



ISUP

## PROMOTION 2010

Mémoire présenté devant

**I ' I n s t i t u t d e S t a t i s t i q u e  
de l'Université Pierre et Marie Curie**

Pour l'obtention du

# **D i p l ô m e d e S t a t i s t i c i e n M e n t i o n A c t u a r i a t**

Assurance

Finance

Par M. Fabrice SAUZEAU

Sujet : Gestion actif-passif dans le cadre d'un fonds de pension : Optimisation du financement du fonds sous contraintes de solvabilité

Lieu du stage : Alstom

Responsable du stage : Yacine Hassouna

Invité(s) :

Confidentiel

# SOMMAIRE

---

REMERCIEMENTS .....	4
RÉSUMÉ .....	5
INTRODUCTION .....	6
PARTIE I – LES SYSTÈMES DE PENSIONS À PRESTATIONS DÉFINIES .....	9
1. Le passif d'un fonds de pension .....	9
1.1. Entre obligation légale et politique de ressources humaines .....	9
1.2. Représentation schématique de l'environnement du fonds de pension.....	10
1.3. Le bilan d'un fonds de pension et son évolution .....	10
1.4. Principes généraux de valorisation du passif de pension.....	12
1.5. Les différentes méthodes actuarielles de valorisation.....	15
2. Les risques auxquels sont confrontés les fonds de pension et les solutions apportées.....	18
2.1. Les risques associés aux prestations de pensions .....	18
2.2. La gestion des risques des fonds de pension .....	25
3. Normes et environnement des fonds de pension au Royaume-Uni.....	37
3.1. L'évolution historique du système des retraites au Royaume-Uni .....	37
3.2. L'environnement d'un fonds de pension au Royaume-Uni.....	38
PARTIE II – UN FONDS DE PENSION D'ALSTOM AU ROYAUME-UNI : PRÉSENTATION DU PASSIF ET DE L'ENVIRONNEMENT DE MARCHÉ .....	40
1. Présentation du fonds étudié et de son contexte.....	40
1.1. Le passif du fonds .....	40
1.2. Les actifs du fonds .....	44
1.3. Préférences et contraintes de l'entreprise.....	45
1.4. L'utilisation des méthodes de contrôle optimal dans le cadre des fonds de pension .....	46
2. La modélisation des marchés .....	49
2.1. Que modéliser et pourquoi ? .....	49
2.2. Cadre théorique, notations et synthèse du modèle retenu.....	50
2.3. Les taux d'intérêts réels et nominaux .....	51
2.4. L'inflation.....	63
2.5. Les actions .....	71

2.6.	Corrélations des différentes variables.....	74
3.	La valorisation du passif avec les paramètres estimés.....	79
3.1.	Une première série d’hypothèses sur le passif .....	79
3.2.	Valeurs obtenues à l’aide de simulations de Monte Carlo.....	79
3.3.	Une deuxième série d’hypothèses simplificatrices .....	80
3.4.	Appendice : une formule approchée pour un swap de LPI .....	80
PARTIE III : RECHERCHE DE STRATEGIES OPTIMALES D’INVESTISSEMENT PAR SIMULATIONS DE MONTE CARLO.....		83
1.	Modélisation du problème par les simulations de Monte Carlo.....	83
1.1.	Les objectifs des simulations .....	83
1.2.	La mise en place de la programmation .....	86
1.3.	Tests de convergence sur les variables simulées .....	88
2.	Résultats des simulations .....	93
2.1.	Une stratégie optimale pour le sponsor est une stratégie à poids fixes, où les contributions sont bornées et où aucun actif n’est investi dans le portefeuille de couverture...93	
2.2.	Analyse de sensibilité dans le cas de contributions bornées .....	100
3.	Conclusions sur les simulations.....	105
BIBLIOGRAPHIE.....		106

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens à remercier tout particulièrement Yacine Hassouna, mon responsable chez Alstom pendant toute la durée de mon apprentissage, qui m'a permis d'aborder des sujets aussi variés qu'intéressants. Les problématiques que je traite ici m'ont largement été inspirées par ses réflexions originales sur la pratique de la gestion actif-passif dans les fonds de pension.

Je souhaite plus largement remercier toutes les équipes d'Alstom avec qui j'ai pu travailler sur les avantages sociaux, en particulier les actuaires des ressources humaines et le département de consolidation des comptes. Leur confiance et leurs compétences m'ont beaucoup apporté.

## RÉSUMÉ

---

Dans cette étude, nous allons décrire l'environnement des fonds de pension, les risques qu'ils font peser sur les entreprises qui les financent et les méthodes usuelles pour gérer ces risques. Nous allons ensuite estimer un modèle d'investissement pour appliquer les notions de gestion des risques au fonds de pension le plus important d'Alstom. Il s'agit d'un fonds situé au Royaume-Uni qui verse à ses membres une rente indexée à l'inflation. Nous ferons ensuite des simulations de Monte Carlo pour chercher quelle allocation d'actifs peut répondre le mieux aux préférences de l'entreprise qui finance le fonds.

Nous introduirons un portefeuille de quasi-couverture, permettant de couvrir le risque de taux du passif mais pas le risque d'inflation. Nous montrerons que dans une optique de gestion des risques, il peut être préférable de ne pas couvrir son passif dans un contexte de marchés défavorables. Nous montrerons aussi qu'introduire des actions dans une proportion limitée du portefeuille améliore grandement la situation de l'entreprise.

## INTRODUCTION

---

Depuis la mise en place des assurances sociales par Bismarck à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, divers systèmes de protection sociale ont émergé dans de nombreux pays du monde. Ils visent à répondre aux « risques sociaux », c'est-à-dire des situations susceptibles de compromettre la sécurité économique de l'individu ou de sa famille en provoquant une baisse de ses ressources ou une hausse de ses dépenses. On compte en particulier la vieillesse, la maladie et l'invalidité parmi ces risques. Chaque pays a mis en place ses systèmes et les a fait évoluer en fonction du contexte politique, socioculturel et économique.

Les systèmes de retraites, qui nous intéressent ici tout particulièrement, sont généralement structurés autour de trois piliers : la protection sociale au niveau de l'Etat, celle au niveau de l'entreprise et la prévoyance individuelle. Le premier repose généralement sur le principe de la répartition et le second sur la capitalisation. Le troisième relève de l'assurance privée. On s'intéresse dans ce mémoire aux prestations offertes par les entreprises, c'est-à-dire au second pilier.

L'objectif des plans de pension d'entreprise est de couvrir les membres au minimum contre le risque de vieillesse. Cela passe souvent par le versement d'une rente, mais peut aussi être sous forme d'un capital de départ. Le montant et les contours de ces prestations varient fortement d'un pays à l'autre. Elles incluent souvent des pensions de réversion pour le conjoint, et parfois pour ses enfants. Certains plans incluent aussi des couvertures santé ou invalidité. Bien que des minima légaux existent dans chaque pays, elles sont largement le fruit de négociations entre employeurs et employés. L'importance de ces régimes a contraint à la mise en place d'organismes garantissant les fonds de pension contre la faillite des entreprises qui les financent. Celles-ci portent donc des engagements de pension à long terme. Elles cotisent régulièrement dans des fonds d'actifs qui investissent sur les marchés financiers pour couvrir ces engagements. On appelle ainsi sponsor d'un plan l'entreprise qui le finance.

La prévoyance sociale présente donc des risques pour ces entreprises : augmentation de la durée de vie dans le cas de pensions, hausse de l'indice de référence pour les pensions indexées, baisse de la valeur de marché des actifs de couverture en particulier.

Aon estimait en Juin 2010 à 100 milliards de livres le déficit sur les 200 plans de pension les plus importants du Royaume-Uni. Un mois plus tard, il estimait ce déficit à 75 milliard de livres, suite à

une hausse des taux d'actualisation de la dette et une remontée des marchés actions. Cette importante variabilité des déficits suite à des évolutions de marché a des conséquences importantes pour les sponsors qui financent ces plans.

On distingue deux grands types de régimes : à prestations définies ou à cotisations définies.

Dans les régimes à prestations définies, le fonds est engagé sur un certain montant de prestations à chacun de ses membres. Celles-ci dépendront en général du nombre d'années passées dans l'entreprise et du salaire du salarié. L'ensemble des risques associés à leur versement est finalement à la charge de l'entreprise qui finance ce fonds.

Dans les régimes à cotisations définies, l'entreprise s'engage sur un certain montant de contributions pour les membres. C'est in fine sur eux que reposent les risques s'ils souhaitent se garantir une rente avec la somme de ces cotisations.

Il est parfois difficile de distinguer ces deux types de régime. En particulier, les « cash balance » sont des régimes qui permettent aux membres de partir à la retraite avec un capital régulièrement réévalué en fonction d'un taux garanti par le plan. Souvent, les membres peuvent aussi choisir de convertir ce capital en rente. Ces régimes sont souvent classés comme des régimes à prestations définies à cause de ce taux de revalorisation et du taux de conversion du capital en rente.

Ce mémoire porte exclusivement sur les régimes à prestations définies. Nous adopterons le point de vue d'une entreprise souhaitant contrôler la charge financière que représentent ses engagements de pensions.

Les fonds de pension de régimes à prestations définies investissaient historiquement fortement en actions afin d'obtenir un meilleur retour sur investissement. Cependant, les deux krachs boursiers des années 2000 et l'allongement de la durée de vie ont durement affecté ces fonds, si bien que la plupart d'entre eux sont en déficit. Même ceux qui ne le sont pas selon les critères d'évaluation propres aux fonds de pension le seraient sans doute selon des normes assurantielles.

**La question qui se pose est donc de savoir quelle stratégie d'investissement permet d'honorer ces engagements au moindre coût.** Dans ce mémoire, nous étudierons le principal fonds de pension d'Alstom au Royaume-Uni. Un tel fonds est une structure juridique complexe. De grandes

simplifications, communément adoptées par les praticiens, seront faites pour se concentrer sur un problème principal : comment investir les actifs du fonds au mieux pour l'entreprise ?

Nous nous intéresserons à l'application de la gestion actif-passif à un fonds de pension en déficit. Partant d'un certain environnement de marché, on cherchera comment investir les actifs pour optimiser les cotisations de l'entreprise. On mesurera l'optimalité d'une stratégie par un couple coût moyen / coût extrême de financement se rapprochant de la formulation de Markowitz. On étudiera aussi d'autres indicateurs de risques pour mesurer l'adéquation de l'actif au passif.

Pour arriver à cet objectif, on estimera un modèle de marchés puis on fera des simulations de Monte Carlo sur toute la vie du plan pour différentes stratégies d'investissement et on en déduira les montants de contributions.

Ce mémoire est organisé en trois grandes parties.

En première partie, une analyse générale des fonds de pension sera présentée. En particulier, nous détaillerons les différents risques que rencontrent les fonds de pension et la façon dont ils peuvent être gérés en pratique. Nous donnerons ensuite une illustration du contexte local des fonds de pension dans quatre pays, le Royaume-Uni, la Suisse, l'Allemagne et les Etats-Unis.

En deuxième partie, nous décrirons le fonds de pension qui nous occupe et ses caractéristiques financières. Nous présenterons ensuite la modélisation des principales variables économiques et financières qui influencent son actif et le passif, à savoir l'inflation, les taux d'intérêt et les actions, et les estimations des paramètres de ce modèle.

La dernière partie sera consacrée à la mise en place des simulations de Monte Carlo pour le choix d'investissements et aux conclusions qu'on a pu en tirer. Nous analyserons en détail les résultats de ces simulations pour mener une analyse de sensibilité de ceux-ci aux principaux paramètres.

# **PARTIE I – LES SYSTÈMES DE PENSIONS À PRESTATIONS DÉFINIES**

---

Dans cette partie, on va aborder sous un angle général le second pilier de la protection sociale contre le risque vieillesse.

Cette première partie est organisée comme suit. Tout d’abord, on dressera une analyse fondamentale des fonds de pension. Nous commencerons par détailler la nature exacte de leurs obligations et leurs répercussions sur les entreprises qui les financent. Ensuite, on déclinera les différents risques auxquels font dès lors face le sponsor et le fonds lui-même et la façon dont ils peuvent être gérés. Enfin, on donnera quelques illustrations concrètes du fonctionnement et de l’environnement des fonds de pension dans quatre pays, le Royaume-Uni, la Suisse, les Etats-Unis et l’Allemagne.

## **1. Le passif d’un fonds de pension**

On détaillera dans cette première sous partie les principes de l’évaluation d’un fonds de pension. Après une étude rapide d’un bilan de fonds de pension et de la façon dont il peut évoluer au cours du temps, on s’attachera à décrire la valorisation actuarielle du passif et la façon dont elle s’analyse et se traduit en termes de bilan et de trésorerie pour la compagnie qui finance le fonds, appelée le sponsor.

### **1.1. Entre obligation légale et politique de ressources humaines**

Dans de nombreux pays, les systèmes de protection sociale imposent aux entreprises d’offrir des prestations pour couvrir le risque vieillesse. L’étendue des droits offerts par chaque employeur va cependant varier en fonction de plusieurs critères :

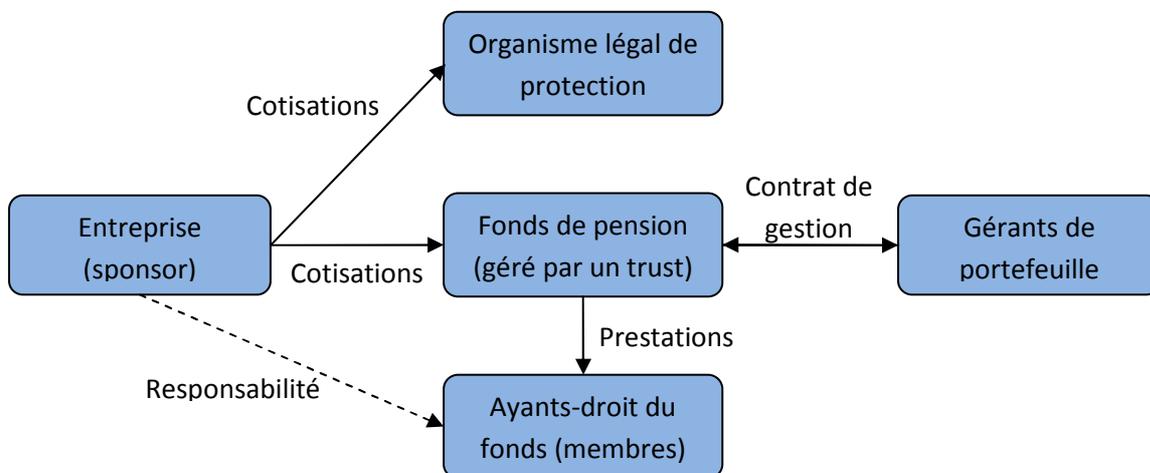
- les normes du pays, c’est-à-dire non seulement les minima légaux mais aussi le niveau des prestations offertes par les autres entreprises (au moins les concurrentes),
- la richesse que l’entreprise peut ou veut affecter à cette composante de l’ensemble de la rémunération,

- le pouvoir de négociation des parties prenantes, c'est-à-dire les entreprises, les membres et parfois l'Etat,
- la valeur qu'attachent les salariés à leur retraite d'entreprise, relativement aux autres éléments des négociations sociales.

Une entreprise doit donc arbitrer, au moment de la mise en place de son plan de prévoyance, entre le coût financier que représentent les prestations attendues et les retours attendus en termes d'attractivité pour les salariés (en place ou potentiels) et de paix sociale.

## 1.2. Représentation schématique de l'environnement du fonds de pension

Le fonds de pension est une entité autonome chargée de verser les prestations aux membres et de toute l'administration que cela implique. Il mandate des gérants pour son portefeuille d'actifs. Cependant c'est sur l'entreprise que repose ultimement la responsabilité de financer les pensions des membres. On peut donc schématiser l'environnement du fonds de pension comme suit.



## 1.3. Le bilan d'un fonds de pension et son évolution

Le bilan d'un fonds de pension en déficit se présente comme suit :

Actif	Passif
Déficit	Provisions mathématiques
Portefeuille d'actifs sous gestion	Autres provisions

Au passif, les provisions mathématiques ( $PM$ ) représentent l'ensemble des engagements de pensions du fonds. Les autres provisions ( $AP$ ) couvrent l'ensemble des autres dépenses de long terme, comme les frais d'administration ou de gestion d'actifs. On supposera pour la suite que les autres provisions sont négligeables ou incluses dans les  $PM$ .

A l'actif, on trouve principalement deux postes. Le premier est évidemment le portefeuille d'actifs du fonds ( $A$ ), appelé généralement (et abusivement) « les actifs » ou simplement « l'actif ». Le second est son déficit ( $D$ ): l'insuffisance des actifs face aux  $PM$  se traduit par un passif du sponsor, i-e un droit sur les actifs du sponsor.

L'objectif de la gestion actif-passif est d'éviter une déformation trop forte du bilan du fonds de pension, qui se traduirait par un gonflement de  $D$  ou une chute du ratio  $A/PM$ .

Il est important d'ajouter que le sponsor devrait pouvoir faire valoir un droit symétrique dans le cas d'un plan à prestations définies. En effet, si un surplus était dégagé par le fonds, le sponsor devrait pouvoir exiger la couverture des  $PM$  par les actifs appropriés. Or, il est arrivé que des fonds en excédent gardent une exposition importante en actions et se trouvent en déficit peu après un choc de marché.

L'évolution du bilan va résulter de plusieurs effets. La variation de  $D$  est obtenue par différence des variations des autres postes du bilan. La variation des actifs  $\Delta A$  se décompose comme suit :

$$\Delta A = \bar{y}A + (y - \bar{y})A - P + C_{E_r} + C_{E_e}$$

$\bar{y}$  mesure le rendement attendu sur les marchés,  $y$  la performance observée,  $P$  les prestations payées,  $C_{E_r}$  les contributions de l'employeur et  $C_{E_e}$  les contributions des membres. Cette décomposition permet de contrôler la performance des actifs.

La variation des provisions mathématiques se décompose comme suit :

$$\Delta PM = \bar{r}PM - P + S + C_{E_e} + \Delta$$

$\bar{r}$  est le taux d'actualisation du passif,  $S$  les droits acquis par les membres et  $\Delta$  les variations des  $PM$  liées à des changements imprévus de valorisation (changements démographiques, variation du taux d'actualisation etc.). Les droits acquis varient en fonction de deux facteurs principaux : le nombre

d'années passées dans l'entreprise et les variations du salaire. Le déficit évoluera donc de la façon suivante :

$$\Delta D = \Delta PM - \Delta A = \bar{r}PM - yA + S - C_{E_r} + \Delta$$

La plupart du temps, les contributions de l'employeur doivent légalement couvrir au moins les droits acquis suite aux services rendus par les membres. Notons  $X = C_{E_r} - S$  l'excès de contributions de l'employeur par rapport aux services rendus. Le déficit diminuera si et seulement si

$$yA + X \geq \bar{r}PM + \Delta$$

Pour réduire le déficit, les contributions de l'employeur doivent donc couvrir au moins l'insuffisance du rendement de l'actif pour faire face à la désactualisation du passif et à ses variations imprévues ainsi qu'un amortissement du déficit actuel.

Remarquons enfin que pour un fonds en déficit, le rapport  $P/A$  est supérieur au rapport  $P/PM$ , c'est-à-dire qu'une fraction plus importante de l'actif que du passif est naturellement consommée chaque année.

#### **1.4. Principes généraux de valorisation du passif de pension**

Les variables définies ci-dessus entrent en jeu dans les calculs actuariels liés aux fonds de pension. En particulier, la valorisation d'un fonds de pension repose sur les aspects suivants :

- l'analyse de la structure des membres du fonds de pension, la formule de calcul des pensions et les droits acquis par les membres,
- les hypothèses économiques, démographiques et financières ont un rôle majeur car elles vont largement déterminer la valeur actualisée des engagements du fonds.

L'actuaire va alors donner une valeur juste correspondant au prix qu'il faudrait payer pour pouvoir couvrir ces engagements de retraites.

### L'analyse de la population des membres d'un fonds de pension

Les membres d'un fonds de pension appartiennent principalement à trois grandes catégories :

- les retraités : ils exercent actuellement leurs droits à percevoir une pension, soit en tant qu'anciens salariés, soit en tant que personnes attitrées à recevoir une pension de réversion (épouse, époux ou enfants),
- les membres actifs : ceux qui continuent d'acquérir des droits par leur travail au sein de l'entreprise,
- les membres déferrés ou protégés : ceux qui ont acquis des droits à une pension mais qui ont quitté leur entreprise avant d'avoir le droit de percevoir leur pension et ont donc cessé d'acquérir des droits.

Il existe d'autres catégories de population éventuellement couvertes par le plan, comme les invalides.

### Les hypothèses entrant en compte dans la valorisation des fonds de pension

Des hypothèses de différents types entrent en jeu dans toute évaluation de pension :

- les hypothèses démographiques concernent principalement la mortalité, le turnover et la date de départ en retraite,
- les hypothèses économiques concernent les taux d'intérêt (d'actualisation), les taux de rendement attendus des actifs, l'inflation et l'évolution des salaires et des rentes.

Leur importance relative va dépendre de la situation et de la maturité du fonds, par exemple, un fonds très mature sera peu sensible aux hypothèses de salaires. Cependant, les hypothèses de taux d'actualisation sont toujours déterminantes, quel que soit le plan. En règle générale, les hypothèses économiques ont un impact plus fort sur la valorisation du passif d'un fonds que les hypothèses démographiques.

### Le calcul du passif d'un régime de pensions à prestations définies standard

Le passif de pension vise à donner une valeur synthétique à un engagement de verser des prestations définies dans un contrat. Il correspond à la somme des prestations dues à chaque membre et peut donc s'écrire comme une somme de cash-flows actualisés :

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} L_t^i$$

- Où  $L_t$  = valeur totale du passif en date  $t$ ,  
 $N_t$  = nombre de membres du plan à cette date  
 $L_t^i$  = passif envers chacun des membres du plan, indicés  $i$ .

$N_t$  peut augmenter, stagner ou diminuer selon que le plan est ouvert ou fermé aux nouveaux entrants et que la compagnie recrute ou non. Ce passif individuel est composé de flux d'un montant aléatoire versés pendant une durée aléatoire. On l'exprimera donc comme une espérance de flux actualisés.

$$L_t^i = \sum_{k=1}^{\omega - x_i^*(t)} \mathbb{E} \left( F_{t+k}(x_i(t), S_i(t), n_i(t), R_i(t, t+k)) D(t, t+k) \right)$$

- Où  $x_i(t)$  = vecteur décrivant les âges en date  $t$  du membre  $i$  et de ses proches ayant droit à une pension,  
 $x_i^*(t)$  = âge de la plus jeune de ces têtes,  
 $S_i(t)$  = salaire de référence du membre,  
 $n_i(t)$  = nombre d'années passées à acquérir des droits dans le plan,  
 $D(t, t+k)$  = facteur d'actualisation adapté,  
 $R_i(t, t+k)$  = coefficient de revalorisation appliqué à la pension de  $i$   
 $\omega$  = âge ultime de la table de mortalité

Ce dernier coefficient va dépendre du statut du membre (retraité ou déferré). Le salaire et le nombre d'années cotisées sont projetés jusqu'à l'âge de départ en retraite afin de donner une valeur plus juste du passif.

Une forme habituelle pour le calcul du salaire de référence est le salaire des dernières années. La pension de base  $P_i$  est alors calculée de la façon suivante :

$$P_i = \frac{n_i}{N} S_i$$

- Où  $N$  = facteur de décote fixé dans les règles du plan,  
 $S_i$  et  $n_i$  = valeurs projetées de salaires et de nombres d'années de service,  
 Une pension de réversion est aussi prévue dans le plan et est de la forme  $\theta P_i$ , où  $\theta$  est inférieur à 1.

Il est cependant important de noter que dans la pratique, il existe de nombreuses variations de règles à l'intérieur de la population des assurés. Un plan de pension est une structure dynamique qui peut être amendée au cours du temps, donnant par exemple une acquisition de droits plus ou moins rapide au cours du temps, une assiette qui évolue pour le salaire de référence ou des changements de règles d'indexation. De plus, la croissance externe des entreprises a fait se regrouper sous un même plan des entités ayant eu des expériences de négociations différentes et donc des droits à des

pensions différentes. Il y a donc des sous-sections nombreuses pour les plans les plus importants et les calculs actuariels peuvent se révéler assez longs.

## **1.5. Les différentes méthodes actuarielles de valorisation**

On donne ici les principales méthodes de valorisation des fonds de pension. Elles ont en général deux types d'objectifs :

- un objectif comptable de quantification de l'engagement,
- un objectif financier (de trésorerie) d'évaluation du coût de financement des pension.

### La décomposition de la valeur du passif

On décompose la valeur totale du passif, appelé aussi valeur actualisée des prestations futures, en trois éléments :

- passif actuariel : il s'agit des prestations dues au titre des droits accumulés jusqu'à la date de valorisation,
- coût des services rendus : il s'agit du montant du passif total attribuable à l'année de valorisation, c'est-à-dire des services acquis cette année là (augmentation salariale et nouveaux droits),
- valeur actualisée des futurs services rendus : il s'agit des droits qui seront acquis au cours des prochaines années.

On inclut en général les projections de salaires futurs dans le passif actuariel, ce passif est alors calculé selon la méthode de l'unité de crédit projetée et son appellation comptable est la « Projected Benefit Obligation ». En effet, les prestations sont généralement fondées sur le salaire au moment du départ en retraite. Sans cette projection du salaire, c'est la méthode de l'unité de crédit qui est employée et on parle d' « Accumulated Benefit Obligation ».

On déduit alors différentes mesures du déficit. Il faut d'abord donner une valeur de référence des actifs. C'est souvent la valeur de marché qui est utilisée, mais c'est parfois une valeur lissée qui est utilisée. Le déficit se calcule alors par rapport au passif actuariel.

### Le coût de financement des pensions

C'est à partir de l'évaluation des besoins de financement qu'on détermine les contributions de l'employeur au fonds. Elles doivent toujours inclure (dans le cas d'un fonds en déficit pour le moins) :

- le coût des services rendus,
- l'amortissement du déficit par rapport au passif actuariel, qui comprend les augmentations de droits pour les services passés et la dette actuarielle nette passée.

Outre l'évaluation de l'actif et du passif, c'est la durée d'amortissement du déficit qui est ici centrale pour déterminer le montant des contributions.

### Les normes IAS19 de comptabilisation des engagements de pensions

Les normes IAS 19 régissent l'ensemble de la comptabilisation des avantages au personnel. Les engagements de pensions y figurent au titre des prestations de long terme après l'emploi. Ses normes imposent une règle de prudence dans la comptabilité : l'engagement de fournir des prestations est comptabilisé au moment où il naît et non au moment où ces prestations sont payées. Par ailleurs, c'est le principe de la valeur de marché qui détermine la valeur de l'actif et du passif. On ne considère pas ici le traitement comptable des modifications de plans, ni celui des fermetures de plans, ni enfin celui du surplus éventuel d'un plan (IFRIC 14 en particulier).

Sous IAS 19, le passif est calculé avec la méthode de l'unité de crédit projetée, avec un taux d'actualisation devant refléter le taux actuariel des obligations « de bonne qualité », en pratique les obligations notées AA. Avec l'élargissement des spreads de crédit pendant la crise de 2008, cette méthode a largement amorti le choc de marché sur les actifs, eux-mêmes évalués à leur valeur de marché. La différence du passif et de l'actif constitue le déficit et fait l'objet d'une provision qui vient directement en déduction des capitaux propres. Il faut donc différencier le passif financé (face auquel un stock d'actifs est disponible) du passif non financé. La plupart des analyses financières extraient la dette de pension des provisions et la considèrent comme une dette financière de long terme.

Pour apprécier la façon dont les pensions vont affecter le compte de résultat et le bilan du sponsor, reprenons les notations énoncées en partie I-1-2 :

$$\Delta A = \bar{y}A + (y - \bar{y})A - P + C_{E_r} + C_{E_e}$$

$$\Delta PM = \bar{r}PM - P + S + C_{E_e} + \Delta$$

$$D = PM - A$$

Seule la variation du déficit  $D$  va avoir une influence sur les comptes du sponsor au travers de trois effets :

- un effet résultat (P&L) : le résultat de l'entreprise attribuable au fonds de pension vaudra  $R = \bar{y}A - \bar{r}PM - S$ . Il comprend trois composantes : le rendement *espéré* des actifs, le coût des intérêts et le coût des services rendus. La partie du résultat attribuable aux pensions est donc déterministe (connue à l'ouverture comptable),
- un effet trésorerie (cash) : le compte en banque de l'entreprise va varier de  $C_{E_r}$ , suite au financement des pensions,
- un effet capitaux propres (Statement of Recognized Income and Expenses, SoRIE), qui va consister à reconnaître tout ou partie de  $(y - \bar{y})A - \Delta$ .

Jusqu'à récemment, les entreprises pouvaient ne reconnaître dans leur bilan qu'une fraction de  $(y - \bar{y})A - \Delta$ , c'est-à-dire pouvaient amortir les gains et pertes actuariels sur la durée restante moyenne de service. Cet amortissement passait en revanche dans le compte de résultat. Avec la méthode SoRIE, en voie de remplacer la précédente, l'entreprise reconnaît immédiatement l'intégralité des gains et pertes actuariels dans son bilan.

Le caractère subjectif du rendement attendu des actifs créait de grandes disparités dans les résultats publiés par des entreprises ayant un actif et un passif similaire. C'est pourquoi l'IASB suggère de remplacer le taux de rendement attendu des actifs par le taux d'actualisation. Le résultat traduit alors la charge nette d'intérêt des pensions. Cette réforme se traduit cependant généralement par une baisse du résultat financier de l'entreprise.

## **2. Les risques auxquels sont confrontés les fonds de pension et les solutions apportées**

L'objectif premier d'un fonds de pension est de verser des prestations à ses membres lorsqu'ils quittent la vie professionnelle. Ces prestations sont entourées de divers risques, comme toute activité d'assurance sur la vie, qui se répercuteront sur le sponsor d'une manière ou d'une autre. L'augmentation du déficit se traduira par un montant plus élevé provisionné au titre des pensions et pèsera donc négativement sur son bilan. On étudiera la nature de ces risques en première sous-partie et les moyens disponibles pour les gérer en deuxième sous-partie.

### **2.1. Les risques associés aux prestations de pensions**

Les fonds de pension sont fondamentalement des organismes d'assurance vie. Dès lors, ils sont soumis à deux types de risques : risques sur le passif et risque sur l'actif. Au passif, on trouve principalement les risques démographiques (le risque de longévité des ayants droit par exemple), d'inflation, de revalorisation importante des pensions ou de marché à travers le taux d'actualisation. A l'actif, le principal risque est le risque de marché. D'autres risques existent, plus diffus et moins facilement quantifiables, mais tout aussi importants et qui concernent l'actif et le passif. Au premier rang de ceux-ci se trouvent les risques légaux, liés à une modification du cadre juridique des fonds de pension. On trouve aussi les risques opérationnels ou risques de mauvaise exécution, volontaires ou non.

#### **2.1.1. Les risques démographiques**

Il s'agit du risque pour le fonds de devoir payer un nombre de pensionnés plus nombreux que prévu suite à une hausse de la durée de vie des ayants droit. On parle du risque de longévité pour l'allongement de la durée de vie et du risque de mortalité pour l'écartement temporaire de la mortalité observée par rapport à la mortalité prévue. On pourrait ajouter qu'il existe aussi un risque pour l'entreprise qui finance de verser trop de contributions si l'espérance de vie est plus faible que prévu et qu'il lui est impossible de récupérer ses contributions avant la clôture du fonds. Il faut donc

être capable d'anticiper l'évolution de la mortalité. Juridiquement, la nécessité comptable de juste valeur impose d'utiliser des tables de mortalité « raisonnables ». Les fonds de pension disposent cependant encore de marges importantes dans le choix des hypothèses retenues et les pratiques varient d'un pays à l'autre.

L'espérance de vie à la naissance au Royaume-Uni a augmenté de 3,1 ans tous les dix ans au le 20<sup>ème</sup> siècle et de 1,7 an tous les dix ans depuis 1960. A 65 ans, elle a augmenté respectivement de 0,7 an et de 0,9 an. Ces progrès, constatés dans la plupart des pays du monde, sont largement dus à l'amélioration des soins médicaux et du niveau de vie. On remarque donc deux faits saillants :

- un allongement de l'espérance de vie à la naissance mais dont la croissance semble ralentir,
- une accélération de l'allongement de l'espérance de vie aux grands âges.

Cette tendance générale recouvre plusieurs réalités. Il y a des différences de niveau et de rythme dans l'évolution de la mortalité selon la population concernée. Plusieurs effets peuvent être notés :

- un effet d'âge : la mortalité n'évolue pas uniformément pour tous les âges,
- un effet d'époque : l'évolution de la mortalité change de rythme dans le temps,
- un effet de catégorie sociale : selon les caractéristiques socio-économiques de la population étudiée, la mortalité évolue,
- un effet de cohorte : les actuaires anglais ont remarqué des évolutions différentes de la mortalité selon l'année de naissance.

Cet allongement de la durée de vie humaine a un coût financier. L'alourdissement de la charge financière des pensions est par ailleurs une fonction décroissante du niveau des taux d'intérêt. La table ci-dessous donne la sensibilité de la valeur d'une annuité à l'allongement de la durée de vie pour différents taux techniques.

Prix d'une rente viagère pour un individu de 65 ans en 2005

Evolution de la mortalité	Taux technique		
	3,50%	4,50%	5,50%
Pas d'augmentation de longévité	118,6	108,6	100
+ 1,2 an d'espérance de vie tous les 10 ans	122,3	111,6	102,4

Source : OCDE

Pablo Antolin (OCDE) considère la situation d'un fonds de pension hypothétique devant verser à ses membres une annuité fixe à partir de leur départ en retraite à 65 ans. Il s'agit d'un plan fermé, dont la croissance du salaire des membres est de 3,5% par an, égal au taux d'actualisation. Dès lors, toute variation du passif est due à une variation de la durée de vie des membres. Il étudie l'impact d'un allongement de l'espérance de vie de 1,2 an tous les dix ans jusqu'à 65 ans et de 0,8 an tous les dix ans après cet âge sur le passif du fonds. Trois structures de population sont étudiées, les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Impact de l'allongement de la durée de vie sur un fonds de pension

Structure de la population	Hausse du passif
65% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 10% 60-69 ans, 5% 70 ans et plus	10,4%
60% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 15% 60-69 ans, 5% 70 ans et plus	9,6%
50% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 20% 60-69 ans, 10% 70 ans et plus	8,2%

Source : OCDE

L'augmentation de l'espérance de vie a donc des conséquences importantes et doit être prise en compte. Jusqu'en 2002, les chercheurs du groupe de la Continuous Mortality Investigation (CMI) faisaient des projections déterministes des taux de mortalité. A partir d'un taux de mortalité initial  $q_x(0)$  (en fait celui de la table de mortalité de 1980), ils calculaient les taux de mortalité en date future  $t$  à l'aide d'un facteur de réduction  $r(x, t) = q_x(t)/q_x(0)$ . Cette fonction avait la forme suivante :

$$r(x, t) = a_x + (1 - a_x)0.4^{t/20}$$

$$\text{avec } a_x = \begin{cases} 0.5, & x < 60 \\ \frac{x-10}{100}, & 61 \leq x \leq 110. \\ 1, & x > 110 \end{cases}$$

La valeur  $a_x q_x(0)$  est la limite de  $q_x(t)$  lorsque  $t$  est infini.

Ces méthodes n'ont pas permis de bonnes prévisions, l'amélioration de la mortalité ayant été bien supérieure aux prévisions. De plus, la projection déterministe ne permet pas de donner d'intervalles de confiance à la projection, ce qui gêne la gestion des risques. Des méthodes stochastiques se sont ainsi progressivement imposées, en particulier depuis l'article de Lee et Carter en 1992. Avec ces méthodes, on modélise la vie humaine par un processus de Poisson d'intensité  $\mu(x, t)$  pour chaque âge  $x$  et en date  $t$ . On cherche donc à estimer  $\ln \mu(x, t)$ .

Les CMI Working paper 3 et 15 donnent différentes méthodes :

- méthodes économétriques : des variables explicatives de la mortalité sont introduites pour estimer  $\ln \mu(x, t)$ ,
- méthode de Lee Carter : cette méthode est largement employée aux Etats-Unis. L'équation à estimer est :

$$\ln \mu(x, t) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}$$

où  $k_t$  est une série temporelle (ordinairement un processus AR(1)). Pour obtenir une solution unique au modèle, on impose les contraintes  $\sum_x b_x = 1$  et  $\sum_t k_t = 0$ .

- méthodes paramétriques : les taux  $\mu(x, t)$  ont une forme pré spécifiée qu'on estime ensuite, appartenant par exemple à la famille de Gompertz-Makeham. Le CMI publie chaque année un modèle de projection de la mortalité fondé sur des splines polynomiaux.

Malgré les méthodes disponibles et l'importance des évolutions de la mortalité, la prise en compte de ce risque varie fortement d'un pays à l'autre. Les fonds de pension suisses utilisent une table donnée sans projection de la mortalité dans leurs calculs actuariels. Au Royaume-Uni et en Allemagne, ils utilisent des prévisions pour les taux de mortalité dans le futur. Aux Etats-Unis, si des tables de mortalité incluant des améliorations futures de mortalité existent, elles ne sont généralement pas utilisées. Il y a cependant une tendance de fond vers l'utilisation de prévisions démographiques plus prudentes.

### **2.1.2. Le risque d'indexation des pensions**

La plupart des plans de pension incluent une garantie dans leurs prestations. Chaque année, les pensions sont revalorisées à un taux défini dans le plan. A minima, il s'agit en général d'une garantie en capital : les pensions sont chaque année « augmentées » de 0%. Un plan anglais typique inclut une revalorisation des pensions en paiement à l'inflation, avec un plancher de 0% et un plafond de 5%. En Suisse, le capital accumulé dans le cadre du second pilier est crédité chaque année jusqu'au départ en retraite à un taux minimum défini par le Conseil Fédéral de Prévoyance Professionnel, qui est souvent proche des taux d'intérêts gouvernementaux. Aux Etats-Unis, le capital accumulé dans un Cash-balance plan est crédité à un taux choisi dans une liste de taux permettant au plan d'être

bien qualifié fiscalement comme un plan de pension. Ces taux comprennent des taux gouvernementaux, des taux fixes et un taux d'inflation auxquels on ajoute une marge définie par la loi.

Dès lors, si le passif du fonds de pension est revalorisé à un certain taux, le risque est que les actifs ne suivent pas cette indexation. Il n'existe parfois aucun actif de base sur les marchés qui rapporte le taux d'indexation. C'est par exemple le cas des Etats-Unis, où l'indexation du capital peut être donnée par l'inflation plus 3%.

### **2.1.3. Les risques de marché**

Le premier risque est que les actifs du fonds se dévalorisent. Ce risque est particulièrement fort pour les fonds lourdement investis en actions. Il concerne aussi le passif : une baisse des taux d'intérêt entraîne un renchérissement des annuités.

Ces risques sont peut-être les plus importants pour les fonds de pension. Les rendements des actions sont fortement asymétriques et ont des queues de distributions épaisses. Une perte peut se révéler irrécouvrable dans un horizon de temps court ou moyen. Par exemple, un fonds ayant investi sur le FTSE 100 (dividendes réinvestis inclus) en Juillet 2000 n'aurait gagné depuis que 1,6% par an en moyenne. Ce gain ne permet absolument pas de faire face à la désactualisation du passif. De même, le risque de taux est considérable tant les engagements sont longs et sensibles aux taux d'actualisation. Un fonds d'une durée de 15 ans n'ayant pas couvert son passif voit sa sous-couverture augmenter de 7,5 points après une baisse de 50 points de base des taux.

### **2.1.4. Les autres risques**

#### Le risque réglementaire

Les fonds de pension sont encadrés par des dispositifs réglementaires locaux sophistiqués. Ils vont déterminer les standards légaux minimums et maximums pour les prestations de pensions, le régime fiscal et les exigences de financement. De plus, les normes comptables internationales donnent un cadre comptable pour la publication des comptes liés aux pensions. Toute modification de ce cadre juridique peut avoir des conséquences financières importantes. On donne deux exemples de

modifications réglementaires : l'introduction des normes PPA de 2006 aux Etats-Unis et un projet d'évolution du calcul du résultat des pensions selon les normes IAS.

Les normes du Pension Protection Act (PPA) américain, voté en 2006, ont été introduites en 2008. Elles ont apporté une modification des normes d'évaluation de l'actif, du passif et des besoins de financement vers un cadre plus strict, quoique laissant malgré tout une certaine flexibilité dans les méthodes de valorisation. Le déficit doit désormais être amorti sur 7 ans sur la base de 100% de la valeur du passif. Précédemment, une souplesse bien plus importante était accordée, la durée d'amortissement allant en général de 10 à 15 ans et le déficit étant calculé sur la base de 90% du passif. Par ailleurs, les fonds sous-financés subissent des restrictions sur les prestations, qui débutent lorsque le plan est financé à moins de 80% jusqu'à un gel du plan pour ceux financés à moins de 60%. Ces différentes mesures ont conduit à un doublement ou un triplement des cotisations payées par les sponsors en 2009, à la suite de l'effondrement de la valeur des actifs en 2008.

L'IASB, souhaitant donner un cadre comptable plus rigoureux à la valorisation des engagements de pensions, a émis récemment une série de projets d'évolution du cadre comptable des pensions, décrit en partie I-1-5 ci-dessus. Le calcul du résultat des pensions serait modifié, l'idée n'étant plus de mesurer la surperformance des actifs par rapport au passif mais le coût du déficit. Formellement, le calcul du résultat passe de  $\bar{y}A - rL + S$  à  $r(A - L) + S$ ,

Où  $\bar{y}$  = le rendement attendu des actifs,  
r = taux d'actualisation  
A = valeur des actifs  
L = montant du passif  
S = coût des services rendus

La variation du résultat suite à ce changement est donc de  $(r - \bar{y})A$ . Le montant est donc rapidement significatif pour les gros fonds de pension ayant beaucoup investi en actions.

### Le risque de contrepartie

Ce risque se décline de différentes façons pour le fonds de pension. Comme tout investisseur, un fonds de pension est soumis à un risque de contrepartie sur ses investissements. Le défaut d'une société dont le fonds détient de la dette ou des fonds propres va causer une perte importante. Si le fonds a fait appel à un assureur pour lui fournir ses prestations, la faillite de celui-ci a des conséquences financières dramatiques pour le fonds. On peut aussi citer le risque de contrepartie dans le cadre d'un contrat de dérivé de gré à gré.

Le risque le plus important pour le fonds de pension reste cependant la faillite de la compagnie parente. La capacité du fonds à faire face à ses engagements futurs est profondément liée à la santé financière de son sponsor. En effet, c'est l'entreprise qui porte la responsabilité ultime des pensions dans le cas d'un plan à prestations définies. Le fonds doit faire appel à des contributions accrues de sa compagnie parente si ses investissements ne suffisent pas à combler un éventuel déficit. Si le sponsor n'est pas en mesure de contribuer, le fonds fait faillite. Si ce risque est peut-être le plus important pour le fonds lui-même, il ne sera pas traité plus en détail dans le reste du mémoire, où l'on adopte largement le point de vue du sponsor (de l'entreprise) vis-à-vis des pensions.

#### Le risque opérationnel

Ce risque est celui d'une mauvaise exécution. Il est en particulier important sur la gestion d'actifs, quand par exemple des limites de risques sont dépassées, volontairement ou non. On peut aussi y inclure le risque d'un comportement malveillant.

#### Le risque de liquidité

Ce risque correspond à la capacité d'un fonds à faire face aux exigences de décaissement sans dégrader la valeur de son actif (vente forcée). Il est en général très limité pour les fonds de pension qui ont plutôt des engagements à long terme et une très faible part de leurs passifs exigibles à court terme. Il va cependant dépendre de la durée moyenne d'engagement du fonds et des classes d'actifs dans lesquelles il a investi. Pour les fonds ayant une durée résiduelle longue, ayant par exemple une population jeune, ce risque est limité. De même, un fonds ayant investi tous ses actifs en actifs monétaires ne sera pas en risque de liquidité. Le risque viendrait plutôt des fonds matures qui ont lourdement investi en actifs peu liquides, immobilier, private equity et obligations peu liquides en particulier.

## **2.2. La gestion des risques des fonds de pension**

### **2.2.1. Remarques préliminaires sur la gestion des risques**

Tout d'abord, il est utile de rappeler que le fonds de pension est toujours exposé à un risque, et que celui-ci peut être salubre car la prise de risque apporte le rendement nécessaire au financement du passif. Il convient cependant de bien comprendre comment le fonds est affecté par ces risques pour pouvoir mesurer son exposition à chacun d'eux.

Le risque salarial est maîtrisé par une politique de ressources humaines attentive. Les risques juridiques ne peuvent être limités que par une attention constante aux évolutions réglementaires. Le risque opérationnel relève de la bonne gouvernance du fonds. Le risque de liquidité peut être traité de façon simple en s'assurant de disposer toujours d'une liquidité suffisante pour les prochains mois. Le risque de contrepartie sur les actifs passe par un suivi attentif des différentes lignes du portefeuille. Le risque d'insolvabilité du sponsor, fondamental, est rarement géré en tant que tel, excepté par les primes payées aux organismes publics de protection des fonds de pension. La seule façon pour un fonds de gérer convenablement ce risque est de s'assurer de toujours disposer d'assez d'actifs pour payer les droits acquis par les membres.

On ne traite ci-après que les risques d'indexation, de marché et de longévité. Les fonds de pension peuvent limiter ou annuler leurs risques soit en les transférant à un organisme externe d'assurance, soit en mettant en place une gestion appropriée en interne. L'externalisation peut être totale (buyout) ou partielle (buy-in). La gestion interne des risques consiste à investir de telle sorte que l'actif couvre au mieux les risques du passif. De nombreuses entreprises ont cependant préféré fermer leurs plans de pension aux nouveaux entrants, voire à l'acquisition de nouveaux droits, et ont ouvert des plans à contributions définies pour limiter les risques liés à leurs prestations de pension.

Dans le domaine de la gestion des risques tout est matière de budget, de préférences et d'horizon temporel. La couverture des risques du passif coûte cher si elle est mise en place en une seule fois et si les conditions de marché sont défavorables. La seule contrainte intangible est que les prestations

devront être payées. Une entreprise redoutant particulièrement les risques inhérents à ses pensions et / ou disposant d'un budget suffisant peut faire le choix d'éliminer au plus vite ces risques. Elle peut les éliminer en totalité à un coût très élevé en passant par un assureur, ou en partie à un coût élevé en achetant suffisamment de titres d'Etat pour « couvrir » sa dette évaluée avec des hypothèses démographiques prudentes. Si l'entreprise ne craint pas particulièrement les risques liés aux pensions et pense pouvoir assumer un éventuel décrochage de ses actifs, elle peut investir tout ses actifs en actifs risqués et contribuer lorsque nécessaire. Entre les deux, les choix sont nombreux et passent par une réduction progressive des risques en fonction des opportunités qui se présentent, par exemple si les taux d'intérêts montent suffisamment pour que les solutions assurantielles soient attractives. Cela passe aussi par des échanges entre les différentes parties prenantes pour évaluer les risques et les préférences de chacun.

### **2.2.2. Buyout et buy-in**

Ces solutions consistent à passer par un assureur pour réduire les risques liés aux pensions, en totalité avec un buyout ou en partie avec un buy-in. Le buyout, en sortant une partie du passif du fonds de pension, supprime l'ensemble des risques, y compris légaux et opérationnels. Le spectre des acteurs présents sur ce marché s'est élargi depuis quelques années des assureurs traditionnels comme Legal & General et Prudential vers des banques et des sociétés spécialisées comme Paternoster, souvent soutenues par des banques d'investissement.

Le buy-in est une décision d'investissement. Le fonds va acheter des annuités pour couvrir une partie de son passif. Ces annuités sont détenues par le fonds de pension au même titre qu'un actif financier. En général, c'est la population des retraités, en totalité ou en partie, qui est ciblée.

Le buyout permet de transférer l'ensemble de la charge des prestations du fonds et des engagements du sponsor envers tout ou partie de ses membres à un organisme assurantiel. Celui-ci va alors offrir aux membres concernés des polices d'assurance en leur nom. Un buyout passe par le transfert des actifs à l'assureur plus le paiement d'une prime, qui correspond à la différence entre les actifs transférés et son passif tel que valorisé par un assureur. Selon l'indice buyout de Mercer au Royaume-Uni, en 2010, la valeur du passif calculée par un assureur est 40% plus cher que la valeur déclarée par le sponsor. Ce tarif élevé a depuis 2008 freiné le développement du marché du buyout.

### **2.2.3. La gestion actif passif et le Liability Driven Investment (LDI)**

L'idée de la gestion actif-passif est de réduire les risques de divergence entre l'actif et le passif. Elle s'oppose en particulier à la gestion d'actifs pure, qui va chercher à optimiser le rendement des actifs en contrôlant le niveau de risque pris. La gestion actif-passif traite les risques de longévité, d'indexation, de marché et de liquidité, mais pas les risques légaux et opérationnels.

#### **2.2.3.1. Théorie et pratique générale de la gestion actif passif**

##### Généralités sur la gestion actif-passif

Avec la gestion actif-passif, le gérant va d'abord analyser finement le passif et ses caractéristiques :

- profil démographique de la population (âge des membres, situation maritale) qui détermine la durée moyenne d'engagement,
- nature exacte de l'engagement, en particulier évolution des salaires et formule d'indexation des pensions y compris planchers et plafonds, options offertes aux membres de retraits anticipés (pour des achats immobiliers par exemple).

Cette étude étant faite, on cherche l'allocation d'actif qui offre un meilleur rendement et permet de protéger au mieux le fonds contre une évolution « défavorable » de son passif :

- part des différentes classes d'actifs (actions, obligations, immobiliers, alternatifs, etc.),
- durée des obligations et nature (obligation d'Etat ou d'entreprise, à taux fixe, variable ou indexée),
- utilisation éventuelle de dérivés.

En tant que gestion des risques, la gestion actif-passif doit aussi affecter des probabilités aux différents scénarios pour donner des mesures de risque d'une stratégie d'investissement.

Dans le cas d'un fonds anglais typique, par exemple, partant du fait que les actifs doivent permettre de payer les prestations tout au long de la vie du fonds, des grandes tendances se dégagent :

- le passif étant indexé à l'inflation, une allocation d'actifs « idéale » utilise des produits indexés sur l'inflation (couverture du risque d'inflation),

- le passif étant en substance une somme de flux actualisés, sa valeur est très sensible aux taux d'intérêt et il est préférable que les actifs le soient aussi au moins en partie (couverture du risque de taux),
- les pensions étant parfois payées chaque semaine, une portion des actifs doit être investie en cash pour payer les pensions (couverture du risque de liquidité).

L'objectif ultime est pour un fonds de pension à prestations définies est donc de répliquer parfaitement son passif avec ses actifs, ou tout au moins de le répliquer au mieux avec l'information disponible à tout instant.

#### Les difficultés d'introduction de la gestion actif-passif dans le contexte des fonds de pension

Cette vision a cependant du mal à s'imposer, comme le notent Exley, Mehta et Smith. L'approche traditionnelle des fonds de pension au Royaume-Uni est une approche de besoin de financement, qui repose sur l'actualisation des flux de pensions au taux de rendement attendu des actifs. Considérons par exemple qu'un fonds ait 100 de cash et doive payer un capital de 180 dans 10 ans et que les taux de rendement attendus des obligations et des actions soient de 4,5% et 7% respectivement. Si le fonds investit en actions, son passif vaut 91,5 et il dispose d'un excédent. Si le fonds investit en obligations, son passif vaut 115,9 et il est en déficit.

Avec cette approche, la valorisation du passif dépend de la structure du portefeuille de l'actif, en contradiction avec les théories modernes de la finance (Modigliani-Miller) et avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage si on suppose qu'un fonds de pension peut être librement acheté ou vendu sur les marchés. La persistance de cette approche s'explique par la possibilité qu'elle laisse de diminuer les contributions de l'entreprise et des membres en minorant la valeur du passif si les actifs sont investis en actions. Elle a eu deux graves conséquences pour les fonds de pension : une sous-estimation du passif et une surexposition aux marchés actions, le cumul des deux ayant conduit à un déficit important des fonds de pension.

#### Les mesures de divergence entre actif et passif

Deux grands types de mesures peuvent être donnés dans le cadre d'un fond de pension.

Les premières concernent purement la convergence de l'actif et du passif, en pourcentage ou en montant. Elles sont de la forme :

$$A_t/L_t \quad \text{ou} \quad A_t - L_t,$$

Où  $A_t$  désigne les actifs du fonds et  $L_t$  son passif. On peut s'interroger sur l'évolution de la distribution de ces variables, ou au moins de ses moments et de ses quantiles. On peut aussi étudier la sensibilité de ces variables à une variation des facteurs de risque.

Les deuxièmes vont concerner la distribution du coût de financement du fonds et sa sensibilité à un mouvement du passif et à l'allocation d'actifs. Cette mesure intéresse particulièrement la compagnie qui finance.

### **2.2.3.2. La mise en place de couverture et l'utilisation de dérivés (swaps de mortalité, swaps d'inflation et de taux, options)**

#### La mise en place d'une couverture du risque de longévité

Le risque de longévité est plus difficile à gérer en interne pour un fonds de pension que d'autres risques car il n'existe pas un marché profond et liquide permettant de le couvrir. La plupart du temps, ce risque est entièrement conservé par le fonds et pris en compte au travers de la prudence des hypothèses et d'une éventuelle réserve. La première solution peut être d'acheter des annuités à une banque ou un assureur.

Considérant l'intérêt pour la gestion de ce risque, BNP Paribas et la Banque Européenne d'Investissement, réassurés par Partner Re ont lancé en 2004 une obligation de longévité sur le marché anglais, où l'acheteur de l'obligation paye un montant fixe et reçoit en retour un coupon indexé sur un indice de survie publié par l'Office for National Statistics anglais. Le peu de succès de cette obligation est selon Blake plus lié aux caractéristiques de l'obligation elle-même qu'à un manque d'intérêt pour le marché.

Une autre solution est le swap de longévité. Il s'agit d'un produit de gré à gré où l'acheteur de la partie fixe paye annuellement un montant en référence à un taux de survie défini par le contrat, et où le vendeur paye un montant correspondant à la survie observée sur une certaine population. Le fonds de pension peut ainsi annuler son risque de longévité en payant un montant prévu par un contrat. Il s'agit d'un contrat de gré à gré, donc parfaitement adapté aux besoins du fonds de

pension qui entre dans le contrat. Babcock International est la première entreprise anglaise à avoir signé un tel contrat, structuré par le Crédit Suisse, pour un nominal d'environ 500 millions de livres. En 2010, la filiale anglaise de BMW a signé un swap de longévité pour 3 milliards de livres (60 000 membres) avec Abbey Life, filiale de la Deutsche Bank, qui va rétrocéder ses risques à un consortium de réassureurs. Ce marché se développe cependant lentement, car les tarifs offerts correspondent aux estimations hautes de prévision d'amélioration de la mortalité.

Pour la suite, on supposera que les risques de mortalité et de longévité sont entièrement couverts ou que les prévisions démographiques sont exactes.

#### L'utilisation des dérivés dans le cadre de la stratégie d'investissement

On peut distinguer trois grandes utilisations des dérivés dans la gestion des actifs. La première concerne surtout les swaps, et les swaps de change en particulier, et permet d'élargir l'univers d'investissement. En achetant un swap de devise, un investisseur peut investir dans un pays étranger sans courir de risque de change, mais s'il est parfaitement couvert, la stratégie « acheter une obligation étrangère + couvrir les coupons avec des futures ou un swap » paiera en fait les taux obligataires nationaux.

La deuxième concerne la protection des investissements. Un fonds de pension est détenteur d'actions qu'il peut protéger en achetant un put par exemple.

La troisième sert à améliorer le degré de couverture du passif. Si un fonds de pension a un passif indexé à l'inflation et qu'il détient des obligations à taux fixe, il peut par exemple signer un swap d'inflation qui lui permettra de recevoir l'inflation constatée contre un paiement correspondant à une fraction des coupons fixes perçus sur son portefeuille d'obligations.

#### La gestion des risques d'indexation, de taux et d'investissement par la gestion actif-passif

On va supposer un modèle discret pour un fonds fermé où le dernier paiement a lieu en date  $T = t_N$ . Les flux de pensions  $F$  sont payés annuellement et varient en fonction de l'inflation observée chaque année jusqu'au paiement. Les facteurs de risque de l'inflation sont notés  $I_j, j = 1, \dots, n_i$  et les facteurs de risque des taux d'intérêt sont notés  $R_m, m = 1, \dots, n_r$ . On suppose que le fonds peut investir sur les obligations d'Etat, les actions et acheter des dérivés pour se couvrir. Le passif du fonds de pension en date  $t_0$  est :

$$L_{t_0} = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{t_k}}(F(t_k)|\mathcal{F}_{t_0}) P_n(t_0, t_k)$$

Les variables  $P_x(t, T)$  désignent la valeur en date  $t$  des zéro-coupons arrivant à maturité en date  $T$ ,  $x$  prenant pour valeur  $n$  pour les taux zéro-coupons nominaux et  $r$  pour les taux zéro-coupons réels.

On se donne un horizon temporel  $t_k \leq t_N$  et on va déterminer les valeurs :

$$\frac{\partial L_{t_k}}{\partial x}, \frac{\partial L_{t_k}}{\partial y}, \frac{\partial^2 L_{t_k}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 L_{t_k}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L_{t_k}}{\partial x \partial y}, \quad x \in (I_j)_{j=1, \dots, n_i}, y \in (R_m)_{m=1, \dots, n_r}, k = 0, 1, \dots, K$$

i-e la sensibilité de  $L_{t_k}$  à tous les  $I_j$  et les  $R_m$ .

Après cela, on va chercher à déterminer un portefeuille de couverture et une stratégie d'investissement de valeur  $V$  qui a les mêmes sensibilités que  $L$  aux différents facteurs de risques. Ce portefeuille doit répliquer l'évolution du passif. On construit ensuite un portefeuille  $Y$  dit de rendement destiné à prendre des positions directionnelles, par exemple une exposition aux marchés actions ou aux obligations de longues maturités. Enfin, on peut aussi constituer un troisième « portefeuille »  $C$  de cash pour face aux prochains flux à payer. On teste ensuite différentes allocations d'actifs par les indicateurs de risques et de coûts donnés plus haut. La décision finale d'allocation sera prise en fonction de l'importance accordée à chaque risque de marché impactant le passif, de la volonté de bénéficier d'un rendement important sur les marchés et des besoins de liquidité.

Une variante de ce procédé est de déterminer  $V$  tel que les sensibilités de  $A = V + Y + C$  soit égales à celles de  $L$ . Avec cette méthode cependant, on annule toutes les positions directionnelles par rapport aux sensibilités du passif. Cela réduit grandement l'intérêt du portefeuille d'investissement, en particulier pour un fonds en déficit.

Il s'agit en fait d'une séparation en deux fonds (trois, si on inclut le « petit » portefeuille de cash), un portefeuille de couverture et un portefeuille de rendement. Cette méthode est ainsi appelée Liability Driven Investment (LDI) car on part du passif pour déterminer l'actif sans risque, qui lui-même réplique le passif. Le problème est alors un problème d'allocation dynamique de portefeuille assez similaire au problème de Merton. Ces similarités seront développées en partie II-1-4.

On étudie maintenant trois stratégies couramment utilisées pour la gestion actif-passif, la couverture exacte des cash-flows, la couverture en duration et l'allocation différenciée par catégorie de membres.

### 1. Couverture exacte du passif (cash flow matching)

La couverture exacte du passif consiste en fait à choisir  $A = V = L$  avec les notations ci-dessus. Si on a alors une couverture parfaite du passif, cette méthode présente deux inconvénients majeurs, comme le note Martellini. Le premier est la difficulté à trouver des actifs de couverture pour chacun des flux et à couvrir les options incluses dans le passif. Le second, qui explique le peu de succès de cette technique est son coût extrême : elle consiste à fixer le déficit aux taux d'Etat. Elle sort donc du champ des investissements optimaux dans le plan rendement risque du fonds.

### 2. Couverture en duration (et en convexité)

La duration modifiée est la sensibilité de la valeur d'une série de cash-flows actualisés à une variation de son taux actuariel (variation parallèle de la courbe des taux). Une série de flux  $CF_t$  actualisés au taux  $r$  a pour valeur  $V$  et pour duration (modifiée)  $D$ .

$$V = \sum_{t=t_1}^T \frac{CF_t}{(1+r)^t}, \quad D = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1+r}{V} \sum_{t=t_1}^T t \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

On suppose dans cette partie que les flux sont parfaitement indexés à l'inflation. Il s'agit d'une approximation, mais elle fait sens pour le passif d'un fonds anglais fermé typique. La dette de pensions s'exprime alors comme :

$$L_{t_0} = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{t_k}} \left( F_{t_k} \prod_{j=1}^k (1 + i_{t_j}) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right) P_n(t_0, t_k) = \sum_{k=1}^N F_{t_k} P_r(t_0, t_k)$$

La couverture en duration consiste à supposer qu'il existe un facteur de risque dominant sur les taux réels, noté  $R_1$ . On calcule les sensibilités à une variation de ce facteur.

$$S_r L_{t_0} = \frac{\partial L_{t_0}}{\partial R_1}, \quad S_{rr} L_{t_0}^2 = \frac{\partial^2 L_{t_0}}{\partial R_1^2}$$

On couvre alors en totalité ou en partie les risques de divergence entre actif et passif en investissant tout ou partie de l'actif dans un portefeuille d'obligations réelles ayant les mêmes sensibilités. On

ajuste le portefeuille au cours du temps pour maintenir ses sensibilités proches de celles du passif tout au long de la vie du fonds.

Munk approfondit le concept de « duration stochastique » introduit par Cox, Ingersoll et Ross, qui se définit comme la maturité d'un zéro-coupon ayant la même volatilité instantanée de prix que le passif. Si les zéro-coupons ont pour diffusion :

$$dP_r(t, T) = P_r(t, T) \left( \mu(t, T)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t, T)dW_i(t) \right)$$

Une application du lemme d'Itô donne:

$$\begin{aligned} dL_t &= \sum_{k=1}^N F_{t_k} P_r(t, t_k) \left( \mu(t, t_k)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t, t_k)dW_i(t) \right) \\ &= L_t \left( \sum_{k=1}^N w(t, t_k) \mu(t, t_k)dt + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^N w(t, t_k) \sigma_i(t, t_k) \right) dW_i(t) \right) \end{aligned}$$

où les  $w(t, t_k)$  désignent les poids relatifs des flux actualisés à chaque date :

$$w(t, t_k) = \frac{F_{t_k} P_r(t, t_k)}{L_t}$$

La duration stochastique est alors définie comme la maturité  $D(t)$  telle que :

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i(t, t + D(t))^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^N w(t, t_k) \sigma_i(t, t_k) \right)^2$$

Munk montre que si les fonctions de volatilités sont toutes croissantes ou décroissantes, alors  $D(t)$  existe et est unique. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de couvrir l'ensemble des risques avec un seul zéro-coupon. Son inconvénient est qu'elle repose sur l'estimation de fonctions de volatilités et qu'elle ne fonctionne que si celles-ci sont suffisamment régulières, ce qui n'est pas toujours le cas des obligations réelles du marché anglais (voir partie II). Elle impose de plus de réajuster le portefeuille plus souvent qu'avec une couverture en duration classique.

Un inconvénient général de la couverture en duration est son manque de finesse. Elle ne permet pas de différencier les flux et le risque par terme. Il peut aussi être difficile d'établir précisément la

sensibilité du passif aux taux et à l'inflation en présence de barrières dans l'indexation et d'un aléa de longévité.

La couverture en duration perd de plus beaucoup de son intérêt lorsque l'actif est sensiblement inférieur au passif. Soit par exemple un fonds de pension avec un passif  $L$  et un actif  $A$ , sensibles au niveau des taux d'intérêts  $r$ . Ces sensibilités sont notées respectivement  $S_L$  et  $S_A$  et on définit aussi  $f = A/L$  et  $U = L - A$ . On obtient les sensibilités suivantes :

$$dU = L(S_L - fS_A)dr$$

$$df = f(S_A - S_L)dr$$

On ne peut donc jamais immuniser simultanément les deux variables si  $f \neq 1$ .

Considérons un fonds tel que  $L = 100$ ,  $A = 75$  et  $S_L = 15$ . On a donc  $f = 75\%$  et  $U = 25$ . Quelle que soit l'évolution du taux  $r$ , la couverture du fonds est imparfaite :

- Le fonds couvre son taux de financement  $f$  et achète un portefeuille de duration 15 ans. Une baisse des taux réels de 30 points de base ne modifie pas  $f$  mais augmente  $U$  de 1, donc in fine le coût de financement des pensions.
- Le fonds couvre son déficit  $U$  et achète un portefeuille de duration 20 ans. Une hausse des taux de 30 points de base, qui aurait permis de réduire le coût de financement du déficit de 1, ne le modifie en fait pas. De plus, on ajoute nécessairement un risque de courbe des taux ayant des actifs positionnés sur un segment de courbe différent de celui du passif.

### 3. Couverture différenciée par catégorie de membre avec extension progressive de la couverture

Avec une analyse plus fine du passif, on peut définir des groupes homogènes au sein du passif et les exposer à des risques différents. Le raisonnement le plus simple est de « trancher » le passif par maturité et par catégorie de membres. On peut affecter plus de risques à un groupe si l'incertitude sur le montant des prestations qui lui sont dues est forte et l'horizon temporel distant.

Une approche usuelle est de constituer plusieurs portefeuilles :

- Un portefeuille qui couvre avec des titres d'Etat chacun des flux des 5 à 10 prochaines années pour lesquels l'incertitude reste modérée (population des retraités ou des membres très proches de la retraite) et où on est exposé à un risque de mortalité plus que de longévité,

- Un portefeuille qui couvre en duration le reste des flux de la population des retraités et éventuellement tout ou partie des membres différés,
- Un portefeuille de titres plus risqués pour les membres actifs ou la partie la plus jeune des retraités ou des membres différés.

### L'utilisation de dérivés

L'utilisation de dérivés peut permettre de grandement améliorer la couverture du passif d'un fonds de pension. Cependant, le prix des dérivés va varier en fonction des conditions de marché, et, comme pour toute couverture de risques, il convient de prendre garde à ne pas figer une situation adverse en voulant se protéger.

Un premier montage peut être un achat d'obligations à taux fixe et la signature d'un swap d'inflation zéro-coupon pour couvrir ce risque. Un swap acheteur d'inflation zéro-coupon de maturité  $T$  signé en date  $t$  sur un montant  $M$  donnera lieu à maturité au flux :

$$M(I_T/I_t - \exp\{-BEIR(t, T)(T - t)\})$$

$I_s$  désigne la valeur de l'indice d'inflation en date  $s$ .  $BEIR(s, u)$  le point mort d'inflation en date  $s$  pour la maturité  $u$ . Il se calcule comme la différence entre le taux zéro-coupon continu nominal et le taux zéro-coupon continu réel et est connu en date  $s$ .

Comme on peut exprimer un portefeuille d'obligations à coupons comme un portefeuille de zéros-coupon, on doit pouvoir couvrir un portefeuille d'obligations nominales contre l'inflation avec ces swaps. Le montage est donc le suivant :



où  $n$  désigne les taux nominaux,  $r$  les taux réels,  $i$  le taux d'inflation et  $s$  un éventuel spread de crédit. Ce montage simple permet de rendre l'actif plus conforme au passif.

Une deuxième utilisation des dérivés peut être l'utilisation d'options pour couvrir le risque lié aux actions. Un fonds de pension qui détient un portefeuille d'actions répliquant le FTSE 100 peut acheter un put pour se couvrir contre des baisses trop fortes. Pour choisir quel put acheter, il doit déterminer ses préférences en termes de coût de couverture du risque (prime d'option), d'aversion au risque (prix d'exercice) et d'horizon temporel (maturité de l'option). En fonction de la surface de

la structure de volatilité par prix d'exercice et par maturité, soit un ou plusieurs choix s'offrent au fonds et il achète une option, soit aucune option ne répond à ses attentes et il n'en achète pas. Il est même possible de signer un swap d'inflation zéro-coupon tel que le montant payé par l'acheteur d'inflation à terme soit égal au prix d'exercice de l'option.

Le fonds peut aussi acheter un put et vendre un call pour limiter ou annuler la prime payée, au prix d'un rendement maximum des actions plafonnée. Il doit là aussi choisir en fonction de ses préférences en termes de rendement et de risque.

#### Une remarque finale sur le LDI

Le LDI tend à occulter les classes d'actifs qui ont une sensibilité proche de celle du passif mais ne couvrent pas exactement ses risques. Le portefeuille de couverture ignore totalement la diversification. Dans le cas d'un fonds en déficit, cette approche peut être nocive : la baisse de valeur du portefeuille de couverture est compensée par la baisse de valeur du passif, mais le problème n'est pas pour autant résolu. Un déficit existe toujours et moins d'actifs sont liquidables pour faire face aux engagements de pensions, mettant le fonds dans une situation de risque de liquidité voire de solvabilité accru.

Il est donc fondamental d'avoir une vision stratégique sur les évolutions financières et une compréhension de l'appétit pour le risque du sponsor avant de mettre en place ou d'approfondir une stratégie de LDI.

### 3. Normes et environnement des fonds de pension au Royaume-Uni

#### 3.1. L'évolution historique du système des retraites au Royaume-Uni

Le Royaume-Uni offre à ses citoyens à une pension de base d'un montant très faibles. Celle-ci se situe entre 25 et 98 livres par semaines pour l'année 2010-2011. De 1978 à 2002, l'Etat offrait un plan de retraite complémentaire fondé sur le salaire (State Earnings-Related Pension Scheme, SERPS). L'objectif était jusqu'en 1988 d'offrir une pension équivalente à 25% du salaire final avec un seuil minimum. Ce taux de remplacement a été revu à 20% cette année-là. Les prestations étaient financées à partir de taxes sur les entreprises. Pendant cette période, les entreprises ont eu la possibilité de fortement diminuer le montant de ces taxes en offrant des plans de pension à minimum garanti, la Guaranteed Minimum Pension (GMP). Elle devait être équivalente au SERPS. Le calcul de la GMP a évolué en 1988 et est relativement complexe. L'incitation fiscale a poussé de nombreuses entreprises à opter pour des plans de pension, parmi lesquelles les plans à prestations définies. S'ils sont en recul par rapport aux plans à contributions définies, ils restent une composante fondamentale de la retraite des salariés. Depuis 2002, l'Etat offre une deuxième pension d'Etat (Second State Pension), qui se veut plus favorable aux revenus élevés.

La pension de base de ces régimes est calculée en fonction du salaire final du salarié ou de son salaire moyen au cours des dernières années passées dans l'entreprise. La pension de base est aussi fonction du nombre d'années passées dans l'entreprise. Cette pension est réévaluée en fonction soit d'un indice des prix défini par le gouvernement, soit d'un indice défini dans les règles du fonds de pension. La formule de réévaluation des pensions est généralement basée sur le « Limited Price Index », ou LPI. Celui-ci repose sur le Retail Price Index (RPI), l'indice des prix de détail anglais. Il se calcule comme l'inflation plafonnée par une borne supérieure et éventuellement avec un plancher minimal. Le plafond était égal à 5% pour les droits acquis jusqu'en 2009 pour les membres déferés et jusqu'en 2006 pour les retraités et à 2,5% pour les droits acquis depuis cette date. Le plancher vaut en général 0%.

La formule de réévaluation des droits d'un membre sera donc basée sur les coefficients :

$$K(t, n, I_t, I_{t+n}, C, F) = \text{Max} \left\{ \text{Min} \left\{ \frac{I_{t+n}}{I_t}, (1 + C)^n \right\}, (1 + F)^n \right\}$$

Où  $I_t$  = valeur de l'indice des prix en date t,

C = réévaluation maximale (le cap),  
F = réévaluation minimale (le floor).

La réévaluation des droits va varier selon le statut du membre, différé ou retraité :

- si le membre est un retraité recevant une pension  $P_t$  en date  $t$ , alors il recevra en date  $t + 1$  une pension de valeur  $P_{t+1} = P_t K(t, 1, I_t, I_{t+1}, C, F)$ ,
- si le membre a cessé d'acquiescer des droits en date  $t$ , date à laquelle il a un droit à une pension  $P_t$ , et qu'il exerce ses droits à la retraite en date  $t + n$ , alors il touchera en date  $t + n$  une pension de valeur  $P_{t+n} = P_t K(t, n, I_t, I_{t+n}, C, F)$ .

Une pension de réversion est versée à un bénéficiaire survivant, conjoint(e) ou enfant(s) sous certaines conditions. Il est important de noter que les régimes d'indexation ont évolué au cours du temps. En particulier, aucune obligation n'était faite jusqu'en 1997 d'indexer les pensions, exceptée la partie qui correspondait au GMP (indexée au LPI avec un maximum de 3%). Cependant, de nombreux plans avaient inclus une indexation dans leurs règles.

### **3.2. L'environnement d'un fonds de pension au Royaume-Uni**

#### Le trust, structure centrale de la prise décision dans un fonds de pension

Le fonds est une entité légale distincte du sponsor. Il est dirigé par un trust. Le trust a pour objectif de défendre les droits des membres et la situation financière du fonds. Il agit sur des sujets variés : définition des droits et amendements au plan, négociations du plan de financement du fonds avec l'employeur et choix de l'allocation d'actifs du fonds. Il est tenu de mener une évaluation de son passif tous les trois ans au moins. Il y siège des représentants des employés et de l'employeur. Le recours à des membres indépendants se répand et est recommandé par les organes de surveillance. L'objectif est d'améliorer la gouvernance et d'éviter les conflits d'intérêt.

#### Les organes légaux de protection et de contrôle des pensions

On peut citer deux organismes principaux. Le premier, the Pension Regulator (tPR) est un organisme d'Etat chargé principalement de surveillance et de médiation. tPR a pour objectif de protéger les membres des fonds de pension, de favoriser la bonne administration des fonds, d'éviter les situations conduisant à l'insolvabilité d'un fonds de pension et de vérifier que la compagnie sponsor

finance effectivement ses pensions. Il peut utiliser des moyens contraignants mais préfère en général arriver à un accord négocié entre le fonds et l'entreprise. Il peut donc être amené à vérifier les hypothèses actuarielles utilisées par les différentes parties dans les calculs de besoin de financement.

Le fonds de protection des fonds de pension (Pension Protection Fund, PPF) est un organisme d'assurance légal contre l'insolvabilité des fonds de pension. Il est chargé de collecter une taxe auprès des fonds de pension et d'administrer les fonds dont le sponsor a fait défaut. Les fonds de pension doivent verser au PPF une prime qui comprend deux composantes basées sur la taille et le risque du fonds et qui représentent respectivement 20% et 80% de la prime totale payée au PPF. La prime est donc calculée de la façon suivante :

$$P = f_1L + \min(f_2pU, kL)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des facteurs fixés chaque année par le PPF,  $L$  est la valeur du passif selon des hypothèses actuarielles strictes mais avec des prestations réduites,  $p$  est la probabilité de défaut du sponsor,  $U$  le déficit du fonds selon une valorisation projetée incluant des actifs contingents (garantie du sponsor par exemple) et  $k$  est un cap déterminant une prime maximum pour protéger les fonds les plus fragiles.

## **PARTIE II – UN FONDS DE PENSION D’ALSTOM AU ROYAUME-UNI : PRÉSENTATION DU PASSIF ET DE L’ENVIRONNEMENT DE MARCHÉ**

---

### **1. Présentation du fonds étudié et de son contexte**

#### **1.1. Le passif du fonds**

##### **1.1.1. Description générale du plan**

Le plan de pension étudié est l’Alstom Pension Scheme (APS), qui garantit une pension à certains salariés d’Alstom au Royaume-Uni. Il s’agit d’un plan dont les caractéristiques générales sont proches de celles du plan de pension anglais type décrit en partie précédente. Cependant, de nombreuses sous-sections existent de par la taille et l’histoire du développement d’Alstom. Sans entrer dans les détails du plan, il offre en général des prestations indexées sur le salaire moyen des dernières années de la vie professionnelle. Ces prestations sont indexées à l’inflation limitée entre 0% et 5%.

Ce plan paye des prestations à plus de 20 000 membres, dont la population se répartit comme suit :

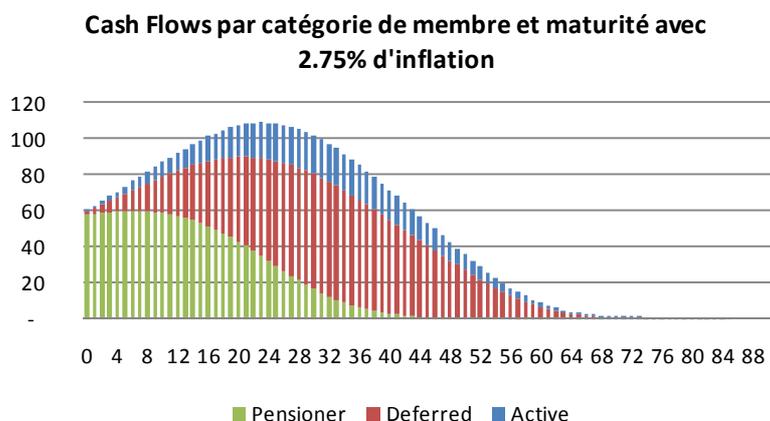
- 45% de retraités
- 50% de membres déferés
- 5% d’actifs.

La composante salariale du risque de ces pensions est donc très limitée. Ce plan a été fermé aux nouveaux entrants en 2006.

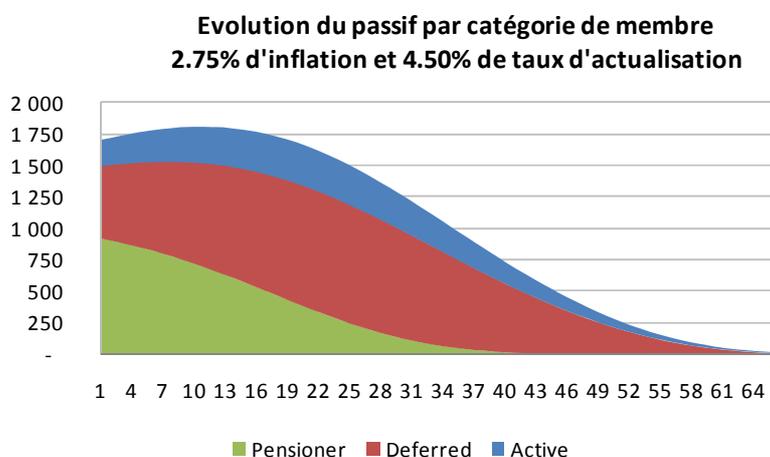
##### **1.1.2. Présentation des données du passif : cash-flows et sensibilités à l’inflation et aux taux**

On dispose des cash-flows prévisionnels de prestations annuelles de retraite pour les trois catégories de membres : actifs, déferés et retraités. Le dernier cash-flow est versé dans 90 ans. On dispose de ces flux selon cinq hypothèses d’inflation moyenne sur la vie du fonds : 2,25%, 2,50%, 2,75%, 3,00%

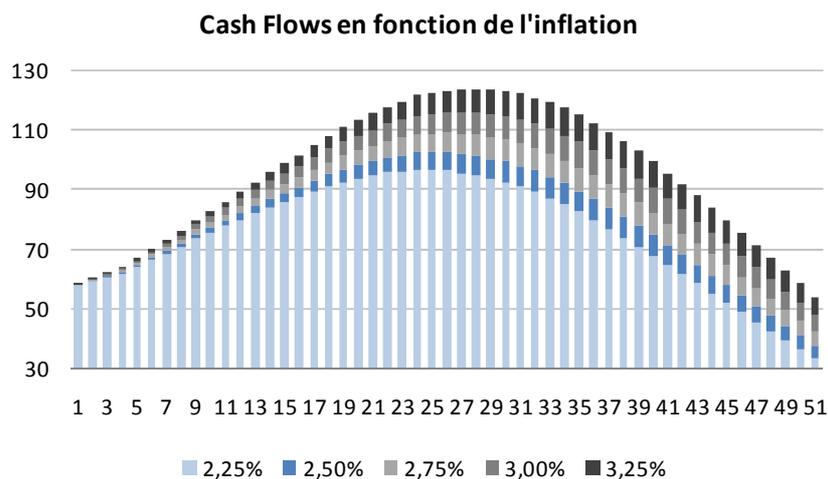
et 3,25% (2,75% étant supposé l'hypothèse centrale). Calculés par les actuaires conseils du fonds en 2006, les flux annuels ont le profil suivant (l'unité est le million de livres sterling) :



A partir de cette série de cash-flows, on détermine la valeur du passif en appliquant un taux d'actualisation. On suppose que le taux d'actualisation central est de 4,5%. Le passif va évoluer de la façon suivante, à taux d'inflation et d'actualisation constants.



Cependant, le passif n'est pas déterministe et il est sensible aux variations de taux d'inflation et d'actualisation. Les cash-flows décaissés vont fortement varier selon l'évolution de l'inflation, comme le montre le graphique ci-dessous :



A ces hypothèses différentes vont correspondre différentes valeurs pour le même engagement. Le tableau ci-dessous résume ces différences en donnant la valeur du passif pour différents jeux d'hypothèses.

Valeur du passif selon l'hypothèse d'inflation et de taux d'actualisation

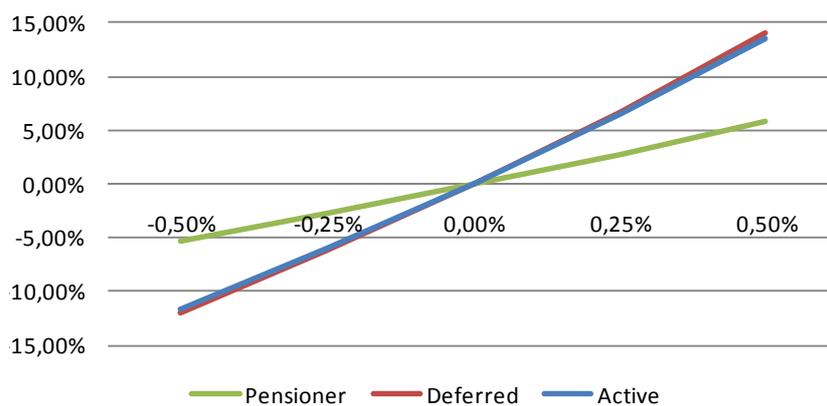
actu \ inflation	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
5,00%	1439	1499	1564	1633	1706
4,75%	1498	1563	1632	1705	1784
4,50%	1562	1631	1704	1783	1867
4,25%	1630	1704	1782	1866	1955
4,00%	1703	1781	1865	1955	2051

De ce tableau, on peut tirer deux enseignements principaux :

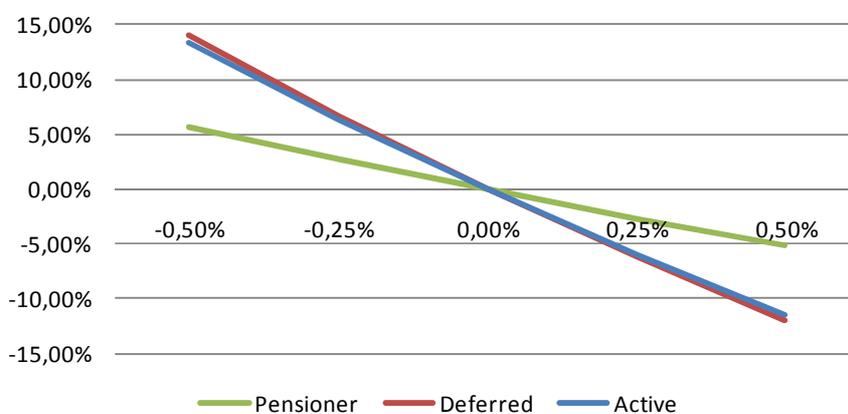
- La valeur de l'engagement est très sensible aux hypothèses retenues, variant de -17% (inflation à 2,25% et taux d'actualisation à 5,00%) à +20% (inflation à 3,25% et taux d'actualisation à 4,00%) par rapport au scénario central,
- La valeur de l'engagement est en fait surtout sensible aux taux réels, les valeurs sur les diagonales inversées étant toutes très proches.

Les sensibilités vont cependant varier selon la catégorie de membres. Comme les retraités perçoivent déjà leur pension, l'engagement qui leur revient est plus court en moyenne et donc moins sensible aux taux d'actualisation et d'inflation que celui envers les autres catégories de membres.

**Sensibilité du passif à l'inflation  
(base: 2.75%inflation, 4.50% taux d'actualisation)**

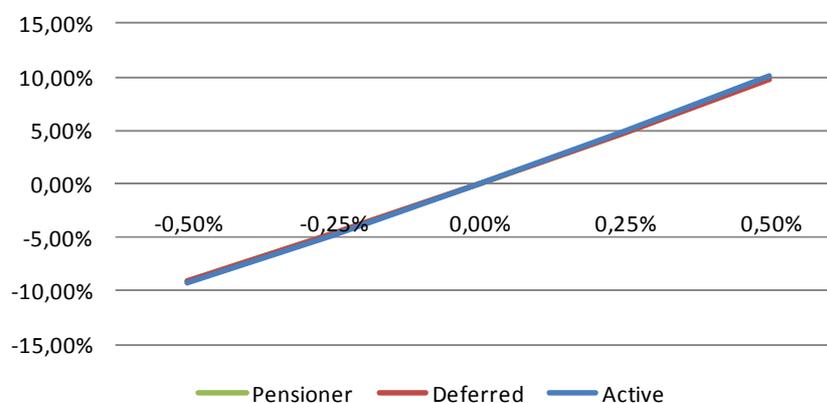


**Sensibilité du passif au taux d'actualisation  
(base: 2.75%inflation, 4.50% taux d'actualisation)**



Cependant, il est important de remarquer que la sensibilité à l'inflation des cash-flows individuels est très similaire quelle que soit la catégorie de membres du fonds, malgré les différences d'indexation.

**Sensibilité du cash flow n°20 à l'inflation  
(base: 2.75%inflation, 4.50% taux d'actualisation)**



On constate dans l'exemple ci-dessus que la sensibilité de la valeur du flux de la 20<sup>ème</sup> année à une variation de l'inflation est la même pour toutes les catégories de membres. Une approximation fréquente est donc de considérer que les flux sont exactement indexés à l'inflation.

## **1.2. Les actifs du fonds**

Le fonds mandate des gérants pour investir dans un univers d'actifs déterminé. Les catégories d'actifs considérées sont très variées. On présentera ici les actifs que détient actuellement le fonds, mais aussi les actifs desquels il s'est dégagé ou qu'il peut considérer comme des investissements potentiels.

### Les actifs de couverture : des produits obligataires

Les actifs principaux de couverture sont les obligations gouvernementales indexées sur l'inflation. Cependant, le fonds peut aussi couvrir le risque de taux avec des obligations gouvernementales à taux fixes. Une obligation d'Etat à taux fixe est aussi une excellente protection contre les chocs extrêmes sur les marchés à risques (actions en particulier). Les obligations d'Etat à taux variable (ou obligations à taux fixes swappées contre un taux variable) ont aussi des propriétés intéressantes : elles sont toujours au pair et le taux variable suit en général l'inflation.

Par ailleurs, le fonds peut aussi acheter des obligations d'entreprise. Elles permettent de se couvrir contre le risque de taux en apportant un rendement supérieur. Elles permettent de plus de mieux amortir les chocs de marchés sur le bilan du sponsor puisque les normes comptables suggèrent l'actualisation des passifs au taux d'entreprises notées AA. Cependant, ces obligations sont aussi plus risquées (risque de défaut) et il est plus difficile de trouver des maturités très longues sur le marché des obligations d'entreprise que sur le marché gouvernemental.

Le fonds détient des obligations gouvernementales indexées et des obligations d'entreprise, à hauteur de 30% du portefeuille pour chacune de ces deux classes d'actifs.

### Les actifs de rendement

On peut classer les actifs de rendement en deux principales catégories : les actifs de rendement classiques et les actifs alternatifs.

- Les actifs de rendement classiques sont les actions (30% du portefeuille) et l'immobilier (10% du portefeuille), qui payent respectivement des dividendes et des loyers au fonds en plus des variations de prix. L'immobilier est particulièrement intéressant car il est aussi un actif de long terme pour lequel on peut espérer recevoir une prime de liquidité.
- Les actifs alternatifs comprennent principalement le private equity, les hedge funds et les fonds de matières premières. Le private equity peut à long terme apporter des rendements importants mais est très risqué et très peu liquide. Les hedgefunds sont censés apporter un rendement élevé tout en étant très peu corrélés avec les autres classes d'actifs.

D'autres catégories d'investissements existent, comme les Asset Backed Securities ou la dette subordonnée ou hybride, qui ont moins le vent en poupe depuis la crise de 2007-2008. S'ils peuvent apporter un rendement supplémentaire sur le long-terme, ce sont souvent des produits complexes difficiles à appréhender par les fonds, voire par les gérants eux-mêmes.

### **1.3. Préférences et contraintes de l'entreprise**

#### Les préférences de l'entreprise

L'entreprise souhaite minimiser la charge financière des pensions. La situation idéale est un niveau de contribution stable et bas, avec une probabilité aussi faible que possible de devoir payer des contributions élevées. On peut donc considérer trois grands facteurs d'insatisfaction pour le sponsor :

- charge financière moyenne de financement des pensions élevée,
- fluctuations fortes des contributions d'une année sur l'autre,
- probabilité forte d'avoir à faire face à des contributions extrêmement élevées.

#### La contrainte de solvabilité pesant sur l'entreprise

L'objectif premier est de payer les pensions promises aux membres, c'est la contrainte absolue du fonds. Elle se traduit par l'obligation de toujours disposer d'un montant d'actif minimal et par des contributions pour amortir le déficit en sus des contributions ordinaires.

### Formulation microéconomique du problème

Le problème de l'entreprise est donc de maximiser l'espérance d'utilité sous diverses contraintes. La forme de la fonction d'utilité de la compagnie peut être par exemple :

$$\begin{aligned} U(t, c(t+1), c(t+2), \dots, c(t+n)) \\ = - \sum_{k=1}^n \psi_{t+k} c(t+k) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{t+k, t+j} (c(t+k) - c(t+j))^2 \\ - \sum_{k=1}^n \phi_{t+k} \mathbb{I}_{[c(t+k) \geq M_{t+k}]} \end{aligned}$$

Où  $c(j)$  = contributions payées en date  $j$ ,  
 $M_j$  = seuil pour une contribution importante en date  $j$   
 $\psi_j, \rho_{i,j}, \phi_j$  = paramètres de poids associés aux différents risques sur chaque contribution

Les contraintes budgétaires qui vont peser sur l'entreprise seront de deux natures :

- contrainte de borne inférieure : le plan doit toujours avoir un niveau de financement suffisant pour des raisons réglementaires et prudentielles,
- financière : ne pas contribuer au-delà du seuil tolérable pour l'entreprise.

## **1.4. L'utilisation des méthodes de contrôle optimal dans le cadre des fonds de pension**

Le contrôle optimal repose sur les travaux de Bellman sur la programmation dynamique. L'idée générale de la programmation dynamique est de déterminer une stratégie de contrôle pour un système donné, de manière à satisfaire un critère d'optimalité faisant appel à une fonctionnelle de coût dépendant de l'état du système et de variables de contrôle.

On cherche à contrôler l'évolution d'un système entre un point initial 0 et un point terminal  $T$ . L'état du système au point  $t$  est donné par  $X(t)$  et son évolution va être contrôlée par un processus  $u(t)$

$$dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dW_t$$

$$X(0) = x_0$$

$W_t$  est un mouvement brownien standard adapté à une filtration  $\mathcal{F}_t$ .

Notons  $f$  la fonction de coût « instantané » entre l'état initial et l'état final et  $h$  la fonction de coût de l'état terminal.  $\mathcal{U}$  désigne l'ensemble des stratégies possibles de résolution du problème, c'est-à-

dire des processus de contrôle  $u$  mesurables sur  $[0, T]$  et adaptés à  $\mathcal{F}_t$ . La fonctionnelle de coût est donnée par :

$$J(t, u(\cdot), X(t)) = \mathbb{E} \left( \int_t^T f(s, X(s), u(s)) ds + h(X(T)) \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

La fonction de valeur est la solution du problème d'optimisation et est donnée par :

$$V(t, X(t)) = \inf_{u(t, T)} J(t, u(\cdot))$$

Dans le cas où  $V$  est  $\mathcal{C}^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^n)$ , la solution à ce problème va être donnée par la résolution des équations rétrogrades suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \inf_u \left\{ b(t, X(t), u(t)) \frac{\partial V}{\partial x} + f(t, x, u) + \frac{\sigma(t, x, u)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial V(T, x)}{\partial t} = h(x)$$

Son utilisation la plus célèbre est le problème de Merton (1979). Il consiste à modéliser les choix optimaux des agents économiques en termes de stratégie d'investissement et de consommation tout au long du cycle de vie. Son application aux fonds de pension à prestations définies a été introduite par Boulier, Florens, Trussand (BFT) puis par Boulier, Michel, Wisnia (BMW). L'objectif du fonds de pension est de minimiser une certaine fonction des contributions en jouant sur le montant des contributions et la part des actifs risqués en portefeuille, sous contrainte de paiement des pensions et de positivité des actifs. Cette approche a été prolongée par Cairns qui a complexifié le cadre d'analyse et introduit de nouvelles fonctions d'utilité. On détaille ci-dessous le modèle original de BFT.

On a  $p_t$  = pensions payées,  
 $c_t$  = contributions,  
 $X_t$  = actifs du fonds,  
 $u_t$  = part allouée aux actifs risqués,  
 $r$  = taux sans risque,  
 $\lambda$  = prime de risque des actifs risqués,  
 $\sigma$  = volatilité des actifs risqués.

Les pensions croissent à un rythme fixe de  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $dp_t = \alpha p_t dt$ , et le fonds est ouvert jusqu'à une date infinie (pas de condition terminale). Le passif du fonds de pension est donc :

$$x_m = \int_0^{\infty} p_t e^{-rt} dt = \frac{p_0}{r - \alpha}$$

Les actifs du fonds évoluent de la façon suivante :

$$dX(t) = ((r + u_t \lambda)X(t) + c_t - p_t)dt + u_t \sigma X(t) dW_t$$

Ils ont pour valeur  $x$  en date initiale.

La fonctionnelle de coût est définie comme la valeur actualisée au taux d'escompte psychologique  $\beta$  de la somme des carrés des contributions :

$$V(t, X(t)) = \inf_u \int_t^{\infty} c_s^2 e^{-\beta s} ds$$

Les valeurs optimales sont ainsi données par :

$$\{c^*, u^*\} = \left\{ \left( 2r - \beta - \left( \frac{\lambda}{\sigma} \right)^2 \right) (x_m - x), \frac{\lambda}{\sigma^2} \left( \frac{x_m - x}{x} \right) \right\}$$

dans le cas d'un fonds en déficit, et  $\{c^*, u^*\} = \{0, 0\}$  dans le cas contraire.

Une conclusion importante est que plus le fonds est déficitaire, moins il est judicieux d'investir en actifs sans risques et plus le sponsor devra contribuer. Plus le fonds est riche, plus il sera averse au risque. Ce modèle souffre de nombreuses limites, en particulier le déterminisme du passif, l'absence de contraintes sur le financement et les hypothèses techniques sur les paramètres de diffusion qui peuvent être irréalistes. Dans l'approche de BMW, le modèle précédent est contraint par un plafonnement des contributions. Dès lors, il n'est plus possible d'obtenir de formule analytique pour les contributions et l'allocation d'actifs, mais un résultat intéressant est que les fonds faiblement financés réduiront aussi leur exposition aux actifs risqués. Cairns montre aussi qu'on s'éloigne fortement de l'optimalité en ajoutant des contraintes sur le niveau des contributions ou la proportion allouée à chaque actif.

Si la programmation dynamique offre un cadre très intéressant pour l'analyse des stratégies d'investissement d'un fonds de pension, elle se révèle malheureusement difficile à utiliser pour des situations concrètes. La multiplicité des contraintes et le caractère spécifique et dynamique du passif rendent improbable l'obtention de formules fermées ou de solutions analytiques.

## 2. La modélisation des marchés

### 2.1. Que modéliser et pourquoi ?

L'objectif du mémoire est de déterminer une stratégie d'investissement qui permette d'optimiser le niveau des contributions versées par l'employeur. Pour cela, nous avons besoin d'informations sur l'actif et sur le passif. Pour étudier une stratégie d'investissement, on doit générer des scénarios dans un monde réel ou historique. Cependant, il faudra valoriser à chaque date le passif, ce qui ne peut se faire que sous probabilité neutre au risque. Nous avons donc besoin d'un modèle qui permette de générer des diffusions des variables financières dans un monde réel et de passer rapidement dans un monde neutre au risque pour calculer le passif.

Le choix des variables à modéliser doit être fait avec soin. Deux écueils doivent être évités : une complexification artificielle du modèle qui gêne l'analyse des résultats et une trop forte simplification qui empêche la bonne compréhension du sujet. Nous avons fait le choix de modéliser quatre variables en utilisant cinq aléas :

- l'indice d'inflation, qui sera décrite par deux aléas, l'un relatif aux chocs temporaires et l'autre aux chocs de tendance,
- la courbe des taux réels,
- la courbe des taux nominaux,
- l'indice FTSE 100.

La variable économique centrale de l'analyse est l'inflation, car les décaissements y sont indexés. Les taux réels sont utilisés pour évaluer le passif et les zéro-coupons « réels » correspondent aux actifs de couverture d'un passif entièrement indexé à l'inflation. Nous modélisons ensuite les taux nominaux pour les raisons suivantes :

- les contributions sont des montants nominaux, pour calculer la valeur actualisée des contributions, nous avons besoin des taux nominaux.
- ils sont sans risque de défaut et implicitement liés à l'inflation mais ne contiennent pas de prime de risque d'inflation donc ont théoriquement un rendement supérieur aux taux réels ; cette prime de risque peut être une opportunité d'investissement,
- les obligations nominales sans risque sont une valeur refuge en cas de crise, elles sont donc un actif de diversification du portefeuille, plus que les titres indexés.

Le FTSE 100 dividendes réinvestis est un actif de rendement qui doit permettre au fonds de combler son déficit à un moindre coût.

## 2.2. Cadre théorique, notations et synthèse du modèle retenu

Dans cette partie, nous présentons le contexte économique de notre étude ainsi que la formalisation adoptée pour modéliser cette économie. Le cadre probabiliste du modèle est le suivant.

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , où  $\mathcal{A}$  est une tribu définie sur l'univers  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  est la mesure historique sur  $\mathcal{A}$ . On définit aussi la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  générée par le mouvement brownien à quatre dimensions  $(\bar{W}(t)) = (\bar{W}_n(t), \bar{W}_r(t), \bar{W}_I(t), \bar{W}_S(t))$ . Ces mouvements browniens sont corrélés de corrélations données par  $d\bar{W}_k(t)d\bar{W}_j(t) = \rho_{kj}dt$ ,  $k, j \in \{n, r, I, S\}$ .

Il y aura donc quatre sources d'aléa ayant un prix de marché. L'indice  $n$  se rapporte aux taux nominaux,  $r$  aux taux réels,  $I$  à l'indice des prix et  $S$  au rendement des marchés d'actions. On notera alors

- $P_n(t, T)$  et  $P_r(t, T)$  les valeurs en date  $t$  des zéro coupons nominaux et réels, respectivement,
- $B_n(t)$  et  $B_r(t)$  les valeurs en date  $t$  des comptes en banque capitalisés aux taux courts nominaux et réels, respectivement,
- $I_t$  la valeur en date  $t$  de l'indice d'inflation,
- $S_t$  la valeur en date  $t$  d'un indice actions avec dividendes réinvestis.

Le marché est complet et sans opportunité d'arbitrage si il existe une unique mesure  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que :

$$\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}, \quad \frac{I_t P_r(t, T)}{B_n(t)}, \quad \frac{I_t B_r(t)}{B_n(t)}, \quad \frac{S_t}{B_n(t)}$$

sont des martingales sous  $\mathbb{Q}$ . Jarrow et Yildirim prouvent l'existence de cette probabilité sans l'existence du quatrième actif, qui ne change rien à la preuve. D'après le théorème de Girsanov,  $\mathbb{Q}$  a pour dérivée de Radon Nikodim relativement à  $\mathbb{P}$  en date  $t$  :

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbb{P}} = \exp \left( \sum_{j \in \{n, r, I, S\}} \int_0^t \lambda_j(s) d\bar{W}_j(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \left\langle \sum_{j \in \{n, r, I, S\}} \lambda_j(s) d\bar{W}_j(s), \sum_{j \in \{n, r, I, S\}} \lambda_j(s) d\bar{W}_j(s) \right\rangle \right)$$

$(\lambda_n(t), \lambda_r(t), \lambda_I(t), \lambda_S(t))_{t \geq 0}$  sont les primes de risque de marché adaptées à  $(\mathcal{F}_t)$ . Sous  $\mathbb{Q}$ , les processus  $(W_j(t)) = (\bar{W}_j(t) - \int_0^t \lambda_j(s) ds)$ ,  $j \in \{n, r, I, S\}$  sont des mouvements browniens.

Les primes de risque  $\lambda_n$  et  $\lambda_r$  seront fixées égales à 0. On fera donc implicitement l'hypothèse de non rémunération du risque de taux dans le monde historique sur chacune des courbes de taux.  $\lambda_S$  est supposée déterministe et  $\lambda_I$  est stochastique. On passe donc facilement du monde historique qui sert de cadre à notre étude d'allocation d'actifs et d'estimation des risques au monde neutre au risque qui sert à évaluer le passif du fonds de pension après avoir spécifié  $\lambda_I$ .

Enfin l'indice d'inflation aura une tendance propre qui sera gouvernée par un cinquième aléa noté  $i_t$  adapté à la tribu  $\mathcal{F}_t$ .

On supposera que les courbes de taux nominale et réelle sont entièrement déterminées par le taux court nominal, noté  $n_t$ , et le taux court réel, noté  $r_t$ . Le modèle que nous allons développer et estimer se résume par les équations de diffusion suivantes dans le monde historique

$$\begin{aligned} dI_t &= i_t I_t dt + \sigma_I I_t d\bar{W}_I(t) \\ di_t &= a_i (\bar{i} - i_t) dt + \sigma_i d\bar{W}_i(t) \\ dn_t &= (\theta_n(t) - a_n n_t) dt + \sigma_n d\bar{W}_n(t) \\ dr_t &= (\theta_r(t) - \rho_{rI} \sigma_I \sigma_r - a_r r_t) dt + \sigma_r d\bar{W}_r(t) \\ dS_t &= (n_t + \lambda_S) S_t dt + \sigma_S S_t d\bar{W}_S(t) \end{aligned}$$

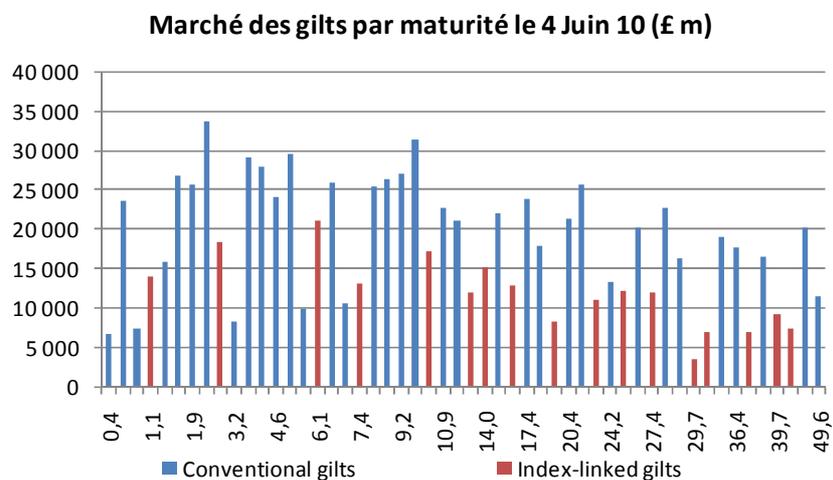
### 2.3. Les taux d'intérêts réels et nominaux

Les turbulences financières de ces trois dernières années ont engendré une volatilité importante des taux. Cependant une analyse en composantes principales montre qu'un seul facteur explique l'essentiel des mouvements de prix des zéro coupons depuis 2003. 76,88% des variations de taux réels et 81,75% des variations de taux nominaux peuvent être assimilées à des variations d'un facteur de « moyenne », le second facteur expliquant respectivement 10,57% et 13,25% des variations. De plus, dans le cadre de notre étude, c'est-à-dire une étude de cash-flows actualisés, c'est bien le niveau général des taux qui importe, même si les mouvements de courbe peuvent avoir

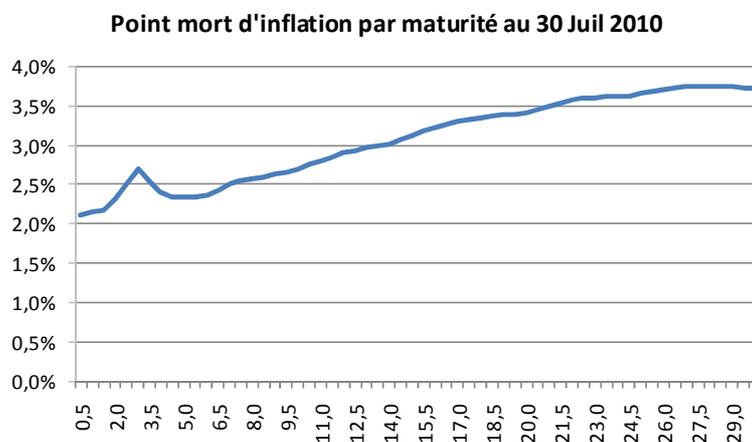
une importance en terme de décisions d'investissement. On aura donc deux facteurs de risque : le niveau des taux d'intérêt réels et nominaux. Ils seront représentés respectivement par le taux court réel et le taux court nominal.

### 2.3.1. Le marché des taux d'Etat au Royaume-Uni

Le Royaume-Uni émet de la dette souveraine à taux fixe et indexée à l'inflation (respectivement environ 75% et 25% du marché des titres d'Etat). Par ailleurs, on trouve sur ce marché des titres ayant de très longues maturités.

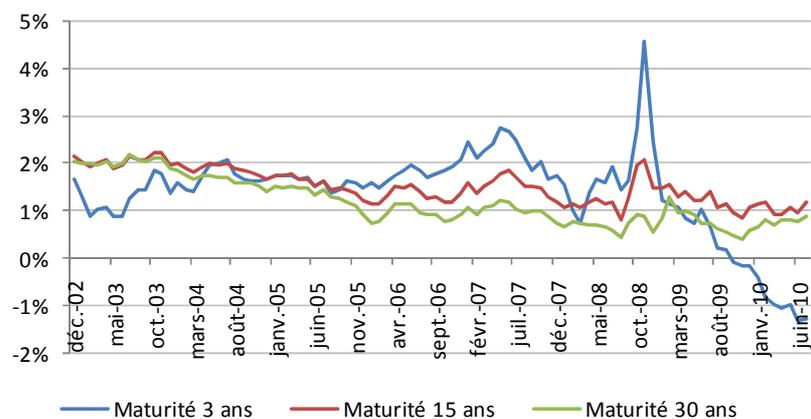


Le point mort d'inflation (différence entre les taux nominaux et les taux réels) est au Royaume-Uni une fonction croissante de la maturité. Ceci s'explique par la prime de risque d'inflation payée par les acheteurs de ces obligations indexées pour se couvrir contre l'inflation.

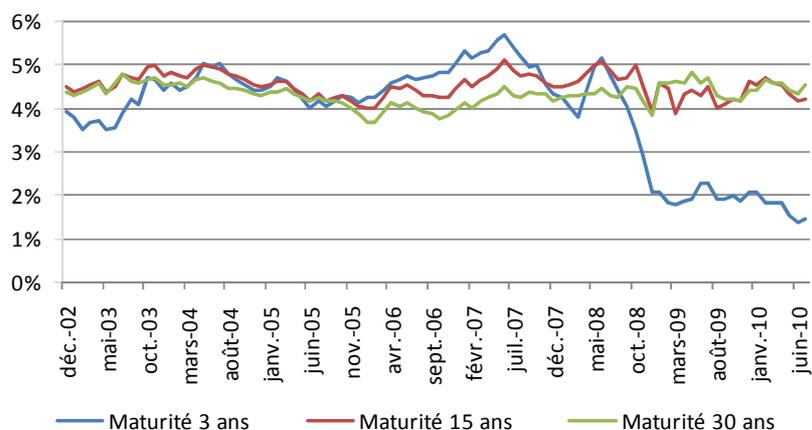


Andreas Reschreiter montre que le coût de financement du gouvernement diminue lorsqu'il émet des titres indexés longs (plus de trois ans), ce qui sous-entend que les acheteurs payent plus cher leur couverture. Généralement, l'indexation des pensions publiques et privées au Royaume-Uni a tiré vers le bas depuis 2003 les rendements des titres longs indexés, alors que le rendement des titres nominaux longs est resté plus stable sur la même période. On peut donc s'interroger sur la pertinence de couvrir un engagement indexé sur l'inflation plafonné à 5% par an lorsque cet investissement est rentable si et seulement si l'inflation dépasse 4% en moyenne jusqu'à maturité. Les titres courts ont en revanche évolué de façon plus coordonnée : l'inflation est plus facilement anticipée sur le court terme - sauf fin 2008 où les craintes de déflation prolongée ont suivi immédiatement les craintes d'hyperinflation.

**Evolution des taux réels depuis 2003**



**Evolution des taux nominaux depuis 2003**



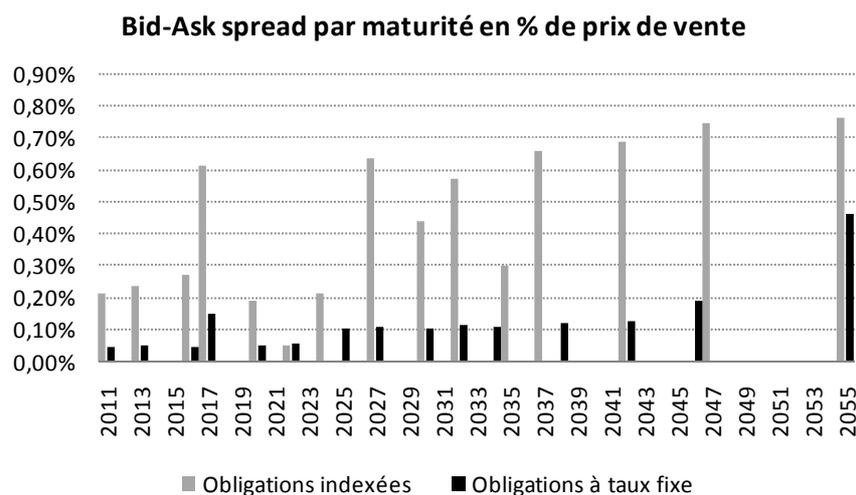
Par ailleurs, les deux marchés diffèrent fortement en termes de liquidité et d'intervenants principaux. Le graphique et les tableaux ci-dessous donnent des cotations obtenues sur Reuters le 30 Septembre 2010.

Cotations de marché en date du 30 Sept 2010 des obligations d'Etat UK indexées

RIC	Maturity date	Coupon rate	Issue date	Ask Price	Bid-ask price spread (%)	Ask Yield	Duration
GBIL2H11=	23-août-11	2,5	28-janv-82	309,4	0,21%	-2,40%	0,9
GBIL2H13=	16-août-13	2,5	21-févr-85	278,2	0,23%	-1,66%	2,8
GBIL2H16=	26-juil-16	2,5	19-janv-83	315,6	0,27%	-0,34%	5,5
GBIL1Q17=	22-nov-17	1,25	8-févr-06	109,9	0,61%	-0,13%	6,8
GBIL2H20=	16-avr-20	2,5	12-oct-83	321,1	0,19%	0,31%	8,6
GBIL1S22=	22-nov-22	1,875	11-juil-07	115,9	0,05%	0,52%	11,0
GBIL2H24=	17-juil-24	2,5	30-déc-86	283,9	0,21%	0,58%	12,0
GBIL1Q27=	22-nov-27	1,25	26-avr-06	110,6	0,64%	0,60%	15,5
GBIL4E30=	22-juil-30	4,125	12-juin-92	273,6	0,44%	0,54%	15,2
GBIL1Q32=	22-nov-32	1,25	29-oct-08	113,9	0,57%	0,58%	19,5
GBIL235=	26-janv-35	2	11-juil-02	168,6	0,30%	0,57%	20,1
GBIL1E37=	22-nov-37	1,125	21-févr-07	114,5	0,66%	0,55%	23,7
GBILOF42=	22-nov-42	0,625	24-juil-09	102,2	0,69%	0,55%	29,1
GBILO47=	22-nov-47	0,75	21-nov-07	108,3	0,74%	0,51%	32,6
GBIL1Q55=	22-nov-55	1,25	23-sept-05	131,6	0,77%	0,47%	36,1

Cotations de marché en date du 30 Sept 2010 des obligations d'Etat UK à taux fixe

RIC	Maturity date	Coupon rate	Issue date	Ask Price	Bid-ask price spread (%)	Ask Yield	Duration
GBC911=	12-juil-11	9	12-juil-87	106,6	0,05%	0,52%	0,76
GBT813=	27-sept-13	8	1-avr-93	120,7	0,05%	0,96%	2,7
GBT416=	7-sept-16	4	2-mars-06	110,9	0,05%	2,04%	5,4
GBE1217=	12-déc-17	12	15-juin-78	132,8	0,15%	1,47%	2,7
GBT4T20=	7-mars-20	4,75	29-mars-05	115,2	0,05%	2,90%	7,8
GBT422=	7-mars-22	4	27-févr-09	107,7	0,06%	3,19%	9,4
GBT525=	7-mars-25	5	27-sept-01	117,9	0,10%	3,42%	10,8
GBT4Q27=	7-déc-27	4,25	6-sept-06	108,5	0,11%	3,59%	12,4
GBT4T30=	7-déc-30	4,75	3-oct-07	114,5	0,10%	3,72%	13,5
GBT4Q32=	7-juin-32	4,25	25-mai-00	107,3	0,11%	3,76%	14,5
GBT4H34=	7-sept-34	4,5	17-juin-09	110,6	0,11%	3,82%	15,3
GBT4T38=	7-déc-38	4,75	23-avr-04	115,5	0,12%	3,85%	16,5
GBT4H42=	7-déc-42	4,5	6-juin-07	111,4	0,13%	3,88%	17,9
GBT4Q46=	7-déc-46	4,25	12-mai-06	107,0	0,19%	3,89%	19,1
GBT4Q55=	7-déc-55	4,25	27-mai-05	108,1	0,46%	3,87%	21,0



On constate que les écarts entre prix d’achat et de vente sont bien plus importants pour les obligations indexées que pour les obligations à taux fixe. Ceci est pour partie dû à la forte concentration de ce marché : les fonds de pension sont les principaux acheteurs d’obligations indexées et les gérants d’actifs présents sur ce marché sont assez peu nombreux et détiennent chacun une portion considérable du marché pour leurs clients. L’aller-retour sur ce marché est donc coûteux.

De plus, les coupons des obligations indexées sont beaucoup plus faibles que ceux des titres fixes et les taux d’intérêt réels sont extrêmement bas. Ces produits sont ainsi proches de zéros-coupon : ils ont alors une très forte sensibilité aux taux, mesurée par la durée. En termes d’investissements, **le prix à payer pour la protection contre l’inflation est donc élevé.**

Sur le marché des obligations indexées, il faut de plus distinguer les titres émis avant et après 2003. Les règles d’indexations ont changé à partir de cette date : avant 2003, les coupons et le principal étaient indexés à l’inflation retardée de huit mois, contre une inflation retardée de 3 mois depuis 2003. Cette différence influe considérablement sur les rendements pendant les périodes de forte volatilité de l’inflation. On a ainsi pu voir en 2010 deux courbes de taux réels se distinguer nettement selon la date d’émission, à la suite de la déflation de 2009.

### 2.3.2. Le modèle de Jarrow et Yildirim

#### Les principaux modèles de valorisation des produits indexés sur l’inflation

Le premier des modèles utilisés pour la valorisation de produits indexés sur l’inflation est le modèle de Jarrow et Yildirim (JY, 2003). JY font l’analogie entre les modèles de taux de change, l’économie

nominale tenant la place de l'économie domestique, l'économie réelle celle de l'économie étrangère et l'indice d'inflation celle du taux de change. Ce modèle entre dans la classe des modèles HJM, c'est-à-dire qu'il est compatible avec les courbes de taux au comptant. Dans leur recherche originale, JY n'utilisaient qu'un seul facteur de risque (un seul mouvement brownien guide l'évolution de la courbe des taux). Un premier avantage de ce modèle est sa relative simplicité une fois spécifiée une forme de volatilité. Le second, sans doute le plus important, est qu'il peut très bien servir de base à un modèle d'investissement appliqué au monde réel, et non seulement au monde neutre au risque comme la plupart des modèles de valorisation financière. Ces inconvénients sont sa surparamétrisation pour les praticiens du marché, puisque trois variables sont modélisées (inflation, taux réels et taux nominaux) alors que deux types de produits sont échangeables sur les marchés (produits indexés et produits nominaux).

Une autre approche a été développée par Belgrade, Benhamou et Koehler pour valoriser les dérivés liés à l'inflation. Ils ont développé une approche de marché de type Brace Gatarek et Musiela qui s'appuie sur les cotations de l'indice d'inflation forward pour différentes maturités. Les taux nominaux sont eux modélisés par une courbe de taux de type HJM. Les indices d'inflation forward suivent une diffusion lognormale et sont corrélés entre eux et avec les taux nominaux. Ce modèle paraît mieux adapté à la valorisation d'instruments dérivés que le modèle de Jarrow Yildirim car il permet de mieux caler les paramètres sur les prix de marché. En revanche, il est moins adapté à des simulations dans le monde historique.

#### Le modèle de Jarrow Yildirim

On utilisera donc le modèle de Jarrow Yildirim pour sa facilité d'adaptation à un modèle d'investissement. Pour notre étude, un seul facteur de risque est pris en compte dans la modélisation des taux réels et nominaux, ce qui revient à un modèle de taux courts de Hull et White.

**Le système d'équation qui dirige ce modèle dans le monde neutre au risque est le suivant (Brigo et Mercurio) :**

$$\begin{aligned}
 dn_t &= (\theta_n(t) - a_n n_t)dt + \sigma_n dW_n(t) \\
 dr_t &= (\theta_r(t) - \rho_{rI} \sigma_I \sigma_r - a_r r_t)dt + \sigma_r dW_r(t) \\
 dI_t &= (n_t - r_t)I_t dt + \sigma_I I_t dW_I(t)
 \end{aligned}$$

Sous probabilité historique, le processus  $(I_t)$  a pour tendance le processus  $(i_t)$  qui est adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . Les fonctions  $\theta_j(t)$ ,  $j \in \{n, r\}$  sont déterministes et permettent de caler le modèle sur la courbe au comptant :

$$\theta_j(t) = \frac{\partial f_j(0,t)}{\partial t} + a_j f_j(0,t) + \frac{\sigma_j^2}{2a_j}(1 - e^{-2a_j t}), \quad j \in \{n, r\}$$

Les  $f_j(0,t)$  désignent les taux forwards. Les paramètres  $a_j$ ,  $j \in \{n, r\}$  sont les forces de rappels. Les  $\sigma_j$ ,  $j \in \{n, r, I\}$  sont les volatilités. Tous ces paramètres sont déterministes. A toute date  $s < t$ , on peut réécrire les taux courts réels et nominaux en date  $t$  comme la somme d'une composante déterministe  $\varphi_s^j(t)$  et d'une composante aléatoire  $x_s^j(t)$  :

$$\begin{aligned} \varphi_s^n(t) &= \alpha_{n,t} + (n_s - \alpha_{n,s})e^{-a_n(t-s)} \\ \varphi_s^r(t) &= \alpha_{r,t} + (r_s - \alpha_{r,s})e^{-a_r(t-s)} - \frac{\rho_{rI}\sigma_I\sigma_r}{a_r}(1 - e^{-a_r(t-s)}) \end{aligned}$$

$$x_s^j(t) = \sigma_j \int_s^t e^{-a_j(t-u)} dW_j(u), \quad j \in \{n, r\}$$

$$n_t = \varphi_s^n(t) + x_s^n(t), \quad r_t = \varphi_s^r(t) + x_s^r(t)$$

où  $\alpha_{j,t} = f_j(0,t) + \frac{\sigma_j^2}{2a_j^2}(1 - e^{-a_j t})^2$ .

L'espérance et la variance de  $n_t$  et  $r_t$  sont donc donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{j_t | \mathcal{F}_s\} &= \varphi_s^j(t), \quad j \in \{n, r\} \\ \mathbb{V}\{j_t | \mathcal{F}_s\} &= \frac{\sigma_j^2}{2a_j}(1 - e^{-2a_j(t-s)}), \quad j \in \{n, r\} \end{aligned}$$

Pour  $j$  dans  $\{n, r\}$ , le prix des zéro-coupons est donné par :

$$P_j(t, T) = \frac{P_j(0, T)}{P_j(0, t)} \exp \left\{ - \left( \frac{1 - e^{-a_j(T-t)}}{a_j} \right) (j_t - f_j(0, t)) - \sigma_j^2 \frac{(1 - e^{-2a_j t})(1 - e^{-a_j(T-t)})^2}{4a_j^3} \right\}$$

Leur fonction de volatilité est  $\sigma_{P_j}(t, T) \mapsto \sigma_j \frac{1 - \exp(-a_j(T-t))}{a_j}$ .

Il s'agit en fait d'un modèle de taux gaussiens. La probabilité importante d'avoir des taux d'intérêt négatifs, qui constituait un inconvénient de ce type de modèle, n'est pas un problème puisque les taux d'intérêt réels sont aujourd'hui négatifs et que les taux nominaux courts l'ont parfois été au cours des dernières années.

### 2.3.3. Estimation des paramètres par les données historiques

#### Présentation des données utilisées

Les données utilisées sont les courbes de taux nominaux gouvernementaux au pair produites par Merrill Lynch. Merrill Lynch produit ces courbes de façon journalière pour des maturités de 0,5 an à 30 ans (50 ans pour les taux réels). On préfère utiliser ces données à celles de la Bank of England. En effet, la Bank of England ne publie pas de taux zéros-coupon réels pour une maturité inférieure à 2,5 ans ni au-delà d'une maturité de 25 ans. De plus, les courbes calculées par Merrill Lynch et celles de la Bank of England sont très proches.

A partir de ces courbes au pair, on peut reconstituer une courbe d'obligations zéro-coupon par la formule :

$$\forall M \leq N, \sum_{i=1}^{M-1} y_{t_M} D_{t_i} + (1 + y_{t_M}) D_{t_M} = 1$$

où les  $y_{t_M}$  sont le taux actuariel de maturité  $t_M$  et  $D_{t_M}$  le facteur d'actualisation de maturité  $t_M$ .

On dispose dès lors de la série des 64  $D_{t_M}$  pour des maturités de 0,5 à 30 ans du 1<sup>er</sup> Janvier 2004 au 30 Juillet 2010 pour les taux nominaux. Pour les taux réels, on les calculera jusqu'à une maturité de 50 ans. On utilise des données depuis Janvier 2004 car la Bank of England a un objectif de stabilité de l'inflation mesurée par le CPI depuis décembre 2003.

#### Calibration des paramètres de volatilité des taux zéros-coupon

A partir de l'historique mensuel des données ( $\Delta = 1/12$ ), on calcule les variations mensuelles  $y_{t,M}^j$  des prix des zéro-coupons par maturité  $M$ , avec  $j \in \{r, n\}$ . Elles sont donnés par :

$$y_{t+\Delta,M}^j = \frac{P_j(t + \Delta, M) - P_j(t, M)}{P_j(t, M)} - j_t \Delta$$

On ira jusqu'à des maturités de 30 ans pour les taux nominaux et de 35 ans pour les taux réels. En effet, la structure par terme de la volatilité des taux réels est beaucoup moins lisse que celle des taux nominaux et en ne prenant les maturités que jusqu'à 30 ans, on a tendance à sous-estimer la volatilité pour les très longues maturités. On ira donc jusqu'à 35 ans pour les maturités des volatilités de taux réels calibrées. On notera donc  $M_r = 35$  et  $M_n = 30$  les maturités maximales utilisées. Pour  $M = 0,5, 1, \dots, M_j$ , les variances des variations de prix des zéros-coupon valent :

$$s_M^2(\sigma_j, a_j) = \frac{\sigma_j^2(1 - e^{-a_j M})^2}{a_j^2}$$

On calcule la variance des séries  $y_{t,M}^j$  notée  $v_{j,M}^2$ . On obtient les paramètres de volatilité nominaux et réels par la méthode des moindres carrés à l'aide d'un solveur.

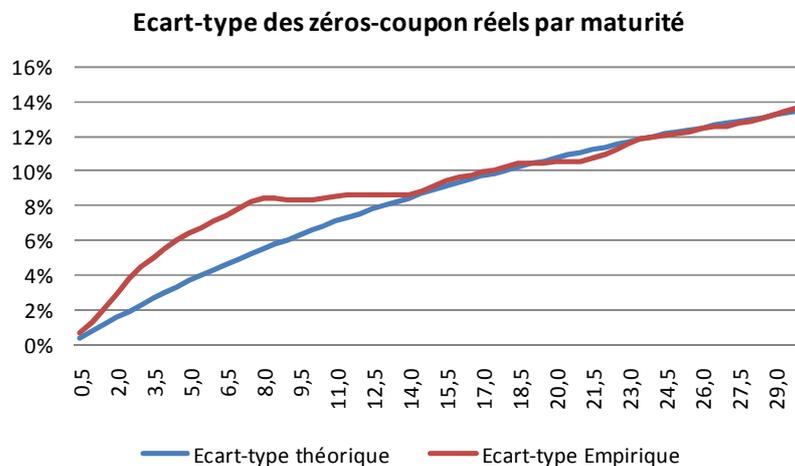
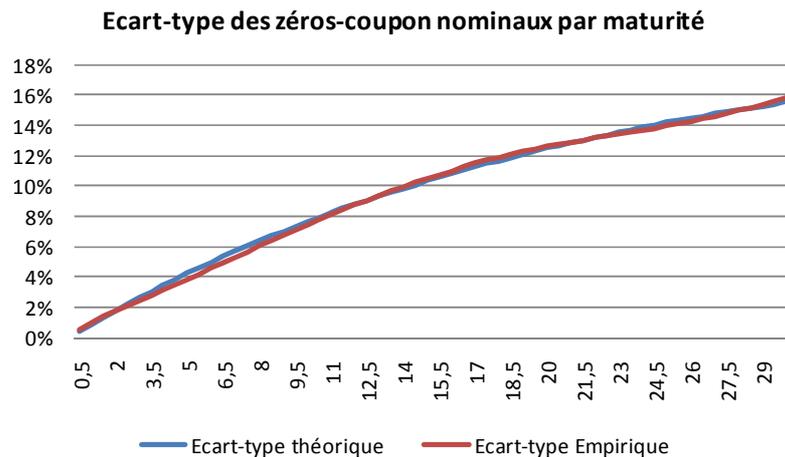
$$(\hat{\sigma}_j, \hat{a}_j) = \arg \min_{(\sigma_j, a_j)} \sum_{M=0,5}^{M_j} (s_M^2(\sigma_j, a_j) - v_{j,M}^2)^2$$

On obtient alors les paramètres suivants :

$$\hat{\sigma}_n = 0,00953, \quad \hat{a}_n = 0,04581$$

$$\hat{\sigma}_r = 0,00816, \quad \hat{a}_r = 0,04504$$

On remarque que les paramètres de volatilité des deux courbes sont assez proches. Graphiquement, les courbes empiriques et calibrées se présentent comme suit :



La courbe réelle est moins bien calibrée que la courbe nominale sur la partie courte en particulier. Le manque de régularité de cette fonction de volatilité est peut-être lié au manque d'homogénéité des produits (règles différentes d'indexation). Notons enfin qu'en prenant la structure de volatilité des taux réels jusqu'à 50 ans, on obtiendrait une volatilité bien plus forte que celle calibrée ici.

#### La calibration des courbes de taux du 31 Juillet 2010

Pour le modèle de Hull et White, on a aussi besoin de calibrer la courbe des taux en date initiale, c'est-à-dire au 31 Juillet 2010. La courbe des taux est estimée à l'aide de la fonctionnelle de Nelson et Siegel, étendue par Svensson. Cette fonctionnelle est relativement simple à estimer avec un solveur et ses paramètres sont interprétables financièrement. Ce dernier aspect est très important car la courbe devra être étendue à des taux d'intérêts « théoriques » pour les très longues maturités sans produire de résultats aberrants. Les six paramètres de la courbe représentent le taux long  $b_0$ , le spread court-long  $b_1$ , deux paramètres de courbures  $b_2$  et  $b_3$  et deux paramètres d'échelle  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . La fonctionnelle des taux forward de Nelson-Siegel-Svensson est donnée par

$$f(m) = b_0 + b_1 e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \frac{b_2}{\tau_1} e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \frac{b_3}{\tau_2} e^{-\frac{m}{\tau_2}}$$

Les taux zéro-coupon sont eux donnés par la fonction

$$R(0, m) = b_0 + b_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) - \frac{b_2}{\tau_1} \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \right) - \frac{b_3}{\tau_2} \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_2}}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \right)$$

Cette fonction est linéaire aux paramètres  $b_i$ .

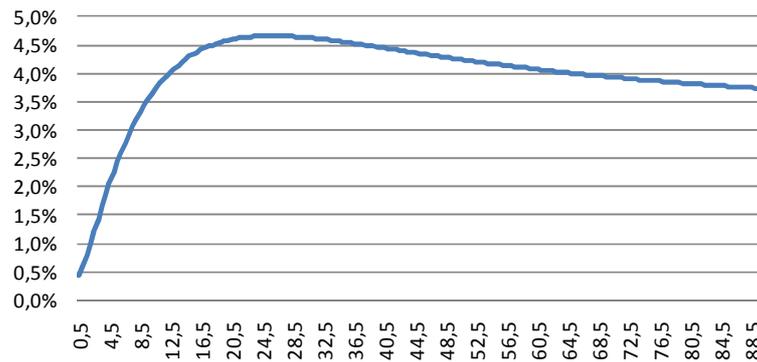
Les paramètres de la courbe de taux nominale sont les suivants :

$$\widehat{b}_0^n = 0,02997, \quad \widehat{b}_1^n = -0,02678, \quad \widehat{b}_2^n = 0,09606, \quad \widehat{b}_3^n = -0,01487$$

$$\tau_1^n = 9,91423, \quad \tau_2^n = 1,55116$$

La courbe calibrée se confond avec la courbe de taux donnée. La courbe calibrée puis extrapolée jusqu'à la maturité du dernier flux de pension (90 ans) a la forme suivante :

**Courbe de taux zéros-coupon nominaux du 31-Juil-10  
calibrée avec la fonctionnelle Nelson-Siegel-Svensson**



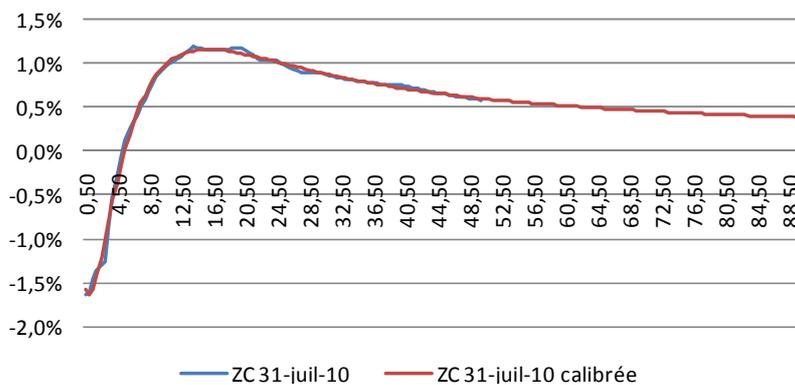
Les paramètres de la courbe de taux réelle sont les suivants :

$$\widehat{b}_0^r = 0,00117, \quad \widehat{b}_1^r = -0,01426, \quad \widehat{b}_2^r = 0,07248, \quad \widehat{b}_3^r = -0,04822$$

$$\tau_1^r = 5,38559, \quad \tau_2^r = 1,46901$$

La calibration de la courbe de taux réelle est moins exacte car celle-ci est moins régulière que la courbe nominale.

**Courbes de taux réels empirique et calibrée du 31-Juil-10 avec la méthode de Nelson Siegel et Svensson**



### 2.3.4. Distribution des taux avec les paramètres estimés

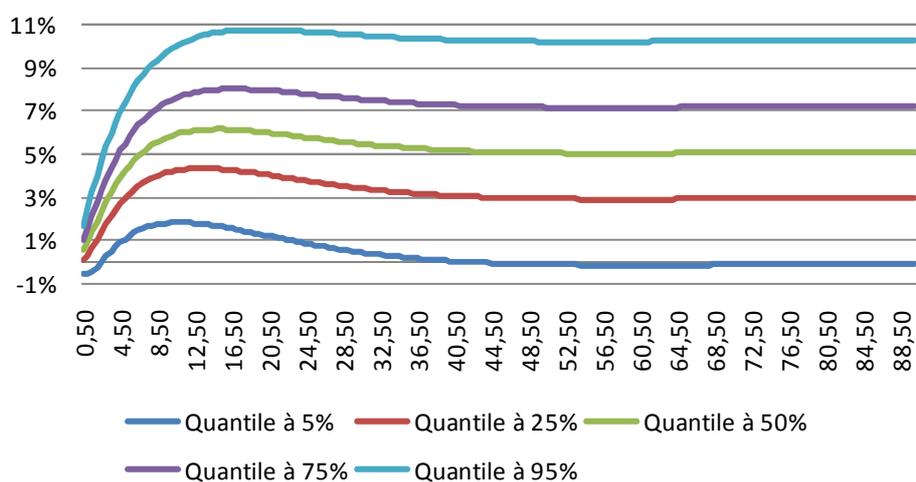
On donne ci-dessous des valeurs caractéristiques de la distribution des taux calculées avec le modèle de Jarrow Yildirim calibré sur les paramètres donnés précédemment. On rappelle qu'on a fixé les primes de risque des taux à 0, donc que leurs dynamiques dans les mondes réel et neutre au risque sont identiques.

## Distribution des taux nominaux

### Distribution du taux court nominal à des dates choisies

Date	Espérance	Ecart-type	Quantile à 5%	Quantile à 95%
Après 2 ans	1,88%	1,29%	-0,24%	4,00%
Après 5 ans	4,21%	1,91%	1,06%	7,35%
Après 10 ans	5,83%	2,44%	1,82%	9,84%
Après 20 ans	6,00%	2,89%	1,25%	10,75%
Après 50 ans	5,04%	3,13%	-0,11%	10,20%
Après 80 ans	5,08%	3,15%	-0,10%	10,26%

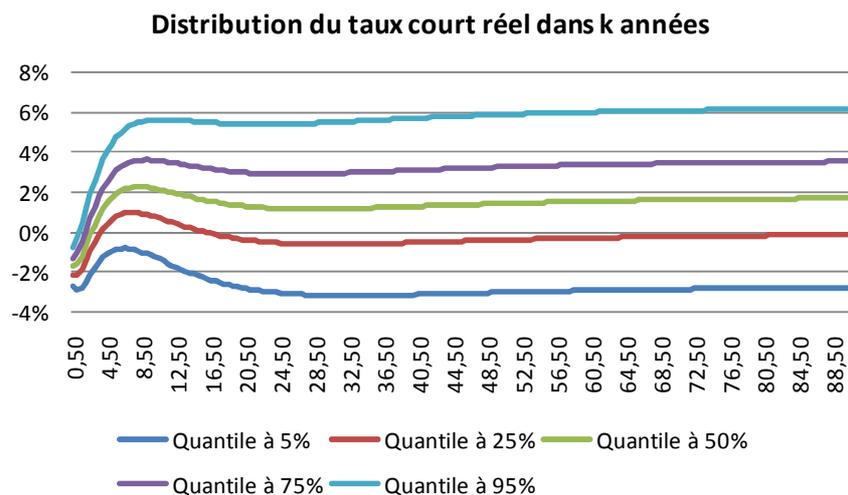
### **Distribution du taux court nominal dans k années**



## Distribution des taux réels

### Distribution du taux court réel à des dates choisies

Date	Espérance	Ecart-type	Quantile à 5%	Quantile à 95%
Après 2 ans	-0,68%	1,10%	-2,50%	1,13%
Après 5 ans	1,73%	1,64%	-0,96%	4,42%
Après 10 ans	2,17%	2,10%	-1,28%	5,61%
Après 20 ans	1,30%	2,49%	-2,78%	5,39%
Après 50 ans	1,42%	2,70%	-3,03%	5,87%
Après 80 ans	1,65%	2,72%	-2,82%	6,12%



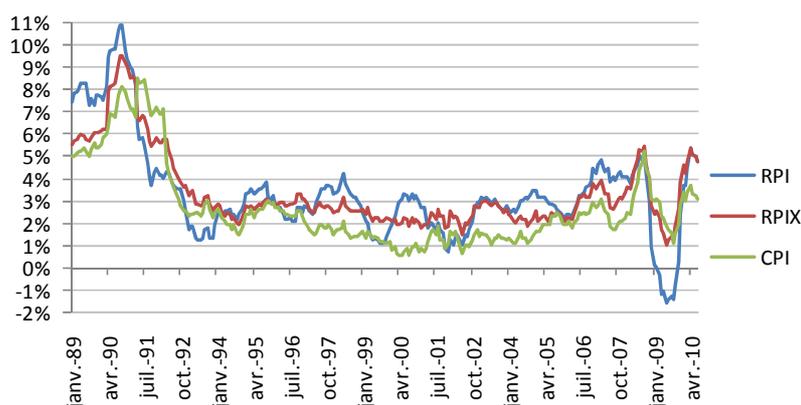
## 2.4. L'inflation

### 2.4.1. L'inflation au Royaume-Uni : histoire et mesures

Il existe au Royaume-Uni trois principales mesures de l'inflation : le Retail Price Index (RPI), le RPIX (RPI hors paiement d'intérêt sur les emprunts hypothécaires) et le Consumer Price index (CPI, indice harmonisé au niveau européen). L'inflation est mesurée par l'Office for National Statistics. Le RPI est l'indice historique. Il est utilisé depuis 1997 pour revaloriser les pensions publiques et autres prestations sociales. Il sert aussi de référence pour l'indexation des pensions privées. En Juin 2010, dans le sillage du plan de rigueur annoncé par le nouveau gouvernement, il a été décidé que les revalorisations des pensions publiques seraient indexées au CPI, ce qui crée quelques incertitudes sur l'avenir du RPI comme indice de référence pour l'indexation des pensions privées.

RPI, RPIX et CPI diffèrent par la composition de leurs paniers de biens et de services mais aussi par la méthode d'agrégation des prix. L'agrégation des prix pour former le RPI et le RPIX est arithmétique alors que l'agrégation des prix qui forment le CPI est géométrique, ce qui explique que l'inflation RPI est structurellement de 0,5% plus haute que l'inflation CPI. De plus, le RPI inclut des composantes relatives à l'immobilier, contrairement au CPI, ce qui ajoute 0,3% d'inflation historique annuelle moyenne depuis 1997.

### Trois mesures de l'inflation au Royaume-Uni



L'inflation au Royaume-Uni a connu des ruptures de rythme importantes. Après la seconde guerre mondiale, l'inflation est stable autour de 5% par an, jusque dans les années 1960 et 1970 où l'inflation importée et la spirale prix-salaires font grimper l'inflation à des niveaux de 15% à 20%. L'arrivée des conservateurs ne change pas brutalement la donne, l'inflation restant élevée et volatile jusqu'au départ de Mme Thatcher fin 1990. Cependant, elle reste depuis lors relativement faible et peu volatile par rapport aux périodes précédentes. Le 6 Mai 1997, la Bank of England (BoE) est déclarée indépendante et se voit assigner un objectif de 2,5% d'augmentation du RPIX. Depuis le 10 décembre 2003, la cible d'inflation est 2% de hausse du CPI. Au début de l'année 2009, suite à l'effondrement des marchés immobiliers, le Royaume-Uni est entré en déflation pour la première fois de son histoire. La brusque remontée depuis s'explique pour moitié par des hausses de taxes, TVA en particulier selon l'Office for National Statistics.

### Moments empiriques de l'inflation RPI YoY

Période	Juil 1948 - Juil 2010	Juil 1991 - Juil 2010	Juil 1997 - Juil 2010	Juil 2003 - Juil 2010
Moyenne	5,39%	2,84%	2,74%	3,00%
Ecart-type	4,49%	1,52%	1,60%	1,96%
Asymétrie	179,94%	-93,75%	-131,11%	-191,03%
Kurtosis	382,90%	220,88%	270,81%	466,67%
Min	-1,44%	-1,44%	-1,44%	-1,44%
Max	23,35%	5,37%	4,92%	4,92%

Note: rendements logarithmiques mensuels  $\ln(I(t)/I(t-1))$

Notons enfin que l'inflation est marquée par une forte saisonnalité. Cependant, on ne cherchera pas à la modéliser dans ce qui suit sous peine de compliquer inutilement le modèle.

## 2.4.2. Modélisation de l'indice des prix

L'indice des prix sera modélisé par un système de deux équations sous probabilité historique :

$$dI_t = i_t I_t dt + \sigma_I I_t d\bar{W}_I(t)$$

$$di_t = a_i(\bar{i} - i_t)dt + \sigma_i d\bar{W}_i(t)$$

On a les conditions initiales  $i_0 = x$  et  $I_0 = 1$ . Il y a donc deux sortes d'aléa dans l'indice des prix : une innovation guidant la tendance donnée par le mouvement brownien ( $\bar{W}_I(t)$ ) et un bruit de mesure de l'inflation donné par ( $\bar{W}_i(t)$ ). La tendance d'inflation est donc gouvernée par un processus d'Ornstein Uhlenbeck et l'indice d'inflation par un mouvement brownien géométrique. Le choix d'un processus autorégressif pour la tendance tient à deux raisons. Empiriquement, on constate un effet de « retour à la moyenne » des taux d'inflation. Institutionnellement, la Bank of England (BoE) a une cible d'inflation, ce qui laisse supposer que ce « retour à la moyenne » devrait continuer à exister dans l'avenir. On différencie donc deux types de chocs : les chocs permanents sur la tendance et des chocs temporaires sur l'indice.

Ces équations se résolvent facilement en appliquant le lemme d'Itô à  $y_t = i_t e^{a_i t}$  puis à  $Y_t = \ln I_t$ .

Le modèle est donc donné par le système d'équation :

$$i_t = x e^{-a_i t} + (1 - e^{-a_i t})\bar{i} + \sigma_i \int_0^t e^{-a_i(t-u)} d\bar{W}_i(u)$$

$$I_t = \exp \left\{ \int_0^t i_s ds - \frac{\sigma_I^2}{2} t + \sigma_I \bar{W}_I(t) \right\}$$

$$= \exp \left\{ (x - \bar{i}) \frac{1 - e^{-a_i t}}{a_i} + \left( \bar{i} - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) t + \sigma_I \bar{W}_I(t) + \sigma_i \int_0^t \int_0^s e^{-a_i(s-u)} d\bar{W}_i(u) ds \right\}$$

## 2.4.3. L'estimation du modèle par le filtre de Kalman

### 2.4.3.1. Présentation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman vise à étudier l'état de systèmes à partir de mesures bruitées. Les modèles représentant de tels systèmes sont appelés modèles espace-état car ils permettent de distinguer l'état interne d'un système non observable de ses observations (signaux). Ils s'appuient donc sur deux types de processus représentés par des équations différentielles et fonctionnelles discrétisées :

- équation d'état : quelle va être l'évolution du système en fonction de son état antérieur et d'une innovation,
- équation de mesure : quel va être le signal émis par le système en fonction de son état actuel.

Le filtre de Kalman permet de décomposer une observation pour en extraire un état caché. Depuis plusieurs années, il a été largement utilisé par les économistes cherchant à analyser des variables latentes ou inobservables de l'économie à partir de mesures générales. Un des avantages du filtre de Kalman est qu'il s'adapte parfaitement aux systèmes dynamiques non stationnaires.

Notons  $X_t$  l'état du système à un instant  $t$ ,  $Y_t$  la variable de mesure,  $A_t$  la matrice de transition de l'état,  $C_t$  la matrice de mesure,  $M_t^X$  et  $M_t^Y$  les tendances respectives des deux processus et  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  les aléas (gaussiens) correspondant respectivement aux innovations de l'Etat et au bruit de mesure. Leurs matrices de covariances respectives seront notées  $Q_t$  et  $R_t$ . Le modèle espace état va être donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} X_t = A_t X_{t-1} + M_t^X + \varepsilon_t \\ Y_t = C_t X_t + M_t^Y + \eta_t \end{cases}$$

On part d'un état initial  $X_0$  de loi gaussienne ayant pour espérance  $M_0^X$  et pour covariance  $Q_0$ .

Le filtre de Kalman est un estimateur linéaire récursif qui fonctionne sur le mode prédiction / mise à jour. A chaque étape, on commence par déterminer la prédiction de la mesure donnée par l'état du système en date précédente, puis on ajuste cette prédiction à la mesure observée. En fait, le filtre de Kalman donne à la variable d'état une moyenne pondérée entre la prédiction basée sur l'état précédent et l'observation ponctuelle. Notons  $I$  la matrice identité aux dimensions adéquates,  $\hat{X}_{t,t-1}$  l'état du système en date  $t$  tel que prédit en date  $t - 1$  et  $P_{t,t-1}$  la matrice de covariance en date  $t$  tel que prédite en date  $t - 1$  :

- première étape (prédiction de l'état et de sa covariance) :
  - o prédiction de l'état :  $\hat{X}_{t,t-1} = A_t \hat{X}_{t-1,t-1} + M_t^X$
  - o prédiction de la covariance de l'état :  $P_{t,t-1} = A_t P_{t-1,t-1} A_t' + Q_t$
- deuxième étape (mise à jour de l'état par rapport aux mesures) :
  - o erreur de mesure :  $e_t = Y_t - C_t \hat{X}_{t,t-1} - M_t^Y$
  - o covariance de l'innovation :  $S_t = C_t P_{t,t-1} C_t' + R_t$

- gain de Kalman optimal :  $K_t = P_{t,t-1}C_t'S_t^{-1}$
- mise à jour de l'état :  $\hat{X}_{t,t} = \hat{X}_{t,t-1} + K_t e_t$
- mise à jour de la matrice de covariance de l'état :  $P_{t,t} = (I - K_t C_t)P_{t,t-1}$

On estime les paramètres du modèle par maximum de vraisemblance avec l'algorithme EM tel que donné par exemple par Lemoine et Pilgrin. La fonction de log vraisemblance du modèle est donnée par

$$\mathcal{L} = \text{constante} - \frac{1}{2} \left( \sum_{t=1}^T \ln |S_t| + e_t' S_t^{-1} e_t \right)$$

Cette méthode permet donc de décomposer l'indice d'inflation entre une tendance et un bruit de mesure. La tendance contient les innovations qui modifieront durablement le rythme de la croissance de l'indice des prix, alors que le bruit de mesure inclut divers effets temporaires, comme un choc sur les prix des matières premières ou une taxe. C'est à partir de la différence entre la tendance et le point mort d'inflation qu'on retrouve implicitement la prime de risque d'inflation contenue dans les prix d'obligations indexées.

#### 2.4.3.2. Méthode d'estimation des paramètres

On souhaite utiliser un historique suffisamment long de données pour que les paramètres soient raisonnablement estimés. On travaille donc sur les données d'inflation annuelle de Juillet 1948 à Juillet 2010, soit 63 valeurs. Cependant, étant donné que divers régimes d'inflation ont prévalu au cours de la période, on sera obligé de rendre certains paramètres variables au cours du temps. Un régime d'inflation sera déterminé par l'inflation de long terme qui y prévaut, notée  $\bar{i}$  dans le modèle. Les volatilités des aléas seront proportionnelles au taux de long terme. Cette proportion ne bougera pas au cours du temps mais les volatilités évolueront malgré tout par cet effet d'échelle.

Le modèle discrétisé se présentera donc de la façon suivante :

$$\ln I_t = \ln I_{t-1} + i_t - \frac{(\bar{i}_t f_I)^2}{2} + (\bar{i}_t f_I) \varepsilon_t^1$$

$$i_t = i_{t-1} e^{-\alpha_i} + (1 - e^{-\alpha_i}) \bar{i}_t + (\bar{i}_t f_i) \varepsilon_t^2$$

$f_I$  et  $f_i$  sont les facteurs de proportionnalité mentionnés plus haut. Les volatilités de la tendance et de l'indice d'inflation valent donc  $\sigma_{I,t} = f_I \bar{i}_t$  et  $\sigma_{i,t} = f_i \bar{i}_t$ . On notera par la suite  $\theta = e^{-\alpha_i}$ . On sépare

le processus en  $i_t = \beta_t + \varphi_t$ ,  $\beta_t$  étant un processus déterministe et  $\varphi_t$  un processus stochastique qui se diffusent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= i_0 - \bar{i}_0, & \varphi_t &= \theta\varphi_{t-1} + \sigma_{i,t}\varepsilon_t^1 \\ \beta_0 &= \bar{i}_0, & \beta_t &= \theta\beta_{t-1} + (1 - \theta)\bar{i}_t\end{aligned}$$

On fixera à 0 la corrélation de l'innovation et du bruit de mesure. On donnera trois dates charnières délimitant les régimes d'inflation, qui reposent pour partie sur l'observation de l'évolution de l'inflation RPI et pour partie sur des événements historiques :

- 1948 – 1964 : l'inflation est en moyenne de 3,85% mais est très volatile avec des pics à plus de 10%,
- 1964 - 1976 : H. Wilson, travailliste, est premier ministre pendant cette période d'augmentation quasi-continue de l'inflation (8,20% en moyenne sur la période), qui s'achève par un prêt du Fonds Monétaire International au Royaume-Uni,
- 1976 – 1997 : cette période est marquée par la présence de M. Thatcher au poste de premier ministre et par une inflation qui reste élevée (6,87% en moyenne) et très volatile, avec des pics à plus de 20%.
- 1997 – 2010 : cette période est marquée par le retour durable des travaillistes au pouvoir et par l'indépendance de la Banque d'Angleterre. L'inflation est stable et de 2,74% en moyenne.

Le processus  $\bar{i}_t$  est déterministe et supposé affine par morceau. On suppose qu'il est constant de 1948 à 1964, croissant de 1964 à 1976, décroissant de 1976 à 1997 et constant depuis 1997. Une fois déterminées les valeurs de  $\bar{i}_{1964}$ ,  $\bar{i}_{1976}$  et  $\bar{i}_{1997}$ , on connaît l'ensemble du processus. Les autres paramètres à estimer sont  $\varphi_0$ ,  $\theta$ ,  $f_I$  et  $f_i$ . On a donc 7 paramètres à estimer pour 63 données.

On reprend la méthode d'estimation donnée par Wu, mais en travaillant sur des données annuelles. En effet, Wu cherche à extraire une composante cyclique dans son modèle, ce dont nous faisons abstraction dans notre étude. L'état du système est donné par le couple niveau de l'indice d'inflation – tendance d'inflation, alors que sa mesure est donnée par le couple niveau de l'indice d'inflation – inflation annuelle. Les équations d'état et de mesure sont donc données par :

$$\begin{pmatrix} \ln I_t \\ \varphi_t \end{pmatrix} = X_t = AX_{t-1} + M_t^X + \varepsilon_t = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & \theta \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} \beta_t - \frac{\sigma_{I,t}^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \ln I_t \\ \ln I_t / I_{t-1} \end{pmatrix} = Y_t = CX_t + M_t^Y + \eta_t = X_t + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_t - \frac{\sigma_{I,t}^2}{2} \end{pmatrix} + \eta_t$$

Les matrices de covariance sont données par :

$$Q_t = \begin{pmatrix} \sigma_{I,t}^2 + \sigma_{i,t}^2 & \sigma_{i,t}^2 \\ \sigma_{i,t}^2 & \sigma_{i,t}^2 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{I,t}^2 \end{pmatrix}$$

#### 2.4.4. Résultats d'estimation et distribution obtenue

Les paramètres obtenus sont les suivants :

$$\bar{i}_{1964} = 0,04123, \quad \bar{i}_{1976} = 0,09163, \quad \bar{i}_{1997} = 0,02809$$

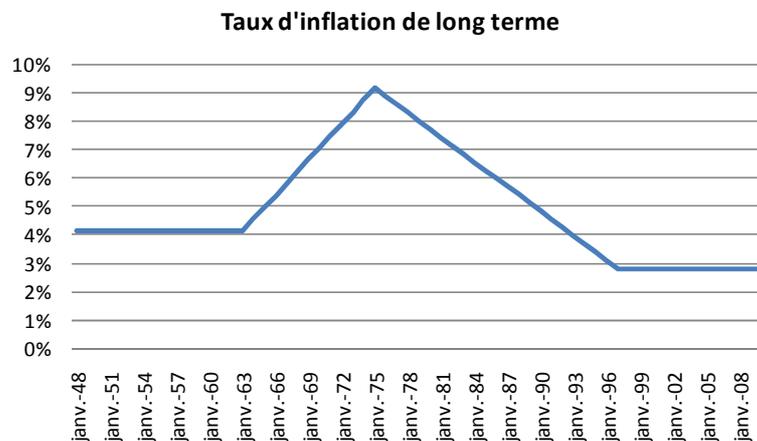
$$\varphi_0^i = 0,01858, \quad \theta = 0,6410, \quad f_I = 0,45881, \quad f_i = 0,24706$$

On en déduit les paramètres de diffusion suivants

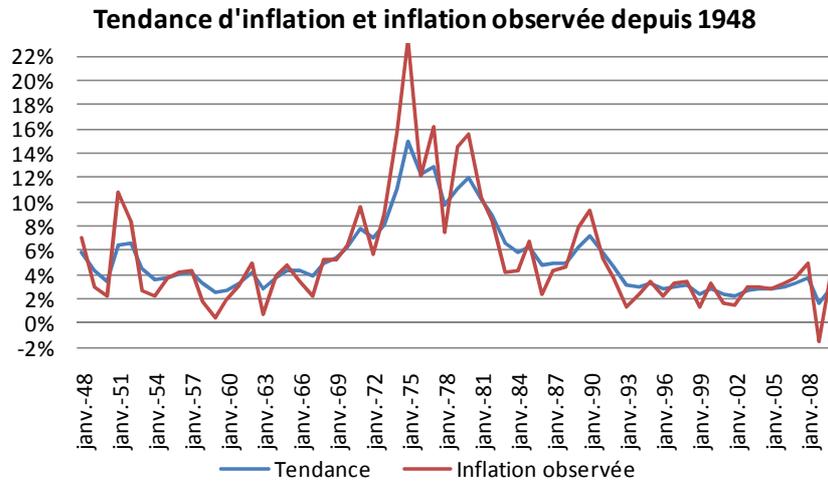
$$\bar{i} = 0,02809, \alpha_i = 0,44469, \sigma_i = 0,05649, \sigma_I = 0,01289$$

L'estimation ainsi obtenue du taux d'inflation de long terme depuis 1997 est de 2,81%. On retrouve une valeur cohérente avec la cible d'inflation de la Bank of England, au regard des différences de méthodes de calcul et de paniers de biens entre les indices RPI et CPI.

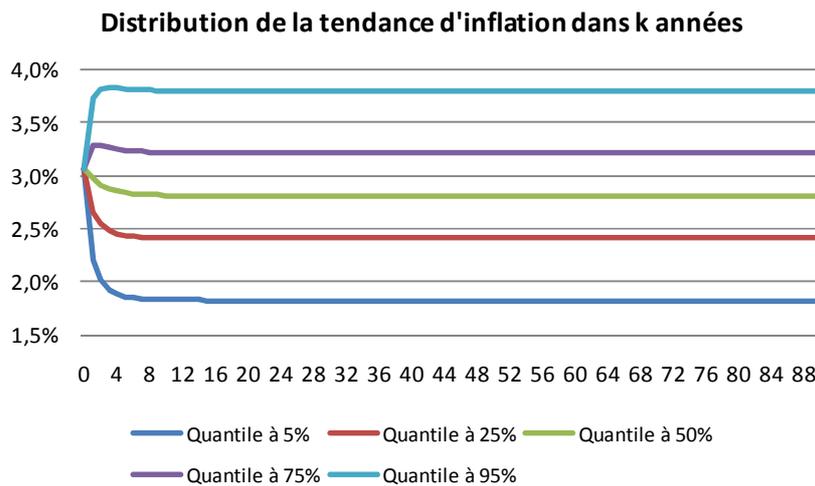
Le taux d'inflation de long terme a donc évolué comme suit (proche des taux d'inflation moyens subis sur la période) :



On obtient de plus que  $i_{2010} = 0,0356$ . La tendance d'inflation calculée par le filtre obtenu avec les paramètres estimés est donnée dans le graphique ci-dessous :



La distribution de la tendance d'inflation va être la suivante pour des dates ultérieures à Juillet 2010 :



Si de nombreux tests existent pour les filtres de Kalman, nous ne développons ici qu'un test de consistance du filtre, qui permet de vérifier si ce filtre est non-biaisé. Ce test est développé par exemple dans le manuel de Durrant-Whyte. Si les résidus ne sont pas biaisés, alors la variable

$$q_t = e_t' S_t^{-1} e_t$$

suit la loi du khi-deux à 2 degrés de liberté. Une statistique de test est donc donnée par :

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T q_t$$

La variable  $\bar{q}$  suit donc la loi du khi-deux à  $2T$  degrés de liberté, ici  $T = 63$ . La statistique de test appliqué à nos résidus est de  $\bar{q} = 2,00190$ . Un intervalle de confiance à 95% de confiance est donné par :

$$\left[ \frac{\chi_2(0,025)}{T} ; \frac{\chi_2(0,975)}{T} \right] = [1,53685 ; 2,52321]$$

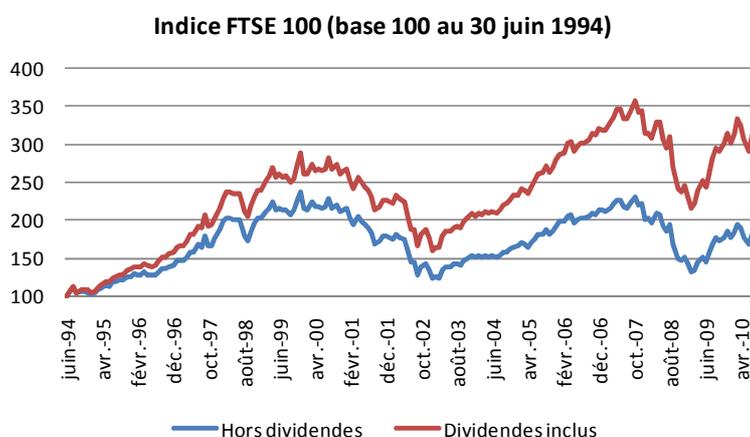
On ne peut donc rejeter l'hypothèse que notre filtre ait généré un estimateur non biaisé de l'inflation future. Nous avons donc bien extrait une tendance des données.

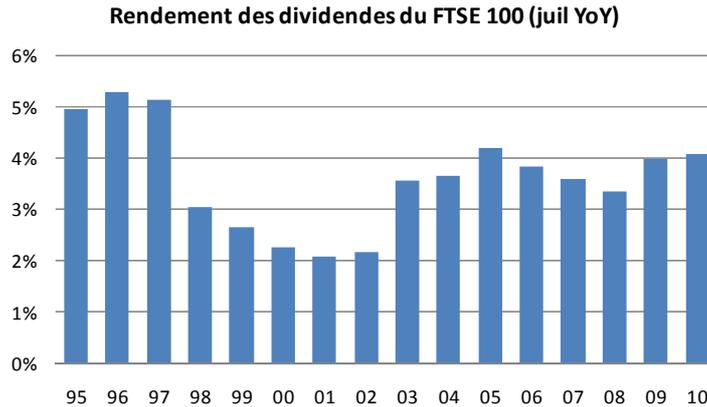
Notons cependant que les résultats de test sont assez sensibles aux choix de périodisation de la tendance de long terme.

## 2.5. Les actions

### 2.5.1. Présentation statistique du FTSE 100

Les fonds de pension, en tant qu'investisseurs de long terme, détiennent des actions pour bénéficier de leur surperformance attendue par rapport aux obligations. L'indice phare des marchés actions londoniens est le FTSE 100, qui inclut les cent plus importantes capitalisations boursières du London Stock Exchange. C'est un indice pondéré par la capitalisation boursière de ses composantes mais il inclut aussi des critères de nationalité et de part des actions flottantes dans le capital. Il a été lancé en 1984 et on dispose d'un historique avec dividendes réinvestis depuis 1994. C'est ce dernier indice qui sera retenu puisque les fonds de pension investissent à long terme et perçoivent ainsi les dividendes versés par les compagnies.





Rendement du FTSE 100 jusqu'en Juil-10

Date initiale	Hors dividende		Dividendes inclus	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
juil-94	3,66%	14,63%	7,05%	14,65%
juil-97	1,01%	15,60%	4,17%	15,60%
juil-00	-1,81%	15,39%	1,58%	15,43%
juil-03	3,75%	14,23%	7,36%	14,24%
juil-06	-2,54%	17,42%	1,21%	17,47%
juil-09	19,66%	17,53%	23,02%	17,60%

*Note: rendements logarithmiques mensuels  $\ln(S(t)/S(t-1))$*

Hors dividendes, le FTSE 100 a cru de 3,66% par an depuis 1994. En incluant les dividendes, cette croissance est de 7,05% par an, avec un écart-type très proche. La différence de rendement est donc considérable.

### 2.5.2. Estimation des paramètres et limites du modèle

Le modèle choisi pour représenter les actions est très simple. La diffusion de l'indice FTSE 100 sous probabilité historique est donnée par :

$$dS_t = (n_t + \lambda_S)S_t dt + \sigma_S S_t d\bar{W}_S(t)$$

On rappelle que  $\lambda_S$  désigne la prime de risque des actions et  $\sigma_S$  leur volatilité.

On notera dans cette partie  $y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$  et  $\Delta = 1/12$ . On cherche à estimer les paramètres du modèle discrétisé :

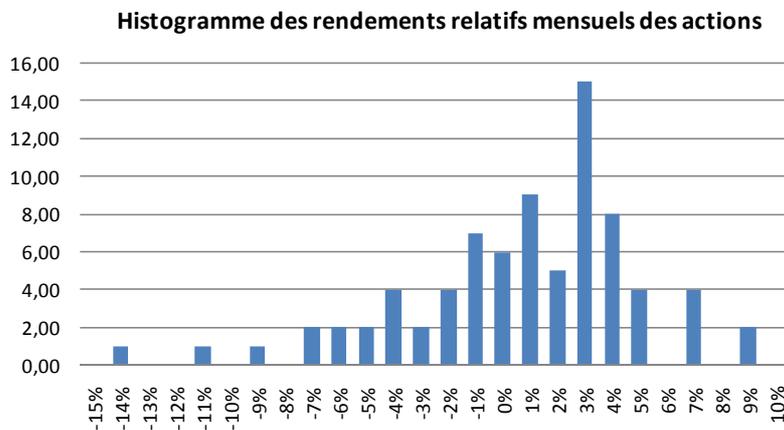
$$y_t = \left( n_t + \lambda_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \Delta + \sigma_S \sqrt{\Delta} \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t - n_t \Delta = \left( \lambda_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \Delta + \sigma_S \sqrt{\Delta} \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t$  représente un bruit blanc gaussien centré et réduit.

On dispose des valeurs mensuelles du FTSE 100 avec dividendes réinvestis de Janvier 2004 à Juillet 2010. On utilise les données de taux nominaux pour calculer la performance relative  $y_t - n_t \Delta$  des actions face au taux court. On trouve ci-dessous une description statistique des rendements mensuels des actions relativement au taux court.

Statistiques descriptives (rendement FTSE 100 - taux court)

Nombre	79	Asymétrie	-89%
Moyenne	0,21%	XS Kurtosis	138%
Médiane	0,78%	Minimum	-14,17%
Ecart-type	4,22%	Maximum	8,17%



On cherche d'abord à estimer par les moindres carrés ordinaires l'équation

$$y_t = \alpha + \beta n_t \Delta + \sigma \varepsilon_t$$

Un test de Fisher montre que ce modèle n'est pas statistiquement pertinent : on ne peut pas rejeter l'hypothèse que  $\alpha$  et  $\beta$  soient nuls à 10% de confiance. Un test de Student sur  $\beta$  montre cependant qu'on ne peut pas rejeter non plus l'hypothèse que  $\beta$  soit égal à 1. On observe aussi une forte asymétrie. Un test de Jarque Bera contredit en effet l'hypothèse de normalité des résidus. Les résultats de ces tests sont donnés ci-dessous.

Estimation de  $y(t) = a + b.n(t) + s.e(t)$

Coefficient de détermination $R^2$	0,012
Nombre d'observations	79
Statistique F	0,9515
Statistique JB sur les résidus	20,441

Coefficient	Valeur	Intervalle de confiance (95%)	Intervalle de confiance (90%)
a	1,420%	[-0.066% ; 3.507%]	[-0.032% ; 3.165%]
b	-3,06	[-9.30158 ; 3,18479]	[-8.27831 ; 2.16152]

Malgré ses défauts, on utilise ce modèle car il a pour avantages sa simplicité d'implémentation et son petit nombre de paramètres. L'hypothèse de normalité et de volatilité constante sont ses défauts majeurs, car ils empêchent de bien prendre en compte les risques spécifiques des actions.

On calibre finalement  $\lambda_S$  et  $\sigma_S$  sur les moments empiriques de  $y_t - n_t$  et on obtient alors les résultats suivants :

Distribution de la prime de risque annuelle des actions

	Valeur calibrée	Intervalle de confiance (95%)
Espérance $\lambda_S - \sigma_S^2 / 2$	2.516%	[0.526% ; 5.557%]
Volatilité $\sigma_S$	14.602%	[12.816% ; 17.193%]

## 2.6. Corrélations des différentes variables

### 2.6.1. Le choix des données utilisées pour les corrélations

Dans le but de disposer d'un générateur de scénarios cohérent, on s'appuiera sur les corrélations historiques des différentes variables pour déterminer les corrélations utilisées dans le modèle. Cependant, on ne se servira pas forcément des résultats bruts. En effet, plusieurs difficultés surviennent.

- On ne dispose pas d'historiques de données de même longueur pour l'inflation et pour les autres variables.
- Même avec un historique assez long, le pas de temps utilisé pour l'inflation doit être annuel, car l'utilisation de données mensuelles perturbe les résultats en ajoutant une saisonnalité.
- Puisqu'on dispose de plusieurs maturités différentes pour les zéros-coupons, il faut choisir sur la courbe quelle corrélation choisir.

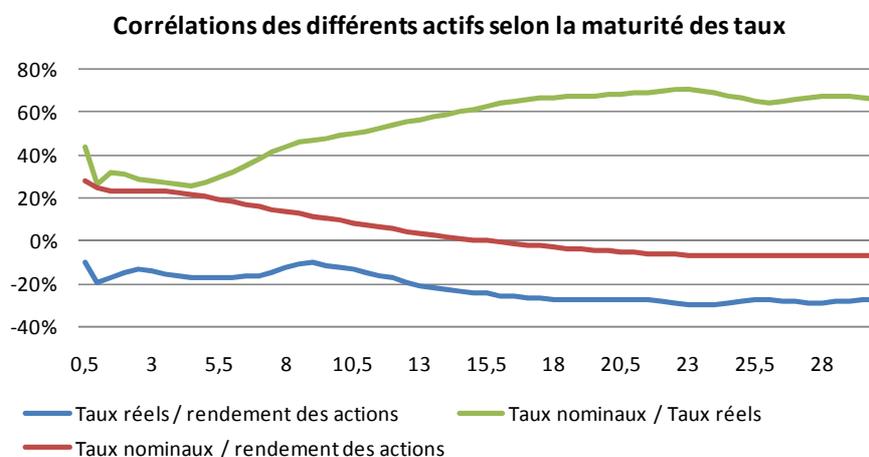
- L'estimation des corrélations est délicate car les séries temporelles qui entrent en jeu sont souvent intégrées.

On procède donc en trois étapes :

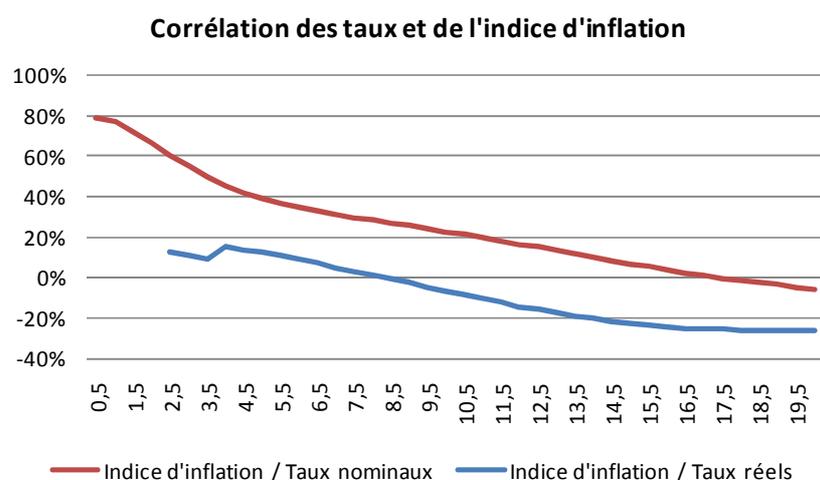
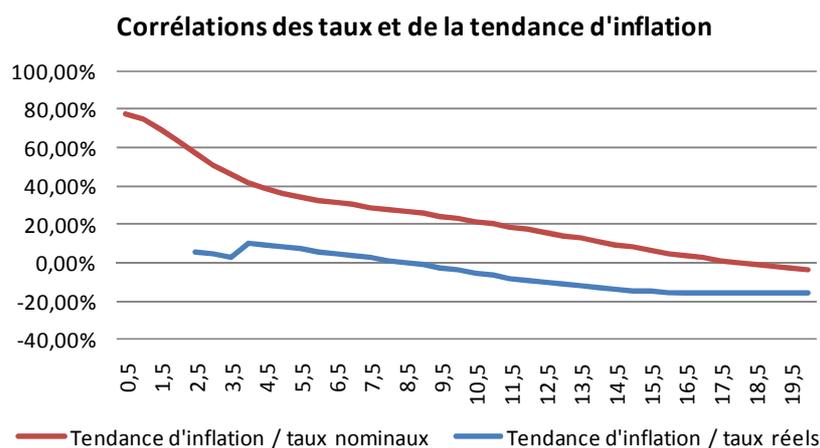
- On calcule les corrélations historiques entre les variations de taux zéros-coupon nominaux et réels et de la prime de risque des actions sur un rythme mensuel de Janvier 2004 à Juillet 2010.
- On ne dispose que de données annuelles pour les chocs d'inflations et les variations de la tendance d'inflation. Afin de calculer les corrélations de ces variables avec les variations de taux et les rendements des actions, on sera amené à utiliser l'historique de taux zéro-coupon de la Bank of England depuis 1994.
- vérification de la cohérence des corrélations sur des horizons de temps différents.

## 2.6.2. Matrice de corrélation retenue

On a les courbes de corrélations mensuelles suivantes pour les trois variables de marché :



On remarque que les corrélations entre les variations de taux nominaux et la prime de risque sont positives ou proches de zéro alors qu'elles sont négatives pour les taux réels. Les obligations nominales permettent donc mieux de se couvrir contre une baisse des marchés actions que les titres réels. On a ensuite les courbes suivantes pour les corrélations de la tendance d'inflation et de l'indice d'inflation avec les taux (de Juillet 1994 à Juillet 2010 sur un pas de temps annuel).



Les corrélations de la tendance d'inflation et de l'indice d'inflation sont respectivement de 41% et 43%. Sur la période 2004 – 2010, elles étaient respectivement de 55% et 45%. Pour les autres variables, si les valeurs des corrélations changent avec la période considérée, on retrouve les mêmes grandeurs relatives. On choisira donc la matrice de corrélation suivante pour générer les scénarios :

Matrice de corrélation retenue

	Tendance d'inflation	Indice d'inflation	Taux réels	Taux nominaux	Actions
Tendance d'inflation	1,00				
Indice d'inflation	0,00	1,00			
Taux réels	0,00	0,10	1,00		
Taux nominaux	0,50	0,30	0,80	1,00	
Actions	0,20	0,05	-0,15	0,20	1,00

### 2.6.3. Distributions jointes des variables de taux et d'inflation

A partir des corrélations et des paramètres précédemment calculés, on peut obtenir les distributions des variables suivantes :

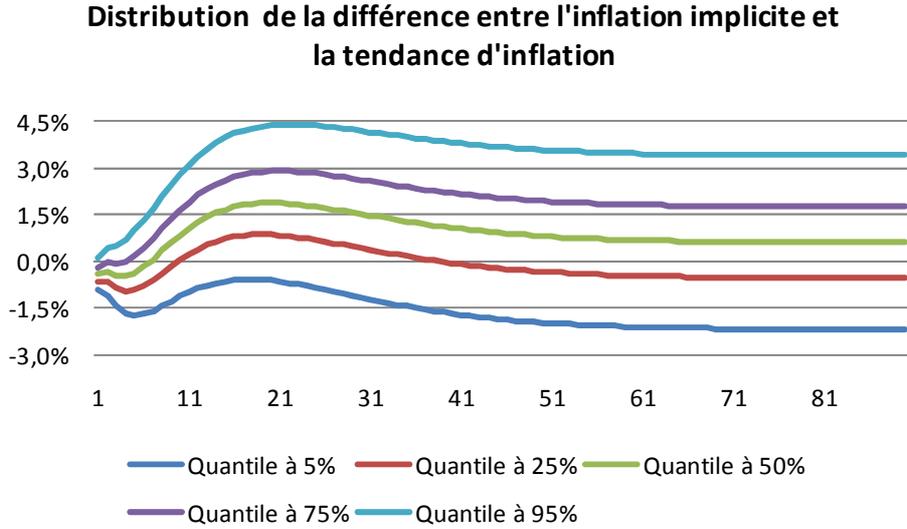
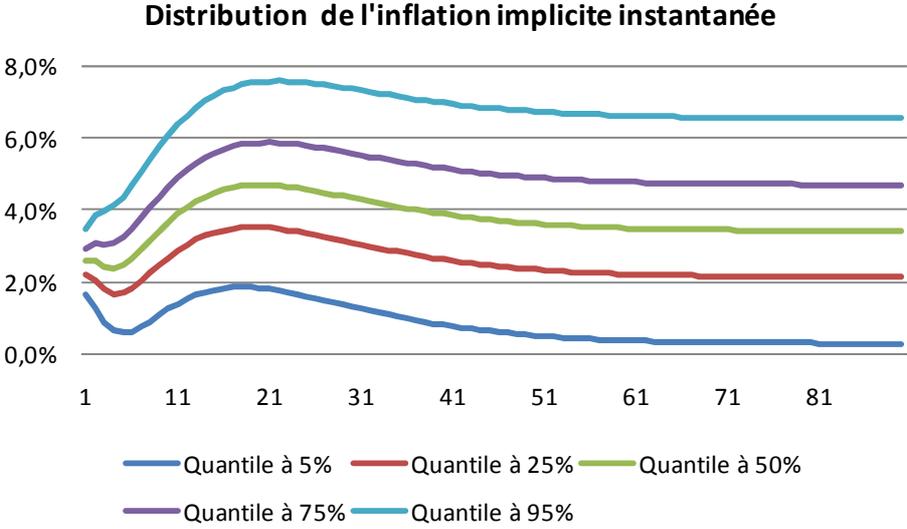
- Le point mort d'inflation (différence des taux nominaux et réels)
- L'écart entre le point mort d'inflation et la tendance d'inflation

Ces variables présentent toutes deux un grand intérêt du point de vue pratique. Le point mort d'inflation mesure l'inflation implicite dans les prix de marché. Il donne le niveau d'inflation à partir duquel la couverture contre l'inflation au moyen de titres indexés est « rentable ». L'écart entre le point mort d'inflation et la tendance d'inflation est la prime de risque que payent les acheteurs de produits indexés pour la protection contre l'inflation contenue dans ces titres.

Comme ces variables sont dans notre modèle des combinaisons linéaires de composantes d'un vecteur gaussien, elles sont elles mêmes gaussiennes. On obtient leurs distributions à l'aide d'un calcul d'espérance et d'un calcul de variance. Par exemple, la variance du point mort d'inflation se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(n_t - r_t) &= \mathbb{V}\left(\sigma_n \int_s^t e^{-\lambda_n(t-u)} dW_n(u) - \sigma_r \int_s^t e^{-\lambda_r(t-u)} dW_r(u)\right) \\
 &= \mathbb{V}\left(\sigma_n \int_s^t e^{-\lambda_n(t-u)} dW_n(u)\right) + \mathbb{V}\left(\sigma_r \int_s^t e^{-\lambda_r(t-u)} dW_r(u)\right) \\
 &\quad - 2\text{Cov}\left(\sigma_n \int_s^t e^{-\lambda_n(t-u)} dW_n(u); \sigma_r \int_s^t e^{-\lambda_r(t-u)} dW_r(u)\right) \\
 &= \sigma_n^2 \int_s^t e^{-2\lambda_n(t-u)} du + \sigma_r^2 \int_s^t e^{-2\lambda_r(t-u)} du - 2\rho_{r,n} \sigma_r \sigma_n \int_s^t e^{-(\lambda_r + \lambda_n)(t-u)} du \\
 &= \sigma_n^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} + \sigma_r^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_r t}}{2\lambda_r} - 2\rho_{r,n} \sigma_r \sigma_n \frac{1 - e^{-(\lambda_r + \lambda_n)t}}{\lambda_r + \lambda_n}
 \end{aligned}$$

On obtient donc les graphes suivants pour les distributions jointes :



### 3. La valorisation du passif avec les paramètres estimés

#### 3.1. Une première série d'hypothèses sur le passif

Dans le cadre de ce travail de recherche, seul un nombre limité de risques sont pris en compte par le modèle ; le risque d'inflation, le risque de taux et le risque action. De plus, des simplifications sont faites sur l'échéancier des flux : on suppose que

- un seul flux par an est payé aux membres,
- les cotisations du sponsor sont calculées et payées au fonds immédiatement après ce flux
- l'indexation est faite à partir de la valeur de l'indice d'inflation, supposé connu à cette date.

#### 3.2. Valeurs obtenues à l'aide de simulations de Monte Carlo

On a vu que les données de flux sont en fait proches d'être indexées linéairement à l'inflation, malgré les barrières d'indexation données par le LPI. On travaillera donc désormais avec les flux présentés en partie II-1-1-2, déflatés de l'hypothèse d'inflation correspondante, 2,75% en l'occurrence, conformément au scénario central décrit en partie II-1-1-2. On transforme un flux  $F_T$  de maturité  $T$  indexé à un taux d'inflation  $i$  en un flux déflaté  $\tilde{F}_T$  :

$$\tilde{F}_T = \frac{F_T}{(1+i)^T}$$

Ces flux, actualisés avec la courbe de taux réels du 31 Juillet 2010, donnent un passif d'une valeur de 1913.

On réalise ensuite des simulations pour calculer la valeur du passif en le supposant entièrement indexé au LPI, c'est-à-dire à l'inflation annuelle bornée par 0% et 5%. On se sert pour cela du modèle de Jarrow Yildirim pour diffuser les taux nominaux et réels et l'indice d'inflation sous probabilité neutre au risque avec un pas de temps hebdomadaire. On obtient un passif d'une valeur de 1852, soit 3,19% inférieur à la valeur de 1913 donnée par une indexation linéaire à l'inflation. Ainsi, avec la courbe de taux actuelle, il existe une différence importante entre une valorisation au RPI et au LPI.

### 3.3. Une deuxième série d'hypothèses simplificatrices

On voit dans ces simulations que la présence d'options dans le passif le rend sensible non seulement aux taux d'intérêts réels mais aussi aux taux d'intérêts nominaux.

Le temps de calcul pour obtenir ces résultats n'est pas extrêmement long. Cependant, si notre objectif est de faire des simulations d'investissements, il faudra commencer par simuler les variables dans le monde historique, puis à chaque date faire des simulations dans le monde risque neutre pour valoriser le passif. Le temps de calcul devient alors rapidement un obstacle.

On fera donc le choix dans les simulations qui vont suivre de considérablement simplifier le passif. **On le supposera désormais exactement indexé à l'inflation, sans référence aux bornes d'indexation.** Cette simplification n'est pas aberrante au regard des hypothèses de sensibilité obtenues par les actuaires du fonds eux-mêmes, comme on le voit en partie II-1-1-2. Cette hypothèse va considérablement simplifier les calculs puisqu'on a alors des formules fermées pour le passif.

### 3.4. Appendice : une formule approchée pour un swap de LPI

La formule approchée quasi-analytique de Brody, Crosby et Li pour un swap de LPI

On rappelle que le LPI (Limited Price Index) d'une année  $T$  est défini pour un cap  $C$  et un floor  $F$  par  $LPI_T(C, F) = \max\left\{\min\left[\frac{I_T}{I_{T-1}}; C\right]; F\right\}$ . On cherche à établir la valeur en date 0 d'un produit payant en date  $T_N$  un flux de valeur :

$$K_{T_N} = \prod_{i=1}^N \max\left\{\min\left[\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}}; C\right]; F\right\}$$

La différence fondamentale entre un cap ou un floor et le LPI est que le LPI compose les taux d'inflation. L'auto corrélation de l'indice d'inflation rend donc difficile voire impossible l'obtention d'une formule fermée. Ryten a développé une approche reprise par Li, puis Brody, Crosby et Li pour proposer une approche pour valoriser de la jambe flottante d'un swap de LPI qui permet de

contourner cette difficulté en « transformant » la matrice de corrélation des variations annuelles de l'indice d'inflation.

On se place sous la probabilité  $\mathbb{Q}_{T_N}$ . Notons  $X_i = I_{T_i}/I_{T_{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq M$ , avec  $T_M$  la date de paiement du dernier flux. On montre facilement que le vecteur  $(\ln X_i)_{i=1,\dots,N}$  est gaussien sous  $\mathbb{Q}_{T_N}$ , avec une espérance  $\mu_N$ , un vecteur de volatilité  $\sigma_N$  et une matrice de corrélation  $P_N$ .

$$\mu_N = (\mu_N^i)_{i=1,\dots,N}, \quad \sigma_N = (\sigma_N^i)_{i=1,\dots,N}, \quad P_N = (\text{Correl}^{\mathbb{Q}_T}[\ln X_i, \ln X_j])_{i,j=1,\dots,N}$$

Les variables  $X_i$  sont donc distribuées de façon log normale sous cette même probabilité et peuvent donc s'écrire  $X_i = \exp\left(\mu_N^i + \frac{\sigma_N^{i,2}}{2} + \sigma_N^i Z_N^i\right)$ , où les variables  $Z_N^i$  suivent une loi normale centrée et réduite de matrice de corrélation  $P_N$ . L'auto corrélation des variables  $Z_N^i$  rend difficile voire impossible l'obtention d'une formule fermée pour  $K_{T_N}$ . Ryten approche alors les variables  $X_i$  par les variables  $\hat{X}_i$  :

$$\hat{X}_i = \exp\left(\mu_N^i + \sigma_N^i \left(\hat{a}_N^i \eta_N + \sqrt{1 - \hat{\sigma}_N^{i,2}} \varepsilon_N^i\right)\right)$$

Le vecteur  $(\eta_N, \varepsilon_N^1, \dots, \varepsilon_N^N)$  est gaussien d'espérance nulle et de covariance la matrice identité. Il s'agit en fait de la décomposition des variables  $Z_N^i$  en un facteur commun (inobservable) et un facteur spécifique. Dans le cas où  $N = 1$ , on fixe  $\hat{a}_1^1 = 1$ . Dans le cas où  $N = 2$ , on fixe  $\hat{a}_2^1 = 1$ ,  $\hat{a}_2^2 = \text{Correl}^{\mathbb{Q}_T}(\ln X_1, \ln X_2)$ . Dans le cas où  $N \geq 3$ , on a une valeur approchée par cette méthode en choisissant :

$$\hat{a}_N^i = \exp\left\{\frac{1}{N-2} \left[m_i - \frac{\sum_{j=1}^N m_j}{2(N-1)}\right]\right\}$$

Les nombres  $m_i$  sont eux-mêmes obtenus pour  $N \geq 3$  par  $m_i = \sum_{j=1, \dots, N}^{j \neq i} \ln(\text{Cov}^{\mathbb{Q}_T}(\ln X_i, \ln X_j))$ . On appelle  $H_N$  la tribu engendrée par  $\eta_N$ . On définit les variables  $\hat{F}_i$  comme les espérances des variables  $\hat{X}_i$  conditionnellement à  $H_N$ . Leur valeur est donnée par :

$$\hat{F}_i \equiv \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}(\hat{X}_i | H_N) = \exp\left(\mu_N^i + \frac{\bar{\sigma}_N^{i,2}}{2} + \hat{a}_N^i \sigma_N^i \eta_N\right)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}(\ln \hat{X}_i | H_N) = \mu_N^i + \hat{a}_N^i \sigma_N^i \eta_N$$

$$\bar{\sigma}_N^i{}^2 \equiv \mathbb{V}^{\mathbb{Q}^T}(\ln \hat{X}_i | H_N) = \sigma_N^i{}^2 (1 - \hat{a}_N^i{}^2)$$

Une valeur approchée en date 0 d'un zéro coupon de LPI payé en date  $T_N$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(K_{T_N})P_n(0, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(K_{T_N} | \eta_N) \right) P_n(0, T) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^N (\hat{F}_i - \text{Call}[\hat{F}_i, C, \bar{\sigma}_N^i] + \text{Put}[\hat{F}_i, F, \bar{\sigma}_N^i]) \right) \frac{e^{-\frac{\eta_N^2}{2}} d\eta_N}{\sqrt{2\pi}} P_n(0, T) \end{aligned}$$

Les variables  $\text{Call}[\hat{F}_i, C, \bar{\sigma}_N^i]$  et  $\text{Put}[\hat{F}_i, F, \bar{\sigma}_N^i]$  sont les valeurs du Call et du Put dans la formule de Black auxquelles on enlève le facteur d'actualisation, c'est-à-dire :

$$\text{Call}[\hat{F}_i, C, \bar{\sigma}_N^i] = \hat{F}_i \phi(d_1(\hat{F}_i, C, \bar{\sigma}_N^i)) - C \phi(d_2(\hat{F}_i, C, \bar{\sigma}_N^i))$$

$$\text{Put}[\hat{F}_i, F, \bar{\sigma}_N^i] = F \phi(-d_2(\hat{F}_i, F, \bar{\sigma}_N^i)) - \hat{F}_i \phi(-d_1(\hat{F}_i, F, \bar{\sigma}_N^i))$$

$$\text{Avec } d_1(x, y, \sigma) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) + \frac{\sigma^2}{2} T_N}{\sigma \sqrt{T_N}} \text{ et } d_2(x, y, \sigma) = d_1(x, y, \sigma) - \frac{\sigma^2}{2} T_N.$$

### Les limites de cette formule

Si cette formule a l'avantage d'être plus économe en temps de calcul que des simulations de Monte Carlo, elle a aussi des inconvénients majeurs :

- elle reste une formule approchée, et elle se révèle très approximative pour des maturités longues, or c'est justement sur ces maturités que se posent les problèmes des fonds de pension,
- elle nécessite des calculs numériques longs et délicats qui peuvent être des sources d'erreurs.

# PARTIE III : RECHERCHE DE STRATEGIES OPTIMALES D'INVESTISSEMENT PAR SIMULATIONS DE MONTE CARLO

---

On applique dans cette partie les résultats obtenus dans la partie précédente à l'étude de différentes stratégies d'investissement ayant pour but d'optimiser les contributions de l'employeur. On utilisera pour cela des simulations de Monte Carlo.

## 1. Modélisation du problème par les simulations de Monte Carlo

Les simulations de Monte Carlo ont plusieurs avantages sur la recherche de formules fermées : elles sont adaptables à un problème à plusieurs dimensions subissant une grande diversité de contraintes et permettent de produire divers indicateurs et tests empiriques. De plus, on peut facilement faire des simulations de Monte Carlo avec un tableur Excel.

### 1.1. Les objectifs des simulations

#### 1.1.1. La modélisation des préférences de la compagnie

Le programme fonctionne comme le montre le schéma ci-dessous.



L'objectif est de simuler des portefeuilles d'investissements pour déterminer quelle stratégie est optimale pour l'employeur. Pour juger l'optimalité de la stratégie, on définit d'abord la variable suivante, qui exprime le coût de financement des pensions par l'employeur pour une stratégie d'investissement donnée  $u$  :

$$C(u) = \sum_{t=1}^T c_t(u) e^{-\Delta \sum_{i=0}^{t/\Delta-1} n_{\Delta i}}$$

Dans ce calcul,  $c_t$  désigne la contribution payée en date  $t$ ,  $n_t$  le taux court nominal en date  $t$  et  $\Delta$  le pas de temps retenu, en l'occurrence le trimestre ( $\Delta = 0.25$ ). L'optimalité du choix d'investissement est mesurée principalement par les critères suivants :

- Coût moyen de financement :  $M(u) = \mathbb{E}(C(u))$ ,
- *Cash at Risk*, ou coût extrême de financement pour une probabilité donnée  $\alpha$  :  $X(u, \alpha) = \inf\{K | \mathbb{P}(C(u) > K) < \alpha\}$ .

On s'intéresse aussi à la distribution du niveau de financement du plan, mesuré par le ratio de la valeur du portefeuille d'actifs sur celle du passif.

### 1.1.2. La comparaison de plusieurs stratégies d'investissement

Pour optimiser les contributions au fonds, le choix de la stratégie d'investissement est crucial. On commence par définir les actifs dans lesquels le fonds peut investir et on détaille ensuite les stratégies d'investissements possibles pour la compagnie.

#### Le passif et les actifs du fonds entrant en jeu dans les simulations

Les variables financières vont tout d'abord déterminer la valeur du passif. Le passif en date  $t + k\Delta$ , où  $t \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, 1/\Delta - 1\}$  est donné par :

$$L_{t+k\Delta} = I_{t+k\Delta} \sum_{i=t+1}^T \tilde{F}_i P_r(t + k\Delta, i)$$

On rappelle que les  $\tilde{F}_t$  sont les flux de pension totaux déflatés,  $I$  est l'indice d'inflation et les  $P_r$  sont les zéros-coupon réels. Les actifs dans lesquels le fonds pourra investir seront au nombre de trois :

- L'actif de couverture, c'est-à-dire le passif
- L'indice actions  $S_t$
- Un actif de quasi couverture constitué d'obligations nominales.

On notera  $V_t$  la valeur de cet actif de quasi couverture. Elle est calculée de la façon suivante :

$$V_{t+k\Delta} = \sum_{i=t+1}^T \tilde{F}_i \mathbb{E}(I_i | \mathcal{F}_0) P_n(t + k\Delta, i)$$

Cette valeur repose sur la valeur espérée de l'indice d'inflation jusqu'à la fin du fonds. Le seul aléa de cet actif est l'aléa concernant les taux nominaux. Cet actif permet de couvrir le passif sauf l'écart entre l'inflation et sa moyenne. On couvre en fait ici une série de flux avec une indexation déterministe. **Cet actif permet de ne pas passer par le marché des taux réels et de conserver le risque d'inflation sans payer la prime de risque exigée sur le marché.**

Si on note  $Q_t^0$  la quantité d'actifs affectée à la réplication du passif,  $Q_t^1$  celle affectée au portefeuille de quasi-couverture et  $Q_t^2$  celle affectée aux actions, la valeur des actifs en date  $t$  est :

$$A_t = Q_t^0 L_t + Q_t^1 V_t + Q_t^2 S_t$$

**Le montant d'actifs initial dans le fonds est de 1 300 et le passif de 1 913 (millions de livres sterling), soit un niveau de financement (ratio actif sur passif) de 68%.**

#### Les différentes stratégies d'investissement du fonds

On considère douze allocations d'actifs initiales, résumées dans le tableau ci-dessous. On note  $w_L$  le poids affecté au passif,  $w_V$  celui du portefeuille de quasi-couverture et  $w_S$  celui des actions.

#### Allocations d'actifs initiales ( $w_L, w_V, w_S$ )

(100%; -; -)	(80%; -; 20%)	(60%; -; 40%)	(40%; -; 60%)
(50%; 50%; -)	(40%; 40%; 20%)	(30%; 30%; 40%)	(20%; 20%; 60%)
(-; 100%; -)	(-; 80%; 20%)	(-; 60%; 40%)	(-; 40%; 60%)

Quatre stratégies sont disponibles pour le fonds. Le tableau ci-dessous les classe selon deux critères principaux :

	Evolution déterministe du poids des actifs	Evolution aléatoire du poids des actifs
Pas de recherche systématique de hausse du taux de couverture	Poids fixes tout au long de la vie du fonds (Stratégie 1)	Poids variables en fonction de la valorisation des actifs (Stratégie 3)
Recherche systématique de hausse du taux de couverture	Poids fixés à l'avance avec augmentation linéaire de la part des actifs de couverture tout au long de la vie du fonds (Stratégie 2)	Cliquet : lorsque la valeur des actifs de couverture a baissé relativement à celle des autres actifs, on augmente leur poids (Stratégie 4)

On ajoute un aspect essentiel : **si le ratio actif sur passif dépasse un certain seuil  $U_b$  (on a choisi 110%), on couvre le déficit en investissant tous les actifs dans le portefeuille  $L$** . L'objectif n'est en effet pas de maximiser le rendement du portefeuille mais de couvrir le passif.

## 1.2. La mise en place de la programmation

Toute la programmation a été faite sur Excel. La programmation des simulations se fait en cinq étapes.

### Première étape : la génération de nombres aléatoires

Les variables aléatoires simulées sont toutes gaussiennes. Si ce choix est critiquable, en particulier pour le rendement des actions, il a l'avantage de simplifier les simulations. On utilise la forme cartésienne de l'algorithme de Box-Muller pour générer des paires de nombres aléatoires gaussiens à partir de nombres uniformément distribués. Excel dispose d'un générateur  $\mathcal{U}$ , qui produit des variables aléatoires  $U(\mathcal{U})$  distribuée selon la loi uniforme sur  $[0,1]$ .

$$\text{Tant que } R \geq 1, \quad \text{Faire } U_1 \leftarrow U_1(\mathcal{U}), U_2 \leftarrow U_2(\mathcal{U}), \quad X_1 = 2U_1 - 1, \quad X_2 = 2U_2 - 1,$$

$$R = X_1^2 + X_2^2$$

$$R = \sqrt{-2 \frac{\log R}{R}}, \quad X_1 = X_1 R, \quad X_2 = X_2 R$$

On obtient ainsi deux variables indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  de loi normale centrée réduite. Il faut ensuite les transformer pour obtenir des variables corrélées. Pour cela, on utilise la transformation de Cholesky de la matrice de corrélation retenue. On notera  $\eta_t^k$  les variables gaussiennes ainsi calculées, avec  $k \in \{I, i, r, n, S\}$ .

### Deuxième étape : diffusion des variables financières

On se sert des discrétisations exactes de l'inflation, des taux courts et des actions, qui sont données par :

$$\ln I_{t+\Delta} = \ln I_t + \left( i_t - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) \Delta + \sigma_I \sqrt{\Delta} \eta_{t+\Delta}^I$$

$$i_{t+\Delta} = i_t e^{-a_i \Delta} + \bar{i}(1 - e^{-a_i \Delta}) + \sigma_i \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_i \Delta}}{2a_i}} \eta_{t+\Delta}^i$$

$$n_{t+\Delta} = \alpha_{n,t+\Delta} + (n_t - \alpha_{n,t})e^{-a_n \Delta} + \sigma_n \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_n \Delta}}{2a_n}} \eta_{t+\Delta}^n$$

$$r_{t+\Delta} = \alpha_{r,t+\Delta} + (r_t - \alpha_{r,t})e^{-a_r \Delta} - \frac{\rho_{rI} \sigma_I \sigma_r}{a_r} (1 - e^{-a_r \Delta}) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_r \Delta}}{2a_r}} \eta_{t+\Delta}^r$$

$$\ln S_{t+\Delta} = \ln S_t + \left( n_t + \lambda_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \Delta + \sigma_S \sqrt{\Delta} \eta_{t+\Delta}^S$$

Les nombres  $\alpha_{j,t}$  valent  $\alpha_{j,t} = f_j(0, t) + \frac{\sigma_j^2}{2a_j^2}(1 - e^{-a_j t})^2$  pour  $j \in \{n, r\}$ .

Troisième étape : calcul de la valeur du passif et de l'actif de quasi-couverture

On calcule à chaque date la valeur de  $L$  et  $V$  à partir des courbes des taux obtenues et de l'indice d'inflation.

Quatrième étape : calcul de la valeur du portefeuille d'actifs et des contributions pour chaque stratégie d'investissement

Selon la stratégie choisie, la performance des actifs sur les marchés sera différente et les contributions le seront aussi. On calcule à cette étape les poids qui seront affectés à chaque classe d'actif ainsi que les contributions.

Les contributions ont deux composantes : contributions ordinaires d'amortissement du déficit et contributions exceptionnelles lorsque le taux de financement du fonds est trop faible. Le déficit est lui-même calculé comme la différence entre l'actif et le passif auquel on a ajouté un chargement  $U_b$ . Il vaut donc  $D_t = U_b L_t - A_t$ .

Le seuil de déclenchement des contributions exceptionnelles est franchi lorsque  $f_t = L_t/A_t < L_b$ .

**On a choisi  $L_b = 0,5$ .** Une contribution exceptionnelle permet de ramener le niveau des actifs à au moins une proportion  $L_b$  du passif. Elle vaut

$$c_t^x = \text{Max}\{L_b L_t - A_t; 0\}$$

**Les contributions d'amortissement sont calculées en fonction d'une durée d'amortissement  $N =$**

**12.** On testera deux types de contributions différentes :

- Amortissement linéaire du déficit :  $c_t^o = (D_t + c_t^x)/N$
- Amortissement borné du déficit :  $c_t^o = \text{Max}\{\text{Min}\{c_{max}; (D_t + c_t^x)/N\}; \text{Min}\{c_{min}; D_t + c_t^x\}\}$

La deuxième méthode permet de lisser les contributions ordinaires qui ne peuvent sortir de l'intervalle  $[c_{min}; c_{max}]$ , sauf si le déficit est inférieur à  $c_{min}$  auquel cas on le couvre entièrement.

La contribution versée au fonds l'année  $t$  est donc donnée par la somme des contributions exceptionnelles et des contributions d'amortissement :

$$c_t = c_t^x + c_t^o$$

#### Cinquième étape : calcul des indicateurs d'optimalité

On calcule enfin les indicateurs de contributions et de niveau de financement tout au long de la vie du fonds.

#### Synthèse des hypothèses de bases retenues pour le financement :

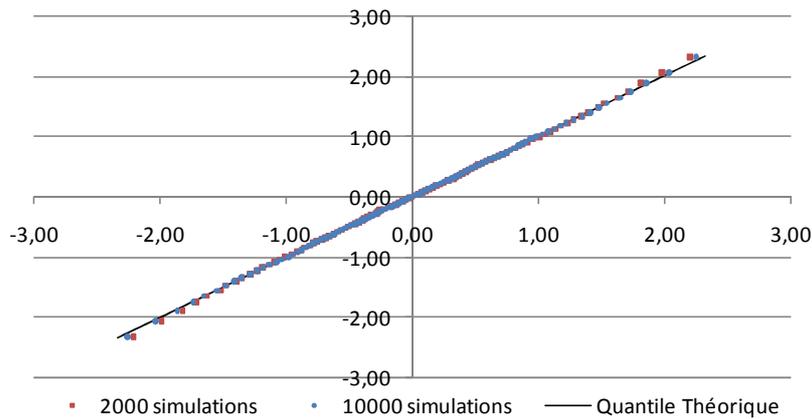
- Lorsque le ratio actif sur passif dépasse 110%, on couvre le passif, lorsqu'il passe en dessous de 50%, on verse une contribution exceptionnelle qui ramène ce ratio à 50%
- En amortissement linéaire, les contributions valent un douzième du déficit (la durée d'amortissement est de 12 ans)
- En amortissement borné, la contribution sera au maximum de 30 et au minimum de 15.

### 1.3. Tests de convergence sur les variables simulées

#### Variables gaussiennes

On peut tout d'abord montrer que les aléas simulés sont bien gaussiens à l'aide d'un QQ-Plot.

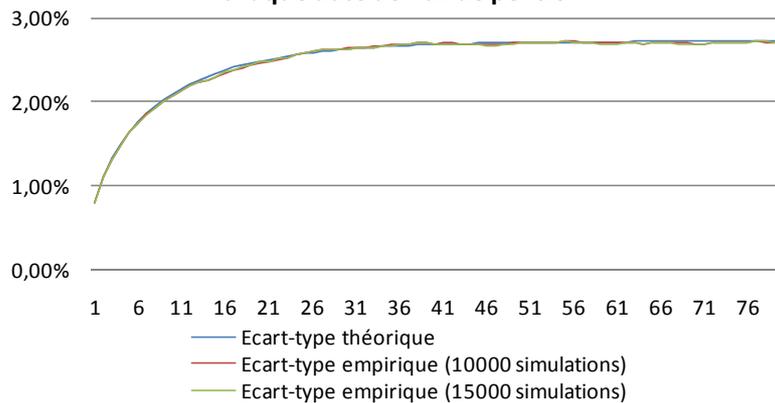
### QQ-Plot d'un échantillon de gaussiennes simulées



### Convergence des variables de marché

Les variables de marché simulées étant gaussiennes, la distribution empirique converge relativement rapidement vers la distribution théorique.

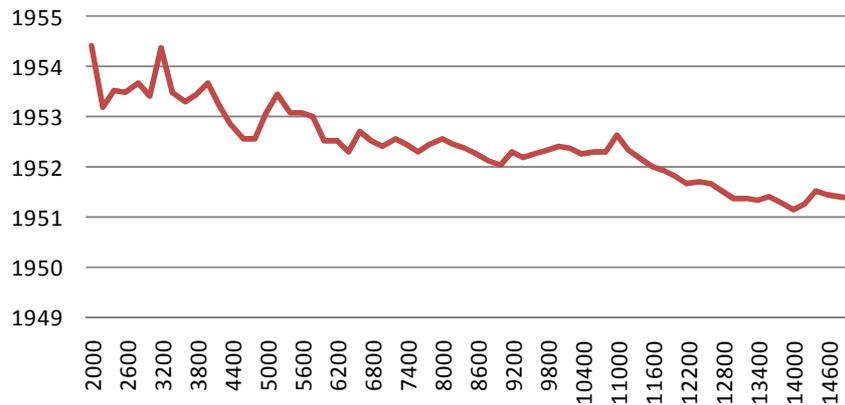
### Ecart-type empirique et théorique des taux réels court à chaque date de flux de pension



### Distribution de la valeur du passif et des actifs avec 15000 simulations

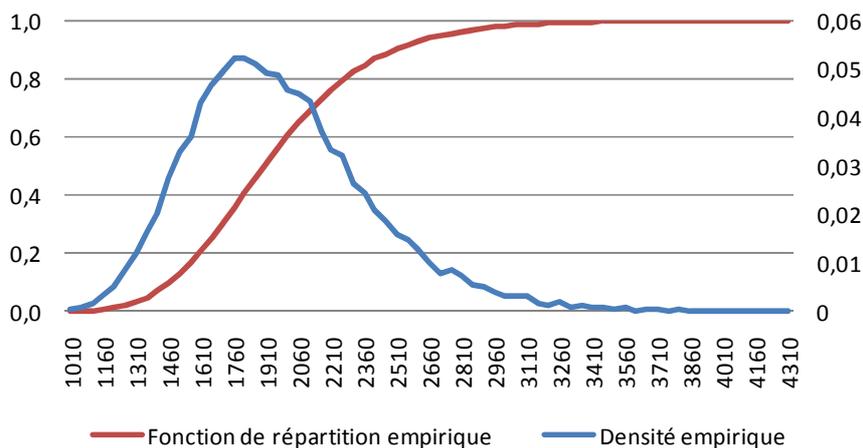
On a commencé par faire 15 000 simulations pour le scénario central, mais 10 000 simulations permettent déjà d'obtenir une convergence comparable des moments d'ordre 1 et 2 des variables de marchés, mais aussi des actifs dans lesquels le fonds a investi.

### Valeur moyenne du passif de l'année 10 en fonction du nombre de simulations



On donne ci-dessous la fonction de répartition et la densité empiriques du passif l'année 10.

### Distribution empirique du passif l'année 10

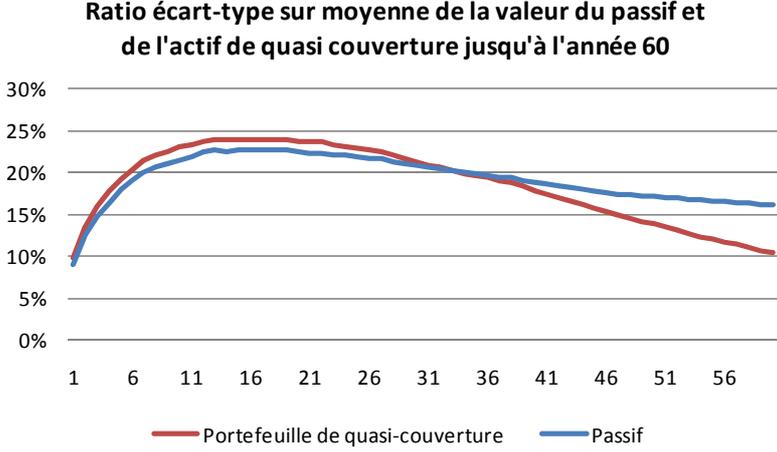
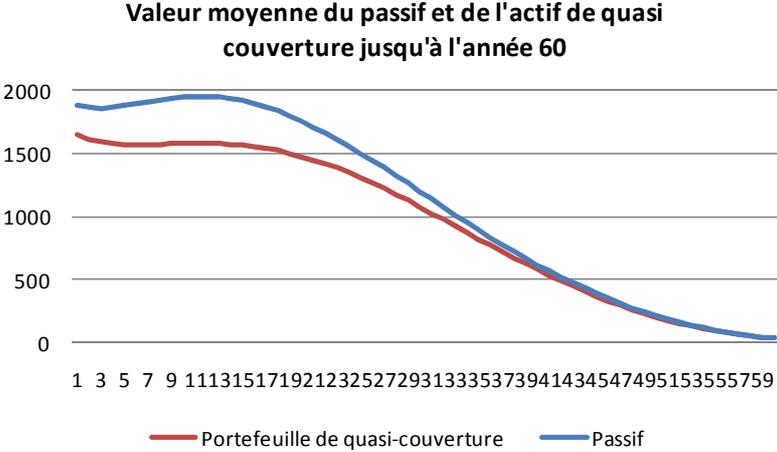


On remarque que le passif est caractérisé par des queues de distributions épaisses et une forte asymétrie vers la droite, ce qui est lié au fait que le passif est une somme de variables de loi log-normale. Le tableau ci-dessous décrit le passif de l'année 10.

#### Description statistique du passif l'année 10

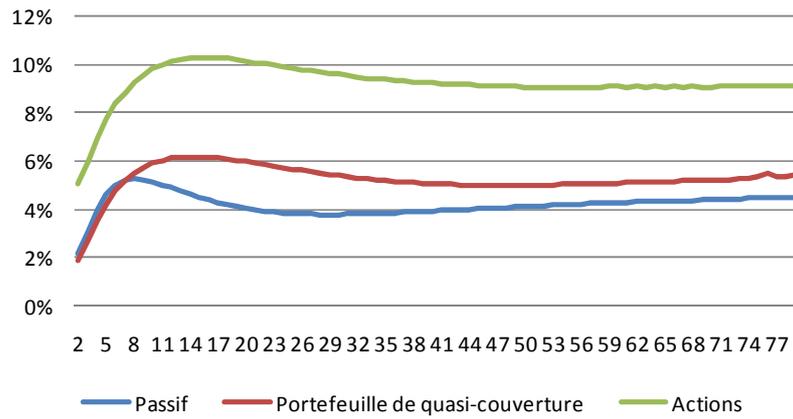
Moyenne	1951
Médiane	1898
Ecart-type	421
Quantile à 5%	1362
Quantile à 95%	2724

Les graphiques ci-dessous montrent l'évolution moyenne du passif et du portefeuille de zéros-coupon nominaux (portefeuille de quasi-couverture).

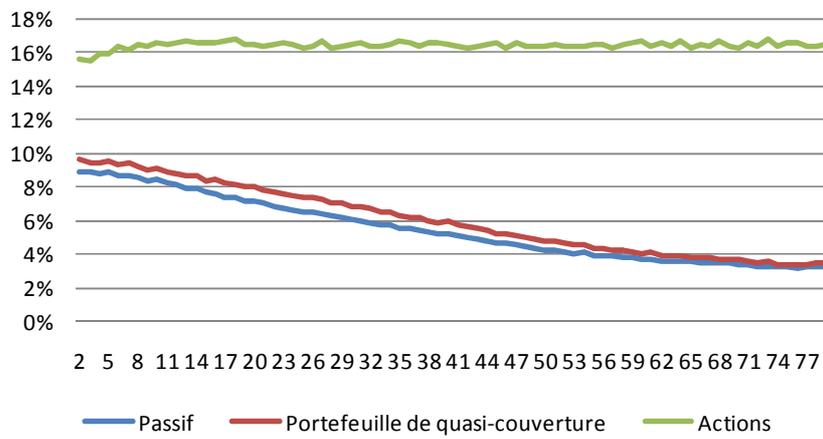


Les rendements des trois actifs ont leurs moyennes et écart-types données dans les graphiques ci-dessous.

### Rendement annuel moyen des trois actifs



### Ecart-type du rendement sur un an des trois actifs

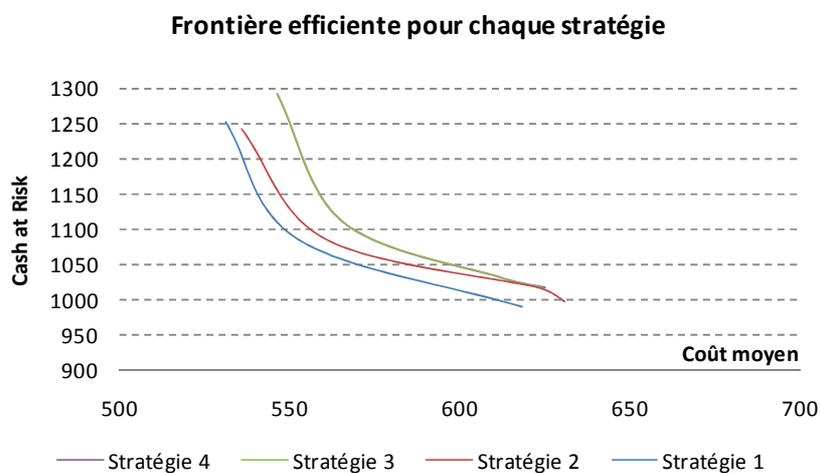
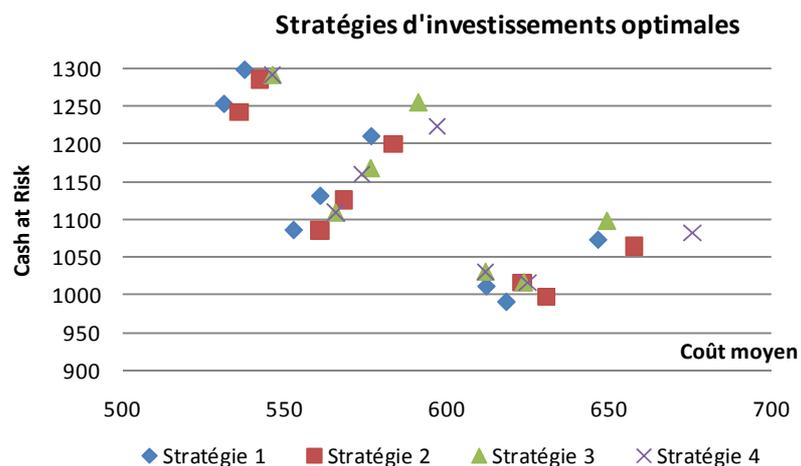


## 2. Résultats des simulations

### 2.1. Une stratégie optimale pour le sponsor est une stratégie à poids fixes, où les contributions sont bornées et où aucun actif n'est investi dans le portefeuille de couverture

#### 2.1.1. Dans le cadre d'un amortissement linéaire, tous les portefeuilles optimaux contiennent des actifs de quasi-couverture

On peut représenter le coût moyen et le Cash at Risk de la somme actualisée des contributions pour chaque stratégie d'investissement et chaque allocation d'actif dans un graphique de type Markowitz.

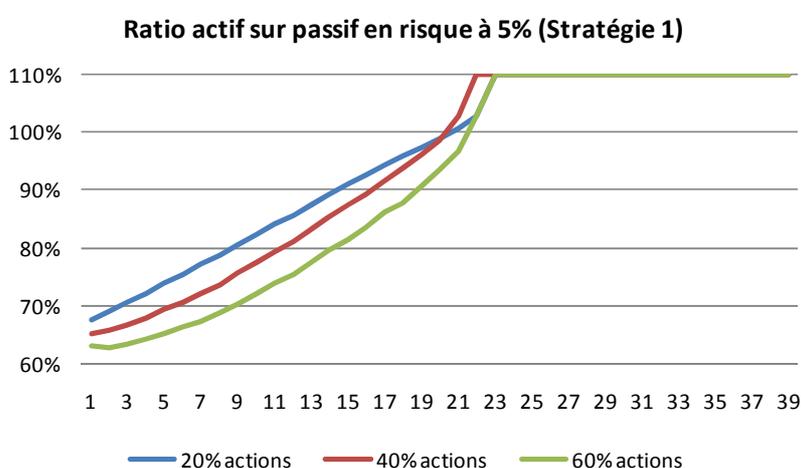
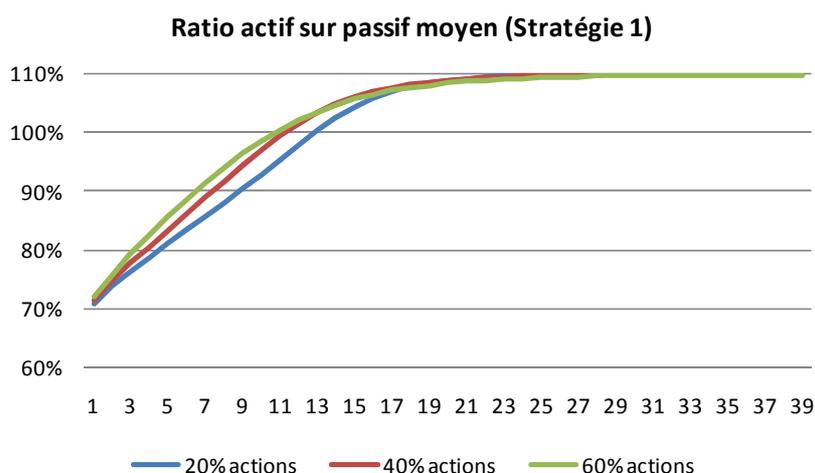


On peut donner trois portefeuilles efficients, les plus en bas et à gauche du graphique. Ils ont pour allocation initiale en actions (respectivement en actifs de couverture et de quasi-couverture) 20% (40% et 40%), 20% (0% et 80%), 40% (0% et 60%) et 60% (0% et 40%). On remarque quatre faits principaux :

- Tous les portefeuilles efficients ont été investis avec la stratégie 1, à poids fixes.
- Seul un portefeuille efficient inclut des actifs de couverture.
- Quelle que soit la stratégie choisie, les compositions initiales des portefeuilles optimaux sont les mêmes.
- Sur la frontière efficiente, on ne peut pas distinguer les stratégies 3 et 4.

En effet, l'introduction des actifs de couverture fait tellement augmenter le coût qu'il ne permet pas de diminuer un risque qui est lui-même lié au coût.

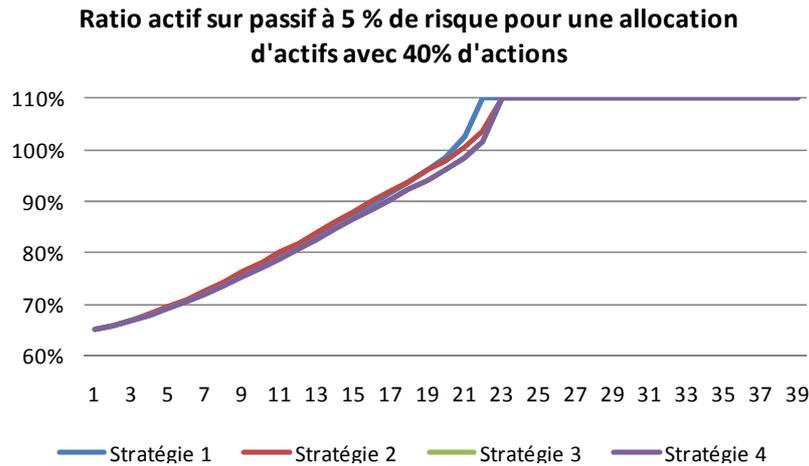
On considère à présent le niveau de financement du fonds pour la stratégie 1. Il est donné dans les graphiques ci-dessous.



Le ratio actif sur passif en risque est donné pour chaque date  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  par

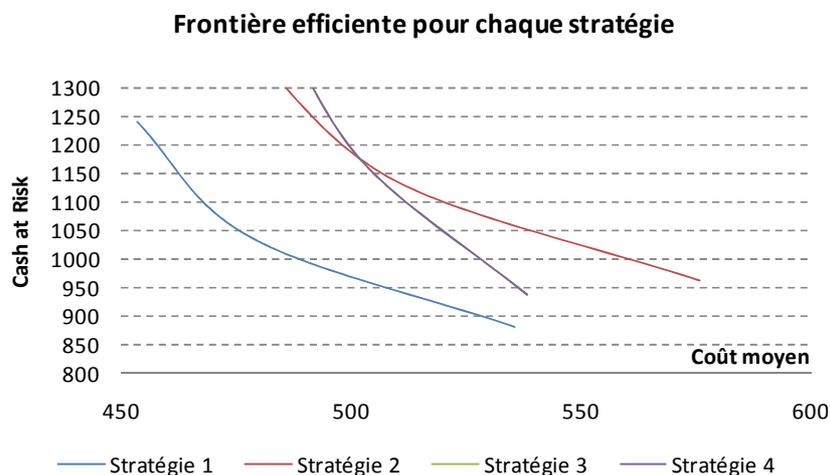
$$\bar{u}_t = \sup\{u_t | \mathbb{P}(f_t < u_t) < 5\%\}$$

On voit que la situation correspondant à un niveau de financement potentiellement faible (avec 60% d'actions) correspond aussi à un niveau de contributions potentiellement très élevé. De plus, en considérant le niveau de financement comme mesure de risque pour différentes stratégies, la stratégie 1 reste la meilleure.



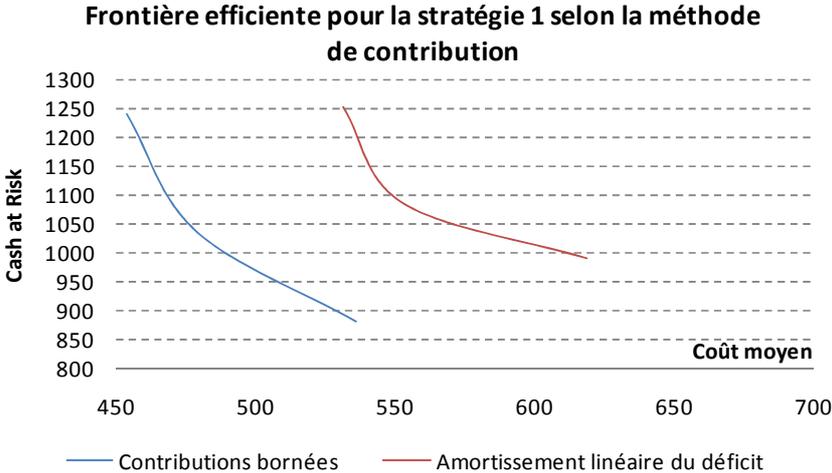
### 2.1.2. En passant à un amortissement borné, on diminue à la fois le coût moyen et la variabilité du coût

On considère maintenant un amortissement borné du déficit. On choisira comme contribution minimale 15 et comme contribution maximale 30. Les frontières efficaces sont à présent données dans le graphique ci-dessous.

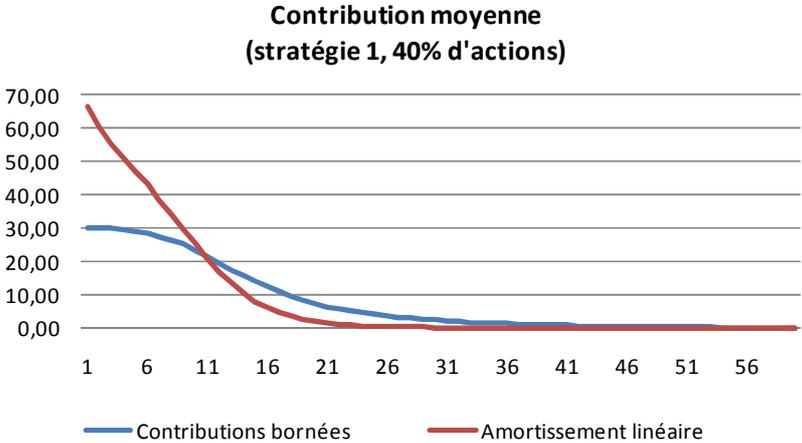


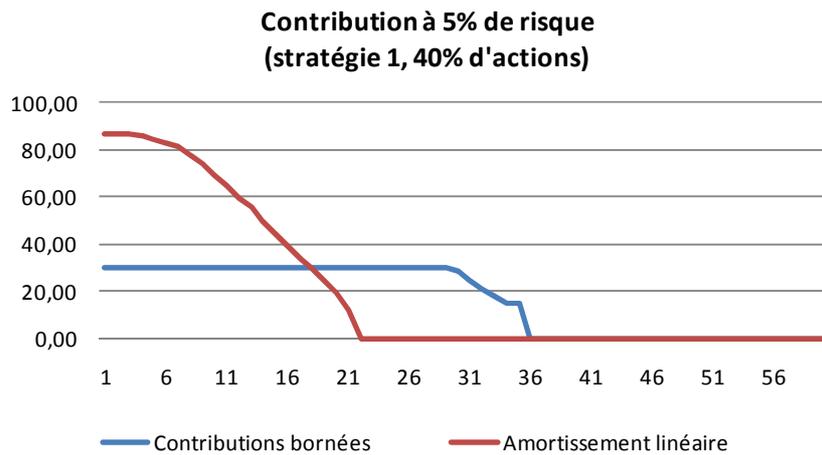
La stratégie optimale reste la stratégie 1. On constate en revanche qu'en dehors de la stratégie 1, on ne peut pas ordonner les stratégies quelle que soit l'allocation d'actifs initiale. Les portefeuilles optimaux sont les mêmes pour toutes les stratégies et ils ne contiennent aucun actif de couverture. Ils correspondent au couples (pourcentage d'actions ; pourcentage d'actifs de quasi-couverture) suivants : (20%, 80%), (40%, 60%) et (60%, 40%).

Ce régime de contributions est préférable au précédent du point de vue de l'entreprise quel que soit le critère observé : coût moyen, coût extrême potentiel et variabilité du coût. En fait, les contributions bornées permettent de diminuer le coût moyen sans augmenter le coût extrême potentiel (et même en le réduisant légèrement). Nous pouvons appuyer graphiquement les deux premières affirmations sur le déplacement de la frontière efficiente que le changement de mode de contributions implique :

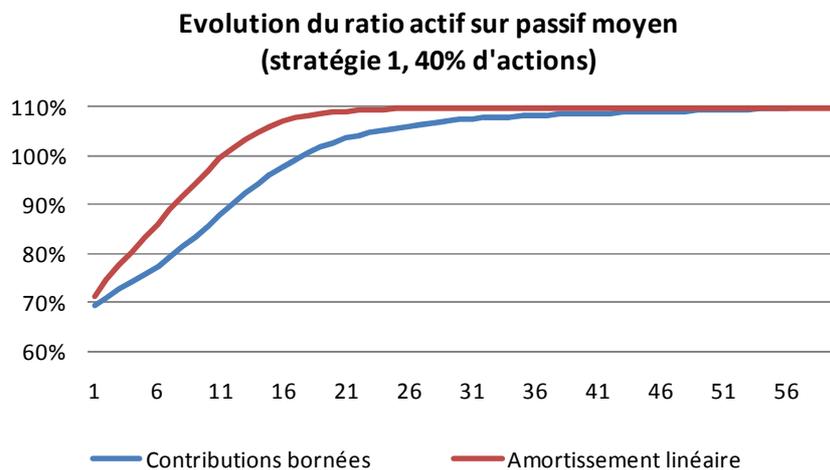


De plus, le niveau des contributions est par construction beaucoup moins fluctuant qu'avec l'amortissement linéaire.

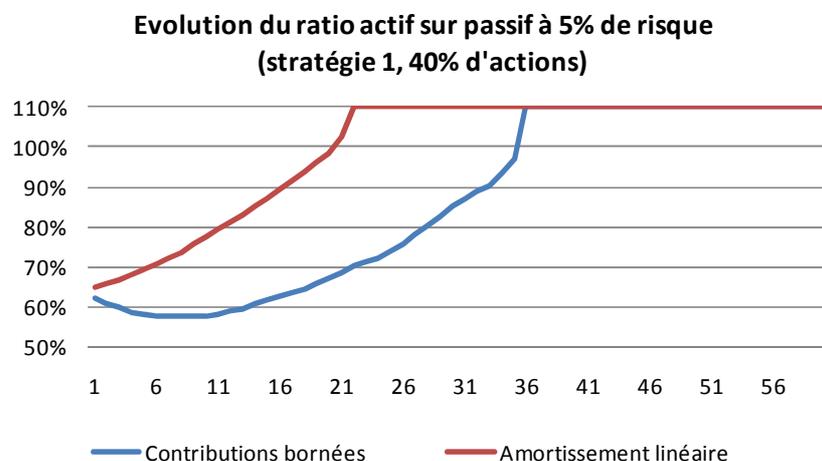




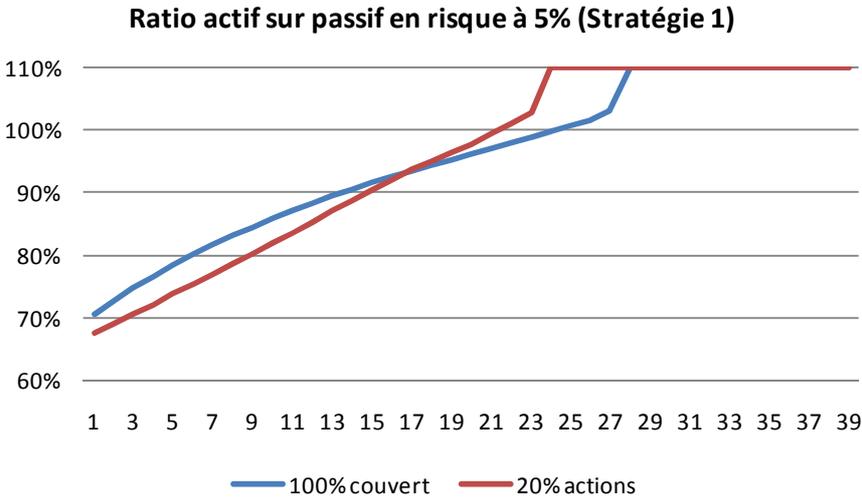
Cependant, on paye ces avantages en termes de contributions par un risque accru sur le niveau de financement. En effet, avec ce régime de cotisations, le temps d'arrivée au niveau de 110% de financement est bien plus long qu'avec un amortissement linéaire du déficit.



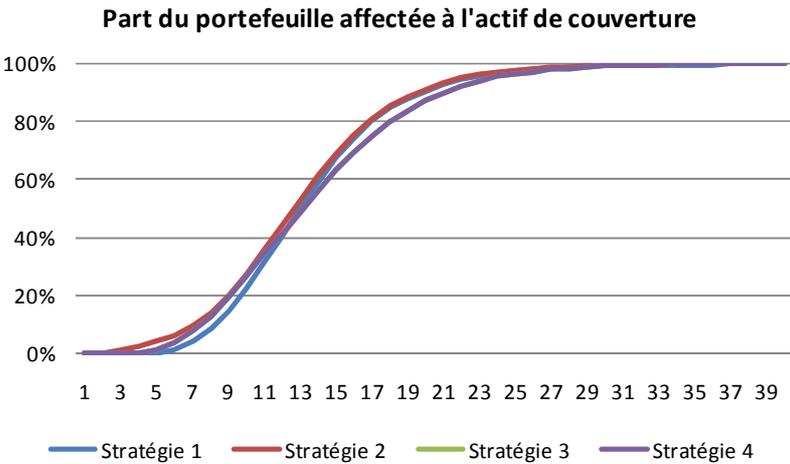
De plus, les contributions au début des simulations ne suffisent pas à améliorer le niveau de financement dans le cas de marchés défavorables, comme le montre le graphique ci-dessous



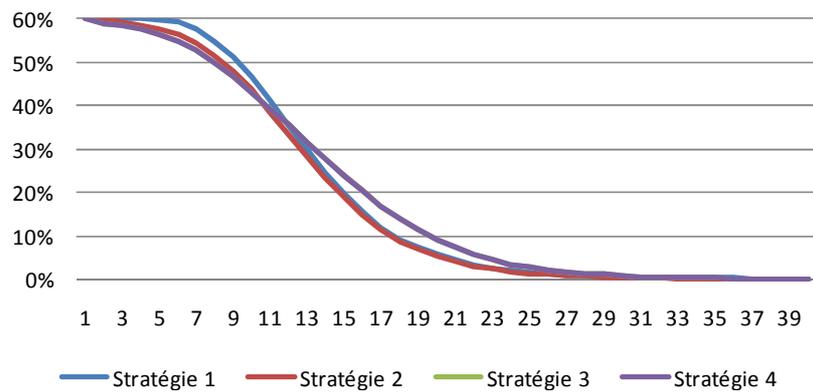
Lorsqu'on compare l'évolution du niveau de financement d'un portefeuille complètement couvert et d'un portefeuille ayant 20% d'actions et 80% d'actifs de quasi-couverture, on constate que les différences en termes de risques ne sont pas forcément très importantes pour investisseur ayant une certaine tolérance au risque.



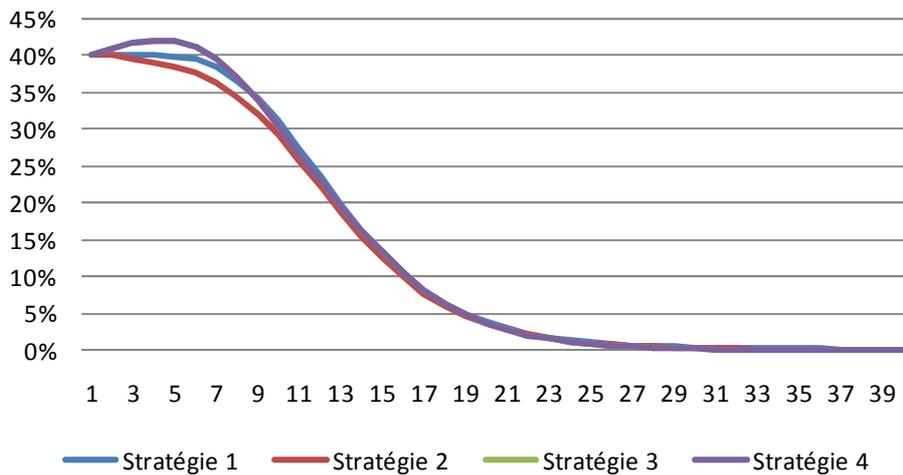
Dans les graphiques qui suivent, on présente pour chaque année simulée les poids moyens affectés à chacune des classes d'actifs pour chaque stratégie pour une allocation d'actif initiale comprenant 40% d'actions et 60% d'actifs de quasi-couverture.



**Part du portefeuille affectée à l'actifs de quasi-couverture**



**Part du portefeuille affectée aux actions**



On peut donc faire trois remarques :

- Dans le cas de la stratégie 1, l'augmentation du poids de l'actif de couverture reflète uniquement le fait que la valeur de certains portefeuilles d'actifs a dépassé 110% de celle du passif
- La stratégie 1 permet de garder une exposition constante aux actions jusqu'à la couverture du passif
- En moyenne, la stratégie 1 garde plus longtemps son exposition au portefeuille de quasi-couverture que les autres stratégies.

### 2.1.3. Conclusions sur la stratégie optimale à adopter

On peut donc tirer trois conclusions importantes des résultats ci-dessus :

- **La stratégie 1 est plus performante que les autres,**
- **Borner les contributions est préférable du point de vue de l'employeur,**
- **Couvrir le passif au début des simulations est sous-optimal.**

La première conclusion s'explique sans doute par le fait que la stratégie à poids fixes est préférable lorsque les marchés sont volatiles mais gardent une tendance de fond, ce qui est le cas lorsque les rendements simulés sont gaussiens. Elle ne résiste donc peut-être pas à des modèles de diffusion différents pour les actions.

La deuxième conclusion est due en partie à la diminution des contributions au début des simulations et à leur meilleure répartition sur la durée de vie du fonds. Elle évite aussi des contributions extrêmes puisqu'en général cette stratégie ne déclenche pas de contributions exceptionnelles malgré la baisse de niveau de financement du fonds au début des simulations.

La troisième conclusion est sans doute la plus importante. Elle montre que dans certaines conditions de marchés, couvrir le risque immédiatement se fait à un coût irrécupérable et provoque donc une diminution importante de la satisfaction de l'employeur.

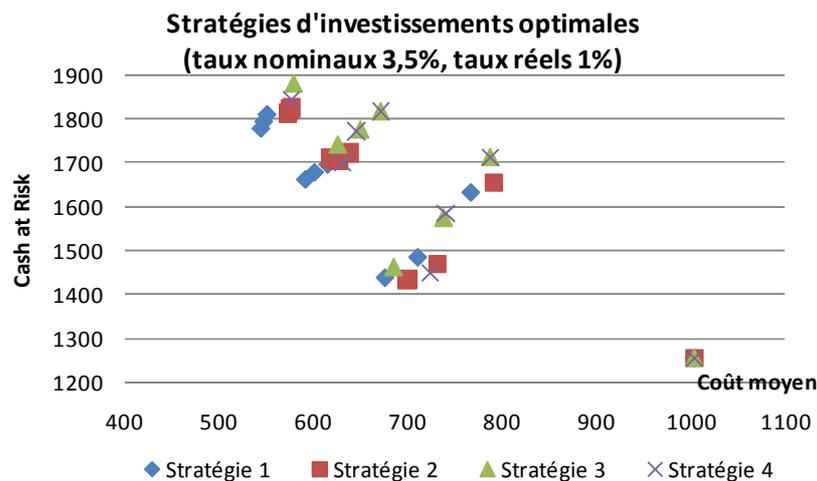
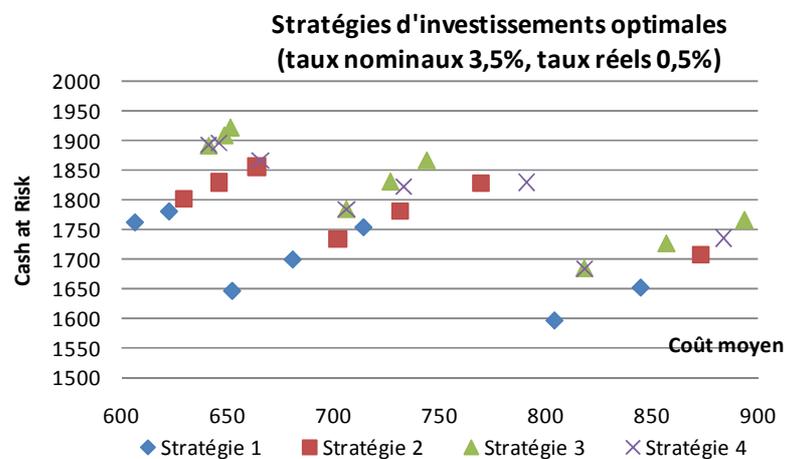
## 2.2. Analyse de sensibilité dans le cas de contributions bornées

Dans cette partie, on donne les résultats de simulations utilisant des hypothèses alternatives pour les paramètres des variables simulées. On utilisera uniquement l'hypothèse d'un amortissement borné pour les contributions

## 2.2.1. Variations de courbes des taux

### Un scénario fictif de courbe des taux plate

On s'intéresse dans cette partie à deux cas théoriques de courbes des taux nominaux et réels initiales plates. On considère dans les deux cas que les taux nominaux sont à 3,5%. Dans le premier scénario, les taux réels sont à 0,5% et dans le second à 1%. On obtient les graphiques suivants de coût moyen et en risque pour les deux scénarios

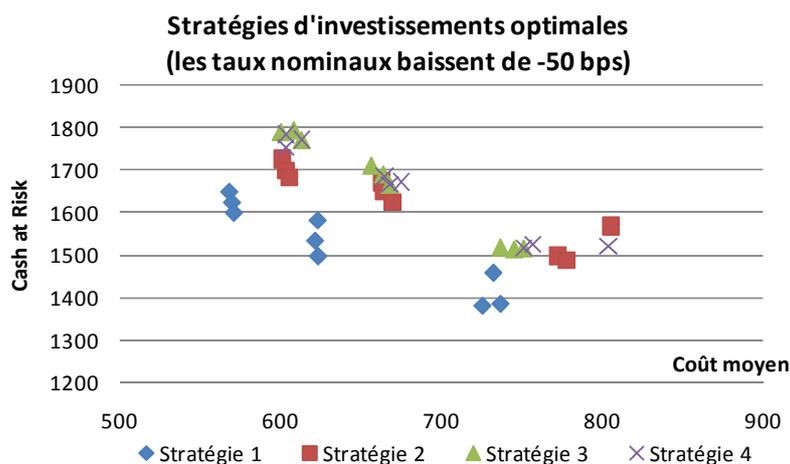


Si la stratégie 1 continue de dominer les autres stratégies, les portefeuilles optimaux changent radicalement. Dans le premier scénario, les portefeuilles optimaux sont les mêmes que dans le scénario central. Cependant, lorsque les taux d'intérêts réels montent à 1%, aucun des portefeuilles

optimaux ne contient d'actifs de quasi-couverture. Ceci confirme le fait qu'on ne peut couvrir le risque efficacement d'une façon unique quelles que soient les conditions de marché.

#### Un scénario réaliste de chute des taux nominaux de 50 points de base

Dans ce scénario, on remarque d'abord que la stratégie 1 se détache plus nettement encore que dans le scénario central.



La composition des portefeuilles optimaux est la suivante :

- 40% d'actifs de couverture, 40% d'actifs de quasi-couverture, 20% d'actions
- 30% d'actifs de couverture, 30% d'actifs de quasi-couverture, 40% d'actions
- 40% d'actifs de couverture, 60% d'actions.

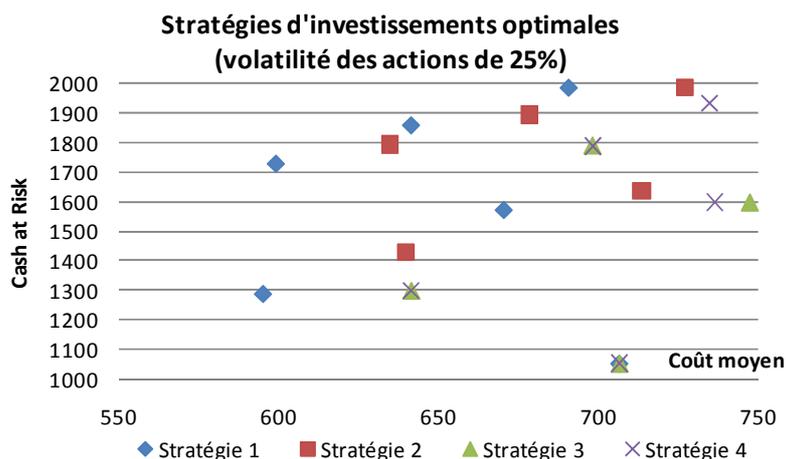
A ce niveau de taux, il devient intéressant d'introduire l'actif de couverture en portefeuille.

### **2.2.2. Un scénario de forte volatilité des marchés actions**

Dans ce scénario, on utilise une volatilité de la prime de risque des actions égale à 25% et non à 14,6%. Dans ce scénario, les deux seules stratégies optimales sont

- Investir la totalité des actifs dans le portefeuille de quasi-couverture
- Investir 80% des actifs dans le portefeuille de quasi-couverture et 20% en actions en utilisant la stratégie 1.

Les couples (coût moyen ; coût potentiel à 5% de risque) sont donnés dans le graphique suivant :



### 2.2.3. Deux autres scénarios alternatifs

#### Un scénario de décorrélation des aléas

On utilise pour ce scénario la matrice de corrélation modifiée comme suit

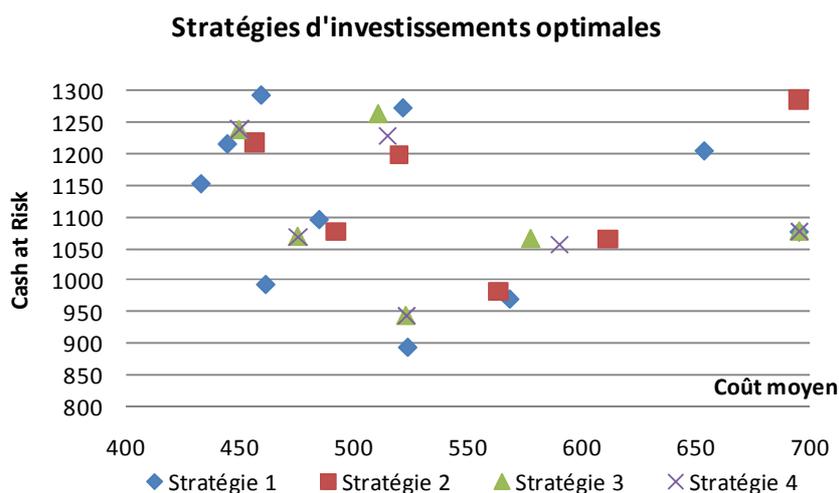
Matrice de corrélation retenue du scénario central

	Tendance d'inflation	Indice d'inflation	Taux réels	Taux nominaux	Actions
Tendance d'inflation	1,00				
Indice d'inflation	0,00	1,00			
Taux réels	0,00	0,10	1,00		
Taux nominaux	0,50	0,30	0,80	1,00	
Actions	0,20	0,05	-0,15	0,20	1,00

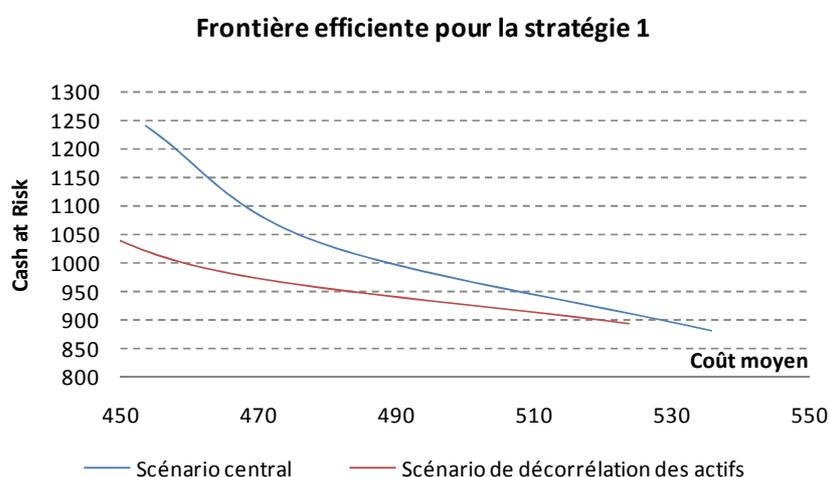
Matrice de corrélation du scénario alternatif

	Tendance d'inflation	Indice d'inflation	Taux réels	Taux nominaux	Actions
Tendance d'inflation	1,00				
Indice d'inflation	0,00	1,00			
Taux réels	0,00	0,10	1,00		
Taux nominaux	0,35	0,25	0,65	1,00	
Actions	0,20	0,00	0,00	0,00	1,00

Là encore, c'est la stratégie 1 qui est optimale pour l'employeur. Le scénario de décorrélation amène aux couples (coût moyen, coût potentiel à 5%) suivants.



Ce scénario ne change pas la composition des portefeuilles optimaux et déplace même la frontière efficiente à un niveau plus favorable au sponsor.



### Un scénario alternatif d'inflation

Les résultats du scénario central sont assez robustes à de faibles variations de la tendance de long terme de l'inflation. Cependant, comme on peut s'y attendre, le coût varie énormément pour de fortes variations de l'inflation de long terme. On génère ici un scénario où les paramètres sont donnés par

- Inflation de long terme de 4,5% au lieu de 2,81%,
- Volatilité de la tendance d'inflation de 0,90% au lieu de 0,56%,
- Volatilité de l'indice d'inflation de 2,07% au lieu de 1,29%.

Avec de tels paramètres, les portefeuilles optimaux ne contiennent plus d'actifs de quasi-couverture, mais uniquement des actifs de réplcation du passif.

### 3. Conclusions sur les simulations

Outre le constat que la première stratégie est préférable, on peut tirer trois conclusions principales des simulations faites précédemment.

#### Une allocation d'actif optimale inclut systématiquement une poche d'actions

Les actions permettent de fortement réduire le coût de financement des pensions à faible coût sur le long terme. Ce qui a été représenté ici par des actions est en fait un portefeuille d'actifs risqués relativement décorrélié des actifs de couverture. Les simulations ci-dessus suggèrent que 20% à 40% d'actions offrent un rendement suffisant sans faire peser un aléa trop fort sur le niveau de financement du plan.

#### Le choix du timing pour la mise en place d'une couverture du passif est fondamental

L'intérêt de couvrir le passif va dépendre du niveau des taux et de leur évolution. Il peut être sous-optimal de couvrir son passif à un moment où les taux sont bas, même d'un strict point de vue de couverture des risques.

#### Limiter les contributions améliore grandement la satisfaction de l'entreprise au prix d'une volatilité plus importante du niveau de financement

On a pu voir que les contributions bornées étaient préférables pour l'employeur car elles permettent :

- De limiter le montant des contributions à un certain seuil,
- De limiter de ce fait la variabilité des contributions,
- De mieux les répartir dans le temps et d'éviter un décaissement massif.

## BIBLIOGRAPHIE

---

Ahlgrim, D'Arcy, Gorvett, *Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society Casualty Actuarial Society - Arlington, Virginia, 2005, XCII, 177-238

Anderson, Sleath, *New estimates of the UK real and nominal yield curves*, Bank of England, Working paper 126

Antolin, *Longevity Risk and Private Pensions*, OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions, No. 3, 1997, OECD Publishing

BIS, *Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation*, BIS Papers 25, Bank for International Settlements, 2005

Barbosa, *Risk Sharing: information for employers considering making changes to Defined Benefit pension schemes*, DWP paper, 2010

Belgrade, Benhamou, Koehler, *A Market model for inflation*, CDC Ixis Capital Markets, disponible en ligne à l'adresse [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=576081](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=576081)

Blake, Cairns, Dowd, *Living With mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities*, Presented to the Faculty of Actuaries, 16 January 2006, disponible en ligne à l'adresse <https://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/pdf/63613baj121153-2282006blake.pdf>

Black, Perold, *Theory of constant proportion portfolio insurance*, Journal of Economic Dynamics and Control 16, 403-426, 1992

Boulier, Florens, Trussand, *A dynamic model for pension funds management*, Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium I, 361-384 (1995)

Boulier, Michel, Wisnia, *Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund*, Proceedings of the 6th AFIR International Colloquium I, 593-607 (1996)

Brace, Gatarek, Musiela, *The Market Model of interest rates dynamics*, Mathematical Finance, Vol. 7, No 2, 127-147 (1997)

Brigo, Mercurio, *Interest rates models – Theory and Practice, With Smile, inflation and credit*, Springer Finance, 2<sup>nd</sup> edition, 2006

Brody, Crosby, Li, *Convexity Adjustment in Inflation-Linked derivatives*, disponible en ligne à l'adresse [http://www.john-crosby.co.uk/pdfs/Brody\\_Crosby\\_Li\\_Risk\\_200809\\_inflation.pdf](http://www.john-crosby.co.uk/pdfs/Brody_Crosby_Li_Risk_200809_inflation.pdf)

Cairns, *Pension Funding in a stochastic environment: the role of objectives in selecting an asset allocation strategy*,

Cairns, *Some Notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time*, ASTIN BULLETIN, Vol. 30, No. 1, 2000, pp. 19-55

CMI, *Projecting future mortality: A discussion paper*, Working paper 3, 2004

CMI, *Responses to Working Paper 3 entitled Projecting future mortality: A discussion paper and further commentary thereon*, Working paper 11, 2005

CMI, *Projecting future mortality: Towards a proposal for a stochastic methodology*, Working paper 15, 2005

Cox, Ingersoll, Ross, *Duration and the Measurement of Basis Risk*, Journal of Business 52(1), 51–61 (1979)

Duffie, Khan, *A Yield-factor model of interest rates*, Mathematical Finance, Vol. 6. No. 4 (1996), 379-406

Durrant-Whyte, *Introduction to Estimation and the Kalman Filter*, Textbook of the University of Sydney, v2.2

Exley, Mehta, Smith, *The Financial theory of defined benefits pension schemes*, B.A.J., 3, IV, 835-966 (1997)

Franzen, *Managing Investment Risk in Defined Benefit Pension Funds*, OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions, No. 38, OECD Publishing

Hardy, *A Regime-switching model of long-term stock returns*, North American Actuarial Journal Society of Actuaries - Schaumburg, Illinois, 2001: 5:2, 41-53

Heath, Jarrow, Morton, *Bond Pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation*, *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, Jan. 1992

Hull, White, *Using Hull-White interest rates trees*, *The Journal of Derivatives*, 1996

Huang, Cairns, *Valuation and Hedging of LPI liabilities*, working paper

Jarrow, Yildirim, *Pricing Treasury Inflation Protected Securities and related derivatives using an HJM model*, *Journal of financial and quantitative analysis*, Vol. 38, No. 2, June 2003

Kemp, *Asset/liability modelling for pension funds*, Presented to the Staple Inn Actuarial Society, 1996

Lee, Carter, *Modeling and forecasting the time series of U.S. mortality*, *Journal of the American Statistical Association* 87, 659-671 (1992)

Lemoine, Pilgrin, *Introduction aux modèles espace-état et au filtre de Kalman*, *Revue de l'OFCE* 3/2003 (no 86), p. 203-229

Litterman, Scheinkman, *Common Factors affecting Bond returns*, *Journal of Fixed Income*, 1991

Martinelli, *Managing Pension assets: From surplus optimization to Liability-Driven Investment*, Working paper, 2006

Merton, *Lifetime Portfolio Selection under uncertainty: The continuous time case*, The Review of Economics and Statistics, Vol. 51, No. 3 (1969), 247-257

Munk, *Stochastic Duration and fast coupon bond option pricing in multi-factor models*, Review of Derivatives Research, 3, 157–181 (1999)

Nelson, Siegel, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, Journal of Business, 60(4), 473–489, 1987

Office For National Statistics, *Consumer Prices Index – A brief Guide*, 2010, disponible en ligne à l'adresse [http://www.statistics.gov.uk/downloads/theme\\_economy/CPI-briefguide.pdf](http://www.statistics.gov.uk/downloads/theme_economy/CPI-briefguide.pdf)

Pugh, Yermo, *Funding Regulations and Risk Sharing*, OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions, No. 17, OECD Publishing

Reschreiter, *Lower borrowing costs with inflation-indexed bonds: A trading rule based assessment*, Economics Letters, Vol. 99, Issue 2, May 2008, Pages 272-274

Samuelson, *Lifetime Portfolio selection by dynamic stochastic programming*, Review of Economics and Statistics, 1969, 239-246

Svensson, *Estimating and Interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994*, IMF Working Paper 94/114, 1994

Vasicek, *An Equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5 (1977) 177-188

Waggoner, *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 97-10, 1997

Wilkie, *A Stochastic model for actuarial use*, Transactions of the Faculty of actuaries 39, 341-403

Wilkie, *More On a stochastic asset model for actuarial use*, British Actuarial Journal, Volume 1, Number 5, 1995 , pp. 777-964(188)

Wu, *Pricing Inflation Derivatives*, Zicklin School of Business, Baruch College, 2008