



ISUP

## PROMOTION 2011

Mémoire présenté devant

**I n s t i t u t d e S t a t i s t i q u e  
de l'Université Pierre et Marie Curie**

Pour l'obtention du

# **D i p l ô m e d e S t a t i s t i c i e n M e n t i o n A c t u a r i a t**

**A s s u r a n c e** □

**F i n a n c e** □

Par Mlle Géraldine BOUSSIÈRES

Sujet : Modélisation prospective du bilan d'un assureur automobile dans le cadre de l'ORSA et analyse de la volatilité du ratio de solvabilité

Lieu du stage : OPTIMIND

Responsable du stage : Julien CHARTIER

Invité(s) :

**CONFIDENTIEL** □



## Sommaire

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>5</b>
<b>RESUME .....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>11</b>
<b>PARTIE 1 : SOLVABILITE II ET CONTEXTE DU MEMOIRE .....</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE 1 : SOLVABILITE II.....</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE 2 : CONTEXTE DU MEMOIRE .....</b>	<b>21</b>
<b>PARTIE 2 : MODELISATION PROSPECTIVE DU BILAN SUR 5 ANS.....</b>	<b>25</b>
<b>CHAPITRE 3 : ARCHITECTURE DE L'OUTIL DE <i>BUSINESS PLAN</i> PROSPECTIF .....</b>	<b>25</b>
<b>CHAPITRE 4 : MODELISATION DES INDICES MACROECONOMIQUES ET FINANCIERS .....</b>	<b>27</b>
<b>CHAPITRE 5 : MODELISATION DE LA SINISTRALITE .....</b>	<b>43</b>
<b>CHAPITRE 6 : MODELISATION DU BILAN .....</b>	<b>51</b>
<b>CHAPITRE 7 : CALCUL DU SCR.....</b>	<b>61</b>
<b>PARTIE 3 : ANALYSE DE LA VOLATILITE DU RATIO DE SOLVABILITE .....</b>	<b>77</b>
<b>CHAPITRE 8 : ANALYSE DE LA VOLATILITE DU RATIO DE SOLVABILITE PROSPECTIVE A 5 ANS.....</b>	<b>77</b>
<b>CHAPITRE 9 : ANALYSE DE LA VOLATILITE DU RATIO DE SOLVABILITE DANS LE TEMPS .....</b>	<b>87</b>
<b>CHAPITRE 10 : PILOTAGE PROSPECTIF DE L'ACTIVITE PAR LA SOLVABILITE ET SENSIBILITES DU MODELE A TROIS DECISIONS STRATEGIQUES .....</b>	<b>93</b>
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>109</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>111</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>123</b>



---

## Remerciements

---

Je tiens à remercier tout particulièrement Julien Chartier qui a été mon maître de stage. Son expertise a constitué une aide précieuse pour la rédaction de mon mémoire. Julien a soutenu mes efforts et m'a apporté une grande aide par son expérience d'entreprise.

Je remercie aussi Christophe Eberlé de m'avoir permis de réaliser mon stage de fin d'études chez Optimind dans d'excellentes conditions.

Les conseils avisés d'Arnaud Cohen, sa vision panoramique, son diagnostic m'ont également été précieux, en m'aidant à orienter mes investigations et à faire les approfondissements nécessaires.



---

## Résumé

---

Solvabilité II est une réforme européenne de la réglementation prudentielle s'appliquant au secteur de l'assurance. A l'instar de la réforme dite « Bâle II » qui concerne les banques, Solvabilité II a pour objectif d'encourager les assureurs à mieux connaître et évaluer leurs risques notamment en adaptant les exigences réglementaires aux risques qu'ils encourent dans leur activité. Les exigences sont structurées en trois piliers constitués par les exigences quantitatives (premier pilier), les activités de contrôle (deuxième pilier) et les exigences en matière d'informations prudentielles et de communication financière (troisième pilier).

Le deuxième pilier de la réforme Solvabilité II prévoit de compléter les exigences quantitatives de fonds propres par des exigences qualitatives requérant un dispositif global de gestion adéquat. Les impacts en termes de risque et de solvabilité doivent alimenter en amont les décisions stratégiques. L'évaluation interne des risques et de la solvabilité, dite ORSA pour *Own Risk Solvency Assessment*, constitue la pièce maîtresse de ce dispositif.

Le pilotage de l'activité par la solvabilité nécessite d'intégrer une vision prospective dans l'ORSA. Les assureurs doivent donc envisager les évolutions futures susceptibles d'impacter leur solvabilité : changement réglementaire ou modifications des règles fiscales, dégradation du contexte économique, sinistralité exceptionnelle, etc.

Ce mémoire propose la mise en place d'un outil de *business plan* prospectif spécifiant l'évolution future probable d'un indicateur de risque : le ratio de solvabilité sous Solvabilité II. Le portefeuille étudié dans le cadre de ce mémoire est celui d'un assureur mono-produit automobile. Afin d'étudier au cours du temps la volatilité de l'indicateur de risque retenu, il est nécessaire de modéliser les éléments permettant de calculer les deux composantes du ratio de solvabilité. Ce sont les fonds propres et le capital réglementaire requis, dit SCR : *Solvency Capital Requirement*.

Le mémoire présente un modèle de projection dynamique du bilan, qui consiste à simuler, de manière stochastique, les flux futurs de l'assureur. Cette simulation est basée sur une méthode de Monte-Carlo. La simulation des flux futurs de l'assureur nécessite de modéliser les éléments générant ces flux, à savoir les sinistres, la production nouvelle et les placements.

Le modèle mis en production permet d'obtenir la volatilité du ratio de solvabilité dans le référentiel Solvabilité II. Dans cette étude, les risques prépondérants influant sur la volatilité du ratio de solvabilité à 5 ans sont le risque action et la volatilité de la sinistralité. La volatilité de la sinistralité induit la volatilité des provisions techniques et donc des fonds propres. Le risque action est celui qui impacte le plus la volatilité de l'exigence de capital réglementaire.





---

## ABSTRACT

---

Solvency II is an European reform of prudential regulation applying to the insurance industry. In line with the reform known as "Basel II" for banks, Solvency II aims to encourage insurers to understand and assess better their risks. One of the goals of the reform Solvency II is to adapt regulatory requirements adapting to the risks the insurers face in their activities. The requirements are structured in three pillars: the quantitative requirements in the first pillar, the control activities in the second pillar and the requirements of supervisory reporting and the financial communication in the third pillar.

The second pillar of the Solvency II reform plans to complete the quantitative requirements of capital with qualitative requirements that require a comprehensive adequate management. Impacts in terms of risk and solvency must supply upstream the strategic decisions. The Own Risk Solvency Assessment, known as ORSA, is the centerpiece of this device.

The control of activity by the solvency requires to integrate a forward-looking in the ORSA. Insurers should therefore consider future developments that may affect their solvency: regulatory changes or tax rules modifications, worsening economic context, outstanding claims, etc.

As such, this study presents the establishment of a tool for prospective business plan specifying the likely future course of an indicator of risk: the solvency ratio under Solvency II.

In the context of this study, the considered portfolio is one of a single-product automobile insurer.

To study the course of time the volatility of the solvency ratio, it is necessary to model elements to calculate the two components of it. They are the capital and the Solvency Capital Requirement, SCR.

This study presents a dynamic projection model of balance, which simulates stochastic future cash flows of the insurer. This simulation is based on a Monte-Carlo method. The simulation of future cash flows requires modeling the elements generating these flows, namely claims and investments.

The model allows to obtain the volatility of the solvency ratio under the reform Solvency II. In this study, the most important risks affecting the volatility of the solvency ratio are the equity risk and the volatility of claims. The volatility of claims impacts the volatility of the capital. The equity risk impacts the volatility of the solvency capital requirement.



---

## Introduction

---

Le pilotage de l'activité par la solvabilité nécessite d'intégrer une vision prospective dans l'ORSA. A ce titre, ce mémoire propose la mise en place d'un outil de *business plan* prospectif spécifiant la probable évolution future du ratio de solvabilité dans le référentiel Solvabilité II.

L'aptitude d'une société d'assurance à régler ses engagements se mesure par son ratio de solvabilité : un ratio de solvabilité de 100 % signifie que l'assureur a suffisamment de fonds propres pour couvrir les risques liés à ses engagements. Plus le ratio est élevé, plus la solidité financière de l'entreprise est grande.

Le portefeuille étudié dans le cadre de ce mémoire est celui d'un assureur mono-produit automobile.

Afin d'étudier au cours du temps la volatilité du ratio de couverture, il est nécessaire de modéliser les éléments permettant de calculer ce ratio. Le mémoire présente un modèle de projection dynamique du bilan, qui consiste à simuler, de manière stochastique, les flux futurs de l'assureur générés par les sinistres et les placements.

La partie 1 du mémoire présente la réforme Solvabilité II et le contexte du mémoire.

La partie 2 expose la modélisation prospective du bilan avec :

- la modélisation retenue pour les indices macroéconomiques et financiers permettant notamment de valoriser les placements en actions et obligations et d'actualiser les flux de prestations pour le calcul du *Best Estimate* ;
- la modélisation de la sinistralité permettant de valoriser le montant des prestations et des provisions techniques nécessaires ;
- la construction du bilan pour chaque année de projection avec la modélisation de l'actif, du passif et des interactions actif-passif ;
- le calcul du SCR pour les risques de marché et de souscription non-vie grâce à la formule standard.

La partie 3 du mémoire présente une analyse de la volatilité du ratio de solvabilité prospective à 5 ans et dans le temps. L'influence de certains facteurs sur cet indicateur est également étudiée, fournissant ainsi une aide à la décision et à l'ajustement des choix stratégiques.



## Partie 1 : Solvabilité II et contexte du mémoire

### Chapitre 1 : Solvabilité II

#### 1.1 Principes

Le projet Solvabilité II vise à :

- harmoniser les normes et les pratiques prudentielles en Europe ;
- créer un cadre prudentiel prenant en compte les risques spécifiques à chaque entreprise ;
- encourager la bonne gestion des risques et responsabiliser les assureurs, en leur donnant plus de liberté, moyennant un contrôle prudentiel renforcé.

La structure de Solvabilité II s'organise autour de 3 piliers, tout comme le dispositif du secteur bancaire Bâle II.

Pilier 1	Pilier 2	Pilier 3
Les exigences quantitatives	Les exigences qualitatives et le contrôle	Information et discipline de marché
Provisions techniques: BE et RM	Contrôle interne et gestion des risques: ORSA	RTS à l'attention des superviseurs
Exigences de capital: MCR et SCR	Supervision	SFCR à l'attention du public
Fonds propres	Capital add-on	

En substance :

- le pilier 1 contient les exigences quantitatives, concernant le bilan et la solvabilité ;
- le pilier 2 traite des aspects plus qualitatifs, tels que la gouvernance et la gestion des risques, le rôle du superviseur et le processus de supervision ;
- le pilier 3, qui aborde les rapports au superviseur et les informations à publier, n'est pas abordé dans ce mémoire.

Les concepts des deux premiers piliers sont développés ci-après.

## 1.2 Les exigences quantitatives du Pilier I

Le pilier I de Solvabilité II repose sur les concepts suivants :

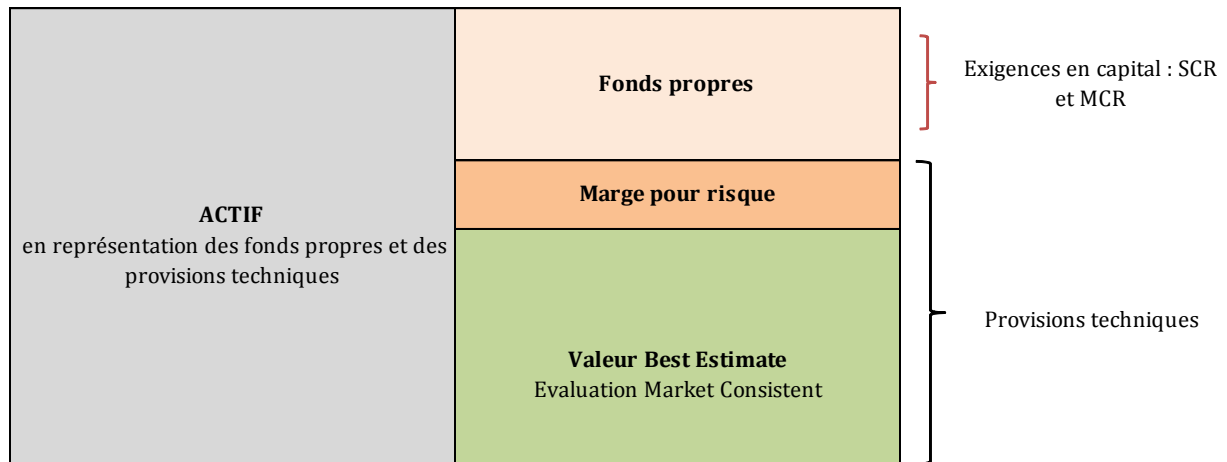
- La meilleure vision de la solvabilité d'un assureur est obtenue lorsque les différents postes du bilan sont évalués à la valeur de marché. Quand une telle valeur de marché n'est pas directement disponible ou observable sur un marché liquide, une valorisation est basée sur un modèle qui utilise de façon optimale et cohérente les informations disponibles sur les marchés. La valeur de marché est ainsi considérée comme l'indicateur le plus pertinent d'une valeur économique réaliste à tout instant ;
- Le bilan fondé sur des valeurs de marché est un « instantané », une représentation à un instant précis de la situation financière de l'assureur. Celle-ci est soumise à un panel de risques, tels que le risque de souscription (risque technique d'assurance) ou le risque de marché (risque d'investissement). Pour s'assurer que l'assureur sera en mesure de remplir ses engagements auprès des assurés quand ils seront exigibles, il est nécessaire d'identifier ces risques et de comprendre leurs effets possibles en cas de survenance sur le bilan. Ils impacteront à la fois les fonds propres éligibles et l'exigence de capital de l'assureur ;
- En plus de provisions techniques adéquates, l'organisme doit détenir du capital (les fonds propres éligibles) pour couvrir ces risques. Ces fonds propres servent d'amortisseur : ainsi, même après la réalisation de ces risques, les provisions techniques seront a minima couvertes à hauteur de la valeur de marché des actifs détenus (après réalisation du risque). De cette façon, l'assureur devrait être en mesure de transférer son portefeuille ou de se recapitaliser. Sous Solvabilité II, les effets des risques quantifiables significatifs sont déterminés et combinés au sein du SCR (capital réglementaire requis). De plus, il existe un MCR (capital minimum requis).

La mise en œuvre de ces principes nécessite :

- d'établir un bilan reposant sur des valeurs de marché ou a minima cohérentes avec le marché, ce qui permet de déterminer l'actif net (Actif – Passif) sur une base cohérente avec le marché ;
- de calculer pour chacun des risques identifiés l'effet d'un scénario précisé (choc) sur l'actif net. La détérioration de l'actif net sous l'effet d'un scénario pour un risque spécifique peut être vue comme une exigence de capital partielle, qui servirait exactement à couvrir les conséquences financières de la réalisation de ce scénario. Ces exigences partielles sont alors combinées pour obtenir le SCR total.

### 1.2.1 Valorisation du bilan prudentiel

La vision économique du bilan de l'assureur sous Solvabilité II est la suivante :



#### 1.2.1.1 Evaluation des actifs

Selon la méthode de la juste valeur, les actifs doivent être valorisés dans le bilan à leur valeur de marché à la date de clôture du bilan (méthode «mark-to-market»).

Lorsque la valeur de marché n'existe pas ou que celle-ci est aberrante, la valeur des actifs est établie selon des modèles de valorisation (méthode «mark-to-model»).

#### 1.2.1.2 Evaluation des passifs

Au passif du bilan, les provisions techniques sont souvent le poste le plus important. Le régime actuel requiert des provisions techniques adéquates ou prudentes et ceci peut être réalisé en plaçant un certain niveau de prudence dans chacune des hypothèses utilisées lors de leur calcul.

Sous Solvabilité II, le concept de cohérence avec le marché s'étend aussi aux provisions techniques : par principe et pour que la construction du bilan soit cohérente.

Cependant, il n'existe pas de marché liquide qui fournirait des prix de marché directement observables pour des transferts de portefeuille d'assurance.

Sous Solvabilité II, la valeur des provisions techniques est définie comme étant la somme du *Best Estimate* de la valeur des engagements d'assurance et d'une marge pour risque.

### 1.2.2 Best Estimate

Le *Best Estimate* (du portefeuille actuel de passifs) est mathématiquement l'espérance des flux futurs sortants moins les flux futurs entrants. Ceux-ci sont estimés en utilisant des hypothèses probabilistes réalistes sur les

facteurs de risque qui peuvent affecter ces flux futurs et en actualisant ces flux avec la courbe de taux sans risque pertinente à la date d'évaluation.

Plus simplement, c'est l'espérance du coût pour l'assureur pour payer ses engagements contractuels à la date prévue, tout en prenant en compte les primes encore à recevoir.

En assurance non-vie, la provision *Best Estimate* est scindée en deux parties :

- provision pour primes ;
- provision pour sinistres.

### 1.2.2.1 Provision pour primes

Les provisions pour primes couvrent le risque lié à une période de garantie non encore écoulee : elles couvrent le risque que les primes non acquises ou les primes futures ne soient pas suffisantes pour couvrir les sinistres futurs. Les primes futures espérées liées aux contrats existants doivent être prises en compte dans le calcul des provisions de prime. Dans le référentiel de Solvabilité II, la provision pour primes pour le risque non-vie, constituée au 31/12/N, permet de couvrir les sinistres qui surviendront en N+1 des contrats souscrits en année N.

### 1.2.2.2 Provision pour sinistres

La provision pour sinistres vise à couvrir le risque à la volatilité du montant ou de la durée de liquidation des sinistres déjà survenus. Elle est principalement composée de la provision pour sinistres à payer (PSAP). La provision pour sinistres à payer est définie dans l'article R331-6 du Code des Assurances :

« Valeurs estimatives des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs de rentes non encore mises à la charge de l'entreprise ».

### 1.2.3 Marge pour risque

Une marge pour risque est additionnée au *Best Estimate* pour obtenir une valeur des provisions techniques cohérente avec le marché. Elle est calculée grâce à la méthode dite du « Coût du capital » (CoC). Cette méthode est basée sur l'idée que l'assureur (ou les personnes qui le financent) espère être rémunéré pour les risques pris. La méthode peut être résumée comme suit.

Supposons que l'assureur souhaite transférer ou acquérir un portefeuille existant. Le cessionnaire n'acceptera pas le transfert si la valeur des actifs transférés avec le portefeuille est égale au *Best Estimate*. Les flux futurs sortants réels peuvent largement différer, et même dépasser, les flux futurs associés au *Best Estimate*, et le cessionnaire n'acceptera pas le risque sans une espérance de rendement positif. Le



cessionnaire demandera donc un montant additionnel (en plus du *Best Estimate*) : c'est la marge pour risque, qui constitue la rentabilité attendue.

### 1.2.4 Exigence de capital réglementaire

Solvabilité II prévoit deux exigences de capital différentes, le SCR (exigence de capital réglementaire) et le MCR (exigence de capital minimale).

Le **MCR** (« *minimum capital requirement* ») constitue le seuil critique ou niveau minimum de fonds propres à détenir, avec des sanctions graves de la part des autorités de contrôle en cas de franchissement.

Le **SCR** (« *solvency capital requirement* ») représente le niveau de fonds propres cible, jugé nécessaire pour absorber une sinistralité exceptionnelle. Le SCR correspond à la valeur en risque (*Value-at-Risk*) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an. Il est donc toléré en espérance, une faillite tous les 200 ans pour les assureurs.

### 1.2.5 Fonds propres

Les fonds propres représentent les ressources à la disposition de l'assureur. Sous Solvabilité II, il s'agit de fonds propres économiques, composés à la fois des fonds propres de base et des fonds propres auxiliaires sous réserve de critères d'éligibilité.

Les fonds propres de base éligibles sont égaux à la différence entre actifs et passifs (diminué du montant de ses propres actions que l'assureur détient), augmentée des dettes subordonnées.

Les fonds propres auxiliaires éligibles sont des éléments de fonds propres qui peuvent être appelés pour absorber des pertes. Lorsqu'ils sont payés ou appelés, ils sont assimilés aux fonds propres de base.

Les fonds propres, sont, en vertu du texte de la directive dite « Solvabilité II », classés en 3 catégories ou « *tiers* ». Ce classement est fait en fonction de leur qualité évaluée au regard de leur disponibilité, de leur degré de subordination et de leur durée ou permanence.

	Fonds propres de base	Fonds propres auxiliaires
Qualité élevée	Tier 1	Tier 2
Qualité moyenne	Tier 2	Tier 3
Qualité peu élevée	Tier 3	-

Par ailleurs, des limites quantitatives sont imposées pour déterminer le montant des fonds propres éligibles en couverture respectivement du SCR et du MCR. Pour l'exercice QIS 5, le SCR devait ainsi être couvert au

moins à moitié par des éléments de Tier 1 et à 15% maximum par du Tier 3. Enfin les subordonnés n'étaient pris en compte qu'à hauteur de 20% du Tier 1.

### 1.3 L'ORSA, au centre du Pilier II

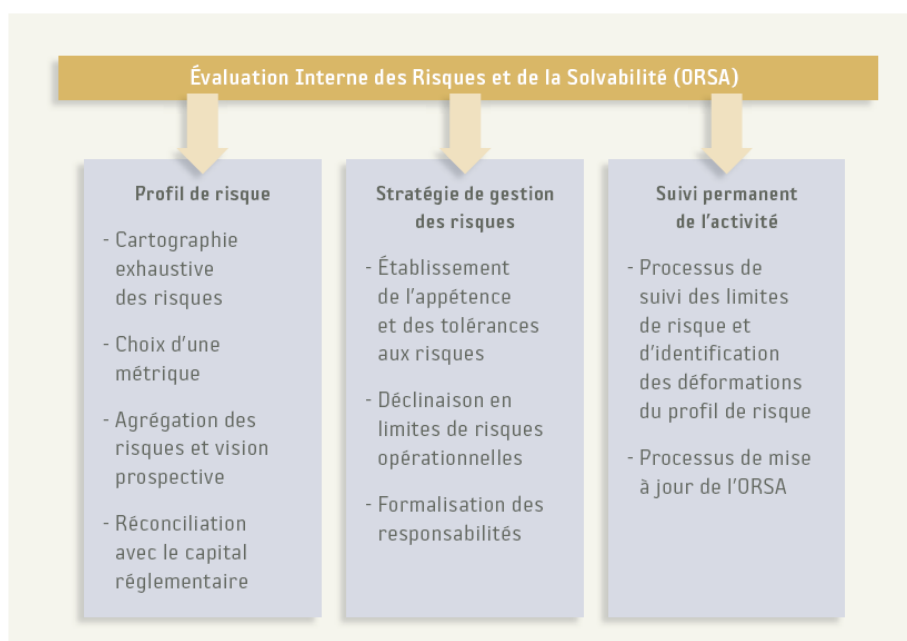
Le Pilier 2 de Solvabilité II prévoit de compléter les exigences quantitatives de fonds propres par des exigences qualitatives requérant un dispositif global de gestion des risques adéquat. La réforme prévoit à ce titre des dispositions sur la gouvernance, le contrôle et l'audit interne dans l'objectif de conduire à un pilotage éclairé des organismes assureurs. Les impacts en termes de risque et de solvabilité doivent alimenter en amont les décisions stratégiques. L'évaluation interne des risques et de la solvabilité, dite ORSA pour *Own Risk and Solvency Assessment* constitue la pièce maîtresse de ce dispositif. C'est dans le cadre de l'ORSA que se positionne le présent mémoire avec l'étude du ratio de solvabilité comme l'indicateur de la solvabilité à 5 ans.

#### 1.3.1 Présentation

L'ORSA vise à évaluer un besoin global de solvabilité dans lequel l'ensemble des risques significatifs pour l'assureur doivent être pris en compte, sans caractère limitatif par rapport aux risques « standards » identifiés dans le Pilier 1. De la même manière, l'assureur est invité à s'affranchir de la définition du capital réglementaire retenue dans le Pilier 1 au profit d'indicateurs qu'il jugera plus pertinents du fait de son propre profil de risque. L'ORSA doit conduire au respect permanent des exigences de capital. Pour répondre à ces exigences, un ensemble de processus systématique doit être mis en place dans l'objectif de déceler, mesurer, contrôler, gérer et déclarer toutes les modifications significatives qui pourraient survenir sur le profil de risque de l'assureur.

Il ne s'agit pas d'une exigence en capital de solvabilité supplémentaire mais d'un outil d'appréciation de la situation des compagnies, à la fois sur le court, moyen et long terme à destination du Conseil d'Administration comme du superviseur. L'ORSA doit en effet intégrer une dimension prospective sur les événements susceptibles d'impacter la solvabilité future de l'assureur en prenant en compte l'ensemble des risques portés par la compagnie.

Le schéma ci-dessous résume les fonctions clés à mettre en place au sein de l'entreprise, dans le cadre de l'ORSA.



Le présent mémoire traite de la réconciliation avec le capital réglementaire.

### 1.3.2 Au-delà des attentes quantitatives du Pilier I

Le pilotage de l'activité par la solvabilité nécessite d'intégrer une vision prospective dans l'ORSA. Les assureurs doivent donc envisager les évolutions futures susceptibles d'impacter leur solvabilité : changement réglementaire ou fiscal, dégradation du contexte économique, sinistralité exceptionnelle, etc. Les facteurs internes doivent également être pris en compte : à ce titre les assureurs doivent mettre en place des *business plans* prospectifs spécifiant l'évolution future probable de la collecte et des encours des portefeuilles.

La formule standard a été créée et calibrée afin de répondre aux exigences quantitatives du Pilier 1 dans un perpétuel arbitrage entre pertinence et complexité : il s'agit effectivement de définir un mode de calcul le plus adapté possible à l'ensemble des acteurs européens, en s'assurant que ceux-ci seront en mesure de le mettre en œuvre. À ce titre l'adéquation avec le profil de risque d'un assureur en particulier ne peut être que partielle, et le choix de la formule standard nécessitera, dans le cadre du Pilier 2, de mener des travaux quantitatifs complémentaires.

Ceux-ci vont se traduire notamment par la définition d'indicateurs de risque jugés plus pertinents que le SCR et en lien étroit avec la stratégie de l'entreprise : l'assureur est en effet en mesure de retenir sa propre approche de la solvabilité. Il est ainsi possible de s'orienter vers une autre mesure de risque, un horizon temporel ou un niveau de confiance différent de la *Value-at-Risk* à 99,5 % à un an. Les assureurs seront ainsi souvent amenés dans le cadre de l'ORSA à introduire des indicateurs de la solvabilité à 5 ans, horizon de calcul plus en phase avec le caractère de long terme de leurs engagements.

### 1.3.3 Approche qualitative de l'ORSA

Le principe fondateur du Pilier 2 de Solvabilité II est un élément important d'innovation de la réforme, qui consiste à compléter les exigences quantitatives par la nécessité de justifier d'un dispositif global de gestion des risques. C'est en effet la vocation des assureurs de faire preuve d'une bonne gestion des risques, dans la mesure où le niveau de fonds propres minimum ne doit être sollicité qu'en tout dernier recours, lorsque tous les autres mécanismes ont échoué à protéger le bilan de l'assureur.

L'ORSA aura un rôle à jouer dans le système de gouvernance. En effet, Solvabilité II précise que les résultats obtenus doivent alimenter en amont les décisions stratégiques : création d'un nouveau produit, définition de la politique ALM et de l'allocation stratégique, souscription du programme de réassurance.

La définition des indicateurs cibles est essentielle. Cela garantit de disposer de tous les éléments pour mener un pilotage pertinent de la structure dans lequel les dimensions « *business* », rentabilité et solvabilité sont nécessairement imbriquées dans une stratégie globale.

## Chapitre 2 : Contexte du mémoire

---

Le présent mémoire étudie le ratio de solvabilité comme l'indicateur de la solvabilité à 5 ans dans le cadre de l'ORSA.

Après avoir modélisé et implémenté l'outil de *business plan* prospectif permettant d'obtenir la volatilité de cet indicateur au cours du temps, on analysera quels sont les facteurs qui influent sur cette volatilité et quels sont leurs impacts sur cette valeur.

Deux raisons motivent le choix d'étudier la volatilité du ratio de solvabilité au cours du temps:

- le ratio de solvabilité est plus volatile sous Solvabilité II que sous Solvabilité I ;
- le Pilier 2 de Solvabilité II impose d'anticiper les risques à plus long terme afin de pouvoir alimenter en amont les décisions stratégiques.

### 2.1 Accroissement de la volatilité du ratio de solvabilité avec le passage de Solvabilité I à Solvabilité II

La réforme Solvabilité II impose une nouvelle méthode de calcul des éléments qui constituent le ratio de solvabilité : ce ratio devient plus volatile que sous le dispositif Solvabilité I.

En effet, avec le passage de Solvabilité I à Solvabilité II et le changement de valorisation du bilan qui passe d'une vision comptable à une vision économique, les composantes du ratio de solvabilité évoluent en raison du changement de calcul applicable au capital réglementaire et d'une nouvelle définition des fonds propres éligibles.

#### 2.1.1 Nouvelle définition du capital réglementaire à détenir

Sous Solvabilité I, l'exigence de marge de solvabilité (EMS) en assurance non-vie se calcule comme suit : elle est égale au maximum entre 16 à 18% des primes de l'année, multipliées par un coefficient de réassurance, et 23 à 26% des sinistres multipliés par le même coefficient de réassurance.

Le calcul d'exigence de marge de solvabilité sous Solvabilité I est remis en cause notamment par son approche trop forfaitaire du risque et par le fait que seuls les risques de souscription sont explicitement pris en compte.

Bien que l'on ne puisse pas exactement comparer les deux exigences de capital de Solvabilité II avec les exigences du régime actuel Solvabilité I, le rôle du SCR peut être rapproché de l'exigence de marge de solvabilité et celui du MCR du fonds de garantie (1/3 de l'exigence de marge). Comme dans Solvabilité I, le MCR sera par ailleurs soumis à un plancher absolu (AMCR).

Le calcul du SCR est déterminé différemment de l'exigence de marge de solvabilité sous Solvabilité I. L'idée sous-jacente est que tous les risques importants et quantifiables doivent être pris en compte dans l'exigence de capital, puisque tous sont susceptibles d'affecter la solvabilité de l'organisme.

### 2.1.2 Nouvelle définition des fonds propres éligibles

Le régime de solvabilité actuel, Solvabilité I, différencie déjà les divers éléments de fonds propres pouvant être admis en couverture de l'exigence de marge. Certains sont pris en compte totalement, alors que d'autres ne sont admis que partiellement ou seulement sous certaines conditions supplémentaires.

Solvabilité II classe aussi les éléments de capital selon leur qualité. Les fonds propres de base sont les capitaux propres disponibles dans le bilan de l'organisme d'assurance : ils comprennent l'actif net et des dettes subordonnées. Les fonds propres de base sont classés en 3 catégories (les Tiers) selon leur disponibilité pour absorber des pertes, soit en continuité d'activité, soit lors de la liquidation de l'organisme. Les fonds propres de meilleure qualité sont classés en Tier 1 (des fonds propres de base). Les autres sont classés en Tier 2 ou 3 selon leur qualité.

Les fonds propres auxiliaires sont des éléments de capital autres que des fonds propres de base qui peuvent être appelés pour absorber des pertes. Ce sont des éléments hors-bilan, alors que les fonds propres de base apparaissent au bilan.

Les normes de qualité des éléments de fonds propres admis en couverture du MCR sont différentes que celles pour la couverture du SCR dans le régime Solvabilité II : les fonds propres auxiliaires et les éléments de Tier 3 ne sont par exemple pas admis en couverture du MCR.

L'approche économique retenue par Solvabilité II impacte les fonds propres par la constatation des plus ou moins values latentes des placements, la méthode de valorisation des engagements (abandon du principe de prudence pour une approche *Best Estimate* et actualisation des engagements) et la prise en compte des résultats futurs.

Les fonds propres supporteront donc les évolutions de la valeur du bilan économique et de nouveaux critères d'éligibilité.

## 2.2 Pilotage stratégique de l'activité par le ratio de solvabilité

Le Pilier 2 de la réforme Solvabilité II impose à l'assureur d'anticiper ses risques à plus long terme, afin de pouvoir réviser sa stratégie s'il anticipe qu'il y aura un problème dans le futur, et ce afin de pouvoir l'éviter.

En effet, pour être autorisé à exercer son activité, l'assureur a pour contrainte réglementaire de couvrir son SCR chaque année.

Il doit donc anticiper le besoin de SCR à 3 ou 5 ans et piloter son activité pour s'assurer de couvrir le SCR. L'horizon de projection doit être suffisamment long pour qu'un changement dans le pilotage stratégique de l'entreprise puisse produire des effets.

Le pilotage de l'activité en vue de couvrir le SCR doit être effectué avec un indicateur de risque en cohérence avec l'objectif recherché. L'anticipation du ratio de solvabilité sera le principal indicateur de pilotage.

Le pilotage de l'activité pour couvrir le SCR requiert d'agir sur les registres et les paramètres suivants :

- La stratégie commerciale en matière de souscription : évolution tarifaire ou de la structure du portefeuille, modification des conditions de souscription (nature des garanties, franchise,...), changements au niveau des procédures de sélection des risques,... ;
- La gestion des sinistres : modalité des méthodes d'évaluation tout au long du cycle de vie du sinistre, appréciation des évolutions des méthodes de provisionnement Dossier/Dossier,... ;
- La stratégie d'investissement ou de placement : modification de l'allocation d'actifs ;
- La gestion du haut de bilan ou des fonds propres : émission de dettes ou d'actions ;
- La cession des risques : modification du programme de réassurance dans le temps (insertion ou modification de clauses).

Si, par exemple, l'assureur prévoit que dans 5 ans, il aura un ratio de solvabilité insuffisant, alors il est possible d'anticiper que l'ACP déclarera l'assureur en faillite et le mettra en situation de *Run-Off*, c'est-à-dire que la souscription de nouveaux contrats sera interdite et que l'assureur devra simplement payer les prestations qu'il doit à ses assurés en cours.

Grâce à cette anticipation à 5 ans, l'assureur diagnostique qu'il faut immédiatement réviser la stratégie d'entreprise. Il peut également changer sa stratégie en étalant ses mesures sur les 5 ans afin d'éviter la faillite dans 5 ans.

L'assureur a différents leviers pour augmenter le ratio de solvabilité à 5 ans : il peut soit choisir d'augmenter le niveau des fonds propres, soit diminuer le niveau du SCR ou soit jouer sur ces deux niveaux conjointement.

Les impacts de trois décisions stratégiques sur le ratio de couverture seront étudiés dans le dernier chapitre du mémoire.

Le contexte de l'étude étant désormais exposé, la partie suivante présente la modélisation prospective du bilan d'un assureur mono-produit automobile.



---

## Partie 2 : Modélisation prospective du bilan sur 5 ans

---

La projection du bilan de l'assureur et l'évaluation des différents postes du bilan sous Solvabilité II par la mise en place d'un outil de *business plan* prospectif sont nécessaires pour spécifier la probable évolution future de l'indicateur de risque que nous avons choisi d'étudier dans ce mémoire : le ratio de solvabilité.

### Chapitre 3 : Architecture de l'outil de *Business Plan* prospectif

---

Il s'agit de modéliser l'évolution future de l'actif et du passif de l'assureur. Le modèle économique et de sinistralité choisi est fondé sur des techniques de modélisation stochastique.

Afin d'étudier la volatilité du ratio de solvabilité au cours du temps sur cinq années, il est nécessaire de construire un outil de projection dynamique des éléments permettant de calculer cet indicateur de risque. L'obtention de cet indicateur nécessite de projeter le bilan de l'assureur automobile, sur cinq années, de manière stochastique. L'outil de *business plan* prospectif, développé sous Excel-VBA, constitue un générateur aléatoire de scénarios : il fournit des réalisations des variables aléatoires représentant l'activité de la compagnie.

Il projette des grandeurs économiques et financières ainsi que la sinistralité du portefeuille et permet de réaliser des stress tests pour le calcul de l'exigence en capital réglementaire.

A un scénario fixé, on incorpore les données spécifiques à la compagnie, les hypothèses concernant les paramètres du modèle ainsi que les choix stratégiques de la compagnie. Ensuite, les sorties fournies par le modèle peuvent être analysées afin d'affiner le modèle et de proposer de nouvelles hypothèses stratégiques.

La première étape de la mise en place du modèle prospectif est la détermination des variables aléatoires qui affectent les différents postes de l'actif et du passif.

Ensuite, il faut décider s'il convient de modéliser tous ces facteurs ou seulement une partie d'entre eux, et de quelle manière.

Il est également important de déterminer les relations éventuelles entre chacun de ces facteurs. Pour modéliser la dépendance entre différentes grandeurs d'intérêt, le présent mémoire utilise les corrélations pour les raisons suivantes :

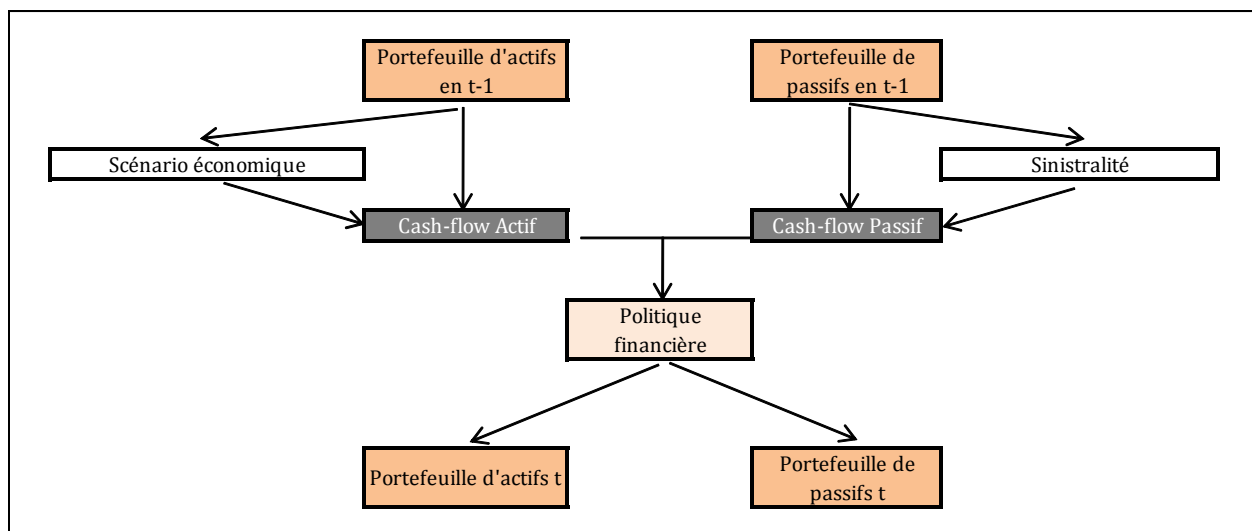
- les modèles à dépendance linéaire sont aisément mis en œuvre, notamment au niveau de l'estimation des paramètres (matrice de corrélation entre les différents processus aléatoires) ;
- la dépendance linéaire est le premier échelon de l'appréhension de la structure globale de la dépendance entre les différentes grandeurs économiques ;

- les modèles plus complexes (par exemple, ceux utilisant des copules) peuvent s'avérer difficiles à calibrer et à mettre en œuvre si l'on considère conjointement plus de 2 phénomènes aléatoires.

Afin d'estimer les risques auxquels la société est exposée, certaines variables du modèle vont être estimées de manière stochastique. La modélisation stochastique permet de générer de nombreuses trajectoires pour représenter des scénarios économiques et financiers. Contrairement aux scénarios déterministes, les scénarios stochastiques ne sont pas créés arbitrairement, ils sont aléatoires. Ils dépendent cependant du générateur de nombres aléatoires choisi et des paramètres des processus stochastiques.

L'architecture du modèle de projection du bilan distingue la modélisation des actifs, des passifs, et des interactions existant entre l'actif et le passif du bilan. La modélisation prospective des indices macroéconomiques et financiers et de la sinistralité conduit à la projection des flux de trésorerie, dits *cash-flows*, futurs. Les *cash-flows* futurs de l'assureur sont constitués des flux futurs de primes, de prestations, de frais et de revenus du portefeuille d'actifs. En fonction de l'évolution des flux de trésorerie, l'assureur est amené à prendre des décisions stratégiques pour la gestion Actif/Passif. La gestion Actif/Passif ou ALM – *Asset and Liability Management* – est un processus d'équilibrage entre les engagements au passif de l'assureur et les flux reçus à l'actif.

Le schéma du modèle stochastique est le suivant :



Le chapitre qui suit expose la modélisation prospective des indices macroéconomiques et financiers nécessaires à la valorisation du bilan.

## Chapitre 4 : Modélisation des indices macroéconomiques et financiers

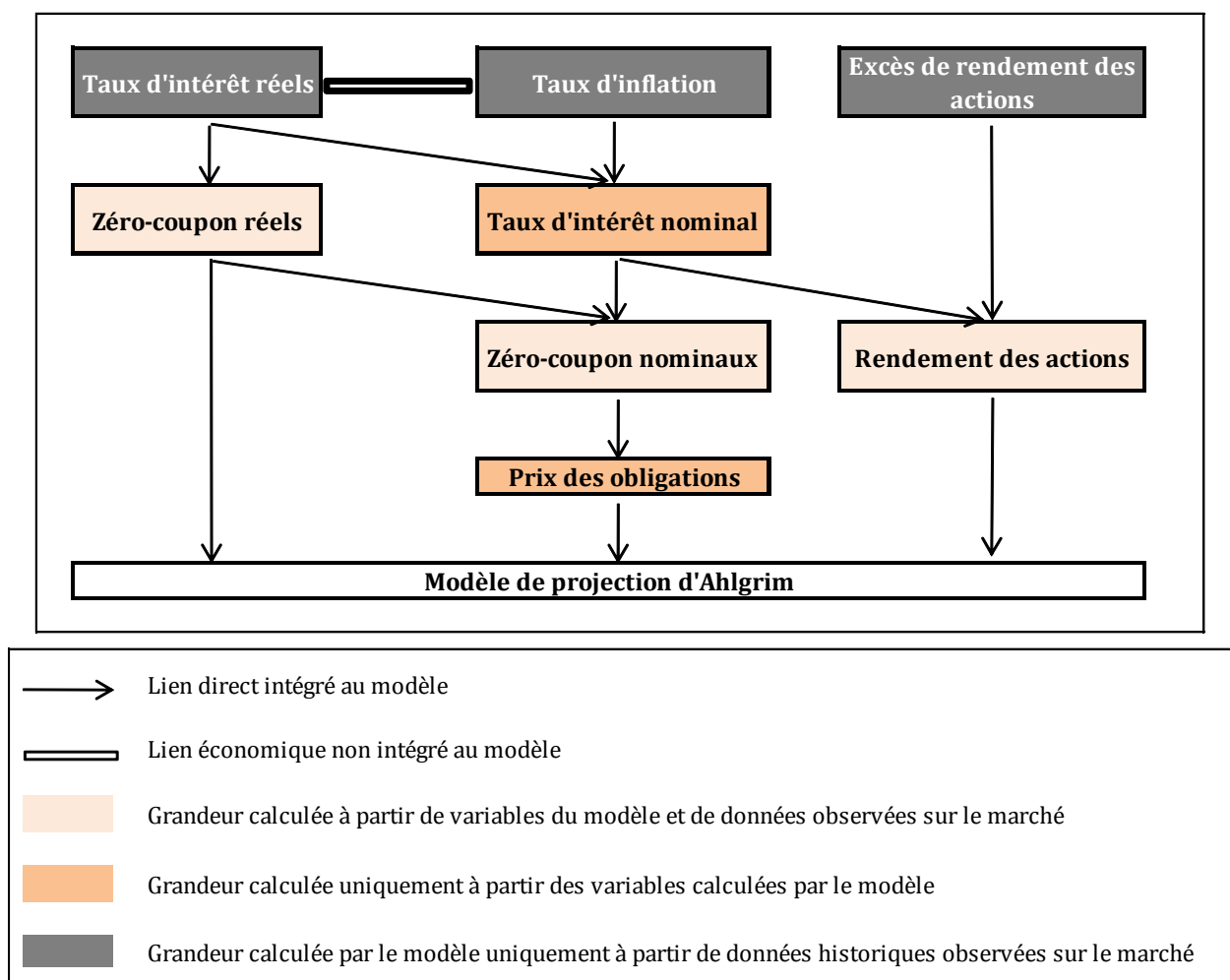
Les modélisations du taux d'inflation, des taux d'intérêt et du taux de rendement des actions sont nécessaires pour valoriser les placements financiers de l'assureur. La modélisation de la courbe des taux est également indispensable pour l'actualisation des flux pris en compte dans le calcul du *Best Estimate* des provisions.

### 4.1 Présentation du modèle

Le modèle de projection des actifs est inspiré du modèle d'Ahlgrim et al., publié par Kevin Ahlgrim en novembre 2005, en collaboration avec Stephen d'Arcy et Richard Gorwett, sous l'impulsion de la Casualty Actuarial Society.

Ce modèle, retenu pour la modélisation des indices financiers et macroéconomiques, est un modèle intégré, c'est-à-dire qu'il propose une description structurée de plusieurs classes d'actifs à partir d'une variable explicative de référence.

La structure du modèle d'Ahlgrim appliqué à l'étude est la suivante :



### 4.1.1 L'inflation

Le taux d'inflation à l'instant  $t$ , noté  $q_t$ , est supposé suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (modèle de type Vasicek à un facteur) :

$$dq_t = k_q(\mu_q - q_t)dt + \sigma_q dB_{q,t}$$

Où :

- $k_q$  est la vitesse de retour à la moyenne ;
- $\mu_q$  est le taux moyen à long terme ;
- $\sigma_q$  est l'écart type de l'erreur ;
- $B_{q,t}$  est un mouvement brownien.

Pour le calibrage et la projection de la dynamique du taux d'inflation, on utilise la discrétisation exacte car toutes les simulations seront en temps discret.

La solution exacte de l'équation différentielle stochastique s'écrit entre deux instants  $t$  et  $t_0$  (voir l'annexe 1 pour la démonstration) :

$$q_t = q_{t_0} \exp[-k_q(t - t_0)] + \mu_q(1 - \exp[-k_q(t - t_0)]) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_q(t - t_0)]}{2k_q}} \varepsilon_{q,t}^{t_0}$$

Où  $\varepsilon_{q,t}^{t_0}$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

A l'instant  $t_0 = 0$ , la réécriture de cette formule montre que le taux d'inflation à chaque instant  $t$  suit une loi normale :

$$q_t \approx N\left(q_{t_0} \exp[-k_q t] + \mu_q(1 - \exp[-k_q t]), \sigma_q^2 \frac{1 - \exp[-2k_q t]}{2k_q}\right)$$

Le taux d'inflation peut s'écrire sous la forme récursive suivante (discrétisation exacte) :

$$q_{t+\delta} = q_t \exp[-k_q \delta] + \mu_q(1 - \exp[-k_q \delta]) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_q \delta]}{2k_q}} \varepsilon_{q,t} = \alpha q_t + \beta + \gamma \varepsilon_{q,t}$$

où  $\delta$  représente le pas de la discrétisation ( $\delta = 1$  pour une discrétisation annuelle,  $\delta = \frac{1}{12}$  pour une discrétisation mensuelle).

### 4.1.2 Les taux d'intérêt

Le modèle d'Ahlgrim et al. reprend un cas particulier du modèle Hull-White pour décrire la dynamique du taux d'intérêt réel long, noté  $l$ , et le taux d'intérêt réel court, noté  $r$ .

Les taux d'intérêt réels à court et long terme vérifient les deux équations différentielles suivantes (modèle de type Vasicek à deux facteurs) :

$$dl_t = k_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

$$dr_t = k_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

Où :

- $k_r$  est la vitesse de convergence des taux courts réels vers les taux longs réels ;
- $k_l$  est la vitesse de retour à la moyenne des taux longs réels ;
- $\mu_l$  est le taux d'intérêt réel moyen à long terme ;
- $\sigma_r$  est la volatilité des taux longs réels ;
- $\sigma_l$  est la volatilité des taux courts réels ;
- $B_{r,t}$  et  $B_{l,t}$  sont des mouvements browniens à tout instant  $t$ .

La solution exacte de l'équation différentielle stochastique du taux réel à long terme s'écrit entre deux instants  $t$  et  $t_0$  (voir l'annexe 1 pour la démonstration) :

$$l_t = l_{t_0} \exp(-k_l(t - t_0)) + \mu_l(1 - \exp[-k_l(t - t_0)]) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - \exp(-2k_l(t - t_0))}{2k_l}} \varepsilon_{l,t}^{t_0}$$

Pour le taux réel à court terme, entre deux instants  $t$  et  $t_0$  suffisamment proches pour considérer que le taux réel long est constant sur la période, la solution s'écrit (voir l'annexe 2 pour la démonstration) :

$$r_t = r_{t_0} \exp(-k_r(t - t_0)) + l_{t_0}(1 - \exp[-k_r(t - t_0)]) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp(-2k_r(t - t_0))}{2k_r}} \varepsilon_{r,t}^{t_0}$$

La discrétisation exacte des taux réels est la suivante :

$$l_{t+\delta} = l_t \exp[-k_l\delta] + \mu_l(1 - \exp[-k_l\delta]) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_l\delta]}{2k_l}} \varepsilon_{l,t}$$

$$r_{t+\delta} = r_t \exp[-k_r\delta] + l_t(1 - \exp[-k_r\delta]) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_r\delta]}{2k_r}} \varepsilon_{r,t}$$

où  $\delta$  représente le pas de la discrétisation ( $\delta = 1$  pour une discrétisation annuelle,  $\delta = \frac{1}{12}$  pour une discrétisation mensuelle).

Les lois des taux d'intérêt nominaux sont déterminées par les lois du taux d'inflation et des taux d'intérêt réels :

$$\begin{aligned} \text{nominal}l_t &= \text{réel}l_t + q_t \\ \text{nominal}r_t &= \text{réel}r_t + q_t \end{aligned}$$

### 4.1.3 Le prix d'une obligation zéro-coupon

Ahlgrim et al. reprennent la relation de Fisher pour calculer le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant  $t$  qui paie 1 en terme de nominal à la date  $T$ .

Ils considèrent ainsi que si des obligations sont tarifées à partir des taux d'inflation et des taux d'intérêt réels attendus jusqu'à la maturité, alors on a la relation suivante :

$$P_{nom}(t, T) = P_{réel}(t, T) * P_{inf}(t, T)$$

Où :

- $P_{nom}(t, T)$  est le prix à la date  $t$  d'un zéro-coupon payant 1 en terme nominal à la date  $T$  ;
- $P_{réel}(t, T)$  est le prix d'un zéro-coupon à l'instant  $t$  qui paie 1 en terme réel à la date  $T$  ;
- $P_{inf}(t, T)$  est le prix à la date  $t$  d'une obligation calculée à partir des taux d'inflations attendus payant 1 à la date  $T$ .

Le prix d'un zéro-coupon à l'instant  $t$  qui paie 1 en terme réel à la date  $T$  est calculé par la formule suivante :

$$P_{réel}(t, T) = \exp(A_{réel}(t, T) - B_r(t, T)r(t) - B_l(t, T)l(t))$$

Où :

- $r(t)$  est le taux d'intérêt réel à court terme à la date  $t$  ;
- $l(t)$  est le taux d'intérêt réel à long terme à la date  $t$  ;
- $k_r$  est la vitesse de convergence des taux courts réels vers les taux longs réels ;
- $k_l$  est la vitesse de retour à la moyenne des taux réels longs ;
- $\mu_l$  est le taux d'intérêt réel moyen à long terme ;
- $\sigma_r$  est la volatilité des taux longs réels ;
- $\sigma_l$  est la volatilité des taux courts réels ;
- et :

$$B_r(t, T) = \frac{1 - \exp(-k_r(T - t))}{k_r}$$

$$B_l(t, T) = \frac{k_r}{k_r - k_l} \left( \frac{1 - \exp(-k_l(T-t))}{k_l} - \frac{1 - \exp(-k_r(T-t))}{k_r} \right)$$

$$A_{réel}(t, T) = (B_r(t, T) - T + t) \left( \mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2k_r^2} \right) + B_l(t, T) \mu_l - \frac{\sigma_r^2 B_r(t, T)^2}{4k_r}$$

$$+ \frac{\sigma_l^2}{2} \left( \frac{T-t}{k_l^2} - 2 \frac{B_l(t, T) + B_r(t, T)}{k_l^2} + \frac{1 - \exp(-2k_r(T-t))}{2k_r(k_r - k_l)^2} \right)$$

$$- \frac{2k_r(1 - \exp(-(k_r + k_l)(T-t)))}{k_l(k_r - k_l)^2(k_r + k_l)} + \frac{k_r^2(1 - \exp(-2k_l(T-t)))}{2k_l^3(k_r - k_l)^2}$$

Le prix à la date  $t$  d'une obligation calculée à partir des taux d'inflation attendus payant 1 à la date  $T$  par la formule suivante :

$$P_{inf}(t, T) = A_q(t, T) \exp(-B_q(t, T)q(t))$$

Où :

- $q(t)$  est le taux d'inflation modélisé à l'instant  $t$  ;
- $\mu_q$  est la moyenne de long terme de l'inflation ;
- $\sigma_q$  est la volatilité de l'inflation ;
- et :

$$B_q(t, T) = \frac{1 - \exp(-k_q(T-t))}{k_q}$$

$$A_q(t, T) = \exp \left( \frac{(B_q(t, T) - T + t) \left( k_q^2 \mu_q - \frac{\sigma_q^2}{2} \right)}{k_q^2} - \frac{\sigma_q^2 B_q(t, T)^2}{4k_q} \right)$$

#### 4.1.4 Le taux zéro-coupon

La modélisation de la courbe des taux zéro-coupon est nécessaire pour évaluer le prix des actifs qui dépendent des taux d'intérêt et pour actualiser la valeur des passifs.

Le taux zéro-coupon instantané ou continu calculé à la date  $t$  et d'échéance  $T$ , noté  $Taux\_ZC(t, T)$  est calculé comme suit :

$$Taux\_ZC\_instantané(t, T) = -\frac{1}{T-t} * \ln(P_{nom}(t, T))$$

Où  $P_{nom}(t, T)$  est le prix à la date  $t$  d'un zéro-coupon payant 1 en terme nominal à la date  $T$  ;

Le taux composé correspondant, noté  $Taux\_ZC(t, T)$ , est calculé grâce à la formule suivante :

$$Taux\_ZC(t, T) = \exp(Taux\_ZC\_instantané(t, T)) - 1$$

Cette courbe des taux zéro-coupon est la courbe des taux sans risque du modèle.

#### 4.1.5 Le taux de rendement d'un investissement en actions

Le rendement des actions avec dividendes réinvestis à l'instant  $t$ , noté  $s_t$ , est supposé évolué selon la formule suivante :

$$s_t = i_{r,t} + x_t$$

Où :

- $i_{r,t}$  est le taux d'intérêt nominal à court terme à l'instant  $t$  ;
- $x_t$  est l'excès de rendement des actions.

Le taux d'intérêt nominal à court terme est obtenu par :

$$i_{r,t} = (1 + q_t) * (1 + r_t) - 1$$

Où :

- $q_t$  est le taux d'inflation à l'instant  $t$  ;
- $r_t$  est le taux d'intérêt réel à court terme à l'instant  $t$ .

L'excès de rendement des actions est modélisé grâce à la formule de Black et Scholes.

En notant  $S_t$  la valeur d'une action à l'instant  $t$ , on a :

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dB_{S,t}$$

C'est-à-dire :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu_S t - \frac{\sigma_S^2}{2} t + \sigma_S B_{S,t}\right)$$

Où :

- $\mu_S$  est la valeur moyenne de l'excès de rendement des actions ;
- $\sigma_S$  est la volatilité de l'excès de rendement des actions ;



- $B_{S,t}$  est un mouvement brownien à tout instant  $t$ .

On obtient l'excès de rendement des actions entre les instants  $t$  et  $t + 1$  :

$$x_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S(B_{S,t+1} - B_{S,t})$$

Pour simplifier, on pose :

$$B_{S,t+1} - B_{S,t} = \varepsilon_{S,t}$$

Où  $\varepsilon_{S,t} \sim N(0,1)$  à tout instant  $t$ .

Finalement, l'excès de rendement est obtenu par :

$$x_t = \mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S \varepsilon_{S,t}$$

Où  $\varepsilon_{S,t} \sim N(0,1)$  est le résidu du modèle.

## 4.2 Implémentation du modèle

### 4.2.1 Présentation des données

La profondeur de l'historique des données utilisées pour la mise en œuvre opérationnelle du modèle doit être cohérente avec l'horizon de projection des indices financiers et macroéconomiques.

L'horizon de projection du bilan de l'assureur sur 5 ans nécessite de projeter :

- l'excès de rendement des actions sur 5 ans ;
- le taux d'inflation et les taux d'intérêt sur 13 ans.

Projeter le taux d'inflation et les taux d'intérêt sur 13 ans est nécessaire pour l'actualisation des flux pris en compte dans le calcul du *Best Estimate*. En effet, pour calculer le *Best Estimate* de chaque bilan projeté, les flux sont projetés jusqu'à extinction du portefeuille, c'est-à-dire 8 ans après la dernière année de survenance des sinistres modélisés.

Les séries de données historiques retenues datent de janvier 2000 à décembre 2010, et couvrent donc une période de 11 ans, ce qui est cohérent avec l'horizon de projection de notre outil.

La construction de ces séries de données s'est appuyée sur les sources utilisées par Friggitt [2007] et toutes les séries sont à fréquence mensuelle.

#### 4.2.1.1 Taux d'inflation

L'historique du taux d'inflation est construit à partir de l'indice des prix à la consommation (IPC) publié sur le site de l'INSEE. Cet historique correspond à l'IPC de la France entière à périodicité mensuelle et est régulièrement mis à jour depuis janvier 1990. Cet indice est utilisé pour calculer le taux d'inflation annuel à fréquence mensuelle (taux sur 12 mois glissants) entre janvier 2000 et décembre 2010. Plus précisément, le taux d'inflation annuel au mois  $m$  s'écrit :

$$q_m = \ln\left(\frac{IPC_m}{IPC_{m-12\text{ mois}}}\right)$$

Où  $IPC_m$  est l'indice des prix à la consommation au mois  $m$ .

#### 4.2.1.2 Taux d'intérêt nominal à long terme

Le taux nominal à long terme retenu correspond au taux moyen des emprunts d'état (TME) publié par la Caisse des Dépôt et des Consignations sur le site de la Banque de France. Cet historique est régulièrement mis à jour et commence au mois de janvier 1970.

L'historique des taux d'intérêt réels à long terme est construit à partir des valeurs historiques des taux d'intérêt nominaux à long terme auxquels on retranche les valeurs historiques du taux d'inflation.

Donc le taux réel à long terme au mois  $m$  s'écrit :

$${}_m l_{\text{réel}} = {}_m l_{\text{nominal}} - q_m$$

#### 4.2.1.3 Taux d'intérêt nominal à court terme

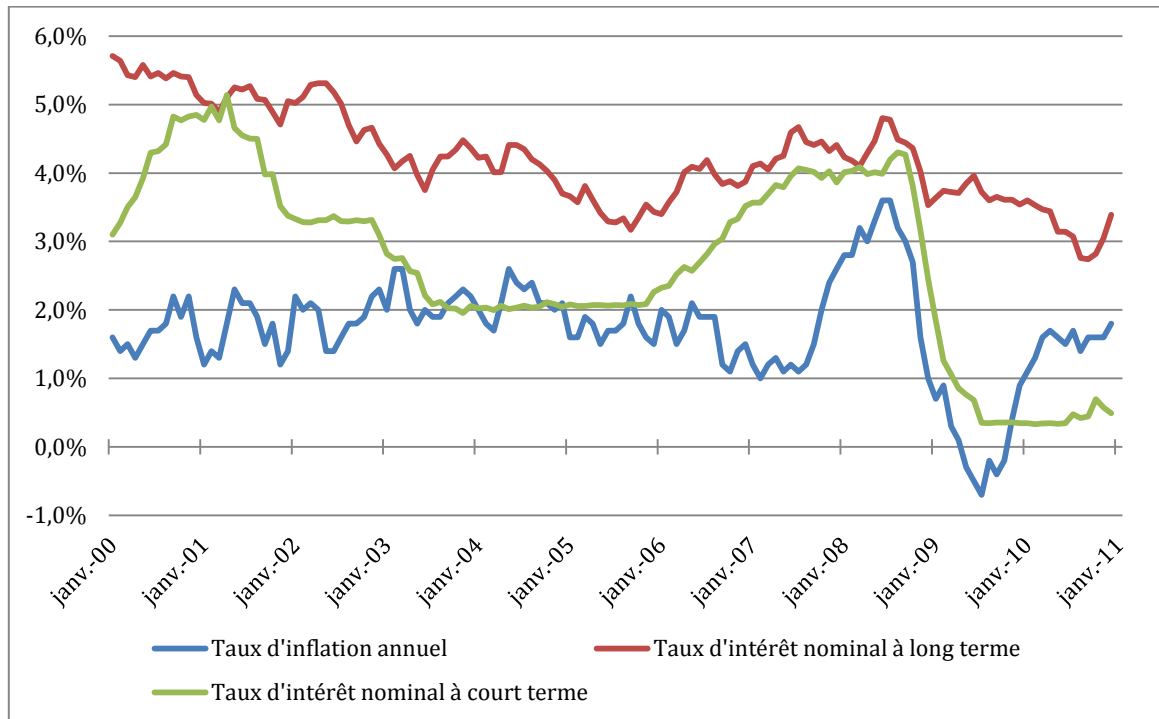
Le taux nominal à court terme retenu correspond au taux moyen du marché monétaire (TMM ou T4M) publié par la Caisse des Dépôt et des Consignations sur le site de la Banque de France. Cet historique est régulièrement mis à jour et commence au mois de janvier 1952.

L'historique des taux d'intérêt réels à court terme est construit à partir des valeurs historiques des taux d'intérêt nominaux à court terme auxquels on retranche les valeurs historiques du taux d'inflation. Donc le taux réel à court terme au mois  $m$  s'écrit :

$${}_m r_{\text{réel}} = {}_m r_{\text{nominal}} - q_m$$

#### 4.2.1.4 Evolution des taux d'inflation et taux d'intérêt nominal à court et long terme

La figure suivante illustre l'évolution du taux d'inflation entre janvier 2000 et décembre 2010. On observe en particulier le fort niveau de l'inflation en 2008 et la chute brutale, jusqu'à des niveaux négatifs, en 2009 suite à la crise financière.



#### 4.2.1.5 Taux de rendement des actions

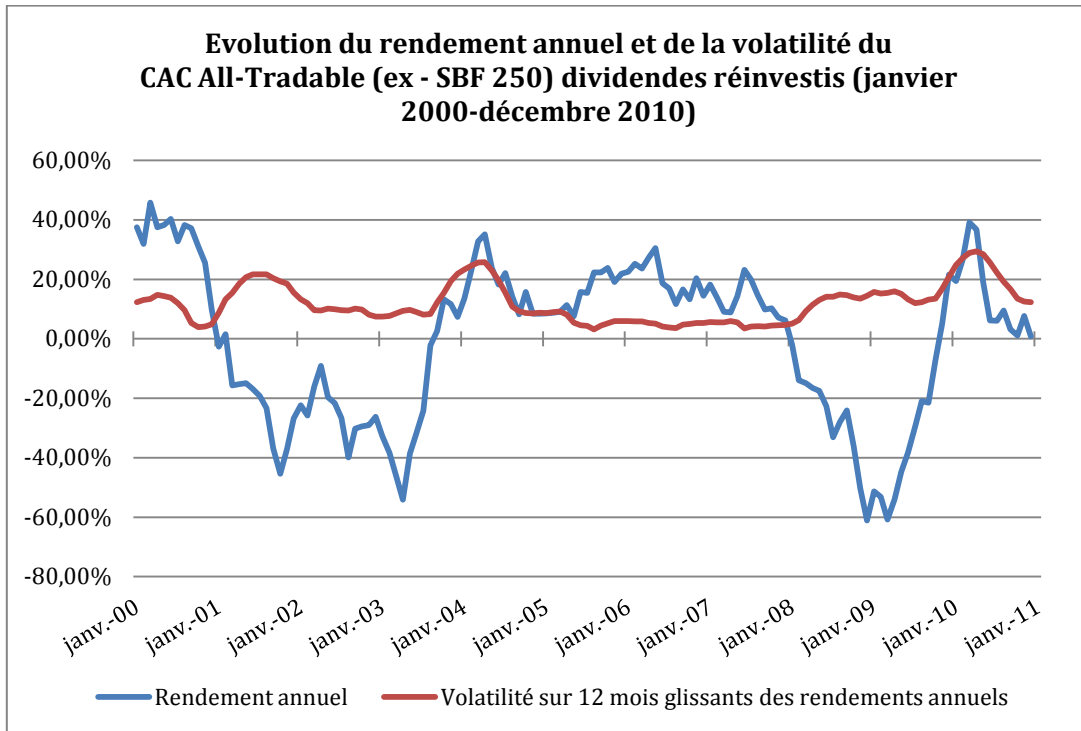
Afin de construire l'historique des rendements des actions, l'indice CAC All-Tradable (ex SBF 250) avec dividendes réinvestis (*total return*) a été retenu. Le choix de cet indice répond à une contrainte de diversification : les assureurs possèdent des portefeuilles en actions largement diversifiés.

L'historique de l'indice ex SBF 250 avec dividendes réinvestis est en téléchargement libre sur le site d'Euronext10 et est régulièrement mis à jour depuis le mois de décembre 1990.

Le rendement annuel au mois  $m$  est calculé avec la formule suivante :

$$s_m = \ln\left(\frac{ind_m}{ind_{m-12\text{ mois}}}\right)$$

Où  $ind_m$  représente l'indice du CAC All-Tradable avec dividendes réinvestis au mois  $m$ .



#### 4.2.2 Calibrage du modèle d’Ahlgrim

Les résultats présentant les valeurs estimées des paramètres et les résultats des tests sont présentés à l’annexe 3.

##### 4.2.2.1 Le taux d’inflation

Le modèle retenu par Ahlgrim pour l’inflation est le suivant :

$$q_{t+\delta} = q_t \exp[-k_q \delta] + \mu_q (1 - \exp[-k_q \delta]) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_q \delta]}{2k_q}} \varepsilon_{q,t} = \alpha q_t + \beta + \gamma \varepsilon_{q,t}$$

Où  $\delta = \frac{1}{12}$  car la fréquence des données historiques de l’inflation est mensuelle.

Pour calibrer la loi du taux d’inflation, une régression linéaire est effectuée pour estimer  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  et on déduit ensuite les paramètres du modèle en s’appuyant sur les relations suivantes :

$$k_q = -\frac{\ln(\alpha)}{\delta} \qquad \mu_q = \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad \sigma_q = \gamma \sqrt{\frac{2k_q}{1-\exp[-2k_q \delta]}}$$

Les paramètres pour l’inflation sont les suivants :

Ajustement de l'inflation		
Paramètres	Intitulé	Résultats du calibrage
$k_q$	Vitesse retour à la moyenne	0,09053997
$\mu_q$	Taux d'inflation moyen	0,01730614
$\sigma_q$	Ecart type de l'erreur	0,003186059

#### 4.2.2.2 Les taux d'intérêt

Le modèle retenu pour les taux d'intérêt réels à long terme et court terme est le suivant (avec  $\delta = \frac{1}{12}$ ) :

$$l_{t+\delta} = l_t \exp[-k_l \delta] + \mu_l (1 - \exp[-k_l \delta]) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_l \delta]}{2k_l}} \varepsilon_{l,t}$$

$$r_{t+\delta} = r_t \exp[-k_r \delta] + l_t (1 - \exp[-k_r \delta]) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_r \delta]}{2k_r}} \varepsilon_{r,t}$$

Le calibrage du modèle des taux d'intérêt réels pose certaines difficultés.

D'abord, les séries historiques de ces taux ne sont pas directement observables sur les marchés financiers. Ahlgrim et al. proposent donc de construire ces séries de données en retranchant les taux d'inflation aux taux d'intérêt nominaux.

Une autre difficulté concernant la méthode de calibrage se pose : étant donnée la dépendance entre les taux longs et les taux courts, l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) pour l'estimation des paramètres n'est pas appropriée.

Ahlgrim et al. proposent de retenir une procédure d'estimation s'appuyant sur une application en deux étapes de la méthode des moindres carrés ordinaires. Lors de la première étape, la méthode des MCO est appliquée pour estimer les paramètres du taux d'intérêt réel long. Les valeurs estimées de ce dernier serviront comme variable explicative lors de la seconde étape pour estimer les paramètres du taux d'intérêt réel court par la méthode des MCO.

- Etape 1 :  $l_{t+1} = \alpha_1 l_t + \beta_1 + \gamma_1 \varepsilon_{l,t}$
- Etape 2 :  $r_{t+1} = \alpha_2 \widehat{l}_t + \beta_2 r_t + \gamma_2 \varepsilon_{r,t}$

Les paramètres du modèle du taux d'intérêt réel long sont estimés en s'appuyant sur les formules suivantes :

$$k_l = -\frac{\ln(\alpha_1)}{\delta} \quad \mu_l = \frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \quad \sigma_l = \gamma_1 \sqrt{\frac{2k_l}{1-\exp[-2k_l\delta]}}$$

À la différence des modèles précédents, le taux d'intérêt réel court présente deux variables endogènes car  $\alpha_2 + \beta_2 = 1$ .

Dans ce contexte, on estime les paramètres du modèle par la méthode MCO entre la série historique  $(r_{t+1} - r_t)_t$  et la série  $(l_t - r_t)_t$  :

$$\Delta r_{t+1} = (r_{t+1} - r_t) = \alpha_2(\widehat{l}_t - r_t)_t + \gamma_2 \varepsilon_{l,t}$$

On peut ainsi estimer les paramètres du modèle par les formules suivantes :

$$k_r = -\frac{\ln(1 - \alpha_2)}{\delta} \quad \sigma_r = \gamma_2 \sqrt{\frac{2k_r}{1 - \exp[-2k_r\delta]}}$$

Le calibrage des densités de probabilité des taux d'intérêt nominaux nécessite l'estimation de la corrélation entre les résidus des taux réels et de l'inflation.

Les paramètres retenus sont les suivants :

Ajustement des taux d'intérêt réels		
Paramètres	Intitulé	Résultats du calibrage
$k_r$	Vitesse retour à la moyenne (Court terme)	0,01457
$\sigma_r$	Ecart type de l'erreur (Court terme)	0,00305
$k_l$	Vitesse retour à la moyenne (Long terme)	0,07435
$\mu_l$	Taux d'intérêt réel moyen (Long terme)	0,02260
$\sigma_l$	Ecart type de l'erreur (Long terme)	0,00324

#### 4.2.2.3 Le taux de rendement d'un investissement en actions

Afin d'estimer les paramètres  $\mu_S$  et  $\sigma_S$ , on définit les valeurs historique de l'excès de rendement par :

$$x_t = \ln\left(\frac{ind_t}{ind_{t-1}}\right) - r_t - q_t$$

Où  $ind_t$  représente la valeur d'un investissement en action avec dividendes réinvestis.

Ajustement des actions		
Paramètres	Intitulé	Résultats du calibrage
$\mu_s$	Excès de rendement moyen	0,03251788
$\sigma_s$	Ecart type de l'excès des actions	0,2642712

#### 4.2.2.4 Matrice de corrélation des résidus

La matrice suivante est la matrice de corrélation entre les résidus  $\varepsilon_{q,t}$ ,  $\varepsilon_{l,t}$ ,  $\varepsilon_{r,t}$  et l'excès de rendement  $x_t$ . Cette matrice de corrélation de l'historique des résidus est nécessaire pour la projection du modèle d'Ahlgrim.

	Résidu Taux d'inflation	Résidu Taux réel long	Résidu Taux réel court	Résidu Excès de rendement actions
Résidu Taux d'inflation	1	-85,74%	-79,49%	24,79%
Résidu Taux réel long	-85,74%	1	72,11%	-19,86%
Résidu Taux réel court	-79,49%	72,11%	1	10,37%
Résidu Excès de rendement actions	24,79%	-19,86%	10,37%	1

#### 4.2.2.5 Paramètres d'initialisation des simulations

Pour l'ensemble des projections, on suppose que la date initiale,  $t=0$ , correspond à la fin du mois de décembre 2010. Les valeurs initiales choisies sont les suivantes :

Indices à l'instant $t=0$	
Inflation	1,80%
Taux d'intérêt réel long	1,59%
Taux d'intérêt réel court	1,31%

### 4.3 Projections des indices financiers et macroéconomiques

Cette partie présente la projection des actifs sur la base des résultats statistiques du calibrage issu du modèle d'Ahlgrim et des paramètres choisis.

La démarche consiste à projeter les résidus du taux d'inflation, des taux d'intérêt réels et l'excès de rendement des actions. Ensuite, les projections des indices financiers et macroéconomiques en découlent par les formules présentées précédemment.

### 4.3.1 Projection des résidus et de l'excès de rendement

Lors des projections, il convient de tenir compte des coefficients de corrélation observés entre les résidus des modèles calibrés  $\varepsilon_{q,t}$ ,  $\varepsilon_{l,t}$ ,  $\varepsilon_{r,t}$ ,  $\varepsilon_{Im,t}$  et l'excès de rendement  $x_t$ .

Les résidus et l'excès de rendement des actions suivent des lois normales. La simulation de ces cinq variables consiste à simuler cinq variables gaussiennes dont la matrice de corrélation est égale à la matrice de corrélation historique.

Numériquement, cela revient à simuler indépendamment cinq variables de loi normale centrée réduite, et ensuite en déduire les trajectoires des résidus et l'excès de rendement en passant par la factorisation de Cholesky.

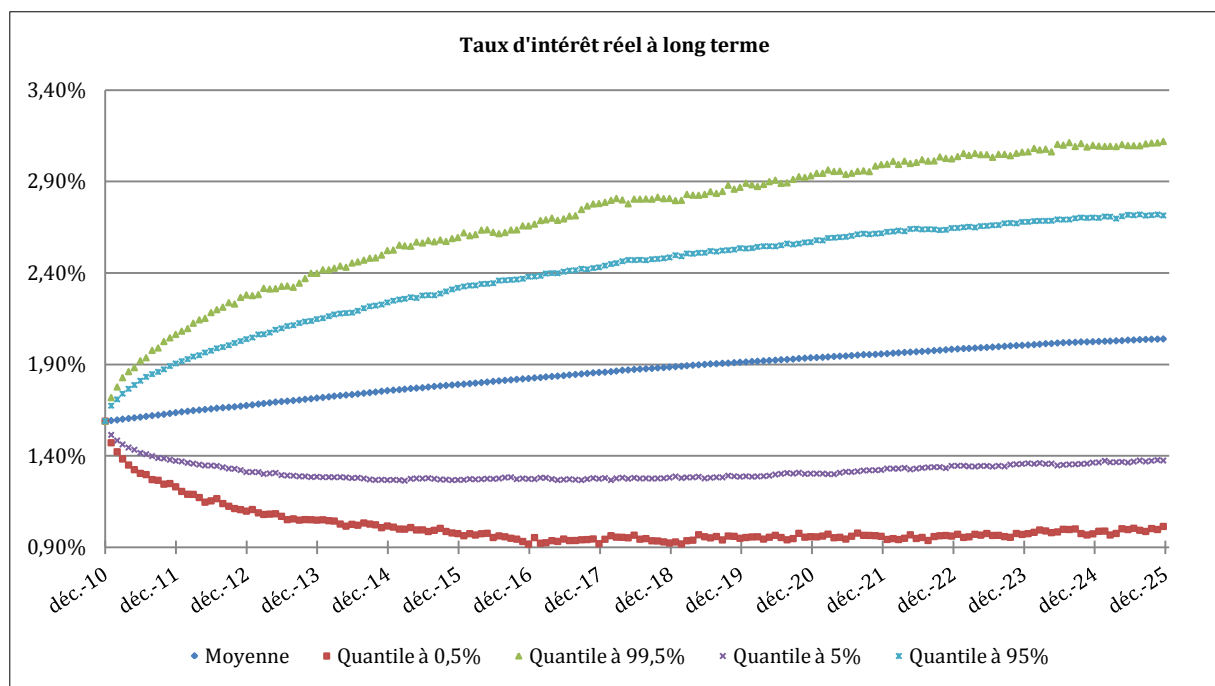
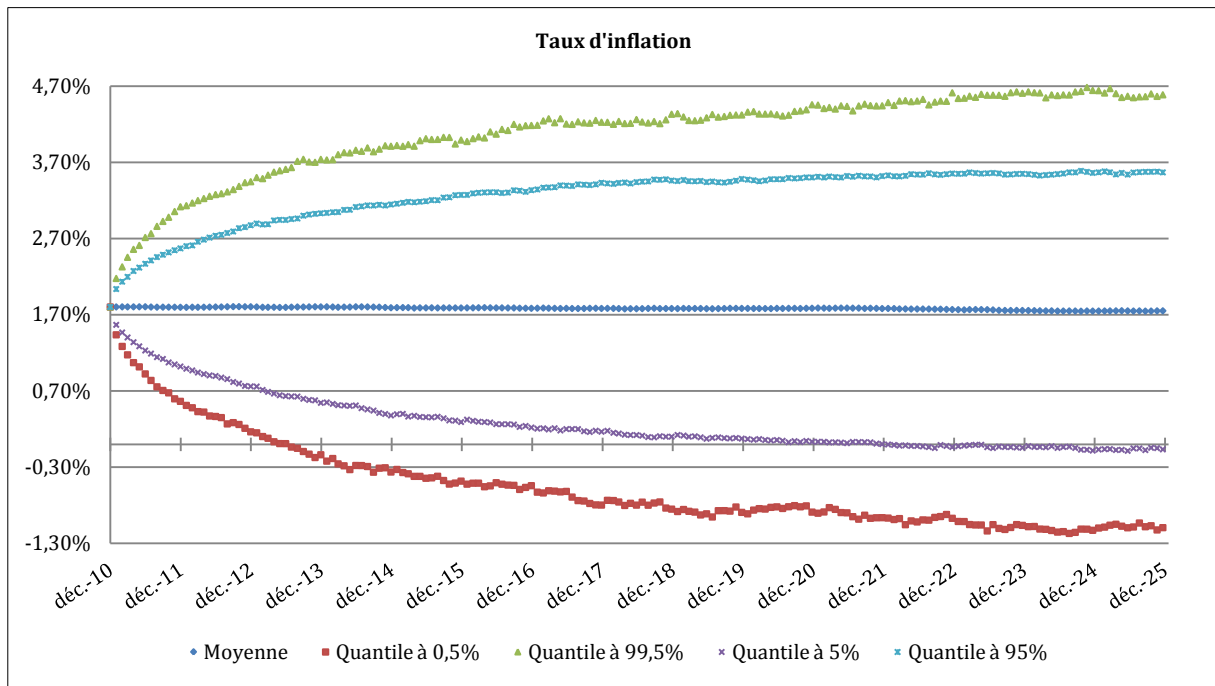
La factorisation de Cholesky consiste, pour une matrice symétrique définie positive  $A$ , à déterminer une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que :  $A = LL^T$ . La théorie mathématique et l'algorithme de la factorisation de Cholesky est présentée en Annexe 3.

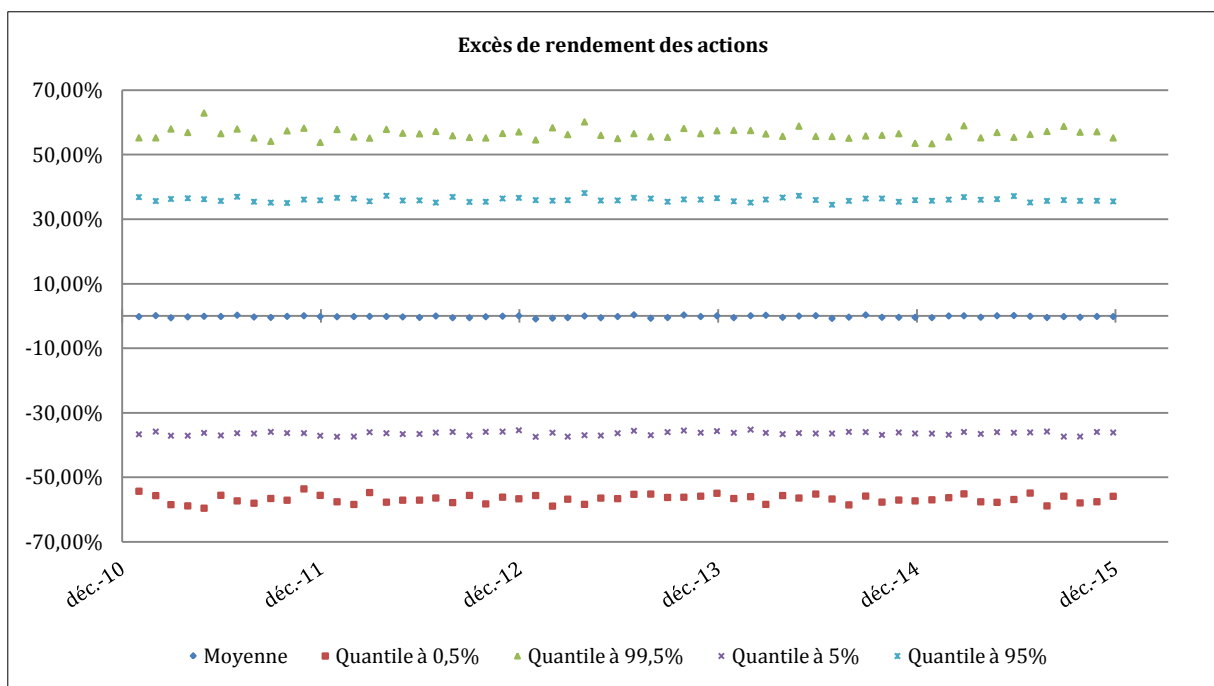
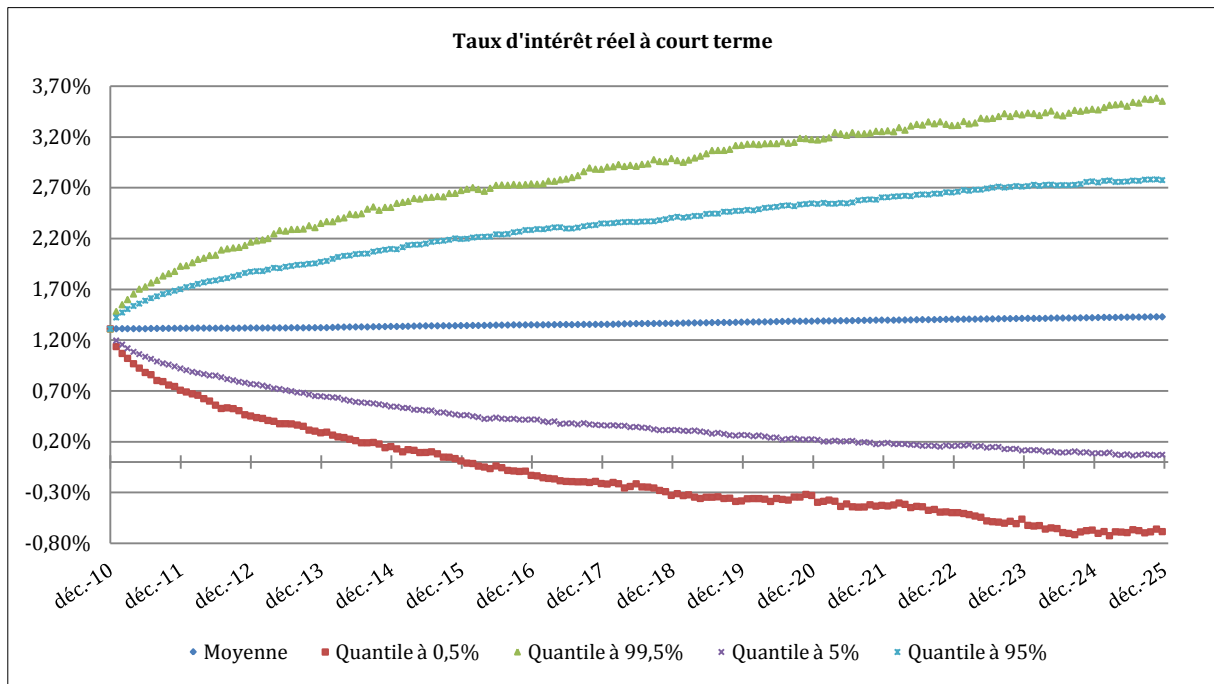
### 4.3.2 Projection des indices

Toutes les projections présentées ci-après sont la moyenne, et les quantiles à 0,5%, 5%, 95% et à 99,5% des valeurs obtenues à partir de 6.000 simulations et sont réalisées à fréquence mensuelle.

Sur la base du modèle retenu par Ahlgrim, des valeurs initiales et du calibrage statistique, on obtient les projections mensuelles suivantes :







La modélisation des indices macroéconomiques et financiers permettant de valoriser les placements financiers et d'actualiser les flux du calcul du *Best Estimate* ayant été présentée, il convient d'exposer la modélisation de la sinistralité.

## Chapitre 5 : Modélisation de la sinistralité

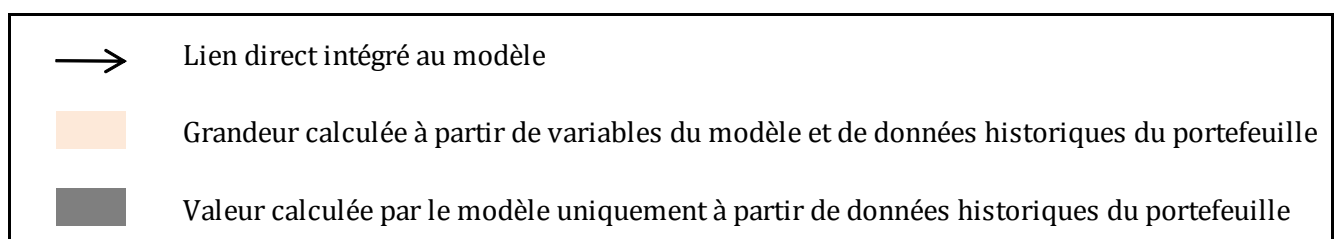
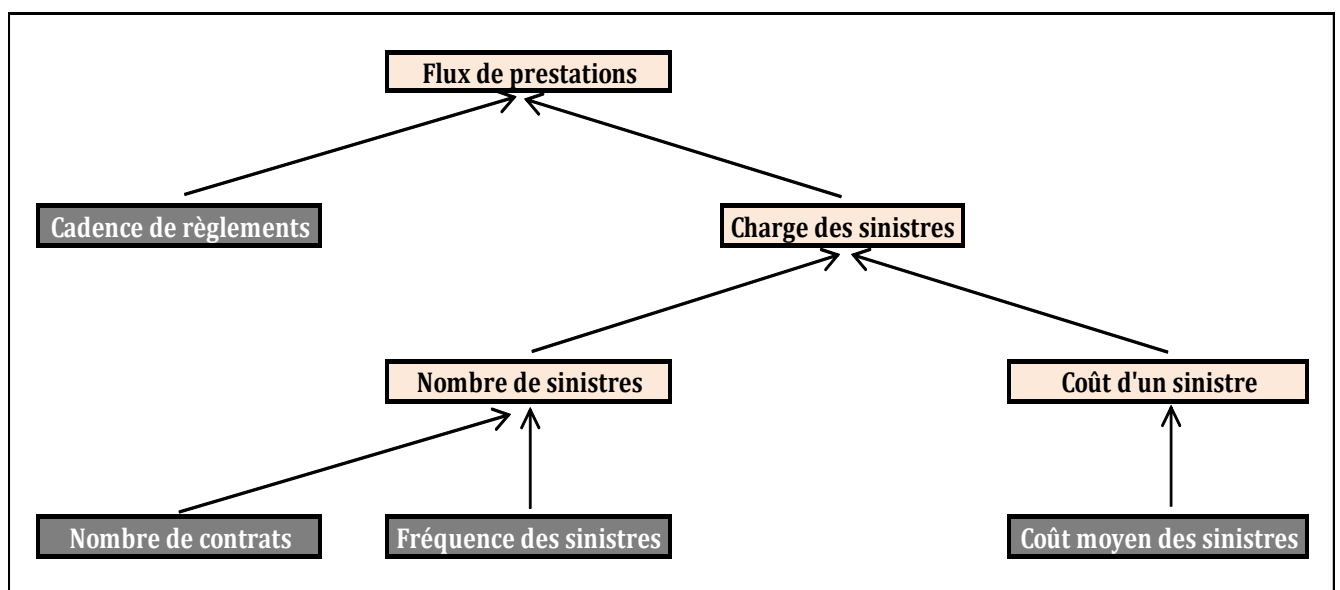
Le calcul du *Best Estimate* en non-vie nécessite la projection des flux futurs de paiement de sinistres à partir des données collectées sur un horizon correspondant à l'extinction du passif.

Les sinistres sont modélisés par garantie suivant les cadences d'écoulement des passifs et les niveaux de coûts moyens et de fréquence.

### 5.1 Présentation du modèle

La modélisation retenue pour la projection de la sinistralité consiste, pour chaque garantie pure, à tirer aléatoirement les fréquences et les coûts pour déterminer la charge, et à modéliser les cadences de règlements de manière déterministe pour évaluer les flux de prestations.

Schéma du modèle de projection de la sinistralité pour chaque garantie :



Cette modélisation s'effectue en plusieurs étapes :

- Modélisation stochastique de la fréquence et du coût moyen pour chaque garantie en tenant compte de la tendance et de l'aléa observés par le passé ;
- Modélisation stochastique de la charge en prenant en compte les caractéristiques du risque simulées dans la première étape ainsi que la taille du portefeuille permettant la mutualisation du risque ;
- Modélisation déterministe des cadences de règlements à partir des données historiques par la méthode Chain-Ladder standard ;
- Modélisation des flux de prestations à partir des modélisations de la charge sinistres et des cadences de règlements.

Afin d'illustrer la modélisation retenue, les projections de la fréquence, du coût moyen, du nombre de sinistres, du coût d'un sinistre, de la charge et des prestations de la garantie Dommages du portefeuille automobile sont exposées. Ces projections portent sur des valeurs obtenues à partir de 6.000 simulations et sont réalisées à fréquence annuelle sur 5 ans. Elles présentent la moyenne, et les quantiles à 0,5%, 5%, 95% et 99,5%.

### 5.1.1 Fréquence et coût moyen

Le modèle retenu pour modéliser et projeter dans le temps, de manière stochastique, la fréquence moyenne et le coût moyen, est le modèle de type autorégressif AR(1).

#### 5.1.1.1 Fréquence

Modéliser la fréquence par un modèle AR(1) revient à déterminer la tendance suivie par la fréquence pour chaque garantie pure et à modéliser pour chaque point de fréquence l'écart à cette tendance, c'est-à-dire le résidu, sous forme de loi normale.

Pour chaque garantie, le modèle retenu pour modéliser la fréquence est donc le suivant :

$$f_{t+\delta} = \alpha_1 \times f_t + \beta_1 + \gamma_1 \times \varepsilon_{f,t}$$

Où  $\varepsilon_{f,t}$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et  $\delta = 1$  représente le pas annuel de la série des fréquences historiques. Par simplification, on ne tient pas compte de la corrélation entre les bruits blancs de chaque garantie pure. La projection des résidus est ainsi effectuée sans tenir compte de l'historique des corrélations, c'est-à-dire que la matrice de corrélation des résidus des fréquences et sa matrice de Cholesky sont donc supposées égales à la matrice identité.

### 5.1.1.2 Coût moyen

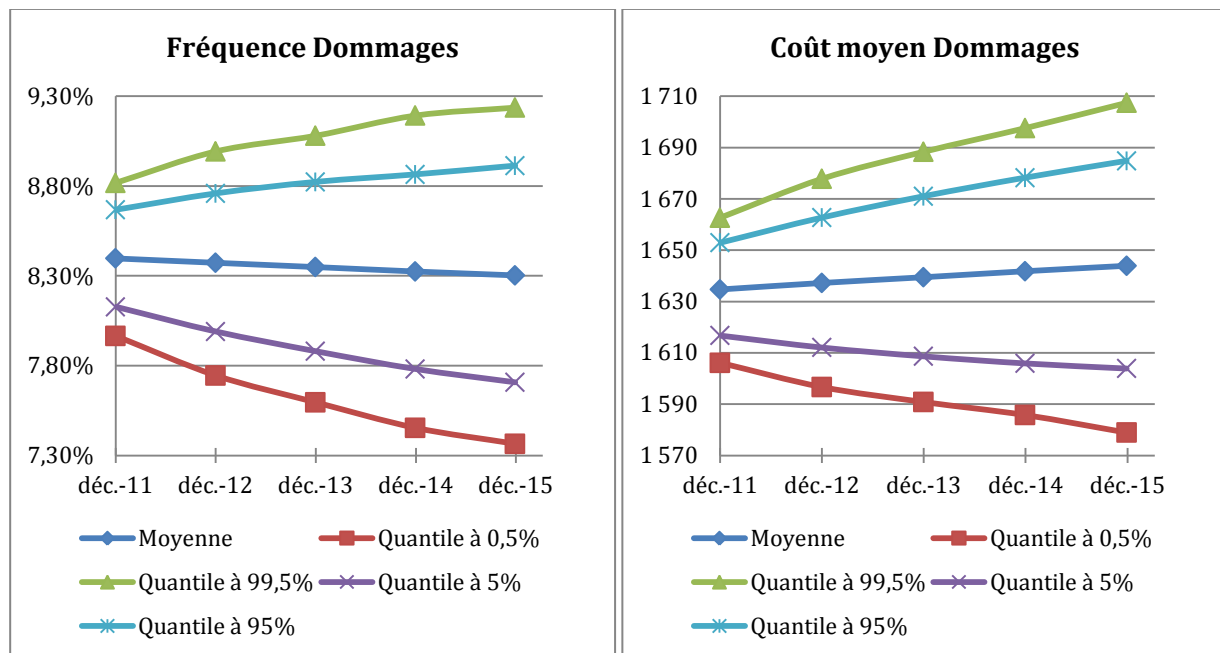
Le coût moyen de chaque garantie pure est également modélisé par un AR(1), c'est-à-dire :

$$CM_{t+\delta} = \alpha_2 \times CM_t + \beta_2 + \gamma_2 \times \varepsilon_{CM,t}$$

Où  $\varepsilon_{CM,t}$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et  $\delta = 1$  représente le pas annuel de la série des coûts moyens historiques. On suppose que toute corrélation entre les coûts moyens de chaque garantie pure est d'ordre macroéconomique, captée dans la tendance des coûts moyens.

La matrice de corrélation des résidus des coûts moyens est donc supposée égale à la matrice identité.

Les projections de la moyenne et des quantiles de la fréquence et du coût moyen annuels de la garantie Dommages sont les suivantes :



### 5.1.2 Charge

A partir de la fréquence et du coût moyen de chaque garantie pure obtenus à l'étape ci-dessus, on procède pour chaque garantie pure au calcul de la charge sinistre  $S_{garantie}$  comme suit :

- Le nombre de sinistres  $N_{garantie}$  pour la garantie pure donnée est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_{garantie} \times NbContrats_{garantie}$ , où  $\lambda_{garantie}$  est égal à la projection de la fréquence moyenne obtenue à l'étape précédente ;

- Le coût d'un sinistre  $C_{garantie}$  est supposé suivre une loi log normale d'espérance  $\mu_{garantie}$  et d'écart-type  $\sigma_{garantie}$ , c'est-à-dire

$$C_{garantie} \approx \text{LogNormale} \left[ \ln(\mu_{garantie}) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_{garantie}^2}{\mu_{garantie}^2} + 1\right); \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_{garantie}^2}{\mu_{garantie}^2} + 1\right)} \right]$$

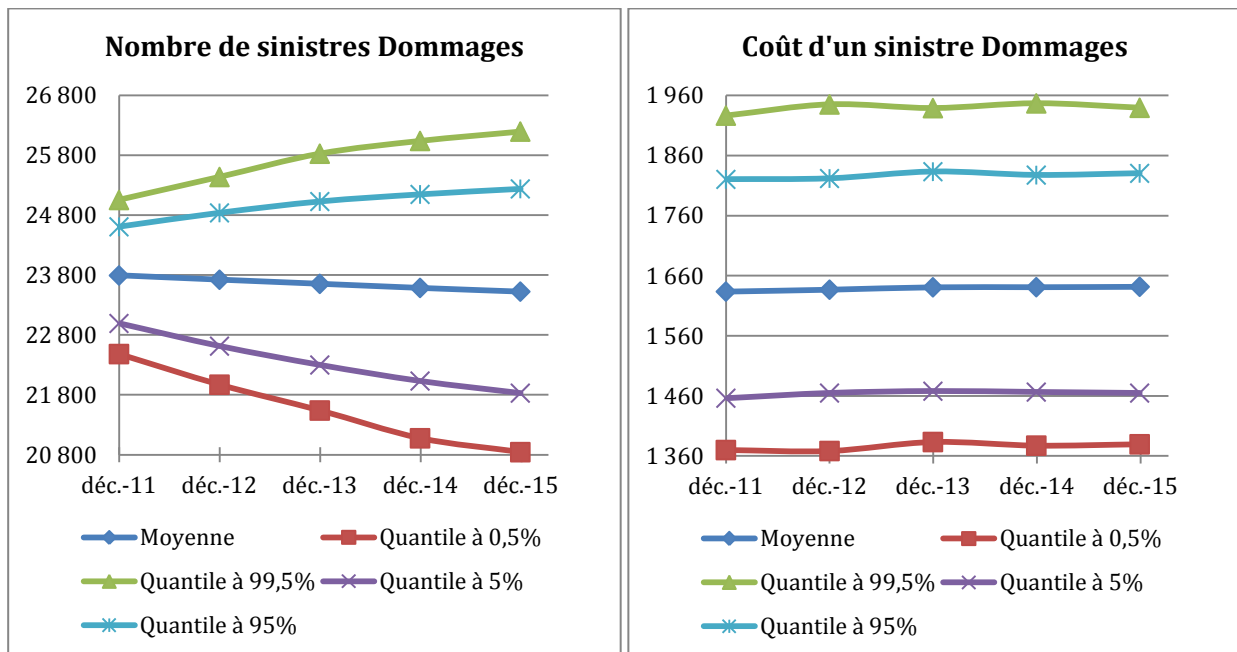
où  $\mu_{garantie}$  est égale à la projection du coût moyen obtenue précédemment et  $\sigma_{garantie}$  est estimé par la moyenne des écart-types des distributions annuelles empiriques des coûts par garantie pure ;

- La charge sinistre  $S_{garantie}$  pour une garantie donnée est déduite du théorème central limite (sous l'hypothèse d'indépendance des sinistres). La somme des coûts de  $N_{garantie}$  sinistres tend vers une loi normale d'espérance  $N_{garantie} \times \mu_{garantie}$  et de variance  $N_{garantie} \times \sigma_{garantie}^2$  :

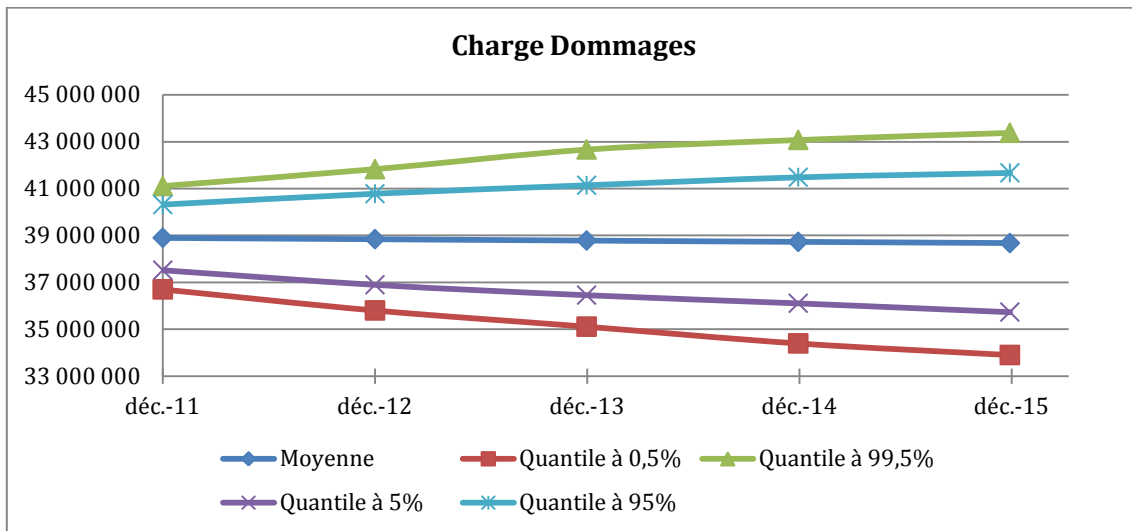
$$S_{garantie} = \sum_{i=1}^{N_{garantie}} X_i \approx \text{Normale} [N_{garantie} \times \mu_{garantie} ; N_{garantie} \times \sigma_{garantie}^2]$$

où  $X_i$  est le coût du  $i^{\text{ème}}$  sinistre de la garantie donnée.

Les projections du nombre de sinistres et des coûts annuels de la garantie Dommages sont les suivantes :



Les projections de la charge des sinistres de la garantie Dommage sont les suivantes :

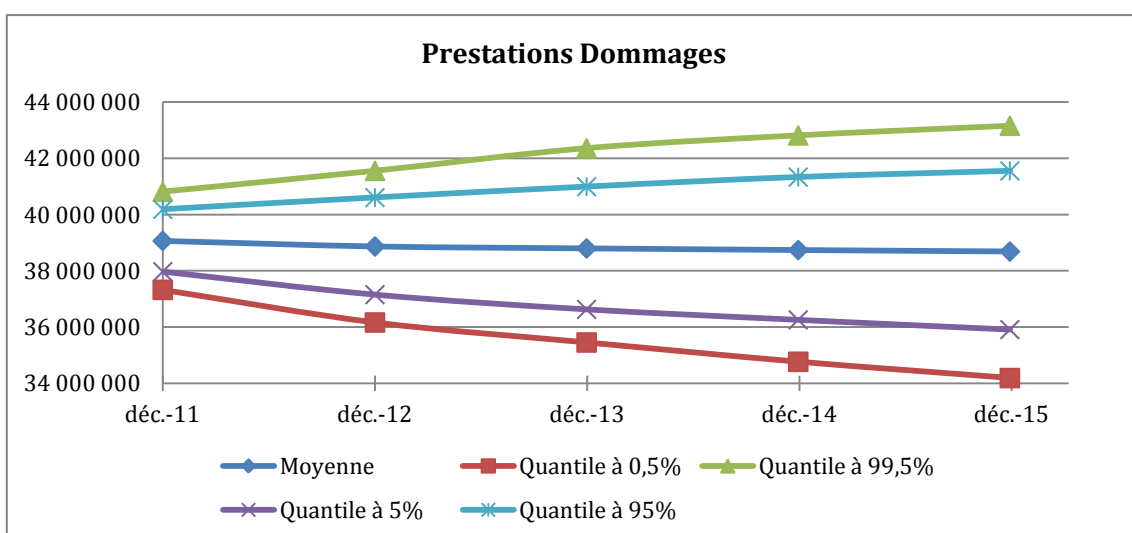


### 5.1.3 Cadences de règlements et prestations

Les cadences de règlements représentent les pourcentages décumulés des règlements payés à l'ultime pour chaque année de développement. Les cadences de règlements retenues dans le modèle reflètent par garantie la gestion de 2002 à 2010 des sinistres de la compagnie. Les prestations réglées sont calculées en appliquant à la charge de sinistres le vecteur de cadence de règlements à partir de l'exercice de survenance.

Les prestations réglées l'année de projection  $N$  correspondent aux sinistres des années de survenance  $N - k$ ,  $k$  allant de 0 à 8. Pour les années de survenance de 2002 à 2010, le modèle utilise les données historiques de sinistralité pour calculer les prestations.

Les projections des prestations pour la garantie Dommages sont les suivantes :



#### 5.1.4 Primes

Les primes sont calculées en supposant un ratio S/P constant de 99,9% durant toute la durée de projection. Les primes reçues chaque année sont donc égales au quotient des prestations réglées par le ratio S/P.

On observe pour la garantie Dommages, que les projections de fréquence sont légèrement à la baisse contrairement aux projections de coût moyen. Cela se traduit par une légère baisse des montants de la charge, et donc des primes versées par les assurés chaque année de projection pour cette garantie.

### 5.2 Implémentation du modèle de sinistralité

#### 5.2.1 Présentation des données de sinistralité

Les données de la sinistralité sont annuelles et s'étendent de 2002 à 2010 pour chacune des sept garanties suivantes:

- Responsabilité Civile Corporelle hors sinistres graves ;
- Responsabilité Civile Matérielle ;
- Dommages ;
- Bris de glace ;
- Incendie ;
- Vol total ;
- Vol partiel.

Pour chaque garantie pure, le calibrage des modèles des fréquences et des coûts moyens est réalisé grâce aux valeurs obtenues à l'ultime en liquidant par la méthode Chain-Ladder standard les triangles de fréquences et de coûts moyens pour les neuf années de survenance de 2002 à 2010.

#### 5.2.2 Calibrage des modèles de fréquences et coûts moyens

Le calibrage des modèles de type autorégressif AR(1) est présenté lors du calibrage du modèle d'Ahlgrim. Les résultats du calibrage de la fréquence et du coût moyen pour chaque garantie sont présentés en Annexe 5.

#### 5.2.3 Paramètres d'initialisation des simulations

Toutes les projections présentées sont une moyenne des valeurs obtenues à partir de 6.000 simulations et sont réalisées à fréquence annuelle sur 5 ans.

Pour l'ensemble des projections, on suppose que la valeur initiale, à la date  $t=0$ , correspond à la valeur à l'ultime de l'année de survenance 2010.



Les valeurs initiales des fréquences et des coûts moyens pour chaque garantie sont les suivantes :

	Valeur en t=0	
	Fréquence	Coût moyen
Bris de glace	9,71%	300
Dommages	8,42%	1 633
Incendie	0,16%	3 000
RC Matérielle	11,64%	715
RC Corporelle	0,85%	7 698
Vol Partiel	1,24%	950
Vol Total	0,60%	3 800

Pour chaque année de survenance, les cadences de règlements à appliquer sont les suivantes:

	CADENCES DE REGLEMENTS								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bris de glace	91,53%	7,87%	0,31%	0,06%	0,04%	0,04%	0,04%	0,11%	0,00%
Dommages	79,11%	19,38%	0,76%	0,21%	0,13%	0,12%	0,12%	0,15%	0,03%
Incendie	77,48%	18,90%	2,05%	0,72%	0,74%	0,06%	0,04%	0,01%	0,00%
RC Matérielle	67,79%	28,48%	1,83%	0,69%	0,36%	0,25%	0,21%	0,18%	0,21%
RC Corporelle	6,92%	27,08%	20,04%	13,63%	10,23%	8,85%	6,79%	5,22%	1,25%
Vol partiel	82,36%	16,48%	0,79%	0,15%	0,06%	0,04%	0,01%	0,09%	0,00%
Vol total	78,14%	19,96%	0,72%	0,41%	0,20%	0,23%	0,14%	0,11%	0,08%

La démarche consiste à projeter les résidus de la fréquence et du coût moyen de chaque garantie. Les projections du nombre de sinistres, du coût d'un sinistre, de la charge sinistre et des prestations en découlent ensuite par les principes de modélisation présentés précédemment.

Maintenant que la modélisation de la sinistralité a été exposée, nous pouvons aborder la modélisation des différents éléments du bilan.



## Chapitre 6 : Modélisation du bilan

Chaque année N de la projection, étant donnés la sinistralité et le scénario économique fourni par le générateur de scénario économique pour cette année-là (performance des actions et courbe des taux au 31/12/N), le modèle procède en 4 étapes pour calculer les flux et établir le bilan au 31/12/N :

- **Etape 1 : Modélisation des passifs**  
La survenance des sinistres et le règlement des prestations sont modélisés afin de valoriser le *Best Estimate* et la marge pour risque ;
- **Etape 2 : Modélisation des actifs**  
On calcule la valeur de marché des actions avec dividendes réinvestis en fonction de leur taux de rendement. Pour les obligations risquées à taux fixe, on calcule leur valeur de marché à la date d'inventaire en actualisant ses flux futurs grâce à la courbe des taux *spot* et en tenant compte du *spread* de crédit ;
- **Etape 3 : Calcul des encaissements et des décaissements de la trésorerie**  
Au 31 décembre de chaque année, l'assureur doit faire face aux flux à verser pour le règlement des sinistres. A cette même date, il reçoit les coupons, le remboursement de ses obligations arrivant à échéance et les primes. Pour calculer le solde de trésorerie, on calcule la différence entre les encaissements financiers et les décaissements de l'assureur (prestations) ;
- **Etape 4 : Cession et réallocation d'actifs**  
L'assureur désinvestit ou réinvestit en actions et obligations si le solde de trésorerie est respectivement négatif ou positif ;
- **Etape 5 : Etablissement du bilan**  
Les éléments du bilan modélisés à chaque date de projection sont les suivants :

<b>Placements :</b>  Obligations Actions	<b>Fonds propres</b>
	<b>Marge pour risque</b>
	<i>Best Estimate</i>

Afin d'illustrer la modélisation retenue, les projections de la moyenne et des quantiles à 0,5%, 5%, 95% et 99,5% durant les cinq années de projection, ainsi que l'histogramme de la distribution pour la cinquième année de projection, des différents éléments du bilan sont exposées. Ces projections portent sur des valeurs obtenues à partir de 6.000 simulations et sont réalisées à fréquence annuelle sur 5 ans.

## 6.1 Hypothèses générales de modélisation

Le portefeuille étudié est celui d'un assureur mono-produit automobile.

De manière à limiter la quantité de calcul et la complexité du modèle, il a été opté pour un certain nombre de simplifications et d'approximations.

On suppose que :

- les frais de gestion sont nuls ;
- le portefeuille n'est pas réassuré ;
- l'assureur n'est soumis à aucun impôt ;
- les frais de gestion des placements sont négligés ;
- il n'y a pas de gestion du bas de bilan.

### 6.1.1 Hypothèses relatives au passif

- On suppose qu'il n'y a pas de dépendance entre la sinistralité des différentes garanties ;
- On suppose que le portefeuille est uniquement composé de contrats à tacite reconduction d'échéance le 31 décembre de chaque année. Il est également supposé que les appels à cotisation sont effectués le 1<sup>er</sup> janvier de l'année N+1. Il n'y a donc pas de provisions pour primes à calculer. Seule la provision pour sinistres à payer sera calculée en *Best Estimate* ;
- Les primes et les prestations sont versées annuellement le 31 décembre ;
- Les primes futures sont calculées à partir du ratio S/P que l'on suppose constant et égal à 99,9% pendant toute la durée de projection. La tarification est fixée en fonction de la sinistralité de l'année passée ;
- L'actualisation des flux de prestations est fonction de la courbe de taux sans risque fournie par le générateur de scénarii économiques et d'une prime d'illiquidité supposée constante durant toute la durée de projection ;
- Le nombre de contrats pour chaque garantie est supposé constant au cours de la période de projection.

## 6.1.2 Hypothèses relatives à l'actif

- L'actif est composé de placements en actions et en obligations d'entreprise à taux fixe ;
- Une stratégie fixe d'allocation d'actifs est définie initialement dans le modèle et est respectée durant toute la projection. Elle est fixée dans le scénario de référence à 80% d'investissement en obligations risquées et à 20% de parts d'actions ;
- Les actions sont considérées d'un seul type et le cours initial est celui du CAC-All Tradable à sa valeur de clôture le 31/12/2010 ;
- Les obligations sont supposées d'une seule forme : elles ont toutes la même maturité. Celle-ci est un paramètre du modèle. Leur taux coupon fixe dépend de la date d'achat de l'obligation ;
- Le taux coupon des obligations d'entreprise est supposé égal à la valeur du taux zéro-coupon, calculé à la date d'achat de l'obligation et d'échéance  $T$ , diminué de 1,20% ;
- Le *spread* de taux est supposé égal pour toutes les obligations, quelle que soit leur date d'achat ;
- Le programme connaît à tout moment la date d'achat, la valeur comptable et la valeur de marché des actions et obligations présentes en portefeuille, ainsi que le montant du coupon et du remboursement pour les obligations ;
- Les coupons et remboursements des actifs obligataires tombent chaque année le 31 décembre en même temps que les flux de primes et de prestations ;
- Les achats/ventes d'actifs ont lieu chaque année le 31 décembre, après la tombée des flux de trésorerie ;
- Les actifs sont supposés infiniment divisibles ;
- Le marché est supposé liquide, c'est-à-dire qu'il est possible d'acheter ou de vendre ses actifs à tout instant ;
- L'assureur achète ses actifs sans coût de transaction ;
- Le risque de crédit sur les titres obligataires n'est pas modélisé.

## 6.2 Modélisation du passif

### 6.2.1 Best Estimate

Le *Best Estimate* des provisions est constitué de la provision pour primes et de la provision pour sinistres. En résumé, la provision pour sinistres sert à couvrir les sinistres survenus entre la date de souscription du contrat et la fin de l'exercice comptable. La provision pour primes est utilisée afin de faire face aux sinistres qui surviendront après la date de l'inventaire pendant la durée de vie du contrat.

Dans ce mémoire, il n'y a pas de provision pour primes à calculer car nous supposons que :

- la durée de tous les contrats est d'un an et court du 1<sup>er</sup> janvier au 31 décembre de l'année  $N$ ;

- le portefeuille est composé de contrats à tacite reconduction d'échéance le 31 décembre de chaque année ;
- les appels à cotisation sont effectués le 1<sup>er</sup> janvier de l'année N+1.

Il n'y a donc pas de prise en compte des primes futures espérées liées aux engagements existants.

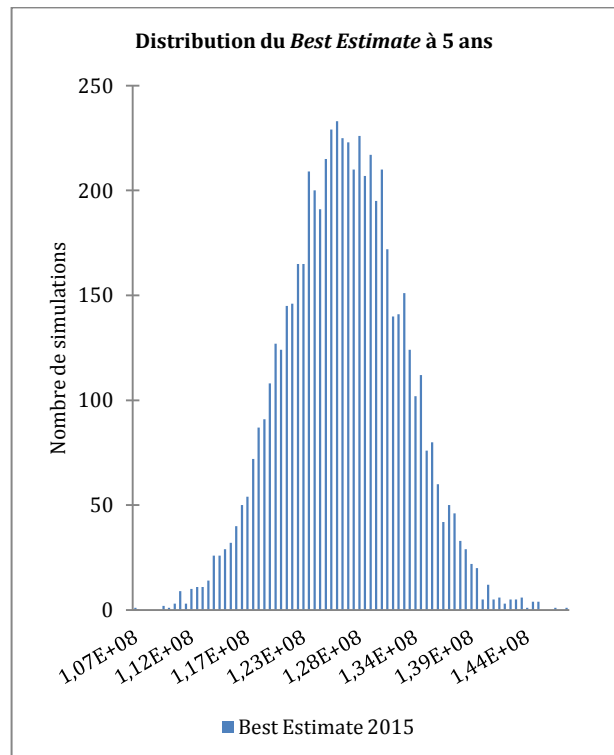
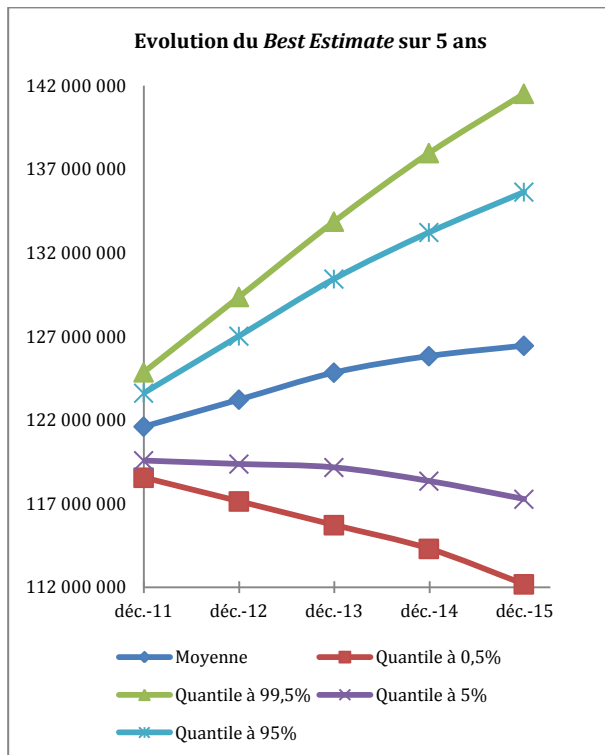
Le *Best Estimate* de l'année N est égal à la somme actualisée des flux de prestations des années de survenance antérieures à N. Dans notre modèle, l'actualisation se fait avec la valeur de la courbe des taux zéro coupon calculée à la date de calcul du *Best Estimate* et d'échéance la date de paiement de la prestation, augmentée d'une prime d'illiquidité de  $50\% \times 0,53\%$ , recommandée par l'EIOPA pour le QIS 5.

$$Best\ Estimate(N) = \sum_{i=N+1}^{N+8} \frac{Flux\_Prestations(i)}{(1 + TauxZC(N, i) + Primes'illiquidité)^i}$$

Où :

- $Taux\_ZC(N, i)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date N et d'échéance i ;
- $Primes'illiquidité = 50\% * 0,53\%$
- $Flux\_Prestations(N + j)$  représente les flux de prestations futurs à payer l'année N + j pour les sinistres des années de survenance  $N + j - k$ , k allant de j à 8, et j allant de 1 à 8.

Les projections des quantiles et de la moyenne et l'histogramme à 5 ans du *Best Estimate* des sept garanties du portefeuille sont les suivants :

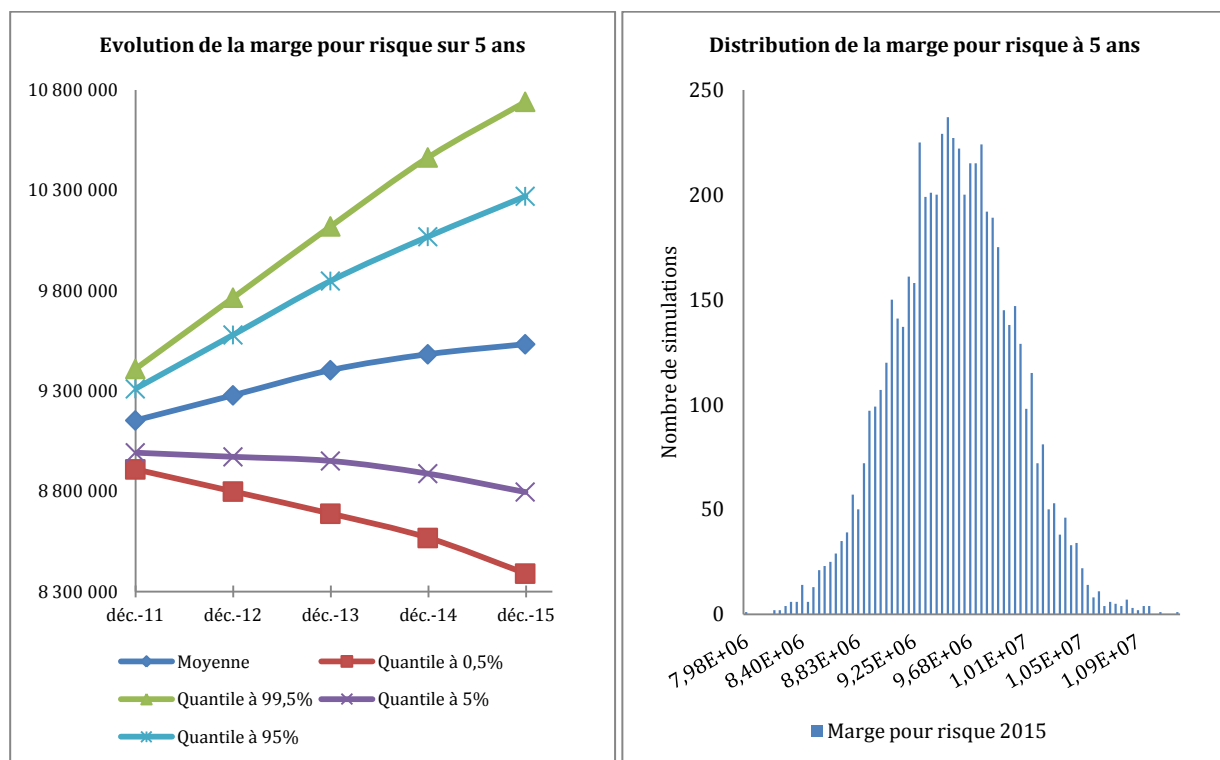


### 6.2.2 Marge pour risque

La marge pour risque représente le coût de l'immobilisation du capital. Pour la calculer, on utilise la méthode simplifiée basée sur un pourcentage de la provision *Best Estimate* : la marge pour risque de l'année N d'une branche d'activité est égale au produit du *Best Estimate* de l'année N de la branche par un paramètre fixé spécifique à la branche. Le QIS5 recommande de multiplier le *Best Estimate* de la branche par :

- 8% pour la branche « Responsabilité Civile Automobile », constituée dans notre portefeuille, des garanties RC Corporelle et RC Matérielle ;
- 4% pour la branche « Divers Automobile », constituée des garanties Bris de glace, Dommages, Incendie, Vol partiel et Vol total.

On obtient les projections suivantes :



### 6.3 Modélisation de l'actif

Selon la méthode de la juste valeur imposée par Solvabilité II, les actifs doivent être valorisés dans le bilan prudentiel à leur valeur de marché à la date de clôture du bilan.

### 6.3.1 Valeur de marché des obligations

La valeur de marché d'une obligation à la fin de l'année  $N$ , se calcule comme suit :

$$VM_{obligation}(N) = \sum_{i=1}^{m-N} \frac{coupon}{((1 + Taux\_ZC(N, i)) \times (1 + spread))^i} + \frac{remboursement}{((1 + Taux\_ZC(N, m - N)) \times (1 + spread))^{m-N}}$$

Où :

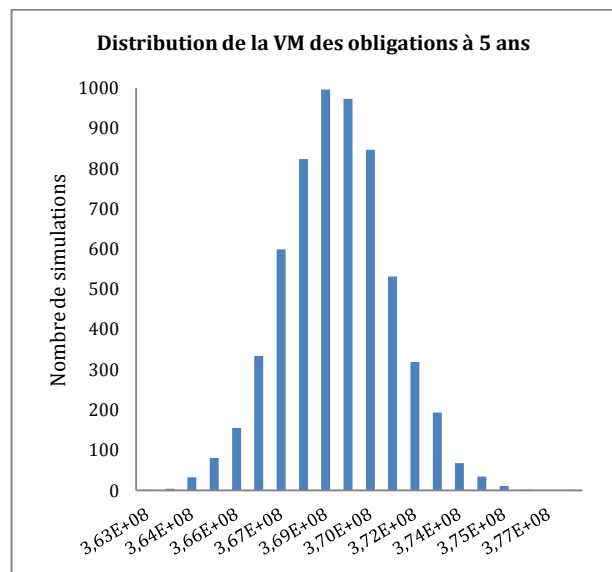
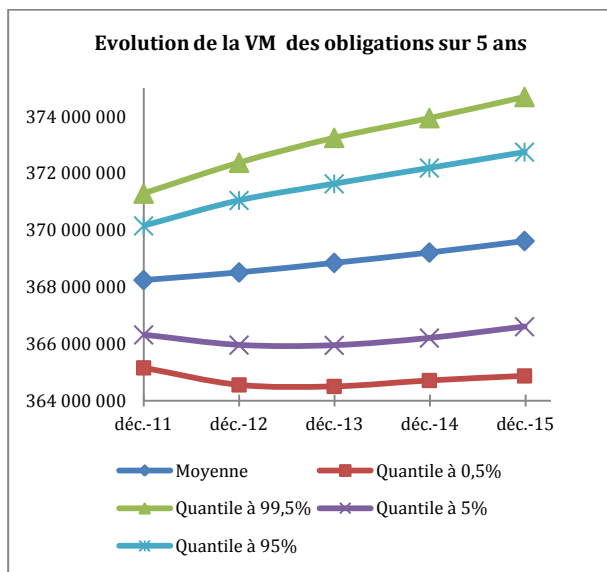
- $Taux\_ZC(t, T)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date  $t$  et d'échéance  $T$  ;
- $m$  est la maturité de l'obligation ;
- $coupon$  est le produit du nominal de l'obligation avec son taux coupon ;
- $remboursement$  est le nominal de l'obligation ;
- $spread$  est le  $spread$  de taux de l'obligation.

L'approche retenue pour le  $spread$  est une approche multiplicative. Etant donnée une obligation risquée dont on a la valeur de marché en 0, le  $spread$  est défini comme étant l'unique valeur  $s$  vérifiant la relation :

$$VM_{obligation}(0) = \sum_{i=1}^m \frac{coupon}{((1 + Taux\_ZC(0, i)) \times (1 + s))^i} + \frac{remboursement}{((1 + Taux\_ZC(0, m)) \times (1 + s))^m}$$

Pour une obligation donnée, ce  $spread$  est ainsi calculé une seule fois à l'initialisation. Ensuite, au cours de la projection dans le temps de l'obligation risquée, on fait l'hypothèse simplificatrice que ce  $spread$  reste constant tout au long de la durée de vie de l'obligation.

La projection de la valeur de marché de toutes les obligations en portefeuille à chaque date d'inventaire est la suivante :





### 6.3.2 Valeur de marché des actions

La valorisation des actions en fin d'année est déterminée à partir de l'évolution du taux de rendement simulé par le générateur de scénarios économiques. Le taux de rendement a été modélisé en *Total Return*, c'est-à-dire avec réinvestissement des dividendes.

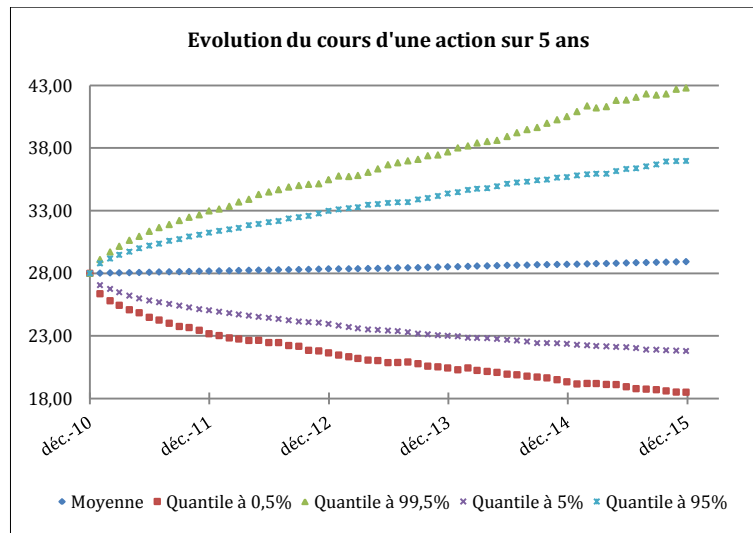
La valeur de marché d'une action à la fin de l'année  $N$ , se calcule comme suit :

$$VM_{action}(N) = VM_{action}(N - 1) * (1 + R_N)$$

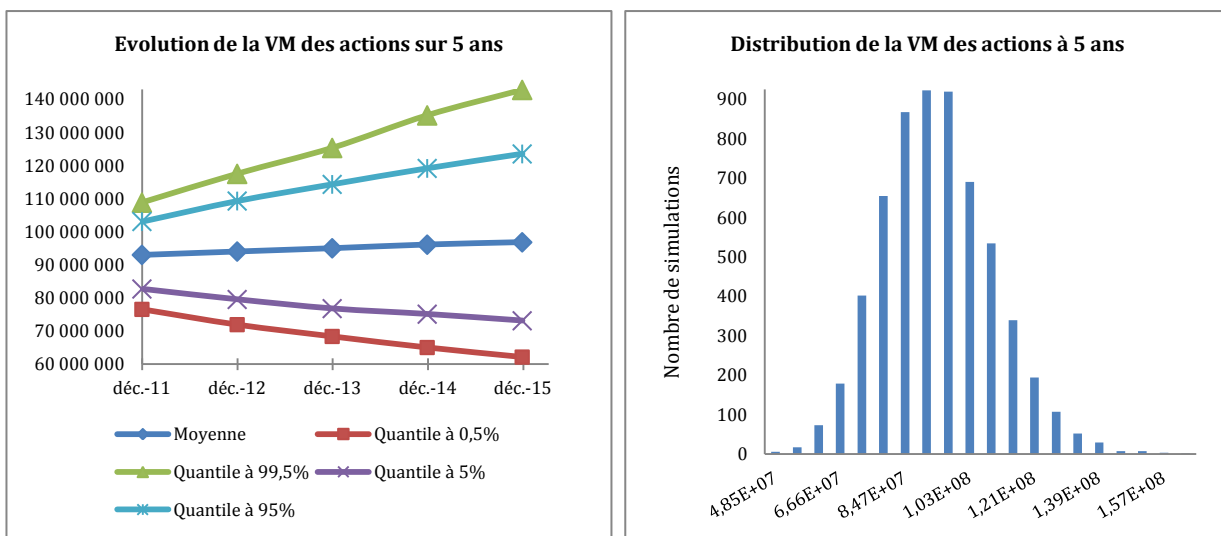
Où :

- $VM_{action}(N)$  est la valeur de marché à la fin de l'année  $N$  ;
- $R_N$  est le taux de rendement de l'action de l'année  $N$ .

En prenant comme valeur initiale en décembre 2010 le cours du *CAC All Tradable*, on obtient les projections suivantes mensuelles pour le cours d'une action :

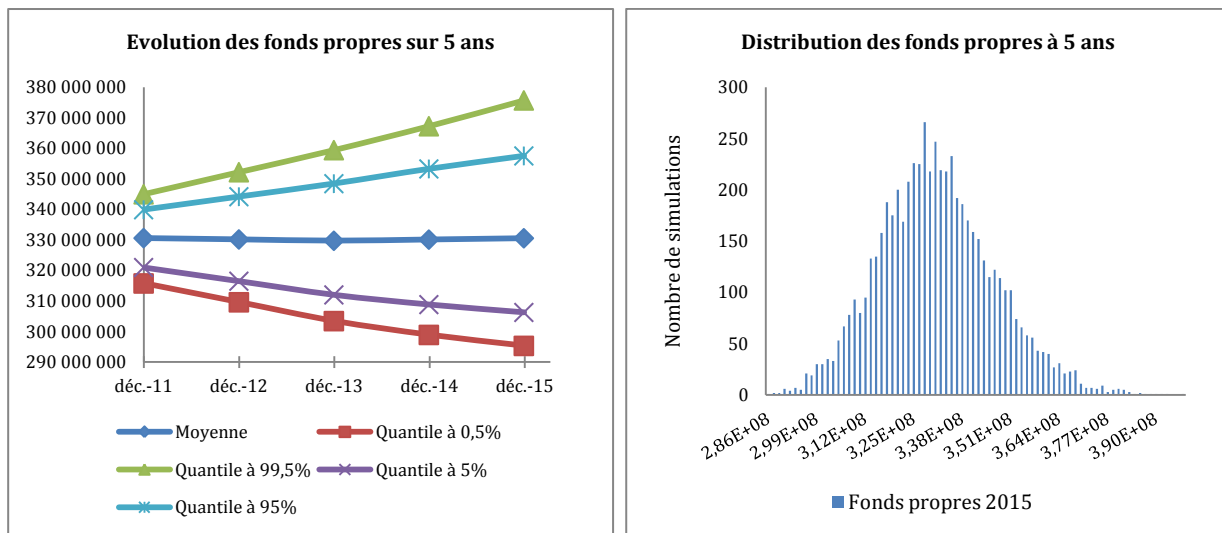


Les projections annuelles de la valeur de marché de toutes les actions en portefeuille suivent :



### 6.3.3 Fonds propres

Les fonds propres qui apparaissent au bilan sont les fonds propres de base : ils sont égaux à la différence entre actifs et passifs, augmentée des dettes subordonnées. Les dettes subordonnées n’ont pas été modélisées dans ce mémoire. Les fonds propres économiques du bilan au 31 décembre de l’année N sont donc égaux à la valeur de marché de tous les actifs à cette date, diminués du *Best Estimate* et de la marge pour risque.



### 6.4 Gestion Actif/Passif et politique financière de l’assureur

La gestion Actif/Passif du modèle se situe au niveau de l’élaboration des règles d’interactions qui existent entre l’actif et le passif. Le long de chacun des milliers de scénarios économiques, le modèle ALM projette dans le temps l’actif et le passif de l’assureur et permet de déterminer les flux. Le calcul de ces flux permet de vieillir d’un an la compagnie et de calculer sa nouvelle situation à chaque fin d’année de projection.

Chaque année N de la projection, étant donnés la sinistralité et le scénario économique fourni par le générateur de scénario économique pour cette année-là (performance des actions et courbe des taux au 31/12/N), le modèle ALM procède en 3 étapes pour calculer les flux de l’assureur :

- **Etape 1 : Calcul des encaissements et des décaissements de la trésorerie**

On calcule les prestations, les primes, les coupons et le remboursement des obligations arrivant à échéance l’année N. Le solde de trésorerie est établi par différence entre les encaissements financiers et les décaissements de l’assureur (prestations).

- **Etape 2 : Cession d'actifs**

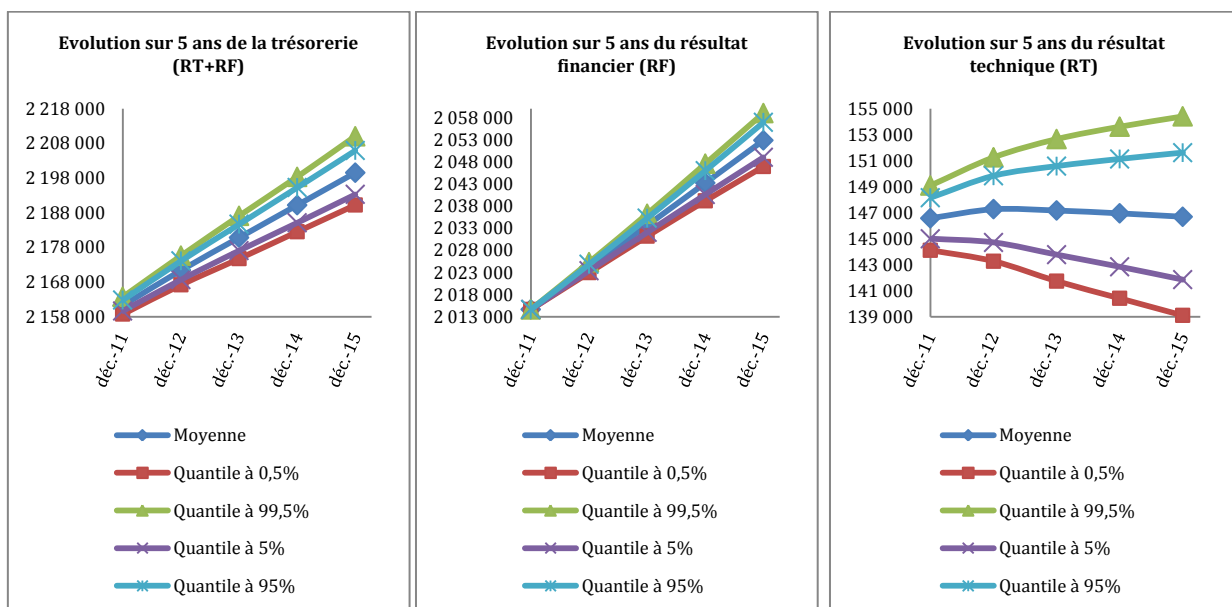
Si le montant total des primes, des coupons et des remboursements d'obligations perçus chaque année n'est pas suffisant pour payer les prestations de l'année, c'est-à-dire si le solde de trésorerie est négatif, l'assureur doit dégager des liquidités en vendant des actifs.

- **Etape 3 : Réallocation des actifs**

Si le montant total des primes, des coupons et des remboursements d'obligations perçus chaque année est suffisant pour payer les prestations de l'année, le solde de trésorerie est alors investi en actions et obligations de manière à obtenir un portefeuille dont la répartition correspond à l'allocation stratégique définie au départ.

La politique financière ou stratégie d'achat-vente de titres de l'assureur consiste donc à respecter durant toute la durée de projection l'allocation cible définie initialement. Le modèle va vendre ou acheter de façon proportionnelle des obligations et des actions de manière à éviter un rebalancement de l'actif après les désinvestissements ou investissements, afin de respecter l'allocation cible stratégique. En cas d'achat d'actions, le modèle achète une nouvelle ligne d'actions du montant nécessaire. En cas d'achat d'obligations, le modèle achète des titres de même maturité que celles achetées initialement.

Les projections suivantes présentent la projection du solde de trésorerie, qui est la somme du résultat technique (différence entre primes et prestations) et du résultat financier (constitué des coupons et remboursement d'obligations) avant réinvestissement.



Le résultat technique relativement faible s'explique par l'hypothèse simplificatrice de calcul des primes. On a en effet supposé que les primes sont calculées à partir du ratio S/P qui est fixé à 99,9%.



## Chapitre 7 : Calcul du SCR

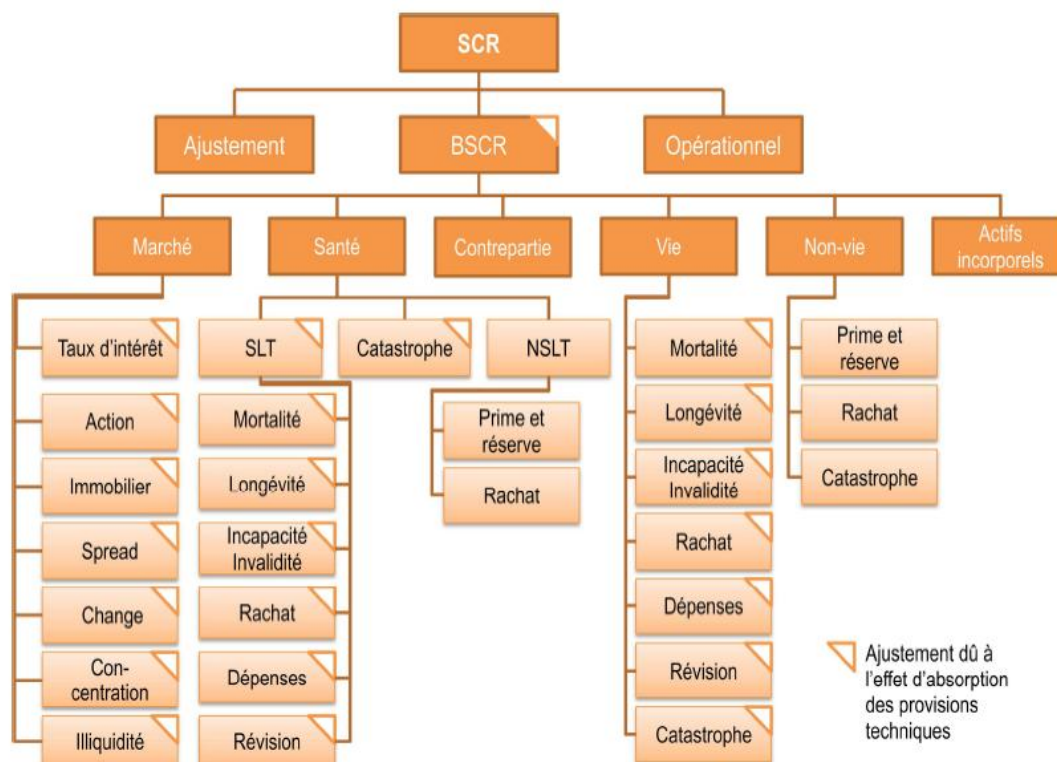
Le SCR est le capital de solvabilité requis. Il correspond au niveau de fonds propres nécessaire à une entreprise afin d'être en mesure d'absorber des pertes imprévues importantes. Le SCR doit couvrir le portefeuille en cours de l'entreprise ainsi que le portefeuille dont la souscription est attendue dans les 12 prochains mois.

Les paramètres et hypothèses entrant dans le calcul du SCR sont calibrés de manière à représenter la *Value at Risk* (VaR) à un horizon temporel d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. Le SCR doit couvrir une probabilité de ruine de 0,5% sur un horizon d'un an ce qui correspond à une faillite tous les 200 ans.

Le capital réglementaire requis peut être calculé soit à l'aide de la formule standard proposée par la Commission européenne soit par un modèle interne propre à l'entreprise. Il est également possible d'avoir recours à un modèle interne partiel pour calculer le SCR. Dans ce cas, l'entreprise programme son propre modèle pour certains risques et utilise la formule standard pour les autres. Les résultats obtenus via le modèle interne partiel doivent ensuite être agrégés avec ceux calculés par la formule standard pour déterminer le SCR.

### 7.1 Structure générale du SCR

Le calcul du SCR suivant la formule standard est décomposé en plusieurs modules de risque comportant eux-mêmes différents sous-modules. La structure du SCR donnée dans les spécifications techniques du QIS5 est la suivante :



Le présent mémoire calcule l'exigence de capital pour le risque de souscription non-vie et le risque de marché :

- Le risque de souscription correspond au risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement ;
- Le risque de marché désigne le risque de perte ou de changement désavantageux de la situation financière résultant, de manière directe ou indirecte, de fluctuations affectant le niveau et la volatilité de la valeur de marché des actifs, des passifs et des instruments financiers.

Le risque vie n'est pas pris en compte car les rentes de la garantie Responsabilité Civile corporelle n'ont pas été modélisées.

Le SCR s'obtient par la formule principale suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{Op}$$

Où :

- *BSCR*: Basic Solvency Capital Requirement (capital de solvabilité requis de base) ;
- *Adj*: Ajustements dus aux effets d'absorption des provisions techniques et des impôts différés ;
- *SCR<sub>Op</sub>*: Capital requis au titre du risque opérationnel.

Dans notre modèle,  $SCR = BSCR$  car nous ne prenons pas en compte le capital requis au titre du risque opérationnel et les ajustements dus aux effets d'absorption des provisions techniques et des impôts différés.

Pour illustrer les différentes étapes de calcul du BSCR de notre modèle, les projections de la moyenne et des quantiles à 0,5%, 5%, 95% et 99,5% durant les cinq années de projection, ainsi que l'histogramme de la distribution pour la cinquième année de projection, des différents éléments intervenant dans le calcul du BSCR sont exposées. Ces projections portent sur des valeurs obtenues à partir de 6.000 simulations et sont réalisées à fréquence annuelle sur cinq ans.

## 7.2 Le *Basic Solvency Capital Requirement* (BSCR)

Le SCR de base est calculé à partir de l'estimation de la *Net Asset Value* (NAV) qui sera choquée afin de tenir compte des différents risques auxquels est soumise la société d'assurance.

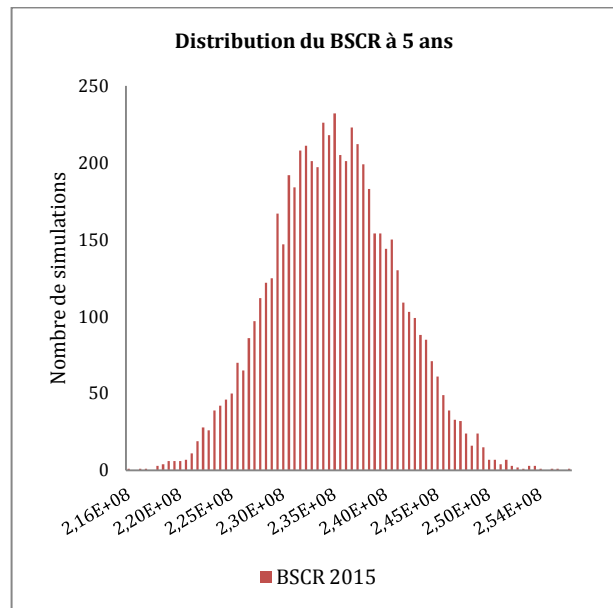
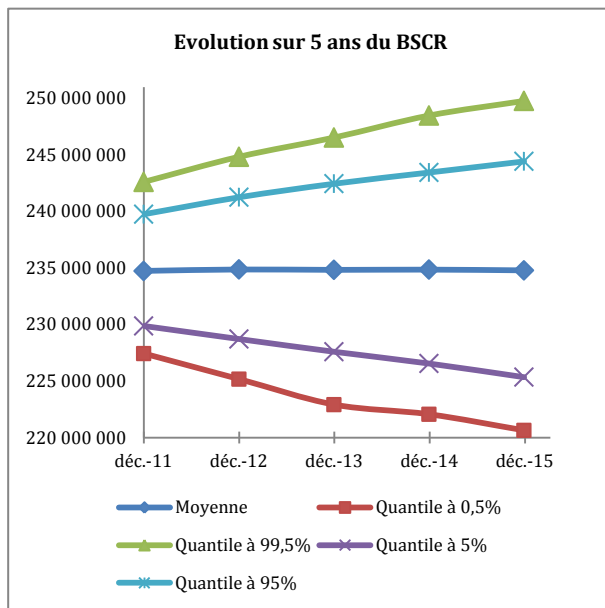
Le calcul du BSCR dans modèle est le suivant :

$$BSCR = \sqrt{(SCR_{Marché})^2 + 2 \times 0,25 \times SCR_{Marché} \times SCR_{Non-Vie} + (SCR_{Non-Vie})^2}$$

Où :

- $SCR_{Marché}$  est l'exigence de capital liée aux risques de marché
- $SCR_{Non-Vie}$  est le capital requis du risque de souscription

On obtient les projections du BSCR suivantes :



### 7.2.1 SCR de souscription Non-Vie

Le module de risque de souscription Non-Vie est constitué de 3 sous-modules :

- le risque de primes et de provisionnement ;
- le risque de rachat ;
- le risque de catastrophe.

Le risque de renonciation pour le renouvellement des primes ou risque de rachat en non-vie concerne essentiellement les contrats pluri-annuels et n'est pas pris en compte dans ce mémoire.

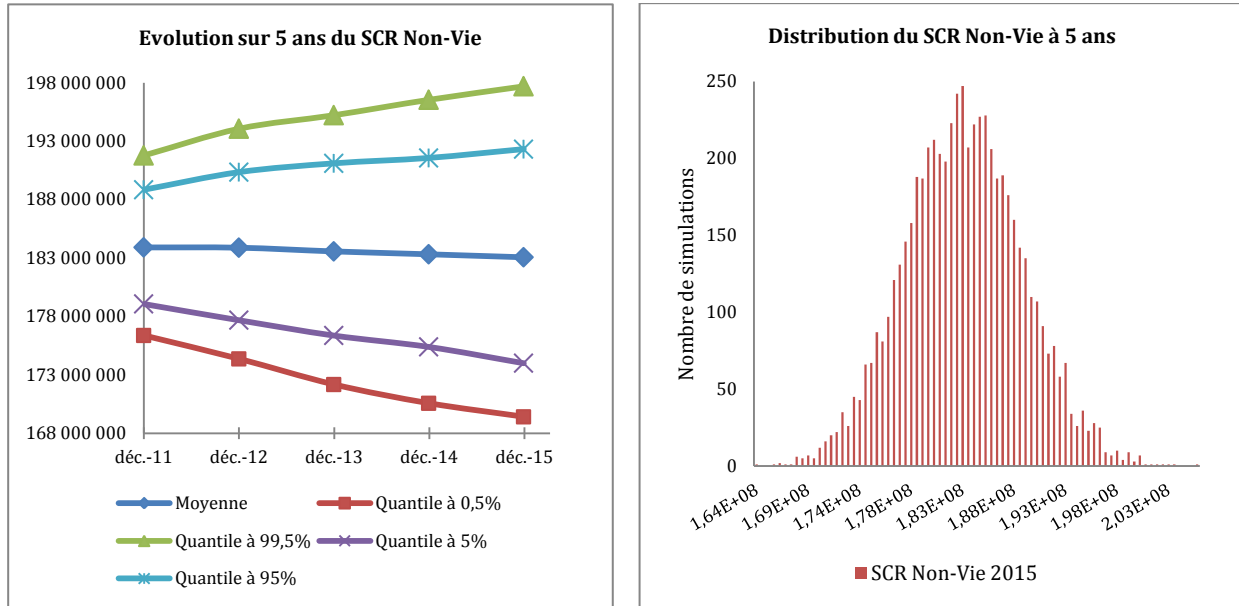
Le risque de primes et provisionnement et le risque de catastrophe sont agrégés de la façon suivante pour obtenir le SCR de souscription non-vie :

$$SCR_{Non-Vie} = \sqrt{(Non\ Vie_{prime,prov})^2 + 2 \times 0,25 \times Non\ Vie_{prime,prov} \times Non\ Vie_{catastrophe} + (Non\ Vie_{catastrophe})^2}$$

Où :

- $Non\ Vie_{prime,prov}$  est l'exigence de capital liée aux risques de prime et de provision ;
- $Non\ Vie_{catastrophe}$  est le besoin en capital lié au risque de catastrophe.

Les projections du SCR Non-Vie suivent :



### 7.2.1.1 Capital requis pour le risque Non-Vie de primes et de provisionnement

Le besoin en capital lié aux risques de prime et de provision est calculé en fonction de deux paramètres, qui sont le volume d'affaires de la compagnie et l'écart type de ses risques. Les spécifications techniques du QIS5 fournissent la formule suivante :

$$Non\ Vie_{prime,prov} = \rho(\sigma) * V$$

Où :

- $V$  représente une mesure de volume ;
- $\sigma$  est une estimation de l'écart-type du ratio combiné du portefeuille global d'assurance non-vie ;
- 

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} \times \sqrt{\log(1 + \sigma^2)})}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1$$

- $N_{0,995}$  est le quantile à 99,5% de la loi normale centrée réduite.



Les mesures de volume  $V$  et la volatilité  $\sigma$  du ratio combiné pour le portefeuille global des activités non vie sont déterminées selon les étapes suivantes :

- Étape 1 : pour chaque branche d'activité, déterminer la volatilité et la mesure de volume pour le risque de primes et de provisions ;
- Étape 2 : agréger la volatilité et les volumes pour le risque de primes et de provisions de chaque branche pour obtenir une volatilité globale et une mesure de volume globale du portefeuille d'activités non vie.

Les données nécessaires au calcul du besoin en capital non vie sont les suivantes:

- $PCO_{branche}$  : les provisions pour sinistres à payer nettes, pour la branche considérée ;
- $P_{t,branche,sousc}$ : le montant estimé des primes émises pour l'exercice suivant, pour la branche considérée ;
- $P_{t,branche,acq}$  : le montant estimé des primes acquises pour l'exercice suivant, pour la branche considérée ;
- $P_{t-1,branche,sousc}$ : le montant des primes émises pour le dernier exercice, pour la branche considérée ;
- $P_{branche}^{PP}$ : la valeur actuelle probable des primes nettes dues aux contrats existants. Les primes sont celles attendues après l'année suivante. Ce terme  $P_{branche}^{PP}$  est nul pour les contrats annuels sans option de renouvellement.

Les primes émises correspondent aux primes facturées aux clients alors que les primes acquises sont les primes afférentes à l'exercice comptable en cours reçues par la compagnie.

Dans notre modèle, on suppose :

- $PCO_{branche}$  est le montant du *Best Estimate* de la branche
- $P_{t,branche,sousc} = P_{t,branche,acq}$
- $P_{branche}^{PP} = 0$

#### 7.2.1.1.1 Etape 1 : Calcul de la mesure de volume $V$ et de la volatilité $\sigma$ par branche

Dans chaque branche, les mesures de volume et les volatilités sont définies comme suit :

- $V_{primes,branche}$  : volume pour le risque de prime
- $V_{prov,branche}$  : volume pour le risque de provision
- $\sigma_{primes,branche}$  : volatilité pour le risque de prime
- $\sigma_{prov,branche}$  : volatilité pour le risque de provision.

La mesure relative aux primes se calcule de la façon suivante :

$$V_{primes,branche} = \text{Max}(P_{t,branche,sousc}, P_{t,branche,acq}, P_{t-1,branche,sousc}) + P_{branche}^{PP}$$

La volatilité des primes par branche,  $\sigma_{primes,branche}$ , est, dans ce mémoire, égale à 10% pour la branche « Responsabilité Civile Automobile » et à 7% pour la branche « Divers Automobile, car notre portefeuille est supposé non réassuré.

La mesure relative aux provisions se calcule de la façon suivante :

$$V_{prov,branche} = PCO_{branche}$$

La volatilité des provisions par branche,  $\sigma_{prov,branche}$ , est égal à 9.5% pour la branche « Responsabilité Civile Automobile » et à 10% pour la branche « Divers Automobile ».

Les volatilités des primes et des provisions par branche permettent de calculer l'écart-type global de la branche :

$\sigma_{branche}$

$$= \frac{\sqrt{(\sigma_{primes,branche} V_{primes,branche})^2 + 2 \times 0,5 \times \sigma_{prov,branche} \times V_{primes,branche} \times V_{prov,branche} + (\sigma_{prov,branche} V_{prov,branche})^2}}{V_{primes,branche} + V_{prov,branche}}$$

### 7.2.1.1.2 Etape 2 : Calcul de la mesure de volume et de la volatilité globales

L'écart-type global est défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \times \sum_{r,c} \text{CorrBranche}_{r,c} \times \sigma_r \times \sigma_c \times V_r \times V_c}$$

Où :

- $r$  et  $c$  désignent les différentes branches
- $V_r$  et  $V_c$  sont les mesures de volume individuelles de chaque branche
- $V$  représente la mesure de volume global
- $\text{CorrBranche}_{r,c}$  est la corrélation entre les couples  $r$  et  $c$  définie par la matrice de corrélation suivante :

CorrBranche	1: RC Automobile	2: Divers Automobile
1: RC Automobile	1	0,5
2: Divers Automobile	0,5	1

Le volume total est défini comme suit :

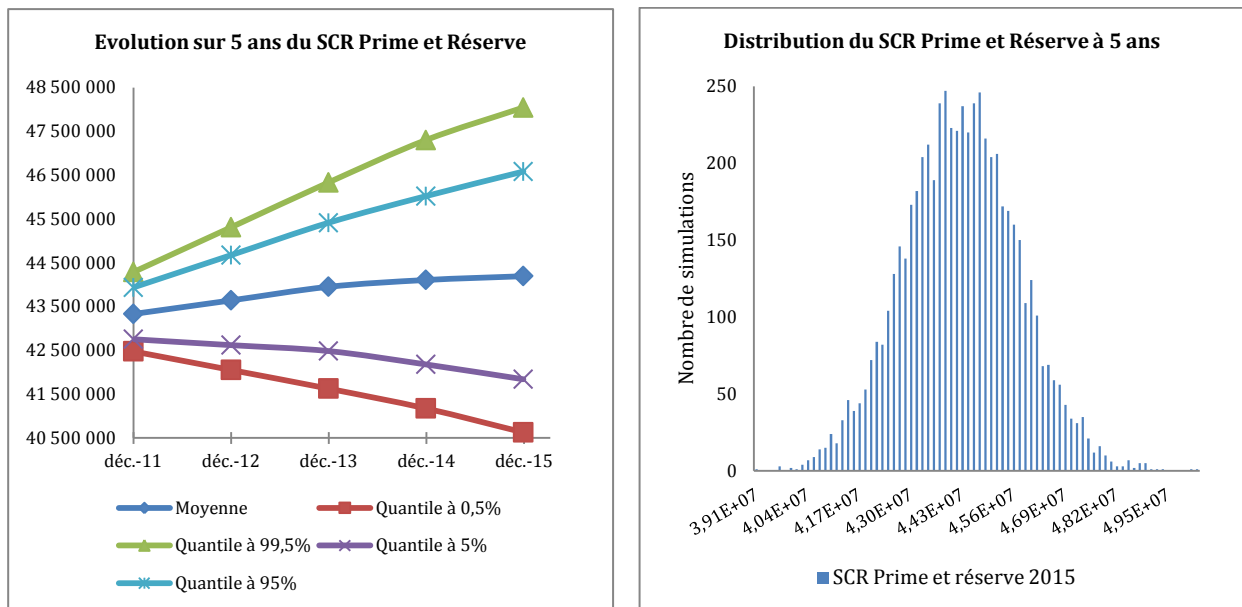
$$V = \sum_{branche} V_{branche}$$

Où  $V_{branche}$  est la mesure de volume pour le risque de primes et de provisions après la prise en compte de l'effet de diversification géographique pour la branche considérée :

$$V_{branche} = (V_{primes,branche} + V_{prov,branche}) \times (0,75 + 0,25 * DIV_{primes,branche})$$

Où  $DIV_{primes,branche} = 25\%$  dans notre modèle car on suppose que nos contrats sont répartis sur 4 zones géographiques.

L'exigence de capital liée aux risques de prime et de provision est projetée à 5 ans de la manière suivante :



### 7.2.1.2 Capital requis pour le risque Non-Vie de catastrophe

Le risque de catastrophe s'intéresse aux événements extrêmes qui ne sont pas suffisamment pris en compte par les risques de primes et de provisions. Ce module de risque est calculé dans notre modèle grâce à la méthode basée sur les facteurs : la méthode 2 du QIS5. La méthode 1 n'a pas été utilisée car elle suppose d'avoir un géocodage des expositions du portefeuille au risque de catastrophe.

L'exigence de capital pour le risque de catastrophe se déduit de la formule suivante :

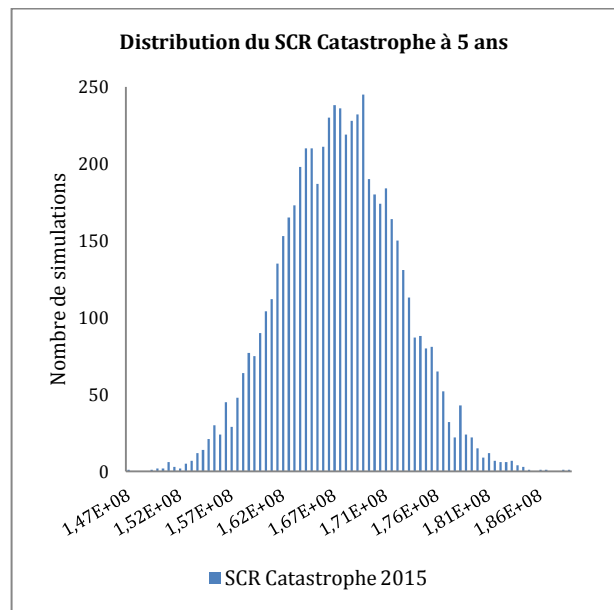
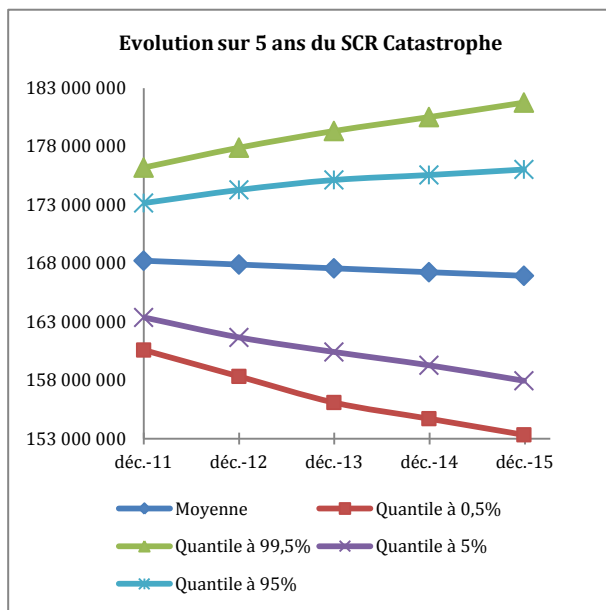
$$Non\ Vie_{catastrophe} = \sqrt{\sum_{t=1,2,3,4,7} (c_t \times P_t)^2}$$

Où :

- $P_t$  est l'estimation des primes émises brutes de réassurance pour une branche au cours de la prochaine année
- $c_t$  est un coefficient défini dans le tableau suivant :

Evénements	Branches affectées	Facteurs $c_t$
Orage	Divers Automobile	175%
Inondation	Divers Automobile	113%
Tremblement de terre	Divers Automobile	120%
Grêle	Divers Automobile	30%
Sinistre important en RC Automobile	Responsabilité Civile Automobile	40%

Les projections du besoin en capital lié au risque de catastrophe sont les suivantes :



### 7.2.2 SCR Marché

Le SCR marché est défini comme le maximum entre l'agrégation des sous-modules avec un choc de taux à la hausse et celle avec un choc de taux à la baisse.

$SCR_{marché}$

$$= \text{Max} \left( \sqrt{\sum_{r,c} \text{CorrMarchéUp}_{r,c} \times \text{Marché}_{Up,r} \times \text{Marché}_{Up,c}} ; \sqrt{\sum_{r,c} \text{CorrMarchéDown}_{r,c} \times \text{Marché}_{Down,r} \times \text{Marché}_{Down,c}} \right)$$

Les spécifications techniques du QIS5 définissent deux matrices de corrélation :

CorrMarchéDown	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
Intérêt	1	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0
Action	0,5	1	0,75	0,75	0,25	0	0
Immobilier	0,5	0,75	1	0,5	0,25	0	0
Spread	0,5	0,75	0,5	1	0,25	0	-0,5
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1	0	0
Concentration	0	0	0	0	0	1	0
Illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

CorrMarchéUp	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
Intérêt	1	0	0	0	0,25	0	0
Action	0	1	0,75	0,75	0,25	0	0
Immobilier	0	0,75	1	0,5	0,25	0	0
Spread	0	0,75	0,5	1	0,25	0	-0,5
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1	0	0
Concentration	0	0	0	0	0	1	0
Illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

Ce mémoire prend en compte les risques de taux d'intérêt, d'actions, de *spread* et d'illiquidité.

En effet, on ne modélise pas :

- le risque d'immobilier car il n'y a aucun investissement en immobilier à l'actif de notre bilan ;
- le risque de change car l'actif et le passif de notre bilan est en euros, c'est-à-dire dans la même devise ;
- le risque de concentration car les placements sont diversifiés et il n'y a donc pas d'accumulation de positions auprès d'une même contrepartie.

Contrairement aux chocs du risque de souscription qui n'affectent que le passif, certains chocs du risque de marché impactent à la fois le passif et l'actif.

Par exemple, le choc de taux d'intérêt a un impact sur le rendement de l'actif ainsi que sur la courbe d'actualisation du passif.

### 7.2.2.1 Capital requis pour le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt concerne les actifs et passifs qui sont sensibles aux variations de la courbe des taux d'intérêt.

Dans les spécifications techniques du QIS5, la charge en capital requise est obtenue par le calcul des variations de la NAV après application de deux scénarios de choc sur les taux, un scénario haussier et un scénario baissier.

$$\text{Marché}_{Up, \text{Taux d'intérêt}} = \text{Max}(\Delta \text{NAV}_{Up}; 0)$$

$$\text{Marché}_{Down, \text{Taux d'intérêt}} = \text{Max}(\Delta \text{NAV}_{Down}; 0)$$

Le choc de taux d'intérêt est appliqué en multipliant la courbe des taux d'intérêt par :

- $(1 + Choc\_Up)$  dans le cas d'un scénario haussier ;
- $(1 + Choc\_Down)$  dans le cas d'un scénario baissier.

Où les coefficients  $Choc\_Up(t)$  et  $Choc\_Down(t)$  pour chaque maturité  $t$  sont les suivants :

Maturité t (années)	Choc_Up(t)	Choc_Down(t)
1	70%	-75%
2	70%	-65%
3	64%	-56%
4	59%	-50%
5	55%	-46%
6	52%	-42%
7	49%	-39%
8	47%	-36%
9	44%	-33%
10	42%	-31%
11	39%	-30%
12	37%	-29%
13	35%	-28%
14	34%	-28%
15	33%	-27%
16	31%	-28%
17	30%	-28%
18	29%	-28%
19	27%	-29%
20	26%	-29%
21	26%	-29%
22	26%	-30%
23	26%	-30%
24	26%	-30%
25	26%	-30%

### 7.2.2.1.1 Choc de taux d'intérêt sur les obligations

La valeur de marché d'une obligation à la fin de l'année  $N$  après le choc de taux d'intérêt, se calcule comme suit pour un scénario haussier:

$$\begin{aligned}
 &ChocTauxUp\_VMobligation(N) \\
 &= \sum_{i=1}^{m-N} \frac{coupon}{\left( (1 + TauxZC(N, i) \times (1 + Choc\_Up(N - i))) \times (1 + spread) \right)^i} \\
 &+ \frac{remboursement}{\left( (1 + TauxZC(N, m - N) \times (1 + Choc\_Up(m))) \times (1 + spread) \right)^{m-N}}
 \end{aligned}$$

Où :

- $ChocTauxUp\_VMobligation(N)$  est la valeur de marché de l'obligation à la fin de l'année N pour un scénario haussier ;
- $Choc\_Up(m)$  est un coefficient dont les valeurs sont dans le tableau précédent ;
- $Taux\_ZC(t, T)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date  $t$  et d'échéance  $T$  ;
- $m$  est la maturité de l'obligation ;
- $coupon$  est le produit du nominal de l'obligation avec son taux coupon ;
- $remboursement$  est le nominal de l'obligation ;
- $spread$  est le  $spread$  de taux de l'obligation.

### 7.2.2.1.2 Choc de taux d'intérêt sur le *Best Estimate*

Le *Best Estimate* à la fin de l'année N après le choc de taux d'intérêt, se calcule comme suit pour un scénario haussier :

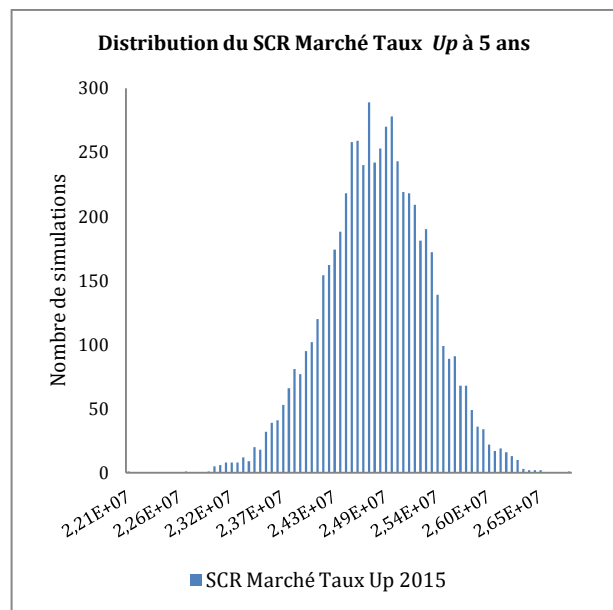
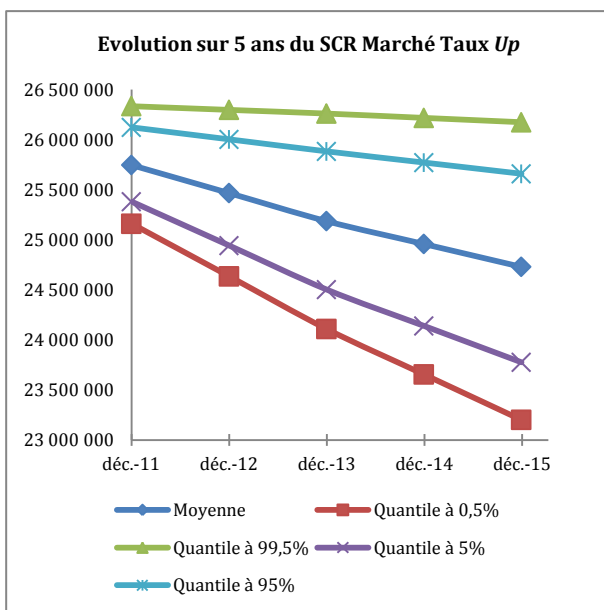
$ChocTauxUp\_Best\ Estimate(N)$

$$= \sum_{i=N+1}^{N+8} \frac{Flux\_Prestations(i)}{(1 + TauxZC(N, i) \times (1 + Choc\_Up(N - i)) + Prime\ d'illiquidité)^i}$$

Où :

- $Taux\_ZC(N, i)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date N et d'échéance i ;
- $Prime\ d'illiquidité = 50\% * 0,53\%$

L'exigence de capital liée aux risques de taux d'intérêt pour un scénario haussier est projetée à 5 ans de la manière suivante :



### 7.2.2.2 Capital requis pour le risque action

Le risque action concerne les actifs d'assurance sensibles aux variations des cours des actions. Ce risque résulte d'une variation défavorable du cours des actions. Les compagnies d'assurance pouvant recourir aux actions pour améliorer leurs performances financières, elles sont exposées à leur variabilité.

Le choc action n'a aucun impact sur le *Best Estimate* des provisions en assurance non-vie car les prestations versées aux assurés ne dépendent pas du rendement des actifs.

Pour déterminer le capital requis au titre du sous-module action, il faut faire la distinction entre deux catégories d'actions, les actions dites « globales » et les « autres ». Pour chaque type d'actions, le capital requis est obtenu par le calcul de la variation de la NAV après l'application d'un choc spécifique.

$$\text{Marché}_{Action} = \text{Max}(\Delta NAV_{Choc Action}; 0)$$

Dans notre modèle, les actions en portefeuille sont des actions « globales », c'est-à-dire des actions cotées dans les pays de l'EEE (Espace Economique Européen) et de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique). Le choc appliqué à ce type d'actions est un choc de 30% comprenant un ajustement de -9%.

L'ajustement appliqué aux chocs sur actions est du au mécanisme d'ajustement symétrique ou effet dampener. Ce mécanisme est explicité dans l'article 106 de la Directive 2009/138/CE. L'ajustement permet de moduler la charge en fonds propres requise pour couvrir le risque action en fonction des niveaux atteints par les marchés financiers. Il dépend du niveau d'un indice approprié, du cours des actions et de la moyenne pondérée de cet indice. En pratique, il correspond à l'écart relatif entre le niveau du marché et sa moyenne mobile sur un horizon de temps donné.

L'indice retenu dans ce mémoire est celui du CAC All Tradable et l'horizon de temps choisi est fixé à 12 mois. L'ajustement est limité à un corridor de -10%/+10% du scénario représentatif de la formule standard.

La valeur de marché d'une action à la fin de l'année  $N$  après le choc action, se calcule comme suit :

$$\text{ChocAction\_VMaction}(N) = [ \text{VMaction}(N) ] \times [ 1 - 39\% + \text{ED}(12 * N) ]$$

Où :

- $\text{ChocAction\_VMaction}(N)$  et  $\text{VMaction}(N)$  sont respectivement les valeurs de marché de l'action à la fin de l'année  $N$  après et avant le choc action ;

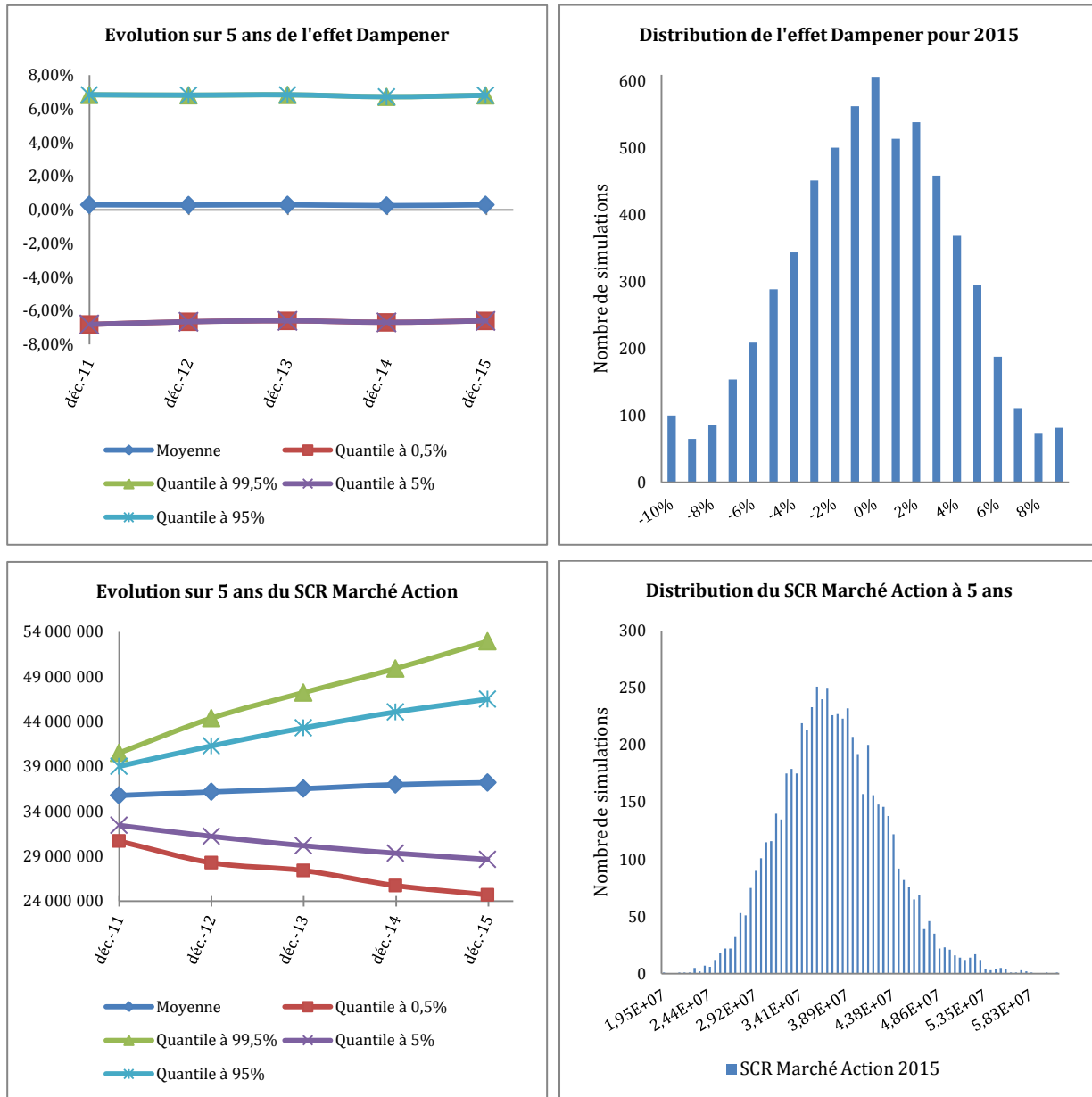
- 

$$\text{ED}(t) = \text{Max} \left( -10\% ; \text{Min} \left( 10\% ; \frac{I_t - \frac{1}{12} \sum_{s=t-1}^{t-12} I_s}{\frac{1}{12} \sum_{s=t-1}^{t-12} I_s} \right) \right)$$

- $I_t$  est l'indice mensuel au mois  $t$  du CAC All Tradable.



On obtient les projections suivantes pour l'effet Dampener et l'exigence de capital liée au risque action :



### 7.2.2.3 Capital requis pour le risque de *spread*

Le capital requis pour le risque de *spread* est obtenu par le calcul de la variation de la NAV après l'application d'un choc spécifique :  $Marché_{spread} = \text{Max}(\Delta NAV_{\text{Choc Spread}}; 0)$

Le risque de *spread* de crédit dépend de l'évolution de l'écart entre le taux de rentabilité actuariel d'une obligation et le taux de rentabilité actuariel d'un emprunt sans risque de même maturité. Le risque de *spread* est d'autant plus important que la note de l'émetteur est faible. Dans ce mémoire, il est évalué à partir du risque de *spread* des obligations.

La valeur de marché d'une obligation à la fin de l'année  $N$  après le choc de *spread*, se calcule comme suit :

$$\text{ChocSpread\_VMobligation}(N) = [\text{VMobligation}(N)] \times [\text{Duration}(N) \times 1,4\%]$$

Où :

- $\text{ChocSpread\_VMobligation}(N)$  et  $\text{VMobligation}(N)$  sont respectivement les valeurs de marché de l'obligation à la fin de l'année  $N$  après et avant le choc de *spread* ;
- Le facteur 1,4% est le facteur à appliquer aux obligations d'entreprise notée A ;
- 

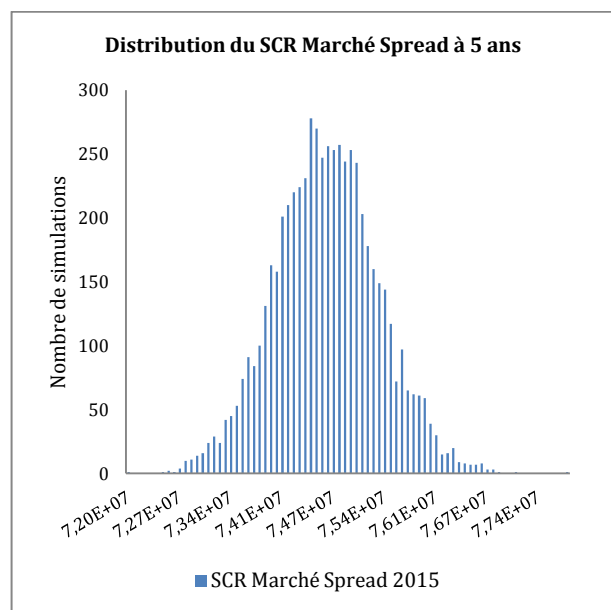
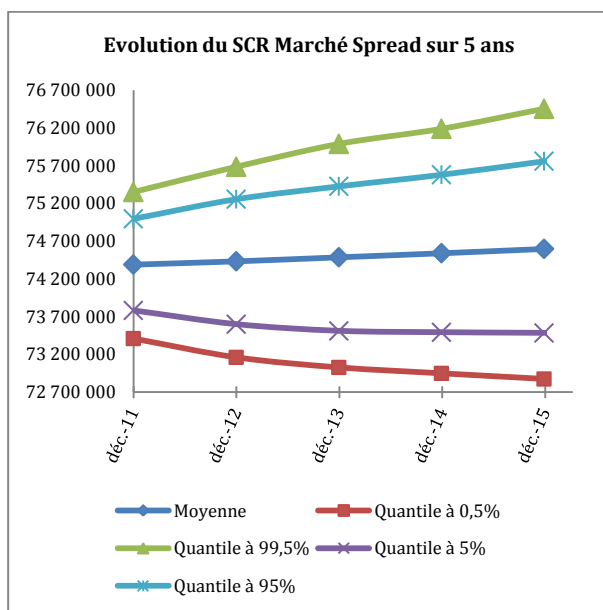
$\text{Duration}(N)$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m-N} \frac{i \times \text{coupon}}{\left( (1 + \text{Taux\_ZC}(N, i)) \times (1 + \text{spread}) \right)^i} + \frac{(m - N) \times \text{remboursement}}{\left( (1 + \text{Taux\_ZC}(N, m - N)) \times (1 + \text{spread}) \right)^{m-N}}}{\sum_{i=1}^{m-N} \frac{\text{coupon}}{\left( (1 + \text{Taux\_ZC}(N, i)) \times (1 + \text{spread}) \right)^i} + \frac{\text{remboursement}}{\left( (1 + \text{Taux\_ZC}(N, m - N)) \times (1 + \text{spread}) \right)^{m-N}}}$$

Où :

- $\text{Taux\_ZC}(t, T)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date  $t$  et d'échéance  $T$  ;
- $m$  est la maturité de l'obligation ;
- *coupon* est le produit du nominal de l'obligation avec son taux coupon ;
- *remboursement* est le nominal de l'obligation ;
- *spread* est le *spread* de taux de l'obligation.

Le besoin en capital lié au risque de *spread* est projeté à cinq ans de la manière suivante :



### 7.2.2.4 Capital requis pour le risque d'illiquidité

Le risque d'illiquidité résulte de la difficulté à vendre ou acheter un actif. Un actif est dit illiquide lorsqu'il est difficilement achetable ou vendable.

Ce risque est pris en compte car une prime d'illiquidité est intégrée dans le calcul des provisions techniques. Le risque d'illiquidité est relatif à une baisse de la prime d'illiquidité.

Les spécifications techniques du QIS5 imposent que le capital requis au titre du risque d'illiquidité soit déterminé par la variation de la NAV après application d'un choc à la baisse de 65% du montant de la prime d'illiquidité.

$$\text{Marché}_{\text{Illiquidité}} = \text{Max}(\Delta \text{NAV}_{\text{Choc Illiquidité}}; 0)$$

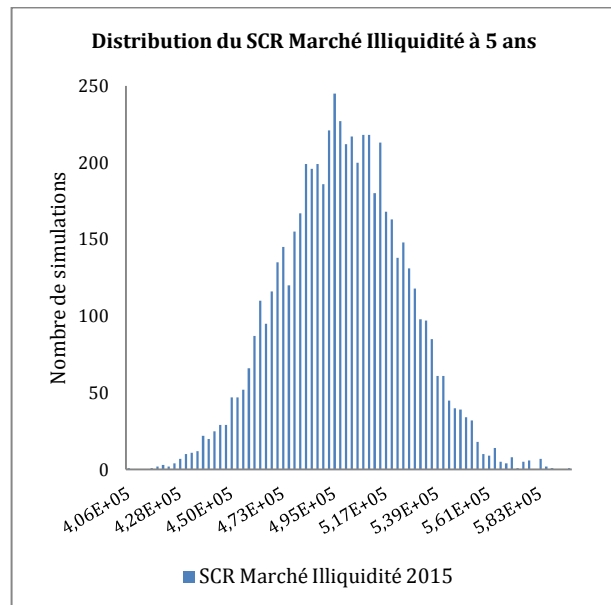
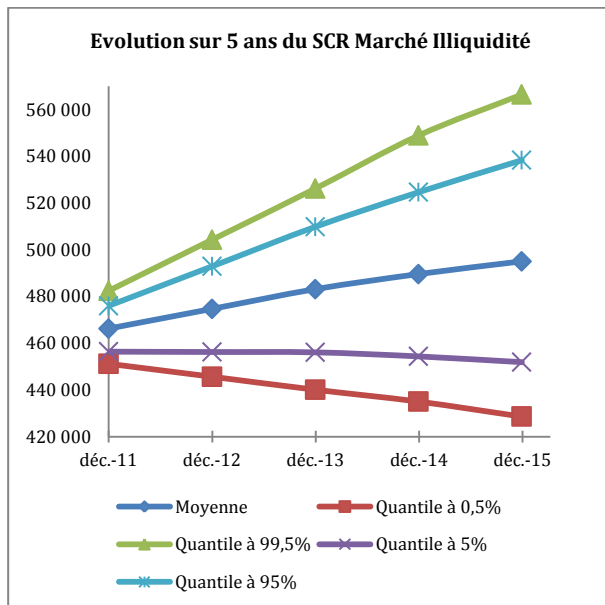
Le Best Estimate à la fin de l'année  $N$  après le choc d'illiquidité se calcule comme suit :

$$\text{ChocIlliquidité\_Best Estimate}(N) = \sum_{i=N+1}^{N+8} \frac{\text{Flux\_Prestations}(i)}{(1 + \text{Taux}_{\text{ZC}}(N, i) + (1 - 65\%) * \text{Prime d'illiquidité})^i}$$

Où :

- $\text{Taux}_{\text{ZC}}(N, i)$  est le taux zéro-coupon calculé à la date  $N$  et d'échéance  $i$  ;
- $\text{Prime d'illiquidité} = 50\% * 0,53\%$

Nous obtenons les projections suivantes pour le risque d'illiquidité :





---

## Partie 3 : Analyse de la volatilité du ratio de solvabilité

---

### Chapitre 8 : Analyse de la volatilité du ratio de solvabilité prospective à 5 ans

---

Ce chapitre analyse la volatilité du ratio de solvabilité pour la cinquième année de projection, c'est-à-dire avec les projections à 2015. Nous allons montrer que les contributeurs les plus importants à la volatilité du ratio de couverture sont la sinistralité et le risque action.

#### 8.1 Synthèse des hypothèses du modèle

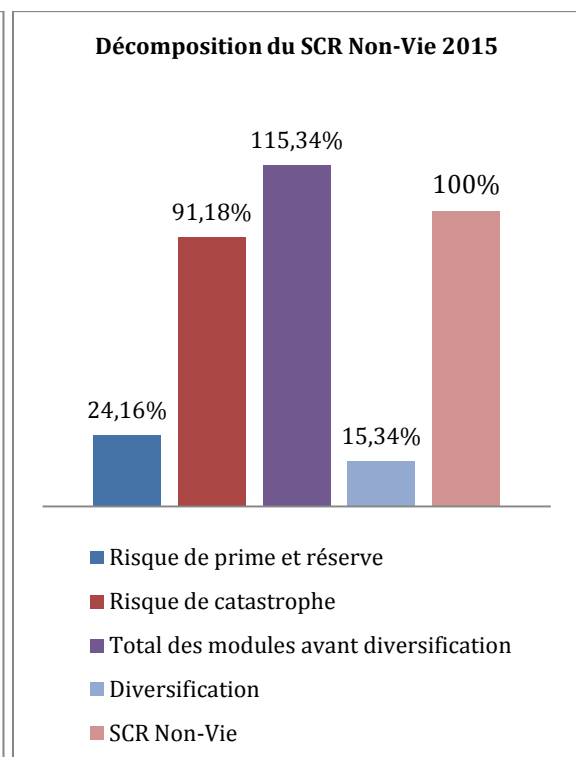
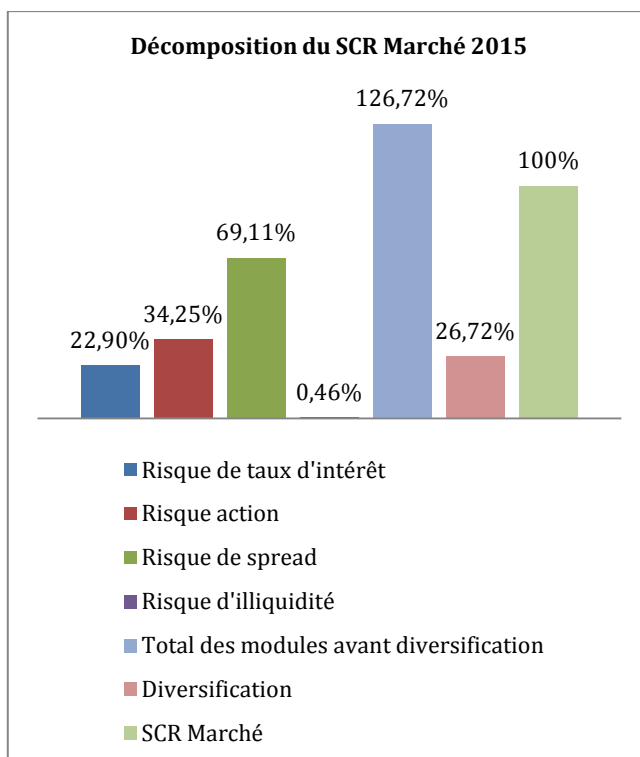
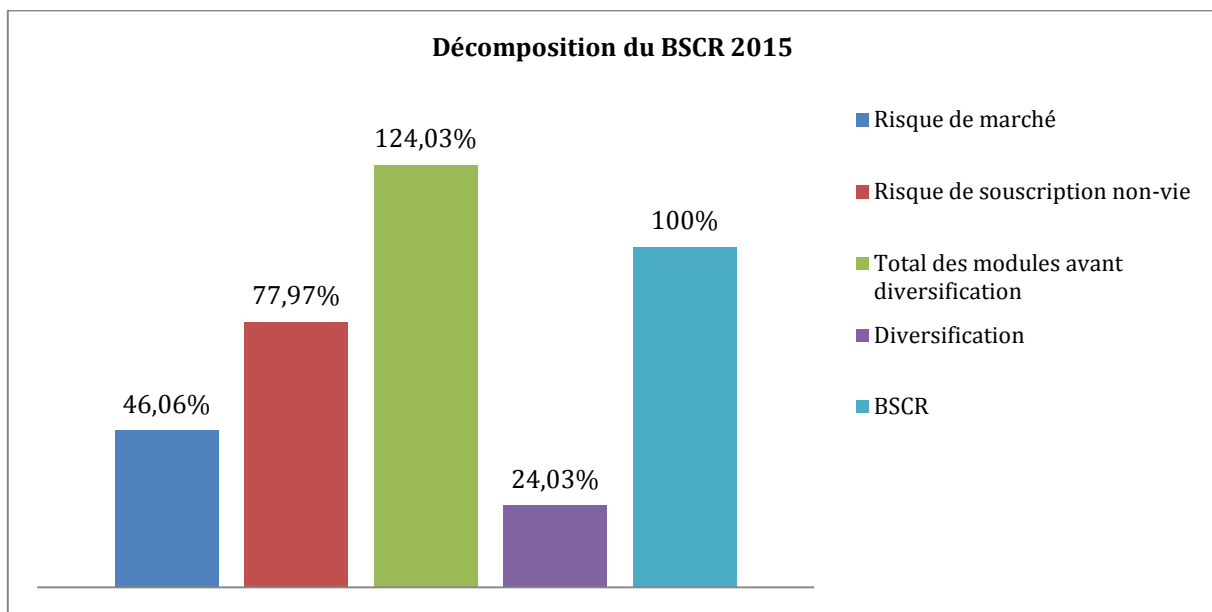
Il est nécessaire de rappeler brièvement les principales hypothèses de notre modèle de bilan prospectif qui impactent l'analyse de la volatilité du ratio de solvabilité:

- Le portefeuille étudié est celui d'un assureur mono-produit automobile ;
- L'actif est composé de 20% de placements en actions globales et de 80% en obligations risquées à taux fixe ;
  - ⇒ Les obligations sont toutes de maturité 20 ans;
  - ⇒ Une stratégie fixe d'allocation d'actifs est définie initialement dans le modèle et est respectée durant toute la projection ;
- La valeur de marché initiale des placements en actions et en obligations est de 460.000.000 euros ;
- Le passif est constitué du *Best Estimate* et de la marge pour risque qui est calculée à partir d'une approximation (en pourcentage du *Best Estimate*) ;
- Les fonds propres sont calculés par différence en l'actif et le passif ;
- Les primes annuelles sont calculées à partir du ratio S/P supposé constant et égal à 99,90% durant toute la durée de projection ;
- Le nombre de contrats par garantie est supposé constant au cours de toute la durée de projection ;
- Le risque de crédit n'est pas modélisé.

L'outil est mis en production avec ce paramétrage de référence pour 6.000 simulations.

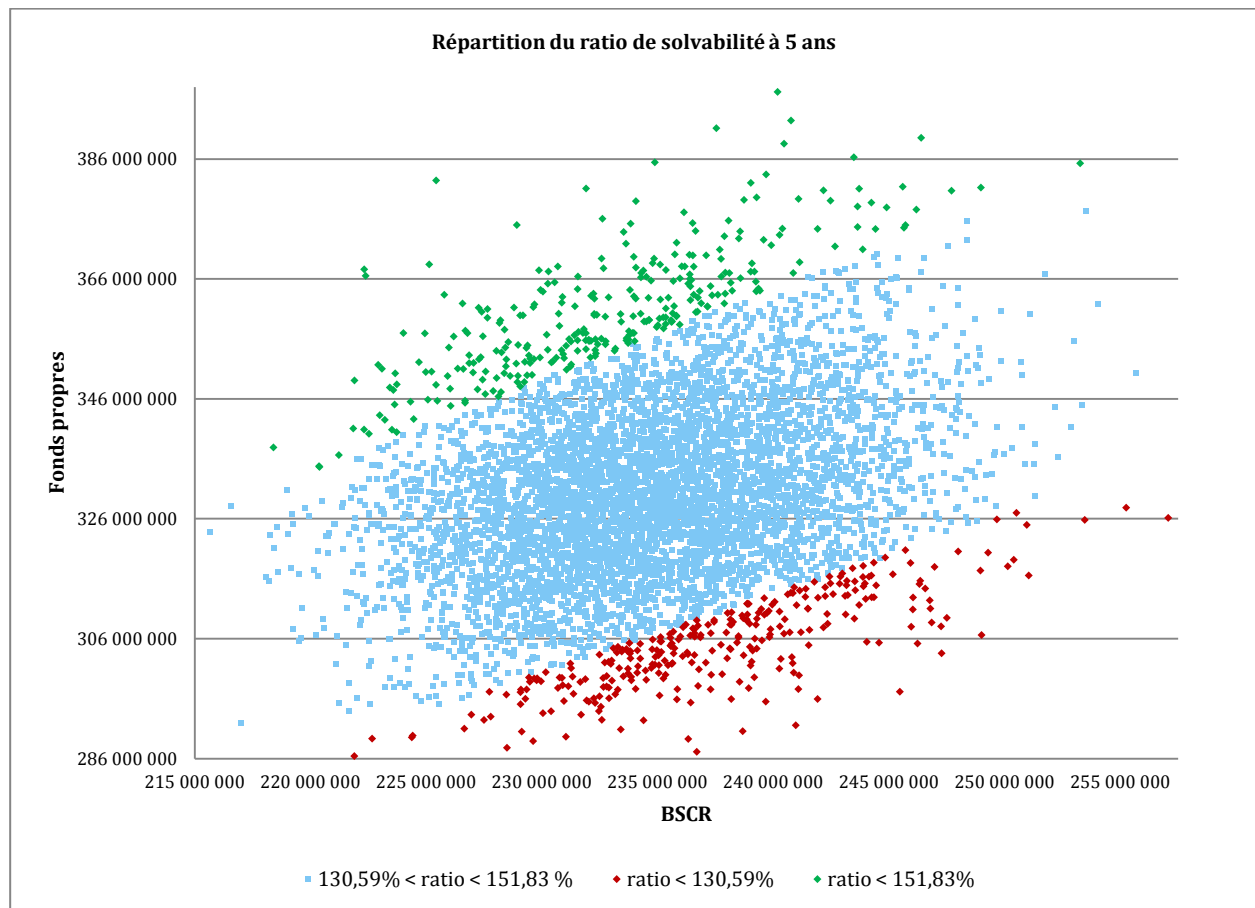
## 8.2 Décomposition du BSCR moyen du portefeuille au 31/12/2015

Le BSCR est calculé selon une approche modulaire par la formule standard. L'assureur doit calculer la perte subie en cas d'événement défavorable lié à plusieurs facteurs de risque. Pour tenir compte de la probabilité faible de réalisation simultanée de tous ces événements, la formule standard introduit des corrélations entre ces facteurs de risque et permet ainsi à l'assureur de constater des bénéfices de diversification :



### 8.3 Description de la volatilité modélisée

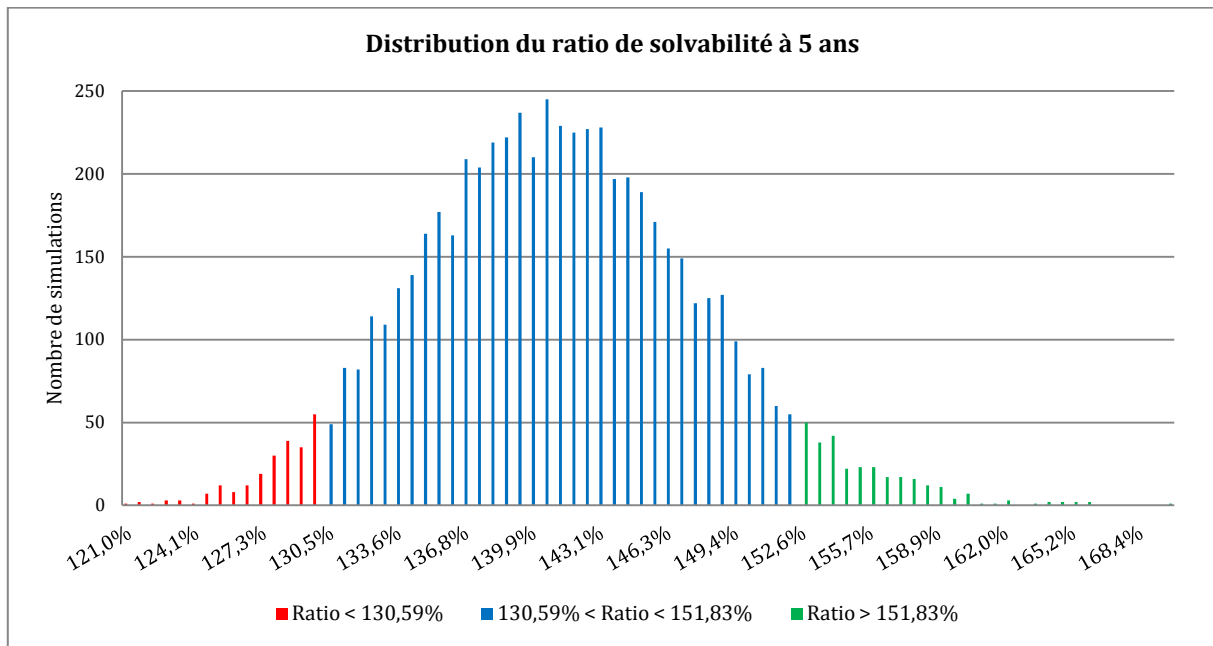
Les 6.000 points correspondants au montant de fonds propres en fonction du BSCR de la vision prospective à 5 ans sont représentés sur le graphique suivant :



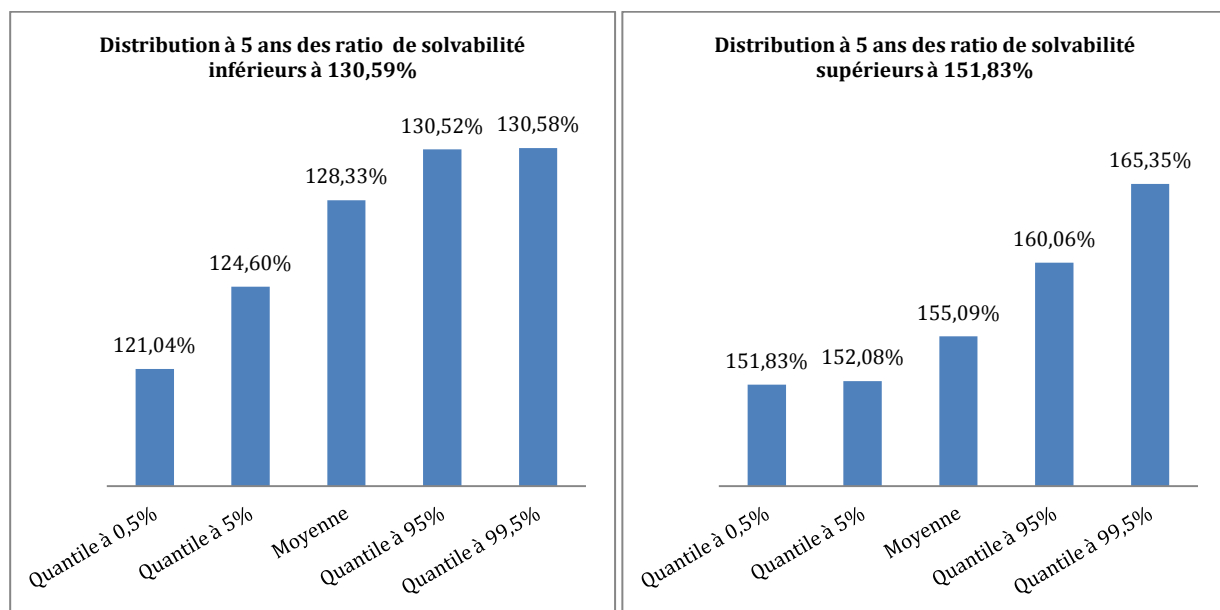
On observe les scenarii pour lesquels le ratio de solvabilité est compris entre 130,59% et 151,83% en bleu, ceux où il est inférieur à 130,59% en rouge et ceux où il est supérieur à 151,83% en vert.

Les valeurs 130,59% et 151,83% représentent respectivement le quantile à 5% et celui à 95% de la distribution à 5 ans du ratio de solvabilité.

En gardant le même code couleur, l'histogramme représentant pour 6.000 simulations la distribution du ratio de solvabilité prospectif à 5 ans est le suivant :

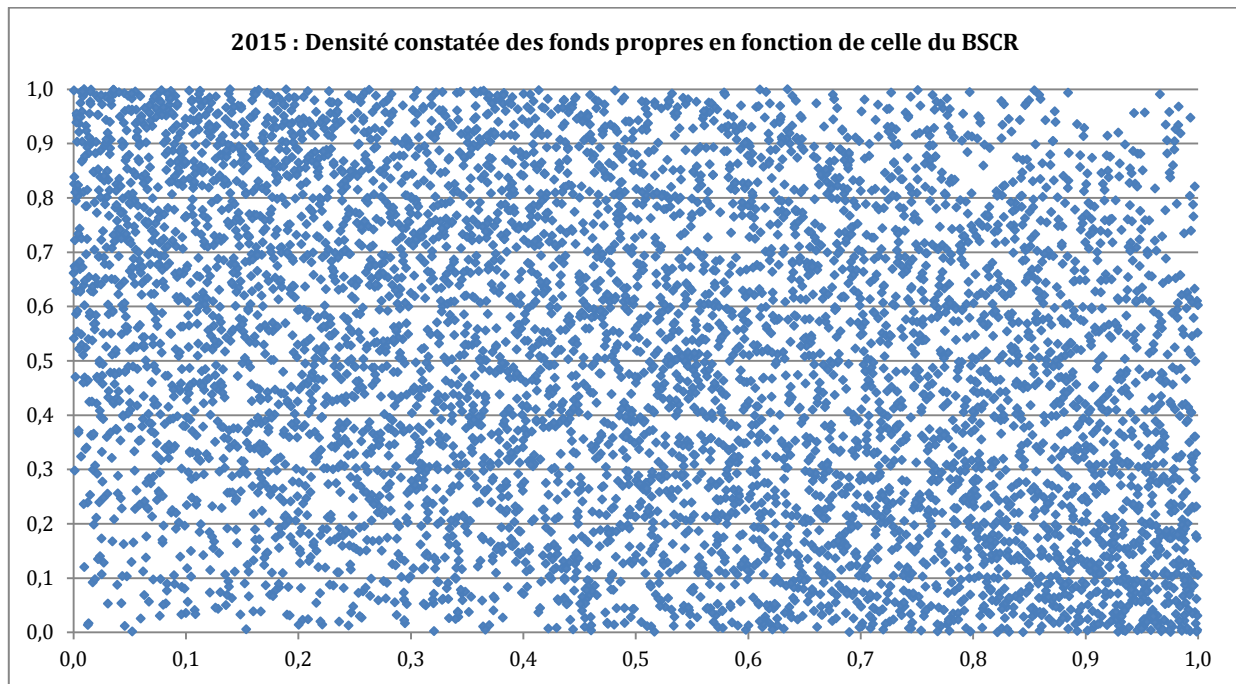


Les quantiles correspondants aux seuils 130,59% et 151,83% sont les suivants :



La densité observée des fonds propres en fonction de celle du BSCR du portefeuille au 31/12/2015 est la suivante :

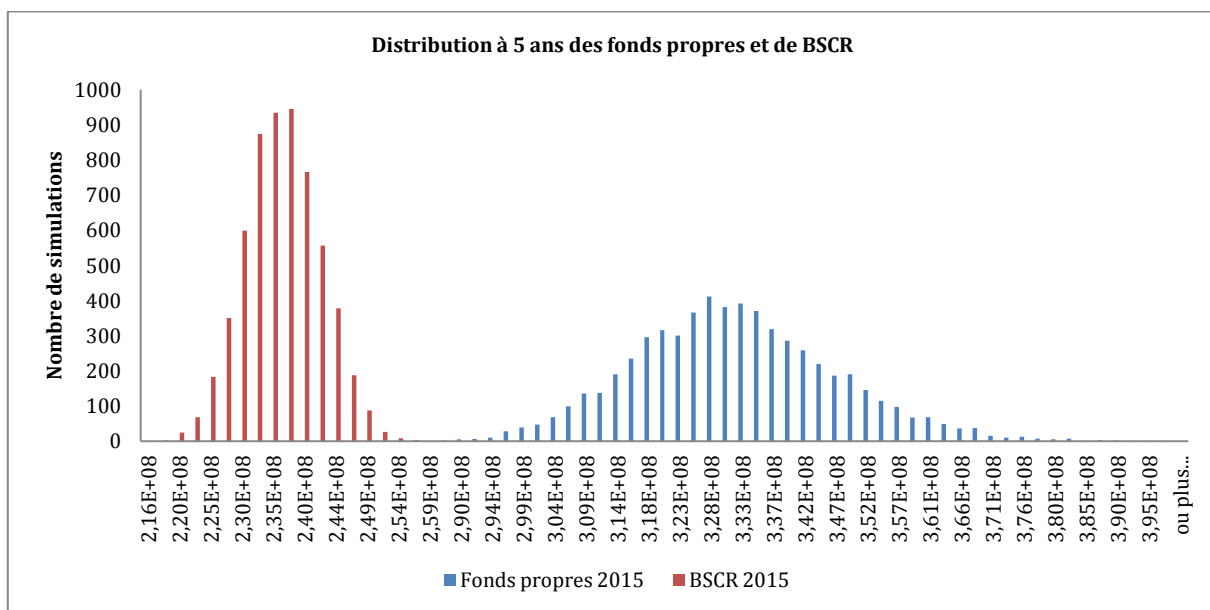




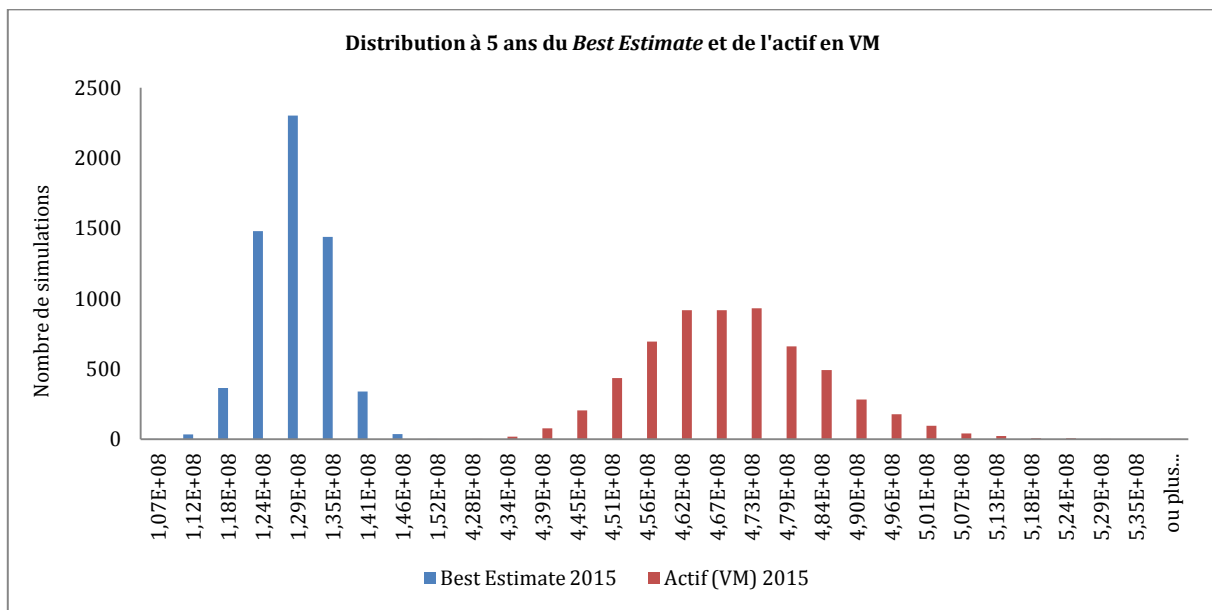
La corrélation linéaire entre les fonds propres et le BSCR est de 29%. Il serait intéressant d'approfondir l'étude de la structure de cette dépendance, qui semble au vu du graphique proche d'une copule de Frank.

#### 8.4 Décomposition de la volatilité du ratio de solvabilité

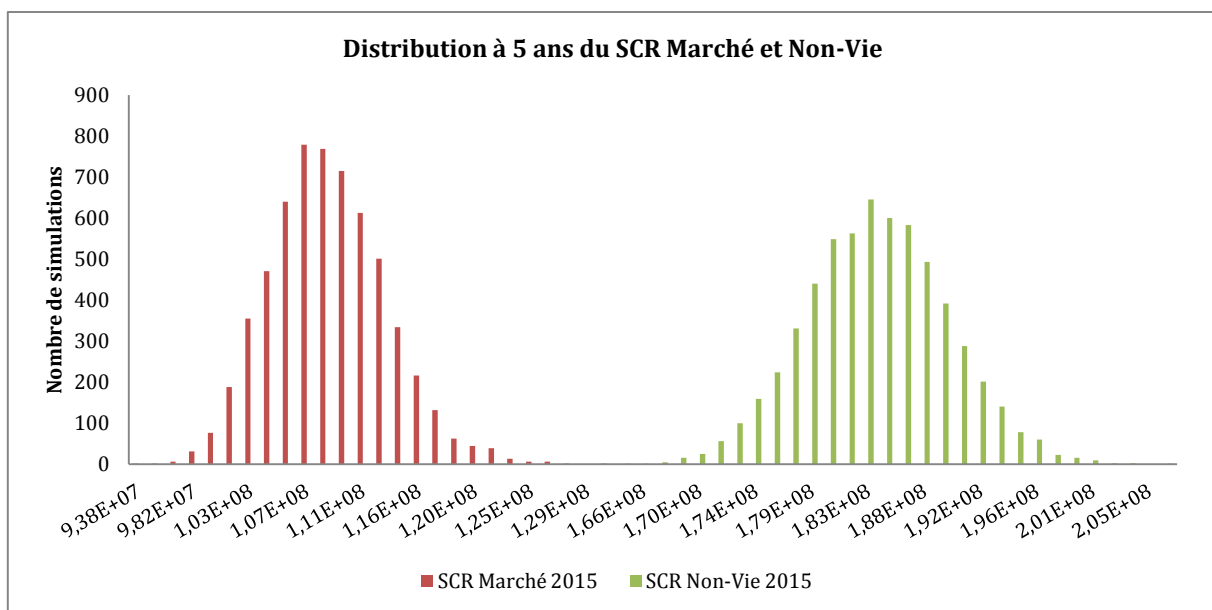
Pour apprécier au mieux la contribution des différents risques à la volatilité du ratio de solvabilité prospectif à 5 ans, il est utile de différencier les éléments le composant. Sa volatilité s'explique par celle des fonds propres et du BSCR, qui présentent à 5 ans la distribution suivante :



La volatilité des fonds propres est plus marquée que celle du BSCR. La volatilité des fonds propres s'explique plus largement par celle de l'actif du bilan que par celle de la *Best Estimate* :

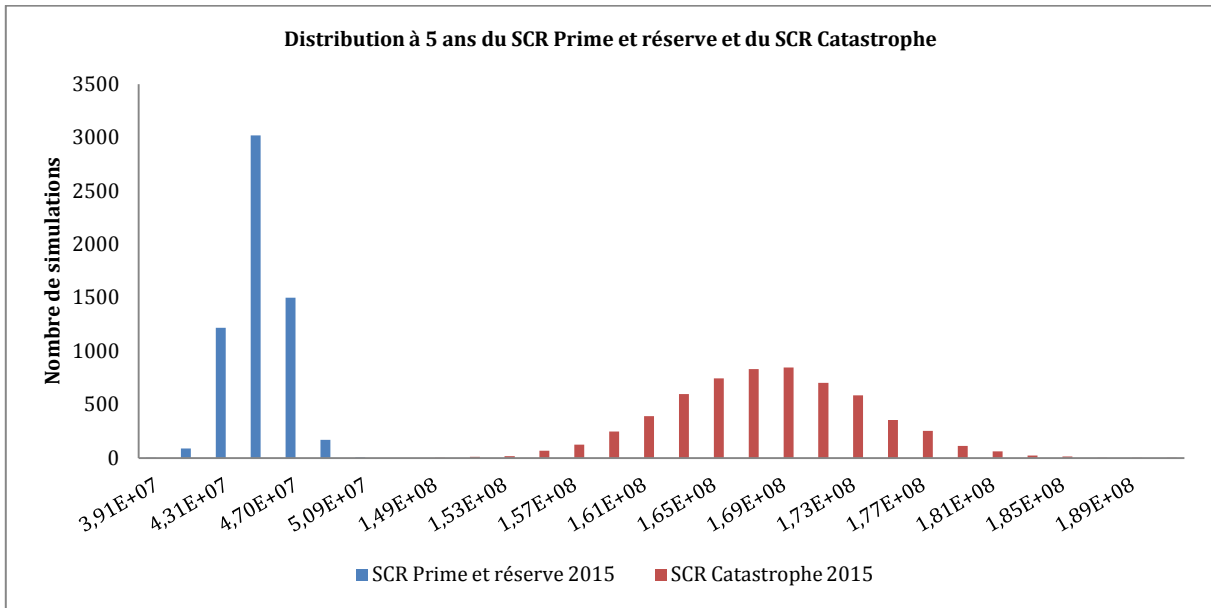


En décomposant le BSCR, il apparaît que le risque le plus important est le risque de souscription Non-Vie :



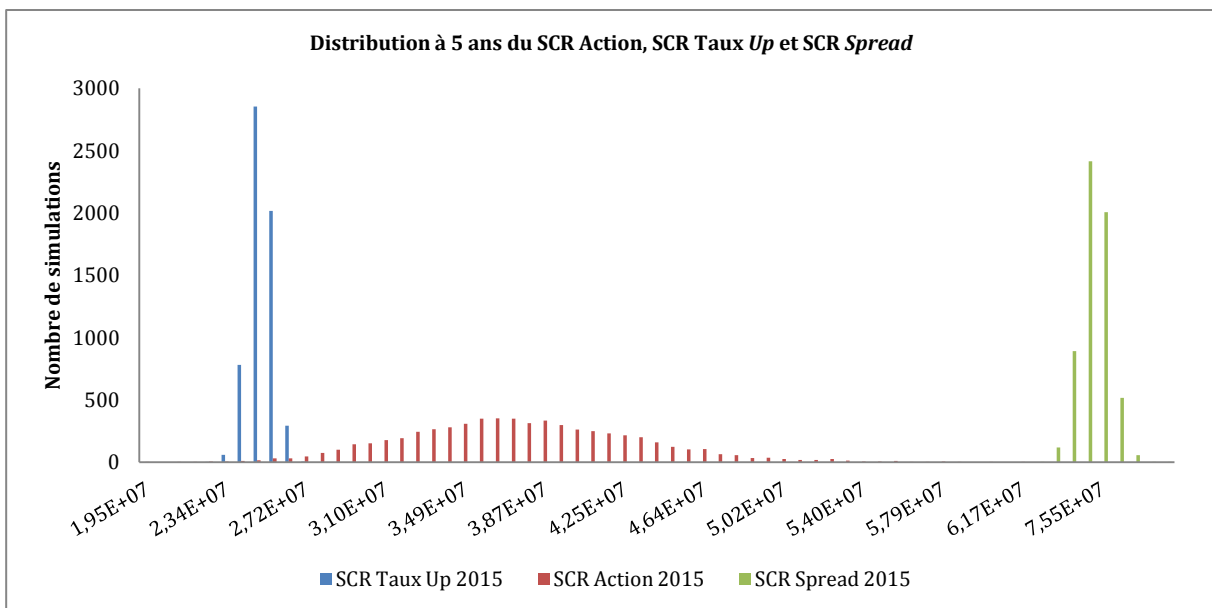
En effet, le risque de souscription est prépondérant pour les organismes IARD. De par sa volatilité légèrement plus élevée que celle du risque de marché, il contribue plus fortement à la volatilité du BSCR dans notre modèle.

Le risque catastrophe induit une volatilité plus élevée que celle du risque de primes et provisions au sein du risque de souscription :



Le risque de rachat est nul dans notre modèle car notre portefeuille ne contient aucun contrat pluri-annuel.

Le risque de marché est principalement lié au risque de *spread* sur obligations privées, à la détention d'actions, et au risque de taux d'intérêt :



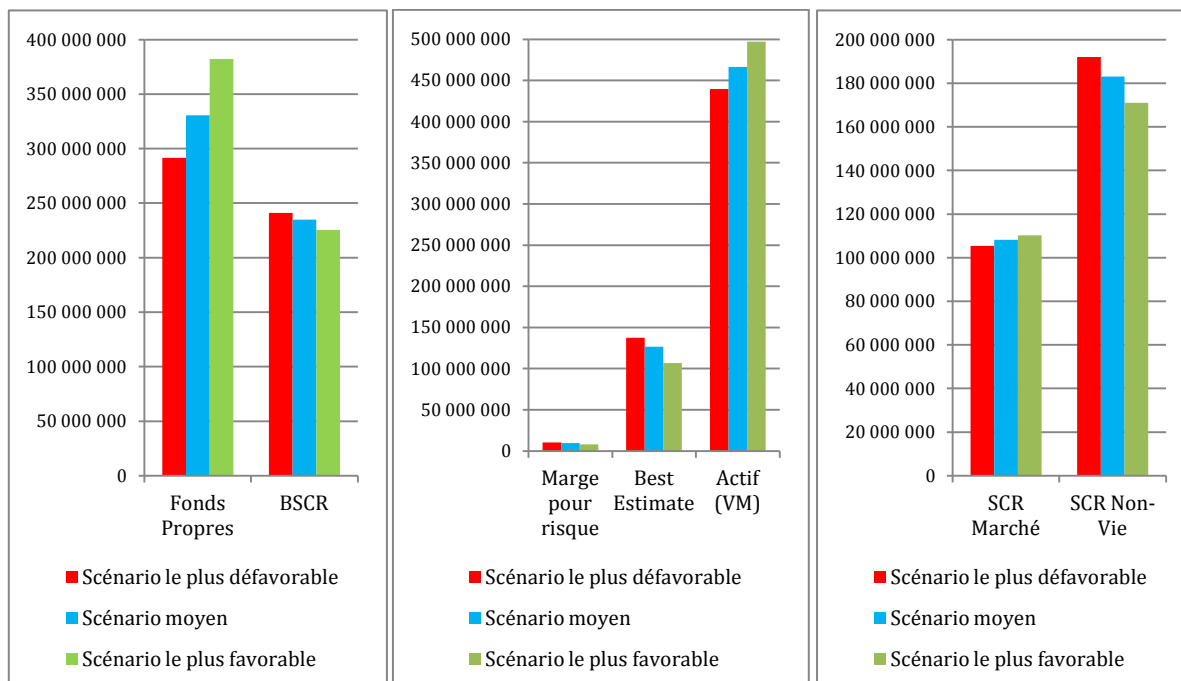
On distingue très nettement sur ce graphique que le plus gros contributeur à la volatilité du SCR Marché est le risque action.

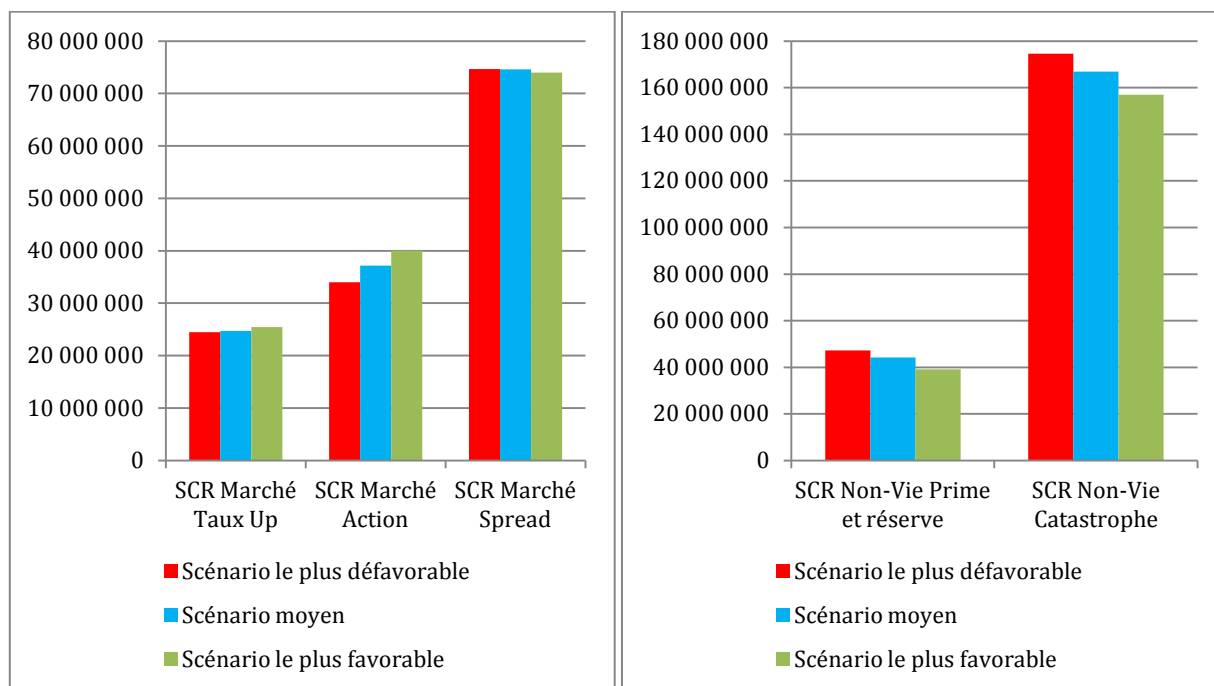
Néanmoins, le risque de crédit n'étant pas modélisé, la volatilité du risque de *spread* est seulement liée dans notre modèle à la valeur de marché des obligations sensibles à l'évolution des taux.

## 8.5 Analyse des scénarii extrêmes

Le tableau suivant présente les deux scénarii les plus extrêmes ainsi que le scénario moyen obtenus à partir des 6.000 simulations pour le portefeuille au 31/12/2015. Le scénario le plus défavorable en terme de solvabilité de l'assureur est celui qui présente le ratio de couverture le plus faible, à 121%. Le scénario le plus favorable est celui dont le ratio est de 170%.

31/12/2015	Scénario le plus défavorable	Scénario moyen	Scénario le plus favorable
Ratio de solvabilité	<b>120,98%</b>	<b>140,84%</b>	<b>169,63%</b>
Fonds Propres	291 547 380	330 571 904	382 411 367
BSCR	240 985 718	234 784 841	225 438 964
SCR Marché	105 372 904	108 142 655	110 174 065
SCR Non-Vie	191 979 089	183 065 073	171 059 221
Marge pour risque	10 417 184	9 532 889	7 978 296
Best Estimate	137 582 417	126 448 355	106 789 818
Actif (VM)	439 546 981	466 553 148	497 179 482
SCR Marché Taux Up	24 503 437	24 729 524	25 450 000
SCR Marché Action	34 009 074	37 204 383	40 052 705
SCR Marché Spread	74 680 924	74 597 939	73 972 402
SCR Marché Illiquidité	547 262	494 999	403 779
SCR Non-Vie Prime et réserve	47 281 178	44 196 778	39 134 289
SCR Non-Vie Catastrophe	174 620 528	166 936 582	157 026 148





Le scénario pour lequel le ratio de couverture prospectif à 5 ans est de 121%, c'est-à-dire le cas le plus défavorable en termes de solvabilité, s'explique principalement par l'évolution des fonds propres.

Le rendement peu élevé du portefeuille, qui s'explique essentiellement par le risque action, associé à un montant de provisions important, implique un niveau de fonds propres insuffisant pour couvrir convenablement le BSCR.

En outre, une sinistralité importante induit une augmentation du SCR de souscription Non-vie et du SCR pour le risque d'illiquidité.

Dans le cas où le ratio de solvabilité à 5 ans est de 170%, le fait que les fonds propres couvrent largement le BSCR s'explique d'une part par une sinistralité peu élevée, ce qui implique des provisions techniques et un risque de souscription peu élevés.

D'autre part, le rendement plus élevé du portefeuille d'actifs induit une hausse de l'actif du bilan en valeur de marché et également une hausse du SCR Marché du fait de l'augmentation de l'exposition de l'assureur aux risques action et de taux d'intérêt.

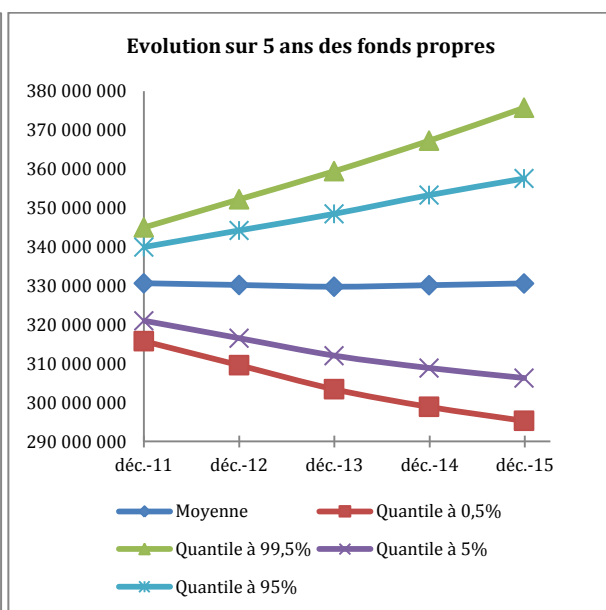
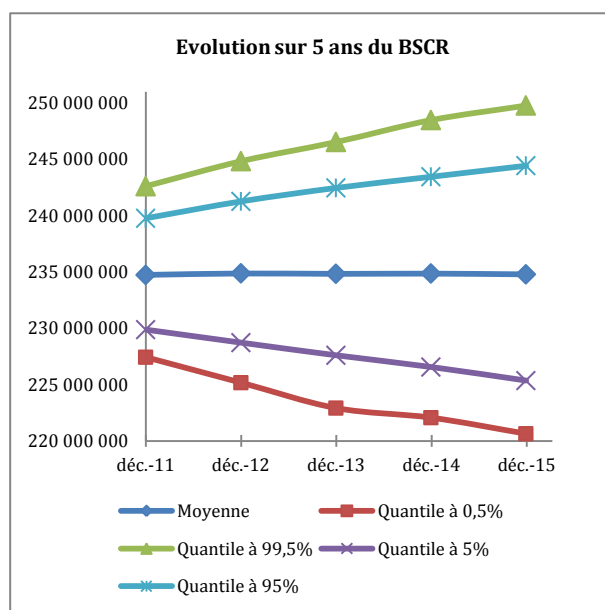
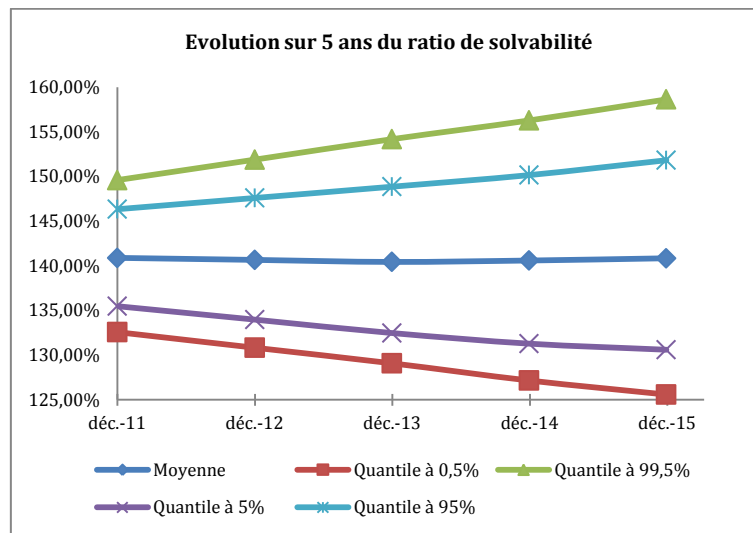
Après l'étude de la volatilité du ratio de couverture prospectif à cinq ans, il convient d'analyser l'évolution future probable de sa volatilité au cours de ces cinq années.



## Chapitre 9 : Analyse de la volatilité du ratio de solvabilité dans le temps

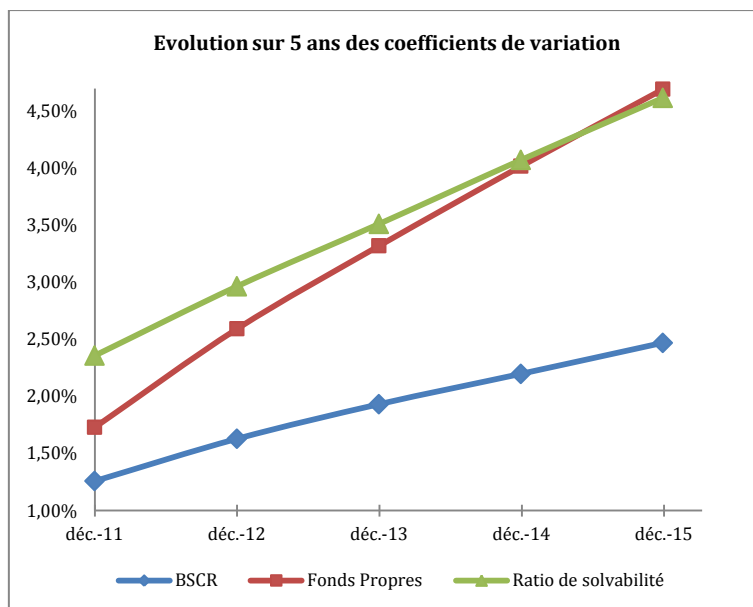
La volatilité du ratio de solvabilité au cours du temps s'explique par celle des deux éléments qui le composent : les fonds propres et le BSCR. Ce chapitre permet d'établir que les risques prépondérants influant sur la volatilité du ratio de couverture dans le temps sont les risques action et de sinistralité. Le risque action est celui qui impacte le plus la volatilité du BSCR et la volatilité de la sinistralité est le plus gros contributeur à la volatilité des provisions techniques et donc des fonds propres.

Rappelons les projections obtenues sur cinq ans à partir de 6.000 simulations pour la moyenne et les quantiles du ratio de solvabilité, du BSCR et des fonds propres :



Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, nous utilisons ici l'écart type relatif ou coefficient de variation qui est une mesure de la dispersion relative : il se calcule comme le rapport entre l'écart-type et la moyenne.

Le graphique suivant présente l'évolution du coefficient de variation du BSCR, des fonds propres et du ratio de solvabilité.

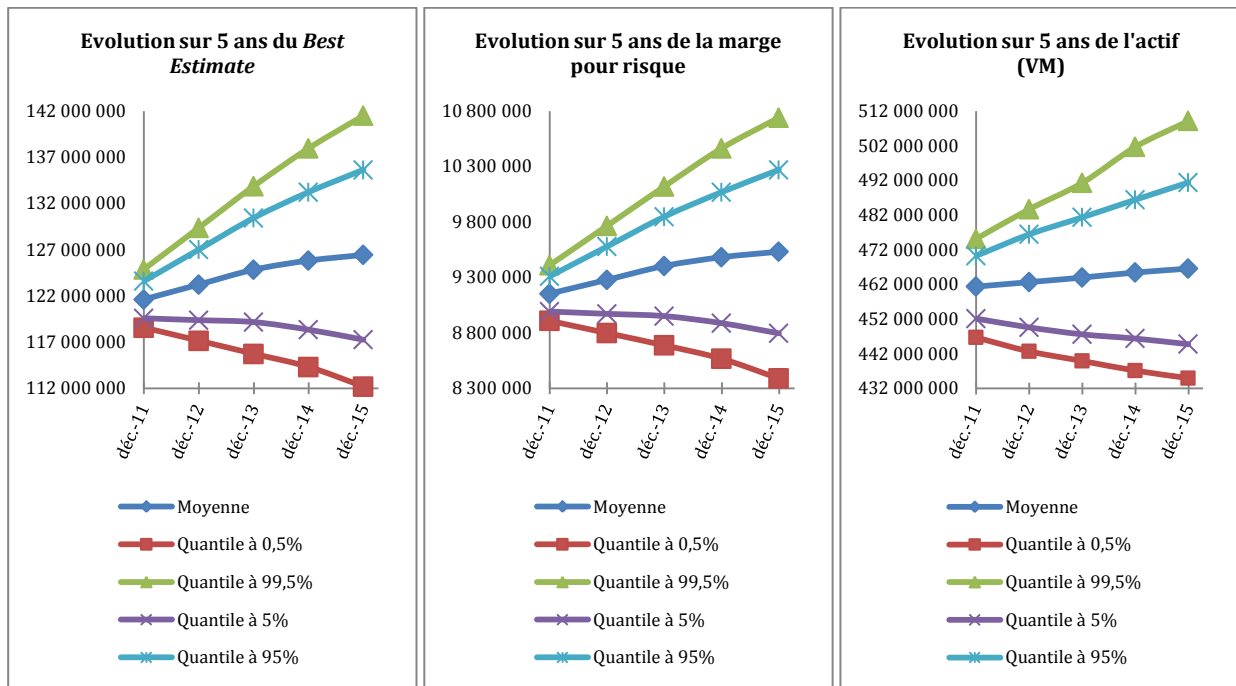


Il apparaît très nettement que la dispersion relative des fonds propres est plus élevée et croît plus vite que celle du BSCR.

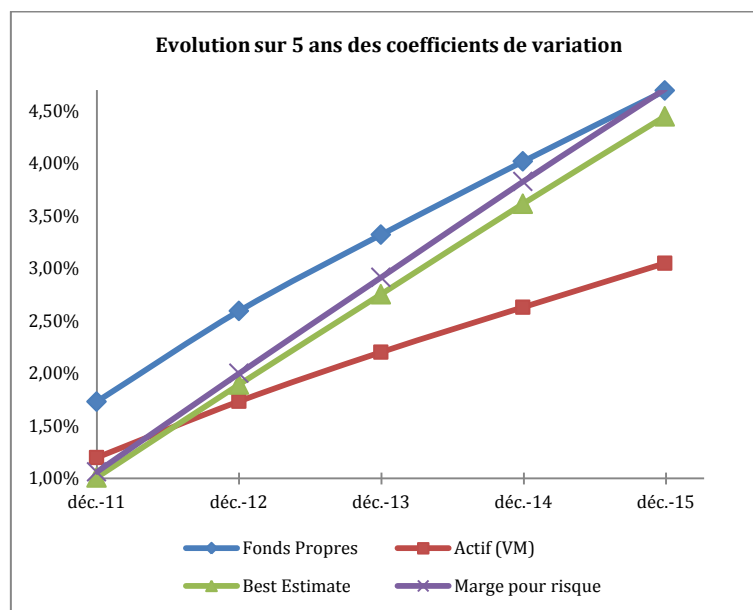
Pour expliquer d'où provient leur dispersion relative, intéressons nous aux éléments intervenant dans le calcul des fonds propres et du BSCR.

Les fonds propres sont égaux à l'actif du bilan à sa valeur de marché diminué du *Best Estimate* et de la marge pour risque. Les graphiques suivants rappellent leurs projections à cinq ans :





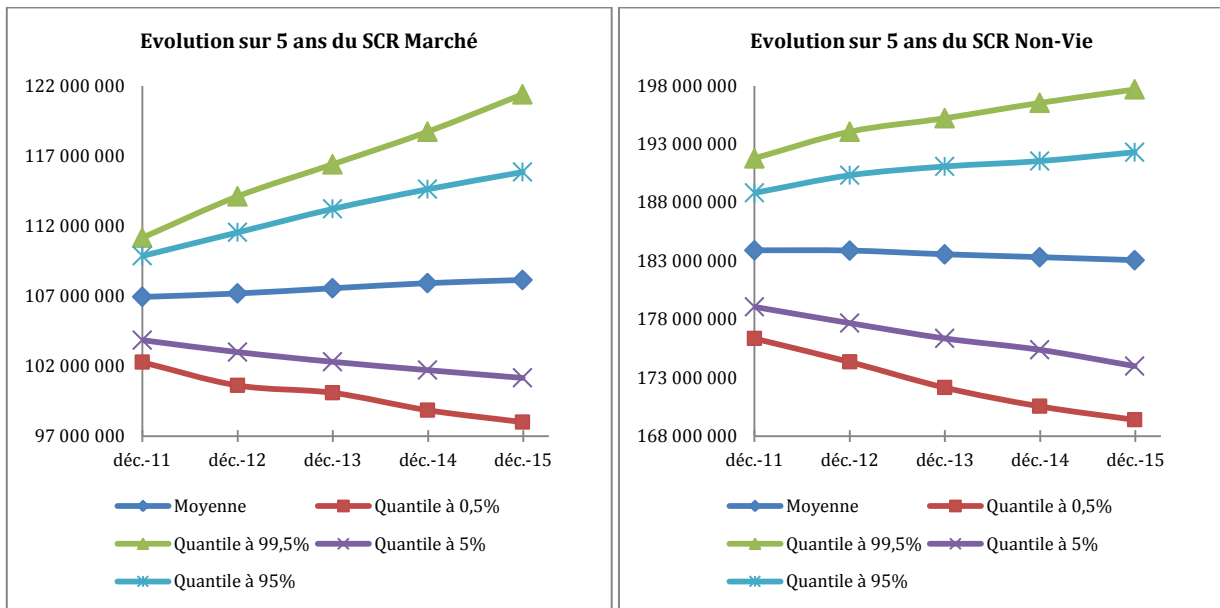
La projection à cinq ans de l'écart-type relatif des fonds propres, de l'actif, du *Best Estimate* et de la marge pour risque est exposée ci-dessous :



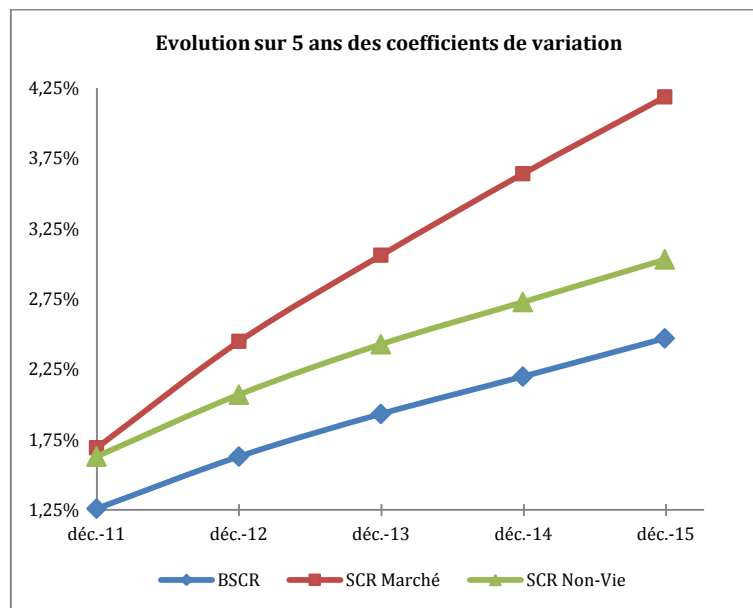
La dispersion relative de la marge pour risque est semblable à celle du *Best Estimate*, car la marge pour risques a été calculée comme étant un pourcentage du *Best Estimate*.

Ce graphique montre que la volatilité des fonds propres est impactée plus fortement par la volatilité du passif que par celle de l'actif. La volatilité des provisions techniques provient de la volatilité de la sinistralité et de celle des taux d'actualisation.

Les projections des exigences de capital pris en compte dans le calcul du BSCR sont rappelées ci-dessous :

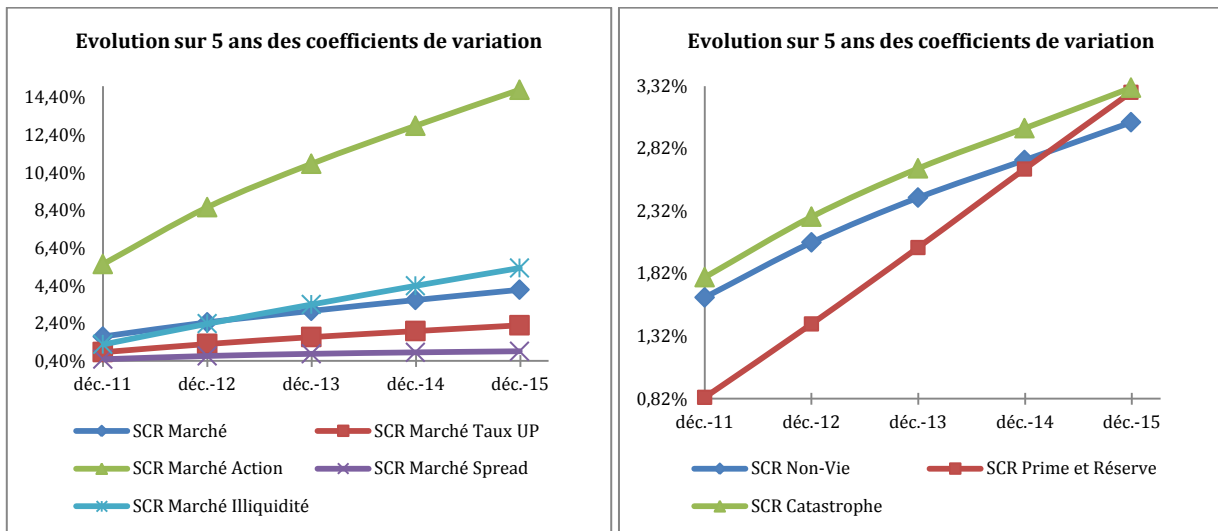


Le graphique suivant représente les coefficients de variation du SCR Marché et du SCR Non-Vie :



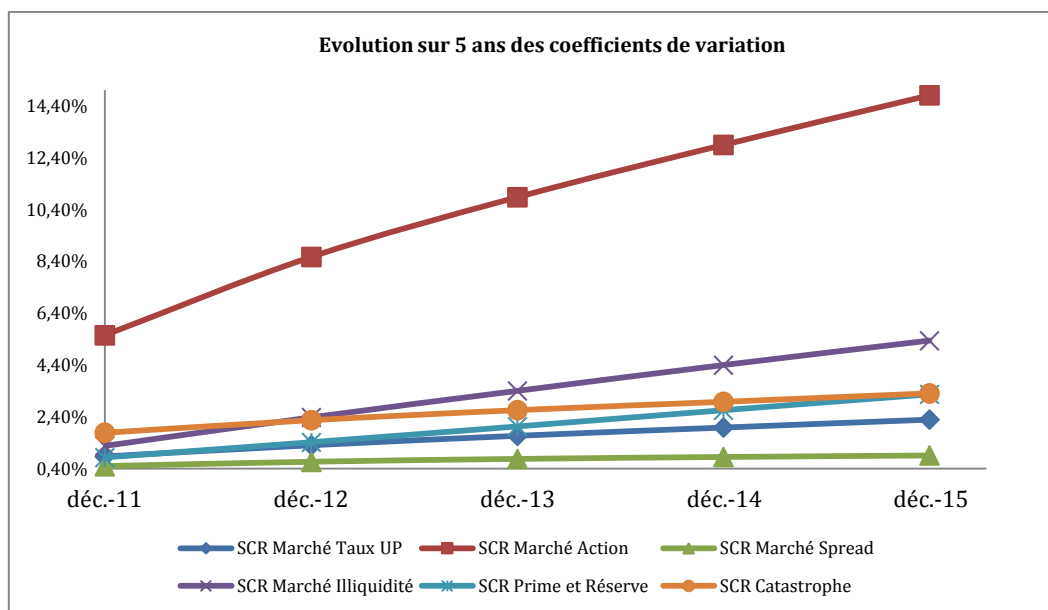
On s'aperçoit que c'est la volatilité du SCR Marché qui impacte le plus fortement celle du BSCR.

Les graphiques qui suivent présentent respectivement la dispersion relative du SCR Marché et du SCR Non-Vie ainsi que celle des éléments les constituant :



Le plus fort contributeur à la volatilité du SCR Marché est celle de l'exigence en capital pour le risque action. Pour le SCR Non-Vie, la dispersion relative du capital requis pour le risque Catastrophe est plus grande que celle du besoin en capital pour le risque de prime et de provision.

Le graphique suivant rassemble les coefficients de variation des différents SCR des risques de marché et de souscription non-vie que nous venons de présenter :



Le contributeur le plus important du modèle à la volatilité du ratio de solvabilité est la volatilité du SCR Marché pour le risque action. Le moins important est la volatilité du SCR Marché pour le risque de *spread*. L'apport minime de la volatilité du risque de *spread* s'explique par le fait que le risque de crédit n'ait pas été modélisé.



## Chapitre 10 : Pilotage prospectif de l'activité par la solvabilité et sensibilités du modèle à trois décisions stratégiques

---

La gestion des risques assurantiels et financiers, portés par l'assureur, nécessite un pilotage prospectif de l'activité.

Les deux principaux leviers de pilotage de l'activité sont la stratégie commerciale et l'allocation stratégique des placements.

La stratégie commerciale établit, pour les différents produits, la tarification ainsi que les objectifs de souscription nouvelle, de taux de résiliation et de rentabilité, qui seront pris en compte dans l'offre commerciale.

L'allocation stratégique des placements permet de limiter les risques financiers, nés de l'inversion du cycle de production, afin de garantir le paiement des prestations aux assurés et les profits futurs de la compagnie.

Le pilotage de ces stratégies est contraint par une mise en œuvre progressive sur plusieurs mois, voire plusieurs années, afin de limiter l'impact sur le comportement des assurés et des marchés financiers. En outre, la stratégie commerciale est fortement contrainte par le positionnement de la compagnie vis-à-vis de la concurrence. La marge de manœuvre de la stratégie ALM est donc plus importante sur l'allocation stratégique des placements.

Dans le cadre de ce mémoire, le pilotage est effectué par la solvabilité grâce au ratio de couverture prospectif.

L'assureur a différents leviers pour augmenter le ratio de solvabilité à 5 ans : il peut soit choisir d'augmenter le niveau des fonds propres, soit diminuer le niveau du SCR ou soit jouer sur ces deux niveaux conjointement.

Pour augmenter les fonds propres, l'assureur peut augmenter son capital et ses résultats.

L'assureur peut augmenter son capital en modifiant sa gestion du haut du bilan, c'est-à-dire par émission d'actions ou de dette.

Il peut augmenter ses résultats en modifiant sa stratégie de placement, afin d'augmenter le résultat financier ou en ajustant sa politique de souscription, afin d'augmenter le résultat technique.

L'assureur peut modifier sa stratégie de placement en changeant son allocation d'actifs ou les lignes d'actifs dans lesquels il investit. Par exemple, s'il avait 20% d'actions et 80% d'obligations et que les conditions de

marché sont très défavorables au rendement des actions, il peut passer à 5% d'actions et 95% d'obligations. Il peut également investir dans des actifs avec des revenus financiers plus importants : des obligations rapportant des coupons plus élevés, des actions avec des dividendes plus élevés, de l'immobilier avec de meilleurs loyers, etc.

Afin d'augmenter le résultat technique, l'assureur peut revoir la tarification, par exemple en augmentant les primes des assurés. Une gestion rigoureuse du périmètre de garantie des contrats peut également améliorer le résultat technique.

Pour diminuer le SCR, l'assureur peut céder des risques en modifiant son programme de réassurance sur ses risques présents en portefeuille. Il peut également diminuer des risques en modifiant sa stratégie de placement (pour diminuer le SCR Marché) ou en modifiant sa stratégie commerciale, en vendant davantage de produit avec un meilleur couple Rendement-SCR ou Rendement-Risque.

Les impacts de trois leviers en amont sur la solvabilité prospective à 5 ans sont étudiés ici :

- Changement de stratégie de placement par modification de l'allocation d'actifs ;
- Changement de gestion du haut de bilan par émission de capital ;
- Changement dans la gestion des sinistres par augmentation tarifaire.

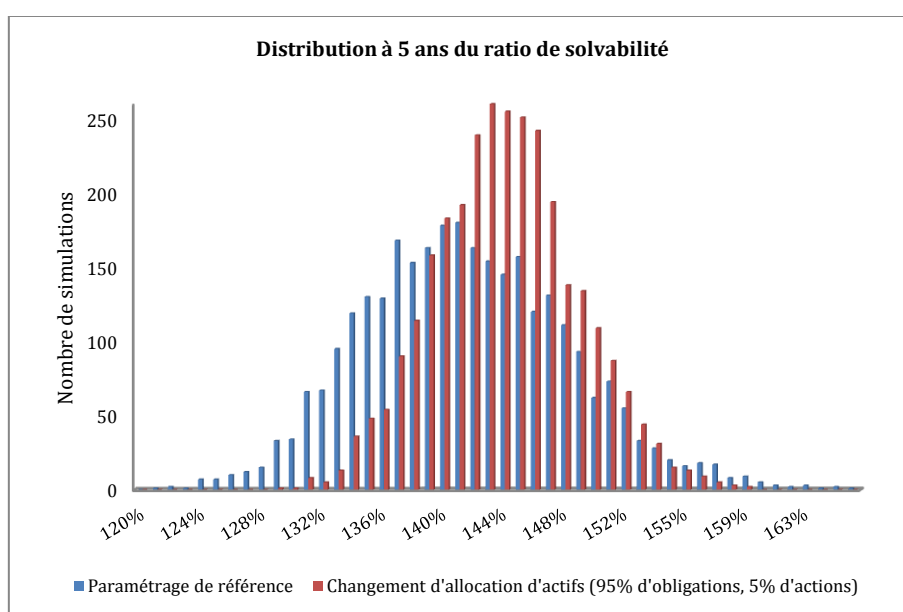
Dans ce chapitre, les projections à 5 ans sont obtenues à partir de 3.000 simulations.

## 10.1 Stratégie d'investissement

L'allocation d'actifs, retenue dans le paramétrage de référence de l'outil de *business plan* prospectif, est de 80% d'obligations risquées et de 20% d'actions.

Afin d'étudier l'impact sur la solvabilité à 5 ans d'un changement de stratégie d'investissement, l'outil est mis en production avec comme paramétrage pour l'allocation d'actifs 95% des placements en obligations et 5% en actions. On augmente donc la part d'obligation de 18,75% et diminue de 75% la part d'actions.

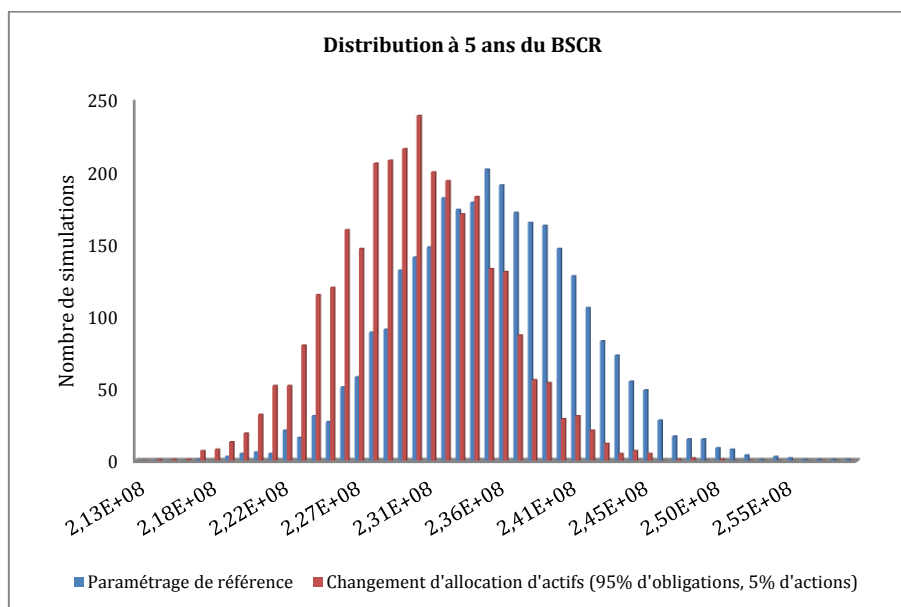
Nous allons voir ci-après qu'en diminuant fortement la part d'actifs les plus risqués, le ratio de solvabilité prospectif à 5 ans augmente en moyenne et sa volatilité diminue :



<b>Ratio de solvabilité 2015</b>	Paramétrage de référence (80% d'obligations, 20% d'actions)	Changement d'allocation d'actifs (95% d'obligations, 5% d'actions)	Variation
Moyenne	140,75%	143,21%	1,74%
Quantile à 5%	130,44%	135,59%	3,95%
Quantile à 95%	152,02%	151,03%	-0,65%
Ecart-type	6,70%	4,65%	-30,51%

L'augmentation du ratio de solvabilité prospectif à 5 ans due à la diminution de la part d'actions dans le portefeuille s'illustre par le déplacement vers la droite de la distribution.

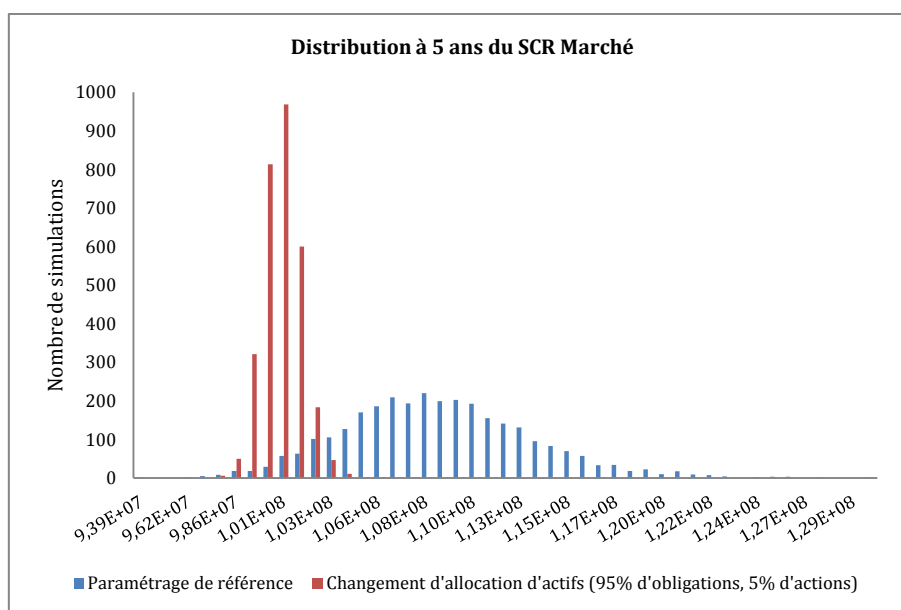
Cette augmentation du ratio de couverture s'explique principalement par la baisse du BSCR :



BSCR 2015	Paramétrage de référence (80% d'obligations, 20% d'actions)	Changement d'allocation d'actifs (95% d'obligations, 5% d'actions)	Variation
Moyenne	234 943 318	229 887 431	-2,15%
Quantile à 5%	225 722 060	221 557 630	-1,84%
Quantile à 95%	244 496 191	238 175 387	-2,59%
Ecart-type	5 771 329	5 021 052	-13,00%

La baisse du BSCR s'explique uniquement par celle du SCR Marché. En effet, le changement d'allocation d'actifs n'a aucun impact sur la projection de la sinistralité et donc des prestations, et par conséquent, il ne modifie pas les projections du SCR Non-vie et du SCR Marché pour le risque d'illiquidité.

On observe que le SCR Marché diminue en moyenne et en volatilité lorsqu'on privilégie l'investissement en obligations au détriment des actions :





<b>SCR Marché 2015</b>	Paramétrage de référence (80% d'obligations, 20% d'actions)	Changement d'allocation d'actifs (95% d'obligations, 5% d'actions)	Variation
Moyenne	108 198 160	100 410 325	-7,20%
Quantile à 5%	101 093 191	98 965 318	-2,10%
Quantile à 95%	116 013 921	101 971 964	-12,10%
Ecart-type	4 600 807	934 445	-79,69%

Variation en 2015 due au changement d'allocation d'actifs par rapport au paramétrage de référence	<b>SCR Marché Taux UP</b>	<b>SCR Marché Action</b>	<b>SCR Marché Spread</b>
Moyenne	19,86%	-74,92%	19,24%
Quantile à 5%	19,86%	-74,91%	19,24%
Quantile à 95%	19,85%	-74,93%	19,24%
Ecart-type	19,86%	-74,96%	19,07%

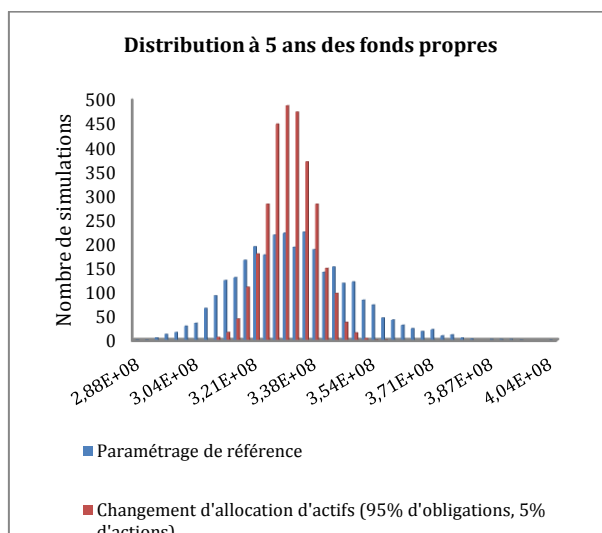
En augmentant la part investie en obligations au détriment des actions, on voit que l'exigence en capital pour le risque de taux d'intérêt à la hausse augmente, autrement dit on augmente l'exposition de la société au risque de hausse des taux.

On constate que plus on investit en obligations, plus l'exigence de capital pour le risque de *spread* est importante, ce qui traduit le fait que le risque de *spread* affecte les obligations.

Concernant le risque action, on voit que le fait de réduire l'investissement en actions au profit de la partie obligataire entraîne naturellement une baisse de l'exigence en capital au titre de ce risque.

Le SCR de marché retenu est à chaque fois celui correspondant au risque de hausse des taux. Ceci confirme le fait que la société est plus exposée à la hausse qu'à la baisse des taux.

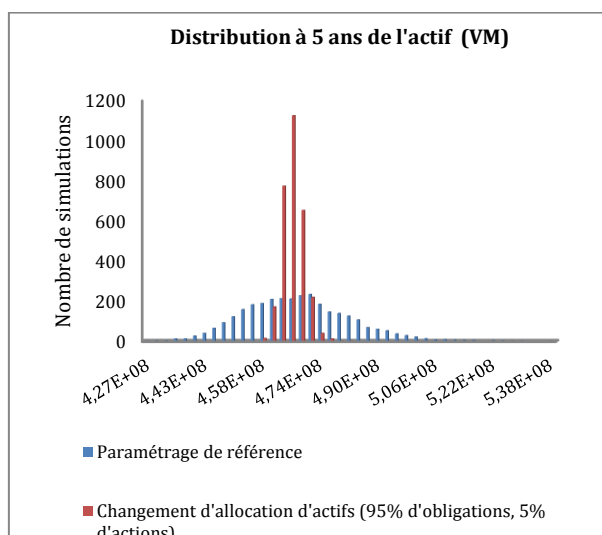
L'augmentation moyenne du ratio de solvabilité prospectif à 5 ans due à la diminution de la part d'actions dans le portefeuille s'explique également par une légère baisse en moyenne des fonds propres:



<b>Fonds propres 2015</b>	Paramétrage de référence (80% d'obligations, 20% d'actions)	Changement d'allocation d'actifs (95% d'obligations, 5% d'actions)	Variation
Moyenne	330 583 928	329 028 358	-0,47%
Quantile à 5%	306 758 533	317 830 570	3,61%
Quantile à 95%	358 509 377	340 442 432	-5,04%
Ecart-type	15 811 340	6 769 834	-57,18%

Avec le changement d'allocation stratégique, la volatilité des fonds propres diminue fortement.

La diminution moyenne des fonds propres, qui est moins importante que celle du BSCR, est induite par la baisse de rendement moyen du portefeuille :



<b>Actif (VM) 2015</b>	Paramétrage de référence (80% d'obligations, 20% d'actions)	Changement d'allocation d'actifs (95% d'obligations, 5% d'actions)	Variation
Moyenne	466 705 015	465 149 445	-0,33%
Quantile à 5%	444 967 426	460 822 403	3,56%
Quantile à 95%	491 986 327	470 112 711	-4,45%
Ecart-type	14 479 670	2 844 907	-80,35%

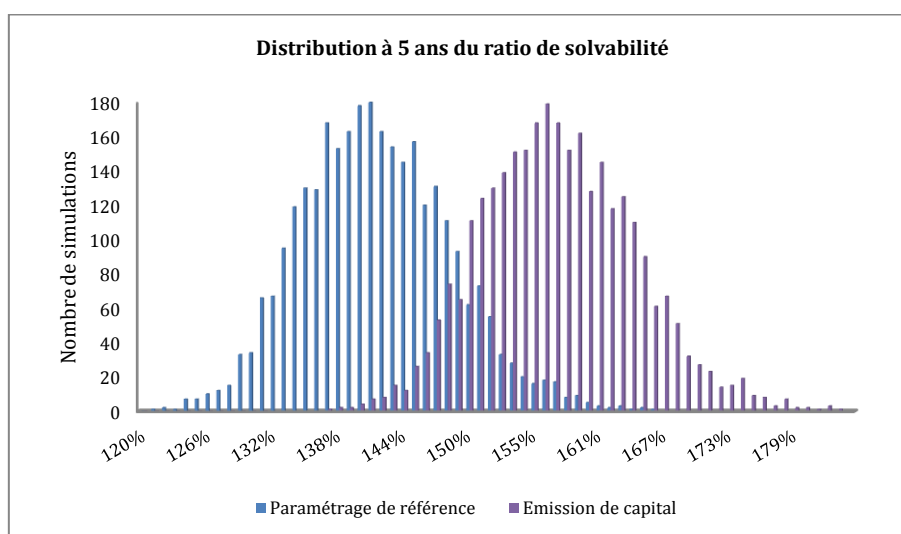
La diminution de la part d'actions dans le portefeuille impacte à la baisse la volatilité de l'actif du bilan en valeur de marché.

Le changement d'allocation d'actifs n'ayant aucun impact sur la projection de la sinistralité et par conséquent, sur les projections des prestations, il ne modifie pas les projections du *Best Estimate* et de la marge pour risque.

## 10.2 Gestion du haut de bilan

Le montant initial d'obligations et d'actions, retenu dans le paramétrage de référence de l'outil de *business plan* prospectif, est de 460.000.000 €. Afin d'étudier l'impact sur la solvabilité à 5 ans d'un changement de gestion du haut de bilan par émission de capital de 50.000.000 €, l'outil est mis en production avec comme paramétrage pour le montant initial de placements 510.000.000 €. Cela signifie que les fonds propres initiaux augmentent de 15%.

Nous allons voir ci-après qu'en augmentant initialement le montant investi en actions et obligations, le ratio de solvabilité prospectif augmente en moyenne à 5 ans :

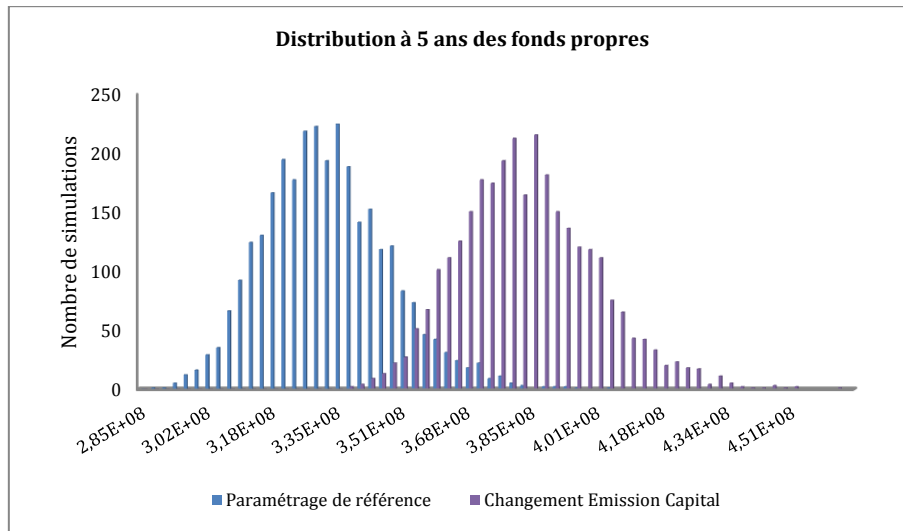


Ratio de solvabilité 2015	Paramétrage de référence	Emission de capital	Variation
Moyenne	140,75%	157,03%	11,57%
Quantile à 5%	130,44%	146,39%	12,23%
Quantile à 95%	152,02%	168,78%	11,03%
Ecart-type	6,70%	6,90%	3,04%

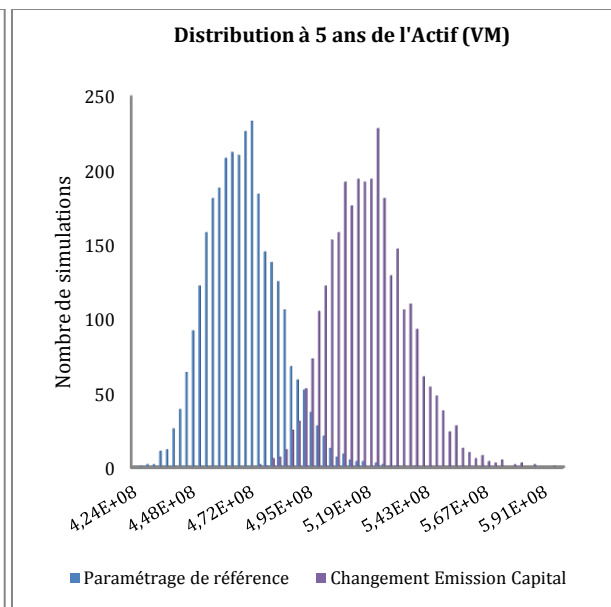
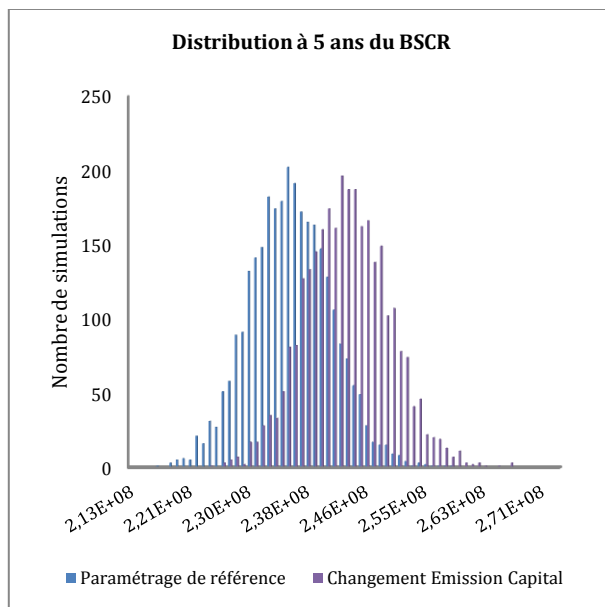
La distribution du ratio de couverture pour 2015 se déplace vers la droite et l'émission de capital n'impacte presque pas la volatilité du ratio de couverture.

La hausse en moyenne du ratio de solvabilité due à l'émission de capital est plus élevée que celle due au changement d'allocation d'actifs.

Cette augmentation du ratio de couverture s'explique principalement par la hausse des fonds propres :



Fonds propres 2015	Paramétrage de référence	Emission de capital	Variation
Moyenne	330 583 928	381 224 793	15,32%
Quantile à 5%	306 758 533	355 387 370	15,85%
Quantile à 95%	358 509 377	411 832 531	14,87%
Ecart-type	15 811 340	17 273 628	9,25%

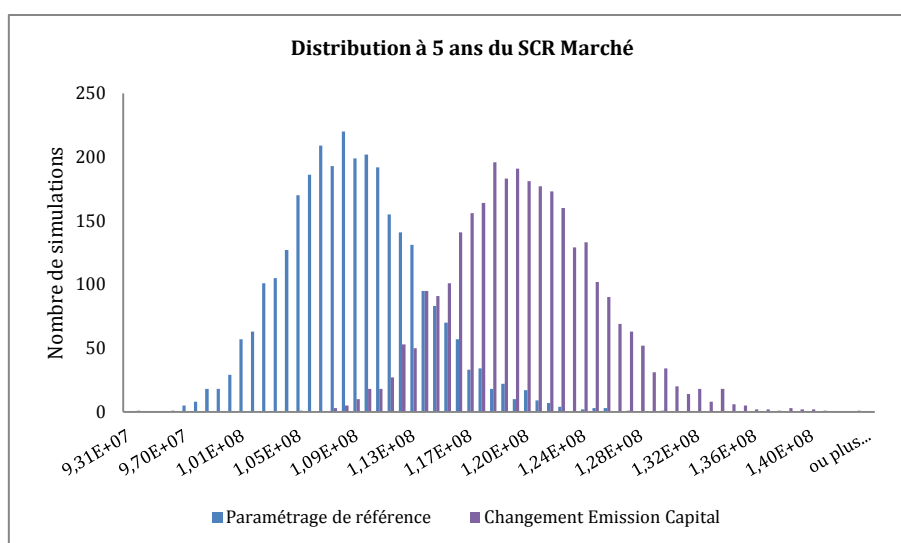


<b>BSCR 2015</b>	Paramétrage de référence	Emission de capital	Variation
Moyenne	234 943 318	242 833 090	3,36%
Quantile à 5%	225 722 060	233 358 404	3,38%
Quantile à 95%	244 496 191	252 687 237	3,35%
Ecart-type	5 771 329	5 953 914	3,16%

<b>Actif (VM) 2015</b>	Paramétrage de référence	Emission de capital	Variation
Moyenne	466 705 015	517 345 881	10,85%
Quantile à 5%	444 967 426	493 247 966	10,85%
Quantile à 95%	491 986 327	545 372 415	10,85%
Ecart-type	14 479 670	16 052 539	10,86%

L'augmentation des fonds propres est uniquement due à une augmentation de l'actif du bilan en valeur de marché. En effet, l'émission de capital n'a aucun impact sur la projection des prestations, et ne modifie donc pas les projections du *Best Estimate* et de la marge pour risque.

La hausse du BSCR s'explique uniquement par celle du SCR Marché. En effet, le changement de gestion du haut de bilan n'a aucun impact sur la projection de la sinistralité, et par conséquent, il ne modifie pas les projections du SCR Non-vie et du SCR Marché Illiquidité.



<b>SCR Marché 2015</b>	Paramétrage de référence	Emission de capital	Variation
Moyenne	108 198 160	119 977 803	10,89%
Quantile à 5%	101 093 191	112 103 187	10,89%
Quantile à 95%	116 013 921	128 639 385	10,88%
Ecart-type	4 600 807	5 099 352	10,84%

L'augmentation du SCR Marché s'explique par la hausse de l'exigence de capital pour le risque de taux à la hausse, le risque action et le risque de *spread* :

Variation en 2015 due au changement d'allocation d'actifs par rapport au paramétrage de référence	SCR Marché Taux <i>UP</i>	SCR Marché Action	SCR Marché <i>Spread</i>
Moyenne	11,17%	10,86%	10,85%
Quantile à 5%	11,17%	10,85%	10,85%
Quantile à 95%	11,18%	10,86%	10,85%
Ecart-type	11,18%	10,86%	10,86%

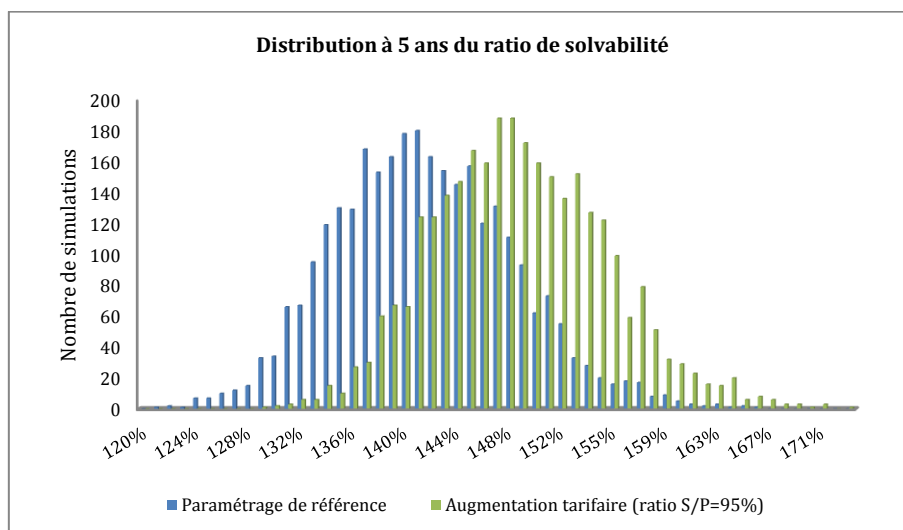
L'émission de capital conduit à une augmentation des investissements en obligations et en actions. Le fait d'augmenter l'investissement en actions entraîne naturellement une hausse de l'exigence en capital requis pour le risque action. De même, en augmentant les investissements en obligations, on augmente l'exposition de l'assureur au risque de hausse des taux et de *spread*.

L'augmentation de 15% des fonds propres initiaux induit une augmentation de 11,57% en moyenne du ratio de solvabilité à 5 ans. Cela s'explique par la consommation en capital des actifs libres en représentation des fonds propres.

### 10.3 Stratégie commerciale

Dans le paramétrage de référence de l'outil de *business plan* prospectif, le ratio S/P est fixé à 99,9%. Afin d'analyser l'impact d'une hausse tarifaire sur la solvabilité prospective à 5 ans, l'outil de projection est lancé avec le paramètre de ratio S/P à 95%, sous l'hypothèse simplificatrice que le nombre de contrats reste le même pour chaque garantie et ce tout au long des 5 années de projection. Cela signifie que le montant des primes augmente de 5%.

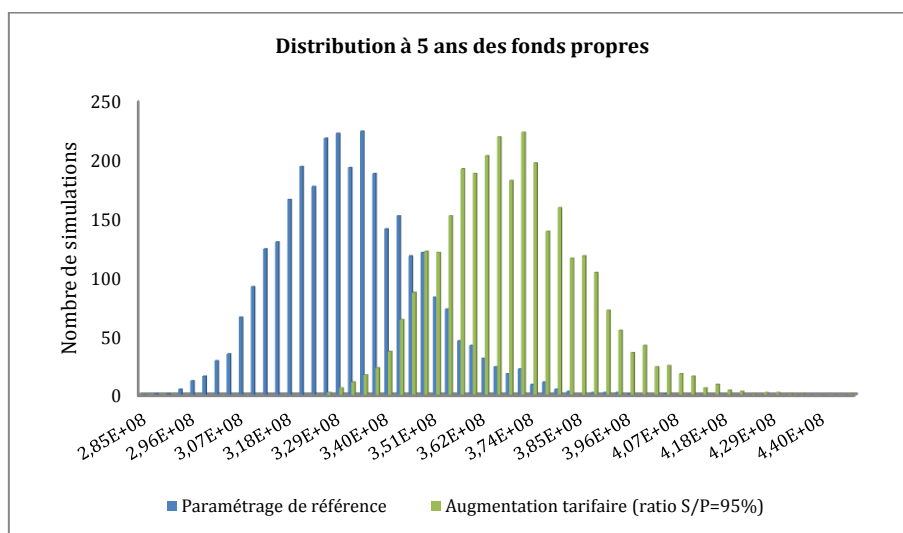
Sous les hypothèses simplificatrices du modèle, une hausse tarifaire entraîne une hausse du ratio de solvabilité prospectif à 5 ans en moyenne :



Ratio de solvabilité 2015	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	140,75%	147,85%	5,04%
Quantile à 5%	130,44%	137,80%	5,65%
Quantile à 95%	152,02%	158,94%	4,56%
Ecart-type	6,70%	6,52%	-2,65%

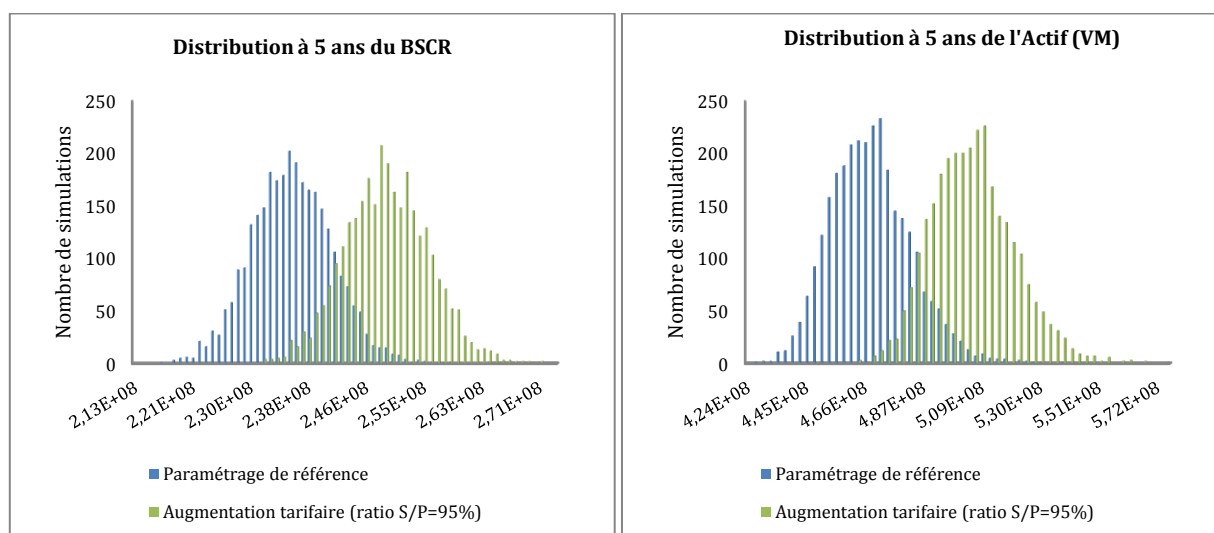
Comme pour l'émission de capital, la hausse tarifaire n'impacte pratiquement pas la volatilité du ratio de solvabilité prospectif.

L'augmentation du ratio de couverture moyen s'explique principalement par la hausse des fonds propres :



Fonds propres 2015	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	330 583 928	367 156 167	11,06%
Quantile à 5%	306 758 533	342 639 471	11,70%
Quantile à 95%	358 509 377	395 818 424	10,41%
Ecart-type	15 811 340	16 179 138	2,33%

En effet, l'augmentation des tarifs permet d'augmenter le résultat et donc les fonds propres.



<b>BSCR 2015</b>	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	234 943 318	248 411 093	5,73%
Quantile à 5%	225 722 060	238 745 794	5,77%
Quantile à 95%	244 496 191	258 454 883	5,71%
Ecart-type	5 771 329	6 069 350	5,16%

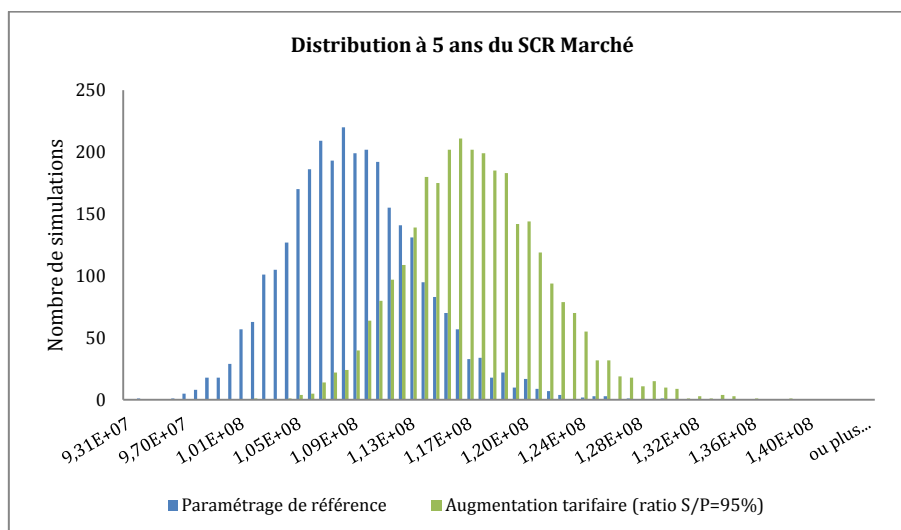
<b>Actif (VM) 2015</b>	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	466 705 015	503 277 254	7,84%
Quantile à 5%	444 967 426	480 702 586	8,03%
Quantile à 95%	491 986 327	529 417 951	7,61%
Ecart-type	14 479 670	14 967 873	3,37%

L'augmentation des fonds propres est due à une augmentation de l'actif du bilan en valeur de marché, car la baisse du ratio S/P n'impacte pas la projection des prestations, et ne modifie donc pas les projections du *Best Estimate* et de la marge pour risque. Dans notre modèle, le ratio S/P intervient uniquement dans le calcul des primes.

La hausse du BSCR s'explique par celle du SCR Marché et du SCR Non-Vie, au travers de l'augmentation des placements par le résultat et l'augmentation de l'assiette des primes rentrant dans le calcul du SCR Non-Vie.

L'augmentation du SCR Marché s'explique par la hausse de l'exigence de capital pour le risque de taux à la hausse, le risque action et le risque de *spread* :



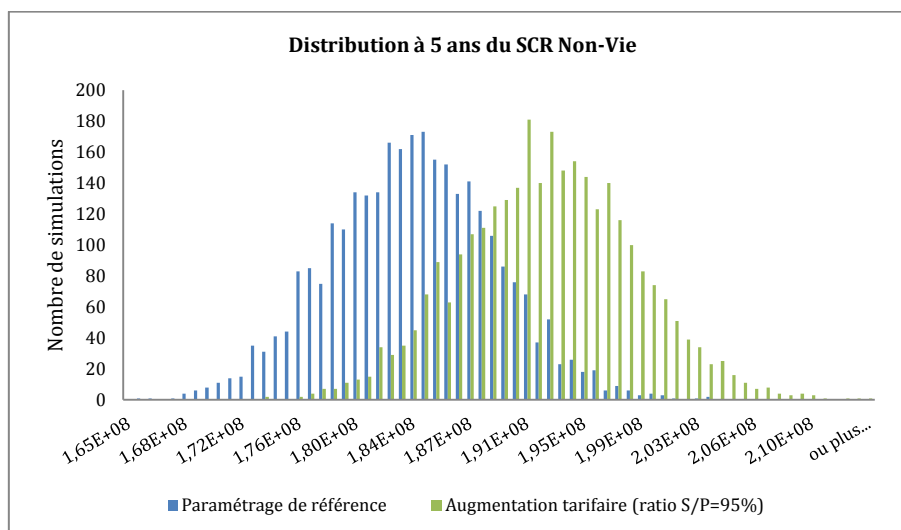


SCR Marché 2015	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	108 198 160	116 571 370	7,74%
Quantile à 5%	101 093 191	109 252 197	8,07%
Quantile à 95%	116 013 921	124 642 764	7,44%
Ecart-type	4 600 807	4 732 519	2,86%

Variation en 2015 due au changement tarifaire par rapport au paramétrage de référence	SCR Marché Taux UP	SCR Marché Action	SCR Marché Spread
Moyenne	9,19%	6,40%	8,22%
Quantile à 5%	9,25%	7,25%	8,23%
Quantile à 95%	9,14%	5,74%	8,18%
Ecart-type	8,68%	2,96%	6,41%

Le SCR marché pour le risque d'illiquidité n'est pas impacté par le changement de tarification car son calcul ne fait pas intervenir les projections de primes.

L'augmentation du SCR Non-vie s'explique par la hausse de l'exigence en capital pour le risque de prime et réserve et pour le risque catastrophe :



<b>SCR Non-Vie 2015</b>	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	183 200 763	192 102 242	4,86%
Quantile à 5%	174 190 095	182 636 134	4,85%
Quantile à 95%	192 244 303	201 600 448	4,87%
Ecart-type	5 490 440	5 773 458	5,15%

<b>SCR Prime et Réserve 2015</b>	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	44 237 517	45 347 349	2,51%
Quantile à 5%	41 879 319	42 967 805	2,60%
Quantile à 95%	46 600 057	47 729 078	2,42%
Ecart-type	1 449 811	1 465 931	1,11%

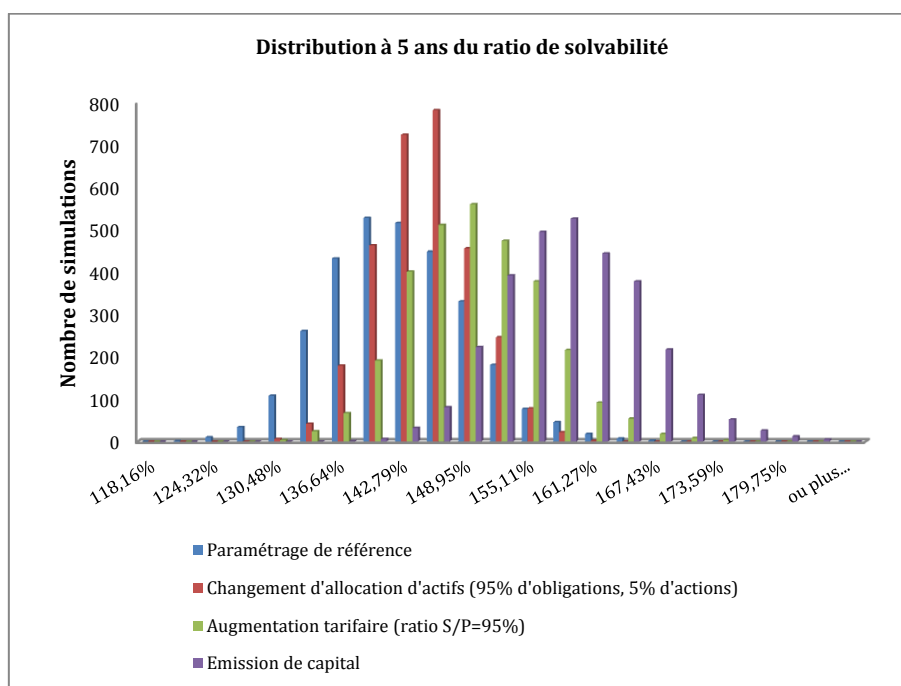
<b>SCR Catastrophe 2015</b>	Paramétrage de référence	Hausse tarifaire	Variation
Moyenne	167 056 699	175 673 307	5,16%
Quantile à 5%	158 252 994	166 415 517	5,16%
Quantile à 95%	175 959 731	185 035 549	5,16%
Ecart-type	5 448 979	5 730 032	5,16%

Pour rappel, le risque de rachat n'est pas modélisé dans le cas de la hausse tarifaire car on a supposé que le nombre de contrats est constant durant toute la durée de la projection. Cette hypothèse de non rachat à la suite de l'augmentation des tarifs est une hypothèse simplificatrice forte et constitue une des limites du modèle.

En moyenne, une augmentation de 5% des primes permet d'augmenter, en 5 ans, les fonds propres de 11% et seulement de 5% le ratio de solvabilité. En effet, l'augmentation des fonds propres est en partie consommée par l'augmentation du SCR Marché et du SCR Non-Vie.

## 10.4 Conclusion du pilotage de l'activité par la solvabilité

Le graphique suivant montre la distribution du ratio de solvabilité prospectif pour l'année 2015, telle qu'elle résulte des quatre paramétrages présentés précédemment :



Ces stratégies ont des impacts plus ou moins linéaires à la fois sur le niveau du ratio de solvabilité et sur sa volatilité :

	Paramétrage de référence	Changement de l'allocation d'actifs : baisse de l'allocation action de 20% à 5%	Emission de capital : augmentation de 15% du capital	Stratégie commerciale : augmentation de 5% des tarifs
Volatilité du ratio de solvabilité (écart-type)	6,70%	4,65%	6,90%	6,52%
Ratio de solvabilité (moyenne)	140,75%	143,21%	157,03%	147,85%
Fonds propres (moyenne)	330 583 928	329 028 358	381 224 793	367 156 167
SCR Marché (moyenne)	108 198 160	100 410 325	119 977 803	116 571 370
SCR Non-Vie (moyenne)	183 200 763	183 200 763	183 200 763	192 102 242

Ces études de cas montrent la nécessité de mettre en place une vision prospective du pilotage de l'activité à la fois sur le bilan et le SCR.



---

## CONCLUSION

---

L'outil de *business plan* prospectif construit pour ce mémoire permet de visualiser la probable évolution future du ratio de solvabilité à 5 ans. Le ratio de couverture constitue un élément de gouvernance et une aide à la décision dans le pilotage stratégique de l'activité assurantielle par la solvabilité. Il permet d'apprécier les impacts de décisions stratégiques prises en amont, en termes de politique commerciale, d'allocation stratégique de placements et de gestion de haut de bilan par l'émission de capital.

On voit que l'ORSA conduit, par le contrôle interne, à une véritable prise de recul sur l'exposition aux risques. Par son caractère prospectif, l'ORSA permet de rationaliser les processus de prise de décision stratégique en tenant compte de la dimension solvabilité. L'ORSA offre une opportunité pour optimiser la maîtrise des risques et le pilotage stratégique.

Pour une société de conseil, l'évaluation interne du risque permet notamment d'ajuster le profil de risque de l'entreprise cliente en fonction de sa politique commerciale, des décisions structurantes ou encore de plans de financement à venir. L'ORSA aide les entreprises à déterminer la valeur réelle des fonds propres qui leur sont nécessaires pour répondre à leurs engagements d'assurance.

En effet, la vision statique et instantanée ne reflète pas suffisamment les risques inhérents à l'activité d'assurance. La vision prospective constitue l'approche dynamique de référence aussi bien pour l'estimation de la valeur des entreprises que pour les calculs de solvabilité ou de rentabilité. Les réformes réglementaires et comptables en perspective renforceront le rôle de ces modèles.

Le contexte économique et financier actuel d'endettement des Etats et de possible récession, rend impérieuse la vision dynamique et l'approche prospective impulsées par Bâle III et Solvabilité II. Le contrôle interne, le reporting, le pilotage stratégique sont des atouts majeurs dans une phase de fortes incertitudes, afin de maîtriser et de réduire les risques.



---

## ANNEXES

---

### Annexe 1 : Modèle de Vasicek à un facteur

Soit  $(x_t)_t$  une variable aléatoire continue vérifiant

$$dx_t = k(\mu - x_t)dt + \sigma dB_t.$$

On a :

$$d(\exp(kt) x_t) = \exp(kt)dx_t + k \exp(kt) x_t dt = k\mu \exp(kt) dt + \exp(kt) \sigma dB_t$$

D'où :

$$\exp(kt)x_t = x_{t_0} \exp(kt_0) + k\mu \int_{t_0}^t \exp(ks) ds + \sigma \int_{t_0}^t \exp(ks) dB_s$$

Et en simplifiant, on a donc :

$$x_t = x_{t_0} \exp(-k(t - t_0)) + \mu(1 - \exp(-k(t - t_0))) + \sigma \int_{t_0}^t \exp(-k(t - s)) dB_s$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien permettent d'écrire :

$$x_t = x_{t_0} \exp(-k(t - t_0)) + \mu(1 - \exp(-k(t - t_0))) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2k(t - t_0))}{2k}} \varepsilon_t^{t_0}$$

Où  $\varepsilon_t^{t_0}$  est une variable aléatoire normale centrée réduite.





## Annexe 2 : Modèle de Vasicek à deux facteurs

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} dx_t &= k_x(\mu_x - x_t)dt + \sigma_x dB_{x,t} \\ dy_t &= k_y(x_t - y_t)dt + \sigma_y dB_{y,t} \end{aligned}$$

La loi de  $x_t$  est déterminée grâce à la résolution du modèle de Vasicek à un facteur présentée dans l'annexe 1.

Déterminons la loi de  $y_t$  à l'instant  $t$  en fonction des variables  $x_{t_0}$  et  $y_{t_0}$ .

### Cas où les instants $t$ et $t_0$ très proches

Comme dans l'annexe 1,  $y_t$  peut s'écrire :

$$\exp(k_y t)y_t = y_{t_0} \exp(k_y t_0) + k_y \int_{t_0}^t x_s \exp(k_y s) ds + \sigma_y \int_{t_0}^t \exp(k_y s) dB_{y,s}$$

Si on suppose que la variable  $x_t$  est constante sur la période  $[t_0, t]$ , on peut écrire :

$$y_t = y_{t_0} \exp(-k_y(t - t_0)) + x_{t_0}(1 - \exp[-k_y(t - t_0)]) + \sigma_y \int_{t_0}^t \exp(-k_y(t - s)) dB_{y,s}$$

Et donc :

$$y_t = y_{t_0} \exp(-k_y(t - t_0)) + x_{t_0}(1 - \exp[-k_y(t - t_0)]) + \sigma_y \sqrt{\frac{1 - \exp(-2k_y(t - t_0))}{2k_y}} \varepsilon_{y,t}^{t_0}$$

C'est cette formule qui est retenue pour la résolution de l'équation différentielle stochastique proposée par le modèle d'Ahlgrim pour les taux d'intérêt réels à court terme.

### Cas général

Soit  $z_t = y_t + \frac{k_y}{k_x - k_y}(x_t - \mu_x)$ .

Déterminons la loi de  $z_t$  pour en déduire celle de  $y_t$  après résolution du modèle à un facteur pour  $x_t$ .

On a :

$$dz_t = dy_t + \frac{k_y}{k_x - k_y} d(x_t - \mu_x).$$

Donc

$$dz_t = k_y(x_t - y_t)dt + \sigma_y dB_{y,t} + \frac{k_y}{k_x - k_y} (k_x(\mu_x - x_t)dt + \sigma_x dB_{x,t})$$

Donc :

$$dz_t = k_y(x_t - y_t)dt + \frac{k_y}{k_x - k_y} k_x(\mu_x - x_t)dt + \sigma_y dB_{y,t} + \frac{k_y}{k_x - k_y} \sigma_x dB_{x,t}$$

Donc :

$$dz_t = k_y \left[ \mu_x - y_t + \frac{k_y}{k_x - k_y} (\mu_x - x_t) \right] dt + \sigma_y dB_{y,t} + \frac{k_y}{k_x - k_y} \sigma_x dB_{x,t}$$

Donc :

$$dz_t = k_y[\mu_x - z_t]dt + \sigma_y dB_{y,t} + \frac{k_y}{k_x - k_y} \sigma_x dB_{x,t}$$

En multipliant de chaque côté de l'égalité par  $\exp[k_y t]$  et en développant, on a :

$$z_t = z_{t_0} \exp(-k_y(t - t_0)) + \mu_x(1 - \exp[-k_y(t - t_0)]) + \sigma_y \int_{t_0}^t \exp(-k_y(t - s)) dB_{y,s} \\ + \frac{k_y \sigma_x}{k_x - k_y} \int_{t_0}^t \exp(-k_y(t - s)) dB_{x,s}$$

Or

$$x_t = x_{t_0} \exp(-k_x(t - t_0)) + \mu_x(1 - \exp[-k_x(t - t_0)]) + \sigma_x \int_{t_0}^t \exp(-k_x(t - s)) dB_{x,s}$$

Pour obtenir la loi de  $y_t$ , on remplace  $x_t$  par sa valeur dans l'expression de  $z_t$ .

### Annexe 3 : Factorisation de Cholesky

La factorisation de Cholesky consiste, pour une matrice symétrique définie positive  $A$ , à déterminer une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que :  $A = LL^T$ . Une matrice symétrique est dite définie positive si, pour tout vecteur  $x$ , le produit  $x^T Ax$  est positif.

#### Théorème:

Si  $A$  est une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure  $L$  telle que :

$$A = LL^T$$

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice  $L$  soient tous positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

#### Algorithme:

On considère la matrice symétrique définie positive  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

On cherche la matrice triangulaire :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

De l'égalité  $A = LL^T$ , on déduit :

$$a_{ij} = (LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

La matrice  $A$  étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour  $i \leq j$ , c'est-à-dire que les éléments  $l_{ij}$  de la matrice  $L$  doivent satisfaire :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{jk} \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

Pour  $i = 1$ , on détermine la première colonne de  $L$  :

$$a_{11} = l_{11}l_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{1j} = l_{11}l_{j1} \Rightarrow l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad 2 \leq j \leq n$$

On détermine la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $L$ , après avoir calculé les  $(j - 1)^{\text{èmes}}$  premières colonnes de  $L$  :

$$a_{ii} = l_{i1}l_{i1} + \dots + l_{ii}l_{ii} \Rightarrow l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$a_{ij} = l_{i1}l_{j1} + \dots + l_{ii}l_{ji} \Rightarrow l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{ii}}, \quad i + 1 \leq j \leq n$$

L'algorithme se termine et a permis de déterminer tous les coefficients de la matrice  $L$ .



## Annexe 4 : Calibrage du modèle d'Ahlgrim

Le calibrage du modèle d'Ahlgrim est effectué grâce au logiciel R.

Dans la perspective de l'estimation des paramètres du modèle intégré d'Ahlgrim, on distingue les différents types de modèles utilisés : mouvements browniens géométriques (actions) et processus de type Ornstein-Uhlenbeck ramenés à des modèles de type autorégressif d'ordre 1 (inflation, taux d'intérêt réels).

### 1) Calibrage des mouvements browniens géométriques

Les paramètres sur la tendance et la volatilité des mouvements browniens géométriques sont directement estimés à partir des données.

### 2) Calibrage des modèles de type autorégressif AR(1)

#### a) Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres est réalisée par une la méthode des moindres carrés simples pour les modèles de type Vasicek à un facteur et par les doubles moindres carrés pour les modèles de type Vasicek à deux facteurs.

#### b) Tests sur le modèle et les coefficients

La pertinence du modèle est appréciée à partir de sa qualité d'ajustement et de sa significativité globale.

La qualité d'ajustement est évaluée à partir du coefficient de détermination ajusté, qui représente la part de la variance de la variable endogène expliquée par la variance du modèle, corrigée du degré de liberté de l'estimation.

La significativité globale est mesurée à partir d'un test de Fisher. Son hypothèse nulle  $H_0$  correspond à la nullité de tous les coefficients du modèle.

Le test de Student permet d'évaluer la significativité individuelle des coefficients. Son hypothèse nulle  $H_0$  correspond à la nullité du coefficient considéré.

Dans les résultats du calibrage, la probabilité associée aux tests de Fisher et de Student est la probabilité de rejeter à tort  $H_0$ . Dans nos analyses, on rejette  $H_0$  lorsque cette probabilité est inférieure à 5%.

#### c) Analyse des résidus

La première étape est de s'assurer que les résidus sont de moyenne nulle.

Dans une seconde étape, il convient de détecter une éventuelle autocorrélation des erreurs.

On utilise le test de Breusch-Godfrey pour les autocorrélations d'ordre  $\geq 1$ . Son hypothèse nulle  $H_0$  correspond à l'absence d'autocorrélation d'ordre  $p \geq 1$ .

Dans les résultats du calibrage, la probabilité associée au test de Breusch-Godfrey est la probabilité de rejeter à tort  $H_0$ . Dans nos analyses, on accepte  $H_0$  lorsque cette probabilité est supérieure à 5%.

Dans une troisième étape, on cherche à détecter une éventuelle hétéroscédasticité, fréquente dans les modèles de séries financières. On utilise le test qui vérifie si le processus est justifiable d'un processus ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). Ici l'hypothèse nulle  $H_0$  correspond à l'absence d'effet ARCH.

Dans une quatrième étape, on réalise un test de normalité des erreurs. On utilise le test de Jarque-Bera dont l'hypothèse nulle  $H_0$  est celle de la normalité des résidus.

Dans les résultats du calibrage, lorsque la probabilité associée au test de Jarque-Bera est supérieure à 5%, on accepte l'hypothèse  $H_0$  de normalité des résidus.

### 3) Résultats du calibrage

#### a) Inflation

Le modèle retenu par Ahlgrim pour l'inflation est le suivant :

$$q_{t+\delta} = q_t \exp[-k_q \delta] + \mu_q (1 - \exp[-k_q \delta]) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_q \delta]}{2k_q}} \varepsilon_{q,t} = \alpha q_t + \beta + \gamma \varepsilon_{q,t}$$

Où  $\delta$  représente le pas de la série historique. La fréquence des données historiques de l'inflation est mensuelle donc  $\delta = \frac{1}{12}$ .

Pour calibrer la loi du taux d'inflation, une régression linéaire est effectuée pour estimer  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  et on déduit ensuite les paramètres du modèle en s'appuyant sur les relations suivantes :

$$k_q = -\frac{\ln(\alpha)}{\delta} \qquad \mu_q = \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad \sigma_q = \gamma \sqrt{\frac{2k_q}{1-\exp[-2k_q \delta]}}$$

Les tableaux suivants présentent les valeurs estimées des paramètres et les résultats des tests :

<b>Ajustement de l'inflation</b>		
<b>Paramètres</b>	<b>Intitulé</b>	<b>Résultats du calibrage</b>
$k_q$	Vitesse retour à la moyenne	0,09053997
$\mu_q$	Taux d'inflation moyen	0,01730614
$\sigma_q$	Ecart type de l'erreur	0,003186059

Ajustement de l'inflation (tests)		
Test	Résultat	Interprétation
$R^2$ ajusté	0,8331	Le pouvoir explicatif du modèle est de 83,31%
Fisher	$P < 2,2 * 10^{-16}$	(<5%) Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,0268$	(<5%) La constante est significative
Student (variable)	$P < 2 * 10^{-16}$	(<5%) Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne résidus	$-3,759921 * 10^{-21}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,04679$	<b>(&lt;5%)</b> Absence d'autocorrélation d'ordre $p=1$ <b>non vérifiée</b>
ARCH(1)	$P = 0,5386$	(>5%) Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q=1$
Jarque-Bera	$P = 0,2161$	(>5%) Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

Hormis le test de Breusch-Godfrey, l'ensemble de ces tests valide les conditions posées *a priori* pour la validation du modèle et du calibrage.

#### b) Les taux d'intérêt

Le modèle retenu pour les taux d'intérêt réels à long terme et court terme est le suivant :

$$l_{t+\delta} = l_t \exp[-k_l \delta] + \mu_l (1 - \exp[-k_l \delta]) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_l \delta]}{2k_l}} \varepsilon_{l,t}$$

$$r_{t+\delta} = r_t \exp[-k_r \delta] + l_t (1 - \exp[-k_r \delta]) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp[-2k_r \delta]}{2k_r}} \varepsilon_{r,t}$$

Où  $\delta = \frac{1}{12}$  représente le pas mensuel des séries historiques de taux d'intérêt.

L'estimation des paramètres, réalisée à partir de la méthode des doubles moindres carrés, est la suivante :

Ajustement des taux d'intérêt réels		
Paramètres	Intitulé	Résultats du calibrage
$k_r$	Vitesse retour à la moyenne (CT)	-0,01457174
$\sigma_r$	Ecart type de l'erreur (CT)	0,003048261
$k_l$	Vitesse retour à la moyenne (LT)	0,07435005
$\mu_l$	Taux d'intérêt réel moyen (LT)	0,02260081
$\sigma_l$	Ecart type de l'erreur (LT)	0,003235403

Ajustement des taux d'intérêt réels (tests sur le modèle du taux réel long)		
Test	Résultat	Interprétation
$R^2$ ajusté	0,8751	Le pouvoir explicatif du modèle est de 87,51%
Fisher	$P < 2,2 * 10^{(-16)}$	(<5%) Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,0515$	<b>(&gt;5%) La constante n'est pas significative</b>
Student (variable)	$P < 2 * 10^{(-16)}$	(<5%) Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne résidus	$8,434565 * 10^{(-20)}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,4691$	(>5%) Absence d'autocorrélation d'ordre p=1
ARCH(1)	$P = 0,1575$	(>5%) Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q=1
Jarque-Bera	$P = 0,7323$	(>5%) Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

Hormis le test de significativité de la constante, l'ensemble de ces tests valide les conditions posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. La significativité de la constante n'étant toutefois pas vérifiée, il conviendra d'interpréter le taux d'intérêt réel moyen avec prudence (le taux moyen étant calculé à partir de la valeur de cette constante).

Ajustement des taux d'intérêt réels (tests complémentaires sur le modèle du taux réel court)		
Test	Résultat	Interprétation
$R^2$ ajusté	-0,0005037	Le pouvoir explicatif du modèle est <b>très faible</b> (-0,05%)
Fisher	$P=0,3355$	<b>(&gt;5%) Le modèle global n'est pas significatif</b>
Student (variable)	$P=0,335$	<b>(&gt;5%) Le coefficient de la variable n'est pas significatif</b>
Moyenne résidus	$-2,601934 * 10^{(-5)}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P=0,1984$	(>5%) Absence d'autocorrélation d'ordre p=1
ARCH(1)	$P=0,3514$	(>5%) Absence d'hétéroscédasticité d'ordre q=1
Jarque-Bera	$P=0,1821$	(>5%) Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

L'ensemble de ces tests ne valide pas les conditions posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. Les paramètres du taux réel à court terme issus du calibrage n'étant pas satisfaisants, ils ont été choisis « à dire d'expert ».



## Annexe 5 : Résultats du calibrage du modèle de sinistralité

Pour chaque garantie, le modèle retenu pour modéliser la fréquence et le coût moyen est le suivant :

$$f_{t+1} = \alpha \times f_t + \beta + \gamma \times \varepsilon_{f,t}$$

Pour calibrer la loi de la fréquence et du coût moyen pour chaque garantie, une régression linéaire est effectuée pour estimer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Les tableaux suivants présentent pour chaque garantie pure les valeurs des paramètres retenues dans le modèle.

Fréquence		
Bris de glace	Alpha	1
	Bêta	-0,02%
	Gamma	0,19%
Dommages	Alpha	1
	Bêta	-0,02%
	Gamma	0,17%
Incendie	Alpha	1
	Bêta	-0,01%
	Gamma	0,01%
RC matérielle	Alpha	1
	Bêta	-0,03%
	Gamma	0,16%
RC Corporelle	Alpha	1
	Bêta	-0,01%
	Gamma	0,03%
Vol partiel	Alpha	1
	Bêta	-0,01%
	Gamma	0,06%
Vol total	Alpha	1
	Bêta	0,00%
	Gamma	0,02%

Coût moyen		
Bris de glace	Alpha	1
	Bêta	1
	Gamma	5
Dommages	Alpha	1
	Bêta	2
	Gamma	11
Incendie	Alpha	1
	Bêta	12
	Gamma	21
RC matérielle	Alpha	1
	Bêta	1
	Gamma	4
RC Corporelle	Alpha	1
	Bêta	50
	Gamma	60
Vol partiel	Alpha	1
	Bêta	13
	Gamma	10
Vol total	Alpha	1
	Bêta	3
	Gamma	53



---

## BIBLIOGRAPHIE

---

### Ouvrages :

PLANCHET F., THEROND P., KAMEGA A., [2009] – *Scénarios économiques en assurance.*

PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J., [2005] – *Modèles financiers en assurance.*

JANSSEN J., MANCA R., [2009] – *Outils de construction de modèles internes pour les assurances et les banques.*

AHLGRIM K., D'ARCY S., GORVETT R., [2005] – *Modeling financial scenarios: a framework for the actuarial profession.*

Spécifications techniques du QIS5.

Manuel du QIS5.

Dossier technique OPTIMIND [2011] – *Solvabilité II.*

Dossier technique OPTIMIND [2010] – *Modélisation prospective.*

### Mémoires :

AGENOS X., [2006] – *Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie.*

ARMEL K., [2010] – *Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques.*

COMPAIN H., [2010] – *Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II.*

GOLLIARD G., [2009] – *La réforme Solvabilité II en Epargne : Best Estimate et capital réglementaire.*

HAMI S., [2003] – *Les modèles DFA : présentation, utilité et application.*

HE L., [2004] - *Méthodes de provisionnement et analyse de la solvabilité d'une entreprise d'assurance non-vie.*

NOUAR S., [2009] – *QIS4 : À quel quantile de la distribution des charges restant à payer correspondent les provisions techniques évaluées selon la quatrième étude d'impact quantitatif ?*

SENO A., [2009] – *Formule standard QIS4 et modèle interne simplifié pour une compagnie d'assurance non-vie dans le référentiel prudentiel Solvabilité II.*

SEVELLEC E., [2010] – *Gestion Actif/Passif par une projection stochastique bayésienne.*

VEBER A., [2009] - *Modélisation de la sinistralité non vie, alea sur la détermination des paramètres des lois de modélisation et impact sur la VaR.*