

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 29/06/2012

Par : ELODIE PAPIN ET JEAN-PHILIPPE RICHARD

Titre: CALCUL DU BESOIN EN FONDS PROPRES AU TITRE DU
RISQUE OPERATIONNEL BASE SUR DES PERTES
HISTORIQUES ET DES ANALYSES DE SCENARIOS

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires

signature

Entreprise :

Nom : SOCIETE GENERALE

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Ismaël ELALAOUÏ & David CRESSEY

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de

mise en ligne sur un site de

diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Bibliothèque :

Résumé

Dans le cadre de la réglementation de Bâle II, la Société Générale calcule un montant de capital au titre du risque opérationnel à partir de son modèle interne issu de l'approche LDA (Loss Distribution Approach). La LDA consiste à obtenir une distribution de perte agrégée en s'appuyant sur une distribution de fréquence et une distribution de sévérité, et le montant de capital correspond alors à la VaR à 99,9% de celle-ci. La Société Générale calcule en réalité deux montants de capitaux, un premier K_{PI} basé uniquement sur les données de pertes internes, et un second K_{AS} basé uniquement sur les analyses de scénario fournies par les experts. Celles-ci contiennent plus précisément une fréquence de pertes ainsi qu'un histogramme indiquant la probabilité qu'une perte, lorsqu'elle survient, se situe dans un intervalle donné. Le calcul de deux capitaux se justifie par le fait que les données internes, à la base du capital K_{PI} , fournissent une information pertinente sur les pertes passées mais ne peuvent prendre en compte les évolutions futures du marché. Or, la réglementation impose que le montant de capital réglementaire soit évalué de manière prospective à horizon 1 an. Il est donc nécessaire d'utiliser des analyses de scénario fournies par les experts qui permettent d'anticiper les pertes futures. Jusqu'à l'exercice 2010, le montant retenu était le maximum de ces deux montants de capitaux. Dorénavant, le choix entre K_{PI} et K_{AS} est fait lors d'un comité Experts, choisissant le capital qui représente le mieux le profil de risque de la banque, et est appelé *mix expert*. Cette procédure est peu satisfaisante car la valeur retenue de montant de capital réglementaire, K_{PI} ou K_{AS} , ne s'appuie que sur une partie de l'information disponible. Par ailleurs, il n'existe en théorie qu'une seule valeur de VaR à 99,9% et donc de capital réglementaire. De plus, cette procédure est assez conservatrice et consomme beaucoup de capital, ce qui est problématique dans un contexte de besoins de liquidités. Partant de ce constat, le but de ce mémoire est de combiner les informations des experts et les pertes internes dans un modèle afin de parvenir à un seul montant de capital. De ce fait, quatre méthodes ont été envisagées. La première, nommée méthode bayésienne 1, utilise la statistique bayésienne et les lois conjuguées. La deuxième, nommée méthode bayésienne 2, utilise également la statistique bayésienne mais en élargissant le cadre à des lois non conjuguées. La troisième méthode, appelée Poly Tree, s'appuie sur un arbre construit à partir des deux sources de données. Enfin, la dernière méthode, dite méthode par crédibilité, consiste à accorder des poids à chacune des deux sources de données. A l'aide de chacune des méthodes considérées, nous pouvons alors combiner l'information des pertes internes et celle des analyses de scénario afin de calculer un unique montant de capital réglementaire puis nous verrons les avantages et limites de chacune d'entre elles, ce qui nous conduira à conclure que la méthode par crédibilité semble être la plus adaptée compte tenu des contraintes environnementales et réglementaires. En effet, elle nécessite un nombre limité de données, permettant ainsi d'éviter les problèmes de communication avec les experts. Enfin, elle est plutôt simple et transparente, ce qui la rend potentiellement acceptable par les autorités de régulation.

Mots-clés : Risque opérationnel, capital réglementaire, Bâle II, LDA, statistique bayésienne, gestion des risques, crédibilité

Abstract

To meet the Basel II requirements, Société Générale has to calculate the capital amount for the operational risk from its internal model, resulting from the LDA (Loss Distribution Approach). The LDA consists in obtaining an aggregated loss distribution thanks to a frequency and a severity distribution and the capital amount corresponds to the 99,9 % VaR of this distribution. Société Générale calculates two capital amounts. The first one, K_{PI} , is only based on the internal data and the second one, K_{AS} , is only based on the scenario analysis given by the experts. These contain more precisely a losses frequency and a bar chart indicating the probability that a loss, when it occurs, is located in a given interval. The calculation of two amounts is justified by the fact that internal data, at the basis of K_{PI} , give interesting information on former losses but can't take into account the future evolutions of the market. Basel II regulations impose that the regulatory capital amount must be evaluated in a one year prospective way. To do this, it's necessary to use scenario analysis given by the experts, which allow anticipating the future losses. Until recently, the capital amount chosen was the maximum between these two amounts. Currently, the choice between K_{PI} and K_{AS} is made at a committee Experts who chooses the capital representing the best the risk profile of the bank, and is called *expert mix*. This procedure is not very satisfactory because it only uses a part of the available information, it consumes capital and in theory there is an only 99,9 % VaR. Consequently, the objective of this memo, consists in combining the informations given by the experts and the internal losses data in a model to obtain an only capital amount. That's why four methods are proposed. The first one, called Bayesian 1 method, uses Bayesian statistic and conjugate laws. The second one, called Bayesian 2 method, uses Bayesian statistic too and takes an interest in non-conjugate laws. The third method, called Polya Tree, leans upon a tree built from two sources of data. Then, the last method, called credibility method, consists in giving weights to each of the two data sources and to realize draws. Using each of the methods considered, we are able to combine the information of the internal losses and scenario analysis to calculate a single amount of regulatory capital and we will see the advantages and limits of each of them, that will lead us to conclude that the credibility method seems the most suitable for the environmental and regulatory constraints. In fact, it uses a limited number of data, which allows avoiding the communication problems with the experts. Finally, it is rather simple and transparent, and could be more acceptable for the regulatory authorities.

Keywords : Operational risk, Basel II, LDA, bayesian inference, risk management, credibility

Table des matières

Introduction	9
1 Le risque opérationnel selon Bâle 2 et Solvency 2	11
1.1 Les risques opérationnels dans l'histoire :	11
1.2 Risque opérationnel et accords de Bâle	12
1.2.1 Risque opérationnel et accords de Bâle I	12
1.2.2 Risque opérationnel et accords de Bâle 2	13
1.3 Solvabilité 2 et le risque opérationnel	14
1.4 Gestion du risque opérationnel	17
1.4.1 Raisons et bénéfices liées à l'instauration de l'ORM	17
1.4.2 Processus de l'ORM	18
1.4.3 Processus de suivi du risque opérationnel à la Société Générale	20
1.5 Les méthodes de calcul du capital associé au risque opérationnel	20
1.5.1 L'approche indicateur de base	21
1.5.2 L'approche standard	21
1.5.3 Les approches de mesures avancées (AMA)	21
1.5.4 Répartition de la fréquence et de la sévérité des pertes	25
2 Méthode LDA : Loss Distribution Approach	26
2.1 Approche formelle	26
2.2 Décomposition fréquence/sévérité, estimation des paramètres	26
2.3 Estimation de la distribution de perte au niveau de chaque maille	27
2.4 Application numérique à nos données	28
2.4.1 Description des données	28
2.4.2 Détermination des paramètres à partir des PI	28
2.4.3 Détermination des paramètres à partir des AS	29
2.4.4 Détermination des capitaux	30
3 Problématique et objectifs	32
4 Méthode bayésienne 1	35
4.1 Statistique bayésienne : rappels de base	36
4.2 Calcul de la loi a posteriori dans chacun des cas	37
4.2.1 Cas K_{mix1}	37
4.2.2 Cas K_{mix2}	39
4.2.3 Cas K_{mix3}	40
4.3 Algorithme de Monte-Carlo pour calculer les capitaux dans les cas bayésiens	40
4.4 Détermination des paramètres a priori : cadre théorique	41
4.4.1 L'approche de l'histogramme	41
4.4.2 La détermination CDF (<i>cumulative distribution function</i> - fonction de répartition)	41
4.4.3 L'approche de la vraisemblance relative	42
4.4.4 L'approche s'appuyant sur une loi a priori donnée	42
4.5 Calcul des montants de capitaux	43
4.5.1 Calcul de K_{mix1}	43
4.5.2 Calcul de K_{mix2}	44
4.5.3 Calcul de K_{mix3}	45

4.5.4	Seconde méthode de détermination des paramètres a priori	46
4.6	Sensibilité aux paramètres a priori	47
4.6.1	Cas K_{Mix1}	47
4.6.2	Cas K_{Mix2}	47
4.7	Intervalles de confiance	48
4.7.1	Approche théorique	48
4.7.2	Résultats numériques	49
4.8	Comparaison des méthodes	49
4.9	Avantages et limites de l'approche bayésienne étudiée	51
5	Méthode bayésienne 2	53
5.1	Loi a priori non informative	53
5.1.1	A priori de Laplace	54
5.1.2	A priori de Jeffreys	54
5.2	Loi a posteriori du paramètre mu	56
5.2.1	Utilisation des données AS	56
5.2.2	Détermination de la première loi a posteriori	57
5.2.3	Détermination de la loi a posteriori finale à utiliser	57
5.3	Loi a posteriori du paramètre lambda	57
5.4	MCMC-Metropolis Hastings	58
5.4.1	Principe et objectifs	58
5.4.2	Définitions et algorithmes	58
5.5	Résultats numériques : les paramètres mu et lambda sont inconnus	59
5.5.1	Absence de seuil	60
5.5.2	Prise en compte d'un seuil sur les données PI	62
5.5.3	Utilisation des données AS : application de la méthode 2	63
5.6	Résultats numériques : les paramètres mu, lambda et sigma sont inconnus	63
5.6.1	Absence de seuil	63
5.6.2	Prise en compte d'un seuil sur les données PI	64
5.7	Comparaison des méthodes	64
5.8	Avantages et limites de la méthode bayésienne 2	65
6	Méthode du polya tree	67
6.1	Principes	67
6.2	Algorithmes	68
6.2.1	Construction de l'arbre	68
6.2.2	Actualisation de l'arbre	68
6.2.3	Tirage dans l'arbre	69
6.3	Choix des paramètres	69
6.4	Résultats numériques	70
6.4.1	Estimation simple	70
6.4.2	Analyse de sensibilité au paramètre delta	71
6.4.3	Analyse de sensibilité au nombre d'observations utilisées pour l'ac- tualisation	72
6.4.4	Utilisation d'un paramètre delta à deux valeurs	73
6.5	Comparaison des méthodes	74
6.6	Avantages et limites du polya tree	75

7	Méthode par crédibilité	77
7.1	Objectifs	77
7.2	Algorithme et mise en oeuvre aux distributions de sévérité	77
7.2.1	Cas $n=0$	78
7.2.2	Cas $n=1$	78
7.2.3	Cas $n=2$	79
7.2.4	Cas $n=3$	79
7.2.5	Résultats	79
7.2.6	Amélioration de l'algorithme avec prise en compte de la fréquence	79
7.3	Application de l'algorithme aux pertes agrégées	80
7.3.1	Principe et algorithme	80
7.3.2	Résultats	81
7.4	Découpage plus fin de la crédibilité, utilisation d'une fonction de crédibilité décroissant linéairement	81
7.4.1	Principe	81
7.4.2	Application et résultats	82
7.5	Comparaison des méthodes	82
7.6	Analyse de sensibilité	84
7.7	Avantages et limites de l'approche par crédibilité	86
8	Comparaison des méthodes	87
8.1	Les inputs utilisés dans chacune des méthodes	87
8.2	Comparaison numérique des résultats	87
8.3	Communication avec les experts	89
8.4	Sensibilité du capital calculé	90
8.5	Opacité du capital et point de vue du régulateur	90
8.6	Récapitulatif	91
	Conclusion	92

Remerciements

Nous tenons, dans un premier temps, à remercier nos encadrants travaillant sur le risque opérationnel à la Société Générale, David Cressey et Ismael El-Alaoui. Ils nous ont permis de réaliser un travail passionnant et novateur dans le domaine du risque opérationnel, domaine de recherche en plein développement. Ce mémoire d'actuariat durant l'année scolaire 2011-2012 a été une expérience très enrichissante et pleine d'intérêt. Nous avons eu la chance de bénéficier d'autonomie, tout en étant bien encadrés. Merci également à Kévin Poquet, stagiaire de fin d'études à la Société Générale, qui s'est intéressé à notre mémoire et nous a fait part de ses remarques et interrogations. Nous souhaitons remercier enfin toutes les personnes de la Société Générale travaillant sur le risque opérationnel et s'étant intéressées à notre sujet.

Introduction

Depuis la transposition des accords de Bâle II en droit français, les banques ont l'obligation de calculer un capital réglementaire associé au risque opérationnel. Le Comité de Bâle définit le risque opérationnel comme "le risque de pertes résultant de carences ou de défauts attribuables à des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs". La définition inclut le risque juridique mais exclut les risques stratégiques et de réputation. Afin de calculer le capital réglementaire associé au risque opérationnel, les banques peuvent avoir recours à différentes approches plus ou moins complexes. Pour utiliser l'approche par modèle interne (modèle AMA : Advanced Measurement Approach), le Comité de Bâle impose aux banques d'utiliser différentes sources de données comme les données de pertes internes, les données de pertes externes ou les analyses de scénario fournies par les experts.

Au sein des méthodes AMA, l'approche actuellement utilisée par la majorité des grandes banques est celle de la LDA (Loss Distribution Approach). Le Comité de Bâle recommande de répartir les pertes par ligne d'activité (banque de détail, banque commerciale...) et type de risque (fraude interne, fraude externe...). Chaque croisement correspond à une maille. L'objectif de la LDA est de déterminer un capital réglementaire au niveau de chaque maille. Pour le risque opérationnel, le Comité de Bâle impose le calcul de la VaR à 99,9 % à horizon un an. Pour ce faire, la perte agrégée Y d'une maille se décompose en un nombre N d'occurrences de pertes et en des sévérités, notées X_i , $i=1, \dots, N$. La perte Y se modélise de la manière suivante :

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

De manière générale, la loi utilisée pour la fréquence est une loi de Poisson. Si plusieurs lois de sévérité peuvent être utilisées, la loi retenue à la Société Générale est une loi log-normale. Il n'est en général pas possible de déterminer analytiquement la distribution de perte utilisée pour le calcul de la VaR au niveau de chaque maille. Le calcul de cette distribution nécessite donc d'avoir recours à des méthodes numériques, comme la méthode de Monte-Carlo. Pour la maille considérée, le capital réglementaire correspond alors à la VaR à 99,9 % à horizon un an de la distribution obtenue par Monte-Carlo.

La Société Générale s'appuie sur deux sources de données. Elle utilise tout d'abord un historique de pertes internes. Elle a également recours aux analyses de scénario fournies par des experts. Ils fournissent plus précisément une fréquence de pertes annuelles ainsi qu'un histogramme précisant pour les différents intervalles de montants de pertes la probabilité qu'une perte ayant eu lieu s'y trouve. L'utilisation de ces deux sources de données est indispensable. Les données de pertes internes peuvent être considérées représentatives pour les pertes de forte fréquence et faible sévérité. Néanmoins, elles comprennent généralement peu de pertes à faible fréquence et forte sévérité, ce qui ne permet pas une modélisation adéquate des queues de distribution. Les analyses de scénario permettent de remédier à ce problème. Par ailleurs, les pertes internes correspondent à une vision historique, les analyses de scénario permettent quant à elles de tenir compte des évolutions et d'adopter une vision davantage prospective. Il semble donc cohérent de tenir compte de ces deux sources de données apportant des informations complémentaires. S'appuyant sur

l'approche LDA, la Société Générale calcule donc un montant de capital réglementaire par source de données disponible. Deux montants sont ainsi calculés, K_{PI} s'appuyant uniquement sur l'historique de pertes internes, et K_{AS} s'appuyant uniquement sur les analyses de scénario ; le plus grand des deux était retenu jusqu'à l'exercice 2010. Dorénavant, le choix entre K_{PI} et K_{AS} est fait lors d'un comité Experts, choisissant le capital représentant le mieux le profil de risque de la banque, et est appelé *mix expert*. Cette procédure est toutefois peu satisfaisante. Tout d'abord, il existe théoriquement une unique valeur de capital associée au risque opérationnel. En outre, cette procédure peut inciter à choisir le plus grand montant de capital. Or, on peut penser que le montant réel de capital à garder est une valeur située entre les deux capitaux obtenus, ce choix se traduit donc par l'obtention d'un montant de capital conservateur dans le sens où du capital pourrait probablement être économisé. D'autre part, la restriction à l'un des deux capitaux calculés implique qu'une partie de l'information, celle provenant de l'historique des pertes ou celle issue des analyses de scénario, et du travail réalisé, par les experts ou par l'équipe de gestion des risques, n'est pas prise en compte. L'objectif est donc d'obtenir un montant de capital unique, en s'appuyant sur toute l'information à disposition.

L'objectif de ce mémoire est donc de combiner l'historique de pertes internes et les analyses de scénario dans un modèle permettant d'obtenir un unique montant de capital réglementaire associé au risque opérationnel. Nous proposons donc d'étudier quatre méthodes différentes permettant de combiner à la fois les données de pertes internes et les scénarios des experts. Les deux premières méthodes, que nous décrirons, s'appuient sur des concepts de statistique bayésienne. Dans la première méthode, nous nous appuyons sur des lois a priori conjuguées afin de déterminer les lois a posteriori des paramètres des lois de fréquence et de sévérité. Dans la seconde méthode, nous utilisons une loi a priori non informative afin de pallier au manque de données et nous ne nous restreignons pas aux lois conjuguées. Puis, nous détaillerons la méthode du Polya tree, consistant à créer un arbre à partir des analyses de scénario et à l'actualiser à partir des données de pertes internes. Cette méthode permet d'obtenir une distribution a posteriori de pertes agrégées. Nous nous intéresserons ensuite à la méthode par crédibilité qui permet d'obtenir une unique distribution de pertes en réalisant des tirages soit dans la distribution de données de pertes internes, soit dans la distribution issue de l'information fournie par les experts. Enfin, nous comparerons ces différentes méthodes d'un point de vue quantitatif et qualitatif.

1 Le risque opérationnel selon Bâle 2 et Solvency 2

Le risque opérationnel se définit comme "le risque de pertes résultant de carences ou de défauts attribuables à des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs." La définition inclut le risque juridique mais exclut les risques stratégiques et de réputation. La prise en compte du risque opérationnel se justifie par les montants de dommages causés. Il est en général le deuxième poste le plus consommateur de fonds propres après le risque de crédit. Dans un document de 2003, le Comité de Bâle identifie sept sources de risque opérationnel :

- la fraude interne : vol commis par un employé, délit d'initié d'un employé agissant pour son propre compte, informations inexactes sur les positions. . .
- la fraude externe : hold-up, faux en écriture, dommages dus aux pirates informatiques. . .
- pratiques en matière d'emploi et de sécurité sur les lieux de travail : demandes d'indemnisations des travailleurs, violation des règles d'hygiène et de sécurité des employés, plaintes pour discrimination, responsabilité civile. . .
- pratiques relatives aux clients, aux produits et à l'activité commerciale : défauts de conseils, documentation fallacieuse, violation du secret bancaire, mauvaise sélection des clients et des emprunteurs, blanchiment d'argent. . .
- dommages aux biens physiques : actes de terrorisme, vandalisme, séisme, incendie, inondation. . .
- interruption de l'activité et les pannes de système : pannes de matériels ou de logiciels informatiques, défaillance des systèmes informatiques ou de télécommunication, pannes d'électricité. . .
- exécutions d'opérations, les livraisons et les processus : erreur d'enregistrement des données, défaillance dans la gestion des sûretés, lacunes dans la documentation juridique, défaillance des fournisseurs. . .

1.1 Les risques opérationnels dans l'histoire :

Les risques opérationnels peuvent être répartis en différentes catégories. On distingue les risques à forte fréquence et faible sévérité des risques à faible fréquence et forte sévérité. Les risques à forte fréquence et faible sévérité, comme la fraude CB, sont peu coûteux pour les banques. En revanche, les risques à faible fréquence et forte sévérité peuvent avoir des conséquences dramatiques, allant jusqu'à la faillite comme l'on démontré plusieurs événements d'importance majeure au cours des années 1990 et 2000 :

- Barings : Nick Leeson, trader à la banque britannique Barings, dirigeait les opérations sur les marchés et le service administratif chargé de les contrôler. Cette double mission lui a permis de prendre des positions interdites sans être sanctionné. En janvier 1995, ce trader a spéculé à la hausse de la bourse japonaise. Mais le 17 janvier, le tremblement de terre de Kobe s'est traduit par un désastre pour l'économie japonaise. La bourse a plongé, mais Nick Leeson croyait en une reprise du marché. Cet entêtement a fait perdre 1,4 milliards de dollars à la Barings, plaçant cette dernière sous administration judiciaire le 26 février.
- Sumitomo : En juin 1996, le groupe japonais Sumitomo annonce des pertes significatives sur le marché du cuivre. Les positions dangereuses de son courtier Yasuo Hamanaka lui ont fait perdre 2,6 milliards de dollars.

- Enron : Jusqu'à sa faillite en 2001, le groupe Enron était un fournisseur d'énergie dont la part de marché représentait environ 25 % aux Etats-Unis et en Europe. Ce sont des comptes falsifiés qui ont conduit à sa faillite. Le groupe créa environ 3000 sociétés offshores, permettant de sortir des actifs et des passifs du bilan. La chute des actions d'Enron au cours des années 2000 et 2001 s'est traduite par la révélation de sa réelle situation financière. En effet, ces actions servaient de garantie et les créanciers d'Enron souhaitaient donc être remboursés. Le 31 octobre 2001, la SEC ouvrit une enquête. Le 2 décembre 2001, le groupe se déclara en faillite.

Plus récemment, les activités de courtiers des banques All First, Caisse d'Epargne et Société générale ont entraîné d'importantes pertes pour ces banques soulignant la nécessité d'accroître le contrôle mais aussi de maintenir un niveau de capital suffisant pour faire face à de tels risques.

1.2 Risque opérationnel et accords de Bâle

La prise en compte du risque opérationnel au niveau bancaire résulte d'un long processus ayant commencé au milieu des années 1970.

Le comité de Bâle a été instauré à la fin de l'année 1974 par les gouverneurs des banques centrales du G10 (France, Belgique, Canada, Italie, Japon, Allemagne, Pays-Bas, Suisse, Suède, Royaume-Uni, Etats-Unis). Sa création constitue une réponse aux différentes perturbations ayant affecté les marchés bancaires internationaux à cette époque.

Les membres du Comité de Bâle sont les banques centrales ou les autorités officiellement chargées du contrôle prudentiel des banques. Le comité de Bâle est abrité par la Banque des règlements internationaux (BRI) située à Bâle.

Le comité de Bâle a pour mission d'œuvrer à l'amélioration de la solvabilité des banques. Il cherche donc à imposer des standards minimaux en matière de contrôle prudentiel, à promouvoir la coordination et l'harmonisation du système bancaire.

Le comité de Bâle ne peut émettre de réglementation au niveau international mais est seulement en mesure de réaliser des recommandations à destination des pays membres. Les directions choisies par le Comité de Bâle ne constituent que des recommandations et sont appliquées par les Etats qui le souhaitent. Les Accords de Bâle se sont traduits par la création de ratios imposant aux banques de détenir un certain volume de fonds propres (élément du passif de l'entreprise comprenant notamment le capital social, le bénéfice de l'exercice et les réserves légales) et de quasi-fonds propres, à savoir les dettes subordonnées (ressources financières moins liquides que les fonds propres pouvant toutefois être assez facilement converties en fonds propres) proportionnel aux risques pris.

1.2.1 Risque opérationnel et accords de Bâle I

Les accords de Bâle I datent de 1988, ils ont mis en place le ratio de Cooke. Il s'agit en fait de deux ratios. Tout d'abord, le niveau de fonds propres et de quasi-fonds propres doit s'élever à 8% des engagements risqués. D'autre part, les banques doivent disposer des fonds propres à hauteur de 4% de leurs engagements totaux. Le ratio de Cooke prend en compte le risque de crédit et le risque de marché. Le risque opérationnel n'est pas pris en compte dans le calcul du capital réglementaire mais est néanmoins analysé de manière qualitative. Le risque de marché se définit comme le risque de pertes liées à

la fluctuation de certaines variables de marché comme les taux d'intérêt, les monnaies, les prix des matières premières et les spreads. Le risque de crédit correspond au risque qu'une débitrice ne soit pas en mesure de respecter ses engagements. C'est le risque le plus important encouru par les banques.

$$\text{Ratio Cooke} = \frac{\text{Fonds Propres} + \text{Quasi Fonds propres}}{\text{Risque de marché} + \text{Risque de crédit}} \geq 8\%$$

Dans l'Union Européenne, l'accord a été traduit dans le ratio de solvabilité européen (directive 89/647/CEE du 18 décembre 1989). Une des limites de ce ratio repose sur les coefficients de pondérations du risque. Un prêt à un état appartenant à l'OCDE avait une pondération nulle. Or les risques encourus en prêtant par exemple à l'Allemagne et à la Grèce sont d'une portée différente. De même, toutes les entreprises privées disposaient d'un facteur de pondération de 100%. Ce facteur ne variait pas avec le statut, la taille ou le secteur d'activité des entreprises emprunteuses. Pour remédier à ces défauts, les accords de Bâle 2 ont instauré un nouveau ratio.

1.2.2 Risque opérationnel et accords de Bâle 2

C'est avec les accords de Bâle 2, datant de 2007, qu'apparaît le risque opérationnel dans le calcul du capital réglementaire. Ces accords reposent sur trois piliers.

Pilier 1 : Exigence de fonds propres

Dans le cadre de ces nouveaux accords, le ratio de Cooke a laissé place au ratio de Mc Donough. Ce ratio conserve les pourcentages de 4% et 8%. En plus du risque de crédit et du risque de marché, ce ratio prend en compte le risque opérationnel. En outre, le système de pondération du risque a été redéfini. En France, le ratio Mc Donough s'applique à toutes les banques, alors qu'aux Etats-Unis, il s'applique uniquement aux grandes banques internationales.

$$\text{Ratio Mc Donough} = \frac{\text{Fonds Propres} + \text{Quasi Fonds propres}}{\text{Risque de marché} + \text{Risque de crédit} + \text{Risque opérationnel}} \geq 8\%$$

Ces mesures visent à réguler le système en prévenant les faillites. L'objectif est donc de diminuer la fréquence des crises d'origine bancaire. Mais le ratio de Mc Donough a certains inconvénients. Il dispose d'un caractère pro-cyclique. En effet, lors d'une récession, le risque augmente, par conséquent les banques doivent augmenter leur niveau de fonds propres ou diminuer leurs crédits, ce qui tend à aggraver la récession. En outre, certaines innovations permettent de contourner la réglementation. La titrisation permet, en effet, de sortir les actifs risqués du bilan et donc de diminuer les contraintes imposées par les règles prudentielles.

Pilier 2 : Procédure de surveillance de la gestion des fonds propres

Ce second pilier vise à s'assurer que les banques détiennent un montant de capital en adéquation avec les risques encourus. Ce pilier requiert donc des banques qu'elles réalisent des stress tests afin de vérifier que le capital détenu est suffisant. Ce second pilier s'articule autour de quatre concepts :

- adéquation du capital : les banques doivent disposer de processus pour assurer l'adéquation du capital avec les risques encourus et définir des stratégies pour maintenir ces niveaux de capital.
- monitoring : les superviseurs doivent s'assurer que les modèles statistiques employés pour calculer le niveau de capital permettent d'obtenir un montant cohérent avec les risques encourus.
- ratios cibles : les superviseurs attendent des banques qu'elles disposent d'un montant de capital compatible avec les ratios imposés. Ils ont le droit d'exiger de la banque qu'elle détienne un montant supérieur à ce niveau minimal.
- intervention : les superviseurs doivent intervenir pour empêcher le capital de chuter en-dessous du niveau requis et doivent déterminer des solutions si le niveau de capital est trop bas.

Pilier 3 : La discipline du marché

Ce troisième pilier vise à accroître la transparence. Il cherche à diffuser les informations clés concernant l'actif des banques, l'exposition de celles-ci et l'adéquation du capital au profil de risque. L'objectif est donc d'uniformiser les pratiques bancaires afin de pouvoir comparer les différentes données et donc *in fine* d'augmenter la transparence.

Afin de répondre aux critiques liées à la crise financière, le Comité de Bâle a effectué des modifications aux Accords de Bâle 2 qui s'appliqueront à travers la réforme de Bâle 2.5 et 3. Cet accord comprend des mesures visant à renforcer la résilience des grandes banques internationales ainsi que des mesures relatives au risque de contrepartie. Les premières mesures entreront en vigueur au 1er janvier 2013 et toutes les mesures devront être appliquées au 1er janvier 2019.

Dans le milieu bancaire, c'est donc l'accord de Bâle 2 qui met en exergue le risque opérationnel et qui impose donc de déterminer le capital requis pour couvrir ce risque.

1.3 Solvabilité 2 et le risque opérationnel

Solvabilité 2 est un projet visant à modifier les exigences actuelles en matière de solvabilité pour les assureurs et les réassureurs. Solvabilité 2 fait suite à Solvabilité 1 en vigueur depuis les années 1970. Solvabilité 1 ne permettait pas de prendre en compte les différents risques auxquels les sociétés d'assurance et de réassurance étaient confrontées. La réforme Solvabilité 2 modifie donc les règles de solvabilité. Désormais, le niveau de capital requis devra être proportionnel aux risques portés par ces sociétés. Cette réforme repose sur la directive " Solvabilité 2 " (directive 2009/138/CE) adoptée au cours de l'année 2009. Elle doit être transposée en droit français avant le 31 décembre 2012. Elle entrera en vigueur le 1^{er} janvier 2013.

La définition du risque opérationnel dans la directive Solvabilité 2 est identique à celle présente dans Bâle 2. Comme Bâle 2, la réforme Solvabilité 2 repose sur trois piliers. Les 3 piliers ont le même objectif dans les deux cadres réglementaires. Ainsi le pilier 1 fait référence aux exigences quantitatives, le pilier 2 fait référence aux exigences qualitatives et le pilier 3 aux questions de transparence. Les assureurs et les banques n'étant pas

confrontées aux mêmes risques, les exigences quantitatives diffèrent donc entre Solvency 2 et Bâle 2.

Sous Solvency 2, il existe deux seuils de capitalisation :

- le SCR (Solvency Capital Requirement) : il correspond au niveau de capital requis. L'objectif est d'éviter la ruine à horizon 1 an et au niveau 99,5%. Le calcul du SCR peut se faire à partir d'un modèle standard. Dans ce cas, on calcule un capital pour chaque "risque élémentaire" (taux, actions,...), puis on réalise une agrégation intra-modulaire (pour chaque module, agrégation des capitaux requis au titre du risque actions, taux, mortalité...) et inter-modulaire (agrégation des capitaux calculés pour différents modules : marché, crédit, vie, non-vie...). L'agrégation se fait grâce à l'utilisation de matrices de corrélation. Le calcul peut également se faire en utilisant un modèle interne. On détermine alors la distribution des pertes à un an et on estime la VaR à 99,5 %.
- le MCR (Minimum Capital Requirement) : il s'agit du seuil en-delà duquel l'autorité de contrôle doit intervenir. En dessous de ce seuil, l'agrément est retiré. Le MCR a pour objectif d'éviter la ruine à horizon un an et au niveau 85 %.

Le capital calculé couvre au moins les risques suivants : le risque de souscription en vie, le risque de souscription en non-vie, le risque de souscription en santé, le risque de marché, le risque de crédit et le risque opérationnel. La mesure du risque opérationnel intervient donc dans le calcul du SCR. La directive Solvabilité 2 souligne que le "calcul de l'exigence de capital pour risque opérationnel tient compte du volume de ces opérations, en termes d'encaissement de primes et de provisions techniques détenues pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance correspondants. L'exigence de capital pour risque opérationnel ne dépasse alors pas 30 % du capital de solvabilité requis de base afférent aux opérations d'assurance et de réassurance concernées." ¹

Présentation de la formule standard pour le risque opérationnel du QIS 5

Afin de mesurer l'impact de Solvabilité 2 sur le calcul des exigences de capital, la Commission Européenne a chargé le Comité européen des contrôleurs de l'assurance et des pensions professionnelles (CEIOPS) de réaliser des études quantitatives d'impacts (QIS). Plusieurs QIS ont déjà été réalisées. Le QIS5 définit le SCR comme la somme du SCR basique (BSCR), du capital requis pour couvrir le risque opérationnel moins les ajustements liés aux propriétés d'absorption du risque des provisions techniques et des impôts différés. Le BSCR est le capital requis avant ajustements afin de couvrir les risques suivants : le risque de souscription en vie, le risque de souscription en non-vie, le risque de souscription en santé, le risque de marché, le risque de crédit, le risque des actifs intangibles.

La formule standard du QIS (5) pour le risque opérationnel est la suivante :

$$SCR_{op} = \text{Min}(0,3BSCR; Op) + 0,25Exp_{ul}$$

1. Cf. la référence [22] de la bibliographie

Op : charge pour le risque opérationnel de base pour toutes les activités sauf l'assurance vie, lorsque le risque d'investissement est porté par les souscripteurs.

$$Op = \text{Max}(Op_{premiums}; Op_{provisions})$$

où $Op_{premiums} = 0,04(Earn_{life} - Earn_{life-ul}) + 0,03Earn_{non-life} + \text{max}(0; 0,04(Earn_{life} - 1,1pEarn_{life} - (Earn_{life-ul} - 1,1pEarn_{life-ul}))) + \text{max}(0; 0,03Earn_{non-life} - 1,1pEarn_{non-life})$

et $Op_{provisions} = 0,0045\text{Max}(0; TP_{life} - TP_{life-ul}) + 0,03\text{Max}(0; TP_{non-life})$

Les inputs utilisés dans ce modèle sont :

- $pEarn_{life}$: primes gagnées durant les douze mois précédant les douze derniers mois pour les obligations d'assurance vie, sans déduction des primes cédées aux réassureurs.
- $pEarn_{life-ul}$: primes gagnées durant les douze mois précédant les douze derniers mois pour les obligations d'assurance vie, lorsque le risque d'investissement est porté par le souscripteur, sans déduction des primes cédées aux réassureurs.
- $Earn_{life}$: primes gagnées ces douze derniers mois pour les obligations d'assurance vie, sans déduction des primes cédées aux réassureurs.
- $Earn_{life-ul}$: primes gagnées ces douze derniers mois pour les obligations d'assurance vie, lorsque le risque d'investissement est porté par le souscripteur, sans déduction des primes cédées aux réassureurs.
- $Earn_{non-life}$: primes gagnées ces douze derniers mois pour les obligations d'assurance non-vie, sans déduction des primes cédées aux réassureurs.
- TP_{life} : provisions techniques pour les obligations d'assurance-vie (brutes de réassurance).
- $TP_{life-ul}$: provisions techniques pour les obligations d'assurance-vie, lorsque le risque d'investissement est porté par l'assuré (brutes de réassurance).
- $TP_{non-life}$: provisions techniques pour les obligations d'assurance non-vie (brutes de réassurance).
- Exp_{ul} : montant annuel des frais supportés pendant les 12 derniers mois pour ce qui concerne l'assurance-vie.
- BSCR = SCR basique.

Le rapport présentant les résultats du QIS 5 souligne que peu de commentaires ont été faits à propos du risque opérationnel. Certains assureurs regrettent le caractère trop brut de la formule standard qui ne prend pas en compte la gestion du risque opérationnel et n'incite pas à améliorer le management du risque opérationnel. Le rapport souligne également que la majorité des assureurs souhaitant utiliser un modèle interne partiel veulent utiliser la formule standard pour calculer le capital lié au risque opérationnel. Ce montant est alors ajouté au capital calculé pour les autres risques, comme dans le cadre de la formule standard. Les groupes justifient l'utilisation de la formule standard par le manque de données liées au risque opérationnel.

1.4 Gestion du risque opérationnel

Le management du risque opérationnel² (ORM) se définit comme un processus cyclique continu qui inclut l'évaluation du risque, la prise de décision concernant ces risques et la mise en place de contrôles des risques. Cela conduit à accepter, à limiter ou à éviter le risque opérationnel.

Le département américain de la Défense résume les principes de l'ORM selon les quatre grandes règles suivantes :

- Il faut accepter le risque lorsque les bénéfices dépassent les coûts.
- Il ne faut pas accepter des risques qui ne sont pas nécessaires. On parle de risques non nécessaires lorsque les rendements attendus sont faibles.
- Il faut anticiper et gérer le risque en planifiant.
- Il faut prendre les décisions au bon niveau.

1.4.1 Raisons et bénéfices liées à l'instauration de l'ORM

L'instauration de l'ORM au sein des banques ces dernières années résulte de plusieurs phénomènes. Les banques ont tout d'abord pris conscience des enjeux associés à la gestion des risques. En effet, l'instauration d'une unité de gestion des risques indépendante, constituée d'individus aux responsabilités bien définies peut être créateur de valeur au sein de la banque. Celles-ci ont compris que l'ORM pouvait leur permettre d'atteindre des objectifs organisationnels et d'accroître les performances :

- Le premier objectif est de réduire les pertes liées au risque opérationnel.
- Le deuxième est de réduire les coûts liés à l'audit.
- Le troisième est de détecter rapidement les activités illégales exercées au sein ou à l'extérieur de la structure.
- Le dernier est de réduire l'exposition aux risques futurs.

Le développement de l'ORM résulte également des contraintes réglementaires imposées par l'Accord de Bâle 2. Si cet accord souligne le montant de capital requis pour faire face aux différents risques portés par la banque, il introduit une dimension qualitative. Cet accord met ainsi en exergue l'importance jouée par l'unité de gestion des risques au sein des banques. En outre, l'utilisation de l'approche par modèle interne pour calculer le capital associé au risque opérationnel, nécessite certains pré-requis en termes de gestion des risques. Plus qu'un cadre réglementaire, l'Accord de Bâle 2 offre aux banques l'opportunité de développer une structure efficiente pour identifier et limiter les pertes associées au risque opérationnel.

L'introduction ou le développement de l'ORM peut constituer un réel défi. En effet, le développement d'une structure ORM est coûteux et chronophage. En outre, cela nécessite d'avoir accès à de nombreuses informations. Un système de reporting automatique des pertes doit donc être mis en place. Des bases de données doivent être construites. L'approche par modèle interne requiert, en effet, un historique de pertes initial d'au moins trois ans. La mise en place de l'ORM nécessite donc un investissement de la part des dirigeants. Pour atteindre ses objectifs, l'ORM ne doit pas être perçu comme une simple contrainte réglementaire.

2. Cette partie s'appuie notamment sur [21]

L'implémentation de l'ORM étant très chronophage, plusieurs niveaux d'ORM ont été proposés afin d'apporter une réponse en toutes circonstances. Le premier niveau intitulé management du risque "in-depth" est utilisé avant que le projet ne soit mis en place. Cette approche requiert beaucoup de temps. Cela passe donc par la préparation d'opérations complexes et l'introduction de nouveaux équipements. Le second niveau s'intitule management du risque "deliberate", il est utilisé régulièrement dans la mise en place de projets. Il s'appuie principalement sur l'expérience des employés, sur le brainstorming pour identifier les risques et accroître le processus de contrôle. Il s'intéresse donc par exemple à la formation des employés, aux revues des performances. Le dernier niveau, intitulé management du risque "time-critical" est utilisé par les employés en temps réel lorsqu'ils exécutent leurs tâches. Il se définit comme l'utilisation de toutes les ressources disponibles pour accomplir les missions en utilisant des concepts de risk management lorsque le temps est limité. Nous présentons en détail le premier niveau d'ORM dans la section ci-dessous.

1.4.2 Processus de l'ORM

Le management du risque opérationnel peut être décrit comme un cycle comprenant les quatre étapes suivantes : l'identification du risque, l'évaluation du risque, le traitement du risque et la surveillance du risque.

Identification et évaluation du risque opérationnel

De manière à identifier et à évaluer le risque opérationnel, les institutions concernées doivent être conscientes de ces risques. L'identification des sources et des facteurs du risque opérationnel permet ainsi de prendre des mesures préventives. Durant l'identification et l'évaluation du risque, plusieurs facteurs doivent être étudiés afin de déterminer le profil de la banque et de ses activités, comme le type de clients, la culture du risque de la compagnie, le développement ou la politique du personnel de la firme. Pour ce faire, divers outils se sont avérés particulièrement utiles, parmi lesquels on retiendra les inventaires de risque, les bases de données de pertes, les analyses de scénario et les indicateurs de risques (*les KRI : Key Risk Indicators*). Ces différents outils permettent une quantification et un suivi du risque opérationnel.

Les inventaires de risque visent à accroître la prise de conscience du risque opérationnel. La plupart du temps, ils prennent la forme de questionnaires et d'interviews complémentaires. Leur principal objectif consiste à déterminer les risques opérationnels les plus significatifs et à les évaluer. On accorde donc une attention toute particulière aux risques qui peuvent mettre en danger l'institution. Ces inventaires peuvent prendre différentes orientations : orientation risque, orientation contrôle... Les inventaires ne doivent pas être réalisés une seule fois mais doivent être réalisés sur une base régulière, par exemple annuelle.

Les données de pertes constituent un outil particulièrement utile. On distingue les données de pertes internes des données de pertes externes. Les données de pertes internes sont principalement constituées de pertes à forte fréquence et faible sévérité. En effet, les pertes à faible fréquence et forte sévérité, dont celles qui mettent en danger l'institution, sont rares et ne peuvent pas être étudiées grâce aux seules données internes, d'où l'intérêt des données de pertes externes. Les organisations doivent faire un arbitrage entre la

précision des données et le coût que cela implique. Toutefois, certaines précisions concernant la perte s'avèrent indispensables (date, montant, type de risque, branche d'activité, compagnie, localisation géographique...). Il n'existe pas de seuil réglementaire en-dessous duquel les pertes ne sont pas répertoriées. Ce seuil dépend fréquemment de la taille de la banque et peut être abaissé dans certaines branches d'activité afin de cibler certaines pertes de forte fréquence et faible sévérité.

Les données de pertes externes sont collectées par différents groupes. Les membres de ces groupes peuvent ainsi profiter des bases de données qui ont été constituées. A ce jour, les deux plus connus sont GOLD (Global Operational Loss Database) et ORX (Operational Riskdata eXchange association). Le seuil de reporting est de 20 000 EUR pour ORX et 50 000 USD pour GOLD.

Les analyses de scénario permettent d'identifier des événements à forte sévérité n'ayant pas encore eu lieu. Contrairement aux données de pertes qui se focalisent sur le passé, les analyses de scénario se concentrent sur les risques futurs. Les analyses de scénario ont un aspect quantitatif et qualitatif (détection des faiblesses de la banque, identification des risques). Les analyses de scénario s'appuient sur les connaissances des experts.

Les indicateurs de risques fournissent des informations sur les pertes futures potentielles. Parmi ces indicateurs, on trouve notamment la fréquence des pertes, les mauvaises entrées de comptes...

Traitement du risque

Une fois les risques identifiés et évalués, quatre stratégies s'offrent alors aux risk managers. Ils peuvent décider d'accepter le risque opérationnel, choisir d'atténuer le risque ou bien décider de partager et transférer le risque.

Dans une stratégie coût-bénéfice, une banque doit choisir d'éviter le risque lorsque la marge anticipée est inférieure au coût du risque espéré. Une telle décision doit s'appuyer sur différents éléments, comme l'horizon de temps, les risques de réputation...

L'atténuation du risque peut être réalisée en s'appuyant sur un contrôle interne des risques. Pour ce faire, les managers concernés peuvent s'appuyer sur les procédures existantes au sein de la banque, sur les limites choisies par les responsables, sur les contrôles d'accès, sur la séparation des rôles... Ces limites et procédures internes doivent bien sûr être connues et documentées.

Une autre solution consiste à partager ou transférer le risque. Cette solution peut être utile lorsqu'il n'est pas possible de réduire les risques grâce à des limites ou lorsque le coût des contrôles dépasse les pertes espérées ainsi que lorsque le risque ne peut pas être accepté. Dans cette configuration, les deux principaux outils sont l'assurance et les délocalisations. Des assurances contre les interruptions d'activité ou les erreurs des employés peuvent par exemple être souscrites. Les banques peuvent ainsi souscrire à des "bankers blanket bond" qui les protègent contre les pertes dues notamment aux actes frauduleux des employés, aux pertes pendant le transport des fonds... Contre le risque terroriste,

certaines assureurs australiens ont proposé de nouveaux produits à partir du 1er janvier 2003. Les managers s'intéressent également à d'autres solutions comme la titrisation ou les captives d'assurance, qui sont des sociétés filiales créées par l'entreprise, jouant le rôle d'un assureur traditionnel et ne garantissant que les risques supportés par l'entreprise. Si l'objectif principal des délocalisations est de réduire les coûts, cela peut également permettre de réduire les risques opérationnels.

La dernière solution consiste à accepter les risques. Comme pour le refus des risques, ce choix doit s'appuyer sur une analyse coût-bénéfice. Le risque doit ainsi être accepté lorsque la perte espérée liée à ce risque est inférieure au coût d'atténuation du risque.

Surveillance du risque

Lorsque les risques ont été pris en compte, certains contrôles doivent avoir lieu. Ces contrôles peuvent être effectués de manière continue par les employés eux-mêmes. Cela doit alors être inclus dans leurs responsabilités. D'autres contrôles doivent également être réalisés par des entités internes ou externes, pour permettre l'objectivité des inspections. Les auditeurs internes ont plusieurs tâches à réaliser qui sont répertoriées au sein d'une directive européenne (2006/48/EC). Ainsi, lorsque les banques utilisent l'approche standardisée pour calculer le risque opérationnel, les auditeurs doivent par exemple examiner l'allocation du revenu opérationnel pour chaque branche d'activité.

1.4.3 Processus de suivi du risque opérationnel à la Société Générale

Au niveau local, soit au niveau des filiales, il existe des correspondant risques opérationnels (CRO) chargés de suivre au quotidien le risque opérationnel de la filiale. En particulier, les CRO sont en charge de collecter les pertes des filiales dans la base de données Caroline, de créer les analyses de scénario, et d'appliquer les plans d'action.

Au niveau pôle, il y a les responsables risques opérationnels (RRO ou ORM en anglais pour operational risk manager) qui supervisent le risque opérationnel au niveau pôle. Les RRO constituent un premier niveau de validation du travail des CRO (validation de premier niveau des analyses de scénario et des pertes internes entrées dans Caroline).

Ensuite, au niveau groupe, il y a l'unité de gestion des risques opérationnels de la Société Générale RISQ/OPE qui a une vision globale du risque (Caroline étant une base centrale, elle permet donc de regrouper toutes les pertes internes entrées en local). Cette unité effectue des validations de deuxième niveau des analyses de scénario et des pertes internes.

1.5 Les méthodes de calcul du capital associé au risque opérationnel

Le Comité de Bâle propose trois manières plus ou moins complexes afin de calculer le capital associé au risque opérationnel.

1.5.1 L'approche indicateur de base

Les banques appliquant ce critère doivent détenir des fonds propres correspondant à une proportion (α) de la moyenne sur les trois dernières années de leur produit annuel brut moyen positif, au titre du risque opérationnel. Il est donc nécessaire d'exclure du numérateur et du dénominateur les chiffres correspondant à des produits bruts négatifs ou nuls. Soit K_{IB} le capital requis, alors :

$$K_{IB} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha PB_i}{n}$$

où n est le nombre d'années, sur les trois années, pour lesquelles le produit annuel brut est positif, PB le produit annuel brut s'il est positif et $\alpha = 15\%$.

Le produit brut correspond au produit des intérêts nets et aux autres produits d'exploitation. Il exclut les provisions, les frais d'exploitation, les plus ou moins-values réalisées sur cession de titres du portefeuille bancaire ainsi que les éléments exceptionnels ou inhabituels et les produits d'activité d'assurance.

1.5.2 L'approche standard

Alors que l'approche indicateur de base s'intéresse au produit brut sur l'ensemble de l'activité de la banque, l'approche standard divise l'activité de celle-ci en huit lignes de métier (financement des entreprises, activités de marché, banque de détail, banque commerciale, paiements et règlements, fonctions d'agent, gestion d'actifs et courtage de détail). Pour l'approche standard, le produit brut est calculé au niveau de chaque ligne métier et multiplié par un coefficient bêta (β) spécifique à chaque ligne de métier. Il correspond au ratio, pour l'ensemble du système, entre l'historique des pertes liées au risque opérationnel pour une ligne de métier et le produit brut de cette ligne.

Le montant de fonds propres exigible pour faire face au risque opérationnel correspond donc à la moyenne sur trois ans de la somme des montants exigibles au niveau de chaque ligne de métier pour chaque année. Les exigences de fonds propres négatives dans une ligne de métier peuvent compenser les exigences de fonds propres positives pour toute autre ligne. Si la somme annuelle des exigences de fonds propres sur toutes les lignes est négative, alors un montant nul sera retenu au numérateur. Soit K_{TSA} , le montant de capital requis pour couvrir le risque opérationnel selon cette approche, alors :

$$K_{TSA} = \frac{\sum_{i=1}^3 \max(\sum_{j=1}^8 \beta_j PB_{i,j}, 0)}{3}$$

où β_j est le coefficient de pondération associé à la ligne j et $PB_{i,j}$ le produit brut associé à l'année notée i et à la ligne j .

1.5.3 Les approches de mesures avancées (AMA)

Le capital calculé d'après les méthodes AMA s'appuie sur le modèle interne de la banque. Pour s'appuyer sur cette méthode, les banques doivent obtenir l'accord de l'autorité de contrôle du pays dans lequel elles exercent. La méthode obtenue doit permettre d'obtenir un montant de capital permettant d'assurer la solidité de la banque (niveau de confiance de 99,9% et période de détention d'un an). Les méthodes AMA doivent s'appuyer :

Ligne métier	Pondération
Financement d'entreprise	$\beta_1 = 18\%$
Activités de marché	$\beta_2 = 18\%$
Banque de détail	$\beta_3 = 12\%$
Banque commerciale	$\beta_4 = 15\%$
Paievements et règlements	$\beta_5 = 18\%$
Fonctions d'agent	$\beta_6 = 15\%$
Gestion d'actifs	$\beta_7 = 15\%$
Courtage de détail	$\beta_8 = 12\%$

FIGURE 1 – Pondérations à appliquer dans le cas de l'approche standard

- sur des données internes de pertes : ces données doivent être exhaustives et sont collectées au-dessus d'un certain seuil (par exemple 10 000 euros). La banque doit répertorier différentes informations, comme la date de l'événement, le recouvrement éventuel de montants bruts, les éléments décrivant les facteurs ou les causes à l'origine de la perte. Afin d'utiliser l'approche AMA, la banque doit disposer d'un historique d'au moins cinq ans.
- sur des données externes (données publiques et/ou partagées du système bancaire) : ces données permettent notamment d'obtenir des informations sur les risques sévères de faible fréquence.
- sur des analyses de scénario : afin de déterminer l'exposition de la banque à des pertes importantes, il est nécessaire d'utiliser sur des analyses de scénario réalisées par des experts et s'appuyant sur des données externes, et parfois également sur des données internes. Ces analyses permettent par exemple de déterminer les paramètres des distributions statistiques utilisées pour déterminer le capital requis. Ces scénarios doivent également simuler plusieurs événements simultanés de pertes.
- sur des facteurs environnement opérationnel et de contrôle interne : L'intégration de ces facteurs permet une évaluation des risques prospective et offre une meilleure prise en compte de la qualité de son contrôle. La prise en compte de ces facteurs n'est pas automatique, elle nécessite le respect de certains critères. Le choix de chaque facteur doit par exemple être argumenté.

La combinaison de différentes sources permet ainsi de s'appuyer sur le passé, grâce à l'utilisation de données internes, mais fournit également une vision prospective, grâce à l'utilisation des analyses de scénario. L'utilisation du modèle interne afin de calculer le capital réglementaire est soumis à l'approbation du régulateur. Ainsi, un certain nombre de critères de nature qualitative et quantitative doivent être respectés pour pouvoir utiliser l'approche AMA pour calculer le capital réglementaire au titre du risque opérationnel.

Critères de nature qualitative

Parmi ces critères qualitatifs, la banque doit tout d'abord démontrer qu'elle dispose d'une unité de contrôle des risques indépendante, responsable de l'implémentation de la

procédure de la gestion du risque opérationnel.

En outre, le modèle servant à mesurer le risque opérationnel doit être intégré dans le processus quotidien de gestion des risques.

Par ailleurs, un reporting régulier des expositions au risque opérationnel et des pertes doit être fait auprès des responsables et des directeurs.

Le système de gestion du risque opérationnel doit être bien documenté.

Des auditeurs internes et/ou externes doivent contrôler régulièrement le processus de gestion des risques mais aussi les systèmes de mesure du risque.

La validation du système de gestion du risque opérationnel par les auditeurs externes et/ou les régulateurs doit inclure les contrôles suivants :

- vérifier que le processus de validation interne opère de manière satisfaisante ;
- s’assurer que les flux de données et les processus associés au système de mesure du risque sont transparents et accessibles.

Critères de nature quantitative

La banque doit calculer le capital réglementaire lié au risque opérationnel en additionnant la perte espérée et de la perte non anticipée. Pour se contenter d’un capital réglementaire égal à la perte non anticipée, la banque doit démontrer au régulateur national qu’elle a mesuré et pris en compte les pertes espérées.

Les mesures du risque pour différentes estimations du risque opérationnel doivent être ajoutées pour calculer le capital réglementaire. Toutefois, la banque est autorisée à utiliser les corrélations entre les estimations individuelles du risque opérationnel sous certaines conditions.

La banque doit utiliser des données internes, des données externes pertinentes, des analyses de scénario et des facteurs reflétant l’environnement et le système de contrôle interne.

Enfin, une banque doit disposer d’une approche transparente, bien documentée et vérifiable afin de pondérer les quatre éléments précédents pour calculer le capital lié au risque opérationnel.

Méthodes de calcul

Au sein des méthodes AMA, trois approches différentes peuvent être répertoriées :

- l’approche de mesure interne (IMA)
- l’approche par la distribution de pertes (LDA)
- l’approche scorecard

L'approche de mesure interne (IMA)³ : Au niveau bancaire, les montants de pertes sont segmentés selon une matrice prenant en compte huit types d'activités de la banque et sept catégories de risques. Chaque cellule correspond à une maille. Cela permet d'obtenir 56 mailles. Avec la méthode IMA, le calcul du capital associé au risque opérationnel est effectué pour chaque ligne d'activité j et type de risque k . Cette méthode suppose l'existence d'une relation stable entre les pertes espérées et les pertes inattendues. La charge de capital agrégé K_{IMA} est calculée comme la somme des montants de capital provenant des 56 mailles. Elle se calcule donc de la manière suivante :

$$K_{IMA} = \sum_{k=1}^7 \sum_{j=1}^8 \gamma_{k,j} EL_{k,j} RPI_{k,j}$$

où :

- $EL_{k,j}$ est la perte espérée dans la maille (k,j)
- $\gamma_{k,j}$ est un facteur d'échelle déterminé par la banque et soumis à l'accord du régulateur, permettant de passer d'une perte espérée à une perte non anticipée ;
- $RPI_{k,j}$ est l'indice de profil du risque. Il s'agit d'un facteur d'ajustement capturant la différence entre les queues de distribution de pertes de la banque et celles de l'industrie.

L'approche scorecard⁴ :

Comme précédemment, la décomposition en mailles est utilisée dans cette méthode. Le capital agrégé correspond à la somme des montants de capitaux calculés au niveau de chaque maille. Dans cette approche, le capital est donc calculé au niveau de chaque maille puis modifié sur la base d'éléments prenant en compte le profil de risque et l'environnement de contrôle du risque pour chaque ligne d'activité. Ces éléments permettent d'adopter une vision prospective, ne faisant plus uniquement reposer l'estimation du capital sur les données de pertes passées. Elle peut ainsi prendre en compte les améliorations de gestion des risques pouvant réduire la fréquence et la sévérité des futures pertes opérationnelles.

Dans l'approche scorecard, le capital agrégé est calculé selon la manière suivante :

$$K_S = \sum_{k=1}^7 \sum_{j=1}^8 \omega_{k,j} EI_{k,j} RS_{k,j}$$

où :

- $EI_{k,j}$ est un indicateur d'exposition ;
- $\omega_{k,j}$ est un facteur d'échelle ;
- $RS_{k,j}$ est le score de risque.

3. Cf.[9] pour plus de détails sur ce modèle

4. Cf.[9] pour plus de détails sur ce modèle

1.5.4 Répartition de la fréquence et de la sévérité des pertes

Dans cette partie⁵, nous nous proposons d'analyser la répartition de la fréquence et de la sévérité des pertes au sein de la matrice types de pertes/branches d'activité. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les données et les tableaux de l'association ORX, qui se charge de collecter des données de pertes liées au risque opérationnel d'importants groupes bancaires, dont BNP Paribas et la Société Générale. Au 30 septembre 2011, la base contenait 236 526 pertes pour un montant total d'environ 102 Milliards €.

En termes de fréquence, les pertes s'observent principalement au niveau de la banque de détail. En effet, 64 % des pertes sont constatées dans cette branche d'activité. Bien plus loin, le trading et la banque commerciale enregistrent respectivement 10 % et 9 % des pertes. En termes de types de pertes, les fraudes externes (37 %) et les problèmes au niveau des exécutions d'opérations, des livraisons et des processus (34 %) sont les principales pertes enregistrées.

En termes de sévérité, les pertes globales les plus importantes sont observées au niveau de la finance d'Entreprise (27 %) et de la banque de détail (28 %). En outre, les pertes totales au niveau des clients et produits (52%) et celles au niveau des exécutions d'opérations, des livraisons et des processus (25%) sont les plus coûteuses.

5. Cf. 97 pour le détail de la répartition de la fréquence et de la sévérité des pertes

2 Méthode LDA : Loss Distribution Approach

2.1 Approche formelle

Il s'agit de la méthode la plus sophistiquée pour déterminer le montant de capital requis pour le risque opérationnel. Elle s'appuie sur la modélisation de la distribution de perte à partir des distributions de la sévérité et de la fréquence. Au niveau bancaire, les montants de pertes sont segmentés selon une matrice prenant en compte huit types d'activités de la banque et sept catégories de risques. Cela permet d'obtenir 56 mailles. Au niveau de chaque maille (j,k), la perte totale est donc :

$$S_{j,k} = \sum_{i=1}^{N_{j,k}} X_{j,k}^{(i)}$$

où $N_{j,k}$ correspond au nombre de pertes observées dans la maille (j,k) et $X_{j,k}^{(i)}$ est le montant de la i-ème perte de la maille (j,k).

2.2 Décomposition fréquence/sévérité, estimation des paramètres

La fonction de répartition de la fréquence de la maille (j,k) correspond à la formule suivante :

$$\sum_{r=0}^n p_{j,k}(r)$$

où $p_{j,k}(r)$ est la probabilité que r événements de perte surviennent au niveau de la maille (j,k). Trois distributions sont particulièrement utilisées, il s'agit de la loi de Poisson, de la binomiale et de la binomiale négative.

La fonction de répartition de la sévérité peut être approximée par plusieurs distributions statistiques. Si la plus utilisée reste la log-normale, d'autres distributions peuvent être envisagées comme la weibull, la pareto, la Burr et la loi gamma.

A ce stade, plusieurs lois de distribution peuvent être conservées afin de sélectionner celle qui s'ajuste le mieux aux données. Il est nécessaire de déterminer le(s) paramètre(s) α tel que la distribution s'ajuste le mieux aux données.

Soit $l((x_1, \dots, x_n; \alpha))$ la log-vraisemblance, α est alors obtenu en maximisant la log-vraisemblance. On résout donc $\frac{dl(x_1, \dots, x_n; \alpha)}{d\alpha} = 0$.

Cet estimateur est asymptotiquement sans biais, de loi normale et de variance minimale. Sa variance est égale à l'inverse de l'information de Fisher $I(\alpha)$ où $I(\alpha) = -\mathbb{E}\left(\frac{d^2 l(x_1, \dots, x_n; \alpha)}{d\alpha d\alpha'}\right)$. Par conséquent, $\hat{\alpha}$ tend vers une loi normale de moyenne α et de variance égale à l'inverse de $I(\alpha)$.

Une fois les paramètres estimés, il est nécessaire de choisir un modèle pour la fréquence et un modèle pour la sévérité. Le choix peut être réalisé en s'appuyant sur des tests statistiques, tels que les tests suivants : Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises, Anderson-Darling.

2.3 Estimation de la distribution de perte au niveau de chaque maille

Il n'est en général pas possible de déterminer analytiquement la distribution de perte au niveau de chaque maille. La distribution de pertes agrégées peut se décomposer en la fréquence d'apparition des pertes et la sévérité de chaque perte individuelle. On se place dans le cadre du modèle utilisé à Société Générale, où la fréquence des pertes est modélisée par une loi de Poisson, tandis que la sévérité des pertes est modélisée par une loi Log-Normale. On a donc :

$$S_{j,k} = \sum_{i=1}^{N_{j,k}} X_{j,k}^{(i)}$$

avec

$$N_{j,k} \sim P(\lambda)$$

et

$$X_{j,k} \sim L_n(\mu, \sigma)$$

$$F_{S(j,k)}(x) = Pr(S(j,k) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(N = n) Pr(S(j,k) \leq x | N = n)$$

$$F_{S(j,k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(N = n) F_X^{n*}(x),$$

où $F_X^{n*}(x)$ est la n-uple convolution. La fonction de perte agrégée s'écrit donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) F_X^{n*}(x)$$

pour x positif et $p_{j,k}(0)$ pour $x = 0$.

En général, le calcul de la distribution de la perte agrégée nécessite donc l'utilisation de méthodes numériques comme la méthode de Monte-carlo, l'approche récursive de Panjer ou la transformation de Fourier.

Algorithme de Monte-Carlo de calcul des capitaux

Pour calculer nos montants de capitaux, une fois les paramètres des lois de fréquence et de sévérité obtenus, nous utilisons l'algorithme suivant

- Etape 1 : à partir de la valeur de λ estimée, on génère un nombre de sinistres N suivant une loi de *Poisson*(λ)
- Etape 2 : à l'aide des paramètres estimés de la loi de sévérité, on génère N valeurs $X_{i=1...N}$ suivant une loi Log-Normale avec les paramètres estimés
- Etape 3 : on calcule $S = \sum_{i=1}^N X_i$
- Etape 4 : on répète les étapes 1 à 3 K fois afin d'obtenir K valeurs de S , c'est à dire une distribution de perte agrégée au niveau de la maille (j, k)
- Etape 5 : on calcule le quantile de S au niveau 99,9%

2.4 Application numérique à nos données

2.4.1 Description des données

Dans le cadre de ce mémoire, pour tous nos calculs de capitaux et nos applications numériques, nous nous appuyons sur des données simulées⁶ relatives à une maille du groupe Société Générale. Nous disposons pour notre maille d'un historique⁷ constitué de 199 pertes historiques récoltées sur neuf ans et demi ainsi que d'une analyse de scénario délivrée par les experts⁸. Cette dernière fournit une valeur du paramètre de fréquence λ ainsi qu'un histogramme indiquant la probabilité que la sévérité de la perte soit dans des buckets donnés, lorsqu'une perte intervient.

En ce qui concerne le choix des lois de fréquence et de sévérité des pertes des mailles, nous gardons le modèle actuel utilisé à la Société Générale, à savoir **une loi de Poisson pour modéliser la fréquence des pertes, et une loi Log-Normale pour modéliser la sévérité des pertes.**

2.4.2 Détermination des paramètres à partir des PI

Du fait des hypothèses faites précédemment, on a :

$$S_{j,k} = \sum_{i=1}^{N_{j,k}} X_{j,k}^{(i)}$$

avec

$$N_{j,k} \sim P(\lambda)$$

et

$$X_{j,k} \sim L_n(\mu, \sigma)$$

On cherche à estimer les paramètres λ , μ et σ ajustant le mieux possible les données. Pour cela, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance.

- Maximum de vraisemblance pour la fréquence :

La fréquence étant modélisée par une loi de Poisson, la probabilité que la variable N , nombre de pertes annuelles dans la maille, soit égale à n_i est donc $P(N = n_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}$, et la log-vraisemblance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \log(L(N; \lambda)) &= \log\left(\prod_{i=1}^n P(N = n_i)\right) \\ &= \log\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-\lambda + n_i \log(\lambda) - \log(n_i!)) \\ &= -n\lambda + \log(\lambda) \sum_{i=1}^n n_i - \sum_{i=1}^n \log(n_i!) \end{aligned}$$

6. Les données utilisées ne sont donc pas des données réelles

7. appelé également données de pertes internes ou données PI par la suite

8. analyse de scénario appelée également données AS par la suite

Maximisation de la log-vraisemblance :

$$\frac{\partial \log(L(X; \lambda))}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n n_i = 0$$

D'où l'estimateur par maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$ de λ est donné par :

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i = \bar{n}}$$

• Maximum de vraisemblance pour la sévérité :

La sévérité étant modélisée par une loi Log-Normale, la probabilité que la variable X , sévérité de la perte, soit égale à x_i est donc $P(X = x_i) = \frac{1}{x_i \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2})$, et la log-vraisemblance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \log(L(X; \mu, \sigma)) &= \log\left(\prod_{i=1}^n P(X = x_i)\right) \\ &= \log\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\ &= -\frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Maximisation de la log-vraisemblance :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log(L(X; \mu, \sigma))}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{(\log x_i - \mu)}{2\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial \log(L(X; \mu, \sigma))}{\partial \sigma^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0 \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log(x_i) - \hat{\mu})^2 \end{cases}}$$

2.4.3 Détermination des paramètres à partir des AS

Les experts fournissent directement une valeur du paramètre de fréquence λ . En ce qui concerne la sévérité, ceux-ci fournissent un histogramme reflétant les probabilités que la perte soit dans tel ou tel intervalle de valeurs de pertes, qu'on désignera par le terme de "bucket" dans la suite. Pour trouver les paramètres μ et σ de la loi log-normale ajustant le mieux cet histogramme, on écrit une fonction soulignant l'écart d'aire entre la fonction de densité théorique de la loi log-normale et l'aire sous l'histogramme. L'objectif est donc de trouver le couple de paramètres (μ, σ) permettant d'approcher au mieux l'histogramme des valeurs de pertes fourni par les experts par une loi log-normale de paramètres (μ, σ) . Pour ceci, nous pouvons utiliser des tests de qualité d'adéquation comme le test du χ^2 . Pour les deux tests, on obtient alors une statistique de test qui dépend des données et du couple (μ, σ) . Puis, il s'agit de trouver le couple (μ, σ) minimisant chacune des statistiques de test, assurant que la loi log-normale ainsi trouvée est celle qui approche au mieux la

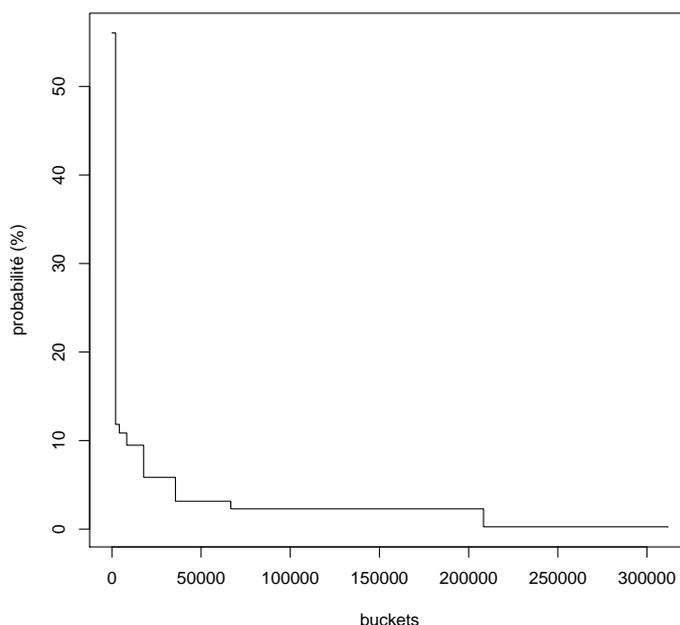


FIGURE 2 – Répartition des pertes selon les experts

courbe empirique, au sens du critère considéré. Une fois qu'un jeu de données a été traité par les deux méthodes, on obtient deux couples de paramètres (μ, σ) qui réalisent chacun la meilleure adéquation au sens du test considéré.

On va donc chercher à minimiser la distance du χ^2 , qui correspond à la différence d'aires entre, d'une part, l'histogramme de perte pour un bucket dans le scénario et d'autre part l'histogramme de fréquence obtenu avec la probabilité selon la loi théorique que la perte se situe au sein du bucket considéré, pondérée par l'inverse de la probabilité d'être entre deux buckets selon la loi théorique.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{P_i - E_i}{E_i}$$

où P_i et E_i sont respectivement les probabilités empiriques et théoriques de se situer dans le bucket i .

2.4.4 Détermination des capitaux

C'est le cas de calcul réalisé actuellement par la Société Générale. Deux capitaux sont en fait calculés, un capital s'appuyant sur les données internes et le second sur l'analyse de scénario. Jusqu'à très récemment, le montant retenu était le maximum de ces deux montants de capitaux. Actuellement, le choix entre K_{PI} et K_{AS} est fait lors d'un comité Experts, choisissant l'un ou l'autre des deux montants de capitaux, et est appelé *mix expert*. Cette procédure est peu satisfaisante car la valeur retenue de montant de capital réglementaire, K_{PI} ou K_{AS} , ne s'appuie que sur une partie de l'information disponible. Par ailleurs, il n'existe en théorie qu'une seule valeur de VaR à 99,9% et donc de capital réglementaire. De plus, cette procédure est assez conservatrice et consomme beaucoup de capital.

Méthode PI En appliquant les méthodes décrites ci-dessus, on obtient en ce qui concerne le paramètre de fréquence : $\lambda = 20,95$ pour la maille considérée. Les paramètres de sévérité estimés trouvés sont $\mu = 5,64$ et $\sigma = 1,56$.

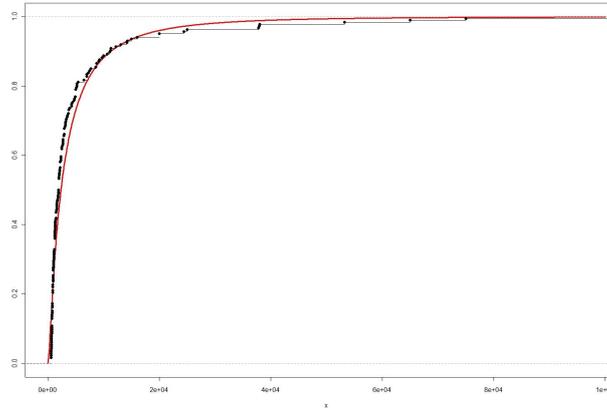


FIGURE 3 – Ajustement d’une loi log-normale à notre historique pour la maille considérée - comparaison des fonctions de répartition empirique et théorique

En appliquant l’algorithme décrit ci-dessus, on trouve :

$$K_{PI} = 147\,804\text{€}$$

Méthode AS La valeur du paramètre de fréquence donnée par les experts est $\lambda = 6,21$ pour la maille étudiée. En appliquant la procédure consistant à minimiser une distance et décrite précédemment, on obtient en ce qui concerne les paramètres (μ, σ) de la distribution log-normale des pertes $\mu = 7,36$ et $\sigma = 2,02$ pour la maille considérée.

En appliquant l’algorithme décrit ci-dessus, on peut alors calculer K_{AS} :

$$K_{AS} = 2,15 \text{ M€}$$

3 Problématique et objectifs

Problématique La procédure actuelle de la Société Générale conduit à l’obtention de deux capitaux réglementaires numériques différents K_{AS} (capital découlant de l’analyse de scénario) et K_{PI} (capital découlant de l’historique des pertes). Le calcul de deux capitaux se justifie par le fait que les données internes, à la base du capital K_{PI} , fournissent une information intéressante sur les pertes passées mais ne peuvent prendre en compte les évolutions futures du marché. Pour combler ces lacunes, il est donc nécessaire d’utiliser des analyses de scénario qui permettent d’anticiper les pertes futures. En particulier, le calcul du capital à partir des analyses de scénario offre une vision prospective permettant de tenir compte des plans d’action mis en place. La prise en compte des informations passées et l’anticipation des pertes futures se traduisent donc par l’obtention de deux montants de capitaux. Jusqu’à très récemment, le montant retenu était le maximum de ces deux montants de capitaux. Actuellement, le choix entre K_{PI} et K_{AS} est fait lors d’un comité Experts, choisissant le capital représentant le mieux le profil de risque de la banque, et est appelé *mix expert*. Cette procédure est toutefois peu satisfaisante pour plusieurs raisons. Premièrement, il existe théoriquement une unique valeur de capital associée au risque opérationnel. En outre, l’existence de deux montants de capitaux peut inciter à conserver le plus grand des deux, par principe de précaution. Or, on peut penser que le montant réel de capital à garder est une valeur située entre les deux capitaux obtenus, ce choix se traduit donc par l’obtention d’un montant de capital conservateur dans le sens où du capital pourrait probablement être économisé. Cela peut être particulièrement dommageable dans un contexte de besoins de liquidités. D’autre part, la restriction à l’un des deux capitaux calculés implique qu’une partie de l’information, celle provenant de l’historique des pertes ou celle issue des analyses de scénario, et du travail réalisé, par les experts ou par l’équipe de gestion des risques, n’est pas prise en compte. L’objectif est donc d’obtenir un montant de capital unique, en s’appuyant sur toute l’information à disposition.

Objectifs Dans la suite de ce mémoire, nous proposons d’étudier quatre méthodes permettant de combiner à la fois les données de pertes internes et les analyses des experts. Les deux premières méthodes s’appuient sur des concepts de statistique bayésienne. Dans ces approches, nous considérons que certains paramètres des lois de fréquence et de sévérité sont des variables aléatoires. Dans la première méthode, nous nous appuyons sur des lois a priori conjuguées afin de déterminer les lois a posteriori des paramètres considérés comme aléatoires afin de disposer de l’ensemble des paramètres des lois de fréquence et de sévérité. Dans la seconde méthode, l’objectif est identique mais nous utilisons une loi a priori non informative afin de pallier au manque de données. Dans une troisième partie, nous détaillerons la méthode du Poly tree, consistant à créer un arbre à partir des données AS et à l’actualiser à partir des données PI. Cette méthode permet d’obtenir une distribution a posteriori de pertes agrégées. Enfin, dans une dernière partie, nous nous intéresserons à la méthode par crédibilité qui permet d’obtenir une unique distribution de pertes en réalisant des tirages soit dans la distribution de données de pertes internes, soit dans la distribution issue de l’information fournie par les experts. Nous présenterons également les résultats numériques des méthodes obtenus à partir de nos données.

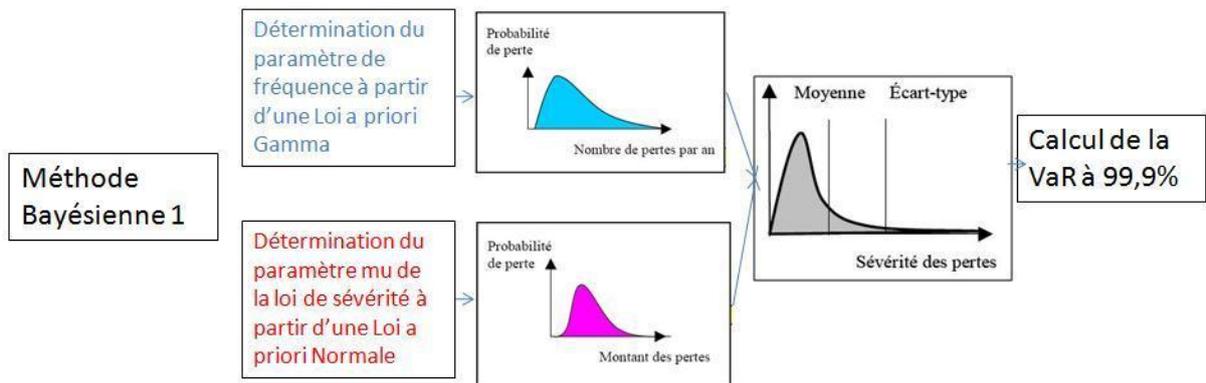


FIGURE 4 – Représentation schématique de la méthode bayésienne 1

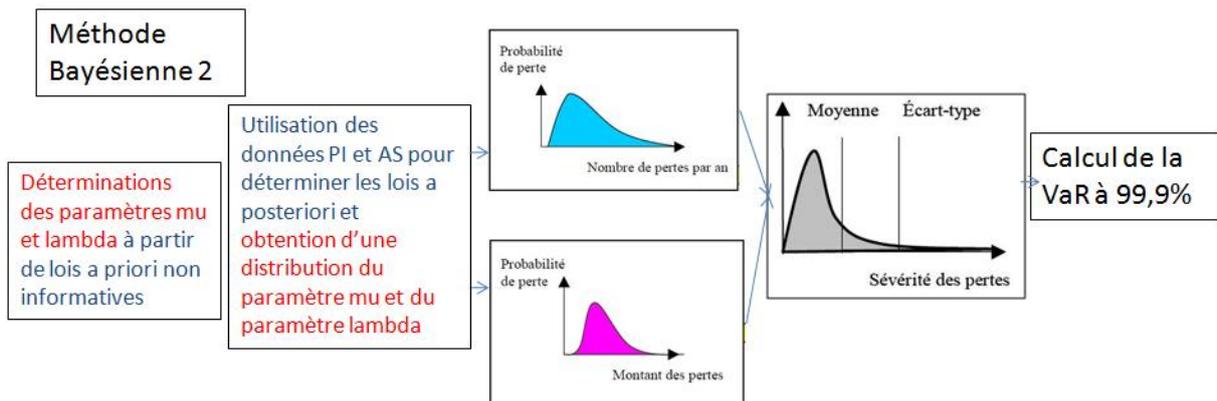


FIGURE 5 – Représentation schématique de la méthode bayésienne 2

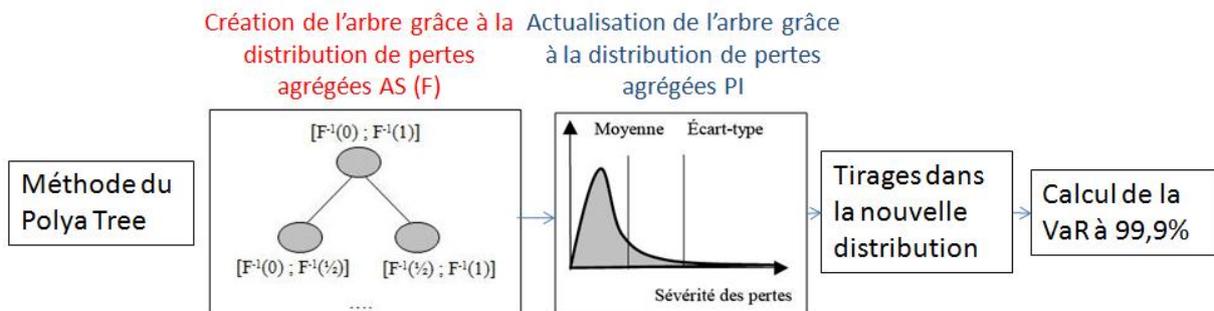


FIGURE 6 – Représentation schématique de la méthode Poly Tree

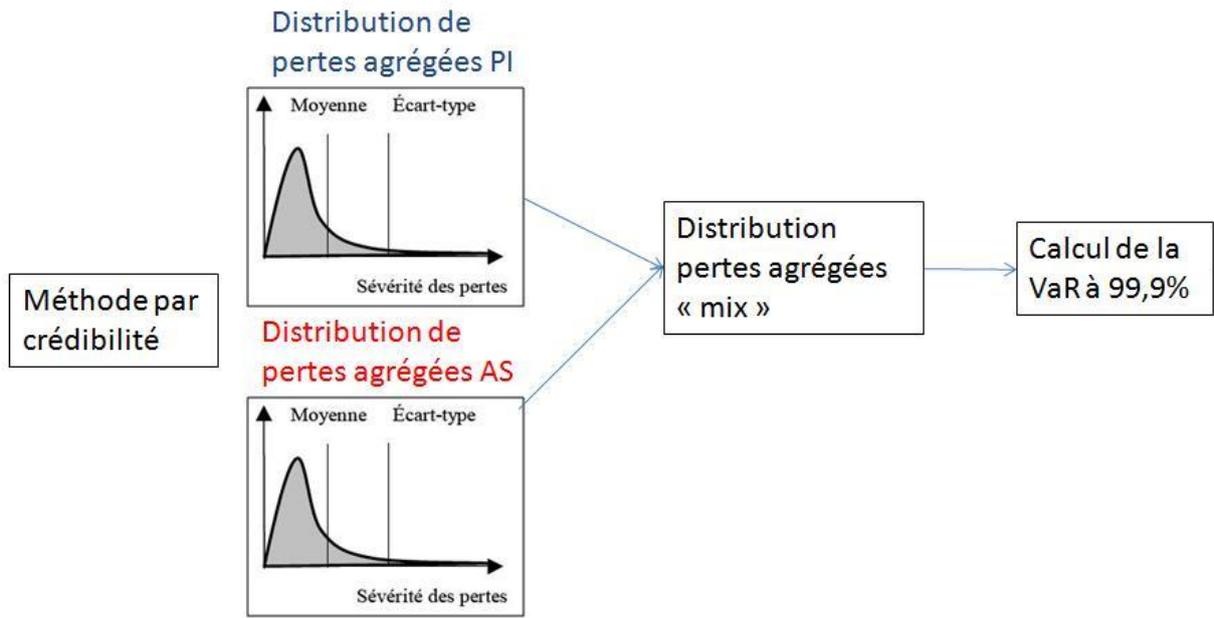


FIGURE 7 – Représentation schématique de la méthode Credibilité

4 Méthode bayésienne 1

Nous cherchons dans cette partie à combiner l'information fournie par les experts et les données internes dont nous disposons en s'appuyant sur la statistique bayésienne. Rappelons que les experts fournissent dans un premier temps pour la maille considérée une fréquence de sinistres ainsi qu'un histogramme indiquant pour chaque bucket la probabilité que le montant d'une perte soit dans celui-ci. Le paramètre de fréquence fourni par les experts est donc fixe. En utilisant des informations complémentaires fournies par les experts, que nous détaillerons dans cette partie, nous pouvons introduire de la variabilité à l'aide de la statistique bayésienne.

L'utilisation de la théorie bayésienne peut en effet constituer une solution pour déterminer un unique montant de capital s'appuyant sur l'historique de pertes internes et les analyses de scénario. Les paramètres des distributions de fréquence et de sévérité des pertes sont alors considérés comme des variables aléatoires suivant des lois a priori choisies de telle manière à obtenir des distributions a posteriori appartenant à la même famille de lois (on se restreint donc aux familles conjuguées). La détermination des paramètres des lois a priori est réalisée à l'aide de l'information livrée par les experts tandis que les paramètres des lois a posteriori sont obtenus après actualisation des paramètres a priori par l'historique des pertes internes. Les lois a posteriori permettent alors de définir l'ensemble des paramètres des lois de fréquence et de sévérité. Cela passe donc par la détermination d'une loi a priori et des paramètres a priori pour chacune des variables aléatoires.

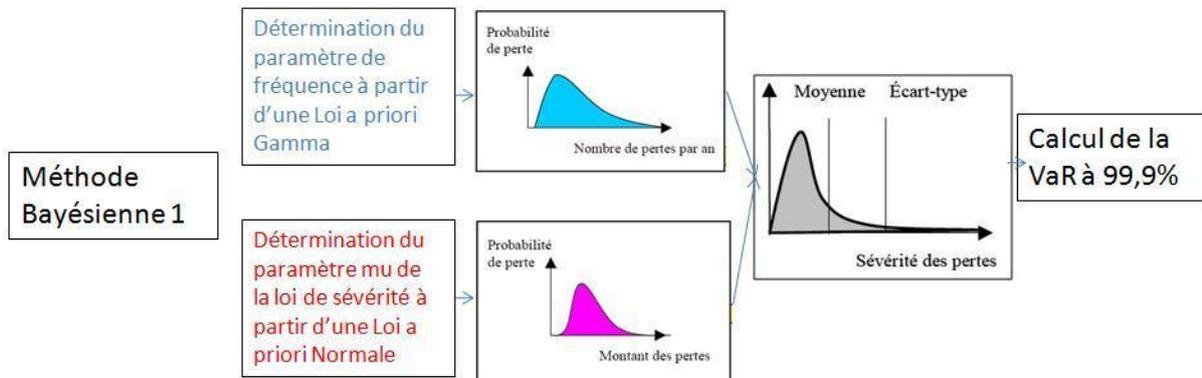


FIGURE 8 – Représentation schématique de la méthode bayésienne 1

On s'intéresse dans ce qui suit à calculer le capital requis dans le cas d'une maille, grâce à un historique de pertes internes ainsi que d'une analyse de scénario donnée par des experts. On effectue alors une approche fréquence/sévérité en modélisant la fréquence par une loi de Poisson et la sévérité par une loi log-normale. On envisage le calcul du capital au niveau de la maille considérée dans les quatre cas ci-dessous :

Fréquence \ Sévérité	μ et σ connus	μ inconnu et σ connu
	λ connu	K_{AS} et K_{PI}
λ inconnu	K_{mix1}	K_{mix3}

TABLE 1 – Présentation des différents cas des calculs de capital requis

4.1 Statistique bayésienne : rappels de base

On se place dans un espace probabilisé paramétrique classique : $X \in (\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta, \theta \in \Theta))$. \mathcal{X} désigne l'espace des données, Θ celui des paramètres. Le but de l'analyse statistique est d'effectuer de l'inférence sur Θ , c'est à dire de décrire un phénomène passé ou à venir dans un cadre probabiliste. L'idée centrale de la statistique bayésienne est de considérer le paramètre inconnu $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ comme aléatoire. L'espace des paramètres Θ est muni d'une probabilité Π tel que $(\Theta; \mathcal{A}; \Pi)$ est un espace probabilisé. θ suit une loi a priori Π et nous noterons $\theta \sim \Pi$. Π est appelée loi a priori. Intuitivement en termes informationnels, elle détermine ce qu'on sait et ce qu'on ne sait pas avant d'observer X .

Principe Considérons un vecteur d'observations $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (typiquement dans notre cas, un vecteur de sévérités de pertes ou de nombres de pertes annuelles) dont la densité, pour un vecteur de paramètres donnés θ , est $h(X|\theta)$. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les X_i sont indépendants conditionnellement à θ et identiquement distribués. Comme expliqué ci-dessus, à la fois les observations et les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires en statistique bayésienne. Par application du théorème de Bayes, on a donc :

$$h(X, \theta) = h(X|\theta)\Pi(\theta) = \hat{\Pi}(\theta|X)h(X)$$

où $\Pi(\theta)$ est la densité a priori du paramètre ; $\hat{\Pi}(\theta|X)$ est la densité du paramètre étant donné l'observation de \mathbf{X} et est appelée densité a posteriori ; $h(X, \theta)$ est la densité jointe des données observées et du paramètre ; $h(X|\Theta)$ est la densité des observations pour un paramètre donné ; enfin $h(X)$ est la densité marginale des observations. La distribution a posteriori peut donc s'écrire :

$$\hat{\Pi}(\theta|X) = \frac{h(X|\theta)\Pi(\theta)}{h(X)}$$

La distribution $h(X|\theta)$ est une fonction de vraisemblance des observations. $h(X)$ joue ici le rôle d'une constante de normalisation, la distribution a posteriori peut donc ainsi être vue comme le produit de la distribution a priori par la vraisemblance des observations. On parle ainsi d'"actualisation" par les observations de la distribution du paramètre.

Notre but, dans le cadre du risque opérationnel est d'estimer la distribution (fréquence ou sévérité) d'une observation future X_{n+1} conditionnellement à toute l'information disponible \mathbf{X} . En notant $f(X_{n+1}|X)$ la densité de X_{n+1} sachant \mathbf{X} , on a alors :

$$f(X_{n+1}|X) = \int f(X_{n+1}|\theta)\hat{\Pi}(\theta|X)d\theta$$

Nous allons dans cette partie ainsi que dans la suivante utiliser l'approche ci-dessous :

- La distribution a priori $\Pi(\theta)$ sera estimée à l'aide des analyses de scénario (données expertes)
- Puis cette dernière sera actualisée à l'aide des données observées (historique interne de pertes) afin d'obtenir la distribution a posteriori
- Enfin, on peut calculer des valeurs prédictives de valeurs de perte à l'aide de la formule précédente par Monte-Carlo

Lois conjuguées Dans le cadre de cette méthode, nous nous limitons aux lois conjuguées dans le choix des lois a priori de nos paramètres considérés comme aléatoires. Soit F la famille de densités $f(X|\theta)$, indexée par θ . Une famille U de lois a priori du paramètre $\pi(\theta)$ est dite conjuguée pour F si et seulement si la densité a posteriori $\hat{\pi}(\theta|X)$ appartient à U , pour tout $f \in F$ et tout $\pi \in U$. Autrement dit, on aboutit à une loi a posteriori appartenant à la même famille de densités que la loi a priori. Ainsi dans le cadre de nos calculs, pour la fréquence par exemple, les observations suivent une loi de *Poisson* de paramètre λ , et on est contraint d'utiliser une loi *Gamma* comme loi a priori pour ce dernier. En utilisant la formule $\hat{\Pi}(\theta|X) = \frac{h(X|\theta)\Pi(\theta)}{h(X)}$, on aboutit alors à une loi *Gamma* comme loi a posteriori, comme souhaité.⁹ L'utilisation de lois conjuguées a l'avantage de la simplicité et d'aboutir à des expressions analytiques dans les calculs des nouvelles lois a posteriori. En effet, l'utilisation de lois non conjuguées offre une plus grande liberté dans le choix de la loi a priori, mais le calcul de la loi a posteriori peut alors se révéler plus compliqué ou ne pas aboutir à une forme analytique simple. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques de simulation récentes et plus complexes¹⁰.

Choix du paramètre a posteriori Une fois que la loi a posteriori du paramètre aléatoire a été déterminée, il est nécessaire de sélectionner la valeur du paramètre qui sera retenue. Deux alternatives sont alors possibles. Soit on ne fixe pas ce paramètre et on commence donc à chaque fois par simuler la loi a posteriori. Soit on décide d'une valeur fixe pour ce paramètre. Deux méthodes sont alors envisageables :

- La méthode du maximum a posteriori : Soit $\Pi(\lambda|x)$, l'estimateur résultant de cette méthode est donc :

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmax} \Pi(\lambda|x)$$

- La méthode de l'erreur quadratique minimale : l'estimateur obtenu est donc :

$$\hat{\lambda} = \int \lambda \hat{\Pi}(\lambda|x) d\lambda = \mathbb{E}\lambda$$

Par la suite, le paramètre considéré comme aléatoire n'est pas fixé. Il est simulé à partir de la loi a posteriori.

4.2 Calcul de la loi a posteriori dans chacun des cas

4.2.1 Cas K_{mix1}

Il s'agit de la configuration dans laquelle les paramètres de la loi log-normale sont connus tandis que le paramètre λ de la loi de fréquence est considérée comme une variable aléatoire. On suppose que la loi a priori du paramètre λ est une loi $\text{Gamma}(a_0, b_0)$. On rappelle que la loi de fréquence utilisée à la Société Générale est une loi de Poisson de paramètre λ . Soit N le nombre de pertes annuelles liées au risque opérationnel dans la maille. On a donc $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. D'où :

$$P(N = n_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}$$

9. Conférer partie 4.2.1 pour le détail du calcul

10. Ce que nous ferons dans le cadre de la méthode bayésienne 2, conférer partie 4.

et λ a pour densité a priori

$$\Pi(\lambda|a_0, b_0) = \frac{\left(\frac{\lambda}{b_0}\right)^{a_0-1}}{\Gamma(a_0)b_0} e^{-\frac{\lambda}{b_0}}$$

La vraisemblance de la loi de Poisson est donc :

$$h(N|\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}$$

où n est la longueur de l'historiques de pertes, et n_i le nombre de pertes l'année i . On peut alors déterminer la loi a posteriori. En toute rigueur, on a ¹¹ :

$$\hat{\Pi}(\lambda|X) = \frac{h(X|\lambda)\Pi(\lambda)}{h(X)}$$

Mais comme expliqué en section 4.1, $h(X)$ joue le rôle d'une constante de normalisation. Et nous pouvons écrire seulement

$$\hat{\Pi}(\lambda|X) \propto h(X|\lambda)\Pi(\lambda)$$

où \propto veut dire "proportionnel à". Du fait qu'on utilise dans cette méthode des lois conjuguées, nous savons que l'on doit obtenir comme loi a posteriori une loi *Gamma*. Nous pouvons donc "ignorer" dans le calcul de la loi a posteriori $h(X)$ et procéder ensuite par identification. On a donc :

$$\hat{\Pi}(\lambda|a_0, b_0) \propto \Pi(\lambda|a_0, b_0)h(N|\lambda)$$

En remplaçant $\Pi(\lambda|a_0, b_0)$ et $h(N|\lambda)$ par leurs expressions ci-dessus, on a :

$$\hat{\Pi}(\lambda|a_0, b_0) \propto \frac{\left(\frac{\lambda}{b_0}\right)^{a_0-1}}{\Gamma(a_0)b_0} e^{-\frac{\lambda}{b_0}} \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}$$

En omettant les termes où λ n'apparaît pas, on a :

$$\hat{\Pi}(\lambda|a_0, b_0) \propto e^{-\lambda n} \lambda^{\sum_{i=1}^n n_i} \left(\frac{\lambda}{b_0}\right)^{a_0-1} e^{-\frac{\lambda}{b_0}}$$

Ce qui, pour reconnaître facilement une loi *Gamma*, peut se mettre sous la forme :

$$\hat{\Pi}(\lambda|a_0, b_0) \propto \left(\frac{\lambda}{b_0}\right)^{\sum_{i=1}^n n_i + a_0 - 1} e^{-\lambda(n + \frac{1}{b_0})}$$

On obtient donc par identification ¹² avec la densité d'une loi Gamma que λ **suit une loi a posteriori Gamma**(a_1, b_1), soit $\hat{\Pi}(\lambda|N) \sim G(a_1, b_1)$ telle que :

$$a_1 = \sum_{i=1}^n n_i + a_0$$

11. Cf. la partie 4.1 sur les rappels de statistique bayésienne pour les notations et la formule

12. Du fait de l'utilisation de lois conjuguées, nous savons en effet qu'on doit reconnaître la densité d'une loi Gamma comme loi a posteriori

et

$$b_1 = \frac{b_0}{(1 + nb_0)}$$

On a alors :

$$\mathbb{E}(\lambda) = a_1 b_1 = w\bar{N} + (1 - w)(a_0 b_0) = w\bar{N} + (1 - w)\mathbb{E}(\Pi(\lambda|a_0, b_0))$$

avec $w = \frac{n}{n + \frac{1}{b_0}}$. On observe que quand n est grand, w tend vers 1, c'est à dire que l'estimateur a posteriori s'appuie uniquement sur les observations. Au contraire quand n est petit, on a w qui tend vers 0, et λ s'appuie sur l'information a priori donnée par les experts. Ceci est intuitivement cohérent, quand on dispose d'un historique très important, on s'appuie davantage sur ce dernier.

4.2.2 Cas K_{mix2}

On rappelle que la loi de sévérité utilisée à la Société Générale est une loi Log-Normale de paramètres (μ, σ) . Soit X la sévérité d'une perte dans la maille. On a donc $X \sim \mathcal{L}_n(\mu, \sigma)$. Le cas K_{mix2} correspond à la configuration dans laquelle les paramètres λ de la loi de fréquence et σ de la loi de sévérité sont considérés comme connus tandis que le paramètre μ de la loi de sévérité est une variable aléatoire. On considère que $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \alpha_0^2)$ comme loi a priori, on a donc $\pi(\mu|\mu_0, \alpha_0^2) = \frac{1}{\alpha_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\alpha_0^2}}$.

Comme précédemment, en prenant $Y = \ln X$ ¹³, on calcule la loi a posteriori à une constante près :

$$\hat{\Pi}(\mu|\mu_0, \alpha_0^2) \propto \Pi(\mu|\mu_0, \alpha_0^2)h(Y|\mu, \sigma)$$

Comme Y suit une loi normale, on a

$$h(Y|\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

où n est le nombre total de pertes présentes dans l'historique et y_i le logarithme de la i -ème perte de l'historique, et en remplaçant $\Pi(\mu|\mu_0, \alpha_0^2)$ par son expression ci-dessus, on obtient :

$$\hat{\Pi}(\mu|Y) \propto \frac{e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\alpha_0^2}}}{\alpha_0\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Du fait de l'utilisation d'une loi a priori conjuguée, nous savons qu'on obtient comme loi a posteriori une loi Normale de paramètres (μ_1, α_1^2) , d'où :

$$\hat{\Pi}(\mu|Y) \propto e^{-\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\alpha_1^2}}$$

On trouve μ_1 et α_1^2 par identification des termes en μ^2 et 2μ :

$$\begin{cases} \mu^2 : \frac{1}{2\alpha_1^2} = \frac{1}{2\alpha_0^2} + \frac{n}{2\sigma^2} \\ 2\mu : \frac{\mu_1}{\alpha_1^2} = \frac{\mu_0}{\alpha_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sigma^2} \end{cases}$$

13. X suivant une loi log-normale, Y suit donc une loi normale de mêmes paramètres

On a alors μ qui suit une loi a posteriori $\mathcal{N}(\mu_1, \alpha_1)$, soit $\hat{\Pi}(\mu|X) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \alpha_1)$ avec

$$\mu_1 = \frac{\mu_0 + w \sum_{i=1}^n y_i}{1 + nw}$$

et

$$\alpha_1^2 = \frac{\alpha_0^2}{1 + nw}$$

avec $w = \frac{\alpha_0^2}{\sigma^2}$ et n le nombre total de pertes de notre historique, c'est à dire 199.

Quand $n \rightarrow 0$, on a $\mu_1 \rightarrow \mu_0$ et $\alpha_1^2 \rightarrow \alpha_0^2$. Ceci est cohérent, n tendant vers 0 signifie qu'on n'a peu de pertes dans notre historique, et on peut alors difficilement actualiser les paramètres de la loi a priori.

4.2.3 Cas K_{mix3}

En reprenant les notations des deux paragraphes précédents, il s'agit de la configuration dans laquelle seul le paramètre σ est connu. Les paramètres λ et μ sont aléatoires. Comme dans les cas K_{mix1} et K_{mix2} , on a λ qui suit une loi a priori $\text{Gamma}(a_0, b_0)$ et μ qui suit une loi $\mathcal{N}(\mu_0, \alpha_0^2)$. **Du fait de l'indépendance entre fréquence et sévérité, qui est une hypothèse du modèle, il est possible de calculer de manière indépendante les deux lois a posteriori et d'estimer indépendamment ces deux paramètres.** Les calculs des lois a posteriori de λ et μ se font donc comme spécifiés respectivement dans les cas K_{mix1} et K_{mix2} . Après actualisation par les pertes internes des lois a priori, on a¹⁴ :

$$\hat{\Pi}(\lambda|N) \sim G(a_1, b_1)$$

avec

$$a_1 = \sum_{i=1}^n n_i + a_0 \text{ et } b_1 = \frac{b_0}{(1 + nb_0)}$$

et

$$\hat{\Pi}(\mu|X) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \alpha_1)$$

avec

$$\mu_1 = \frac{\mu_0 + w \sum_{i=1}^n y_i}{1 + nw} \text{ et } \alpha_1^2 = \frac{\alpha_0^2}{1 + nw}$$

4.3 Algorithme de Monte-Carlo pour calculer les capitaux dans les cas bayésiens

Pour calculer nos montants de capitaux, une fois les paramètres déterministes et les lois a posteriori estimés, on utilise un algorithme s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo. On le détaille ici pour le cas K_{mix1} , où le paramètre λ suit une loi a priori $\text{Gamma}(a_0, b_0)$. Dans les autres cas, l'algorithme est très semblable. Seuls diffèrent les lois a posteriori à simuler. Les étapes clés supplémentaires par rapport au cas non bayésien correspondent aux étapes de simulation des paramètres considérés comme aléatoires.

14. Cf. les parties 4.2.1 et 4.2.2 pour le détail des calculs des lois a posteriori

- Etape 1 : à partir des paramètres estimés de la loi a posteriori $Gamma(a_1, b_1)$, on génère une valeur de λ
- Etape 2 : à partir de la valeur de λ générée, on simule un nombre de sinistres N suivant une loi de $Poisson(\lambda)$
- Etape 3 : à l'aide des paramètres estimés de la loi de sévérité, on simule N valeurs $X_{i=1\dots N}$ suivant une loi Log-Normale des paramètres estimés
- Etape 4 : on calcule $S = \sum_{i=1}^N X_i$
- Etape 5 : on répète les étapes 1 à 4 K fois afin d'obtenir K valeurs de S , c'est à dire une distribution de perte agrégée au niveau de la maille (j, k)
- Etape 6 : on calcule le quantile de S au niveau 99,9%

4.4 Détermination des paramètres a priori : cadre théorique

Lorsque tous les paramètres des lois de fréquence et de sévérité sont déterministes, nous avons vu que la méthode pour calculer la $VaR(99,9\%)$ est relativement simple. Le principal problème réside dans la détermination des lois a priori des paramètres des lois de fréquence et de sévérité considérés comme aléatoires et dans le choix des paramètres des lois a priori. La littérature propose certaines solutions afin de résoudre ce problème.¹⁵ Nous considérons la situation dans laquelle la loi a priori de θ , $\pi(\theta)$, est déterminée de manière subjective et où l'ensemble Θ est continu.

4.4.1 L'approche de l'histogramme

Lorsque Θ est un intervalle de l'ensemble des réels, la manière la plus appropriée pour déterminer la loi a priori repose sur l'approche de l'histogramme. Cette méthode consiste à diviser l'ensemble Θ en plusieurs intervalles et à déterminer la probabilité correspondant à chacun d'entre-eux. On peut ensuite en déduire l'histogramme des probabilités. En s'appuyant sur cet histogramme, il est possible de déterminer la loi a priori qui correspond le mieux à l'histogramme.

Toutefois, il n'existe pas de règle clairement établie afin de déterminer le nombre d'intervalles, la taille des intervalles... Tout cela dépend du niveau de robustesse souhaitant être atteint. D'autres problèmes résultent de cette approche. D'une part, elle conduit à des lois a priori avec lesquelles il peut parfois être difficile de travailler. D'autre part, cette densité de probabilité n'a pas de queues de distributions. Ces différentes lacunes peuvent expliquer pourquoi cette méthode n'est pas la plus utilisée en pratique.

4.4.2 La détermination CDF (*cumulative distribution function* - fonction de répartition)

Une autre méthode consiste à déterminer subjectivement la fonction de répartition. Cela peut être réalisé en déterminant différents quantiles $q(\alpha)$ et en représentant le couple $(q(\alpha), \alpha)$ pour différentes valeurs de α . En reliant ces différents points, on obtient alors la fonction de répartition subjective.

15. Cette partie s'appuie sur l'ouvrage de J. Berger [3]

4.4.3 L'approche de la vraisemblance relative

Cette approche présente un intérêt lorsque Θ est un sous-ensemble de \mathbb{R} . Cette méthode consiste simplement à comparer les vraisemblances intuitives de différents points de Θ et d'en déduire une densité a priori. La présentation d'un exemple est nécessaire afin de rendre cette méthode plus compréhensible.

Exemple

Soit $\Theta=[0;1]$. Il faut commencer par déterminer la vraisemblance relative entre la valeur de paramètre la plus vraisemblable et celle la moins vraisemblable. Supposons que la valeur de $\theta = \frac{1}{2}$ est la plus vraisemblable et que la valeur de $\theta=0$ est la moins vraisemblable. On suppose en outre que $\theta = \frac{1}{2}$ est quatre fois plus vraisemblable que $\theta=0$. On complète ensuite cette analyse par la détermination de la vraisemblance d'autres valeurs de θ . Cela peut être fait par rapport à $\theta=0$ par souci de simplicité. Supposons par exemple que $\theta = \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sont trois fois plus vraisemblables que $\theta = 0$ et que $\theta = 1$ est 1.5 fois plus vraisemblable que $\theta = 0$. En choisissant une densité de 1 en $\theta = 0$, on obtient le graphique suivant :

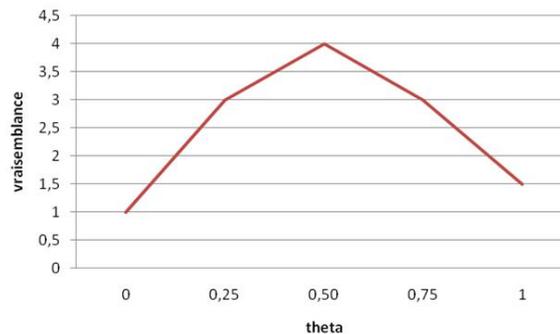


FIGURE 9 – Méthode de la vraisemblance relative

On observe facilement que l'intégrale de cette densité n'est pas égale 1. Il est donc possible de déterminer la constante c telle que $c\pi(\theta)$ soit une fonction respectant les propriétés d'une densité. Cela n'est toutefois pas nécessaire en pratique pour déterminer la loi a posteriori. On peut donc choisir indifféremment $\pi(\theta)$ ou $c\pi(\theta)$.

4.4.4 L'approche s'appuyant sur une loi a priori donnée

Cette approche est la plus utilisée pour déterminer la densité a priori. Elle consiste à choisir la loi de la densité a priori et à calculer les paramètres de cette loi a priori. Plusieurs méthodes existent afin de calculer ces paramètres.

Tout d'abord, il est possible de calculer les paramètres a priori en s'appuyant sur les moments. Le principal problème réside dans l'estimation des moments. En effet, les queues de distribution peuvent avoir des effets non négligeables sur les moments.

Une seconde méthode consiste à estimer les quantiles de la distribution a priori, puis à choisir les paramètres de la loi a priori de manière à respecter les contraintes résultant

des quantiles. D'après Berger, cette approche semble plus attrayante que celle s'appuyant sur les moments pour déterminer les paramètres de la loi a priori. En outre, l'existence de nombreuses tables de quantiles pour les lois les plus fréquentes peut inciter à choisir cette méthode.

Pour choisir cette stratégie, il est toutefois nécessaire d'estimer sur quelle loi a priori il est possible de s'appuyer. Elle a néanmoins l'avantage d'être utilisable quand l'information a priori disponible est limitée.

Compte-tenu de l'information à notre disposition, en particulier la loi a priori est ici imposée du fait de l'utilisation de lois conjuguées, nous nous proposons donc d'implémenter cette dernière méthode sur nos données et d'en déduire le montant de capital réglementaire requis pour chacune des configurations (K_{Mix1} , K_{Mix2} , K_{Mix3}) présentée précédemment.

4.5 Calcul des montants de capitaux

Nous présentons ici la manière de calculer les paramètres a priori en s'appuyant sur la méthode consistant à choisir la forme de la loi a priori. Les paramètres de la loi a priori peuvent alors être obtenus en s'appuyant sur l'information fournie par les moments et les quantiles, c'est à dire en utilisant la dernière méthode proposée dans la section précédente¹⁶.

4.5.1 Calcul de K_{mix1}

Comme cela a déjà été souligné, il s'agit de la configuration dans laquelle le paramètre λ de la loi de fréquence est aléatoire et les autres paramètres sont déterministes. Par ailleurs, la loi a priori de λ , $\pi(\lambda|a_0, b_0)$, est une loi gamma (Gamma (a_0, b_0)). Rappelons que la loi de fréquence retenue à la Société Générale est une loi de Poisson. Soit N le nombre de pertes annuelles, cela implique donc que $E[N|\lambda] = \lambda$ et que $E[\lambda] = a_0 b_0$. Si on est, en outre, capable de déterminer les paramètres a , b et p tels que $P[a \leq \lambda \leq b] = p$ alors on peut en déduire le système de deux équations à deux inconnus suivant :

$$E[\lambda] = a_0 b_0$$

$$P[a \leq \lambda \leq b] = p = \int_a^b \pi(\lambda|a_0, b_0) d\lambda = F_{a_0, b_0}^{(G)}[b] - F_{a_0, b_0}^{(G)}[a],$$

où $F_{a_0, b_0}^{(G)}[]$ est la fonction de répartition de la loi Gamma (a_0, b_0). Ces deux équations peuvent se résoudre numériquement afin d'obtenir les paramètres a_0 et b_0 .

Une fois ces paramètres a priori déterminés, nous pouvons en déduire les paramètres de la loi a posteriori $Gamma(a_1, b_1)$ qui découlent des formules suivantes, démontrées précédemment page 38 :

$$a_1 = \sum_{i=1}^n n_i + a_0$$

16. Se référer à la section 4.4.4

et

$$b_1 = \frac{b_0}{(1 + nb_0)}$$

Après calcul des paramètres a posteriori, nous pouvons calculer le montant de capital associé au risque opérationnel par méthode de Monte-Carlo (Cf. page 40).

Applications numériques à nos données

Concernant nos données, $E[\lambda]$ est estimé par la valeur donnée par les experts, à savoir 6,21, on a donc $E[\lambda] = a_0 b_0 = 6,21$. De plus, les experts ont fourni $P[a \leq \lambda \leq b] = 0,9$ avec les valeurs $a = 3$ et $b = 11$. Nous en déduisons donc les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} E[\lambda] &= a_0 b_0 = 6,21 \\ P[3 \leq \lambda \leq 11] &= F_{a_0, b_0}^{(G)}[11] - F_{a_0, b_0}^{(G)}[3] = 0,9 \end{aligned}$$

Ces deux équations, résolues grâce au solveur excel, permettent d'obtenir les paramètres a priori suivants : $a_0 = 6,72$ et $b_0 = 0,92$

On en déduit donc que la loi a priori de λ est une loi $Gamma(6,72; 0,92)$. Or nous avons vu précédemment, qu'en présence d'une loi de Poisson de paramètre λ , la loi a posteriori de λ est une loi Gamma de paramètres a_1, b_1 .

On a d'après les formules ci-dessus $a_1 = 205,72$ et $b_1 = 0,09$ Par conséquent, la loi a posteriori de λ est une loi $Gamma(205,72; 0,09)$.

Afin de déterminer le montant de capital, on commence par simuler la loi a posteriori de λ , puis en procédant par simulation, on en déduit que la $VaR(99,9\%)$ calculée à partir de cette méthode s'élève à :

$$K_{mix1} = 138\,758 \text{ €}$$

4.5.2 Calcul de K_{mix2}

Nous rappelons qu'il s'agit de la configuration dans laquelle les paramètres λ de la loi de Poisson et le paramètre σ de la log-normale sont connus et le paramètre μ de la log-normale est une variable aléatoire. En outre, la loi a priori de μ est une loi normale ($\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0)$). Or, la distribution de pertes X est une loi log-normale, on a donc $E[X|\mu, \sigma] = M(\mu, \sigma) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$. De plus, $M(\mu, \sigma)$ suit une loi log-normale($LN(\mu_0 + \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma_0)$). Comme précédemment, si on est capable de déterminer les paramètres a et b tels que $P[a \leq M \leq b] = p$, alors il est possible d'obtenir un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} E[M] &= \exp(\mu_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma_0^2) \\ P[a \leq M \leq b] &= p = \Phi\left[\frac{\ln b - \frac{1}{2}\sigma^2 - \mu_0}{\sigma_0}\right] - \Phi\left[\frac{\ln a - \frac{1}{2}\sigma^2 - \mu_0}{\sigma_0}\right], \end{aligned}$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

A nouveau, ce système peut être résolu numériquement afin d'obtenir la valeur de μ_0 et σ_0 .

Applications numériques à nos données

Concernant les données, $E[M]$ est obtenu en calculant la moyenne des pertes à partir de l'histogramme fourni par les experts. Rappelons que cet histogramme fournit une probabilité pour chaque intervalle de perte (Cf. page 30). La valeur estimée s'élève à 11 512 €. A partir de l'analyse de scénario fournie par les experts, on peut déterminer a et b de manière à ce que $P[a \leq M \leq b] = p$. Nous obtenons une valeur de a égale 1, une valeur de b égale à 208 333 pour une valeur de p de 0,995. En effet l'analyse de scénario indique que seules 0.5% des pertes ont une sévérité supérieure à 208 333 €. Nous obtenons donc le système suivant :

$$E[M] = \exp(\mu_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma_0^2) = 11512$$

$$P[1 \leq M \leq 208333] = \Phi\left[\frac{\ln 208333 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \mu_0}{\sigma_0}\right] - \Phi\left[\frac{\ln 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 - \mu_0}{\sigma_0}\right] = 0.995$$

La résolution de ces deux équations, grâce au solveur excel, permet d'obtenir les paramètres a priori suivants :

$$\boxed{\mu_0 = 5,5 \text{ et } \sigma_0 = 2,3}$$

On en déduit donc que la loi a priori de μ est une loi normale $\mathcal{N}(5,5;5,3)$. Or nous avons vu précédemment, qu'en présence d'une loi log-normale de paramètres μ, σ^2 , la loi a posteriori de μ est une loi normale de paramètres μ_1, σ_1^2 .

D'après les formules page 40, on a donc

$$\boxed{\mu_1 = 5,63}$$

et

$$\boxed{\sigma_1 = 0,11}$$

Par conséquent, la loi a posteriori de μ est une loi normale $\mathcal{N}(5,63;0,01)$.

Afin de déterminer le montant de capital, il est nécessaire de simuler la loi a posteriori de μ , ce qui permet ensuite de disposer de tous les paramètres des lois de fréquence et de sévérité. Suite aux différentes simulations, on en déduit que la VaR(99,9%) calculée à partir de cette méthode s'élève à

$$\boxed{K_{mix2} = 142\,593 \text{ €}}$$

4.5.3 Calcul de K_{mix3}

Rappelons qu'il s'agit de la configuration dans laquelle seul le paramètre σ est fixé. Les paramètres λ et μ sont quant à eux considérés comme aléatoires. En s'appuyant sur l'hypothèse d'indépendance entre la fréquence et la sévérité, on peut en déduire facilement le montant de capital K_{mix3} en combinant les résultats obtenus pour les lois a priori dans les configurations de K_{mix1} et K_{mix2} .

Applications numériques à nos données

Pour le paramètre λ , nous reprenons les résultats obtenus pour le calcul de K_{mix1} . La loi a posteriori paramètre λ est donc une loi gamma : $Gamma(205, 72; 0, 09)$.

De même, pour le paramètre μ , nous reprenons les résultats obtenus lors du calcul de K_{mix2} . La loi a posteriori du paramètre μ est donc une loi normale : $\mathcal{N}(5, 63; 0, 01)$.

En simulant les deux lois obtenues, tous les paramètres des lois de fréquence et de sévérité sont alors déterminés, ce qui rend possible l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo afin de déterminer le montant de capital requis pour la maille considérée dans cette configuration. La VaR(99,9%) obtenue s'élève à

$$K_{mix3} = 138\,519 \text{ €}$$

4.5.4 Seconde méthode de détermination des paramètres a priori

Pour déterminer les paramètres de la loi a priori, on peut utiliser une méthode des moments adaptée au cadre bayésien. Il s'agit de faire correspondre la moyenne théorique et la variance théorique du nombre N ou de la sévérité X des sinistres, dépendant des paramètres de la loi a priori choisie, avec les valeurs empiriques fournies par les experts. Cette méthode est ici présentée uniquement de manière théorique, car nous ne disposons pas des informations des experts nécessaires à son application.

Méthode des moments dans le cas K_{mix1}

Dans le cas K_{mix1} , la fréquence annuelle pour les pertes liées au risque opérationnel N est modélisée par une distribution de Poisson, $Poisson(\lambda)$, et la loi a priori $\Pi(\lambda|a_0, b_0)$ de λ est une $Gamma(a_0, b_0)$. D'où¹⁷ :

$$E(N) = E(E(N|\lambda)) = E(\lambda) = a_0 b_0$$

$$V(N) = E(V(N|\lambda)) + V(E(N|\lambda)) = E(\lambda) + V(\lambda) = a_0 b_0 + a_0 b_0^2$$

Si les experts spécifient $E(\lambda)$ et une incertitude sur la valeur de λ , on peut alors résoudre le système d'équations ci-dessus pour trouver les valeurs a_0 et b_0 de la loi a priori. Une fois ces derniers déterminés, on utilise la même démarche que celle présentée au 4.5.1.

Méthode des moments dans le cas K_{mix2}

Dans le cas K_{mix2} , la sévérité X des pertes dues au risque opérationnel est modélisée par une loi Log-Normale, $LN(\mu, \sigma^2)$, μ suit comme loi a priori une loi Normale, $\mathcal{N}(\mu_0, \alpha_0^2)$, tandis que σ est déterministe. On a donc¹⁸ :

17. On rappelle qu'une loi $Gamma(a_0, b_0)$ a pour espérance $a_0 b_0$ et comme variance $a_0 b_0^2$

18. On utilise le fait qu'une loi $LN(\mu, \sigma^2)$ a pour espérance $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ et comme variance $e^{(\sigma^2 - 1)} e^{2\mu + \sigma^2}$ et on rappelle également le résultat classique suivant qu'on est amené à utiliser : $E(e^X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(E(X|\mu)) = E(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}) = e^{\mu_0 + \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} \\
V(X) &= E(V(X|\mu)) + V(E(X|\mu)) = E((e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}) + V(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}) \\
&= (e^{\sigma^2} - 1)e^{\sigma^2} E(e^{2\mu}) + e^{\sigma^2} V(e^{\mu}) = e^{2\sigma^2 + 2\mu_0 + 2\alpha_0^2} - e^{2\sigma^2 + 2\mu_0 + \alpha_0^2}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, cette méthode est applicable à condition de disposer d'une espérance et d'une variance de sévérité de pertes fournie par les experts, auquel cas on peut de nouveau résoudre le système d'équations précédent pour obtenir les paramètres a priori de la loi Normale. On applique ensuite la démarche présentée en 4.5.2.

Méthode des moments dans le cas K_{mix3}

Comme vu précédemment, le calcul de K_{mix3} est un assemblage des calculs de K_{mix1} et K_{mix2} . Il s'agit de la configuration où σ est déterministe, μ suit comme loi a priori une loi Normale, $\mathcal{N}(\mu_0, \alpha_0^2)$ et la loi a priori de λ , $\Pi(\lambda|a_0, b_0)$ est une *Gamma*(a_0, b_0). Du fait de l'indépendance entre sévérité et fréquence supposée dans le modèle, ce cas est une superposition des cas K_{mix1} et K_{mix2} .

4.6 Sensibilité aux paramètres a priori

Dans la section précédente, nous avons déterminé les montants de capitaux réglementaires en s'appuyant sur certaines hypothèses concernant les lois a priori. Afin de compléter ces premiers calculs, il semble intéressant de poursuivre par différentes analyses de sensibilité. Nous cherchons donc à déterminer la sensibilité de la VaR(99,9%) aux variations de valeur des paramètres a priori.

4.6.1 Cas K_{Mix1}

Nous rappelons que la loi a priori de λ est une loi gamma(a_0, b_0). La valeur de a_0 calculée dans la partie 4.5.1 s'élève à 6,72. Nous cherchons donc à déterminer la sensibilité de K_{Mix1} aux variations de valeur de a_0 . Nous nous intéressons donc à l'intervalle [4;9] avec un pas de 0,1.

Les résultats, présentés dans la figure 10, suggèrent que le capital réglementaire n'est absolument pas sensible à la valeur retenue pour le paramètre a priori a_0 . La même analyse a été effectuée pour le paramètre b_0 . Dans la partie 4.5.1, nous avons estimé une valeur de b_0 égale à 0,92. Nous avons donc cherché à déterminer la sensibilité de la VaR(99,9%) pour b_0 variant de [0,5;1,5]. A nouveau, nous n'observons aucune sensibilité du capital réglementaire à la valeur de b_0 .

4.6.2 Cas K_{Mix2}

La loi a priori de μ est une loi $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0)$. La valeur de μ_0 calculée dans la partie 4.5.2 s'élève à 5,5. Nous avons donc réalisé une analyse de sensibilité de la VaR(99,9 %) pour b_0 compris dans l'intervalle [3;8] avec un pas de 0,1. A nouveau, nous observons l'absence de sensibilité de K_{Mix2} au paramètre μ_0 . Ces résultats sont présentés dans la figure 11.

L'analyse de sensibilité a également été effectuée pour le paramètre σ_0 . Dans la partie 4.5.2, la valeur de σ_0 a été estimée à 2,3. Nous avons donc effectué une analyse de sensibilité

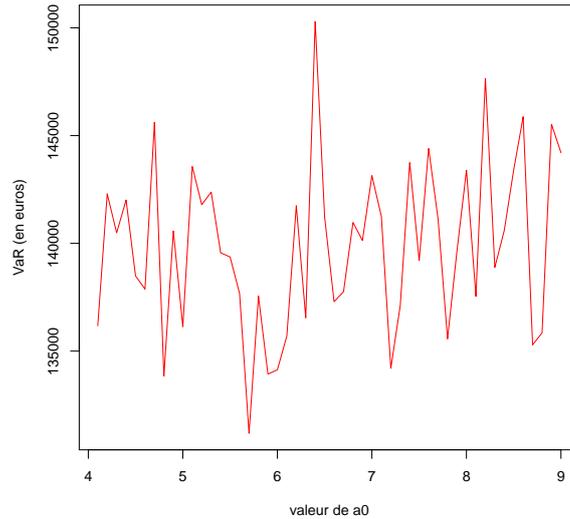


FIGURE 10 – Evolution du capital en fonction de a_0 variant entre 4 et 9

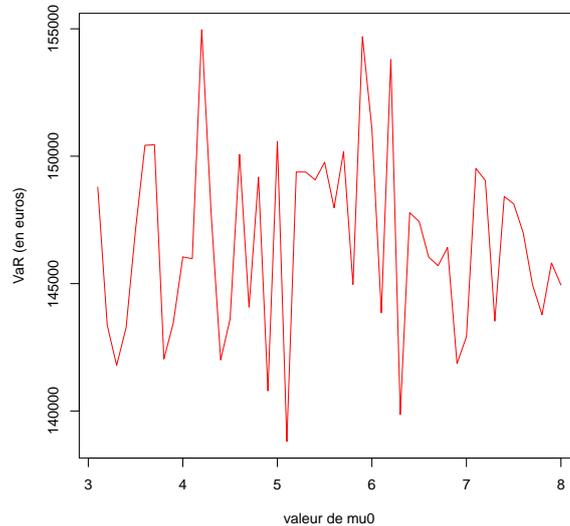


FIGURE 11 – Evolution du capital en fonction de μ_0 variant entre 3 et 8

du capital pour une valeur de σ_0 comprise dans l'intervalle $[1,5;3]$. Aucune sensibilité n'est observée.

L'analyse de sensibilité à ces différents paramètres a également été effectuée pour K_{Mix3} . A nouveau, nous n'observons pas de sensibilité du capital aux différents paramètres.

4.7 Intervalles de confiance

4.7.1 Approche théorique

Maintenant que l'on a calculé nos montants de capitaux, il est également important de s'intéresser à l'incertitude de ces montants et de proposer des intervalles de confiance. En effet, on aimerait savoir quelle configuration offre les intervalles de confiance les plus petits, et si ceux-ci ont tendance à croître en rajoutant de l'aléatoire ou non, c'est à dire si les intervalles de confiance pour K_{mix3} sont supérieurs à ceux de K_{mix1} et K_{mix2} .

Nous avons lors du calcul d'un capital dans un cas donné n valeurs de $S = \sum_{i=1}^N X_i$ où N suit une loi de Poisson et X une loi Log-Normale. Comme nous l'avons déjà expliqué, on ne peut obtenir de forme analytique pour la densité de S . On est amené à utiliser des méthodes de simulation pour obtenir le quantile de S qui nous intéresse. La densité de S étant inconnue, nous sommes amenés à utiliser la proposition suivante pour le calcul des intervalles de confiance.

Proposition¹⁹ : Soit $p \in]0,1[$. Soit a_α le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère les entiers $i_n = [np - \sqrt{na_\alpha}\sqrt{p(1-p)}]$ et $j_n = [np + \sqrt{na_\alpha}\sqrt{p(1-p)}]$. Pour n assez grand, les entiers i_n et j_n sont compris entre 1 et n . De plus l'intervalle aléatoire $[X_{(i_n,n)}, X_{(j_n,n)}]$ est un intervalle de confiance pour x_p de niveau asymptotique $1-\alpha$.

4.7.2 Résultats numériques

Pour déterminer les bornes de l'intervalle, on s'appuie sur la distribution de pertes obtenue par simulation de Monte-Carlo. On classe les pertes par ordre croissant. Dans cette distribution de pertes classées, la perte i_n constitue alors la borne inférieure de l'intervalle de confiance et la perte j_n constitue la borne supérieure de l'intervalle de confiance.

En pratique, l'obtention d'un intervalle de confiance pour chaque montant de capital calculé consiste donc d'abord à déterminer les entiers i_n et j_n . Le nombre n correspond donc au nombre de simulations réalisées lors de la procédure de Monte-Carlo. Par ailleurs, nous calculons des intervalles de confiance pour un niveau $1-\alpha$ égal à 95%. Le quantile q_α est donc égal à 1,96. A partir de ces différents éléments, on peut en déduire i_n et j_n .

Maille1	VaR(99,9%)	Borne inférieure	Borne supérieure	Taille de l'intervalle
K_{PI}	147 804	140 275	160 380	20 104
K_{mix1}	138 758	131 803	150 423	18 617
K_{mix2}	142 593	133 818	152 299	18 481
K_{mix3}	138 519	131 334	146 715	15 381

TABLE 2 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €)

Les intervalles de confiance sont d'une taille relativement comparable. L'ajout de variabilité ne semble pas accroître la taille des intervalles de confiance. En effet, la configuration K_{Mix3} est celle dénombrant le plus de variables aléatoires. Il s'agit également de la configuration présentant l'intervalle de confiance le plus petit dans notre étude.

4.8 Comparaison des méthodes

Les résultats présentés dans les parties précédentes soulignent une forte proximité entre K_{PI} , K_{Mix1} , K_{Mix2} et K_{Mix3} . Nous proposons donc dans cette partie de comparer les résultats en ne se restreignant plus seulement à la VaR(99,9%). Grâce à quatre graphiques,

19. La proposition ainsi que sa démonstration peuvent être retrouvés par exemple dans le cours de Jean-François Delmas donné à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

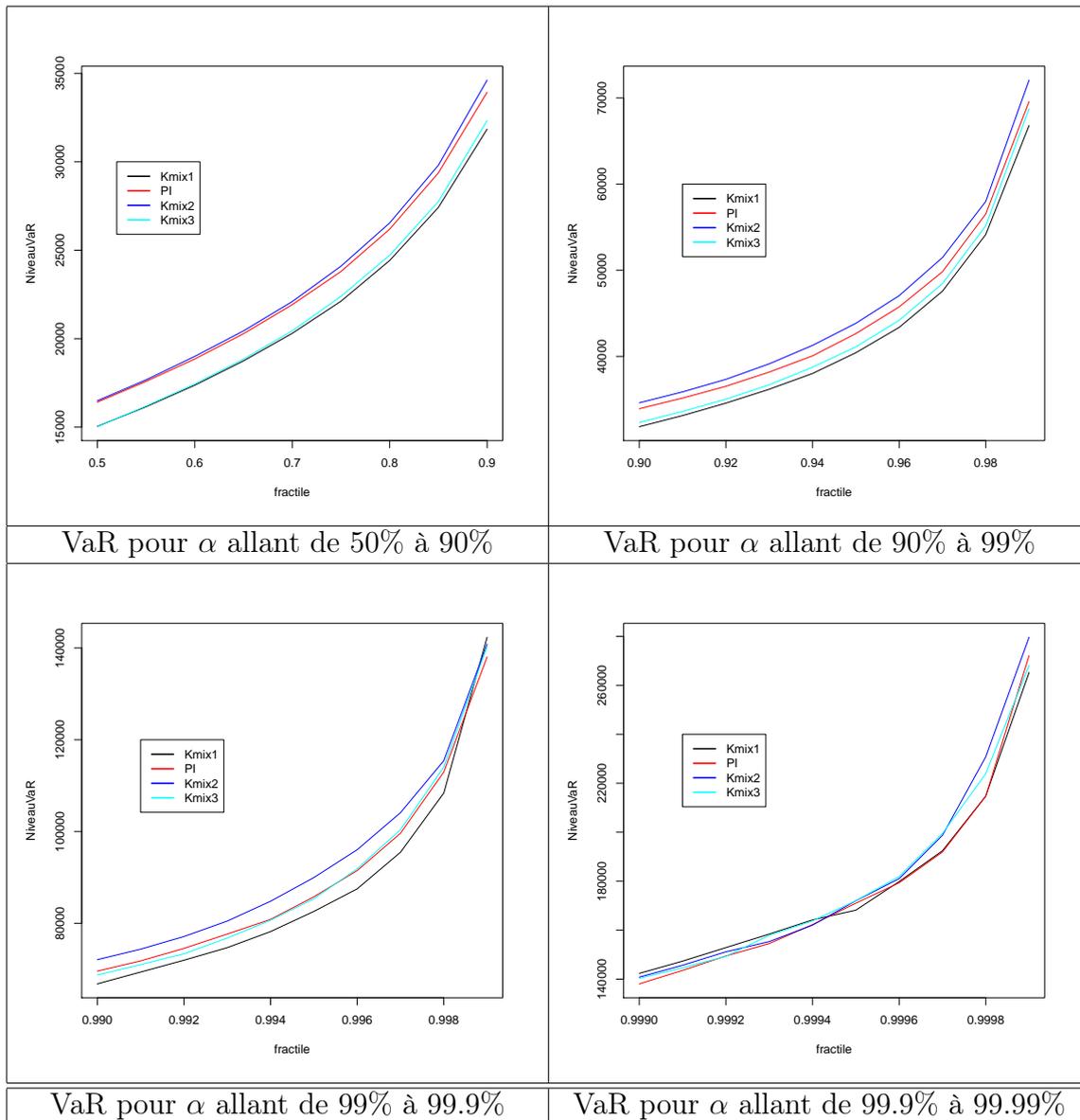


TABLE 3 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, et la méthode bayésienne 1 pour différents niveaux de fractiles alpha

nous cherchons à observer les évolutions des quantiles tant au niveau du corps de la distribution qu'au niveau des queues de distribution.

Les graphiques soulignent que si certaines disparités s'observent au niveau du corps de la distribution, celles-ci tendent à s'estomper lorsqu'on observe les queues de distribution. Ainsi au niveau de la $VaR(99,9\%)$, les courbes tendent même à se rejoindre. Dans le cadre de la méthode bayésienne 1, le capital réglementaire semble peu sensible aux différentes hypothèses retenues et converge vers K_{PI} , pour la maille considérée.

Cela peut s'observer de manière analytique. En effet, les résultats a posteriori résultent d'un arbitrage entre la confiance accordée aux données et celle accordée aux paramètres a priori. La proximité des résultats provient du poids majoritaire accordé aux données de pertes internes.

Pour K_{mix1} , cette similarité entre les lambda s'explique par le poids très important accordé à la moyenne du nombre de pertes. En effet :

$$E[\lambda|N] = a_1 b_1 = w \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} + (1-w)\lambda_0$$

Or $\lambda_0 = a_0 b_0$ et $w = \frac{n}{n+\frac{1}{b_0}}$. Comme n , le nombre d'années, est égal à 9,5 et b_0 est égal à 0,92, on observe que w s'élève à 0,9 pour la méthode s'appuyant sur une loi donnée. Par conséquent, on accorde un poids significativement plus élevé aux données internes qu'à l'information fournie par les experts. On retombe donc sur une configuration proche de celle de K_{PI} , puisque seul le paramètre λ diffère entre le calcul de K_{PI} et celui de K_{Mix1} .

On peut également remarquer une forte ressemblance entre les résultats obtenus pour K_{PI} et K_{Mix2} pour le paramètre μ . Encore une fois, cela s'observe analytiquement au niveau du poids accordé aux données internes. Cela se vérifie grâce à l'égalité suivante :

$$E[\mu|X] = \mu_1 = w \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} + (1-w)\mu_0$$

Où Y_i est le logarithme de la perte i , et $w = \frac{n}{n+\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$.

Rappelons que n est le nombre total de pertes, σ^2 est la variance de la loi log-normale et σ_0^2 est la variance de la loi normale a priori. On observe donc que μ_1 correspond à une moyenne pondérée entre l'information fournie par les données, égale à la moyenne du logarithme des pertes, et l'information a priori. En reprenant les données utilisées pour la méthode s'appuyant sur une loi donnée, on obtient un w égal à 0,998. On n'accorde donc pratiquement aucune attention à l'information fournie par les experts. Ainsi, μ_1 est presque égal au μ obtenu par maximum de vraisemblance. La variance de la loi a posteriori de μ étant faible, les μ tirés sont proches de la moyenne. Par conséquent, les résultats obtenus pour K_{Mix2} sont sensiblement égaux aux résultats obtenus pour K_{PI} .

La configuration K_{Mix3} , qui utilise à la fois la loi a posteriori de lambda obtenue dans le cas K_{Mix1} et la loi a posteriori de mu obtenue dans le cas K_{Mix2} , donne à nouveau des résultats très proches de ceux obtenus dans la configuration K_{PI} . Cela découle des deux remarques ci-dessus.

4.9 Avantages et limites de l'approche bayésienne étudiée

A l'aide de cette méthode, nous avons pu déterminer un unique montant de capital réglementaire à l'aide d'inférence bayésienne. Nous nous sommes appuyés sur des lois a priori conjuguées pour les différents paramètres considérés comme aléatoires des lois de fréquence et de sévérité des pertes de la maille. L'information issue des experts a permis de déterminer les différents paramètres des lois a priori utilisées. Puis, les lois a priori ont été actualisées à partir de l'historique des pertes internes à la banque afin d'obtenir des lois a posteriori. Cette approche a l'avantage de reposer sur des calculs numériques simples, notamment grâce à l'utilisation de lois conjuguées permettant d'obtenir des formules explicites pour la mise à jour. En effet, une fois les paramètres a priori déterminés, les paramètres des lois a posteriori peuvent être obtenus par des formules analytiques très

simples. De plus, le calcul peut s'effectuer de manière récursive. Effectivement, si l'on a calculé le montant de capital réglementaire l'année i à l'aide de cette méthode en s'appuyant sur un historique d'une longueur de k années, on peut facilement en déduire le montant de capital réglementaire pour l'année $i + 1$ en actualisant les résultats de l'année précédente par les observations de l'année $i + 1$. On a ainsi pour l'année $i + 1$ la distribution a posteriori suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_{i+1}(\theta|X_1\dots X_{k+1}) &\propto \Pi(\theta) \prod_{j=1}^{k+1} f(X_j|\theta) \\ &\propto \hat{\Pi}_k(\theta|X_1\dots X_k) f(X_{k+1}|\theta)\end{aligned}$$

La distribution a posteriori calculée après k années d'historique peut être utilisée comme loi a priori dans le calcul de la loi a posteriori après $k+1$ années d'historique²⁰. On actualise seulement grâce aux données de la dernière année.

Bien que très intéressante, la mise en place de cette approche nécessite un coût d'entrée non négligeable. En effet, l'information apportée actuellement par les experts n'est pas en adéquation avec nos besoins pour déterminer les paramètres a priori. L'information concernant la fréquence est tout d'abord trop limitée. Pour les données AS comme pour les données PI, nous ne disposons que de l'espérance du nombre de pertes. Il paraît donc difficile d'obtenir la distribution du paramètre λ à partir de cette seule information. Pour la distribution de la sévérité, certaines informations sont particulièrement difficiles à obtenir, comme les coefficients a et b , et la probabilité p telle que $P[a \leq M \leq b] = p$ dans la configuration K_{mix2} . En outre, les experts ne peuvent pas apporter directement les valeurs des paramètres a priori comme cela serait souhaitable dans une telle approche, car les paramètres des lois a priori n'ont pas de sens bancaire et ne sont donc pas des données facilement compréhensibles par ceux-ci. Compte tenu de ces difficultés, nous nous proposons d'étudier une seconde méthode bayésienne qui ne part plus initialement de l'information des experts mais d'une loi non informative. Cela nous permet d'échapper au problème de détermination des paramètres a priori.

20. A condition que les Analyses de scénario ne soient pas mises à jour

5 Méthode bayésienne 2

L'utilisation de cette méthode vise à résoudre les problèmes liés à la détermination de la loi a priori et de ses hyperparamètres. Nous appliquons cette méthode dans deux cadres différents. Tout d'abord, nous considérons le cas où les paramètres μ de la loi de sévérité et λ de la loi de fréquence sont aléatoires, et le paramètre σ est connu et nous cherchons à déterminer la loi a posteriori des paramètres μ et λ . Puis, nous répétons cette approche en considérant les paramètres μ , λ et σ comme aléatoires. Comme précédemment, les lois a posteriori des paramètres aléatoires sont utilisées pour déterminer l'ensemble des paramètres des lois de fréquence et de sévérité. Quels que soient les paramètres considérés comme inconnus, cette approche repose sur plusieurs étapes importantes. Pour déterminer par exemple le paramètre μ , il faut tout d'abord commencer par choisir une loi a priori non informative $\pi_0(\mu)$. Puis, nous cherchons à simuler des données de pertes à partir de l'histogramme fourni par les experts. Cela, nous conduit à déterminer une première loi a posteriori $\pi_0(\mu|x)$. Cette loi correspond à notre nouvelle loi a priori $\pi_1(\mu|x)$. Nous utilisons alors les méthodes MCMC (Markov Chain Monte Carlo) afin d'en déduire une distribution du paramètre μ de loi $\pi_1(\mu|x, y)$, obtenue en s'appuyant sur les données PI. Nous nous proposons tout d'abord de détailler ci-dessous ces différentes étapes, de manière théorique, dans le cas où seuls les paramètres μ et λ sont inconnus. Puis, dans un second temps, nous présenterons les différents résultats numériques obtenus pour chacune des configurations étudiées.

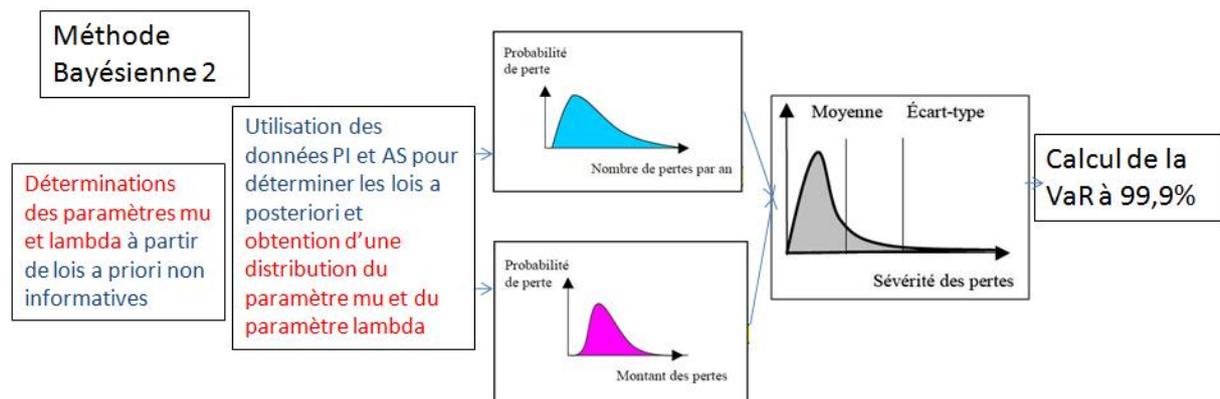


FIGURE 12 – Représentation schématique de la méthode bayésienne 2

5.1 Loi a priori non informative

Nous avons souligné dans la section 4.10 qu'il peut être difficile d'obtenir l'information permettant de déterminer une loi a priori et les paramètres a priori. Pour faire face à cette difficulté, une seconde méthode est envisagée ici. Composée de quatre étapes, cette méthode consiste tout d'abord à choisir une loi a priori non informative.²¹

Lorsque l'information sur le paramètre θ est trop limitée et lorsqu'on souhaite toutefois avoir recours à la statistique bayésienne, il peut être intéressant d'avoir recours aux lois a priori non informatives. On parle également de loi par défaut, de loi objective car cette démarche est utilisée lorsque l'information a priori est indisponible ou lorsqu'on ne veut

21. Cette partie s'appuie sur les travaux de C. Robert [25]

pas influencer les résultats par le choix d'une loi a priori. Dans cette partie, nous détaillons les principales lois pouvant être retenues comme distributions a priori non informatives.

5.1.1 A priori de Laplace

Historiquement, Laplace a été le premier à avoir recours aux lois a priori non informatives. Ne disposant d'aucune information sur le nombre de boules blanches dans une urne, il a donc choisi une distribution qui tenait compte de cette ignorance et qui donnait une même probabilité à l'ensemble des alternatives. Laplace a donc choisi une loi a priori uniforme. Trois principales critiques ont été faites à l'encontre de cette loi.

Premièrement, les distributions résultant de ce choix sont impropres lorsque l'espace du paramètre n'est pas compact. Rappelons qu'une loi impropre est une loi dont l'intégrale est égale à l'infini.

Une seconde critique repose sur le choix de l'équiprobabilité entre les alternatives qui peut conduire à certaines incohérences. En effet, si $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, alors la probabilité associée à θ_1 s'élève à $1/2$. Toutefois, si cet espace est redéfini comme suit : $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, alors la probabilité associée à θ_1 s'élève désormais à $1/3$. Ce résultat souligne donc certains problèmes de cohérence, puisque la probabilité de $\Theta = \theta_1$ varie en fonction de l'espace de définition de Θ . Cette incohérence peut être éliminée en considérant un partitionnement fixe.

La dernière critique, la plus importante, reproche à la loi uniforme son manque d'invariance par reparamétrisation. Cela peut s'observer aisément en passant de θ à $\eta = g(\theta)$. L'information a priori est manquante et ne devrait donc pas être modifiée. Or, si $\pi(\theta) = 1$, la distribution de η est égale à $\pi(\eta) = |\frac{d}{d\eta}g^{-1}(\eta)|$. Par conséquent, $\pi(\eta)$ n'est pas constant.

5.1.2 A priori de Jeffreys

Une seconde approche consiste donc à choisir une distribution invariante par reparamétrisation. Jeffreys (1946, 1961) a ainsi proposé une approche basée sur l'information de Fisher.

Rappelons que l'information de Fisher se définit de la manière suivante :

$$I(\theta) = E[(\frac{\partial \log L(X|\theta)}{\partial \theta})^2],$$

où L est la vraisemblance des observations.

Sous certaines conditions de régularités, on a :

$$I(\theta) = -E[(\frac{\partial^2 \log L(X|\theta)}{\partial \theta^2})]$$

Lorsque le paramètre θ est de dimension 1, la distribution a priori de Jeffreys est :

$$\pi(\theta) \propto I^{1/2}(\theta)$$

De même, lorsque le paramètre θ est de dimension supérieure à 1, la distribution de Jeffreys est approximée de la manière suivante :

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2}$$

Notons que la loi de Jeffreys n'utilise que l'information apportée par les données. Sa détermination repose essentiellement sur la loi des données. C'est pour cela qu'elle est désignée comme non-informative.

Application 1 de l'approche de Jeffreys : Soit $x \sim LN(\mu, \sigma^2)$, et $\theta = (\mu, \sigma^2)$. On peut donc calculer les dérivées partielles de la loi de sévérité, notée $f(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \mu} &= \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2} \\ \frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \sigma^2} &= 0,5 \frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \mu^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \mu \sigma^2} &= -\frac{\ln x - \mu}{\sigma^4} \\ \frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial (\sigma^2)^2} &= -\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{1}{2\sigma^4} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$I(\theta) = -E\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{\ln x - \mu}{\sigma^4} \\ -\frac{\ln x - \mu}{\sigma^4} & -\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/2\sigma^4 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la loi de Jeffreys obtenue s'exprime de la manière suivante : $\pi(\theta) \propto 1/\sigma^3$. En particulier, la loi de Jeffreys pour le paramètre μ se définit de la manière suivante : $\pi(\mu) \propto 1/\sigma \propto 1$.

Application 2 de l'approche de Jeffreys : Soit $n \sim P(\lambda)$. On peut à nouveau calculer les dérivées partielles de la loi de fréquence, notée $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log h(n|\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} - 1 \\ \frac{\partial^2 \log h(n|\lambda)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{n}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'information de Fisher s'écrit donc : $-E\left[\frac{-n}{\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda}$. La loi de Jeffreys obtenue pour le paramètre λ s'exprime donc de la manière suivante : $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda^{1/2}$.

5.2 Loi a posteriori du paramètre mu

5.2.1 Utilisation des données AS

Nous cherchons à utiliser les données AS. Nous disposons uniquement d'un histogramme²² indiquant la probabilité que les pertes se trouvent dans chacun des buckets considérés. Afin de disposer de données de pertes et plus seulement d'un histogramme, deux approches sont envisageables.

Méthode 1

La première méthode consiste à réaliser l'ajustement d'une loi log-normale sur les données AS. Comme expliqué précédemment, nous cherchons alors à minimiser une distance, comme celle du chi-deux ou celle d'Anderson-Darling. Nous nous appuyons ici sur la distance du chi-deux. Pour rappel, la distance du chi-deux se définit de la manière suivante

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{P_i - E_i}{E_i}$$

où P_i et E_i sont respectivement les probabilités empiriques et théoriques de se situer dans le bucket i .²³

Une fois que les paramètres de la loi log-normale ont été définis, les données de pertes peuvent alors être obtenues aisément en simulant cette loi.

Méthode 2

La seconde méthode consiste à produire des données directement à partir de l'histogramme. Cela peut également se faire par simulations. Pour obtenir une donnée, on applique la méthode suivante :

- On commence par choisir le bucket dans lequel on va tirer la donnée. Ce choix est déterminé grâce aux probabilités associées à chaque bucket. Pour cela, on simule une loi uniforme $U(0, 1)$. Le bucket retenu est le bucket $[x_i; x_{i+1}]$ où x_i et x_{i+1} sont tels que $F(x_i) \leq U \leq F(x_{i+1})$, et où F est la fonction de répartition des pertes AS obtenue directement à partir de l'histogramme.
- On cherche alors à simuler la donnée de manière à ce qu'elle appartienne au bucket correspondant. Pour ce faire, on simule W qui est également une loi uniforme $[0,1]$. Enfin, on applique la transformation suivante afin d'obtenir la valeur X :

$$X = x_i + (x_{i+1} - x_i)W$$

On obtient une valeur comprise dans l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, car $x_i + (x_{i+1} - x_i)W$ suit une loi uniforme : $U[x_i, x_{i+1}]$. On répète alors cette méthode plusieurs fois afin d'obtenir un échantillon de données de pertes.

En présence des données, il est facile de déterminer la première loi a posteriori : $\pi_0(\mu|x)$.

22. Cf. partie 2.4.1

23. Cf. partie 2.4.3

5.2.2 Détermination de la première loi a posteriori

Compte tenu des différentes critiques énoncées ci-dessus, nous choisissons de nous appuyer sur la loi a priori de Jeffreys. Rappelons que pour le paramètre μ , cette loi se définit de la manière suivante : $\pi(\mu) \propto 1/\sigma$. Nous pouvons donc en déduire la première loi a posteriori pour le paramètre μ en s'appuyant sur les données AS simulées ($X_i, i=1\dots N_{AS}$), notée $\pi_0(\mu|x)$.

En prenant $Z_i = \ln X_i$, on a alors :

$$\pi_0(\mu|x) \propto \pi(\mu)L(x; \mu; \sigma_{PI})$$

$$\pi_0(\mu|x) \propto \frac{1}{\sigma_{PI}} \prod_{i=1}^{N_{AS}} \frac{e^{-\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma_{AS}^2}}}{\sigma_{AS}\sqrt{2\pi}}$$

$$\pi_0(\mu|x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{AS}^2/N_{AS}}(\mu - \bar{Z})^2\right\}$$

On constate donc que $\mu|x_{AS}$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\sum \ln X_i}{N_{AS}}, \frac{\sigma_{AS}^2}{N_{AS}}\right)$. Une fois cette loi a priori déterminée, elle constitue notre nouvelle loi a priori, notée $\pi_1(\mu|x)$. Il est alors possible de déterminer la nouvelle loi a posteriori en s'appuyant sur les données PI.

5.2.3 Détermination de la loi a posteriori finale à utiliser

Dans la mesure où nous disposons désormais d'une forme analytique pour la nouvelle loi a priori $\pi_1(\mu|x)$, il est possible de déterminer la nouvelle loi a posteriori de manière analytique. Cette étape est indispensable pour pouvoir appliquer l'algorithme de Metropolis-Hastings. En effet, cet algorithme peut seulement être utilisé lorsque la loi a posteriori est définie à une constante multiplicative près. La nouvelle loi a posteriori du paramètre μ correspond donc au produit de $\pi_1(\mu|x)$ avec la vraisemblance calculée à partir des données PI ($Y_j, j=1\dots N_{PI}$). On note $W_j = \ln Y_j$. On a donc :

$$\pi_1(\mu|x, y) \propto \pi_1(\mu|x) \prod_{j=1}^{N_{PI}} \frac{e^{-\frac{(w_j - \mu)^2}{2\sigma_{PI}^2}}}{\sigma_{PI}\sqrt{2\pi}}$$

Une fois la loi a posteriori déterminée, il est alors possible d'utiliser l'algorithme de Metropolis-Hastings afin d'obtenir la distribution du paramètre μ .

5.3 Loi a posteriori du paramètre lambda

Les données de fréquence disponibles sont particulièrement restreintes, nous ne disposons que du paramètre de fréquence pour chaque source de données. Afin de déterminer la vraisemblance, nous sommes donc obligés de simuler les données de fréquence à partir d'une loi de Poisson $P(\lambda_{AS})$ pour obtenir la première loi a posteriori et d'une loi de Poisson $P(\lambda_{PI})$ pour déterminer la deuxième loi a posteriori, c'est-à-dire la fonction cible.

En s'appuyant sur la loi a priori de Jeffreys et les données de fréquence AS simulées ($n_{PIi}, i=1\dots N$), nous pouvons en déduire la première loi a posteriori pour le paramètre λ , notée $\pi_0(\lambda|n_{AS})$. Cette première loi a posteriori correspond au produit de la loi a priori

de Jeffreys du paramètre λ et de la vraisemblance obtenue à partir d'une loi de Poisson et des données de fréquence AS simulées, notée $L(n_{AS}; \lambda)$. On a alors :

$$\pi_0(\lambda|n_{AS}) \propto \pi(\lambda)L(n_{AS}; \lambda)$$

Il est alors possible d'utiliser la vraisemblance obtenue à partir d'une loi de Poisson et des données de fréquence PI simulées (n_{PIi} , $i=1..N$), notée $L(n_{PI}; \lambda)$. La nouvelle loi a posteriori du paramètre λ , notée $\pi_1(\lambda|n_{AS}, n_{PI})$ correspond donc au produit de $\pi_0(\lambda|n_{AS})$ avec cette vraisemblance. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda|n_{AS}, n_{PI}) &\propto \pi_0(\lambda|n_{AS})L(n_{PI}; \lambda) \\ \pi_1(\lambda|n_{AS}, n_{PI}) &\propto \pi(\lambda)L(n_{AS}; \lambda)L(n_{PI}; \lambda) \end{aligned}$$

5.4 MCMC-Metropolis Hastings

5.4.1 Principe et objectifs

Nous nous proposons dans cette partie de décrire le principe des méthodes Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Etant donnée une densité cible f , on construit un kernel de Markov K , de distribution stationnaire f et on génère une chaîne de Markov ($X^{(t)}$) en utilisant ce kernel, de manière à ce que la distribution limite de ($X^{(t)}$) soit f . On dispose ainsi de variables aléatoires distribuées suivant f . Nous cherchons donc à utiliser cette méthode afin d'obtenir un échantillon de valeurs issues de la loi a posteriori du paramètre μ et de celle de λ . Nous ne pouvons pas toujours nous appuyer sur les techniques usuelles puisque les loi a posteriori de μ et λ ne sont pas forcément des lois connues.

Les méthodes MCMC sont apparues dans les années 1950 dans le domaine de la physique avec le papier de Metropolis et al.(1953) puis ont été complétées par l'article précurseur de Hastings en 1970. Les méthodes MCMC ont plusieurs débouchés :

- Elles permettent l'échantillonnage de variables aléatoires. On utilise donc les techniques MCMC lorsqu'il n'est pas possible d'utiliser les techniques usuelles.
- Les méthodes MCMC permettent également d'intégrer une fonction. On peut ainsi calculer la moyenne a posteriori ou déterminer les marginales.
- Elles permettent aussi d'optimiser des fonctions en s'affranchissant des problèmes de minima locaux. On peut par exemple calculer le maximum a posteriori.

5.4.2 Définitions et algorithme

Une chaîne de Markov est une séquence de variables aléatoires dépendantes telle que la distribution de x_i conditionnellement aux observations passées, notée $p(\cdot)$, ne dépend que de x_{i-1} :

$$p(x_i|x_0, x_1, \dots, x_{i-1}) = p(x_i|x_{i-1})$$

Une chaîne de Markov se définit donc par deux composantes : la distribution initiale $p(x_0)$ et le kernel de transition $K(x_{i+1} \in A|x_i = x)$. En effet, la distribution conditionnelle est appelée kernel de transition :

$$x_{i+1}|x_0, x_1, \dots, x_i \sim K(x_i, x_{i+1})$$

Les chaînes de Markov ont les propriétés suivantes :

- Invariance et stationnarité : Si x_i est distribué suivant f alors x_{i+1} est distribué suivant f
- Irréductibilité : tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de n'importe quel point de départ.
- Récurrence : les trajectoires (X_i) passent une infinité de fois dans tout ensemble de probabilité non nulle
- Apériodicité : aucun noyau n'induit un comportement périodique des trajectoires.

Nous cherchons donc à obtenir la distribution pour le paramètre $\mu : (\mu_1, \dots, \mu_N)$. La procédure à suivre pour obtenir la distribution des paramètres λ et σ est identique. La chaîne de Markov est construite de manière à avoir la distribution a posteriori $\pi_1(\mu|x, y)$. La transition d'un élément dans la chaîne au suivant s'effectue grâce à un kernel de transition $K(\mu_{i-1}, \mu_i)$ qui satisfait la condition suivante :

$$\pi_1(\mu_{i-1}|x, y)K(\mu_{i-1}, \mu_i) = \pi_1(\mu_i|x, y)K(\mu_i, \mu_{i-1}),$$

où $\pi_1(\mu|x, y)$ est la distribution a posteriori désirée. Le kernel de transition contient une loi candidate q , à partir de laquelle est déterminée la valeur suivante dans la chaîne, et une probabilité d'acceptation α , qui détermine si la valeur proposée est acceptée ou non. Notons que la fonction q est quelconque mais doit être simulable rapidement. On peut notamment utiliser une loi normale ou une loi uniforme. Peters et Sisson (2006) utilisent quant à eux une marche aléatoire gaussienne. Les premières valeurs générées par l'algorithme ne sont pas retenues par la suite ("burn in").

Etapes de l'algorithme

L'algorithme suit alors les étapes suivantes :

- On initialise μ_0 et $i=0$
- Puis on détermine μ_{i+1}^* à partir de la loi candidate $q(\mu_{i+1}|\mu_i)$
- On évalue la probabilité d'acceptation :

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi_1(\mu_{i+1}^*|x, y)q(\mu_i|\mu_{i+1}^*)}{\pi_1(\mu_i|x, y)q(\mu_{i+1}^*|\mu_i)} \right\}$$

- On génère une variable aléatoire $U \sim U[0, 1]$
- Si $U \leq \alpha$ alors $\mu_{i+1} = \mu_{i+1}^*$, sinon $\mu_{i+1} = \mu_i$
- On pose $i=i+1$, si $i \leq N-1$ alors on revient à l'étape 2.

Pour implémenter cet algorithme, la loi cible doit être connue à une constante multiplicative près. Notons que la chaîne de Markov créée peut prendre plusieurs fois la même valeur. L'échantillon obtenu n'est pas i.i.d.

5.5 Résultats numériques : les paramètres μ et λ sont inconnus

Nous appliquons l'algorithme précédent en considérant que seuls les paramètres μ et λ sont inconnus. Nous disposons du paramètre σ de la loi log-normale. La mise en place de l'algorithme nécessite avant tout de déterminer la fonction cible, c'est-à-dire la loi a posteriori du paramètre μ et celle de λ , mais aussi de déterminer la loi candidate.

5.5.1 Absence de seuil

Détermination du paramètre mu

Dans cette configuration, la loi cible pour obtenir une chaîne de Markov du paramètre μ est égale au produit de la loi a priori 0 (égale à $\frac{1}{\sigma}$ lorsque seul le paramètre μ est inconnu) avec la vraisemblance des données AS et celle des données PI. Nous obtenons donc la formule analytique suivante :

$$\pi_1(\mu|x, y) = \frac{1}{\sigma_{PI}} L(x_1, \dots, x_{N_{AS}}|\mu, \sigma_{AS}) L(y_1, \dots, y_{N_{PI}}|\mu, \sigma_{PI}),$$

où $L(x_1, \dots, x_{N_{AS}})$ est la vraisemblance obtenue à partir des données AS simulées grâce à la méthode 1 et une densité log-normale. $L(y_1, \dots, y_{N_{PI}})$ est la vraisemblance obtenue à partir des données de pertes internes et une densité log-normale.

Concernant la loi candidate, nous avons testé l'algorithme avec plusieurs lois pour le paramètre μ , à savoir une loi uniforme $U \sim U[0, 15]$, une loi normale $N(\mu_{PI}, \sigma_{PI}^2)$ et une marche aléatoire gaussienne, où $\mu[i + 1] = \mu[i] + \epsilon[i + 1]$ avec $\epsilon \sim N(0, 1)$. Les chaînes de Markov obtenues pour le paramètre μ étant comparables, nous présentons les résultats obtenus avec une loi candidate uniforme. Par ailleurs, l'algorithme est initialisé à partir d'une valeur de μ_0 égale à μ_{PI} .

Tous ces paramètres permettent alors de mettre en place l'algorithme de Metropolis-Hastings. Nous obtenons la chaîne de Markov suivante pour le paramètre μ en présence d'une loi candidate uniforme $U[0, 15]$:

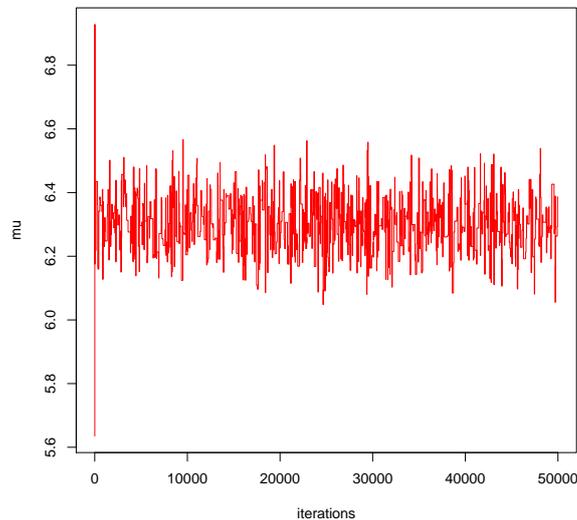


FIGURE 13 – Chaîne de Markov du paramètre mu : loi candidate uniforme

La chaîne de Markov du paramètre μ varie donc autour de la valeur de 6,2. Les chaînes de Markov obtenues à partir des autres lois candidates varient également autour de cette valeur, elles sont présentées en annexe (partie B).

Nous supprimons ensuite les 2000 premières valeurs du paramètre μ afin de conserver les valeurs de μ pour lesquelles la chaîne est stationnaire. En tirant dans cette distribution, nous disposons alors de tous les paramètres de notre loi de sévérité.

Détermination du paramètre lambda

De même, la loi cible pour obtenir une chaîne de Markov du paramètre λ s'écrit de la manière suivante :

$$\pi_1(\lambda|n_{AS}, n_{PI}) \propto \pi(\lambda)L(n_{AS}; \lambda)L(n_{PI}; \lambda),$$

où $L(n_{AS}; \lambda)$ est la vraisemblance obtenue à partir d'une distribution de poisson et des données de fréquence simulées AS et $L(n_{PI}; \lambda)$ est la vraisemblance obtenue à partir d'une distribution de poisson et des données de fréquence simulées PI. On utilise par ailleurs une loi candidate uniforme $U[\lambda_{AS}; \lambda_{PI}]$. Enfin, l'algorithme est initialisé à partir d'une valeur de λ_0 égale à $\frac{\lambda_{PI} + \lambda_{AS}}{2}$. Nous obtenons alors la chaîne de Markov suivante pour le paramètre λ :

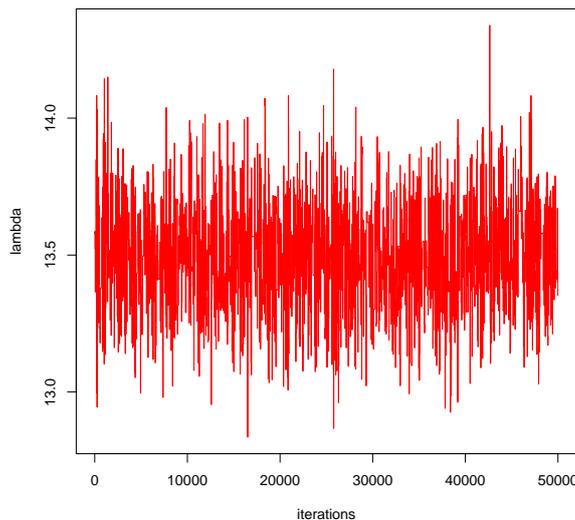


FIGURE 14 – Chaîne de Markov du paramètre lambda

A nouveau, nous supprimons les 2000 premières valeurs de cette chaîne. Nous disposons alors de valeurs possibles pour le paramètre de fréquence.

Calcul du capital réglementaire Pour chaque simulation d'une perte agrégée, nous tirons une valeur de λ et une valeur de μ dans les chaînes de Markov présentées ci-dessus.

Une fois tous les paramètres des lois de fréquence et de sévérité déterminés, nous appliquons la procédure de Monte-Carlo classique afin d'en déduire la VaR à 99,9 %.²⁴

La VaR à 99,9 % obtenue est égale à 210 678 €

Elle est comprise dans l'intervalle de confiance suivant [198 602 ; 227 627].

24. Cf. section 2.3

5.5.2 Prise en compte d'un seuil sur les données PI

Nous nous proposons de modifier la vraisemblance des données de pertes internes en prenant en compte le seuil de collecte existant sur certaines données de pertes internes. Dans l'exemple précédent, nous nous trouvions toujours dans le cadre des lois conjuguées pour le paramètre μ . L'utilisation du cadre de Metropolis-Hastings n'était alors pas indispensable. Certaines données de pertes sont toutefois collectées avec un seuil, ce qui rend obligatoire l'utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings puisque la vraisemblance des observations doit prendre en compte le seuil, il ne s'agit donc plus d'une loi log-normale. En l'absence de seuil, le recours aux techniques MCMC peut également s'avérer indispensable si l'on ne se trouve plus dans le cadre des lois conjuguées. Le seuil retenu dans le cas présent s'élève à 41,67 €. Nous conservons par ailleurs la chaîne de Markov obtenue précédemment pour le paramètre λ .

La fonction cible du paramètre μ est alors modifiée, elle devient :

$$\pi_1(\mu|x, y) = \frac{1}{\sigma_{PI}} L(x_1, \dots, x_{N_{AS}}|\mu, \sigma_{AS}) L(y_1, \dots, y_{N_{PI}}|\mu, \sigma_{PI}) \frac{1}{(1 - P(Y < seuil))^{N_{PI}}}$$

$L(y_1, \dots, y_{N_{PI}}|\mu, \sigma_{PI})$ est la vraisemblance obtenue à partir des données de pertes internes en l'absence de seuil. De même, $L(y_1, \dots, y_{N_{PI}}|\mu, \sigma_{PI}) \frac{1}{(1 - P(Y < seuil))^{N_{PI}}}$ est la vraisemblance des données de pertes internes lorsqu'il existe un seuil de collecte.

La loi candidate retenue est la loi uniforme $U[0, 15]$. Dans cette configuration, nous obtenons la chaîne de Markov suivante pour le paramètre μ :

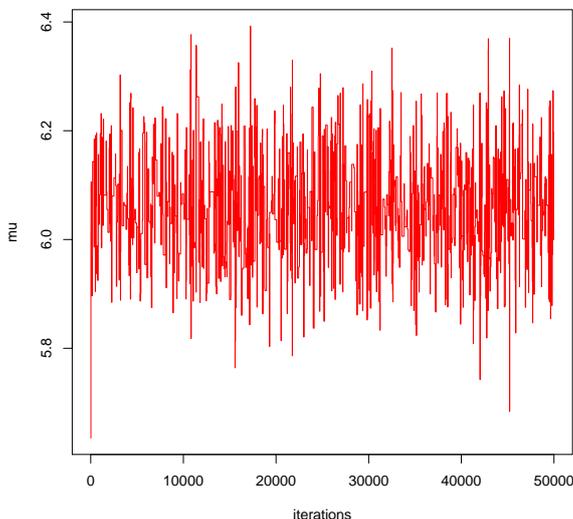


FIGURE 15 – Chaîne de Markov du paramètre μ : loi candidate uniforme

Cette chaîne de Markov varie désormais autour de la valeur de 6,1.

Comme précédemment, nous supprimons les premières valeurs de cette chaîne. Nous pouvons alors déterminer le capital réglementaire en procédant comme dans la partie 5.5.1.

La VaR à 99,9 % obtenue est désormais égale à 183 766 €

Elle est comprise dans l'intervalle [177 380,197 602]. Ce montant de capital est inférieur à celui trouvé précédemment, cela résulte d'une valeur inférieure du paramètre μ en moyenne dans le cas présent.

5.5.3 Utilisation des données AS : application de la méthode 2

Jusqu'à présent, les données AS utilisées pour déterminer la fonction cible du paramètre μ étaient obtenues grâce à la méthode 1 présentée dans la partie 5.2.1. Il s'agit du cas où l'on ajuste une loi log-normale sur l'histogramme fourni par les experts. Les données AS peuvent alors être simulées à partir de la loi obtenue.

La méthode 2, quant à elle, ne passe pas par l'ajustement d'une loi log-normale. Les données sont simulées en s'appuyant directement sur l'histogramme. Après avoir déterminé le bucket dans lequel on va réaliser les tirages, la valeur est obtenue en tirant uniformément dans le bucket considéré. En retenant une loi candidate uniforme et le même paramétrage que dans le cas où μ et λ sont inconnus et en l'absence de seuil, nous réalisons à nouveau le calcul du capital réglementaire pour vérifier si celui-ci est sensible à la méthode retenue pour la simulation des données AS.

Après application de cette méthode :

La VaR à 99,9 % obtenue s'élève à 234 460 €

Elle est comprise dans l'intervalle [221 008,249 990]. Compte tenu des intervalles de confiance, cette valeur n'est pas sensiblement différente de celle obtenue en utilisant la méthode 1 pour simuler les données AS. De même, l'étude approfondie des quantiles des distributions de pertes agrégées obtenues grâce à ces deux méthodes permet d'observer la forte similarité entre les résultats obtenus. La méthode 1 est donc retenue par la suite.

5.6 Résultats numériques : les paramètres μ , λ et σ sont inconnus

Dans cette partie, nous considérons que les paramètres μ , λ et σ sont inconnus. Cela n'a pas de conséquence sur la détermination du paramètre λ . Pour la fréquence, nous nous appuyons donc sur la chaîne de Markov du paramètre λ présentée dans la partie 5.5.1. Nous cherchons donc à déterminer la fonction cible des paramètres μ et σ et les chaînes de Markov pour chacun de ces paramètres.

5.6.1 Absence de seuil

Par rapport à la configuration précédente, les modifications s'observent au niveau de la loi a priori de Jeffreys. Lorsque les paramètres μ et σ sont inconnus, nous avons observé que celle-ci est égale à $\frac{1}{\sigma^3}$ ²⁵. En conservant les notations précédentes, la loi cible s'écrit désormais de la manière suivante en l'absence de seuil :

$$\pi_1(\mu, \sigma | x, y) = \frac{1}{\sigma^3} L(x_1, \dots, x_{N_{AS}} | \mu, \sigma) L(y_1, \dots, y_{N_{PI}} | \mu, \sigma)$$

25. Cf. page 55

Nous nous appuyons sur deux lois candidates uniformes. Comme précédemment, la loi candidate pour le paramètre μ est une loi $U[0, 15]$. Pour le paramètre sigma, nous retenons une loi uniforme $U[0, 5]$. Nous utilisons à nouveau l'algorithme de Metropolis Hastings afin d'obtenir cette fois une chaîne de Markov pour le paramètre mu et une chaîne de Markov pour le paramètre sigma. Celles-ci sont présentées en annexe (partie B). Les valeurs retenues pour l'initialisation de μ et σ sont respectivement égales à μ_{PI} et σ_{PI} .

En appliquant la même procédure que précédemment :

La VaR à 99,9 % obtenue s'élève à 162 234 €

Ce montant est compris dans l'intervalle de confiance suivant : [149 259,180 533].

5.6.2 Prise en compte d'un seuil sur les données PI

Lorsque nous introduisons l'existence d'un seuil sur les données de pertes internes, nous obtenons la fonction cible suivante :

$$\pi_1(\mu, \sigma | x, y) = \frac{1}{\sigma^3} L(x_1, \dots, x_{N_{AS}} | \mu, \sigma) L(y_1, \dots, y_{N_{PI}} | \mu, \sigma) \frac{1}{(1 - P(Y < seuil))^{N_{PI}}}$$

Les lois candidates et les paramètres d'initialisation de l'application ci-dessus sont conservés. L'application de l'algorithme de Metropolis-Hastings dans cette configuration permet d'obtenir un montant de capital :

La VaR à 99,9 % obtenue s'élève à 234 736 €

Celle-ci est comprise dans l'intervalle de confiance suivant : [217 082,271 177].

5.7 Comparaison des méthodes

Nous présentons dans cette partie une comparaison des résultats obtenus avec la méthode bayésienne 2 (mu inconnu/absence de seuil) et ceux obtenus uniquement avec les données PI ou les données AS.

Pour la maille considérée, les quantiles de la distribution de perte agrégée obtenus avec la méthode bayésienne 2 sont très proches de ceux obtenus uniquement avec les données de pertes internes. Cela résulte du paramètre mu de la distribution de sévérité retenu avec la méthode bayésienne 2. Rappelons qu'il est égal à 5,64 pour les données de pertes internes et à 7,36 pour les données issues des analyses de scénario. Le paramètre mu obtenu dans cette approche varie autour de 6,2. La plus grande proximité avec μ_{PI} se traduit par des résultats plus proches de ceux obtenus uniquement avec les données de pertes internes.

Les quantiles de la distribution issue de la méthode bayésienne 2 sont toutefois bien situés entre les deux distributions extrêmes.

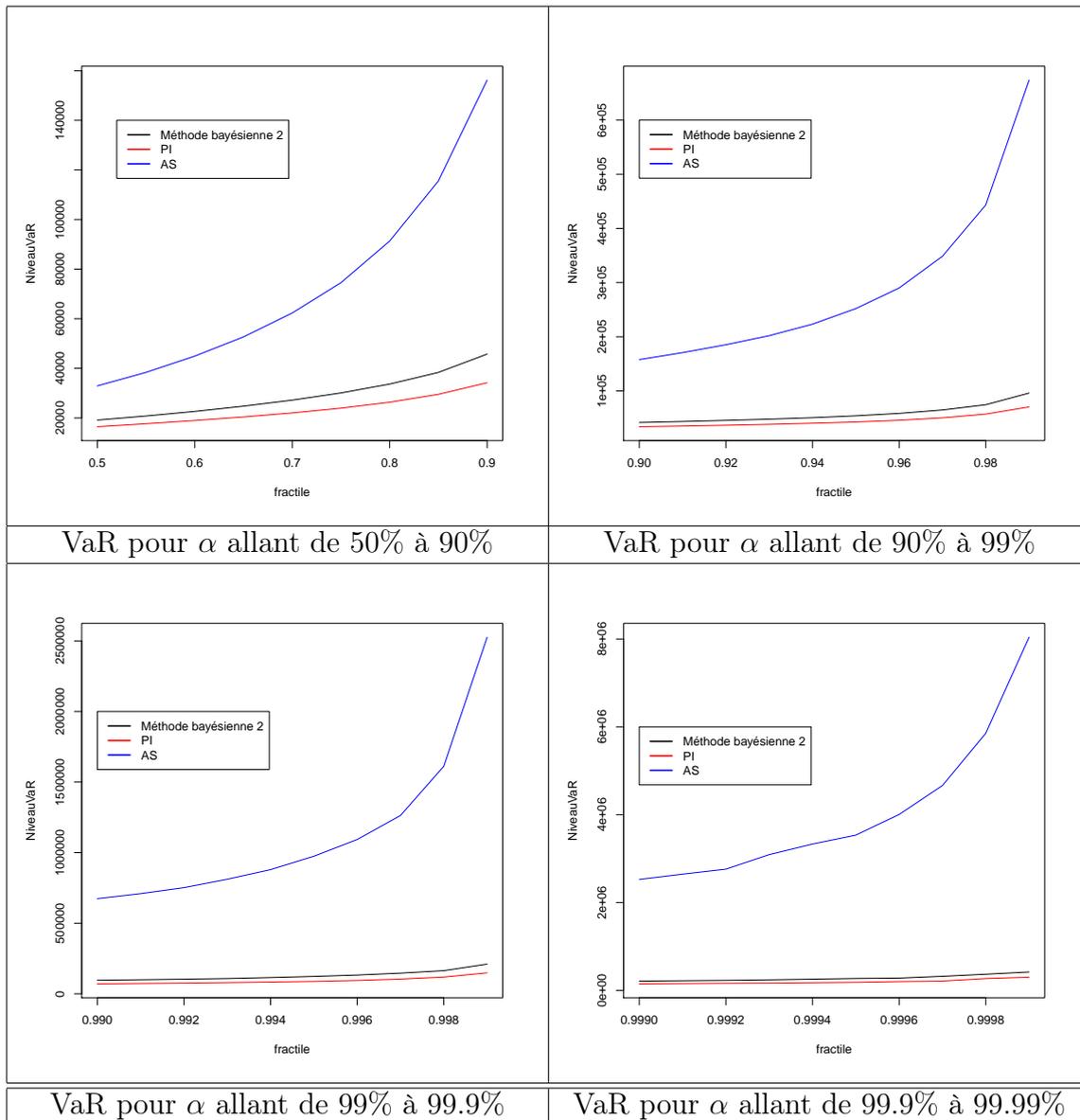


TABLE 4 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode méthode bayésienne 2 avec μ inconnu en l’absence de seuil pour différents niveaux de fractiles alpha

5.8 Avantages et limites de la méthode bayésienne 2

Cette méthode a l’avantage de régler les problèmes soulignés précédemment quant aux choix des lois a priori et de leurs paramètres. En effet, nous avons utilisé dans cette approche des lois a priori non informatives, et plus particulièrement l’a priori de Jeffreys. Désormais, les informations demandées aux experts sont celles dont dispose actuellement la Société Générale, à savoir les mêmes que celles utilisées pour la méthode LDA, contrairement à celles exigées pour la méthode bayésienne 1. Ceci est un point essentiel, car les demandes faites auprès des experts doivent correspondre à des demandes d’informations concrètes (que les experts peuvent facilement appréhender), principalement des fréquences et des montants de pertes. De plus, cette méthode ne se limite plus à l’utilisation de lois conjuguées et peut désormais être utilisée pour toute distribution a posteriori définie analytiquement à une constante multiplicative près. Cela est désormais possible grâce

à l'émergence de nouvelles techniques de simulation numérique telles que l'algorithme de Metropolis-Hastings. En contrepartie, l'utilisation de ces techniques rend le calcul du capital plus opaque et fournit une valeur moins intuitive.

6 Méthode du polya tree

6.1 Principes

Nous nous proposons d'étudier une nouvelle méthodologie, déjà analysée à la Société Générale, qui permet de combiner l'information issue des données de pertes internes et celle fournie par les experts afin d'obtenir une distribution de pertes agrégées.

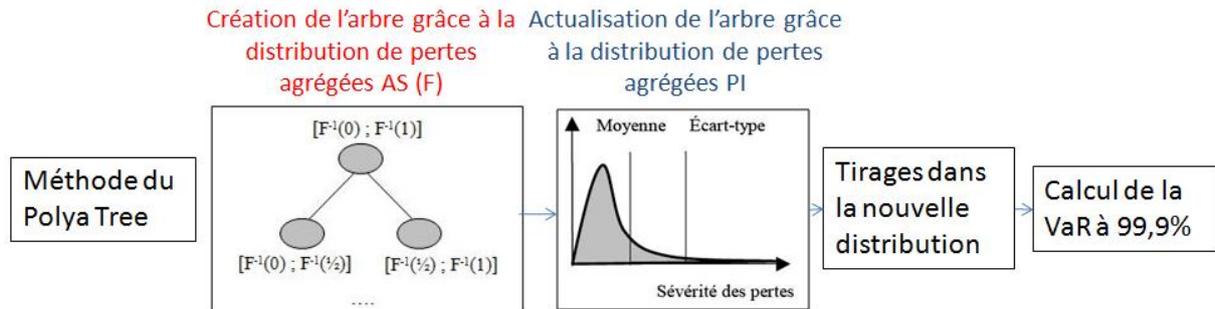


FIGURE 16 – Représentation schématique de la méthode Poly Tree

La méthode du polya tree s'appuie sur la représentation de la distribution sous la forme d'un arbre. Au premier noeud de l'arbre, on divise le support de la distribution de pertes agrégées AS en deux intervalles. Chaque noeud a donc deux noeuds fils. Et chacun de ces noeuds fils comprend une partie de l'intervalle du noeud précédent.

La probabilité a priori d'être dans un sous-intervalle, sachant que la valeur se trouve dans l'intervalle, s'élève initialement à $1/2$. Ces probabilités peuvent ensuite être modifiées en s'appuyant sur les données de pertes internes. On obtient alors une nouvelle distribution de probabilités. On effectue alors des tirages dans le nouvel arbre pour obtenir un échantillon de valeurs de la loi a posteriori.

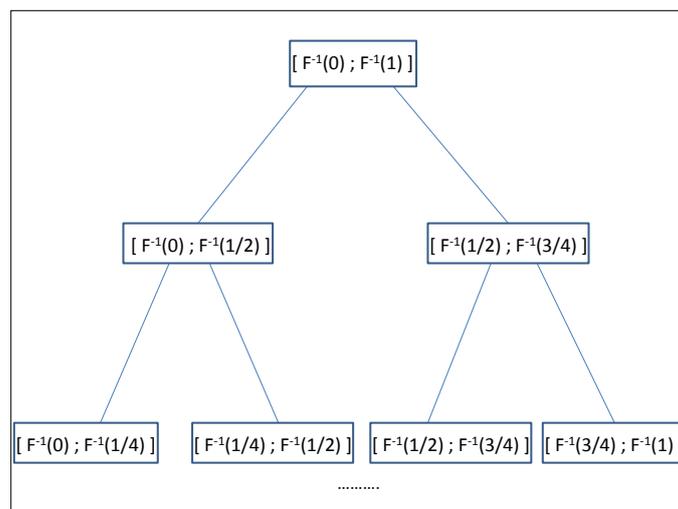


FIGURE 17 – Représentation de l'arbre

Dans le graphique ci-dessus, F correspond à la fonction de répartition des pertes agrégées issue des analyses de scénario fournies par les experts.

6.2 Algorithme

Cet algorithme peut se décomposer en trois grandes parties. On commence par construire l'arbre, puis on l'actualise grâce aux données de pertes internes. Enfin, on tire dans la nouvelle distribution créée. Il semble plus pratique de partir de la distribution de pertes annuelles. La création de celle-ci a déjà été expliquée : nous commençons par ajuster une loi log-normale sur l'histogramme fourni par les experts.²⁶ Comme nous disposons de la fréquence, nous pouvons alors simuler la distribution de pertes annuelles issue des informations fournies par les experts par Monte-Carlo.²⁷

6.2.1 Construction de l'arbre

On commence par numéroter les noeuds de l'arbre. Ceux-ci sont numérotés du haut vers le bas et de la gauche vers la droite. Si on choisit de construire un arbre de n niveaux, alors on dénombre $2^n - 1$ noeuds dans l'arbre créé. Le noeud fils gauche du noeud i est donc le noeud numéroté $2i$. De même, le noeud de droite est numéroté $2i + 1$. Une fois les noeuds numérotés, on représente l'arbre sous la forme d'une matrice de dimension $(2^n - 1, 5)$ comprenant les informations suivantes pour chaque noeud i :

- Le numéro du noeud
- La borne supérieure de l'intervalle correspondant : soit $F^{-1}(1)$ pour le noeud 1, $F^{-1}(1/2)$ pour le noeud 2, $F^{-1}(1)$ pour le noeud 3... Ces quantiles sont déterminés à partir de la fonction de répartition (F) de pertes annuelles issue des informations fournies par les experts
- Le fractile correspondant à cette borne supérieure : soit 1 pour le noeud 1, 0,5 pour le noeud 2 et 1 pour le noeud 3...
- Les nombres a et b décrivant la probabilité d'être dans le sous-intervalle de gauche et le sous-intervalle de droite.

La probabilité d'être dans le sous-intervalle de gauche se définit de la manière suivante : $\frac{a}{a+b}$. Celle d'être dans le sous-intervalle de droite s'écrit donc : $\frac{b}{a+b}$. Un choix courant dans la littérature est d'utiliser une loi Beta : la probabilité conditionnelle qu'une perte soit dans le sous-intervalle de gauche est supposée variable et suit une loi Beta de paramètres a et b . Par souci d'efficacité, nous utilisons une probabilité fixe. Initialement a est égal à b , les pertes ont donc autant de chances de se trouver dans le sous-intervalle de gauche que dans le sous-intervalle de droite.

6.2.2 Actualisation de l'arbre

Pour ce faire, il faut commencer par disposer de données annuelles pour les pertes internes. Comme l'échantillon disponible ne comprend que 9,5 années d'historique, nous procédons à nouveau par simulation. Comme expliqué précédemment²⁸, nous ajustons une loi log-normale sur les données de pertes internes. Grâce à l'information disponible

26. Cf. section 2.4.3

27. Cf. section 2.3

28. Cf. section 2.4.2

sur la fréquence, nous pouvons alors simuler une distribution de pertes annuelles issue de l'information fournie par les pertes internes.

Puis, nous procédons à l'actualisation de l'arbre. Pour chaque perte, nous augmentons a de δ si la perte est dans le sous-intervalle de gauche et nous augmentons b de δ si la perte appartient au sous-intervalle de droite. La modification des probabilités grâce aux données internes se fait de la manière suivante : si l'observation est égale à $F^{-1}(0, 1)$, on augmente la probabilité d'être dans l'intervalle $[F^{-1}(0); F^{-1}(0, 5)]$ de δ . De même, on augmente la probabilité d'être dans l'intervalle $[F^{-1}(0); F^{-1}(0, 25)]$. On réalise cette opération jusqu'à la fin de l'arbre. Cette actualisation se fait grâce à la répétition de cette opération pour toutes les données disponibles.

6.2.3 Tirage dans l'arbre

On procède enfin aux tirages dans l'arbre. On s'appuie pour cela sur des lois uniformes. Pour tirer une seule donnée, on commence par tirer dans une uniforme $U \sim U[0, 1]$. Puis on compare la valeur tirée à la probabilité d'être dans l'intervalle de gauche. Si U est inférieur à cette probabilité, on se positionne au noeud fils gauche. Sinon, on se positionne au niveau du noeud fils droit. On réitère cette procédure pour chaque niveau jusqu'à ce qu'on ait atteint un noeud terminal. Une fois arrivé à ce noeud, on tire de manière uniforme dans l'intervalle correspondant. Cette procédure est répétée un grand nombre de fois afin d'obtenir une nouvelle distribution de pertes annuelles.

6.3 Choix des paramètres

Cette méthode offre de nombreuses alternatives dans le choix des paramètres. Ces choix peuvent parfois être difficiles à argumenter.

Un premier choix concerne la taille de l'arbre. L'objectif étant de calculer une VaR sur les fractiles élevés, il semble indispensable d'effectuer une division fine du support de la distribution. Il existe toutefois un arbitrage entre finesse du découpage et temps de calcul. Un arbre à 15 niveaux comprend déjà 32767 noeuds. Les calculs réalisés par la Société Générale soulignent qu'une quinzaine de niveaux sont suffisants pour obtenir des résultats stables.

Un second choix concerne la probabilité retenue. Si nous avons choisi une probabilité fixe, rappelons que la littérature sur le sujet propose également l'utilisation d'une loi Beta.²⁹

Il faut également déterminer le paramètre δ qui va servir à actualiser l'arbre. Ce paramètre peut être fixe. Il peut aussi être variable. Par exemple, il peut être plus élevé pour les intervalles correspondants aux fractiles faibles que pour ceux correspondants aux fractiles élevés. Cela suggère alors que l'on accorde davantage de confiance aux données internes pour les pertes faibles et davantage de confiance aux experts pour les pertes élevées.

29. Cf. Lavine M. [16]

Le dernier point concerne les données à utiliser pour actualiser l'arbre. Comme souligné ci-dessus, l'idéal serait d'utiliser les pertes annuelles, mais un historique de 9,5 années ne fournit que 9 pertes, ce qui est nettement insuffisant. Toutefois, nous disposons des sévérités individuelles. Deux alternatives sont alors possibles :

- Nous pouvons considérer que le nombre de données disponibles est en fait le nombre de sévérités individuelles. On obtient alors les pertes par simulation en utilisant les lois de fréquence et de sévérité. Le nombre limité de données rend le résultat très sensible à l'échantillon généré. Il est donc nécessaire de réitérer cette procédure plusieurs fois afin de disposer de l'intervalle dans lequel se trouve réellement le quantile désiré.
- Une seconde solution consiste à utiliser les distributions de fréquence et de sévérité pour simuler une distribution complète de pertes annuelles. C'est la méthode retenue ici.

Enfin, un problème peut intervenir si le maximum de la distribution issue des analyses de scénario est inférieur à celui de la distribution issue des données internes. Il faut alors remplacer $F^{-1}(1)$ par ce second maximum.

6.4 Résultats numériques

6.4.1 Estimation simple

Nous créons un arbre de 15 niveaux. Notre arbre comprend donc 32 767 noeuds. Nous choisissons de retenir des valeurs initiales de a et b égales à 1. Par conséquent, la probabilité initiale d'être dans le sous-intervalle de gauche est égale à la probabilité d'être dans le sous-intervalle de droite, soit $1/2$. Pour construire cet arbre, nous nous appuyons sur 100 000 données de pertes agrégées AS simulées. Cela nous permet de construire les intervalles de quantiles pour chacun des noeuds.

Nous actualisons l'arbre grâce à 100 000 données de pertes agrégées PI simulées. Pour cette première approche, nous testons une valeur de δ égale à 0,01. L'analyse de sensibilité du montant de capital au paramètre δ est présentée dans la partie 6.4.2.

L'arbre obtenu après actualisation est présenté dans la figure 18. Sur cet arbre, nous observons donc la valeur maximale de la distribution de pertes agrégées AS, qui s'élève à 49.10^6 €. Les probabilités de tirage dans un intervalle sont également inscrites. Au premier noeud, on tire donc une valeur dans l'intervalle de gauche avec une probabilité égale à 0,89 et dans l'intervalle de droite avec une probabilité de 0,11. Une fois cette étape d'actualisation achevée, nous tirons 100 000 valeurs dans la distribution a posteriori créée. Nous obtenons ainsi une nouvelle distribution de pertes agrégées.

La VaR à 99,9 % obtenue est égale à 190 126 €

Cette valeur est comprise dans l'intervalle de confiance suivant : [172 951 ; 220 599].

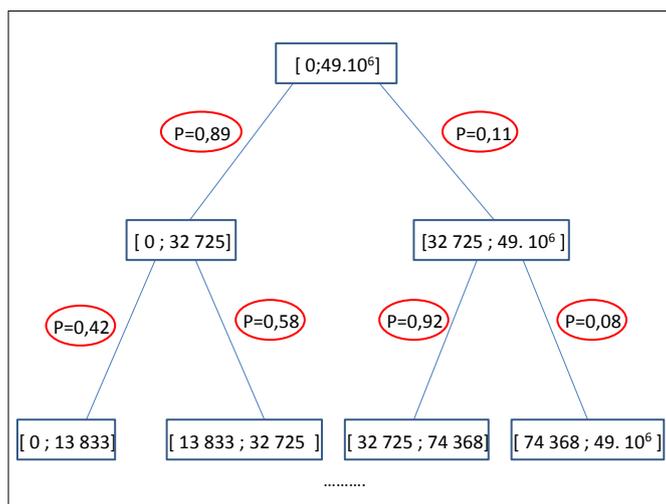


FIGURE 18 – Arbre obtenu après simulation

6.4.2 Analyse de sensibilité au paramètre delta

Nous nous proposons de poursuivre l'analyse précédente en observant la sensibilité du montant de capital obtenu, la VaR à 99,9 %, au niveau de delta retenu lors de la phase d'actualisation. Précédemment, nous avons retenu une valeur de δ égale à 0,01. Dans le cas présent, nous retenons les valeurs suivantes pour le paramètre δ : 0,001 ; 0,0025 ; 0,005 ; 0,0075 ; 0,01 ; 0,025 ; 0,05 ; 0,075 ; 0,1. Tous les autres paramètres proposés dans la section 6.4.1 sont conservés.

L'application de ces différents niveaux de δ à notre analyse nous permet d'obtenir les montants de capitaux suivants :

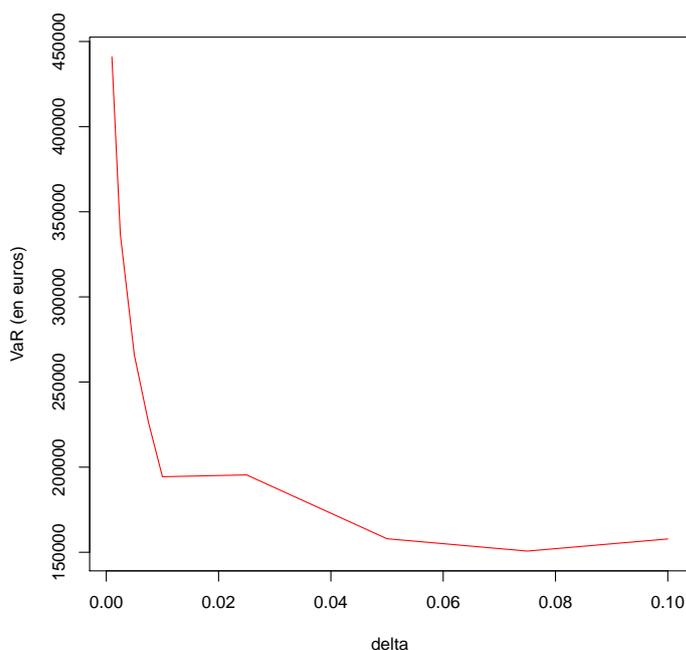


FIGURE 19 – VaR à 99,9 % obtenue en fonction du delta

Le graphique obtenu est cohérent. Plus delta est important, plus nous modifions l'arbre pendant l'étape d'actualisation. Plus delta augmente, plus nous retrouvons donc une distribution agrégée proche de celle obtenue essentiellement à partir des données PI ($K_{PI}=147\,804\text{ €}$). Les données AS conduisaient, quant à elles, à un montant de capital nettement supérieur à celui obtenu à partir des données PI ($K_{AS}=2,2\text{ M €}$). Il semble donc normal d'obtenir une relation décroissante entre le niveau de delta et celui de capital obtenu.

6.4.3 Analyse de sensibilité au nombre d'observations utilisées pour l'actualisation

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer l'impact du nombre d'observations de pertes agrégées issues des simulations PI utilisées pour l'actualisation sur le montant de capital obtenu. Nous répétons le calcul réalisé dans la section 6.4.1 pour différents nombres de données PI simulées. Le nombre de simulations effectuées s'échelonne de 5000 à 100 000 avec un pas de 5000. Rappelons que nous avons précédemment réalisé 100 000 actualisations. Nous reprenons une valeur de δ égale à 0,01 pour réaliser nos simulations.

Nous obtenons le graphique suivant qui présente la VAR à 99,9 % obtenue en fonction du nombre d'actualisations effectuées :

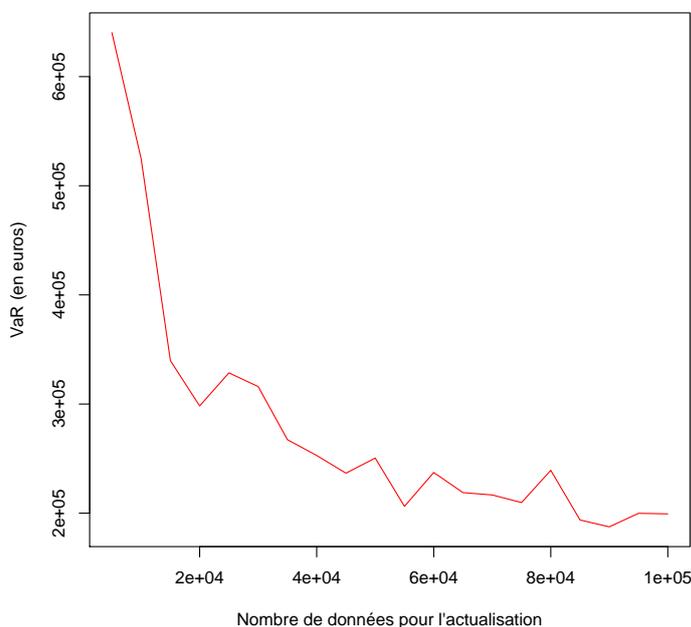


FIGURE 20 – VaR obtenue en fonction du nombre de données utilisées pour l'actualisation

A nouveau, les résultats obtenus sont particulièrement intuitifs. Plus le nombre d'actualisations est important, plus on va modifier l'arbre et plus la distribution a posteriori va s'approcher de la distribution de pertes agrégées issue des données de pertes internes. K_{PI}

étant inférieur à K_{AS} , la VaR à 99,9 % est donc décroissante avec le nombre d'observations utilisées lors de la phase d'actualisation.

6.4.4 Utilisation d'un paramètre delta à deux valeurs

Dans cette partie, nous nous proposons de faire varier la valeur de δ suivant la position dans la distribution. Il peut être intéressant d'avoir une valeur de δ plus grande pour les intervalles correspondant aux fractiles les plus faibles que pour ceux correspondant aux fractiles les plus élevés. Cela signifie que l'on accorde un poids plus important aux données internes pour le début de la distribution. De même, on change moins les valeurs a et b des queues de distribution car l'on considère que les données fournies par les experts sont plus fiables pour les pertes extrêmes.

Nous proposons donc d'utiliser deux valeurs pour le paramètre delta. Nous séparons la distribution en deux intervalles, soit du fractile 0 au fractile 0,8 et du fractile 0,8 au fractile 1. Pour l'intervalle $[0;0,8]$, nous fixons le delta à 0,01. Pour l'intervalle $[0,8;1]$, nous étudions différentes valeurs allant de 0,001 à 0,01 avec un pas de 0,001. Puis nous calculons un montant de capital pour chacun des delta de l'intervalle $[0,8;1]$ envisagés.

En appliquant cette nouvelle méthode rendant le delta plus flexible, nous obtenons la VaR à 99,9 % en fonction du delta choisi pour l'intervalle $[0,8;1]$:

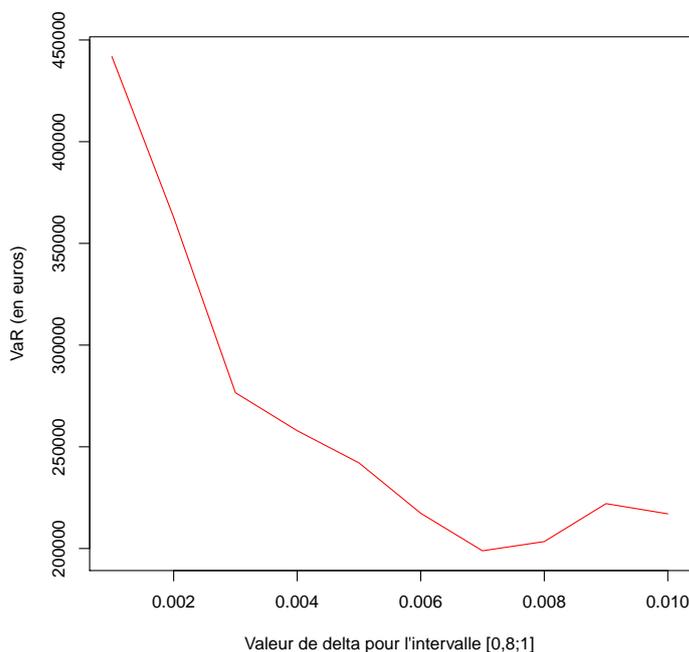


FIGURE 21 – VaR obtenue en fonction de la valeur d'actualisation pour les fractiles élevés

Nous obtenons une relations décroissante entre la valeur de delta retenue pour les queues de distribution et la VaR calculée. Cette relation peut à nouveau s'expliquer. Lorsque le delta est faible, nous ne changeons que très peu les valeurs des probabilités dans les queues de distribution. Nous retrouvons donc une queue de distribution plus proche de celle fournie par les experts. Comme la distribution de pertes agrégées AS

conduit à obtenir des montants de VaR plus élevés que la distribution de pertes agrégées PI, nous obtenons une VaR plus élevée lorsque delta est faible. Lorsque delta augmente, davantage de confiance est accordée aux données PI et la queue de distribution de la distribution a posteriori se rapproche de plus en plus de celle de la distribution agrégée issue des données PI. Les montants de capitaux diminuent donc.

6.5 Comparaison des méthodes

Nous nous proposons dans cette partie de comparer l'évolution de la courbe des quantiles obtenue avec la méthode du polya tree avec celles obtenues à partir des données PI et des données AS.

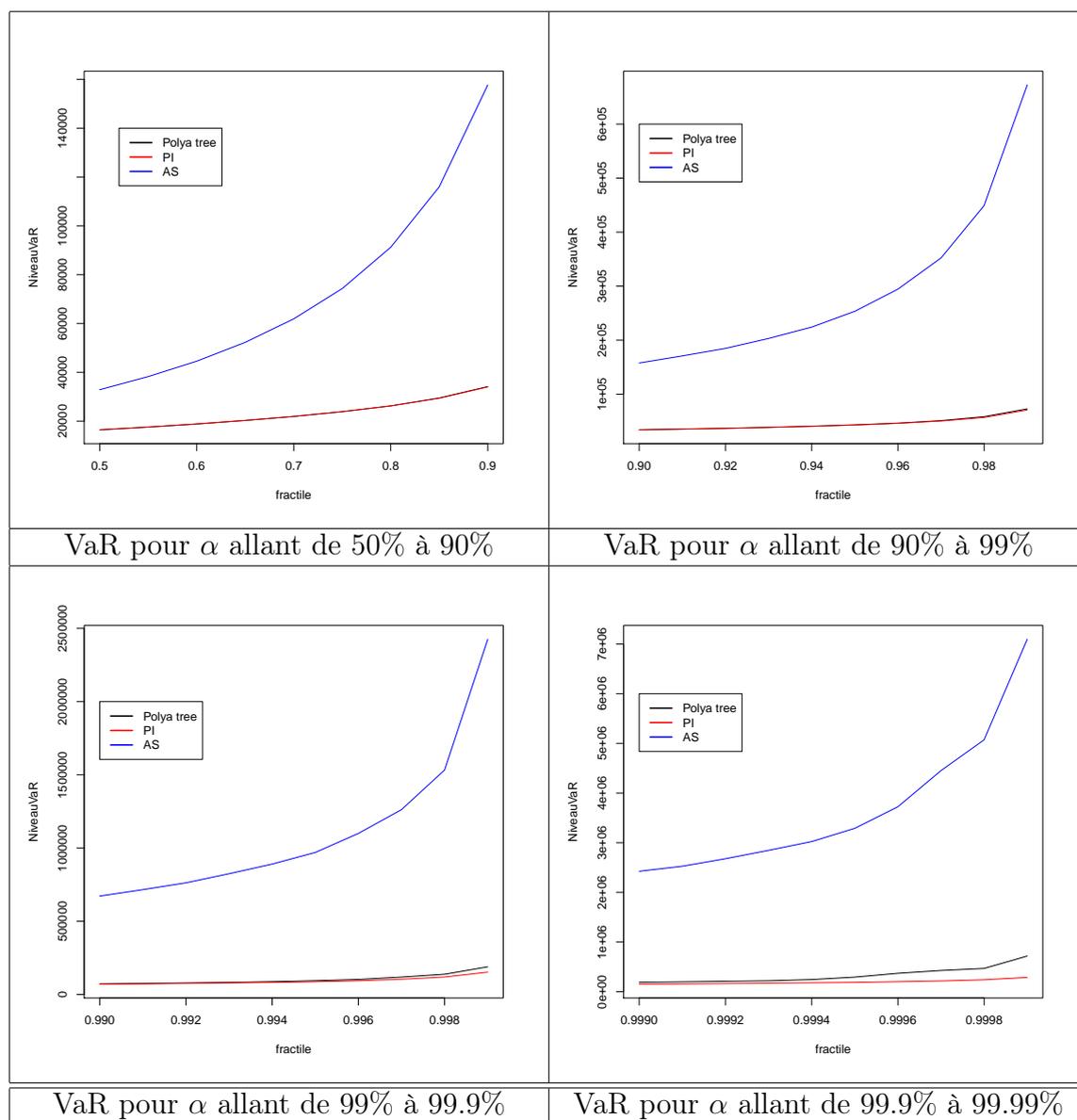


TABLE 5 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode du polya tree pour différents niveaux de fractiles alpha

Pour la méthode du polya tree, nous nous appuyons sur les paramètres suivants : un arbre de 15 niveaux et une valeur de delta égale à 0,01. En outre, 100 000 données sont utilisées pour l'étape d'actualisation. Rappelons que la VaR à 99,9 % obtenue grâce à la méthode du polya tree avec ce paramétrage était très proche de celle obtenue uniquement à partir des données PI. Nous souhaitons observer si cela se vérifie sur l'ensemble de la distribution. Pour cela, nous analysons les quantiles à partir de plusieurs graphiques. Le premier représente l'évolution des quantiles pour chacun des cas considérés pour les fractiles allant de 0,5 à 0,9. Les trois autres graphiques présentent l'évolution des quantiles des queues de distribution.

Pour le paramétrage retenu, ces graphiques soulignent la proximité des quantiles de la distribution de perte agrégée obtenue par la méthode du polya tree et ceux obtenus grâce aux données PI. Comme cela a été souligné précédemment, l'étape d'actualisation modifie la distribution AS et conduit à obtenir une distribution actualisée proche de celle des PI. Ainsi, pour une valeur de delta de 0,01 et pour 100 000 actualisations, le corps de la distribution de pertes agrégées des PI est sensiblement identique à celui de la distribution obtenue par la méthode du polya tree. Graphiquement, les deux courbes sont mêmes confondues. On constate quelques différences au niveau de la queue de distribution, qui sont toutefois très minimes, comme le suggèrent les graphiques présentés.

6.6 Avantages et limites du polya tree

Le principal avantage de cette méthode réside dans sa simplicité. A partir de deux distributions de pertes agrégées : l'une issue de l'information provenant des données de pertes internes et l'autre issue de l'information fournie par les experts, on peut facilement en déduire la distribution a posteriori de pertes agrégées et par conséquent le montant de capital qui nous intéresse. Si l'on dispose de pertes internes en nombre suffisant pour l'ajustement de la log-normale, il est aisé d'en déduire une distribution de pertes agrégées. De même, il est également possible d'utiliser l'histogramme fourni par les experts pour créer une nouvelle distribution de pertes. Contrairement à d'autres méthodes, ces données peuvent être obtenues facilement. Travailler directement sur les pertes agrégées facilite le travail de simulation à effectuer.

En plus de sa simplicité, cette méthode a l'avantage d'être peu coûteuse en termes de temps. Cela permet donc de tester aisément différents choix de paramétrages et de vérifier la robustesse du modèle.

Cette simplicité peut permettre de communiquer facilement sur ce modèle. Les différentes étapes ne résultent pas d'une procédure complexe, ce qui rend ce modèle compréhensible par tous. Les inputs sont clairement définis, les étapes de l'algorithme sont simples et peu nombreuses, ce qui rend le capital obtenu parfaitement compréhensible. Cette condition semble avantageuse dans une unité de gestion des risques dont l'objectif est de communiquer avec le reste de l'entreprise et les autorités de régulation.

Le principal inconvénient de cette approche résulte toutefois du nombre important de paramètres dont la valeur doit être déterminée de manière plus ou moins arbitraire, dans

le cas où ils ne sont pas fournis par les experts. Rappelons qu'il faut fixer notamment le nombre de niveaux dans l'arbre, le paramètre δ et le nombre de données à utiliser pour l'étape d'actualisation de l'arbre. Concernant le nombre de niveaux, il a été démontré au sein de la Société Générale qu'une quinzaine de niveaux suffisent pour obtenir des résultats stables. Le choix du paramètre δ semble plus problématique comme l'ont démontré les analyses de sensibilité. En effet, le montant de capital varie entre 150 000 et 450 000 € lorsqu'on fait varier le paramètre δ entre 0,001 et 0,1. La sensibilité du montant de capital est encore plus importante lorsqu'on considère le nombre de données internes à utiliser pour actualiser l'arbre. Ainsi, la VaR à 99,9 % varie entre 200 000 et 600 000 € en fonction de l'hypothèse retenue pour le nombre de données (entre 5 000 et 100 000). Ces résultats soulignent le manque de robustesse du modèle et suggèrent que ce modèle peut aisément être manipulé afin d'obtenir le montant de capital désiré, à condition qu'il se trouve entre le capital obtenu à partir des données internes et le capital obtenu à partir des analyses de scénario. Les difficultés associées au paramétrage rendent malheureusement ce modèle peu utilisable en pratique. En effet, il est peu probable que ce modèle soit accepté par les autorités de régulation compte tenu de ces lacunes.

7 Méthode par crédibilité

7.1 Objectifs

L'ajustement d'une log-normale aux pertes internes et l'ajustement d'une log-normale sur l'histogramme fourni par les experts fournit deux distributions différentes. L'idée consiste alors à obtenir une distribution de pertes en effectuant des tirages dans l'une ou l'autre des distributions. On pourra ainsi calculer un capital qui s'appuiera à la fois sur les données de pertes internes et sur les données fournies par les experts. On va donc tirer une certaine proportion p de nos valeurs de pertes dans la distribution PI, et une certaine proportion $1-p$ dans la distribution AS. Ce faisant, on accorde une certaine *crédibilité* aux données PI par rapport aux données AS. Si on choisit par exemple $p = \frac{4}{5}$, on réalise 4 tirages sur 5 dans notre distribution PI, et seulement 1 tirage sur 5 dans notre distribution AS ; par ce choix, on accorde plus d'importance aux données PI qu'aux données AS, on considère donc que les données PI sont les plus crédibles. Ce cas de figure correspond au cas où on accorde la même crédibilité aux données PI par rapport aux données AS, quelle que soit la partie de la distribution dans laquelle on effectue le tirage. Ce dernier cas est évidemment peu intéressant et nous allons chercher à affiner celui-ci en prenant différentes valeurs de crédibilité selon la partie de distribution dans laquelle on se situe pour effectuer le tirage. L'idée est typiquement d'accorder plus de crédibilité aux experts pour les grands fractiles de la distribution, c'est à dire pour les très grandes valeurs de perte se situant en queue de distribution. Au contraire, on souhaite accorder plus de crédibilité aux données de pertes internes pour les petits fractiles de la distribution.

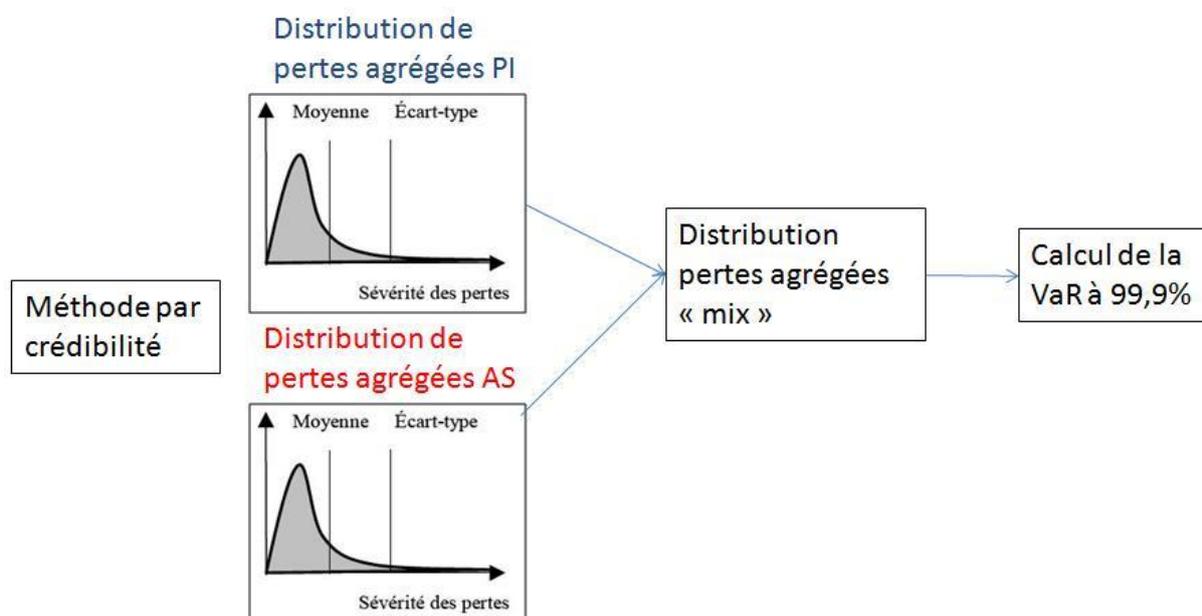


FIGURE 22 – Représentation schématique de la méthode par crédibilité

7.2 Algorithme et mise en oeuvre aux distributions de sévérité

Pour effectuer cette méthode, nous réalisons l'algorithme que nous détaillons dans le paragraphe suivant. Les variables utilisées comme entrées dans cet algorithme sont :

- n-1 fractiles f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , définissant n intervalles $[0; f_1], [f_1; f_2], \dots, [f_{n-1}; 1]$, numérotés de 1 à n.
- n valeurs de crédibilité p_1, p_2, \dots, p_n
- les paramètres μ_{PI} et σ_{PI} de la loi log-normale de sévérité de la maille, obtenus après l'ajustement de cette dernière à l'aide de l'historique des pertes internes.
- les paramètres μ_{AS} et σ_{AS} de la loi log-normale de sévérité de la maille, obtenus après l'ajustement de cette dernière à l'aide de l'analyse de scénario.
- les paramètres de fréquence λ_{PI} et λ_{AS} de la loi de fréquence, obtenu par maximisation de la vraisemblance pour λ_{PI} et donné par les experts en ce qui concerne λ_{AS} .
- nb_{simul} , nombre de simulations souhaitées

L'algorithme est constitué des étapes suivantes :

- On tire U de loi uniforme entre 0 et 1 et on cherche dans lequel des n intervalles de fractiles définis ci-dessus U se situe. On note i le numéro de cet intervalle. Cette étape sert à déterminer dans quel intervalle de fractiles de la distribution nous allons effectuer un tirage.
- Puis on tire V de loi uniforme entre 0 et 1 et on compare V à la valeur de p_i . Cette étape permet de déterminer si le tirage à effectuer a lieu dans la distribution ajustée à l'aide de l'analyse de scénario ou la distribution ajustée à l'aide des pertes internes.
- si $V < p_i$, on tire une valeur dans la distribution de sévérité issue des PI, dont le fractile est compris dans l'intervalle $[f_{i-1}; f_i]$. Pour cela on tire W de loi uniforme entre 0 et 1 et on procède à la transformation suivante : $f = f_{i-1} + W * (f_i - f_{i-1})$. On prend ensuite comme valeur le quantile associé au fractile f dans la distribution de sévérité issue des PI.
- si $V > p_i$, on procède de même mais en tirant la valeur dans la distribution de sévérité issue des AS.
- on recommence les étapes précédentes un nombre nb_{simul} de fois.

Nous pouvons ensuite calculer le montant de capital (Value-at-Risk au niveau 99.9%) par un algorithme de Monte-Carlo similaire à ceux présentés auparavant dans ce mémoire. Pour obtenir une perte agrégée, on simule la loi de fréquence qui fournit le nombre de pertes à sommer. On utilise alors les données de pertes obtenues à partir de l'algorithme ci-dessus. En répétant cette procédure K fois, on peut calculer le quantile à 99.9% de cette distribution de pertes obtenue.

7.2.1 Cas n=0

Il s'agit du cas trivial et peu réaliste où on accorde une unique et même valeur de crédibilité sur l'ensemble des deux distributions PI et AS. On a pris $p=0,7$. On réalise donc 7 tirages sur 10 dans la distribution issue des PI.

7.2.2 Cas n=1

Ce cas correspond au cas où on divise notre distribution de sévérité en deux parties et est déjà un peu plus réaliste. Il permet de diviser en deux domaines de crédibilité. On

considère une crédibilité PI forte sur le corps de distribution et une crédibilité faible sur la queue de distribution. Comme expliqué auparavant, les analyses de scénarios sont surtout utilisées pour les cas de grandes pertes, des pertes "catastrophiques", que l'on n'a pas ou peu dans notre historique de pertes. On considère le fractile $f=0,9$ pour séparer notre distribution en deux, et comme vecteur de crédibilités $[p_1 = 0,8; p_2 = 0,05]$.

7.2.3 Cas n=2

On affine encore le découpage précédent en prenant trois subdivisions des distributions de sévérité. On considère comme vecteur de fractiles $[f_1 = 0,1; f_2 = 0,9]$ et comme vecteur de crédibilités $[p_1 = 0,95; p_2 = 0,75; p_3 = 0,05]$.

7.2.4 Cas n=3

On affine de nouveau le découpage précédent en considérant quatre subdivisions des distributions de sévérité. On considère comme vecteur de fractiles $[f_1 = 0,1; f_2 = 0,5; f_3 = 0,9]$ et comme vecteur de crédibilités $[p_1 = 0,95; p_2 = 0,85; p_3 = 0,65; p_4 = 0,05]$.

7.2.5 Résultats

Maille 1	$K_{n=0}$	$K_{n=1}$	$K_{n=2}$	$K_{n=3}$
VaR à 99,9%	2 267 895	4 284 656	4 477 108	4 620 848

TABLE 6 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €) calculés pour la maille considérée par la méthode dite de crédibilité pour différents choix de n

Ces valeurs sont à comparer aux montants $K_{PI} = 147\,804\text{€}$ et $K_{AS} = 2\,263\,074\text{€}$, car le but est de trouver des valeurs qui se situent entre ces deux montants de capitaux. On remarque que c'est loin d'être le cas ici, mis à part pour la configuration n=1. La principale cause réside dans le choix du paramètre de fréquence. Nous avons retenus ici λ_{PI} qui est supérieur au λ_{AS} . Toutefois, tirant à la fois dans la distribution issue des PI et dans celle issue des AS, il est difficile de dire si on doit choisir λ_{AS} ou λ_{PI} , ou encore un lambda pris comme une variable aléatoire, déterminée de manière semblable au cas K_{mix1} présenté auparavant dans ce mémoire.

7.2.6 Amélioration de l'algorithme avec prise en compte de la fréquence

Pour résoudre ce problème, nous avons pensé à modifier l'algorithme de manière à prendre comme paramètre de fréquence λ_{AS} quand on est amené à effectuer les tirages dans la distribution issue des AS, et à prendre comme paramètre de fréquence λ_{PI} quand on est amené à effectuer les tirages dans la distribution issue des PI.

Résultats En appliquant cette méthode, nous obtenons des capitaux plus faibles, mais qui sont tous de l'ordre de K_{AS} pour les configurations dans lesquelles n est supérieur ou égal à 2. Ceci s'explique sûrement par le fait que lorsque nous effectuons nos tirages, les plus grandes valeurs sont toujours celles issues des tirages dans la distribution AS, qui se trouveront alors en queue de la distribution des pertes et seront les valeurs vraiment

utiles pour déterminer le quantile à 99,9%. Les valeurs tirées dans la distribution des PI sont alors presque "inutiles" pour le calcul du capital.

Maille 1	VaR(99,9%)	Borne inférieure	Borne supérieure	Taille de l'intervalle
$K_{n=0}$	1 174 358	1 086 432	1 283 737	197 305
$K_{n=1}$	2 309 503	2 145 302	2 515 141	369 839
$K_{n=2}$	2 473 008	2 265 636	2 767 868	502 232
$K_{n=3}$	2 714 136	2 438 146	2 987 739	549 593

TABLE 7 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €) calculés pour la maille considérée par la méthode dite de crédibilité améliorée pour différents choix de n

7.3 Application de l'algorithme aux pertes agrégées

7.3.1 Principe et algorithme

Afin de résoudre le problème lié au choix du paramètre de fréquence, nous avons pensé à effectuer cet algorithme non plus sur les distributions PI et AS de sévérité mais directement sur les distributions PI et AS de pertes agrégées au niveau de la maille, même si cette méthode est plus difficile à justifier par une approche *gestion du risque*. Nous pouvions avoir une expression analytique pour nos tirages dans les distributions PI et AS de sévérité car celles-ci ont été ajustées par des lois log-normales et nous pouvions utiliser l'inverse de la fonction de répartition de ces lois pour obtenir nos valeurs tirées. Ceci n'est pas possible quand on effectue nos tirages dans les distributions de pertes agrégées, car nous ne connaissons pas leur loi et fonction de répartition³⁰. Nous passons donc uniquement par de la simulation numérique. Cette méthode a pour avantage de supprimer la question du choix de λ , car nous utilisons directement les pertes agrégées de telle manière que la fréquence a déjà été intégrée.

Pour effectuer cette méthode, nous réalisons l'algorithme suivant. Les entrées nécessaires de l'algorithme sont :

- n-1 fractiles f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , définissant n intervalles $[0; f_1], [f_1; f_2], \dots, [f_{n-1}; 1]$, numérotés de 1 à n.
- n valeurs de crédibilité p_1, p_2, \dots, p_n
- un échantillon $S = (S_1, S_2, \dots, S_K)$ de valeurs de pertes agrégées simulées à l'aide des PI au niveau de la maille, on prend ici $K = 100\ 000$
- un échantillon $T = (T_1, T_2, \dots, T_K)$ de valeurs de pertes agrégées simulées à l'aide des AS au niveau de la maille, on prend ici $K = 100\ 000$
- nb_{simul} , nombre de simulations souhaitées

L'algorithme est le suivant :

- On tire U de loi uniforme entre 0 et 1 et on cherche dans lequel des n intervalles de fractiles définis ci-dessus U se situe. On note i le numéro de cet intervalle. Cette étape sert à déterminer dans quels fractiles de la distribution nous allons effectuer un tirage.

30. Voir les explications page 27 du mémoire

- Puis on tire V de loi uniforme entre 0 et 1 et on compare V à la valeur de p_i . Cette étape permet de déterminer si le tirage à effectuer a lieu dans la distribution de pertes agrégées obtenue par méthode de Monte-Carlo à l'aide de l'analyse de scénario ou la distribution de pertes agrégées obtenue à l'aide des pertes internes.
- si $V < p_i$, on tire dans l'échantillon de pertes agrégées issue des PI, on tire une valeur donc le fractile est compris dans l'intervalle $[f_{i-1}; f_i]$. Pour cela on tire W de loi uniforme entre 0 et 1 et on procède à la transformation suivante : $f = f_{i-1} + W * (f_i - f_{i-1})$. On prend ensuite le quantile associé au fractile f .
- si $V > p_i$, on procède de même mais en tirant la valeur dans l'échantillon de pertes agrégées issue des AS.
- on recommence les étapes précédentes un nombre nb_{simul} de fois.

Cas étudiés Nous avons appliqué cet algorithme pour n allant de 0 à 3, c'est à dire pour une distribution de pertes agrégées non découpée ($n=0$) à une distribution de pertes agrégées découpée en quatre intervalles ($n=3$). En ce qui concerne les paramètres d'entrées de l'algorithme, nous avons utilisé les mêmes que précédemment.³¹

7.3.2 Résultats

L'application de l'algorithme aux distributions de pertes agrégées à la place de son application aux distributions de sévérité de pertes individuelles donne des résultats comparables à ceux obtenus précédemment. On obtient, toujours à l'exception du cas $n=0$, des montants de capitaux très proches de K_{AS} .³²

Maille 1	VaR(99,9%)	Borne inférieure	Borne supérieure	Taille de l'intervalle
$K_{n=0}$	1 436 223	1 268 817	1 580 941	312 124
$K_{n=1}$	2 662 347	2 474 096	3 142 963	
$K_{n=2}$	2 452 178	2 319 055	2 662 224	343 169
$K_{n=3}$	2 477 269	2 314 247	2 777 130	462 882

TABLE 8 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €) calculés pour la maille par la méthode dite de crédibilité appliquée aux distributions de pertes agrégées pour différents choix de n

7.4 Découpage plus fin de la crédibilité, utilisation d'une fonction de crédibilité décroissant linéairement

7.4.1 Principe

Nous avons utilisé jusqu'à présent par souci de simplicité et comme première approche des fonctions en escalier pour la crédibilité p telles que celle représentée ci-dessous. Afin d'améliorer l'approche, nous avons également réalisé un découpage beaucoup plus fin de la crédibilité, nous faisons décroître de manière continue la crédibilité sur l'intervalle $[0,1]$. De manière intuitive et par souci de simplicité, nous avons uniquement considéré des

31. Voir pages 78 et 79 pour le choix des paramètres

32. Cf. page 80 pour une possible explication

décroissances linéaires de la crédibilité.

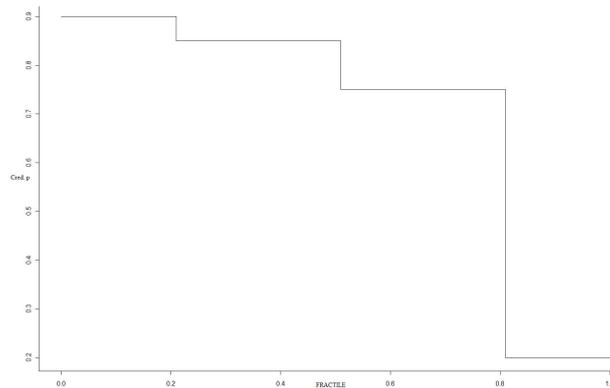


FIGURE 23 – Exemple type de fonction de crédibilité en escalier en fonction du fractile de la distribution choisie auparavant

7.4.2 Application et résultats

Nous avons utilisé la fonction de crédibilité représentée sur le graphique suivant. Celle-ci est très haute pour les petits fractiles, avec un palier égal à 0,9 pour les fractiles allant de 0 à 0,1, puis décroît linéairement jusqu'au fractile de 0,9 où la crédibilité atteint un nouveau palier égal à 0,1.

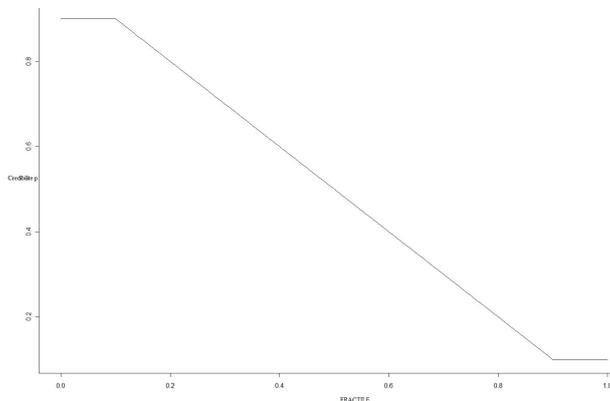


FIGURE 24 – Nouvelle crédibilité en fonction du fractile de la distribution

Application à la distribution de sévérité de perte et à la distribution de pertes agrégées : résultats

Le montant de capital calculé avec une fonction de crédibilité linéaire donne un montant de capital légèrement plus élevé. Ceci s'explique par le fait que nous sommes amenés à effectuer plus souvent des tirages dans la distribution de pertes agrégées issue des analyses de scénario, lorsqu'on emploie cette fonction de crédibilité.

7.5 Comparaison des méthodes

Ci-dessous est présenté le tracé de la fonction VaR de la distribution de pertes obtenue par la méthode de crédibilité dans le cas $n=4$ et dans le cas d'une crédibilité linéaire, et ce pour différents niveaux de fractile α ; un premier graphe pour des niveaux α de 50% à

Maille 1	VaR(99,9%)	Borne inférieure	Borne supérieure	Taille de l'intervalle
	2 615 798	2 251 206	3 035 959	784 753

TABLE 9 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €) calculés pour la maille par la méthode dite de crédibilité appliquée aux distributions de pertes agrégées avec la fonction de crédibilité représentée ci-dessus

90% ; un second pour α de 90% à 99% ; un troisième pour α de 99% à 99,9% ; et enfin un dernier pour α de 99,9% à 99,99%. On remarque qu'autour du niveau $\alpha=99,9\%$, niveau réglementaire, la VaR pour la méthode par crédibilité est très proche de la VaR de la méthode AS. Pour le corps de distribution, ces deux dernières sont plus distinctes.

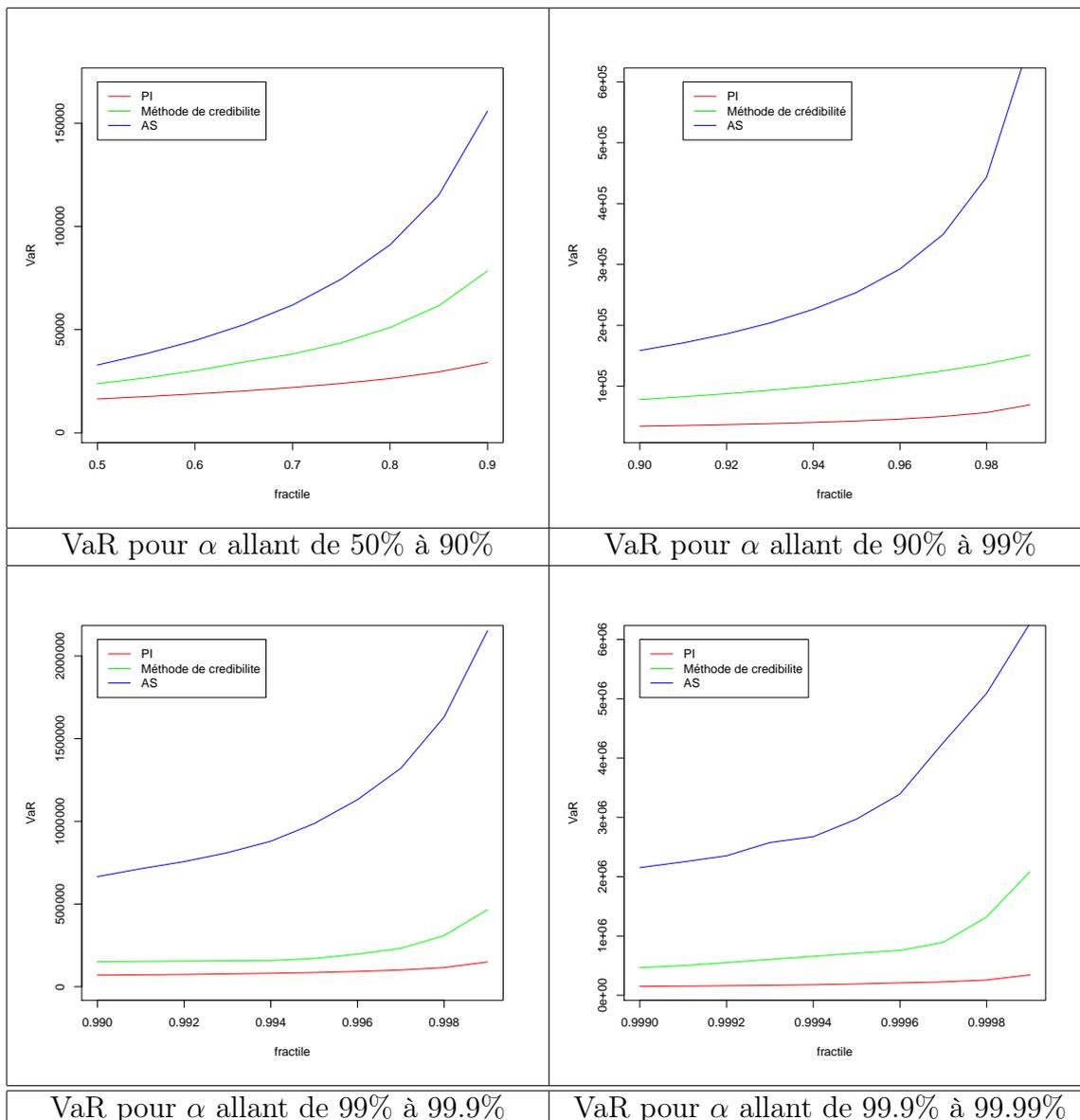


TABLE 10 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode de crédibilité avec la fonction de crédibilité en escalier dans le cas $n=4$ et différents niveaux de fractiles alpha

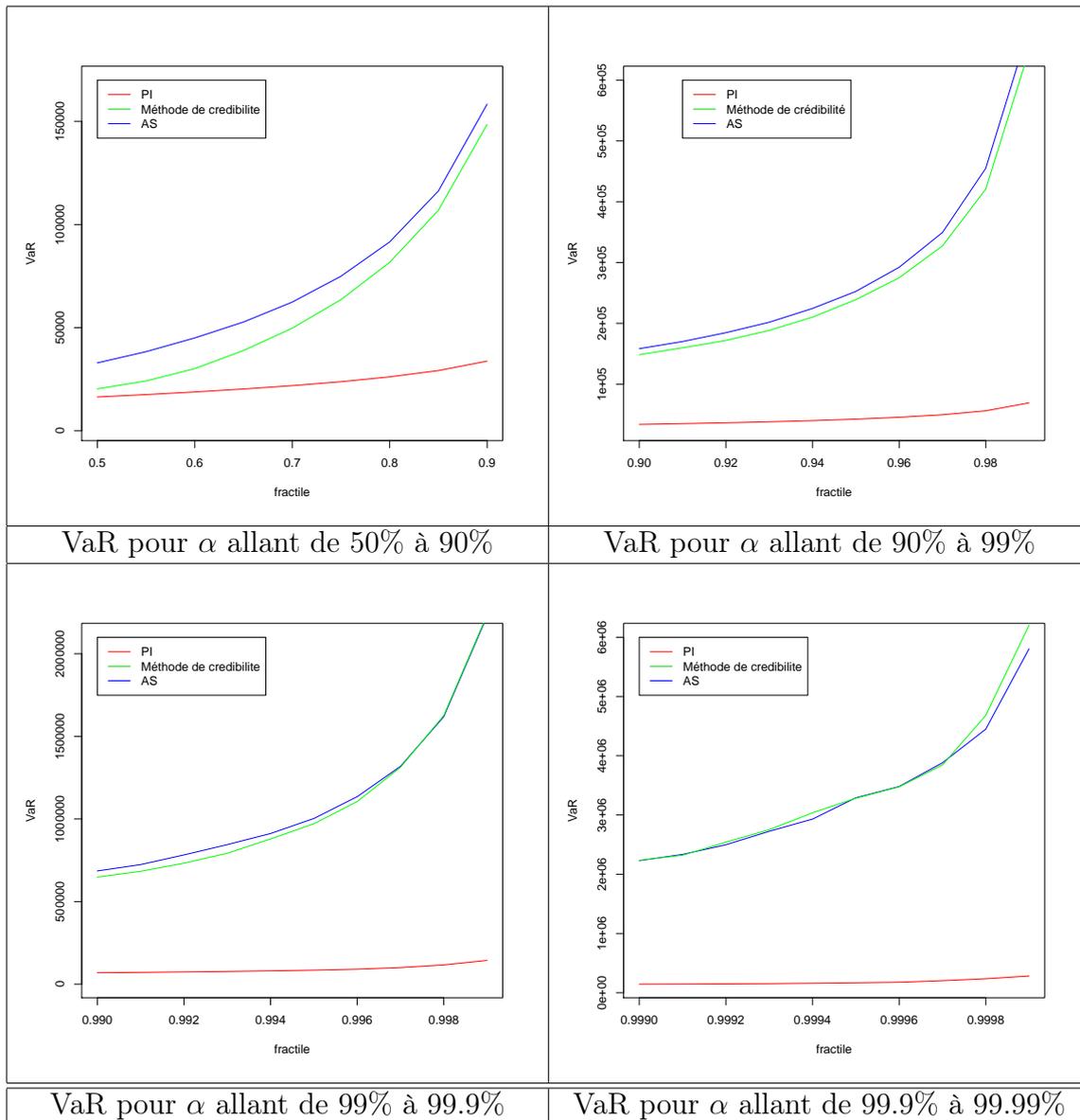


TABLE 11 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode de crédibilité avec la fonction de crédibilité linéaire et différents niveaux de fractiles alpha

7.6 Analyse de sensibilité

On se place pour cette partie dans la configuration du cas présenté ci-dessus d'une fonction de crédibilité en escalier et $n=3$. Les valeurs de fractiles et de crédibilités en entrée de notre algorithme ont été dans ce cadre choisies par nous même d'une manière qui nous semblait réaliste. Si cette méthode venait à être appliquée par la Société Générale, tous ces paramètres d'entrée de l'algorithme seraient fournis par les experts. On cherche à observer si le capital calculé est très sensible ou non aux deux principaux paramètres, à savoir le vecteur de crédibilité et le vecteur des fractiles.

Changement des crédibilités sur les intervalles On cherche à mesurer l'impact d'un changement de crédibilité sur les différents intervalles des fractiles. On part pour

rappel de 4 intervalles de fractiles : $[0;0,1]$, $[0,1;0,5]$, $[0,5;0,9]$, $[0,9;1]$ et donc respectivement de 4 niveaux de crédibilité qui sont 0,95 ; 0,85 ; 0,65 ; 0,05. On calcule le capital dans les 10 cas suivants en changeant les niveaux de crédibilité. On baisse les deux premiers de 0.01 dans chacun des cas, tandis qu'on augmente les deux suivants de 0.01 dans chacun des cas. On aboutit donc pour le dernier cas aux niveaux de crédibilité 0,85 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,15. On accorde donc au fur et à mesure moins de confiance dans les pertes internes pour les petits niveaux de pertes tandis qu'on en accorde plus pour les grands niveaux de perte. On n'observe pas de sensibilité significative du montant de capital au choix de crédibilité.

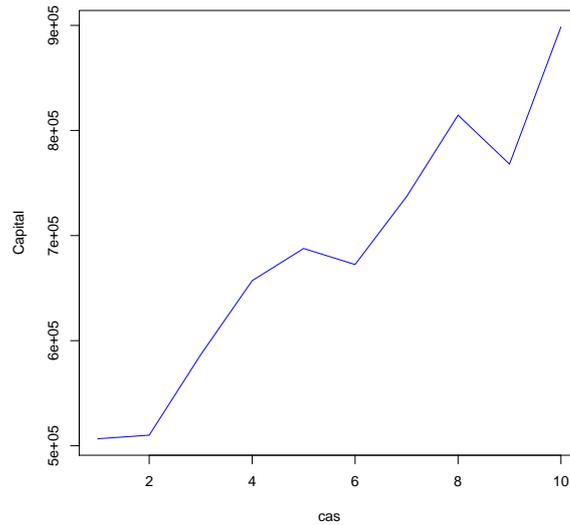


FIGURE 25 – Capital associé au risque opérationnel pour les 10 cas présentés ci-dessus, en changeant le vecteur de crédibilité

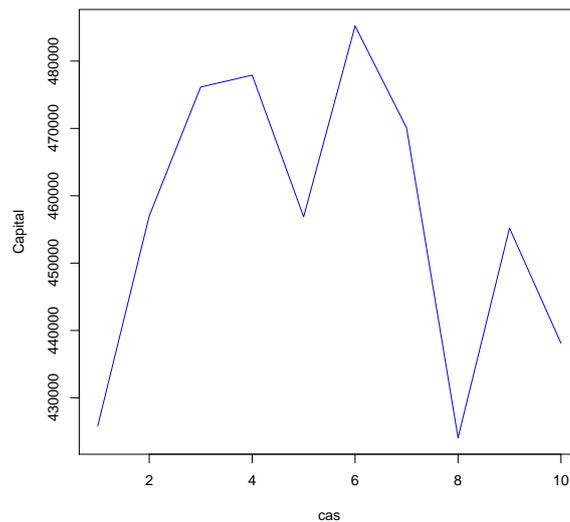


FIGURE 26 – Capital associé au risque opérationnel pour les 10 cas présentés ci-dessus, en changeant les intervalles de fractiles

Changement des intervalles de fractiles On cherche à mesurer cette fois la sensibilité du capital à un changement d'intervalles de crédibilité. On part pour rappel de 4 intervalles de fractiles : $[0;0,1]$, $[0,1;0,5]$, $[0,5;0,9]$, $[0,9;1]$ et donc respectivement de 4 niveaux de crédibilité qui sont 0,95 ; 0,85 ; 0,65 ; 0,05. On calcule le capital dans les 10 cas suivants en changeant les intervalles de fractiles. On agrandit le premier intervalle de 0.02 dans chacun des cas, tandis qu'on agrandit également le dernier de 0.02. On aboutit donc pour le dernier cas aux intervalles $[0;0,3]$, $[0,3;0,5]$, $[0,5;0,7]$, $[0,7;1]$. On accorde donc au fur et à mesure plus de confiance aux pertes internes. On n'observe pas de sensibilité significative du montant de capital au choix des intervalles.

7.7 Avantages et limites de l'approche par crédibilité

Cette méthode permet de déterminer un unique montant de capital réglementaire en partant de deux distributions de pertes agrégées, l'une issue des PI, l'autre des AS. Le principe de cette approche consiste alors à effectuer des tirages dans l'une et l'autre des distributions en appliquant des poids reflétant la confiance accordée à chacune des sources de données. Par ailleurs, elle a l'avantage de s'appuyer sur des techniques simples et de conduire à un montant de capital transparent. De plus, le montant de capital obtenu se trouve entre les deux montants de capitaux K_{PI} et K_{AS} calculés initialement, sauf dans le cas expérimental de la section 6.2 où se posait le problème du choix de la fréquence. Ceci répond à l'intuition de départ et est de plus une bonne chose dans l'optique d'économiser du capital par rapport à la méthode appliquée actuellement à la Société Générale.

Nous avons certes besoin d'informations supplémentaires de la part des experts par rapport à l'information déjà fournie actuellement, en effet ceux-ci doivent nous fournir un découpage du support de la loi des pertes agrégées et les différentes valeurs de crédibilité associées. Mais nous pensons que celle-ci est une information que les experts sont en mesure d'appréhender et livrer à l'équipe de gestion des risques.

8 Comparaison des méthodes

Dans cette partie, nous présentons une comparaison des quatre méthodes étudiées précédemment, à savoir méthode bayésienne 1, méthode bayésienne 2, méthode du Polya Tree, et méthode par crédibilité, aussi bien au niveau quantitatif que qualitatif. En particulier, nous nous intéressons aux points suivants :

- De quoi a-t-on besoin dans le cadre de chacune des méthodes ? Part-on des distributions de sévérité ajustées ? Utilise-t-on de manière directe l'histogramme fourni par les experts ?
- Les résultats obtenus dans chacune des méthodes sont-ils comparables d'un point de vue numérique ?
- La communication avec les experts. Les inputs nécessaires à la méthode sont-ils facilement collectibles auprès des experts ?
- Existe-t-il une forte sensibilité de la méthode au paramétrage retenu ?
- Opacité du capital obtenu.

8.1 Les inputs utilisés dans chacune des méthodes

Pour chacune de nos méthodes, nous disposons d'un historique de pertes internes d'une longueur de 9,5 années ainsi que d'un histogramme divisant le support de la loi de sévérité en buckets et associant une probabilité qu'une perte se situe lors de son occurrence dans un bucket donné. Nous nous servons alors néanmoins de manière différente de ces données pour chacune des quatre méthodes, celles-ci se distinguant tout d'abord par les inputs nécessaires au calcul du capital réglementaire. Les deux méthodes bayésiennes s'appuient sur des distributions de Poisson pour la fréquence, et des distributions log-normales pour la sévérité, obtenues après ajustement à partir de l'historique des pertes internes et de l'histogramme fourni par les experts. On utilise donc dans le cadre de ces deux méthodes des distributions de pertes individuelles. Au contraire, dans les méthodes Polya Tree et celle par crédibilité, on utilise des distributions de pertes agrégées, obtenues par simulation de Monte-Carlo.³³

Certains inputs sont toutefois spécifiques à chacune des méthodes considérées. Dans le cas de la méthode bayésienne 1, les experts doivent en outre fournir des informations nécessaires à la détermination des paramètres des lois a priori. Ils doivent par exemple fournir la probabilité que le paramètre λ de la loi de fréquence se trouve dans un intervalle donné. Concernant la méthode bayésienne 2, on se sert d'une loi a priori non informative. L'utilisation de la méthode du Polya Tree nécessite de fixer un certain nombre de paramètres, comme la profondeur de l'arbre, le facteur d'actualisation δ et le nombre d'actualisations de l'arbre à effectuer. Enfin, la méthode par crédibilité requiert la donnée par les experts d'une crédibilité des données PI par rapport aux données AS, ce sur différents intervalles du support de la distribution des pertes agrégées.

8.2 Comparaison numérique des résultats

A l'aide de chacune des méthodes étudiées dans ce mémoire, nous avons pu calculer une distribution finale de pertes agrégées ainsi que la Value-at-Risk pour différents niveaux α ,

33. Conférer partie 2.3

en particulier pour $\alpha = 99,9\%$ qui correspond au niveau imposé par le cadre réglementaire. Nous obtenons des résultats hétérogènes. Dans tous les cas, le montant de capital réglementaire obtenu est situé entre K_{PI} et K_{AS} , comme attendu. Néanmoins, certaines méthodes, comme les méthodes bayésiennes 1 et 2 et celle du Polya Tree, donnent un montant de capital particulièrement proche de K_{PI} tandis que la méthode par crédibilité permet d'obtenir un montant de capital proche de K_{AS} pour la maille et le paramétrage retenus.³⁴

Méthode	VaR(99,9%)
K_{PI}	147 804
K_{AS}	2 152 985
Bayésien 1 (K_{mix3})	138 519
Bayésien 2 (sans seuil, σ connu)	210 678
Polya Tree	190 126
Crédibilité	2 615 798

TABLE 12 – Récapitulatif des montants de capitaux (exprimés en €) calculés pour la maille via chacune des méthodes

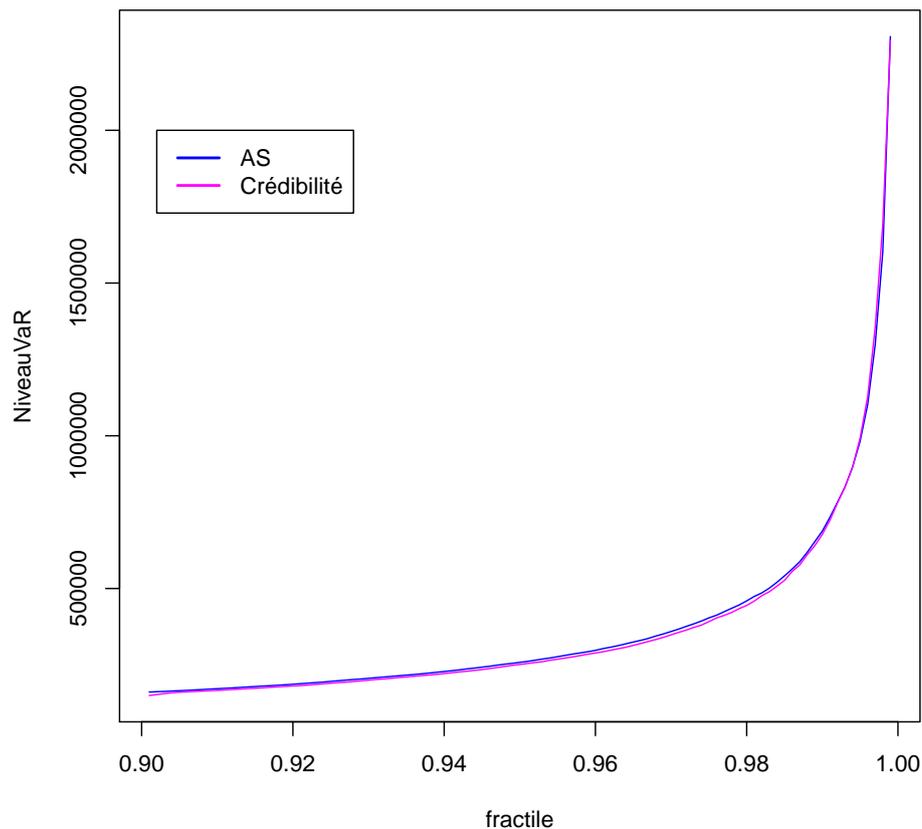


FIGURE 27 – Tracé de la VaR pour la méthode par crédibilité.

34. Rappelons que K_{PI} est le montant de capital réglementaire calculé uniquement à l'aide de l'historique de pertes internes et que K_{AS} est celui calculé à l'aide de l'analyse de scénario fournie par les experts.

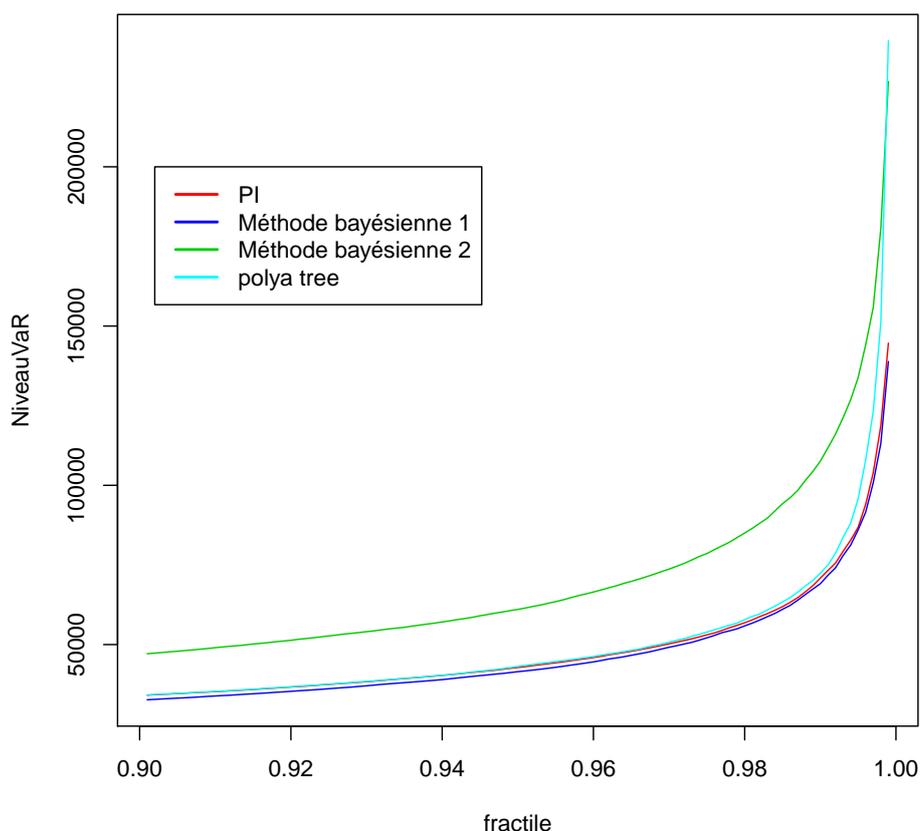


FIGURE 28 – Tracé de la VaR pour les méthodes bayésiennes 1 et 2, et celle du Poly Tree.

Les données qui nous ont été fournies³⁵ ont le désavantage de fournir deux montants de capital très différents. Cela est assez problématique dans le cas de la méthode par crédibilité, les deux échantillons de pertes agrégées PI et AS simulés étant en effet très différents. Cela se traduit par l'obtention d'un "échantillon" mixte dont les pertes les plus importantes sont toutes issues de l'échantillon de pertes agrégées AS, conduisant à obtenir une queue de distribution comparable à celle de l'échantillon de pertes agrégées AS, et par conséquent une Value-at-Risk à 99,9% similaire.

8.3 Communication avec les experts

L'un des aspects importants de la gestion du risque opérationnel est la communication avec les experts. En effet, l'historique de pertes internes ne permet pas de prendre en compte les pertes à sévérité élevée et à fréquence faible. C'est pourquoi l'analyse de scénario est rendue nécessaire pour avoir une vision prospective afin d'anticiper les pertes futures. Néanmoins, le montant de capital calculé actuellement à la Société Générale ne combine pas de manière satisfaisante ces deux sources de données. Afin de résoudre ce défaut, tous les modèles étudiés dans ce mémoire visent à combiner information interne et information des experts. Certaines de nos méthodes utilisent une information des experts,

³⁵. Rappelons qu'il s'agit de données simulées pour une maille, et non de vraies données internes à la Société Générale

que ces derniers sont déjà habitués à fournir à l'équipe de gestion du risque opérationnel, à savoir un histogramme divisant le support de la loi de sévérité en buckets et associant une probabilité qu'une perte se situe lors de son occurrence dans un bucket donné. Toutefois, certaines des méthodes présentées nécessitent des inputs supplémentaires. Or les experts ne peuvent fournir à l'équipe de gestion du risque opérationnel que des données qu'ils sont en mesure d'appréhender facilement et de comprendre, il peut par exemple s'agir d'une fréquence de pertes, d'un montant moyen de pertes, de probabilités intuitives. La plate-forme de communication entre experts et équipe de gestion des risques est donc un critère déterminant dans le choix de la méthode pouvant être appliquée. En effet, ces deux acteurs doivent être en mesure d'échanger sur des sujets compréhensibles de part et d'autre. Dans le cas de la méthode bayésienne 1, les paramètres des lois a priori peuvent difficilement être directement demandés aux experts. C'est pourquoi il est nécessaire de passer par des méthodes de détermination des paramètres a priori utilisant d'autres données. Cela complexifie donc l'utilisation de cette méthode. De plus, les données demandées aux experts dans cette méthode restent difficilement accessibles. L'utilisation de la méthode bayésienne 2 permet de pallier à ce problème, en ayant recours à une loi a priori non informative. La méthode du Polya Tree ne nécessite aucune donnée supplémentaire. La méthode par crédibilité requiert quant à elle de la part des experts la donnée d'une crédibilité des données PI par rapport aux données AS, ce sur différents intervalles du support de la distribution des pertes agrégées. Mais nous pensons que ce vecteur de crédibilité que les experts ont à fournir pour cette méthode constitue un élément intuitif pour les experts et pourrait donc être accessible aisément.

8.4 Sensibilité du capital calculé

Dans chacune des méthodes proposées, le montant de capital calculé est fonction de nombreux paramètres dont la détermination peut être source d'imprécisions, voire être partiellement arbitraire. Le paramétrage est ainsi une étape importante dans la mesure où les montants de capitaux obtenus peuvent être sensibles aux choix de paramétrage effectués. Nous avons ainsi cherché, pour chacune des méthodes, à mesurer la sensibilité de la VaR à 99,9% aux différents paramètres. Dans la méthode du Polya Tree, le montant de capital est très sensible à l'ensemble des paramètres, dont le nombre de données PI nécessaires pour la phase d'actualisation. Dans la méthode bayésienne 1, les paramètres a priori n'ont pas d'impact sur le montant de capital calculé pour la maille considérée. Enfin, dans la méthode par crédibilité, le montant de capital est peu sensible au paramétrage.

8.5 Opacité du capital et point de vue du régulateur

La Société Générale utilise un modèle interne pour calculer le montant de capital réglementaire associé au risque opérationnel. Celui-ci doit être validé par le régulateur, plus précisément par l'Autorité de Contrôle Prudentiel. Outre de nombreuses contraintes telles que la bonne documentation du modèle, le contrôle des inputs considérés, les modèles doivent être le plus transparent possible dans la mesure où ces derniers ne doivent pas être facilement manipulables par la banque. Les différentes méthodes reposent sur des approches mathématiques et simulations numériques plus ou moins complexes. Ceci a pour conséquence d'obtenir en output un montant de capital plus ou moins transparent, c'est à dire dont l'origine est plus ou moins facile à appréhender. La méthode bayésienne 2 s'appuie sur des méthodes numériques assez récentes et complexes comme l'algorithme

de Metropolis-Hastings, pouvant nuire à la compréhension et la transparence du modèle. De plus, la statistique bayésienne est généralement plus difficile à comprendre que la statistique classique. Au contraire, les méthodes Polya Tree et par crédibilité s'appuient sur des algorithmes simples, dont chaque étape est facilement discernable.

8.6 Récapitulatif

Méthode	Inputs	Résultats numériques
Méthode bayésienne 1	distribution de fréquence et de sévérité lois a priori	Proche de K_{PI}
Méthode bayésienne 2	distribution de fréquence et de sévérité loi a priori non informative	Proche de K_{PI}
Polya Tree	distribution de pertes agrégées paramétrage	Proche de K_{PI}
Crédibilité	distribution de pertes agrégées vecteur de probabilités	Proche de K_{AS}
Méthode	Communication avec les experts	Sensibilité du capital
Méthode bayésienne 1	Problèmes de détermination des lois a priori	Faible
Méthode bayésienne 2	Pas de problèmes	Faible
Polya Tree	Pas de problèmes	Importante
Crédibilité	Pas de problèmes	Faible
Méthode	Opacité du capital	
Méthode bayésienne 1	Moyenne	
Méthode bayésienne 2	Forte	
Polya Tree	Moyenne	
Crédibilité	Faible	

TABLE 13 – Récapitulatif des différentes méthodes

Conclusion

La prise en compte du risque opérationnel dans le calcul du capital réglementaire dans le milieu bancaire est particulièrement récente puisqu'elle résulte de l'implémentation des accords de Bâle 2. Par conséquent, les modèles internes utilisés pour calculer ce dernier doivent encore être améliorés. Or, lorsque les banques choisissent l'approche par modèle interne, elles doivent s'appuyer sur un historique de pertes mais aussi sur des analyses de scénario. A l'heure actuelle, deux montants de capitaux (K_{PI} et K_{AS}) sont calculés, chacun s'appuyant uniquement sur l'une de ces deux sources de données. Un arbitrage entre les deux doit alors être effectué. Dans ce mémoire, nous avons donc proposé différentes méthodes visant à combiner ces deux sources de données afin de calculer un capital s'appuyant sur l'ensemble de l'information disponible.

Nous avons tout d'abord analysé une méthode, intitulée méthode bayésienne 1³⁶, s'appuyant sur des techniques de statistique bayésienne et se restreignant plus particulièrement au cadre des lois conjuguées. Dans cette approche, certains paramètres des lois de fréquence et de sévérités sont considérés comme des variables aléatoires. L'objectif consiste donc à déterminer les lois a posteriori de ces paramètres afin de pouvoir disposer de tous les paramètres des lois de fréquence et de sévérité. L'information fournie par les experts doit permettre de déterminer les paramètres des lois a priori. Les données de pertes internes servent alors à actualiser les paramètres a priori afin de déterminer la loi a posteriori. Pour la maille considérée, les résultats obtenus à l'aide de cette méthode sont relativement proches de ceux obtenus uniquement à partir des pertes internes. La principale difficulté de cette méthode résulte des problèmes de communication pouvant exister entre les experts et l'unité de gestion des risques. En effet, les données exigées pour l'application de cette méthode peuvent parfois être difficiles à appréhender d'un point de vue purement bancaire.

Pour remédier à cette difficulté, une deuxième méthode³⁷, nommée méthode bayésienne 2 a été envisagée. Comme précédemment, l'objectif consiste à obtenir les lois a posteriori des paramètres considérés comme aléatoires dans les lois de fréquence et de sévérité. Toutefois, cette approche s'appuie sur des lois a priori non informatives, permettant de supprimer les problèmes résultant de la détermination des paramètres a priori. Désormais, les informations fournies par les experts se combinent avec les données de pertes internes pour déterminer la loi a posteriori. Contrairement à la précédente, cette méthode ne se restreint plus au cadre des lois conjuguées, grâce à l'utilisation de l'algorithme de Metropolis Hastings. A nouveau, les résultats obtenus sont très proches de ceux découlant de l'utilisation unique des pertes internes pour la maille étudiée. Si cette méthode permet de résoudre les problèmes de données, elle a toutefois l'inconvénient de reposer sur des techniques plus complexes, rendant le montant de capital plus opaque.

La troisième méthode proposée, intitulée méthode du Polya Tree³⁸, s'appuie sur les distributions de pertes agrégées. La première étape consiste à créer un arbre en s'appuyant sur celle obtenue grâce aux informations des experts. La seconde obtenue à partir des

36. Cf. page 35 pour le détail de la méthode

37. Cf. page 53 pour le détail de la méthode

38. Cf. page 67 pour le détail de la méthode

données de pertes internes permet, quant à elle, d'actualiser cet arbre. Pour le paramétrage retenu, les résultats découlant de la méthode du Polya Tree sont très proches de ceux obtenus à partir des pertes internes. Cette méthode se caractérise par sa simplicité. Elle nécessite toutefois de fixer un certain nombre de paramètres. Or le capital réglementaire présente une sensibilité importante à ce paramétrage. Par conséquent, ce modèle peut être facilement manipulé pour obtenir le montant de capital désiré et n'est donc pas satisfaisant d'un point de vue réglementaire.

La méthode par crédibilité est la dernière méthode étudiée³⁹. Elle s'appuie sur la distribution de pertes agrégées obtenue uniquement à partir des données de pertes internes et de celle obtenue uniquement à partir des analyses de scénario. Elle consiste alors à effectuer des tirages dans l'une ou l'autre des distributions. Pour la maille étudiée, les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus essentiellement à partir des données fournies par les experts. Cela résulte de l'écart important existant entre K_{PI} et K_{AS} . Cette méthode a l'avantage de nécessiter un nombre restreint de données. Elle s'appuie en outre sur une approche simple et transparente. Enfin, elle nécessite un paramétrage très limité. Ces différents atouts suggèrent que ce modèle est le plus acceptable du point de vue du régulateur.

Ces différents travaux ont mis en exergue la nécessité de prendre en compte les problèmes d'interaction pouvant exister entre les experts et l'unité de gestion des risques. Le choix d'un modèle doit donc être concerté. Certaines méthodes, comme la méthode bayésienne 1, s'avèrent ainsi difficilement applicables en pratique. Un autre problème réside dans l'absence de point de référence pour le montant de capital réglementaire devant être obtenu. En effet, l'historique des pertes constitue un indicateur imparfait, puisque le montant de capital réglementaire est une VaR à 99,9 % à horizon un an. Cette valeur n'est donc pas sensée correspondre au montant de la perte annuelle. Cela rend donc difficile de départager les méthodes puisque la "vraie valeur" de la VaR à 99,9 % est inconnue.

Notre étude s'est restreinte aux problématiques de combinaison des sources de données au niveau d'une seule maille. Elle pourrait notamment être complétée par la prise en compte des questions d'agrégation du capital.

39. Cf. page 77 pour le détail de la méthode

Références

- [1] Aue F., Kalkbrener M., 2007, "LDA at Work"
- [2] Banque de France, 2003, "Le risque opérationnel, pratiques et perspectives réglementaires"
- [3] Berger J. O., 1985, "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis" 41
- [4] Bühlmann H., Shevchenko P.P., Wütrich M.V., 2006, "A "Toy" Model for Operational Risk Quantification using Credibility Theory"
- [5] Commission Européenne, 2010, "QIS5 Technical Specifications"
- [6] Comité de Bâle, 1998, "Operational Risk Management"
- [7] Comité de Bâle, 2001, "Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk"
- [8] Comité de Bâle, 2003, "Saines pratiques pour la gestion et la surveillance du risque opérationnel"
- [9] Comité de Bâle, 2004, "Convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres" 24
- [10] EIOPA, 2011, "EIOPA Report on the fifth Quantitative Study (QIS 5) for Solvency 2"
- [11] FAA, 2000, "System Safety Handbook"
- [12] Fera-Dominguez J., Jimene-Rodriguez E. J., Martin-Marin J. L., 2007, "Economic capital for Operational Risk : Applying the Loss Distribution Approach"
- [13] Frachot A., Georges P., Roncalli T., 2001, "Loss Distribution Approach for Operational Risk"
- [14] Frachot A., Moudoulaud O., Roncalli T., 2003, "Loss Distribution Approach in Practice"
- [15] Gamonet J., 2006, "Modélisation du risque opérationnel dans l'assurance"
- [16] Lavine M., 1992, "Some aspects of polya tree distributions for statistical modelling" 69
- [17] Hastings W., 1970, "Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and their Applications"
- [18] Jezzini M., "Modélisation du risque opérationnel"
- [19] Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E., 1953, "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines"
- [20] Moosa Imad A. , 2007, "Operational Risk Management"
- [21] ONB, "Guidelines on Operational Risk Management" 17
- [22] Parlement européen, 2009, "Directive du Parlement Européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance directe et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité 2)" 15
- [23] Parlement européen, 2006, "Directive 2006/48/CE du Parlement européen et du Conseil du 14 juin 2006 concernant l'accès à l'activité des établissements de crédit et son exercice"
- [24] Peters G. W., Sisson S. A. "Bayesian Inference, Monte Carlo Sampling and Operational Risk"

- [25] Robert C. P., 2007, "The Bayesian Choice - From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation 2ed" 53
- [26] Robert C., Casella G., 2010, "Introducing Monte Carlo Methods with R"
- [27] Shevchenko P.P., Wütrich M.V., 2006, "The Structural Modelling of Operational Risk via Bayesian inference : Combining Loss Data with Expert Opinions"
- [28] Schevchenko P. V., 2011, "Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference"
- [29] Yasuda Y., 2003, "Application of Bayesian Inference to Operational Risk Management"

Lexique

- Risque opérationnel : risque de pertes résultant de carences ou de défauts attribuables à des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs.

- Besoin en fonds propres et Bâle II : la réglementation Bâle II impose aux banques de détenir un montant de capital servant à amortir les pertes liées au risque de marché, au risque de crédit et au risque opérationnel. Dans le cas du risque opérationnel et l'utilisation par la banque d'un modèle interne de type LDA, le montant de capital doit permettre de couvrir les pertes dans 99,9% des cas à horizon 1 an.

- LDA (Loss Distribution Approach) : il s'agit parmi les modèles internes de la méthode la plus utilisée par les banques pour déterminer le montant de capital réglementaire associé au risque opérationnel⁴⁰

- Maille : on catégorise les pertes liées au risque opérationnel en plusieurs sous-branches de risques (fraude interne, fraude externe...) et en différentes lignes métiers (banque de détail, banque commerciale...). Une maille correspond au croisement d'une branche de risques et d'une ligne métier. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons à déterminer le montant de capital réglementaire pour une maille donnée.

- Fréquence / Sévérité : l'approche usuellement employée dans le cadre de la LDA et de ce mémoire consiste à s'appuyer sur une décomposition fréquence/sévérité des pertes agrégées. On modélise ainsi la fréquence des pertes par une loi de Poisson, et la sévérité par une loi log-normale. Ces lois sont celles utilisées actuellement à la Société Générale.

- PI : Pertes Internes. Il s'agit de l'historique des pertes internes à la Société Générale de risque opérationnel. Celui-ci constitue notre première source d'informations dans la détermination du capital réglementaire. L'utilisation exclusive des PI conduit à la détermination pour chaque maille d'un montant de capital, noté K_{PI} dans la suite.⁴¹

- AS : Analyses de scénario. Il s'agit de l'information fournie par les experts. Elle constitue notre deuxième source d'informations dans la détermination du capital réglementaire. L'utilisation exclusive des AS conduit à la détermination pour chaque maille d'un montant de capital, noté K_{AS} dans la suite.⁴²

- Statistique bayésienne : il s'agit d'un cadre statistique conduisant à considérer un ou des paramètres des lois de fréquence ou sévérité comme aléatoires. Surtout, la statistique bayésienne est utilisée dans ce mémoire comme moyen de combiner les données PI et AS afin de n'obtenir qu'un unique montant de capital.⁴³

40. Cf partie 2 du mémoire pour plus d'informations

41. Cf partie 2.4.2 pour le calcul de ce dernier

42. Cf partie 2.4.3 pour le calcul de ce dernier

43. Pour plus d'explications sur la statistique bayésienne, conférer partie 3.2. La statistique bayésienne est ici le socle technique de 2 de nos méthodes proposées pour déterminer le montant de capital réglementaire

Annexes

A Répartition de la fréquence et de la sévérité des pertes

	Fraude interne	Fraude externe	Pratiques en matière d'emploi	Pratiques relatives aux clients, aux produits	dommages aux biens physiques	Pannes de système	exécutions d'opérations	Dommmages intentionnels	% Total par type d'activité
Finance d'entreprise	0.02 %	0.09 %	0.11 %	0.24 %	0%	0 %	0.23 %	0 %	0.7%
Activité de marché	0.08 %	0.05 %	0.32 %	0.59 %	0.02%	0.51 %	8.26 %	0 %	9.84 %
Banque de détail	3.66 %	32.39 %	7.53 %	5.6 %	0.67%	1.01 %	13.25 %	0.1 %	64.21 %
Banque commerciale	0.15 %	3.07 %	0.34 %	1.21 %	0.03%	0.2 %	3.73 %	0 %	8.74 %
Compensation	0.05%	0.48 %	0.12 %	0 %	0%	0.13	1.56 %	0 %	2.45 %
Services d'agences	0.01%	0.02 %	0.07%	0.14 %	0%	0.04 %	1.41 %	0%	1.7 %
Gestion d'actifs	0.05 %	0.11 %	0.14 %	0.51 %	0.01%	0.07 %	1.79 %	0 %	2.67 %
Courtage de détail	0.09 %	0.12 %	0.48 %	1.72 %	0.01%	0.04 %	0.97 %	0 %	3.43 %
Banque privée	0.21 %	0.34 %	0.14 %	1.36 %	0.0%	0.04 %	2.01 %	0 %	4.12 %
Eléments d'entreprise	0.04 %	0.16 %	0.58 %	0.3 %	0.2%	0.05 %	0.8 %	0.01 %	2.14 %
Total par type d'événement	4.36 %	36.84 %	9.83 %	11.77 %	0.97%	2.09 %	34.02 %	0.12 %	100 %

TABLE 14 – Nombre relatif de pertes

	Fraude interne	Fraude externe	Pratiques en matière d'emploi	Pratiques relatives aux clients, aux produits	dommages aux biens physiques	Pannes de système	exécutions d'opérations	Dommmages intentionnels	% Total par type d'activité
Finance d'entreprise	0.08 %	0.42 %	0.18 %	24.79 %	0 %	0 %	1.24 %	0 %	26.71%
Activité de marché	1.34 %	0.69 %	0.3 %	4.74 %	0 %	0.28 %	7 %	0 %	14.35 %
Banque de détail	1.97 %	7.13 %	2.12 %	8.51 %	0.33 %	0.61 %	7.46 %	0.02 %	28.17 %
Banque commerciale	1.04 %	2.10 %	0.28 %	3.35 %	0.01 %	0.09 %	5.08 %	0 %	11.97 %
Compensation	0.11%	0.26 %	0.03 %	0.31 %	0 %	0.08 %	0.63 %	0 %	1.42 %
Services d'agences	0.02%	0.03 %	0.04%	2.03 %	0 %	0.02 %	0.69 %	0%	2.84 %
Gestion d'actifs	0.06 %	0.05 %	0.17 %	3.11 %	0 %	0.02 %	0.89 %	0 %	4.3 %
Courtage de détail	0.14 %	0.09 %	0.26 %	1.57 %	0.01 %	0.01 %	0.3 %	0 %	2.38 %
Banque privée	0.55 %	0.2 %	0.11 %	2.44 %	0 %	0.01 %	0.65 %	0 %	3.96 %
Eléments d'entreprise	0.1 %	0.07 %	0.33 %	1.28 %	1.12 %	0.03 %	0.97 %	0.01 %	3.9 %
Total par type d'événement	5.42 %	11.04 %	3.84 %	52.14 %	1.48 %	1.15 %	24.9 %	0.03 %	100 %

TABLE 15 – Perte totale brut

B Méthode bayésienne 2

Résultats μ inconnu, sans seuil

Nous présentons tout d'abord les chaînes de Markov obtenues pour le paramètre μ en fonction de la loi candidate retenue. Le premier graphique présente la chaîne de Markov obtenue lorsqu'on choisit une loi candidate normale de valeur initiale à $N(\mu_{PI}, \frac{2}{P_I})$.

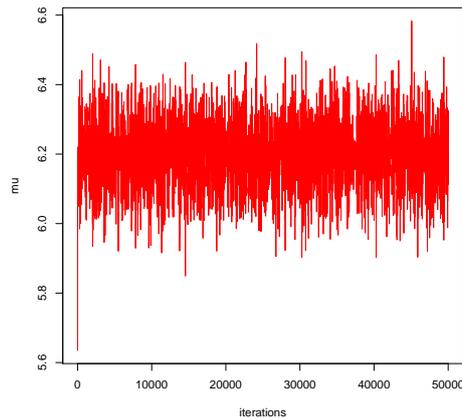


FIGURE 29 – Mu : loi candidate normale

Le second graphique présente la chaîne de Markov obtenue lorsqu'on choisit comme loi candidate, une marche aléatoire gaussienne telle que $\mu[t] = \mu[t - 1] + \epsilon[t]$ avec $\epsilon[t] \sim N(0, 1)$

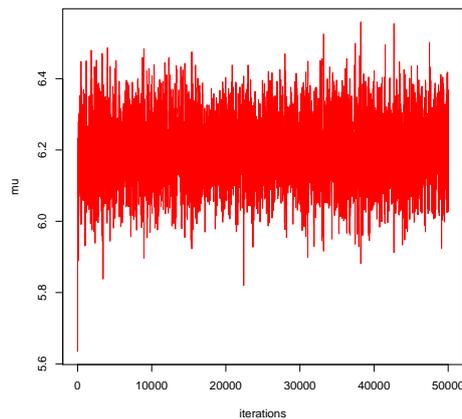


FIGURE 30 – Mu : loi candidate aléatoire gaussienne

Résultats mu inconnu, avec seuil

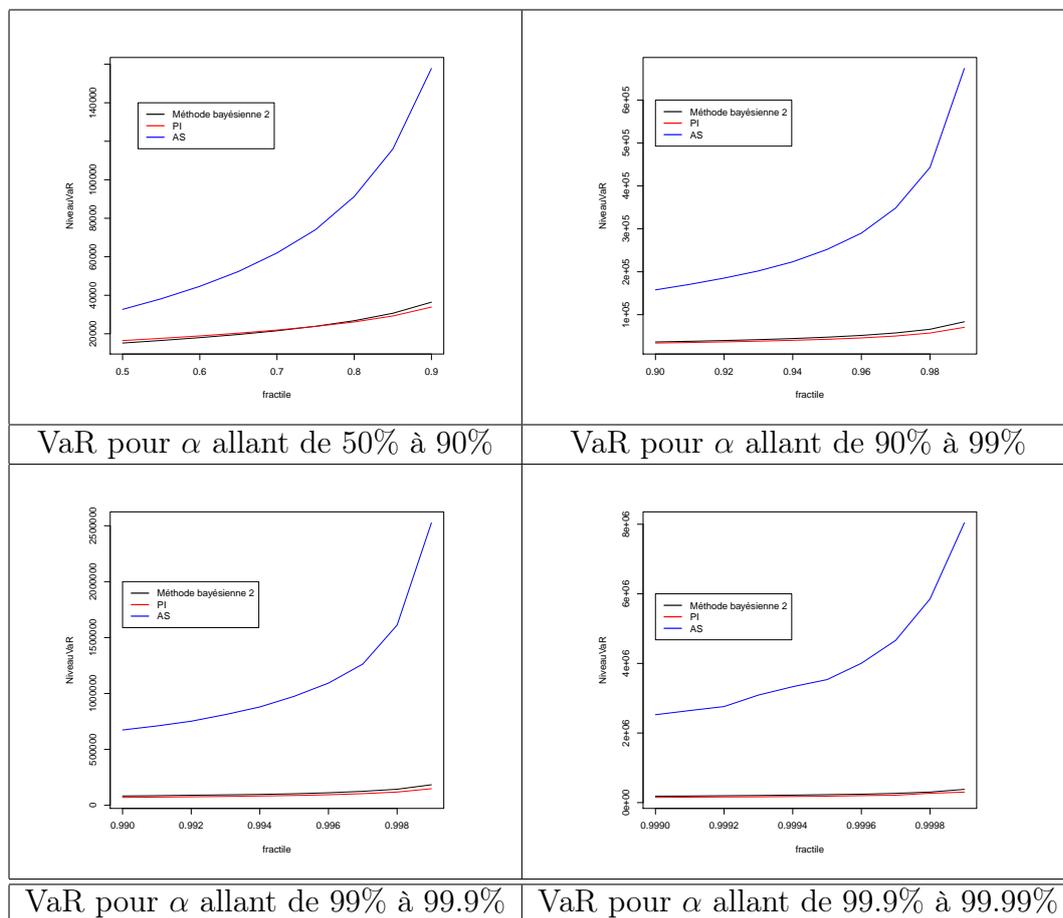


TABLE 16 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode bayésienne 2 avec mu inconnu en présence d'un seuil pour différents niveaux de fractiles alpha

Résultats mu et sigma inconnus, sans seuil

Nous présentons ci-dessous les chaînes de Markov des paramètres mu et sigma ainsi que la comparaison de cette méthode avec celles ne s'appuyant que sur les données PI ou les données AS.

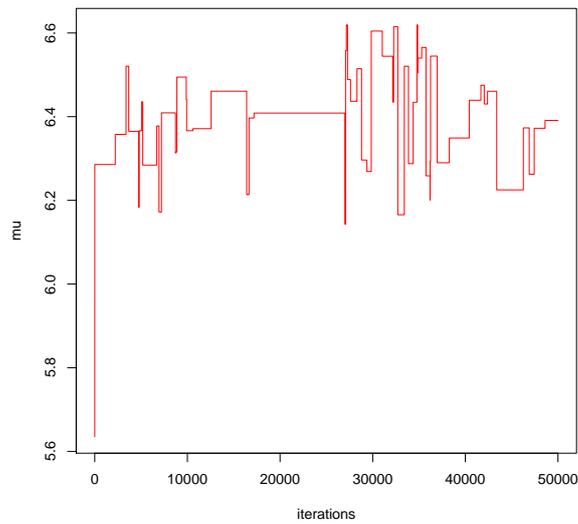


FIGURE 31 – Mu : loi candidate uniforme

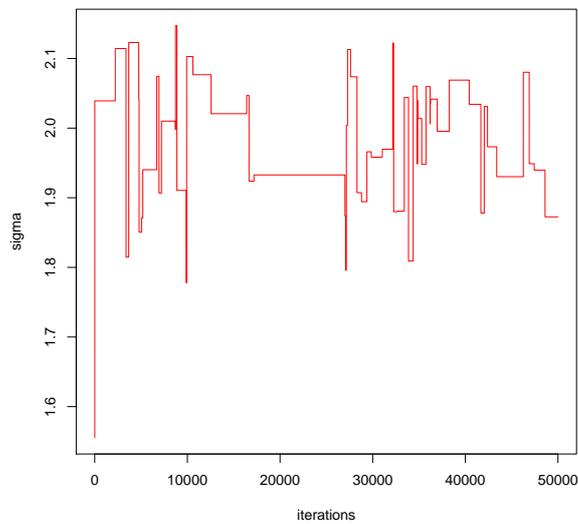


FIGURE 32 – Sigma : loi candidate uniforme

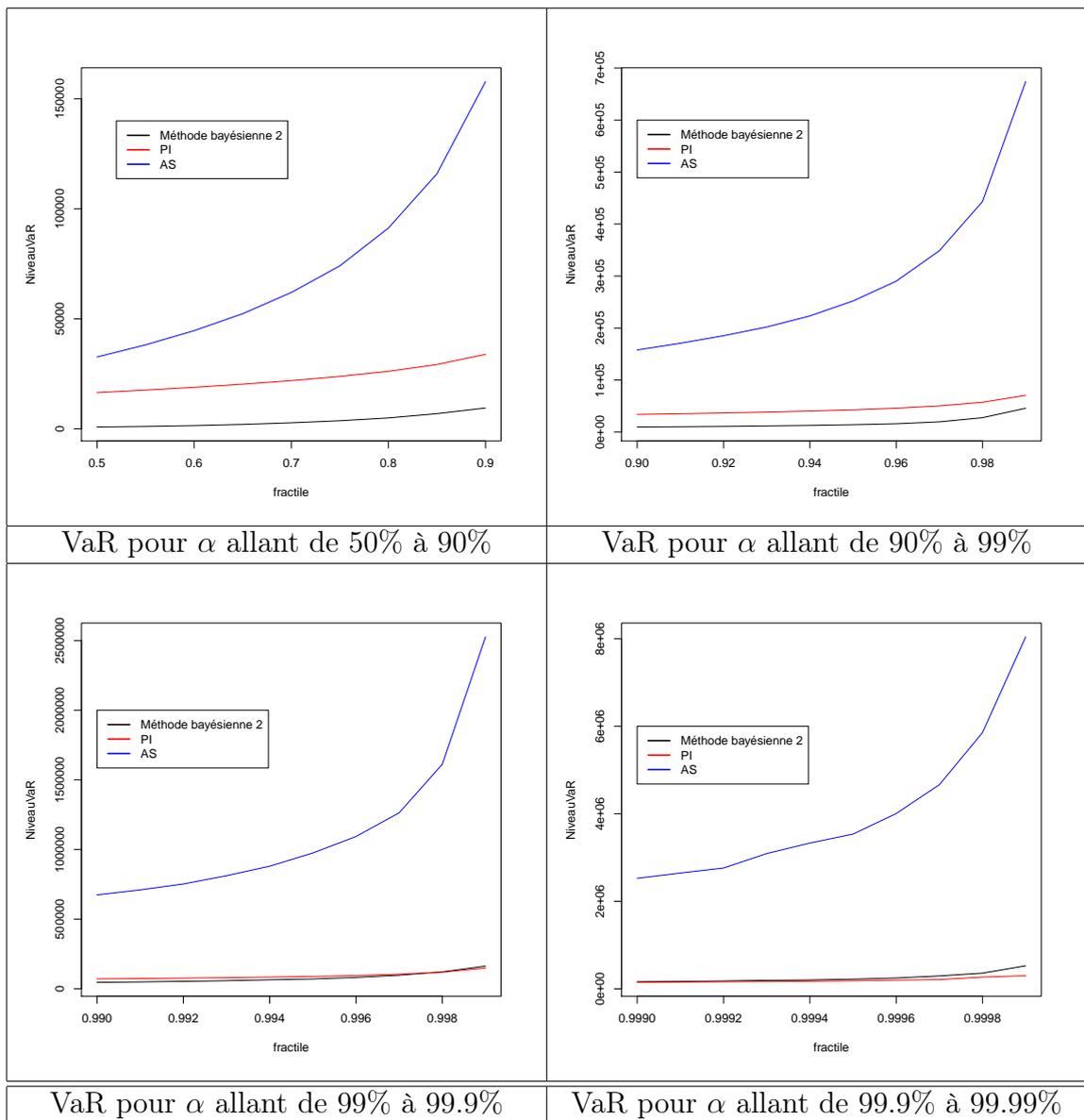


TABLE 17 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode bayésienne 2 avec μ et σ inconnus en l'absence de seuil pour différents niveaux de fractiles alpha

Résultats mu et sigma inconnus, avec seuil

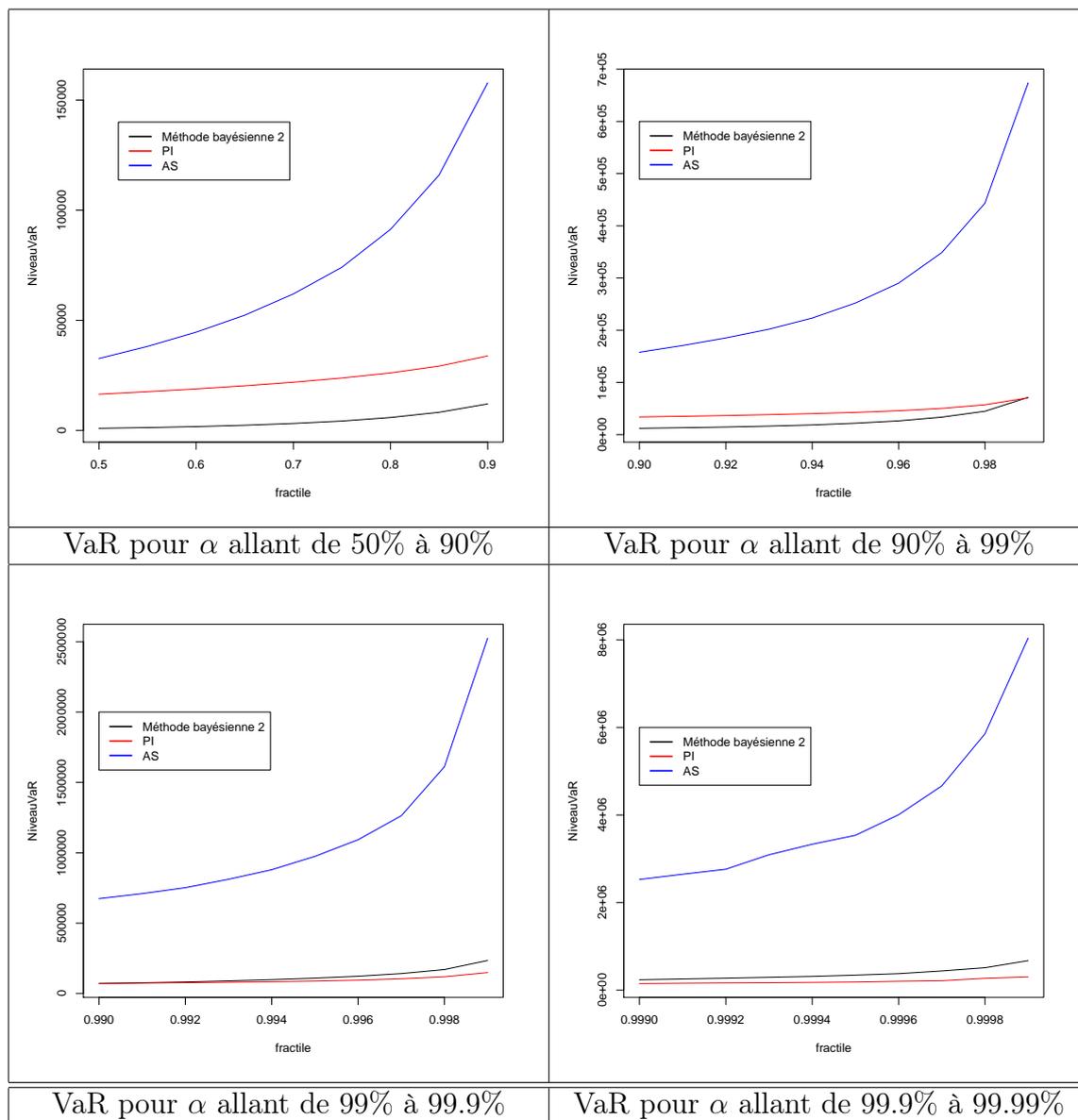


TABLE 18 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode bayésienne 2 avec mu et sigma inconnus en présence d'un seuil pour différents niveaux de fractiles alpha

C Polya tree : comparaison des résultats de la méthode avec ceux obtenus à partir des données PI et AS

Nous présentons ici les graphiques obtenus grâce à la méthode du polya tree dans l'objectif de comparer les résultats avec ceux obtenus pour les données PI et les données AS.

Les graphiques ci-dessous concernent le paramétrage suivant : $\delta=0,01$ et le nombre de données PI utilisées pour l'actualisation s'élève à 20 000 et non plus 100 000. On constate un écart plus important entre les résultats issus de la méthode du polya tree et ceux issus des données PI par rapport aux résultats présentés dans la partie . Cela résulte du plus petit nombre d'actualisations effectuées.

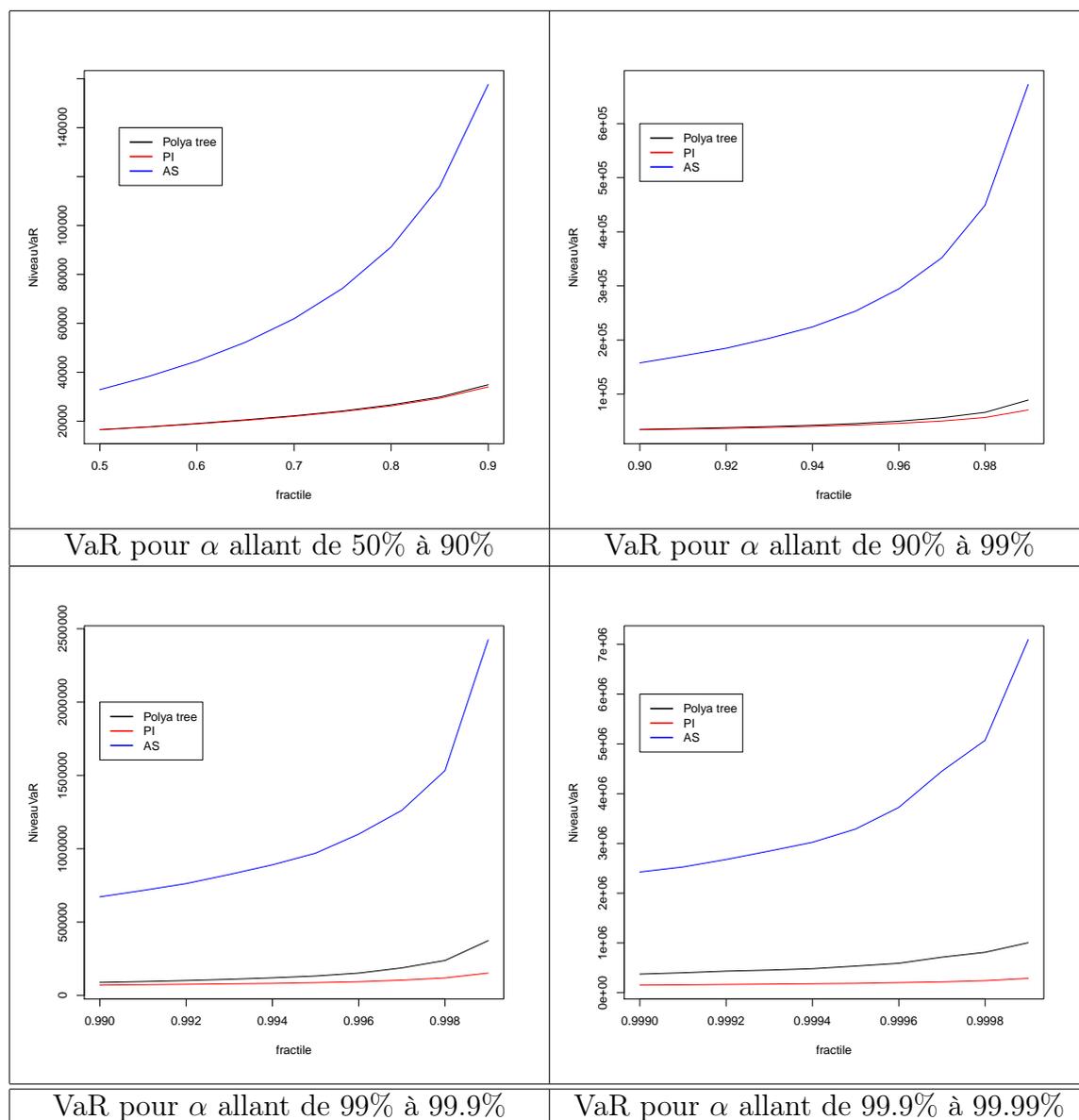


TABLE 19 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode du polya tree pour différents niveaux de fractiles alpha

D Tracé de la fonction VaR pour la méthode de crédibilité, cas $n=0$, $n=1$, $n=2$

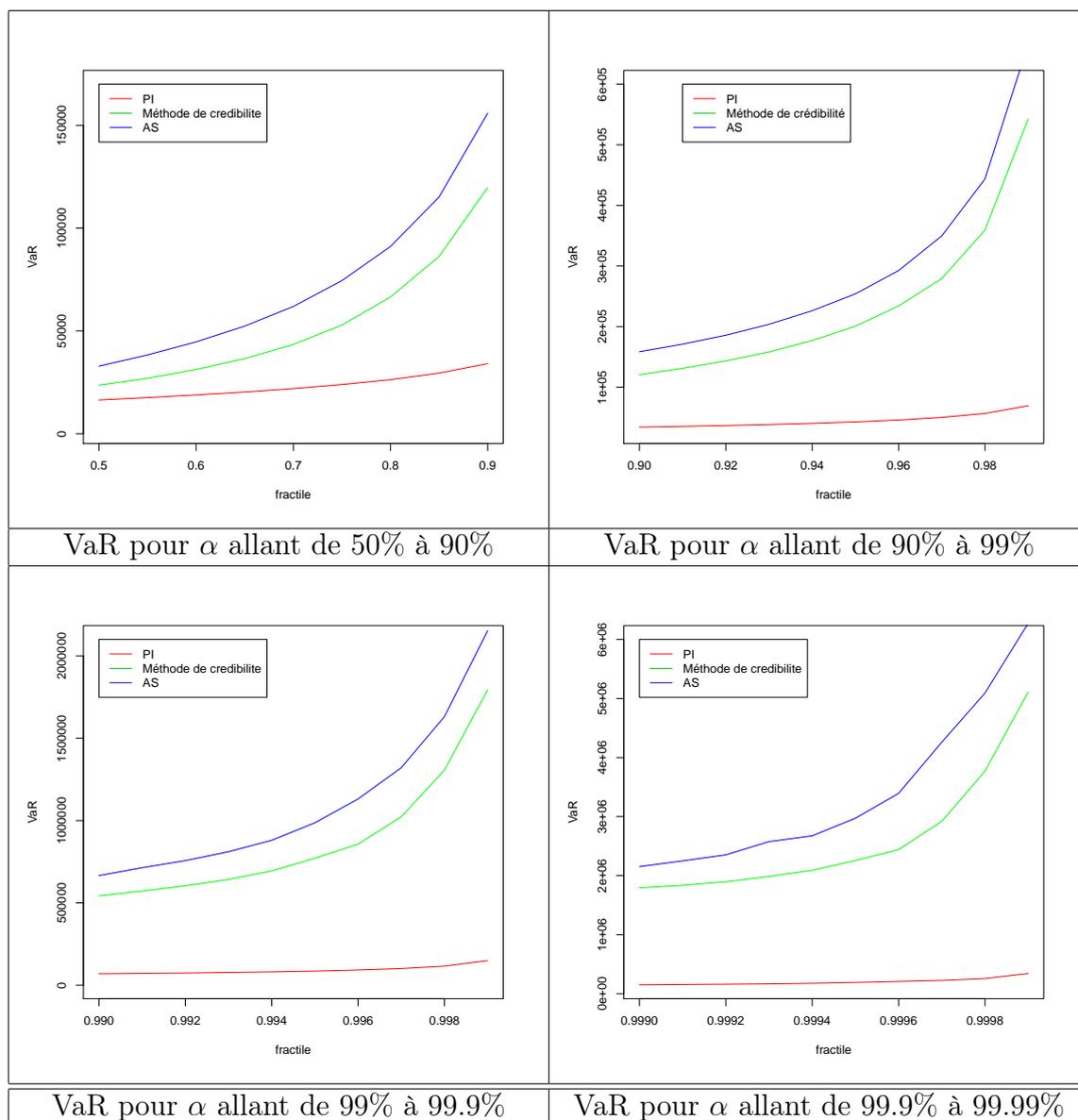


TABLE 20 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode de crédibilité avec la fonction de crédibilité en escalier dans le cas $n=0$ et différents niveaux de fractiles alpha

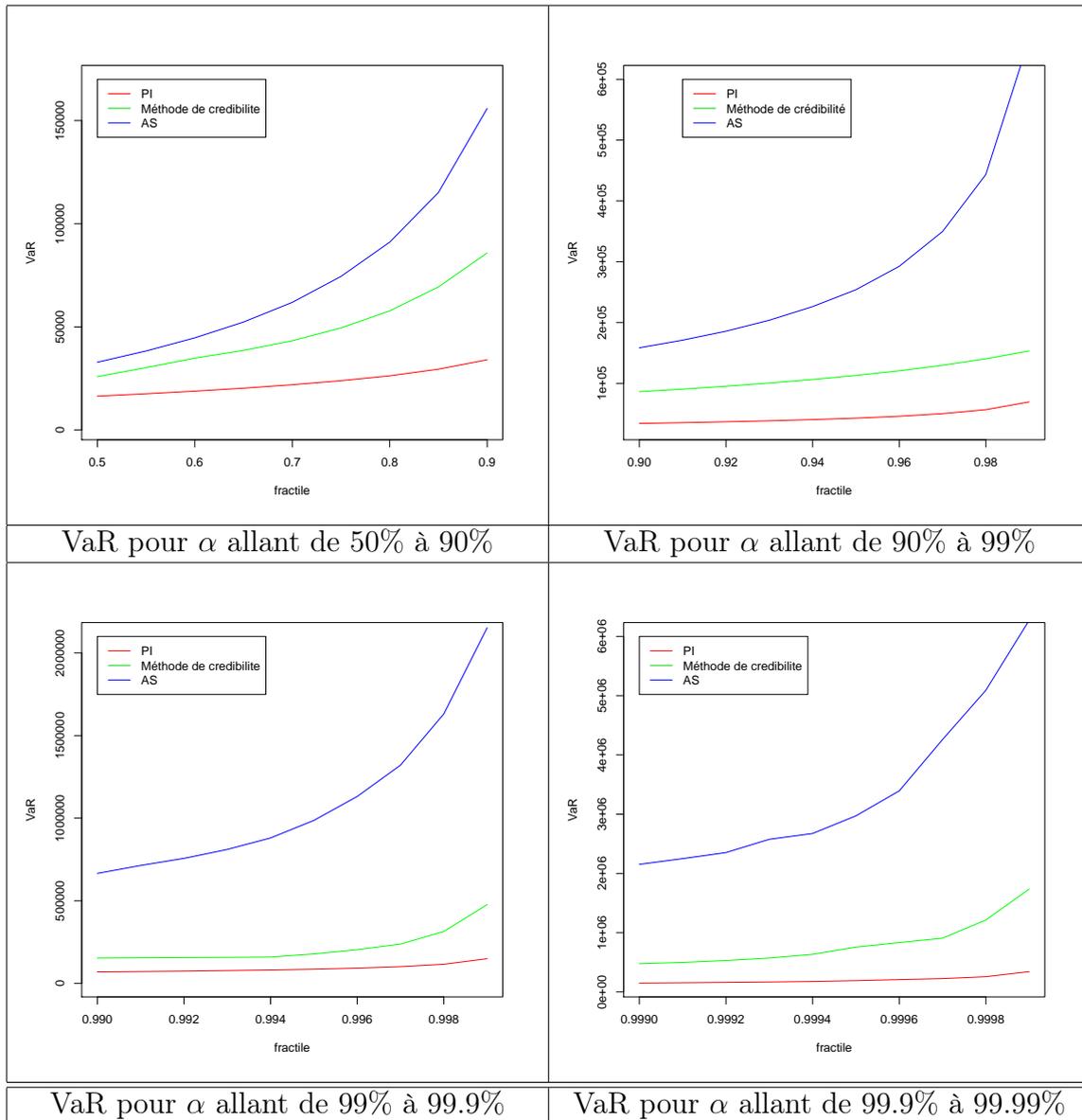


TABLE 21 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode de crédibilité avec la fonction de crédibilité en escalier dans le cas $n=1$ et différents niveaux de fractiles alpha

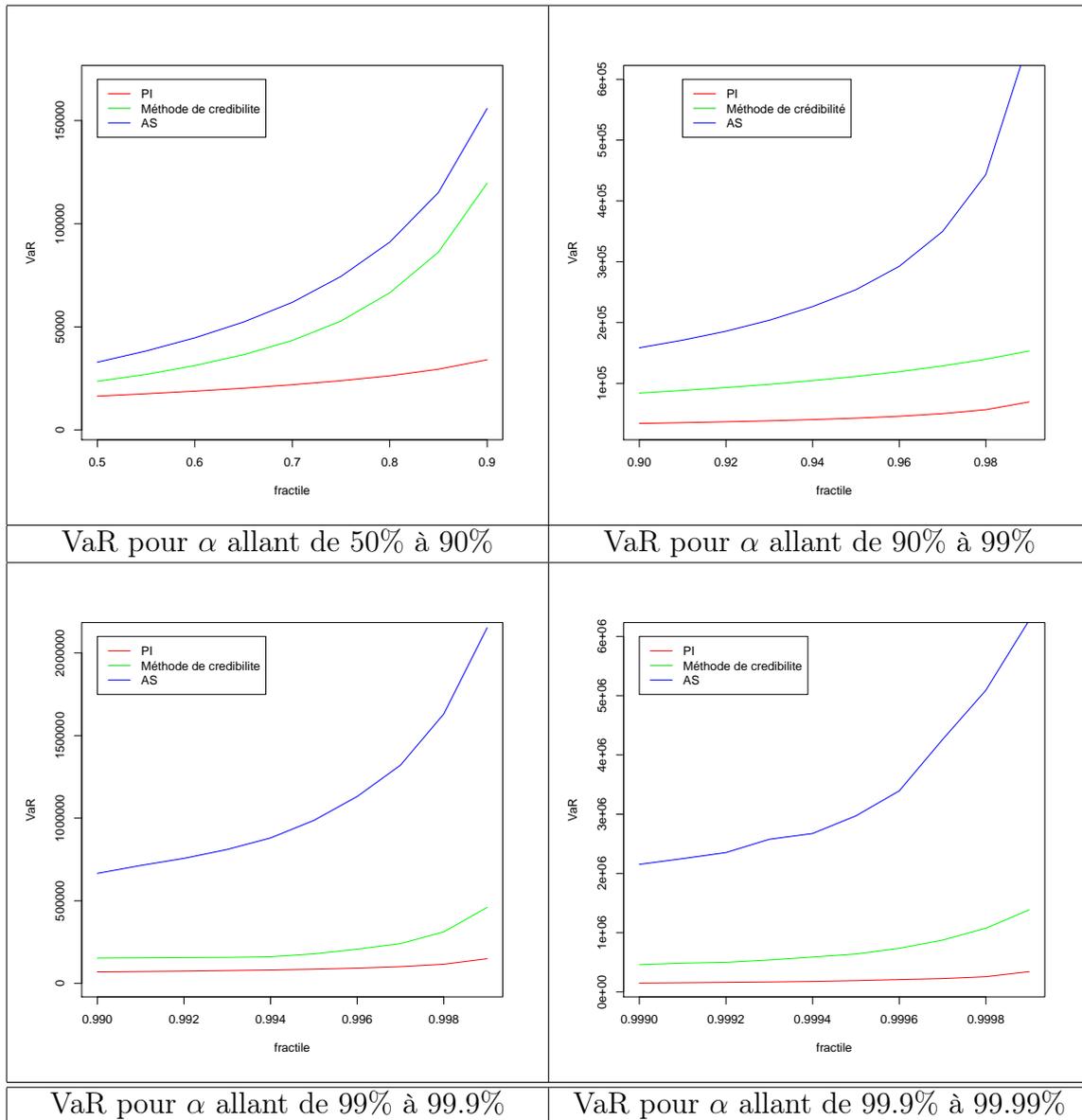


TABLE 22 – Tracé des fonctions VaR de la distribution de pertes agrégées pour les PI, AS et la méthode de crédibilité avec la fonction de crédibilité en escalier dans le cas $n=2$ et différents niveaux de fractiles alpha