

Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du **Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg**
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le 25 septembre 2018

Par : Adrien CARTAN

Titre: Immunisation du passif d'une succursale de réassurance vie et allocation d'actifs

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Signature :

Membres du jury de l'Unistra :

Entreprise : Hannover Re

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Thomas BOUDINAUD

Signature :

Invité :

P. ARTZNER
J. BERARD
F. BERTRAND
A. COUSIN
K.-T. EISELE
J. FRANCHI
M. MAUMY-BERTRAND
V. VIGON

Jury de l'Institut des
Actuaire :

M. KELLE-VIGON
C. OUARRAK

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Résumé

Mots clés :

Immunisation, allocation d'actifs, réassurance vie, succursale, risque de taux d'intérêt, risque de change, Key Rate Durations, Markowitz, portfolio resampling.

Les compagnies de réassurance sont confrontées à de nombreux risques, parmi lesquels le risque de taux d'intérêt, provenant de l'actualisation du passif et des investissements massivement obligataires, et le risque de change, conséquence directe de la souscription des traités de réassurances dans de nombreux pays. Ce mémoire traite de l'immunisation du passif d'une succursale de réassurance vie face à ces risques, le but final étant de déterminer une allocation d'actifs optimale.

Nous commençons par décrire les spécificités du bilan d'une succursale, avant d'expliquer comment les cash-flows sont modélisés selon trois monnaies (Euro, Dollar américain et Dollar canadien). Nous pouvons ensuite calculer les indicateurs du risque de taux comme la sensibilité, mais nous préférons travailler avec la méthode des *Key Rate Durations* consistant à étudier des sensibilités à certaines maturités clés de la courbe des taux. Cette analyse est essentielle pour constituer les portefeuilles de couverture entièrement obligataires, qui doivent immuniser la valeur actuelle des cash-flows. Par ailleurs, ceci est effectué pour chacune des trois monnaies de modélisation de façon à respecter le principe de congruence des monnaies.

Pour déterminer les allocations des portefeuilles de rendement, dont le but est d'apporter de la performance, nous utilisons la méthode de sélection de portefeuille de Markowitz, qui minimise la variance du rendement pour un rendement cible, en intégrant les contraintes d'investissement. La résolution est possible numériquement mais est entièrement basée sur des estimations d'espérances de rendement et de covariances d'indices financiers représentatifs des marchés : nous appliquons une méthode dite de « rééchantillonnage » de la frontière efficiente en simulant des rendements pour obtenir des allocations plus diversifiées.

Abstract

Keywords :

Immunization, asset allocation, life reinsurance, branch, interest rate risk, currency risk, Key Rate Durations, Markowitz, portfolio resampling.

Reinsurance companies face many risks, among them the interest rate risk, arising out of liabilities discounting and investments mainly on the fixed-income market, and the currency risk, direct consequence of the underwriting of reinsurance treaties in many countries. This report discusses reinsurance liabilities immunization towards those risks, determining the optimal asset allocation being the the ultimate goal.

We begin by describing the special features of a branch balance sheet, before explaining how cash-flows are modelled under three main currencies (Euro, US Dollar and Canadian Dollar). We then calculate interest rate risk indicators such as modified duration, but we prefer working with the "Key Rate Durations" method where we study sensitivities to certain key maturities of the interest rate curve. This analysis is essential in order to build fully fixed-income hedging portfolios, whose goal are to immunize the present value of cash-flows. To respect the currency matching principle, we construct a portfolio for each modelled currency.

To determine the allocations of performance portfolios, which aim at providing performance, we apply the Markowitz portfolio selection, minimizing the variance of return for a given target return, while respecting investment constraints. The resolution is computed numerically but rely entirely on mean and covariance estimates of financial indices which represent the market : we use a "resampling" method by simulating returns allowing us to determine more diversified allocations.

Remerciements

Un grand merci à Thomas Boudinaud qui m'a encadré pendant plus d'un an, d'abord en tant que stagiaire puis alternant, et qui a su me guider dans les différentes phases de ce mémoire grâce à ses précieux conseils et au temps qu'il a pu m'accorder.

Je remercie également Emmanuel Gomez pour son enthousiasme et pour m'avoir permis de traiter un tel sujet, en me faisant prendre conscience des multiples enjeux et problématiques de la Direction Financière d'une succursale d'un groupe international.

De façon générale, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, aussi bien à Paris qu'à Home Office, dans l'accomplissement de ce travail.

Finalement, j'adresse ma gratitude à toute l'équipe enseignante du DUAS, pour ces trois années passées à leur côté, et à Areski Cousin pour m'avoir suivi dans la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Abréviations et notations	vii
Introduction générale	1
I Contexte et problématique de l'étude	3
1 Rappels de réassurance et de comptabilité	4
1.1 L'activité de réassurance	4
1.1.1 Réassurance proportionnelle	5
1.1.2 Réassurance non proportionnelle	6
1.1.3 Caractéristiques de la réassurance L&H	7
1.2 Comptabilité pour l'assurance	8
1.3 Comptabilisation des opérations de réassurance	10
1.4 Les normes IFRS	11
2 Une succursale de réassurance L&H	13
2.1 La structure de succursale	13
2.1.1 Une problématique de prix de transfert	15
2.2 Périmètre d'étude	15
3 Évaluation du passif et enjeux de la gestion d'actifs	17
3.1 Évaluation du passif technique de réassurance	17
3.1.1 Classification des traités	17
3.1.2 Hypothèses et model-points	20
3.1.3 Projection des cash-flows	21
3.1.4 Limites d'un tel modèle pour une problématique d'allocation d'actifs . . .	25
3.2 L'actif et les risques de taux et de change	28
3.3 Démarche	30

II	Immunisation de portefeuille	33
4	Cash-flow matching	34
4.1	Exemple	34
4.2	Limites	36
5	Immunisation par la duration	37
5.1	Définition des notions de base	37
5.1.1	Sensibilité	37
5.1.2	Duration	38
5.1.3	Convexité	39
5.1.4	Duration effective	40
5.2	Immunisation	40
5.3	La méthode des Key Rate Durations	42
5.3.1	Exemple	45
5.3.2	Limites	48
5.4	Sensibilité avec la courbe des taux	49
5.5	Utiliser des produits dérivés : le swap de taux d'intérêt	49
5.5.1	Définition	50
5.5.2	Duration d'un swap et utilisation en pratique	52
5.5.3	Limites	53
III	Modèles d'allocation d'actifs	54
6	Analyse rendement-risque de Markowitz	55
6.1	Formulation du problème	55
6.2	Inclusion d'un actif sans risque	57
6.3	Optimisation sous contrainte	58
6.4	Limites de l'approche	62
7	Modèle de Sharpe et Tint : intégrer le passif	64
7.1	Formulation du problème	64
7.2	Exemple	67
7.3	Limites	68
IV	Application à la succursale	69
8	Portefeuilles de couverture	71
8.1	Portefeuille en EUR	71
8.2	Portefeuille en USD	74
8.3	Portefeuille en CAD	76

8.4 Conclusion partielle	78
9 Portefeuilles de rendement	80
9.1 Détermination des classes d'actifs et des contraintes	80
9.1.1 Rappels sur les rendements	80
9.1.2 Estimation des rendements et covariances	82
9.1.3 Contraintes d'investissement	83
9.2 Portefeuille EUR	84
9.2.1 Rééchantillonnage de la frontière	86
9.3 Portefeuille USD	88
9.4 Portefeuille CAD	91
9.5 Conclusion partielle	93
Conclusion générale	95
 Annexes	 97
A Provision additionnelle	98
B Démonstration des optimisations de portefeuille	99
C Taux de change MENA à parité fixes avec l'USD	102
D Courbes de taux utilisées	102
E Echelle de notation financière des agences de notation	103
F Démonstrations liées aux rendements	104
Table des figures	108
Bibliographie	110

Abréviations et notations

Abréviations

CAD	<i>Canadian dollar</i>
CIMA	Conférence interafricaine des marchés de l'assurance
DAC	<i>Deferred Acquisition Cost</i>
EUR	Euro
GAAP	<i>Generally Accepted Accounting Principle</i>
HGB	<i>Handelsgesetzbuch</i> , German GAAP
HTM	<i>Held to maturity</i>
IF	<i>In-force</i>
IFRS	<i>International Financial Reporting Standards</i>
KRD	<i>Key Rate Durations</i>
L&H	<i>Life & Health</i>
MENA	<i>Middle East and North Africa</i>
NB	<i>New Business</i>
OCI	<i>Other Comprehensive Income</i>
P&C	<i>Property & Casualty</i>
PFC	Portefeuille de couverture
PFR	Portefeuille de rendement
PT	Provisions techniques
USD	<i>United States dollar</i>

Notations

- $\mathbf{A}^T$ est la transposée de la matrice $\mathbf{A}$
- $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité de taille n
- $\mathbf{e}_n$ est le vecteur colonne unité de taille n
- $\mathbf{0}_n$ est le vecteur nul de taille n

Introduction générale

Une compagnie de réassurance, en tant qu'organisme assureur, est confrontée à de nombreux risques : actuariels d'une part, en conséquence de l'aléa portant sur les sinistres à prendre en charge, et financiers d'autre part, à cause de l'inversion du cycle de production qui implique une bonne gestion financière des actifs représentant les provisions techniques. Cette gestion doit répondre à plusieurs objectifs, notamment générer de la performance financière et respecter les engagements de réassurance.

Cela est d'autant plus nécessaire lorsque nous considérons des engagements de réassurance vie pouvant s'étaler sur des décennies, et libellés dans un grand nombre de monnaies. C'est là une des caractéristiques de la réassurance : la grande diversité des affaires souscrites et des risques couverts, parfois sur plusieurs continents, peut potentiellement entraîner une exposition à des risques importants. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement aux risques de taux d'intérêt et de change. Le premier est la conséquence des variations de taux d'intérêt qui impactent aussi bien les provisions techniques du bilan, que les actifs majoritairement obligataires. Le second se matérialise par les réévaluations des postes du bilan en devises étrangères, impactant cette fois le compte de résultat.

L'allocation d'actifs optimale doit alors permettre de se protéger contre ces deux risques, tout en respectant les contraintes d'investissement, les objectifs de rendement financier et en maintenant un niveau de risque tolérable : **quelle allocation d'actifs proposer alors pour immuniser un passif de réassurance vie face au risque de taux et de change ?** Nous répondrons à cette question en nous basant sur le portefeuille d'une **succursale** et en appliquant des techniques permettant de mesurer le risque de taux d'intérêt, ainsi que des modèles classiques d'allocation d'actifs. L'idée globale de la démarche retenue est la suivante :

1. Projeter les cash-flows de passifs en les regroupant en trois monnaies dites de modélisation (Euro, Dollar US et Dollar canadien).
2. Construire un portefeuille de couverture des engagements, et un portefeuille de rendement représentant la marge future et les fonds propres.
3. Déterminer l'allocation optimale de ces portefeuilles.

Dans une première partie, nous rappellerons quelques bases de comptabilité et de réassurance en insistant plus particulièrement sur la façon dont sont comptabilisées les opérations de réassurances et sur le fonctionnement des dépôts de provisions. Nous montrerons ensuite les spécificités du bilan d'une succursale, notamment la problématique du *multi-GAAP* impliquant la construction d'états financiers dans plusieurs référentiels. Parmi eux, le *German GAAP* et l'IFRS car la succursale n'est pas une entité distincte du siège allemand et est confrontée aux mêmes exigences, et le *French GAAP* pour des raisons fiscales. Nous ciblerons ensuite l'étude sur le bilan IFRS avant de décrire le modèle de projection des cash-flows.

Puis, dans une seconde partie sera abordée la théorie de l'immunisation de portefeuille face

aux taux d'intérêt, par exemple, les méthodes d'adossement des flux (*cash-flow matching*), consistant à adosser parfaitement les flux de passifs aux flux d'actifs, et d'adossement par la duration. Considérant les hypothèses restrictives sur lesquelles elles reposent, nous présentons la méthode des *Key Rate Durations* où nous calculons les sensibilités du passif à certains taux clés de la courbe des taux.

En troisième lieu, nous aborderons le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, qui permet de déterminer une allocation optimale en minimisant la variance du portefeuille sous hypothèse d'un rendement cible donné, de façon à obtenir un portefeuille optimal au sens rendement-risque. Le modèle très similaire de Sharpe et Tint qui permet de prendre en compte la croissance du passif et qui consiste à étudier le rendement du surplus est aussi expliqué. Dans les deux cas, nous insisterons sur la mise en place de contraintes dans les optimisations.

Finalement, la dernière partie présente une application de la méthode des *Key Rate Durations* pour constituer les portefeuilles de couverture dans les trois monnaies de modélisation, et du modèle de Markowitz pour déterminer les allocations d'actifs optimales des portefeuilles de rendement. Nous proposerons une méthode de « rééchantillonnage » de la frontière efficiente pour obtenir des résultats plus diversifiés.

Première partie

Contexte et problématique de l'étude

Dans cette première partie, nous allons commencer par rappeler des éléments de réassurance et de comptabilité. Nous présenterons ensuite un peu plus en détail la structure de la succursale et son activité, puis nous soulèverons les enjeux d'une bonne gestion d'actifs.

Chapitre 1

Rappels de réassurance et de comptabilité

Ce mémoire étant rédigé chez un réassureur, présentons l'activité de réassurance. La section suivante montre les différents types de contrats de réassurance qui existent sur le marché et leurs principaux objectifs.

1.1 L'activité de réassurance

La réassurance peut se définir très simplement comme « l'assurance des assureurs ». Un contrat de réassurance induit les mêmes flux qu'un contrat d'assurance, mais les parties sont différentes : l'assuré devient une compagnie d'assurance (la cédante), l'assureur devient le réassureur. Plusieurs raisons peuvent motiver les organismes assureurs à recourir à la réassurance, mais la principale est la cession de risques afin de faire face à un trop grand nombre de sinistres ou à des sinistres d'intensité trop extrême et difficilement mutualisables au sein d'un assureur. De même, un réassureur peut à son tour se faire « réassurer », nous parlons alors de rétrocession.

La réassurance peut permettre à un assureur :

- de réduire ses besoins en fonds propres et d'améliorer sa solvabilité,
- d'accroître sa capacité pour accepter plus d'affaires (le réassureur peut également avoir un rôle de conseil),
- de lisser ses résultats dans le temps et d'améliorer sa stabilité.

L'activité de réassurance et plus généralement d'assurance est segmentée en deux parties bien distinctes. La partie L&H (*Life & Health*) regroupe les contrats de réassurance vie ou de personnes, tandis que la P&C (*Property & Casualty*) regroupe les opérations non-vie couvrant les dommages matériels, la responsabilité et autres risques individuels.

Les contrats de réassurance sont généralement classés en plusieurs catégories selon la forme du contrat établi entre la cédante et le réassureur, et la façon dont les risques sont cédés. Notons que ces différenciations n'ont rien de « légal » et que dans la pratique, une très grande liberté est accordée aux contrats de réassurance. Détaillons brièvement ces différentes formes.

Type de contrat : « traité » vs. « fac »

De façon générale, il y a deux façons de rédiger un contrat de réassurance. Lorsqu'un assureur souhaite céder l'ensemble des risques d'une de ses branches d'activité ou d'un de ses portefeuilles, il aura recours à la réassurance par traité ou réassurance obligatoire. Obligatoire car le réassureur aura l'obligation d'accepter tous les risques. Si l'assureur préfère céder des risques ou polices bien particulières, il aura recours à la réassurance dite facultative. Le réassureur ne sera alors engagé que sur les risques spécifiquement décrits et définis contractuellement avec la cédante.

Cette différenciation porte sur la nature du contrat. Il est également possible de distinguer deux types de réassurance en fonction de la méthode qui est employée pour calculer la part cédée de la part conservée par l'assureur.

1.1.1 Réassurance proportionnelle

Dans un contrat proportionnel, l'objectif principal est de transférer une partie du risque au réassureur. On parle de proportionnel car le réassureur et la cédante se partagent entièrement le compte de résultat technique : leurs sorts se retrouvent entièrement liés.

Quote-part Dans une quote-part (*quota-share* en anglais), la cédante et le réassureur se partagent toutes les primes et tous les sinistres selon une part définie. C'est la forme la plus simple de réassurance. La figure (1.1) présente la répartition de la sinistralité d'un traité en quote-part à 30 % entre le réassureur et l'assureur.

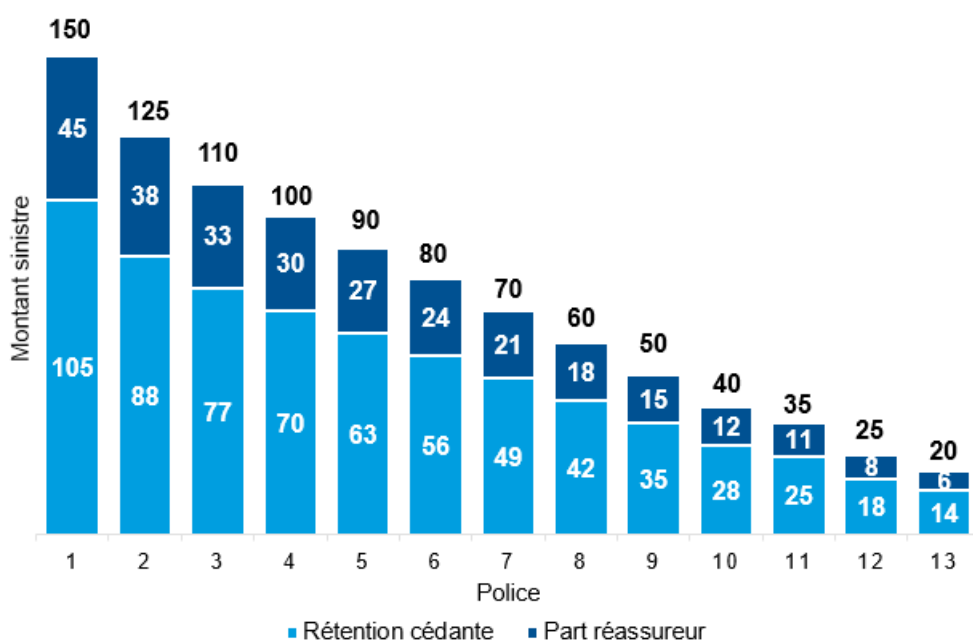


FIGURE 1.1 – Quote-part à 30 %

Excédent de plein L'excédent de plein (*surplus*) fonctionne de façon similaire, mais les primes et sinistres sont cédés selon un ratio dépendant du plein de rétention que la cédante conserve,

et de la part que le réassureur accepte de prendre à sa charge. La part du réassureur est un multiple du plein de la cédante (on parle de « lignes »). Par exemple, si le plein est de 40, que la capacité du réassureur est de 2 lignes ($2 \times 40 = 80$), alors sur un sinistre de 60, la cédante conservera $40/60 = 2/3$ des primes et sinistres et le réassureur en aura $1/3$ à sa charge. Le taux de cession est donc différent pour chaque sinistre. Un exemple est donné en figure (1.2), avec les mêmes sinistres qu'en figure (1.1).

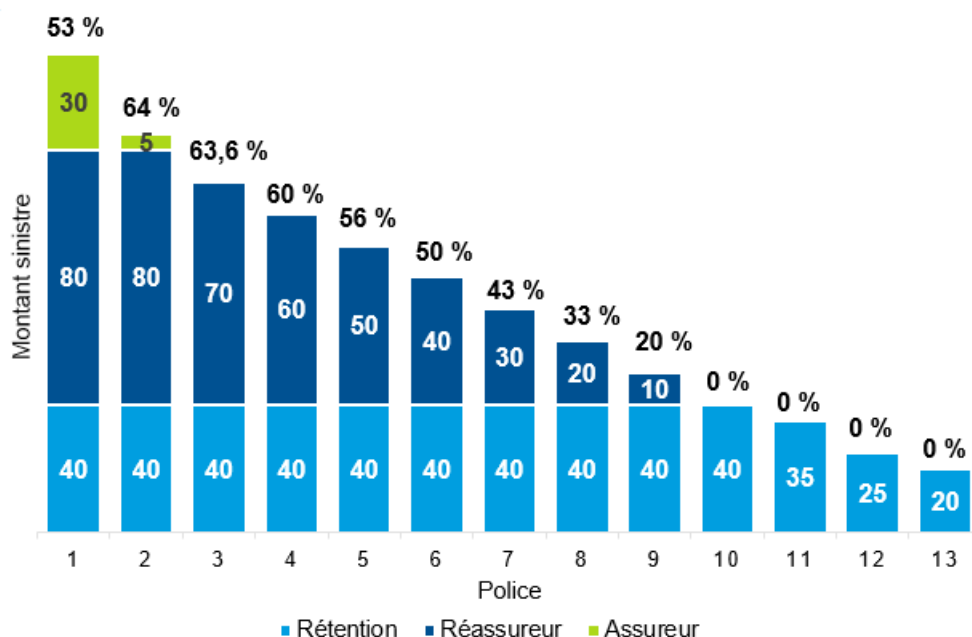


FIGURE 1.2 – Excédent de plein (rétention de 40, 2 lignes)

1.1.2 Réassurance non proportionnelle

Dans un contrat de réassurance non proportionnelle, l'objectif principal est de transférer les risques majeurs. Le réassureur détermine une prime en fonction de la manière dont les risques seront cédés. Ce sont les contrats en excédent de sinistre ou en Stop-Loss. Dans ces contrats sont toujours définis : une priorité (*deductible*), montant que la cédante garde à son compte ; et une portée (*limit*), montant maximum que le réassureur prend à sa charge.

Excédent de sinistre Dans un contrat en excédent de sinistre (*excess of loss*), pour chaque sinistre, le réassureur paie la partie du sinistre dépassant la priorité P jusqu'à la limite L (on parle de L xs P). Un exemple est donné en figure (1.3).

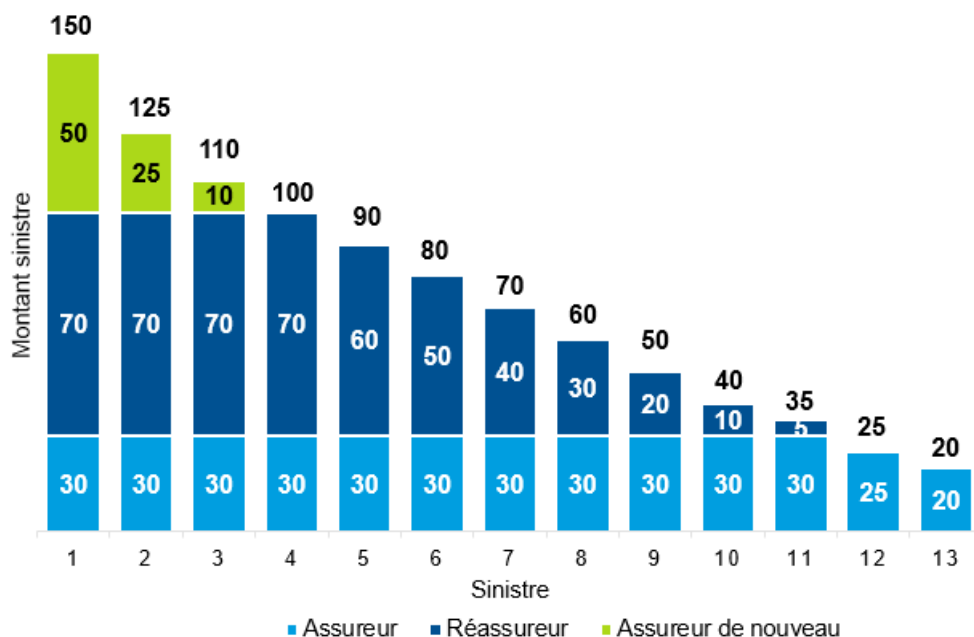


FIGURE 1.3 – Excédent de sinistres : 70 xs 30

Stop-Loss Dans un contrat en stop-loss, c'est la sinistralité globale de la cédante qui est considérée, et non pas les sinistres individuellement. Cela permet par exemple de se couvrir contre un grand nombre de petits sinistres, qui pris individuellement, pourraient ne pas dépasser la priorité d'un excédent de sinistre et rester entièrement à charge de la cédante. La priorité et la portée sont alors définies avec un ratio permettant de juger de la sinistralité sur une période donnée : le ratio sinistres/primes.

1.1.3 Caractéristiques de la réassurance L&H

Présentons un peu plus en détail la réassurance de personnes (*Life & Health*). Dans ces contrats, les risques cédés sont usuellement les suivantes :

- *Life* : risques de mortalité et longévité,
- *Health* : santé et frais de soins,
- *Disability* : compensation des pertes de revenus engendrées par des arrêts de travail,
- *Long Term Care* : dépendance,
- *Critical Illness* : maladies redoutées,
- *Unemployment* : perte d'emploi.

Il est possible qu'un contrat de réassurance porte sur plusieurs risques à la fois (réassurance de prévoyance collective comportant du décès, de l'arrêt de travail, des rentes éducation ...)

Contrairement à la réassurance non-vie, le chiffre d'affaires en réassurance L&H vient principalement de traités proportionnels. Nous pouvons alors distinguer deux « méthodes » de réassurance qui déterminent de quelle façon le risque est cédé :

Réassurance à la prime de risque

Nous parlons aussi de réassurance *on risk premium basis*. Les primes de réassurance payées par la cédante sont calculées en appliquant un taux de prime aux capitaux sous risques. Les primes ne sont donc absolument pas liées au contrat d'assurance sous-jacent qui lie les assurés à la cédante. Nous parlons de YRT – *Yearly Renewable Term*, car les taux de primes sont renégociés chaque année. Dans cette méthode de réassurance, l'assureur ne cède que le risque de mortalité ou de morbidité (le risque technique en soi), et conserve la responsabilité de constituer des provisions et le risque d'investissement qui en découle.

Réassurance à la prime commerciale

Aussi connue sous le nom de réassurance *on original terms*. Dans sa forme la plus simple, la coassurance (*Coinsurance*), la cédante transfère tout ou partie des risques au réassureur qui partage alors tous les aspects du portefeuille réassuré : les risques techniques et d'investissement sont partagés car le réassureur reçoit sa partie des provisions techniques et a la responsabilité de les investir comme il le souhaite.

Une autre méthode est la coassurance avec fonds déposés (CoFwH, *Coinsurance with Funds Withheld*). La différence avec la coassurance classique n'est visible que dans le bilan : la cédante « retient » tout ou partie des provisions techniques cédées. Autrement dit, une partie ou toutes les provisions du réassureur sont déposées dans le passif de la cédante. Elles continuent d'apparaître au passif du réassureur, mais l'actif les représentant est un « dépôt cédante » (ou encore dépôts cash, *funds withheld*) qui n'est pas inclus dans ses actifs sous gestion. Pour compenser l'absence de potentiels produits financiers, la cédante verse au réassureur des intérêts, fixes ou variables.

La CoFwH est très courante, plus particulièrement en Europe, car elle permet de garantir dès la signature du contrat les engagements futurs du réassureur : la cédante est ainsi couverte contre une éventuelle défaillance. Les « dépôts cédantes » représentent une classe d'actif particulière pour les réassureurs car ils ne connaissent pas les actifs dans lesquels ils seront investis.

Plus généralement, la notion se cachant derrière ce concept est celle de collatéralisation. En France, historiquement, les cédantes demandaient aux réassureurs de déposer leurs provisions ou bien de les nantir afin que les créances des réassureurs, à l'actif des cédantes, puissent servir à couvrir leurs engagements réglementés. Depuis la transposition en 2008 de la directive européenne sur la réassurance, ce n'est plus nécessaire, mais beaucoup de cédantes continuent à demander des dépôts ou des nantissements.

1.2 Comptabilité pour l'assurance

Afin de bien définir le cadre d'étude dans lequel nous allons nous placer par la suite, il est important de présenter rapidement les principes comptables qui s'appliquent aux organismes assureurs et donc aux réassureurs.

Comme toute entreprise, un organisme assureur doit tenir une comptabilité afin de recenser, mesurer et synthétiser les informations sur ses activités, ses moyens et ses résultats. La comptabilité a de multiples objectifs et constitue un élément d'information et de preuve entre l'entreprise et les différents intervenants extérieurs avec lesquels elle est liée, notamment :

- les actionnaires qui veulent un regard sur l'activité de l'entreprise, et les investisseurs qui doivent détenir l'information nécessaire avant de prendre une décision,
- les fournisseurs et créanciers, voulant s'assurer de la capacité de l'entreprise à honorer ses engagements futurs,
- l'administration fiscale, qui doit pouvoir contrôler les résultats de l'entreprise.

Dans le cas de secteurs d'activité réglementés tels que l'assurance, des interlocuteurs supplémentaires peuvent se rajouter à la liste précédente : les autorités et organismes régulant et contrôlant les entreprises.

La comptabilité doit être tenue en ayant en tête quelques principes très généraux. Nous en rappelons quelques uns issus du PCG français¹, car en tant que principes ils guident la comptabilité d'entreprise² :

- Image fidèle : la comptabilité doit « *présenter des états qui reflètent une image fidèle du patrimoine, de la situation financière et du résultat de l'entité à la date de clôture* » (article 121-1).
- Comparabilité et continuité d'activité : afin de pouvoir comparer périodiquement l'évolution de l'entité, la comptabilité doit être tenue dans une « *perspective de continuité d'activité* » (article 121-2).
- Régularité et sincérité : la comptabilité doit être appliquée selon les règles en vigueur et avec sincérité afin de traduire la réalité (article 121-3).
- Prudence : pour éviter le transfert d'incertitudes qui pourraient grever le résultat ou le patrimoine sur des périodes à venir, la comptabilité est établie « *sur la base d'appréciations prudentes* » (article 121-4).
- Permanence des méthodes : « *la cohérence des informations comptables au cours des périodes successives implique la permanence dans l'application des règles et procédures* » (article 121-5).

De façon générale, la comptabilité se matérialise par la création d'états financiers bien connus que sont le bilan et le compte de résultat :

- le bilan représente à la date de clôture l'ensemble du patrimoine de l'entreprise. Il reflète les dettes, les créances, et doit permettre de juger de la solvabilité et de la liquidité d'une entreprise. L'actif (ce que l'on détient) est généralement ordonné par liquidité croissante, le passif (ce que l'on doit) est classé par ordre d'exigibilité croissante.

1. Plan Comptable Général, version consolidée au 1er janvier 2017.

2. Par la suite, nous ne nous baserons pas sur les états financiers en norme française, ces principes sont donnés seulement à titre indicatif.

- le compte de résultat synthétise les opérations effectuées (les flux) au cours de l'exercice comptable et permet d'aboutir au résultat comptable. Pour les compagnies d'assurance, il est séparé en deux parties distinctes : le compte technique qui retranscrit les éléments issus directement de l'activité d'assurance (primes, sinistres, lui même composé d'une partie vie et d'une partie non-vie), le compte non-technique qui présente les éléments non liés à l'activité d'assurance (résultat financier, impôts...).

Les particularités des compagnies d'assurance

Une particularité propre aux compagnies d'assurance est l'inversion du cycle de production. Dans une entreprise classique, l'activité se situe à l'actif (stocks, créances clients) et les sources de financement se situent au passif (dettes fournisseurs et financières) car les coûts de production sont connus et déterminent le prix de vente du bien ou du service proposé par l'entreprise. Pour un assureur, le cycle de production est inversé car les coûts (sinistres) sont aléatoires et inconnus au moment de l'achat de l'assurance. L'activité se retrouve donc au passif et doit être estimée : des provisions techniques sont constituées. Ces provisions sont investies pour obtenir des produits financiers qui auront pour but de financer l'activité avec l'encaissement des primes.

Ayant des engagements envers des assurés, un organisme assureur doit être en mesure de pouvoir justifier d'une bonne solvabilité et de fonds propres suffisants. La garantie d'une bonne solvabilité passe par la directive Solvabilité II, qui pose des contraintes sur les besoins en fonds propres et impose des processus de mesure des risques internes.

Après avoir rappelé quelques bases dans ces deux premières sections, penchons-nous sur la comptabilisation des opérations de réassurance.

1.3 Comptabilisation des opérations de réassurance

Dans cette section, nous allons rappeler comment se matérialise la réassurance sur le bilan d'un assureur. Céder des risques ne désengage pas une cédante vis-à-vis de ses assurés. Pour cette raison, les risques transférés ne sont pas soustraits du passif de l'assureur, mais une créance est créée à l'actif.

Sur le schéma suivant, nous pouvons voir l'effet d'une quote-part sur le bilan d'un assureur en fonction de la méthode employée. Dans le premier cas, coassurance, le réassureur gère les actifs en représentation de la part de provisions techniques cédées ; la cédante a une créance à son actif. Dans le second cas, les provisions du réassureur sont déposées chez la cédante qui peut les investir. L'actif du réassureur est alors constitué du poste « Dépôt cédante ».

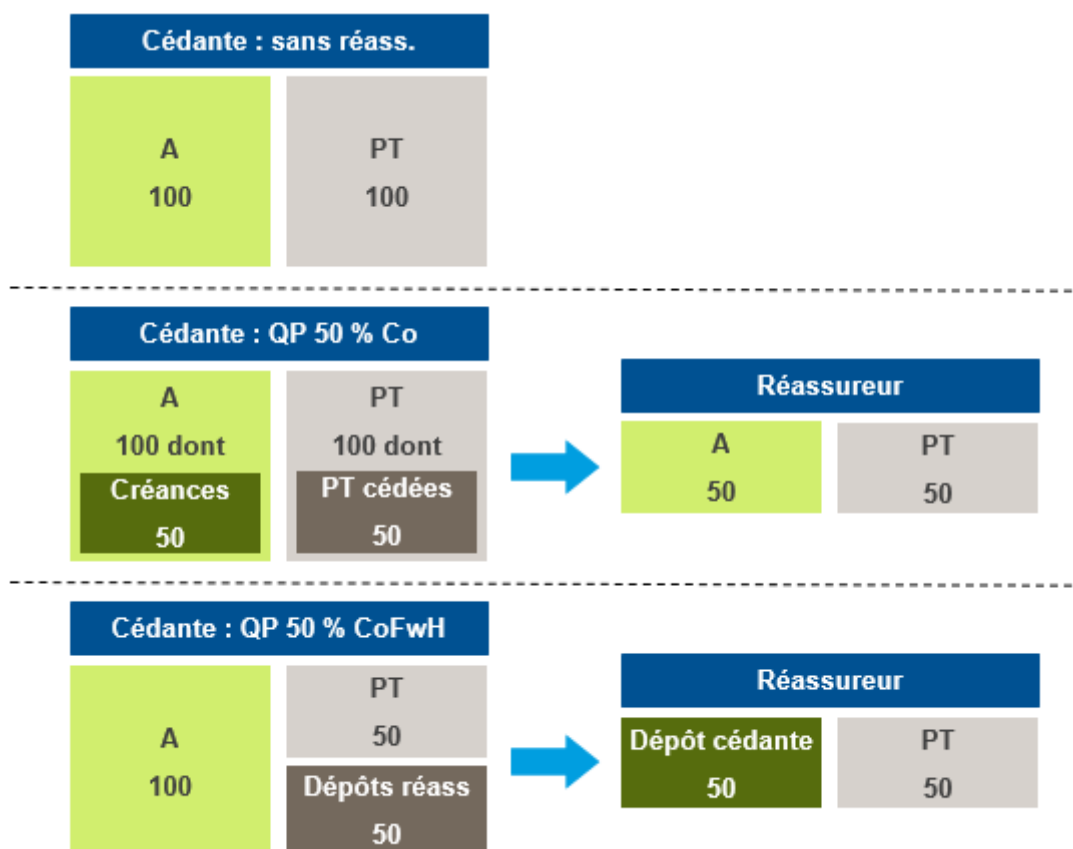


FIGURE 1.4 – Impacts de la réassurance sur le bilan

Ce mécanisme de dépôts chez les cédantes est spécifique à la réassurance et il est important de bien comprendre son effet sur le bilan.

1.4 Les normes IFRS

Les normes IFRS (*International Financial Reporting Standards*) sont des normes comptables internationales qui ont été mises en place au début des années 2000 afin d'améliorer la comparabilité des entreprises de différents pays. Elles sont censées apporter de la clarté aux investisseurs et harmoniser des référentiels statutaires locaux qui peuvent être assez hétérogènes. Les normes IFRS s'appliquent aux États qui le souhaitent, elles sont notamment appliquées depuis 2002 par les entreprises cotées sur une place boursière qui publient des comptes consolidés au sein de l'Union Européenne (règlement (CE) 1606/2002).

Principalement destinées aux investisseurs, les normes IFRS reposent sur des principes pouvant aller à l'encontre des principes comptables (ou GAAP, *Generally Accepted Accounting Principle*) locaux. Parmi eux se trouvent notamment :

- la valorisation à la juste valeur des actifs et passifs,
- la prééminence de la substance sur la forme, c'est-à-dire de la réalité économique sur la forme juridique,

— l’approche bilancielle : priorité du bilan sur le compte de résultat.

La valorisation à la juste valeur est particulièrement importante pour un assureur. La juste valeur est la valeur à laquelle un actif ou un passif pourrait être échangé sur un marché dans des conditions normales. La valorisation des actifs financiers régulièrement échangés sur des marchés organisés est donc plutôt aisée car des cours ou prix de marché sont disponibles. En revanche, un passif d’assurance ou de réassurance, qui est une valeur actuelle de flux futurs estimés n’est pas échangeable facilement sur un marché. La détermination de la juste valeur d’un tel passif doit donc se faire par la constitution d’un portefeuille d’instruments financiers répliquant les flux probables.

Après avoir rappelé quelques bases de comptabilité et de réassurance, nous allons dans ce chapitre présenter la succursale et son activité afin de mieux cerner le périmètre d'étude. Nous insisterons sur les postes du bilan qui sont assez spécifiques et peuvent avoir un impact sur la suite de cette étude.

Chapitre 2

Une succursale de réassurance L&H

Les réassureurs, relativement peu nombreux sur le marché, sont implantés mondialement par un système de filiales, succursales et bureaux de représentation afin de pouvoir souscrire dans la plupart des pays. C'est notamment le cas pour Hannover Re qui dispose d'une succursale à Paris.

2.1 La structure de succursale

Une succursale (*branch*) est un établissement distinct dépendant d'un siège central, le plus souvent dans un pays étranger, disposant d'une autonomie de gestion et de direction, mais qui n'est pas juridiquement séparé de l'entité mère : c'est une extension du siège dans le but de faire affaires. Il ne faut pas confondre succursale et filiale, la deuxième étant une entreprise à part entière, dotée d'une personnalité morale indépendante. En ce sens, une succursale ne détient pas à *proprement parler* de capital social et c'est donc la responsabilité du siège qui est engagée à l'égard des actions et transactions de la succursale.

Pour être correctement intégrée au siège allemand, la succursale doit préparer une comptabilité selon les normes qui s'appliquent à lui : les normes HGB (§290 du HGB, *Handelsgesetzbuch*, *German GAAP*) et IFRS, rapidement présentées plus haut. Concrètement, la réglementation allemande est conservatrice et très semblable à la réglementation française. Les actifs dits « circulant » sont valorisés selon une approche *lower-of-cost-or-market*, c'est à dire à la plus petite valeur entre leur prix d'acquisition et leur valeur de marché à la date de clôture. Les provisions techniques sont calculées de manière prudente avec les informations reçues des cédantes. Ce GAAP n'étant pas celui sur lequel nous allons travailler par la suite, nous allons plutôt nous pencher sur l'IFRS.

Le bilan IFRS simplifié de la succursale est présenté en figure (2.1). Insistons sur quelques points qui auront leur importance pour la suite de notre étude.

Investissements Sous les normes IFRS¹, les actifs financiers sont classés en quatre catégories :

— actifs à la juste valeur par le compte de résultat (*fair value through profit or loss*) : détenus à

1. IAS 39 – *Financial instruments : Recognition and measurement*

Actif	Passif
Investissements Titres à taux fixe Titres en action Autre actifs Immobilier Investissements à court terme Trésorerie	Passif Passif de l'activité de réassurance Provisions pour sinistres - à payer Provisions pour sinistres - IBNR Provisions mathématiques Provisions pour primes émises non acquises Provisions pour participations aux bénéfices Dépôts des rétrocessionnaires Dettes Provisions Provision pour impôts Autres passifs
Dépôts cédantes	
Actifs provenant de l'activité de réassurance Créances Deferred Acquisition Costs Créances des rétrocessionnaires	
Autres actifs Actifs intangibles Actifs tangibles Actifs d'impôts	Fonds propres OCI
Compte de passage	Résultats cumulés

TABLE 2.1 – Bilan norme IFRS

des fins de transactions courtermistes, leurs variations de valorisation impactent le compte de résultat directement,

- actifs détenus à maturité (HTM – *held to maturity*) : ce sont des actifs à rendement fixe ou déterminable et acquis dans le but d'être détenus jusqu'à maturité,
- prêts et créances : instruments non dérivés à paiements fixes ou déterminables et non cotés sur un marché,
- disponibles à la vente (*available for sale*) : cette catégorie regroupe les actifs qui ne sont pas dans les trois premières. Les gains et pertes non encore réalisés venant des variations de juste valeur des actifs disponibles à la vente sont reconnus directement dans les fonds propres en OCI (*Other Comprehensive Income*) sans passer par le compte de résultat.

La grande majorité des actifs des assureurs et des réassureurs sont classés dans la dernière catégorie.

Dépôts cédantes Ce poste regroupe l'ensemble des provisions techniques déposées chez les cédantes.

Deferred Acquisition Costs (DAC) Les DAC ou FAR (frais d'acquisition reportés) sont des « provisions » utilisées par les assureurs et traitées comme des actifs permettant d'amortir des frais d'acquisition initiaux souvent très conséquents en les étalant sur la durée de vie du contrat. Chez un réassureur, ils seront utiles pour les traités de financement. Un exemple type est le suivant : une cédante lance un produit d'assurance, et subit d'important frais d'acquisition et de distribution lors de la première année. Elle peut faire appel à la réassurance pour absorber une partie de ses frais. De son côté, le réassureur comptabilisera en norme HGB un résultat largement déficitaire sur la première année du traité. Toutefois, en IFRS, il a la possibilité d'utiliser des DAC, de façon à lisser la perte sur un horizon plus long.

Créances des rétrocessionnaires Ce poste constitue les créances contractées à l'égard des rétrocessionnaires (*reinsurance recoverables*). De plus, s'il est prévu un dépôt des provisions dans le contrat de rétrocession, alors celui-ci apparaît au passif du réassureur au poste « Dépôts des rétrocessionnaires ».

Résultats cumulés et Compte de passage Comme évoqué précédemment, une succursale ne détient pas de capital social. Le passif qui peut être considéré comme des fonds propres n'est alors constitué que des résultats cumulés des exercices précédents, et des OCI.

Nous pouvons alors introduire la notion de Compte de passage. Il s'agit d'un compte de liaison entre la succursale et le siège regroupant des transactions qui ont lieu entre les deux entités : un poste équivalent appelé « Compte de passage – Succursale » se trouve donc aussi au passif du bilan du siège.

Ce compte constitue un élément très important de l'actif de la succursale car il représente les résultats cumulés et les provisions techniques non déposées qui ne sont pas directement investies par la succursale. Si les composantes qui constituent le compte de passage étaient directement investies dans des actifs sous gestion, la succursale percevrait des produits financiers.

2.1.1 Une problématique de prix de transfert

Ayant une activité en France, la loi française s'impose aux activités de la succursale, plus particulièrement en matière de fiscalité. Considérée comme un établissement stable fiscalement réalisant du chiffre d'affaires et du résultat en France, la succursale est soumise à l'impôt sur les sociétés.

A ce sujet, elle doit pouvoir justifier les produits financiers qu'elle déclare à l'administration fiscale, notamment ceux qu'elle perçoit du siège et qui rémunèrent le Compte de passage comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent. Ce taux de rémunération reçu est censé être au moins égal à un taux de marché, conformément au principe du « prix de pleine concurrence » adopté par les pays membres de l'OCDE. Ce principe signifie que le prix de transfert pratiqué entre des entreprises dépendantes (siège – succursale) doit être le même que celui qui aurait été pratiqué sur le marché par des entreprises indépendantes. Ce principe est d'ailleurs repris dans l'article 57 du code général des impôts.

Cette problématique purement opérationnelle est un des objets de l'étude : apporter la justification de ce taux, ou dans le cas contraire, alerter d'un possible risque fiscal.

2.2 Périmètre d'étude

Les spécificités de la succursale et leurs impacts sur le bilan ayant été avancés, nous pouvons maintenant présenter le périmètre d'étude.

La succursale souscrit principalement en France, Belgique, ainsi que dans les zones MENA (*Middle East and North Africa*) et CIMA (Conférence interafricaine des marchés de l'assurance).

Elle détient également un gros portefeuille canadien en run-off.

Nous nous concentrerons sur la branche d'activité L&H car elle représente environ 90 % du bilan et contient une bien plus grande diversité de monnaies et des engagements de long terme qui sont bien plus intéressants pour notre étude que ceux de la branche P&C.

Afin de bien avoir en tête la composition du passif technique du bilan IFRS, nous présentons quelques chiffres en figure (2.1).

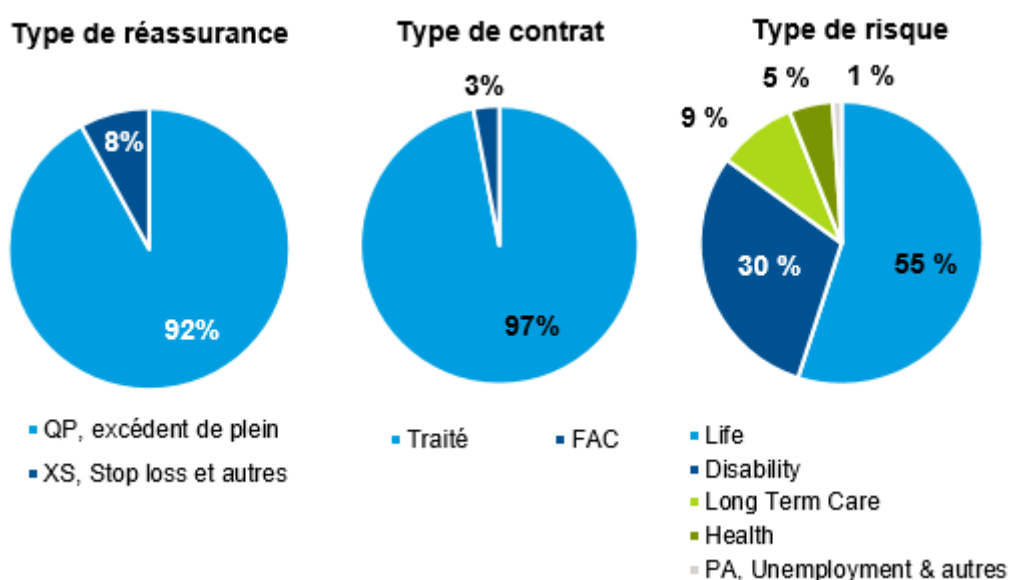


FIGURE 2.1 – Passif technique L&H (en pourcentage de provisions techniques)

Dans ce chapitre, nous allons montrer l'enjeu d'une bonne gestion d'actifs chez un réassureur et comment elle doit être menée au sein d'une succursale.

Chapitre 3

Évaluation du passif et enjeux de la gestion d'actifs

La première étape nécessaire à tout processus de gestion ou d'allocation d'actifs est l'évaluation du passif technique.

3.1 Évaluation du passif technique de réassurance

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la valorisation du bilan que nous allons utiliser par la suite, et notamment à l'évaluation des cash-flows de passif afin de déduire les durations nécessaires à l'allocation d'actifs. L'objet de ce mémoire étant de déterminer une allocation optimale sous une vision économique qui soit la plus proche possible de la réalité, les cash-flows seront déterminés selon une approche *Best Estimate* en utilisant un modèle de type Solvabilité II. Nous reviendrons sur les limites d'un tel modèle dans la section (3.1.4).

Projeter les cash-flows de contrats de réassurance n'est pas chose aisée quand on connaît la diversité des formes de réassurance et des *Lines of Business* qui séparent les plus ou moins 2000 contrats.

L'idée générale du modèle, implémenté sous RAFM, est donc de regrouper les contrats de réassurance similaires au sein de *clusters* et d'utiliser des *model points* qui représentent le mieux les contrats sous-jacents et les assurés du portefeuille.

3.1.1 Classification des traités

Un arbre de décision et des critères précis sont utilisés pour déterminer dans quel cluster les contrats doivent être modélisés, notamment : type de réassurance, risque couvert, mode de résiliation, type de la somme réassurée, type de prime, région, devise. Dans les paragraphes suivant, nous allons détailler quelques-uns de ces critères.

Mode de résiliation

Bien que l'engagement du réassureur puisse être très proche de celui de la cédante, surtout en réassurance proportionnelle de type quote-part, il faut toutefois bien avoir en tête que l'engagement du réassureur est défini contractuellement et n'est absolument pas lié à celui de la cédante vis-à-vis de ses assurés. Cette différence peut notamment s'observer via le mode de résiliation des traités, *run off* ou *clean cut* :

- run off : la couverture continue pour les risques qui sont toujours couverts à la date de résiliation. Une distinction plus fine peut s'opérer :
 - run off de primes et de sinistres : le réassureur continue à recevoir des primes et à payer des sinistres pour des générations de souscription antérieures à la date de résiliation,
 - run off de sinistres : le réassureur paie les sinistres en cours sans recevoir de primes.
- clean cut : le réassureur n'a plus aucun engagement passé la date de résiliation. Les provisions techniques restantes sont transférées au nouveau réassureur ou restituées à la cédante.

Type de somme réassurée

La somme assurée a également un impact sur la modélisation. Dans la pratique deux cas se présentent : une somme assurée constante (pour le décès par exemple), ou décroissante (en emprunteur par exemple, où les capitaux restants dus diminuent) dans le temps.

Type de prime

Le modèle fait la distinction entre le type de primes : unique, nivelée ou de risque.

Région

Par région, il faut entendre région de souscription. Dans notre cas, une séparation sera effectuée entre les deux centres de souscription : France et MENA.

Devise

La devise que l'on considère ici est la devise dans laquelle les cash-flows seront modélisés. Il ne faut pas la confondre avec la devise « originale » du traité, dans laquelle les comptes et les provisions techniques sont établis dans les bilans HGB et IFRS, et qui est définie contractuellement avec la cédante.

Chaque devise originale doit être assignée à une devise de modélisation, qui sont au nombre de trois : EUR, USD et CAD. Une question se pose alors pour les contrats établis dans des monnaies originales différentes :

- Les traités de la zone MENA sont modélisés en USD. En effet, les principales monnaies de cette région ont la particularité d'avoir des taux de change fixes avec l'USD. C'est notamment le cas pour l'AED (Émirats), l'OMR (Oman), le SAR (Arabie Saoudite), le QAR (Qatar) et le BHD (Bahraïn). Les autres monnaies de cette zone, comme le KWD (Koweït), le TND (Tunisie), l'EGP (Égypte), le PKR (Pakistan), le JOD (Jordanie) sont également modélisés en USD bien qu'il n'existe pas de politique d'arrimage entre ces monnaies et l'USD.

- Les monnaies hors EUR des pays européens sont modélisées en EUR : PLN (Pologne), CZK (République tchèque).
- Les monnaies restantes sont modélisées en USD.

Le tableau (3.1) suivant résume ces assignations de monnaies.

Monnaie originale	Modèle
EUR	EUR
USD	USD
CAD	CAD
Monnaies MENA à parité fixes avec l'USD : AED, OMR, SAR, QAR, BHD	USD
Monnaies MENA sans parité fixes : TND, KWD, EGP, PKR, JOD, MAD, DZD	USD
Monnaies européennes : PLN, CZK, CHF, SEK	EUR
Autres monnaies (dont CLP)	USD

TABLE 3.1 – **Assignation des monnaies pour la modélisation**

Comme expliqué plus haut, toutes ces différenciations sur les contrats de réassurance permettent d'aboutir à une classification précise. Les principaux clusters sont présentés dans le tableau (3.2) suivant par ordre d'importance :

Rang	Cluster
1	Projections individuelles
2	Vie, court terme
3	Vie, long terme, run off, somme assurée décroissante, prime unique
4	Réassurance non proportionnelle
5	Dépendance, prime nivelée
6	Vie, long terme, run off, somme assurée constante, prime de risque
7	Vie, long terme, run off, somme décroissante, prime de risque
8	Santé

TABLE 3.2 – **Principaux clusters**

Le premier cluster (« Projections individuelles ») est utilisé pour des traités assez spécifiques qui n'ont pas leur place dans les autres clusters. On y trouvera par exemple des traités qui comportent des DAC, des traités de prévoyance collective française qui impliquent de projeter des garanties incapacité/invalidité que le modèle RAFM ne permet pas à ce jour de modéliser correctement ou encore des « groupes » de traités comportant des mécanismes de participation aux bénéfices assez spécifiques. Dans ce cluster, la projection et les cash-flows sont directement déduits des projections dites *pricing* fournies par les Équipes de souscription et court-circuitent le processus que nous allons présenter dans la section suivante et qui consiste à renseigner les hypothèses nécessaires à la création des model-points.

3.1.2 Hypothèses et model-points

Lorsque les clusters sont déterminés, des hypothèses de modélisation doivent être indiquées au modèle à la maille traité $\times$ risque couvert afin de créer les model-points. Nous pouvons séparer ces hypothèses en plusieurs blocs, hors cluster 1 et 2 (il n'y a donc que de la réassurance proportionnelle).

Éléments du compte de résultat Le modèle utilise les montants de primes et de provisions à plusieurs moments.

Part de *New Business* Pour obtenir des projections plus fines, chaque cluster peut être subdivisé en deux parties : l'*in-force* (IF) et le *new business* (NB). L'*in-force* constitue les affaires en cours tandis que le *new business* est l'ensemble des affaires nouvelles qui sont à modéliser pour la première fois. Il faut donc renseigner la part de *new business* dans les primes, provisions et résultat. Notons que les clusters *clean cut* sont toujours considérés comme du *new business* car ils sont annuels et résiliables entièrement à chaque date de renouvellement : on ne peut pas les considérer comme de l'*in-force*, même s'ils ont déjà été renouvelés plusieurs fois.

Hypothèses actuarielles Par hypothèses actuarielles nous entendons les hypothèses portant sur les têtes des contrats sous-jacents et les garanties couvertes, notamment :

- âge moyen, âge de la police (seulement pour les traités en *run off*, les traités *clean cut* étant considérés comme du *new business*),
- durées de couverture pour chaque garantie couverte et le poids de chaque garantie en pourcentage de primes,
- les tables actuarielles à utiliser : mortalité, rachat, taux d'incidence *Disability*...

Hypothèses de marge Le modèle doit pouvoir permettre de projeter des marges en fonction du risque couvert. Ces marges sont déterminés par l'expérience, des informations venant des cédantes ou bien des calculs de *pricing*.

Participation aux bénéfices et fonds de stabilisation Les clauses des traités de réassurance peuvent prévoir la mise en place d'un compte de participations aux bénéfices (PB, *Profit Commissions* ou *Profit Sharing* en anglais). L'assiette de calcul est le résultat du réassureur, après déduction de frais calculés sur ses primes. Les cédantes demandent ces mécanismes afin de profiter d'une partie du résultat du réassureur qu'elles ont fortement contribué à apporter et pour compenser leurs frais qui sont bien plus élevés que ceux du réassureur. Un autre mécanisme qui doit être pris en compte, particulièrement pour les traités français, est le fonds de stabilisation dont le but est de « lisser » les résultats sur la durée : les résultats des premières années peuvent être mis de côté pour compenser les moins bonnes années.

Tous les éléments permettant le calcul des participations aux bénéfices et les dotations ou libérations de fonds de stabilisation doivent être renseignés.

Écoulement des stocks de provisions Nous reviendrons plus en détail sur ce point très important par la suite. En effet, pour certains clusters, la projection est étroitement liée à un écoulement de provisions et il faut préciser au modèle la durée de l'écoulement de ces provisions.

Création des model-points

A partir de toutes ces hypothèses, des model-points que l'on pourrait considérer comme « génériques » sont créés. Génériques car pour chaque cluster $\times$ monnaie $\times$ IF/NB $\times$ PB/pas de PB, 12 model-points vont être utilisés. Ils se différencient par leurs âges et leurs durées de couverture qui gravitent autour des hypothèses moyennes renseignées à l'étape précédente, et par leur somme assurée purement arbitraire qui permet de pondérer. Un exemple de structure de model-points est donnée tableau (3.3).

Model-point	Age	Durée de couverture	Somme assurée	Nombre de polices
1	âgeMoy - 6	durMoy - 5	3 000	10 000
2		durMoy	9 000	
3		durMoy + 5	3 000	
4	âgeMoy - 2	durMoy - 5	7 000	10 000
5		durMoy	21 000	
6		durMoy + 5	7 000	
7	âgeMoy + 2	durMoy - 5	7 000	10 000
8		durMoy	21 000	
9		durMoy + 5	7 000	
10	âgeMoy + 6	durMoy - 5	3 000	10 000
11		durMoy	9 000	
12		durMoy + 5	3 000	

TABLE 3.3 – Structure de model-points

3.1.3 Projection des cash-flows

Toutes les entrées du modèle ayant été présentées, nous pouvons détailler succinctement la projection des cash-flows d'un cluster en trois étapes :

1. projection individuelle de chaque model-point,
2. agrégation,
3. mise à échelle par les primes et les provisions,
4. intégration de la PB pour aboutir à la projection finale.

L'idée de cette section n'est pas de présenter les formules de calcul dans le détail, qui vont fortement varier selon le cluster (risques couverts, types de primes, ...) mais plutôt de donner

au lecteur une vision du fonctionnement général du modèle, et en particulier des hypothèses qui sont prises.

Le modèle fonctionne sous deux visons : une vision « *pricing/reserving* » selon laquelle une projection est calculée à partir des tables, et une vision « *experience* » où les tables sont abattues afin de rendre la projection plus économique.

Mais commençons par rappeler les postes qui sont à prendre en compte dans le calcul des cash-flows. Il s'agit de considérer tous les éléments entrants et sortants, à savoir :

- + Primes
- Δ PENA déposées
- Frais
- Commissions et PB
- Sinistres
- Δ PM et PRC déposées
- Δ PSAP déposées
- + Intérêts sur dépôts

Les variations de provisions ne sont pas prises en compte dans les cash-flows, mais les variations de provisions déposées doivent l'être car un flux est comptabilisé.

1. Projection d'un model-point

La première étape est la détermination de l'évolution de la population. En effet, à chaque model-point est assigné une population (arbitraire encore une fois, typiquement 10 000 comme dans le tableau 3.3) initiale en début de projection.

Cela consiste à chaque période i de la projection à calculer à partir des tables entrées en hypothèse le nombre de décès, de rachat ou tout autre élément ayant un impact sur la projection et donnant lieu à un paiement du réassureur. Une hypothèse est effectuée sur la chronologie des événements¹ :

$$\begin{aligned} \text{Population EoP}_i^{\text{experience}} &= \text{Population BoP}^{\text{experience}} \\ &\quad - \text{Nb rachats}_i^{\text{experience}} \\ &\quad - \text{Nb décès}_i^{\text{experience}} \\ &\quad - \text{Nb entrées en Disability ou autre}_i^{\text{experience}} \end{aligned}$$

Comme nous disposons des sommes assurées (hypothèse des model-points, qui peuvent toute-

1. BoP : début de période, EoP : fin de période.

fois être indexées ou revalorisées au cours de la projection), nous pouvons en déduire les sinistres. Par exemple pour le décès (les autres types de sinistres se calculent de la même façon) :

$$\text{Sinistres décès}_i^{\text{expérience}} = \text{Nb décès}_i^{\text{expérience}} \times \text{Somme assurée}_i$$

La détermination des sinistres permet alors le calcul des primes et provisions. Plusieurs cas se présentent alors comme expliqué précédemment : prime de risque, prime nivelée ou prime unique.

En cas de prime de risque, aucune provision n'est modélisée car la prime est calculée à chaque période de façon à couvrir les sinistres correspondant à cette même période.

$$\text{Prime de risque}_i^{\text{expérience}} = \text{Sinistres}_i$$

En cas de prime nivelée, la prime doit rester identique tout au long de la projection. Il faut donc calculer la valeur actuelle probable des sinistres et des primes futures.

$$\text{Prime nivelée}^{\text{expérience}} = \frac{VAP(\text{Sinistres}_{i \geq 1}^{\text{expérience}})}{VAP(1_{i \geq 1}^{\text{expérience}})}$$

La prime unique est égale à la valeur actuelle probable des sinistres :

$$\text{Prime unique}^{\text{expérience}} = VAP(\text{Sinistres}_{i \geq 1}^{\text{expérience}})$$

Concernant les provisions (mathématiques), elles se calculent classiquement comme la différence entre la VAP des sinistres et la VAP des primes sous une approche pricing. Pour passer en vision économique, nous devons corriger par un facteur :

$$\text{Provision}_i^{\text{expérience}} = \text{Provision}_i^{\text{pricing}} \frac{\text{Population}_i^{\text{expérience}}}{\text{Population}_i^{\text{pricing}}}$$

Notons que le modèle ne considère à ce moment-là que des provisions mathématiques. Des intérêts peuvent être calculés sur ces provisions.

2. Agrégation

Tous ces calculs sont effectués pour chaque model-points, puis agrégés. Des frais sont appliqués en pourcentage des primes. Cependant, ils ont été créés avec des montants de somme assurée arbitraires et ne reflètent absolument pas la réalité du cluster en question. Ils doivent donc être mis à l'échelle (processus de *scaling*).

3. Mise à l'échelle

La projection est mise à l'échelle par les primes comptabilisées sur l'ensemble des traités concernés par le cluster. Il s'agit de multiplier tous les montants projetés de primes, sinistres et provisions par le facteur suivant :

$$\text{Facteur d'échelle} = \frac{\text{Primes comptabilisées}}{\text{Primes projetées}}$$

Le modèle va ensuite calculer des provisions « additionnelles » dont le but est de combler l'écart entre les provisions calculées par le modèle (et maintenant mises à l'échelle) et les provisions effectivement comptabilisées.

$$\text{Provision add.}_1 = \text{Provision comptable} - \text{Provision modèle}_1$$

Cette provision additionnelle est ensuite libérée progressivement pendant une durée rentrée en hypothèse : des sinistres « additionnels » sont donc modélisés en face de cette libération. Ces sinistres sont pris en compte dans les cash-flows et ont un impact non négligeable sur la projection finale : un exemple de projection permettant de bien visualiser le principe de la provision « additionnelle » est donc donné en annexe A.

4. Cash-flows finaux

Maintenant que tous les éléments impactant le résultat sont déterminés, la dernière étape est le calcul de la PB et de la dotation ou libération de fonds de stabilisation.

Nous pouvons ensuite déduire les cash-flows finaux, présentés en figure (3.1).

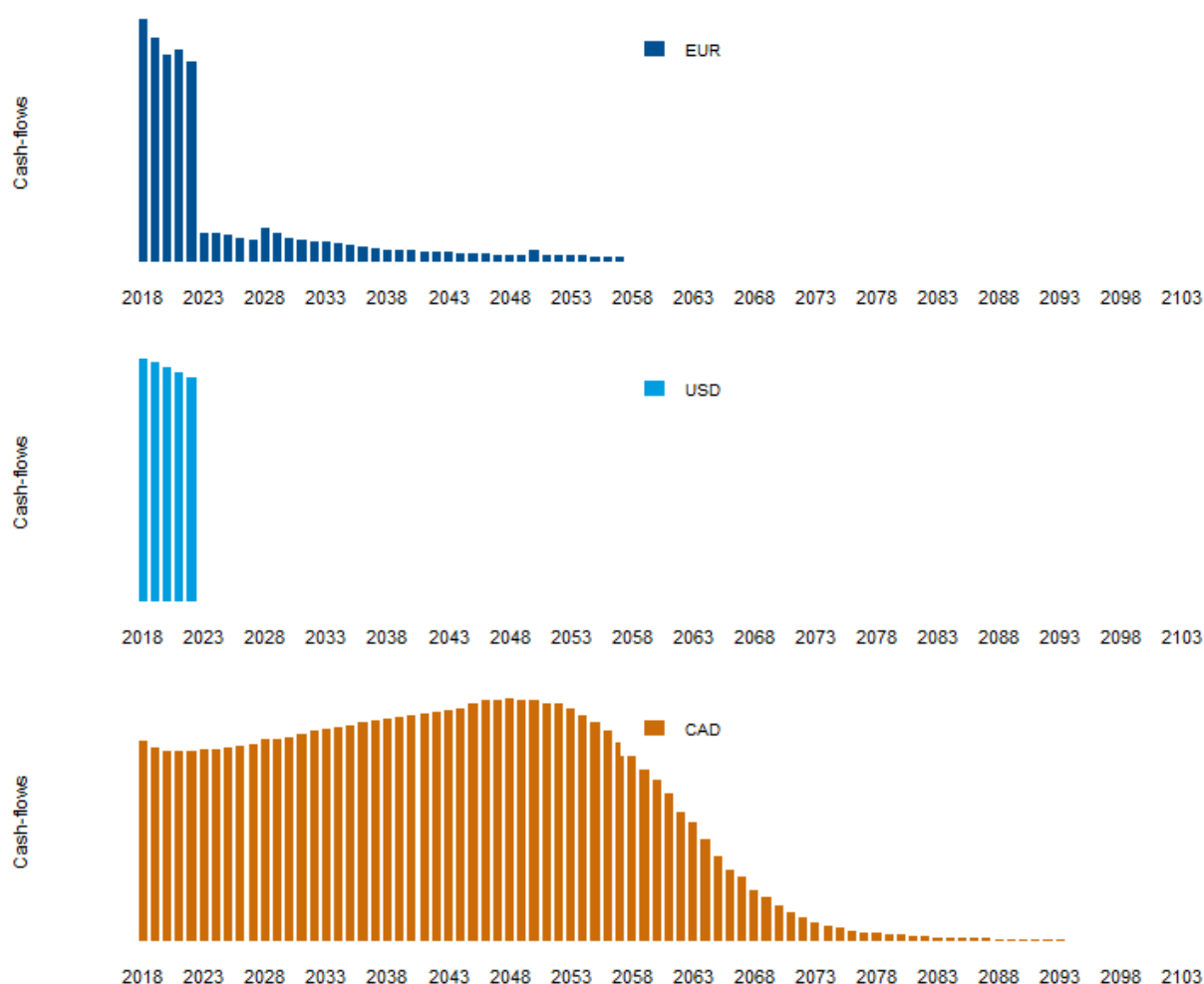


FIGURE 3.1 – Cash-flows du modèle

3.1.4 Limites d'un tel modèle pour une problématique d'allocation d'actifs

Le modèle dont nous venons de détailler le fonctionnement a été pensé pour calculer le *Best Estimate* sous Solvabilité II. Pour rappel, le *Best Estimate* se calcule en actualisant les cash-flows avec la courbe des taux sans-risque fournie par l'EIOPA². Cependant la finalité de ce mémoire n'est pas de travailler sous le référentiel Solvabilité II, mais plutôt en vision IFRS. En particulier, les provisions techniques que nous devons investir proviennent du bilan IFRS : il y a donc une différence de valorisation entre l'actualisation des cash-flows du modèle et les provisions IFRS que nous devons éclaircir.

Projection *Best Estimate*

Les cash-flows issus du modèle Solvabilité II sont par définition la meilleure estimation des flux de trésorerie et sont calculés en utilisant des « *informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes faisant appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables*

2. European Insurance and Occupational Pensions Authority

*et pertinentes.*³ ». C'est le rôle des facteurs d'abattement qui permettent de rendre la projection « pricing » plus économique pouvant induire des écarts de valorisation. La projection s'entend brute de réassurance (ou de rétrocession dans notre cas) et en run off au sens où les flux des contrats futurs pour lesquels les parties ne sont pas engagées contractuellement ne sont pas projetés : c'est la frontière des contrats.

Pour notre problématique d'allocation d'actifs, la frontière des contrats Solvabilité II mérite d'être discutée. Une interrogation peut se lever quant au sort de certains traités de réassurance, notamment les traités court-termes et les traités clean-cut. En effet ces traités étant renouvelés annuellement, il est impossible sous Solvabilité II de projeter des primes sur la période où il n'y a pas encore d'engagement contractuel. Cependant, dans une optique de calcul de duration qui doit être la plus « économique » possible et compte tenu d'une probabilité de renouveler qui peut être très élevée sur certains traités, il est légitime de se demander s'il ne faudrait pas projeter des primes plus longtemps.

Toutefois, le rôle des actifs est de couvrir les passifs à une certaine date et les investissements devraient tenir compte des seuls cash-flows sur lesquels il y a un engagement. Pour conclure cette discussion, nous retiendrons donc la frontière des contrats Solvabilité II pour la modélisation des cash-flows. Une modification de la frontière des contrats dans le modèle se serait de plus avérée très délicate à implémenter. En effet, la frontière des contrats n'est pas un paramètre explicite du modèle, et la modifier impliquerait de revoir en amont des hypothèses de projection et des hypothèses sur la classification des traités.

Projection de marge future

En pratique, les cash-flows modélisés qui nous serviront au calcul des durations vont induire par leur valeur actuelle un montant de provision technique inférieur à l'IFRS qui est plus prudent. La différence est assimilable à de la marge qui sera constatée au compte de résultat et finira par se retrouver en fonds propres dans les *Retained Earnings*. Le schéma en figure (3.2) montre ce phénomène.

3. Article 77 de la Directive Solvabilité II, transposé en droit français dans l'article R351-2 du Code des assurances

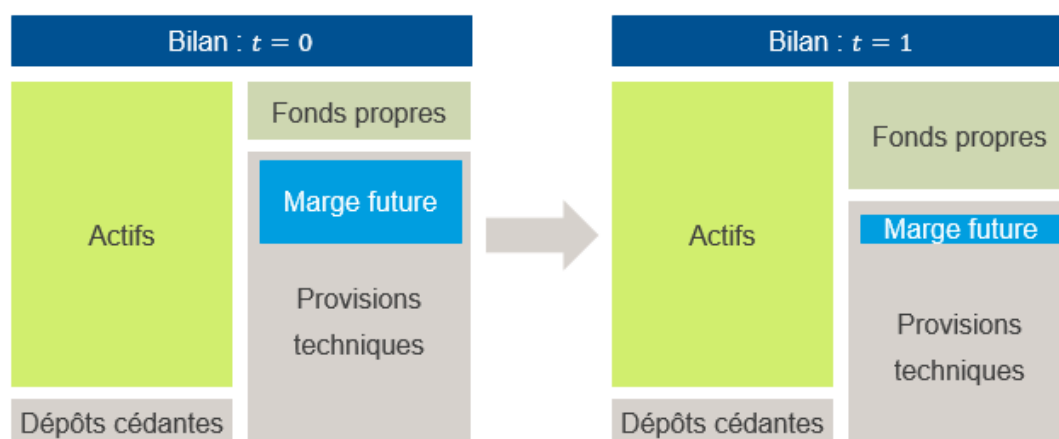


FIGURE 3.2 – Marge future dans les provisions IFRS

Netting des dépôts cédantes

Finalement, l'élément qui permet d'expliquer la plus grande différence de valorisation est le netting des provisions déposées chez les cédantes dans le bilan Solvabilité II : par rapport au bilan IFRS, le bilan Solvabilité II est diminué à l'actif du montant des dépôts, mais également au passif. Comme nous avons pu le voir, les cash-flows de passif sont calculés en intégrant les variations de provisions déposées diminuant ainsi les cash-flows et de fait leur valeur actuelle.

Le tableau (3.4) suivant montre un exemple de calcul de cash-flows dans le cas où une provision initiale de 50⁴ serait déposée à moitié chez la cédante. Le flux sortant de sinistres (-10) est compensé en partie par une libération de la provision déposée (+5), flux entrant pour le réassureur, qui vient diminuer le cash-flow total (-10 + 5 = -5). Le résultat est en revanche calculé avec la variation de provision globale et non pas avec la provision déposée.

PT BoP	PT EoP	PT Dép BoP	PT Dép EoP	Sinistres	Résultat	Cash-flow
50	-40	25	-20	-10	0	-5
40	-30	20	-15	-10	0	-5
30	-20	15	-10	-10	0	-5
20	-10	10	-5	-10	0	-5
10	0	5	0	-10	0	-5

TABLE 3.4 – Prise en compte des dépôts cédantes

Après avoir présenté comment le passif technique est évalué, et notamment comment sont déterminés les cash-flows, nous pouvons maintenant nous pencher sur l'actif du bilan.

4. Les provisions début de période sont comptabilisées positivement, les provisions de fin de période négativement (il s'agit d'une dette), de façon à ce que leur somme indique s'il y a eu dotation ou libération de provision.

3.2 L'actif et les risques de taux et de change

De façon générale, le résultat d'un réassureur est composé du résultat technique et des produits financiers. Il est donc nécessaire de mener un contrôle des activités orienté « risque » et « profit » par une gestion :

- Des passifs de réassurance (*Liability Management*),
- Du portefeuille d'investissement (*Asset Management*),
- Des interactions qui peuvent exister (*Asset-Liability Management*).

L'activité de réassurance impose au groupe d'avoir un haut degré de solvabilité et une bonne qualité de crédit. Pour cette raison, l'objectif premier de la gestion d'actifs est la stabilité, profit et croissance arrivent en seconde position. Les grands principes généraux sont les suivants :

1. **Sécurité** : les investissements doivent être sûrs. Des instruments de bonne qualité permettent de protéger aussi bien le capital que les rendements.
2. **Stabilité** : un rendement stable et régulier est visé à tout moment. Le cash et les investissements à court terme doivent donc être limités aux montants de passifs à verser aux cédantes.
3. **Diversification** : le risque doit être réparti entre les différentes catégories d'actifs, et entre contreparties.
4. **Liquidité** : une liquidité adéquate doit être conservée afin d'assurer les besoins de cash projetés.
5. **Congruence des devises** : l'adéquation de devises entre les actifs et les passifs doit être la meilleure possible pour limiter au plus le risque de taux de change.

Ces principes se retrouvent d'ailleurs dans le code des assurances (R353-1) qui stipule que les entreprises d'assurance et de réassurance doivent investir dans des actifs présentant des risques qu'elles peuvent identifier, mesurer et suivre, et de façon adaptée à la nature et à la durée de leurs engagements. Sécurité, qualité, liquidité et rentabilité doivent être garantis.

Abordons maintenant le processus d'allocation stratégique d'actifs.

La première étape nécessaire est la définition d'un budget de risque. Le budget de risque est essentiel : il consiste à déterminer dans quelles classes d'actifs le groupe allouera les risques qu'il est prêt à supporter.

En considérant ce budget de risque et les contraintes de rendement, de duration et de devises des passifs de réassurance, les Comités d'Investissement définissent des rendements cibles et les allocations stratégiques appropriées dites de référence (*benchmarks*) ainsi que leurs limites à un niveau « Groupe ». Afin de prendre en compte les particularités des entités locales, notamment la structure des passifs et du bilan de l'entité locale, mais également les exigences réglementaires, cette allocation de niveau « Groupe » doit être transposée à un niveau « Local ».

Le diagramme (3.3) illustre le processus complet.

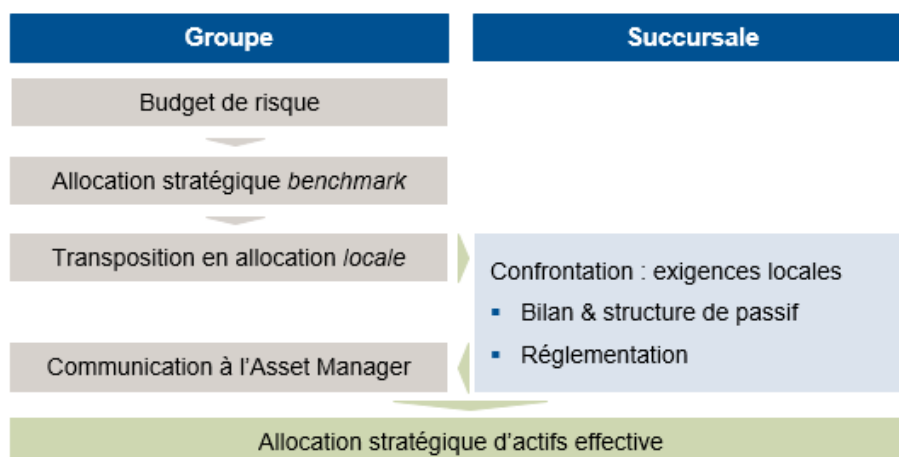


FIGURE 3.3 – Processus d'allocation d'actifs

Le dernier intervenant est l'*Asset Manager* du groupe, qui est l'ultime responsable de l'allocation et se charge des achats et ventes de titres.

Ce travail s'inscrit dans une logique de couverture de deux risques majeurs : le risque de taux d'intérêt et le risque de change.

Risque de taux

Les organismes assureurs sont très sensibles aux variations des taux d'intérêts, aussi bien à l'actif qu'au passif. Le risque de taux est la conséquence directe des variations de la courbe des taux, et affecte aussi bien le passif que l'actif. En effet, sous une approche économique, le passif technique sera sensible à une variation des taux à cause de l'actualisation des flux. Il en est de même pour l'actif, essentiellement composé d'actifs obligataires.

Risque de change

Plus d'un tiers des provisions techniques n'ont pas l'EUR pour monnaie originale. Or, le bilan doit être préparé en EUR : les provisions dont la monnaie originale n'est pas l'EUR doivent donc être converties.

A chaque fin de mois, les valeurs en monnaies originales sont converties avec les taux de cette fin de mois. Le bilan varie ainsi mensuellement et reflète l'évolution des taux de change. Les revalorisations ou diminutions successives que ce processus engendre se matérialisent directement au compte de résultat non technique au poste « Gains et pertes de change ».

Les actifs qui représentent ces provisions sont également impactés par les variations de taux de change. Si les passifs sont parfaitement investis sur des actifs de la même devise, alors un gain de change sur le passif (il faut moins d'EUR pour le même montant initial de provisions en monnaie locale) compensera la perte sur l'actif (sa valeur en EUR a diminué du même montant). Le tableau suivant montre un exemple où ce n'est justement pas le cas : la provision en Orig est représentée en EUR directement, générant des pertes de change en cas réévaluation défavorable.

	Fin 2017		Fin 2018	
	Actif	Passif	Actif	Passif
Orig		100		100
Bilan : EUR	80	80	80	90
Taux Orig/EUR	0,80		0,90	
Compte de résultat			0	− 10

TABLE 3.5 – Variation du bilan suite aux changes

3.3 Démarche

Les notions importantes et le modèle de cash-flows ayant été présentés, nous pouvons maintenant présenter la problématique et l'enjeu final de cette étude.

Comme expliqué précédemment, l'allocation sera établie sur la base du bilan IFRS à fin 2017 pour la partie L&H de la succursale. Cependant, tous les postes du bilan ne nous intéressent pas pour notre allocation d'actifs, ainsi nous nous baserons sur le bilan simplifié (3.6).

Actif	500 000	Passif	500 000
Immobilier		Fonds propres	108 992
		OCI	7 612
		EUR	4 665
		CAD	2 947
Obligations - disponibles à la vente		Résultats cumulés	101 380
		EUR	55 945
		USD	47 333
		CAD	-1 898
Trésorerie		Provisions techniques	354 327
		Provenant du modèle	324 748
		EUR	224 725
		USD	50 108
		CAD	49 916
Compte de passage		Marge future	29 579
		EUR	21 494
		USD	24 811
		CAD	-16 726
Autres actifs (créances,...)		Autres passifs	36 681

TABLE 3.6 – Bilan IFRS retenu pour l'étude (kEUR)

Quelques précisions s'imposent :

- Ce bilan représente une vision économique de l'activité de la succursale. Les actifs et provisions techniques sont ventilés par les monnaies de modélisation qui seront utilisées par la suite. Cependant, tous les montants sont en Euro (et donc après conversion au taux

de change en vigueur à fin 2017).

- Il est également net de dépôts. Au passif, les provisions techniques ont été diminuées des dépôts cédantes normalement situés à l'actif car nous ne pouvons pas investir ces dépôts. De même, les *Recoverables* à l'actif qui proviennent des traités rétrocédés sont nettés des dépôts des rétrocessionnaires normalement situés au passif.
- Les provisions techniques sont séparées en deux parties : une valeur *Best Estimate* provenant du modèle de cash-flows, et une partie de marge future calculée par différence avec les provisions IFRS, comme expliqué plus haut. Ce montant est non négligeable car il représente un peu plus de 8 % du total de provisions. C'est sur l'USD que la marge est la plus importante. Sur le CAD en revanche, la marge est négative et provient d'un traitement particulier d'un portefeuille canadien et pour lequel les provisions IFRS sont bien plus faibles que la valeur actuelle des cash-flows modélisés.
- Les actifs détenus par la succursale peuvent être classés en quatre catégories : immobilier (minime), titres obligataires, cash et compte de passage.
- Les « Autres actifs » comportent les créances, DAC, recoverables des traités rétrocédés non-dépôts et tout autre poste de l'actif sur lequel nous ne pouvons pas avoir d'influence.
- Nous devons bien garder en tête que les cash-flows et les provisions techniques sont considérés comme des données pour notre étude.

Ces considérations faites, nous pouvons nous pencher maintenant sur la méthode qui va être retenue pour ce mémoire et qui s'articule en deux principaux objectifs : couvrir les engagements techniques et le risque de taux d'intérêt en limitant la volatilité du bilan suite aux variations de change, et apporter du rendement. Cela va s'effectuer par la constitution de deux portefeuilles : un portefeuille de couverture (PFC) et un portefeuille de rendement (PFR), et ce pour les trois monnaies modélisées pour notre étude (EUR, USD et CAD).

Couverture des engagements Les engagements de réassurance, c'est à dire la valeur des cash-flows modélisés et actualisés avec la courbe des taux sans risque, doivent être couverts par des actifs aussi proches que possibles. Le portefeuille de couverture sera alors entièrement obligataire et constitué selon des méthodes classiques d'immunisation de portefeuille qui visent à couvrir la valeur actuelle, mais également l'échéancier des flux.

Recherche de rendement Le portefeuille de couverture sera complété par des investissements dans des actifs plus risqués au sein d'un portefeuille distinct dont le but sera de dégager un rendement plus attractif : on pense notamment aux actions. L'allocation de ce portefeuille sera construite selon des techniques d'optimisation de portefeuille.

Cette recherche de rendement est particulièrement importante pour les traités souscrits dans la zone MENA où les taux d'intérêts techniques utilisés dans les tarifications sont bien plus élevés qu'en Europe.

Congruence des monnaies D'après le bilan (3.6), plus de 30 % des provisions techniques sont en USD ou CAD et nécessitent des investissements dans les monnaies adéquates afin de limiter au mieux les impacts des réévaluations du bilan suite aux variations de taux de change. Notons que se prémunir contre ce phénomène empêche des pertes de change, mais également des gains potentiels.

Deuxième partie

Immunisation de portefeuille

Dans cette deuxième partie, nous allons présenter les outils théoriques qui seront utilisés par la suite et dont le but est d'immuniser un portefeuille face aux variations de taux d'intérêt.

Le premier chapitre sera consacré à la méthode de *cash-flow matching*, puis nous aborderons les notions de duration, convexité, afin d'introduire l'immunisation de portefeuille par la duration.

Chapitre 4

Cash-flow matching

La méthode la plus intuitive est sans doute la méthode de cash-flow matching qui consiste à répliquer les flux de passifs par des instruments à taux fixes. L'idée principale motivant une telle approche est la suivante : s'il est possible de faire correspondre à chaque maturité de l'échéancier des flux de passifs, un flux d'actif égal, alors le portefeuille résultant sera parfaitement immunisé. Naturellement, les actifs utilisés seront :

- des obligations de bonne qualité, typiquement des obligations d'Etat.
- voire même des obligations zéro-coupons, qui simplifient le processus de cash-flow car il n'est alors pas nécessaire de tenir compte des flux intermédiaires générés par leurs coupons. Cependant, les obligations zéro-coupons ont l'inconvénient d'être moins liquides.

4.1 Exemple

Pour illustrer le fonctionnement de cette technique, prenons l'exemple suivant : supposons que les obligations suivantes de principal 100 soient disponibles, et que nous avons une chronique de flux de passifs à couvrir :

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8
Coupon	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %

Cash-flows de passif	750	700	650	600	550	500	450	400
----------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

TABLE 4.1 – Exemple : obligations et cash-flows de passif

Nous notons L_{t_i} le cash-flow de passif à la date t_i , où $1 \leq i \leq n$, et $A_{t_i}^j$ le cash-flow d'actif à la date t_i provenant de l'obligation j , où $1 \leq j \leq m$. $A_{t_i}^j$ peut donc correspondre à un coupon, ou si nous sommes à maturité, au principal accompagné du dernier coupon.

Nous cherchons à déterminer la quantité x_j d'obligation j qu'il faut détenir aujourd'hui afin de couvrir l'ensemble des flux. L'idée principale est de commencer par la maturité la plus éloignée, à savoir trouver la quantité x_n tel que le flux généré par cette obligation à maturité

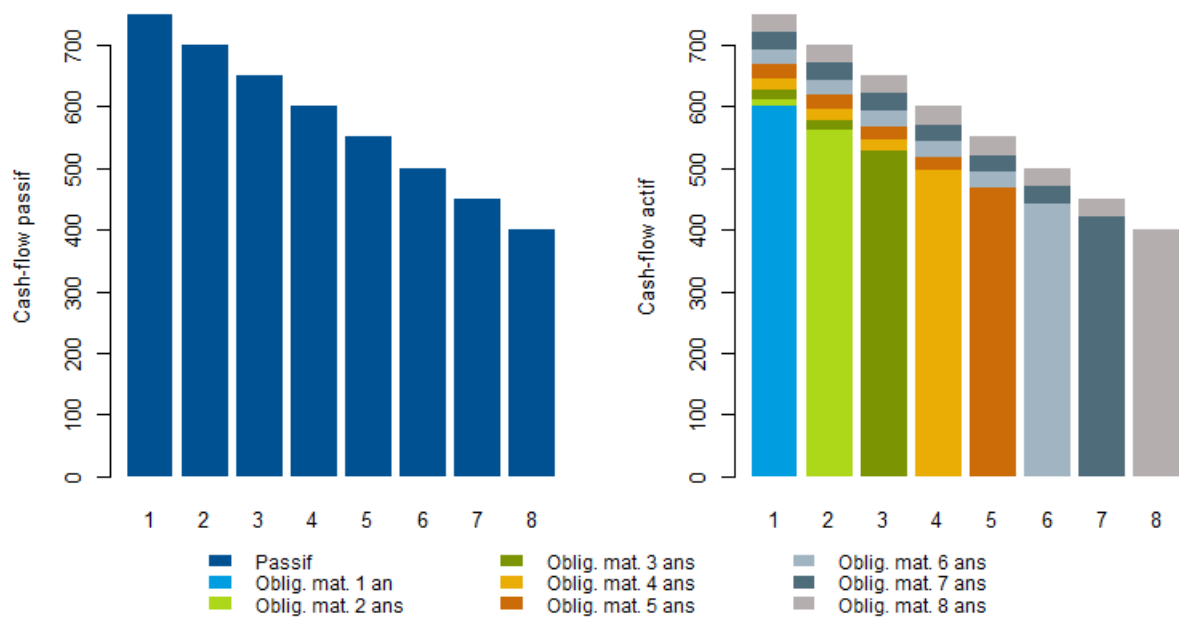


FIGURE 4.1 – Cash-flow matching : résultats

soit égal au flux de passif :

$$x_n = \frac{L_{t_n}}{A_{t_n}^n}$$

Pour la maturité $n - 1$, le principe est le même mais en retranchant le coupon engendré par la détention de l'obligation de maturité n dont nous venons de déterminer la quantité :

$$x_{n-1} = \frac{L_{t_{n-1}} - x_n A_{t_{n-1}}^n}{A_{t_{n-1}}^{n-1}}$$

Puis de proche en proche :

$$x_{n-j} = \frac{L_{t_{n-j}} - \sum_{k=0}^{j-1} x_{n-k} A_{t_{n-j}}^{n-k}}{A_{t_{n-j}}^{n-j}}$$

Nous obtenons les quantités suivantes :

Obligation	1	2	3	4	5	6	7	8
Quantité	5,94	5,50	5,11	4,76	4,46	4,18	3,93	3,70

TABLE 4.2 – Cash-flow matching : résultats

Et nous pouvons visualiser la décomposition des cash-flows de passif en somme de cash-flows d'obligations dans la figure (4.1).

4.2 Limites

Bien que très simple sur le principe, cette approche est en pratique délicate à mettre en oeuvre et peut s'avérer très coûteuse. En effet, nous n'avons jusque là pas introduit le coût des obligations. Le problème de cash-flow matching pourrait s'exprimer de façon plus générale comme un problème de minimisation du coût du portefeuille obligataire nécessaire à la couverture des passifs, sous la contrainte qu'à chaque date t_i , les flux générés par les obligations dépassent les flux de passif, c'est à dire, en notant P_0^j le prix de l'obligation j en date 0 :

$$\begin{aligned} \min_{x_j} \quad & \sum_j x_j P_0^j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_j x_j A_{t_i}^j \geq L_{t_i} \text{ pour tout } t_i \\ & x_j \geq 0 \text{ pour tout } j. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans un cadre encore plus général, et particulièrement pour des organismes assureurs qui ont des passifs pouvant se dérouler sur plus de 50 ans, il n'existe pas d'obligations de maturité assez longues permettant de couvrir tous les flux de passif « en une seule fois ». Recourir à cette technique impliquerait de se soumettre à un risque de réinvestissement.

Par exemple, pour couvrir deux flux de passif tombant dans $t_1 = 30$ ans et $t_2 = 60$ ans et en supposant que l'obligation de plus longue maturité disponible en $t_0 = 0$ soit de maturité $m = 30$ ans, il faut :

- Acheter une obligation en $t_0 = 0$.
- Acheter la même obligation en t_1 avec le remboursement du principal. En revanche, son prix est inconnu ce qui constitue un potentiel risque.

Le problème (4.1) est alors plus complexe mais sa résolution reste toutefois possible numériquement (voir notamment [12] et [9]).

De plus, le cash-flow matching est efficace dans un monde idéal où les passifs ne vont pas varier dans le temps après avoir été déterminés à l'instant initial. Dans la pratique, pour un assureur, les cash-flows étant une sortie de modèle mis à jour plusieurs fois par an, il faudrait procéder à de fréquents rebalancements du portefeuille obligataire, ce qui n'est encore une fois pas envisageable et très coûteux.

Chapitre 5

Immunisation par la duration

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions de duration, sensibilité et convexité, qui sont des indicateurs simples mais très largement utilisés pour quantifier et gérer le risque que peuvent apporter les taux d'intérêt sur le bilan. Nous pourrons ensuite introduire le concept d'immunisation par la duration.

5.1 Définition des notions de base

Si les taux d'intérêts représentent un risque pour un organisme assureur, c'est parce qu'ils interviennent dans le calcul des provisions techniques et dans l'évaluation du prix des actifs obligataires qui constituent majoritairement leur bilan. L'actif et le passif peuvent alors être considérés comme des séries de cash-flows.

Commençons par rappeler que la valeur actuelle peut se calculer comme :

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r)^i}$$

Où n est la maturité, i la date du cash-flow F_i et r est le taux de rendement actuariel (*yield to maturity*). Le taux r peut être vu comme le taux qui permet d'égaliser la valeur actuelle des cash-flows futurs et le prix d'aujourd'hui, c'est donc un taux de rendement interne. Pour rappel, le prix de marché d'une obligation se calcule en actualisant les cash-flows avec la courbe des taux sans risque, qui associe à chaque maturité t le taux r_t .

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r_i)^i}$$

5.1.1 Sensibilité

La grandeur qui nous intéresse est la variation relative de cette valeur actuelle V pour une **petite** variation de r . Si nous supposons que les flux ne dépendent pas du taux r , alors nous pouvons introduire la sensibilité, couramment appelée *Modified Duration* en anglais :

$$S = \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} = -\frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \frac{iF_i}{(1+r)^{i+1}} = -\frac{1}{V(1+r)} \sum_{i=1}^n \frac{iF_i}{(1+r)^i}$$

Le signe « moins » qui apparaît illustre le phénomène suivant : lorsque les taux augmentent de 1 %, la valeur de marché diminue de S %.

Nous pouvons alors approximer la variation de la valeur actuelle par la formule suivante :

$$\Delta V \approx VS\Delta r \quad (5.1)$$

La sensibilité n'est toutefois qu'une variation au premier ordre. Dans la pratique, la relation entre le prix d'une obligation et son taux de rendement interne r n'est pas linéaire mais convexe. Cela implique notamment que des petites variations de $+\Delta r$ et de $-\Delta r$ auront des impacts différents (en valeur absolue) sur le prix, et que les impacts peuvent être plus ou moins grand selon l'endroit où l'on se situe sur la courbe Prix/Taux.

Ces phénomènes ne peuvent pas être captés par la sensibilité. Par exemple, considérons une obligation de maturité 10 ans, de coupon 2 % :

Date i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Flux F_i	2	2	2	2	2	2	2	2	2	102
Taux r_i (%)	-0,358	-0,25	-0,088	0,069	0,209	0,347	0,469	0,585	0,695	0,802

TABLE 5.1 – Exemple : cash-flows

On en déduit sa valeur avec la courbe des taux sans risque, son taux de rendement actuariel numériquement et sa sensibilité grâce aux formules précédentes :

Valeur V	TRI r	Sensibilité S
111,85	0,765 %	-9,147

Et nous pouvons juger de la précision de la sensibilité, en comparant les différences entre la valeur du nouveau prix estimé par la formule (5.1) et les vraies valeurs pour plusieurs Δr :

Δr (en %)	+1	+0,1	+0,01	-0,01	-0,1	-1
ΔV (5.1)	-10,2312	-1,02312	-0,102312	0,102312	1,02312	10,2312
Prix estimé $\Delta V + V$	101,6166	110,8246	111,7454	111,9501	112,8709	122,079
V réel	102,1388	110,8300	111,7455	111,9501	112,8763	122,6437
Différence relative (%)	-0,51	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,46

TABLE 5.2 – Approximation par la sensibilité

Comme nous pouvons le voir, la sensibilité sous-estime toujours le prix et est une bonne mesure lorsque les variations Δr sont faibles.

5.1.2 Duration

Une autre mesure fréquemment utilisée est la duration, au sens de Macaulay [14]. Sous les mêmes hypothèses, elle se définit comme la moyenne des dates de paiement des cash-flows

pondérée par leur valeur actualisée :

$$D = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \frac{iF_i}{(1+r)^i}$$

Elle assez intuitive, notamment dans le cas d'obligation zéro-coupon où elle est égale à la maturité. Nous pouvons de plus la relier à la sensibilité S :

$$S = -\frac{D}{1+r}$$

5.1.3 Convexité

Les limites de la sensibilité peuvent être en partie dépassées si nous considérons une variation au second ordre de r . En effet, grâce à un développement de Taylor¹ d'ordre 2, nous pouvons obtenir un résultat plus fin :

$$\Delta V \approx \frac{dV}{dr} \Delta r + \frac{1}{2!} \frac{d^2V}{dr^2} (\Delta r)^2$$

En divisant par V , nous pouvons faire apparaître la sensibilité S et un second terme :

$$\frac{\Delta V}{V} = S \Delta r + \frac{1}{2} C (\Delta r)^2$$

Ce qui nous permet de définir la convexité :

$$C = \frac{1}{V} \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{1}{V(1+r)^2} \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)F_i}{(1+r)^i}$$

Elle mesure l'impact d'une variation des taux sur la sensibilité, et permet alors d'affiner la relation (5.1) :

$$\Delta V \approx V \left(S \Delta r + \frac{1}{2} C (\Delta r)^2 \right) \quad (5.2)$$

La relation convexe entre le prix et le taux r entraîne que le prix augmentera plus vite suite à une baisse des taux, qu'il ne diminuera pour une même hausse. La convexité capture cette « vitesse » à laquelle le prix va augmenter suite à une baisse de taux, et cette « lenteur » à laquelle le prix va diminuer suite à une hausse de taux. Confronté à deux obligations de même sensibilité, un investisseur choisira donc celle avec la plus grande convexité, qui sera aussi la plus chère.

Si nous reprenons l'exemple précédent, en calculant la convexité :

1. Nous rappelons la formule de Taylor-Young : si f est une fonction définie sur un intervalle I réel et n fois dérivable en $a \in I$, alors $\forall x \in I$ nous avons : $f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$

Δr (en %)	+1	+0,1	+0,01	-0,01	-0,1	-1
ΔV (5.2)	-9,6884	-1,0177	-0,1023	0,1024	1,0285	10,7740
Prix estimé $\Delta V + V$	102,1594	110,8301	111,7455	111,9501	112,8763	122,6218
V réel	102,1388	110,8300	111,7455	111,9501	112,8763	122,6437
Différence relative (%)	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02

TABLE 5.3 – Approximation par la onvexité

Nous voyons ainsi clairement l'intérêt de la convexité qui permet d'obtenir de meilleurs résultats lorsque les variations Δr sont plus grandes.

5.1.4 Duration effective

Sensibilité et convexité sont des indicateurs qui peuvent présenter un désavantage majeur : ils supposent que les flux F_i ne dépendent pas du taux r , ce qui peut être gênant par exemple en épargne où les flux de passifs dépendent du rendement des actifs.

Il est alors possible de définir une nouvelle mesure de duration, la duration effective, comme suit :

$$D_{eff} = \frac{V^- - V^+}{2V\Delta r}$$

Elle consiste à calculer directement les valeurs actuelles V^- et V^+ suite à l'application de chocs $-\Delta r$ et $+\Delta r$.

Nous pouvons de même calculer une convexité effective qui fonctionne sur le même principe :

$$C_{eff} = \frac{V^- + V^+ - 2V}{V(\Delta r)^2}$$

Dans le tableau suivant, nous récapitulons toutes ces mesures en reprenant l'exemple précédent :

Sensibilité	Convexité	Duration	Duration eff. ($\Delta r = 0.01$ %)	Convexité eff. ($\Delta r = 0.01$ %)
-9,147	97,060	9,217	9,147	97,060

TABLE 5.4 – Durations et convexités

Comme nous pouvons le constater, pour un Δr assez petit, nous obtenons pour les mesures « effectives » des valeurs identiques aux formules classiques de la sensibilité et de la convexité.

5.2 Immunisation

Maintenant que nous avons présenté les notions nécessaires, nous pouvons désormais entrer en détail dans la théorie de l'immunisation de portefeuille.

L'idée de base est la suivante :

- Si les valeurs actuelles du passif et de l'actif sont égales,
- Et si leurs sensibilités sont aussi égales,

Alors, l'actif « suivra » le passif en cas de variation de taux d'intérêt. Notons V_A et S_A la valeur actuelle et la sensibilité de l'actif, V_L et S_L celles du passif.

Si :

$$S_A = S_L \iff \frac{1}{V_A} \frac{dV_A}{dr} = \frac{1}{V_L} \frac{dV_L}{dr}$$

De plus, si les valeurs actuelles V_A et V_L sont égales, nous obtenons :

$$\frac{dV_A}{dr} = \frac{dV_L}{dr} \iff \frac{dV}{dr} = 0$$

Où $V = V_A - V_L$ est le surplus, qui est immunisé face à de petites translations de la courbe des taux.

La valeur actuelle étant linéaire, nous pouvons en déduire que la sensibilité l'est aussi, par exemple, la sensibilité S de deux obligations de valeurs actuelles V_1 et V_2 vaut :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{V} \left(\frac{dV_1}{dr} + \frac{dV_2}{dr} \right) \\ &= \frac{1}{V} (S_1 V_1 + S_2 V_2) \\ &= \frac{V_1}{V} S_1 + \frac{V_2}{V} S_2 \end{aligned}$$

Immuniser un portefeuille de passif de valeur V_L et sensibilité S_L revient alors à choisir la quantité x_j de chaque obligation j disponible sur le marché de valeur V_j et sensibilité S_j , pour $1 \leq j \leq m$, telles que :

Immunisation

$$\begin{aligned} V_L &= \sum_{j=1}^m x_j V_j \\ S_L &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{V_j}{V_L} S_j \end{aligned} \tag{5.3}$$

Il n'y a pas d'unique solution à ce système et il est également possible de rajouter une contrainte de convexité :

$$C_L = \sum_{j=1}^m x_j \frac{V_j}{V} C_j$$

Écarts de duration

Si l'actif et le passif ne sont pas en parfaite adéquation, nous pouvons être amené à considérer deux cas qui peuvent avoir une grande importance pour un assureur :

- L'actif est plus long que le passif. Cela peut permettre d'obtenir de meilleurs rendements, mais peut présenter un risque de liquidation si l'assureur doit vendre des titres avant leur maturité et potentiellement en moins-value latente. L'assureur est donc exposé à un risque de perte en cas de cession de titres et à un risque sur son bilan : la sensibilité de l'actif étant plus grande, sa valeur de marché peut diminuer plus vite que celle du passif.
- Le passif est plus long que l'actif. L'assureur fait alors face à un risque de réinvestissement car pour augmenter la sensibilité de son actif, il doit acheter des titres, à prix élevé dans un environnement de taux bas, de façon à obtenir de meilleurs rendements.

5.3 La méthode des Key Rate Durations

Dans les sections précédentes, nous avons présenté des indicateurs très synthétiques du risque de taux d'intérêt, au sens où toute l'information se résumait dans un voire deux indicateurs : sensibilité et convexité. De plus, ils supposent l'hypothèse assez forte que les cash-flows soient actualisés avec un taux unique, en l'occurrence le taux de rendement actuariel, ce qui revient à supposer que la courbe des taux est **plate** et que les variations de taux dont nous cherchons les impacts sont des **translations** parallèles de cette courbe des taux. Les évolutions du marché nous montrent que ces hypothèses ne sont en pratique jamais vérifiées.

Nous rappelons que la valeur de marché d'une obligation se calcule avec la courbe des taux sans risque :

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + r_i)^i}$$

Il devient alors nécessaire de modéliser la structure par terme des taux (ou de façon équivalente le facteur d'actualisation). Une approche peut être de donner une forme paramétrique à la courbe des taux et d'estimer ses paramètres à l'aide de données de marché. Une seconde approche est de décrire les mouvements dans la courbe des taux par un certain nombre de facteurs. En ce sens, Ho (1992, voir [8]) suggère que les changements dans la courbe des taux sont déterminés par certains « taux clés », c'est-à-dire par certaines maturités. Le *Key Rate Durations* (KRD) est un vecteur représentant la sensibilité du prix à une variation de chaque taux clé. Cependant, le nombre de taux clés à retenir reste assez arbitraire.

Formulation

Notons m le nombre de taux clés, τ_i le i -ème taux clé et $\Delta r(\tau_i)$ la variation (*shift*) du i -ème taux clé.

La variation de l'ensemble de la courbe des taux peut être approximée par interpolation

linéaire des variations $\Delta r(\tau_i)$ de chaque taux clé. L'interpolation est utilisée pour modéliser la variation de la courbe des taux, et non pas la courbe des taux directement. La figure suivante (5.1) illustre les points suivants : les maturités clés peuvent être choisies arbitrairement (par exemple 1 an, 3 ans, 5 ans, 15 ans...), le shift est interpolé.

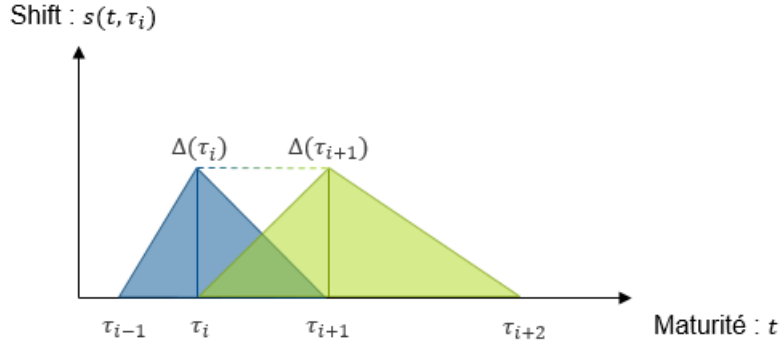


FIGURE 5.1 – KRD : interpolation des shifts

Définissons formellement ces shifts : soit $s(t, \tau_i)$ le shift causé par le i -ème taux clé pour la maturité t de la courbe. Comme nous pouvons le voir sur la figure (5.1), $s(t, \tau_i)$ est nul pour les maturités t inférieures à τ_{i-1} , nul pour les maturités supérieures à τ_{i+1} , et interpolé linéairement entre les deux :

$$s(t, \tau_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau_{i-1} \\ \Delta r(\tau_i) \frac{t - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} & \text{si } \tau_{i-1} \leq t \leq \tau_i \\ \Delta r(\tau_i) \frac{\tau_{i+1} - t}{\tau_{i+1} - \tau_i} & \text{si } \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1} \\ 0 & \text{si } t > \tau_{i+1} \end{cases} \quad (5.4)$$

Pour le premier taux clé, nous supposons que le shift s'applique à toute les maturités inférieures à τ_1 :

$$s(t, \tau_1) = \begin{cases} \Delta r(\tau_1) & \text{si } t < \tau_1 \\ \Delta r(\tau_1) \frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1} & \text{si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ 0 & \text{si } t > \tau_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

De même pour le dernier taux clé, nous supposons que le shift s'applique jusqu'à la dernière maturité :

$$s(t, \tau_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau_{m-1} \\ \Delta r(\tau_m) \frac{t - \tau_{m-1}}{\tau_m - \tau_{m-1}} & \text{si } \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \\ \Delta r(\tau_m) & \text{si } t > \tau_m \end{cases} \quad (5.6)$$

Nous pouvons alors obtenir le variation de la courbe des taux pour une maturité en sommant tous les shifts :

$$\Delta r(t) = s(t, \tau_1) + s(t, \tau_2) + \dots + s(t, \tau_m)$$

KRD

Introduisons maintenant une petite variation sur un taux clé τ_i : il va induire un changement dans le prix. Cette sensibilité du prix à chaque petite variation d'un taux clé est la *Key Rate Duration* :

$$KRD_i = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta r(\tau_i)}$$

La notation $\Delta r(\tau_i)$ dans l'équation précédente signifie qu'il faut recalculer le prix du titre suite à une variation du i -ème taux clé, qui se matérialise sur la courbe des taux par des interpolations grâce aux contributions $s(t, \tau_i)$.

Les KRD_i seront donc calculées selon une approche de « duration effective » :

$$KRD_i = \frac{V^- - V^+}{2V \Delta r(\tau_i)}$$

Où la valeur de marché V^- se détermine en utilisant la courbe des taux choquée par les shifts $-s(t, \tau_i)$ et V^+ avec la courbe des taux choquée par les shifts $+s(t, \tau_i)$.

Nous pouvons alors retrouver la duration effective en sommant les KRD_i :

$$D_{eff} = \sum_{i=1}^m KRD_i$$

Toutefois, pour que l'égalité précédente soit vraie, il faut que les cash-flows tombent aux mêmes dates que les taux clé τ_i . Il est donc nécessaire d'effectuer un mapping des cash-flows pour assigner chaque cash-flow au taux clé le plus proche. Dans la pratique, on effectue ce mapping à l'aide des shifts $s(t, \tau_i)$. Par exemple, un cash-flow tombant à une date t comprise entre τ_2 et τ_3 sera assigné sur τ_2 avec un poids $\frac{s(t, \tau_2)}{\Delta r(t)}$ et sur τ_3 avec un poids $\frac{s(t, \tau_3)}{\Delta r(t)}$.

Une fois le vecteur $KRD = (KRD_1, \dots, KRD_m)$ entièrement déterminé, la procédure à suivre pour immuniser le portefeuille est la suivante :

1. Sélectionner les J obligations disponibles et utilisables pour la couverture.

2. Calculer le vecteur $KRD_j = (KRD_{j,1}, \dots, KRD_{j,m})$ pour chaque obligation j .
3. Déterminer le nombre x_j d'obligations j à détenir. Pour cela, nous introduisons une mesure de distance entre le vecteur de KRD du passif et ceux des obligations qu'il conviendra de minimiser.

KRD - Résolution

$$d(x_1, \dots, x_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^J x_j \frac{V_j}{V_L} KRD_{j,i} - KRD_i \right)^2} \quad (5.7)$$

5.3.1 Exemple

Prenons l'exemple suivant pour bien illustrer la méthode. Nous considérons les cash-flows de passif et la courbe des taux EIOPA au 31/12/2017 suivantes :

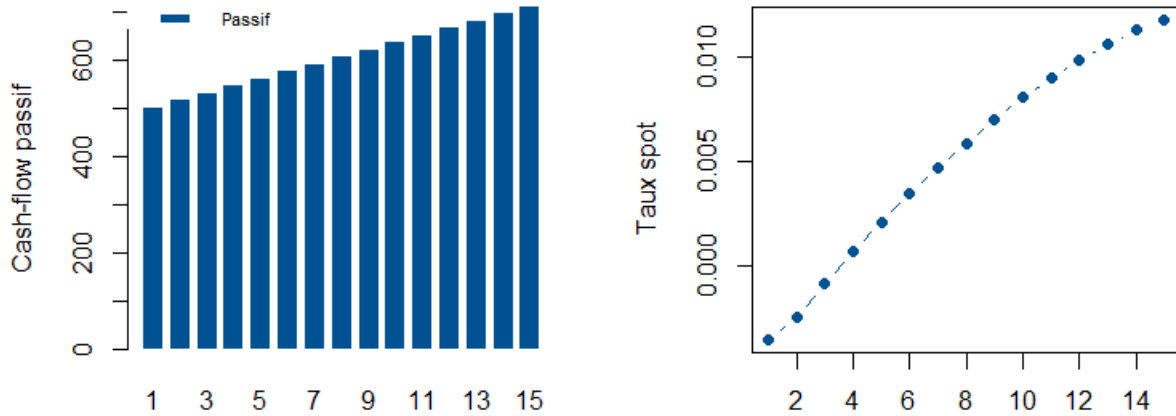


FIGURE 5.2 – Passif et courbe des taux

Choix des taux clés Le choix du nombre de taux clés étant purement arbitraire, nous choisissons $m = 4$ taux clés aux maturités 3 ans, 6 ans, 9 ans et 12 ans de la courbe des taux de façon à avoir une segmentation de la courbe des taux assez régulière. La variation appliquée sera $\Delta r(\tau_i) = 0,01 \% = 1 \text{ bp}$ pour chaque taux clé.

Nous pouvons alors calculer la matrice des shifts $(s(t, \tau_i))_{t,i}$ pour $1 \leq t \leq 15$ et $1 \leq i \leq 4$, afin d'assigner les cash-flows aux bons taux clés pour déduire le vecteur de KRD du passif.

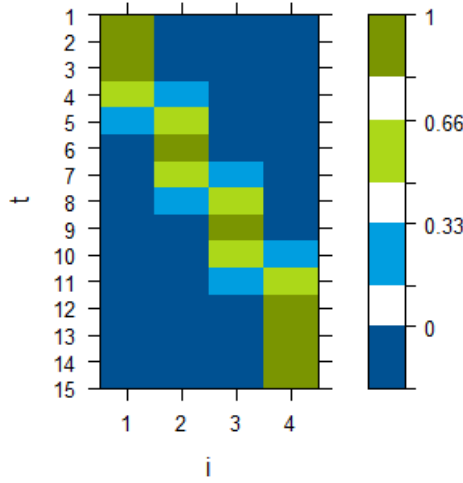


FIGURE 5.3 – Matrice des shifts $s(t, \tau_i)$ (en bp)

Comme nous pouvons le voir sur la représentation de la matrice $(s(t, \tau_i))_{t,i}$ ci-dessus le flux qui va correspondre au premier taux clé τ_1 sera égal à :

$$\begin{aligned} CF(\tau_1) &= \sum_{t=1}^{15} CF_t \frac{s(t, \tau_1)}{\Delta r(\tau_1)} \\ &= 500 \frac{1bp}{1bp} + 515 \frac{1bp}{1bp} + 530 \frac{1bp}{1bp} + 545 \frac{0,66bp}{1bp} + 560 \frac{0,33bp}{1bp} + 575 \frac{0bp}{1bp} + 0 + \dots \end{aligned}$$

Nous obtenons :

	$CF(\tau_1)$	$CF(\tau_2)$	$CF(\tau_3)$	$CF(\tau_4)$
Flux	2095	1725	1860	3395

TABLE 5.5 – Mapping des cash-flows

KRD du passif Les KRD étant calculées selon une approche « duration effective », il faut pour chaque taux clé, calculer la valeur actuelle du passif après application des chocs à la baisse et à la hausse sur la bonne maturité. Par exemple, pour le KRD_1 , nous calculons la valeur actuelle en choquant la maturité $\tau_1 = 3$ ans, et en ne modifiant pas les trois autres :

$$KRD_1 = \frac{V_L^- - V_L^+}{2V \cdot 1bp}$$

Avec pour le choc à la baisse :

$$V_L^- = \frac{CF(\tau_1)}{(1 + r_{\tau_1} - 1bp)^{\tau_1}} + \frac{CF(\tau_2)}{(1 + r_{\tau_2})^{\tau_2}} + \frac{CF(\tau_3)}{(1 + r_{\tau_3})^{\tau_3}} + \frac{CF(\tau_4)}{(1 + r_{\tau_4})^{\tau_4}}$$

Nous en déduisons le vecteur de KRD du passif :

KRD_1	KRD_2	KRD_3	KRD_4	D_{eff}
0,74	1,18	1,83	4,19	7,94

TABLE 5.6 – **KRD du passif**

Comme nous pouvons le voir dans le tableau précédent, plus les taux clés sont de grandes maturité, plus les KRD sont élevées. Ceci provient de trois effets :

- la structure des cash-flows qui est croissante : les derniers cash-flows ont plus de poids dans la valeur actuelle,
- la courbe des taux croissante : les cash-flows des maturités les plus éloignées sont actualisés plus fortement et sont donc plus sensibles à une variation des taux de maturités éloignées,
- la matrice des shifts : elle assigne au dernier taux clé ($\tau_4 = 12$ ans) des cash-flows de date 10, 11, ... 15. Nous avons ainsi $CF(\tau_4) = 3395$.

Choix des obligations pour la couverture Nous choisissons pour cet exemple les obligations à coupon suivantes :

Id j	Maturité	Coupon	Principal
1	15	3,5 %	100
2	10	3 %	100
3	5	2 %	100
4	3	1 %	100

TABLE 5.7 – **Obligations utilisées**

Nous pouvons ensuite procéder de la même façon, c'est-à-dire à partir des cash-flows qui doivent être « mappés » comme ceux du passif, calculer leurs KRD, qui sont présentés dans le tableau suivant :

Id Obligation j	$KRD_{j,1}$	$KRD_{j,2}$	$KRD_{j,3}$	$KRD_{j,4}$	D_{eff}
1	0,30	0,44	0,64	8,95	10,34
2	0,30	0,43	5,16	2,99	8,88
3	1,14	3,70	-	-	4,84
4	3,00	-	-	-	3,00

TABLE 5.8 – **KRD actif**

Résolution du problème Ayant tous les éléments en main, nous cherchons maintenant à résoudre le problème d'optimisation visant à déterminer le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des quantités d'obligation à détenir.

$$d(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 x_j \frac{V_j}{V_L} KRD_{j,i} - KRD_i \right)^2} \quad (5.8)$$

Une optimisation numérique nous permet d'obtenir la composition suivante :

$$\mathbf{x}^* = (22,54 \quad 21,74 \quad 18,83 \quad 7,19)$$

L'algorithme tenant compte du poids de chaque obligation ($x_j \frac{V_j}{V_L} = \text{quantité} \times \text{valeur actuelle}$ de l'obligation par rapport à la valeur totale à couvrir), le vecteur optimal $\mathbf{x}^*$ obtenu permet de faire correspondre à la fois les durations et les valeurs actuelles :

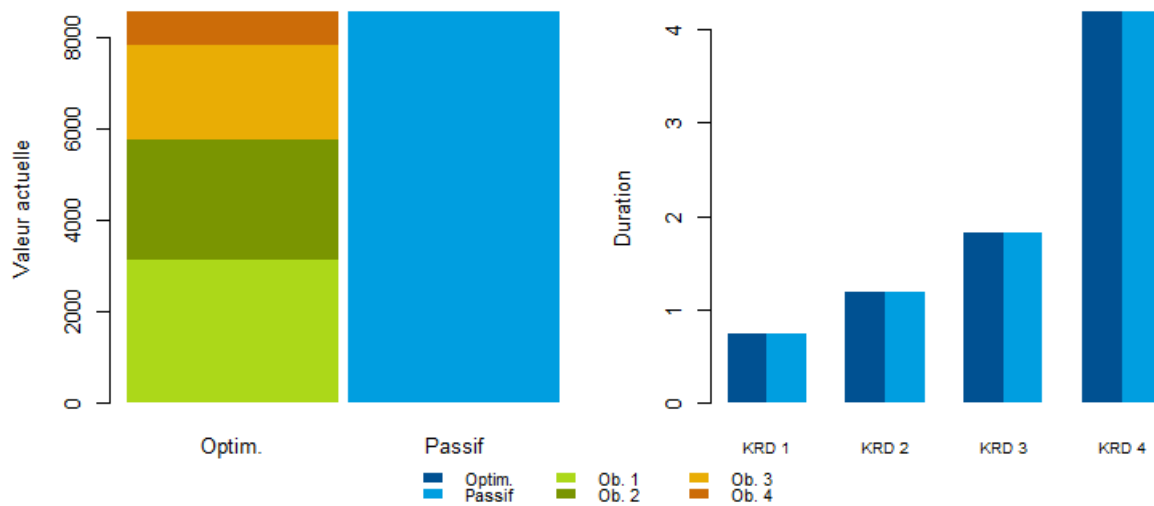


FIGURE 5.4 – Couverture des valeurs actuelles et des KRD

5.3.2 Limites

L'approche des Key Rate Durations reste assez simple et permet d'identifier la sensibilité d'un titre à des segments de la courbe des taux. La duration effective est la mesure globale de l'exposition au risque de taux, et les KRD sont les composantes de ce risque total.

Cependant, quelques remarques peuvent être formulées concernant l'utilisation des KRD :

- Le choix du nombre de taux clés et de leurs emplacements sur la courbe des taux est entièrement subjectif. Une pratique assez naturelle serait de retenir les maturités les plus utilisées sur le marché (3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 30 ans par exemple). Toutefois, il est possible de réduire ou d'augmenter le nombre de taux clé au bon vouloir de l'investisseur, même si cela peut avoir des conséquences immédiates sur l'optimisation : il faut trouver le bon compromis entre nombre et placements des taux clés sur la courbe des taux, et le nombre de titres retenus pour la couverture.
- La forme des shifts n'est pas plausible dans la réalité (voir figure (5.1)).
- Les comportements historiques des segments de la courbe des taux ne sont pas pris en compte, alors qu'ils peuvent contenir d'importantes informations. De plus, comme les changements dans les taux clés sont supposés indépendants les uns des autres, le modèle des KRD peut impliquer des mouvements de courbe des taux dont les probabilités de survenance sont en pratique très faibles, mais imposant tout de même de fortes restrictions sur

la composition du portefeuille de couverture.

5.4 Sensibilité avec la courbe des taux

Comme nous venons de le voir avec la méthode des KRD, il peut être intéressant de segmenter la duration ou la sensibilité afin d'immuniser un passif donné. En ce sens, nous pouvons présenter des définitions « plus fines » de la sensibilité et de la convexité, calculées cette fois avec la courbe des taux adéquate (*yield-duration*) :

L'idée est de calculer la contribution S_i^Y de chaque flux F_i tombant à la date i , de façon à avoir un indicateur de risque de taux par maturité. Ainsi :

$$S_i^Y = \frac{1}{V} \frac{dV}{dr_i} = -\frac{iF_i}{V(1+r_i)^{i+1}}$$

Pour obtenir la sensibilité globale, nous sommions les contributions S_i^Y :

$$S^Y = \sum_{i=1}^n S_i^Y$$

Nous pouvons procéder de la même façon pour la convexité :

$$C_i^Y = \frac{1}{V} \frac{d^2V}{dr_i^2} = \frac{i(i+1)F_i}{V(1+r_i)^{i+2}}$$

Et :

$$C^Y = \sum_{i=1}^n C_i^Y$$

5.5 Utiliser des produits dérivés : le swap de taux d'intérêt

Une situation typique à laquelle les assureurs peuvent être confrontée est la suivante : des passifs relativement longs (de duration supérieure à 10 ans par exemple) représentés par des actifs plus courts. Pour résoudre cette inadéquation, plusieurs stratégies viennent à l'esprit : augmenter l'allocation du portefeuille global en obligation ou allonger la duration des obligations déjà en portefeuille. Il existe une troisième option : recourir à des swaps de taux d'intérêt dans le cadre d'une stratégie de *duration overlay* (« superposition de duration » avec des dérivés). L'apport d'une telle stratégie est qu'elle permet de modifier certains aspects du portefeuille, dans notre cas sa duration, tout en laissant le portefeuille sous-jacent inchangé.

5.5.1 Définition

Les swaps de taux d'intérêt sont des produits dérivés qui impliquent deux contreparties et permettent l'échange d'un taux variable (ou flottant) contre un taux fixe sur une période définie. Un investisseur ayant emprunté à taux variable peut contracter un swap payeur (paie un taux fixe en l'échange d'un taux variable) pour se couvrir contre une hausse des taux, tandis qu'un emprunteur à taux fixe voulant profiter d'une potentielle baisse des taux va entrer dans un swap receveur (reçoit le fixe et paie le variable).

Afin de montrer comment les swaps peuvent être utilisés pour aligner les durations de l'actif, nous devons les formaliser mathématiquement. Notons :

- T_0 la date de début du swap. Aucun flux n'est échangé à cette date,
- $T_1, \dots, T_n$ les dates d'échange des flux. Nous faisons ici l'hypothèse que les flux fixes et variables sont échangés aux mêmes dates, ce qui n'est pas toujours observé en pratique (taux fixe échangé annuellement et taux variable trimestriellement par exemple).
- N le nominal du swap sur lequel sont appliqués les taux d'intérêts échangés,
- K le taux fixe,
- $R(T_i, T_{i+1})$ le taux variable en T_i pour un emprunt sur la période (T_i, T_{i+1}) . Les taux variables sont généralement l'Euribor² ou le Libor³.

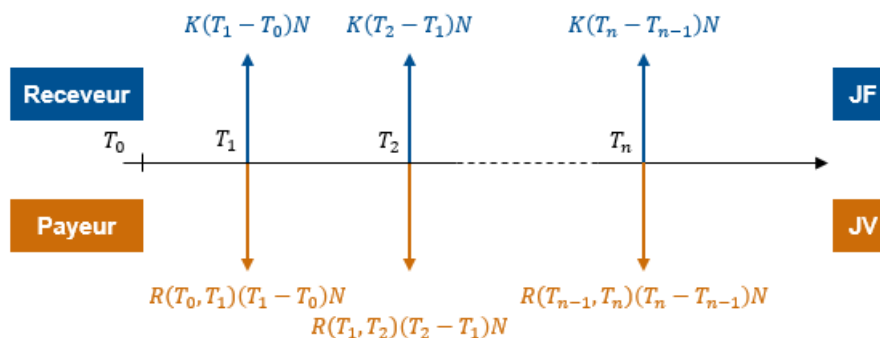


FIGURE 5.5 – Échanges de flux d'un swap

Les flux échangés sont présentés dans la figure (5.5) qui met en évidence la jambe fixe (JF) et la jambe variable (JV) dont nous noterons $JF(t)$ et $JV(t)$ les valeurs en $t \leq T_0$. Considérons un investisseur se plaçant dans un swap receveur :

- il reçoit $K(T_i - T_{i-1})N$ à chaque date T_i ,
- il paie $R(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})N$ à chaque date T_i . C'est le taux variable constaté à la fin de la période précédente qui est utilisé.

Jambe Fixe Commençons par rappeler qu'en absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), la valeur en t d'un flux déterministe X tombant en $T > t$ est $P(t, T)X$ où $P(t, T)$ est le prix en

2. European Interbank Offered Rate

3. London Interbank Offered Rate

t d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut payant 1 unité en T . $P(t, T)$ est donc un facteur d'actualisation.

La valeur en t de la jambe fixe peut alors s'exprimer en AOA comme la somme des valeurs actuelles des flux fixes :

$$JF(t, K) = NK \sum_{i=1}^n P(t, T_i)(T_i - T_{i-1})$$

Jambe Variable Nous devons déterminer en t la valeur du flux $R(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})N$ en T_i .

Pour cela, nous rappelons que sous la convention d'intérêt simple utilisée pour les swaps, il faut capitaliser $P(t, T)$ pendant $(T - t)$ au taux $R(t, T)$ pour obtenir 1 en T : $P(t, T)(1 + R(t, T)(T - t)) = 1$. Ainsi, $R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right)$.

Ainsi le flux variable en T_i peut s'écrire :

$$\begin{aligned} R(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})N &= \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) (T_i - T_{i-1})N \\ &= \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) N \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ en T_i vaut 1 en T_{i-1} , qui vaut lui même $P(t, T_{i-1})$ en t , et que 1 en T_i vaut $P(t, T_i)$ en t , on en déduit que :

$$\begin{aligned} JV(t) &= N \sum_{i=1}^n [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)] \\ &= N [P(t, T_0) - P(t, T_n)] \end{aligned}$$

Le prix du swap receveur est donc la différence $JF(t) - JV(t)$:

$$\Pi^{R-Swap}(t, K) = N \left(K \sum_{i=1}^n P(t, T_i)(T_i - T_{i-1}) + P(t, T_n) - P(t, T_0) \right)$$

Cette expression nous permet de remarquer qu'un swap receveur peut être interprété comme une position longue sur une obligation à coupons fixes et une position courte sur une obligation à taux variable (*floating rate note*, voir [5]).

En effet, une **obligation à taux fixe** est un titre qui assure le paiement de quantités c_i aux dates $(T_1, \dots, T_n)$. Les cash-flows sont usuellement $c_i = N(T_i - T_{i-1})K$ pour $i < n$ et $c_n = N(T_n - T_{n-1})K + N$ car le nominal N est remboursé en n , où K est le taux de coupon. La valeur $OF(t, K)$ de l'obligation à taux fixe K en t est alors :

$$OF(t, K) = N \left(K \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i) + P(t, T_n) \right)$$

Une **obligation à taux variable** est un titre qui assure le paiement du Libor aux dates $(T_1, \dots, T_n)$. Le taux Libor variable est mis à jour aux dates précédentes $(T_0, \dots, T_{n-1})$. Il y a de plus à l'instant final T_n un remboursement du nominal. Pour obtenir la valeur $OV(t)$ d'une obligation à taux variable, on considère l'opposé de la valeur $\Pi^{R-Swap}(t, 0)$ d'un swap receveur payant un taux fixe nul ($K = 0$), en ajoutant le paiement du nominal à la date T_n . Nous obtenons alors :

$$OV(t) = -\Pi^{R-Swap}(t, 0) + NP(t, T_n) = NP(t, T_0)$$

Nous retrouvons bien que $\Pi^{R-swap}(t, K) = OF(t, K) - OV(t)$.

L'avant dernière expression est intéressante car elle nous indique qu'à une date $t \leq T_0$, la valeur de l'obligation variable est équivalente à N unités vues à la prochaine mise à jour du taux variable, T_0 dans notre cas. Sa valeur ne dépend pas de flux postérieurs.

5.5.2 Duration d'un swap et utilisation en pratique

Nous pouvons alors déterminer la duration d'un swap comme étant la différence des durations des obligations qui le constituent :

$$D_S = D_{OF} - D_{OV}$$

Elles se calculent aisément, avec la particularité que la duration de la partie variable est égale à la durée $T_1 - T_0$ car comme nous l'avons dit en fin de section précédente, la valeur en t de l'obligation variable ne dépend que de $P(t, T_0)$. C'est justement cette très courte duration (par exemple 6 mois si les taux sont mis à jour deux fois par an) qui va donner aux swaps leur intérêt.

Exemple Considérons un portefeuille d'actifs d'une certaine duration D_A , trop petite pour être en adéquation avec une duration cible à atteindre D^* , typiquement la duration d'un passif à couvrir. Comme un swap de taux ne modifie pas la valeur de marché V_A , nous avons :

$$\left(\frac{V_A - N}{V_A} \right) D_A + \frac{N}{V_A} (D_S + D_A) = D^*$$

La duration cible s'obtient en pondérant les deux segments du portefeuille : le premier, non affecté par le swap avec un poids⁴ $(V_A - N)/V_A$ et le second, affecté par le swap qui allonge sa duration avec un poids N/V_A .

4. Notons que ces poids sont utilisés pour le calcul de la duration. La valeur de marché V_A du portefeuille reste toujours égale à V_A .

En remplaçant D_S par $D_{OF} - D_{OV}$ et isolant N , nous obtenons :

$$N = V_A \left(\frac{D^* - D_A}{D_{OF} - D_{OV}} \right)$$

Par exemple, Si $V_A = 1000$, $D_A = 8$ et que la cible à atteindre est $D^* = 10$, alors en présence d'un swap de duration $D_{OF} = 6$ et dont les flux variables s'échangent tous les $D_{OV} = 0.25$ années, alors $N = 347,8$ est le nominal permettant d'allonger la duration de l'actif à 10 ans.

5.5.3 Limites

Les swaps de taux sont intéressants grâce à leur flexibilité : de nombreuses maturités sont disponibles. Leur particularité de ne pas « acheter » un titre mais de seulement s'engager sur des flux permet d'accroître la duration d'un portefeuille d'actif. Il est aussi envisageable de mettre en place une couverture plus fine, en segmentant le passif comme nous l'avons fait dans la section précédentes (KRD).

En revanche, entrer dans des swaps implique de s'exposer à un risque de crédit.

Troisième partie

Modèles d'allocation d'actifs

Chapitre 6

Analyse rendement-risque de Markowitz

Nous allons détailler dans ce chapitre la théorie de sélection de portefeuille de Markovitz (voir [15]). L'objectif est de déterminer le portefeuille optimal au sens du couple rendement-risque, ou moyenne-variance, c'est-à-dire le portefeuille qui, pour un rendements donné, minimisera la variance, ou qui maximisera le rendement pour une variance donnée. L'idée principale derrière cette théorie est qu'une judicieuse combinaison d'actifs permet une diversification optimale, et donc une réduction de la variance du portefeuille.

6.1 Formulation du problème

La théorie du portefeuille de Markovitz est statique au sens où ne sont considérées que deux dates : la date $t = 0$ à laquelle nous devons constituer un portefeuille, et la date $t = t_1$ à laquelle nous constatons les rendements et donc la valeur finale du portefeuille.

Considérons dans un premier temps N actifs risqués, ayant chacun un taux de rendement R_i défini par :

$$R_i = \frac{S_i(t_1) - S_i(0)}{S_i(0)}, \quad \forall i \in [1, N]$$

où $S_i(t)$ est le prix de l'actif i à la date t . Les taux de rendement R_i sont des variables aléatoires, d'espérance $\mathbb{E}(R_i) = \mu_i$. On note $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ le vecteur des espérances, et $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ le vecteur unité.

Nous posons $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^T$ la composition du portefeuille où w_i représente la proportion investie dans l'actif i .

Le taux de rendement du portefeuille s'écrit alors $R_P = \sum_{i=1}^N w_i R_i$, et en posant $\boldsymbol{\Omega} = (\sigma_{ij})_{(i,j) \in [1,N]}$ la matrice de covariance des R_i , ses deux premiers moments sont :

$$\begin{aligned} \mu_P &= \mathbb{E}(R_P) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} \\ \sigma_P^2 &= \text{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} \end{aligned}$$

Le principe est, en se donnant un taux de rendement cible μ_P , de déterminer le portefeuille optimal $\mathbf{w}^*$ qui minimise la variance :

Portefeuille optimal

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w} \\
& \text{s.c.} \quad \mathbf{\mu}^T \mathbf{w} = \mu_P \\
& \quad \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Ce problème nécessite de connaître les rendements $\mathbf{\mu}$ et la matrice de covariance $\mathbf{\Omega}$: nous expliquerons en détail la méthode retenue en partie 4. En supposant que la matrice de covariance $\mathbf{\Omega}$ soit inversible, on peut obtenir une expression exacte du portefeuille optimal en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange¹ :

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{\Omega}^{-1}(\lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{\mu})$$

Où $\lambda_1 = \frac{c - b\mu_P}{ca - b^2}$, $\lambda_2 = \frac{\mu_P a - b}{ca - b^2}$, et $a = \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}$, $b = \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\mu}$ et $c = \mathbf{\mu}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\mu}$.

Il est alors possible de déterminer l'ensemble des portefeuilles de variance minimale en faisant varier μ_P , à l'aide de la formule :

$$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^{*T} \mathbf{\Omega} \mathbf{w}^* = \frac{a\mu_P^2 - 2b\mu_P + c}{ca - b^2}$$

Ces couples (μ_P, σ_P^2) formeront une courbe dans le plan appelée frontière de variance minimale. C'est naturellement la partie supérieure de la courbe qui nous intéresse, la frontière efficiente. Pour chaque portefeuille situé sur cette frontière, il est impossible de trouver un portefeuille ayant simultanément un rendement plus élevé et un risque plus faible.

La figure (6.1) montre un exemple de frontière dans le plan rendement-volatilité, pour 3 actifs risqués, typiquement deux actions et une obligation, ayant pour caractéristiques :

$$\mathbf{\mu} = \begin{pmatrix} 8\% \\ 7\% \\ 1,7\% \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,018 & -0,0007 \\ 0,018 & 0,015 & -0,0005 \\ -0,0007 & -0,0005 & 0,0016 \end{pmatrix}$$

Le point G situé au "sommet" de la parabole représente le portefeuille global de variance minimale, de coordonnées $(\sigma_G^2, \mu_G) = (\frac{1}{a}, \frac{b}{a})$. Nous pouvons en déduire sa composition $\mathbf{w}_G^*$, en effet, $\lambda_1^G = \frac{1}{a}$ et $\lambda_2^G = 0$, d'où :

$$\mathbf{w}_G^* = \frac{1}{a} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e}$$

1. Les démonstrations des résultats qui vont suivre sont détaillées en annexe B.

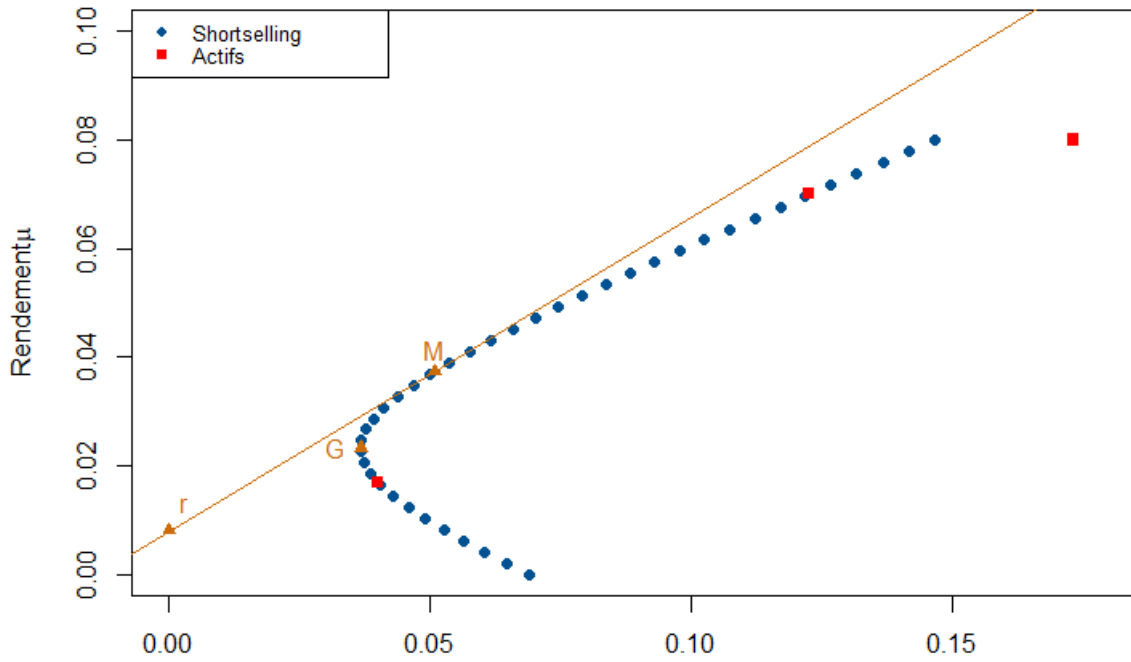


FIGURE 6.1 – Frontière de variance minimale

6.2 Inclusion d'un actif sans risque

Nous allons maintenant considérer, en plus des N actifs risqués, un actif sans risque rémunérant au taux sans risque r , et dans lequel l'investisseur va investir une proportion $(1 - \mathbf{w}^T \mathbf{e})$ de richesse. Cet actif sans risque n'est pas corrélé aux N actifs risqués. Le problème d'optimisation devient alors :

Portefeuille optimal (actif sans risque)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + (1 - \mathbf{e}^T \mathbf{w})r = \mu_P. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ce problème peut également se résoudre analytiquement, on obtient alors, en posant $\lambda = \frac{\mu_P - r}{r^2 a - 2rb + c}$:

$$\mathbf{w}_{rf}^* = \lambda \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r \mathbf{e})$$

Les portefeuilles de variance minimale ont pour variance et volatilité :

$$\sigma_P^2 = \frac{(\mu_P - r)^2}{r^2 a - 2rb + c} \implies \sigma_P = \frac{|\mu_P - r|}{\sqrt{r^2 a - 2rb + c}}$$

Il en résulte que les portefeuilles de variance minimale sont sur les deux demi-droites suivantes, la première étant la demi-droite efficiente :

$$\begin{aligned}\mu_P &= r + \sigma_P \sqrt{r^2 a - 2rb + c} \\ \mu_P &= r - \sigma_P \sqrt{r^2 a - 2rb + c}\end{aligned}$$

Typiquement, lorsque $r < \mu_G = \frac{b}{a}$, la demi-droite efficiente est tangente à la frontière efficiente obtenue avant l'introduction de l'actif sans risque. Il est alors possible de déterminer un portefeuille M tangent², comme nous pouvons le voir sur la figure (6.1), après introduction d'un actif sans risque au taux $r = 0.8\%$ ³.

Ce portefeuille tangent M , dit de marché, est dorénavant le seul portefeuille constitué uniquement d'actifs risqués qui soit efficient. Les autres portefeuilles efficients sont des combinaisons linéaires de l'actif sans-risque et du portefeuille de marché : ce résultat est connu sous le nom de *one-fund theorem*.

6.3 Optimisation sous contrainte

Dans les deux sections précédentes, la seule contrainte portant sur le vecteur $\mathbf{w}$ était une contrainte de plein investissement impliquant que la somme de ses composantes soit égale à 1. Il n'est donc pas exclu que le portefeuille optimal comporte des positions courtes sur certains actifs, c'est-à-dire que $w_i < 0$. Dans notre contexte d'allocation d'actifs pour un réassureur, les positions courtes, synonymes de ventes à découvert ne sont pas autorisées. Nous devons donc ajouter une contrainte de non-négativité sur $\mathbf{w}$: $w_i \geq 0, \forall i \in [1, N]$. La principale conséquence de ces N contraintes d'inégalités est qu'il n'y a plus de solution explicite au problème d'optimisation.

Il est néanmoins possible de trouver une solution numériquement grâce aux algorithmes d'optimisation quadratique.

Un problème d'optimisation quadratique consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction quadratique sous des contraintes décrites par des fonctions linéaires. Mathématiquement⁴, nous pouvons le mettre sous la forme suivante :

Optimisation quadratique

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{w} - \mathbf{d}^T \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{A}_{ineg}^T \mathbf{w} \geq \mathbf{b}_{ineg} \\ & \mathbf{A}_{eg}^T \mathbf{w} = \mathbf{b}_{eg}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

2. Le point M est à l'intersection de la parabole $\sigma_P^2 = \frac{a\mu_P^2 - 2b\mu_P + c}{ca - b^2}$ et de la droite $\mu_P = r + \sigma_P \sqrt{r^2 a - 2rb + c}$, on peut donc montrer que $\mu_M = \frac{c-br}{b-ar}$, $\sigma_M^2 = \frac{r^2 a - 2rb + c}{(b-ar)^2}$, et que l'allocation correspondante est $\mathbf{w}_M^* = \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e})}{b-ar}$

3. On a bien ici $r = 0.8\% < 2.3\% = \frac{b}{a}$

4. Nous n'aborderons pas dans ce mémoire la théorie qui se cache derrière l'optimisation quadratique.

Où :

- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique,
- $d \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur,
- A_{ineg}^T et A_{eg}^T sont les matrices définissant les contraintes d'inégalités et d'égalités portant sur w .

Interdiction des ventes à découvert

Ainsi, le problème (6.1), sans actif sans-risque, auquel on ajoute la contrainte de non-négativité des poids peut se mettre sous la forme d'un programme d'optimisation quadratique en posant :

$$D = 2\Omega, \quad d = \mathbf{0}_N, \quad A_{eg}^T = \begin{pmatrix} \mu^T \\ e^T \end{pmatrix}, \quad b_{eg} = \begin{pmatrix} \mu_P \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{ineg}^T = I_N, \quad b_{ineg} = \mathbf{0}_N$$

De même, le problème (6.2), avec actif sans-risque, peut s'écrire :

$$D = 2\Omega, \quad d = \mathbf{0}_N, \quad A_{eg}^T = (\mu - re)^T, \quad b_{eg} = \mu_P - r, \quad A_{ineg}^T = I_N, \quad b_{ineg} = \mathbf{0}_N$$

Nous utiliserons la fonction `solve.QP` du package `quadprog` de R qui implémente la méthode de Goldfarb et Idnani.

Nous reprenons l'exemple précédent en figure (6.2) et traçons 200 portefeuilles efficients avec et sans la contrainte d'interdiction de vente à découvert pour comparer l'allure de la frontière.

Il est important de noter qu'il est dorénavant impossible de construire un portefeuille qui aurait un rendement inférieur à celui du portefeuille global de variance minimal G : la frontière est construite avec des portefeuilles ayant un rendement cible compris entre celui du portefeuille G et celui de l'actif le plus rentable. De façon générale, la frontière sous contrainte de non-négativité sera "à l'intérieure" de la première, comme c'est ici le cas, notamment pour les rendements les plus élevés.

Pour bien mesurer l'impact de cette contrainte, nous pouvons visualiser en figure (6.3) la composition des portefeuilles composant ces frontières. Par exemple, pour un rendement cible de 8 % (le portefeuille n°200), la contrainte impose de détenir uniquement l'actif 1 (de rendement 8 %), tandis qu'en autorisant des positions courtes, il était possible en détenant l'actif 2 à plus de 100 % et en vendant des actifs 3 et 1 à découvert, d'obtenir 8 % de rendement avec une variance plus faible.

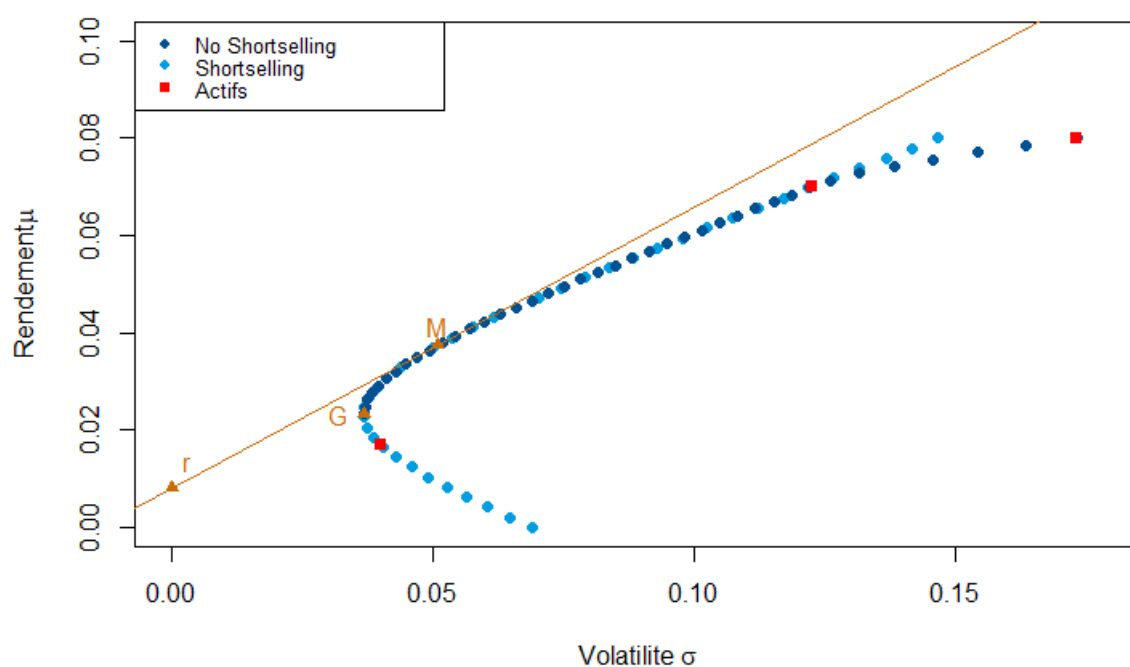


FIGURE 6.2 – Impact de la contrainte

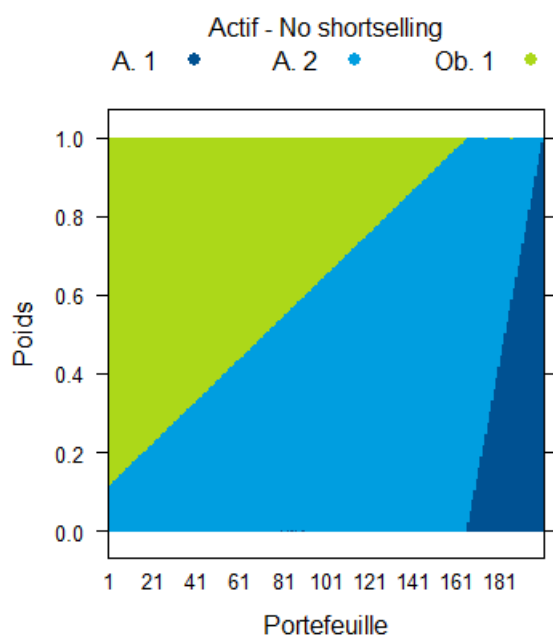


FIGURE 6.3 – Vente à découvert interdite

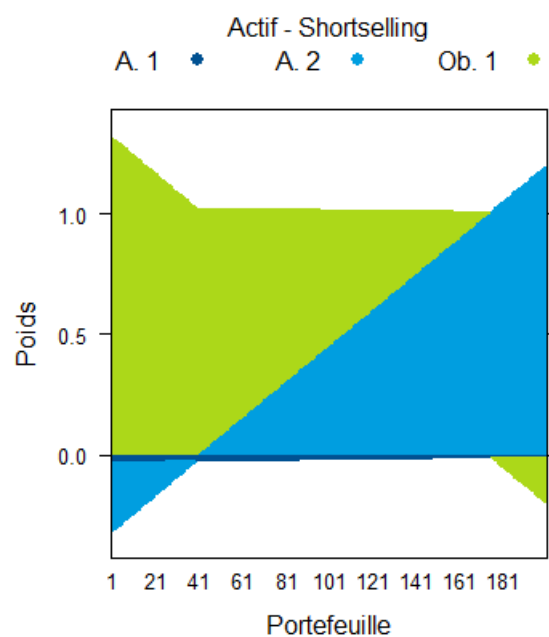


FIGURE 6.4 – Vente à découvert autorisée

Généralisation : contraintes de quantité

De façon plus, générale, il est utile de pouvoir imposer des contraintes sur les quantités allouées à chaque actif, comme par exemple une borne inférieure à détenir à tout prix pour un actif peu risqué, ou une borne supérieure à ne pas dépasser pour un actif plus risqué.

En posant $\mathbf{u}$ le vecteur des bornes supérieures et $\mathbf{l}$ le vecteur des bornes inférieures, le problème se présente alors sous la forme suivante :

Markowitz - Contraintes de quantités

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = \mu_P \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \\ & u_i \geq w_i \geq l_i \text{ pour } i \in [1, N] \end{aligned} \tag{6.4}$$

Et nous retombons sur la forme d'un problème quadratique en posant :

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{0}_N, \quad \mathbf{A}_{eg}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{e}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{eg} = \begin{pmatrix} \mu_P \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ineg}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ineg} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ -\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Si nous reprenons l'exemple précédent avec les contraintes suivantes qui consistent à limiter à 10 % et 30 % les allocations en actions, et imposer au moins 50 % d'obligation :

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors nous obtenons la frontière et les allocations suivantes :

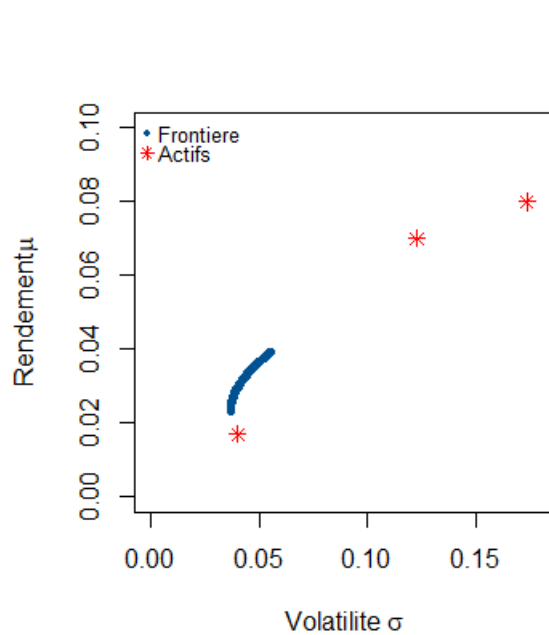


FIGURE 6.5 – Contraintes : frontière

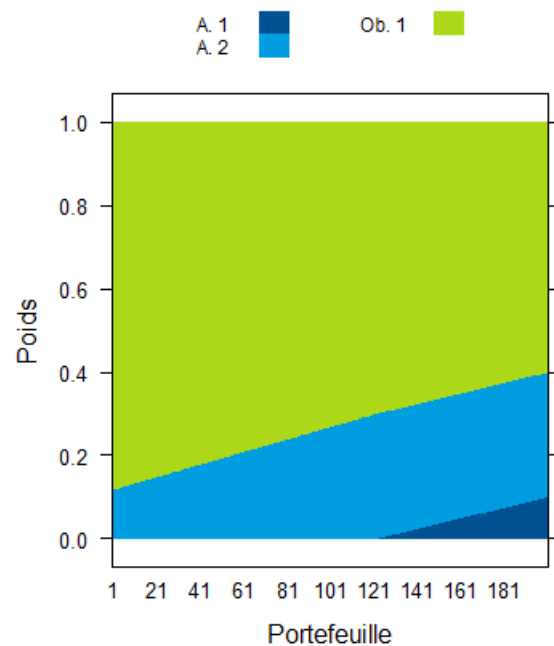


FIGURE 6.6 – Contraintes : allocations

Nous remarquons alors que la frontière efficiente se trouve très réduite à cause des limitations sur les allocations en action, par comparaison avec la figure (6.2).

6.4 Limites de l'approche

Nous pouvons exhiber quelques limites à cette approche, notamment :

Un modèle Moyenne-Variance

La théorie que nous venons de présenter suppose que le vecteur des rendements des actifs suit une loi normale multivariée d'espérance μ et de matrice de variance-covariance Ω , et que les décisions de l'investisseur seront déterminées par l'espérance et la variance. Dans la pratique, ces hypothèses sont difficilement observables : les rendements présentent souvent des distributions non symétriques, et un investisseur peut être amené à considérer des moments d'ordres plus élevés.

Un modèle mono-période

L'approche de Markowitz est mono-période car on ne considère que deux dates (t_0 et t_1). Cependant, dans la pratique, les investisseurs ont des horizons d'investissement assez longs, au moins supérieurs à quelques années. Un modèle mono-période comme celui-ci est-il alors adapté ?

En effet, si nous supposons par exemple $t_1 - t_0 = 5$ ans, il faut entrer en paramètre du modèle des rendements moyens sur 5 ans et les covariances correspondantes. Or plus l'intervalle

de temps est long (5 ans au lieu d'un an, un an au lieu d'un mois), moins il est aisé d'obtenir des estimateurs satisfaisants de ces valeurs.

La variance comme mesure de risque

La variance mesure la dispersion autour de la moyenne et donne autant d'importance aux valeurs au-dessus et en-dessous de la moyenne. Or, pour un investisseur, le risque est que les rendements soient en-dessous de l'espérance. Des mesures de risques qui capturent le risque baissier seraient alors peut-être plus adéquates, comme la semi-variance par exemple.

Estimations des paramètres

Finalement, le dernier point que nous abordons et sans doute le plus important : l'estimation des espérances de rendement, des volatilités et des covariances. Tout le modèle étant entièrement basé sur ces estimations, il est important d'en tenir compte pour garantir la stabilité des résultats. En effet, de petites variations sur les estimations peuvent entraîner des allocations complètement différentes.

Reprenons l'exemple précédent avec les mêmes contraintes. Le portefeuille de rendement cible 3 % a une volatilité de 4 % et est le suivant :

$$(0 \%, \quad 24,6 \%, \quad 75,4 \%)$$

Si nous augmentons la volatilité σ_2 de l'action 2, en la passant de $\sqrt{0,015} = 12,2 \%$ à $14,2 \%$, le portefeuille de rendement 3 % a maintenant une volatilité de $4,33 \%$ et est le suivant :

$$(6,6 \%, \quad 16,7 \%, \quad 76,7 \%)$$

En augmentant cette fois μ_1 de $+1 \%$, le portant à 9% , le portefeuille de rendement 3 % a une volatilité de $4,03 \%$ et est :

$$(2,8 \%, \quad 20,7 \%, \quad 76,5 \%)$$

Nous voyons alors bien l'effet de petits changements dans les paramètres sur les allocations.

Nous allons nous intéresser ici au modèle développé par Sharpe et Tint ([20]) en 1990. C'est le peu de considération pour les passifs qui les a menés à proposer cette amélioration du modèle de Markowitz en permettant la prise en compte de co-mouvements entre les classes d'actifs et le passif. L'optimisation est ensuite effectuée sur le surplus (actif – passif).

Chapitre 7

Modèle de Sharpe et Tint : intégrer le passif

Le modèle de Sharpe et Tint est une généralisation du modèle de Markowitz. De leur point de vue, chaque actif possède un *liability hedging credit*, ou pouvoir de couverture du passif. Ce pouvoir de couverture est lié positivement à la covariance entre l'actif et le passif, lié positivement au rapport de la valeur des actifs sur la valeur du passif (ratio de financement), et négativement lié à l'appétence au risque de l'investisseur. Il peut être calculé de façon à tenir compte partiellement ou complètement des passifs via un paramètre k . Si $k = 0$, alors les résultats sont identiques au modèle de Markowitz ; si $k = 1$, nous obtenons une optimisation totale du surplus.

7.1 Formulation du problème

Commençons par noter $A(t_0)$ et $L(t_0)$ les valeurs de l'actif et du passif en date initiale t_0 . R_L et R_i sont définis comme les taux de croissance du passif et taux de rendement des actifs $i \in [1, N]$:

$$R_L = \frac{L(t_1) - L(t_0)}{L(t_0)} \text{ et } R_i = \frac{S_i(t_1) - S_i(t_0)}{S_i(t_0)}$$

Nous supposons comme pour le modèle de Markowitz que R_L suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_L, \sigma_L^2)$ et que le vecteur $\mathbf{R}_A = (R_1, \dots, R_N)^T$ suit une loi normale multivariée $\mathcal{N}_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega})$. Le rendement du portefeuille $\mathbf{w}$ d'actifs vaut donc $\mathbf{w}^T \mathbf{R}_A$ et a pour espérance $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$.

Le surplus est défini par :

$$S(t_0) = A(t_0) - kL(t_0)$$

Où k est l'importance à accorder au passif comme expliqué plus haut. Alors le surplus en date t_1 est :

$$\begin{aligned} S(t_1) &= A(t_0)(1 + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_A) - kL(t_0)(1 + R_L) \\ S(t_1) &= A(t_0) - kL(t_0) + A(t_0)\mathbf{w}^T \mathbf{R}_A - kL(t_0)R_L \\ S(t_1) - S(t_0) &= A(t_0)\mathbf{w}^T \mathbf{R}_A - kL(t_0)R_L \end{aligned}$$

Sharpe et Tint définissent ensuite le rendement du surplus comme étant le rapport de la croissance du surplus sur la valeur de l'actif en date initiale, et non pas sur la valeur du surplus en date initiale comme il pourrait être naturel de le penser. Cela constitue ainsi une véritable extension d'un modèle *assets only* où la croissance de l'actif serait rapportée à la valeur initiale de l'actif.

En notant f le ratio de financement, nous pouvons alors exprimer le rendement du surplus R_S :

$$R_S = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_A - \frac{k}{f} R_L$$

L'optimisation va consister, comme pour le modèle de Markowitz, à minimiser la variance du surplus sous contrainte de rendement. Les deux premiers moments de R_S sont :

$$\begin{aligned} r_S &= \mathbb{E}(R_S) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{k}{f} \mu_L \\ \sigma_S^2 &= \text{Var}(R_S) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} + \frac{k^2}{f^2} \sigma_L^2 - \frac{2k}{f} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

En notant $\boldsymbol{\gamma}$ la covariance entre les actifs et le passif :

$$\boldsymbol{\gamma} = \text{Cov}(\mathbf{R}_A, R_L) = \begin{pmatrix} \text{Cov}(R_1, R_L) \\ \vdots \\ \text{Cov}(R_N, R_L) \end{pmatrix}$$

Le terme $\frac{2k}{f} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\gamma}$ dans l'expression de la variance du surplus représente le pouvoir de couverture des actifs évoqué plus haut. Plus les rendements des actifs sont corrélés au rendement du passif, plus la variance du surplus sera réduite. En revanche, plus la valeur des actifs est élevée par rapport à la valeur du passif (c'est-à-dire lorsque f est grand), moins les actifs auront de pouvoir de couverture.

Le programme d'optimisation est alors le suivant ¹ :

1. Le terme $\frac{k^2}{f^2} \sigma_L^2$ dans l'expression de la variance ne dépend pas de $\mathbf{w}$ et n'est donc pas présent dans l'optimisation.

Sharpe et Tint - Optimisation

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} - \frac{2k}{f} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\gamma} \\
\text{s.c.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{k}{f} \mu_L = r_S \\
& \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Si nous laissons le problème en l'état, il est possible de le résoudre et de trouver une formule explicite donnant le vecteur de poids $\mathbf{w}^*$ optimal pour un rendement cible donné. Sans la contrainte de rendement, nous pouvons aussi obtenir un portefeuille global de « variance du surplus minimale ».

Le portefeuille global de variance minimale est le suivant², en reprenant les expressions de $a = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e}$, $b = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $c = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, et en ajoutant $d = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$ et $e = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{w}_G^* = \frac{1}{a} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e} + \frac{k}{f} \left(\boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma} - \frac{d}{a} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e} \right)$$

Le terme $\frac{1}{a} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{e}$ est le portefeuille global de variance minimal lorsqu'aucun passif n'est considéré (Markowitz), le second terme provient de la prise en compte du passif.

Le système complet (7.1) a lui pour solution :

$$\mathbf{w}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\frac{k}{f} \boldsymbol{\gamma} + \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu} \right)$$

Où : $\lambda_1 = \frac{2(b(rf - ke) + c(kd - f))}{f(b^2 - 4ac)}$, $\lambda_2 = \frac{2(b(f - kd) + a(ke - rf))}{f(b^2 - 4ac)}$ et en posant $r = \frac{k}{f} \mu_L + r_S$.

Cependant, comme cela était le cas pour le modèle de Markowitz, nous nous intéressons à une allocation sous contraintes de quantité :

Sharpe et Tint - Contraintes de quantités

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} - \frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{w} \\
\text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = r_S + \frac{k}{f} \mu_L \\
& \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \\
& u_i \geq w_i \geq l_i \text{ pour } i \in [1, N]
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique où nous devons poser, en reprenant les notations précédentes :

2. Voir annexe B.

$$D = 2\Omega, \quad d = \frac{2k}{f}\gamma, \quad A_{eg}^T = \begin{pmatrix} \mu^T \\ e^T \end{pmatrix}, \quad b_{eg} = \begin{pmatrix} r_S + \frac{k}{f}\mu_L \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{ineg}^T = \begin{pmatrix} I_N \\ -I_N \end{pmatrix}, \quad b_{ineg} = \begin{pmatrix} l \\ -u \end{pmatrix}$$

7.2 Exemple

Nous reprenons l'exemple commencé dans le chapitre précédent, et nous supposons les éléments suivant :

- le ratio de financement f vaut 110 % et nous considérons entièrement le passif : $k = 1$,
- le passif est supposé croître d'un taux $\mu_L = 2$ % et avec une volatilité $\sigma_L = 5$ %.
- les corrélations entre les trois actifs et le passif sont les suivantes : (5% 5% 10%). Le vecteur γ des covariances est donc :

$$\gamma = \text{Cov}(\mathbf{R}_A, R_L) = \begin{pmatrix} 5\% \cdot \sigma_L \cdot \sigma_1 \\ 5\% \cdot \sigma_L \cdot \sigma_2 \\ 10\% \cdot \sigma_L \cdot \sigma_3 \end{pmatrix}$$

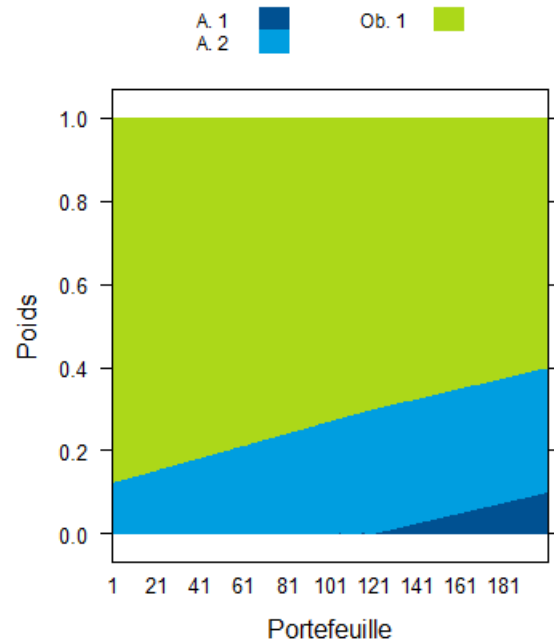
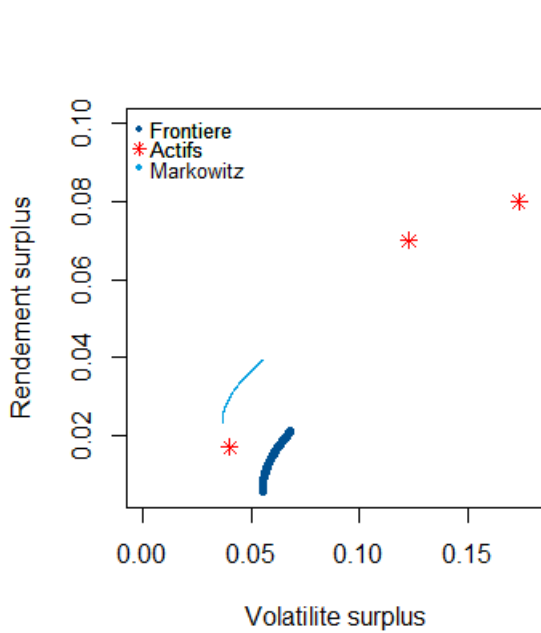


FIGURE 7.1 – Sharpe et Tint : frontière

FIGURE 7.2 – Sharpe et Tint : allocations

Comme nous pouvons le voir sur la figure (7.1), la frontière efficiente se trouve à l'intérieur de celle obtenue avec le modèle de Markowitz. Plusieurs raisons expliquent ce phénomène. La première est que nous optimisons la variance du rendement du surplus et non pas la variance du rendement du portefeuille d'actifs : la croissance du passif diminue le rendement du surplus. Il y

a donc une « translation » de $\frac{k}{f}\mu_L$ de la courbe vers le bas. La volatilité du passif $\frac{k^2}{f^2}\sigma_L^2$ déplace quant à elle la courbe vers la droite (voir page 65 dans l'expression de la variance du surplus), mais ce déplacement est limité par les corrélations $\frac{2k}{f}\mathbf{w}^T\boldsymbol{\gamma}$ entre les actifs et le passif : plus les actifs sont corrélés au passif, moins le surplus est volatil.

7.3 Limites

Comme le modèle de Markowitz, le modèle de Sharpe et Tint reste relativement simple à implémenter. Les hypothèses sont d'ailleurs les mêmes (normalité des rendements) et les allocations qui en résultent sont interprétables aisément.

Toutefois, les limites de ce modèle sont les mêmes que celle du modèle de Markowitz. S'ajoute à ces limites le problème de l'estimation des corrélations entre les classes d'actifs et le passif.

Quatrième partie

Application à la succursale

Les notions théoriques ayant été présentées dans la partie précédente, nous pouvons maintenant nous pencher sur la problématique finale de ce mémoire. Commençons par rappeler les objectifs :

- construire un portefeuille de couverture des engagements techniques,
- construire un portefeuille de rendement optimal au sens rendement-risque et qui respecte les contraintes d'investissement,
- respecter la congruence des monnaies.

Idéalement, ces portefeuilles doivent être flexibles afin d'effectuer des transferts si besoin : il peut être nécessaire d'augmenter la couverture ou d'investir dans des actifs à plus haut rendement. Le portefeuille de rendement, pour être efficace, doit pouvoir profiter des corrélations qui peuvent exister entre les différentes classes d'actifs considérées. Sa gestion s'inscrit dans le cadre des techniques présentées en partie 3.

Commençons par déterminer quelle partie du passif du bilan nous devons assigner, par monnaie de modélisation (EUR, USD ou CAD), à chacun de ces portefeuilles. Nous nous basons pour cela sur le bilan simplifié (3.6) présenté en fin de première partie.

Portefeuille de couverture Il s'agit de couvrir comme nous l'avons déjà dit, la valeur actuelle des cash-flows de passif calculés avec le modèle présenté en partie 1. Nous avons alors :

Monnaie	Représentation du passif	Montants
EUR	VA des cash-flows du modèle	224 725
USD		50 108
CAD		49 916

Nous rappelons que tous montants sont en Euro. Par exemple, 50 518 est la valeur en Euro, déduite à partir du taux de change USD/EUR = 0,8338 au 31/12/2017, de la valeur actuelle des cash-flows modélisés en USD.

Portefeuille de rendement Il s'agit pour ce portefeuille d'investir la partie des provisions techniques IFRS qui est assimilable à de la marge future, ainsi que les fonds propres, à savoir les OCI et les résultats cumulés.

Monnaie	Représentation du passif	Marge future	OCI	RE	Total
EUR	Marge future + OCI + RE	13 730	4 665	55 945	74 340
USD	Marge future + RE	15 849	0	47 333	63 182
CAD	OCI + RE	0	2 947	- 1 898	1 049

La marge négative présente sur le CAD vient diminuer les marges sur l'EUR et l'USD. Il n'y a pas d'OCI en USD car aucun actif libellé en USD n'est détenu directement par la succursale.

Les pertes cumulées sur le CAD ($-1\,898$) sont en partie compensées par les plus-values non encore réalisées des actifs en représentation.

Chapitre 8

Portefeuilles de couverture

Ce chapitre est consacré aux portefeuilles de couverture. Nous allons détailler, pour chacune des trois monnaies de modélisation, les indicateurs de risque de taux d'intérêt présentés en partie 2, et une allocation d'actifs qui immunisera le bilan aux variations de taux d'intérêt.

8.1 Portefeuille en EUR

Nous rappelons la chronique de cash-flows déduite du modèle dans la figure (8.1) suivante :

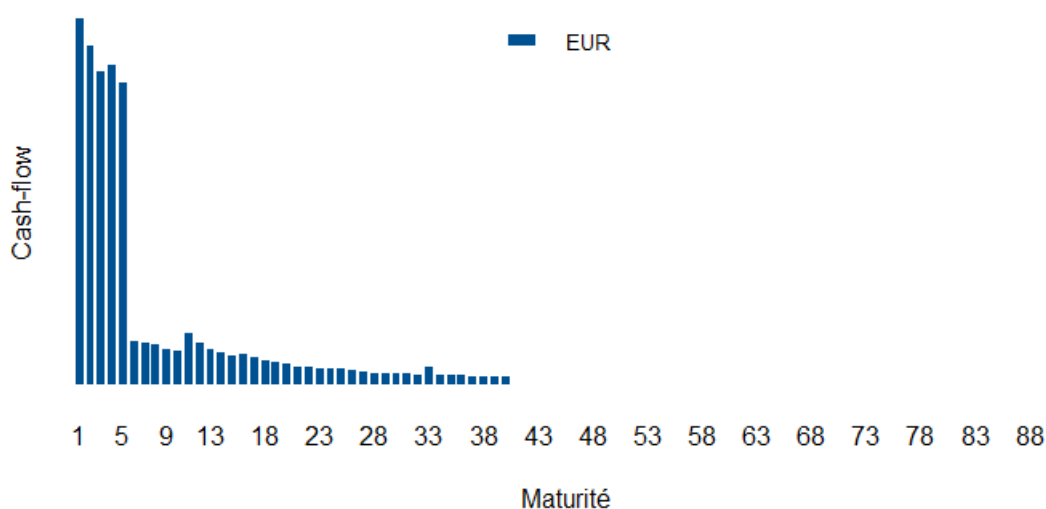


FIGURE 8.1 – Cash-flows EUR

L'allure des cash-flows des 5 premières années résulte de la provision additionnelle décrite en première partie (voir 3.1.3 page 24) et dont l'impact est détaillé en annexe A. En effet, il y a souvent de grands écarts entre les provisions modélisées grâce aux model-points et les provisions comptabilisées, ce qui engendre des provisions additionnelles considérables libérées en général en 5 ans, et donc des cash-flows très importants les 5 premières années. Ce phénomène est encore plus flagrant sur les clusters à primes de risque, où aucune provision n'est modélisée.

Indicateurs de risque de taux

Dans un premier temps, nous calculons les indicateurs du risque de taux (les courbes de taux EIOPA au 31/12/2017 utilisées sont visibles en annexe D) :

Valeur actuelle (EUR)	TRI r	Duration	Sensibilité	Convexité	S^Y	C^Y
224 725	0,996 %	7,07	− 7,00	123,50	− 6,39	99,49

TABLE 8.1 – Passif EUR

Comme nous pouvons le constater, ce portefeuille est de duration moyenne d'environ 7 ans. Le taux de rendement interne de 0,996 % provient des taux actuellement bas dans la zone Euro. En revanche, la sensibilité calculée avec la courbe des taux est inférieure (− 6,39).

La couverture sera réalisée à l'aide de la méthode des KRD. Pour choisir les maturités clés, il est utile de regarder un peu plus en détail quels sont les flux qui contribuent le plus à la sensibilité globale S^Y . Pour cela, nous traçons dans le graphique suivant les 40 premiers cash-flows F_i (les 50 suivants étant négligeables comparés aux premiers) ainsi que la contribution « relative » $\frac{S_i^Y}{S^Y}$ de chacun de ces cash-flows à la sensibilité totale S^Y dans la figure (8.2) :

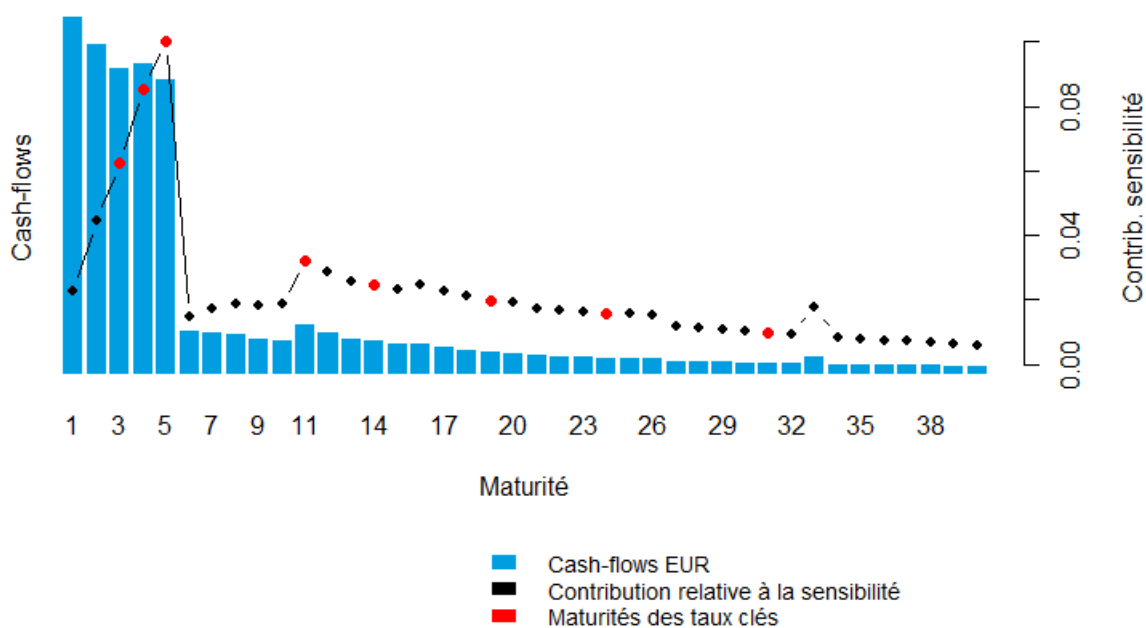


FIGURE 8.2 – EUR : contributions relatives à la sensibilité

Ces 40 cash-flows représentent en effet 99,92 % de la valeur actuelle et 99,46 % de la sensibilité S^Y . Nous décidons de choisir les taux clés pour répartir de la façon la plus uniforme la sensibilité S^Y du passif EUR. Nous retenons $m = 8$ aux clés, ce qui revient à séparer la sensibilité en 9 « poches » de sensibilité plus ou moins égale.

Formellement, si nous notons τ_j le j -ème taux clé, et S_i^Y la sensibilité du i -ème flux :

$$\tau_1 = \min_i \left\{ i \text{ tel que } \frac{1}{S^Y} \sum_{i=1}^{90} S_i^Y \geq \frac{1}{9} \right\}$$

Puis :

$$\tau_j = \min_i \left\{ i \text{ tel que } \frac{1}{S^Y} \sum_{i=1}^{90} S_i^Y \geq \frac{j}{9} \right\}$$

Ceci nous conduit à retenir les taux clés suivants :

$$\tau^{EUR} = (\tau_1^{EUR}, \dots, \tau_8^{EUR}) = (3, 4, 5, 11, 14, 19, 24, 31)$$

Choix des obligations

Dans la pratique, une couverture serait effectuée avec une panoplie d'obligations aussi large que possible. Toutefois, dans le cadre de ce mémoire, nous utiliserons pour l'optimisation — qui consiste nous le rappelons à égaliser les vecteurs de KRD de l'actif et du passif, des obligations représentatives des maturités les plus courantes sur le marché obligataire et leur attribuerons des nominaux de 100 par défaut. Nous retiendrons notamment :

Obligation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maturité (années)	30	25	20	15	10	5	4	3	2	1
Coupons (%)	3,85	3	2,5	2,45	1,40	0,42	0,25	0,15	0,12	0,1

TABLE 8.2 – EUR : obligations représentatives

Nous reprenons ensuite les étapes déjà présentées en exemple 5.3.1 page 45, à savoir l'assignation des cash-flows aux taux clés, le calcul des KRD du passif et des actifs, et enfin l'optimisation pour déterminer le poids de chaque obligation.

Résultats

L'optimisation numérique nous permet d'obtenir les résultats suivants :

Obligation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maturité (années)	30	25	20	15	10	5	4	3	2	1
Quantité	151,04	27,34	66,66	112,23	157,69	329,8	302,8	323,79	322,38	321,93

TABLE 8.3 – EUR : résultats

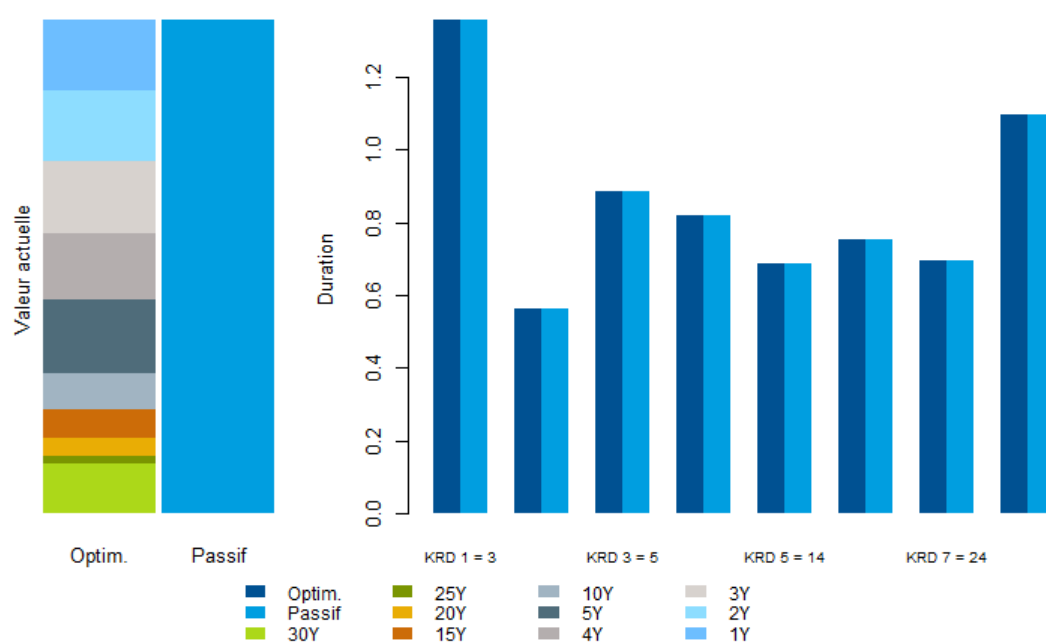


FIGURE 8.3 – EUR : couverture des KRD

Comme nous pouvons le voir sur la figure précédente, avec ce panier limité d'obligations, il est quand même possible de bien couvrir le passif.

8.2 Portefeuille en USD

Nous procédons de la même façon que pour le passif en EUR.

Indicateurs de risque de taux

Nous présentons les principaux indicateurs, ainsi que les premiers cash-flows et leurs contributions relatives à la sensibilité globale.

Valeur actuelle (USD)	TRI r	Duration	Sensibilité	Convexité	S^Y	C^Y
60 099	2,088 %	2,95	– 2,889	13,28	– 2,885	13,24

TABLE 8.4 – Passif USD

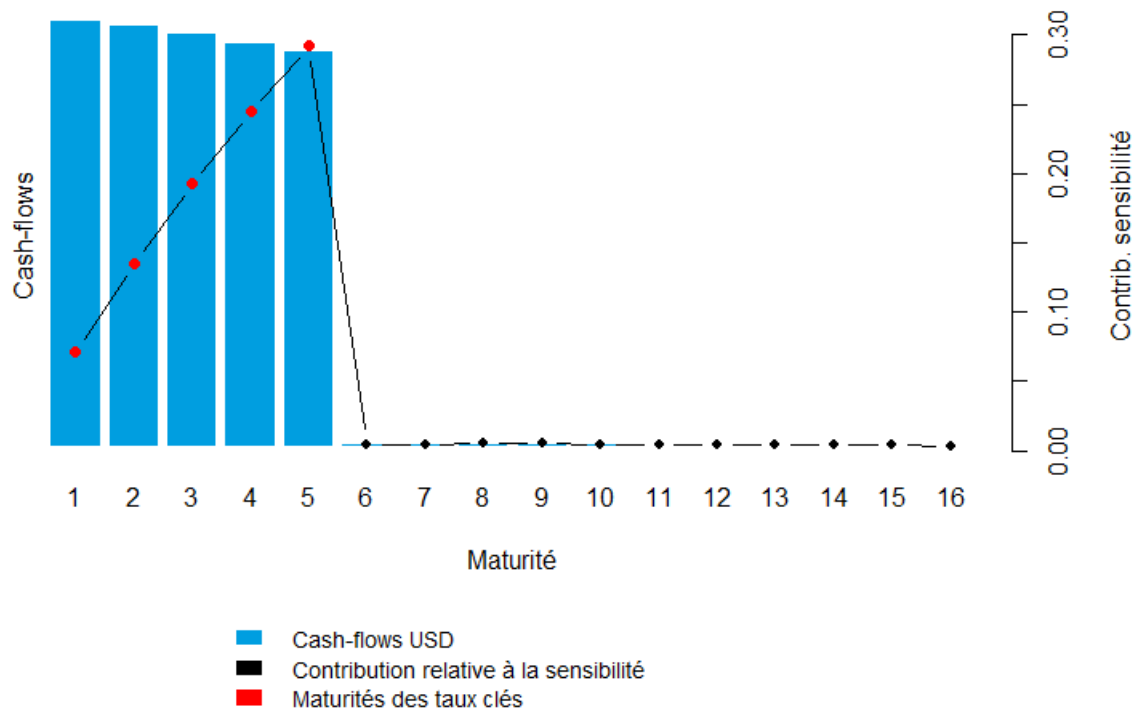


FIGURE 8.4 – USD : contributions relatives à la sensibilité

Comme nous pouvons le constater, le passif en USD est relativement court et ne s'étale que sur 16 années. L'allure des cash-flows s'explique par la provision additionnelle. Les 5 premiers cash-flows représentent ainsi 99,56 % de la valeur actuelle et 98,64 % de la sensibilité S^Y . Ces différents éléments nous poussent à retenir comme taux clés :

$$\tau^{USD} = (\tau_1^{USD}, \dots, \tau_5^{USD}) = (1, 2, 3, 4, 5)$$

Choix des obligations

Nous retenons dans ce cas des obligations dont les maturités coïncident avec celles des taux clés.

Obligation	1	2	3	4	5
Maturité (années)	5	4	3	2	1
Coupons (%)	0,8	0,6	0,5	0,2	0,1

TABLE 8.5 – USD : obligations représentatives

Résultats

L'optimisation nous permet d'obtenir les résultats suivants :

Obligation	1	2	3	4	5
Maturité (années)	1	2	3	4	5
Quantité	124,40	123,06	125,18	127,19	128,78

TABLE 8.6 – USD : résultats

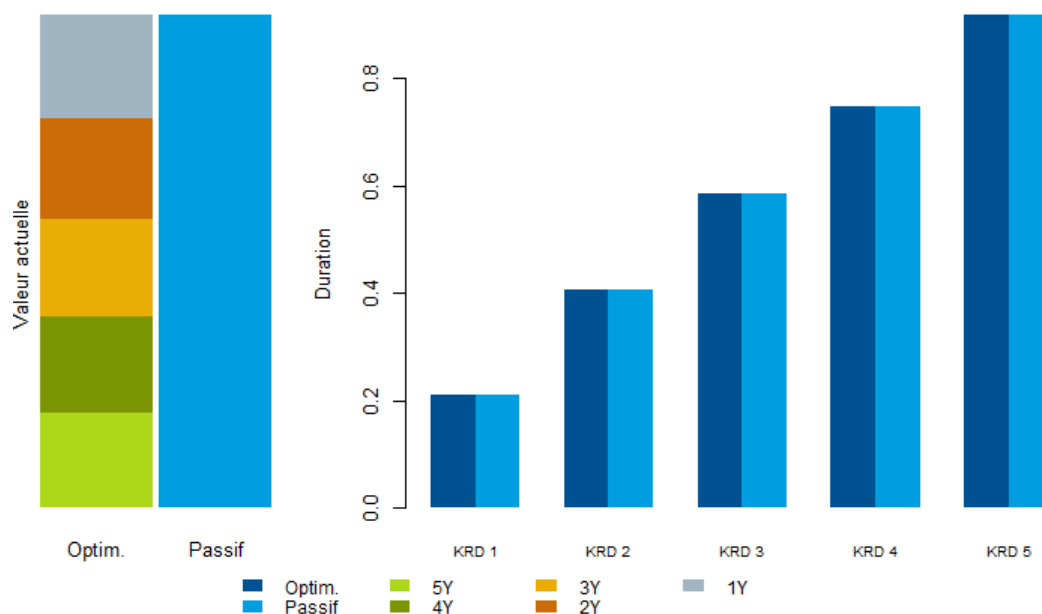


FIGURE 8.5 – USD : couverture des KRD

La couverture est ici très satisfaisante car nous avons supposé l'existence d'obligations dont les maturités sont exactement égales aux maturités clés retenues.

8.3 Portefeuille en CAD

Le passif modélisé en CAD provient d'un ensemble de traités canadiens en run-off de primes et de sinistres. Il est modélisé dans le cluster « Projections individuelles » (voir tableau 3.2 page 19). Sa projection de cash-flows est donc directement effectuée par les équipes de souscription et n'est pas déduite du modèle présenté en partie 1.

Indicateurs de risque de taux

Valeur actuelle (CAD)	TRI r	Duration	Sensibilité	Convexité	S^Y	C^Y
75 110	2,45 %	20,52	– 20,03	592,67	– 19,63	567,44

TABLE 8.7 – Passif CAD

Ce passif est ainsi beaucoup plus long avec une duration approchant les 20 ans. Cela s'explique par la présence dans ce portefeuille de produits d'assurance vie ayant des durées de

couverture très longues du type « vie entière ». Penchons-nous sur les sensibilités de chaque cash-flow :

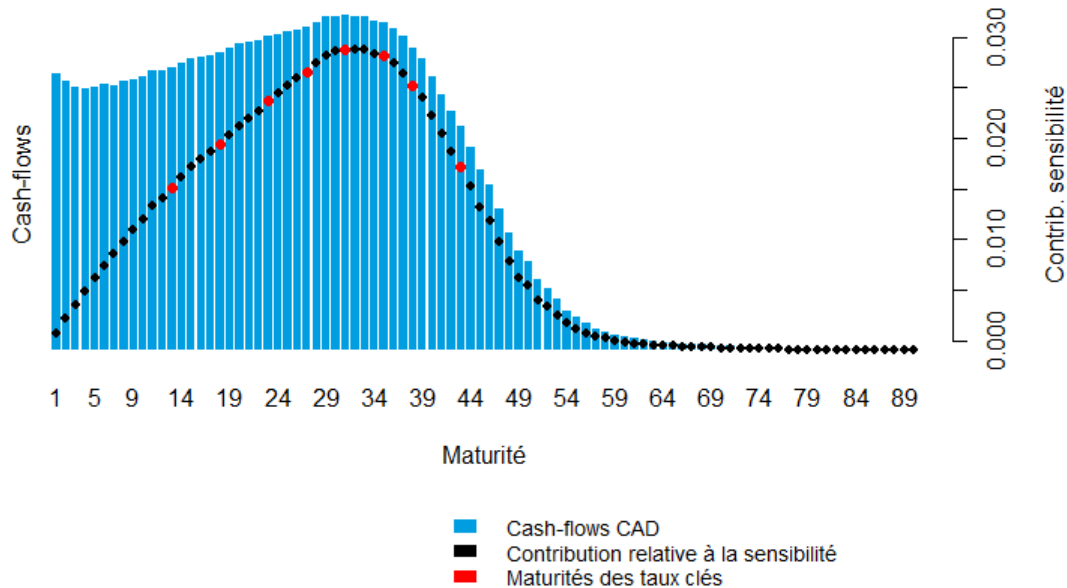


FIGURE 8.6 – CAD : contributions relatives à la sensibilité

L'allure des sensibilités est bien plus régulière que sur le passif en EUR, car nous n'avons pas ici de provision additionnelle qui impacte fortement les cash-flows. Compte tenu de la durée élevée, nous choisissons cette fois 9 taux clés, de façon à séparer la sensibilité totale en 10 poches de sensibilité proches :

$$\tau^{CAD} = (\tau_1^{CAD}, \dots, \tau_9^{CAD}) = (12, 17, 22, 26, 29, 32, 36, 39, 44)$$

Choix des obligations

Pour ce portefeuille, nous choisissons les obligations suivantes, naturellement de maturité longues :

Obligation	1	2	3	4	5	6	7	8
Maturité (années)	50	40	35	30	25	20	15	5
Coupons (%)	5	4,5	3,5	3	2,5	2	1,5	1,2

TABLE 8.8 – CAD : obligations représentatives

Résultats

Nous obtenons :

Obligation	1	2	3	4	5	6	7	8
Maturité (années)	50	40	35	30	25	20	15	5
Quantité	109,6	87,6	94,8	79,6	64,2	59,8	38,0	73,7

TABLE 8.9 – CAD : résultats



FIGURE 8.7 – CAD : couverture des KRD

Avec le panier d'obligations considéré, nous observons que tous les KRD ne sont pas couverts parfaitement, en particulier ceux de maturités : $\tau_5 = 29$, $\tau_6 = 32$ et $\tau_7 = 36$. Cependant, les écarts de KRD entre ces trois maturités se compensent en partie, et la duration totale du portefeuille de couverture, composé des obligations avec les quantités trouvées ci-dessus, couvre 99,92 % de celle du passif. Dans la pratique, il serait possible de combler les écarts qui subsistent en choisissant un panier d'obligations plus large.

8.4 Conclusion partielle

Sur les trois méthodes d'immunisation du risque de taux d'intérêt présentées en partie 2, nous avons appliqué la méthode des KRD. Le cash-flow matching, simple en théorie, n'a pas de sens lorsqu'il s'agit de couvrir des flux de passifs en run-off. L'immunisation par la duration, ne se base que sur un indicateur : la sensibilité à de petits mouvements parallèles de la courbe des taux. Cette hypothèse étant très restrictive, nous avons choisi d'utiliser les KRD pour tenir compte de changements dans certains taux clés. La liberté dont dispose l'investisseur quant au nombre de taux clés à retenir est un paramètre qu'il faut ajuster en fonction du degré de finesse de couverture souhaité et du passif.

Pour cette raison, nous avons déterminé les taux clés comme étant les maturités qui délimitent

des « poches » de sensibilités les plus proches possibles, pour les portefeuilles EUR et CAD. L'allure et la très faible sensibilité du portefeuille USD nous a amené à considérer dans ce cas-là les 5 premières maturités comme taux clés.

Nous avons alors pu proposer des allocations sur la base d'obligations représentatives du marché, surtout en terme de maturité. Les résultats sont assez convaincants : avec une dizaine d'obligations (ce qui est très faible), il est déjà possible de trouver une combinaison permettant d'égaliser les vecteurs de KRD de l'actif et du passif, ou de s'en approcher très fortement.

Dans la pratique, ces obligations seraient choisies en fonction de leurs maturités et donc de leurs vecteurs de KRD (comme nous venons de le voir), mais également en fonction d'autres paramètres, principalement leurs catégories (dette souveraine, d'entreprise, ...) et leurs notations, conformément à l'appétence au risque et aux contraintes d'investissement auxquelles l'investisseur est souvent confronté. Comme nous l'avons indiqué en première partie, les premiers objectifs d'une bonne gestion d'actifs chez un réassureur sont sécurité et stabilité. Nous supposons alors que les obligations considérées dans ce chapitre seront investies dans les grandes classes d'actifs suivantes :

- Obligations d'Etat,
- Obligations d'entreprise de la catégorie *investment grade*,
- Obligations sécurisées.

La répartition et la diversification des notations et émetteurs au sein d'une classe d'actif est la responsabilité des gérants d'actifs. Ainsi, dans le chapitre suivant, nous déterminons la diversification optimale entre les différentes classes d'actif.

Après avoir présenté la construction des portefeuilles de couverture, nous allons dans ce chapitre nous atteler à la partie « rendement ».

Chapitre 9

Portefeuilles de rendement

La première étape est la détermination des classes d'actifs à utiliser ainsi que leurs rendements et volatilités. Nous pourrons ensuite procéder à une optimisation moyenne-variance au sens de Markowitz, comme présenté en partie 3.

9.1 Détermination des classes d'actifs et des contraintes

Comme nous l'avons évoqué à la fin du chapitre précédent, les actifs que nous allons retenir seront scindés en deux lors de l'optimisation :

Couverture : Nous utiliserons des actifs qui offrent une bonne protection, à savoir des obligations d'Etats (*sovereign bonds*) de notation supérieure à AA⁻¹, des obligations d'entreprise (*corporate bonds*) investissables (*investment grade*), c'est-à-dire de notation supérieure à BBB⁻, et des obligations sécurisées de notation supérieure à AA. Les obligations sécurisées (*covered bonds*) sont des obligations qui comportent une protection en cas d'insolvabilité de l'émetteur. En effet, elles sont adossées à des actifs placés au sein d'un pool, souvent des crédits hypothécaires ou des créances sur le secteur public. Ainsi, en cas de défaut de l'émetteur, le détenteur de l'obligation possède un recours sur les actifs du pool.

Rendement : Nous considérerons ici des obligations de notations inférieures, les *high-yield*, ainsi que des actions de plusieurs marchés. L'objectif est d'apporter du rendement supplémentaire, mais il faudra tenir compte du risque de crédit provenant de ces actifs. Ils feront donc l'objet de contraintes strictes.

Les rendements et corrélations, paramètres nécessaires à l'optimisation, seront estimés sur la base des rendements mensuels observés entre 2013 et 2017, sur un panel d'indices représentant les classes d'actifs citées ci-dessus.

9.1.1 Rappels sur les rendements

Commençons par présenter rapidement quelques notions sur les calculs de rendement. Il y a deux façons de calculer des rendements : simple ou log-rendement.

1. Nous présentons en annexe E la structure des notations des différentes agences.

Rendement simple et log-rendement Notons P_t le prix d'un titre à la date t . Le rendement simple (linéaire, ou encore arithmétique) sur la période allant de $t - 1$ à t est défini comme :

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Tandis que le log-rendement se définit comme :

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Ces deux conventions peuvent aboutir à des rendements bien différents. En effet, si la valeur d'un titre passe de 100 à 98 unités, le rendement simple est de -2% , et $\log(98/100) = -2,02\%$ en log-rendement. Si la période suivante, la valeur augmente de 2 unités, le rendement simple sera $100/98 - 1 = 2,04\%$, tandis que le log-rendement sera $\log(98/100) = +2,02\%$. Ces différences sont d'autant plus grande que P_t/P_{t-1} est grand.

Rendements multipériodes Les rendements multipériodes permettent d'étudier la performance d'un investissement effectué sur plusieurs périodes. Par exemple, entre t et $t + T$, le rendement simple multi-période est le produit des rendements mono-périodes intermédiaires :

$$R_{t \rightarrow T} = \frac{P_T}{P_t} - 1 = \frac{P_T}{P_{T-1}} \frac{P_{T-1}}{P_{T-2}} \dots \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 = \prod_{k=t+1}^T (1 + R_k) - 1 \quad (9.1)$$

Alors que le log-rendement multi-période est la somme des rendements mono-périodes :

$$r_{t \rightarrow T} = \log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) = \log\left(\frac{P_T}{P_{T-1}} \frac{P_{T-1}}{P_{T-2}} \dots \frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \sum_{k=t+1}^T r_k \quad (9.2)$$

Rendement d'un portefeuille Lorsque nous considérons un portefeuille constitué de N titres ayant chacun un poids w_i et un rendement $R_{i,t}$ à la date t , alors le rendement simple du portefeuille s'écrit ² :

$$R_t^{PF} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t} \quad (9.3)$$

En revanche, le log-return du portefeuille est :

$$r_t^{PF} = \log\left(\sum_{i=1}^N w_i \exp(r_{i,t})\right) \quad (9.4)$$

Ces différentes formules nous permettent d'avancer les points suivants :

- les rendements simples sont additifs « par les titres » : le rendement d'un portefeuille est la moyenne pondérée des rendements des actifs le constituant (équation (9.3)). Cette

2. Les démonstrations des résultats de cette section sont annexe en F.

propriété rend les rendements simples pratiques pour des problématiques d'analyse de risque ou d'optimisation de portefeuille, ce qui est notre cas.

- les log-rendements sont additifs « dans le temps » : le rendement multi-période est la somme des rendements mono-périodes (équation (9.2)).

9.1.2 Estimation des rendements et covariances

Dans le cas pratique de ce mémoire, nous disposons d'observations mensuelles d'indices financiers, dont nous pouvons calculer les rendements mensuels. Nous utiliserons pour l'optimisation des estimations des espérances de ces rendements mensuels, calculés selon la convention simple, comme cela est supposé par les modèles d'optimisation de portefeuille.

Notons $\mathbf{R}^m = (R_1^m, \dots, R_N^m)^T$ le vecteur aléatoire représentant les rendements mensuels des N indices. Nous nous intéressons au vecteur des rendements moyens $\boldsymbol{\mu}^m = \mathbb{E}[\mathbf{R}^m] = (\mathbb{E}(R_1^m), \dots, \mathbb{E}(R_N^m))^T$ et à la matrice de covariance $\boldsymbol{\Omega}^m = (\text{Cov}(R_i^m, R_j^m))_{1 \leq i, j \leq N} = (\sigma_{ij}^m)_{1 \leq i, j \leq N}$.

Nous pouvons les estimer à l'aide des rendements mensuels $R_i^{obs}(t)$ observés pour $1 \leq t \leq n = 60$, car nous avons un historique de 5 ans. Nous avons alors :

$$\widehat{\mu}_i^m = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_i^{obs}(t)$$

$$\widehat{\sigma}_{ij}^m = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_i^{obs}(t) - \widehat{\mu}_i^m)(R_j^{obs}(t) - \widehat{\mu}_j^m)$$

Pour obtenir des rendements annualisés, qui sont plus parlants, supposons que $M = 12$ rendements mensuels $R_{i,1}^m, \dots, R_{i,M}^m$ composent une année pour chaque actif i . Supposons également que les M vecteurs de dimension N : $(R_{1,1}^m, \dots, R_{N,1}^m)^T, \dots, (R_{1,M}^m, \dots, R_{N,M}^m)^T$ sont indépendants et identiquement distribués de même loi que $(R_1^m, \dots, R_N^m)^T$.

Alors le rendement annuel est le vecteur $\mathbf{R}^a = (R_1^a, \dots, R_N^a)^T$, dont les composantes R_i^a valent :

$$R_i^a = \prod_{k=1}^M (1 + R_{i,k}^m) - 1$$

Nous pouvons alors en déduire, grâce aux hypothèses précédentes, les composantes μ_i^a de son espérance $\boldsymbol{\mu}^a$, et les composantes σ_{ij}^a de sa matrice de covariance $\boldsymbol{\Omega}^a$ (démonstration en annexe F) :

$$\mu_i^a = \mathbb{E}(R_i^a) = (1 + \mu_i^m)^M - 1$$

$$\sigma_{ij}^a = \text{Cov}(R_i^a, R_j^a) = (\sigma_{ij}^m + (1 + \mu_i^m)(1 + \mu_j^m))^M - (1 + \mu_i^m)^M (1 + \mu_j^m)^M$$

Nous pouvons alors estimer les rendements moyens $\widehat{\mu}^a$ et la matrice de covariance $\widehat{\Omega}^a$:

$$\widehat{\mu}_i^a = \left(1 + \widehat{\mu}_i^m\right)^M - 1$$

$$\widehat{\sigma}_{ij}^a = \left(\widehat{\sigma}_{ij}^m + (1 + \widehat{\mu}_i^m)(1 + \widehat{\mu}_j^m)\right)^M - \left(1 + \widehat{\mu}_i^m\right)^M \left(1 + \widehat{\mu}_j^m\right)^M$$

Nous pouvons désormais aborder les contraintes d'investissement qui impacteront fortement les allocations que nous présenterons par la suite.

9.1.3 Contraintes d'investissement

De façon générale, nous pouvons classer les contraintes d'investissement en trois catégories : liquidité, notation et concentration (pour les obligations), quantité.

Les contraintes de **liquidité** sont déterminées en classant chaque investissement dans une catégorie qui se détermine à partir des éléments suivants :

- pays d'émission du titre,
- facilité de vente du titre, c'est-à-dire la perte qu'engendrerait cette vente, et la durée nécessaire à sa vente.

Un titre allemand pouvant se vendre en 5 jours sans aucune perte se trouverait dans la meilleure catégorie. La contrainte porte ensuite sur la valeur de marché de tous les investissements de chaque catégorie. Par exemple, au minimum 60 % dans la meilleure catégorie.

Les contraintes de **notation** sont définies pour les obligations. Par exemple :

- Notation $\geq$ AA- : sans limite,
- Notation $\leq$ BB- : au maximum 25 %.

Des critères plus fins peuvent être observés, notamment pour les obligations sécurisées, où le type d'actifs dans le pool sera pris en compte (si deux obligations sécurisées ont la même notation, mais que la première est adossée à des crédits hypothécaires plus risqués que ceux de la seconde, elle sera plus risquée).

Les contraintes de **concentration** sont définies de façon similaire, mais c'est cette fois la part d'un émetteur sur le montant total investi qui est limitée.

Les contraintes de **quantité** sont définies pour chaque grande classe d'actif, typiquement : obligation, actions cotées, immobilier, *private equity*, ...

Nous pouvons également évoquer la contrainte qui impose d'obtenir un taux de rendement de l'actif au moins supérieur aux taux techniques en vigueur.

Contraintes utilisées dans ce mémoire Comme nous l'avons déjà dit en fin du chapitre 8, l'objectif de ce mémoire est la détermination de la répartition des grandes classes d'actif, ainsi, nous ne considérerons pas les contraintes de liquidité et de concentration. Les contraintes de

notation sont en partie intégrées car elles déterminent les titres constituant les indices que nous avons utilisés et qui seront détaillés par la suite.

9.2 Portefeuille EUR

Nous présentons les classes retenues et leurs rendements. Pour plus de lisibilité, nous présentons les volatilités et la matrice de corrélation plutôt que la matrice de covariance :

Id	Classe	But	Indice de référence	$\widehat{\mu}_i^a$	$\widehat{\sigma}_i^a$	l_i	u_i	Part
Sov	Bond Sovereign	PFC	EuroMTS AAA Gov 3-5Y	1,12	1,44	0,2	1	0,74
Cov	Covered Bonds	PFC	EuroMTS Covered Bond	1,08	2,08	0	1	
CorpFin	Corporate Financial	PFC	iBoxx EUR Corp Fin	2,20	2,43	0	0,4	
CorpNFin	Corporate N.Financial	PFC	iBoxx EUR Corp Non Fin	2,74	2,42	0	0,4	
HY	Corporate High Yield	PFR	iBoxx EUR High Yield 30	4,33	4,97	0	0,2	0,26
Eqt	Equity Europe	PFR	MSCI Europe	8,84	13,25	0	0,15	
EqtMC	Equity Europe-Mid Cap	PFR	MSCI Europe Mid Cap	11,02	13,00	0	0,15	
EqtSC	Equity Europe-Small Cap	PFR	MSCI Europe Small Cap	13,58	13,86	0	0,15	

TABLE 9.1 – **Classes EUR**

Les contraintes portant sur chaque classe d'actif dans le tableau précédent sont complétées par les contraintes d'appartenance au portefeuille de couverture ($0,74 = 224\,725 / (224\,725 + 74\,340)$), voir en début de chapitre) ou de rendement ($0,26 = 74\,340 / (224\,725 + 74\,340)$).

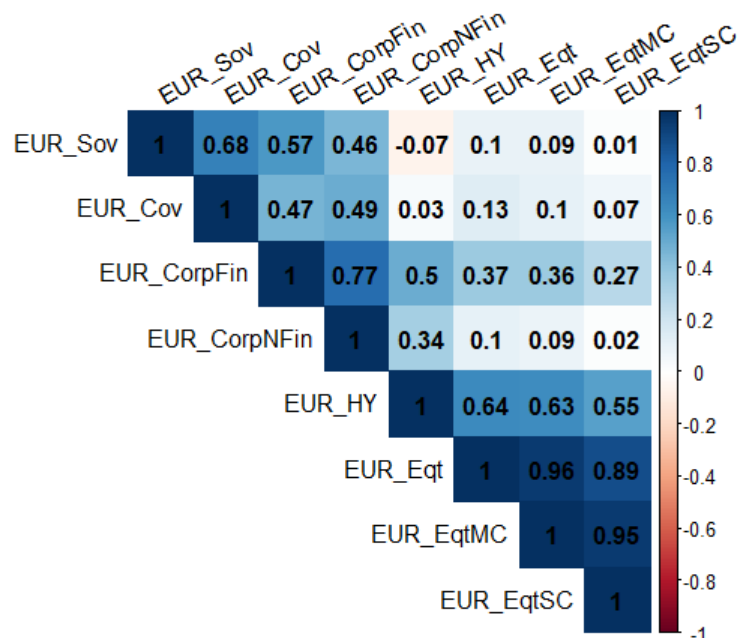


FIGURE 9.1 – **EUR : matrice de corrélation**

Nous appliquons ensuite le modèle de Markowitz, en construisant dans un premier temps une subdivision de rendements cibles compris entre le rendement du portefeuille global de va-

rianche minimal et le rendement maximal que l'on peut obtenir compte tenu des actifs et des contraintes. Nous calculons l'allocation optimale pour chacun de ces rendements cibles, puis nous représentons les rendements et volatilités **annualisés** (avec $\hat{\mu}^a$ et $\hat{\Omega}^a$) de chacune de ces allocations afin d'obtenir une frontière efficiente.

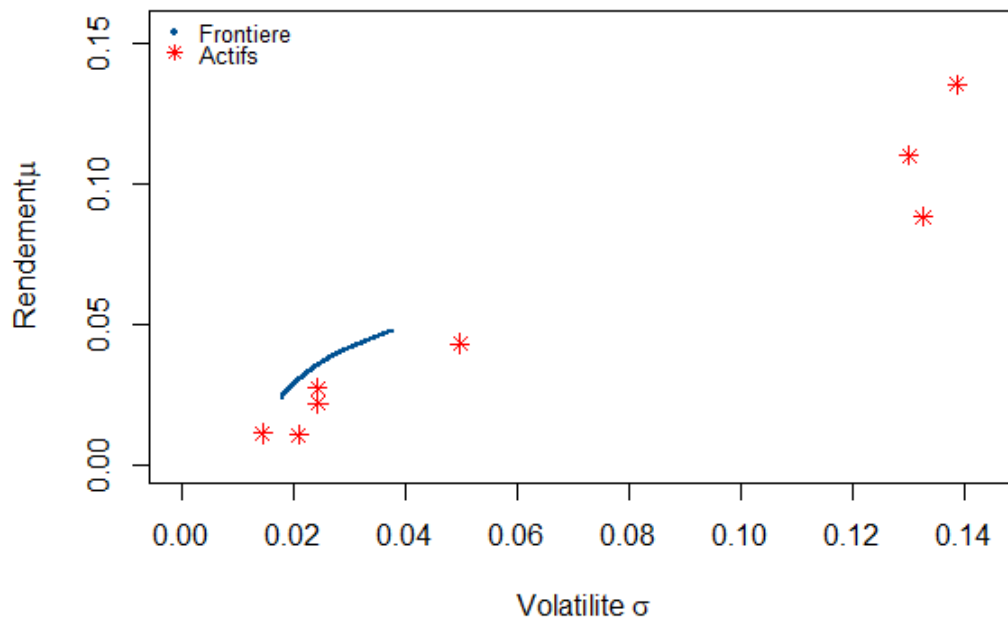


FIGURE 9.2 – EUR : frontière efficiente

Comme nous pouvons le voir, la frontière est assez « courte » et ne s'étend qu'entre les points (1,79 %, 2,37%) et (3,78 %, 4,78 %). Nous représentons également la composition de chacun des portefeuilles composant la frontière efficiente.

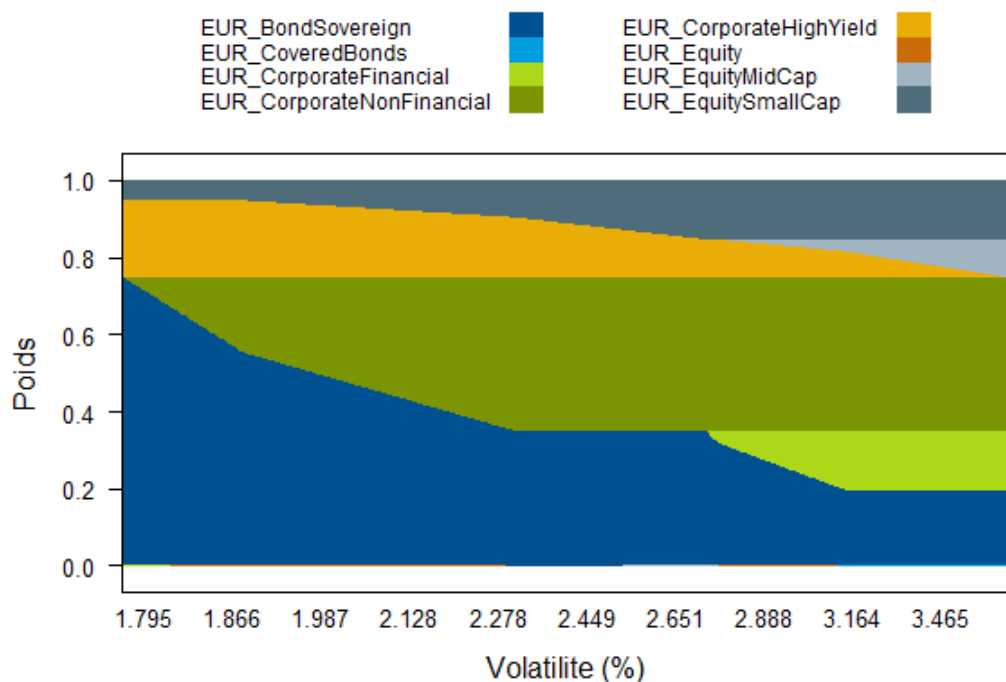


FIGURE 9.3 – EUR : composition des portefeuilles

Nous pouvons constater que les obligations d'entreprise sont progressivement préférées aux obligations souveraines lorsque la volatilité (et donc le rendement) augmente. Les obligations sécurisées ne sont jamais sélectionnées car leur rendement (1,08 %) est toujours inférieur à celui des souveraines (1,12 %) tout en ayant une volatilité plus élevée (2,08 % contre 1,44 %). Concernant la partie rendement (au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée 0,74), nous pouvons remarquer l'absence de la classe actions (Equity) : ses sous-classes petites et moyennes capitalisations lui sont toujours préférées.

De façon générale, nous pouvons affirmer que de telles allocations ne sont pas très diversifiées et ne sont pas réalistes. C'est la faiblesse du modèle de Markowitz qui suppose qu'il n'y a aucune incertitude dans l'estimation des rendements et covariances.

9.2.1 Rééchantillonnage de la frontière

Il existe des techniques de « rééchantillonnage » (*portfolio resampling*) par bootstrap ou par simulation permettant de dépasser ce problème. Nous allons nous intéresser à la seconde méthode qui fonctionne ainsi (voir [16]) :

1. Estimation des espérances de rendement $\widehat{\mu}^m$ et de leur covariance $\widehat{\Omega}^m$ sur les données historiques.
2. A partir de ces estimations, simuler de nouveaux rendements selon une distribution supposée, afin de déduire de nouvelles estimations $\widehat{\mu}_s^m$ et $\widehat{\Omega}_s^m$
3. Calculer une frontière efficiente et des poids de portefeuilles optimaux w_s^* à partir de ces nouvelles estimations.

4. Répéter les étapes 2 et 3 S fois.
5. En déduire les poids des portefeuilles rééchantillonnés : $\mathbf{w}^{resampled} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{w}_s^*$. Tracer la frontière efficiente en utilisant $\mathbf{w}^{resampled}$ et les estimations initiales annualisées $\hat{\boldsymbol{\mu}}^a$ et $\hat{\boldsymbol{\Omega}}^a$.

Les rendements sont simulés typiquement selon une loi normale multivariée. Dans la pratique, les rendements simples mensuels que nous utilisons sont difficilement considérables comme normaux (voir annexe F).

La frontière efficiente obtenue est alors légèrement « à l'intérieur et plus courte » (figure (9.4)) que celle obtenue avec les estimations initiales des espérances de rendement et de covariance, ce qui laisserait supposer que la frontière rééchantillonnée est une piste d'investissement moins préférable. Cependant, baser ses décisions sur la première implique d'avoir une totale certitude sur l'estimation des paramètres, ce qui n'est jamais le cas en pratique. Un investisseur n'étant pas certain de ses estimations attendra moins de rendement et sera plus prudent quant au risque des actifs qu'il considère.

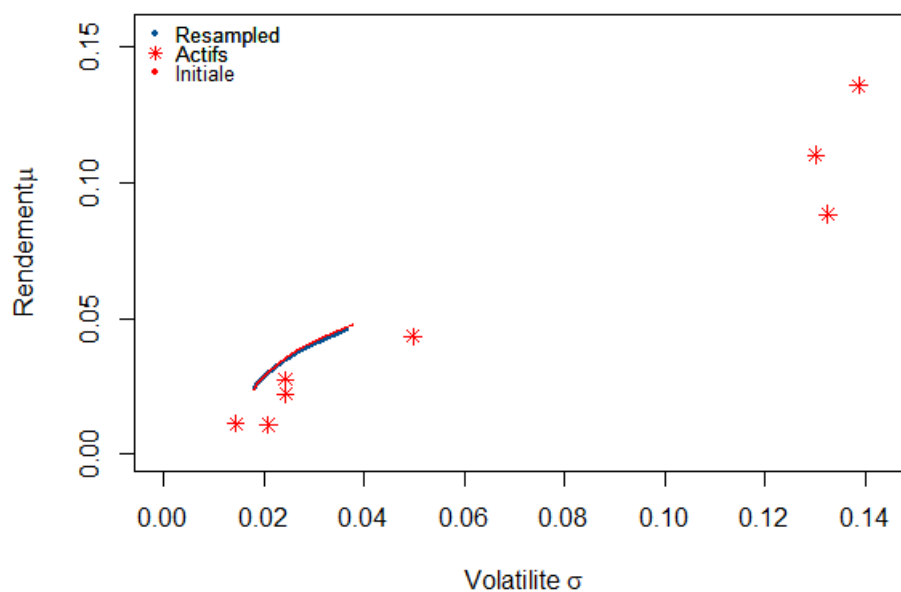


FIGURE 9.4 – EUR : frontière efficiente rééchantillonnée

Si nous regardons les compositions des portefeuilles, nous observons que les transitions sont beaucoup plus « lisses » et que toutes les classes d'actifs sont présentes. C'est toute l'utilité de cette méthode de rééchantillonnage : elle apporte de la stabilité aux allocations, qui se retrouvent par ailleurs bien plus diversifiées.

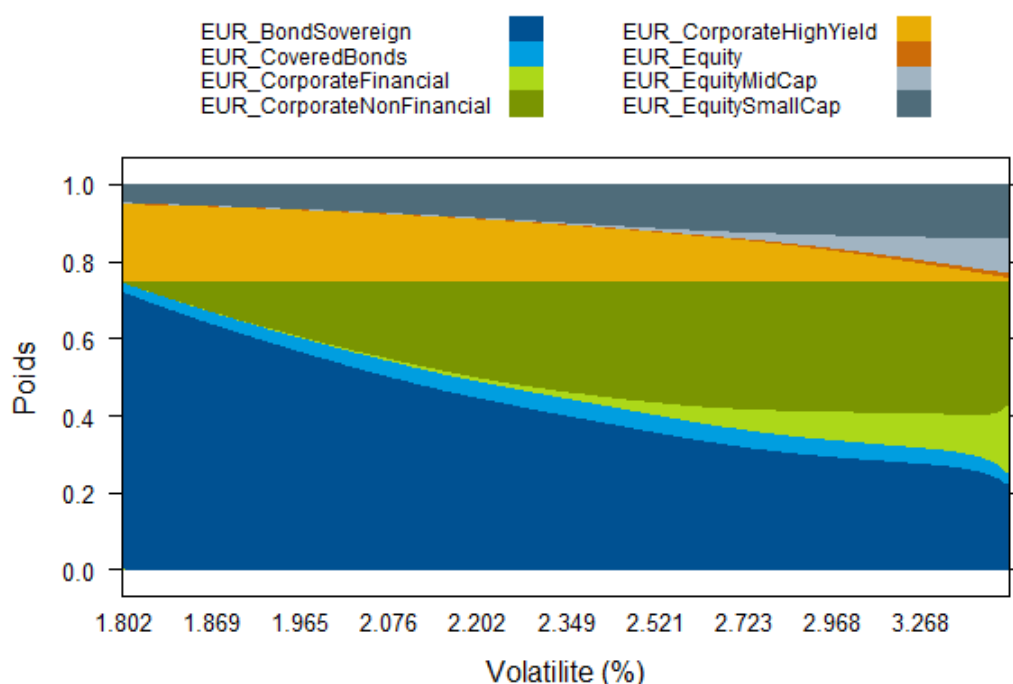


FIGURE 9.5 – EUR : composition des portefeuilles rééchantillonnés

Le portefeuille en EUR étant destiné prioritairement à la couverture, nous allons retenir le portefeuille de volatilité 2 % dont la composition est la suivante. Nous indiquons également la rendement et la volatilité de la partie couverture et de la partie rendement :

Classe	Poids (%)	Rendement (%)	Volatilité (%)
Bond Sovereign	54,82	1,11	1,09
Covered Bonds	3,79		
Corporate Financial	0,38		
Corporate N.Financial	16,16		
Corporate High Yield	18,20	1,68	1,61
Equity Europe	0,09		
Equity Europe-Mid Cap	0,17		
Equity Europe-Small Cap	6,40		
Total	100	2,79	2,00

TABLE 9.2 – EUR : allocation retenue

Nous rappelons que le taux de rendement interne sans risque du passif en EUR déduit de la courbe des taux est 0,996 %, bien inférieur au 2,79 % de cette allocation, et même au rendement de la partie couverture qui est de 1,11 %.

9.3 Portefeuille USD

Les classes et indices retenus pour l'USD ainsi que les contraintes sont les suivants :

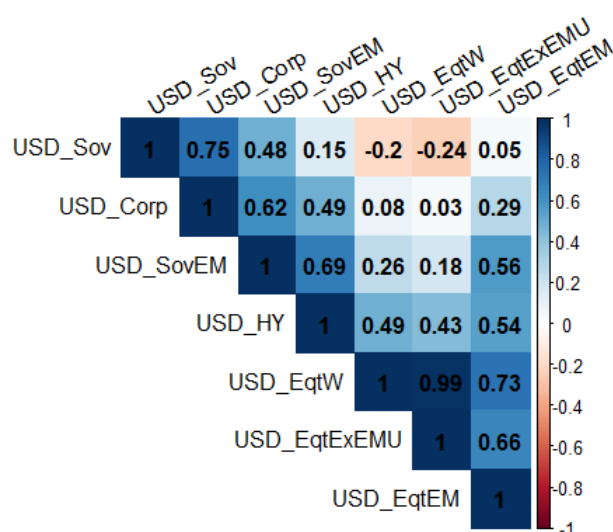


FIGURE 9.6 – USD : matrice de corrélation

Id	Classe	But	Indice de référence	$\widehat{\mu}_i^a$	$\widehat{\sigma}_i^a$	l_i	u_i	Part
Sov	Bond Sovereign	PFC	Iboxx \$ Treasuries 3-7Y	1,24	2,68	0,1	1	0,44
Corp	Corporate	PFC	S&P Invest. Grade Corp.	3,60	3,86	0	1	
SovEM	Bond Sovereign EM	PFR	iBoxx USD Liquid Emerg	3,93	7,31	0	0,4	0,56
HY	Corporate High Yield	PFR	S&P HY Corporate	6,05	4,82	0	0,2	
EqtW	Equity World	PFR	MSCI AC World	12,70	12,81	0	0,15	
EqtExEMU	Equity World ExEMU	PFR	MSCI World exEMU	13,59	12,98	0	0,10	
EqtEM	Equity EM	PFR	MSCI Emerging Markets	8,86	15,75	0	0,10	

TABLE 9.3 – Classes USD

Nous pouvons remarquer de façon générale des rendements et volatilités bien plus élevées sur ces indices libellés en USD : cela permettra une meilleure rémunération. La rémunération cible visée étant plus importante du fait de l'allure de la courbe des taux USD utilisée pour actualiser le passif.

La matrice de corrélation en figure (9.6) a une allure classique : les indices actions sont très peu corrélés aux obligations *corporates*, et corrélés négativement à la dette souveraine.

Nous présentons directement les résultats de la frontière rééchantillonnée en figures (9.7) et (9.8).

Comme nous pouvons le constater, les allocations retenues sont fortement impactées par les contraintes : pour les portefeuilles risqués, les bornes supérieures bloquent les actions World et World hors-Euro à 15 %. La faible volatilité (4,82 %) des obligations HY, compte tenu de leurs rendements (6,05 %) les rendent particulièrement intéressantes et sont quasiment toujours sélectionnées, dans la limite de leur borne supérieure (20 % du total). Pour la partie couverture, les Corporates remplacent progressivement les obligations souveraines, jusqu'à ce que ces dernières atteignent leur borne inférieure (10 %).

Nous retenons l'allocation de volatilité 4 %.

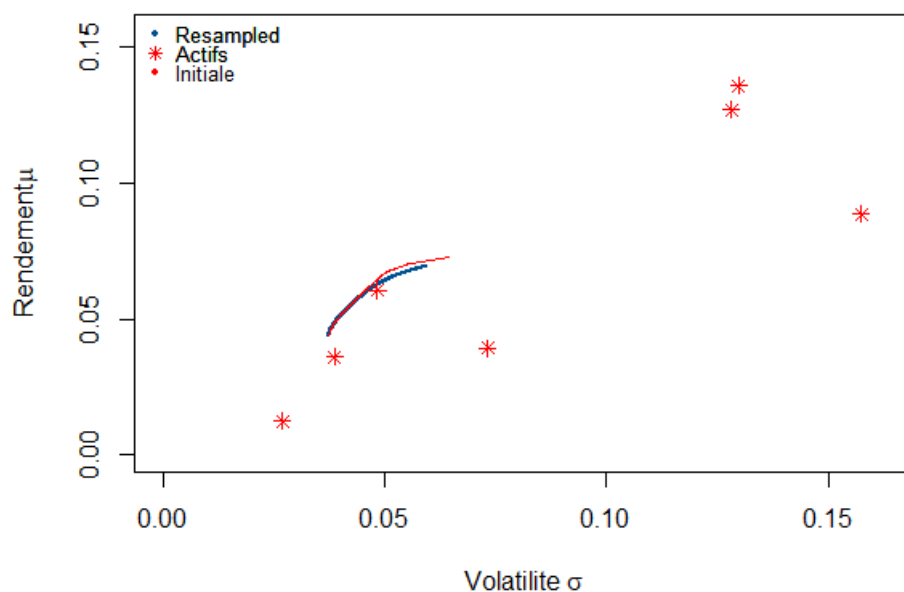


FIGURE 9.7 – USD : frontière rééchantillonnée

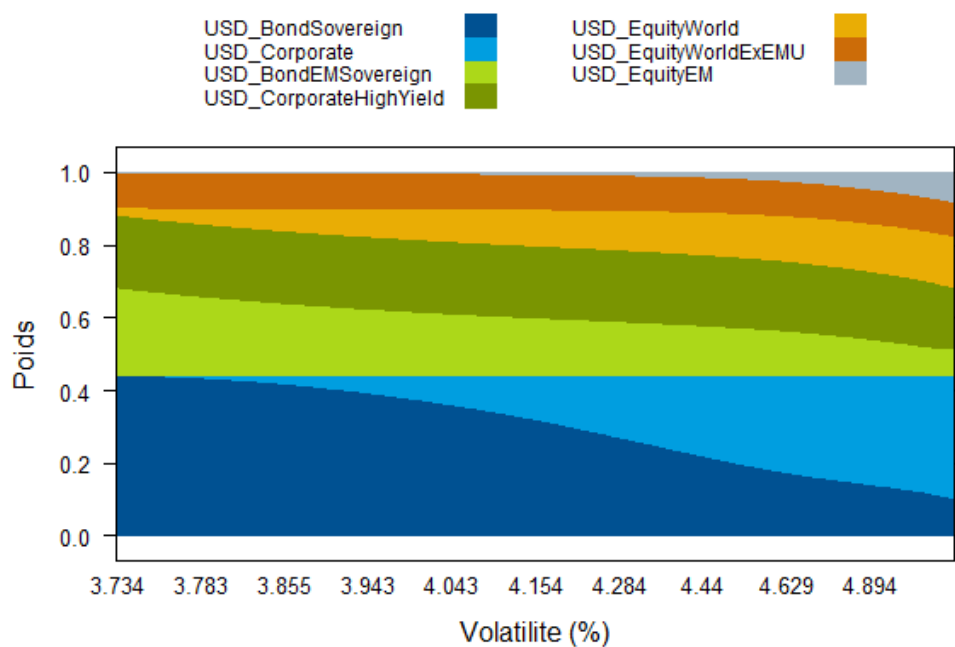


FIGURE 9.8 – USD : composition des portefeuilles

Classe	Poids (%)	Rendement (%)	Volatilité (%)
Bond Sovereign	37,54	0,71	1,21
Corporate	6,69		
Bond Sovereign EM	17,47	4,30	3,65
Corporate High Yield	19,91		
Equity World	8,48		
Equity World ExEMU	9,74		
Equity EM	0,18		
Total	100	5,01	4,00

TABLE 9.4 – USD : allocation retenue

Le taux de rendement interne sans risque du passif USD était de 2,088 %. Compte-tenu du rendement de la partie couverture (0,71 %), les investissements plus risqués de la partie rendement du portefeuille sont essentiels pour pouvoir couvrir l'actualisation de la courbe des taux sans risque.

9.4 Portefeuille CAD

Les classes et indices retenus pour le CAD ainsi que les contraintes sont les suivants :

Id	Classe	But	Indice de référence	$\widehat{\mu}_i^a$	$\widehat{\sigma}_i^a$	l_i	u_i	Part
Sov	Bond Sovereign	PFC	S&P Canada Gov. Bond	3,25	4,14	0	1	0,98
Sov15	Bond Sovereign 15Y	PFC	S&P Canada Gov. Bond 15Y	6,39	8,98	0,2	1	
Corp	Corporate	PFC	S&P Canada Invest. Grade	3,40	2,59	0	0,9	
HY	Corporate High Yield	PFR	S&P Canada HY.	5,84	3,12	0	0,2	0,02
EqtTSX	Equity TSX	PFR	S&P TSX	6,29	8,66	0	0,15	
EqtCan	Equity Canda	PFR	MSCI Canada	4,48	13,54	0	0,15	

TABLE 9.5 – Classes CAD

Les mêmes remarques peuvent être faites que pour les indices libellés en USD : les volatilités sont assez élevées. Les obligations souveraines sont séparées en deux catégories : une catégorie rassemblant un panel représentatif de l'ensemble du marché (Sov) et une catégorie ne comportant que des obligations longues (Sov15) et sur lequel nous faisons porter la contrainte d'un minimum de 20 %, compte tenu des durations du passif. Notons la très faible volatilité de l'indice Corporate (2,59 %).

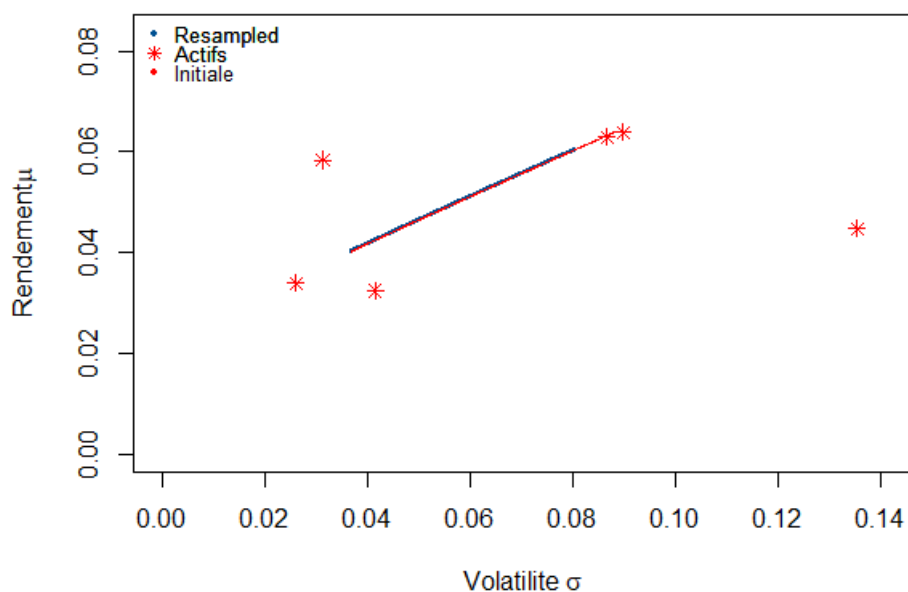


FIGURE 9.10 – CAD : frontière rééchantillonnée

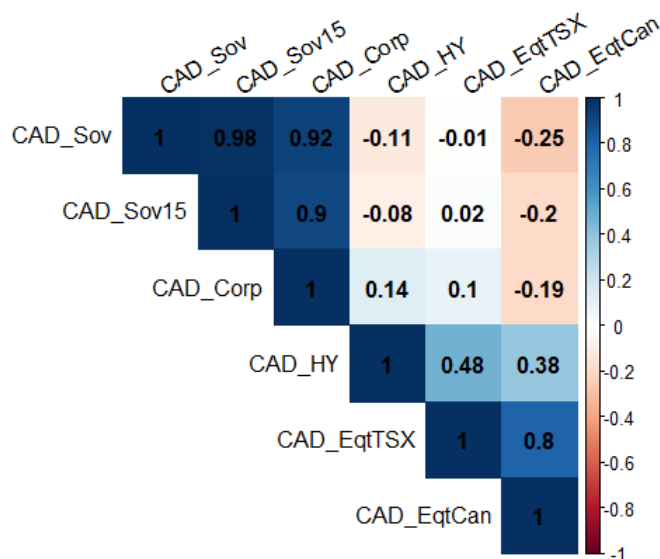


FIGURE 9.9 – CAD : matrice de corrélation

La frontière et les allocations obtenues sont figures (9.10) et (9.11).

L'application de la méthode de rééchantillonnage n'a ici pas de grand impact : elle diminue quelque peu la frontière mais les frontières des deux méthodes sont presque confondues. La composition des portefeuilles est encore très impactée par les contraintes : les obligations *corporate* sont progressivement délaissées pour les souveraines de longue durée lorsque la volatilité augmente. Les obligations souveraines ne sont presque jamais sélectionnées (moins de 0,5 %). En effet, elles ont un rendement plus faible et une volatilité plus élevée que les *corporate* : le programme d'optimisation de base ne les choisirait donc en aucun cas.

Nous retenons, comme pour l'USD, l'allocation de volatilité 4 % :

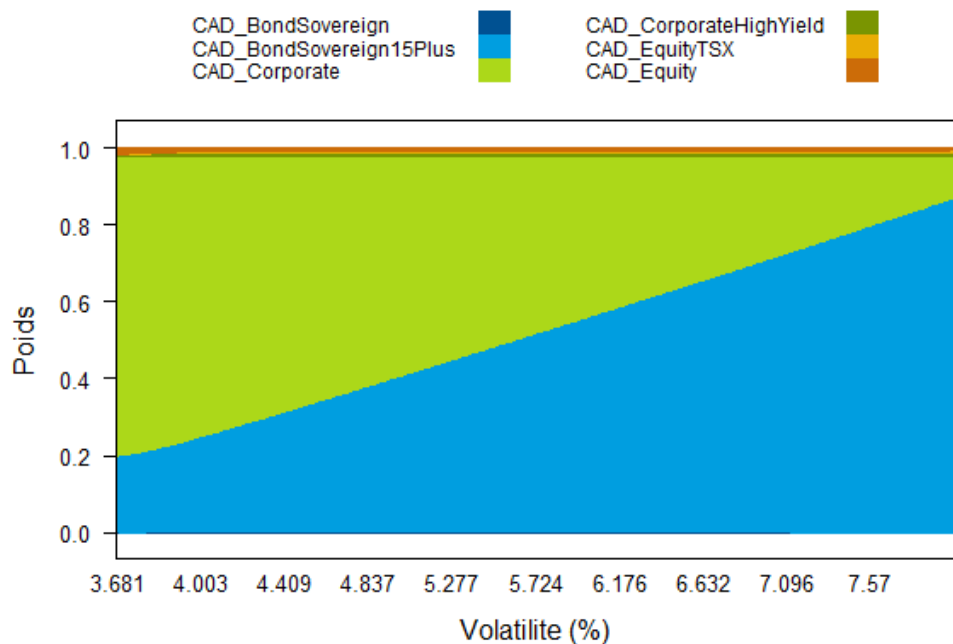


FIGURE 9.11 – CAD : composition des portefeuilles

Classe	Poids (%)	Rendement (%)	Volatilité (%)
Bond Sovereign	0,11		
Bond Sovereign 15Y	24,81	4,07	4,02
Corporate	73,02		
Corporate High Yield	0,68		
Equity TSX	0,38	0,11	0,17
Equity Canada	1,00		
Total	100	4,14	4,00

TABLE 9.6 – CAD : allocation retenue

Une telle allocation permet de dégager un bon excès de rendement par rapport au TRI de 2,45 %.

9.5 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons proposé des allocations d'actifs qui respectent les contraintes d'investissement. Nous avons appliqué le modèle de Markowitz plutôt que le modèle de Sharpe et Tint, car il est très difficile d'estimer les corrélations entre des classes d'actifs très variées et le passif, les programmes d'optimisation quadratique étant déjà assez sensibles aux paramètres.

A ce sujet, nous avons appliqué une méthode de *portfolio resampling* qui permet, par simulation de rendements, d'obtenir des résultats plus stables et des allocations mieux diversifiées.

Limites Cependant, nous avons raisonné comme si le passif était entièrement investissable par la succursale, ce qui n'est pas le cas compte tenu des spécificités présentées en première partie, notamment la part non négligeable du compte de passage dans l'actif du bilan. Nous pouvons toutefois effectuer un rapide comparatif entre les performances des allocations déterminées dans cette partie et celles de l'actif actuel (y compris compte de passage) en nous basant sur les rendements et covariances estimés dans ce chapitre (ce ne sont donc pas les vrais rendements de l'actif) :

Monnaie	Portefeuille	Rendement (%)	Volatilité (%)
EUR	Actuel	1,19	1,30
	Markowitz	2,79	2,00
USD	Actuel	2,50	2,68
	Markowitz	5,01	4,00
CAD	Actuel	3,25	4,12
	Markowitz	4,14	4,00

TABLE 9.7 – Comparaison des rendements

Comme nous pouvons le constater, avec les niveaux de volatilité retenus qui sont jugés acceptables, nous sommes en mesure de dégager de meilleurs rendements.

Les rendements et covariance ont été estimés sur la base de cours d'indices financiers (Markit iBoxx, EuroMTS, S&P). L'avantage de ces indices est qu'ils couvrent les segments les plus représentatifs et liquides du marché, pour des titres libellés dans un large éventail de monnaies (EUR, USD, GBP, CAD...). Ils sont construits selon des règles strictes : rebalancements périodiques des titres de l'indice et leurs coûts, paiements de coupons, de nominaux des titres arrivés à échéance, entrées/sorties de titres de l'indice..., qui les rendent particulièrement intéressants aux gérants d'actifs et très utiles à notre cas d'étude. Cependant, pour des raisons matérielles, les indices ne nous étaient pas directement disponibles et nous avons été contraints d'utiliser des données publiques (cours de *trackers*, c'est-à-dire de fonds cotés en bourse répliquant ces indices), limitant notre fenêtre d'estimation à 5 ans (2013–2017). C'est là une problématique supplémentaire. En effet, les rendements moyens sur une période dépendent fortement de la période considérée.

De même, les simulations de rendement ont été effectuées selon une loi normale multivariée, difficilement observable dans la réalité.

Conclusion générale

L'allocation d'actifs optimale est un enjeu très important pour tout organisme assureur, y compris pour une succursale de réassurance vie. L'objectif de ce mémoire était d'exposer les sources et conséquences des risques de taux d'intérêt et de change, et de présenter des méthodes et techniques permettant de les quantifier et de s'immuniser. Neutraliser le risque de change est une problématique finalement bien plus opérationnelle que théorique : il faut représenter les passifs en devise par des investissements congruents. En revanche, le risque de taux est plus complexe et requiert dans un premier temps une bonne compréhension du passif.

En ce sens, nous avons abordé dans une première partie les particularités du bilan d'une succursale ainsi que le modèle permettant de déduire les cash-flows de passifs pour chacune des trois monnaies de modélisation qui regroupent l'ensemble du passif. Nous rappelons que ce modèle est entièrement basé sur un ensemble d'hypothèses définies à une maille assez large, nous obligeant à garder un oeil critique sur les cash-flows modélisés.

La démarche retenue a consisté à représenter la valeur actuelle des cash-flows modélisés dans un **portefeuille de couverture** du risque de taux. Nous avons présenté les techniques classiques d'adossage par la duration, et conduit une analyse plus fine en appliquant la méthode des *Key Rate Durations* de façon à quantifier le risque de taux par plusieurs maturités clés, en lieu et place d'un seul indicateur tel que la sensibilité. La problématique du placement des taux clés sur la courbe des taux a été traitée en choisissant des maturités permettant de répartir la sensibilité globale des passifs EUR et CAD en poches de sensibilité plus ou moins égales. L'allure très particulière du passif USD nous a conduit à retenir les cinq premières maturités. Pour les trois monnaies de modélisation, nous avons alors montré qu'il était possible en ne considérant qu'une dizaine d'obligations représentatives de bien adosser les vecteurs de KRD de passif et d'actif.

Pour compléter, un **portefeuille de rendement** représente la marge contenue dans les provisions techniques IFRS ainsi que les fonds propres de la succursale. Il est construit selon la technique classique d'optimisation de portefeuille moyenne-variance de Markowitz, où nous avons posé des contraintes :

- de quantité,
- d'appartenance à la partie couverture (dette souveraine ou *corporate investment-grade*) ou à la partie rendement (*high-yield* et actions).

En procédant de cette façon, nous ne pouvons toutefois pas prendre en compte les contraintes très pratiques de diversification et de liquidité des titres. Nous avons appliqué une méthode de rééchantillonnage de la frontière efficiente afin de proposer des résultats plus stables que si nous avions seulement utilisé les estimations des espérances de rendement et de covariances basées sur l'historique de cours d'indices dont nous disposions : les allocations sont d'ailleurs mieux diversifiées.

Les allocations obtenues sont finalement assez réalistes pour une succursale de réassurance qui se doit d'être prudente dans sa gestion d'actifs. En retenant des volatilités de 2 % pour l'EUR et de 4 % pour l'USD et le CAD, nous obtenons des portefeuilles massivement orientés vers la dette souveraine et *corporate* bien notées, tout en limitant les actions à environ 9 % du total du portefeuille global. Les obligations à haut rendement sont prépondérantes pour générer du rendement.

Cela nous permet de bien mettre en évidence que la séparation de la modélisation des passifs et la construction des portefeuilles par monnaie est essentielle pour se couvrir du risque de change, mais également pour assurer un taux de rendement de l'actif permettant de couvrir l'actualisation du passif, bien plus forte sur le CAD et l'USD (traités de la zone MENA notamment) que sur l'EUR (taux sans risque négatifs sur les maturités les plus courtes).

Nous pouvons dégager plusieurs limites et pistes d'ouverture à ce mémoire :

- Le modèle de Markowitz est mono-période et ne considère que l'évolution des actifs entre une date initiale et une date finale : il ne permet pas d'anticiper le comportement des variables économiques sur le long terme. Des projections stochastiques de ces variables dans le cadre d'un générateur de scénarios économiques monde réel permettraient d'appréhender tous les aléas possibles.
- Les portefeuilles sont construits en minimisant la variance qui est la mesure de risque la plus classiquement utilisée en finance. L'optimalité de portefeuille pourrait être vue en minimisant plutôt la Value at Risk ou la semi-variance.
- Le modèle permettant le calcul des cash-flows nécessaires à la détermination des indicateurs du risque de taux dépend très fortement des hypothèses et de la classification des traités dans les clusters. L'allure des cash-flows, comme nous l'avons vu pour le passif EUR et USD est très impactée par les libérations de provision additionnelle.
- Matériellement, nous sommes également limités vis-à-vis de la disponibilité de données financières.

Ce mémoire pourra toutefois servir de base à de plus amples études sur la question de l'allocation d'actifs pour une succursale de réassurance soumise à des contraintes structurelles. Il est à considérer comme une proposition de méthodes d'immunisation et de construction de portefeuille d'investissement.

Annexes

Annexe A

Provision additionnelle

Afin de bien mesurer l'impact de la provision additionnelle ajoutée par le modèle après la mise à l'échelle, prenons l'exemple (simplifié) d'une projection sur le cluster : « Vie, long terme, run off, somme assurée constante, prime de risque ».

La première étape est la projection des 12 model-points (voir figure 3.3). Comme nous sommes dans un cluster à prime de risque, aucune provision n'est modélisée à cette étape.

Le tableau suivant présente un aperçu des 7 premières années de projection pour les 12 model-points agrégés (fin de l'étape 2 page 23). Les chiffres ont été divisés par 1000 pour plus de lisibilité.

Année	Polices BoP	Sinistres	Primes	Prov. modèle BoP	Cash-flow	Résultat
1	120	– 950	1 400	0	450	450
2	110	– 975	1 415	0	440	440
3	100	– 1 000	1 400	0	400	400
4	90	– 1 050	1 420	0	370	370
5	80	– 1 100	1 450	0	350	350
6	70	– 1 150	1 500	0	350	350
7	60	– 1 100	1 400	0	300	300

TABLE A.1 – **Projection : étape 1 - 2**

Afin de tenir compte de la réalité économique du cluster, la projection précédente est calée sur les primes comptabilisées en année 0, supposons 14 000. Tous les montants doivent donc être multipliés par $\frac{14000}{1400} = 10$. Il faut également tenir compte des provisions comptabilisées, supposons 20 000. La provisions additionnelle à rajouter en année 1 est donc : $20\,000 - 0 = 20\,000$. Si celle-ci est libérée en 5 ans, nous obtenons la projection finale suivante (pour simplifier, nous supposons qu'il n'y a ni PB, frais ou fonds de stabilisation) :

Année	Primes	Sinistres	Prov. modèle BoP	Prov. add. BoP	Sinistres sur Prov. add.	Cash-flow	Résultat
1	14 000	− 9 500	0	20 000	− 4 000	500	4 500
2	14 150	− 9 750	0	16 000	− 4 000	400	4 400
3	14 000	− 10 000	0	12 000	− 4 000	0	4 000
4	14 200	− 10 500	0	8 000	− 4 000	− 300	3 700
5	14 500	− 11 000	0	4 000	− 4 000	− 500	3 500
6	15 000	− 11 500	0	0	0	3 500	3 500
7	14 000	− 11 000	0	0	0	3 000	3 000

TABLE A.2 – Projection : étape 3 - 4

Annexe B

Démonstration des optimisations de portefeuille

Modèle de Markowitz

Sans actif sans-risque

Nous voulons résoudre le problème suivant :

Portefeuille optimal

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} \\
 \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = \mu_P \\
 & \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1.
 \end{aligned}$$

Nous posons pour cela le Lagrangien L :

$$L = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} - \lambda_1 (\mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1) - \lambda_2 (\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P)$$

Les dérivées partielles nous donnent $N + 2$ équations :

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \sum_j w_j \sigma_{ij} - \lambda_1 - \lambda_2 \mu_i = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P = 0 \quad (\text{B.3})$$

Des N premières équations, nous déduisons aisément : $\Omega \mathbf{w} - \lambda_1 \mathbf{e} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu} = 0$, et donc : $\mathbf{w}^* = \Omega^{-1}(\lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu})$.

Pour déterminer les constantes, nous utilisons les contraintes. La première implique : $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}^* = \mu_P$ ou encore : $\boldsymbol{\mu}^T (\Omega^{-1} \Omega) \Omega^{-1} (\lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu}) = \mu_P$. La deuxième implique : $\mathbf{e}^T \mathbf{w}^* = \mathbf{e}^T (\Omega^{-1} \Omega) \Omega^{-1} (\lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu})$.

En développant, et en posant : $a = \mathbf{e}^T \Omega^{-1} \mathbf{e}$, $b = \mathbf{e}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}$ et $c = \boldsymbol{\mu}^T \Omega^{-1} \boldsymbol{\mu}$, nous pouvons résoudre le système constitué des deux équations suivantes : $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 1$ et $\lambda_1 b + \lambda_2 c = \mu_P$. Les solutions sont : $\lambda_1 = \frac{c - b\mu_P}{ca - b^2}$, $\lambda_2 = \frac{\mu_P a - b}{ca - b^2}$.

Avec un actif sans risque

Portefeuille optimal (actif sans risque)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + (1 - \mathbf{e}^T \mathbf{w})r = \mu_P. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Le Lagrangien est :

$$L = \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} - \lambda \left[\mu_P - r - (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e})^T \mathbf{w} \right]$$

Les $N + 1$ équations sont cette fois :

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \Omega \mathbf{w} - \lambda(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\mu_P - r = (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e})^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T (\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

On obtient de la première : $\mathbf{w}^* = \lambda \Omega^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e})$, et de la deuxième : $\mu_P - r = \lambda(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e})^T \Omega^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{e}) = \lambda(c - 2rb + r^2a)$ et donc finalement : $\lambda = \frac{\mu_P - r}{c - 2rb + r^2a}$.

Modèle de Sharpe et Tint

Nous voulons résoudre le problème suivant :

Sharpe et Tint - Optimisation

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} - \frac{2k}{f} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\gamma} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{k}{f} \mu_L = r_S \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Alors le Lagrangien est le suivant :

$$L = \mathbf{w}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{w} - \frac{2k}{f} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\gamma} - \lambda_1 (\mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1) - \lambda_2 \left(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{k}{f} \mu_L - r_S \right)$$

Et les dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{\Omega} \mathbf{w} - \frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma} - \lambda_1 \mathbf{e} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{k}{f} \mu_L - r_S = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (\text{B.10})$$

Alors avec la première équation, on déduit que : $\mathbf{w}^* = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \left(\frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma} + \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu} \right)$.

Portefeuille global de variance minimale

On ne considère pas la contrainte de rendement dans le problème d'optimisation. Le système ne comporte alors que deux équations, et on a : $\mathbf{w}_G^* = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \left(\frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma} + \lambda_1 \mathbf{e} \right)$. En injectant cette expression dans la contrainte $\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$, nous avons, en posant $d = \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w}_G^* = \frac{k}{f} \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma} + \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e} = 1 \iff \lambda_1 = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{k}{f} d \right)$$

Nous pouvons alors en déduire que :

$$\mathbf{w}_G^* = \frac{1}{a} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e} + \frac{k}{f} \left(\mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma} - \frac{d}{a} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{e} \right)$$

Problème initial

Pour résoudre le problème initial, nous injectons la solution générale $\mathbf{w}^*$ dans les deux contraintes. La première implique :

$$\mathbf{e}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \left(\frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma} + \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu} \right) \right) = \frac{k}{f} d + \frac{\lambda_1}{2} a + \frac{\lambda_2}{2} b = 1$$

Et la seconde, en posant $e = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \left(\frac{2k}{f} \boldsymbol{\gamma} + \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu} \right) \right) = \frac{k}{f} e + \frac{\lambda_1}{2} b + \frac{\lambda_2}{2} c = \frac{k}{f} \mu_L + r_S$$

Les constantes λ_1 et λ_2 se déterminent alors en résolvant le système aux deux équations suivantes : $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 2 - \frac{2k}{f} d$ et $\lambda_1 b + \lambda_2 c = 2r - 2\frac{ke}{f}$ en posant $r = \frac{k}{f} \mu_L + r_S$.

Les solutions d'un tel système sont : $\lambda_1 = \frac{2(bf-ke)+c(kd-f)}{f(b^2-4ac)}$ et $\lambda_2 = \frac{2(bf-kd)+a(ke-rf)}{f(b^2-4ac)}$.

Annexe C

Taux de change MENA à parité fixes avec l'USD

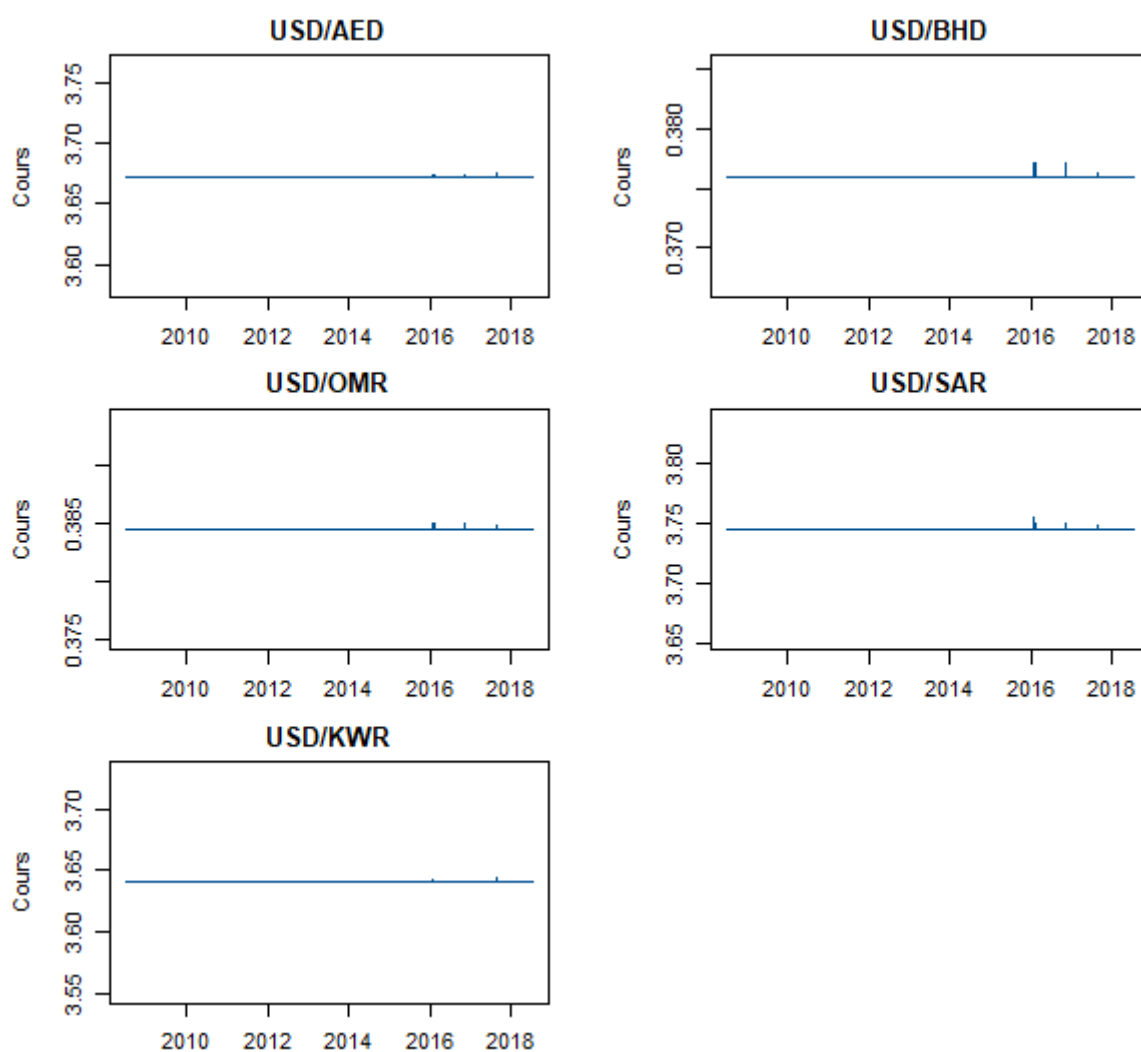


FIGURE C.1 – USD vs. monnaies MENA fixes

Annexe D

Courbes de taux utilisées

Les courbes de taux suivantes ont été utilisées dans ce mémoire.

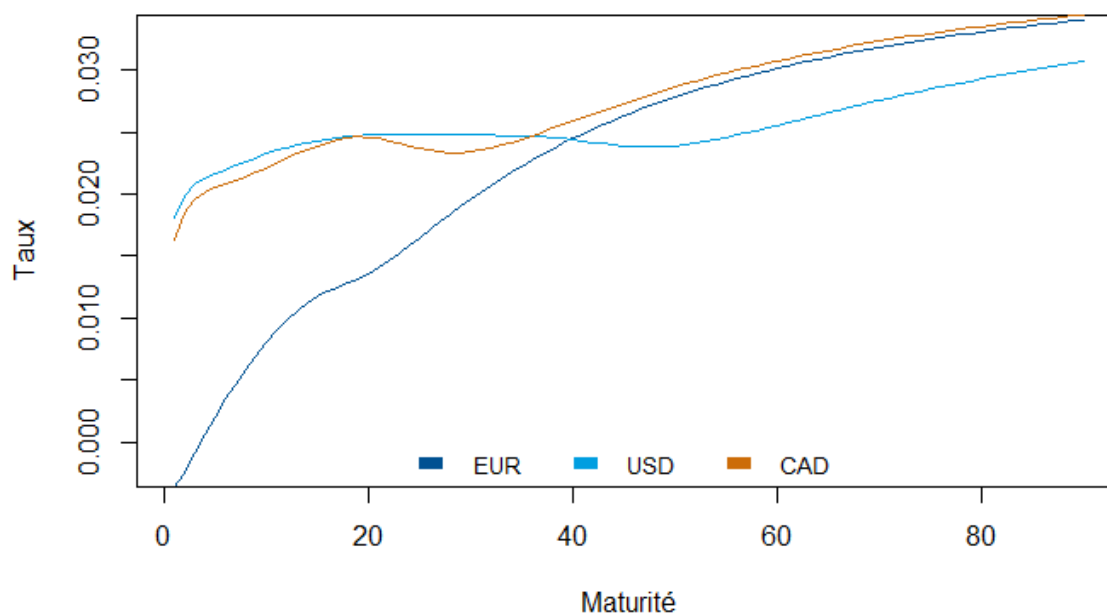


FIGURE D.1 – Courbe de taux EIOPA 31/12/2017

Annexe E

Echelle de notation financière des agences de notation

Grade	Moody's	S&P	Fitch
Prime	Aaa	AAA	AAA
High grade	Aa1	AA+	AA+
	Aa2	AA	AA
	Aa3	AA-	AA-
Upper medium grade	A1	A+	A+
	A2	A	A
	A3	A-	A-
Lower medium grade	Baa1	BBB+	BBB+
	Baa2	BBB	BBB
	Baa3	BBB-	BBB-
Non-investment grade speculative	Ba1	BB+	BB+
	Ba2	BB	BB
	Ba3	BB-	BB-
Highly speculative	B1	B+	B+
	B2	B	B
	B3	B-	B-
Substantial risks	Caa1	CCC+	CCC+
	Caa2	CCC	CCC
	Caa3	CCC-	CCC-
Extremely speculative	Ca	CC	CC
			C
In default with little prospect for recovery		SD	RD
In default	C	D	D
			DD
			DDD
Not rated	WR	NR	

Annexe F

Démonstrations liées aux rendements

Rendement d'un portefeuille

Rendements simples :

$$\begin{aligned}
 R_t^{PF} &= \frac{P_t^{PF}}{P_{t-1}^{PF}} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i P_{i,t}}{\sum_{j=1}^N n_j P_{j,t-1}} - 1 = \sum_{i=1}^N \frac{n_i P_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N n_j P_{j,t-1}} \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1 \\
 &= \sum_{i=1}^N w_{i,t} (1 + R_{i,t}) - 1 = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t}
 \end{aligned}$$

Où $w_{i,t} = \frac{n_i P_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N n_j P_{j,t-1}}$ est le poids en $t-1$ dans le i -ème titre, et n_i est la quantité investie dans le titre i en $t-1$.

Log-rendements :

$$r_t^{PF} = \log \left(\frac{P_t^{PF}}{P_{t-1}^{PF}} \right) = \log \left(\frac{\sum_{i=1}^N n_i P_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N n_j P_{j,t-1}} \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) = \log \left(\sum_{i=1}^N w_{i,t} \exp(r_{i,t}) \right)$$

Rendements mensuels annualisés

$$\begin{aligned} \mu_i^a &= \mathbb{E}(R_i^a) = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^M (1 + R_{i,k}^m) \right] - 1 \\ &= \prod_{k=1}^M \left[\mathbb{E}(1 + R_{i,k}^m) \right] - 1 \text{ car les } R_{i,1}, \dots, R_{i,M} \text{ sont indépendants} \\ &= \left(\mathbb{E}(1 + R_i) \right)^M - 1 \text{ car les } R_{i,1}, \dots, R_{i,M} \text{ sont i.d.} \\ &= (1 + \mu_i^m)^M - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^a &= \text{Cov} \left(R_i^a, R_j^a \right) = \text{Cov} \left(R_i^a + 1, R_j^a + 1 \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^M (R_{i,k}^m + 1)(R_{j,k}^m + 1) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^M (R_{i,k}^m + 1) \right] \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^M (R_{j,k}^m + 1) \right] \\ &= \prod_{k=1}^M \mathbb{E} \left[(R_{i,k}^m + 1)(R_{j,k}^m + 1) \right] - \prod_{k=1}^M \mathbb{E}(R_{i,k}^m + 1) \prod_{k=1}^M \mathbb{E}(R_{j,k}^m + 1) \text{ par indépendance} \\ &= \mathbb{E} \left[(R_i^m + 1)(R_j^m + 1) \right]^M - \mathbb{E} \left[R_i^m + 1 \right]^M \mathbb{E} \left[R_j^m + 1 \right]^M \text{ car i.d.} \\ &= \left(1 + \mu_i^m + \mu_j^m + \mathbb{E}(R_i^m R_j^m) \right)^M - (1 + \mu_i)^M (1 + \mu_j)^M \\ &= \left(\sigma_{ij}^m + (1 + \mu_i^m)(1 + \mu_j^m) \right)^M - (1 + \mu_i^m)^M (1 + \mu_j^m)^M \text{ car } \mathbb{E}(R_i^m R_j^m) = \sigma_{ij}^m + \mu_i^m \mu_j^m \end{aligned}$$

Normalité des rendements mensuels

Nous présentons une boîte à moustaches en figure (F.1) pour juger de la symétrie et de valeurs atypiques. Nous pouvons remarquer de façon générale une bien plus grande dispersion sur les actions. Nous traçons également des histogrammes pour chacune des classes d'actifs, auxquels nous superposons la densité d'une loi normale dont les paramètres sont estimés sur nos échantillons. Nous donnons les p-valeurs des tests de Shapiro-Wilk. Dans 14 des 21 cas, au seuil $\alpha = 5\%$, les tests ne sont pas significatifs et nous décidons de ne pas rejeter l'hypothèse de normalité, en commettant un risque d'erreur de deuxième espèce β .

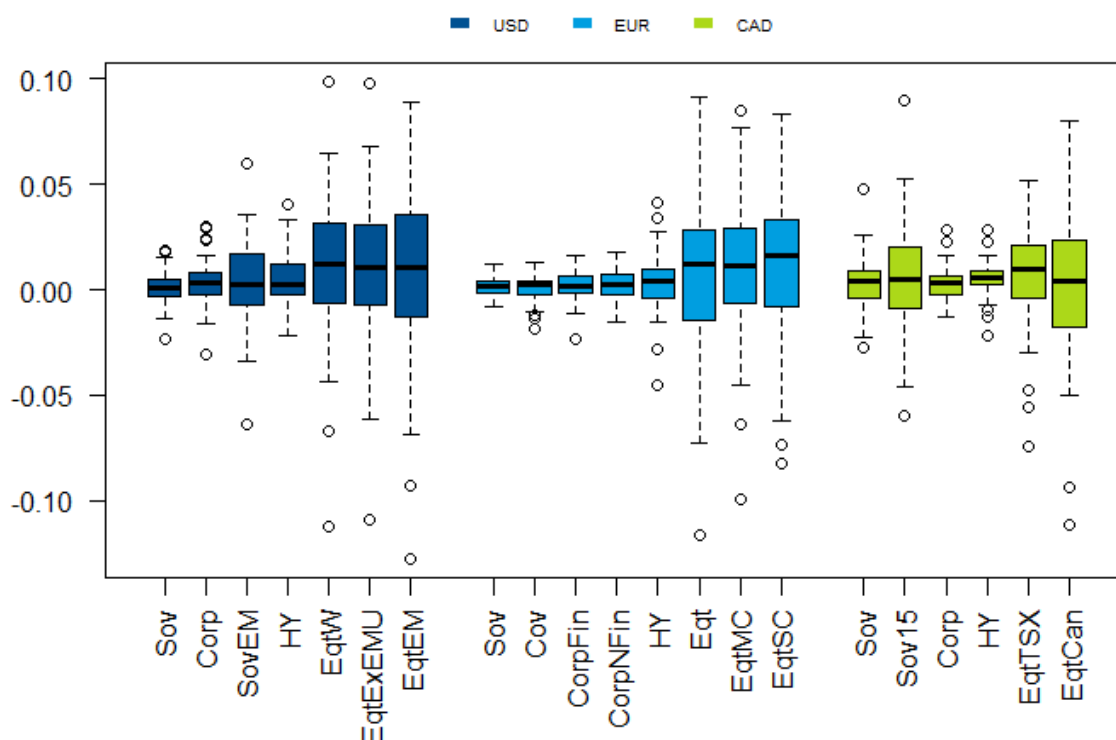


FIGURE F.1 – Boxplot : rendements

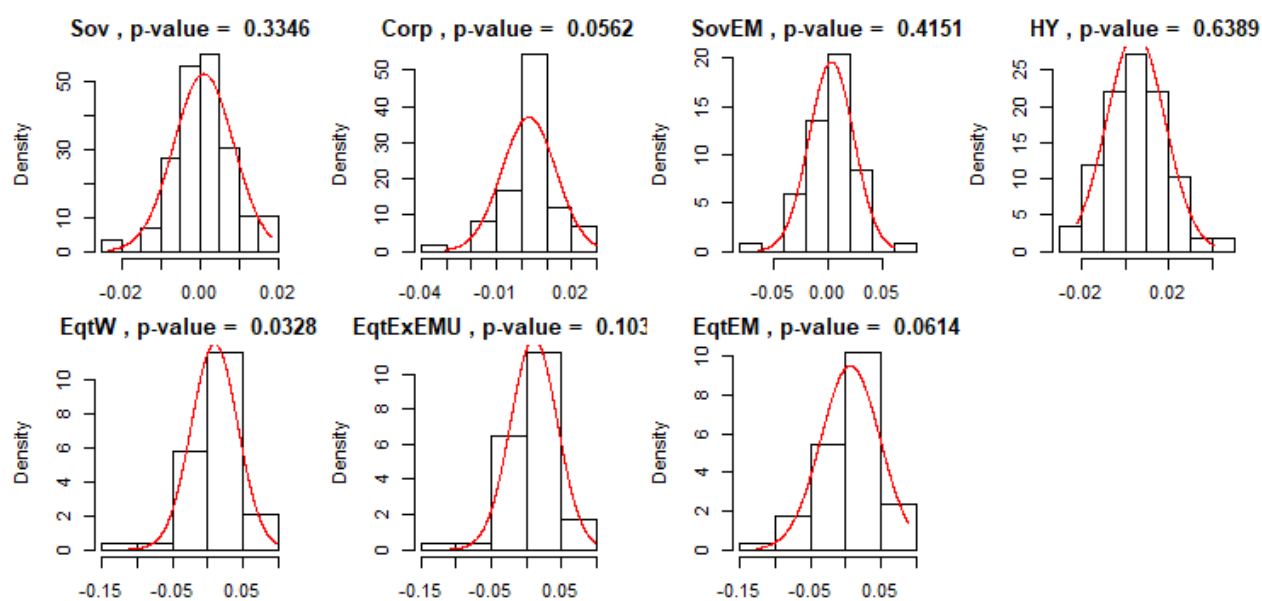


FIGURE F.2 – Histogrammes : USD

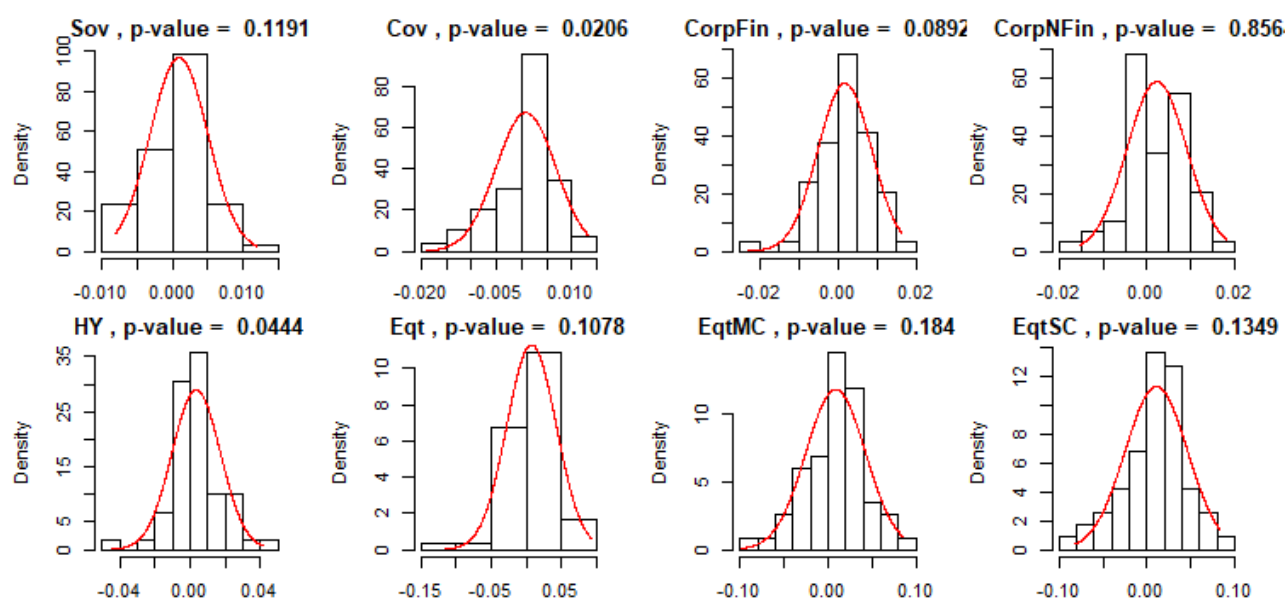


FIGURE F.3 – Histogrammes : EUR

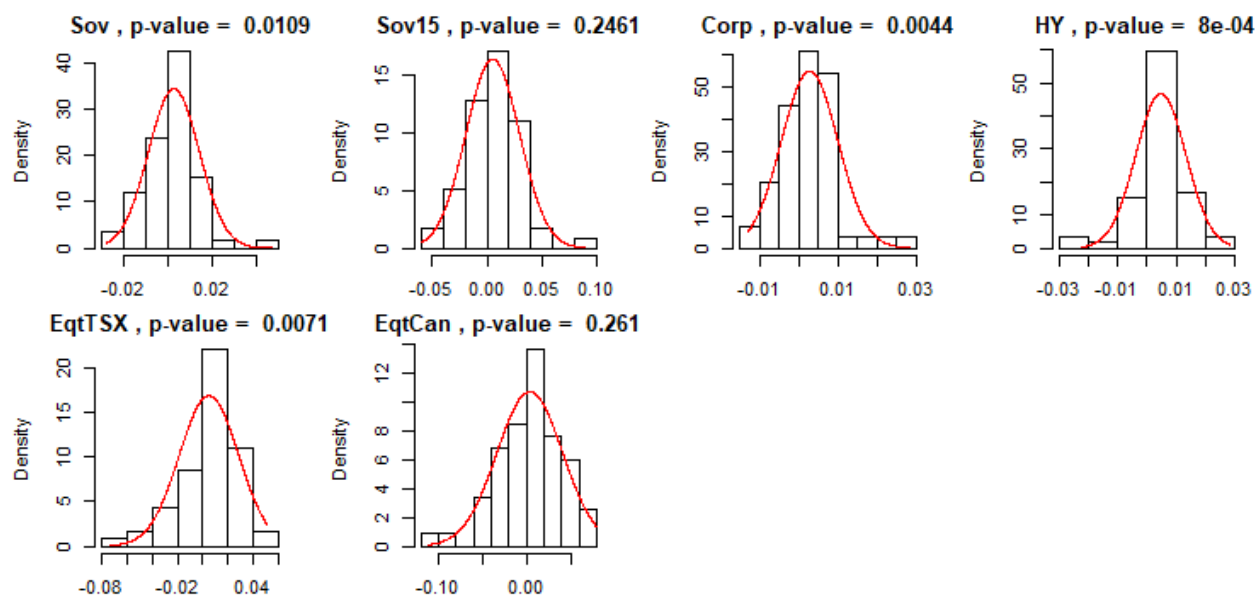


FIGURE F.4 – Histogrammes : CAD

Table des figures

1.1	Quote-part à 30 %	5
1.2	Excédent de plein (rétention de 40, 2 lignes)	6
1.3	Excédent de sinistres : 70 xs 30	7
1.4	Impacts de la réassurance sur le bilan	11
2.1	Passif technique L&H (en pourcentage de provisions techniques)	16
3.1	Cash-flows du modèle	25
3.2	Marge future dans les provisions IFRS	27
3.3	Processus d'allocation d'actifs	29
4.1	Cash-flow matching : résultats	35
5.1	KRD : interpolation des shifts	43
5.2	Passif et courbe des taux	45
5.3	Matrice des shifts $s(t, \tau_i)$ (en bp)	46
5.4	Couverture des valeurs actuelles et des KRD	48
5.5	Échanges de flux d'un swap	50
6.1	Frontière de variance minimale	57
6.2	Impact de la contrainte	60
6.3	Vente à découvert interdite	60
6.4	Vente à découvert autorisée	60
6.5	Contraintes : frontière	62
6.6	Contraintes : allocations	62
7.1	Sharpe et Tint : frontière	67
7.2	Sharpe et Tint : allocations	67
8.1	Cash-flows EUR	71
8.2	EUR : contributions relatives à la sensibilité	72
8.3	EUR : couverture des KRD	74
8.4	USD : contributions relatives à la sensibilité	75
8.5	USD : couverture des KRD	76

8.6	CAD : contributions relatives à la sensibilité	77
8.7	CAD : couverture des KRD	78
9.1	EUR : matrice de corrélation	84
9.2	EUR : frontière efficiente	85
9.3	EUR : composition des portefeuilles	86
9.4	EUR : frontière efficiente rééchantillonnée	87
9.5	EUR : composition des portefeuilles rééchantillonnés	88
9.6	USD : matrice de corrélation	89
9.7	USD : frontière rééchantillonnée	90
9.8	USD : composition des portefeuilles	90
9.10	CAD : frontière rééchantillonnée	92
9.9	CAD : matrice de corrélation	92
9.11	CAD : composition des portefeuilles	93
C.1	USD vs. monnaies MENA fixes	102
D.1	Courbe de taux EIOPA 31/12/2017	103
F.1	Boxplot : rendements	106
F.2	Histogrammes : USD	106
F.3	Histogrammes : EUR	107
F.4	Histogrammes : CAD	107

Bibliographie

Articles et ouvrages

- [1] Bernard APOTHÉLOZ et al., *Maîtriser l'information comptable (Volume 2)*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2014.
- [5] Damiano BRIGO et Fabio MERCURIO, *Interest Rate Models - Theory and Practice, With Smile, Inflation and Credit*, Springer, 2006.
- [6] Frank J. FABOZZI et Moorad CHOUDHRY, *The Handbook of European Fixed Income Securities*, Wiley Finance, déc. 2003.
- [8] Thomas HO, « Key Rate Durations : Measures of Interest Rate Risks », in : *Journal of Fixed Income* (1992), p. 29–44.
- [9] Garud IYENGAR et Alfred Ka Chun MA, « Cash Flow Matching : A Risk Management Approach », in : *North American Actuarial Journal* 13 (2009), p. 370–384.
- [11] Yan JIN, Rong QU et Jason ATKIN, « Constrained Portfolio Optimisation : the state-of-the-art Markowitz Models », in : *The 2016 International Conference on Operations Research and Enterprise Systems* (2016).
- [12] Rama KOCHERLAKOTA, E. S. ROSENBLOOM et Elias S. W. SHIU, « Algorithms for cash-flow matching », in : *Transactions of Society of Actuaries* 40 (1988), p. 477–484.
- [13] Tze LEUNG HAI, Xing HAIPEN et Zehao CHEN, « Mean-Variance Portfolio Optimization when Means and Covariances are Unknown », in : *The Annals of Applied Statistics* 5.2A (2011), p. 798–823.
- [14] Frederick R. MACAULAY, *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*, National Bureau of Economic Research, 1938.
- [15] Harry MARKOVITZ, « Portfolio selection », in : *The Journal of Finance* 7 (1952), p. 77–91.
- [16] Richard O. MICHAUD et Robert O. MICHAUD, *Efficient Asset Management, A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, 2^e éd., Oxford University Press, 2008.
- [17] Huy NGUYEN TRIEU, « Duration Extension : Analysis and Consideration », in : *Risk Management* (déc. 2013), p. 22–26.
- [20] William F. SHARPE et Lawrence G. TINT, « Liabilities - A New Approach », in : *Journal of Portfolio Management* 16.2 (1990), p. 5–10.
- [22] François de VARENNE, « La gestion des actifs chez un réassureur en cinq questions », in : *Risques* (2009), p. 42–47.

- [23] David E. ZEBALLOS CORIA, « Market Risk Measurement : Key Rate Duration as an asset allocation instrument », in : *RePEc (Research Papers in Economics)* (2011).
- [24] Harry ZHENG, Lyn C. THOMAS et David E. ALLEN, « The Duration Derby : A Comparison of Duration-Based Strategies in Asset Liability Management », in : *Journal of Bond Trading & Management* 1.4 (2003), p. 371–380.

Mémoires d'actuariat et de Master

- [2] Nicolas BARETH, « Liability Driven Investment Strategies in defined benefits pension funds », mém.de mast., Dauphine, 2012.
- [4] Salma BERRADA SOUNI, « Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite », mém.de mast., ENSAE, 2015.
- [10] Wei JIAO, « Portfolio Resampling and Efficiency Issues », mém.de mast., School of Business Economics. Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.
- [18] Steve-Nicolas PIERRE, « Engagements à prestations définies : construction du portefeuille d'investissement et couverture du risque de taux », mém.de mast., CNAM Paris, 2010.
- [25] Radia ZNIBER EL BACH, « Etude de l'équilibre Actif Passif d'un fonds de démantèlement », mém.de mast., Dauphine, 2013.

Packages R

- [3] Michel BERKELAAR et al., *lpSolve : Interface to Lpsolve v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs*, R package version 5.6.13, 2015, URL : <https://CRAN.R-project.org/package=lpSolve>.
- [7] Alan GENZ et al., *mvtnorm : Multivariate Normal and t Distributions*, R package version 1.0-8, 2018, URL : <https://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm>.
- [19] Deepayan SARKAR, *Lattice : Multivariate Data Visualization with R*, R package version 0.20-35, 2008, URL : <https://CRAN.R-project.org/package=lattice>.
- [21] Berwin A. TURLACH et Andreas WEINGESSEL, *quadprog : Functions to solve Quadratic Programming Problems*. R package version 1.5-5, 2013, URL : <https://CRAN.R-project.org/package=quadprog>.