mortalité affranchis de la censure. Pour la méthode de Whittaker-Henderson il est aussi nécessaire d'avoir l'effectif de chaque âge N_x .

8.4. ANNEXE 4 : LISSAGE PAR MOYENNES MOBILES :

L'idée est de construire une table lissée à partir d'une table brute. La table lissée est une moyenne pondérée de la table brute. De manière plus formelle, nous notons : $q'_x = \hat{q}_x$ lissé avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_x = \sum_{i=-r}^r \alpha_i \hat{q}_{x+i} \\ \alpha_j = \alpha_{-j} \\ \sum_i \alpha_i = 1 \end{array} \right.$$

En pratique :

- les α_j sont choisis ≥ 0 .
- α_j dépend du lissage désiré, ainsi on peut choisir $\alpha_j = cste = \frac{1}{2r+1}$, ou alors α_j décroissant sur $[0; r]$, l'idée est que pour un âge fixé les taux de mortalité proches ont plus d'influence que les taux de mortalité éloignés.
- r relativement petit (de l'ordre de 8 au maximum) car les données en bord de table ne pourront pas être lissées correctement.

Si le résultat obtenu n'est pas satisfaisant, l'utilisateur peut recommencer en augmentant ou diminuant r .

8.5. ANNEXE 5 : ADAPTATION DE LA LOI DE MAKEHAM A UNE TABLE D'EXPERIENCE

Cette méthode consiste à calibrer une loi paramétrique sur une table d'expérience afin de pouvoir lisser la table. Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut les taux de mortalité bruts affranchis de la censure par Kaplan Meier (ainsi que l'effectif de chaque âge N_x et le nombre de décès à chaque âge d_x pour la seconde méthode d'estimation).

La mortalité instantanée peut être modélisée par $\mu_x = \alpha + \beta c^x$. Le paramètre α peut être vu comme la mortalité incompressible, indépendante de l'âge. Le terme βc^x représente le vieillissement en fonction de l'âge x de l'assuré. Par définition on a $\mu_x = \frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$, avec la formule de Makeham et par intégration on obtient une expression de l_x en fonction des paramètres α, β et c . Pour des valeurs petites de q_x on a $\log(1 - q_x) \approx -q_x$. Ainsi en remplaçant, on obtient que si la mortalité suit une loi de Makeham alors $\log |q_{x+1} - q_x| = \log \left| \frac{\beta}{\log(c)} (c-1)^2 \right| + x \log(c)$.

$\log |q_{x+1} - q_x|$ est représentée par une droite de pente $\log(c)$ et d'ordonnée $\log \left| \frac{\beta}{\log(c)} (c-1)^2 \right|$ en 0.

- On calcule et trace la courbe $\log |\hat{q}_{x+1} - \hat{q}_x|$.
- On garde les données pour lesquelles la représentation précédente donne une droite (intervalle $[X_{\min}; X_{\max}]$).
- L'ajustement de la loi de Makeham sur les données de l'intervalle $[X_{\min}; X_{\max}]$ peut se faire par 2 méthodes :

➤ En faisant une régression par moindres carrés. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} y = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon \\ \text{avec } y = \log |\hat{q}_{x+1} - \hat{q}_x| \end{cases}$$

On obtient $\hat{\theta}_1 = \log(\hat{c})$ d'où $\hat{c} = e^{\hat{\theta}_1}$. Ensuite on résout $\log \left| \frac{\hat{\beta}}{\log(\hat{c})} (\hat{c}-1)^2 \right| = \hat{\theta}_0$ pour

avoir $\hat{\beta}$, soit $\hat{\beta} = e^{\hat{\theta}_0} \frac{|\log(\hat{c})|}{(\hat{c}-1)^2}$. Il ne manque plus qu'à trouver α . Or, on a la relation

$$q'_x = \alpha + \frac{\beta}{\log(c)} (c-1)c^x. \text{ Ainsi, on peut trouver facilement } \hat{\alpha} \text{ qui est un paramètre}$$

d'échelle (par exemple en minimisant en α la somme des normes de

$$\alpha + \frac{\hat{\beta}}{\log(\hat{c})} (\hat{c}-1)\hat{c}^x - \hat{q}_x).$$

- La seconde méthode est plus compliquée, elle utilise la maximisation de la log vraisemblance par une méthode itérative.

- Calcul de la fonction de vraisemblance : $V = \prod_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} q_x^{d_x} (1-q_x)^{N_x-d_x}$
- On remplace dans la logV les paramètres par leur représentation paramétrique (ceux de la loi de Makeham).
- La maximisation de la logV (notée Φ) mène à annuler le système des dérivés partielles suivant (l'indexation par k va servir pour l'algorithme de minimisation présenté plus loin) :

$$\text{On pose } \begin{cases} b_k = \beta_k \frac{c_k - 1}{\log(c_k)} \\ \gamma_k = \log(c_k) \end{cases} \text{ , il vient } * \begin{cases} d_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = - \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} N_x + \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} \frac{d_x}{1-p_x} \\ e_k = \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = - \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} e^{\gamma_k x} \cdot N_x + \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} \frac{e^{\gamma_k x} d_x}{1-p_x} \\ f_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_k} = -b_k \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} x e^{\gamma_k x} \cdot N_x + b_k \sum_{x=X_{\min}}^{X_{\max}} \frac{x e^{\gamma_k x} d_x}{1-p_x} \end{cases}$$

La maximisation de Φ se fait par une méthode itérative qui se décompose en deux étapes :

1. il faut trouver une valeur initiale des paramètres pour s'assurer que le processus itératif converge vers les bonnes valeurs. Pour ce faire nous utilisons la méthode de King&Hardy :

on pose $A(x_{\min}, n) = \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\min}+n-1} \ln(\hat{p}_x)$,

$$c = \left(\frac{A(x_{\min} + n, n) - A(x_{\min} + 2n, n)}{A(x_{\min}, n) - A(x_{\min} + n, n)} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ avec } n \text{ entier tel que } x_{\max} - x_{\min} \geq 3n$$

$$g = \exp \left(\frac{A(x_{\min}, n) - A(x_{\min} + n, n)}{(c^n - 1) \cdot (c^{x_{\min}} - c^{x_{\min} + n})} \right) \text{ avec } n \text{ entier tel que } x_{\max} - x_{\min} \geq 2n$$

$$s = \exp \left(\frac{A(x_{\min}, n) - \ln(g) - (c^n - 1) \cdot c^x}{n} \right) \text{ avec } n \text{ entier tel que } x_{\max} - x_{\min} \geq n$$

$$\alpha_0 = -\ln(s)$$

$$\beta_0 = -\ln(g) \cdot \ln(c)$$

$$\gamma_0 = \ln(c)$$

$$c_k = e^{\gamma_k}$$

Ainsi, en remplaçant γ_0, b_0, p_x par \hat{p}_x dans * on obtient les valeurs initiales de d, e, f notées

$$d_0, e_0, f_0.$$

2. La seconde étape utilise un développement de Taylor à l'ordre 2.

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_k - u_k \\ b = b_k - v_k \\ \gamma = \gamma_k - w_k \end{cases} \text{ avec } u, v, w \text{ des écarts minimes ; } \begin{cases} d \approx d_k - u_k g_k - v_k h_k - w_k i_k \\ e \approx e_k - u_k h_k - v_k j_k - w_k k_k \\ f \approx f_k - u_k i_k - v_k k_k - w_k l_k \end{cases} \text{ avec}$$

$$** \left\{ \begin{aligned} g_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_k^2} = - \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{d_x}{(1-p_x)^2} p_x \\ h_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_k \partial b_k} = - \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{e^{\gamma_k x} d_x}{(1-p_x)^2} p_x \\ i_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_k \partial \gamma_k} = - b_k \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x e^{\gamma_k x} d_x}{(1-p_x)^2} p_x \\ j_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_k^2} = - \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x e^{2\gamma_k x} d_x}{(1-p_x)^2} p_x \\ k_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_k \partial \gamma_k} = - \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} x e^{\gamma_k x} N_x + \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{x e^{\gamma_k x}}{1-p_x} - b_k \frac{x e^{2\gamma_k x} p_x}{(1-p_x)^2} \right) d_x \\ l_k &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \gamma_k} = - b_k \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 e^{\gamma_k x} N_x + b_k \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{x^2 e^{\gamma_k x}}{1-p_x} - b_k \frac{x^2 e^{2\gamma_k x} p_x}{(1-p_x)^2} \right) d_x \end{aligned} \right.$$

$$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_k \\ e_k \\ f_k \end{pmatrix} - J_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \text{ avec } J_k = \begin{pmatrix} f_k & h_k & i_k \\ h_k & j_k & k_k \\ i_k & k_k & l_k \end{pmatrix}, \text{ comme nous souhaitons annuler les dérivés}$$

premières, il vient $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_k \\ e_k \\ f_k \end{pmatrix} - J_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = J_k^{-1} \begin{pmatrix} d_k \\ e_k \\ f_k \end{pmatrix}$. Nous trouvons donc

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}. \text{ On réitère l'algorithme jusqu'à convergence.}$$

Pour résumer, avec King et Hardy on trouve $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$, ainsi on peut calculer $\begin{pmatrix} d_0 \\ e_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$, on trouve ensuite J_0 ,

en inversant J_0 et en l'appliquant à $\begin{pmatrix} d_0 \\ e_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ qui permet de calculer $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$. De là on peut

calculer $\begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$, on trouve ensuite J_1 et ainsi de suite. Si l'adéquation entre le modèle et les taux

bruts est mauvaise, il peut s'agir d'un problème au niveau de la convergence de l'algorithme.

L'utilisateur pourra réitérer la méthode en modifiant les valeurs initiales trouvées par King&Hardy.

Qualité de l'ajustement

- Calcul d'un intervalle de confiance pour les q_x bruts.
- Test d'adéquation du Chi2
- Test d'adéquation de Kolmogorov Smirnov

Ces 3 tests permettent de valider (ou non) le modèle.

8.6. ANNEXE 6 : LISSAGE RELATIONNEL

Les modèles relationnels supposent que les taux de mortalité constatés dans le portefeuille d'un assureur peuvent s'expliquer par l'âge des assurés, mais aussi par une table de mortalité de référence. Le but de ces méthodes est de rapprocher les taux de mortalité d'expérience bruts à ceux d'une table de référence connue. Pour ce faire, on transforme la table de référence pour aboutir à la table d'expérience. Les modèles les plus connus sont les modèles de Brass, de Cox et le modèle de Hannerz. Nous allons présenter le modèle le plus utilisé en pratique, celui de Brass.

- Le modèle de Brass

Ce modèle utilise la fonction logit ainsi que les taux de mortalité d'une table de référence. Il s'écrit :

$$\text{logit}(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 \text{logit}(q_x^{\text{ref}}) + \varepsilon_x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{logit}(x) = \log \frac{x}{1-x} \\ \varepsilon_x \text{ suit } \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{cases}$$

Ce modèle peut être estimé par maximum de vraisemblance ou par moindres carrés. Cependant l'estimateur de maximum de vraisemblance est biaisé, on préférera donc les MC.

Une fois les paramètres estimés, on trouve les \hat{q}'_x avec la fonction réciproque de la fonction

$$\text{logit qui est } \text{logit}^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}. \text{ Ainsi on a } \hat{q}'_x = \frac{\exp(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \text{logit}(q_x^{\text{ref}}))}{1 + \exp(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \text{logit}(q_x^{\text{ref}}))}.$$

8.7. ANNEXE 7 : ARTICLE A335-1

- Modifié par Arrêté 2006-08-01 art. 1 12° JORF 26 août 2006

Les tarifs pratiqués par les entreprises d'assurance sur la vie et de capitalisation comprennent la rémunération de l'entreprise et sont établis d'après les éléments suivants :

1° Un taux d'intérêt technique fixé dans les conditions prévues à l'article [A. 132-1](#).

2° Une des tables suivantes :

a) Tables homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances, établies par sexe, sur la base de populations d'assurés pour les contrats de rente viagère, et sur la base de données publiées par l'Institut national de la statistique et des études économiques pour les autres contrats ;

b) Tables établies ou non par sexe par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuair indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaires reconnues par l'autorité mentionnée à l'article [L. 310-12](#).

Les tables mentionnées au b sont établies d'après des données d'expérience de l'entreprise d'assurance, ou des données d'expérience démographiquement équivalentes.

Lorsque les tarifs sont établis d'après des tables mentionnées au a, et dès lors qu'est retenue une table unique pour tous les assurés, celle-ci correspond à la table appropriée conduisant au tarif le plus prudent.

Pour les contrats en cas de vie autres que les contrats de rente viagère, les tables mentionnées au a sont utilisées en corrigeant l'âge de l'assuré conformément aux décalages d'âge ci-annexés.

Pour les contrats de rentes viagères, en ce compris celles revêtant un caractère temporaire, et à l'exception des contrats relevant du chapitre III du titre IV du livre Ier, le tarif déterminé en utilisant les tables mentionnées au b ne peut être inférieur à celui qui résulterait de l'utilisation des tables appropriées mentionnées au a.

Pour les contrats collectifs en cas de décès résiliables annuellement, le tarif peut être établi d'après les tables mentionnées au a avec une méthode forfaitaire si celle-ci est justifiable.

8.8. ANNEXE 8 : NOTATIONS ACTUARIELLES

$$N_x = \sum_{i \geq x} D_i$$

$$D_x = l_x v^x$$

$$v_x = \left(\frac{1}{1+i} \right)^x$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

8.9. ANNEXE 9 : ESTIMATEUR ACTUARIEL, BINOMIAL, TRONCATURE-CENSURE

Estimateur actuariel et binomial

En l'absence de troncature et de censure, la probabilité de décès individuelle suit une loi de Bernoulli. En supposant l'indépendance des décès des individus (ce qui peut être une hypothèse discutable car des phénomènes externes tel que la canicule de 2003 peuvent rendre la mortalité corrélées), on voit que le nombre de décès agrégé suit une loi binomiale

$$P(D_x = d_x) = C_{n_x}^{d_x} q_x^{d_x} (1 - q_x)^{n_x - d_x}$$

On peut donc calculer la fonction de vraisemblance ; par dérivation de cette vraisemblance et par maximisation (condition du premier ordre suffisante) on trouve $\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x}$. Cet estimateur correspond donc à l'estimateur binomial.

Cependant, cette vision ne prend pas en compte la troncature et la censure. Ainsi, en considérant les entrées et les sorties sur l'intervalle $[X, X+1]$, on a $n_x - \frac{c_x}{2} + \frac{T_x}{2}$ (en considérant que les entrées et les sorties se font de manière uniforme sur l'intervalle). On obtient donc que l'estimateur actuariel est estimé par $q_x = \frac{d_x}{n_x - \frac{c_x}{2} + \frac{T_x}{2}}$. L'inconvénient de cet estimateur est qu'il ne prend pas en compte la période des événements.

L'estimateur de censure troncatrice.

Cet estimateur consiste à pondérer la présence d'un individu dans un âge par sa période d'observation. Par exemple, si on se fixe comme période d'observation $[n, n+1]$, alors un individu sera observé à deux âges x et $x+1$. Si sa date d'anniversaire est le jj/mm alors il sera observé :

- Si il est présent et en vie tout au long de l'année $\frac{[n, n+ jj/ mm]}{365}$ pour l'âge x et $\frac{[n+ jj/ mm, n+1]}{365}$ pour l'âge $x+1$
- S'il entre dans l'étude à la date t et ne sort pas
 - Si $t < n+jj/mm$ alors il sera observé $\frac{[t, n+ jj/ mm]}{365}$ pour l'âge x et $\frac{[n+ jj/ mm, n+1]}{365}$ pour l'âge $x+1$
 - Si $t > n+jj/mm$ alors il sera ne sera pas observé à l'age x et $\frac{[t+ jj/ mm, n+1]}{365}$ pour l'âge $x+1$
- S'il entre dans l'étude à la date t et sort en u (avant $n+1$), alors de la même manière on distingue le cas où il est présent pendant 1 ou 2 âges.
 - Si $t < n+jj/mm$ alors il sera observé $\frac{[t, n+ jj/ mm]}{365}$ pour l'âge x et $\frac{[n+ jj/ mm, u]}{365}$ pour l'âge $x+1$
 - Si $t > n+jj/mm$ alors il sera ne sera pas observé à l'âge x et $\frac{[t+ jj/ mm, u]}{365}$ pour l'âge $x+1$
- De la même manière pour le décès, on pondère le décès par le temps qui sépare l'évènement de la fin de l'année

Ainsi pour chaque individu i on calcule pour chaque âge x , l'_x et d'_x , on obtient ainsi le taux de

mortalité annuel avec la relation $q_x = \frac{\sum_i d'_x}{\sum_i l'_x}$

