



Mémoire présenté le : 26 Mars 2015

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaire

Par : Antoine ROGER

Titre : MODELISATION DU RISQUE DE SURMORTALITE ET ETUDE

D'IMPACT SUR L'ACTIVITE DE REASSURANCE VIE EN PREVOYANCE

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Signature

Entreprise

Mme. Voahirana

RANAIVOZANANY

Nom : Reinsurance Group of America
International Re

M. David VALLEE

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : M. Khalil MECHAHOUGUI

Signature :

Invité

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

[Signature du responsable entreprise]

Secrétariat :

Mme. Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme. Patricia BARTOLO

Signature du candidat

[Signature du candidat]

RESUME

Afin de répondre à de nombreuses interrogations des acteurs du marché de l'assurance sur le risque de mortalité extrême, le présent mémoire propose une approche actuarielle de modélisation et une étude d'impact sur l'activité de tarification.

Dans le contexte réglementaire de Solvabilité II, le réassureur est sollicité sur des problématiques d'évaluation et de couverture du risque catastrophe. C'est donc au sein d'une compagnie de réassurance-vie que nous avons modélisé et étudié l'impact de la surmortalité sur la tarification de différents portefeuilles en prévoyance.

Nous avons modélisé le risque de mortalité extrême par une méthode appliquant la théorie des lissages par *P-Splines* sur la mortalité historique Française. Bien que sensible aux hypothèses, cette approche peut être combinée à un modèle d'exposition individuel pour différents portefeuilles. Les résultats nous ont permis d'identifier la surmortalité comme un risque de fréquence principalement porté sur les tranches de capitaux les plus représentatives de chaque portefeuille. Ces conclusions nous ont permis de mettre en évidence les enjeux de modélisation des risques de mortalité extrême et de dérive de mortalité.

Parallèlement à ces résultats, nous avons étudié l'impact de la surmortalité sur le bénéfice de diversification d'un portefeuille de réassurance non-proportionnelle. Celui-ci n'est pas négligeable car la diversification de l'activité d'un organisme (ré)assureur est un paramètre central à l'évaluation de son capital économique. Nous avons finalement montré que même dans une approche simpliste d'allocation du capital, l'impact des risques de mortalité extrême et de dérive de mortalité demandent des ajustements supplémentaires par rapport à une approche basée sur les sinistres attendus.

Nous avons également abordé les enjeux et le rôle des *Stop-Loss* dans la couverture du risque de mortalité extrême. Ceci nous a permis d'envisager un mécanisme de couverture du risque pandémie par la réassurance.

Mots-clés : Réassurance vie, modèle interne, risque de mortalité extrême, pandémie, splines pénalisés, modèles linéaires généralisés matriciels, modèle individuel par exposition, ajustement paramétrique, capital économique, ROE, coût du capital, bénéfice de diversification, allocation du capital, obligation catastrophe.

ABSTRACT

To tackle a sensitive subject such as extreme mortality events, the following master degree thesis develops an actuarial approach for excess mortality risk modeling and an impact study on life reinsurance business.

In a Solvency II environment, reinsurers have to deal with complex actuarial issues on intrinsically included volatility due to extreme mortality events, risk modeling and providing competitive reinsurance solutions. Hereafter has been made an impact study on pricing and capital allocation activity on several death cover treaties of a life reinsurance company.

The extreme mortality risk modeling approach developed as below is using smoothing penalized spline regression on French mortality data. In spite of high sensitivity of results on assumptions, the actuarial approach can be combined with individual loss models on exposure. The impact of extreme mortality events on volatility is quantified and identified. Its exposure is mainly based on low but representatives sums at risk covered. These conclusions highlight extreme mortality risk and drift mortality modeling stakes

Moreover, we have quantified a strong impact of extreme mortality risk on the effect of diversification of a non-proportional portfolio. We have already known that the effect of diversification is a key parameter for the economic capital assessment. By the way of conclusion, that's a challenge to quantify the impact of extreme mortality risk on the effect of diversification and this is all the more difficult for that one to be taken into account within an allocation capital model. We have shown that even with a simple approach, extreme mortality events and drift mortality lead to several adjustments on capital allocation models based on expected losses.

In the end, we have thought about the key role of *Stop-Loss* for extreme mortality risk transfer. We have finally designed and approached a reinsurance mechanism for extreme mortality risk covering.

Keywords : Life reinsurance, internal model, extreme mortality, pandemic events, penalized splines,, generalized additive array models, individual loss model on exposure, parametric adjustment, economic capital, ROE, cost of capital, effect of diversification, capital allocation model, mortality bonds.

REMERCIEMENTS

Je remercie Yahia SALHI, directeur de ce mémoire, pour son suivi et le temps qu'il a passé à corriger et orienter mon étude. Je remercie également Frédéric PLANCHET et Vivien GUETTE pour leurs précieux conseils et leurs références sur la modélisation.

Je remercie tout particulièrement Khalil MECHAHOUGUI, actuair tarificateur chez RGA International et tuteur d'entreprise lors de mon alternance, pour ses remarques toujours pertinentes, ses précieux conseils et tout le temps qu'il m'a accordé sur les aspects techniques et les résultats. Je remercie également Gurvan LE RHUN pour son expertise et sa confiance pour m'avoir intégré à l'équipe tarification d'un grand groupe de réassurance.

Merci également à Bruno DEVICTOR pour son aide sur les techniques de modélisation du risque.

Enfin, je remercie l'ensemble des équipes techniques et commerciales de RGA pour m'avoir apporté aide, soutien, et passion communicative pour l'actuariat en France et au Canada.

*« In the north end of town
My own children are grown
But I was raised on the other
In the wee hours of youth
My mother took sick
And I was brought up by my brother. »*

Bob Dylan, North Country Blues, 1964

SOMMAIRE

RESUME	3
ABSTRACT	4
INTRODUCTION	11
Partie I – Enjeu de la problématique de surmortalité extrême en réassurance	12
I La réassurance vie en prévoyance	12
A Le rôle d'un réassureur en prévoyance.....	12
1 Le rôle du réassureur.....	12
2 Le marché de la prévoyance.....	14
B Les réassurances proportionnelles et non-proportionnelles.....	15
1 La réassurance proportionnelle.....	15
2 La réassurance non-proportionnelle.....	17
3 Les principales clauses techniques de réassurance.....	20
II Le transfert du risque en réassurance	21
A Le risque de mortalité extrême sous Solvabilité II.....	21
1 Introduction à Solvabilité II.....	21
2 Les risques <i>CAT Life</i> et <i>Mortality</i>	23
B Les enjeux de la réassurance sur le risque <i>CAT Life</i>	26
1 La réassurance sous Solvabilité II.....	26
2 La réduction du capital économique.....	27
3 La protection contre un risque extrême.....	27
III Tarification d'un contrat de réassurance en prévoyance	29
A Le capital économique dans la tarification.....	29
1 Evaluation du capital économique.....	29
2 Les cibles de rentabilité.....	30
3 Intégration du coût du capital dans la tarification.....	31
B La tarification par exposition.....	32
1 Les différentes méthodes de tarification.....	32
2 Le modèle individuel.....	33
3 Application à la réassurance.....	34
C La surmortalité stochastique en tarification.....	35
1 Intégration des chocs de mortalité dans le modèle individuel.....	35
2 Optimisation du temps de calcul.....	37

3 Décomposition du risque de mortalité : CAT et tendance	37
Partie II – Modèle de surmortalité par P spline : un modèle de lissage avec composante chocs	39
IV Présentation du modèle.....	39
A Introduction aux <i>splines</i>	39
1 Définitions.....	39
2 Les B <i>splines</i>	41
3 Les P <i>splines</i>	42
B Les modèles linéaires généralisés.....	43
1 Le modèle linéaire généralisé (<i>GLM</i>)	43
2 Le modèle linéaire matriciel (<i>GLAM</i>)	46
3 Le <i>GLAM</i> unidimensionnel	47
4 Le <i>GLAM</i> bidimensionnel	48
V Application au lissage d'une surface de mortalité	50
A Présentation des données.....	50
B Lissage Bidimensionnel sans chocs.....	51
1 Ecriture des équations du modèle.....	51
2 Protocole de modélisation.....	53
3 Résultats	56
C Lissage Bidimensionnel avec chocs	57
1 Ecriture des équations du modèle.....	57
2 Protocole de modélisation.....	58
3 Résultats	59
VI Génération de scénarios de surmortalité	64
A Construction du modèle stochastique de surmortalité	64
1 Extrapolation de la mortalité lissée sans chocs à un an	64
2 Ajustement de lois paramétriques aux coefficients de chocs.	64
B Génération de q_x chocs additifs sur une population assurée	69
1 Calcul des q_x chocs additifs.....	70
2 Contraintes sur les simulations.....	72
3 Technique de simulation des coefficients de chocs	73
4 Protocole de simulation d'un scénario de q_x chocs additifs pour 2013	73
5 Ajustement de la mortalité à une population assurée	78
6 Avantage/Inconvénient	79

Partie III – Etude de portefeuilles en prévoyance	82
VII Application numérique	82
A Contexte et description des portefeuilles de prévoyance	82
1 Contrat emprunteur	82
2 Contrat prévoyance collective	83
3 contrat temporaire-décès.....	83
B Exemple	84
1 Portefeuille emprunteur.....	84
2 Portefeuilles prévoyance collective.....	85
3 Portefeuille temporaire-décès.....	86
4 Volatilité des sommes sous risque.....	87
C Structure de réassurance	87
1 Calcul du résultat net.....	87
2 Couvertures proportionnelles	88
3 Excédent de sinistre par tête	90
4 Stop-Loss.....	91
VIII Résultat.....	92
A Réassurance proportionnelle	94
1 Simulation de la charge sinistre.....	94
2 Intégration du risque <i>CAT Life</i>	99
3 Excédent de plein annuel.....	103
B Réassurance non-proportionnelle.....	107
1 Le risque <i>CAT Life</i> sur le portefeuille collectif.....	107
2 Les limites de l’approche standard	111
3 Trois niveaux de diversification	112
4 Stop-Loss.....	115
IX Optimisation de la réassurance non-proportionnelle.....	116
A Etude de rentabilité de la cédante	116
1 Optimisation d’un XS sans le risque <i>CAT Life</i>	116
2 Optimisation d’un XS avec le risque <i>CAT Life</i>	117
B Allocation du capital en réassurance non-proportionnelle.....	121
1 Modèle basé sur la prime	122
2 Modèle basé sur l’écart-type.....	124
3 Prise en compte du risque <i>CAT Life</i>	126

CONCLUSION.....	129
BIBLIOGRAPHIE	131
INDEX DES GRAPHIQUES ET TABLEAUX	134
ANNEXE : ajustement des lois	136

INTRODUCTION

L'ensemble de ce mémoire sera consacré au risque de surmortalité en assurance. Nous pouvons définir celui-ci comme l'impact financier lié à une augmentation soudaine, rare et significative de la mortalité de l'ensemble d'un portefeuille ou d'un pays. Il constitue ainsi un aléa au même titre que le décès par maladie ou accident, traditionnellement couvert en prévoyance. La surmortalité peut être causée par différents événements comme une canicule ou une catastrophe naturelle de grande ampleur par exemple. Selon l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), la pandémie est un cas de propagation mondiale de maladie. C'est ce risque qui est retenu pour l'ajustement des fonds propres liés au risque décès car la directive Solvabilité II le considère comme un risque extrême pouvant altérer l'ensemble des organismes assureurs en Europe. La récente propagation du virus Ebola en Afrique confirme que cette problématique est d'actualité.

Dans ce nouveau cadre réglementaire, les acteurs du marché de l'assurance sollicitent les réassureurs pour le développement d'une expertise et d'une couverture du risque pandémie. En effet, la réassurance est un lien contractuel où un assureur transfère un risque à un réassureur contre le paiement d'une prime. Pour répondre à ce besoin, ce dernier doit développer une approche théorique de la survenance et du coût de la pandémie, c'est-à-dire une modélisation.

Or, le risque de surmortalité n'a que très peu d'historique et il est difficile d'y fonder une approche actuarielle classique (fréquence/coût, tables de mortalité, S/P, etc.) au risque de sous-estimer la surmortalité. Face à cette difficulté, Guette (2010) et Currie (2005) ont proposé un modèle innovant basé sur une technique de lissage par *Spline* permettant d'étudier globalement le comportement de la mortalité, puis d'en distinguer une composante catastrophe. Elle permet une approche stochastique sur l'ensemble de la mortalité, d'où la possibilité d'obtenir la distribution et le quantile des engagements du réassureur afin de calculer un capital économique approprié.

Dans une perspective de *Risk management*, il est nécessaire de quantifier le poids du risque de mortalité extrême dans l'allocation stratégique du capital pour les différentes structures de réassurance. En effet un *Stop-Loss* n'a pas les mêmes enjeux en capital qu'un excédent de sinistre. Le réassureur doit adopter une stratégie d'allocation respectant ses cibles de rentabilités face à un risque complexe et extrême. Autrement dit, en tant qu'organisme (ré)assureur, il est question pour la compagnie de réassurance de quantifier ses engagements sur la sinistralité vis-à-vis des cédantes et assurés, sur la rentabilité vis-à-vis de ses apporteurs en fonds propres et sur sa solvabilité vis-à-vis du régulateur.

Premièrement, nous clarifierons le contexte de notre étude. Nous chercherons ensuite à quantifier le risque de surmortalité en proposant une modélisation du phénomène ajustée sur les données de mortalité française. Nous étudierons ensuite l'impact de ce risque supplémentaire sur la tarification de traités de réassurance. Nous dégagerons enfin une réflexion sur la couverture de ce risque.

Partie I – Enjeu de la problématique de surmortalité extrême en réassurance

I La réassurance vie en prévoyance

Cette partie présente de manière générale la réassurance de personnes en prévoyance collective et individuelle. Nous explicitons les mécanismes de transfert de risque de la cédante vers le réassureur, ainsi que les enjeux propres à la réassurance en termes de tarification et de respect des exigences de fonds propres. Nous dégagons de ces enjeux le besoin pour les réassureurs de quantifier le coût du risque *CAT Life* dans la tarification du risque de mortalité.

A Le rôle d'un réassureur en prévoyance

Nous détaillons dans cette partie le rôle du réassureur, ainsi que les différentes couvertures de réassurance.

1 Le rôle du réassureur

La réassurance est un lien contractuel où un assureur transfère un risque à un réassureur contre le paiement d'une prime. Juridiquement la réassurance se concrétise par un contrat appelé traité. Moyennant rémunération par une prime de réassurance, le réassureur dit cessionnaire, s'engage à accepter une partie des risques (incendie, tremblement de terre, accident de la route, épidémie,...) d'un assureur dit cédant.

Plusieurs réassureurs peuvent être impliqués à des parts différentes sur un même traité de réassurance. Le groupe de réassureurs impliqués est appelé un *Pool*. C'est une opération de *Pooling*. Les réassureurs sont quant à eux couverts par des rétrocessionnaires.

Le transfert de risque vers la réassurance s'effectue selon les modalités détaillées par le traité. Ces modalités peuvent être plus ou moins complexes.

Nous pouvons néanmoins distinguer deux grandes formes de réassurance. La première est dite proportionnelle et la seconde non-proportionnelle. Chacune de ces deux familles inclut différents types de couvertures. Nous détaillons ces couvertures par la suite.

Nous détaillons ci-dessous les rôles d'un réassureur.

- **Dynamiser la force commerciale et la souscription des cédantes**

En transférant une partie du risque de son portefeuille, la cédante augmente ses capacités de souscription en affaires nouvelles pour un niveau de capital économique constant. Elle bénéficie de l'accompagnement du réassureur dans le développement et le suivi de sa souscription.

- **Stabiliser le résultat et le bilan des cédantes**

La cédante diminuant ses exigences réglementaires de capital est en mesure d'homogénéiser son risque et d'en transférer les parties les plus volatiles à la réassurance. Le transfert de risque lui permet pour un même niveau de capital de diminuer la volatilité de son résultat. Par ailleurs, en développant des affaires nouvelles sur d'autres cibles ou secteurs géographiques, la cédante accroît la diversification de son portefeuille.

- **Un rôle de conseil**

Le réassureur supporte généralement des risques avec des garanties très élevées, il doit donc être présent sur plusieurs traités, pour un grand nombre de cédantes, et sur plusieurs marchés nationaux et internationaux afin de mutualiser ses risques. Cette diversification, en plus d'améliorer sa gestion du risque, lui confère une expertise technique globale sur le risque d'assurance. Ainsi le réassureur possède un rôle de soutien et de conseil de la cédante. Concrètement, cela se traduit par :

- **Une expertise technique** sur la création et la gestion de produits. La réassurance-vie participe au lancement de produits innovants sur le marché de la prévoyance.
- **Un soutien financier** sur la gestion et la distribution des contrats avec le paiement par le réassureur d'une commission de réassurance. Un précompte de réassurance élève le niveau de soutien financier de la réassurance.
- **Un soutien dans l'évaluation de la souscription et des sinistres.** En assurance-vie, un service de sélection médicale sur les risques de pointe et risques aggravés est proposé par le réassureur. Par exemple, cela concerne les sommes sous risque élevées, ou encore les maladies hors exclusions.

- **Une couverture contre les risques extrêmes**

La réassurance a toujours joué un rôle important dans la Solvabilité des cédantes et leurs capacités à soutenir leurs engagements lors de sinistralités exceptionnelles dû à des événements catastrophiques de type : tempête, tremblement de terre, attentat terroriste, naufrage.

La réassurance vie sous Solvabilité II joue un double rôle sur le risque *CAT Life*. Elle permet à la cédante de se protéger contre des événements extrêmes via la couverture du risque décès sur des *Stop-Loss*, des *Quote-Part* ou des excédents de sinistres. Elle permet aussi à la cédante d'optimiser sa stratégie de réassurance en allégeant le coût de la marge de Solvabilité requise contre une prime de réassurance moindre.

2 Le marché de la prévoyance

Nous nous intéressons à la réassurance de personnes physiques. Cette forme de réassurance couvre les marchés de la prévoyance collective et individuelle. Les cédantes sont des mutuelles, des institutions de prévoyance, et des assureurs vie.

Les marchés de la prévoyance en souscription groupe (prévoyance collective), et souscription individuelle (assurance emprunteur et temporaire-décès), comprennent les risques de décès, invalidité, incapacité, dépendance et entre autres les accidents de la vie.

- **La prévoyance collective**

La prévoyance collective résulte d'un dialogue entre les représentants des employeurs et des employés d'une personne morale dans un but de protection du salarié. Pouvant être mis en place par un accord collectif, un référendum ou une décision unilatérale de l'employeur, un régime de prévoyance collective est obligatoire. Comme tout produit de prévoyance classique, elle assure une sécurité financière à l'assuré et sa famille en complément des prestations du régime général, notamment sur les risques lourds comme le décès et l'invalidité.

Le régime prend obligatoirement en charge l'ensemble ou une catégorie précise et objective des salariés d'une personne morale. Il n'y a donc pas de risque de sélection adverse mais une population assurée aux nombreux profils de risque. Les sommes assurées pourront être plus ou moins importantes. Les profils de mortalité de la population assurée sont variés.

Les nombreux intermédiaires à la souscription de ces contrats rendent l'accès aux données tête par tête difficiles, c'est pourquoi bien souvent l'assureur et le réassureur ne disposent pas de ces dernières. Pour se protéger contre un risque potentiellement élevé, les cédantes font appels à des couvertures de réassurance non-proportionnelle. Ces couvertures vont permettre de transférer à la charge du réassureur les montants des pertes au-delà d'un seuil appelé « franchise ».

- **La prévoyance individuelle**

Une part significative des contrats de prévoyance individuelle concerne les assurances emprunteurs et temporaires-décès. A la différence des contrats collectifs, le réassureur dispose ici de données individuelles sur le portefeuille. La population assurée est segmentée par catégorie selon l'âge, le sexe, la catégorie socio-professionnelle, ou le statut fumeur. La tarification peut ainsi être ciblée pour chaque catégorie grâce à des bases de risque précises.

Une couverture individuelle n'étant pas obligatoire, il y a un fort risque de sélection adverse. C'est pourquoi une sélection médicale ou financière à la souscription est essentielle. Elle permet de s'engager sereinement sur une période relativement longue et des montants sous risque potentiellement importants.

B Les réassurances proportionnelles et non-proportionnelles

Une fois introduit le rôle du réassureur, nous nous focalisons sur les différents types de contrats de réassurance. Pour cela nous détaillons les caractéristiques et les principaux intérêts des couvertures proportionnelles et non-proportionnelles. La majorité des contrats détaillés dans la suite ont une durée d'exercice d'un an, ils sont tarifés et modifiés tous les ans lors des périodes de renouvellement en réassurance. Dans la partie opérationnelle du mémoire, nous nous fixerons un horizon d'un an.

1 La réassurance proportionnelle

- **La Quote-Part ou QP (Quota Share-QS)**

La *Quote-Part* est la couverture la plus répandue en réassurance proportionnelle vie

Dans un tel contrat, le réassureur reçoit un pourcentage fixé des primes d'assurance. En contrepartie celui-ci paye le même pourcentage des sinistres, une commission de réassurance, ainsi qu'une possible participation aux bénéfices. Un contrat *Quote-Part* permet à la cédante de bénéficier du rôle de conseil du réassureur, ainsi que de sa capacité, afin de développer ses ventes. Différents facteurs comme la participation au bénéfice peuvent néanmoins introduire une asymétrie sur le risque.

Mathématiquement la répartition des risques est la suivante :

	Total	Conservé	Cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$\alpha P = \sum_{i=1}^n \alpha P_i$	$(1 - \alpha)P = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha)P_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\alpha S = \sum_{i=1}^n \alpha S_i$	$(1 - \alpha)S = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha)S_i$

Tableau 1 répartition des risques pour un contrat *Quote-Part*

Avec :

- P la prime commerciale d'assurance du portefeuille.
- S la charge sinistre sur le portefeuille.
- n le nombre de polices du portefeuille assuré.
- P_i la prime commerciale d'assurance de la police i .
- S_i la charge sinistre de la police i .
- α le taux de rétention du traité *Quote-Part*.

La prime d'une *Quote-Part* est calculée au niveau global du portefeuille. Le partage des primes est effectué lors de la clôture des primes.

- **L'excédent de plein ou XP (Surplus Share)**

L'excédent de plein peut être assimilé à une *Quote-Part* individuelle sur les contrats touchant la rétention. Sur la base de la somme assurée, du plein de rétention et de la capacité de l'excédent, un taux de cession est calculé police par police. Le réassureur reçoit une prime égale au taux de cession appliqué à la prime d'assurance pour chaque police. L'intérêt de ce type de contrat est de permettre à la cédante de bénéficier de la sélection des risques du réassureur tout en se protégeant au-delà du plein de rétention.

Mathématiquement la répartition des risques est la suivante :

	Total	Conservé	Cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - \alpha_i) P_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - \alpha_i) S_i$

Tableau 2 répartition des risques pour un contrat Excédent de Plein

Avec :

$$\forall i \quad 1 - \alpha_i = \frac{\min((C_i - R)_+, L)}{C_i}$$

Et :

- α_i le taux de rétention de la police i .
- C_i le montant assuré de la police i
- R le plein de rétention.
- L la capacité de l'excédent de plein.

La prime d'un excédent de plein est calculée police par police. Dans un excédent de plein pluriannuel, les taux de cession par individus sont calculés en début de période de souscription sur les montants sous risques initiaux. Le taux de cession pour une police est alors constant sur toute la durée de couverture de l'excédent de plein. Dans le cas d'un traité annuel, les taux de cession sont recalculés chaque année pour chaque police. En assurance emprunteur par exemple, la diminution du capital restant dû conduit certains assurés à sortir du périmètre de la réassurance du fait de la priorité fixée.

La réassurance proportionnelle est la forme la plus traditionnelle de réassurance. Elle est souvent utilisée comme soutien aux organismes assureurs limités en termes de fonds propres ou de visibilité de résultat à court terme (pour le lancement d'un nouveau produit par exemple). Elle permet donc de bénéficier de la capacité du réassureur tant au niveau de la fiabilité du résultat que de la baisse de la marge de solvabilité.

2 La réassurance non-proportionnelle

En échange d'une prime annuelle unique, le réassureur s'engage à couvrir un montant défini par une priorité et une portée notées respectivement d et l . Le montant de l'engagement du réassureur sera égal à l'excédent par rapport à la priorité d'un sinistre ou d'un événement assuré jusqu'à un maximum égal à la portée.

En prévoyance, les objectifs d'un contrat de réassurance non-proportionnelle sont divers et dépendent du niveau de la priorité et de la portée. Une priorité et une portée basse seront « souvent » touchées et constitueront donc des tranches « travaillantes ». L'objectif est alors de se protéger contre un risque de fréquence en maîtrisant son résultat. A fortiori une priorité élevée permet de protéger le résultat de la cédante contre les risques de pointe.

- **L'excédent de sinistre par tête ou XS (Excess of Loss-XL)**

Avec l'excédent de sinistre par tête le réassureur s'engage à payer le montant du sinistre en excès de la priorité pour un maximum égal à la portée. Les paiements peuvent prendre la forme d'un capital ou d'une rente. Dans le cas d'un excédent par tête, la couverture est déclenchée dès lors qu'un sinistre sur une police « touche » la priorité.

L'écriture d'un excédent de sinistre est simplifiée en écrivant $lXS d$ (l la portée, et d la priorité) :

	Total	Conservé	Cédé
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\sum_{i=1}^n \tilde{S}_i$	$\sum_{i=1}^n (S_i - \tilde{S}_i)$

Tableau 3 répartition des risques pour un contrat XS par tête

Avec :

$$(S_i - \tilde{S}_i) = \sum_{j=1}^{N_i} \min((C_{ij} - d)_+, l)$$

Et :

- n le nombre de polices du traité.
- N_i le nombre aléatoire de sinistres dans l'année de la police i .
- C_{ij} le coût assuré du sinistre j de la police i .
- d la priorité.
- l la portée.
- S_i la charge sinistre brute de réassurance de la police i .
- \tilde{S}_i la charge sinistre nette de réassurance de la police i .

La prime est forfaitaire au global du portefeuille et versée en début de période de souscription.

- **L'excédent de sinistre par événement ou XE (Excess of Loss-XL)**

Le principe de fonctionnement d'un excédent de sinistre par événement, est le même que pour un excédent de sinistre par tête, à la différence que la couverture couvre la survenance d'un événement (ex : tempête, accident industriel, attentat). Cet événement est alors la cause unique de multiples sinistres sur le portefeuille.

La délimitation spatio-temporelle de l'évènement est essentielle afin d'éviter toute ambiguïté et recours juridique sur les modalités des paiements. Lors des attentats du *World Trade Center*, le propriétaire des deux tours indiquait qu'il s'agissait de deux évènements distincts, la réassurance quant à elle affirmait qu'il s'agissait d'un unique événement.

Juridiquement cette limitation prend la forme de clauses :

- **Clause de limitation géographique** : Le traité couvre les polices touchées par un même événement survenant dans une zone géographique limitée.
- **Clause de limitation dans le temps** : La clause fixe une durée maximale pendant laquelle les polices touchées par un unique événement sont prises en compte. La limitation dans le temps d'un événement est en générale comprise entre soixante-douze heures et cent soixante-huit heures en fonction du risque couvert (tempêtes, risques industrielles, inondations, ...).

Pour un assureur, le principal intérêt d'une couverture par événement, est de payer une fois la priorité, lorsque de multiples polices sont touchées par un unique événement. Ce type de couverture vient souvent en complément d'un excédent de sinistre par tête.

Mathématiquement un excédent de sinistre par événement **lXSd** (**l** la portée, et **d** la priorité) s'écrit :

	Total	Conservé	Cédé
Sinistres	$S = \sum_{j=1}^N S_j$	$\sum_{j=1}^N \tilde{S}_j$	$\sum_{j=1}^N (S_j - \tilde{S}_j)$

Tableau 4 répartition des risques pour un contrat XS par événement

Avec :

$$(S_j - \tilde{S}_j) = \min((C_j - d)_+, l)$$

Et :

- N le nombre aléatoire d'évènements sur l'année.
- C_j le montant total des sinistres des polices touchées par l'évènement j .
- d la priorité.
- l la portée.
- S_j la charge sinistre brute de réassurance de l'évènement j .
- \tilde{S}_j la charge sinistre nette de réassurance de l'évènement j .

La prime est forfaitaire au global du portefeuille et versée en début de période de souscription.

- **L'excédent de perte annuelle (*Stop-Loss-SL* ou *Aggregate Loss-AL*)**

La différence du *Stop-Loss* avec les couvertures *XS* est que le sinistre est constitué sur le résultat financier. Une couverture *SL* permet à la cédante de protéger son résultat contre une sinistralité globalement mauvaise. L'évènement déclencheur est un indicateur intégrant des données financières ou administratives comme le ratio S/P ou le montant des pertes globales sur l'année. Dans le cas d'un indicateur S/P le contrat porte le nom de *Stop-Loss*. Dans le cas du montant agrégé des pertes sur l'année, le contrat se nomme *Aggregate-Loss*.

Mathématiquement un *Stop-Loss* sur S/P noté ***L S L D*** (***L*** la portée, et ***D*** la priorité) s'écrit de la manière suivante :

	Total	Conservé	Cédé
Résultat	$\frac{S}{P}$	D	$\min\left(\left(\frac{S}{P} - D\right)_+, L\right)$

Tableau 5 répartition des risques pour un contrat *SL*

Avec :

- S la charge sinistre sur l'année.
- P la prime d'assurance sur l'année.
- D la priorité du *Stop-Loss* exprimée en pourcentage des primes.
- L la portée du *Stop-Loss* exprimée en pourcentage des primes.

La prime est forfaitaire au global, versée en début de période de souscription.

Les solutions de réassurance non-proportionnelle permettent aux cédantes de maîtriser et protéger leur résultat tout en se couvrant contre les risques de pointe ou de mauvaise sinistralité. En prévoyance collective, ces types de traité sont particulièrement adaptés à la diversité des profils de risque de la population assurée. Cette hétérogénéité est la conséquence des disparités sur les sommes sous risque et de leur distribution. De plus, nous n'excluons pas la possibilité de décès multiples et soudains sur ces portefeuilles. Ainsi par exemple nous pouvons envisager le *crash* d'un avion transportant l'équipe de direction d'une compagnie, causant ainsi une sinistralité exceptionnelle.

3 Les principales clauses techniques de réassurance

Nous détaillons les différentes clauses techniques communément utilisées en réassurance. Celles-ci ont une influence fondamentale sur l'étendue de la couverture et la tarification du traité.

La priorité : C'est le montant à partir duquel le réassureur est engagé à payer la cédante.

La portée : C'est le montant maximal de l'engagement du réassureur en excès de la priorité.

Participation aux bénéfices : Si le résultat d'une couverture de réassurance est positif, le réassureur s'engage à verser un certain pourcentage à la cédante. Il existe une clause de participation aux bénéfices.

Annual aggregate limit (AAL) : C'est le montant maximal limite que le réassureur s'engage à payer au titre du traité sur l'année. C'est une sécurité pour le réassureur qui au global ne s'engage pas à payer plus.

Annual aggregate deductible (AAD) : C'est le montant à partir duquel le réassureur s'engage à payer au titre du traité sur l'année. C'est une forme de franchise globale sur l'année.

La reconstitution : Il s'agit du nombre maximum de fois où la tranche d'un traité XS peut être entièrement traversée, et reconduite, pour d'éventuels autres sinistres. En réassurance vie, les reconstitutions sont généralement gratuites et illimitées. Pour des traités à la volatilité importante (priorité et portée élevées), elles peuvent néanmoins être limitées et payantes. La coexistence sur un même traité d'*aggregate (AAD, AAL)* et de *restitutions* doit préciser l'ordre d'application de chacun de ces éléments.

Ces clauses techniques ont un coût que l'actuaire tarificateur doit intégrer au prix. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à l'étude des paramètres des portées et de priorités, pour les couvertures non-proportionnelles.

II Le transfert du risque en réassurance

L'objectif de cette partie est de dégager les enjeux spécifiques au risque *CAT Life*. Ils permettront de définir l'intérêt pour la réassurance d'évaluer économiquement son engagement sur ce segment. Détailler l'environnement Solvabilité II nous permettra de comprendre le cadre de modélisation et de définition du risque de mortalité extrême.

A Le risque de mortalité extrême sous Solvabilité II

Nous présentons brièvement la directive Solvabilité II et l'évaluation du risque *CAT Life*.

1 Introduction à Solvabilité II

Une compagnie d'assurance doit être solvable, c'est-à-dire qu'elle doit faire face à ses engagements envers les bénéficiaires des contrats et être en mesure de régler le montant des sinistres. Pour satisfaire à cette obligation de solvabilité des assureurs, le législateur/régulateur européen impose l'existence d'une marge de solvabilité suffisante. La marge de solvabilité est un niveau de fonds propres réglementaire en dessous duquel l'activité d'assurance ou de réassurance n'est pas autorisée. Les fonds propres (ou capital) d'une compagnie d'assurance sont un élément du passif correspondant à la différence entre l'actif et le passif « réel ». Le passif « réel » correspond aux engagements comptables tels que les dettes et les provisions. De ces fonds propres découle une nécessité de rémunération des actionnaires de la compagnie d'assurance.

De 1973 jusqu'à nos jours, nous sommes passés par différentes normes de solvabilité. En 2002, Solvabilité I entrain en application. Cette norme était centrée autour de trois piliers.



Tableau 6 les trois piliers de Solvabilité I

Solvabilité I a pour objectif de mieux adapter l'exigence de fond propre réglementaire au profil de risque de l'entreprise d'assurance. Le capital réglementaire est le montant de fonds propres minimal exigé par les autorités de contrôle aux entreprises d'assurances. Il doit garantir la solvabilité de l'entreprise vis-à-vis des assurés, et permettre d'absorber un niveau de perte exceptionnel.

La marge de solvabilité sous Solvabilité I est calculée de façon déterministe comme un pourcentage réglementaire des primes et des sinistres.

Dans la continuité du projet européen d'harmonisation des normes sur la Solvabilité des organismes d'assurance et de réassurance, la directive Solvabilité II est votée au parlement européen le 22 Avril 2009. Cette nouvelle norme dont l'application est prévue pour 2016, s'articule autour de trois piliers.



Tableau 7 les trois piliers de Solvabilité II

Le pilier I impose le calcul d'un niveau de capital réglementaire appelé *Minimum capital requirement (MCR)*, ainsi qu'un niveau de solvabilité appelé *Solvency Capital requirement (SCR)*. Le MCR est le niveau de fonds propres exigé, en dessous duquel l'entreprise d'assurance n'est pas autorisée à poursuivre son activité.

Le SCR correspond au niveau de capital requis de l'entreprise d'assurance pour une probabilité de ruine, à horizon un an de 0,5 %. Le niveau de fonds propres exigé correspond au quantile à 99,5 % de la variation de la valeur économique des fonds propres à un an.

En l'absence d'un modèle interne à l'entreprise, l'évaluation du SCR doit être effectuée par la formule standard, documentée et calibrée dans le *Quantitative Impact Study 5 (QIS 5)*. Le calcul de cette marge de solvabilité s'effectue par l'intégration des différents sous modules de risque détaillés par le *European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA)*. Le QIS 5 documente le calcul du SCR par modules de risque dans chaque branche d'assurance.

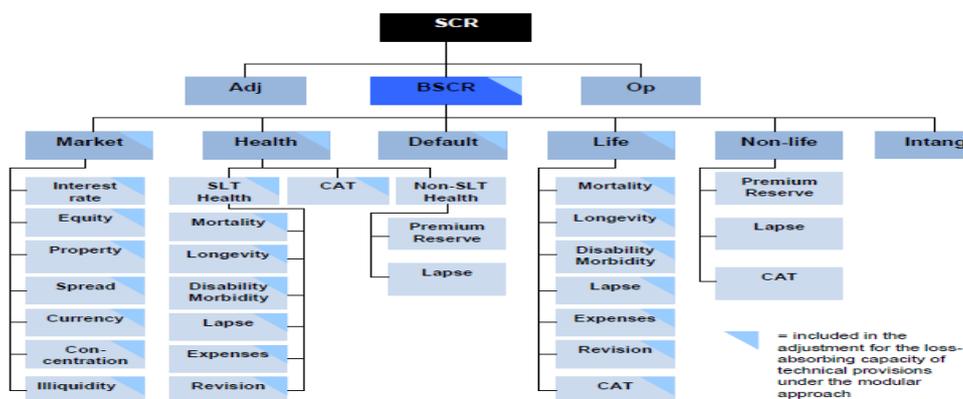


Tableau 8 Intégration des sous module de risques pour le calcul du SCR global

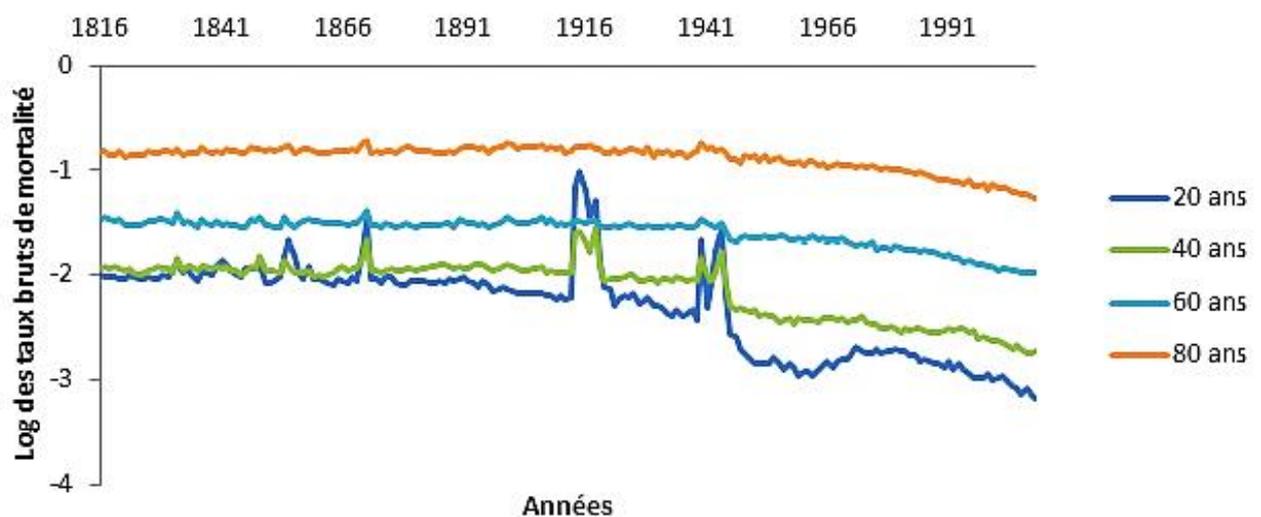
Le module étudié est celui de la Souscription Vie (*SCR Life*) qui se décompose en sous modules *Mortality* et *CAT Life*.

2 Les risques CAT Life et Mortality

Comme indiqué dans la première partie du mémoire, nous nous intéressons au risque de décès en prévoyance. L'événement déclencheur du paiement de la prestation est le décès de l'assuré. Les couvertures de réassurance sont annuellement renouvelables, l'horizon d'étude est donc un an.

L'un des risques majeurs pour la cédante sur les garanties décès concerne la hausse de la mortalité observée par rapport à celle attendue. Cette hausse touche l'ensemble de la population du portefeuille sur une période plus ou moins courte et peut avoir différentes origines.

Etudions le comportement de la mortalité française de 1816 à nos jours. Les données sont tirées du site *Human Mortality Database (HMD)* (<http://www.mortality.org>).



Graphique 1 Log des taux bruts de mortalité HMD pour les hommes en France (1816-2005)

Nous avons plusieurs observations sur ce graphique :

- Nous observons une tendance à la baisse dans le temps. Cette tendance est entre autres due à l'amélioration des conditions d'hygiène et aux progrès de la médecine.
- **Nous observons de plus des variations à la hausse et à la baisse de la mortalité. Ces dérives de mortalité sont captées par le module *Mortality*.**
 - Dans le cas d'un portefeuille, ces variations peuvent trouver plusieurs explications. Premièrement, l'hétérogénéité des sommes sous risque conduit à une volatilité de la charge sinistre. Deuxièmement, l'approximation entre la mortalité « réelle » et celle estimée pour la modélisation du risque conduit à un risque d'estimation. Enfin et structurellement, la modélisation de la mortalité induit en soi un risque de modèle.
 - A l'échelle d'un pays, les risques d'estimation et de modèle sont prépondérants.

- **Aux dérives de mortalité s'ajoutent des chocs.**

- A l'échelle d'un pays, les événements de mortalités extrêmes sont par exemple les guerres, les catastrophes naturelles et technologiques, les pandémies et les comportements à risque de santé publique. Ils résultent de facteurs de risque sur la mortalité de l'ensemble de la population française et pour une durée plus ou moins importante. Le tabagisme et la pollution par exemple, influencent l'environnement et donc la mortalité française sur des dizaines d'années. Les épidémies et les canicules ont un impact sur des durées mensuelles ou annuelles. Dans le cas d'une épidémie, l'ensemble de la population est soumise au risque de contamination par un agent biologique.
- Les crashes d'avion ou les catastrophes naturelles régionales ont un impact sur la mortalité d'un portefeuille mais non sur celle d'un pays. Les couvertures catastrophes par événement ont pour objectif de protéger les cédantes contre des décès soudains et multiples dans un court intervalle de temps.

Nous allons définir plus précisément le risque de mortalité extrême.

- **Le risque *CAT Life***

Le module *CAT Life* de Solvabilité II cherche à capter l'impact sur un an d'un événement rare et irrégulier, non suffisamment pris en compte par les autres sous-modules de risque du module *Life*. Il peut s'agir d'une explosion nucléaire, d'une pandémie ou d'un tremblement de terre. Le *QIS 5* décide néanmoins de se concentrer sur le risque de pandémie pour ce module, estimant celui-ci prépondérant.

Un événement *CAT Life* sous Solvabilité II au même titre qu'une pandémie, résulte d'un facteur de risque sur l'ensemble de la population assurée. Dans notre approche de modélisation, nous nous intéresserons à des événements annuels ou pluriannuels. Nous ne chercherons pas à modéliser un événement pouvant causer des décès soudains dans un court intervalle de temps sur l'ensemble de la population française (exemple : attentat terroriste de grande envergure). Nous ne chercherons pas non-plus à modéliser des facteurs de risque long terme comme la pollution ou le tabagisme, impactant la mortalité française sur des décennies.

Nous détaillons maintenant les calculs standards des capitaux réglementaires des sous-modules *CAT Life* et *Mortality*.

- **Calibration du risque *Mortality* dans le *QIS 5***

La calibration du risque de mortalité se base sur une approche déterministe. La formule standard a fait l'objet de plusieurs modifications aux cours des différents *QIS*. Initialement fixé sur un accroissement de 10 % de la mortalité, il est revu à la suite du *QIS 4* pour être finalement ajusté à 15 %. Cette nouvelle calibration se base sur 21 modèles internes ayant communiqué leurs résultats au *EIOPA* lors de l'année 2007. L'intervalle des résultats fixait alors un accroissement allant de 13 % à 29 %.

Le QIS 5 détaille le calcul de l'exigence de solvabilité du sous module *CAT Life* :

$$Mortality = \Delta NAV \mid Mortality\ shock = NAV_{Best\ Estimate} - NAV_{Shock}$$

ΔNAV est la variation de la valeur économique des fonds propres. Celle-ci doit être calculée sur une base *Best Estimate*, c'est-à-dire comme une moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs. Cette approche *Best Estimate* doit être soumise à un scénario de stress sur la mortalité. Celui-ci est un choc multiplicatif permanent de 15 % du taux de décès chez les souscripteurs.

Dans la suite du mémoire, nous questionnerons la validité de cette approche pour des portefeuilles plus ou moins hétérogènes sur les sommes sous risque. Nous détaillons maintenant l'approche standard de modélisation du risque *CAT Life*.

- **Calibration du risque *CAT Life* dans le QIS 5**

De nombreuses études du risque de pandémie ont été effectuées, les hypothèses sous-jacentes à chacune de ces études sont différentes et conduisent à des conclusions diverses. Dans une note de synthèse relative à la préparation du QIS 4, la Mutualité Française récapitule les principales études sur le sujet.

Sources	Hypothèses des modèles	Taux de surmortalité
Swiss Re	USA, pondération spécifique de la grippe espagnole, prise en compte des politiques préventives et curatives de limitation de la dissémination.	0,15 %
Gen Re	Allemagne, pandémie de grippe espagnole	Entre 0,41 % et 0,61 %
INVS	France, 3 dernières pandémies, hors politique de santé publique	0,35 %

Sources	Données historiques	Taux de surmortalité
Simonsen & al	USA, pandémie de 1918.	0,53 %
INVS	France, pandémie de 1968.	0,06 %

Tableau 9 Comparaison des taux de surmortalité

Comme indiqué par les études, un ordre de grandeur semble se dégager pour la calibration du choc de surmortalité. L'amplitude d'un choc additif sur la mortalité serait compris entre 0,06 % et 0,61 %. C'est relativement aux précédentes études effectuées, et par un consensus entre les différents acteurs, que l'EIOPA a choisi la calibration du choc de surmortalité à appliquer pour le module *CAT Life*. Le choc de surmortalité retenu est de 0,15 %.

Les QIS 4 et QIS 5 détaillent le calcul de l'exigence de solvabilité du sous module *CAT Life* :

$$CAT\ Life = \Delta NAV \mid life\ CAT\ shock = NAV_{Best\ Estimate} - NAV_{Shock}$$

life CAT shock est la combinaison de deux scénarios de chocs simultanés en mortalité et morbidité.

Le premier correspond à un choc absolu de 0,15 % du taux de décès des souscripteurs l'année suivante. Le second est un choc absolu de 0,15 % du taux de maladie chez les souscripteurs l'année suivante.

Le QIS 5 propose aussi une formule simplifiée. Cette formule requiert des données détaillées pour les polices dont le paiement de la prestation est subordonné au risque de décès ou d'invalidité :

$$CAT\ Life = \sum_i 0,0015 \times Capital_at_risk_i$$

Avec i l'indice des polices. Le calcul du capital sous risque est le suivant :

$$Capital_at_risk_i = SA_i + AB_i \times Annuity_factor - TP_i \quad (3)$$

Avec nets de réassurance :

- TP_i : La provision technique de la police i .
- SA_i : Le montant du capital au décès ou à l'invalidité si un capital est versé.
- AB_i : Le montant annuel de la rente au décès ou à l'invalidité si rente il y a.
- $Annuity_factor$: le facteur de rente moyen pour la durée de versement en cas de sinistre.

Nous allons maintenant détailler les nouveaux enjeux relatifs à la réassurance sur la couverture du risque de mortalité extrême dans un environnement Solvabilité II.

B Les enjeux de la réassurance sur le risque *CAT Life*

Les efforts actuels des acteurs de l'assurance se concentrent sur le calcul des exigences réglementaires du pilier 1. Néanmoins Solvabilité II via les deux autres piliers prévoit l'adoption par les entreprises d'assurance d'un système de contrôle interne des risques. Ce système se base sur des stratégies de gestion des risques, de gouvernance et de communication. La réassurance est au cœur de ce processus car elle apporte des solutions efficaces et innovantes sur des problématiques de transfert de risque.

1 La réassurance sous Solvabilité II

Sous Solvabilité I, l'impact de la réassurance était limité aux traités proportionnels à hauteur d'un taux de cession de 50 %. Les traités non-proportionnels n'étaient pas jugés significatifs. D'autres facteurs tels la notation et le nombre de réassureurs dans un même *pool* n'impactaient pas le besoin en capital des cédantes.

Sous Solvabilité II, les paramètres de prise en compte de la réassurance sont revus. Le transfert de risque vers la réassurance proportionnelle peut être comptabilisé intégralement et ne sera pas limité à 50 % comme sous Solvabilité I. La notation du réassureur est retenue via le risque de contrepartie. Le poids de la réassurance non-proportionnelle est aussi devenu prépondérant sur la réduction de la volatilité et à fortiori l'exigence en capital.

Du fait des méthodes probabilistes requises par Solvabilité II, le niveau des fonds propres exigé augmente d'autant plus que le risque couvert est volatil. L'augmentation des exigences en fonds propres avec l'entrée en vigueur de Solvabilité II incite les cédantes à un transfert de risque optimisé vers la réassurance.

Dans ce contexte, les enjeux relatifs aux cédantes sur le risque de mortalité extrême sont liés à la diminution du capital propre et à la protection du résultat.

2 La réduction du capital économique

Deux stratégies s'offrent à la cédante quant à la gestion de son capital. Celle-ci dispose d'un excédent de fonds propres qui doit être rémunéré et possède un coût. Ce coût doit être intégré dans la prime d'assurance par un chargement supplémentaire.

- Dans la première stratégie la cédante cherche à diminuer cette charge économique tout en se couvrant par une couverture de réassurance. En optimisant cette couverture, la cédante cherche un arbitrage entre le coût du capital économisé et la prime exigée par le réassureur.
- La deuxième stratégie est de disposer d'un excédent de fonds propres permettant une meilleure notation sur le marché.

La réduction du capital requis sur le risque *CAT Life* n'est pas négligeable car le niveau de fonds propres exigé pour ce risque est en effet élevé. Un transfert vers la réassurance permettrait aux cédantes de diversifier leurs activités à niveau de capital économique constant. L'optimisation d'une couverture de réassurance intégrant le risque de mortalité extrême est un sujet à part entière. Nous illustrons par la suite en quoi le risque de mortalité extrême, pose la question d'un optimum sur les couvertures en XS.

3 La protection contre un risque extrême

Le second enjeu de la réassurance sur le risque *CAT Life* concerne la protection du résultat de la cédante contre une charge sinistre extrême.

Le réassureur doit pouvoir évaluer la distribution et la volatilité de ses engagements, ainsi que le niveau de capital économique requis par Solvabilité II. Cela va de pair sur le risque de mortalité extrême avec de nombreuses difficultés techniques. Il faut d'abord modéliser le risque de surmortalité, évaluer son impact sur le capital économique du portefeuille réassuré, et étudier les intérêts de la couverture de réassurance pour la cédante.

Un enjeu majeur pour le réassureur concerne l'impact du risque *CAT Life* sur son effet de diversification. En effet, celui-ci couvrant de nombreux traités sur plusieurs branches et dans de nombreux pays, il dispose d'un effet de diversification plus important qu'un assureur dont la grande majorité du portefeuille est en France par exemple. Cet effet de diversification conduit à diminuer le coût du capital réglementaire exigé pour le réassureur. Or nous pourrions imaginer un scénario

pandémique touchant l'ensemble des pays européens, ainsi que les Etats-Unis et le Canada. Dans ce cas, la diversification des portefeuilles du réassureur ne s'applique plus au niveau du groupe.

Pour ces nombreuses difficultés, les couvertures de réassurance spécifiques au risque de pandémie sont encore rares aujourd'hui. Nous détaillerons les enjeux propres à de telles structures dans la suite du mémoire, plus particulièrement concernant les *Stop-Loss*.

Nous allons maintenant nous intéresser à la prise en compte par le réassureur du coût du capital dans la tarification d'un contrat prévoyance.

III Tarification d'un contrat de réassurance en prévoyance

Le calcul de la prime de réassurance doit intégrer l'ensemble de ces éléments :

- La prime pure égale aux sinistres attendus
- Les frais du réassureur
- Les commissions de réassurance
- Les frais de courtage
- Les taxes
- Le coût du capital immobilisé, c'est-à-dire la rémunération des actionnaires à hauteur d'un pourcentage du capital immobilisé

Nous nous intéressons à l'intégration du coût du capital cédé dans la tarification annuelle de contrats de réassurance. La tarification ne tient compte que du risque supporté sur l'année en cours.

La problématique du réassureur est de calibrer son niveau de chargement avec le coût du capital économique cédé. Le calcul de ce capital revient à évaluer la volatilité de la charge sinistre réassuré sur un niveau de risque à 99,5 %. Clarifier ces concepts nous permettra d'effectuer une étude de rentabilité sur un portefeuille net de réassurance.

A Le capital économique dans la tarification

Nous allons détailler l'évaluation du niveau de capital économique et de son coût. Nous expliciterons ensuite l'intégration du coût du capital dans la tarification.

1 Evaluation du capital économique

Le pilier I de Solvabilité II a pour objectif une évaluation *Best Estimate* du risque. Celle-ci peut s'effectuer au global du portefeuille ou traité par traité.

L'évaluation économique du risque dans le processus de tarification peut s'effectuer par :

- **Une vision affaire par affaire** : Les cibles de solvabilité sont déterminées, traité par traité et le capital économique s'ajuste au profil de risque de chaque portefeuille, pour chaque couverture de réassurance. Le coût du capital cédé est variable d'un traité à l'autre.
- **Une vision globale** : La cible de solvabilité est déterminée au global des portefeuilles. Cette méthode requiert des données suffisamment détaillées des expositions et de la distribution des sinistres. Le coût du capital économique peut être appliqué au global et de manière constante à l'ensemble des affaires en cours et à venir du réassureur.

Le calcul et la répartition du capital économique entre les différentes activités et portefeuilles doivent tenir compte de la stratégie du groupe, des effets de diversification des risques et des cibles de rentabilité sur le capital. Ceci implique des problématiques stratégiques d'allocation du capital pour la prise en compte des effets de diversification.

Pour l'étude de la volatilité sous Solvabilité II, nous utilisons la mesure de risque *Value at Risk* (VaR). Nous allons détailler les propriétés principales de cette mesure de risque pour un niveau de risque α .

- **Value at Risk (VaR)**

La *Value at Risk* est la fonction quantile. Pour une variable aléatoire réelle X de niveau de risque α , la $VaR(X; \alpha)$ est :

$$VaR(X; \alpha) = \inf(x \in \mathbb{R} ; F_X(x) \geq \alpha)$$

Ceci définit une mesure de risque, c'est-à-dire, une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, et prenant ses valeurs dans \mathbb{R} .

La définition de la cohérence d'une mesure de risque d'après Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) est :

- L'invariance par translation : $\forall m \in \mathbb{R} \quad \rho(X + m) = \rho(X) + m$
- La monotonie : $P(X \geq Y) = 1 \rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
- La positive homogénéité : $\forall \beta \geq 0 \quad \rho(\beta X) \leq \beta \rho(X)$
- La sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

La *Value at Risk* n'est pas cohérente car non sous-additive. Notre étude portera néanmoins sur elle car c'est la mesure de risque retenue par Solvabilité II.

Nous explicitons maintenant un indicateur de rentabilité permettant de mesurer le coût du capital, ainsi que son application à la tarification.

2 Les cibles de rentabilité

Le coût du capital économique est le niveau de chargement à appliquer dans le calcul de la prime commerciale. Il ne constitue pas une charge comptable à proprement dite comme les frais de courtage ou les commissions par exemple. C'est une charge économique car elle assure le retour sur investissement des actionnaires. Ce retour sur investissement se fonde sur un critère de rentabilité. Nous détaillons celui que nous avons choisi d'utiliser.

Le *Return On Equity (ROE)* est le rapport du résultat net sur les capitaux propres investis par les actionnaires pour l'ensemble de l'année. Le *ROE* ne prend un sens en tant que critère de décision que si l'on compare deux entreprises d'un même secteur.

$$ROE = \frac{\text{résultat net}}{\text{capitaux propres}}$$

Le *ROE* est un critère simple et commun pour une étude de rentabilité. D'autres critères comme le *Taux de Rentabilité Interne (TRI)* peuvent néanmoins être utilisés.

3 Intégration du coût du capital dans la tarification

La détermination du coût du capital dans le processus de tarification s'effectue grâce à la dernière évaluation interne du capital économique notée *EC* et à l'indicateur de rentabilité choisi. Pour exprimer la prime commerciale, nous décrivons le compte de résultat simplifié du réassureur en début et en fin d'exercice.

Soit :

- *EC* les fonds propres tel que $EC = \text{Max}(\text{capital réglementaire}, \text{capital économique})$.
- *Sinistres* l'estimation des sinistres attendus ou prime pure.
- ROE_{cible} la cible de rentabilité des investisseurs.
- τ_{sr} le taux sans risque.
- % *commissions* le taux de commission sur la prime commerciale.
- % *courtage* le taux de courtage sur la prime commerciale.
- % *frais* les frais généraux du réassureur sur la prime commerciale.
- P_{com} la prime commerciale finale du réassureur.
- *IS* le taux d'imposition sur les bénéfices.

	Début d'exercice	Fin d'exercice
Débit	<i>EC</i>	<i>Sinistres</i> $P_{com} \times \% \text{ commissions}$ $P_{com} \times \% \text{ courtage}$ $P_{com} \times \% \text{ frais}$ $\text{Max}(\text{Impôt sur les bénéfices}, 0)$
Crédit	P_{com}	EC $EC \times \tau_{sr}$

Tableau 10 Compte de résultats technique de réassurance en début et en fin d'exercice

Le calcul du ROE_{cible} est :

$$ROE_{cible} = \frac{(P_{com} - \text{sinistres} - \text{courtage} - \text{commissions} - \text{frais} + EC \times \tau_{sr}) * (1 - IS)}{EC}$$

Ainsi :

$$P_{com} = \frac{ROE_{cible} \times EC}{1 - IS} - EC \times \tau_{sr} + \text{sinistres} + \text{courtage} + \text{commissions} + \text{frais}$$

Dans les deux approches, le coût du capital financé par le chargement sur le tarif est :

$$\text{Coût du capital} = P_{com} - \text{sinistres} - \text{courtage} - \text{commissions} - \text{frais} - \text{taxes}$$

Dans une tarification annuelle, le calcul du capital économique avant diversification doit vérifier la relation suivante :

$$EC_{avant\ diversification} = VaR_{99,5\%}(S_{réass}) - P_{com}$$

Avec $S_{réass}$ la charge sinistre réassurée.

Cette formule illustre le problème de référence circulaire entre la prime commerciale et le niveau de capital économique requis pour le portefeuille. L'exigence de capital dépend de la prime commerciale qui elle-même dépend du capital économique.

Dans l'approche ci-dessus, le capital économique EC est déterminé à priori par un modèle d'allocation du capital. Ce modèle doit être calibré de manière déterministe afin de respecter l'estimation de la *Value At Risk* à 99,5 % . Nous parlerons plus en détail de ces modèles dans la suite du mémoire.

Nous détaillons la méthode de tarification par exposition. Celle-ci se base sur un modèle d'exposition individuel.

B La tarification par exposition

Une problématique en tarification concerne les données reçues de la cédante. Celles-ci ne sont pas toujours détaillées par tête et nous devons adapter les méthodes de tarification en conséquence.

1 Les différentes méthodes de tarification

De manière générale les méthodes de tarification communément utilisées sont :

- **En non-proportionnel :**
 - La tarification non-paramétrique sur expérience : *Burning-cost*.
 - La tarification paramétrique (ou probabiliste) sur expérience : *curve-fitting* dans le modèle fréquence coût.
 - La tarification probabiliste sur exposition : méthode basée sur les tables de mortalité et d'incidence.

- **En proportionnel :**
 - La tarification est celle de la cédante car par nature du contrat, le réassureur et la cédante partagent le même risque.

Nous nous intéressons aux traités de réassurance sur des contrats de prévoyance.

- **En prévoyance individuelle**, les données sont souvent détaillées tête par tête du fait de la sélection des risques. Nous pourrions utiliser une tarification basée sur l'exposition du portefeuille. Le réassureur dispose des informations suivantes pour chaque assuré :
 - Sexe
 - Date de naissance
 - Sommes assurées
 - Type de couverture
- **En prévoyance collective**, le réassureur ne dispose pas nécessairement de données d'expositions. La cédante lui fournit un historique de primes et de sinistres. La méthode utilisée est dite *curve-fitting* ou modèle fréquence/coût. Le réassureur ajuste alors sur ces données d'expériences une loi de fréquence et une loi de coût des sinistres. Pour l'étude de ces contrats, nous avons utilisé un outil permettant de répliquer un profil virtuel de portefeuille suivant des hypothèses de tarification et les paramètres ajustés des lois.

Nous détaillons maintenant le modèle individuel utilisé pour les méthodes de tarification sur exposition.

2 Le modèle individuel

Cette modélisation requiert des données détaillées sur chaque assuré. Nous devons connaître la date de naissance et le montant du capital sous risque par assuré. L'information sur le sexe n'est pas essentielle car nous travaillons dans la suite avec des probabilités de décès unisexes. L'expérience historique peut permettre de calibrer cette probabilité.

Dans ce modèle, la charge annuelle globale de sinistre pour un portefeuille de n assurés est :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \times S_{a i}$$

Avec :

- $S_{a i}$ la somme sous risque de l'assuré i .
- $q_{x,i}$ la probabilité de décès unisexe de l'assuré i d'âge x
- $X_i \sim \text{Bernoulli}(q_{x,i})$ la variable aléatoire permettant de modéliser l'événement de décès. Les X_i sont indépendants.
- $X_i \times S_{a i}$ la charge sinistre de l'assuré i .

Pour le calcul de la loi de S en formule fermée, le produit de convolution est particulièrement complexe. D'autres méthodes de déterminations et d'approximations de la distribution existent. Nous n'utiliserons pas ces méthodes dans la suite, nous travaillerons uniquement par simulations.

3 Application à la réassurance

Nous appliquons différentes couvertures de réassurance au modèle individuel détaillé précédemment. Nous détaillons le calcul de la prime pure de réassurance.

- **Expression de la charge sinistre réassurée :**

Dans le cas d'un excédent de sinistre **lXSd** à 100 %, reconstitutions gratuites et illimitées, $AAD = 0$ et $AAL = +\infty$ la charge du réassureur est modélisée par :

$$S_{Reass\ XS} = \sum_{i=1}^n \text{Min}((X_i \times S_{a\ i} - d)_+, l) = \sum_{i=1}^n X_i \times \text{Min}((S_{a\ i} - d)_+, l) \quad (1)$$

Dans le cas d'une Quote-Part de taux de cession α à 100 % :

$$S_{Reass\ QP} = \sum_{i=1}^n X_i \times S_{a\ i} \times \alpha \quad (2)$$

Dans le cas d'un contrat Stop-Loss **LSLD** à 100 % après excédent de sinistre **lXSd** en (1), la charge du réassureur s'écrit :

$$S_{Reass\ SL\ sur\ XS} = EPI * \text{Min} \left(\left(\frac{S - S_{Reass\ XS}}{EPI} - D \right)_+, L \right) \quad (3)$$

Avec EPI le volume de prime annuel de l'assureur.

- **Prime pure de réassurance :**

La prime pure correspond à une vision moyenne de la sinistralité :

$$\text{Prime pure reassurance} = E(S_{Reass}) = \sum_{i=1}^n E(S_{Reass\ i}) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \times Sar_i = \sum_{i=1}^n q_{x,i} \times Sar_i$$

Avec Sar_i la somme sous risque annuelle réassurée de l'assuré i .

Dans le cas du contrat **lXSd** de l'équation (1) :

$$\begin{aligned} \text{Prime pure reassurance XS} &= E(S_{Reass\ XS}) = \sum_{i=1}^n E(\text{min}((X_i \times S_{a\ i} - d)_+, l)) \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i) \times Sar_i = \sum_{i=1}^n q_{x,i} \times Sar_i \end{aligned}$$

Avec $Sar_i = \text{min}((S_{a\ i} - d)_+, l)$, la somme sous risque annuelle réassurée.

L'inconvénient principal de cette méthode de tarification est qu'elle ne tient pas compte de l'historique des sinistres. Il faut pour cela ajuster la table de mortalité à l'expérience du portefeuille.

De plus, la prime pure ne capte que la vision moyenne du risque. Dans le cas d'un contrat *Stop-Loss* qui a pour principal objectif de protéger le résultat de la cédante contre un sinistre exceptionnel, la tarification ne peut se baser sur une vision moyenne du risque cédé. Analytiquement nous avons :

$$E\left(\left(\frac{S - S_{ReassXS}}{EPI} - D\right)_+\right) \neq \left(\frac{E(S - S_{ReassXS})}{EPI} - D\right)_+$$

L'expression de droite conduirait à un prix nul si $\frac{E(S - S_{ReassXS})}{EPI} \leq D$.

Or, le prix de la couverture *Stop-Loss* n'est pas nul puisqu'il peut être touché par des événements d'amplitude extrême et de fréquence rare.

C La surmortalité stochastique en tarification

Nous allons maintenant modéliser la charge sinistre d'un portefeuille. L'intégration d'un facteur de surmortalité dans le modèle individuel est détaillée ci-dessous.

1 Intégration des chocs de mortalité dans le modèle individuel

L'objectif du mémoire est de modéliser le risque de mortalité extrême tel qu'il est décrit dans Solvabilité II et d'étudier son impact sur différents paramètres techniques (rentabilité d'un contrat, niveau de capital économique, tarification).

- Pour la cédante, l'enjeu est double : celle-ci cherche premièrement à protéger son résultat contre des événements de mortalité extrême, et deuxièmement économiser une part importante du coût d'immobilisation de son capital.
- Pour le réassureur, l'enjeu est de proposer une couverture répondant aux exigences des cédantes tout en ajustant son niveau de capital économique. Nous cherchons à étudier l'impact du risque de surmortalité sur la volatilité de la charge sinistre réassurée. Nous utilisons donc un modèle de surmortalité stochastique.

Pour l'intégration du risque de surmortalité dans le modèle individuel, les étapes sont les suivantes :

- Générer un scénario de surmortalité suivant les âges x pour l'année 2013 :
 - *Mortalité sans chocs* : $q_{x \text{ tendance}}$
 - *Mortalité avec chocs* : $q_{x \text{ tendance}} + q_{x \text{ chocs}}$

Remarque: L'écriture des chocs sur la mortalité de tendance sera additive car elle nous permettra de comparer simplement nos résultats avec ceux des différentes autres études.

- Générer un scénario de charge sinistre assurée :

- *sans chocs* : $S_{ass} = \sum_{i=1}^n B(q_{x,i \text{ tendance}}) \times S_{a i}$
- *avec chocs* : $S_{ass} = \sum_{i=1}^n B(q_{x,i \text{ tendance}} + q_{x,i \text{ chocs}}) \times S_{a i}$

Avec :

- n le nombre de police dans le portefeuille.
- $q_{x,i \text{ chocs}}$ le choc de surmortalité d'un événement *CAT Life* sur la police i pour un individu d'âge x .
- $q_{x,i \text{ tendance}}$ la mortalité de tendance unisexe, prise par hypothèse à 50 % de la *THTF*.

En moyenne, la prime pure d'assurance ne tient pas compte de la mortalité extrême. En effet, celle-ci est théoriquement nulle en moyenne, ainsi :

$$\text{Prime pure assurance : } E(S_{ass}) \approx \sum_{i=1}^n q_{x,i \text{ tendance}} \times S_{a i}$$

Car :

$$E\left(\sum_{i=1}^n q_{x,i \text{ chocs}} \times S_{a i}\right) \approx 0$$

Nous avons plusieurs observations sur cette approche de modélisation.

- Un scénario de mortalité extrême touche l'ensemble des individus assurés. Celui-ci agit donc comme un facteur de conditionnement sur la sinistralité du portefeuille et comme un facteur de volatilité supplémentaire sur la mortalité. Dans notre modélisation la vision du risque est annuelle.
- Nous cherchons à modéliser des événements irréguliers, extrêmes, et rares. Nous devons prendre en compte les aspects de fréquence et de sévérité. De plus, l'amplitude des chocs doit être nulle en moyenne afin que la mortalité de tendance coïncide avec la mortalité moyenne globale. Pour cela notre modèle doit pouvoir aussi modéliser la sous-mortalité.
- Nous ne souhaitons pas nous restreindre au risque pandémique : l'histoire a montré que la surmortalité à l'échelle d'un pays pouvait être aussi due à des événements climatiques. L'inondation du *Yang Tsé Kiang* de 1933 a fait 3 700 000 victimes par exemple. La cause de cette sinistralité exceptionnelle n'a pas tant été l'inondation elle-même que la destruction des récoltes de riz et la famine qui a suivie. Nous allons nous baser sur l'ensemble des données historiques de mortalité disponibles sur le site *Human Mortality Database (HMD)* pour modéliser la volatilité de la mortalité dans son ensemble.

Dans la partie opérationnelle du mémoire, nous appliquons la méthode de *Monte Carlo* afin d'obtenir la distribution et la volatilité de l'engagement global des parties au contrat. Nous utilisons le modèle individuel des sommes « composées de *Bernoulli* » dans lequel nous intégrons une surmortalité stochastique.

Nous faisons néanmoins face à un problème d'optimisation du temps de calcul.

2 Optimisation du temps de calcul

Pour des raisons de temps de calcul, nous utilisons des regroupements d'assurés par âges pour les plus petits capitaux. Cette approche utilise des distributions *Binomiale* au lieu des *Bernoulli* individus par individus. Cette simplification de calcul, quoique entraînant une perte de volatilité, est essentielle pour le déroulement des calculs. Pour un portefeuille de 77 000 assurés et suivant 1 *million* de scénarios de surmortalité, les outils *R* et *Excel* ne peuvent pas générer pour chaque scénario, la perte au global du portefeuille par une approche purement individuelle.

Nous détaillons maintenant comment suivant notre modèle, nous pouvons séparer la charge sinistre *CAT Life* de celle liée à la mortalité de tendance.

3 Décomposition du risque de mortalité : CAT et tendance

Pour les deux méthodes de calcul utilisées (individuelle et regroupement par « *model points* »), nous avons séparé les pertes générées par les sinistres liés à la mortalité extrême et à la mortalité de tendance. La surmortalité entraîne un nombre de sinistres supplémentaires. Dans le même cas, la sous-mortalité peut engendrer une baisse des sinistres qui auraient « naturellement » lieu. D'après le théorème d'inversion, nous sommes en mesure d'identifier les sinistres liés au *CAT*, et les gains liées à la sous-mortalité.

Nous rappelons le théorème d'inversion des probabilités :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X . Notons F_X^{-1} l'inverse de la fonction F_X à gauche définie par

$$\forall x \in]0, 1[\quad F_X^{-1}(x) = \inf\{ y ; F_X(y) \geq x \}$$

Alors X a même loi que $F_X^{-1}(U)$ avec $U \sim \text{Uniforme}[0,1]$

Nous détaillons les différents cas possibles en appliquant ce théorème sur une loi *Bernoulli*.

Soit $U = u$. Nous avons généré une variable Uniforme. Deux cas s'offrent à nous, la surmortalité et la sous-mortalité.

- Si $q_{x \text{ chocs}} > 0$ (surmortalité)
 - Si $u \leq (1 - q_{x \text{ tendance}} - q_{x \text{ chocs}})$: survie sur la tendance
 - Si $u > (1 - q_{x \text{ tendance}} - q_{x \text{ chocs}})$ et $u \leq (1 - q_{x \text{ tendance}})$: sinistre CAT
 - Si $u > (1 - q_{x \text{ tendance}})$: sinistre sur la tendance

- Si $q_{x \text{ chocs}} < 0$ (sous-mortalité)
 - Si $u \leq (1 - q_{x \text{ tendance}})$: survie sur la tendance
 - Si $u > (1 - q_{x \text{ tendance}})$ et $u \leq (1 - q_{x \text{ tendance}} - q_{x \text{ chocs}})$: survie sur le CAT
 - Si $u > (1 - q_{x \text{ tendance}} - q_{x \text{ chocs}})$: sinistre sur la tendance

Si un sinistre est évité grâce à un choc de sous mortalité, nous modélisons la charge sous risque assurée comme un gain sur les pertes dues aux sinistres sur la tendance.

Dans tous les cas, nous avons les pertes relatives aux sinistres sur la tendance et les gains ou sinistres supplémentaires sur les chocs. La somme des deux indique la perte sur les deux risques. Nous allons maintenant développer un modèle de la surmortalité.

Nous cherchons à modéliser l'effet d'une catastrophe sur la mortalité de la population civile française. Pour cela, de nombreuses approches ont été développées par le passé dans les domaines de l'assurance, de la finance ou encore de l'épidémiologie. Nous pouvons distinguer deux grandes approches, la première est actuarielle et cherche à quantifier la surmortalité pour chaque individu d'âge donné, elle se base sur l'étude des taux de mortalité. La seconde est épidémiologique et se fixe pour objectif de comprendre la diffusion d'un agent biologique au sein d'une population. Le coefficient de choc de mortalité utilisé par l'*EIOPA* pour le module du risque *CAT Life* dans solvabilité 2, est lui-même le résultat d'un modèle épidémiologique. Dans la suite, nous allons utiliser une approche originale développée par Guette (2010) dans son mémoire d'actuaire. Il utilise une technique de lissage pour séparer la mortalité en deux composantes : une tendance lissée et une surface de chocs. Cette approche est technique car elle demande l'utilisation d'un modèle linéaire généralisé matriciel et des connaissances théoriques que nous introduirons. L'objectif du modèle est de générer des taux de surmortalité catastrophe en tenant compte des âges sur un horizon d'un an.

Nous introduisons le lissage par *spline* unidimensionnel et bidimensionnel, puis nous nous intéressons à l'estimation du modèle par l'utilisation de techniques statistiques relatives aux modèles linéaires généralisés. Nous appliquons enfin ces techniques à nos données afin de modéliser une surmortalité catastrophe.

Partie II – *Modèle de surmortalité par P spline : un modèle de lissage avec composante chocs*

IV Présentation du modèle

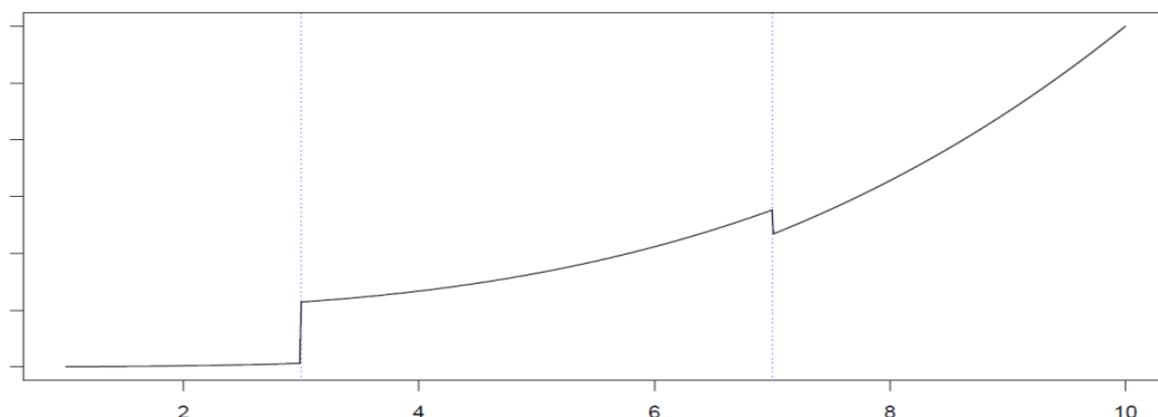
Dans ce chapitre nous développons les fondements mathématiques de notre modèle de lissage. Pour une application des techniques de lissage par *spline* à des données de mortalité, ainsi qu'une synthèse des équations du modèle appliqué dans ce mémoire, le lecteur intéressé pourra se référer *Currie and all* (2003).

L'estimation des taux bruts de mortalité se base sur des données d'expériences graphiquement irrégulières. Nous cherchons à corriger ces irrégularités et à visualiser plus fidèlement le phénomène de mortalité. Pour cela nous lissons nos données.

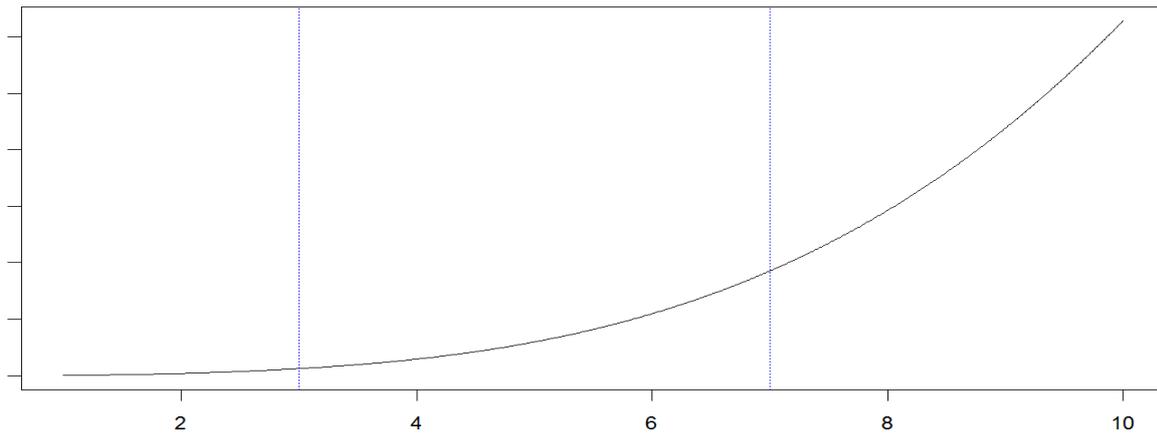
A Introduction aux *splines*

1 Définitions

Un lissage par *spline* consiste à ajuster sur chaque intervalle de la fonction à lisser, une autre fonction prédéfinie simple, en imposant des conditions de régularité aux bornes. Dans notre cas les fonctions de lissage à ajuster sont des polynômes pour lesquels nous faisons attention au bon raccordement des points de jonctions (aussi appelés « nœuds »), ci-dessous un exemple aux nœuds 3 et 7.



Graphique 2 Fonction spline discontinue aux nœuds



Graphique 3 Fonction spline continue à l'ordre 1 et 2

Nous cherchons à vérifier les conditions de régularité à l'ordre 1 (continuité et égalité des pentes), et 2 (égalité des courbures). Les polynômes utilisés pour le lissage sont d'ordre 3. Soit un intervalle d'étude $[x_0, x_2]$, nos données brutes à lisser sont dans cet intervalle. Nous le dissocions en deux autres distincts via un nœud intérieur x_1 . Notre objectif est de trouver la fonction *spline* q_x qui s'ajuste le mieux à nos données brutes en vérifiant les conditions de régularité.

Les équations de lissage sont les suivantes avec p_0 et p_1 deux polynômes de degré 3.

$$q_x = \begin{cases} p_0(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ p_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Les contraintes de jonction sur x_1 sont les suivantes :

$$\begin{cases} p_0(x_1) = p_1(x_1) \\ \frac{d}{dx} p_0(x_1) = \frac{d}{dx} p_1(x_1) \\ \frac{d^2}{dx^2} p_0(x_1) = \frac{d^2}{dx^2} p_1(x_1) \end{cases}$$

En respectant les contraintes établies ci-dessus il est possible d'estimer les polynômes p_0 et p_1 par la méthode des moindres carrés pondérés.

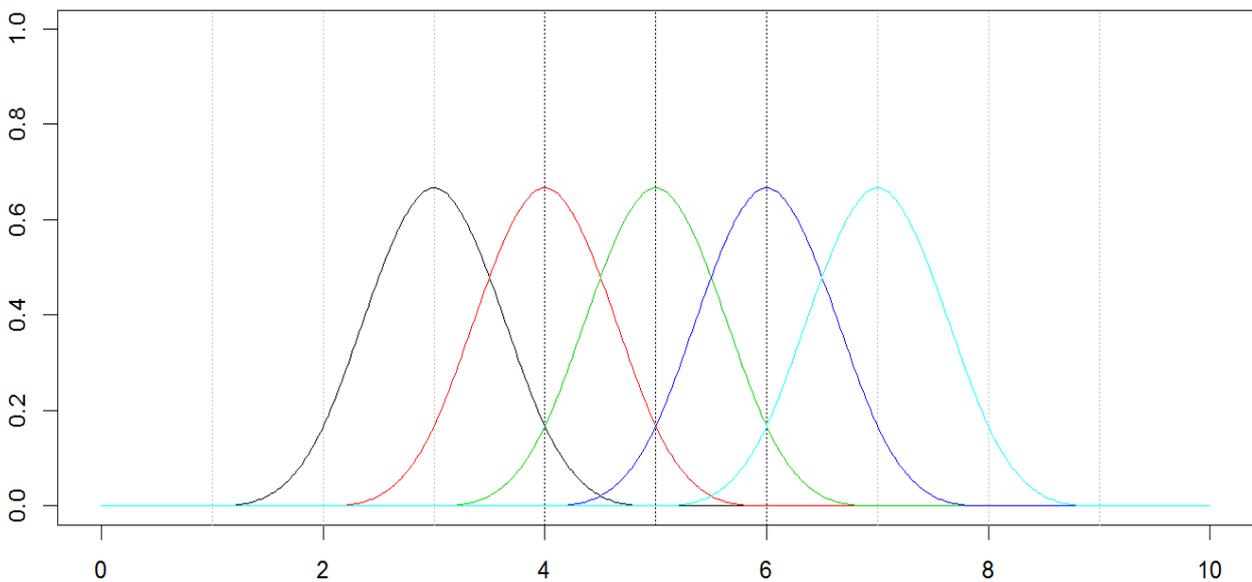
Dans un univers à plus grande dimension, nous posons le cadre mathématique nécessaire à la compréhension du lissage par *B-spline* pour montrer en quoi l'estimation des fonctions de lissage peut se ramener à celle d'un modèle linéaire généralisé.

2 Les B splines

Un B-spline de degré q est un raccordement de $q + 1$ polynômes chacun de degré q et vérifiant les contraintes de régularités énoncées précédemment, c'est-à-dire la continuité des raccordements aux q nœuds, ainsi que l'égalité des dérivées successives jusqu'à l'ordre $q - 1$. Les valeurs prises par un B-spline sont positives sur le domaine couvert par $q + 2$ nœuds et nulles partout ailleurs. Excepté aux bornes, un seul B-spline recouvre $2q$ polynômes des B-splines voisins. Ainsi pour un x fixé, différent d'un nœud, nous avons $q + 1$ B-splines non nuls.

Soit un intervalle de bornes x_{min} et x_{max} et n sous intervalles de même longueur bornés par $n + 1$ nœuds. Ainsi pour chaque x élément d'un sous intervalle il y aura $q + 1$ B-splines non nuls de degré q .

A titre d'exemple, voici en vert un B-spline de degré 3 sur l'intervalle $[0,10]$, entrecoupé par les B-splines voisins.



Graphique 4 Exemple de B-splines unidimensionnels

Nous avons bien 9 nœuds aux points 1 à 9 où la continuité jusqu'à l'ordre 2 est vérifiée. De même le B-spline central est positif sur $[3,7]$ et nul partout ailleurs. Pour un x différent d'un nœud, il y a bien 4 splines superposés non nuls. Par la suite nous exigerons une autre contrainte, à chaque nœud la somme des valeurs prises par les B-splines non nuls devra être égale à 1. En dehors des nœuds, cette somme peut être différente de 1.

Nous notons $B_j(x ; q)$ la valeur au point x du $j^{\text{ème}}$ B-spline de degré q toujours avec une répartition équidistante des nœuds. Ainsi pour des données brutes $(x_i ; y_i)$ la courbe lissée sera donnée par $\hat{y}(x) = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j B_j(x ; q)$. De plus pour chaque B-spline nous associons un nœud x_j , le point à partir duquel le B-spline devient non nul. Dans l'exemple précédent, notre B-spline central était associé au point 3.

3 Les P splines

Dans la mise en pratique de la technique de lissage, nous sommes confrontés au problème du choix des nœuds. Un nombre trop important de nœuds conduit à « sur-ajuster » la courbe lissée aux données d'origine. Inversement un nombre trop faible de nœuds conduit à un « sous-ajustement ». L'optimisation du nombre et de l'emplacement des nœuds est un problème pratique difficile à résoudre. En pratique, la littérature a recours à un nombre important de nœuds, donc à un possible « sur-ajustement », et à l'utilisation d'une pénalité dans les équations de vraisemblance afin de restreindre l'ajustement de la courbe. Dans l'utilisation du modèle, nous fixerons un nombre de nœuds arbitraire, et nous pénaliserons le modèle.

Soit m points $(x_i ; y_i)$, nos données brutes. Nous rappelons que nous disposons d'un intervalle $[x_{min} ; x_{max}]$ divisé en n sous intervalles. Nous souhaitons lisser nos données à l'aide de n B-splines. On cherche à déterminer les coefficients a_j par la méthode des moindres carrés. La fonction à minimiser est :

$$S = \sum_{i=1}^m \left\{ y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(x_i) \right\}^2$$

Avec :

- m le nombre de données brutes.
- $(x_i ; y_i)_{i \in [1 ; m]}$ les données brutes à lisser.
- $[x_{min} ; x_{max}]$ l'intervalle d'étude.
- n le nombre de B-splines de la base de lissage.
- (a_1, \dots, a_n) les coefficients de la base B-splines.
- $B_j(x_i)$ la valeur en x_i du B-spline j .

Les pénalités sont directement introduites dans le problème de minimisation. Eilers et Marx (1996) proposent une pénalité du type :

$$S = \sum_{i=1}^m \left\{ y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(x_i) \right\}^2 + \lambda \sum_{j=k+1}^n (\Delta^k a_j)^2$$

Avec k l'ordre de différenciation sur la pénalité.

λ est un paramètre de contrôle sur le degré de la pénalisation, on l'appelle « le paramètre de pénalité ». Plus λ est important, plus la pénalisation est forte, et donc la courbure du lissage est contrainte.

Un développement du système d'équation nous conduit à la représentation matricielle suivante :

$$\mathbf{B}'\mathbf{y} = (\mathbf{B}'\mathbf{B} + \lambda \mathbf{D}'_k \mathbf{D}_k) \mathbf{a}$$

- D_k la représentation matricielle de l'opérateur de différenciation Δ^k .
- $y' = (y_1, \dots, y_m)$ le vecteur des données brutes à lisser.
- $a' = (a_1, \dots, a_n)$ le vecteur des coefficients de la base B-splines.
- B la matrice dont les éléments sont tels que $b_{ij} = B_j(x_i)$.

Cette écriture du modèle sous forme matricielle est analogue celle d'un modèle linéaire généralisé. Dans un tel contexte, $\eta_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}a_j$ est un prédicateur linéaire, et g la fonction lien telle que, $\eta_i = g(\mu_i)$ avec μ_i l'espérance de notre variable réponse y_i . L'introduction d'une pénalisation dans la log-vraisemblance $l(y; a)$ conduit à une log-vraisemblance pénalisée :

$$L = l(y; a) - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=k+1}^n (\Delta^k a_j)^2$$

L'optimisation de la log-vraisemblance pénalisée conduit au système d'équation matricielle suivant :

$$B'(y - \mu) = \lambda D_k' D_k a$$

Dans la précédente formule, B joue le rôle de la matrice de régression.

Nous rappelons la théorie générale des modèles linéaires généralisés, et présentons les avantages de l'utilisation de modèles linéaires généralisés matriciels dans l'estimation du modèle.

B Les modèles linéaires généralisés

Nous allons dans cette partie détailler deux modèles linéaires. Nous rappelons les notations usuelles ainsi que les équations de vraisemblance.

1 Le modèle linéaire généralisé (GLM)

Nous indiquons les concepts et les calculs liés aux modèles linéaires généralisés, ensuite nous présentons une variante utile pour l'estimation du modèle de lissage.

Un modèle (GLM) se caractérise par :

- Un prédicateur linéaire $\eta_i = \langle x_i, \theta \rangle$, fonction pour un individu i du vecteur des variables explicatives x_i et du vecteur des paramètres à estimer θ .
- La loi de la variable à expliquer Y_i de la famille exponentielle. L'expression de la densité associée aux paramètres Y (localisation) et ϕ (dispersion) est :

$$f(y) = \exp \left[\frac{yY - b(Y)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right]$$

Avec pour cette famille de loi les propriétés suivantes : $b'(Y_i) = \mu_i = E(Y_i)$ et $Var(Y_i) = b''(Y_i) a(\phi)$. Ces propriétés permettent de simplifier le calcul de la vraisemblance.

- Une fonction lien g monotone, dérivable et telle que $g(\mu_i) = \eta_i$. L'introduction de g fait le lien entre le prédicteur linéaire fonction de nos variables explicatives, et notre variable réponse Y .
- De plus, une fonction g correctement choisie permet de simplifier les calculs de la vraisemblance selon la loi donnée à la variable réponse. Une fonction lien canonique est telle que $\eta_i = Y_i$.

L'estimation des paramètres du modèle par la log-vraisemblance $Ln(L) = \sum_{i=1}^n l(Y_i, \phi, y_i)$ conduit dans le cas d'une fonction lien canonique à :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial Y_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}$$

Avec :

$$\frac{\partial l_i}{\partial Y_i} = \frac{y_i - b'(Y_i)}{a(\phi)} = \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)}$$

Et :

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j} = x_i^{(j)} \forall j$$

D'où l'équation matricielle de vraisemblance :

$$\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$$

Dans le cas où la fonction lien choisie n'est pas la fonction canonique (c'est-à-dire $g(\mu_i) \neq Y_i$) nous avons :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}$$

Or :

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial Y_i} = b''(Y_i) = \frac{Var(Y_i)}{a(\phi)}$$

D'où l'équation de vraisemblance :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i) x_i^{(j)}}{Var(Y_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = 0 \quad \forall j$$

Ainsi, sous forme matricielle le système d'équation s'écrit :

$$\mathbf{X}' \mathbf{W}_\delta \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\mu}} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$$

Avec \mathbf{W}_δ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont définis par :

$$w_{ii} = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \right)^2 \text{Var}(Y_i)^{-1}$$

Où $\frac{\partial \eta}{\partial \mu}$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i}$.

La résolution d'une équation de vraisemblance d'un modèle *GLM* requiert la plupart du temps l'utilisation d'algorithmes itératifs tels que l'algorithme des scores de Fisher. En effet lorsque l'équation de vraisemblance est non linéaire et que les estimateurs ne peuvent être formulés autrement que comme solution de cette dernière, nous n'avons d'autres choix que d'utiliser des techniques numériques. Nous présentons ici un algorithme de résolution utilisé dans notre code par la suite.

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\mathbf{X}' \mathbf{W}_\delta \frac{\partial \eta}{\partial \mu} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$$

Cette équation n'est pas linéaire en θ (ici présent dans l'expression de μ), c'est pourquoi nous utilisons l'algorithme des scores de Fisher.

Cet algorithme itératif se fonde sur la résolution des équations normales :

$$\mathbf{X}' \mathbf{W}_\delta (\mathbf{z} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\text{Avec } \mathbf{z} = \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial \mu} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \eta}{\partial \mu} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$$

Pour θ fixé, \mathbf{z} est une donnée. \mathbf{W}_δ^{-1} est une nouvelle matrice de poids et on reconnaît dans l'équation (1) le système matriciel des moindres carrés généralisés associé à $Z = X\theta + \varepsilon$ avec $E(\varepsilon) = 0$.

Ainsi entre deux itérations :

$$\boldsymbol{\theta}^{[k+1]} = (\mathbf{X}' \mathbf{W}_\delta \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}_\delta \mathbf{z}$$

$$\text{Avec } \mathbf{z} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^{[k]} + \frac{\partial \eta^{[k]}}{\partial \mu} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}^{[k]})$$

L'algorithme s'arrête et retourne $\boldsymbol{\theta}^{[k+1]}$ lorsque l'écart entre $\boldsymbol{\theta}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\theta}^{[k+1]}$ est inférieur à un seuil fixé. En pratique, nous choisissons 10^{-6} .

Dans la suite, nous écrivons la solution de l'algorithme des scores de la manière suivante :

$$\mathbf{X}' \widetilde{\mathbf{W}}_\delta \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}' \widetilde{\mathbf{W}}_\delta \tilde{\mathbf{z}}$$

Où le tilde représente une solution approchée de l'équation normale, et où le chapeau représente une solution approximative de l'équation de vraisemblance.

Dans le cas d'un P-spline nous introduisons une pénalité dans la log-vraisemblance du modèle afin d'éviter un « sur ajustement » aux données d'origine. L'équation de l'algorithme des scores devient :

$$(X' \widetilde{W}_\delta X + P) \widehat{\theta} = X' \widetilde{W}_\delta \widetilde{z}$$

Avec $P = \lambda D_k' D_k$, λ le paramètre de contrôle de la pénalité, D_k la matrice de représentation de l'opérateur de différenciation Δ^k . Dans la suite du modèle, $k = 2$, la matrice de différenciation vérifie donc :

$$(\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)^2 + \dots + (\theta_{c-2} - 2\theta_{c-1} + \theta_c)^2 = \theta' D_2' D_2 \theta$$

Soit :

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Concernant le choix du paramètre de pénalité λ , celui-ci peut être arbitraire ou découler de l'application de critères de décisions tels l'AIC ou le BIC. Nous allons par la suite utiliser le critère du BIC. Celui-ci est simple à mettre en œuvre, et donne des résultats corrects.

2 Le modèle linéaire matriciel (GLAM)

Nous cherchons à appliquer notre modèle à des données de mortalité naturellement présentées sous forme de matrice. Ainsi par année et suivant les âges nous avons des décès et des expositions. Afin de tirer profit de cette structure matricielle et de gagner en temps de calculs, nous allons brièvement présenter la technique de résolution d'un GLM par un *Generalized Linear Array Model (GLAM)*, lequel présente les données sous forme de tableaux. Nous nous intéressons aux conditions requises par un GLM pour être résolu par un GLAM, et aux différentes techniques facilitant l'estimation des coefficients du modèle.

Un modèle linéaire généralisé est matriciel lorsque les données sont présentées sous forme de matrices et lorsque la matrice du modèle (celle des variables explicatives ou de régression) peut s'écrire sous la forme d'un produit de Kronecker. Un produit de Kronecker de deux matrices A et B respectivement de dimensions $m \times n$ et $p \times q$ se définit comme tel :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

L'intérêt du GLAM est qu'il traite la même information qu'un GLM via des opérateurs matriciels sur les matrices marginales de régression, ce qui permet de réduire le temps de calcul. Ceci est particulièrement adapté aux lissages multidimensionnels ayant un nombre important de paramètres et d'observations. Nous appliquons le concept du GLAM au cas unidimensionnel et bidimensionnel.

3 Le GLAM unidimensionnel

Les notations et les concepts sont ceux d'un modèle linéaire généralisé dont les données sont le prédicteur linéaire, la fonction lien et une loi de la famille exponentielle pour la variable réponse. Nous ferons le lien entre le GLAM et le GLM usuel.

Un GLAM traite la même information qu'un GLM mais d'une manière différente. Nous notons deux importantes différences. La matrice de poids \mathbf{W}_δ est un vecteur de poids \mathbf{w} dans un GLAM. De même les calculs de $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ et de $\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}$ sont simplifiés par l'utilisation d'opérateurs matriciels. Nous détaillons l'écriture alternative de $\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}$.

Soit $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_c)$ une matrice de dimension $n \times c$ et \mathbf{w} le vecteur des éléments diagonaux de la matrice \mathbf{W}_δ . Ainsi, $\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}$ est une matrice $c \times c$ dont les éléments (j, k) sont égaux à :

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X})_{jk} &= \sum_{i=1}^n w_i x_{ij} x_{ik} \\ &= (x_{1j}x_{1k}, \dots, x_{nj}x_{nk})\mathbf{w} \quad (1) \\ &= (\mathbf{x}_j * \mathbf{x}_k)'\mathbf{w} \end{aligned}$$

Avec $*$ l'opérateur pour le produit élément par élément de deux vecteurs.

Par souci de notation, nous allons introduire un autre opérateur matriciel appelé « tenseur colonne ». Le tenseur colonne d'une matrice \mathbf{X} de dimension $n \times c$ est défini de la manière suivante :

$$G(\mathbf{X}) = (\mathbf{X} \otimes \mathbf{1}') * (\mathbf{1}' \otimes \mathbf{X})$$

Ici $\mathbf{1}$ est un vecteur constant de 1, de longueur c (le nombre de colonnes de \mathbf{X}). $G(\mathbf{X})$ possède c^2 colonnes et n lignes comme \mathbf{X} .

Ci-dessous un exemple avec la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$:

$$G(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}a_{11} & a_{13}a_{11} & a_{12}^2 & a_{12}a_{11} & a_{13}a_{12} & a_{13}^2 & a_{11}a_{13} & a_{12}a_{13} \\ a_{21}^2 & a_{22}a_{21} & a_{23}a_{21} & a_{22}^2 & a_{22}a_{21} & a_{23}a_{22} & a_{23}^2 & a_{21}a_{23} & a_{22}a_{23} \end{pmatrix}$$

Comme l'exemple le montre, il s'agit du produit deux par deux des colonnes de la matrice à laquelle nous appliquons le tenseur.

Appliqué à notre modèle GLM, les opérateurs du GLAM conduisent à la relation suivante :

$$\underbrace{\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}, c \times c}_{\text{GLM}} \equiv \underbrace{G(\mathbf{X})'\mathbf{w}, c^2 \times 1}_{\text{GLAM}} \quad (2)$$

(L'opérateur \equiv signifie que les deux membres de l'égalité possèdent les mêmes éléments à des dimensions différentes). Le vecteur $G(\mathbf{X})'\mathbf{w}$ est un empilement de haut en bas des colonnes de $\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}$.

Nous définissons un autre opérateur permettant l'empilement des colonnes d'une matrice. Soit $\mathbf{m} = \text{Vec}(\mathbf{M})$ le vecteur des données associé à la matrice \mathbf{M} . Ainsi pour une matrice \mathbf{M} de dimension $n_1 \times n_2$ le vecteur \mathbf{m} est de longueur $n_1 n_2$.

Par exemple, si :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\mathbf{m}' = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23})$$

L'équation (2) s'écrit donc : $\text{Vec}(\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}) = G(\mathbf{X})'\mathbf{w}$ (3)

Ceci nous a permis de faire le lien entre une vision vectorielle (celle du *GLM* du membre de gauche de l'équation (3)) et une vision matricielle (celle du *GLAM* du membre de droite de l'équation (3)).

4 Le *GLAM* bidimensionnel

Dans cet exemple nous explicitons le passage du *GLM* au *GLAM* en utilisant les opérateurs définis dans le cas unidimensionnel. Premièrement notons \mathbf{Y} la matrice de dimension $n_1 \times n_2$ de notre variable expliquée. On note $\mathbf{y} = \text{Vec}(\mathbf{Y})$ l'équivalent vectoriel, et \mathbf{X} la matrice des variables explicatives. Par hypothèse \mathbf{X} peut s'écrire sous la forme d'un produit de Kronecker :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1, n_1 n_2 \times c_1 c_2$$

Avec \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 les matrices respectives des variables 1 et 2 de dimension $n_1 \times c_1$ et $n_2 \times c_2$. Le but de notre problème est de travailler l'écriture vectorielle d'un *GLM* sur la variable expliquée \mathbf{y} et de matrice de régression \mathbf{X} .

Nous définissons l'équivalent matriciel et vectoriel des coefficients du modèle avec la matrice \odot de dimension $c_1 \times c_2$, et $\boldsymbol{\theta} = \text{Vec}(\odot)$ le vecteur des coefficients de dimension $c_1 c_2 \times 1$. On note \mathbf{W} la matrice de poids.

Un premier avantage de l'utilisation du *GLAM* est dans le calcul de prédicteur linéaire via l'identité classique du produit de Kronecker :

$$\underbrace{\mathbf{X}_1 \odot \mathbf{X}_2'}_{\text{GLAM}}, n_1 \times n_2 \equiv \underbrace{(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1) \boldsymbol{\theta}}_{\text{GLM}}, n_1 n_2 \times 1 \quad (4)$$

Le calcul du terme de gauche présente l'avantage d'épargner le calcul du produit de Kronecker et donc de la matrice \mathbf{X} . Si l'on suppose que deux matrices \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 sont de dimension $10^3 \times 10^2$, le calcul du produit de Kronecker conduit à 10^{10} multiplications là où le membre de gauche n'implique que 10^8 opérations. Le *GLAM* permet d'optimiser le temps de calcul.

La résolution des équations de vraisemblance dans le cas d'un *GLM* classique s'effectue par l'algorithme des scores de Fisher, ce qui permet de trouver une approximation des coefficients du modèle par une approche itérative :

$$\mathbf{X}'\widetilde{\mathbf{W}}_\delta\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\widetilde{\mathbf{W}}_\delta\tilde{\mathbf{z}}$$

Le tilde représente la solution approximative de l'équation normale après itération et le chapeau une approximation de la solution de notre équation de vraisemblance initiale.

Comme dans le cas unidimensionnel nous explicitons le calcul alternatif de $\mathbf{X}'\mathbf{W}_\delta\mathbf{X}$ avec comme notations \mathbf{W} la matrice de poids de dimension $n_1 \times n_2$ et $\mathbf{w} = \text{Vec}(\mathbf{W}) = \text{diag}(\mathbf{W}_\delta)$.

A titre d'exemple pour $n = 6$:

$$\mathbf{w}' = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6) = \text{Vec} \begin{pmatrix} w_1 & w_3 & w_5 \\ w_2 & w_4 & w_6 \end{pmatrix}' = \text{diag} \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_6 \end{pmatrix}'$$

Le résultat que nous souhaitons démontrer est :

$$\underbrace{(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1)' \mathbf{W}_\delta (\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1)}_{\text{GLM}}, c_1 c_2 \times c_1 c_2 \equiv \underbrace{G(\mathbf{X}_1)' \mathbf{W} G(\mathbf{X}_2)}_{\text{GLAM}}, c_1^2 \times c_2^2 \quad (5)$$

En effet :

$$(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1)' \mathbf{W}_\delta (\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1) \equiv G(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1)' \mathbf{w} \quad \text{D'après l'équation (2)}$$

$$\text{Or :} \quad \equiv (G(\mathbf{X}_2) \otimes G(\mathbf{X}_1))' \mathbf{w}$$

Les colonnes de $G(\mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_1)$ sont les mêmes que celles de $G(\mathbf{X}_2) \otimes G(\mathbf{X}_1)$ mais dans un ordre différent.

$$\equiv G(\mathbf{X}_1)' \mathbf{W} G(\mathbf{X}_2) \quad \text{D'après l'équation (4)}$$

Les équations (4) et (5) montrent l'intérêt d'utiliser un *GLAM* : épargner le calcul de la matrice de régression pour l'utilisation des propriétés du produit de Kronecker. Dans le cas d'un lissage bidimensionnel, le grand nombre de paramètres et de données requiert d'importantes capacités de stockage, et un temps de calcul relativement long. Nous avons dans cette partie posé le cadre théorique du modèle, il s'agit maintenant d'appliquer et d'adapter celui-ci à nos données de mortalité.

V Application au lissage d'une surface de mortalité

Dans cette partie nous introduisons les données analysées, et appliquons notre modèle de lissage à une surface de mortalité. Nous adapterons dans un second temps le modèle initial afin de capter la surmortalité de nos données et pouvoir dans un dernier chapitre simuler des scénarios de surmortalité.

Le modèle introduit précédemment a été présenté par Guette (2010). Dans son mémoire, il applique la technique de lissage par *splines* à des données de mortalité. Nous avons poursuivi ses travaux en adaptant le modèle à la génération de scénarios.

A Présentation des données

Les données analysées proviennent du site *Human Mortality Database (HMD)*. HMD est le fruit d'une collaboration entre les départements de démographie des *Universités de Berkeley (USA, Californie)* et du *Max Plank Institute de Rostock (Allemagne)*. Le site recense un large éventail de données démographiques sur de nombreux de pays. Nous disposons pour la France du nombre de décès, de l'exposition au risque, d'un détail sur la structure démographique de la population, et de nombreux autres indicateurs utiles à des études de mortalité. Ces données sont détaillées suivant différentes plages d'âges et d'années sur les périodes 1816-2012 pour une population globale de 0 à 110 ans.

Dans le cadre d'une étude d'assurance, nous nous focalisons sur les données civiles qui excluent le personnel militaire pour les périodes 1914-1920, ainsi que 1940-1945. L'amplitude de la mortalité militaire pour ces deux périodes n'est pas négligeable sur l'estimation du modèle et introduit donc un biais par rapport à notre objectif initial : modéliser un risque assurable. Nous choisissons les individus âgés de 20 à 80 ans afin de cibler la population de nos portefeuilles d'étude. Comme le justifie Guette (2010), pour des contraintes de temps de calcul nous nous restreignons à la période 1900-2012. Ce qui nous conduit à un historique de 112 ans.

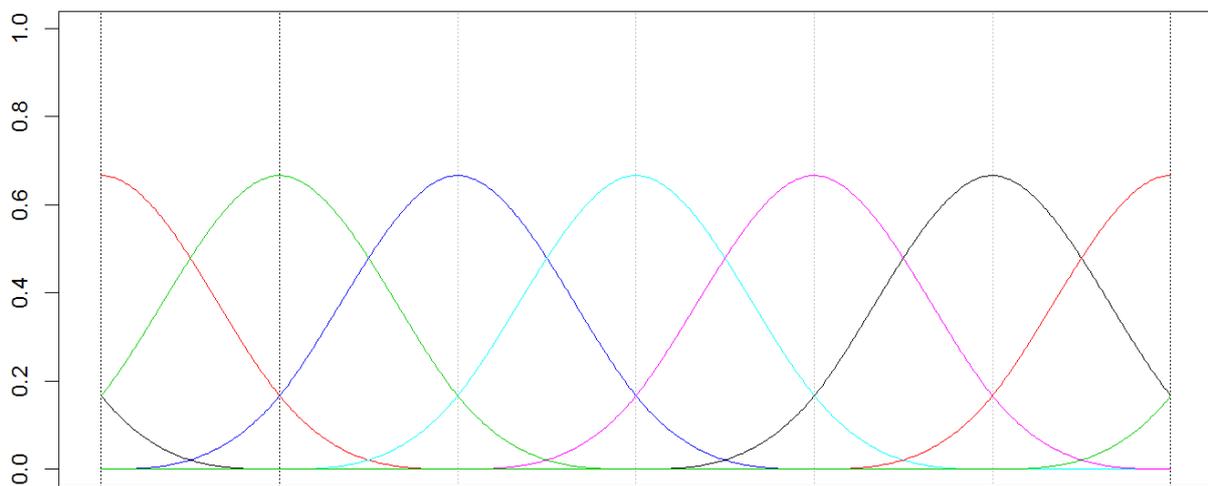
B Lissage Bidimensionnel sans chocs

Nous allons ci-dessous appliquer notre modèle à nos données. Nous présentons premièrement les équations du modèle.

1 Ecriture des équations du modèle

Nous étudions la plage d'âge 20-80 ans. Nous choisissons de placer un nœud tous les 5 ans pour un total de 15 nœuds, soit $c_a = 15$. La position des *splines* est ajustée sur les bords de la surface étudiée, c'est pourquoi le nombre de nœuds sur les âges est égal à 13. Nous n'avons pas testé la stabilité de l'ajustement du modèle suivant le choix de placement des nœuds. Le choix optimal est un problème complexe. Afin de ne pas sur-ajuster notre modèle aux données brutes, nous avons recours à une pénalisation.

La base de *B-splines* suivant les âges est de la forme suivante :

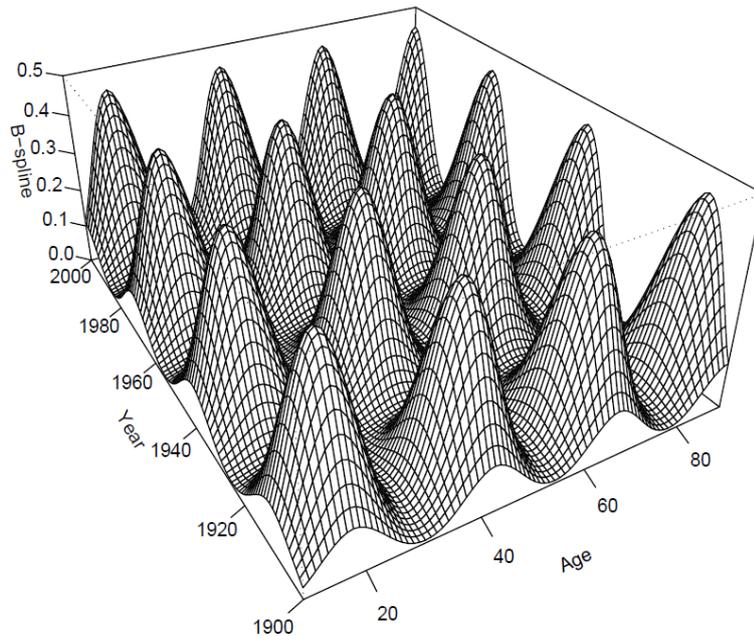


Graphique 5 Base de B-splines cubique

On note \mathbf{B}_k , le $k^{\text{ème}}$ spline de la base cubique $\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_{c_a}$. De même, x_a le vecteur des nœuds suivant les âges de notre base.

Nous avons deux matrices de régressions marginales \mathbf{B}_a et \mathbf{B}_y respectivement de dimension $n_a \times c_a$ et $n_y \times c_y$ pour les âges et les années. Rappelons que l'élément (i, k) de \mathbf{B}_a correspond à la valeur de \mathbf{B}_k évaluée au $i^{\text{ème}}$ élément de x_a . De même pour \mathbf{B}_y avec les années.

Par définition, la matrice de régression \mathbf{B} est le produit de Kronecker des deux bases de régression marginales : $\mathbf{B} = \mathbf{B}_y \otimes \mathbf{B}_a$ de dimension $n_a n_y \times c_a c_y$. Le graphique ci-dessous illustre une base *B-spline* cubique bidimensionnelle suivant les âges et les années :



Graphique 6 Un B-spline bidimensionnel, Source : Iain Currie (2013)

Afin de définir le modèle linéaire qui sera à estimer par la suite, nous supposons que le nombre de décès y_{ij} à l'âge i de l'année j suit une distribution de Poisson de moyenne $\mu_{ij} = e_{ij}\tau_{ij}$, où e_{ij} représente l'exposition au risque à l'âge i de l'année j et τ_{ij} le taux central de mortalité sur l'année j . La période d'étude est annuelle, ainsi nous supposons pour chaque année que le taux central de mortalité est égal au taux de mortalité instantanée. La distribution de Poisson est couramment utilisée pour les modèles de comptage, c'est pourquoi nous la choisissons (ici nous quantifions le nombre de décès). Nous définissons un modèle linéaire généralisé matriciel sur la variable réponse $Vec(\mathbf{Y})$, avec pour matrice de régression $\mathbf{B} = \mathbf{B}_y \otimes \mathbf{B}_a$, pour fonction lien \log , des erreurs de Poisson et une variable offset $Vec(\mathbf{E})$. Les coefficients à estimer sont ceux de la base de régression \mathbf{B} , en effet chaque B-spline des bases suivant les âges et les années correspond à un coefficient $\theta_{ij}, 1 \leq i \leq c_a, 1 \leq j \leq c_y$. La matrice de ces coefficients est notée \odot . De même le vecteur des coefficients de régression $\boldsymbol{\theta}$ est défini par $\boldsymbol{\theta} = Vec(\odot)$.

Avec les notations introduites, le modèle linéaire généralisé matriciel à estimer est pour la matrice de régression $\mathbf{B} = \mathbf{B}_y \otimes \mathbf{B}_a$:

$$\log(\mathbf{M}) = \log(\mathbf{E}) + \mathbf{B}_a \odot \mathbf{B}_y'$$

- \mathbf{E} la matrice des données d'exposition $(e_{ij})_{i,j}$.
- \mathbf{Y} la matrice des données de décès $(y_{ij})_{i,j}$.
- n_y le nombre d'années étudiées. Ici $n_y = 113$.
- c_y le nombre de nœuds de la base B-splines sur les années. Ici $c_y = 26$.
- n_a le nombre d'âges étudiés. Ici $n_a = 61$.
- c_a le nombre de nœuds de la base B-splines sur les âges. Ici $c_a = 15$.

Avec $M = E(Y)$. En ce qui concerne le terme de droite, il découle de l'égalité suivante :

$$B_a \odot B_y' \equiv (B_y \otimes B_a) \theta$$

Nous allons maintenant introduire la pénalisation pour le modèle bidimensionnel. Afin d'éviter que la surface lissée soit « sur ajustée », c'est-à-dire qu'elle soit erratique, nous pénalisons les lignes et les colonnes de la matrice de coefficients \odot :

$$P = \lambda_a I_{c_y} \otimes D_a' D_a + \lambda_y D_y' D_y \otimes I_{c_a}$$

Avec D_a , λ_a et D_y , λ_y les matrices de différenciation et les paramètres de pénalisation respectivement suivant les âges et les années.

Le choix des critères de pénalisation s'effectue par le critère de décision du BIC. Nous cherchons le couple (λ_a, λ_y) qui minimise le BIC. Le détail de cet indicateur est le suivant :

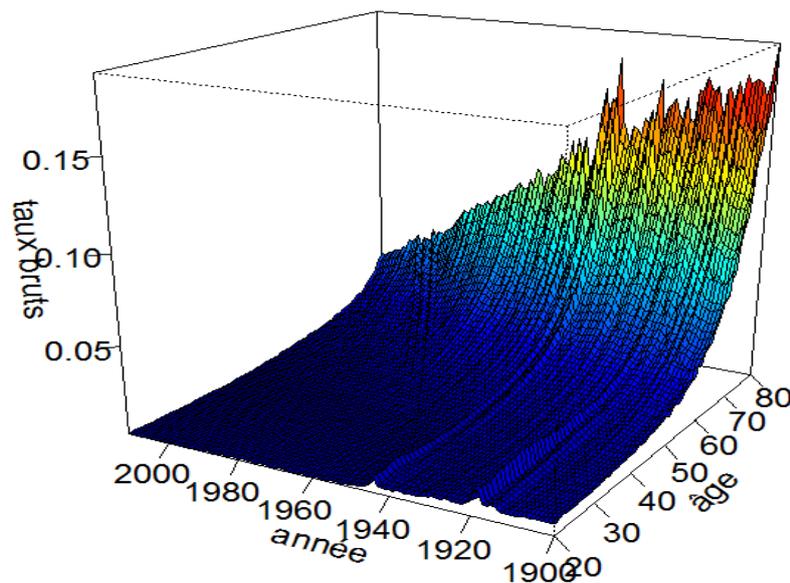
$$BIC = Deviance + Tr \times \ln(n)$$

Avec la *Deviance* exprimée dans un GLM par $Deviance = 2 \times (\ln(\hat{L}) - \ln(L))$ (\hat{L} la vraisemblance pour un modèle saturé). Tr est la trace de la matrice chapeau $H = B_y (B_y' \widehat{W}_\delta B_y + P)^{-1} B_y' \widehat{W}_\delta$.

Nous allons représenter graphiquement les données de mortalité utilisées et détailler le protocole de modélisation.

2 Protocole de modélisation

Nous rappelons que nous nous intéressons aux données d'exposition et au nombre de décès des années 1900 à 2012, pour la population française civile âgée de 20 à 80 ans. Une représentation graphique de la surface des taux bruts de mortalité (le rapport du nombre de décès sur l'exposition par âge et par année) est la suivante :

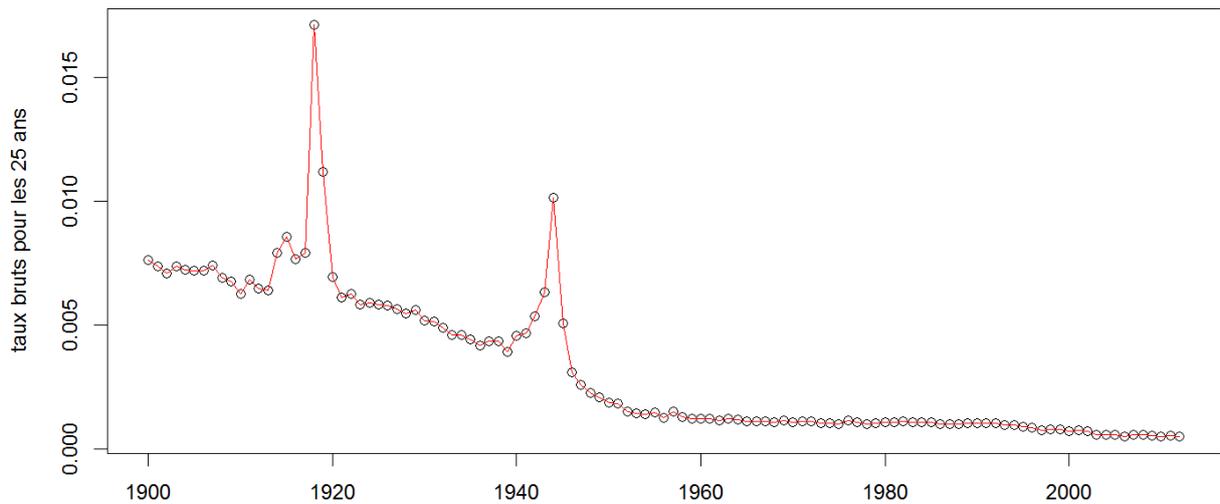


Graphique 7 Surface brute de mortalité en France entre 1900 et 2012 pour les 20-80 ans

Cette surface de mortalité illustre deux remarques fondamentales :

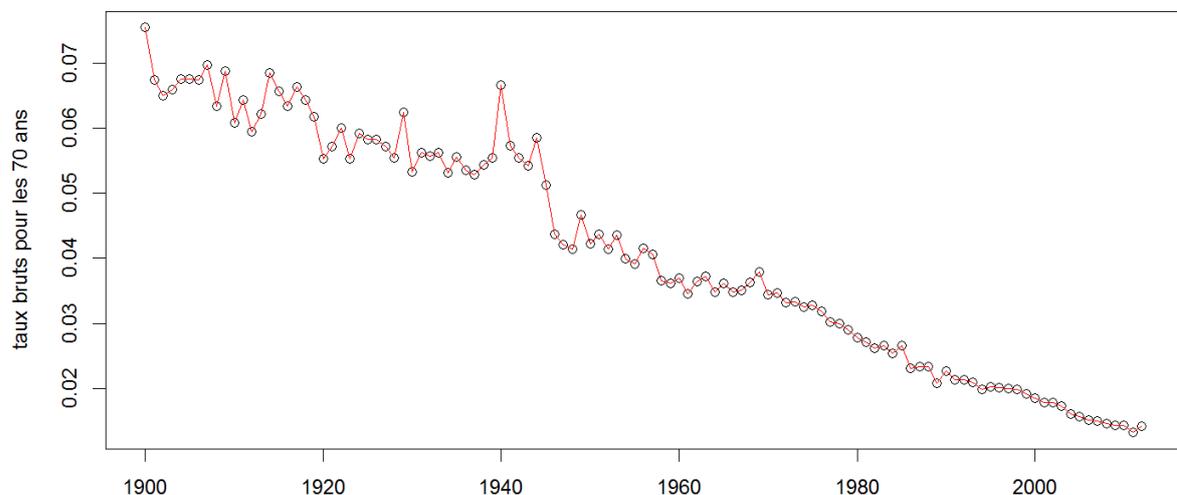
- Les chocs de mortalité attribués aux deux guerres mondiales sont significatifs (voir le graphique 8) car leurs effets sont nettement visibles sur l'ensemble de la population. Nous devons donc tenir compte de cet effet lors du calibrage de notre modèle de surmortalité. A noter que la pandémie de grippe de 1918 fait partie des événements dont nous cherchons à « capter » l'effet et doit donc être correctement retraitée.

Le graphique ci-dessous illustre l'impact des deux guerres mondiales sur la population des 25 ans (l'année 1918 inclut les effets de la pandémie de grippe espagnole) :



Graphique 8 Taux bruts de mortalité pour les 25 ans H/F de 1900 à nos jours

- Nous avons fait le choix d'estimer notre modèle sur une plage d'âge de 20 à 80 ans. Nous possédons en effet dans le portefeuille d'étude des assurés d'âges supérieurs à 70 ans. Pour les grands âges nous pourrions nous poser la question de la pertinence de notre modèle en étudiant l'importance relative de la surmortalité par rapport à la hausse de la mortalité naturelle.



Graphique 9 Taux bruts de mortalité pour les 70 ans H/F de 1900 à nos jours

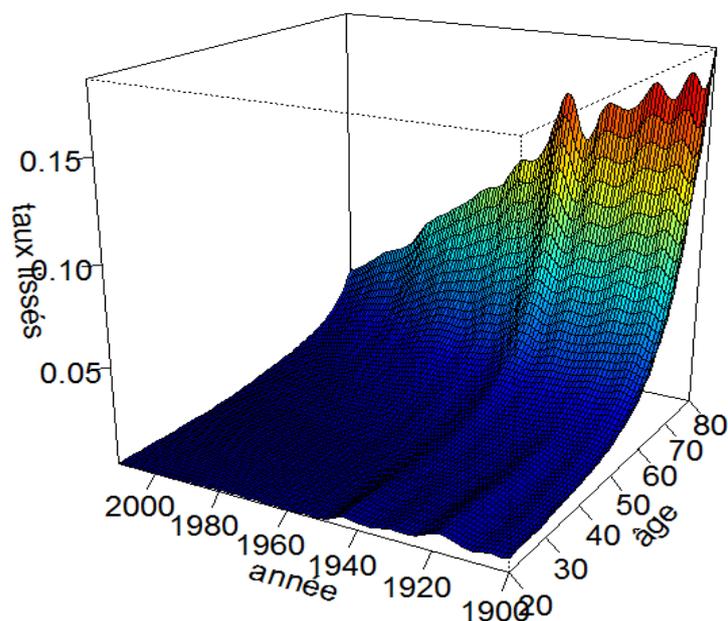
Les pics de surmortalité sont nettement moins visibles que pour les 25 ans. En effet la variation relative des pics de surmortalité autour de la tendance est plus faible que pour les jeunes âges.

Nous allons maintenant lisser cette surface en appliquant la théorie des *GLAM* à nos *P-splines* bidimensionnels. Le protocole d'estimation du modèle est le suivant :

- Placer les nœuds (un intervalle de 5 ans est fixé entre chaque nœud pour les âges et les années d'observation), soit $c_a = 15$ et $c_y = 26$.
- Construire les matrices de régression marginales \mathbf{B}_a et \mathbf{B}_y , les tenseurs colonnes de ces deux matrices, ainsi que le produit de Kronecker $\mathbf{B} = \mathbf{B}_y \otimes \mathbf{B}_a$. Le calcul de ce produit est requis pour l'initialisation de l'algorithme des scores.
- Construire les matrices de différenciation \mathbf{D}_y et \mathbf{D}_a , ainsi que la matrice de pénalisation \mathbf{P} .
- Optimiser le choix des paramètres de pénalisation λ_a et λ_y à l'aide de la minimisation du critère de choix de modèle : BIC.
- Initialiser l'algorithme des scores de Fisher. Pour ce faire nous posons $\boldsymbol{\theta}^{[-0]} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Y}$ la solution de l'équation de vraisemblance d'un modèle linéaire simple gaussien non pénalisé, avec \mathbf{B} calculé aux étapes précédentes. Afin d'améliorer l'initialisation, nous appliquons une première fois l'algorithme à $\boldsymbol{\theta}^{[-0]}$ pour un modèle linéaire généralisé pénalisé (seuil de tolérance à 10^{-6} , nombre maximal d'itérations égal à 20 et $\lambda_a = \lambda_y = 1$). Puis, nous posons $\boldsymbol{\theta}^{[0]}$ égal aux coefficients de régression estimés une première fois.
- Résoudre l'algorithme des scores de Fisher pour le modèle linéaire généralisé pénalisé initialisé à $\boldsymbol{\theta}^{[0]}$. Le seuil de tolérance est fixé à 10^{-6} , le nombre maximal d'itérations est de 20. Les paramètres de pénalisation sont optimaux par le critère du *BIC*.

3 Résultats

Le résultat final du lissage est le suivant :

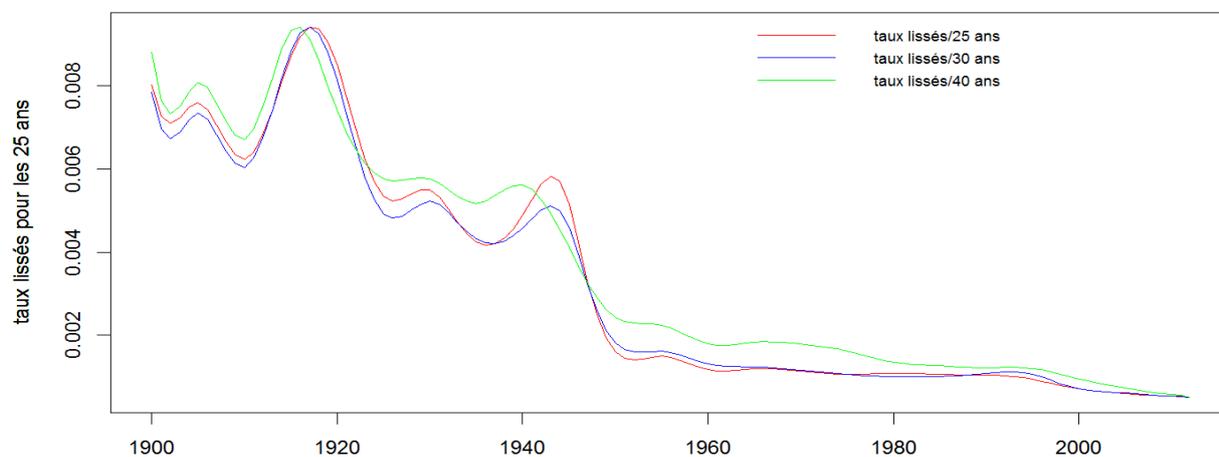


Graphique 10 Surface lissée de mortalité en France entre 1900 et 2012 pour les 20 à 80 ans

Les résultats de l'optimisation par le critère du BIC sont les suivants :

- $BIC = 166726,9$
- $\lambda_y = 0,003811015$
- $\lambda_a = 14,98148$

La surface lissée ne représente pas l'évolution « normale » de la mortalité. En effet nous pouvons encore distinguer des chocs de surmortalité sur cette surface. Pour les âges supérieurs à 60 ans, il y a une forte variation de la mortalité. Pour les âges inférieurs à 60 ans, nous distinguons clairement les deux guerres mondiales. Le graphique ci-dessous en témoigne en représentant les taux lissés de mortalité pour les 25-30-40 ans :



Graphique 11 Taux lissés de mortalité pour les 25,30 et 40 ans

Nous cherchons maintenant à modéliser séparément la surmortalité. Pour se faire nous allons utiliser un modèle linéaire généralisé avec composante choc additive, et comme précédemment nous utilisons pour les calculs la théorie des modèles linéaires généralisés matriciels avec composantes additives.

C Lissage Bidimensionnel avec chocs

Le but de cette partie est d'extraire la surmortalité de nos données d'origine et d'introduire un aspect stochastique dans cette modélisation, afin de pouvoir simuler et extrapoler la surmortalité sur une période à définir.

1 Ecriture des équations du modèle

Afin d'introduire une composante additive de surmortalité, nous allons estimer un modèle linéaire généralisé additif pénalisé à deux composantes. La première différence avec le modèle précédent concerne l'ajout d'un terme de pénalisation des chocs. L'expression de la matrice de pénalisation des chocs est la suivante :

$$\check{P} = \lambda_s I_{n_y} \otimes I_{c_s} = \lambda_s I_{n_y c_s}$$

Avec $c_s = 12$ pour un nombre de nœuds assez faible suivant les âges afin de repérer correctement les chocs. Pour cela nous choisirons d'avoir 7 ans entre chaque nœud. Pour rappel la matrice de pénalisation du modèle bidimensionnel sans chocs était la suivante $P = \lambda_a I_{c_y} \otimes D_a' D_a + \lambda_y D_y' D_y \otimes I_{c_a}$. La matrice de pénalité complète est $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \check{P} \end{pmatrix}$.

La deuxième différence concerne le prédicateur linéaire. L'estimation de la surface de surmortalité requiert l'introduction d'une matrice de régression propre que nous noterons \check{B}_a , et d'un nouveau vecteur des coefficients de régression noté $\check{\theta}$. La matrice \check{B}_a est une seconde matrice de régression B-spline suivant les âges, de dimension $n_a \times c_s$.

Nous n'introduisons pas de seconde matrice de régression des années car nous ne lisons les chocs que suivant l'axe des âges, pour chaque année fixée.

Le modèle linéaire généralisé additif pénalisé pour la variable réponse $Vec(Y)$ est donc le suivant :

$$\log(Vec(M)) = \log(Vec(E)) + (B_y \otimes B_a) \theta + (I_{n_y} \otimes \check{B}_a) \check{\theta}$$

Avec $M = E(Y)$. Nous avons toujours des erreurs de type Poisson, ainsi qu'une fonction lien log . L'évaluation des dimensions du problème justifie le choix d'une résolution par un modèle linéaire généralisé matriciel. La dimension des matrices Y et E est de $n_a n_y = 61 \times 113 = 6893$ (la période d'observation est 1900-2012, pour les âges de 20 ans à 80 ans). Le nombre de coefficients à estimer est de $c_a c_y + c_s n_y = 15 \times 26 + 12 \times 113 = 1746$. Les dimensions du problème sont relativement importantes et il serait intéressant de tirer profit de la structure matricielle des données. Le calcul des dimensions du problème justifie aussi le choix de notre période d'observation en années (1900-2012). Les données HMD sont disponibles pour la France à partir de 1816, une période d'étude plus importante aurait donc augmenté les dimensions du problème, et l'estimation des paramètres de pénalisation aurait été plus importante en temps de calcul.

Le modèle *GLAM* est donc adapté à notre problème :

$$\log(\mathbf{M}) = \log(\mathbf{E}) + \mathbf{B}_a \odot \mathbf{B}_y' + \check{\mathbf{B}}_a \check{\Theta}$$

Avec $\odot, c_a \times c_y$ et $\check{\Theta}, c_s \times n_y$ les matrices des coefficients de régression à estimer. Comme le montre Guette (2010) dans son analyse du modèle, la réduction des dimensions du problème est non négligeable ; pour le calcul du terme $(\mathbf{I}_{n_y} \otimes \check{\mathbf{B}}_a) \check{\theta}$ dans le *GLM* classique, l'ordinateur doit effectuer $(n_a \times n_y) \times (c_s \times n_y) = n_a n_y^2 c_s$ multiplications. Le calcul de $\check{\mathbf{B}}_a \check{\Theta}$ ne requiert pas le stockage en mémoire de $\mathbf{I}_{n_y} \otimes \check{\mathbf{B}}_a$ et s'effectue lui en $n_a \times (c_s \times n_y) = n_a n_y c_s$.

2 Protocole de modélisation

Le protocole d'estimation du modèle est sensiblement le même que pour le lissage bidimensionnel sans chocs :

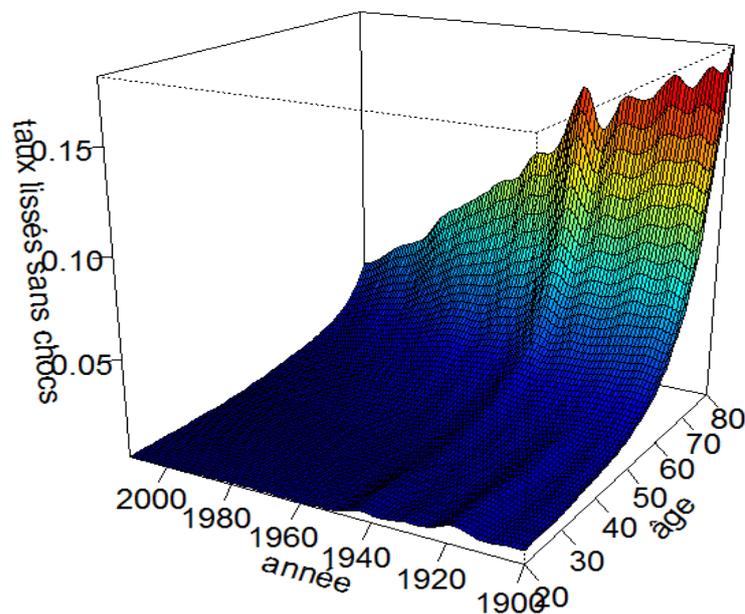
- Placer les nœuds (un intervalle de 5 ans est fixé entre chaque nœud pour les âges et les années d'observation), soit $c_a = 15$ et $c_y = 26$. Pour les chocs nous poserons des intervalles de 7 ans, soit $c_s = 12$.
- Construire les matrices de régression marginales $\mathbf{B}_a, \mathbf{B}_y$ et $\check{\mathbf{B}}_a$, les tenseurs colonnes des trois matrices, ainsi que le produit de Kronecker $\mathbf{B} = \mathbf{B}_y \otimes \mathbf{B}_a$. Le calcul de ce produit de Kronecker est requis pour l'initialisation de l'algorithme des scores.
- Construire les matrices de différenciation \mathbf{D}_y et \mathbf{D}_a , ainsi que la matrice de pénalisation \mathbf{P} .
- Optimiser le choix des paramètres de pénalisation λ_a, λ_y et λ_s à l'aide de la minimisation du critère de choix de modèle : BIC.
- Initialiser l'algorithme des scores de Fisher. Pour se faire nous posons $\theta^{[-0]} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{Y}$ la solution de l'équation de vraisemblance d'un modèle linéaire simple gaussien non pénalisé, avec \mathbf{B} calculé aux étapes précédentes. Afin d'améliorer l'initialisation nous appliquons une première fois l'algorithme à $\theta^{[-0]}$ pour un modèle linéaire généralisé pénalisé sans composante additive (seuil de tolérance à 10^{-6} , nombre maximal d'itérations égal à 20 et $\lambda_a = \lambda_y = 1$). Puis nous posons $\theta^{[0]}$ égal aux coefficients de régression estimés une première fois.
- Résoudre l'algorithme des scores de Fisher pour le modèle complet, c'est-à-dire le modèle linéaire généralisé pénalisé additif initialisé à $\theta^{[0]}$. Les coefficients de chocs sont initialisés à 0, donc $\check{\theta}^{[0]} = \mathbf{0}$. Le seuil de tolérance est fixé à 10^{-6} , le nombre maximal d'itérations est de 20. Les paramètres de pénalisation sont les paramètres optimisés.

3 Résultats

La principale difficulté du protocole concerne l'optimisation des paramètres de pénalisation λ_a , λ_y et λ_s par le critère du BIC. En effet une journée entière de calculs a été requise. Au final nous avons :

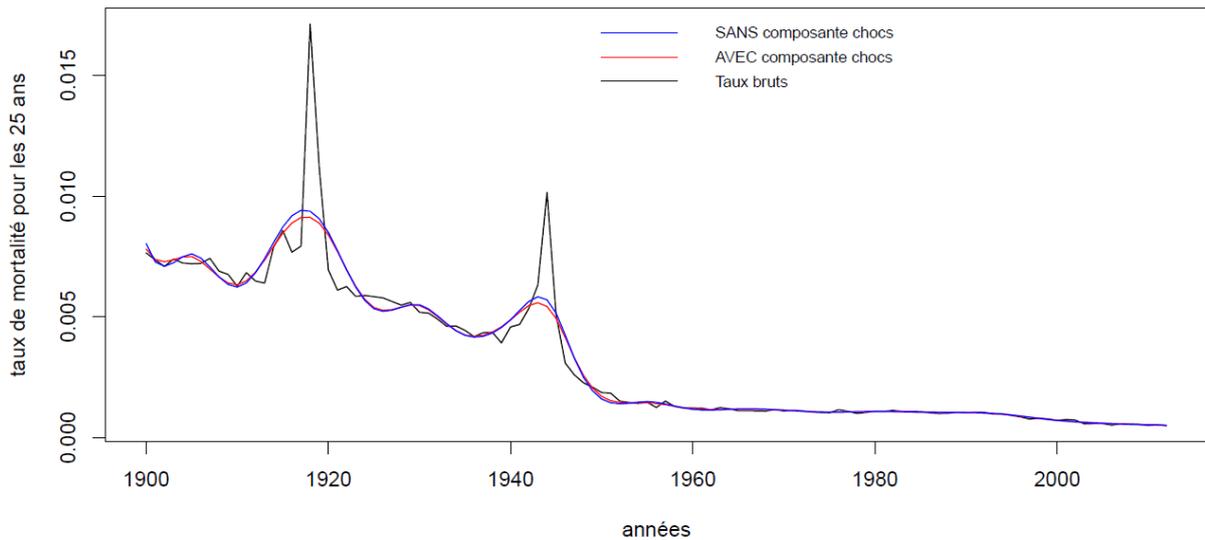
- $BIC = 30163,29$
- $\lambda_y = 1,420581$
- $\lambda_a = 13,0366$
- $\lambda_s = 1284,389$

La surface lissée est obtenue en calculant $\exp(\mathbf{B}_a \odot \mathbf{B}_y')$:



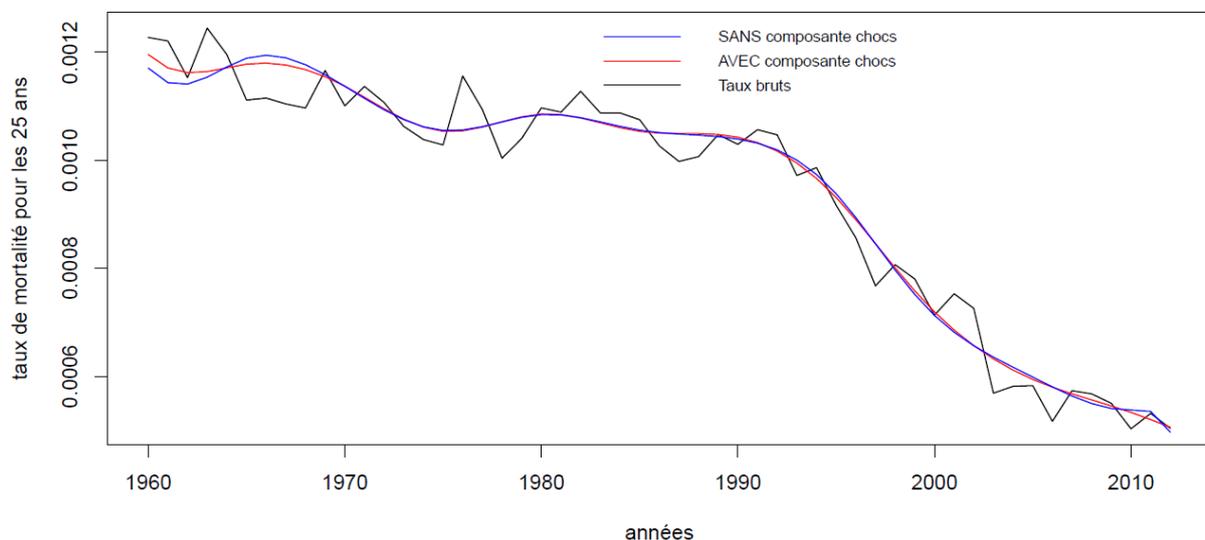
Graphique 12 Surface de mortalité lissée

Nous observons encore des chocs de mortalité sur les âges supérieurs à 60 ans. Nous étudierons la pertinence du modèle de surmortalité sur les grands âges. Pour les âges inférieurs à 60 ans, nous avons représenté la courbe lissée pour les modèles avec et sans composante chocs.



Graphique 13 Taux lissés de mortalité pour les modèles sans et avec composante choc pour les 25 ans

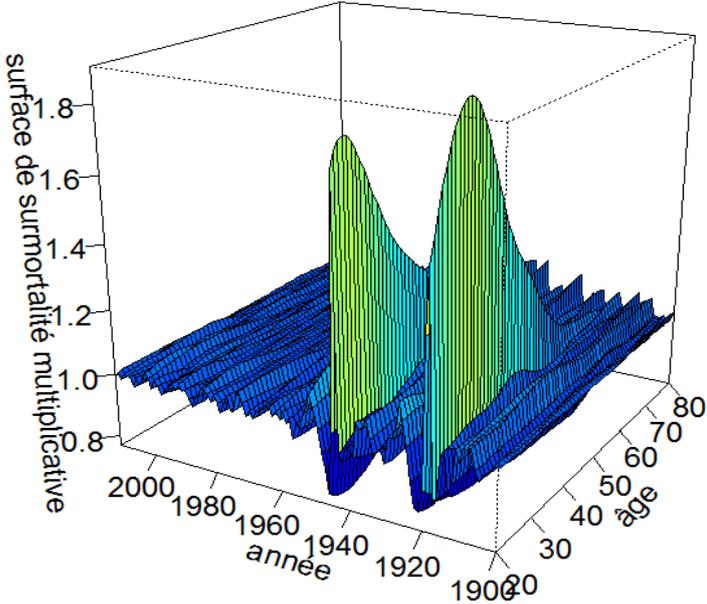
Le modèle avec composante choc permet d'améliorer sensiblement le lissage de la tendance. Dans les deux modèles, la majeure partie du choc de mortalité de la grippe espagnole de 1918 est prise en compte. Nous aurions attendu de meilleurs résultats graphiques. Néanmoins les coefficients de pénalisation permettant d'ajuster la force du lissage sont les mêmes pour l'ensemble de la surface lissée. L'intégration d'un quatrième paramètre de pénalisation permet une meilleure prise en compte des chocs. Iain Currie met cela en évidence sur les données de mortalité suédoise dans Currie (2008). La même représentation à partir de 1960 met en évidence une tendance d'évolution de la mortalité :



Graphique 14 Taux lissés de mortalité pour les modèles sans et avec composante choc pour les 25 ans

Le modèle avec composante de surmortalité lisse l'impact des chocs suivant les âges. Il pose un cadre de modélisation sur lequel nous pourrions travailler et effectuer des simulations, d'où son intérêt.

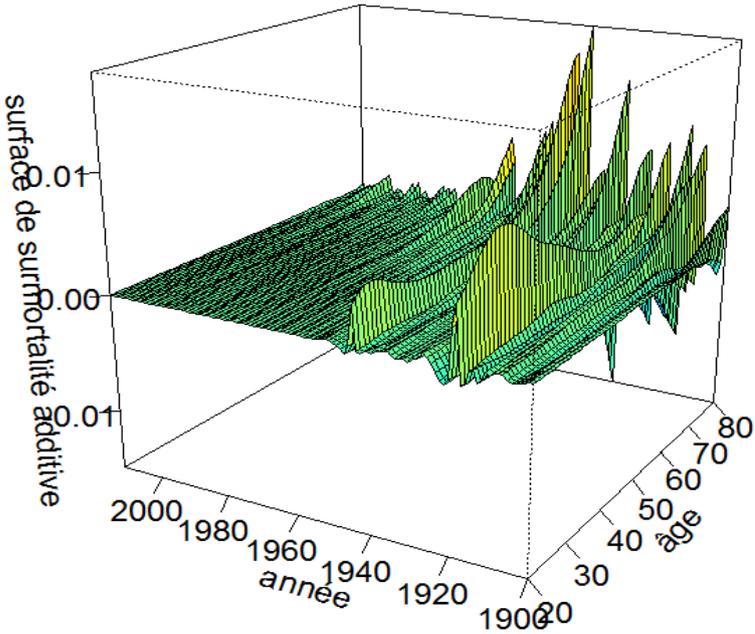
Nous obtenons la composante de surmortalité multiplicative en calculant $\exp(\widetilde{B}_a \odot)$:



Graphique 15 Surface de surmortalité multiplicative

Les données représentées par le graphique 15 sont les facteurs de chocs multiplicatifs estimés par le modèle, et à appliquer à la surface de mortalité lissée du graphique 12.

Par différence de la mortalité globale avec la surface de mortalité lissée (Graphique 12) nous en déduisons la surface de surmortalité additive :

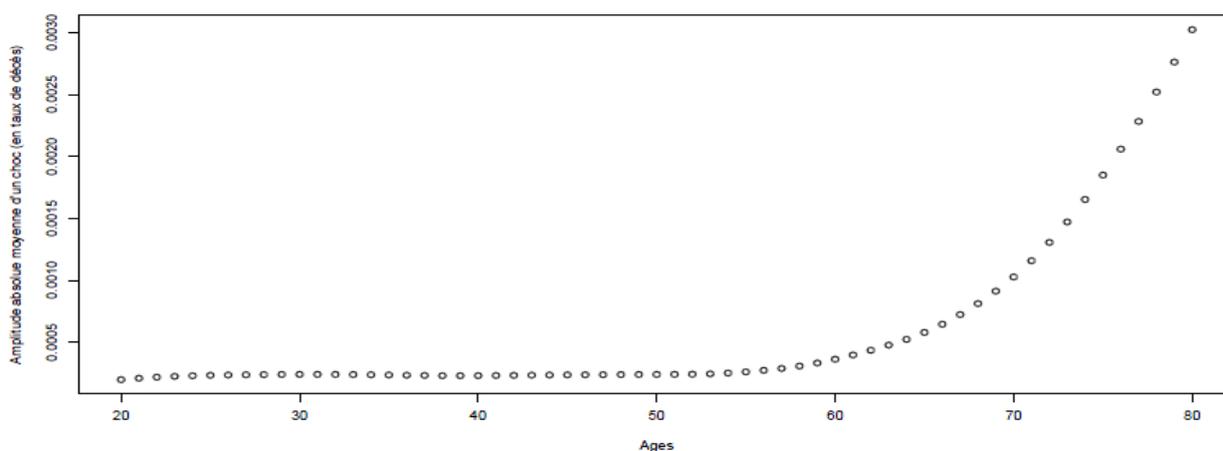


Graphique 16 Surface de surmortalité additive

Nous avons plusieurs remarques à faire concernant ces deux surfaces de surmortalité.

- Premièrement, si l'on observe de la surmortalité pour toutes les tranches d'âges comme avec l'année 1918 (Première Guerre Mondiale et grippe espagnole), nous observons aussi de la sous-mortalité. Celle-ci s'explique par le décès important des individus dont la santé était la plus faible lors des périodes de surmortalité, ainsi ne survivent que les individus les plus résistants, ce qui entraîne une sous-mortalité globale.
- La deuxième remarque concerne le caractère exceptionnel des chocs, notre modèle doit capter des événements rares ayant eu un impact sur la mortalité globale nationale de la France, ainsi en moyenne la surmortalité additive observée est « proche » de 0 (de l'ordre de 10^{-5}) sur les 112 ans étudiés.

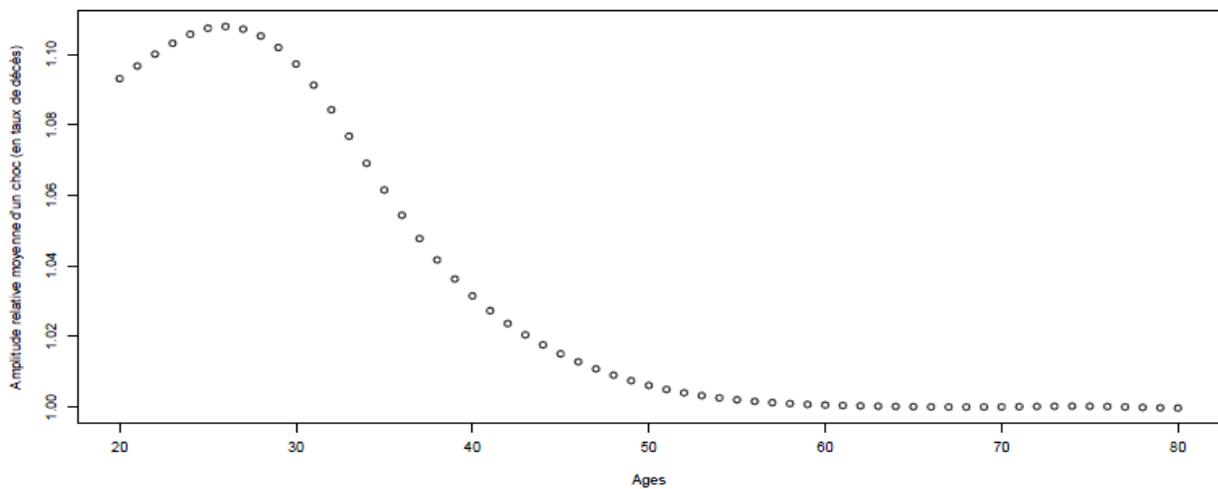
Le graphique ci-dessous représente pour chaque âge la moyenne sur les années observées des amplitudes absolues des chocs additifs de mortalité. Nous cherchons à savoir si le modèle évalue correctement la surmortalité d'événements catastrophes assurables sur la population nationale aux différents âges, ainsi nous avons retiré les années 1914 à 1917 (Première Guerre Mondiale), et 1939 à 1945 (Deuxième Guerre Mondiale). L'année 1918 est celle de la grippe espagnole, cet événement de type pandémie doit être pris en compte dans nos calculs et n'est donc pas retiré.



Graphique 17 Amplitudes absolues moyennes des chocs par âges

L'amplitude est d'environ 10^{-4} pour les âges inférieurs à 60 ans. Néanmoins à partir de 60 ans l'amplitude des chocs de surmortalité croît exponentiellement. Cette croissance est à relativiser par rapport à l'évolution de la mortalité lissée sans chocs aux différents âges.

Ainsi le graphique ci-dessous illustre les amplitudes relatives moyennes des chocs. Là aussi nous n'avons pas pris en compte les années correspondantes aux deux Guerres Mondiales.



Graphique 18 Amplitudes relatives moyennes des chocs par âges

En conclusion, l'amplitude des chocs de surmortalité décroît avec l'âge. A partir de 60 ans, le poids de la surmortalité des événements catastrophes est faible comparé à la hausse de la mortalité naturelle. Ce qui explique une hausse exponentielle des amplitudes absolues à partir de 60 ans. Nous pouvons ainsi dire que pour les grands âges la surmortalité catastrophe est « superflue » par rapport à la mortalité naturelle.

Une fois calculée la surface de surmortalité additive, nous introduisons dans la modélisation une dimension stochastique afin de simuler sur un an un scénario de surmortalité.

VI Génération de scénarios de surmortalité

Dans cette partie nous introduisons une dimension stochastique au modèle via les coefficients de régressions des bases B-*splines*. Nous ajustons les distributions paramétriques correspondantes à nos coefficients, nous extrapolons sur un an la surface de choc additive simulée. Enfin nous ajustons nos simulations pour nous ramener à une population assurée telle qu'elle sera étudiée dans la partie opérationnelle du mémoire.

A Construction du modèle stochastique de surmortalité

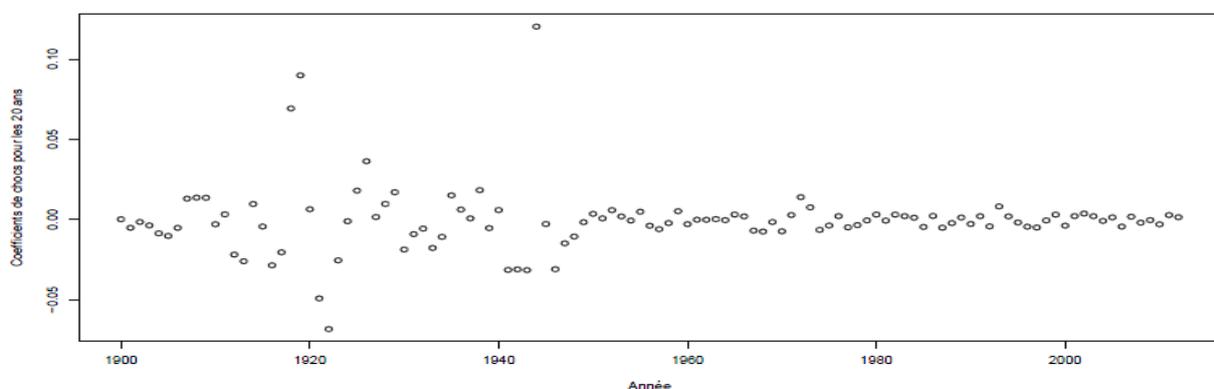
Premièrement nous extrapolons les deux composantes de la mortalité. Pour la composante lissée sans chocs nous posons une hypothèse simplificatrice. Pour la composante choc, nous nous intéresserons aux coefficients de régression de la surmortalité.

1 Extrapolation de la mortalité lissée sans chocs à un an

Pour chaque âge, nous ajustons la série des coefficients de lissage à une loi paramétrique connue. Ceci va nous permettre de simuler des scénarios de surmortalité multiplicative. Afin de nous ramener à une surmortalité additive et de simplifier notre approche, un décalage de un an sur la mortalité lissée sans chocs sera posé. Par exemple, pour une mortalité lissée en 2013 nous considérons celle de 2012.

2 Ajustement de lois paramétriques aux coefficients de chocs.

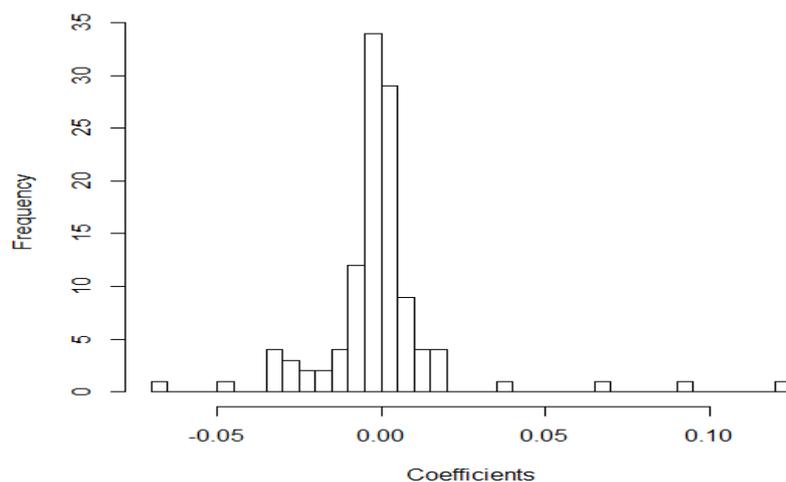
L'objectif de cette partie est de simuler un scénario de surmortalité additive sur un an. Pour ce faire nous n'allons pas directement nous intéresser aux taux de mortalité en sortie, mais aux coefficients de régression de la composante choc additive (les lignes de la matrice $\check{\Theta}$, $c_s \times n_y$). Les dimensions de notre surface d'étude nous conduisent pour un écart de 7 ans entre chaque nœud à 12 séries de coefficients de chocs. Chacune des lignes de $\check{\Theta}$ correspond à une série temporelle par tranche d'âge de taille n_y . A titre d'exemple voici la série de coefficients pour les individus âgés de 20 ans.



Graphique 19 Coefficients de chocs pour les individus âgés de 20 ans selon les années d'observation

Ici aussi les deux guerres mondiales sont nettement observables avec des coefficients de régression élevés pour les années 1918 et 1945.

Si nous représentons un histogramme de ces coefficients nous obtenons :



Graphique 20 Histogramme des coefficients de chocs pour les individus âgés de 20 ans

En ce qui concerne l'ajustement des distributions paramétriques à nos séries de coefficients, nous avons procédé comme suit.

La première est la lecture de Guette (2010). En effet, dans ce mémoire, le modèle est estimé sur la période 1900-2005. En ce qui nous concerne, nous étudions la période 1900-2012, nous avons fait le choix de refaire la démarche d'ajustement des distributions. Nos résultats sont cohérents avec ceux trouvés par Guette (2010) 5 ans plus tôt. Notre objectif est de rendre le modèle opérationnel, la cohérence de nos deux études est donc positive, et simplifie l'estimation annuelle du modèle d'une année après l'autre.

Nous détaillons la démarche d'ajustement des lois paramétriques pour la première série de coefficients, le détail pour les autres séries est disponible en « annexe 1 : ajustement des lois ».

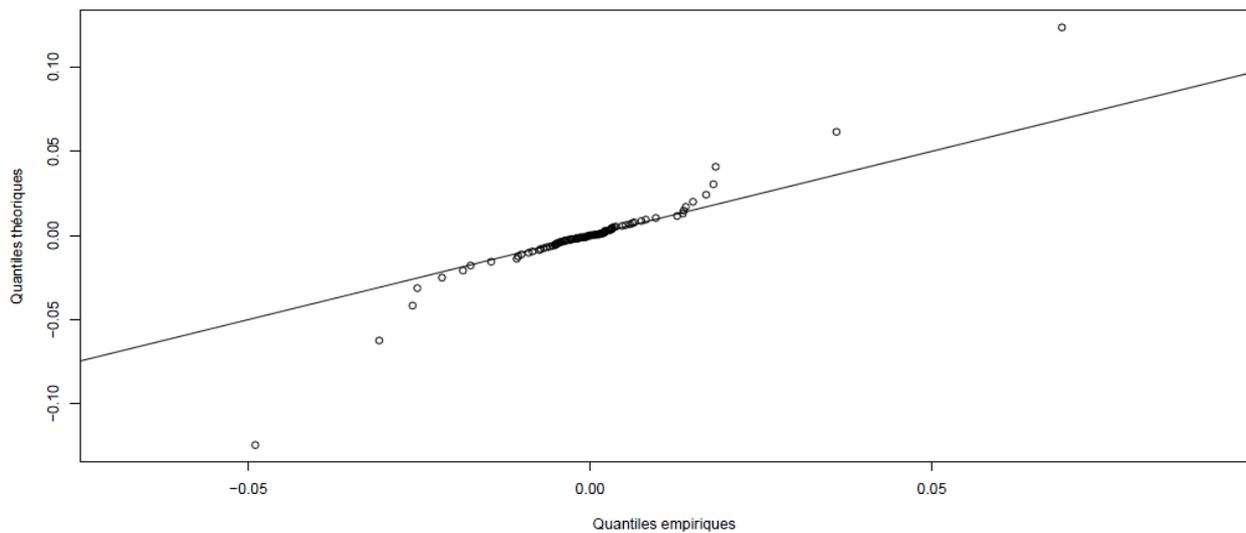
Nous insistons sur la dimension opérationnelle de notre modèle dans un contexte assurantiel. Nous avons retiré des coefficients de chocs étudiés ceux correspondant aux quatre premières années de la Première Guerre Mondiale (nous conservons 1918 et 1919 afin de prendre en compte les effets de la Grippe Espagnole de 1918-1919), ainsi qu'aux sept premières années de la Seconde Guerre Mondiale. Notre modèle doit prendre en compte l'ensemble des risques de surmortalité assurables et les guerres sont exclues des traités de réassurance auxquels nous souhaitons appliquer le modèle.

Afin d'avoir une première idée sur les lois à estimer nous avons utilisé l'outil *EasyFit* (édité par *Mathwave Technologie* et disponible à l'adresse suivante : <http://www.mathwave.com>).

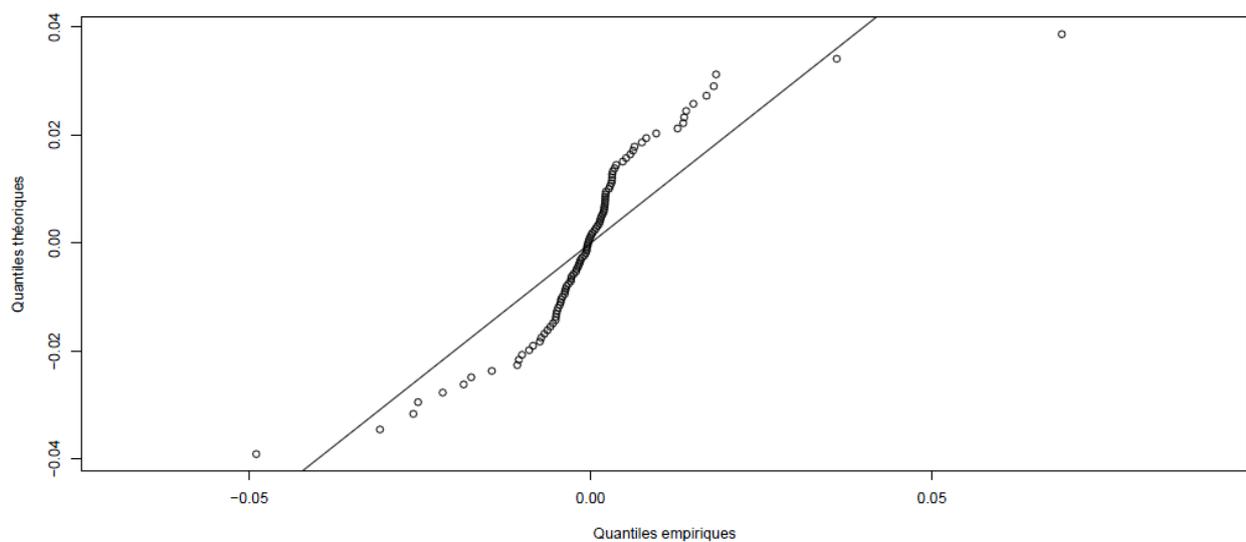
Les lois sélectionnées par l'utilitaire sont de nouveaux :

- la Normale
- la Logistique
- la Cauchy

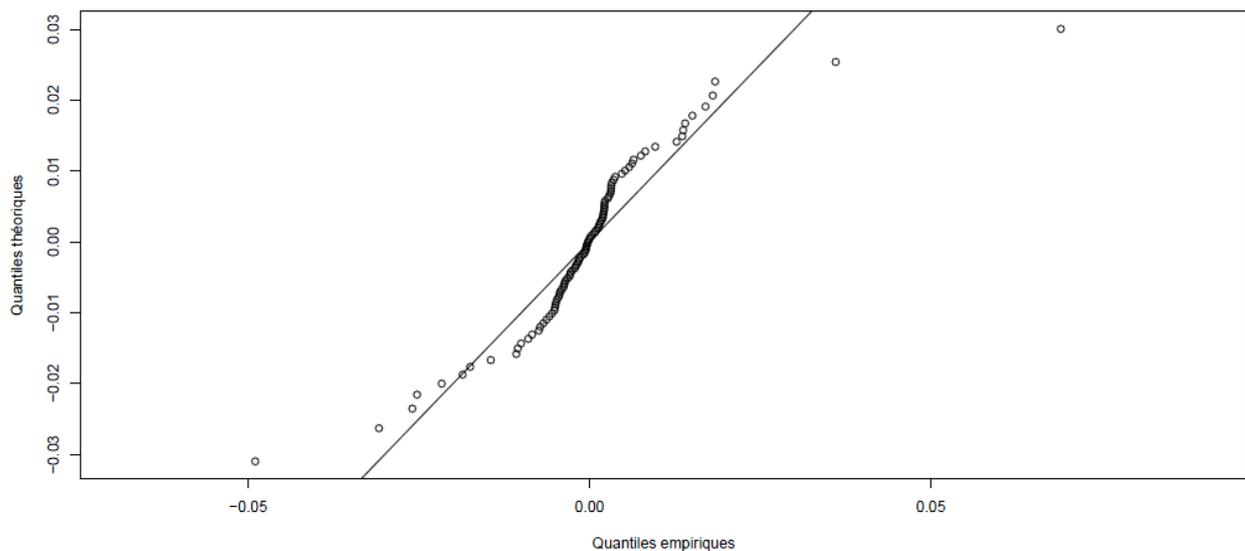
Nous ajustons et testons ces trois distributions avec la représentation des *QQplot*, et un test du *Khi – deux*. La représentation des *QQplot* pour la première série de coefficients est la suivante :



Graphique 21 *QQ plot* pour la distribution de Cauchy



Graphique 22 *QQ plot* pour la distribution Normale



Graphique 23 QQ plot pour la distribution Logistique

Dans le cas de la normale et de la logistique, l'alignement des *QQplot* n'est pas satisfaisant, que ce soit aux extrêmes ou non. Dans les trois cas l'ajustement de nos trois lois ne semble pas convenir aux valeurs extrêmes. La loi de Cauchy par exemple, surestime les extrêmes à droite et sous-estime les extrêmes à gauche. Néanmoins celle-ci s'ajuste très bien sur les autres données. Le choc le plus extrême étudié ici est celui de l'année 1918 du fait de la grippe espagnole.

Le choix de la loi de Cauchy sera justifié par les résultats des tests du *Khi – deux*. Cette loi permet d'introduire un niveau de prudence dans l'estimation de la surmortalité. Nous disposons d'un nombre limité de données, ainsi ajuster une loi de la théorie des valeurs extrêmes sur les quelques données extrêmes dont nous disposons n'aurait pas été opérationnel.

Nous allons nous assurer de la qualité de l'ajustement de ces trois lois par un test du *Khi – deux*. C'est un test statistique robuste et communément utilisé. Nous rappelons le principe du test. La statistique du test est la suivante :

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$$

Avec k le nombre de classes. Ce nombre est déterminé tel que chaque classe comporte au moins 5 observations. C_i représente l'effectif théorique de la classe i et O_i l'effectif de l'expérience observé dans la classe i . On cherche à tester l'adéquation d'une loi paramétrique choisie à nos données. Pour ce faire les deux hypothèses du test sont les suivantes :

H_0 : Notre échantillon est conforme à la distribution théorique choisie

H_1 : Notre échantillon n'est pas conforme à la distribution théorique choisie

Conditionnellement à l'hypothèse H_0 , la statistique du test suit une loi du χ^2 à $k - 1 - r$ degrés de libertés, avec r le nombre de paramètres à estimer de la loi théorique. Le calcul de la $p - value$ du test est le suivant :

$$p = P_{H_0}(\chi^2 > \hat{\chi}^2)$$

Pour un test de niveau α , nous acceptons l'hypothèse H_0 si et seulement si $p > \alpha$.

Les résultats des tests pour la première série de coefficients sont les suivants :

Série N° 1	p – value
Cauchy	0.44124
Normale	$1,11. 10^{-16}$
Logistique	$1,85. 10^{-5}$

Tableau 11 Résultats des tests du χ^2

Les résultats des tests sur les autres séries sont détaillés dans « annexe 1 : ajustement des lois ». Pour les séries allant de 1 à 7, la loi de Cauchy passe les tests et est la meilleure (**$p - value$** la plus élevée). Pour les séries allant de 7 à 12, la meilleure distribution est la loi logistique. En ce qui concerne nos observations pour les grands âges, l'épaisseur de queue plus importante pour la Cauchy par rapport à la Logistique va dans le même sens que la décroissance de l'amplitude des chocs avec l'âge.

Néanmoins le choix de la loi de Cauchy pour les séries 1 à 6 n'est pas sans conséquence sur le modèle et l'interprétation des résultats. A titre d'exemple ; la surmortalité additive pour les 20-80 ans n'a jamais dépassé 1,7 % en 112 ans et Deux Guerres Mondiales, or les simulations extrêmes de la Cauchy dépassent cet ordre de grandeur de très loin puisque nous obtenons des taux de surmortalité dépassant 10^6 . Ce résultat sur la loi de Cauchy était prévisible d'après les *QQplot* précédents. A partir d'un certain seuil, la loi de Cauchy n'est pas adaptée pour la modélisation de la mortalité. La suite de notre étude va montrer que ce seuil est supérieur à celui du quantile à 99,5 % défini par Solvabilité II. Nous comprenons aussi la nécessité de filtrer les scénarios simulés d'une manière cohérente.

Nous nous intéressons maintenant aux problématiques de simulations propres à la Cauchy, à ses conséquences sur les résultats du modèle, ainsi qu'à un filtre des scénarios simulés suivant un certain nombre de contraintes que nous détaillerons. Notre objectif est de pouvoir générer des q_x chocs additifs.

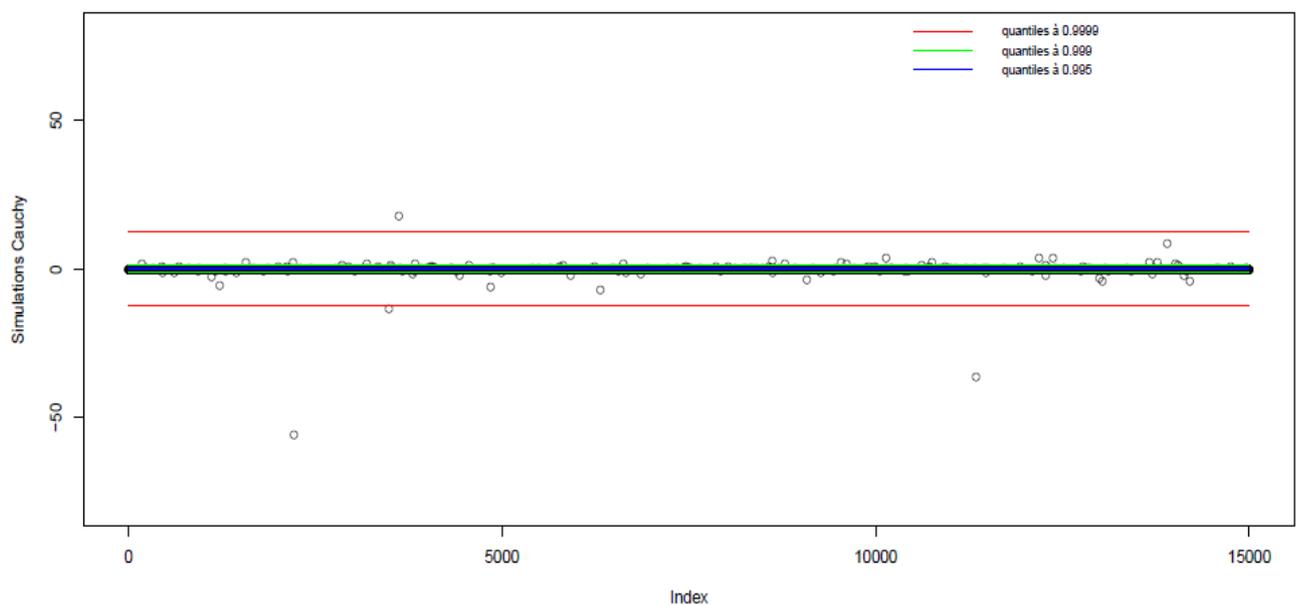
B Génération de qx chocs additifs sur une population assurée

Voici la définition de la densité d'une loi de Cauchy de paramètre de localisation $x_0 \in \mathbb{R}$ et de paramètre de dispersion $\sigma > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \times \sigma \times \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right]} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ceci implique que la loi de Cauchy n'admet aucun moment. De plus la loi des grands nombres ne s'applique pas. Une explication intuitive à ces propriétés peut être la suivante ; la moyenne empirique telle que nous la connaissons ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \in \mathbb{N}$ simulations) ne converge pas, peu importe le nombre de simulations il y aura toujours une valeur simulée dont l'ordre de grandeur sera suffisant pour « empêcher » la convergence. Nous rappelons que la loi de Cauchy est une loi à queue épaisse.

Le graphique ci-dessous illustre notre propos ; nous avons effectué 15 000 simulations et observé dans quelle mesure la simulation d'une loi de Cauchy peut conduire à des extrêmes (Ici $x_0 = -3,77 \cdot 10^{-4}$ et $\sigma = 0,00389$, les valeurs estimées par maximum de vraisemblance sur la première série de coefficients de chocs) :



Graphique 24 Simulation de 15000 Cauchy et représentation de trois quantiles

Sur 15 000 scénarios nous avons obtenu 4 valeurs extrêmes supérieures au quantile à 0.9999. De même nous observons un grand nombre de valeurs supérieures au quantile à 0.999. Ce sont ces simulations de coefficients de régressions qui une fois injectés dans le modèle de surmortalité conduisent à des taux de mortalité et des probabilités de mortalité aberrant(e)s : taux de mortalité de l'ordre de 10^6 ou plus, probabilités de mortalité globales (tendance et chocs) inférieures à 0.

Nous poserons donc un certain nombre de contraintes pour des raisons:

- **Techniques** : Nous devons nous assurer de travailler avec une probabilité globale de mortalité. Dans ce cas, nous devons borner les simulations dans les cas de sous-mortalité extrêmes simulés.
- **Historiques** : Certains niveaux de surmortalité extrêmes simulés sont très largement en dehors des ordres de grandeur que nous avons pu observer par le passé. Une représentation graphique des taux de mortalité simulés une fois le modèle estimé permettra d'illustrer la pertinence de cette contrainte.

De plus, nous avons un autre problème, il concerne l'indépendance entre les 12 simulations de nos coefficients de régression chocs. Nous effectuons les simulations indépendamment, ceci conduit à des scénarios peu cohérents en amplitudes. En effet il est tout à fait possible d'observer pour un scénario simulé un choc de période de retour 1/200 ans pour les 25-30 ans, et une sous-mortalité prononcée pour les 30-50 ans. Or si choc à « 1/200 ans » il y avait, celui-ci toucherait toute la population à des amplitudes différentes en fonctions des âges. Nous n'allons donc pas simuler séparément nos 12 variables aléatoires de coefficients de chocs.

Nous procéderons en quatre étapes :

- Expliciter le calcul des q_x chocs additifs à partir de nos taux de mortalité instantanés.
- Expliquer les contraintes utilisées dans le filtre des scénarios.
- Simuler des coefficients de chocs sur un même événement.
- Détailler le protocole de simulation afin de résumer notre méthode de génération des scénarios.

1 Calcul des q_x chocs additifs

Nos données d'origine sont une matrice de nombres de décès pour les âges allant de 20 à 80 ans et suivant les années 1900 à 2012, ainsi qu'une même matrice concernant l'exposition au risque à chaque âge et année. Le rapport du nombre de décès sur l'exposition au risque pour des individus d'âges x sur une période Δt est le taux central de mortalité noté $m_{\Delta t; x}$. Le taux de mortalité instantané est lui défini par la relation suivante :

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_{\Delta t; x}.$$

Dans le cas d'une population nationale où notre période d'étude Δt est égale à 1 an nous pouvons supposer l'approximation suivante :

$$\mu_x \sim m_x$$

De plus sous l'hypothèse de constance entre $[x, x + 1]$ du taux de mortalité instantané à $t \in [1900, 2012]$ fixé, nous pouvons écrire la probabilité de décès à l'âge x l'année t comme :

$$q_{x; t} = 1 - e^{-\int_{\tau=0}^1 \mu_{x+\tau; t} d\tau} \Leftrightarrow q_{x; t} = 1 - e^{-\mu_{x; t}}$$

Dans notre modèle nous avons décomposé $\mu_{global_{x;t}}$ par :

$$\mu_{global_{x;t}} = \mu_{lissé sans chocs_{x;t}} + \mu_{chocs_{x;t}} \geq 0$$

Afin de nous ramener à une décomposition additive du $q_{global_{x;t}}$ et de trouver une contrainte cohérente sur nos simulations, nous allons procéder à une décomposition en séries entières de la fonction $u \rightarrow 1 - e^u$. Notre objectif est de travailler une décomposition de la forme :

$$q_{global_{x;t}} = q_{lissé sans chocs_{x;t}} + q_{chocs_{x;t}}$$

Le développement limité à l'ordre 2 de $q_{global_{x;t}}$ conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} q_{global_{x;t}} &= 1 - e^{-(\mu_{lissé sans chocs_{x;t}} + \mu_{chocs_{x;t}})} \\ &\approx (\mu_{lissé sans chocs_{x;t}} + \mu_{chocs_{x;t}}) - \frac{(\mu_{lissé sans chocs_{x;t}} + \mu_{chocs_{x;t}})^2}{2} \end{aligned}$$

En développant nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_{global_{x;t}} &\approx \mu_{lissé sans chocs_{x;t}} - \frac{(\mu_{lissé sans chocs_{x;t}})^2}{2} + \mu_{chocs_{x;t}} \\ &\quad - \frac{(\mu_{chocs_{x;t}})^2}{2} + \mu_{lissé sans chocs_{x;t}} \times \mu_{chocs_{x;t}} \end{aligned}$$

Etudions chaque terme de la décomposition :

$$\begin{aligned} \mu_{lissé sans chocs_{x;t}} - \frac{(\mu_{lissé sans chocs_{x;t}})^2}{2} &\approx 1 - e^{-\mu_{lissé sans chocs_{x;t}}} \\ &= q_{lissé sans chocs_{x;t}} \quad (1) \end{aligned}$$

Par le même développement limité que sur $q_{global_{x;t}}$ le premier terme de la décomposition peut être identifié à un $q_{lissé_sans_chocs_{x;t}}$.

$$\mu_{chocs_{x;t}} - \frac{(\mu_{chocs_{x;t}})^2}{2} \approx 1 - e^{-\mu_{chocs_{x;t}}} = q_{chocs_{x;t}} \quad (2)$$

Par le même développement limité que sur $q_{global_{x;t}}$ le second terme de la décomposition peut être identifié à un $q_{chocs_{x;t}}$.

Remarque : L'expression (2) de $q_{chocs_{x;t}}$ n'est pas homogène à celle d'une probabilité de décès classique car celle-ci peut être négative lorsque $\mu_{chocs_{x;t}} < 0$, c'est-à-dire lorsqu'il y a sous-mortalité. Nous continuerons néanmoins à utiliser la notation q .

Le troisième terme est :

$$\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t} \times \mu_{\text{chocs}}_{x;t} \quad (3)$$

Celui-ci correspond à l'erreur sous-jacente à l'identification de (1) et (2). L'étude de l'amplitude absolue moyenne des chocs montre que les taux de surmortalité avant 60 ans sont de l'ordre de 10^{-4} (à partir de 60 ans, l'ordre de grandeur est de 10^{-3}). En ce qui concerne l'amplitude absolue moyenne des taux de mortalité lissés sans chocs, avant 60 ans l'ordre de grandeur est de 10^{-3} , après 60 ans celui-ci est de 10^{-2} . En résumé l'ordre de grandeur de notre erreur est avant 60 ans, de 10^{-7} pour une amplitude moyenne de 10^{-3} sur la tendance ; et de 10^{-5} pour une amplitude moyenne de 10^{-2} sur la tendance après 60 ans. Nous considérerons le terme (3) négligeable par la suite.

Pour le calcul des $q_{\text{chocs}}_{x;t}$ et pour éviter une erreur d'approximation sur le développement limité à l'ordre 2 (minoration de 10 % par rapport à la formule théorique), nous utiliserons la relation :

$$q_{\text{chocs}}_{x;t} = e^{-\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t}} - e^{-(\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t} + \mu_{\text{chocs}}_{x;t})}$$

Nous détaillons maintenant les contraintes qui doivent être vérifiées par notre modèle afin de nous assurer de la viabilité des résultats de nos simulations.

2 Contraintes sur les simulations

Premièrement, nous devons nous assurer de travailler sur des probabilités tant au niveau des formules théoriques que des approximations faites par le développement limité détaillé précédemment.

Les contraintes posées pour un scénario de surmortalité simulé l'année t sont :

- $\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t} + \mu_{\text{chocs}}_{x;t} \geq 0 \leftrightarrow 1 - e^{-(\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t} + \mu_{\text{chocs}}_{x;t})} \geq 0$
- $1 - e^{-(\mu_{\text{lissé sans chocs}}_{x;t} + \mu_{\text{chocs}}_{x;t})} \leq \frac{1}{2}$

La première contrainte nous assure de travailler avec une probabilité de décès globale (tendance et chocs). Cela permet de minorer $\mu_{\text{chocs}}_{x;t}$.

La deuxième contrainte est une hypothèse sous-jacente au développement limité et permet de majorer $\mu_{\text{chocs}}_{x;t}$, ce qui va dans la suite nous éviter des scénarios « trop » extrêmes. La fonction par laquelle nous avons approximé $x \rightarrow 1 - e^{-x}$, soit $x \rightarrow x - \frac{x^2}{2}$ est majorée par $\frac{1}{2}$, implicitement donc $1 - e^{-x} \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow x \leq \ln(2)$. Ceci nous assure que $x - \frac{x^2}{2} \geq 0$.

Cette contrainte sera revue par la suite, une fois les résultats de l'extrapolation analysés. Détaillons maintenant la méthode de simulation des coefficients de régression chocs.

3 Technique de simulation des coefficients de chocs

La matrice $\check{\Theta}$, $c_s \times n_y$ est structurée comme suit :

- Les lignes de $\check{\Theta}$ contiennent les coefficients de régression pour une tranche d'âges fixée suivant les années.
- Les colonnes de $\check{\Theta}$ contiennent les coefficients de régression pour une année fixée suivant les âges.

La génération d'un scénario de coefficients de chocs pour l'année 2013 revient à extrapoler la matrice $\check{\Theta}$ d'un an, et à rajouter notre vecteur simulé en dernière colonne de $\check{\Theta}$.

La taille de notre vecteur aléatoire est $c_s = 12$. Nous n'allons pas simuler séparément les marginales du vecteur de façon indépendante pour des raisons de cohérence des scénarios. Pour un événement de quantile u , soit de période de retour $\frac{1}{1-u}$ sur l'année 2013, le vecteur des coefficients de régression chocs, noté $\check{\Theta}(u)_{2013}$ sera :

$$\check{\Theta}(u)_{2013} = \left(F_{1-Cauchy}^{-1}(u), \dots, F_{6-Cauchy}^{-1}(u), F_{7-Logistique}^{-1}(u), \dots, F_{12-Logistique}^{-1}(u) \right)'$$

Avec $\forall i \in \llbracket 1, c_s \rrbracket F_{i-Cauchy}$ ou $Logistique$ $^{-1}$, l'inverse de la fonction de répartition de la distribution paramétrique ajustée aux coefficients de régression.

Afin de simuler un scénario aléatoire pour l'année 2013 nous allons donc :

- Simuler une loi uniforme U .
- Extrapoler la matrice $\check{\Theta}$ avec le vecteur $\check{\Theta}(U)_{2013}$.

Cette méthode nous permet bien de simuler les amplitudes différentes suivant les âges d'un événement commun de mortalité de période de retour $\frac{1}{1-u}$. Nous n'avons pas complexifié le modèle en estimant la structure de corrélation du vecteur et la copule correspondante.

4 Protocole de simulation d'un scénario de q_x chocs additifs pour 2013

Nous allons résumer ici notre approche par un détail du protocole de simulation. Nous cherchons à générer un scénario de surmortalité additive cohérent pour 2013.

Pour cela les étapes sont les suivantes :

- **Extrapolation de la matrice $\check{\Theta}$:**
 - Simuler une loi uniforme U .
 - Extrapoler la matrice $\check{\Theta}$ en ajoutant en dernière colonne le vecteur $\check{\Theta}(U)_{2013}$.
Nous notons $\check{\Theta}^{extrapolée}$, $c_s \times (n_y + 1)$ cette matrice.

- **Extrapolation de la surface de mortalité lissée sans chocs :**

- Nous travaillons directement sur la surface de mortalité lissée sans chocs notée $\frac{Y}{E_{lissée}}$, $n_a \times n_y$. Afin d'extrapoler sur un an nous supposons que la tendance de l'année 2013 ne diffère pas de celle de l'année 2012, nous doublons donc la dernière colonne de $\frac{Y}{E_{lissée}}$ afin d'obtenir la tendance de 2013.

Nous notons $\frac{Y}{E_{extrapolée}}$, $n_a \times (n_y + 1)$ cette matrice.

- **Calcul de la Surmortalité multiplicative :**

- D'après notre modèle de lissage il faut calculer $\exp(\tilde{B}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée})$.

- **Calcul de la Surmortalité additive pour 2013 :**

- Par différence entre la surface de mortalité globale $\frac{Y}{E_{extrapolée}} \cdot \exp(\tilde{B}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée})$ et la tendance lissée sans chocs extrapolée $\frac{Y}{E_{extrapolée}}$.

- Notons $\tau_{choc_additif_2013}$ et $\tau_{lissé_2013}$ le vecteur des taux de surmortalité additive pour 2013 et le vecteur des taux lissés sans chocs :

$$\tau_{choc_additif_2013} = \left(\frac{Y}{E_{extrapolée}} \cdot \exp(\tilde{B}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée}) - \frac{Y}{E_{extrapolée}} \right) (, n_y+1) \cdot$$

$$\tau_{lissé_2013} = \left(\frac{Y}{E_{extrapolée}} \right) (, n_y+1) \cdot$$

- **Calcul des q_x pour 2013 :**

- D'après la définition des q_x chocs additifs :

$$q_{choc_additif_2013} = e^{-(\tau_{lissé_2013})} - e^{-(\tau_{lissé_2013} + \tau_{choc_additif_2013})}$$

$$q_{lissé_2013} = 1 - e^{-(\tau_{lissé_2013})}$$

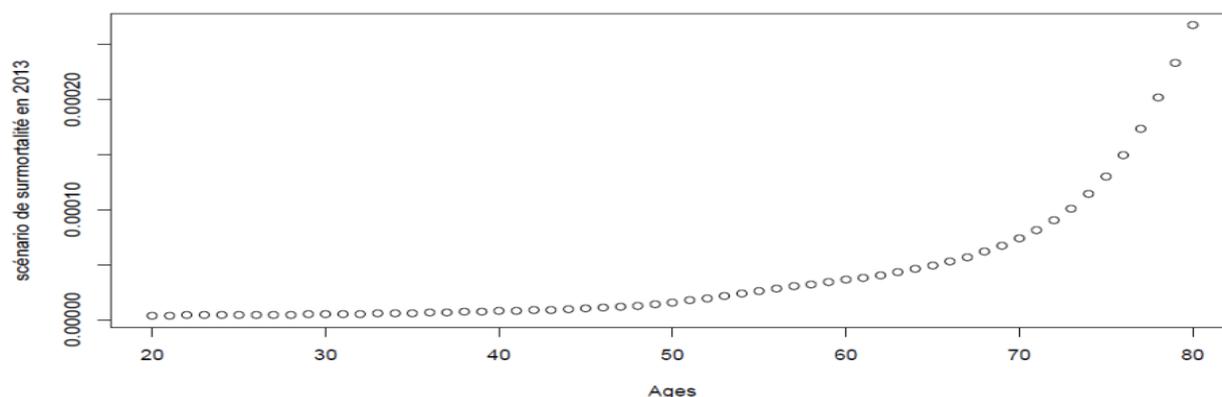
- **Filtre du scénario :**

- Le scénario $q_{choc_additif_2013}$ sera conservé si et seulement si :

$$1 - e^{-(\tau_{lissé_2013} + \tau_{choc_additif_2013})} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 - e^{-(\tau_{lissé_2013} + \tau_{choc_additif_2013})} \geq 0$$

Nous sommes désormais en mesure de simuler un scénario de $q_{choc_additif}$ en 2013 pour la population nationale Française. Voici le résultat d'une simulation :



Graphique 25 Exemple de scénario de $q_{x\ chocs_additifs}$ en 2013

L'amplitude des chocs est croissante avec l'âge comme nous l'avons observé sur les données historiques avec le calcul de l'amplitude absolue moyenne des chocs suivant les âges (Voir le Graphique 17).

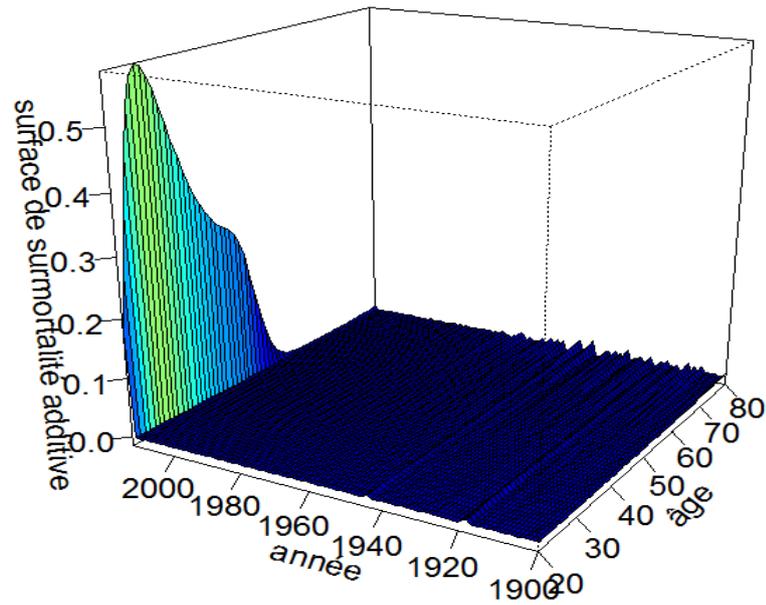
Une fois l'extrapolation possible, nous décidons de revenir sur la contrainte de majoration des taux de surmortalité simulés. Cette contrainte est :

$$1 - e^{-(\tau_{lissé2013} + \tau_{choc_additif_2013})} \leq \frac{1}{2}$$

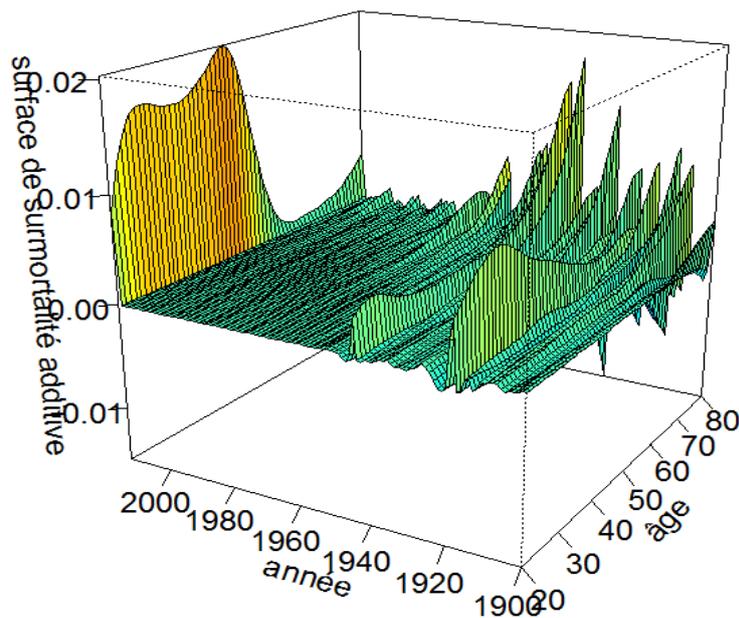
Dans le cas limite la contrainte est approximativement équivalente à :

$$\tau_{choc_additif_2013} \leq \ln(2) \approx 0,69$$

Dans le cadre de notre modèle, cela revient à définir le scénario maximum probable avec une période de retour de 1000 ans. Une représentation graphique du scénario extrême de quantile 99,9 % nous indique pourtant que la contrainte n'est pas encore assez restrictive. En effet un tel scénario n'est pas valable pour le modèle, l'ordre de grandeur moyen de la surmortalité est bien en dehors des résultats de l'ensemble des différentes études (18 % exactement), on rappelle que l'EIOPA fixe à 0,21 % la surmortalité moyenne pour un scénario à 99,9 %. Ce résultat se fonde sur le même modèle épidémiologique que celui du coefficient 0,15 %. De plus, les différentes études fixent la surmortalité du pire scénario pandémique à 0,61 %. L'explosion de la mortalité est uniquement due à l'épaisseur de queue de la Cauchy. Nous n'avons pas ce problème avec la loi Logistique. Nous avons représenté graphiquement les différentes surfaces de mortalité avec un choc respectif pour l'année 2013 de quantile 99,9 %, 99,8 % et 99,7 %. Les taux de mortalité sur les années 1900-2012 sont les taux lissés de l'historique.

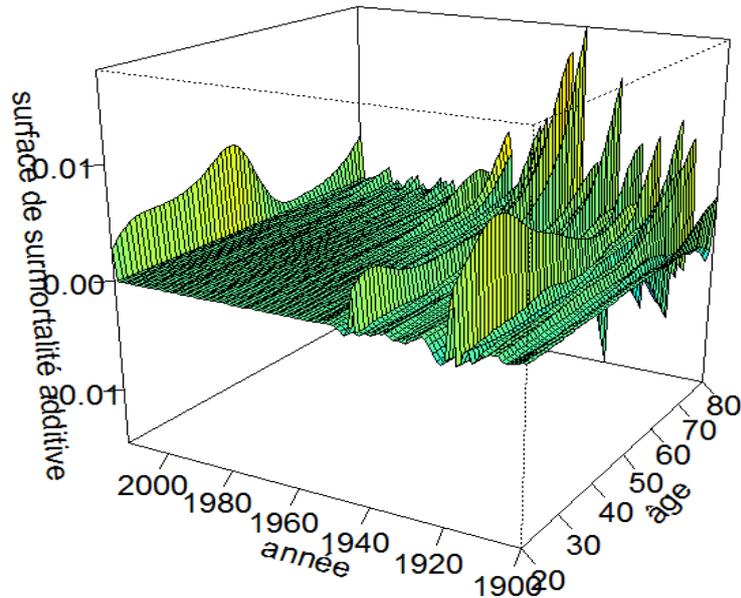


Graphique 26 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,9 % en 2013



Graphique 27 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,8 % en 2013

La surmortalité additive moyenne du scénario de quantile 99,8 % est de 0,98 % . A titre de comparaison, la surmortalité additive moyenne de l'année 1918 était de 0,44 %.



Graphique 28 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,7 % en 2013

Dans le scénario de quantile 99,7 % , la surmortalité additive moyenne est de 0,39 %. Afin de pouvoir modéliser des événements d’amplitudes plus importants que la grippe espagnole de 1918, nous retiendrons dans la suite un scénario maximum probable de quantile 99,8 %.

Une fois un niveau précisé de surmortalité pour la majoration des scénarios, le protocole de simulation devient :

- **Extrapolation de la matrice $\check{\Theta}$:**

- Simuler une loi uniforme U .
- Si $U > 99,8 \%$ alors $U = 99,8 \%$; sinon U conserve sa valeur.

Remarque : Conserver les scénarios de quantiles supérieurs à 99,8 % permet de ne pas modifier les résultats des quantiles empiriques à 99,5 % sur le jeu des scénarios simulés.

- Extrapoler la matrice $\check{\Theta}$ en ajoutant en dernière colonne le vecteur $\check{\Theta}(U)_{2013}$.
Nous notons $\check{\Theta}^{extrapolée}$, $c_s \times (n_y + 1)$ cette matrice.

- **Extrapolation de la surface de mortalité lissée sans chocs :**

- Nous travaillons directement sur la surface de mortalité lissée sans chocs notée $\frac{Y}{E_{lissée}}$, $n_a \times n_y$. Afin d’extrapoler sur un an nous supposons que la tendance de l’année 2013 ne diffère pas de celle de l’année 2012, nous doublons donc la dernière colonne de $\frac{Y}{E_{lissée}}$ afin d’obtenir la tendance de 2013.

Nous notons $\frac{Y}{E_{extrapolée}}$, $n_a \times (n_y + 1)$ cette matrice.

- **Calcul de la Surmortalité multiplicative :**

- D'après notre modèle de lissage il faut calculer $\exp(\tilde{\mathbf{B}}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée})$.

- **Calcul de la Surmortalité additive pour 2013 :**

- Par différence entre la surface de mortalité globale $\frac{Y}{E_{extrapolée}} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{B}}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée})$ et la tendance lissée sans chocs extrapolée $\frac{Y}{E_{extrapolée}}$.

- Notons $\tau_{choc_additif_2013}$ et $\tau_{lissé_2013}$ le vecteur des taux de surmortalité additive pour 2013 et le vecteur des taux lissés sans chocs :

$$\tau_{choc_additif_2013} = \left(\frac{Y}{E_{extrapolée}} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{B}}_a \tilde{\Theta}^{extrapolée}) - \frac{Y}{E_{extrapolée}} \right) (\cdot, n_y+1) \cdot$$

$$\tau_{lissé_2013} = \left(\frac{Y}{E_{extrapolée}} \right) (\cdot, n_y+1) \cdot$$

- **Calcul des q_x pour 2013 :**

- D'après la définition des q_x chocs additifs :

$$q_{choc_additif_2013} = e^{-(\tau_{lissé2013})} - e^{-(\tau_{lissé2013} + \tau_{choc_additif_2013})}$$

$$q_{lissé2013} = 1 - e^{-(\tau_{lissé2013})}$$

- **Filtre du scénario :**

- Le scénario $q_{choc_additif_2013}$ sera conservé si et seulement si :

$$1 - e^{-(\tau_{lissé2013} + \tau_{choc_additif_2013})} \geq 0$$

Nous sommes en mesure de simuler un scénario de surmortalité pour une population nationale, néanmoins nous voulons appliquer notre modèle à une population d'assurés. La population assurée est supposée en meilleure santé et donc avec une mortalité plus faible, c'est pourquoi nous allons ajuster notre modèle.

5 Ajustement de la mortalité à une population assurée

La présence de sélections médicales, le coût d'une couverture d'assurance, une CSP plus élevée ; l'ensemble de ces facteurs rendent le taux de mortalité d'une population assurée individuellement plus faible que celui de la population générale. Aux Etats-Unis ce phénomène est nettement observé en raison du prix élevé des couvertures d'assurances privées. Ainsi de nombreuses études telles *Groupe Consultatif Européen* (2006) et *SOA Research Actuary* (2007) proposent un ajustement de 60 % à 75 % de la mortalité de la population générale pour le calcul de la mortalité assurée.

En ce qui concerne la population Française, l'actualisation des tables de mortalité en tarification n'est pas aussi rapide qu'aux Etats-Unis, la prise en compte d'un décalage de la mortalité de référence conduit à un ajustement plus important de la mortalité assurée. En emprunteur par exemple, la présence de sélection médicale et la capacité d'emprunt situent notre hypothèse de mortalité assurée à 50 % de la *TH/TF* 002. Avec un rapport moyen de 74 % entre la mortalité lissée du modèle, et la mortalité Hommes-Femmes de la *TH/TF* 002, nous ajusterons la mortalité de la population générale par un coefficient de 60 %.

Ces hypothèses s'appliquent à la mortalité lissée sans chocs, ainsi qu'à la surmortalité et sous-mortalité.

En ce qui concerne la sous-mortalité, celle-ci est d'autant plus importante que le choc de surmortalité qui la précède est important. Un choc moins important pour la population assurée conduit à une sous-mortalité plus faible ensuite.

La surmortalité moyenne pondérée sur la population générale française de 2012 (INSEE), de période de retour 200 *ans*, est 0,18 %. Ajusté à une population assurée, ce taux devient $0,18 \% \times 60 \% \approx 0,112 \%$. L'hypothèse de la formule standard est donc plus prudente, avec 0,15 % pour la population assurée. Néanmoins l'ordre de grandeur de 0,18 % directement obtenu par le modèle est tout à fait cohérent et raisonnable en vue des différentes études effectuées par le passé sur l'évaluation du risque pandémique.

D'après Guette (2010), l'estimation du modèle sur la période 1900 à 2005 pour une période de retour à 200 *ans*, conduit à un taux de surmortalité moyen pondéré sur la population générale de 0,25 % pour 2005. Cet écart s'explique en partie par l'absence de chocs importants entre 2005 et 2012. Cette différence peut être également due à la différence de positionnement des *splines* chocs entre nos deux périodes. Le repositionnement des *splines* sur la matrice de dimension deux suivant les âges et les années modifie l'estimation des coefficients de la base de lissage. Nous retiendrons une forte sensibilité du modèle, et de l'ensemble des modèles de surmortalité en général, aux données historiques utilisées.

6 Avantage/Inconvénient

Nous détaillons ici les avantages et les difficultés spécifiques à notre modèle de surmortalité stochastique.

Premièrement, le modèle se base sur des données historiques qui incluent les chocs pandémiques, les guerres, ou encore les vagues de chaleur. Outre le retraitement nécessaire aux deux premières guerres mondiales, le modèle permet la simulation de l'ensemble des chocs de surmortalité et n'est pas spécifique à un seul risque.

Deuxièmement, le modèle ne requiert pas l'extraction de données spécifiques aux chocs de surmortalité passés. Pour le risque pandémique par exemple, nous n'avons pas eu à extraire les données de mortalité, ainsi que les quantiles de retour des pandémies passées. L'extraction de la surmortalité des données historiques étant intégrée, le modèle permet de séparer les chocs de mortalité d'une tendance claire et lissée sur un historique relativement important (112 *ans*).

Enfin, nous avons pu déterminer les différences d'amplitudes des chocs suivant les âges. Ainsi pour chaque âge de 20 à 80 ans, nous avons simulé un scénario de surmortalité. Le lissage par *splines* permet une grande flexibilité d'analyse des données, c'est pourquoi nous possédons un historique important suivant les années et les âges. Outre la difficulté posée par la loi de Cauchy dans la simulation des scénarios de surmortalité, le modèle permet de simuler un grand nombre de scénarios suivant tous les âges de vingt à quatre-vingts ans. Il est ensuite relativement simple d'appliquer et d'intégrer le modèle de surmortalité à une modélisation individuelle d'un portefeuille.

L'objectif du modèle est d'être intégré dans une modélisation individuelle d'un portefeuille couvert par différentes couvertures de réassurance. Nous nous intéressons aux données moyennes, ainsi qu'au quantile à 99,5 %. L'ajustement de la contrainte de surmortalité montre que la loi de Cauchy n'est pas adaptée à la modélisation de la mortalité pour un seuil supérieur à 99,5 %. L'ajustement des distributions paramétriques sur les coefficients de lissage, et les résultats des simulations sont donc pertinents sur notre périmètre d'étude.

En ce qui concerne les difficultés du modèle :

Premièrement le modèle est couteux en temps de calcul. L'optimisation des paramètres de pénalisation par le critère du BIC prend environ une journée entière de calcul. Dans une optique opérationnelle cela reste raisonnable compte tenu de l'estimation annuelle du modèle.

Un autre inconvénient est de ne pas intégrer d'avis d'experts. Les risques pandémiques par exemple, sont très complexes et font apparaître un grand nombre de paramètres non négligeables quant à leurs effets sur la mortalité de la population. Ces données concernent les progrès médicaux, les plans d'urgence des autorités compétentes, l'amélioration de l'hygiène de vie, l'ensemble de ces paramètres ne sont pas directement pris en compte par nos données historiques. De même dans l'estimation du modèle, nous n'avons pas intégré le caractère « as-if » de nos données. Néanmoins il est important de noter que les contraintes fixées sur les simulations sont fonctions de l'évolution de la mortalité de tendance, et l'amélioration de la mortalité est prise en compte dans cette tendance.

Plus généralement, le modèle est sensible aux données historiques utilisées et à la période d'étude, c'est une difficulté commune à l'ensemble des modélisations épidémiologiques et actuarielles sur le risque de surmortalité. Dans notre modèle, le positionnement des *splines* se modifie avec la période d'étude. De plus l'historique d'une décennie à l'autre n'est plus le même et l'ajustement des distributions de probabilité sur les coefficients de lissage se retrouve modifié. Il n'est donc pas impossible d'obtenir un biais de modèle concernant l'estimation du capital économique sur des portefeuilles, directement dépendant de la surmortalité estimée.

La projection de la tendance, et de la surface de surmortalité sur des périodes plus longues qu'un an, pour un modèle estimée sur une période donnée, constitue une complexification du modèle, mais se heurte à un sujet d'étude bien spécifique : la sensibilité des extrapolations pour des méthodes de lissage par *splines*.

La présence de la distribution de Cauchy dans la construction du modèle apporte des difficultés techniques sur les simulations, ainsi qu'un questionnement sur la validité historique de certains scénarios extrêmes de surmortalité simulés. Nous avons dû filtrer les simulations par des contraintes et effectuer un développement en série entière afin d'avoir une idée d'une majoration raisonnable

de nos taux de mortalité instantanée. Cette contrainte de majoration a été ajustée une fois l'extrapolation possible. Elle reste toutefois fixée arbitrairement. Nos contraintes reviennent à fixer le scénario probable de surmortalité maximum à un choc de période de retour 500 *ans* pour notre modèle.

Les lois marginales du vecteur des coefficients de lissage chocs ont été estimées, néanmoins pour des raisons de cohérence nous n'avons pas pu simuler indépendamment ces lois. Une des difficultés du modèle concerne la structure de dépendance des lois marginales de notre vecteur, et la copule correspondante. Pour des raisons opérationnelles nous n'avons pas estimé cette structure de dépendance et utilisé une approche simplifiée.

Enfin, nous sommes en mesure pour 2013 de simuler des scénarios de surmortalité et sous-mortalités. Dans l'historique de nos données, les chocs de sous-mortalité ont toujours été le résultat d'un choc de surmortalité l'année précédente. L'absence de chocs en 2012 nous amène à penser que des scénarios de sous-mortalité pour 2013 ne sont pas envisageables, néanmoins le modèle permet d'en générer. Ces scénarios de sous-mortalité doivent être pris en compte afin de conserver un impact du risque de mortalité extrême négligeable en moyenne. De plus, l'estimation des quantiles sur la mortalité extrême intègre ces scénarios de sous-mortalité.

Nous allons maintenant nous servir de ce modèle pour une étude plus opérationnelle sur le capital économique et l'activité de réassurance de portefeuilles prévoyance.

Partie III – Etude de portefeuilles en prévoyance

VII Application numérique

Les pertes potentielles d'un événement de mortalité extrême peuvent être conséquentes et atteindre gravement les fonds propres. Les acteurs du marché de l'assurance sont soumis à un double questionnement. La première interrogation concerne la couverture du risque. La deuxième concerne l'optimisation de la réassurance. Dans l'idéal, la cédante transfère l'intégralité du risque de mortalité extrême vers la réassurance. Néanmoins, les couvertures spécifiques à la pandémie comme les *Stop-Loss Pandémie* soulèvent de nombreuses problématiques techniques et administratives pour le réassureur. C'est pourquoi, même si ces solutions sont en passe d'être développées par le marché, nous nous concentrerons sur les autres couvertures non-proportionnelles et proportionnelles. Nous poserons un certain nombre d'hypothèses afin de délimiter notre périmètre d'étude.

L'objectif de cette partie est d'étudier l'impact du risque de mortalité extrême sur différents types de portefeuilles prévoyance. Nous allons dans un premier temps quantifier l'impact du risque *CAT Life* sur le niveau de capital économique requis. Une fois cet impact évalué, nous discutons de l'optimisation d'une stratégie de réassurance en arbitrant du point de vue de la cédante le coût du capital retenu et la prime pure de réassurance ; le tout sur une vision annuelle et non-proportionnelle. Nous nous intéressons brièvement à la question de l'allocation du capital dans le processus de tarification des couvertures de réassurance.

A Contexte et description des portefeuilles de prévoyance

Chaque portefeuille possède ses caractéristiques propres. Suivant le type de contrat, la population assurée n'aura pas la même répartition des âges, des sommes sous risque, et ni le même comportement. Nous présentons les différents types de portefeuilles étudiés.

1 Contrat emprunteur

L'assurance emprunteur intervient par définition lors de la souscription d'un prêt. Celle-ci protège la banque contre un événement susceptible d'empêcher le remboursement de son crédit. Les risques principalement couverts sont le décès, l'incapacité, l'invalidité et plus rarement le chômage. La couverture décès est obligatoire. Cette assurance est en pratique requise par les banques afin de se prémunir contre un éventuel défaut de paiement. Elle assure le remboursement des mensualités, ou du solde du crédit.

Tout comme l'on peut emprunter une somme d'argent importante, pour un crédit immobilier par exemple, les sommes sous risque dans un portefeuille emprunteur peuvent être élevées. Les capitaux assurés sont généralement croissants avec l'âge. En ce qui concerne le comportement des assurés, qu'il s'agisse d'un contrat d'assurance emprunteur groupe ou individuel, il est peu probable d'imaginer un événement catastrophe sur un groupe d'assurés d'un même portefeuille. Nous entendons ici par catastrophe, un événement causant des décès soudains et multiples sur un groupe d'assurés d'un même portefeuille et dans un court intervalle de temps (un accident d'avion par exemple).

2 Contrat prévoyance collective

La prévoyance collective intervient au niveau d'une entreprise ou d'une branche professionnelle pour l'ensemble des salariés ou une catégorie de salariés. Un régime de prévoyance collective permet de compléter les prestations des régimes obligatoires de la sécurité sociale. Il comprend généralement des garanties décès, incapacité et invalidité. Ce régime peut être décidé de différentes manières. Il peut résulter d'un accord collectif (convention collective, accord au niveau d'une branche professionnelle, accord au niveau d'une entreprise ou d'un établissement), d'un référendum au sein de l'entreprise, ou d'une décision unilatérale de l'employeur. La prévoyance collective concerne l'ensemble des salariés ou seulement une catégorie. Il ne doit pas y avoir de discrimination au niveau du revenu, de l'âge, de l'état de santé, de la durée et du type de contrat de travail. Un portefeuille de prévoyance collective est donc très hétérogène, tant au niveau des sommes que des populations sous risque. De plus, les salariés sont liés par une unique entité ou entreprise, ce qui n'exclut pas le risque d'un XS par événement.

3 contrat temporaire-décès

L'assurance temporaire-décès assure la protection financière d'une famille lors de la disparition d'un membre. Par définition, cette assurance contient une date limite à partir de laquelle elle n'est plus valable, et le contrat résilié. C'est la différence avec une assurance décès permanente. Si l'assuré décède avant la date limite, les bénéficiaires choisis reçoivent le montant défini par l'assurance. L'assurance temporaire-décès peut être complétée par une assurance incapacité et/ou invalidité. Cette couverture possède un important « effet de levier » car le niveau de capital garanti ne dépend pas de la durée de cotisation. La prime d'assurance est payée d'avance pour un capital déterminé. Ainsi un assuré peut cotiser plusieurs années ou quelques mois, s'il décède, le capital versé sera le même. Il y a un risque important d'anti-sélection pour l'assureur, néanmoins comparativement aux contrats emprunteurs et prévoyance collective, la population est plus homogène en sommes sous risque et en âge, de plus il y a une sélection médicale à la souscription. Ce type de contrat présente une très faible volatilité des sommes sous risque.

Il est peu probable qu'un événement catastrophe touche plusieurs assurés d'un même portefeuille temporaire décès. A la différence d'un contrat prévoyance-collective, les assurés ne sont pas liés par un quelconque comportement, ou entité.

B Exemple

Nous allons dans cette partie présenter des exemples concrets de portefeuilles étudiés. Nous illustrons graphiquement la volatilité des sommes sous risque pour chacun des portefeuilles.

1 Portefeuille emprunteur

Afin d'analyser notre portefeuille emprunteur, nous avons décomposé les données suivant les tranches de capitaux assurés bruts de réassurance. Le tableau ci-dessous présente la décomposition du portefeuille. Nous appellerons cette cédante : Cédante E.

Cédante E							
Tranche des sommes assurées	Borne inférieure tranche	Borne supérieure tranche	Nombre d'assurés	% Nombre d'assurés	Sinistre maximum probable	% capital	Somme sous risque moyenne par tranche
1	- €	100 000 €	42 389	54,9 %	1 495 590 288 €	15 %	35 283 €
2	100 000 €	200 000 €	15 549	20,1 %	2 285 109 208 €	23 %	146 962 €
3	200 000 €	300 000 €	10 362	13,4 %	2 550 081 270 €	25 %	246 099 €
4	300 000 €	400 000 €	5 167	6,7 %	1 769 250 616 €	17 %	343 077 €
5	400 000 €	500 000 €	2 208	2,9 %	976 777 335 €	10 %	442 381 €
6	500 000 €	600 000 €	882	1,1 %	479 267 503 €	5 %	543 387 €
7	600 000 €	700 000 €	348	0,5 %	224 725 475 €	2 %	645 763 €
8	700 000 €	800 000 €	159	0,2 %	118 096 660 €	1 %	742 746 €
9	800 000 €	900 000 €	88	0,1 %	74 223 511 €	1 %	843 449 €
10	900 000 €	1 000 000 €	44	0,1 %	42 046 207 €	0 %	955 596 €
11	1000 000 €		94	0,1 %	133 262 737 €	1 %	1 417 689 €

Tableau 12 Décomposition du portefeuille emprunteur de la cédante E

Le tableau nous indique que :

- 95 % de la population du portefeuille est regroupée sur les quatre premières tranches. Ces tranches comptent pour 80 % du capital total assuré. Il y a donc une importante concentration du portefeuille sur les tranches « basses » jusqu'à 400 000 €. La volatilité des capitaux sous risque est plus importante sur les tranches supérieures. Le plus gros capital est de 5 millions €. D'après la répartition du portefeuille, nous pouvons nous interroger sur un réel impact de la volatilité des sommes sous risque sur la constitution du capital économique.
- Afin d'implémenter le modèle individuel sous R , nous ne pouvons pas simuler tête par tête. En effet nous générons un nombre relativement important de scénarios catastrophe. Pour chaque scénario nous voulons déterminer la charge sinistre du traité. Nous simulons donc les pertes sur des regroupements d'assurés par tranches et par âges grâce à la distribution Binomiale et aux capitaux sous risque moyens par groupes. Nous choisissons d'utiliser cette techniques de modélisation pour les tranches une à sept. Le reste du portefeuille est modélisé individuellement.

2 Portefeuilles prévoyance collective

Notre analyse portera sur treize portefeuilles de prévoyance collective, couverts en excédent de sinistre par tête. Les excédents de sinistre étudiés sont à reconstitutions illimitées et gratuites.

Pour ces portefeuilles, nous ne disposons pas des données d'exposition par tête mais uniquement d'un certain nombre de données d'expérience. Le réassureur dispose ainsi du nombre et du montant sur les dernières années des sinistres supérieurs à un seuil d'observation. A partir de ces données, celui-ci détermine les lois de dépassement de priorité pour chaque portefeuille. Les lois utilisées par RGA sont des Log-Normale à trois paramètres et des Pareto généralisées (GPD). Elles sont à queues épaisses et traduisent la volatilité importante des sommes sous risque des portefeuilles.

Les paramètres des lois de coût et de fréquence nous ont permis grâce à un outil de simulation de générer pour chaque traité un scénario de portefeuille répliqué. L'hypothèse sous-jacente est que la loi de probabilité des sommes sous risque est la même que celle ajustée sur les données de sinistres. La distribution par âge est aussi une hypothèse interne à RGA.

Le tableau ci-dessous récapitule le nombre d'assurés, les priorités et les portées pour chaque traité.

Portefeuille non-proportionnel en XS				
Cédante	Nombre d'assurés couverts par l'XS	Priorité (XS par tête)	Capacité (XS par tête)	Indicateur de volatilité
Cédante 1	82 434	140 000 €	3 460 000 €	20 %
Cédante 2	22 757	180 000 €	2 500 000 €	40 %
Cédante 3	8 887	280 000 €	5 200 000 €	49 %
Cédante 4	10 605	140 805 €	859 195 €	50 %
Cédante 5	36 839	700 000 €	5 100 000 €	52 %
Cédante 6	10 007	1 000 000 €	7 000 000 €	58 %
Cédante 7	3 789	230 000 €	4 770 000 €	71 %
Cédante 8	6 971	600 000 €	3 700 000 €	79 %
Cédante 9	6 649	450 000 €	2 400 000 €	82 %
Cédante 10	4 393	250 000 €	1 750 000 €	88 %
Cédante 11	2 770	75 000 €	1 925 000 €	103 %
Cédante 12	1 812	1 500 000 €	12 500 000 €	130 %
Cédante 13	2 087	4 000 000 €	26 000 000 €	192 %

Tableau 13 Décomposition du portefeuille prévoyance collective en XS

Pour mesurer la volatilité des sommes sous risque, nous avons fait le choix d'utiliser le coefficient de variation. Il correspond au rapport de l'écart type sur la moyenne de la charge sinistre réassurée. Les portefeuilles sont classés par volatilité croissante. Les résultats donnés par cet indicateur sont cohérents avec les différentes structures d'XS étudiées.

Trois traités sont particulièrement volatils. Ils ont peu d'assurés (leur nombre est inférieur à trois mille têtes), mais des capacités élevées, et une volatilité importante des sommes sous risque réassurées. Ils constitueront la base de notre étude de volatilité.

Ayant treize traités à disposition, nous sommes en mesure d'étudier l'effet de diversification global du portefeuille de réassurance. Si un évènement de mortalité extrême touche la population française, c'est l'ensemble des traités qui seront touchés par un facteur commun de surmortalité.

Nous prendrons soin d'étudier les effets de diversification des risques, ainsi que la diversification du risque de mortalité sur le portefeuille.

3 Portefeuille temporaire-décès

Le tableau ci-dessous présente la décomposition du portefeuille temporaire-décès étudié. Nous appellerons cette cédante : Cédante T.

Cédante T							
Tranche des sommes assurées	Borne inférieure tranche	Borne supérieure tranche	Nombre d'assurés	% Nombre d'assurés	Sinistre maximum probable	% capital	Somme sous risque moyenne par tranche
1	- €	50 000 €	59 565	68,1 %	1 553 138 894 €	36 %	26 075 €
2	50 000 €	100 000 €	20 439	23,4 %	1 555 728 612 €	36 %	76 116 €
3	100 000 €	150 000 €	4 185	4,8 %	551 921 912 €	13 %	131 881 €
4	150 000 €	200 000 €	2 131	2,4 %	351 761 276 €	8 %	165 069 €
5	200 000 €	250 000 €	201	0,3 %	68 992 199 €	2 %	233 082 €
6	250 000 €	300 000 €	538	0,2 %	58 730 532 €	1 %	292 192 €
7	300 000 €	350 000 €	56	0,6 %	164 208 424 €	4 %	305 220 €
8	350 000 €	400 000 €	0	0,1 %	22 346 438 €	1 %	399 044 €
9	400 000 €	450 000 €	0	0,0 %	- €	0 %	- €
10	450 000 €	500 000 €	0	0,0 %	- €	0 %	- €
11	500 000 €	550 000 €	0	0,0 %	- €	0 %	- €
12	550 000 €	600 000 €	0	0,0 %	- €	0 %	- €
13	600 000 €		1	0,0 %	700 000 €	0 %	700 000 €

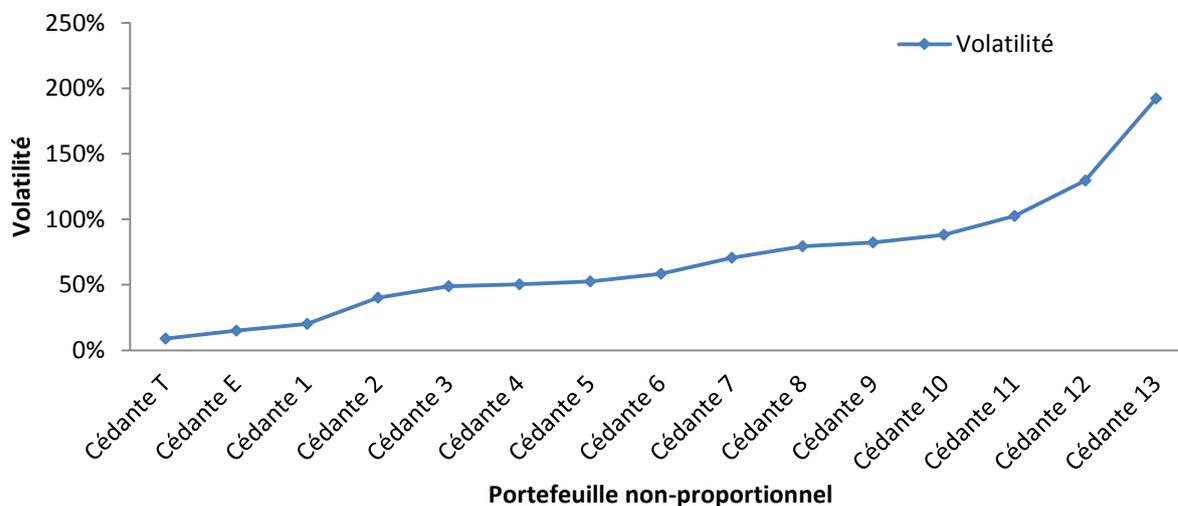
Tableau 14 Décomposition du portefeuille temporaire décès de la cédante T

Le tableau nous indique que :

- 98,7 % de la population du portefeuille est regroupée sur les quatre premières tranches. Celles-ci représentent 93 % du capital total assuré. La volatilité des sommes sous risque est faible au global. Les capitaux assurés se concentrent sur les quatre premières tranches.
- D'après cette analyse, nous avons fait le choix de modéliser en individuel les capitaux supérieurs ou égaux à 400 000€. Le recours à une modélisation par groupements d'assurés conduit à une perte de volatilité mais reste néanmoins nécessaire pour réduire la durée de calculs.

4 Volatilité des sommes sous risque

Nous allons représenter graphiquement les coefficients de variation des sommes sous risque de chaque portefeuille :



Graphique 29 Volatilité des sommes sous risque des portefeuilles étudiés

Les portefeuilles prévoyance collective sont les plus volatils car nous disposons des sommes sous risque en réassurance, donc en excédent. Les sommes sous risque brutes de réassurance nous indiquent que le portefeuille emprunteur est plus volatil que celui en temporaire-décès.

Nous allons nous servir de ces portefeuilles pour étudier l'impact du risque *CAT Life* sur le niveau de capital économique. La partie suivante détaille les enjeux propres à chaque structure de réassurance. L'enjeu pour la cédante revient à trouver une couverture efficace contre le risque de surmortalité, et si possible à optimiser cette couverture.

C Structure de réassurance

Notre objectif sera d'obtenir des résultats sur l'impact du risque *CAT Life* sur l'optimisation d'une structure de réassurance non-proportionnelle. Nous présenterons aussi les difficultés relatives aux couvertures *Stop-Loss*.

1 Calcul du résultat net

Le calcul du résultat net d'une cédante permet de mesurer la rentabilité de son capital en terme de *Return On Equity (ROE)*. Le *ROE* correspond au rapport du résultat net sur le niveau de fonds propres. Ce niveau correspond au maximum entre le capital réglementaire exigé, et le capital économique.

Les investisseurs sont propriétaires des fonds propres de la compagnie d'assurance et attendent un retour sur investissement. Le *ROE* est un critère simple pour mesurer la rentabilité d'une compagnie d'assurance.

Le détail de son calcul est présenté ci-dessous :

Calcul du <i>Return on Equity</i> brut de réassurance	
Calcul du résultat net α sur l'année	+ Prime commerciale - Sinistres de l'année - Frais (Commissions, Courtage, Frais internes) - Impôt sur les bénéfices
résultat net	α (> 0 si bénéfiques)
Fonds propres	β
<i>Return On Equity</i>	$\frac{\alpha}{\beta}$

Tableau 15 Calcul du ROE sur le résultat net

La réassurance impacte directement la rentabilité de la cédante.

A résultat constant, une réduction du niveau de capital économique par la réassurance entraîne une hausse de la rentabilité au sens du *ROE*. De même pour un même niveau de capital économique, la diminution du capital réglementaire exigé permet à la cédante de souscrire de nouvelles affaires, d'augmenter son résultat et donc sa rentabilité au sens du *ROE*.

Nous allons détailler l'intérêt de chaque structure de réassurance.

2 Couvertures proportionnelles

- *Quote-Part*

Dans un contrat en *Quote-Part* (*Quota-Share-QS*), le réassureur reçoit un pourcentage fixé des primes d'assurance. En contrepartie, celui-ci paye le même pourcentage des sinistres, une commission de réassurance, et une possible participation aux bénéfices. Un contrat en *Quote-Part* permet à la cédante de bénéficier du rôle de conseil et des services du réassureur tout en contrôlant son ratio de sinistre à prime.

Nous nous intéressons au cas d'un contrat *Quote-Part* sans effets d'asymétries comme la participation aux bénéfices. L'intérêt d'un tel contrat concerne le partage du sort entre la cédante et le réassureur. Il s'agit d'une collaboration et d'un échange d'expertise sur le développement de nouveaux produits par exemple.

A la différence des traités *Stop-Loss* où le réassureur prend à sa charge l'excédent sur la priorité, un contrat en *Quote-Part* sans effets d'asymétries ne permet pas de protéger la cédante contre le risque de mortalité extrême. Sur le risque *CAT Life*, la volatilité supplémentaire vis-à-vis de l'engagement brut de réassurance n'est pas transférée mais partagée.

Le partage du sort des parties au contrat implique une diminution du capital réglementaire requis égale en proportion à celle de la prime brute de réassurance. Que le capital réglementaire soit calculé par une approche standard, ou par un modèle interne, sous nos hypothèses de renouvellement annuel, la diminution proportionnelle des sinistres/primes, implique la même diminution sur le capital.

Ainsi par exemple, un transfert de risque de 60 % vers la réassurance implique pour la cédante en net de réassurance :

Calcul du <i>Return on Equity</i> net de réassurance <i>Quote-Part</i>	
Calcul du résultat net sur l'année	+ Prime commerciale * 40 % -Sinistres de l'année * 40 % -Frais (Commissions, Courtage, Frais internes) -Impôt sur les bénéfices
résultat net Fonds propres	$\alpha' = \alpha * 40 \% (> 0 \text{ si bénéfices})$ $\beta' = \beta * 40 \%$
Return On Equity	$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}$

Tableau 16 Calcul du ROE après réassurance sur le résultat net

Le contrat *Quote-Part* sans participation aux bénéfices revient à l'étude d'un portefeuille brut de réassurance. La seule différence revient à multiplier alors les montants des sommes sous risque par le taux de cession.

- *Excédent de plein annuel*

Par définition, l'excédent de plein ou *XP (Surplus-Share-SS)* peut être assimilé à une *Quote-Part* individuelle sur les contrats touchant la rétention. Sur la base de la somme assurée, du plein de rétention et de la capacité de l'excédent, un taux de cession est calculé police par police en début de période. Le réassureur reçoit une prime égale au taux de cession appliqué à la prime d'assurance pour chaque police. L'intérêt de ce type de contrat est de permettre à la cédante de bénéficier de la sélection des risques du réassureur, tout en se protégeant contre les pertes au-delà du plein de rétention.

Le principal avantage d'une couverture en excédent de plein concerne la diminution de la volatilité des sommes sous risque au-dessus du plein. Dans le cas d'un portefeuille emprunteur aux sommes sous risque relativement hétérogènes, l'impact de la réassurance sur la diminution du capital réglementaire requis peut être relativement important. Au même titre qu'une couverture en excédent de sinistre, nous pouvons observer une différence d'évolution suivant la priorité entre la prime de réassurance et le capital économique transféré à la réassurance. Dans la suite de notre étude, nous étudierons du point de vue de la cédante, l'impact du risque *CAT Life* d'un excédent de plein en termes de diminution du capital économique.

Dans le cadre de notre étude, la durée de couverture de la réassurance est annuelle. Sur cette durée, les sommes assurées sont considérées comme constantes. Nous n'étudierons pas le cas d'un excédent de plein pluriannuel. Dans ce cas, l'application d'un contrat en excédent de plein revient, pour le calcul des sommes sous risque, à celle d'une couverture en excédent de sinistre par tête, avec une même priorité et une portée élevée. Le réassureur s'engage sur l'excédent par rapport à la priorité des sommes sous risque.

Etudions maintenant les couvertures non-proportionnelles en excédent de sinistre par tête, ainsi que les couvertures *Stop-Loss*.

3 Excédent de sinistre par tête

Dans un contrat en excédent de sinistre par tête ou *XS (Excess of Loss-XL)*, le réassureur s'engage à payer le montant du sinistre qui dépasse la priorité pour un montant maximum égal à la portée. Les paiements peuvent prendre la forme d'un capital ou d'une rente. Dans le cas d'un excédent par tête, la couverture est déclenchée dès lors qu'un sinistre sur une police « touche » la priorité. La prime de réassurance est forfaitaire au global du portefeuille, versée en début de période de souscription.

La cédante réduit la volatilité de son portefeuille en transférant à la réassurance l'excès sur la priorité. La volatilité des traités non-proportionnels étudiés est supérieure à celle des cédantes E et T. Nous étudierons plus spécifiquement sur ces traités, l'impact du risque de mortalité extrême sur la constitution du capital économique.

Spécifiquement aux contrats en excédent de sinistre par tête, Mechahougui (2011) illustre la possibilité pour les cédantes d'optimiser leurs couvertures de réassurance à niveau de priorité élevé. Néanmoins celui-ci n'intègre pas le risque de mortalité extrême. Nous allons par la suite étudier l'impact du risque de mortalité extrême sur ces résultats.

Nous allons parler d'un modèle d'allocation du capital basé sur l'étude du portefeuille non-proportionnel de *RGA*. Pour des raisons opérationnelles, le capital économique requis en début de tarification se détermine grâce des facteurs fixes d'allocation du capital. Ces facteurs proposent une vision du capital propre à *RGA* et permettent une prise en compte des effets de diversification du réassureur à plusieurs niveaux. Nous chercherons à synthétiser le capital économique de chaque traité et du portefeuille non-proportionnel en fonction de différents facteurs de grandeurs.

4 Stop-Loss

La différence du *Stop-Loss* avec les autres couvertures *XS* concerne la définition du sinistre. Pour le *Stop-Loss*, il est constitué par le résultat financier. Une telle couverture permet à la cédante de protéger son résultat contre une année à la sinistralité forte, voire exceptionnelle. L'évènement déclencheur est un indicateur intégrant des données financières et parfois administratives comme le ratio de sinistre à prime (S/P), ou le montant des pertes globales sur l'année. Dans le cas d'un indicateur S/P , la couverture porte le nom de *Stop-Loss*. Dans le cas du montant agrégé des pertes sur l'année, le contrat se nomme *Aggregate-Loss*.

Il s'agit d'une couverture sur les pertes au global du portefeuille. Elle a pour principale objectif de protéger le résultat net des cédantes contre une dérive de la mortalité, une volatilité importante des sommes sous risque, ou encore les événements extrêmes comme le risque pandémique. Dans le cas d'une couverture pandémique, celle-ci se déclenche sur un indicateur paramétrique de déviation de la mortalité.

La mise en place d'une couverture *Stop-Loss* pandémie pose plusieurs problèmes :

- Au même titre que toute couverture *Stop-Loss*, le bon fonctionnement de celle-ci repose sur une relation de transparence et de confiance entre la cédante, et le réassureur. Le réassureur est soumis à un risque de bonne gestion administrative des sinistres par la cédante.
- Une couverture spécifique de la pandémie pose la difficulté de l'identification des sinistres directement liés à l'évènement. Un nombre anormalement élevé de sinistres à étudier, soumet la cédante et le réassureur à des problèmes de gestion.
- L'analyse de l'exposition du réassureur au risque pandémique pose une difficulté de modélisation. Ainsi, le montant de capital économique requis pour une telle couverture peut s'avérer insuffisant, ou colossal. Sans la diversification de son portefeuille sur des montants aussi importants, la couverture pose pour le réassureur, des difficultés de levée et de pilotage des fonds, de rémunération des investisseurs, et de réelle rentabilité.

Les couvertures *Stop-Loss* actuelles sur le marché sont soumises aux mêmes difficultés. Ce sont des couvertures chères, dont la tarification et l'ajustement du niveau de capital intègrent un engagement de risque très important pour le réassureur.

VIII Résultat

Nous allons évaluer l'impact du risque *CAT Life* sur les niveaux de capital économique requis avant et après réassurance.

Nos hypothèses de calcul sont les suivantes :

- Nous n'étudions pas le risque d'actif. Nous nous focalisons uniquement sur le passif.
- Nous ne prenons pas en compte le risque de contrepartie de *RGA* vis-à-vis des cédantes.
- Notre actif est uniquement composé de la prime.
- Le renouvellement du contrat étant annuel, il y a égalité des engagements de l'assureur et du réassureur. Les provisions sont donc nulles.
- La prime de réassurance est payée une fois en début de période.
- L'intégration du coût du capital dans le processus de tarification pose un problème de référence circulaire. La prime commerciale sert au calcul du capital économique. Néanmoins celle-ci dépend de ce même capital. Ainsi pour une rentabilité visée, nous faisons l'hypothèse d'égalité entre la prime commerciale et la prime pure dans le calcul du capital économique.

Dans le cadre de ces hypothèses, le calcul du capital économique est le suivant :

- **Suivant l'approche standard de Solvabilité II :**

- Le calcul par l'approche standard passe par l'application de facteurs de chocs déterministes sur la sinistralité moyenne attendue. Un capital économique est déterminé pour chaque module de risque et l'exigence de capital au global s'effectue par l'application de la matrice de corrélation détaillée dans le *QIS 5*. Nous rappelons que la mortalité de tendance est une hypothèse de tarification fixée à un certain pourcentage de la *THTF 00 02*.
- Pour le module *Mortality Life* :

$$EC_{mortality} = \left[\sum_{i=1}^n (q_{x,i \text{ tendance}} * 1,15) \times Sa_i \right] - \text{prime pure}$$

- Pour le module *CAT Life* :

$$EC_{CAT_Life} = \left[\sum_{i=1}^n (q_{x,i \text{ tendance}} + 0,15 \%) \times Sa_i \right] - \text{prime pure}$$

- Par mutualisation :

$$EC = \sqrt{EC_{mortality}^2 + EC_{CAT_Life}^2 + EC_{mortality} \times EC_{CAT_Life} \times 0,25}$$

Le coefficient de 0,25 est le coefficient de corrélation entre le risque *CAT Life* et le risque de mortalité, tel que renseigné par le *QIS 5*.

- **Suivant l'approche modèle interne :**

- Le calcul s'effectue par la détermination de la *Value At Risk* à 99,5 % de la charge sinistre brute ou nette de réassurance.
- Notons S la charge sinistre modélisée sur un portefeuille, $S_{H\text{CAT}}$ la charge sinistre sur la sinistralité de tendance, S_{CAT} la charge sinistre sur la sinistralité de catastrophe. Ainsi nous définissons $S = S_{H\text{CAT}} + S_{\text{CAT}}$.

- Pour le module *Mortality Life* :

$$EC_{\text{mortality}} = \text{VaR}_{99,5\%}(S_{H\text{CAT}}) - \text{prime pure}$$

- Pour le module *CAT Life* :

$$EC_{\text{CAT_Life}} = \text{VaR}_{99,5\%}(S_{\text{CAT}}) - \text{prime pure}$$

- Par mutualisation :

$$EC = \text{VaR}_{99,5\%}(S) - \text{prime pure}$$

Sous ces hypothèses, nous allons principalement nous intéresser aux couvertures non-proportionnelles.

A Réassurance proportionnelle

Nous allons présenter les résultats de nos simulations. Nous avons intégré notre modèle de surmortalité à un modèle individuel de calcul de la charge sinistre sur les portefeuilles. Nous cherchons à quantifier et à observer l'impact du risque de mortalité extrême sur la sinistralité des portefeuilles. Nous représentons ensuite graphiquement le transfert de risque vers la réassurance sur un exemple de portefeuille net d'excédent de plein.

1 Simulation de la charge sinistre

Prenons les portefeuilles des cédantes E et T, nous avons à notre disposition un nombre simulé de scénarios de sous et surmortalité. Pour chacun de ces scénarios et chacun des portefeuilles, nous appliquons un modèle individuel afin de calculer la charge sinistre globale brute de réassurance.

Le protocole de calcul de la *Value At Risk* à 99,5 % de la charge sinistre est le suivant :

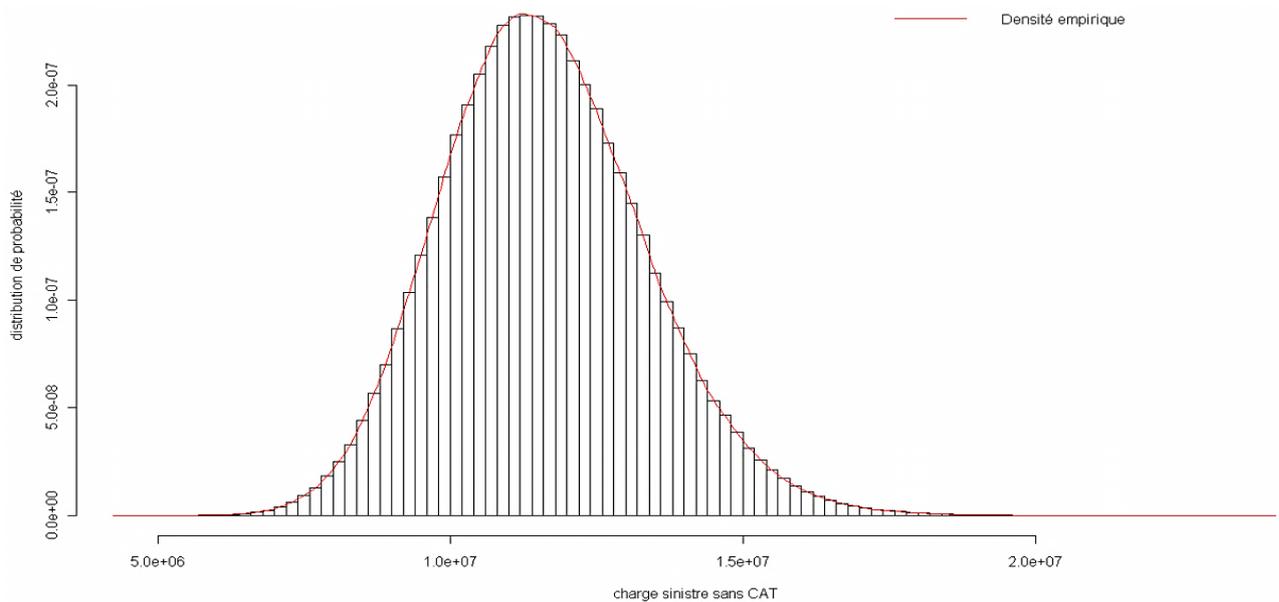
- Générer n scénarios de surmortalité. Nous avons au final une matrice de q_{x_chocs} de dimension $n \times 61$. Le nombre de colonnes correspond aux âges étudiés qui vont de vingt à quatre-vingts ans. Les scénarios *CAT Life* sont ordonnés par amplitude croissante de chocs sur la mortalité.
- Pour chaque ligne de notre matrice de q_{x_chocs} nous appliquons le modèle individuel au portefeuille d'étude afin de calculer la charge sinistre globale brute de réassurance. C'est durant cette étape que nous utilisons des regroupements d'assurés par âges, et par tranches de capitaux afin de limiter le temps de calcul. Les plus gros capitaux restent simulés tête par tête. Nous sommons les pertes des deux modélisations pour obtenir la perte au global du portefeuille.
- Nous obtenons ensuite un vecteur de taille n . Chaque composante du vecteur est un scénario de charge sinistre sur le portefeuille. Nous appelons ce vecteur S .
- Nous calculons la *Value At Risk* empirique à 99,5 % du vecteur S .

Nous avons effectué différents jeux de simulation pour $n = 10\,000$ et $n = 100\,000$. Pour chacun de ces jeux, nous avons estimé la *Value At Risk* à 99,5 % suivant une approche paramétrique et empirique. L'intérêt de l'approche paramétrique est d'évaluer précisément un quantile extrême avec peu de données. Opérationnellement, le calcul paramétrique est néanmoins contraignant car il demande une analyse plus fine. Il faut choisir un seuil à partir duquel nous ajustons une distribution de probabilité. Le choix du seuil utilise des outils relatifs à la théorie des valeurs extrêmes (*Mean Excess Function, Zipf plot*). Les distributions paramétriques utilisées étaient la Log-Normale à trois paramètres, ainsi que la loi Gamma. Les résultats de l'approche paramétrique variant en proportion supérieurs à 15 % pour $n = 100\,000$, nous avons décidé d'augmenter le nombre de simulations jusqu'à obtenir un quantile empirique stable. Nous allons effectuer un nombre relativement important de simulations pour différents portefeuilles, l'avantage du quantile empirique pour un nombre important de simulation est sa robustesse, ainsi que sa simplicité de calcul. Le quantile empirique est stable pour $n = 10^6$.

Le vecteur S se décompose en trois parties :

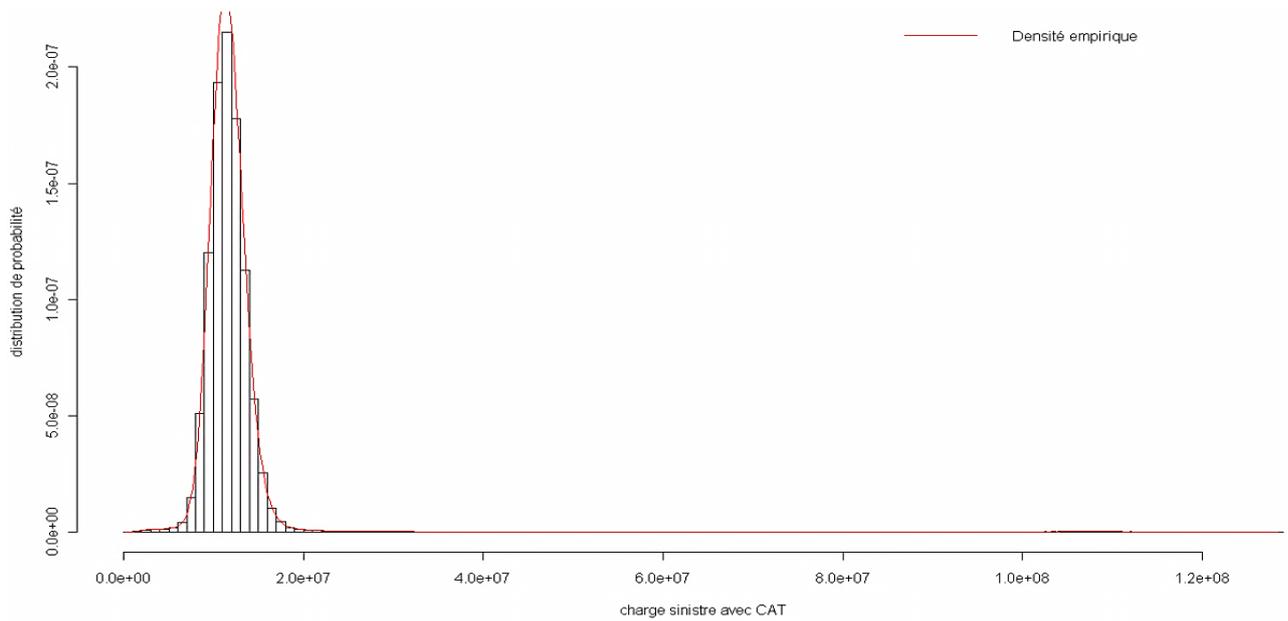
- La première concerne la charge sinistre hors CAT . Il s'agit de la charge sinistre sur le portefeuille hors risque CAT *Life*. Elle permet de capter l'influence de la volatilité des sommes sous risque sans l'effet du risque de mortalité extrême.
- La deuxième concerne les pertes et les gains relatifs à la mortalité extrême. Dans le cas d'un effet de sous mortalité, il s'agit de modéliser un gain sur la charge sinistre *hors CAT*. Dans le cas d'un effet de surmortalité, il s'agit d'une perte supplémentaire sur la mortalité *hors CAT*.
- La charge sinistre au global est la somme des deux. Nous notons S_{HCAT} la charge sinistre hors CAT , et S_{CAT} la charge sinistre CAT , ainsi $S = S_{HCAT} + S_{CAT}$.

Dans le cas du portefeuille emprunteur de la *cédante E* et sur la charge sinistre hors CAT , nous obtenons l'histogramme suivant :



Graphique 30 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance sans CAT (Cédante E)

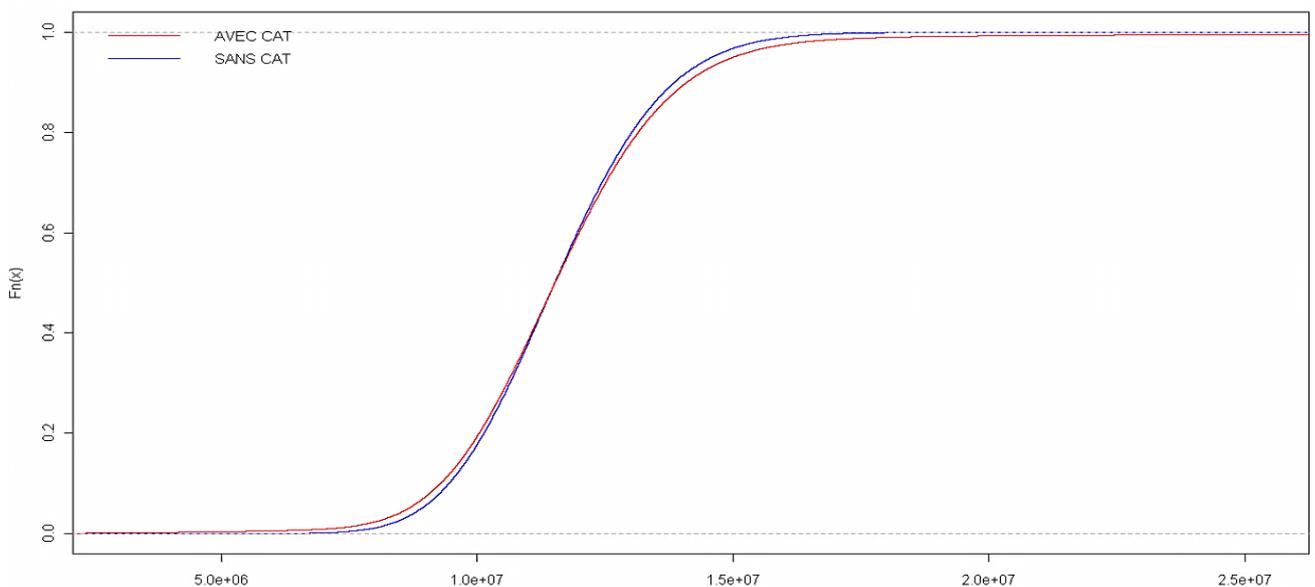
L'intégration du risque de mortalité extrême conduit à la distribution suivante :



Graphique 31 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance avec CAT (Cédante E)

La volatilité supplémentaire apportée par le risque de mortalité extrême conduit à une queue de distribution plus lourde à droite. C'est particulièrement flagrant dans l'exemple du portefeuille de la cédante E, les pertes pouvant atteindre 120 millions €.

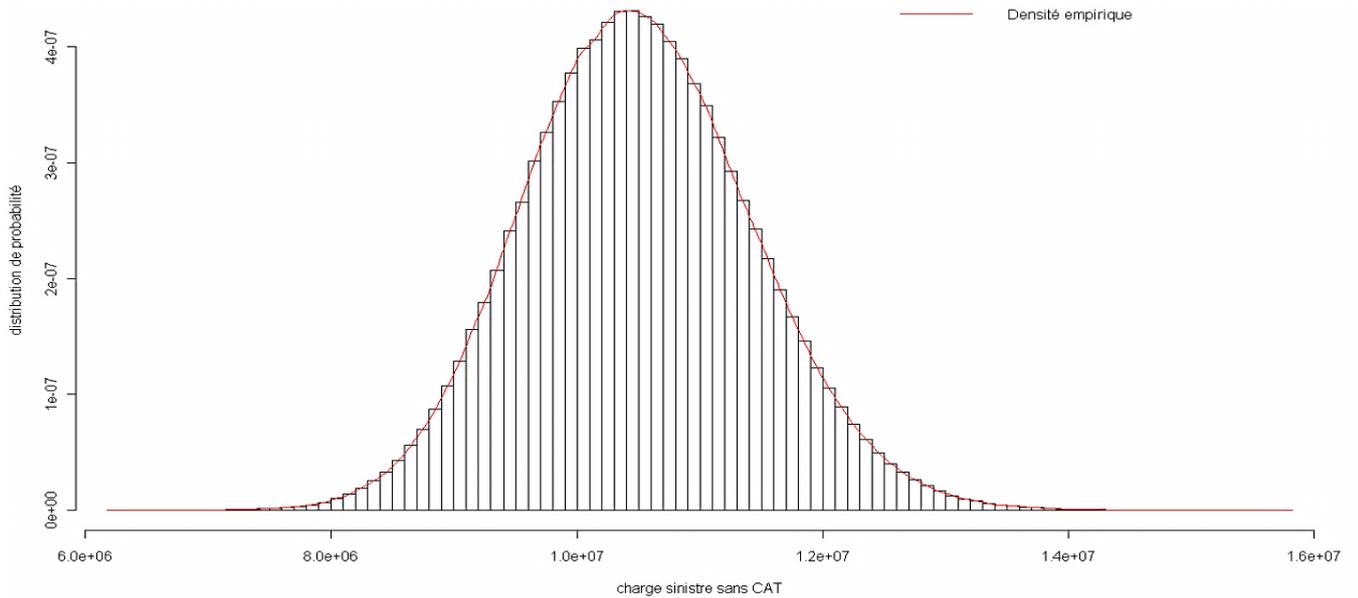
Afin d'illustrer cette volatilité supplémentaire sur le portefeuille de la cédante E, nous allons présenter les fonctions de répartition empiriques des charges sinistres avec et sans risque CAT Life. Les fonctions de répartition empiriques sont les suivantes :



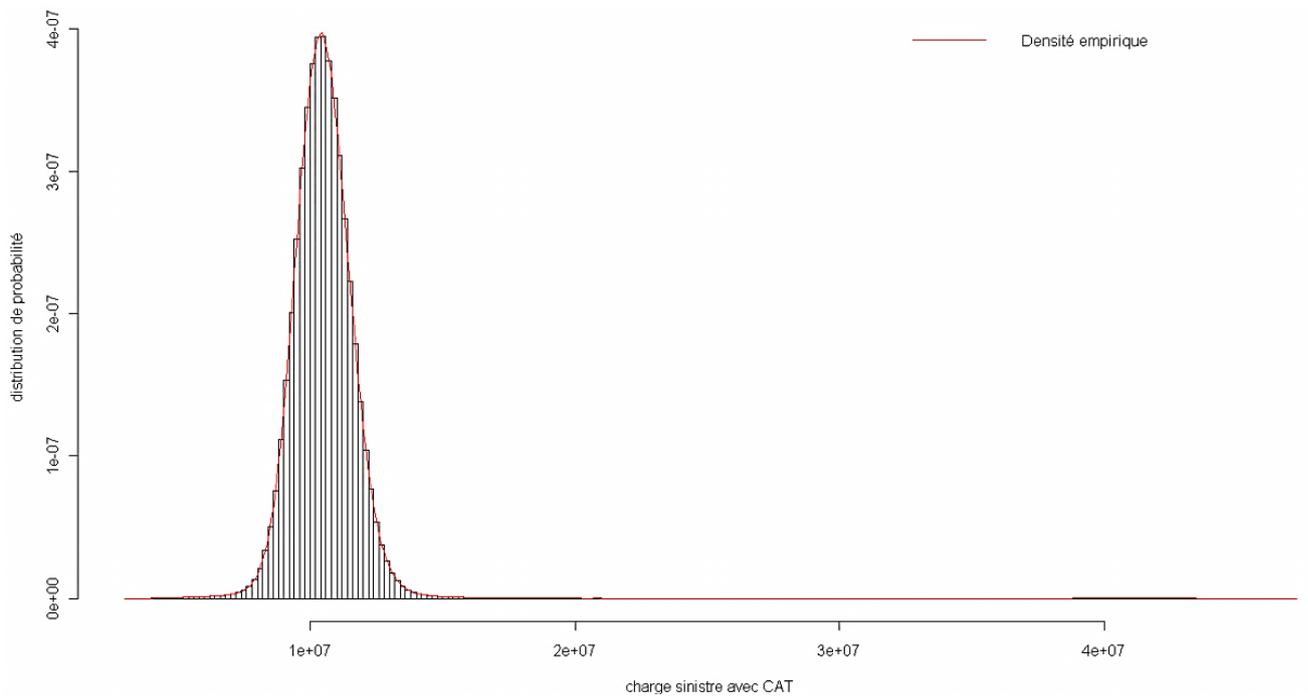
Graphique 32 Fonctions de répartition empiriques des charges sinistres avec et sans CAT Life (Cédante E)

Dans le cas de la sous-mortalité, la queue à gauche est aussi plus épaisse, en effet la sous mortalité permet un gain sur les sinistres de la mortalité de tendance.

Ci-dessous pour le portefeuille de la *cédante T*, les histogrammes des distributions avec et sans risque *CAT Life* :



Graphique 33 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance sans CAT (Cédante T)



Graphique 34 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance avec CAT (Cédante T)

Même pour des portefeuilles à faible volatilité, l'impact du risque de mortalité extrême sur la distribution reste important et visible. Nous quantifierons cet impact sur le niveau de capital économique de nos portefeuilles.

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul des différentes mesures de risque relatives aux charges sinistres brutes de réassurance. Les portefeuilles étudiés sont ceux des cédantes T et E. Le tableau ci-dessous récapitule les indicateurs de moyenne, de volatilité et de *Value at Risk* à 99,5 % :

	Cédante T	Cédante E
Sinistralité moyenne attendue SANS (A)	10 495 930 €	11 593 999 €
Sinistralité moyenne attendue CAT	81 720 €	289 989 €
Sinistralité moyenne attendue AVEC CAT	10 577 650 €	11 883 988 €
<hr/>		
Ecart-type de la charge sinistre SANS CAT (B)	927 830 €	1 729 958 €
Coefficient de variation de la charge sinistre SANS CAT (B/A)	9 %	15 %
<hr/>		
<i>Value At Risk</i> SANS CAT (C)	13 021 878 €	16 588 491 €
<i>Value At Risk</i> CAT (D)	5 676 957 €	13 895 142 €
<i>Value At Risk</i> AVEC CAT (E)	16 405 666 €	25 662 206 €
<hr/>		
Diversification des risques E / (C+D)	88 %	84 %
Impact sur le capital économique (E-C) / (C-A)	134 %	182 %

Tableau 17 Indicateurs de risque sur les portefeuilles des cédantes E, et T

Nous avons plusieurs observations à effectuer sur ce tableau :

- La charge sinistre catastrophe moyenne devrait en théorie être égale à 0. En effet la mortalité de tendance estimée par le modèle de surmortalité correspond par construction à la mortalité moyenne sans chocs. Néanmoins l'ajustement des distributions Cauchy et Logistique sur les données historiques françaises fait apparaître un biais. En moyenne, la mortalité catastrophe n'est donc pas complètement nulle. La multiplication des chocs sur la mortalité par les sommes sous risque dans le modèle individuel d'exposition implique un biais sur la moyenne de la charge sinistre globale. Pour la cédante E, l'amplitude du biais est de 0,8 %. Pour la cédante T, il est de 2,5 %. Dans notre vision moyenne du risque, nous choisirons la moyenne des pertes sans CAT.
- L'intégration du risque de mortalité extrême sur le capital économique a un impact non négligeable. Le capital économique augmente de 134 % pour la cédante T, et 182 % pour la cédante E. La diversification des risques est prise en compte. Le risque de mortalité extrême constitue plus de la double de l'exigence de capital sans CAT.
- Le bénéfice de diversification entre le risque de mortalité hors CAT et la mortalité extrême est stable entre 80 % et 90 %, et ce quelle que soit la volatilité du portefeuille. Sur un traité, il est rare d'obtenir dans la même année une catastrophe et une dérive de la mortalité de tendance. Il y a donc une diversification entre les risques.

Nous avons calculé l'exigence de capital sous la formule standard pour les modules *CAT Life* et *Mortality Life*. Le tableau ci-dessous récapitule les résultats des approches standards, et modèles internes :

		Cédante T	Cédante E
Approche modèle interne	Capital économique SANS CAT	2 525 948 €	4 994 492 €
	Capital économique AVEC CAT	5 909 736 €	14 068 207 €
Approche formule standard	Capital économique SANS CAT	1 575 013 €	1 739 198 €
	Capital économique AVEC CAT	6 868 650 €	15 536 238 €

Tableau 18 Exigence de capital sur les risques de mortalité extrême et hors CAT des cédantes E, et T

Les résultats du modèle sur le risque de surmortalité sont cohérents avec ceux fournis par la formule standard. Le choc de mortalité extrême calibré par celle-ci est là aussi relativement important en comparaison du capital requis pour le risque de mortalité sans *CAT*. Dans les deux approches, le risque de mortalité extrême constitue la majeure partie du capital économique requis sur le module *Life*.

Pour les deux portefeuilles, la formule standard sur le risque de mortalité sans *CAT* donne un résultat inférieur à la modélisation stochastique. Pour la Cédante E, plus volatile en termes de sommes sous risque, l'écart est plus important entre les deux modélisations. Cela nous amène à penser que la calibration standard du risque de mortalité sans *CAT* est d'autant plus limitée par rapport à l'approche modèle interne que les sommes sous risque engagées sont volatiles. Nous mettrons en évidence ce résultat sur les contrats collectifs étudiés.

Nous allons maintenant chercher à évaluer le poids du risque de mortalité extrême dans la constitution du capital économique. Nous allons étudier différentes cédantes et donc différents profils de portefeuilles.

2 Intégration du risque *CAT Life*

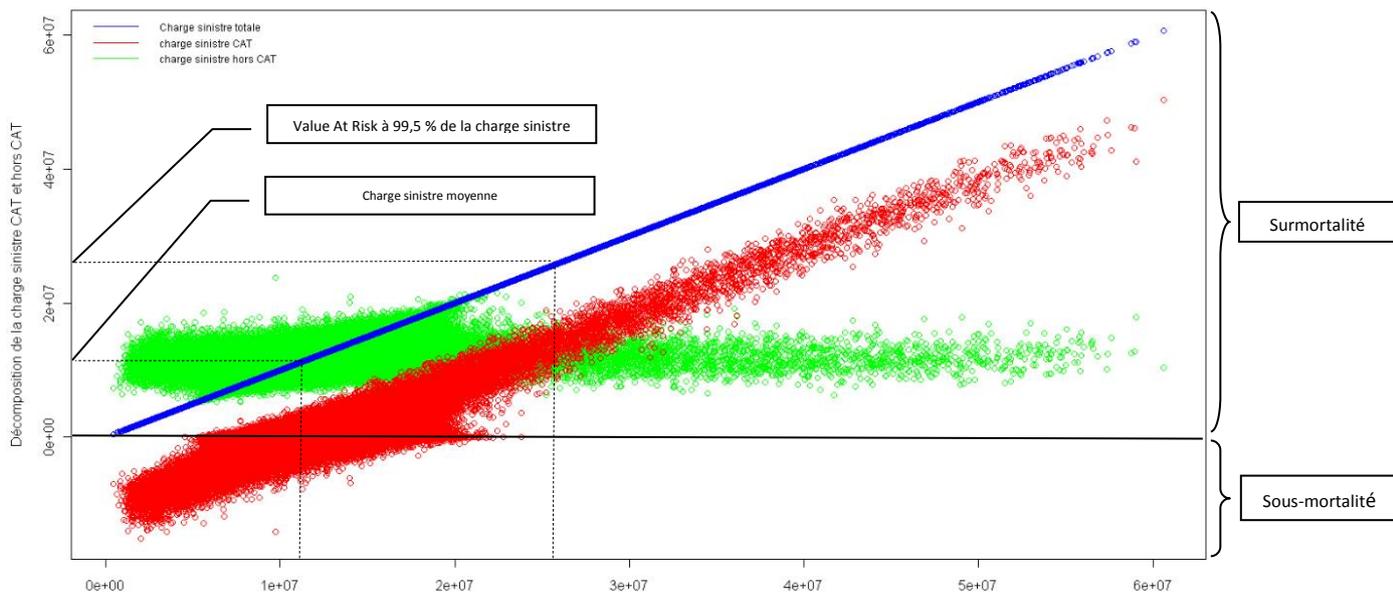
L'impact du risque de mortalité extrême sur les fonctions de répartition des charges sinistres simulées est visible mais il ne permet pas de mesurer pleinement son importance. Nous avons donc pensé à une représentation en nuage de point des charges sinistres simulées pour chaque scénario *CAT Life*. Une telle représentation permet de visualiser la participation du risque de mortalité extrême sur les pertes.

La représentation en nuage de point des simulations sur les charges sinistres permet de discerner la différence de comportement des risques de mortalité *CAT Life* et hors *CAT*, et la part de ces deux risques sur les pertes. Nous nous intéressons ensuite à l'impact du risque de surmortalité sur le niveau du capital économique requis de chaque portefeuille.

Les graphiques ci-après représentent la décomposition de la charge sinistre globale suivant les pertes dues au risque de mortalité de tendance et à la mortalité extrême.

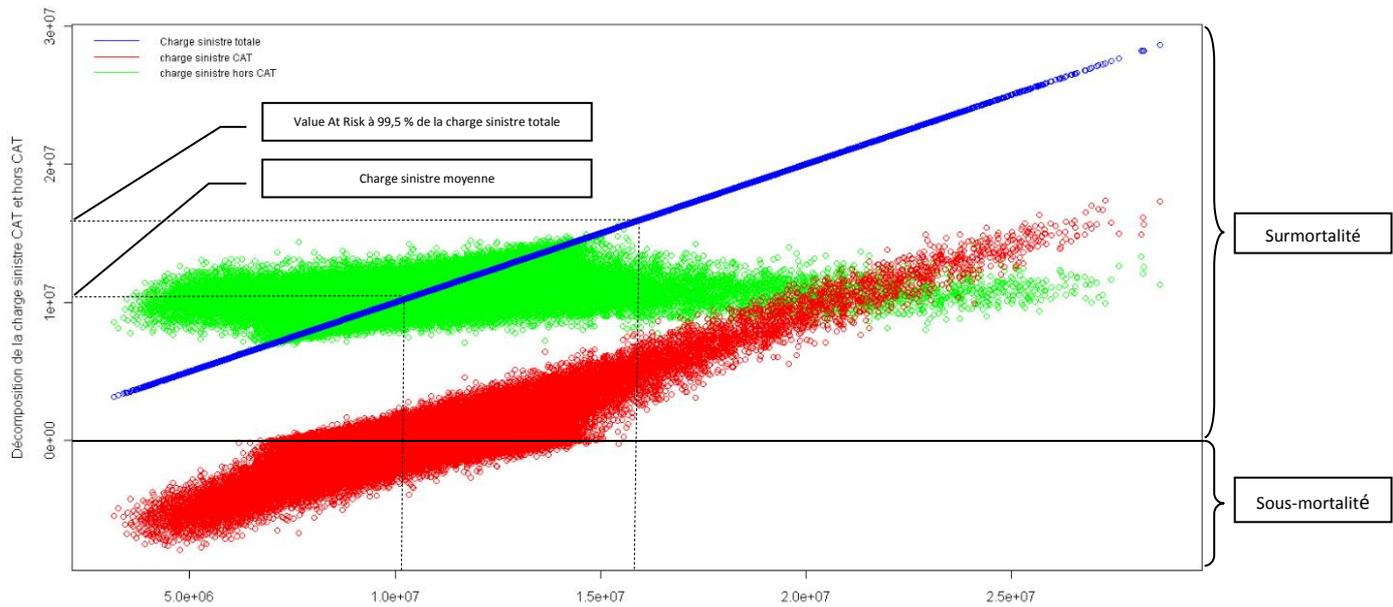
Chaque graphique représente la charge sinistre jusqu'à un scénario catastrophe de quantile inférieur à 99,8 %. Notre scénario maximum probable est celui de quantile 99,8 %.

Pour la cédante E :



Graphique 35 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante E)

Pour la cédante T :



Graphique 36 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante T)

Nous commentons la lecture des graphiques :

- Nous avons simulé un certain nombre de scénarios *CAT Life*. Chacun impacte la mortalité de l'ensemble des traités étudiés.
- Pour chacun des scénarios *CAT Life* et des traités étudiés, nous avons généré une charge sinistre. Nous avons représenté les sinistralités obtenues en abscisse et en ordonnée par une ligne de points de couleur bleue. Pour un montant de charge sinistre donnée, nous cherchons à déterminer quelles sont les parts respectives des risque de mortalité *CAT Life* et hors *CAT*.
- Notre approche de modélisation de la charge sinistre globale (bleue) nous a permis de l'écrire comme la somme d'une charge sinistre hors *CAT* (ici représentée en vert) et d'une charge sinistre *CAT Life* (ici représentée en rouge). La représentation dans le plan de cette décomposition donne les graphiques ci-dessus.
- Prenons un exemple avec une sinistralité globale de 25 millions. La lecture de l'axe en abscisse nous permet d'identifier la zone étudiée. La lecture de l'axe en ordonnée nous indique que sur ces scénarios, il y a en moyenne 10 millions de charge sinistre due à la mortalité hors *CAT* et 15 millions à la mortalité *CAT Life*.
- Dans le cas d'une sous mortalité, nous avons un gain sur la charge sinistre sans *CAT*. C'est pourquoi les pertes sur le risque *CAT Life* sont négatives, et que les pertes sur le risque sans *CAT* sont supérieures à celles une fois les deux risques agrégés. C'est un choix de modélisation de notre part. Cela permet de quantifier le biais sur la moyenne sur risque de mortalité extrême.
- Pour des niveaux de pertes plus importants sur les portefeuilles, nous observons un affinement des simulations. Ce phénomène est cohérent car nous souhaitons modéliser des événements rares. Un événement *CAT Life* tel que modélisé est rare. Pour chaque scénario *CAT Life*, correspond un scénario sur la mortalité de tendance. C'est pourquoi sur le graphique, les charges sinistres hors *CAT* s'affinent, de même.

Une fois le graphique interprété, nous commentons les principaux résultats :

- Alors que le risque de mortalité hors *CAT* reste à un niveau relativement stable, le risque de mortalité extrême se détache nettement. C'est pour le portefeuille de la Cédante E que le phénomène est le plus important. Sur ce portefeuille, le poids des tranches de capitaux inférieurs à 400 000 € est très important. Ces tranches comptent pour 80 % de la somme assurée globale.
- Le nuage de simulation des charges sinistres reste relativement compact autour d'un comportement moyen. De plus le risque *CAT Life* se dissocie nettement du risque de mortalité sans *CAT*. L'association de ces deux phénomènes s'explique par la faible volatilité des sommes sous risque des deux portefeuilles et par le poids important des tranches basses de capitaux dans le capital global couvert. Le risque de mortalité extrême porte essentiellement sur les tranches de capitaux les plus faibles mais les plus représentatives au global du portefeuille à la vue du grand nombre d'assurés qu'elles contiennent.

- Dans les deux graphiques, nous observons pour la sous-mortalité une concentration des simulations. Elle est le résultat de la contrainte sur la minoration des taux de mortalité instantanée. Nous devons travailler sur des probabilités, la sous-mortalité est donc bornée dans les négatifs par l'amplitude de la mortalité de tendance. Dans les cas de surmortalité, il n'y a pas cet effet de concentration car la contrainte de majoration est basée sur un scénario maximum probable.

Pour différents niveaux de priorité, nous avons appliqué une structure de réassurance en excédent de sinistre par tête sur le portefeuille de la Cédante E. La reconstitution est gratuite et illimitée. La portée est supérieure au plus gros capital du portefeuille. Nous calculons ensuite le rapport du capital économique net de réassurance sur le même capital brut de réassurance.

Le tableau suivant synthétise les résultats :

Cédante E	SANS CAT	AVEC CAT	
Priorité de la couverture XS	Capital économique net de réassurance sur Capital économique brut		Différence de résultat avant et après le CAT
100 000 €	38 %	49 %	11 %
200 000 €	62 %	75 %	13 %
300 000 €	74 %	89 %	15 %
400 000 €	82 %	95 %	13 %
500 000 €	86 %	98 %	12 %
600 000 €	89 %	99 %	10 %
700 000 €	90 %	99 %	9 %
800 000 €	91 %	100 %	9 %
900 000 €	93 %	100 %	7 %
1 000 000 €	93 %	100 %	7 %
Brut de réassurance	100 %	100 %	0 %

Tableau 19 Impact du risque de surmortalité sur les tranches basses de capitaux

L'impact du CAT sur la constitution du capital économique est le plus significatif pour les priorités allant de 100 000 € à 500 000 €. Ce sont néanmoins les tranches basses de capitaux qui représentent la majeure exposition du portefeuille de la Cédante E. Elles constituent 90 % de l'exposition en sommes assurées du portefeuille.

Ce résultat montre que l'impact du risque de mortalité extrême est porté par un nombre important d'assurés. Dans le cas d'une couverture annuelle en excédent de plein ou d'un excédent de sinistre par tête, seul l'excédent des sommes sous risque par rapport à la priorité est transféré au réassureur. La cédante reste engagée sur un nombre important d'assurés, pour des capitaux en dessous de la priorité. D'après le tableau 8, elle conserve une partie importante du risque de mortalité extrême et reste fortement exposée sur son portefeuille net de réassurance.

La principale différence entre le risque *CAT life* et la mortalité de tendance concerne l'impact des tranches de capitaux les plus importantes. Comme la montré Mechahougui (2011), la volatilité sous-jacente des sommes sous risque impacte de manière significative l'exigence de capital sur le risque de mortalité hors *CAT*. L'excédent sur les capitaux supérieurs à 700 000 € compte pour 10 % du capital économique brut de réassurance. Avec le risque de mortalité extrême, celui-ci ne compte plus que pour 1 %.

Nous étudierons plus en détail l'impact de ces deux risques sur la constitution de l'exigence de capital sur les portefeuilles collectifs nets de réassurance.

3 Excédent de plein annuel

Dans le cadre de notre étude, les couvertures de réassurance sont annuelles. Chaque année, la couverture est de nouveau tarifée et soumise à une analyse technique. Les excédents de plein pluriannuels ne sont donc pas modélisés dans le cadre de ce mémoire.

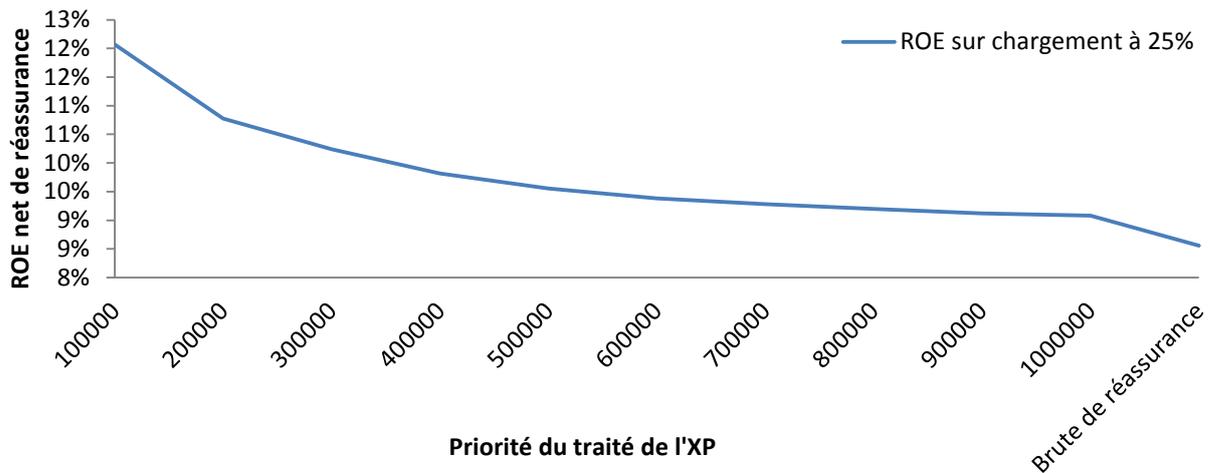
A horizon un an pour des sommes assurées constantes, l'application d'un excédent de plein sur les sommes sous risque est la même qu'un excédent de sinistre par tête avec la même priorité, et une portée élevée. Nous allons dans cette partie mettre en évidence l'impact d'une telle couverture sur la rentabilité de la cédante. Pour cela nous allons étudier le portefeuille de la Cédante E. L'impact du risque de mortalité extrême sur le problème d'optimisation de la cédante sera développé par la suite.

Le risque de mortalité extrême n'est pas pris en compte. L'objectif est de dégager l'impact de la réassurance en *XS* par tête, et *XP* annuel sur la rentabilité de la cédante et la diminution de son capital économique. De plus, nous illustrons l'importance pour le réassureur de diversifier son activité.

- **Augmentation de la rentabilité de la cédante et diminution du coût du capital net**

Nous avons appliqué à chaque police du portefeuille de la cédante E, une couverture de réassurance en excédent de plein suivant différentes priorités. Suivant chaque priorité, nous avons calculé le *ROE* net de la cédante. Le niveau de chargement appliqué sur la prime pure nette de la cédante est de 25 %. Ainsi, le ratio sinistre à prime cible attendu est de 80 %.

Le graphique ci-dessous représente le *ROE* net de la cédante suivant la priorité de la couverture de réassurance. Plus la priorité est faible, plus l'engagement du réassureur est important.

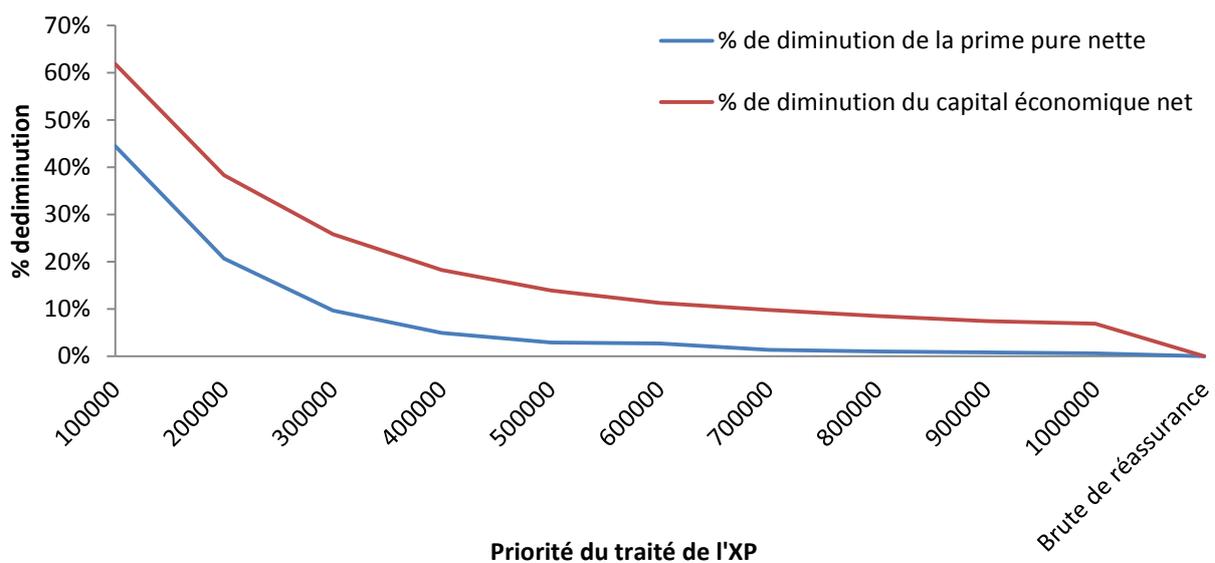


Graphique 37 Evolution du critère de rentabilité ROE de la Cédante E suivant la priorité d'une couverture XP

L'analyse du portefeuille de la cédante E montre que les capitaux inférieurs à 400 000 € représentent 80 % des sommes sous risque du portefeuille. C'est sur ces tranches que l'impact de la couverture de réassurance sur l'augmentation du critère de rentabilité est le plus important.

Ce résultat est à relativiser par rapport à la prime nette de réassurance. En effet, si la rentabilité de la cédante augmente au sens du *ROE* la prime de réassurance aussi. Ainsi l'augmentation du critère de rentabilité est le résultat d'une diminution plus forte encore du capital économique net.

Le graphique ci-dessous illustre la diminution du capital économique et de la prime pure nets de réassurance par rapport au cas brut de réassurance. Nous avons calculé ce pourcentage pour différents niveaux de priorités :



Graphique 38 Diminution du capital économique et de la prime pure avec la priorité (Cédante E)

L'impact de la réassurance sur le capital économique est plus important que sur la prime pure. Dans le cadre d'une couverture non-proportionnelle hors risque de mortalité extrême, le transfert de volatilité des sommes sous risque suffit à réduire le capital économique en proportion plus importante que la prime nette. Ces couvertures de réassurance permettent à la cédante de diminuer fortement le capital économique requis pour une prime de réassurance relativement faible. Si la cédante a la possibilité de payer moins de prime de réassurance que de coût du capital économisé, la structure de réassurance est alors optimisée. Ce que la cédante investit comptablement avec la prime de réassurance, elle le gagne économiquement à travers un capital économique plus faible.

- **L'effet de diversification du réassureur**

Le capital économique requis tel qu'il doit être calculé par Solvabilité II s'effectue avec la mesure de risque *Value at Risk* à 99,5 %. Néanmoins cette mesure n'est pas sous-additive. Cette propriété permet d'illustrer simplement la nécessité pour le réassureur de diversifier son activité. Elle permet au réassureur de disposer d'un capital économique moindre afin de proposer une prime de réassurance compétitive.

Notons :

- X la charge sinistre brute de réassurance du portefeuille ($X > 0$).
- X_{Net} la charge sinistre nette de réassurance du portefeuille.
- $X_{Réass}$ la charge sinistre réassurée.

Ainsi :

$$X = X_{Net} + X_{Réass}$$

L'application de la mesure de risque *Value at Risk* conduit à :

$$VaR_{\alpha}(X) \leq VaR_{\alpha}(X_{Net}) + VaR_{\alpha}(X_{Réass}) \quad (1)$$

Le terme de droite de l'équation ne tient pas compte de la mutualisation des sommes sous risque sur le portefeuille brute de réassurance. C'est pourquoi nous obtenons cette inégalité.

Ainsi :

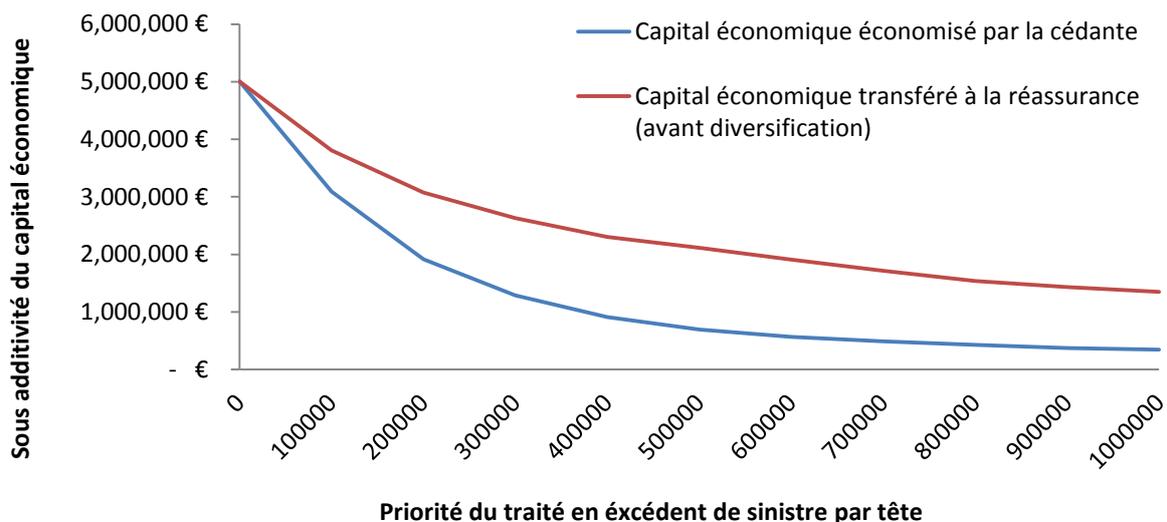
$$VaR_{\alpha}(X) - VaR_{\alpha}(X_{Net}) \leq VaR_{\alpha}(X_{Réass}) \quad (2)$$

Le calcul simplifié du capital économique s'effectue par la différence entre la *Value at Risk* à 99,5 % et le montant des sinistres attendus :

- $(VaR_{\alpha}(X) - E(X)) - (VaR_{\alpha}(X_{Net}) - E(X_{Net})) \quad (3)$: le capital économisé par la cédante après réassurance.
- $VaR_{\alpha}(X_{Réass}) - E(X_{Réass}) \quad (4)$: le capital économique transféré à la réassurance avant diversification.

D'après l'équation (2), et les relations (3) et (4), le capital économique transféré à la réassurance avant diversification est supérieur à celui économisé par la cédante. A niveau de rentabilité égal entre la cédante et le réassureur sans diversification pour ce dernier, le coût du capital que la cédante cherche à économiser sera reporté sur la prime de réassurance chargée.

Le graphique ci-dessous illustre le résultat des équations. Sur le portefeuille de la Cédante E et suivant différents niveaux de priorité, nous avons calculé le capital économique économisé par la cédante (équation 3), et le capital économique récupéré par la réassurance avant diversification (équation 4).



Graphique 39 Comparaison du capital économique économisé et transféré suivant la priorité (Cédante E)

Le réassureur couvre un grand nombre de cédantes dans plusieurs pays. Il dispose d'un double effet de diversification. Le premier à l'échelle de son portefeuille avec un nombre important de traités. Le second à l'échelle du groupe avec un étalement géographique de l'activité. Ces deux effets lui permettent de diminuer son exigence de capital requis, et donc son coût du capital. Pour un même niveau de capital, et pour une même cible de rentabilité fixée, le coût du capital du réassureur est inférieur à celui d'une cédante dont le marché est concentré dans un unique pays.

Le bénéfice de diversification du réassureur joue un rôle essentiel dans la détermination de son capital économique. C'est un paramètre important des modèles d'allocations du capital dont nous parlerons brièvement dans la suite.

L'impact du risque de mortalité extrême sur le bénéfice de diversification du réassureur n'est pas négligeable. En effet, une pandémie est par définition mondiale. Le risque de mortalité extrême touche donc plusieurs portefeuilles dans leur ensemble. Dans le pire des cas pour le réassureur, le bénéfice de diversification sur le risque de mortalité extrême est nul tant au niveau de son portefeuille, que du groupe. Le réassureur fait face à une double difficulté. Il doit correctement charger sa prime pure selon ses cibles de rentabilité, et proposer pour la cédante une prime de réassurance et une couverture permettant à celle-ci d'augmenter sa rentabilité.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'interaction entre le risque de mortalité extrême et la mortalité de tendance. Une étude approfondie de la volatilité des sommes sous risque va nous permettre de mettre en évidence la limite de modélisation de l'approche standard sur le risque de mortalité hors CAT. Nous étudierons aussi l'impact du risque de mortalité extrême sur le bénéfice de diversification du portefeuille non-proportionnel de RGA. Dans cette partie nous nous placerons du point de vue du réassureur.

B Réassurance non-proportionnelle

Nous allons effectuer notre étude sur les portefeuilles réassurés soumis à des couvertures en excédent de sinistre par tête. Chacun de ces portefeuilles possède une volatilité sur les sommes sous risque réassurées plus ou moins importante. Nous pouvons dégager deux profils opposés de portefeuilles.

- Des portefeuilles à la volatilité importante sur les capitaux réassurés. Les sommes réassurées peuvent être relativement importantes. Le portefeuille de la Cédante 13 est un exemple. Le coefficient de variation des sommes sous risque réassurées est de 192 %. Les capitaux réassurés peuvent être relativement importants car la portée est de 26 millions € en excès de 4 millions €.
- Des portefeuilles à la volatilité faible ou moyenne sur les capitaux réassurés. Les sommes réassurées sont relativement basses. Le portefeuille de la Cédante 1 est un exemple. Le coefficient de variation des sommes sous risque réassurées est de 20 %. La portée de l'excédent de sinistre est de 3.46 millions € en excès de 140 000 €.

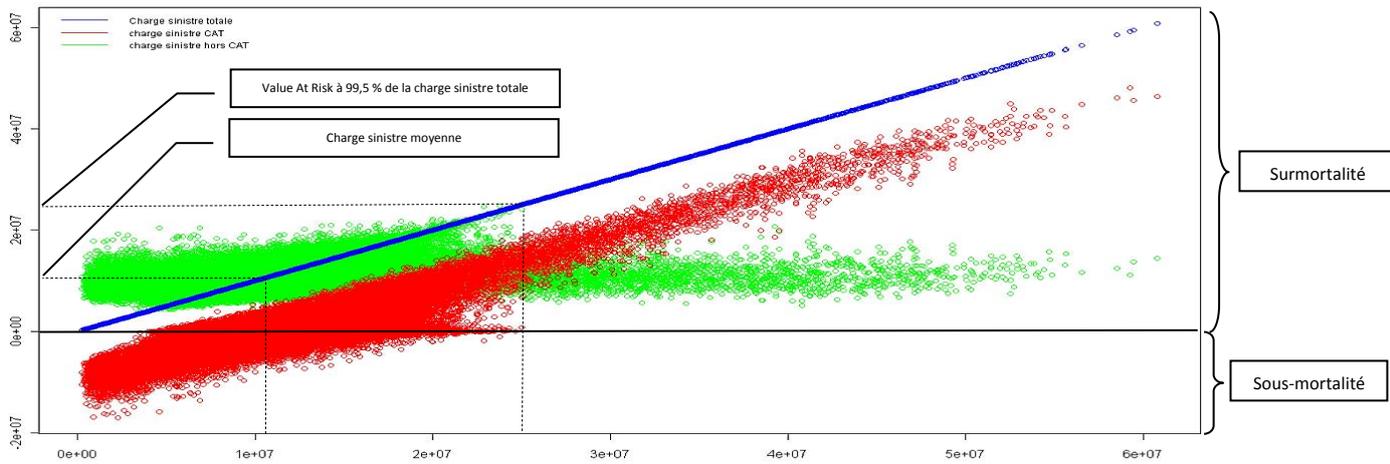
Les profils de risque de ces portefeuilles sont totalement différents. Nous calculerons l'exigence de capital sur le risque de mortalité hors CAT. Nous utiliserons l'approche standard de Solvabilité II, ainsi que notre modèle de surmortalité. Ces calculs permettront de mettre en évidence la limite de modélisation de la formule standard sur le risque de mortalité hors CAT.

1 Le risque CAT Life sur le portefeuille collectif

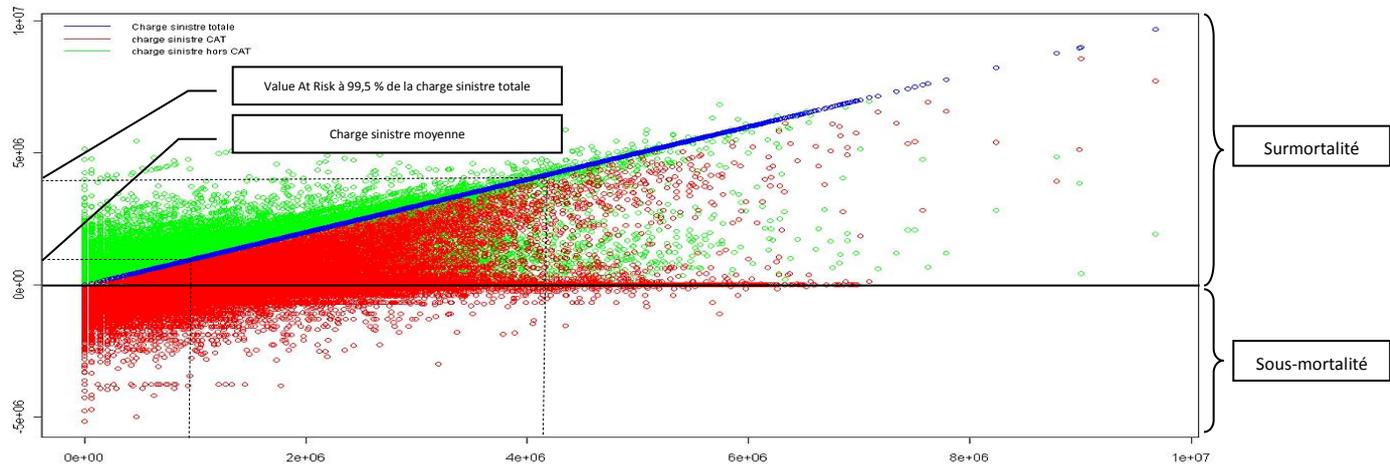
La distribution de nos simulations permet de discerner l'importance du risque extrême de mortalité dans la constitution du capital économique requis. Chaque graphique détaille la décomposition de la charge sinistre réassurée pour des scénarios CAT de quantiles inférieurs à 99,8 %.

Nous allons effectuer cette représentation graphique pour trois portefeuilles. Un portefeuille de profil 1 avec un indice de volatilité faible de 20 %. Un portefeuille de profil intermédiaire avec un indice de 71 %. Un portefeuille de profil 2 de coefficient de variation des sommes sous risque réassurées égal à 192 %.

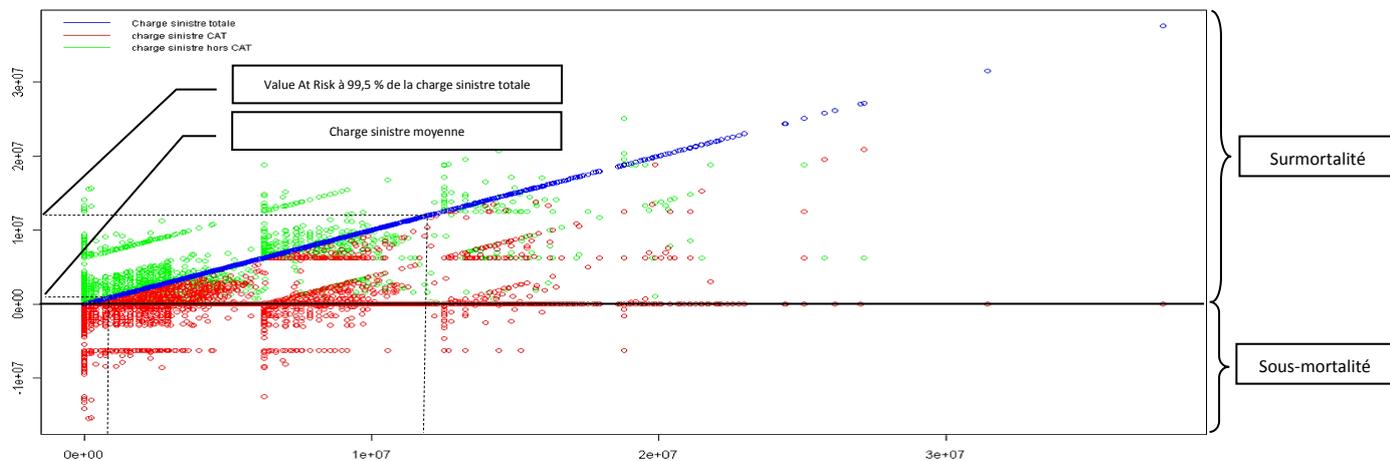
Ci-dessous la distribution graphique de nos simulations pour les trois traités étudiés :



Graphique 40 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 7)



Graphique 41 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 7)



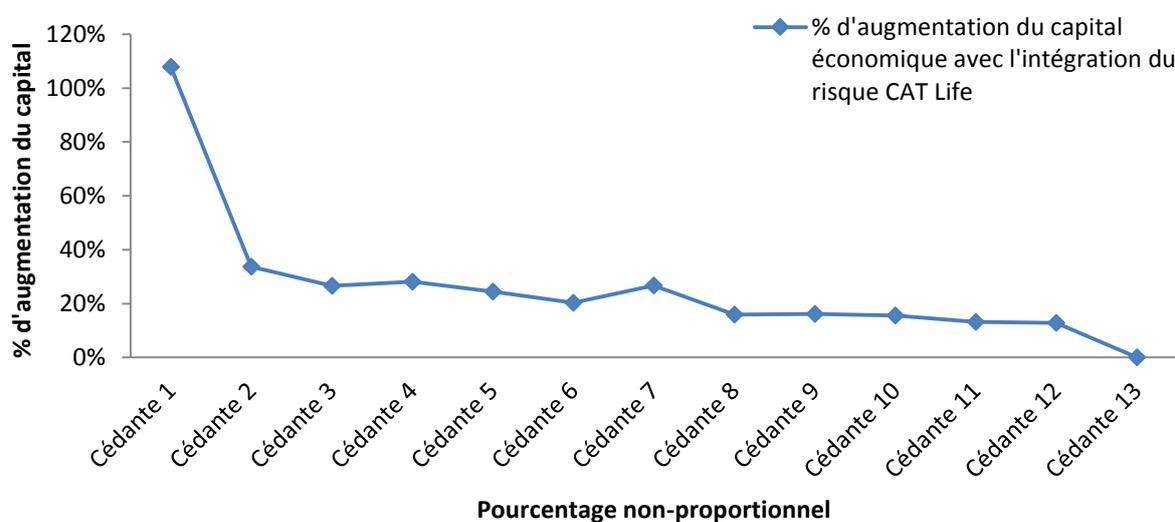
Graphique 42 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 13)

Nous avons plusieurs observations à faire sur ces graphiques :

- Dans le cas d'un portefeuille peu volatil, la mortalité extrême se détache nettement de la mortalité hors *CAT*. Le risque de mortalité extrême est porté par un nombre de sinistres importants sur les tranches basses de capitaux. L'aspect général du graphique 40 est similaire à celui observé sur le portefeuille de la Cédante E (page 101). Les deux portefeuilles ont en commun une faible volatilité des sommes sous risque avec un capital global concentré sur les tranches basses.
- Dans le cas du portefeuille de la Cédante 7, les pertes sur le risque de mortalité extrême se détachent moins significativement de celles sur la mortalité de tendance. L'aspect général des simulations est plus éclaté.
- Le portefeuille de la Cédante 13 est le plus volatil. La représentation graphique des pertes est éclatée et le risque de mortalité extrême ne se détache plus aussi nettement de la mortalité hors *CAT*. Une sinistralité exceptionnelle sur le portefeuille peut être autant la conséquence d'une mortalité extrême, que d'un sinistre de mortalité hors *CAT* sur un capital important.
- Dans chacun des portefeuilles étudiés, la volatilité des sommes sous risque impacte autant la mortalité extrême que la mortalité hors *CAT*. La décomposition graphique des pertes au global change avec la volatilité des sommes sous risque. Les résultats sur les simulations sont beaucoup plus éclatés et dispersés pour les portefeuilles les plus volatils.
- Dans chacun des portefeuilles collectifs nets de réassurance, nous sommes passés d'un modèle « fréquence/coût » à une approche par exposition individuelle. Cette approche de modélisation se base sur des regroupements d'assurés par âges et par tranches de capitaux réassurés. Avec un portefeuille très volatil comme celui de la Cédante 13, nous disposons d'une faible population aux montants réassurés élevés. La structure en « damier » résulte de deux effets, le premier suivant la transversale, le second suivant l'horizontale.
 - Le premier effet concerne la représentation graphique de la charge sinistre globale suivant la transversale. Dans notre graphique, celle-ci est ordonnée de manière croissante. Cet ordonnancement se retrouve dans les deux composantes *CAT Life* et hors *CAT* de la sinistralité.
 - Le second effet concerne la répartition des regroupements d'assurés par âge et par tranches de capitaux. Les groupes aux effectifs les plus importants sont ceux aux sommes moyennes sous risque les plus faibles. Les groupes aux effectifs les plus faibles sont ceux aux sommes moyennes sous risque les plus élevées. La discontinuité de cette répartition explique l'évolution par paliers horizontaux des charges sinistres simulées. Les capitaux les moins importants conduisent à des scénarios agrégés à l'intérieur des mailles du « damier ».

En somme, plus la volatilité des capitaux est importante, plus le comportement du risque de mortalité extrême se rapproche de celui de la mortalité hors CAT. Les deux risques sont soumis à la volatilité sous-jacente du portefeuille. Dans le cas d'un portefeuille peu volatil, les pertes restent concentrées autour d'une tendance. Dans le cas d'un portefeuille très volatil, les pertes sur les deux risques de mortalité sont diffuses.

Nous voulons quantifier l'impact du risque *CAT Life* sur la constitution de l'exigence réglementaire de capital. Nous avons calculé le capital économique réglementaire sans et avec risque de mortalité extrême. Les résultats sont ordonnés du portefeuille réassuré en XS le moins volatil au plus volatil. Le graphique ci-dessous représente le pourcentage d'augmentation du capital économique avec l'intégration du risque de mortalité extrême pour chacun des portefeuilles en XS :



Graphique 43 Impact du risque *CAT Life* sur la constitution du capital économique (Cédantes 1 à 13)

Chaque portefeuille possède sa propre structure, sa propre population, et donc son propre profil de risque. On peut néanmoins sur le graphique 14 dégager une nette tendance de diminution en fonction de la volatilité des sommes sous risque. Le graphique ci-dessus appuie l'idée d'une interaction entre l'impact du risque *CAT Life* sur l'exigence réglementaire de capital, et la volatilité des sommes sous risque. Cette interaction révèle aussi une limite de l'approche standard de Solvabilité II.

Dans l'approche standard le calcul s'effectue par une méthode déterministe dont les chocs sont ajustés a priori. Le calcul de l'exigence de capital au global s'effectue ensuite, grâce à la matrice de corrélation documentée par les *QIS*. Le coefficient de corrélation appliqué est positif. Néanmoins nous voyons dans notre étude que pour des portefeuilles hautement volatils, l'impact du risque *CAT Life* est moindre, voir nul.

Nous allons maintenant comparer notre modèle interne avec la formule standard. Cette comparaison permettra d'identifier les limites de modélisation de la formule standard.

2 Les limites de l'approche standard

Pour chaque portefeuille d'étude, nous avons calculé le capital économique requis par notre modèle de surmortalité et par l'approche standard. Chacune des deux approches prend en compte les risques de mortalité extrême et de mortalité hors CAT.

Le graphique ci-dessous présente le calcul du capital économique pour l'ensemble de nos portefeuilles suivant la formule standard et le modèle interne :

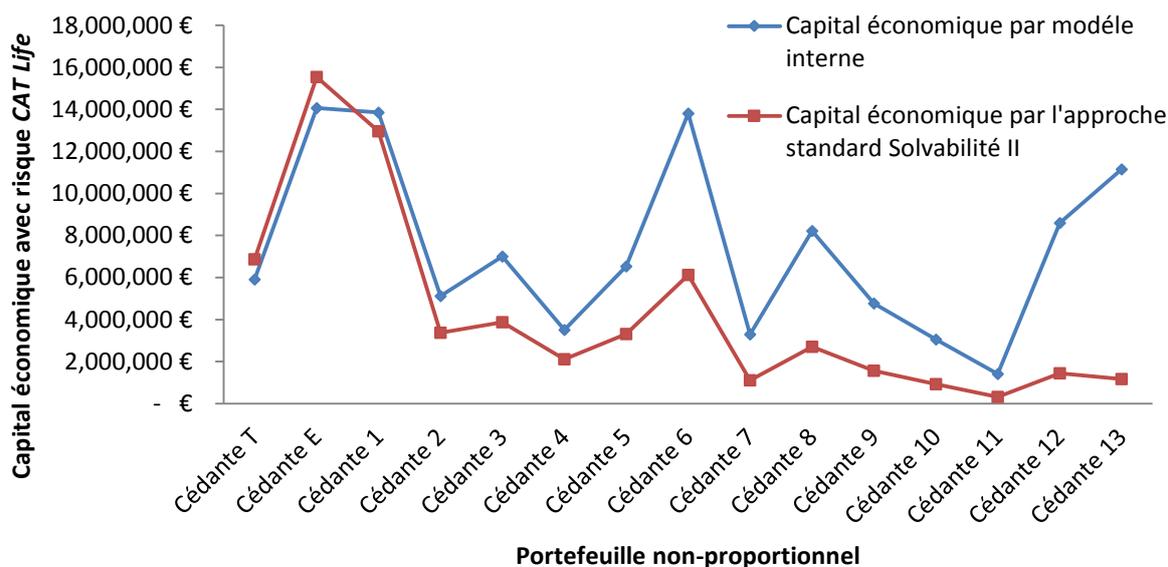


Figure 44 Capital économique par la formule standard et par le modèle interne (Cédantes 1 à 13)

Nous pouvons faire plusieurs observations sur ce graphique :

- Pour les portefeuilles les moins volatils, l'approche standard fournit des résultats relativement similaires à ceux du modèle interne. De plus nous observons que l'approche standard est plus prudente que notre modèle pour les portefeuilles les moins volatils. Le choc de surmortalité tel que documenté par Solvabilité II est donc relativement important. Dans les deux modélisations, les choix de modélisation et de calibration du risque *CAT Life* sont essentiels pour la détermination du capital réglementaire.
- Sur les portefeuilles les plus volatils, les enjeux de modélisation sont différents. Dans le cadre de notre modèle interne, la mortalité hors CAT constitue une grande partie de l'exigence réglementaire de capital. L'écart obtenu entre les deux approches témoigne d'une différence de modélisation. La formule standard se base sur une approche déterministe. Dans notre cas, la modélisation est stochastique. L'enjeu de modélisation sur les portefeuilles les plus volatils est donc principalement porté par la volatilité des sommes sous risque et non par la volatilité des chocs sur la mortalité.

- De manière générale, la formule standard ne tient pas compte des interactions possibles entre le risque de mortalité extrême et le risque de mortalité hors *CAT*. Cette interaction est pourtant essentielle car suivant les profils de volatilité des portefeuilles, les enjeux de modélisation sur le capital économique ne sont pas les mêmes.

Les limites de l'approche standard sur la modélisation des risques de mortalité soulèvent la difficulté d'estimation d'un modèle d'allocation du capital sans simulations. L'actuaire tarificateur peut déterminer le capital économique requis pour un portefeuille étudié par une approche stochastique, ou par un tel modèle d'allocation. Dans ce dernier cas, il cherche à approcher le capital requis théorique par un pourcentage des données qui lui sont disponibles. Ces données sont la prime pure, et l'ensemble des sommes sous risque du portefeuille. Néanmoins, ces informations ne permettent pas une prise en compte précise de la volatilité des risques de mortalité extrême et hors *CAT*. Nous allons développer cette problématique dans la suite du mémoire.

Nous allons maintenant quantifier les différents effets de diversification présents sur le portefeuille non-proportionnel étudié.

3 Trois niveaux de diversification

La diversification permet l'économie de capital en diminuant l'exigence de capital. Elle se trouve à différents niveaux de l'activité d'une compagnie d'assurance ou d'un réassureur.

Le premier niveau de diversification que nous allons étudier concerne le risque couvert. Dans notre modélisation, nous avons distingué deux risques. Le premier est un risque de mortalité extrême dont la cause est un choc sur la mortalité de tendance. Le deuxième est le risque de mortalité hors *CAT*, c'est-à-dire le risque de sinistre sur la mortalité de tendance. L'exigence de capital pour couvrir ces deux risques est inférieure à celle requise pour chacun des risques séparément. Nous pouvons avoir un événement *CAT*, tout en ayant peu de sinistres dus à la mortalité de tendance.

Le deuxième niveau de diversification que nous allons étudier concerne le portefeuille global étudié. Pour un réassureur couvrant plusieurs cédantes, le bénéfice de diversification sur l'ensemble de son portefeuille peut être relativement important. Nous allons calculer le bénéfice de diversification sur le portefeuille non-proportionnel étudié, et quantifier l'impact du risque de mortalité extrême sur ce bénéfice.

Le troisième niveau de diversification est particulièrement important pour les réassureurs dont l'activité est internationale. Au même titre que sur un portefeuille de plusieurs cédantes, le réassureur bénéficie de la diversification géographique de son activité. Nous n'étudierons pas cet effet de diversification. Dans notre cas, nous étudions l'ensemble des phénomènes pouvant causer une surmortalité à l'échelle de la population française. Afin d'étudier l'impact du risque de mortalité extrême sur le bénéfice de diversification du groupe, il faut un modèle à même de modéliser la mortalité sur différents pays comme un modèle épidémiologique sur plusieurs portefeuilles. Nous ne le ferons pas dans ce mémoire.

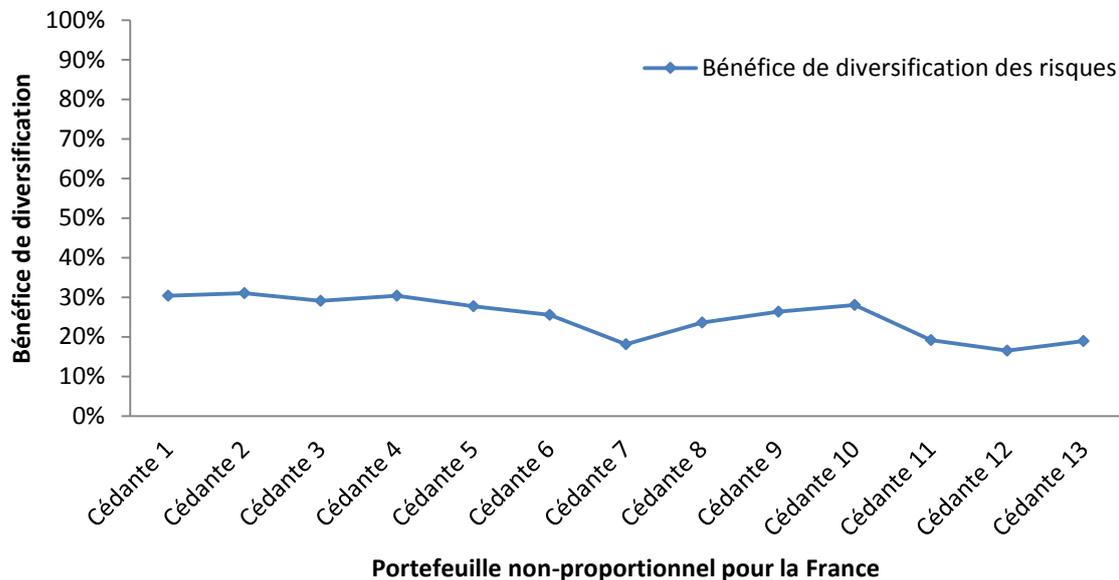
- **Quantification du niveau de diversification entre les risques**

Par définition, nous appelons bénéfice de diversification des risques la quantité suivante :

$$\text{Bénéfice de diversification des risques} = 1 - \frac{\text{Capital économique global}}{\text{Capital CAT} + \text{Capital Mortalité}}$$

La diversification des risques vient du fait qu'il est plus rare d'obtenir à la fois un événement *CAT Life* et une forte sinistralité sur la mortalité de tendance d'un portefeuille, que l'un de ces deux événements uniquement.

Le graphique ci-dessous illustre le bénéfice de diversification des risques de mortalité *CAT Life* et hors *CAT* pour chaque cédante du portefeuille non-proportionnel étudié :



Graphique 45 Bénéfice de diversification sur le risque du portefeuille non-proportionnelle RGA France

Le bénéfice de diversification sur les risques de mortalité n'est pas négligeable car il peut aller jusqu'à 30 %. Cet effet de diversification est directement intégré dans notre modélisation puisque nous avons réussi à dissocier la sinistralité totale en une composante *CAT Life* et une composante de tendance.

- **Quantification du niveau de diversification sur le portefeuille NP**

Nous allons étudier l'impact du risque de surmortalité extrême sur le niveau de diversification du portefeuille. Pour cela, nous allons comparer le capital requis pour l'ensemble du portefeuille avec la somme des capitaux réglementaires de chaque portefeuille.

Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Capital économique sur le portefeuille NP	SANS CAT	AVEC CAT
AVANT diversification	71 944 575 €	90 327 653 €
APRES diversification	18 844 789 €	43 316 353 €
	↓	↓
Bénéfice de diversification sur le portefeuille NP	74 %	52 %

Tableau 20 Bénéfice de diversification sur le portefeuille non-proportionnel de RGA

Mechahougui (2011) avait réalisé une étude similaire sur le portefeuille non-proportionnel de RGA France. Cette étude était réalisée sur un portefeuille similaire, avec une vingtaine de traités.

La conclusion de celle-ci était alors un bénéfice de diversification sur le portefeuille de 80 %. Nous trouvons sur les treize portefeuilles étudiés un bénéfice de diversification de 74 %. Les deux résultats sont relativement proches.

Même avec le risque de mortalité extrême, l'impact du bénéfice de diversification est significatif. Il permet l'économie de la moitié du capital économique global sans diversification.

Un phénomène de mortalité extrême touche l'ensemble du portefeuille. L'intégration du risque de mortalité extrême double l'exigence de capital au global du portefeuille. Le bénéfice de diversification est quant à lui diminué de 22 points. Le risque de mortalité extrême est donc un facteur essentiel pour la quantification du niveau de diversification du portefeuille.

Nous allons maintenant présenter nos différentes conclusions sur les couvertures *Stop-Loss*.

4 Stop-Loss

Les couvertures en excédent de sinistre par tête permettent une forte diminution de la volatilité des sommes sous risque. Néanmoins nous avons montré que c'est sur les portefeuilles les moins volatils que le risque de surmortalité avait le plus d'impact en termes d'exposition et de capital économique. Il faut donc une couverture permettant de protéger la cédante sur l'ensemble de son exposition, et non plus seulement contre la volatilité des sommes sous risque élevées.

Le contrat *Stop-Loss* a pour principal objectif de protéger le résultat de la cédante contre une sinistralité exceptionnelle. Celle-ci couvre communément des portefeuilles peu volatils bruts de réassurance ou déjà couvert par une couverture en excédent de sinistre par tête. Néanmoins la tarification des contrats *Stop-Loss* pose de nombreuses difficultés opérationnelles.

La difficulté d'un *Stop-Loss* pandémie porte sur l'ajustement du niveau de capital économique du réassureur. Nous avons montré que le risque de mortalité extrême possède un réel impact sur le bénéfice de diversification d'un portefeuille, voire du groupe. Si le réassureur ne peut jouer de son effet de diversification, le capital économique requis peut s'avérer conséquent. S'en suivent des difficultés de levées des fonds, et de pilotage du capital. L'ajustement de la prime d'un contrat *Stop-Loss* est d'autant plus délicat qu'il demeure une incertitude sur le niveau de capital économique. Les enjeux sont importants.

Au-delà des aspects techniques, une couverture *Stop-loss* requiert un lien de transparence et de confiance entre la cédante et son réassureur. En effet la gestion des sinistres par la cédante impacte directement l'engagement du réassureur. La couverture d'un risque aussi extrême que la pandémie augmente pour le réassureur les enjeux liés à l'asymétrie d'information.

Pour l'ensemble de ces raisons, il existe aujourd'hui très peu de couvertures *Stop-Loss* pandémiques sur le marché. Néanmoins certains réassureurs sont prêts à s'engager sur ce risque. Une solution qui sera potentiellement développée dans l'avenir, concerne les opérations de titrisations du risque de mortalité extrême. Il existe à ce jour des obligations catastrophes indexées sur le risque de déviation de la mortalité liée à des événements pandémiques (*Mortality Bonds*). La mise en place d'une telle opération de titrisation sur un marché important permettrait au réassureur une économie en capital conséquente. De plus, cela aurait un impact direct au niveau du groupe. En parallèle, le réassureur pourrait proposer des couvertures *Stop-Loss* pandémie calibrées en conséquence, sur des marchés moins risqués. La mutualisation du risque sur ces traités serait d'autant plus forte que les réassureurs et rétrocessionnaires seraient nombreux à être engagés.

Nous allons maintenant réaliser une étude de rentabilité de la cédante avec la prise en compte du risque de mortalité extrême, en fonction du programme de réassurance.

IX Optimisation de la réassurance non-proportionnelle

L'objectif de cette partie sera de mettre en évidence l'impact de la surmortalité sur la stratégie d'optimisation d'une couverture de réassurance non-proportionnelle. Nous nuancerons ainsi la conclusion du mémoire de Mechahougui (2011) sur la réassurance non-proportionnelle. Dans son étude, il met en évidence la possibilité pour la cédante d'optimiser sa couverture. Nous allons ensuite proposer une réflexion sur un modèle d'allocation du capital des traités non-proportionnels. Ce modèle pourra intégrer le risque de surmortalité catastrophe.

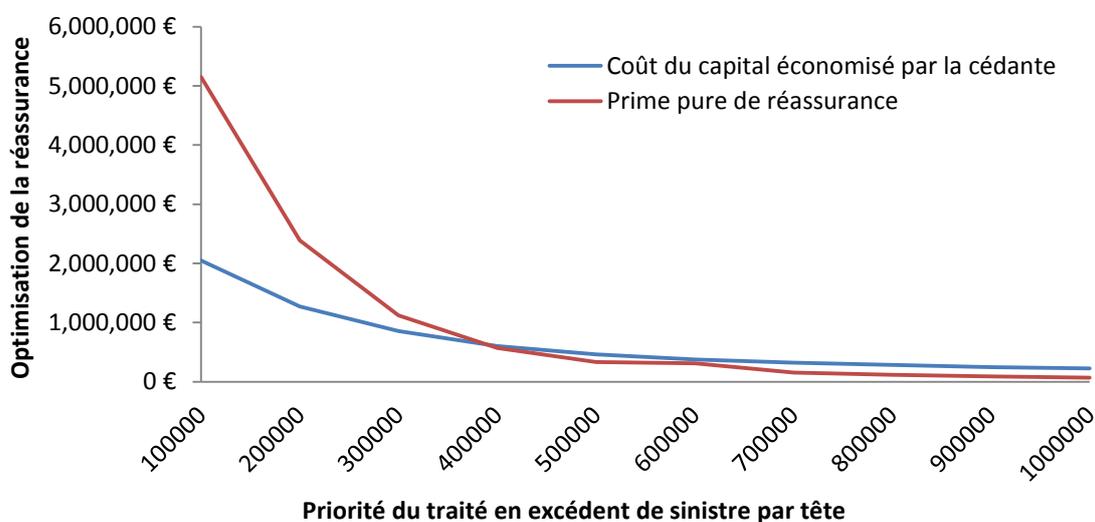
A Etude de rentabilité de la cédante

Nous allons dans un premier temps mettre en évidence la possibilité pour la cédante d'optimiser sa structure de réassurance. Pour différents niveaux de priorité, et dans le cadre de notre modèle interne, nous avons calculé le coût du capital économisé de la cédante, ainsi que la prime pure nette de réassurance. Le coût du capital économique économisé par la cédante est calculé sur la base d'une cible de rentabilité exprimée en *Return On Equity (ROE)*.

1 Optimisation d'un XS sans le risque CAT Life

Sur le portefeuille de la Cédante E, nous avons appliqué différents niveaux de priorité d'une couverture en excédent de sinistre par tête. La reconstitution est gratuite et illimitée. Les priorités appliquées vont de 100 000 € à 1 000 000 € avec un pas de 100 000 €. La cible de rentabilité de la cédante est celle d'un chargement de 25 % sur la prime pure nette de réassurance. L'indice de rentabilité est alors pour la cédante est alors un *ROE* de 45 %.

Le graphique ci-dessous représente le coût du capital économisé par la cédante, ainsi que la prime pure de réassurance payée par celle-ci :



Graphique 46 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle sans le risque CAT Life (Cédante E)

Nous avons deux observations principales à faire sur ce graphique :

- Pour des priorités supérieures à 400 000 €, le coût de la couverture de réassurance est inférieur à celui du capital économisé. Cette position offre un double avantage pour la cédante. Non seulement celle-ci bénéficie d'une couverture de réassurance, mais elle réalise aussi une économie sur la nécessité de rémunérer ses investisseurs. Avec ou sans réassurance, la cédante doit rémunérer ses actionnaires. L'optimisation de la réassurance lui permet donc de respecter ses exigences de retour sur capital tout en bénéficiant d'une couverture de réassurance.
- Pour des niveaux de priorités inférieurs à 400 000 €, le prix de la couverture de réassurance est supérieur au coût du capital économisé. Ce sont néanmoins ces tranches de capitaux qui constituent 80 % de la somme sous risque du portefeuille. Le transfert de risque vers le réassureur est donc relativement conséquent. De plus, la prime pure nette de réassurance est fortement diminuée. Pour une priorité à 200 000 €, la prime pure brute de réassurance se voit diminuée de 21 % par rapport au net de réassurance. Pour une priorité de 100 000 €, celle-ci est diminuée de 44 %.

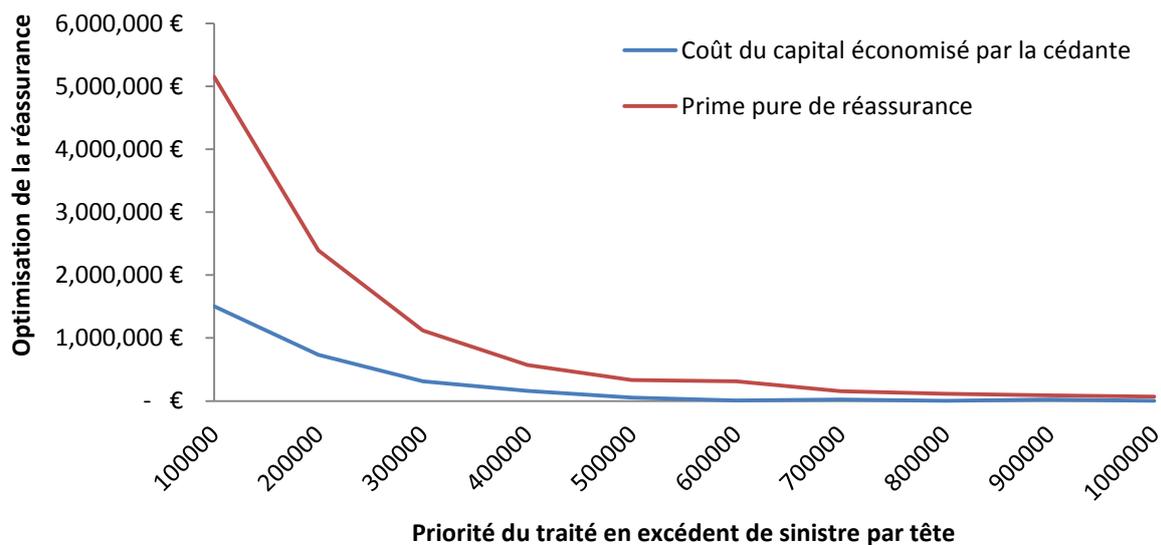
La situation d'arbitrage entre le coût du capital économisé et la prime de réassurance résulte d'un transfert de capital vers la réassurance supérieur à la prime. Pour un certain niveau de priorité, la vision moyenne du risque porté par le réassureur conduit à une prime de réassurance relativement faible. Néanmoins, le capital économique transféré reste conséquent, au même titre que la volatilité des sommes sous risque.

Nous allons maintenant effectuer la même étude en intégrant le risque de surmortalité. Le niveau de chargement sur la prime pure reste inchangé. Nous ne prenons pas en compte le biais du risque *CAT Life* sur le calcul des primes pures de réassurance.

2 Optimisation d'un XS avec le risque *CAT Life*

L'intégration du risque de mortalité extrême va profondément modifier nos résultats. Alors que le transfert de la volatilité sur les sommes sous risque s'effectue sur les tranches hautes, le risque de mortalité extrême est principalement porté sur les tranches basses de capitaux. La décomposition de la charge sinistre globale sur les portefeuilles les moins volatils montre que le risque de surmortalité se détache alors nettement de la mortalité hors *CAT*. Le capital économique de la cédante étant principalement influencé par le risque de mortalité extrême, l'économie en capital sur les tranches élevées serait alors très faible.

Nous avons gardé le même niveau de chargement sur la prime pure. Le risque de surmortalité est cette fois pris en compte. Le graphique ci-dessous représente le coût du capital économisé et la prime de réassurance.



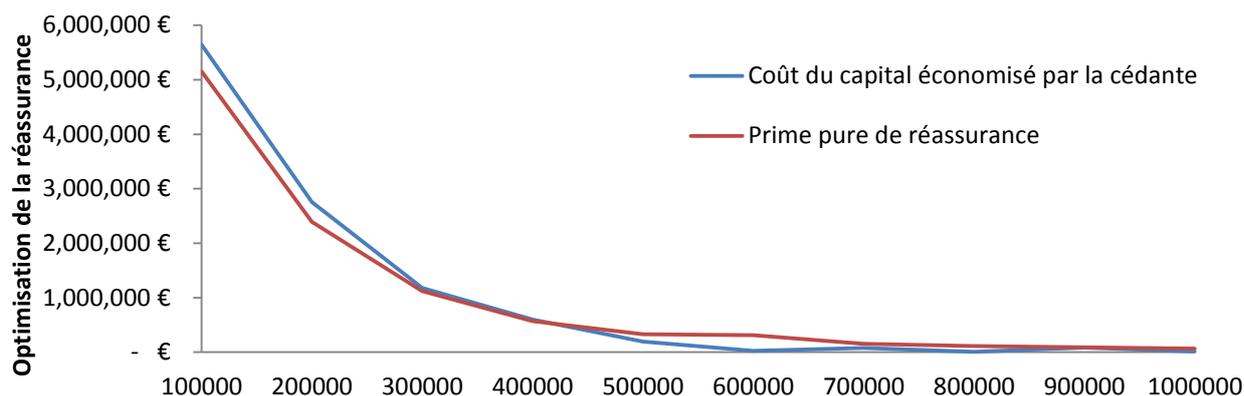
Graphique 47 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle avec le risque CAT Life (Cédante E)

La principale différence avec le graphique précédent concerne la non-existence d'un optimal. A priorité fixée, la prime de réassurance est supérieure au coût du capital économisé. Les économies en capital sont moindres pour les tranches hautes. Nous restons à des niveaux de chargement sur la prime pure nette de réassurance de l'ordre de 25 %. Le critère de rentabilité de la cédante est alors un *ROE* de 15 %. A niveau de chargement égal donc, la rentabilité pour la cédante diminue de 66 % avec l'intégration du risque de surmortalité.

La réponse à un tel phénomène se trouve dans la constitution du capital économique de la cédante. Le risque de mortalité extrême est ici prépondérant sur les tranches basses de capitaux assurés. Ainsi sur les tranches hautes, la couverture en excédent de sinistre a peu d'impact sur la diminution du capital économique global. Celui-ci est principalement constitué par le risque de mortalité extrême des tranches basses.

Pour une priorité plus basse, la baisse de la rentabilité de la cédante à chargement fixé conduit à baisser le coût du capital. Même si le capital économisé par la cédante est important sur les tranches basses, la baisse du critère de rentabilité *ROE* conduit à un coût du capital moindre.

La même représentation graphique à niveau de rentabilité inchangé, soit un *ROE* cible de 45 % pour la cédante, conduit à l'existence d'un optimal sur les tranches basses de capital.



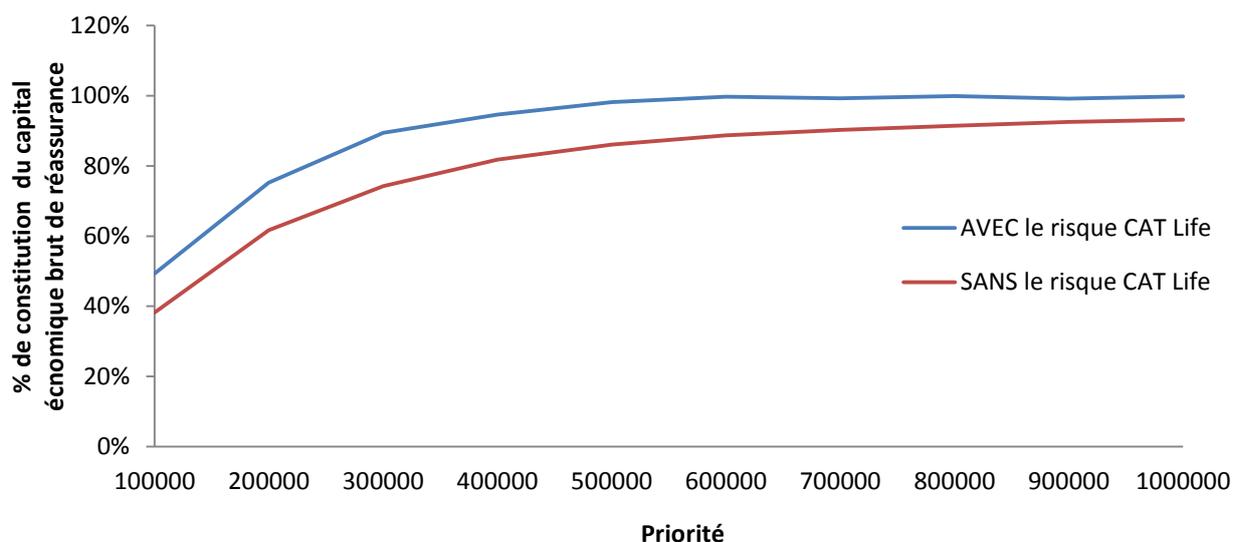
Priorité du traité en excédent de sinistre par tête

Graphique 48 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle avec le risque CAT Life (Cédante E)

Le graphique ci-dessus montre que pour un critère de rentabilité cible suffisamment important, le problème d'optimisation de la cédante trouve une solution sur les tranches « basses » de capitaux. Néanmoins une telle situation n'est pas viable, en effet le chargement sur la prime pure nette de réassurance n'est plus de 25 % mais de 97 %.

Le risque de mortalité extrême a donc un impact sur la stratégie d'optimisation de la réassurance non-proportionnelle.

Avec et sans le risque de mortalité extrême, et pour chaque niveau de priorité, nous avons calculé le capital économique net de réassurance de la Cédante E. Nous avons ensuite effectué le rapport entre ces capitaux et le capital économique brut de réassurance correspondant. Le graphique ci-dessous illustre nos résultats :



Graphique 49 Impact du risque de mortalité extrême sur la constitution du capital économique

Nous avons plusieurs observations sur ce graphique :

- Le risque de mortalité extrême modifie le poids de chaque tranche de capitaux dans la constitution du capital économique. Pour un niveau de priorité à 300 000 € sans le risque *CAT Life*, le capital économique net de réassurance compte pour 74 % du capital économique brut. Avec l'intégration du risque *CAT Life*, cette proportion est de 89 %. Le poids des tranches les plus basses sur la constitution du capital économique brut de réassurance est augmenté par le risque de mortalité extrême.
- Pour une priorité à 500 000 €, l'impact du risque de surmortalité est suffisamment important pour que le capital économique brut de réassurance soit constitué à plus de 98 %. L'impact de la volatilité des sommes sous risque sur la constitution du capital est donc fortement diminué. Pour un même niveau de priorité sans le risque *CAT Life*, celui-ci compte pour 14 % du capital au lieu de 2 %.
- Le risque de surmortalité impacte les tranches à faibles sommes assurées, mais dont les expositions en capital sur le portefeuille sont importantes. Le risque *CAT Life* est donc principalement un risque de fréquence, à la différence de la mortalité hors *CAT* impactée par une dérive de la mortalité et une sinistralité exceptionnelle.
- Une couverture en excédent de sinistre par tête ne permet pas de couvrir la Cédante E contre le risque de mortalité extrême. En effet ce risque est prépondérant sur le risque de mortalité hors *CAT* dans la constitution du capital économique. La cédante conserve donc une part importante de son capital et de son exposition sur les tranches basses de sommes assurées. Ceci explique la faible économie en capital réalisée par la Cédante E sous la couverture en XS.

Si les couvertures en excédent de sinistre par tête permettent à la cédante d'optimiser sa structure de réassurance, et de se protéger contre la volatilité des sommes sous risque, l'intégration du risque de mortalité extrême modifie profondément cette conclusion. A la différence de la mortalité hors *CAT*, la principale exposition sur le risque de mortalité extrême est constituée des tranches basses de sommes sous risque.

Afin de couvrir le risque de surmortalité, il faut une couverture capable de protéger la cédante directement sur son résultat. La couverture *Stop-Loss* permet de répondre à ce besoin. Une telle couverture pourrait inclure le risque de mortalité extrême, ou encore être spécifique à ce risque (un *Stop-Loss* pandémie par exemple). Néanmoins, une telle solution pose de nombreux problèmes opérationnels (gestion administrative des sinistres, levée du capital économique nécessaire, compétitivité). Le marché de la réassurance devra toutefois aller au-delà de ces difficultés, les autres couvertures ne permettant pas de couvrir le risque de mortalité extrême.

Une problématique en tarification concerne l'intégration du coût du capital dans la prime de réassurance. Le calcul de l'exigence de capital requiert celui de la prime commerciale. La prime commerciale inclut un chargement pour la rémunération des investisseurs. Elle doit donc être calculée en disposant du niveau de capital économique requis. Outre le problème de référence circulaire, d'autres effets comme la diversification de l'activité du réassureur doivent être pris en compte dans la diminution de l'exigence de fonds propres.

Afin de contourner ces difficultés, nous parlerons brièvement d'un modèle d'allocation du capital sur la réassurance non-proportionnelle. Celui-ci permettra la prise en compte du risque de mortalité extrême dans un calcul opérationnel du capital économique. L'allocation du capital ne constitue pas le sujet essentiel du mémoire ci-présent. L'impact du risque de surmortalité sur la calibration d'un modèle d'allocation cohérent pourra faire le sujet de futures études.

B Allocation du capital en réassurance non-proportionnelle

Dans un processus de tarification, et surtout en période de renouvellement, il n'est pas optimal en termes de temps de calcul, d'utiliser l'approche stochastique développée par notre modèle. Une approche opérationnelle consiste à synthétiser le capital économique du portefeuille par des facteurs de grandeurs. Une allocation simple consiste en un pourcentage des sommes sous risque et des sinistres attendus. Dans le meilleur des cas ces informations sont fournies par la cédante au réassureur.

Nous cherchons à calibrer un modèle simple d'allocation du capital. Notre objectif est de montrer en quoi l'intégration d'indicateurs de volatilité et d'exposition permet de mieux appréhender les risques de mortalité sur la tendance et les événements extrêmes. Pour cela, nous allons travailler avant diversification sur le portefeuille. Nous n'allons pas aborder la dimension stratégique de l'allocation.

Nous allons décomposer notre étude en trois parties. Dans un premier temps, nous cherchons à approcher le capital économique sur le risque de mortalité par un pourcentage forfaitaire de la prime de réassurance. Nous intégrons ensuite un indicateur de volatilité à notre modèle. Puis nous réfléchissons à la prise en compte du risque de mortalité extrême.

Dans chacune de ces approches nous disposons de données d'expositions individuelles et par groupements d'assurés suivant les âges et les sommes sous risque. Nous avons fait l'hypothèse pour les traités en XS que la loi de coût est la même que celle des sommes sous risque.

Avec nos données d'exposition, nous pouvons calculer la prime pure de réassurance, et l'écart type de la charge sinistre réassurée. Ces deux mesures n'intègrent pas le risque de surmortalité. Elles ne font intervenir que la mortalité de tendance de notre modélisation et les sommes sous risque réassurées du portefeuille.

Soit $PREass$ la prime pure de réassurance :

$$PREass = \sum_i^n q_{x,i \text{ tendance}} \times SaR_i$$

Soit $\sigma Reass$ l'écart type de la charge sinistre réassurée :

$$\sigma Reass = \sqrt{\sum_i^n q_{x,i \text{ tendance}} \times (1 - q_{x,i \text{ tendance}}) \times SaR_i^2}$$

- n le nombre d'assurés sur le portefeuille.
- $q_{x;i}$ la probabilité de décès hors risque *CAT Life* de l'assuré i d'âge x . Il s'agit d'une probabilité unisexe dérivée de la table THTF-00-02.
- SaR_i la somme sous risque réassurée de l'assuré i .

Soit β le coefficient de variation de la charge sinistre réassurée :

$$\beta = \frac{\sigma Reass}{PREass}$$

Cet indicateur sera utilisé par la suite.

1 Modèle basé sur la prime

Cette approche permet de calibrer le niveau de capital économique à partir des sinistres moyens attendus et des sommes sous risques réassurées. Nous cherchons à déterminer dans quelle proportion le capital économique réassuré peut être approché par des indicateurs de moyenne et d'exposition.

Le capital économique sur lequel nous travaillons n'inclut pas le risque de mortalité extrême.

Les facteurs d'allocations du capital utilisé dans notre étude ne sont pas ceux utilisés par *RGA France* dans son processus de tarification.

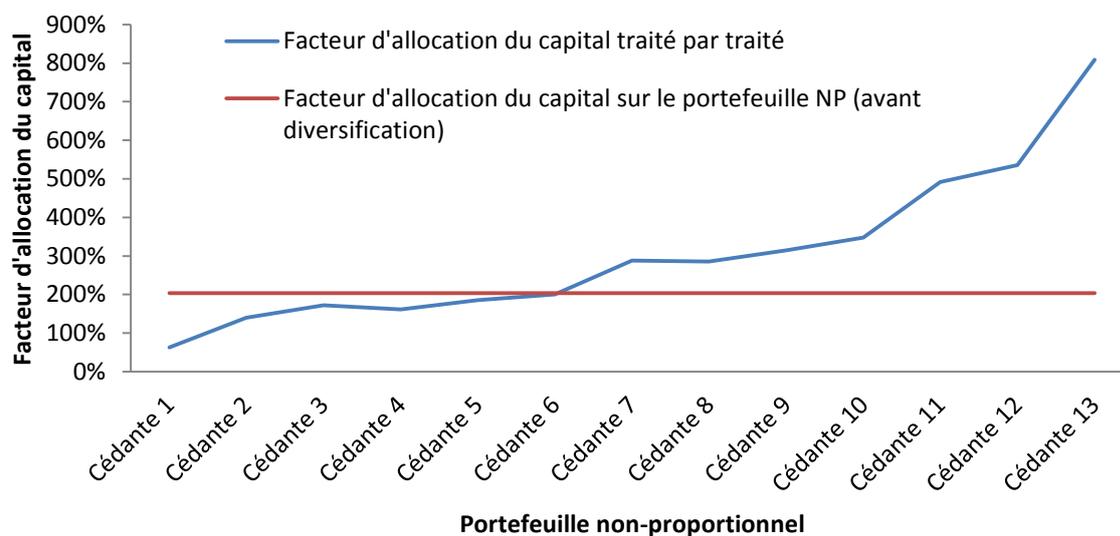
Ci-dessous, le détail de l'ajustement traité par traité du niveau de capital économique en fonction de la prime pure de réassurance :

$$\text{Facteur d'allocation d'un traité} = \frac{\text{Value At Risk SANS CAT} - PREass}{PREass}$$

Avec *Value At Risk SANS CAT* : la *Value At Risk* à 99,5 % de la charge sinistre réassurée SANS intégration du risque de mortalité extrême.

Le calcul du facteur d'allocation sur le portefeuille non-proportionnel reste inchangé. Nous prenons soin de retirer l'effet de diversification sur le portefeuille afin de pouvoir comparer l'approche sur le portefeuille et traité par traité. Sans le risque de mortalité extrême, nous avons quantifié le bénéfice de diversification sur le capital économique du portefeuille à 76 %.

Le graphique ci-dessous présente les résultats sur l'ensemble du portefeuille non-proportionnel et traité par traité :



Graphique 50 Facteurs d'allocations du capital basés sur la prime pure de réassurance SANS risque CAT Life

Nous avons plusieurs observations sur ce graphique :

- L'approche par traité est en ligne avec une tarification cohérente suivant le profil de volatilité de chaque portefeuille. Néanmoins d'un traité à l'autre, les résultats sur les facteurs d'allocations sont extrêmement différents. Une approche uniquement basée sur un niveau de prime pure ne permet pas de tenir compte de la volatilité sous-jacente des sommes sous risque. C'est pourquoi nous cherchons à introduire un indicateur de volatilité dans le modèle d'allocation du capital.
- Le modèle d'allocation du capital sur le portefeuille ne s'adapte pas au profil de volatilité de chaque portefeuille. Il est néanmoins facile d'utilisation. La principale conséquence d'un tel modèle concerne la compétitivité. L'allocation du capital est trop importante pour les contrats à faible volatilité, l'ajustement du prix est donc chargé d'un coût du capital supplémentaire qui diminue la compétitivité du tarif. Le niveau de capital sur les portefeuilles les plus volatils est quant à lui insuffisant. Le tarif est donc très compétitif mais ne s'ajuste pas au profil de risque du portefeuille.

Ce modèle d'allocation du capital est relativement simple d'utilisation, néanmoins il ne permet pas de s'ajuster au profil de volatilité des portefeuilles. C'est pourquoi nous allons introduire un indicateur supplémentaire dans notre approche. Cet indicateur sera l'écart-type de la charge sinistre réassurée. Nous n'intégrons toujours pas le risque de surmortalité à notre étude.

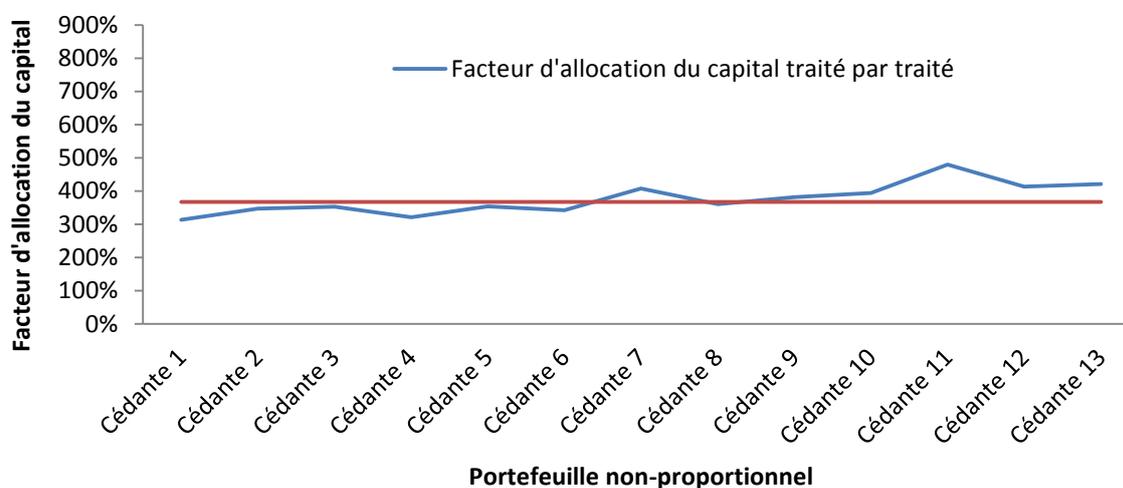
2 Modèle basé sur l'écart-type

Ci-dessous, le détail de l'ajustement traité par traité du niveau de capital économique en fonction de l'écart-type de la charge sinistre réassurée :

$$\text{Facteur d'allocation d'un traité} = \frac{\text{Value At Risk SANS CAT} - P_{\text{Reass}}}{\sigma_{\text{Reass}}}$$

Pour l'estimation du modèle sur le portefeuille, nous prenons soin de travailler avant diversification. Avec le risque de mortalité extrême, nous avons quantifié le bénéfice de diversification du portefeuille sur le capital économique à 52 %.

Les résultats sont les suivants :



Graphique 51 Facteurs d'allocation du capital basés sur l'écart type de la charge sinistre réassurée SANS risque CAT Life

Nous avons plusieurs observations à faire sur ce graphique :

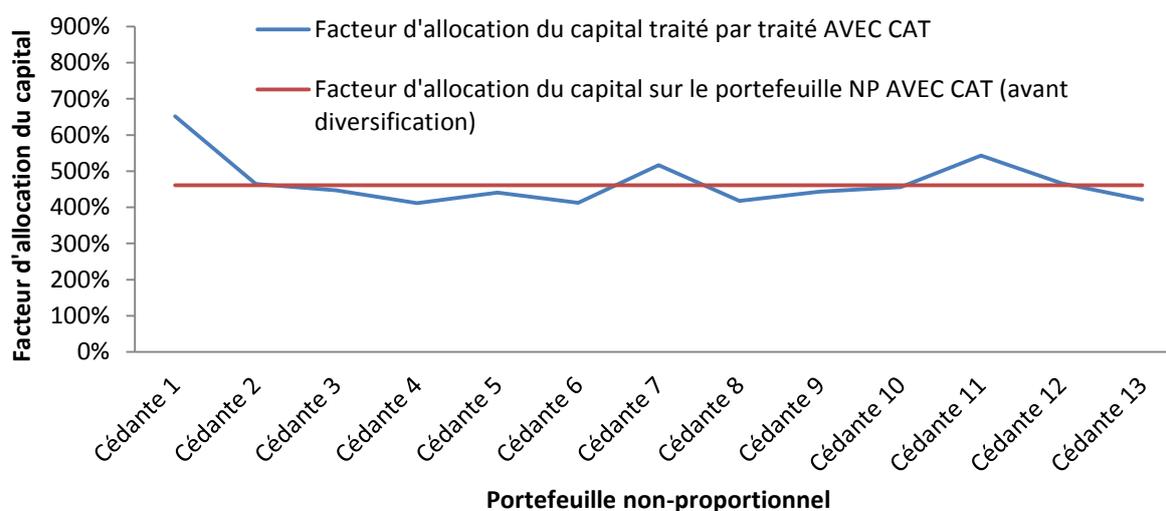
- En comparaison avec le modèle d'allocation précédent, le résultat de l'approximation est nettement meilleur. La volatilité des sommes sous risque de chaque traité est prise en compte par l'utilisation de l'écart type. De plus, la vision globale du portefeuille est cohérente avec celle détaillée par traités puisque les facteurs d'allocation sont proches. L'application du modèle estimé sur le portefeuille ne s'éloigne pas de l'approche par traité.
- Nous noterons $\varphi = 367\%$ le facteur d'allocation du capital sur le portefeuille non-proportionnel. Ce paramètre sera utilisé par la suite.
- La difficulté opérationnelle de cette approche réside dans la détermination de l'écart type de la charge sinistre réassurée. Le calcul de l'écart type requiert des données d'expositions individuelles, ou les lois de fréquence-coût ajustées aux données d'expérience. En effet, il n'est pas directement fourni par la cédante au réassureur. L'analyse par un modèle d'exposition requiert l'automatisation du passage d'un modèle de tarification fréquence/coût à un modèle individuel.

Nous n'avons pas jusqu'à maintenant intégré le risque de mortalité extrême. La même approche que précédemment en intégrant le risque de surmortalité est détaillée ci-dessous :

$$\text{Facteur d'allocation d'un traité} = \frac{\text{Value At Risk AVEC CAT} - P_{\text{Reass}}}{\sigma_{\text{Reass}}}$$

Avec *Value At Risk AVEC CAT* : la *Value At Risk* à 99,5 % de la charge sinistre réassurée AVEC intégration du risque de mortalité extrême.

Les résultats sont les suivants :



Graphique 52 Facteurs d'allocation du capital basés sur l'écart type de la charge sinistre réassurée AVEC risque CAT Life

Nous avons plusieurs observations sur ce graphique :

- Les facteurs de capitaux ont augmentés au global et au détail de chaque traité. Ceci est cohérent car le capital économique augmente avec l'intégration du risque de mortalité extrême. L'impact sur les facteurs est important car au global du portefeuille, le facteur d'allocation passe de 367 % à 461 %.
- L'ajustement du modèle d'allocation basé sur l'écart type de la charge sinistre réassurée est de moins bonne qualité que précédemment. L'impact du risque de mortalité extrême est important sur le portefeuille de la Cédante 1. C'est sur les portefeuilles les moins volatils sur les sommes sous risque, que la mortalité extrême impacte le plus la charge sinistre.
- Le facteur d'allocation est estimé pour le portefeuille à 461 %. Nous appliquons ensuite ce facteur à chaque traité. La somme des écarts absolus entre les capitaux économiques estimés et de ceux de notre modèle interne est de 114 %. L'erreur sur le capital économique du portefeuille non-proportionnel est de 0 %. Le résultat au global est prévisible car nous travaillons avec le facteur d'allocation estimé sur le portefeuille. Nous allons néanmoins essayer de diminuer ces erreurs.

La modélisation du capital économique avec l'intégration du risque de mortalité extrême semble faire intervenir une variable supplémentaire. Nous allons dans la partie suivante intégrer un indicateur d'exposition sur le portefeuille. Cet indicateur sera la somme totale sous risque de chaque traité.

3 Prise en compte du risque CAT Life

Nous allons maintenant développer une approche d'allocation du capital basé sur le calcul des données suivantes :

- Prime pure de réassurance ($PREass$).
- Ecart-type de la charge sinistre réassurée ($\sigma Reass$).
- Le coefficient de variation de la charge sinistre réassurée (β).
- Somme sous risque totale du portefeuille ($SaRT$).

Les paramètres sont :

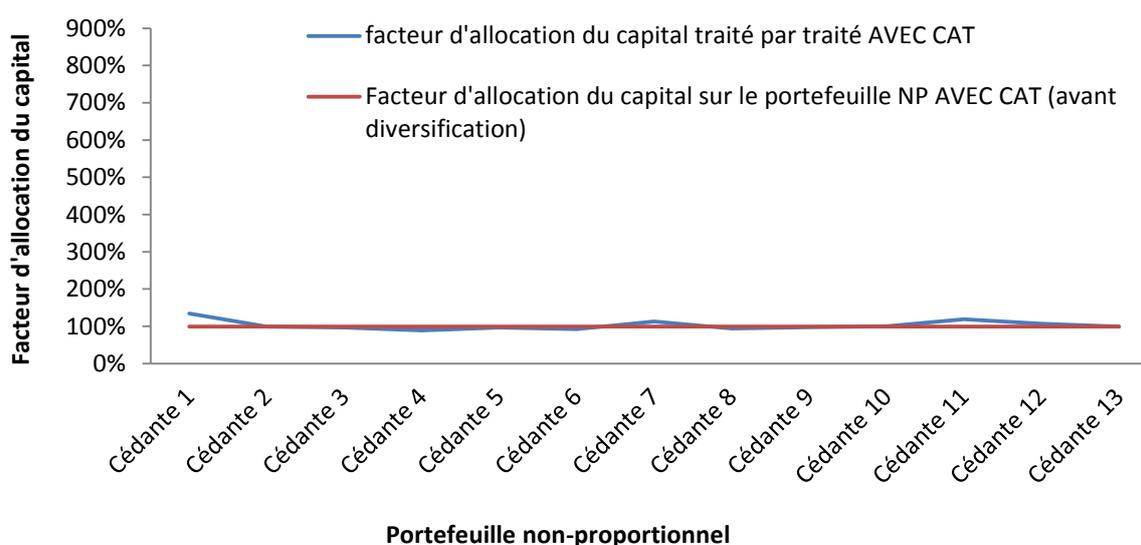
- Le facteur d'allocation du portefeuille basé sur un pourcentage de l'écart type de la charge sinistre réassurée noté $\varphi = 367 \%$.
- Un paramètre d'ajustement noté $\alpha = 16,1 \%$.

Le paramètre α est ajusté en minimisant l'erreur sur le capital économique du portefeuille, et la somme des erreurs absolues sur l'ajustement des traités. L'estimation a été effectuée sur Excel.

Notre modèle d'allocation pour l'intégration du risque de surmortalité est le suivant :

$$\text{Facteur d'allocation d'un traité} = \frac{\text{Value At Risk AVEC CAT} - PREass}{\frac{(\alpha + \beta)}{1000} \times SaRT + \varphi \times \sigma Reass}$$

Les résultats du modèle sont les suivants :



Graphique 53 Facteurs d'allocation du capital AVEC risque CAT Life

Nous avons plusieurs observations :

- Le facteur d'allocation du capital est stable autour de 100 %. Ce qui signifie que notre modèle d'allocation du capital prend en compte la volatilité des sommes sous risque, ainsi que la volatilité du risque de mortalité extrême.
- La vision avant diversification sur le portefeuille est cohérente avec celle déterminée traité par traité. Le modèle d'allocation peut donc être estimé en une fois sur l'ensemble du portefeuille. Le facteur d'allocation déterminé pourra ensuite être utilisé dans une tarification respectant la spécificité de chaque traité.
- La précision du modèle d'allocation sur les traités est améliorée. La somme des erreurs absolues sur les modélisations des traités passe de 114 % à 107 %. L'erreur sur la détermination du capital économique du portefeuille est de 0,01 %. La différence avec une approche uniquement basée sur l'écart-type est ici la prise en compte d'un facteur d'exposition sur les sommes sous risque. L'intégration de la somme sous risque totale du portefeuille permet de modéliser un choc additif sur la mortalité et donc une composante catastrophe. L'écart-type des sommes sous risque permet d'intégrer la volatilité des sommes sous risque.
- Ce modèle a l'avantage sur les précédentes approches de mieux intégrer le risque de mortalité extrême. La précision du modèle traité par traité est légèrement meilleure. Sur le portefeuille, l'erreur est aussi très faible. Néanmoins ce modèle requiert l'ajustement des paramètres φ et α . Les difficultés de mise en place opérationnelle sont les mêmes que pour l'approche basée sur l'écart-type de la charge sinistre. L'actuaire tarificateur doit disposer de l'information rapidement et simplement. Automatiser l'ajustement des indicateurs est donc essentiel dans un processus de tarification. Spécifiquement à la réassurance non-proportionnelle et à notre modèle de surmortalité, ces données requièrent le passage d'un modèle « fréquence/coût » basé sur des distributions de coût à une modélisation individuelle de l'exposition du portefeuille. Cela demande une modification et une réécriture des processus de tarification, et donc une validation interne de la direction des risques. De plus un modèle d'allocation du capital doit vérifier un certain nombre de propriétés de cohérence.

L'intégration de facteurs d'expositions et de volatilités des sommes sous risque permet d'adapter le niveau de capital économique aux spécificités de chaque portefeuille, et ce sur des risques complexes. Le développement et la validation des outils adéquats permettront le calcul des facteurs de grandeurs utilisés. Selon le profil de volatilité des sommes sous risque, nous avons vu que l'impact du risque de surmortalité sur le niveau de capital économique n'était pas le même. De plus, le risque de surmortalité impacte directement le bénéfice de diversification sur le portefeuille. Il est essentiel de quantifier cet impact pour l'intégration du risque *CAT Life* dans un modèle cohérent d'allocation du capital.

Sur le portefeuille non-proportionnel, nous avons brièvement mis en évidence les facteurs de modélisation du risque *CAT Life*. Parmi ces facteurs, une mesure de l'exposition des sommes sous risque est prépondérante. La cédante garde en effet une exposition importante au risque sur les tranches de capitaux les moins volatiles, mais les plus représentatives sur le traité.

Spécifiquement aux couvertures *Stop-Loss* couvrant le risque de surmortalité, l'actuaire tarificateur pourra passer par la modélisation stochastique du risque. En effet, les spécificités de chaque portefeuille *Stop-Loss* ne permettent pas le développement d'un modèle d'allocation du capital pour le réassureur. Nous avons montré que le risque de mortalité extrême possède un réel impact sur le bénéfice de diversification du réassureur. Il est donc nécessaire de connaître cet impact sur le niveau de diversification d'un groupe de réassurance.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est non seulement de proposer un outil de modélisation du risque de mortalité extrême, mais aussi d'étudier son impact sur différentes problématiques de tarification dans un environnement Solvabilité II.

Le modèle de surmortalité sélectionné propose une utilisation originale de la théorie des *splines*. Appliqué aux données de mortalité française, il permet une modélisation stochastique de la mortalité extrême pour les âges allant de 20 à 80 ans. Les résultats sur les chocs de mortalité pour une probabilité de ruine à 0,5 % montrent une forte sensibilité aux données historiques. Il y a donc un risque de modèle important. C'est néanmoins une problématique commune à l'ensemble des approches présentes dans la littérature. L'avantage de ce modèle est qu'il permet une modélisation fine de la surmortalité par âge et par année.

Intégrée dans une modélisation individuelle de l'exposition, l'approche actuarielle nous a permis d'évaluer l'impact de la mortalité extrême sur le niveau en capital économique à l'échelle d'un portefeuille de réassurance. Nous avons montré que le risque de surmortalité est principalement porté sur les tranches basses de capitaux. Les sommes sous risque de ces tranches sont faibles mais en raison d'une population importante elles constituent la grande part de l'exposition en capital du portefeuille. Sur les portefeuilles les plus volatils au contraire, le risque de mortalité extrême n'a que peu d'impact sur le niveau de capital économique requis. La volatilité sur la charge sinistre est principalement portée par les hauts capitaux. En termes de modélisation, les risques de mortalité sur la tendance et les événements extrêmes sont donc indissociables du fait de leurs interactions, mais les enjeux de modélisations ne sont pas les mêmes suivant le profil de portefeuille. C'est une des limites de l'approche standard, pour laquelle la modélisation est uniforme quel que soit le portefeuille.

Les conséquences de ces conclusions sur l'activité de la réassurance non-proportionnelle annuelle sont elles aussi importantes. Dans un contexte de tarification, nous avons montré que le risque de surmortalité devait être pris en compte à plusieurs niveaux. Le bénéfice de diversification sur le portefeuille non-proportionnel est diminué de 30 %. Cette diminution impacte directement l'ajustement d'un modèle d'allocation du capital, même simplifié. De plus le niveau et le coût de capital économique augmentent à critère de rentabilité fixé. Le chargement sur la prime pure augmente en conséquence.

Le problème d'optimisation d'une couverture de réassurance proportionnelle est aussi profondément modifié. En intégrant le risque de surmortalité, la cédante conserve la majeure partie du capital économique sur son portefeuille net de réassurance. Les économies en capital sur les priorités hautes sont minimales et inférieures au niveau de prime pure de réassurance. De plus, à critère de rentabilité fixé, le niveau de chargement pour la rémunération du coût du capital devient conséquent.

C'est sur l'ensemble de ces résultats que la couverture *Stop-Loss* pandémie apparaît la plus probante en termes de transfert de risque et d'économie en capital pour la cédante. De telles structures de réassurance sont rares. Les difficultés techniques sont nombreuses. Elles permettraient aux réassureurs de répondre à un réel besoin. La mise en place en parallèle d'opérations de titrisations du risque de mortalité extrême sur des marchés importants impacterait directement la stratégie du groupe en termes de niveau de capital économique et de bénéfice de diversification. La mise en place d'une couverture *Stop-Loss* pandémie gagnerait alors en compétitivité. A cela s'ajouteraient les mécanismes du *Pooling* et de la rétrocession.

Dans un environnement Solvabilité II où les acteurs du marché sont invités à développer leur propre modèle interne, les problématiques liées au risque de mortalité extrême sont complexes et multiples. La modélisation et la validation par les autorités de contrôle d'un modèle de surmortalité est en soi un défi statistique, qui pose un risque réglementaire important. Outre l'intégration de ce risque dans les processus d'évaluation du capital économique et de tarification, le risque de mortalité extrême impacte des paramètres aussi importants que le niveau de diversification d'un portefeuille, l'exposition au risque de mortalité, le niveau et le coût du capital économique.

BIBLIOGRAPHIE

CURRIE I.D., DURBAN M., EILERS P.H.C. (2006) : Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* 68, 259-80.

DURBAN M., CURRIE I., EILERS P. (2002) : Using P-splines to smooth twodimensional Poisson data. *Proc 17th IWSM*. Chania, Crete. 207-214. *Journal of the Royal Statistical Society*

KIRKBY J.G., CURRIE I.D. (2009) : Smooth model of mortality with period shocks. *Journal of the Royal Statistical Society*

ANDREW J.G; CAIRNS; DAVID BLAKE; KEVIN DOWD; GUY D. COUGHLAN; DAVID EPSTEIN; ALEN ONG; IGOR BALEVICH. (2007) : A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. *Pension Institute*

GUY D. COUGHLAN ; DAVID EPSTEIN; ALEN ONG ; AMIT SINHA ; JAVIER HEVIA-PORTOCARRERO ; EMILY GINGRICH ; MARWA KHALAF-ALLAH ; PRAVEEN JOSEPH (2007) : JP MORGAN Life metrics A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks. *Pension Institute and JP MORGAN*

VIVIEN GUETTE (2010) : La prise en compte des catastrophes dans la modélisation de la mortalité. *Mémoire ISFA*

CARLOS G. CAMARDA : Smoothing methods for the analysis of mortality development. *Thèse au Max Planck Institute for Demographic Research, Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid.*

GILLES MARET (2012) : Solvabilité II : Réassurance des produits d'assurance de personnes. *Partner RE*

OLIVIER CABRIGNAC (2013) : Solvabilité 2 : Une nouvelle perception du risque, un nouvel enjeu pour la réassurance. *SCOR*

JEAN LOUIS DAVET (2008) : Calibrage du risque de catastrophe en assurance complémentaire santé, Pré-test QIS4. *Mutualité Française*

EIOPA (2009): CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Standard formula SCR - Article 109 c Life underwriting risk.

EIOPA (2010) : QIS 5 Technical specifications.

EIOPA (2007) : QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR

LAURENT FAUCILLON; MARC JUILLARD; DUNG LUONG TIEN; TUAN LUU ANH; HUNG VO TRAN (2006) : Etude du risque systématique de mortalité. *Research paper ISFA*

KHALIL MECHAOUGUI (2011): Intégration des contraintes de capital en réassurance non-proportionnelle vie. *Mémoire ISFA*

JANICK JEMINET (2012) : Optimisation de la réassurance non-proportionnelle en arrêt de travail. *Mémoire ISFA.*

EL MAHDI BELHOUI (2013) : Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche Responsabilité Civile : une approche entre expérience et exposition. *Mémoire DUAS Actuariat, Mathématique et Informatique, Université de Strasbourg*

MATHIEU POULIN (2012) : Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie. *Mémoire CEA.*

RISKALIS CONSULTING : Comment mettre en œuvre le dispositif Solvency II. *Information paper.*

MAKRAM BEN DBABIS (2012) : Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement Solvabilité II. *Thèse pour le grade de docteur de l'Université Paris Dauphine.*

BLAISE BOURGEOIS ; GWENDAL POUINET (2008) : Réassurance et techniques financières de transfert de risque - l'exemple du « mortality bond » : une obligation indexée au risque de (sur)mortalité. *Mémoire CEA.*

KHOULOU MANDHOUI (2011) : Analyse du risque catastrophe d'une pandémie en assurance prévoyance par une approche épidémiologique. *Bulletin français d'actuariat, Laboratoire ISFA.*

FREDERIC PLANCHET ; PASCAL WINTER (2007) : L'utilisation des *splines* bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail. *Bulletin français d'actuariat, Laboratoire ISFA.*

DANIEL BAUER; FLORIAN W.KRAMER (2007) : Risk and Valuation of Mortality Contingent Catastrophe Bonds. *Ulm University*

CANADIAN INSTITUTE OF ACTUARIES (2009) : Considérations relatives à l'élaboration d'un scénario de pandémie. *Note de service.*

AMF (2006) : guide de préparation au risque de pandémie de grippe à l'intention des institutions financières québécoises. *Information paper.*

FREDERIC PLANCHET (2012) : Modélisation du risque de pandémie dans Solvabilité II. *Bulletin français d'actuariat, Laboratoire ISFA.*

AOIFE DOYLE, ISABELLE BONMARIN, DANIEL LEVY-BRUHL, YANN LE STRAT, JEAN-CLAUDE DESENCLOS : Estimation de l'impact d'une pandémie grippale et analyse de stratégies. *Information paper.*

KHOULOU MANDHOUI (2010) : Analyse du Risque Catastrophe d'une Pandémie en Assurance Prévoyance par une Approche Épidémiologique. *Mémoire ENSAE.*

SNYLA NEELAM CHINNAYYA (2011) : Evaluation dans le cadre de Solvabilité II des risques liés aux contrats d'assurance emprunteur proposant la garantie décès. *Mémoire Université Paris Dauphine, Mathématiques.*

ROMAIN SPEISSER (2013) : Evaluation du risque de pandémie et construction de deux modèles internes partiels en assurance de personnes dans le cadre de Solvabilité II. *Mémoire ESSEC UPMC.*

MARINE CORLOSQUET-HABART (2010) : Modélisation, Impact et Gestion du Risque de Pandémie de Grippe en Assurance Prévoyance dans le cadre de Solvabilité 2. *Thèse de l'école doctorale sicma de Télécom Bretagne.*

SWISS RE (2010) : Influenza pandemics: Time for a reality check? *Swiss RE research paper.*

RGA (2011) : Pandemic research summary. *RGA research paper.*

INDEX DES GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Graphiques :

Graphique 1 Log des taux bruts de mortalité HMD pour les hommes en France (1816-2005)	23
Graphique 2 Fonction spline discontinue aux nœuds	39
Graphique 3 Fonction spline continue à l'ordre 1 et 2	40
Graphique 4 Exemple de B-splines unidimensionnels	41
Graphique 5 Base de B-splines cubique.....	51
Graphique 6 Un B-spline bidimensionnel, Source : Iain Currie (2013).....	52
Graphique 7 Surface brute de mortalité en France entre 1900 et 2012 pour les 20-80 ans	53
Graphique 8 Taux bruts de mortalité pour les 25 ans H/F de 1900 à nos jours	54
Graphique 9 Taux bruts de mortalité pour les 70 ans H/F de 1900 à nos jours	54
Graphique 10 Surface lissée de mortalité en France entre 1900 et 2012 pour les 20 à 80 ans.....	56
Graphique 11 Taux lissés de mortalité pour les 25,30 et 40 ans	56
Graphique 12 Surface de mortalité lissée	59
Graphique 13 Taux lissés de mortalité pour les modèles sans et avec composante choc pour les 25 ans	60
Graphique 14 Taux lissés de mortalité pour les modèles sans et avec composante choc pour les 25 ans	60
Graphique 15 Surface de surmortalité multiplicative	61
Graphique 16 Surface de surmortalité additive	61
Graphique 17 Amplitudes absolues moyennes des chocs par âges	62
Graphique 18 Amplitudes relatives moyennes des chocs par âges	63
Graphique 19 Coefficients de chocs pour les individus âgés de 20 ans selon les années d'observation	64
Graphique 20 Histogramme des coefficients de chocs pour les individus âgés de 20 ans	65
Graphique 21 QQ plot pour la distribution de Cauchy	66
Graphique 22 QQ plot pour la distribution Normale.....	66
Graphique 23 QQ plot pour la distribution Logistique	67
Graphique 24 Simulation de 15000 Cauchy et représentation de trois quantiles	69
Graphique 25 Exemple de scénario de qx chocs_additifs en 2013	75
Graphique 26 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,9 % en 2013	76
Graphique 27 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,8 % en 2013	76
Graphique 28 Surface de surmortalité additive pour un choc de quantile 99,7 % en 2013	77
Graphique 29 Volatilité des sommes sous risque des portefeuilles étudiés	87
Graphique 30 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance sans CAT (Cédante E)	95
Graphique 31 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance avec CAT (Cédante E)	96
Graphique 32 Fonctions de répartition empiriques des charges sinistres avec et sans CAT Life (Cédante E)	96
Graphique 33 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance sans CAT (Cédante T)	97
Graphique 34 Distribution de la charge sinistre brute de réassurance avec CAT (Cédante T)	97
Graphique 35 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante E).....	100
Graphique 36 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante T).....	100
Graphique 37 Evolution du critère de rentabilité ROE de la Cédante E suivant la priorité d'une couverture XP	104
Graphique 38 Diminution du capital économique et de la prime pure avec la priorité (Cédante E)	104
Graphique 39 Comparaison du capital économique économisé et transféré suivant la priorité (Cédante E)	106
Graphique 40 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 1)	108
Graphique 41 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 7)	108
Graphique 42 Décomposition de la charge sinistre brute de réassurance (Cédante 13)	108
Graphique 43 Impact du risque CAT Life sur la constitution du capital économique (Cédantes 1 à 13)	110
Figure 44 Capital économique par la formule standard et par le modèle interne (Cédantes 1 à 13)	111

<i>Graphique 45 Bénéfice de diversification sur le risque du portefeuille non-proportionnelle RGA France</i>	113
<i>Graphique 46 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle sans le risque CAT Life (Cédante E)</i>	116
<i>Graphique 47 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle avec le risque CAT Life (Cédante E)</i>	118
<i>Graphique 48 Optimisation d'une couverture non-proportionnelle avec le risque CAT Life (Cédante E)</i>	119
<i>Graphique 49 Impact du risque de mortalité extrême sur la constitution du capital économique</i>	119
<i>Graphique 50 Facteurs d'allocations du capital basés sur la prime pure de réassurance SANS risque CAT Life</i> .	123
<i>Graphique 51 Facteurs d'allocation du capital basés sur l'écart type de la charge sinistre réassurée SANS risque CAT Life</i>	124
<i>Graphique 52 Facteurs d'allocation du capital basés sur l'écart type de la charge sinistre réassurée AVEC risque CAT Life</i>	125
<i>Graphique 53 Facteurs d'allocation du capital AVEC risque CAT Life</i>	126

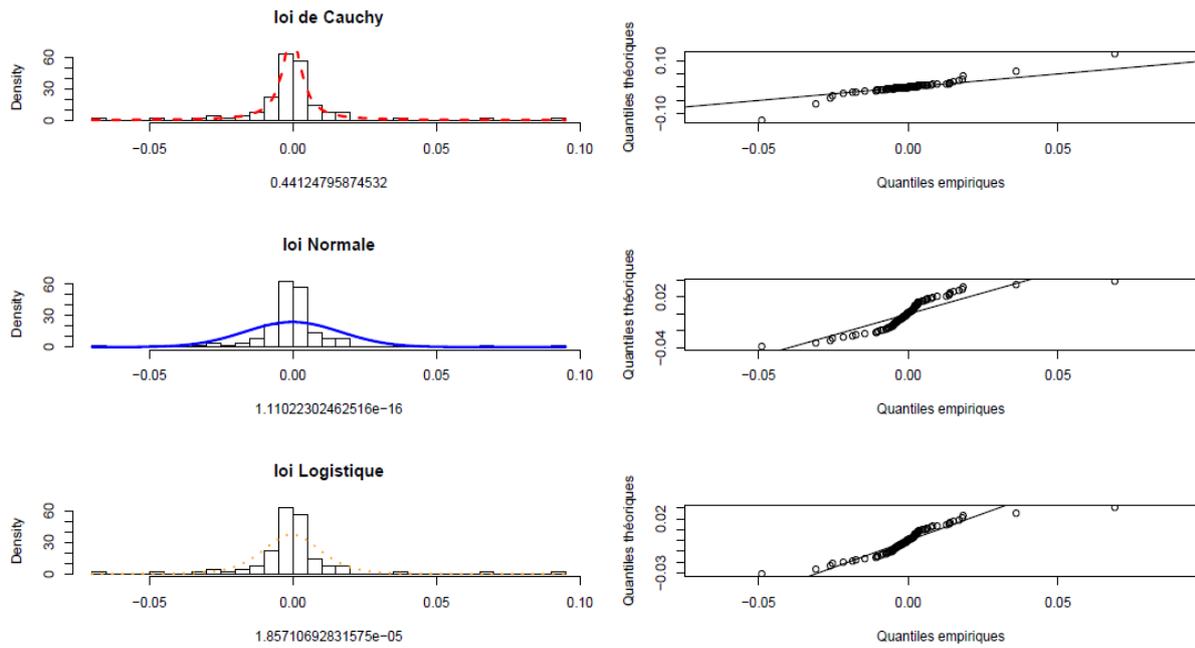
Tableaux :

<i>Tableau 1 répartition des risques pour un contrat Quote-Part</i>	15
<i>Tableau 2 répartition des risques pour un contrat Excédent de Plein</i>	16
<i>Tableau 3 répartition des risques pour un contrat XS par tête</i>	17
<i>Tableau 4 répartition des risques pour un contrat XS par événement</i>	18
<i>Tableau 5 répartition des risques pour un contrat SL</i>	19
<i>Tableau 6 les trois piliers de Solvabilité I</i>	21
<i>Tableau 7 les trois piliers de Solvabilité II</i>	22
<i>Tableau 8 Intégration des sous module de risques pour le calcul du SCR global</i>	22
<i>Tableau 9 Comparaison des taux de surmortalité</i>	25
<i>Tableau 10 Compte de résultats technique de réassurance en début et en fin d'exercice</i>	31
<i>Tableau 11 Résultats des tests du χ^2</i>	68
<i>Tableau 12 Décomposition du portefeuille emprunteur de la cédante E</i>	84
<i>Tableau 13 Décomposition du portefeuille prévoyance collective en XS</i>	85
<i>Tableau 14 Décomposition du portefeuille temporaire décès de la cédante T</i>	86
<i>Tableau 15 Calcul du ROE sur le résultat net</i>	88
<i>Tableau 16 Calcul du ROE après réassurance sur le résultat net</i>	89
<i>Tableau 17 Indicateurs de risque sur les portefeuilles des cédantes E, et T</i>	98
<i>Tableau 18 Exigence de capital sur les risques de mortalité extrême et hors CAT des cédantes E, et T</i>	99
<i>Tableau 19 Impact du risque de surmortalité sur les tranches basses de capitaux</i>	102
<i>Tableau 20 Bénéfice de diversification sur le portefeuille non-proportionnel de RGA</i>	114

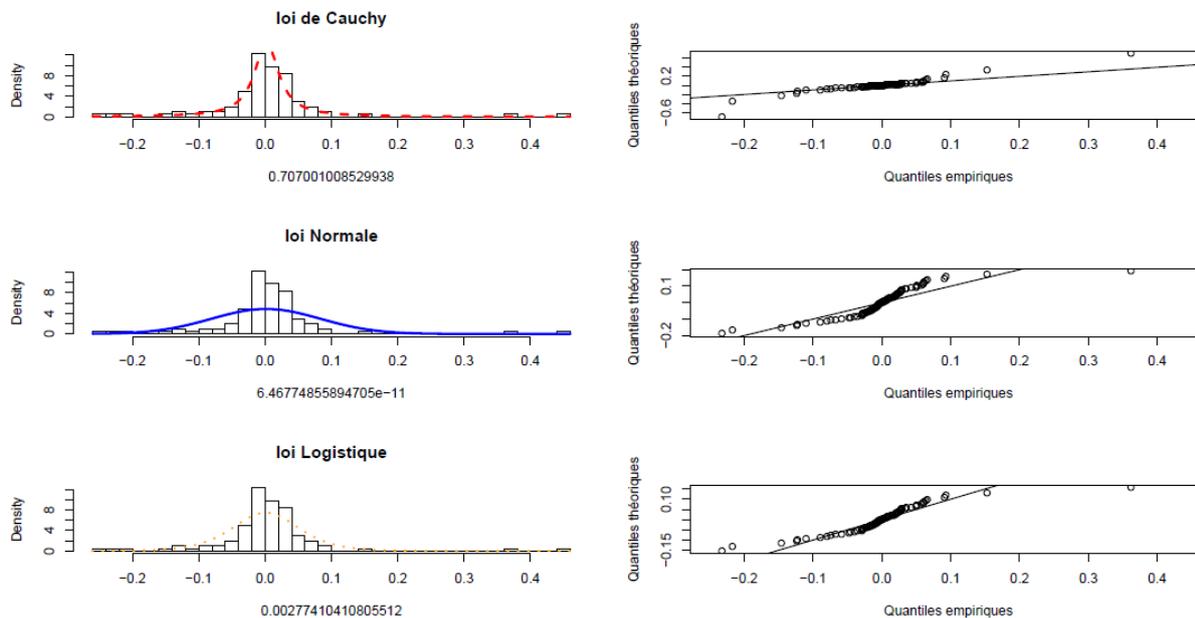
ANNEXE : ajustement des lois

Ci-dessous un détail des *QQ – plot*, ainsi que des *p – value* des tests du *Khi – deux* pour chaque série de coefficients de régression chocs.

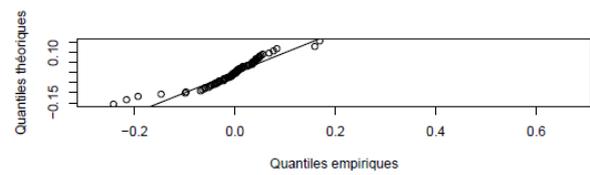
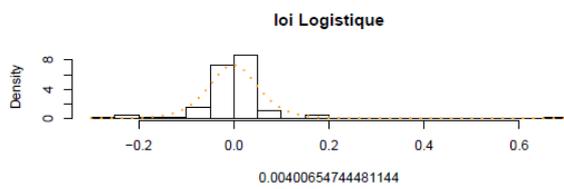
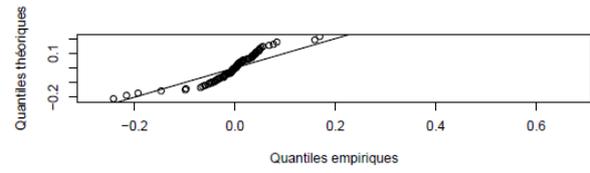
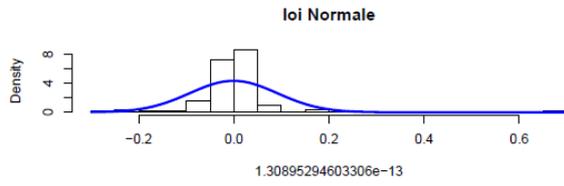
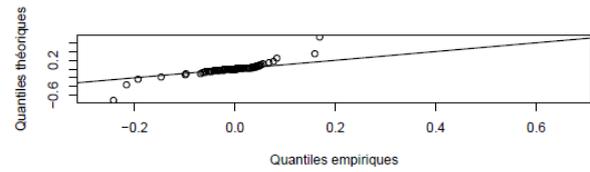
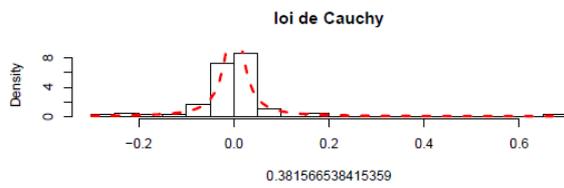
Série 1



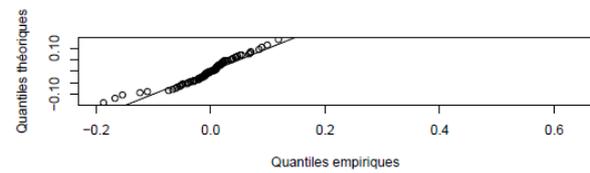
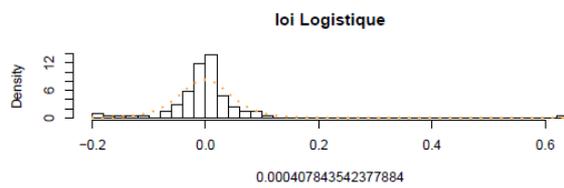
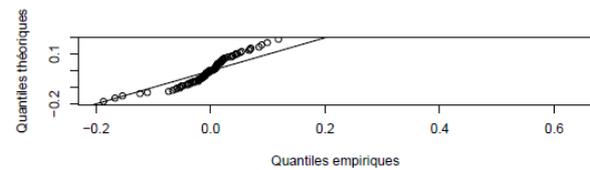
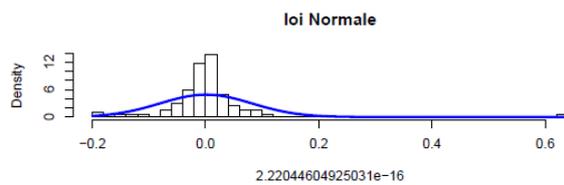
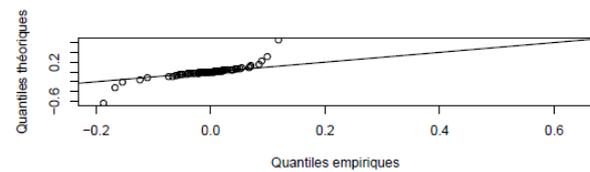
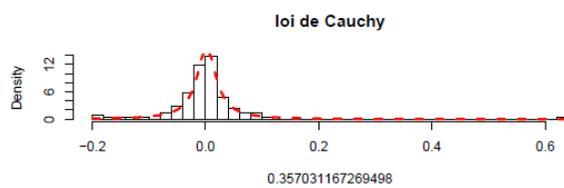
Série 2



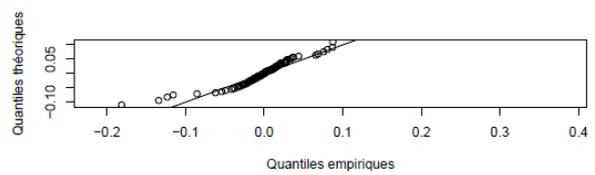
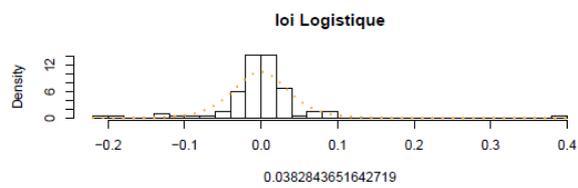
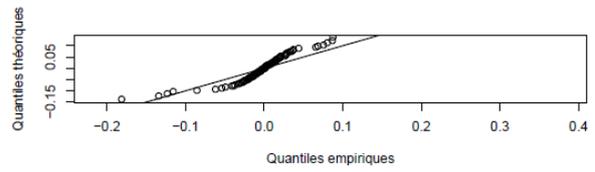
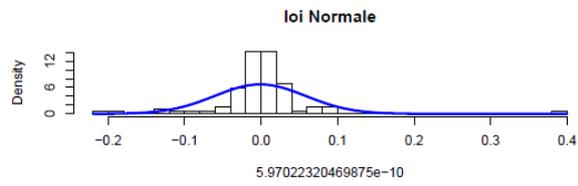
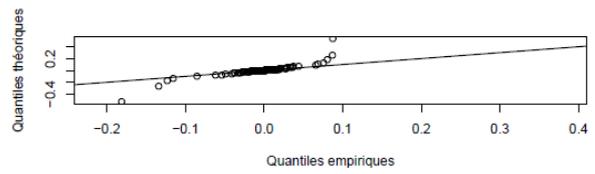
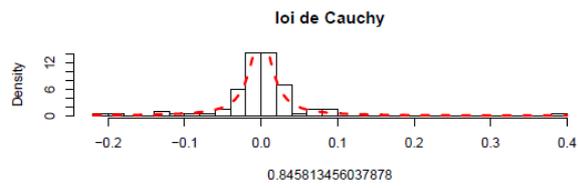
Série 3



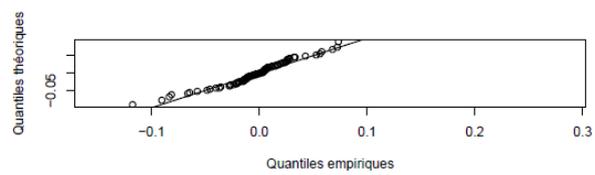
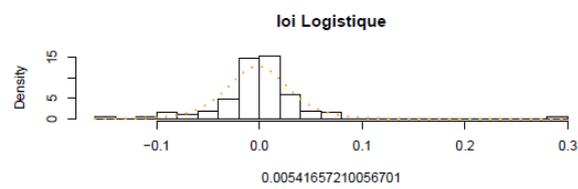
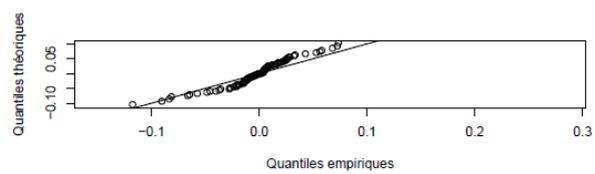
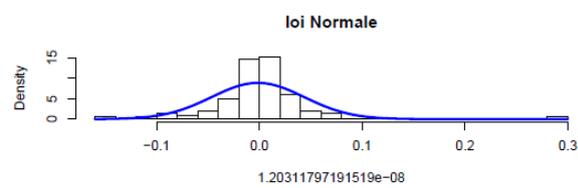
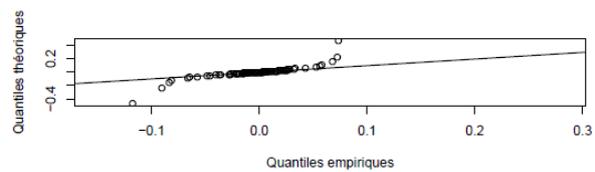
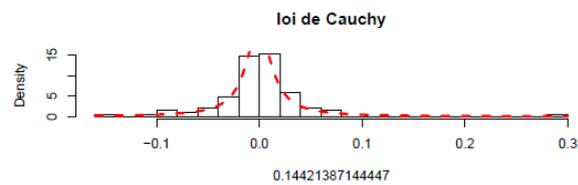
Série 4



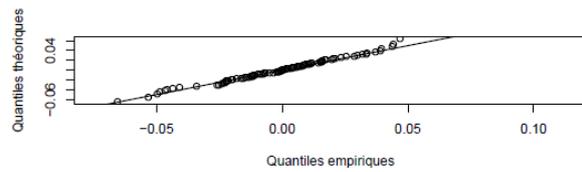
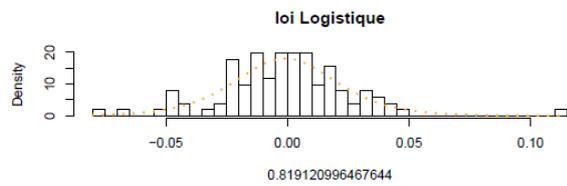
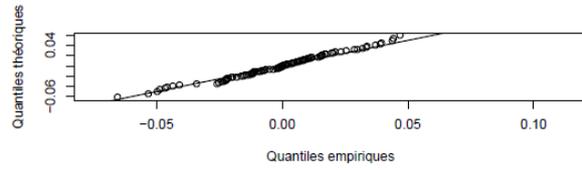
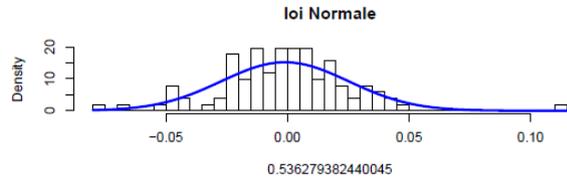
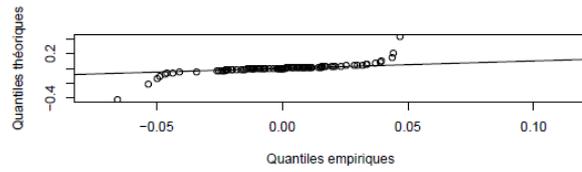
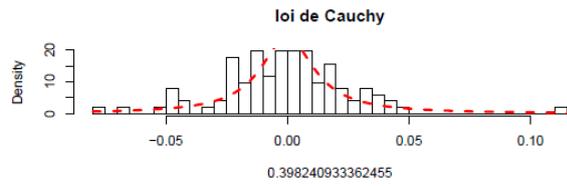
Série 5



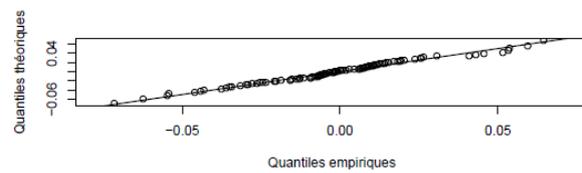
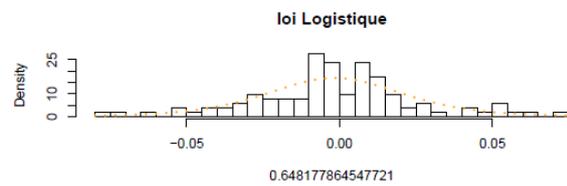
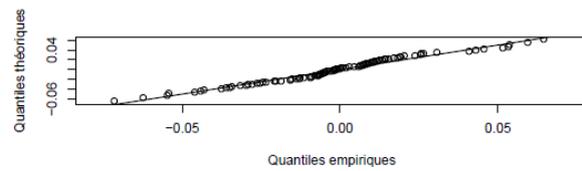
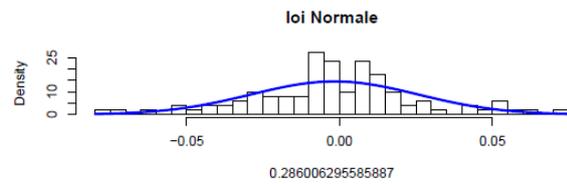
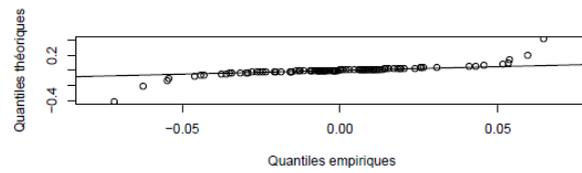
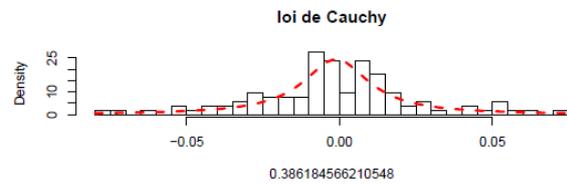
Série 6



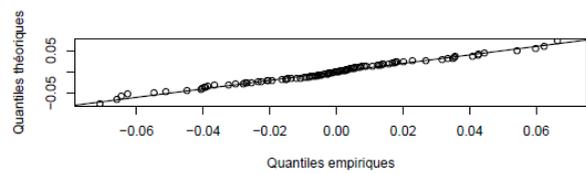
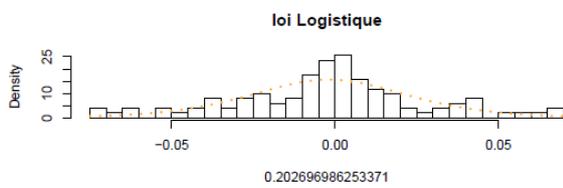
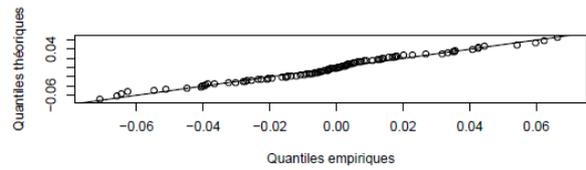
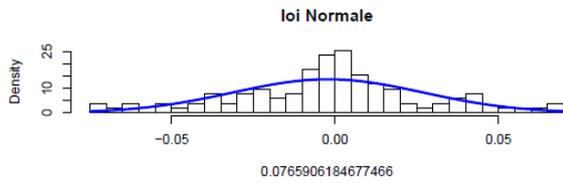
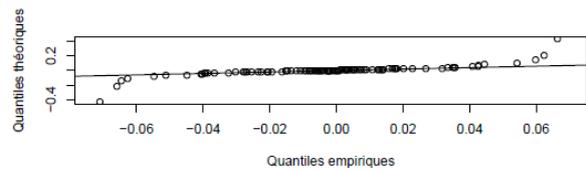
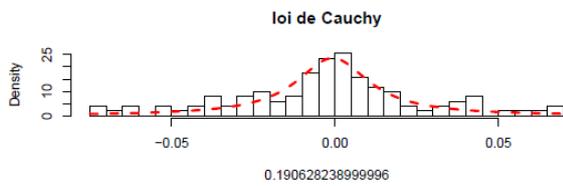
Série 7



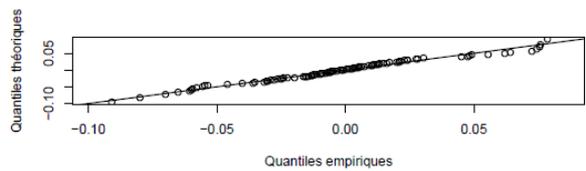
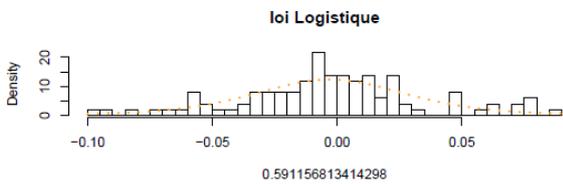
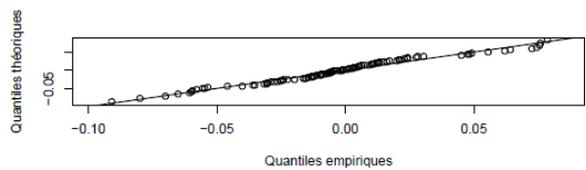
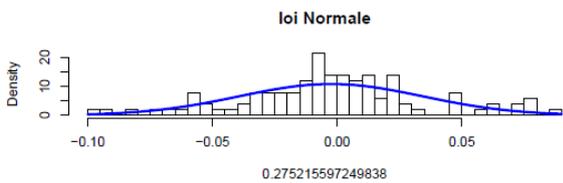
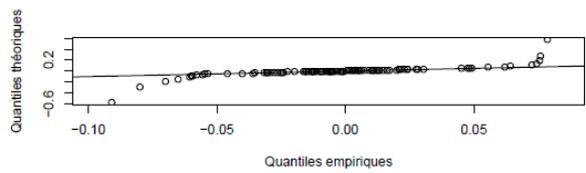
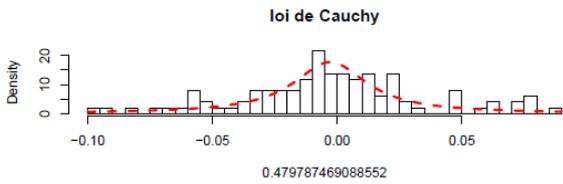
Série 8



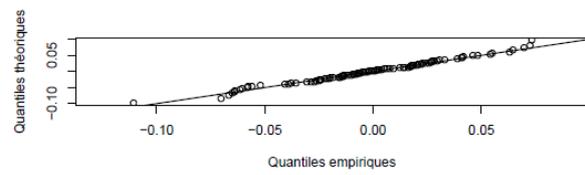
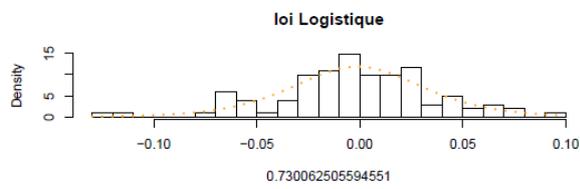
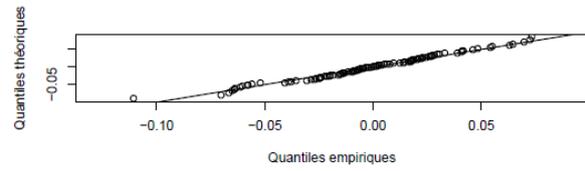
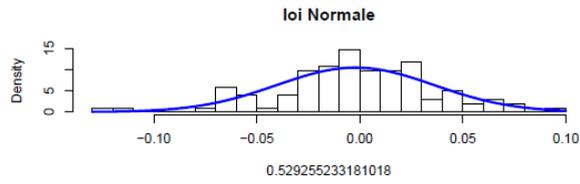
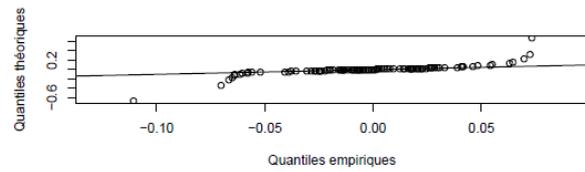
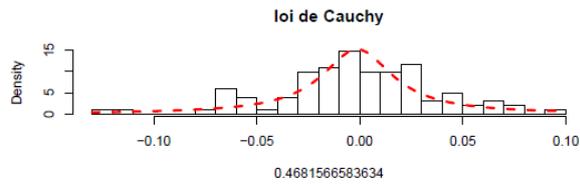
Série 9



Série 10



Série 11



Série 12

