Mémoire présenté devant

l'UFR de Mathématique et d'Informatique

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le ___29/09/2016___

Par : Mickael ITTAH

Titre: Calibrage de la sinistralité non vie – Cotation et optimisation de la réassurance non-proportionnelle

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires signature

M. KELLE-VIGON

Membres du jury de l'Unistra :

A. YOU

P. ARTZNER

J. BERARD

F. BERTRAND

K.-T. EISELE

J. FRANCHI

M. MAUMY-BERTRAND

V. VIGON

Invités :

Entreprise :

Nom : FORSIDES INNOVATION

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Marc RAYMOND

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

RESUME

Mots clés : IARD, théorie des valeurs extrêmes, réassurance, cotation, optimisation de la réassurance, traité multi-branches.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une méthode afin de calibrer la sinistralité d'un portefeuille d'une société d'assurance non vie et de piloter la gestion de la réassurance.

Il s'agira d'abord de modéliser la sinistralité annuelle de plusieurs branches d'assurance. La sinistralité est d'abord modélisée en séparant les sinistres attritionnels, c'est-à-dire les sinistres de forte fréquence et de montants faibles et la sinistralité grave. A cet effet, la théorie des valeurs extrêmes sera appliquée afin de modéliser correctement les risques de pertes extrêmes dues à des évènements rares mais très coûteux pour la société.

Deux types de réassurance non-proportionnelle seront étudiés. Les traités en excédents de sinistre où le réassureur prend en charge une partie des sinistres, et qui sont mis en place pour une branche d'activité, et les traités multi-branches qui couvrent les sinistres de plusieurs branches. L'étude de tels programmes de réassurance nécessite d'abord de coter ces traités, c'est-à-dire de trouver la prime pure de réassurance. Elle sera obtenue soit par des formules fermées soit par des simulations de Monte-Carlo.

Enfin, des stratégies de réassurance seront testées en étudiant leurs impacts sur les indicateurs de risques de type Value-at-Risk.

Toutefois, il faudra rester vigilant, toute modélisation entraine un risque de modèle. De même, le pilotage de la réassurance doit s'inscrire dans une démarche globale et être en lien avec la politique ERM de la société.

ABSTRACT

Keywords: P&C, Extreme Value Theory, Reinsurance, Reinsurance Pricing, Reinsurance Optimization, multiline aggregate XL.

This paper aims at proposing a method to calibrate the claims of a portfolio of non-life insurance company and steer reinsurance.

Firstly, we will model the annual losses of several insurance lines of business. Losses are modeled by separating attritional claims with high frequency but low severity and large claims. Extreme Value Theory will be applied to correctly model the risk of extreme losses due to rare events but very expensive for the company.

Two types of non-proportional reinsurance will be studied: excess of loss treaty and multiline aggregate XL treaties covering several Lines of Business. The study of such reinsurance programs require to price these treaties to find the pure premium. It will be achieved either through closed formulae or through Monte Carlo simulations.

Finally, reinsurance strategies will be tested by studying the impact on risk indicators of Value-at-Risk type.

However, we must remain vigilant. Any modeling entails a risk model. In addition, reinsurance steering must be part of a comprehensive approach and be linked to the ERM policy of the company.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance ainsi que mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à la bonne réalisation de mon stage :

Marc RAYMOND, directeur adjoint et associé FORSIDES, ainsi que l'ensemble des associés qui m'ont accordé leur confiance en me donnant l'opportunité d'effectuer ce stage de fin d'études au sein de leur cabinet.

Mon tuteur académique, Alexandre YOU, pour toute l'aide et le suivi apportés dans la réalisation de ce mémoire.

De plus, Je voulais remercier l'ensemble des collaborateurs du cabinet FORSIDES pour leur accueil et les bons moments partagés durant le stage.

Enfin, je tiens également à remercier toute l'équipe pédagogique du DUAS, pour la qualité de leurs enseignements au cours de ces trois années de formation.

TABLE DES MATIERES

Résumé 3

Abstract 4

Remerciements 5

Introduction 8

Partie I - Cadre du mémoire et problématique 10

1. Cadre de l'assurance non-vie 10

2. Risque de souscription non vie dans la formule standard 11

3. Formule standard et modèle interne 12

4. Problématique et objectif du mémoire 13

4.1 Le pilier 2 et l'ORSA 13

4.2 Mise en place d'un processus d'appétence au risque 14

5. Données de l'assureur 16

6. Sinistralité catastrophe 17

Partie II - Modélisation IARD 18

1. Eléments théoriques 18

1.1 Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes 18

1.2 Détermination du seuil des graves 21

1.3 Estimation des paramètres dans une démarche *Peaks Over Threshold* 23

1.4 Provisionnement non-vie 27

2. Modélisation d'un risque 29

2.1 Branche courte - Branche longue 29

2.2 Modèle collectif 30

2.3 Calibrage de la sinistralité 31

3. Outil de simulation 49

4. Mesure de dépendance et méthodes d'agrégation 53

4.1 Agrégation des risques 53

4.2 Agrégation entre la sinistralité attritionnelle et grave 54

4.3 Agrégation entre les différentes branches d'assurance 59

Partie III - Application : Cotation et optimisation de la reassurance 60

1. Optimisation de la réassurance non-proportionnelle 60

1.1 Excédent de sinistre 61

1.2 Excédent de perte 66

1.3 Les clauses 66

1.4 Traité excédent de sinistre multi-branches 68

1.5 Calcul de la prime commerciale – chargements 72

2. Optimisation du couple rendement risque 73

2.1 Structure de réassurance initiale 73

2.2 Excédent de sinistre 74

2.3 Multi-branches XS 78

Conclusion *85*

Bibliographie *87*

Table des illustrations *88*

Annexes *89*

Annexe 1 : Liste des abréviations et notations **89**

Annexe 2 : Triangles des charges et des nombres pour la branche RC automobile **90**

Annexe 3 : Fonction des excès moyens des différentes branches **91**

Annexe 4 : Calibrage des autres branches d'assurance **92**

Annexe 5 : Calcul des moments de la loi Log-Normale tronquée à gauche en u **93**

Annexe 6 : Démonstrations **94**

INTRODUCTION

L'article 45 de la Directive Européenne Solvabilité 2 dispose : « Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte au moins sur les éléments suivants :

a) le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;

b) le respect permanent des exigences de capital et des exigences concernant les provisions techniques ;

c) la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.»

Les sociétés d'assurance ont alors l'obligation de mettre en œuvre une gestion de leur activité autour de la notion de risque. C'est dans ce contexte réglementaire que prend place cette étude.

Dans une première partie nous exposerons le contexte du mémoire. Le cadre réglementaire de l'ORSA, du Risk Appetite et de l'assurance non-vie seront introduits.

Dans une seconde partie, nous établirons une approche pour la modélisation de la sinistralité annuelle. Cette procédure de modélisation est mise en place à partir des triangles des règlements et des coûts des sinistres individuels supérieurs à un seuil de collecte des sinistres graves. Nous rappellerons les principaux résultats issus de la théorie des valeurs extrêmes nécessaires à l'étude. Le théorème de Pickands reste l'élément clé qui donne de bonnes raisons théoriques de modéliser les sinistres dépassant un seuil par une loi de Pareto Généralisée. De plus, la méthode des pics au-delà d'un seuil avec la méthode des moments pondérés généralisés introduite par Diebolt et al. en 2007 sera utilisée pour estimer les paramètres de cette loi. Le choix du seuil découlera à la fois d'un comportement linéaire des excès moyens et des estimateurs stables autour de cette valeur. La méthode sera appliquée aux données de sinistralité de la branche responsabilité civile automobile d'un assureur. Cette partie présentera aussi la problématique d'agrégation entre les sinistres attritionnels et graves au sein de la même année et de la méthode de simulation des données. Globalement, elle permettra d'établir un modèle qui sera utilisé pour piloter l'activité. Dans le cas de ce mémoire il s'agira de la réassurance non-proportionnelle.

Enfin, la troisième partie traitera du pilotage de la réassurance. En particulier, deux types de traités seront envisagés. Le premier, un traité en excédent de sinistre par risque qui permet de se couvrir contre les sinistres extrêmes et qui couvre une branche d'activité, le second, un traité en excédents de sinistre multi-branches, qui permet à la cédante de se couvrir sur un risque de sur-fréquence des sinistres de montants inférieurs à la rétention des traités traditionnels. Une étude de ces traités portera sur les branches calibrées dans la partie 2 : la responsabilité civile automobile et la branche « dommages aux biens des particuliers ». Deux problématiques se posent pour de tels traités. En premier lieu, la prise en compte de la structure de dépendance, étant donné qu'ils couvrent plusieurs branches. Dire que les branches sont indépendantes est une hypothèse forte. Une solution possible serait de

modéliser la dépendance à partir d'une copule normale de dimension deux en réorganisant les sinistralités des scénarios de tels manières à ce qu'ils aient la même structure que la réalisation d'une variable aléatoire bi-variée de copule normale. Le second problème fait suite à l'accumulation des effets non-proportionnels de ces traités. La prime pure ne peut pas être calculée par une formule et une méthode par simulation est envisagée.

L'application permettra de voir l'impact de ces traités sur la distribution de la sinistralité grave réassurée en comparaison avec la sinistralité grave brute d'une part, et l'impact du choix d'un programme de couverture XS en fonction de l'appétit pour le risque de la société d'autre part.

PARTIE I - CADRE DU MEMOIRE ET PROBLEMATIQUE

Ce mémoire s'inscrit dans une démarche de pilotage de l'activité pour une société d'assurance non-vie. Cette désignation vient s'opposer à celle d'assurance vie ou les contrats proposés viennent couvrir un risque qui dépend de la vie humaine.

1. Cadre de l'assurance non-vie

On distingue généralement deux types d'activité en assurance non-vie :

- L'assurance de biens et responsabilités (P&C) : auto, dommage aux biens, responsabilité civile, crédit, construction, assistance ;
- l'assurance de personnes : frais de soins (santé), arrêt de travail (incapacité et invalidité), accident (décès accidentel, accidents de la vie, invalidité partielle).

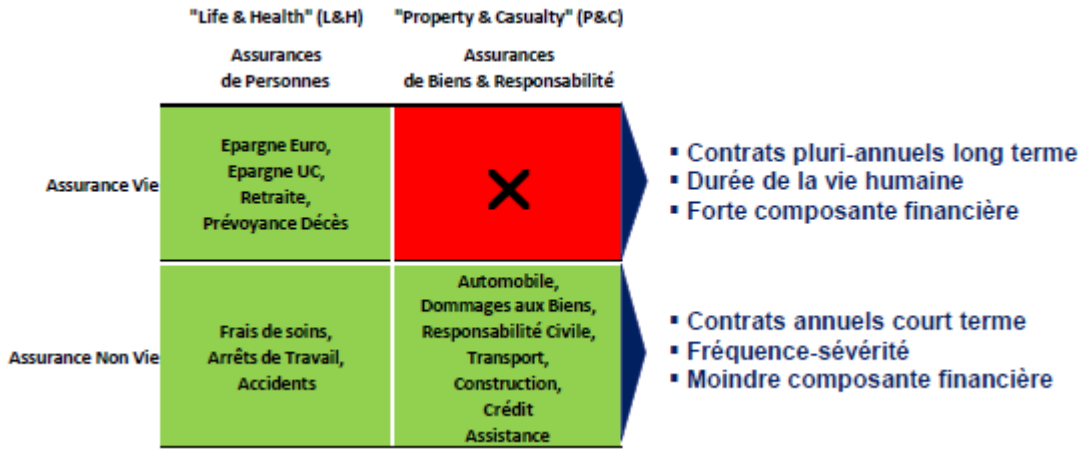


FIGURE 1: CADRE DE L'ASSURANCE NON VIE

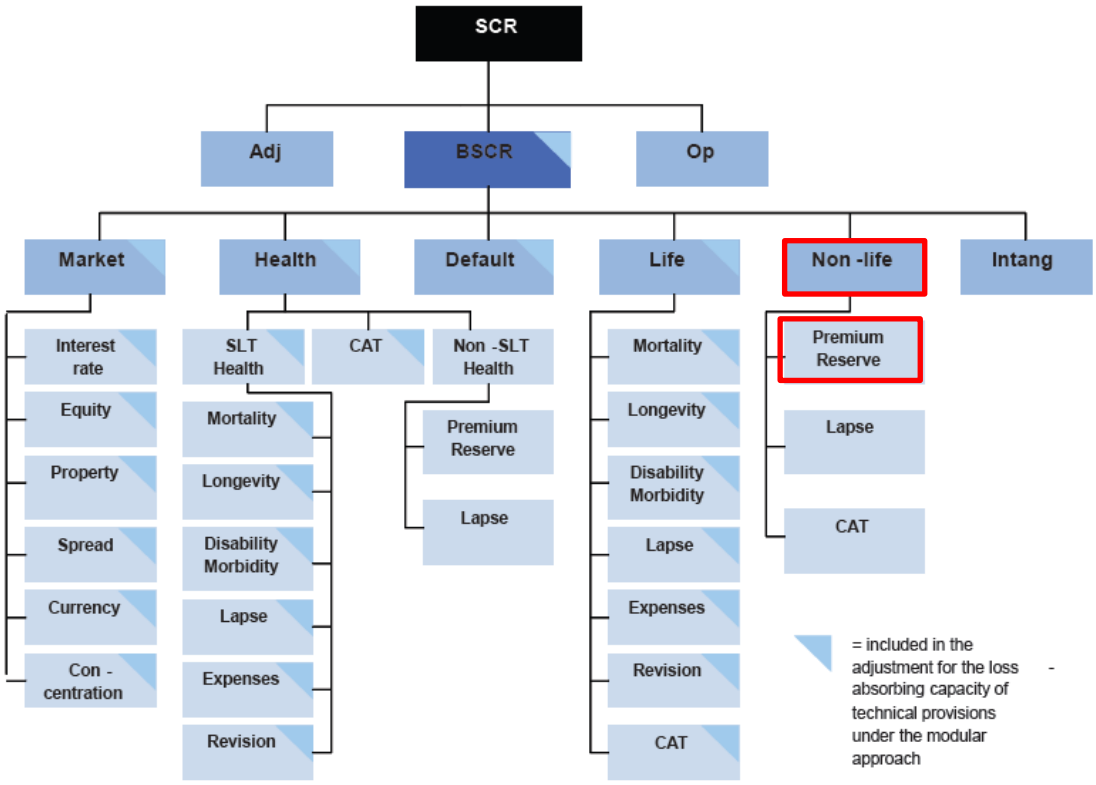
Une segmentation possible des activités d'assurance est celle par *LoB* (*Line Of Business*)

Les LoBs concernant les activités non-vie sont les suivantes :

1. assurance des frais médicaux ;
2. assurance de protection du revenu ;
3. assurance d'indemnisation des travailleurs ;
4. assurance de responsabilité civile automobile ;
5. autre assurance des véhicules à moteur ;
6. assurance maritime, aérienne et transport ;
7. assurance incendie et autres dommages aux biens ;
8. assurance de responsabilité civile générale ;
9. assurance-crédit et cautionnement ;
10. assurance de protection juridique ;
11. assurance assistance ;
12. assurance des pertes pécuniaires diverses.

2. Risque de souscription non vie dans la formule standard

Dans la formule standard, le risque de souscription non vie regroupe les risques inhérents aux contrats d'assurance non-vie et est composé des trois sous-modules suivants :



1) Risque de prime et réserve

- Risque de prime : risque de mauvaise tarification, que la charge des sinistres soit plus importante que celle anticipée.
    - Risque de portefeuille : lié à la rotation du portefeuille, niveau de la prime payée par les assurés et volume d'assurés ;
    - Risque de sinistralité future : lié à l'aléa sur la fréquence et la sévérité des évènements assurés.

Le graphique suivant illustre la différence entre le risque de portefeuille et le risque de sinistralité future. En observant une courbe, la densité du résultat indique qu'il est probable que le résultat soit fortement déficitaire en raison d'une fréquence de sinistres ou de montants de sinistres trop élevés. En revanche, il est aussi probable que l'ensemble de la courbe se translate vers la gauche ce qui entraine un résultat moyen plus faible mais aussi un capital économique requis plus élevé. Ce phénomène pourrait se produire, par exemple, suite à une majoration du tarif qui entraine que les bons risques résilient.

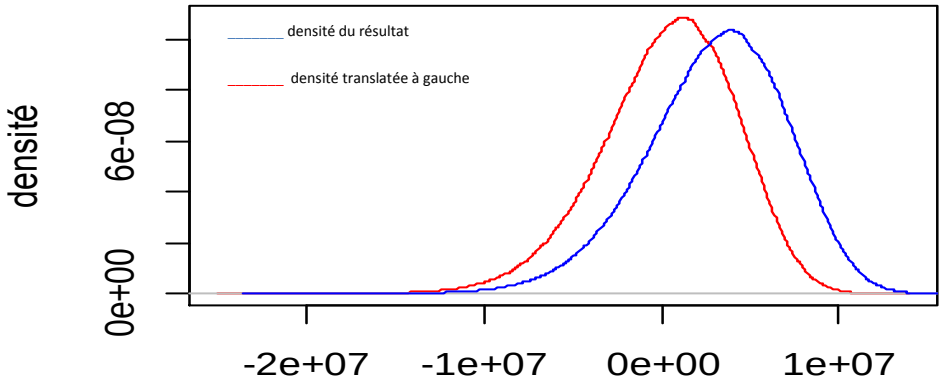


FIGURE 2: RISQUE DE PORTEFEUILLE ET RISQUE DE SINISTRALITE FUTURE

- Risque de réserve : risque de mauvaise estimation des *best estimate* des réserves (flux des paiements futurs actualisés relatifs aux sinistres déjà survenus) ou de différence entre l'estimation des sinistres et leur coût réel.

La définition de la provision *Best Estimate* dans la Directive Solvabilité II est la suivante: « *La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente*.»

2) Risque de rachat : risque que les contrats pluriannuels soient résiliés en cours d'années.

3) Risque de catastrophe : risque de catastrophe naturelle ou humaine de grande ampleur non pris en compte dans les risques de prime et de réserve.

3. FORMULE STANDARD ET MODELE INTERNE

La mise en place d'un modèle interne (MI) ou d'un modèle partiel (MIP) a principalement deux objectifs : soit devenir un outil de calcul des exigences réglementaires, soit être un outil interne de gestion des risques. La mise en place d'un MI ou d'un MIP dans le but de devenir un outil homologué au calcul des exigences réglementaires est un processus complexe. Néanmoins, de nombreuses compagnies d'assurance mettent en place un MIP comme outil interne de gestion des risques ou de pilotage. Par exemple, cet outil permettra de modéliser l'entreprise dans l'optique de :

- développement sur un produit ;
- optimisation de la réassurance ;
- optimisation de la politique de souscription.

Dans le cadre de ce mémoire, dans une démarche de pilotage, nous allons d'abord calibrer les sinistralités des différentes branches d'assurance puis allons essayer de voir l'impact des décisions de pilotage de réassurance sur les résultats. Le contexte réglementaire de Solvabilité 2, de l'ORSA et du processus de Risk Appetite seront développés dans la partie suivante.

4. PROBLEMATIQUE ET OBJECTIF DU MEMOIRE

Afin de mieux comprendre la problématique du mémoire, nous allons commencer par présenter le cadre et le contexte de celui-ci.

4.1 Le pilier 2 et l'ORSA

L'objectif du régulateur à travers le deuxième pilier de Solvabilité 2 est de s'assurer que la société d'assurance est bien gérée et qu'elle est en mesure d'identifier et de maitriser ses risques.

Le pilier 2 impose des exigences quantitatives et qualitatives, concernant la gouvernance des risques, à travers :

- l'ORSA ;
- le contrôle interne et la gestion des risques au sein de l'entreprise.

Enterprise Risk Management (ERM)

« L'ERM est une technique de management destinée à aider les entreprises à gérer tous les risques auxquels elles doivent faire face, principalement aléatoire, financier, opérationnel et stratégique. La première étape est d'identifier et de quantifier ces risques, la seconde vise à adopter des stratégies organisationnelles et financières pour limiter leur impact. Le but de cette technique est un objectif de création de valeur pour l'actionnaire et d'avantage concurrentiel pour l'entreprise. »[1]

Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)

« L'ORSA est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité par l'organisme (ou le groupe). Il doit illustrer la capacité de l'organisme ou du groupe à identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ou sa situation financière. Aussi, sa déclinaison opérationnelle en fait-elle un outil stratégique de premier plan. »[2]

L'objectif de l'ORSA est d'améliorer l'appréciation :

- des risques propres à l'entreprise ;
- des besoins en capitaux internes pour la conduite normale de l'activité.

On peut considérer que le pilier 1 permet à un assureur de mesurer sa solvabilité au sens du régulateur, tandis que le pilier 2 de mesurer sa solvabilité au sens de sa propre vision des risques. C'est la raison pour laquelle plusieurs éléments normés dans le cadre du pilier 1 peuvent être modifiés : la mesure de risque, l'horizon temporel, les risques à prendre en compte et le calibrage des modèles.

La mesure de risque

Le SCR se base sur une mesure Value-At-Risk et un niveau de 99,5% (le montant dont l'entreprise doit disposer en fonds propres pour n'être en situation de faillite que dans 0,5% des états futurs possibles à horizon d'un an). Dans le cadre de l'ORSA, il est possible de choisir d'autres mesures.

[1] Source Lexique AOF
[2] Source site de l'autorité de contrôle prudentielle et de résolution Acpr.fr

L'horizon temporel

L'horizon est de un an pour le SCR. En revanche, il peut être supérieur pour l'ORSA.

Les risques pris en compte

L'ORSA peut prendre en compte des risques non traités dans le cadre du SCR comme le risque de réputation par exemple.

Le calibrage des modèles

Il peut s'éloigner des hypothèses standards du SCR : changement des niveaux de stress, de la matrice de corrélation utilisée etc.

L'ORSA encourage les sociétés à mettre en place un processus de gestion des risques qui mesure les risques propres à la compagnie. Ce processus est lié à la notion d'appétit pour le risque qui sera introduit dans le paragraphe suivant.

4.2 Mise en place d'un processus d'appétence au risque

Le pilier 2 et son dispositif ORSA donnent un champ d'autonomie assez important aux assureurs quant à l'évaluation de leurs propres risques. Toutefois, une procédure de Risk Appetite devra être appliquée.

Définition - Appétit au risque (Risk Appetite)

Nature et quantité de risques que l'entreprise est prête à accepter ou tolérer afin d'accomplir sa mission et ses objectifs stratégiques, en tenant compte des attentes des parties prenantes et de leurs représentants[3].

Ce processus peut être résumé en trois grandes étapes :

La première, celle de l'appétence globale des risques, est réalisée par le conseil d'administration qui va d'abord définir la capacité de risque, c'est-à-dire la quantité que peut supporter la compagnie puis l'appétit au risque, c'est-à-dire la quantité qu'elle souhaite avoir pour parvenir à ses objectifs.

La deuxième étape consiste à établir des limites ou des objectifs pour chacun des risques de l'entreprise. Des enveloppes de risque vont alors encadrées chacun d'eux. En général, trois valeurs sont données, un seuil minimal, une zone qu'il ne faut pas dépasser, et enfin une zone où l'objectif est atteint.

Ensuite, une troisième étape correspond à l'élaboration des indicateurs qui permettront de vérifier si la compagnie est proche des objectifs fixés. Dans l'optique d'établir le profil de risque de la compagnie face à l'appétit au risque et aux limites données par le conseil d'administration, des indicateurs doivent être construits. Ils permettront d'avoir une représentation du profil pour chaque secteur et un suivi des objectifs fixés. Il faut alors, dans un premier temps, choisir les indicateurs, puis dans un second temps décider des paramètres de ces mêmes indicateurs (métrique, horizon, …).

Une fois établie, ce processus permet un suivi des risques grâce aux niveaux des indicateurs. Ces indicateurs pourraient être revus si, par exemple, la compagnie change sa stratégie.

[3] Cette définition est reprise du mémoire de AGENOS X. [2006]

Le schéma suivant illustre le processus global de détermination de l'appétit pour le risque[4].

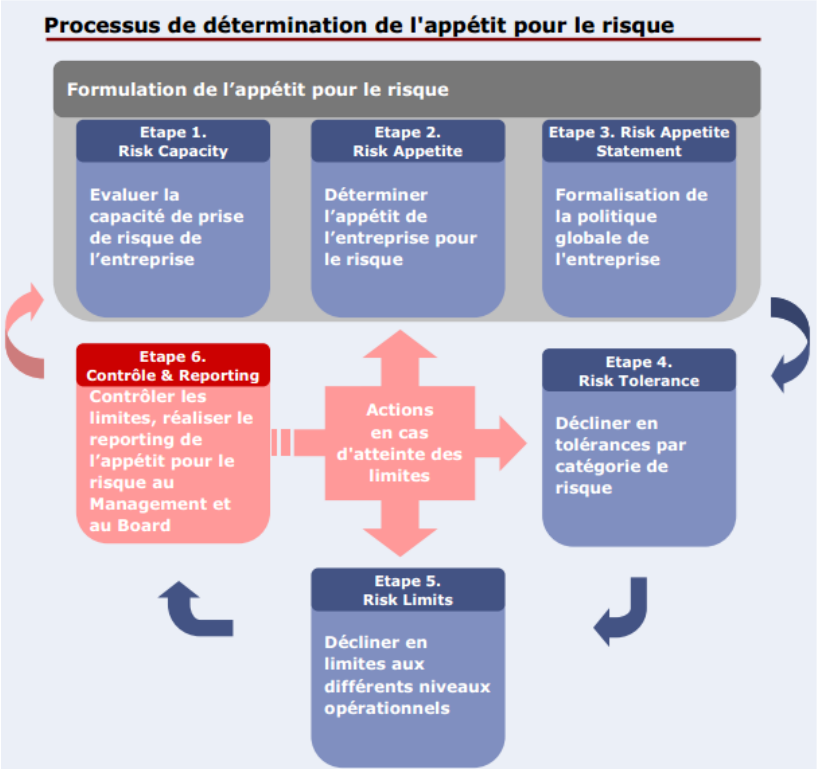


FIGURE 3: PROCESSUS DE DETERMINATION DE L'APPETIT POUR LE RISQUE

Ces indicateurs viennent couvrir une dimension en fonction de la partie prenante concernée. Les actionnaires sont intéressés par les dividendes que procurent leurs investissements et les dimensions qui les intéressent seront celles du résultat et de la valeur de l'entreprise. Par ailleurs, les assurés et l'autorité de contrôle aspirent à ce que la compagnie puisse indemniser les victimes suite à des sinistres, ils seront alors intéressés par les dimensions de solvabilité et de liquidité. Enfin, l'organe d'administration pourrait avoir des objectifs en termes de solvabilité, de résultat ou de liquidité, en fonction du type de société.

Optimisation du profil de risque

Afin d'optimiser le profil de risque, la société dispose de différents leviers qui lui permettront d'arriver aux objectifs fixés dans le plan stratégique et qui respectent le cadre de l'appétit au fixe. Certains de ces leviers agissent à l'actif comme le choix de l'allocation d'actif. D'autres sont liés au passif comme la politique de souscription et le choix du programme de réassurance.

C'est donc dans ce cadre de pilotage que vient s'inscrire l'approche expliquée dans ce mémoire. On se place dans un objectif de gestion interne et de pilotage par l'organe d'administration. L'horizon retenu est de 1 an et la dimension retenue est la solvabilité.

[4] Ce schéma est repris du mémoire de AGENOS X. [2006]

Choix de la métrique

Une métrique est un outil mathématique qui permet de mesurer le risque. Selon les parties prenantes, les niveaux de probabilité diffèrent. Pour le SCR, l'autorité de contrôle a choisi la métrique Value-at-Risk.

Cette phase concernant les métriques est primordiale car la stratégie sera traduite par des objectifs sur l'indicateur qui en est issu.

Dans ce mémoire les deux indicateurs de risques sont les suivants : la Value-at-Risk et la Tail Value-at-Risk. Les niveaux de probabilités retenues sont 95% et 99%.

Définition – Value-at-Risk :

Soit X une variable aléatoire (v.a) de fonction de répartition F.

La Value-at-Risk (VaR) d'ordre $\alpha \in [0\ , 1]$ de X est :

$$VaR_\alpha(x) = F^{\leftarrow}(1-\alpha) = inf\ \{x\ |F(x) \geq 1-\alpha\}$$

La Value-at-Risk pourrait être vue comme la perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

Définition – Tail-Value-at-Risk :

$$TVaR_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_S(x)dS$$

La TVaR pourrait être vue comme la moyenne de la perte potentielle une fois la VaR dépassée.

5. DONNEES DE L'ASSUREUR

Nous disposons des données suivantes d'un assureur non-vie :

Les triangles de règlements, des provisions et des nombres avec un historique de onze années pour les garanties suivantes :

- responsabilité civile automobile ;

- dommage automobile ;

- dommages aux biens (DAB) des particuliers ;

- dommages aux biens des professionnels ;

- responsabilité civile générale.

De plus, une base des sinistres graves est disponible avec un seuil de collecte de 150.000€ pour l'ensemble des garanties ci-dessus. Cette base permet le suivi des sinistres dans le temps avec les règlements annuels, l'estimation des provisions et la charge nette estimée depuis la date ou le sinistre a été connu jusqu'à la date d'aujourd'hui. L'historique de cette base est plus grand que pour

les triangles. Pour certaines garanties, les sinistres ont un historique de plus de 20 ans. Cette base permettra la modélisation des sinistres graves. Elle a été construite sur les montants hors réassurance. Néanmoins, les données ont été modifiées par souci de confidentialité sans modification sur la structure de celles-ci. Enfin, nous disposons du plan de réassurance non-proportionnelle actuel de la compagnie.

Nous faisons l'hypothèse que ces données ne comportent pas d'erreurs. Elles ont été enregistrées avec des procédures strictes. Ainsi, elles sont entièrement exploitables après avoir été corrigées de l'inflation.

6. SINISTRALITE CATASTROPHE

La modélisation du risque catastrophe ne sera pas prise en compte dans cette étude. Ainsi, les sinistres de type catastrophe naturelle ont donc été supprimés de la base de modélisation. Néanmoins, la démarche expliquée dans ce mémoire pourrait être appliquée à la sinistralité catastrophe aussi bien dans le calibrage du risque que dans l'optimisation de la réassurance. Pour ce faire, il faudrait considérer la sinistralité catastrophe comme une branche d'assurance distincte et l'agréger aux autres par la suite. La modélisation de la sévérité de ce type de risque étant complexe, il est courant d'utiliser des lois transmises par des courtiers de réassurance ou des logiciels spécialisés.

1. ELEMENTS THEORIQUES

1.1 Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes

Le but de cette partie est de montrer que l'on a de bonnes raisons théoriques de choisir une loi de Pareto Généralisée pour modéliser les sinistres dépassant un seuil. Nous résumerons ici les principaux résultats issus de la théorie des valeurs extrêmes nécessaires à notre étude.

Définition : loi des valeurs extrêmes

La famille de distribution des valeurs extrêmes (*GEV*[5]) a pour fonction de répartition :

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} exp\left(-(1+\gamma x)_+^{-\frac{1}{\gamma}}\right) & si\ \gamma \neq 0 \\ exp(-exp(-x)) & si\ \gamma = 0 \end{cases}$$

où $x_+ = max(x, 0)$

Le paramètre γ est appelé l'indice des valeurs extrêmes. Selon son signe, on distingue trois lois :

- $\gamma < 0$, domaine d'attraction de Weibull, avec un point terminal fini ;
- $\gamma = 0$, domaine d'attraction de Gumbel, la fonction de survie décroit à vitesse exponentielle. Le point terminal est fini ou infini.
- $\gamma > 0$, domaine d'attraction de Fréchet, point terminal infini, la décroissance est lente. Le point terminal est infini.

Exemples de lois

Weibull	Gumbel	Fréchet
- Bêta - Burr inverse	- Normale - Exponentielle - Gamma - Weibull	- Pareto - Burr - Student - Loggamma

Dans cette étude, les lois du maximum qui nous intéresseront seront dans le domaine d'attraction de Fréchet, avec un indice des valeurs extrêmes strictement positif car sa queue lourde permet de modéliser la loi des coûts des sinistres graves. Les distributions des valeurs extrêmes ont l'allure suivante[6] :

[5] *Generalized Extreme Value*
[6] Ce graphique est repris de Jondeau et Rockinger [1999]

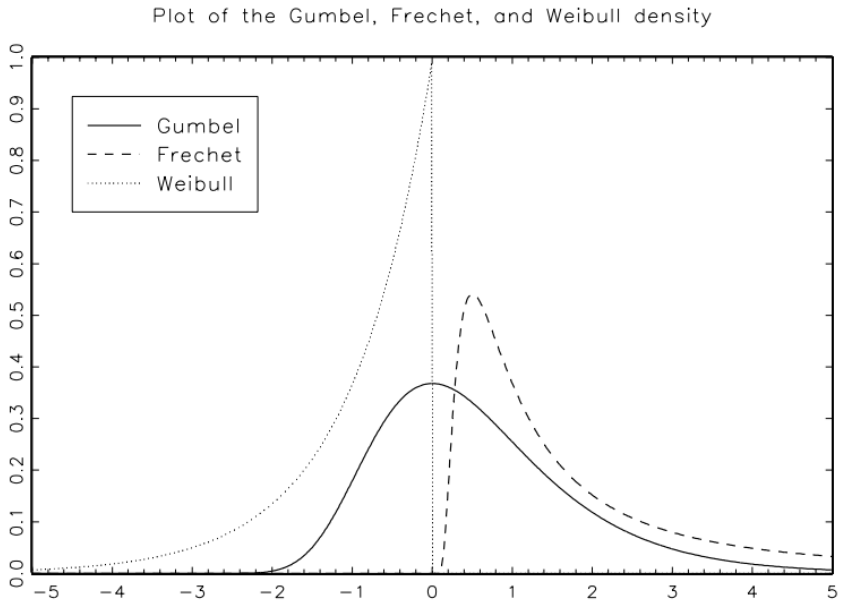


FIGURE 4: ILLUSTRATION DISTRIBUTION DES VALEURS EXTREMES

Théorème de Fisher-Tippett

Ce théorème établit la loi asymptotique du maximum $X_{n,n}$ d'un échantillon.

S'il existe deux suites $a_n > 0$, b_n et un réel γ telles que :

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x\right\} = F^n(a_n\, x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x)$$

où G est une fonction de répartition non dégénérée,

alors G est de même type que H_γ, i.e $\exists\ a > 0$ et $b \in R$ tel que $\forall\ x$, $G(x) = H_\gamma(ax + b)$.

Définition : loi de Pareto Généralisée (GPD)

La loi de Pareto Généralisée à deux paramètres $\gamma \in R$ et $\sigma > 0$ est définie par la fonction de répartition :

$$G_{\gamma,\sigma}\,(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{\gamma x}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} & si\ \ \gamma \neq 0 \\ 1 - \ exp\left(-\dfrac{x}{\sigma}\right) & si\ \ \gamma = 0 \end{cases}$$

où $x \geq 0$ si $\gamma \geq 0$ et $0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\gamma}$ si $\gamma < 0$

La densité de la loi Pareto Généralisée peut s'écrire :

$$g_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{(\sigma+\gamma x)^{1+\frac{1}{\gamma}}} & si\ \gamma \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sigma} exp\left(-\dfrac{x}{\sigma}\right) & si\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Remarques :

- Cette loi peut être étendue en ajoutant un paramètre de position μ en posant :

$$G_{\varepsilon,\sigma,\mu}(x) \coloneqq G_{\varepsilon,\sigma}(x-\mu)$$

- Si le paramètre $\gamma = 0$, la GPD est équivalente à la distribution exponentielle de paramètre $1/\sigma$.
- La loi GPD peut être définie à partir de la loi des valeurs extrêmes

$$G_{\gamma,\sigma}(x) = 1 + ln\left[H_\gamma(x/\sigma)\right]$$

- Cette loi a une espérance finie si $\gamma < 1$ et une variance finie si $\gamma < 1/2$.

  Voici les densités de différentes lois de Pareto Généralisée : en rouge $G_{0.5,1,0}$, en bleu $G_{1,1,0}$ et en noir la courbe en rouge translatée de μ=1 $G_{0.5,1,1}$.

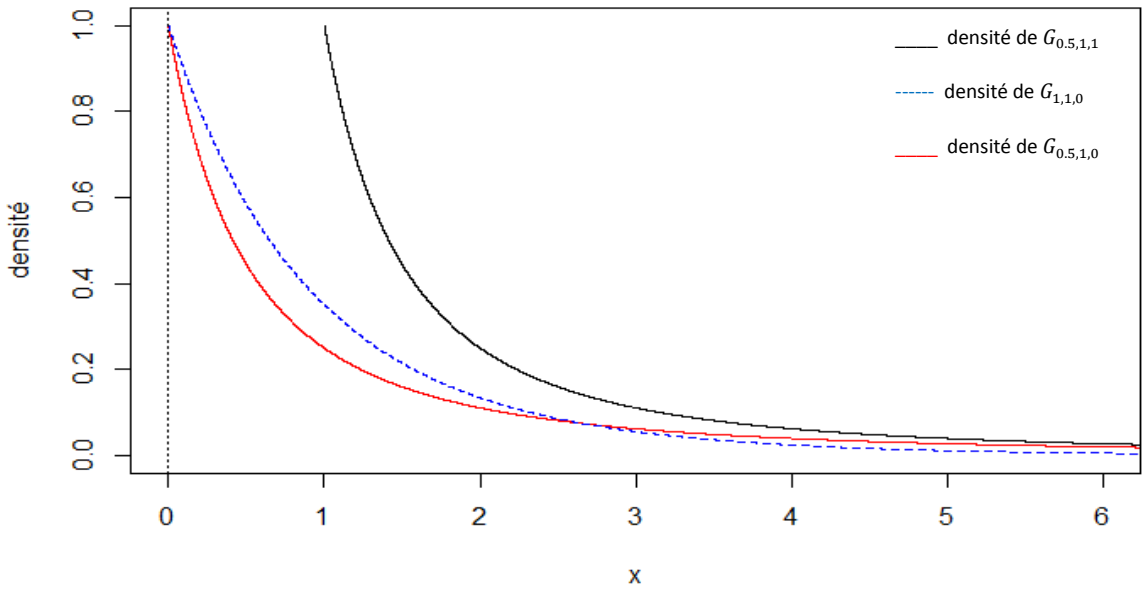


FIGURE 5: ILLUSTRATION DENSITE DE LA PARETO GENERALISEE

Définition – fonction de répartition des excès

Soit X une v.a de fonction de répartition F et de point terminal $x_F = sup\{x \in R\ , F(x) < 1\} \leq \infty$.

Pour tout seuil $u < x_F$, la fonction de répartition des excès au-dessus du seuil u est,

pour $0 \leq x \leq x_F - u$:

$$F_u(x) := \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

De plus, si X est intégrable la fonction des excès moyens est :

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u)$$

La fonction des excès moyens peut être réécrite de la manière suivante :

$$e(u) = \frac{\int_u^\infty (1 - F(x))dx}{1 - F(u)}$$

Théorème de Pickands-Balkema-de Haan

La fonction de répartition F de point terminal $x_F \leq \infty$ appartient au domaine d'attraction de H_γ avec $\gamma \in R$ si et seulement si :

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\gamma, a(u)}(x)| = 0$$

pour une fonction positive a .

Ce théorème suggère que pour un seuil « assez grand », la loi de Pareto Généralisée est une bonne approximation de la loi des excès. On peut alors approcher $F_u(x-u)$ par $G_{\gamma,\sigma,u}(x)$.

C'est la raison pour laquelle, en choisissant un seuil convenable, une loi de Pareto Généralisée pourra être ajustée aux données, par exemple aux montants des sinistres dépassant ce seuil[7].

1.2 Détermination du seuil des graves

Il existe dans la littérature de nombreux moyens de trouver le seuil à partir duquel l'on peut considérer que la variable a un comportement d'une loi Pareto Généralisée. Dans ce mémoire l'approche retenue sera dans un premier temps de tracer le graphe de la fonction moyenne des excès et de déceler le seuil à partir duquel les points ont un comportement linéaire. Dans un second temps, le seuil retenu sera au minimum le seuil trouvé mais tel que les estimateurs calculés par la méthode POT[8] exposée plus loin soient stables dans la région qui entoure ce seuil.

[7] Cette approche a été proposée par Davidson et Smith [1990] p.359.
[8] *Peaks over threshold* ou pics au-delà du seuil.

Définitions – fonctions des excès moyens empiriques et *mean excess plot*

La fonction des excès moyens empiriques est :

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i > u\}}}$$

La fonction des excès moyens empirique est un estimateur de la fonction des excès moyens.

Le graphe de la fonction moyenne des excès (ou *Mean Excess plot*) est le graphe des points $\{(u, \hat{e}_n(u)), X_{1:n} < u < X_{n:n}\}$

La proposition suivante établit un moyen de reconnaissance d'une loi de Pareto Généralisée à partir du graphique de la fonction des excès moyens. En effet, étant donné que la fonction des excès moyens est linéaire en u, il s'agira de chercher le seuil à partir duquel la fonction des excès moyens empiriques est aussi linéaire.

Proposition – fonction des excès moyen d'une distribution Pareto Généralisée

Si X suit une loi $GPD\ (\gamma, \sigma)$, alors, $e(u) = \frac{\gamma}{1-\gamma} * u + \frac{\sigma}{1-\gamma}$

Démonstration :

On a

$$e_X(u) = E(X - u | X > u)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X > u)} * \int_u^{\infty} (x - u) * f_X(x) dx$$

Le dénominateur peut se réécrire $\frac{1}{\mathbb{P}(X>u)} = \frac{1}{1-F_X(u)} = \left(1 + \frac{\gamma u}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$

Le numérateur est égale à $\int_u^{\infty} (x - u) * f_X(x) dx$

$$= \int_u^{\infty} (x - u) * \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{(\sigma + \gamma x)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} dy$$

$$= \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma} \int_u^{\infty} (x - u) * (\sigma + \gamma x)^{\frac{-(\gamma+1)}{\gamma}} \gamma\, dy$$

En intégrant par partie, il vient :

$$= \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma} * \frac{(\sigma + \gamma u)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\gamma} * (\sigma + \gamma u)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Il vient alors :

$$e_X(u) = \left(1 + \frac{\gamma u}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} * \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{1-\gamma} * (\sigma + \gamma u)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma}{1-\gamma} * u + \frac{\sigma}{1-\gamma}$$

1.3 Estimation des paramètres dans une démarche *Peaks Over Threshold*

L'estimation des paramètres par la méthode des pics au-delà du seuil ou *pics over threshold* (POT) ne se fait pas à partir de l'échantillon initial mais à partir de l'échantillon des données supérieur au seuil et où l'on a d'abord soustrait ce seuil.

On se donne un seuil fixé $u_n < x_F$ et on pose $N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i > u_n\}$, le nombre d'excès au-dessus du seuil. Puis, on calcule les excès au-dessus de u_n : $Y_j = X_{i_j} - u_n$ pour $j \in [1, N_n]$.

Le graphique suivant illustre cette méthode. L'échantillon qui sera ajusté ne comporte pas les 9 valeurs initiales mais les 4 valeurs supérieures à 12 et auxquelles on a retranché 12 : 4, 6, 7 et 3.

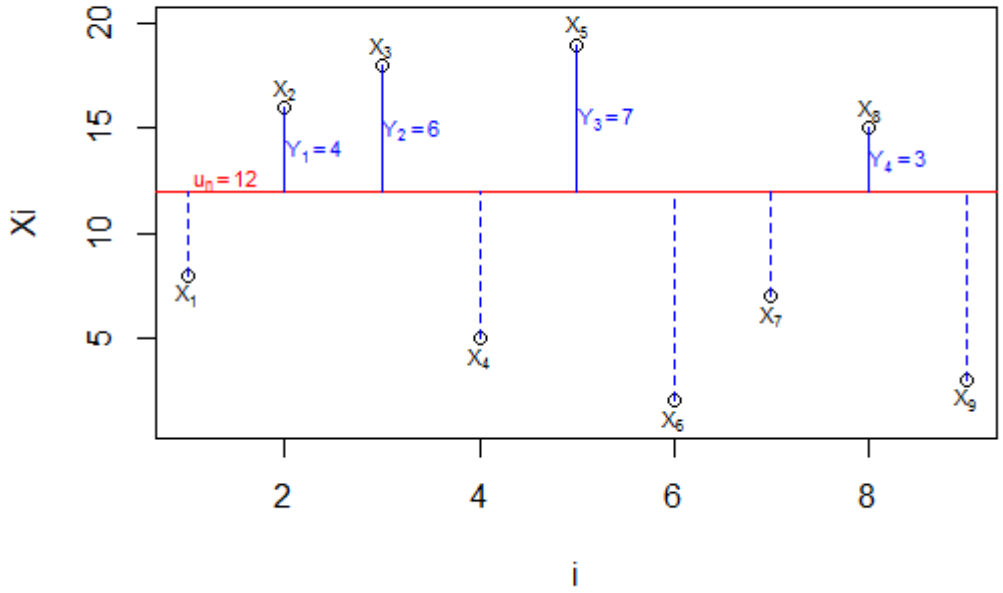


FIGURE 6: EXCES AU DESSUS DU SEUIL

Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer les paramètres de la loi GPD à partir des excès. Néanmoins la méthode des moments pondérés ne sera pas présentée car elle n'est pas valide lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$. En revanche, nous présenterons la méthode des moments pondérés généralisés, valide pour $\gamma < \frac{3}{2}$.
Enfin, notons que la méthode d'estimation des moments n'est pas applicable dans la majorité des cas car la GPD n'a pas de moment d'ordre 2 si $\gamma > \frac{1}{2}$.

Méthode du maximum de vraisemblance

Par le théorème de Pickands, nous pouvons supposer que les excès Y_j suivent une loi GPD. Nous pouvons alors estimer ces paramètres par maximum de vraisemblance. [Hosking et Wallis (1987)]

La log-vraisemblance du modèle s'écrit :

$$\log L\left(\gamma, \sigma; y_1, \dots, y_{N_n}\right) = \sum_{i=1}^{N_n} log\left(g_{\gamma,\sigma}\left(y_i\right)\right)$$

Si $\gamma > 0$ on a :

$$\log L\left(\gamma, \sigma; y_1, \dots, y_{N_n}\right) = -N_n\, ln(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{N_n} ln\left(1 + \frac{\gamma y_i}{\sigma}\right)$$

Les estimateurs sont obtenus en calculant les dérivées partielles et en les égalisant à 0. Néanmoins, il n'existe pas de solution explicite et le calcul est effectué numériquement. De plus, Smith [1984] a établi la loi asymptotique des estimateurs ce qui permet de calculer les intervalles de confiance.

La loi asymptotique des estimateurs est :

$$\sqrt{N_n} * \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \to N\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+\gamma)^2 & \sigma(1+\gamma) \\ \sigma(1+\gamma) & 2\sigma^2(1+\gamma) \end{pmatrix}\right)$$

Cette méthode d'estimation est valide pour $\gamma > -\frac{1}{2}$.

Moments pondérés généralisés

Cette méthode a été introduite par Diebolt et al. en 2007. Elle permet de lever la restriction $\gamma < \frac{1}{2}$ de la méthode des moments pondérés à $\gamma < \frac{3}{2}$. Elle repose sur des quantités appelées « moments pondérés généralisés ».

Définition - Moment pondéré généralisé

Soient X une v.a. de fonction de répartition $G_{\gamma,\sigma}$ et ω une fonction positive nulle en zéro et dérivable à droite en zéro. Si $\gamma < 2$, on définit le moment pondéré généralisé v_ω de X par:

$$v_\omega := \mathbb{E}\left[X * \omega\left(1 - G_{\gamma,\sigma}(X)\right)\right]$$

En posant $W(x) = \int_0^x w(t)dt$, on a :

$$v_\omega = \int_0^\infty W(1 - G_{\gamma,\sigma}(x))dx = \sigma \int_0^1 W(u)u^{-\gamma-1}du$$

Démonstration

$$v_\omega = \int_0^\infty x\, \omega\left(1 - G_{\gamma,\sigma}(x)\right) f_X(x)dx$$

En posant le changement de variable $u = 1 - G_{\gamma,\sigma}(x)$ il vient :

$$v_\omega = \int_1^0 \frac{\sigma}{\gamma}(u^{-\gamma} - 1) * w(u) * \frac{\sigma^{\frac{1}{\gamma}}}{\sigma^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} u^{-\gamma-1}} * -\sigma u^{-\gamma-1}du$$

$$v_\omega = \int_0^1 \frac{\sigma}{\gamma}(u^{-\gamma} - 1)w(u)du$$

En intégrant par partie, il vient :

$$v_\omega = \sigma \int_0^1 W(u)u^{-\gamma-1}du$$

On estime alors v_ω par $\hat{v}_\omega$:

$$\hat{v}_\omega = \int_0^\infty W(1 - \hat{F}_{n,u_n}(x))dx$$

avec $\hat{F}_{n,u_n}(x) = \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{1}\{Y_j \leq x\}$ la fonction de répartition empirique des excès.

Proposition – Existence d'un difféomorphisme

Soient v_{ω_1} et v_{ω_2} deux moments pondérés généralisées d'une v.a. de loi $G_{\gamma,\sigma}$ et,
$\varphi_i(\gamma) \coloneqq \int_0^1 W_i(u)u^{-\gamma-1}du = \frac{v_{\omega_i}}{\sigma}$ pour $i \in \{1,2\}$

1. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont de classe C^1 sur $]-\infty, 2[$.
2. Si, pour tout $\gamma < 2$, la fonction $r'(\gamma) \coloneqq \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'(\gamma)$ est de signe constant alors il existe un C1–difféomorphisme $T_{(\omega_1,\omega_2)}$ tel que :

$$T_{(\omega_1,\omega_2)}(v_{\omega_1}, v_{\omega_2}) = (\gamma, \sigma)$$

où γ et σ sont donnés par :

$$\gamma = r^{-1}\left(\frac{v_{\omega_1}}{v_{\omega_2}}\right) \qquad \sigma = \frac{v_{\omega_2}}{\varphi_2 \circ r^{-1}(v_{\omega_1}/v_{\omega_2})}$$

Diebolt et al. (2007) propose de prendre :

$$\omega_1(x) = x \qquad \omega_2(x) = x^{3/2}$$

On calcule alors les estimateurs $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$

$$\varphi_1(\gamma) \coloneqq \int_0^1 W_1(u)u^{-\gamma-1}du = \int_0^1 \frac{1}{2}u^{1-\gamma}du = \frac{1}{4-2\gamma}$$
$$\varphi_2(\gamma) \coloneqq \int_0^1 W_2(u)u^{-\gamma-1}du = \int_0^1 \frac{2}{5}u^{\frac{3}{2}-\gamma}du = \frac{4}{25-10\gamma}$$
$$r(\gamma) = \frac{25-10\gamma}{16-8\gamma}$$

$$\hat{\gamma} = r^{-1}\left(\frac{\hat{v}_{\omega_1}}{\hat{v}_{\omega_2}}\right) = \frac{16\hat{v}_{\omega_1} - 25\hat{v}_{\omega_2}}{8\hat{v}_{\omega_1} - 10\hat{v}_{\omega_2}}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{v}_{\omega_2}}{\varphi_2(\hat{\gamma})} = \frac{10\hat{v}_{\omega_1}\hat{v}_{\omega_2}}{8\hat{v}_{\omega_1} - 10\hat{v}_{\omega_2}}$$

$$\hat{v}_{\omega_1,n} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_n}\left[\left(1-\frac{j-1}{N_n}\right)^2 - \left(1-\frac{j}{N_n}\right)^2\right] * Y_{j,N_n}$$

$$\hat{v}_{\omega_2,n} = \frac{1}{2{,}5}\sum_{j=1}^{N_n}\left[\left(1-\frac{j-1}{N_n}\right)^{2{,}5} - \left(1-\frac{j}{N_n}\right)^{2{,}5}\right] * Y_{j,N_n}$$

En faisant varier u_n et en calculant le couple $(\hat{v}_{\omega_1,n}, \hat{v}_{\omega_2,n})$ pour chacun d'eux, cela permet de calculer le couple des estimateurs $(\hat{\gamma}, \hat{\sigma})$ en fonction du nombre d'excès. On remarquera que le calcul de ces estimateurs est très volatile en présence de peu d'excès.

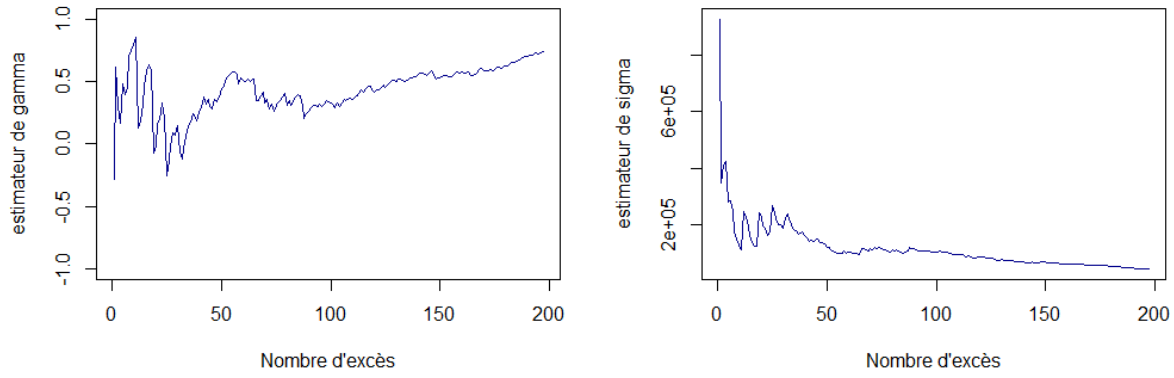


FIGURE 7: ILLUSTATION ESTIMATION GPWM

1.4 Provisionnement non-vie

Nous rappelons ici la méthode de Chain-Ladder classique qui permettra par la suite de projeter les triangles des règlements ou des nombres à l'ultime.

Méthode de Chain-Ladder

La méthode de Chain-Ladder est basée sur le calcul de facteur de développement servant à compléter le triangle et d'en déduire les réserves à constituer.

i : année de survenance, $i = 0, \dots, n$

j : année de développement, $j = 0, \dots, n$

$Z_{i,j}$: sinistralité de l'année de survenance i pour l'année de développement j

$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} Z_{i,k}$: sinistralité cumulée de l'année de survenance i vu en année de développement j

L'hypothèse de cette méthode est l'indépendance entre les facteurs de développement et l'année de survenance :

$\forall j = 0, \dots, n-1, \beta_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ indépendant de i.

On a alors :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}}$$

Dans la pratique, on estime β_j par $\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$, pour $j = 0, \dots, n-1$

On peut alors estimer les paiements cumulés futurs, les provisions à constituer pour chaque exercice et la provision globale par :

$$\forall j > n-i, \qquad \hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} * \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{\beta}_k$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i$$

En 1993, Thomas Mack[9] introduit une méthode stochastique qui permet de calculer l'erreur de prédiction des provisions calculées avec la méthode de Chain-Ladder.

[9] MACK T., [1993]

Les hypothèses du modèle de Mack sont celles du modèle de Chain-Ladder, de plus :

- Les $C_{i,j}$ sont indépendants ;
- Il existe des constantes positives β_j et σ_j telles qu'on ait :

$$\mathbb{E}\left(C_{i,j}|C_{i,j-1}\right) = \beta_{j-1}\, C_{i,j-1} \qquad Var\left(C_{i,j}|C_{i,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^{2}\, C_{i,j-1}$$

Les estimateurs de τ_j sont :

$$\hat{\sigma}_j^{2} = \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} * \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\beta}_j\right)^2$$

$$\hat{\sigma}_{n-1}^{2} = min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^{4}}{\hat{\sigma}_{n-3}^{4}}; min(\hat{\sigma}_{n-3}^{2}; \hat{\sigma}_{n-2}^{2})\right)$$

La méthode de Mack permet de satisfaire l'égalité $\mathbb{E}\left(\hat{C}_{i,N}\right) = \mathbb{E}\left(C_{i,N}\right)$.

$$\mathbb{E}(\hat{C}_{i,N}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(C_{i,n-i} * \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{\beta}_k \,|\, \{\{C_{i,j}, i+j \le n\}\}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(C_{i,n}|\,\{\{C_{i,j}, i+j \le n\}\}\right)\right] = \mathbb{E}(C_{i,n})$$

2.1 Branche courte - Branche longue

Il existe une distinction usuelle entre les différentes branches d'assurance. Une branche est souvent qualifiée de «courte» ou de «longue» en raison du temps que s'écoule entre une année de survenance des sinistres et le moment ou les sinistres sont totalement réglés.

En assurance non-vie, les branches à développement court sont celles où les règlements sont rapides, en général la première année. Les branches concernées sont les frais de santé, dommage automobile et les branches de dommages aux biens des particuliers ou des professionnels.

En revanche, les branches à développement long sont celles dont les sinistres sont différés dans le temps. Par exemple, pour les branches responsabilité civile corporelle automobile et générale, les sinistres ne sont pas entièrement clos après 10 ans. De même la branche responsabilité civile décennale est une branche à développement très long. La raison principale de ce développement dans le temps est d'ordre juridique : il faut évaluer les responsabilités de chacun et les indemnités.

Le graphique ci-dessous illustre les cadences des règlements pour différentes branches d'assurance.

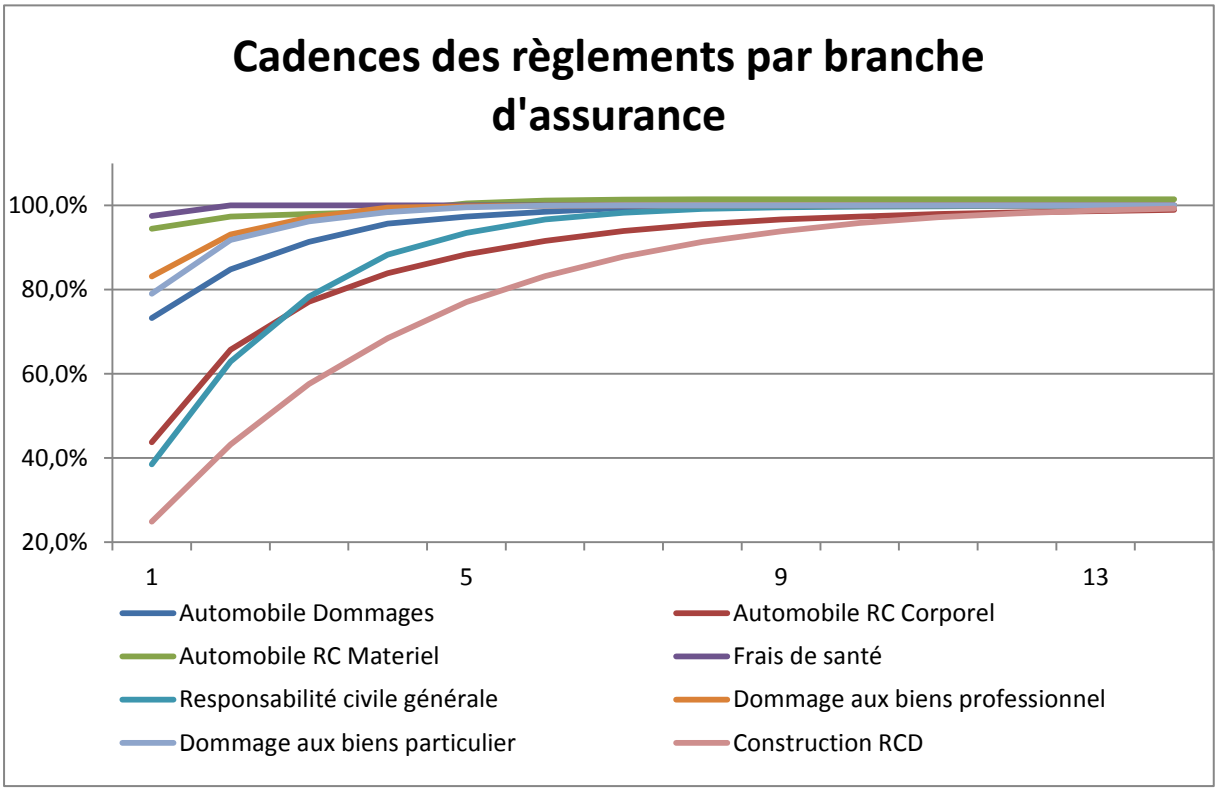


FIGURE 8: CADENCES DES REGLEMENTS EN ASSURANCE IARD

Ainsi, pour une année de survenance, il réside des inconnus qu'il faut prendre en compte en constituant des provisions :

- les IBNYR[10], les sinistres survenus mais non encore déclarés à la date d'évaluation, appelés couramment les « sinistres tardifs »;
- les IBNER[11], les sinistres survenus, déclarés mais non encore entièrement provisionnés car l'estimation est difficile.

Le risque de prime correspond à un risque de mauvaise tarification, c'est-à-dire que la charge des sinistres survenue une année soit plus importante que celle anticipée et concerne de la même façon les branches longues et les branches courtes.

En revanche, le risque de réserve est d'autant plus grand que la branche est longue. En effet, en raison des règlements différés et de la présence de sinistres survenus mais non encore déclarés, l'aléa sur l'estimation des réserves est élevé.

2.2 Modèle collectif

Définition

Soient S la charge de sinistres d'une branche d'assurance, N la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres de la branche sur une période de temps et la suite des $(\mathrm{X_i})_{i\geq 1}$, variables aléatoires représentant les montants individuels des sinistres

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On se place dans le cadre du modèle collectif et on pose :

S = v.a modélisant la charge totale ;
N^{Att} = v.a modélisant le nombre de sinistres attritionnels ;
N^{Gra} = v.a modélisant le nombre de sinistres graves ;
X_i^{Att} = v.a modélisant l'i^{ème} sinistre attritionnel ;
X_i^{Gra} = v.a modélisant l'i^{ème} sinistre grave .

$$S = S^{Att} + S^{Gra} = \sum_{i=1}^{N^{Att}} X_i^{Att} + \sum_{i=1}^{N^{Gra}} X_i^{Gra}$$

En règle générale, la même approche est utilisée pour les sinistres attritionnels et pour les sinistres graves. En effet, ces sinistralités sont toutes deux modélisées par une approche fréquence-coût. Néanmoins, l'approche qui sera retenue ici sera de modéliser la sinistralité attritionnelle de façon agrégée et la sinistralité grave de manière individuelle, de telle manière à ce que le temps de calcul ne soit pas trop long. De plus, la réassurance étant appliquée uniquement aux sinistres graves, les montants individuels des autres sinistres ne sont pas nécessaires.

[10] *Incurred But Not Yet Reported*
[11] *Incurred But Not Enough Reported*

Ainsi, le modèle retenu pour modéliser la sinistralité liée à une branche est le suivant :

$$S = S^{Att} + \sum_{i=1}^{N^{Gra}} X_i^{Gra}$$

avec $\left(X_i^{Gra}\right)_{i\geq 1}$ indépendants, identiquement distribués et indépendants de $\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}$.
S^{Att} et $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}} X_i^{Gra}$ a priori non indépendant : la dépendance vient de $\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}$ et $\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}$[12].

2.3 Calibrage de la sinistralité

Retraitement *as-if* des données

Avant de calibrer les sinistralités, il faudrait avoir des montants comparables à la date d'aujourd'hui. C'est la raison pour laquelle une première étape consiste à corriger les triangles des règlements et les montants individuels des sinistres graves. L'inflation corrigée est l'inflation passée. Dans cette étude, nous supposons que l'inflation future est nulle. Ainsi, les provisions des sinistres non clôturés ne seront pas corrigées de l'inflation. Un indice ou une combinaison d'indices doit alors être retenue en fonction de la branche d'activité à corriger. La méthode est sensiblement différente entre la correction des montants individuels et celle des triangles.

Correction des montants individuels des sinistres graves

L'inflation est prise en compte avec un pas annuel. Si pour un même sinistre, il y a eu plusieurs règlements la même année, on fait l'hypothèse que l'assureur n'a réalisé qu'un seul règlement pour ce sinistre qui correspond à la somme des paiements effectués.

Soit un sinistre survenu en année i. A cette date-là, les différentes équipes ont estimé le coût total du sinistre, ont probablement réglé une partie du sinistre et ont mis en place une provision pour sinistre à payer correspondante à leur estimation. Notons $R_{i,j}$ le règlement en année j de ce même sinistre. $R_{i,i}$ Correspond alors au règlement de la première année, positif ou nul.

On constitue, pour chaque sinistre, le vecteur des règlements :

$$\left(R_{i,i}, \dots, R_{i,j}, \dots, R_{i,n}\right)$$

Pour le règlement partiel en année j, la correction consiste à effacer l'effet de l'inflation entre l'année de règlement et l'année calendaire n :

$$R'_{i,j} = R_{i,j} * \prod_{k=j}^{n}(1 + I_k)$$

avec I_k, le taux d'inflation annuel calculé par $I_k = \frac{valeur\ de\ l'indice\ en\ fin\ k}{valeur\ de\ l'indice\ en\ fin\ k-1} - 1$

Le vecteur des règlements annuels du sinistre survenu en i et corrigé de l'inflation vu en date n est :

$$\left(R'_{i,i}, \dots, R'_{i,j}, \dots, R'_{i,n}\right)$$

Le coût de ce sinistre vu en euros d'aujourd'hui est : $\sum_{j=i}^{n} R'_{i,j} + PSAP_n$

[12] Ceci est une hypothèse. Cf.2.4.2

avec $PSAP_n$, la provision sinistre à payer au titre de ce sinistre estimée en année n.

Correction des triangles des règlements

La méthode est identique, elle s'applique aux triangles incrémentaux des $Z_{i,j}$, les montants des règlements effectués l'année $j + i - 1$.

Survenance	**Année de développement**				
	1	**…**	$\boldsymbol{j}$	**…**	$\boldsymbol{n}$
1	$Z_{1,1}$	…	$Z_{1,j}$	…	$Z_{1,n}$
…	…	…	…		
$\boldsymbol{i}$	$Z_{i,1}$	…	$Z_{i,j}$		
…	…				
$\boldsymbol{n}$	$Z_{n,1}$				

Pour obtenir les montants incrémentaux corrigés de l'inflation, l'opération suivante doit être réalisée :

$$Z'_{i,j} = Z_{i,j} * \prod_{k=i+j}^{n} (1 + I_k)$$

$$C'_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} Z'_{i,k}$$

Le triangle des règlements corrigés de l'inflation est alors obtenu. Puis, les $Z'_{i,j}$ sont cumulés, et le triangle des règlements cumulés corrigés est le suivant :

Survenance	**Année de développement**				
	1	**…**	$\boldsymbol{j}$	**…**	$\boldsymbol{n}$
1	$C'_{1,1}$	…	$C'_{1,j}$	…	$C'_{n,1}$
…	…	…	…	…	
$\boldsymbol{i}$	$C'_{i,1}$	…	$C'_{i,j}$		
…	…				
$\boldsymbol{n}$	$C'_{n,1}$				

Détermination du seuil des sinistres graves

La détermination du seuil doit être faite en premier lieu pour retraiter les données et disposer des triangles suivants :

- Triangles des règlements des sinistres en dessous du seuil pour modéliser la charge agrégée ;
- triangles de nombres de sinistres supérieurs au seuil pour modéliser la fréquence des graves.

La modélisation des sinistres graves s'effectuera avec une approche « fréquence-coût ». La fréquence sera modélisée par la projection à l'ultime du vecteur des nombres des sinistres graves, et, le coût des sinistres sera modélisé à partir d'un ajustement statistique sur les données historiques de l'assureur.

La méthode de détermination du seuil est la suivante :

1. choisir une fenêtre d'historique des sinistres à garder ;
2. corriger les règlements passés de l'inflation ;
3. calculer, à la date d'aujourd'hui, la charge de chaque sinistre en additionnant les règlements de chaque année corrigés de l'inflation et en ajoutant la provision de sinistre à payer estimée ;
4. tracer le *Mean excess plot* et les estimateurs du paramètre de forme de la loi de Pareto Généralisée ajustée sur les données ainsi que les intervalles de confiance ;
5. sélectionner le seuil à partir duquel la courbe des excès moyens empiriques est linéaire et autour duquel les estimations du paramètre de forme sont stables.

Une fois le seuil déterminé, on construit les triangles des règlements et des nombres des sinistres graves en agrégeant les sinistres supérieurs au seuil. On pourra alors en déduire les triangles des sinistres attritionnels en déduisant aux triangles complets les triangles des graves.

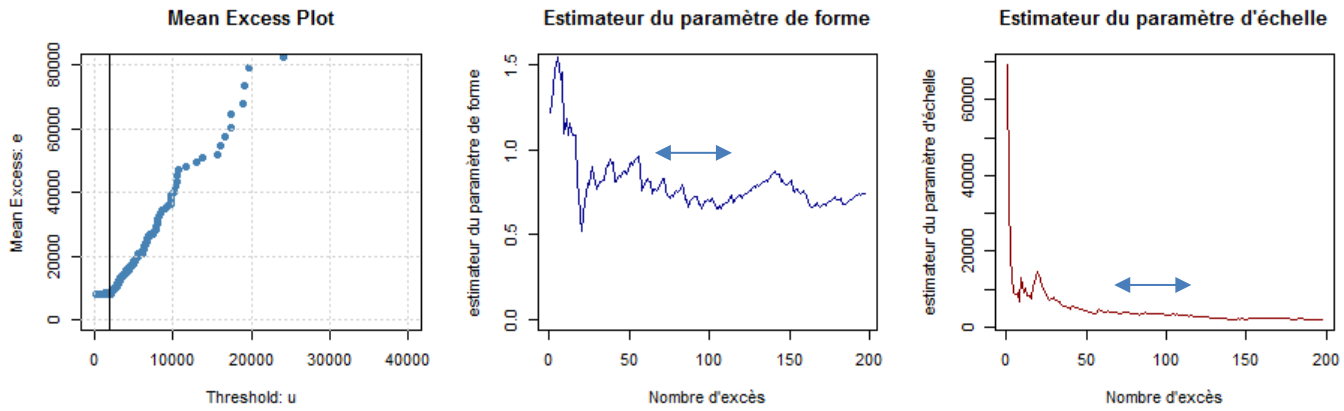


FIGURE 9: ILLUSTRATION METHODE DE CHOIX DU SEUIL

Méthode

- Projection des charges des sinistres en dessous du seuil à l'ultime
- Correction de l'exposition
- Ajustement d'une loi statistique au vecteur des charges ultimes/coûts moyens de sinistres
- Mesure de la qualité de l'ajustement

Les lois usuelles utilisées pour ajuster des montants de sinistre sont les suivantes :

- Loi normale

La loi normale, de paramètre $\mu \in R$ et $\sigma > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Les paramètres μ et σ^2 peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

avec :

$$\bar{N}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i \qquad\qquad \hat{\sigma}_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{N}_n)^2$$

- Loi Gamma

La loi Gamma, de paramètre de forme $\alpha > 0$ et de paramètre d'échelle $\beta > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, exp(-x)dx$

Les paramètres α et β peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}_n{}^2}{\hat{\sigma}_n{}^2} \qquad\qquad \hat{\beta} = \frac{\hat{\sigma}_n{}^2}{\bar{X}_n}$$

- Loi log-normale

La loi log-normale, de paramètre $\mu \in R$ et $\sigma > 0$ est définie par la densité suivante :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)$$

Les paramètres μ et σ^2 peuvent être estimés par la méthode des moments :

$$\hat{\mu} = ln(\overline{X}_n) - \frac{1}{2}\, ln\left(1 + \frac{\widehat{\sigma}_n{}^2}{\overline{X}_n{}^2}\right) \qquad \hat{\sigma}^2 = ln\left(1 + \frac{\widehat{\sigma}_n{}^2}{\overline{X}_n{}^2}\right)$$

Pour juger de la qualité de l'ajustement des données à la loi théorique, on va effectuer des tests d'adéquations de Kolmogorov Smirnov et sa variante pour la loi normale, le test de Lilliefors. L'utilisation du test de Kolmogorov-Smirnov est discutable car les paramètres sont spécifiés. L'avantage du test de Lilliefors est, du point de vue théorique, que les paramètres ne sont pas précisés. Ces tests se basent sur la comparaison entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique de la loi d'ajustement.

Modélisation de la fréquence des sinistres

La méthode pour modéliser la fréquence des sinistres graves est la suivante :

- Projection du nombre de sinistres au-dessus du seuil à l'ultime
- Correction de l'exposition
- Ajustement d'une loi statistique au vecteur de nombres ultimes de sinistres
- Mesure de la qualité de l'ajustement

Afin de modéliser la fréquence des sinistres, une loi discrète sera ajustée au vecteur des nombres des sinistres ultimes. L'ajustement sera effectué sur les deux lois discrètes usuelles, la loi Binomiale Négative et la loi de Poisson.

- Loi de Poisson $N \to P(\lambda) : \lambda > 0$

$$\mathbb{P}\,(\mathrm{N} = \mathrm{k}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Variance : $var(X) = \lambda$

Estimateur obtenu par la méthode des moments:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

La contrainte de l'égalité entre l'espérance et la variance n'est souvent pas observée sur les moments empiriques. C'est la raison pour laquelle, la distribution Binomiale Négative s'ajustera mieux aux données lorsque l'espérance empirique est inférieure à la variance empirique.

- Loi Binomiale Négative $N \rightarrow BN(r,p) : r > 0\ , p\ \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\ (\mathrm{N} = \mathrm{k}) = C_{r+k-1}^{r-1}\ (1-p)^k p^r$$

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}$

Variance : $var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

$$\hat{r} = \frac{\bar{N}_n{}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \bar{N}_n} \qquad\qquad \hat{p} = \frac{\bar{N}_n}{\hat{\sigma}_n{}^2}$$

Afin de mesurer la qualité d'ajustement de lois discrètes, une pratique courante est de procéder au test d'adéquation du khi-deux. Cependant, ce test ne fonctionne pas avec un nombre faible d'observations. Avec un historique de 11 années, pour mesurer la qualité de l'ajustement on va plutôt procéder par bootstrap pour obtenir des intervalles de confiance avec la méthode percentile.

<u>Bootstrap</u>

Cette technique consiste à remplacer l'échantillon $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ par B nouveaux échantillons $X^b = \{X_1{}^b, \dots, X_n{}^b\}$ pour b de 1 à B et dans la limite de $B = n^n$. Les nouveaux échantillons sont obtenus en effectuant des tirages aléatoires avec remise dans l'échantillon de départ X. On calcule ensuite, sur chacun des échantillons «bootstrapés» $\hat{\theta}^b$ l'estimateur empirique du paramètre d'intérêt θ. Le bootstrap perturbe de cette manière l'échantillon initial pour obtenir de nouveaux échantillons et donc des nouvelles estimations des paramètres.

En posant :

$$\hat{\mu}\left(\hat{\theta}^1, \dots, \hat{\theta}^B\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}^i \qquad\qquad \hat{\sigma}^2\left(\hat{\theta}^1, \dots, \hat{\theta}^B\right) = \frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}^i - \hat{\mu}\right)^2$$

On obtient un intervalle de confiance asymptotique de la forme :

$$IC_\alpha = [\ \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{B}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{B}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ]$$

Où $\Phi^{-1}(\alpha)$ est le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite.

Une amélioration de cette méthode permet d'affiner les résultats, la méthode percentile. Il s'agit de classer les B estimations obtenues sur les nouveaux échantillons. Soit $\left(\hat{\theta}_{1,B}, \dots\ , \hat{\theta}_{B,B}\right)$ le vecteur des estimations ponctuelles classées, l'intervalle de confiance de niveau α est obtenu par :

$$IC_\alpha = [\ \hat{\theta}_{\left\lfloor\frac{\alpha}{2}\right\rfloor.B,B}\ ;\ \hat{\theta}_{\left\lfloor 1-\frac{\alpha}{2}\right\rfloor.B,B}\ ]$$

Exemple :

On dispose d'un vecteur $X = \{11;\ 8;\ 10;\ 4;\ 7;\ 6;\ 9;\ 14;\ 11;\ 10;\ 7;\ 11;\ 13;\ 6;\ 11\}$ de 15 réalisations i.i.d de loi de Poisson de paramètre 10 simulé à partir du logiciel R.

Etant donné cet échantillon, il faut estimer le paramètre supposé inconnu. L'estimation du paramètre donne la valeur $\hat{\lambda} = 9{,}2$. Pour mesurer la qualité de cet ajustement, nous allons construire un intervalle de confiance.

Il faut d'abord constituer 10000 pseudos-échantillons, puis calculer les estimations du paramètre sur chacun d'eux. La moyenne et la variance empiriques sont ensuite calculées. On obtient $\hat{\mu}\left(\hat{\lambda}^1, \dots, \hat{\lambda}^{10000}\right) = 9{,}189$ et $\hat{\sigma}^2\left(\hat{\lambda}^1, \dots, \hat{\lambda}^{10000}\right) = 0{,}493$

$$IC_{0,05} = \left[9{,}189 - \frac{\sqrt{0{,}493}}{\sqrt{10000}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) ;\ 9{,}189 + \frac{\sqrt{0{,}493}}{\sqrt{10000}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) \right] = [9{,}175\ ;\ 9{,}203]$$

Par la méthode percentile, on obtient l'intervalle de confiance suivant :

$$IC_{0,05} = \left[\hat{\lambda}_{\left\lfloor \frac{0{,}05}{2} \right\rfloor .10000,10000} ;\ \hat{\lambda}_{\left\lfloor 1 - \frac{0{,}05}{2} \right\rfloor .10000,10000} \right] = \left[\hat{\lambda}_{250,10000} ;\ \hat{\lambda}_{9750,10000} \right] = [7{,}8\ ;\ 10{,}53\ ]$$

Deux approches permettent d'estimer la loi de sévérité des sinistres graves. Si le tracé du graphique des excès moyens montre un comportement de type Pareto, cela signifie que la loi a une queue lourde. Il serait alors judicieux de modéliser la sévérité par une loi de Pareto Généralisée au-dessus du seuil à déterminer, et qui correspond au paramètre de position de la loi. Sinon, on pourra modéliser la sévérité des sinistres graves avec une loi tronquée ne prenant ses valeurs uniquement au-dessus du seuil de collecte des données.

Loi à comportement Pareto

Si le tracé du graphique des excès moyens montre un comportement de type Pareto, c'est-à-dire que la courbe est linéaire à partir d'un seuil, il faudra alors ajuster une loi GPD aux excès selon la méthode POT. Les estimateurs MLE et GPWM sont calculés pour toutes les valeurs supérieures au seuil de linéarité. Une pratique usuelle consiste à prendre comme seuil des graves le seuil tel que les paramètres de forme de la loi Pareto Généralisée soit stables «autour» de cette valeur.

On peut étudier la sensibilité de l'ajustement suite à des modifications faites sur les données historiques. En particulier, nous verrons sur l'exemple l'impact de la suppression des plus gros sinistres sur quelques quantiles.

Modélisation grâce à des lois tronquées

Les données disponibles ont un seuil de collecte. Pour ne pas alourdir les fichiers, les sinistres graves sont enregistrés à partir d'un certain seuil. La mise en place de ce seuil permet de disposer de données historiques sur les sinistres considérés comme graves par les équipes dirigeantes. Ce seuil ne correspond pas au seuil des sinistres graves considéré comme le paramètre de position de la loi GPD.

Les données sont dites « tronquées » à cause de ce seuil : elles ne prennent leurs valeurs qu'à partir de celui-ci. Si un sinistre a un coût inférieur, il est considéré comme sinistre attritionnel et son coût sera modélisé de manière agrégée. Néanmoins, la modélisation des sinistres au-dessus du seuil étant faite par modélisation individuelle, il faudra nécessairement que la loi d'ajustement soit tronquée à gauche.

Définition - loi tronquée à gauche

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. La loi tronquée sur $[u, \infty]$ est définie par la fonction de répartition :

$$F_{X,u}(x) = \mathbb{P}(X \leq x | X > u) = F_u(x-u) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq u \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(u)}{1 - F_X(u)} & si\ x > u \end{cases}$$

En dérivant cette expression, la densité d'une loi tronquée est:

$$f_{X,u}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq u \\ \dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(u)} & si\ x > u \end{cases}$$

Exemple de loi tronquée – la loi Log-Normale

X suit une loi log-normale de paramètres (μ, σ) si la variable aléatoire $Y = ln(X)$ suit une loi normale de paramètres (μ, σ) .

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(e^Y \leq x) = \mathbb{P}\big(Y \leq ln(x)\big) = F_Y\big(ln(x)\big)$$

Ainsi, la fonction de répartition de la loi log-normale de paramètres (μ, σ) tronquée à gauche en u est[13] :

$$F_{X,u}(x) = \frac{F_Y\big(ln(x)\big) - F_Y\big(ln(u)\big)}{1 - F_Y\big(ln(u)\big)} = \frac{\varphi\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \varphi\left(\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)}$$

où $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, la densité de la loi normale centrée réduite.

Le graphique ci-dessous illustre la notion de loi tronquée par un exemple simple. En rouge, les courbes correspondent à la densité et à la fonction de répartition d'une loi Log-Normale de paramètres $(\mu, \sigma) = (0,1)$. En bleu, les courbes déformées correspondent à une loi Log-Normale de mêmes paramètres, mais tronquée à gauche avec un seuil de 1.

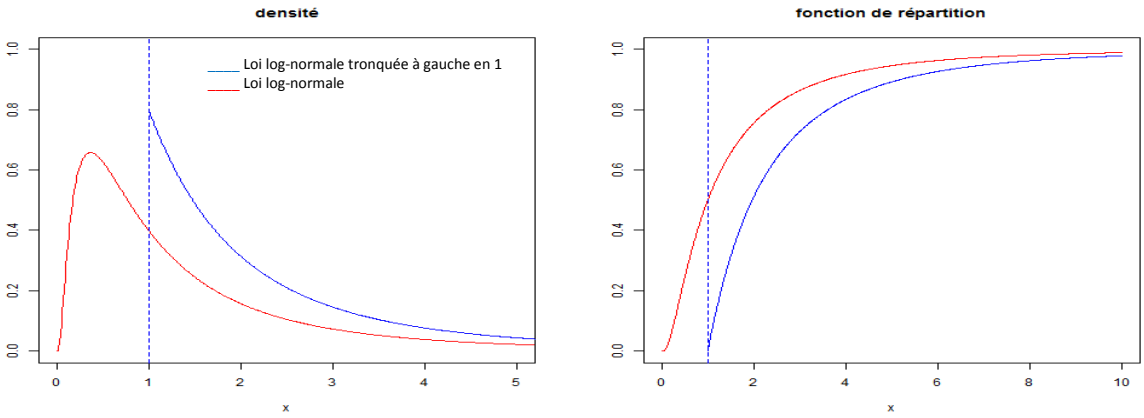


FIGURE 10: ILLUSTRATION DES LOIS TRONQUEES EXEMPLE DE LA LOI LOG-NORMALE

Estimation des paramètres

Il n'existe pas de formule fermée pour calculer les estimateurs des paramètres par la méthode des moments. Néanmoins, l'estimation par cette même méthode est possible numériquement avec les moments théoriques de la distribution Log-Normale tronquée à gauche donnés en annexe 5. La méthode d'estimation par maximum de vraisemblance pourrait, par ailleurs, être utilisée.

[13] Le package R *truncdist* permet de définir les densités, les fonctions de répartition et les quantiles des lois tronquées à partir des lois usuelles en spécifiant les limites gauches et/ou droite du domaine de définition.

Afin de calibrer le modèle pour la branche responsabilité civile automobile, nous allons procéder en quatre étapes :

1) Mise en As-If des triangles et des sinistres individuels graves
2) Détermination du seuil des graves et modélisation de la sévérité des graves
3) Modélisation de la fréquence des sinistres graves
4) Modélisation de la charge agrégée des sinistres attritionnels

MISE EN AS-IF DES TRIANGLES ET DES SINISTRES INDIVIDUELS GRAVES

- Construction des indices d'inflation

Etant donné que l'inflation passée n'est pas la même pour la responsabilité civile matérielle ou les montants couvrent les différentes réparations et la responsabilité civile corporelle ou les montants servent à dédommager les victimes, il faut séparer les données pour prendre en compte séparément l'inflation propre à chaque type de sinistre. Ainsi, deux taux d'inflation annuels seront utilisés en fonction de la garantie en question.

Construction d'un indice pour la branche responsabilité civile automobile corporelle

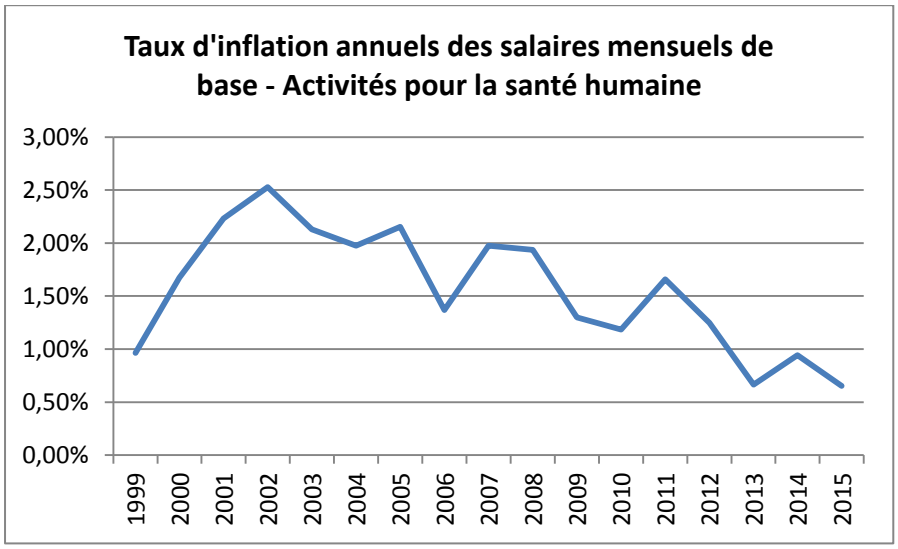


FIGURE 11: TAUX D'INFLATION ANNUELS DES SALAIRES MENSUELS DE BASE - ACTIVITES POUR LA SANTE HUMAINE (SOURCE INSEE)

$$I_k = 2{,}18 \ * \ taux\ d'inflation\ annuelle\ des\ salaires\ mensuels\ pour\ la\ santé\ humaine\ de\ l'année\ k$$[14]

[14] Source : Le marché de l'assurance automobile en 2011 (FFSA, GEMA).

Construction d'un indice pour la branche responsabilité civile automobile matérielle

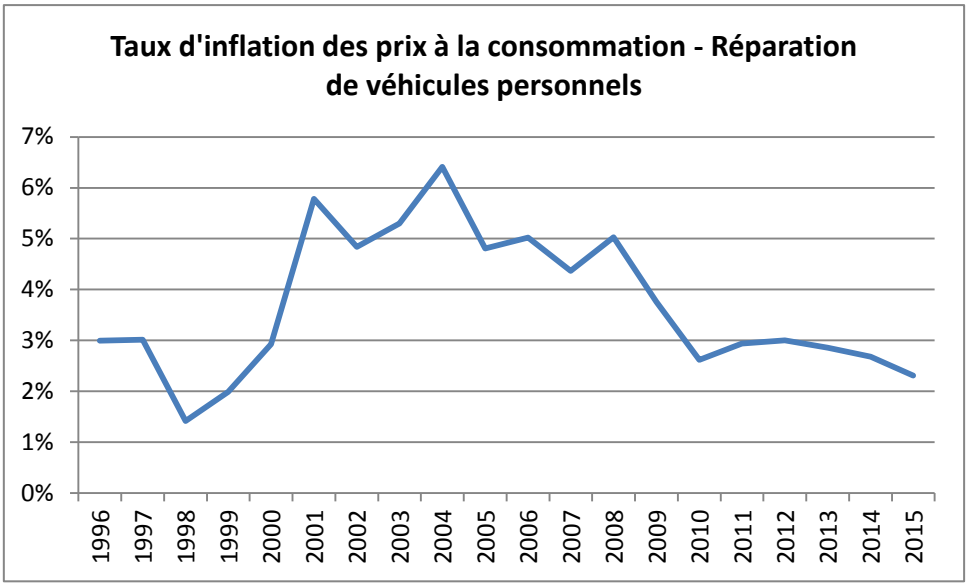


FIGURE 12: TAUX D'INFLATION DES PRIX A LA CONSOMMATION - REPARATION DE VEHICULES PERSONNELS (SOURCE INSEE)

$$I_k = 0{,}73 \ * \ taux\ d'inflation\ de\ la\ réparation\ de\ véhicules\ personnels\ de\ l'année\ k$$

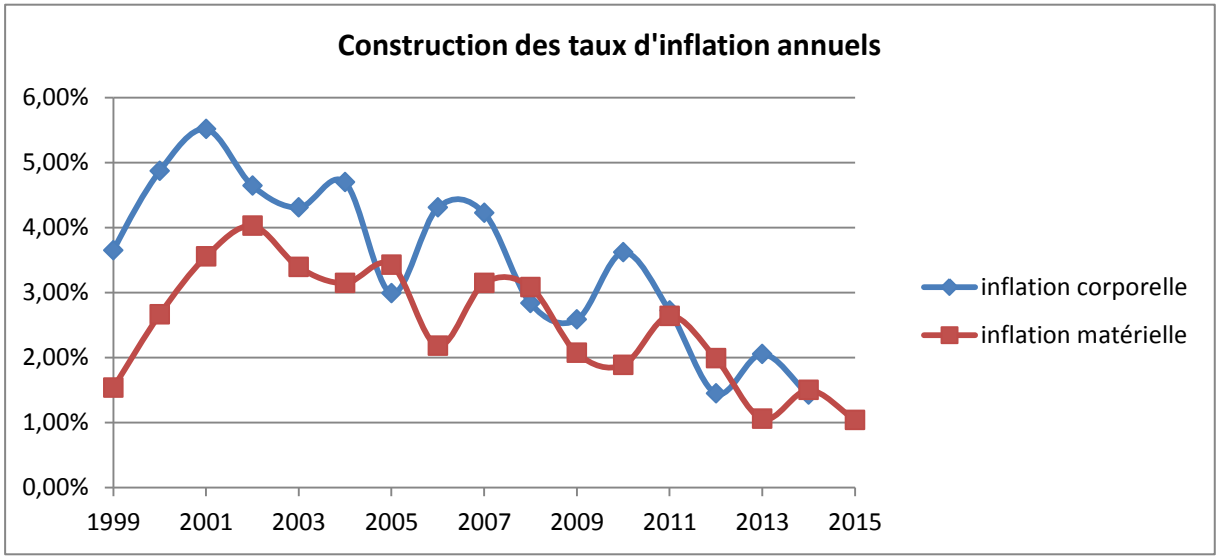


FIGURE 13: TAUX D'INFLATION POUR LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

La construction de ces taux d'inflation permet de corriger les triangles des règlements historiques et les montants individuels des sinistres au-dessus du seuil de collecte des graves de l'inflation passée. Le graphique suivant correspond au tracé des montants individuels et corrigés de l'inflation passée des sinistres de la branche responsabilité civile automobile des années 1998 à 2013.

Au total, 480 sinistres sont supérieurs à 150.000€ et trois d'entre eux sont supérieurs à 10 millions d'euros.

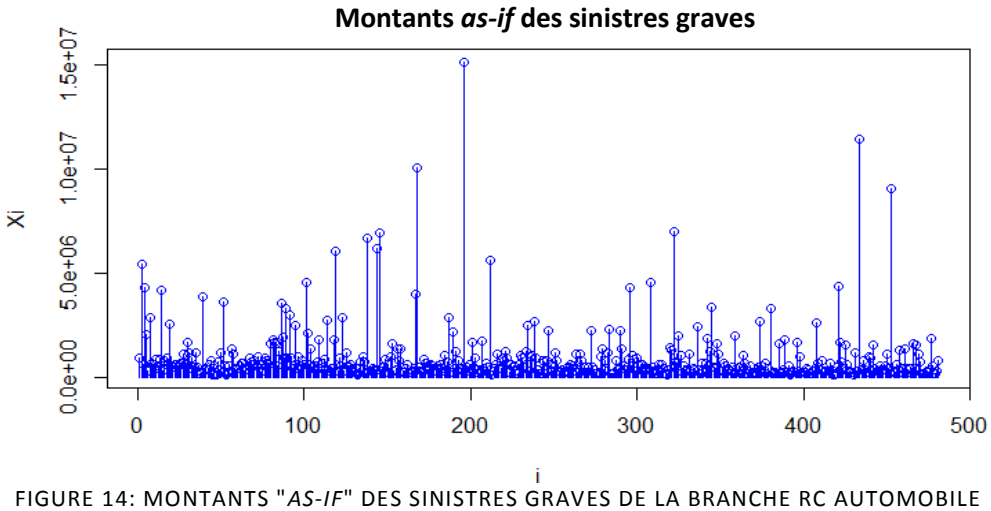


FIGURE 14: MONTANTS "*AS-IF*" DES SINISTRES GRAVES DE LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

DETERMINATION DU SEUIL DES GRAVES ET MODELISATION DE LA SEVERITE DES GRAVES

La deuxième étape consiste à déterminer le seuil des sinistres graves. Etant donné que chaque portefeuille est unique et que le modèle est sensible au seuil retenu, ce processus ne doit pas être automatisé.

Il faut d'abord tracer la fonction des excès moyens empiriques des sinistres corrigés afin de vérifier le comportement linéaire de ces points. Les excès sont calculés à partir du seuil de collecte de 150.000€. Le seuil déterminé sera nécessairement supérieur à ce seuil de collecte.

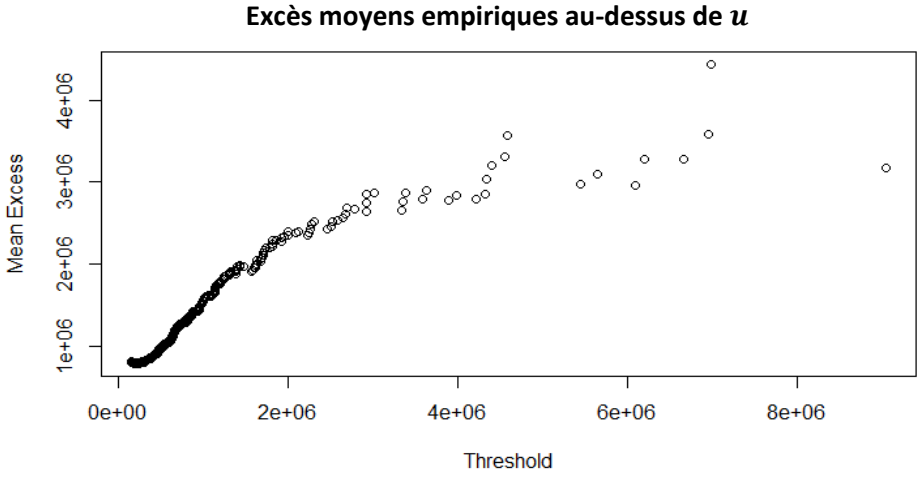


FIGURE 15: GRAPHIQUE DES EXCES MOYENS EMPIRIQUES DE LA BRANCHE RESPONSABILITE CIVILE AUTOMOBILE

Le tracé des excès moyens empiriques en fonction du seuil u a une tendance linéaire ce qui signifie que la queue de distribution des montants est lourde. Ainsi, en identifiant une région où les estimateurs du paramètre de forme de la loi de Pareto Généralisée sont stables, on modélisera la sévérité par cette même loi.

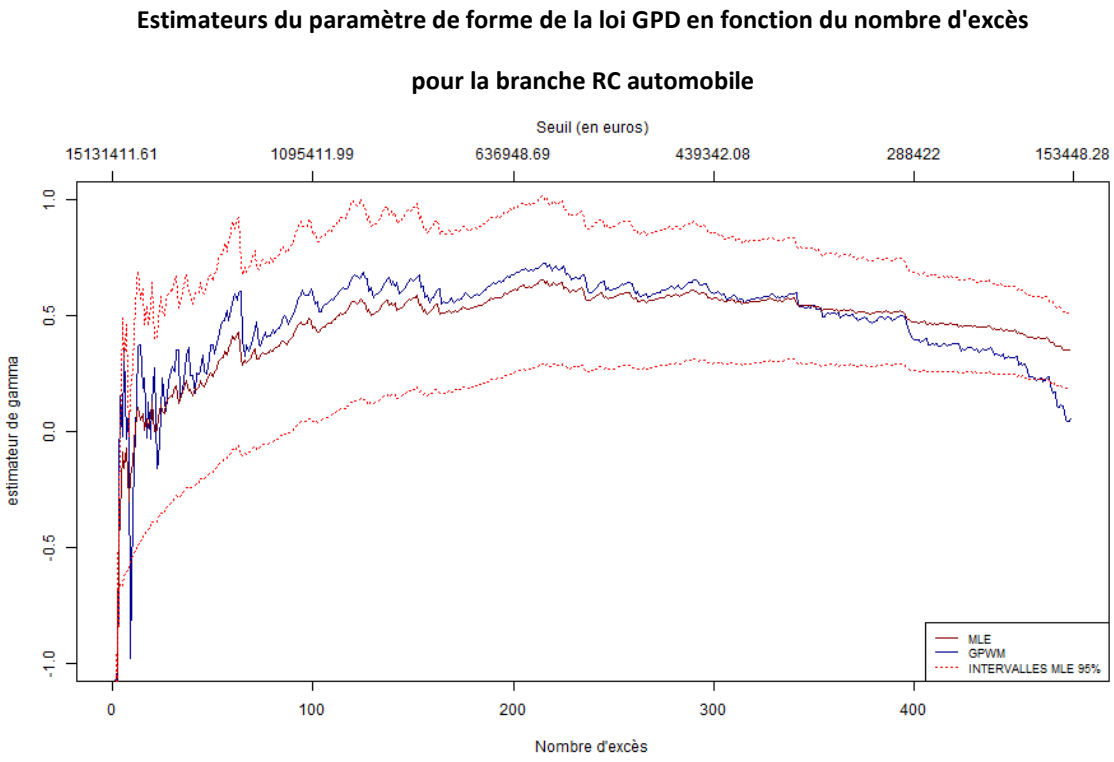


FIGURE 16: ESTIMATEURS DU PARAMETRE DE FORME DE LA LOI GPD EN FONCTION DU NOMBRE D'EXCES POUR LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

Il faut faire un compromis sur la valeur du seuil, si le seuil est trop faible, les hypothèses asymptotiques ne sont pas valides, s'il est trop élevé, il n'y a pas assez de valeurs pour une estimation fiable.

Les deux estimateurs sont proches à l'excès 310 et stables autour de cette valeur. Cet excès correspond à un seuil de 372.000 €. Le tableau suivant regroupe les résultats pour ce seuil. Néanmoins, il aurait été préférable, selon le théorème de Pickands, de prendre un seuil supérieur, ce qui n'est pas possible ici, au vu de l'instabilité des estimateurs.

Nombre d'excès	Seuil	Estimateur γ MLE	Estimateur γ GPWM	Estimateur σ GPWM
310	372.000	0,542	0,537	428227,7

La qualité de l'ajustement statistique est mesurée qualitativement avec le graphique suivant :

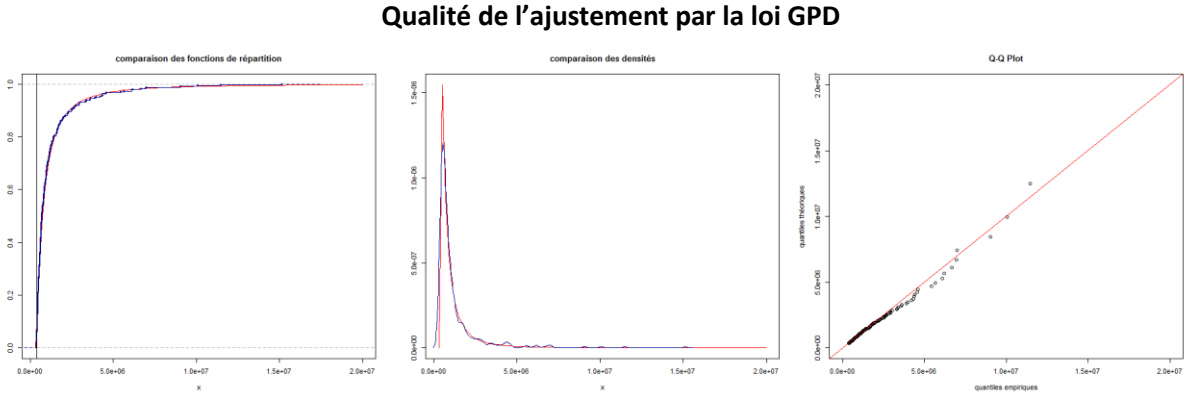


FIGURE 17: QUALITE DE L'AJUSTEMENT PAR LA GPD

Nous pouvons comparer la qualité de l'ajustement en fonction du nombre d'excès gardés et donc du seuil choisi.

Le premier graphique correspond à 100 excès gardés, ce qui correspond à un seuil d'environ 1,1M, le deuxième, à 50 excès et un seuil de 1,8M. Le troisième correspond à 25 excès et à un seuil d'environ 3M. Un seuil élevé entraine un nombre d'excès réduit mais un meilleur ajustement des extrêmes. Avec un seuil moins élevé, l'ajustement des extrêmes est moins bon mais s'applique sur un nombre de données plus important.

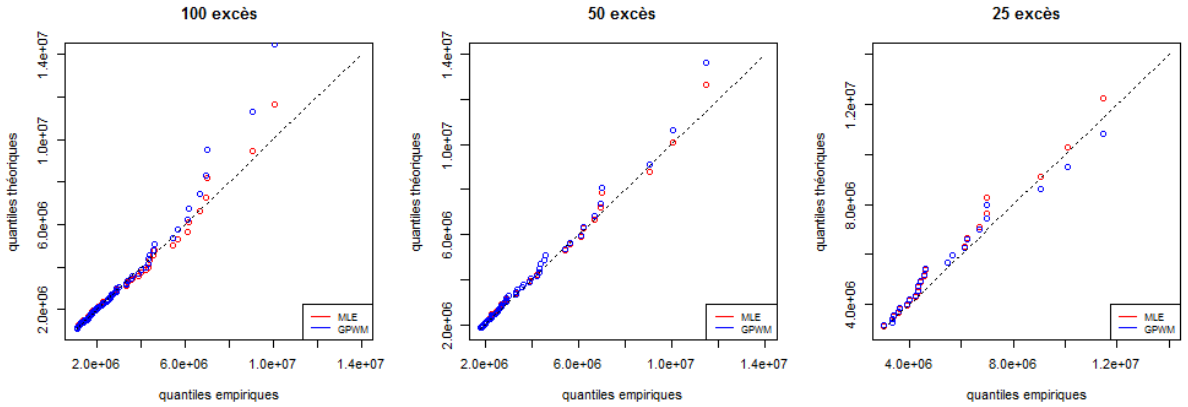


FIGURE 18: Q-Q PLOT EN FONCTION DU NOMBRE D'EXCES

Le seuil de 372.000 sera gardé dans la suite de l'étude en raison de la stabilité des paramètres autour de cette région.

Ensuite, nous allons étudier la sensibilité de la loi GPD estimée en fonction de modifications apportées sur les données. Trois modifications seront testées :

- suppression du plus gros sinistre ;
- suppression des 5 plus gros sinistres ;
- suppression des 10 plus gros sinistres.

Pour chacune de ces expériences, les paramètres sont estimés par les méthodes du maximum de vraisemblance et des moments pondérés généralisés pour un seuil fixe de 372.000€. Les quantiles 95%, 99%, 99.5% des distributions théoriques sont ensuite comparés.

		Maximum de vraisemblance					Moments pondérés généralisés				
Nombre de suppressions	Seuil	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	Q-95	Q-99	Q-99,5	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	Q-95	Q-99	Q-99,5
0	**372000**	**0,542**	**426190**	**3,57 M**	**9,13 M**	**13,5 M**	**0,537**	**428227,7**	**3,56 M**	**9,03 M**	**13,29 M**
1	372000	0,515	427068,4	3,42 M	8,43 M	12,24 M	0,515	429364,9	3,44 M	8,47 M	12,30 M
5	372000	0,409	437194,7	2,94 M	6,33 M	8,64 M	0,430	432329,8	3,01 M	6,65 M	9,18 M
10	372000	0,336	442096,8	2,66 M	5,24 M	6,86 M	0,370	432958,5	2,75 M	5,63 M	7,51 M

TABLEAU 1 : SENSIBILITE DES ESTIMATIONS SUITE A DES SUPPRESSIONS DE SINISTRES

Au vu de ces résultats, deux remarques peuvent être formulées:

- l'estimation des paramètres par les deux méthodes sont proches. A priori, il n'y pas de règle de prédominance d'un estimateur par rapport à l'autre ;

- la suppression des plus gros sinistres entraine une baisse du paramètre γ et donc de la queue de la distribution. En enlevant les 10 plus gros sinistres, le quantile 99,5% passe de 13,48M€ à 6,86M€ alors que le quantile 95% varie d'environ 1M€. L'ajustement est donc sensible aux très grands montants. Il faut noter que les écarts se creusent beaucoup plus si l'on regarde des quantiles plus grands.

Une deuxième modélisation de la sévérité par une loi Log-Normale tronquée à gauche en 150.000 (seuil de collecte) peut être réalisée. Néanmoins, le caractère de queue lourde de la distribution pour la branche responsabilité civile automobile est mal pris en compte.

MODELISATION DE LA FREQUENCE DES SINISTRES GRAVES

On peut alors construire les triangles des sinistres attritionnels et des sinistres graves grâce à la détermination de ce seuil. Afin d'obtenir les nombres ultimes de sinistres graves, il faut d'abord établir le triangle des nombres de sinistres au-dessus du seuil.

Nombre de graves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
3	7	7	7	7	7	8	8	8	8		
4	12	13	13	13	14	14	14	14			
5	8	9	9	9	9	9	9				
6	13	13	13	13	13	13					
7	11	12	12	12	12						
8	12	14	15	15							
9	13	14	14								
10	14	15									
11	15										

Les sinistres graves supérieurs au seuil sont connus rapidement. La méthode de Chain-Ladder classique est ensuite utilisée afin d'obtenir le vecteur des nombres ultimes des sinistres au-delà de 372.000€. On obtient le vecteur suivant :

$$X = \{13;\ 9;\ 8;\ 14;\ 9;\ 13;\ 12;\ 15;\ 14;\ 15;\ 16\}$$

La moyenne de cet échantillon est de 12,56 et sa variance est de 7,47.

En supposant que l'exposition est constante, c'est-à-dire que le portefeuille n'a pas évolué pendant cette période, la fréquence des sinistres graves sera modélisée par une loi de Poisson ou une loi Binomiale Négative.

Les intervalles de confiance des paramètres seront calculés par bootstrap avec la méthode percentile. Le niveau de confiance a été fixé à 95% et le nombre d'itérations du bootstrap à 10.000.

Pour l'ajustement à une loi de Poisson, le paramètre estimé vaut $\hat{\lambda} = 12{,}56$ et l'intervalle de confiance obtenue est $IC_{0,05} = [10{,}91; 14]$. Les graphiques ci-dessous permettent de comparer les distributions empirique et théorique.

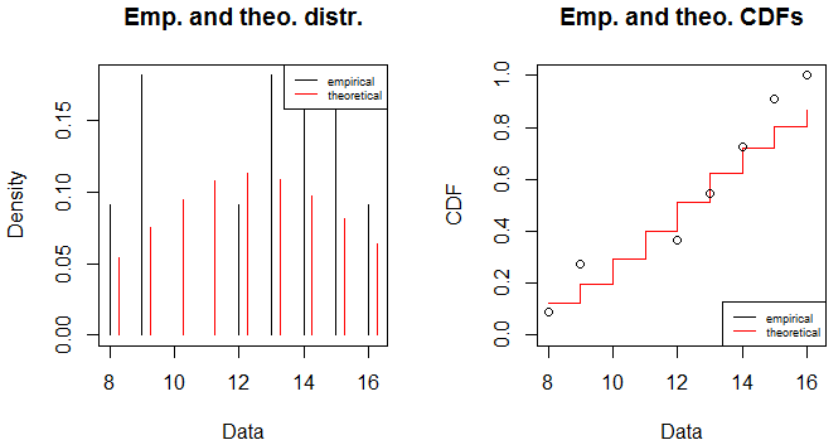


FIGURE 19 : MESURE DE L'AJUSTEMENT DE LA FREQUENCE DES SINISTRES GRAVES AVEC UNE LOI DE POISSON

L'ajustement à une loi Binomiale Négative n'est pas possible ici car la variance empirique est inférieure à la moyenne.

Nous choisissons alors de modéliser la fréquence par une loi de Poisson de paramètre 12,56.

La modélisation de la sinistralité grave peut alors être résumée dans le tableau suivant :

Fréquence		**Sévérité**	
Loi	Poisson	Loi	Pareto généralisée
Paramètre	$\lambda = 12{,}56$	Paramètres	$\gamma = 0{,}537; \sigma = 428227{,}7$
		Seuil	372.000

TABLEAU 2 : MODELISATION DE LA SINISTRALITE GRAVE

MODELISATION DE LA CHARGE AGREGEE DES SINISTRES ATTRITIONNELS

Il existe des méthodes approximatives permettant de modéliser la charge agrégée des sinistres attritionnels de telle manière à pouvoir générer des réalisations de cette charge sans avoir besoin de simuler les sinistres individuels. Or, dans un cas où les seules données disponibles sont les triangles des règlements et des charges des sinistres attritionnels, on ne peut pas calibrer ces modèles[15].

Ainsi, la modélisation se fera soit par une approche agrégée à partir des triangles de charge nette des sinistres en dessous du seuil, soit par une approche fréquence-coût moyen à partir des triangles des nombres de sinistres sous le seuil et du triangle des coûts moyens. Ce dernier triangle est obtenu en divisant le triangle des règlements par le triangle des nombres de sinistres.

La modélisation par les charges agrégées nécessite d'avoir un triangle des charges des sinistres en dessous du seuil. Pour le construire, on retraite au triangle des charges totales de la sinistralité de la

[15] Voir par exemple la méthode approximative de Wilson-Hilferty qui permet d'obtenir des réalisations de la charge agrégée par un algorithme à partir des trois premiers moments de N, le nombre de sinistres et de X, le coût individuel des sinistres.

branche responsabilité civile automobile les charges des sinistres dont le montant est supérieur à 372.000€. Les différents triangles sont donnés en annexe 2. On en déduit les deux triangles suivants concernant la sinistralité attritionnelle.

Règlements attritionnels (M€)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	16,82	31,68	35,20	36,76	37,56	38,78	39,18	39,28	39,37	39,43	39,56
2	17,75	31,88	34,78	36,39	37,12	37,54	37,82	38,22	38,26	38,31	
3	17,48	30,84	34,61	36,35	37,27	37,80	38,15	38,18	38,27		
4	19,07	33,26	37,05	38,35	39,09	39,64	39,93	40,26			
5	21,42	34,49	38,26	40,07	41,15	41,37	41,90				
6	18,81	31,34	35,05	36,65	37,56	38,37					
7	18,76	31,37	35,17	37,13	37,73						
8	19,83	33,90	38,13	39,85							
9	19,76	33,30	37,36								
10	20,72	34,83									
11	21,63										

Nombres attritionnels	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	23 036	26 263	26 380	26 412	26 439	26 447	26 449	26 454	26 455	26 455	26 455
2	23 830	27 349	27 529	27 558	27 577	27 582	27 585	27 589	27 590	27 590	
3	24 667	27 761	28 000	28 025	28 042	28 053	28 059	28 059	28 059		
4	27 032	31 385	31 714	31 752	31 763	31 767	31 768	31 769			
5	27 729	31 453	31 675	31 702	31 710	31 720	31 720				
6	25 861	29 166	29 354	29 399	29 412	29 412					
7	24 753	28 290	28 493	28 515	28 525						
8	27 391	30 952	31 154	31 186							
9	27 497	30 264	30 438								
10	28 919	31 945									
11	28 664										

En appliquant la méthode de Chain-Ladder au triangle des règlements moyens de la sinistralité attritionnelle, on obtient le vecteur suivant qui sera ajusté à quelques lois continues :

$$X = \{1495{,}53;\ 1393{,}24;\ 1370{,}36;\ 1275{,}72;\ 1337{,}03;\ 1332{,}89;\ 1373{,}61;\ 1355{,}31;\ 1360{,}63;\ 1337{,}87;\ 1408{,}18\}$$

Voici les estimations des paramètres pour les ajustements aux trois lois continues retenues et les tests statistiques au seuil de 5% :

Loi ajustée	**Normale**	**Log-Normale**	**Gamma**
Paramètres	$\hat{\mu} = 1367{,}31\ \hat{\sigma} = 55{,}55$	$\hat{\mu} = 7{,}22\ \hat{\sigma} = 0{,}04$	$\hat{\alpha} = 676{,}97\ \hat{\beta} = 0{,}50$
Test d'adéquation	Lilliefors P-valeur 0,39	KS test P-valeur 0,85	KS test P-valeur 0,83

TABLEAU 3: AJUSTEMENT DE LA CHARGE AGREGEE SUR DES LOIS CONTINUES

De même, en appliquant la méthode de Chain-Ladder au triangle des nombres de la sinistralité attritionnelle, on obtient le vecteur suivant qui sera ajusté à une loi de Poisson et une loi Binomiale Négative : $X = \{26455;\ 27590;\ 28059;\ 31769;\ 31720;\ 29412;\ 28534;\ 31212;\ 30496;\ 32231;\ 32705\}$

Loi ajustée	**Poisson**	**Binomiale Négative**
Paramètres	$\hat{\lambda} = 30016{,}64$	$\hat{r} = 202{,}78\ \hat{p} = 6{,}71.10^{-3}$

TABLEAU 4 : AJUSTEMENT DE LA FREQUENCE DES ATTRITIONNELS A DES LOIS DISCRETES

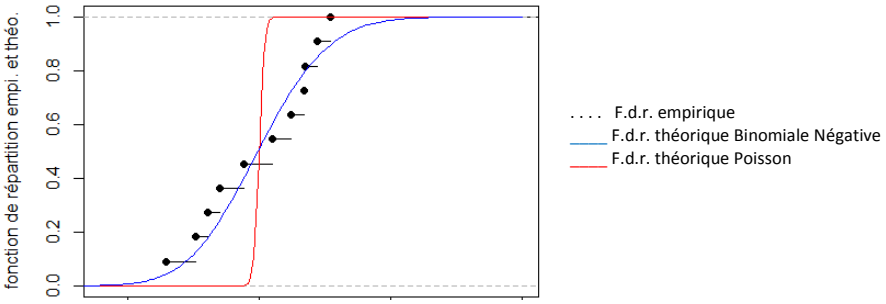


FIGURE 20: FONCTIONS DE REPARTITION EMPIRIQUE ET THEORIQUES, AJUSTEMENT DES NOMBRES DE SINISTRES ATTRITIONNELS

Ce graphique montre que la distribution Binomiale Négative est plus adaptée à la fréquence des sinistres. C'est donc cette loi qui sera retenue dans la modélisation.

La modélisation de la sinistralité attritionnelle peut alors être résumée dans le tableau suivant :

Fréquence		**Coût Moyen**	
Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètres	$r = 202{,}78$ $p = 6{,}71.10^{-3}$	Paramètres	$\mu = 1367{,}31$ $\sigma = 55{,}55$

TABLEAU 5 :MODELISATION DE LA SINISTRALITE ATTRITIONNELLE

Le calibrage des autres branches d'assurance est donné dans les annexes 3 et 4.

Risque de modèle

La modélisation de la sinistralité à partir des données historiques entraine un risque de modèle. D'abord, en raison des lois de probabilités retenues. Ce n'est pas parce qu'une loi s'ajuste bien aux données qu'elle modélise parfaitement le comportement de celles-ci. Ensuite, les estimations des paramètres dépendent fortement des données disponibles. On ne peut pas dire que le paramètre de la loi est égal à l'estimation de ce paramètre. Ces paramètres pourraient même être considérés comme des variables aléatoires. Enfin, le choix de la méthode d'estimation et du seuil des sinistres graves impacte la modélisation. Une vigilance s'impose alors quant à l'utilisation de ces modèles[16].

[16] Cf. les deux publications de BOROWICZ J.M., NORMAN J.P. [2006] l'une traite de l'incertitude liée à l'estimation des paramètres pour la sinistralité grave et l'autre l'incertitude liée à la structure de dépendance - copule normale par exemple.

3. OUTIL DE SIMULATION

Dans le cadre du calcul de la charge totale, la méthode de Monte-Carlo consiste à simuler un grand nombre de scénarios à partir des lois de fréquence et de coût individuel des sinistres.

La simulation d'un scénario consiste à simuler, d'une part, la variable aléatoire de la charge de sinistralité attritionnelle, et d'autre part, la variable aléatoire de fréquence des sinistres graves avec la loi qui a été retenue. Le montant des coûts individuels sera simulé de façon indépendante un nombre de fois égal à la fréquence simulée auparavant. En supposant l'indépendance entre la sinistralité attritionnelle et la sinistralité grave (hypothèse qui sera discutée plus tard), la somme des coûts individuels des sinistres graves et de la charge de sinistres attritionnel représente un point de la distribution de la charge de sinistralité totale de la branche.
En réitérant cette opération un grand nombre de fois, la distribution de la charge de sinistralité totale de la branche est obtenue.

Différentes valeurs peuvent alors être calculées sur cette distribution comme la moyenne et les quantiles empiriques.

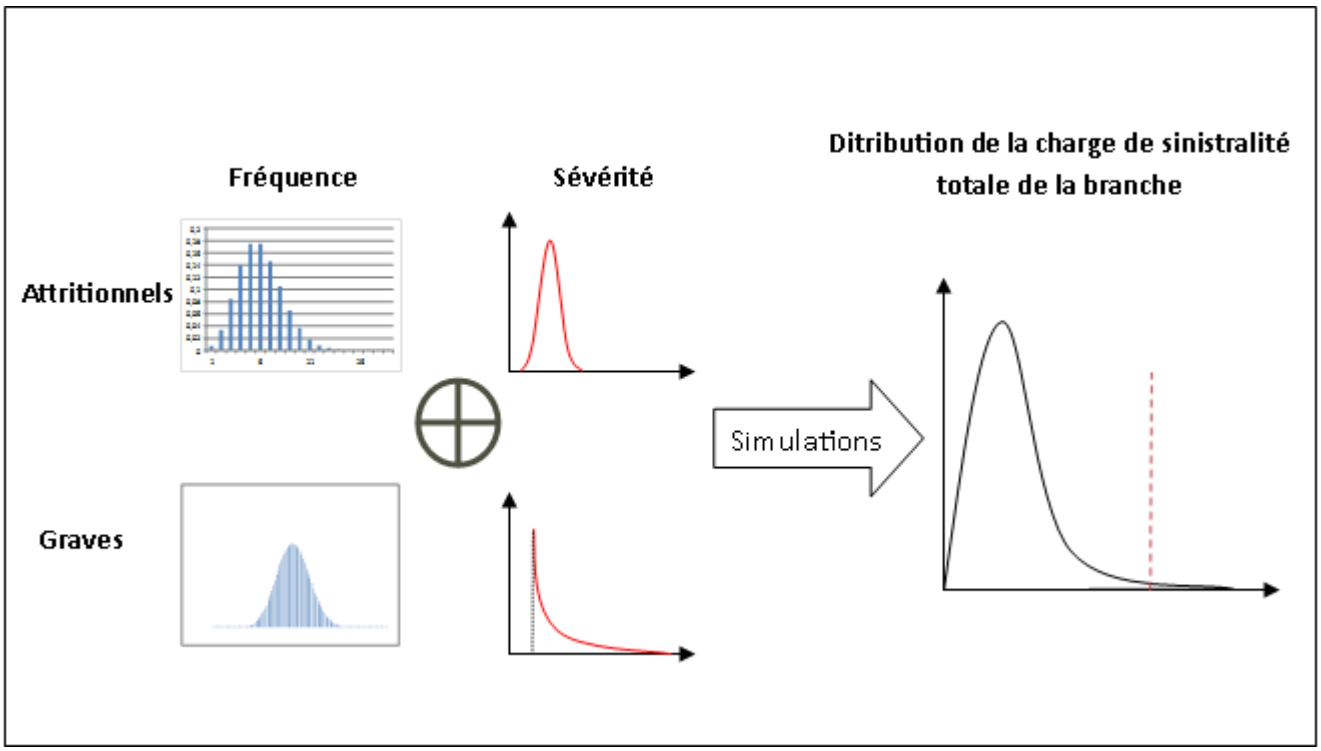


FIGURE 21: ILLUSTRATION SIMULATIONS MONTE CARLO

3.1 Simulation de variables aléatoire GPD par inversion de la fonction de répartition

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ et soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F dont l'inverse généralisée est défini par :

$$F^{-1}(u) = inf\{x,\ F(x) \geq u\}$$

On a alors :

- La loi de $F^{-1}\ (U)$ est la loi de X ;
- Inversement, si F est continue, la loi de $F(X)$ est une loi uniforme sur (0,1).

Application à la loi de Pareto généralisée $G_{\gamma,\sigma,T}$:

La loi de ${G_{\gamma,\sigma,T}}^{-1}\ (U)$ est une loi de Pareto généralisée GPD (γ, σ, T).

Inversion de $G_{\gamma,\sigma,T}$:

$$G_{\gamma,\sigma,T}\ (x) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma * (x - T)}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

$$(-(G_{\gamma,\sigma,T}\ (x) - 1))^{-\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma * (x - T)}{\sigma}\right)$$

$$T + \frac{\sigma}{\gamma} * [(-\big(G_{\gamma,\sigma,T}\ (x) - 1\big))^{-\gamma} - 1] = x$$

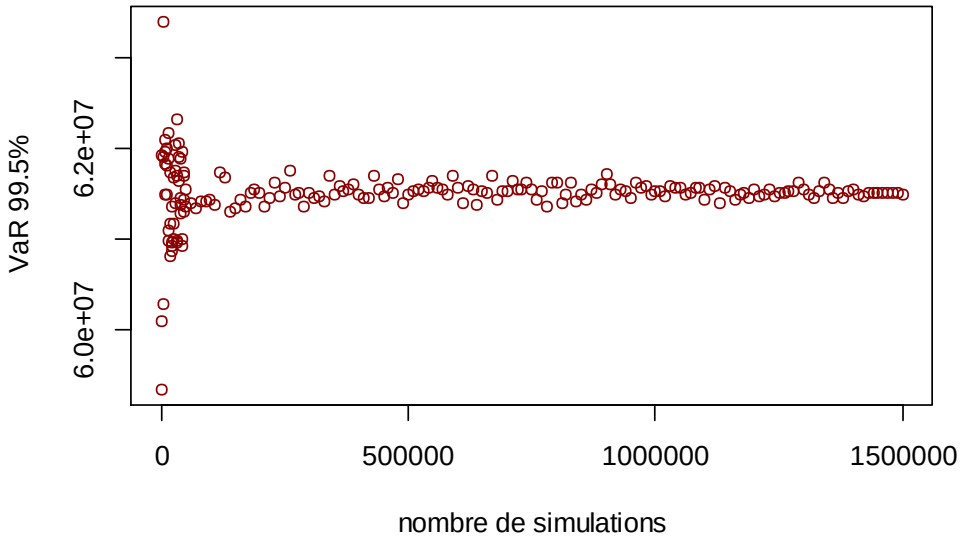
On a alors $X = \ {G_{\gamma,\sigma,T}}^{-1}\ (U) = \ T + \frac{\sigma}{\gamma} * [(-(U - 1))^{-\gamma} - 1] = T + \frac{\sigma}{\gamma} * [U^{-\gamma} - 1]$ est de loi $G_{\gamma,\sigma,T}$

Cela signifie que pour simuler la réalisation d'une variable de loi de Pareto Généralisée de paramètres (γ, σ) et de seuil T, il faut d'abord simuler la réalisation u d'une variable uniforme sur $(0,1)$, puis appliquer la transformation $T + \frac{\sigma}{\gamma} * [u^{-\gamma} - 1]$.

3.2 Nombre de simulations nécessaires

Lorsque des valeurs sont estimées par des approches simulatoires, il est important de vérifier que les quantités en question convergent avec le nombre de simulations. En particulier, la convergence du quantile 99.5% doit être vérifiée. Pour cela, il est nécessaire de représenter graphiquement les valeurs du quantile en fonction du nombre de simulations. On fait varier le nombre de simulations de 5000 à 1500000 et pour chaque jeu, le quantile empirique est calculé.

Le nombre de simulations retenu sera tel que le quantile empirique soit stable.



Le nombre de simulation retenue pour la suite de l'étude est 1.000.000. A partir de ce nombre, l'estimation du quantile peut être considéré comme stable.

3.3 Simulation de la charge d'une branche

Les étapes suivantes sont répétées B fois.

- réalisation de S^{Att} : s^{Att}
- réalisation de N^{Gra} : n^{Gra}
- réalisation de $\mathbb{X}^{Gra} = (x_j^{Gra}, j = 1, \dots, n^{Gra})$

Avec $x_.^{Gra} = T + \frac{\sigma}{\varepsilon} * [u^{-\varepsilon} - 1]$ où u est la réalisation d'une variable aléatoire réelle uniforme entre 0 et 1 simulée par un générateur pseudo-aléatoire, par exemple celui de Mersenne-Twister.

En supposant l'indépendance entre la sinistralité attritionnelle et grave, on obtient la distribution de la charge totale de la branche d'assurance en additionnant, pour chaque scénario, s^{Att} et les n^{Gra} sinistres graves.
L'agrégation des scénarios sera différente en cas de dépendance.[17]

3.4 Simulation de la charge de plusieurs branches

La démarche pour obtenir la charge agrégée de plusieurs branches est la suivante :

- Simulation de la charge de chaque branche d'assurance de façon indépendante.
- Agrégation des différentes branches.

En supposant l'indépendance de la sinistralité des branches, on obtient la distribution de la charge totale des branches en additionnant pour chaque scénario, les sinistralités de chaque branche. Un

[17] Cf. 2.4.2

point de la distribution de la charge totale correspond à la somme des réalisations de S de chaque branche.

L'agrégation des charges des branches sera différente en cas de dépendance (voir par exemple l'agrégation des deux branches RC automobile et dommages aux biens des particuliers à partir d'une copule normale de dimension 2 lors de la cotation du traité XS multi-branches).

4. MESURE DE DEPENDANCE ET METHODES D'AGREGATION

Dans cette partie, nous étudierons l'impact de la prise en compte de la dépendance entre plusieurs éléments de notre étude: les dépendances entre sinistres attritionnels et sinistres graves au sein d'une même branche ainsi qu'entre les sinistralités de plusieurs branches d'assurance.

4.1 Agrégation des risques

La mise en place d'un modèle interne ou d'un modèle interne partiel est destinée à calculer les exigences réglementaires en matière de fonds propres ou à piloter le portefeuille. Dans les deux cas, il est nécessaire de modéliser correctement chacune des branches mais aussi les dépendances qui existent entre les branches.

Définition – Coefficient et matrice de corrélation linéaire

Coefficient de corrélation linéaire - ρ de Pearson :

Pour deux variables aléatoires X_1et X_2 dont les variances existent, le coefficient de corrélation linéaire est défini par :

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\right)\left(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\right)\right]}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}$$

La matrice de corrélation linéaire de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ est la matrice carrée de taille n dont le terme générique est $\rho(X_i, X_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$

Dans la littérature, le coefficient de corrélation linéaire de Pearson n'est pas une mesure de dépendance car ne vérifie pas certaines propriétés d'une mesure de dépendance. Néanmoins, en l'absence d'historique important sur les données, il sera utilisé pour estimer le paramètre de la copule normale. Le graphique suivant illustre l'agrégation de la sinistralité. La sinistralité agrégée s'obtient en agrégeant d'abord la sinistralité attritionnelle et grave pour chacune des branches puis les différentes branches entre elles.

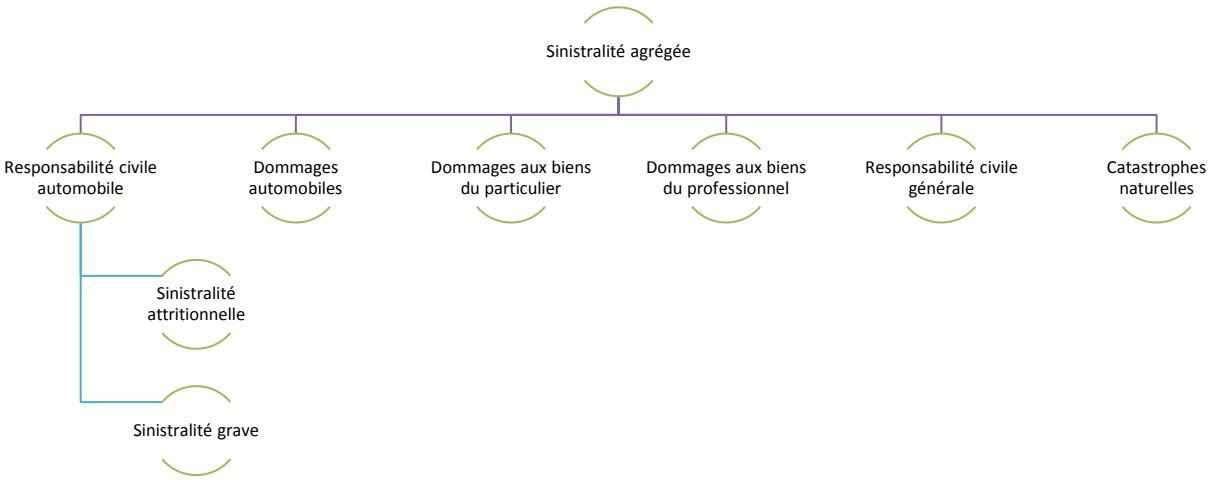


FIGURE 22: AGREGATION DE LA SINISTRALITE

4.2 Agrégation entre la sinistralité attritionnelle et grave

La modélisation que nous avions retenue pour modéliser la sinistralité d'une branche d'assurance sur une période est la suivante :

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}^{\mathrm{Att}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}} X_i^{Gra}$$

$\mathrm{S}^{\mathrm{Att}}$ modélise la masse des sinistres en dessous d'un seuil fixé, les X_i^{Gra} sont les coûts individuels des $\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}$ sinistres au-dessus du seuil.

La problématique est ici d'obtenir la charge totale agrégée S grâce à des simulations. Il faut alors étudier les sources possibles de dépendance entre ces deux sinistralités.

Une analyse qualitative des sources de dépendance est fondamentale. A priori, les nombres de sinistre sont dépendants. On peut facilement concevoir que pendant une année de forte sinistralité, c'est-à-dire avec un nombre total de sinistres élevé, à la fois le nombre de sinistres attritionnels et graves augmentent. De la même manière, pendant une année de faible sinistralité, les deux nombres seront moins élevés que d'habitude.

L'hypothèse retenue est donc de modéliser la dépendance uniquement sur les nombres. Il faut donc revenir aux nombres de sinistres attritionnels et une modélisation plus appropriée sera :

$$\mathrm{S} = \mathrm{N}^{\mathrm{Att}} * \overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{Att}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}} X_i^{Gra}$$

où $\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}$ et $\overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{Att}}$ représentent le nombre et le coût moyen des sinistres en dessous du seuil.

Les modèles possibles qui seront testés sont les suivants :

- indépendance ;
- dépendance totale positive sur les nombres ;
- dépendance modélisée par une copule gaussienne de dimension 2.

Pour agréger S en cas de dépendance totale positive, l'approche est de trier les réalisations de $\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}$ et de $\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}$ par ordre croissant et d'additionner les sinistralités atritionnelles et graves correspondantes.
En cas d'hypothèse d'indépendance l'agrégation se fera ligne à ligne sans trier les résultats étant donné que chaque réalisation simulée est indépendante.

Copule de Gauss

La dépendance peut être modélisée par une copule gaussienne. Nous donnerons ici la définition d'une copule et d'une copule gaussienne de dimension 2.

Définition – Copule de dimension 2

Une copule de dimension 2 est la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire (U_1, U_2) dans lequel U_1et U_2 sont de lois uniformes sur $[0,1]$.

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

Définition – Copule de Gauss de dimension 2

C'est la copule d'un vecteur gaussien de dimension 2 de matrice de variance-covariance Σ.

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2)$$

avec :

- $(X_1, X_2) \rightarrow N(0, \Sigma)$
- F_i , la fonction de répartition de la loi $N(0, \Sigma_{ii})$

Pour agréger S lorsque la dépendance entre les nombres est modélisée par une copule gaussienne de dimension 2, il faut d'abord simuler la réalisation de vecteurs aléatoires de dimension 2 de fonction de répartition normale et de lois marginales uniformes sur $[0,1]$. Pour obtenir les réalisations$\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}, \mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right)$, il faut inverser (u_1, u_2) grâce aux fonctions quantiles des lois de fréquence.

Méthode

- Choix du paramètre de la copule gaussienne δ ;

  Par exemple $\hat{\delta} = \hat{\rho}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}, \mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right)$

- Simulation de (u_1, u_2) de marginales uniformes sur $[0,1]$ et de copule gaussienne de paramètre $\hat{\delta}$;

- $\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Att}}, \mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right) = \left(F_{Att}^{-1}(u_1), F_{Gra}^{-1}(u_2)\right)$

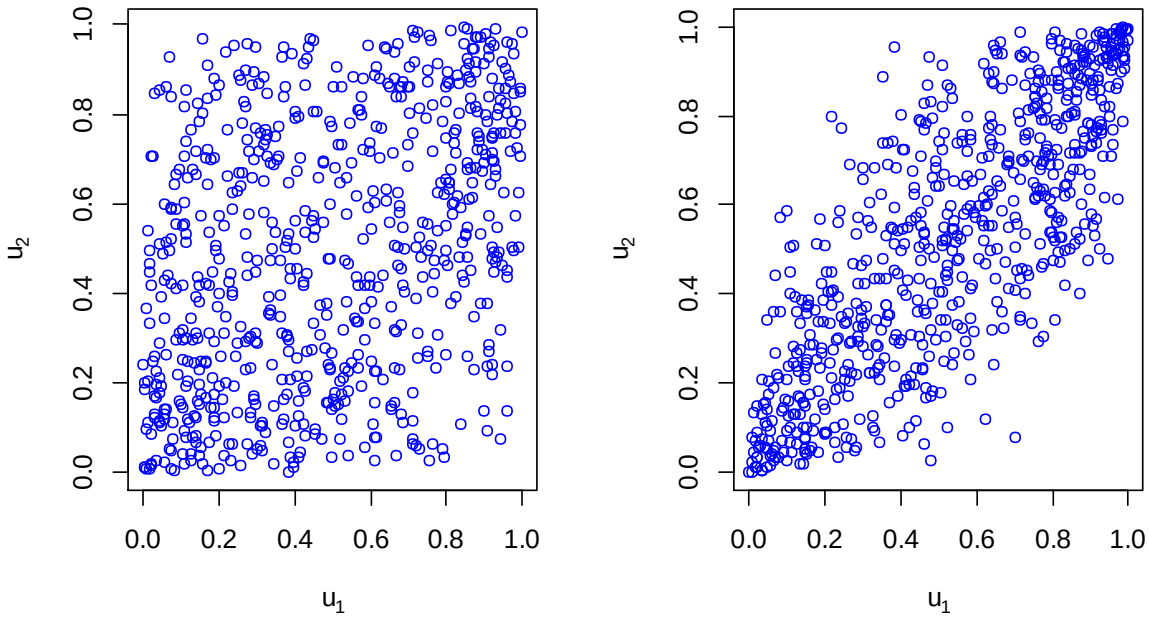


FIGURE 23: ILLUSTRATION COPULE GAUSSIENNE δ=0,4 ET δ=0,8

Lois Mélanges

Une autre approche possible est l'utilisation des lois mixed-poissons. L'idée consiste à modéliser la dépendance par un paramètre commun Θ dans les deux lois des nombres.

Exemple : Lois de poisson-gamma

Conditionnellement à $\Theta = \theta$ $N_{Att} \rightarrow Poisson(\lambda_{Att}\theta)$

Conditionnellement à $\Theta = \theta$ $N_{Gra} \rightarrow Poisson(\lambda_{Gra}\theta)$

avec $\hat{\lambda}_i$ =moyenne empiriques des nombres ultimes

$\Theta \rightarrow \mathrm{Gamma}(\alpha, \alpha)$

N_{Att} est de loi mélange poisson-gamma et est équivalente à une loi Binomiale Négative de paramètres $\mathrm{r} = \alpha, \mathrm{p} = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda_{Att}}$

N_{Gra} est une loi mélange poisson-gamma et est équivalente à une loi Binomiale Négative de paramètres $\mathrm{r} = \alpha, \mathrm{p} = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda_{Gra}}$

On estime le paramètre α sur les données : $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{\widehat{\lambda_{Att}}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \widehat{\lambda_{Att}}} + \frac{\widehat{\lambda_{Gra}}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \widehat{\lambda_{Gra}}}\right]$

Exemple de procédure

- Estimer λ_{Att}, λ_{Gra} puis α ;
- Simuler N réalisations $(\theta_i)_{i=1\dots N}$ de $\Theta \rightarrow \text{Gamma}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$
- Simuler N réalisations de N_{Att} de loi $P\left(\hat{\lambda}_{Att}\theta_i\right)$ et de N_{Gra} de loi $P\left(\hat{\lambda}_{Gra}\theta_i\right)$.

Application

On considère la branche Responsabilité civile automobile traitée dans l'exemple précédent. Le calibrage de la sinistralité a donné la modélisation suivante :

Calibrage sinistralité attritionnelle

Fréquence		**Coût Moyen**	
Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètre	$r = 202{,}78$ $p = 6{,}71.10^{-3}$	Paramètres	$\mu = 1367{,}31$ $\sigma = 55{,}55$

Calibrage sinistralité grave

Fréquence		**Sévérité**	
Loi	Poisson	Loi	Pareto Généralisée
Paramètre	$\lambda = 12{,}56$	Paramètres	$\gamma = 0{,}537$ $\sigma = 428227{,}7$
		Seuil	372.000

Le but est d'obtenir la charge de sinistralité annuelle et agrégée de cette branche. Pour cela, trois approches seront testées :

Agrégation indépendante

On simule les scénarios des deux sinistralités de manière indépendante, puis on somme les charges de chaque scénario ligne à ligne afin d'obtenir la charge totale :

$$scénario_total^i = scénario_attritionnel^i + scénario_grave^i$$

Agrégation avec hypothèse de dépendance totale positive sur les nombres

On simule les scénarios des deux sinistralités de manière indépendante. Puis on ordonne les scénarios des deux sinistralités en fonction du nombre de sinistres et on somme les charges correspondantes :

$$scénario_total^i = scénario_attritionnel_{i,n}^i + scénario_grave_{i,n}^i$$

Agrégation par une copule gaussienne calibrée par le coefficient de corrélation historique

Cette méthode est testée à la suite d'une observation : celui d'un comportement linéaire entre les fréquences des sinistralités lorsqu'on trace le graphique du nombre de sinistres attritionnels en fonction du nombre de sinistres graves de la même année.

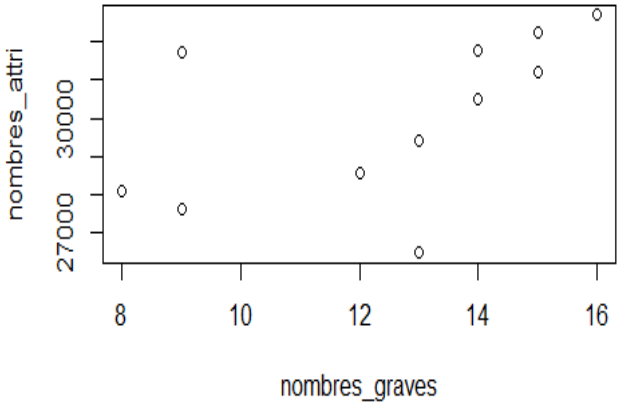


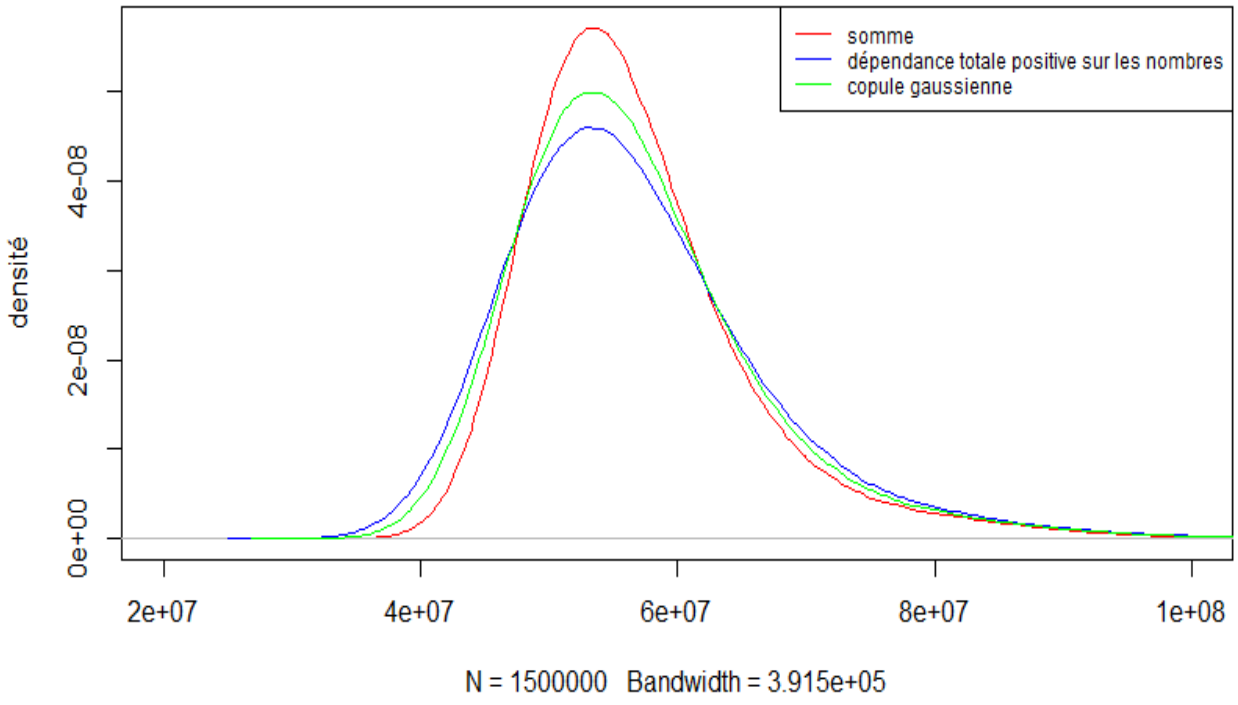
FIGURE 24: NOMBRE DE SINISTRES ATTRITIONNELS EN FONCTION DU NOMBRE DE SINISTRES GRAVES DE LA MEME ANNEE

Le calcul du coefficient de corrélation empirique historique des variables N_{Att} et N_{Gra} donne :

$$\hat{\rho}(N_{Att}, N_{Gra}) = 0{,}541$$

Résultat

Distribution agrégée de la charge de sinistralité totale en fonction de la méthode d'agrégation



	Somme indépendante	Dépendance totale positive sur les nombres	Agrégation par copule gaussienne sur les nombres
Moyenne	56.818.546	56.818.546	56.815.966
Quantile 95%	73.607.957	75.794.080	74.788.929
Quantile 99%	87.062.263	89.278.951	88.312.111
Quantile 99,5%	91.710.348	94.333.815	93.158.365
Quantile 99,5%-Moyenne	34.891.803	37.515.269	36.342.399

TABLEAU 6: EFFET DE LA PRISE EN COMPTE DE LA DEPENDANCE ENTRE GRAVES ET ATTRITIONNELS (UNITE=EURO)

La moyenne ne varie pas en fonction de la méthode d'agrégation retenue. D'un point de vue théorique l'approche avec la prise en compte de la dépendance est préférable.

4.3 Agrégation entre les différentes branches d'assurance

L'agrégation des différentes branches d'assurance peut s'effectuer de plusieurs manières. Soit en prenant en compte la structure de dépendance grâce à des copules. Soit en agrégeant les sinistralités de chaque branche par des matrices de corrélation. L'approche par copule nécessite un historique important pour chacune des branches afin de la calibrer. Le choix de la copule et l'estimation des paramètres est souvent un travail délicat. Par ailleurs la méthode de réorganisation des rangs des charges annuelles par une copule gaussienne expliquée dans la partie 3 pourrait être utilisée en remplaçant la copule de dimension deux par une copule de dimension n.

PARTIE III - APPLICATION : COTATION ET OPTIMISATION DE LA REASSURANCE

La réassurance est un élément central des réflexions stratégiques de par sa vocation à permettre à la fois de réduire l'aléa et de mieux maîtriser le risque. Plusieurs dimensions s'entremêlent dans le choix d'une couverture de réassurance.

Dimension risque

La réassurance permet à la cédante une meilleure maitrise de ses risques. En effet, une couverture de réassurance lui permet de se couvrir dans le cas de la survenance de sinistres de montants très élevés ou dans le cas de nombreux sinistres suite à un évènement de type catastrophe naturelle. Elle entraine alors une réduction de la queue de la distribution de ses sinistres et donc de son résultat de telle manière à réduire les mesures de risque de type Value-at-Risk.

Dimension rentabilité

La réassurance a un coût. La prime de réassurance est composée de la prime pure, d'une prime de risque et de divers chargements. Le coût de la réassurance vient s'imputer aux primes émises au titre de l'année de survenance. Globalement, par l'effet de la réassurance non-proportionnelle, la distribution des résultats économiques est moins volatile mais est aussi translatée vers la gauche, ce qui entraine, le plus souvent, une rentabilité moyenne plus faible.

Dimension solvabilité

La prise en compte de la réassurance impacte le SCR dans les modules risque de souscription et risque de contrepartie. Le risque de souscription diminue par la prise en compte de la réassurance dans les différentes formules et scénarios de calcul du SCR. Le risque de contrepartie permet de prendre en compte la probabilité de défaut du réassureur.

1. OPTIMISATION DE LA REASSURANCE NON-PROPORTIONNELLE

L'optimisation de la réassurance doit s'effectuer avec des critères définis à l'avance. L'établissement de ces critères est fondamental. En effet, il est important de savoir ce que l'on cherche à optimiser.

Quelques critères de décisions possibles :

- le coût de la réassurance ;
- le résultat cédé au réassureur ;
- le gain en volatilité du résultat net ;
- le gain en niveau de fonds propres exigibles ;
- différents indicateurs de risque ;
- différents indicateurs de rentabilité.

Dans cette étude, l'idée est plutôt de comparer le risque de la sinistralité réassurée à celle non réassurée. Les mesures de risques retenues sont les VaR et la TVaR aux niveaux 90%, 95% et 99%. D'autre part la rentabilité est mesurée comme étant le résultat moyen $N + 1$ divisé par le montant des primes.

Pour une branche d'assurance donnée les résultats techniques brut et net de réassurance $N+1$ sont définis par :

$$R_{brut} = P - S - F$$

$$R_{net} = R_{brut} - P_{cédée} + S_{cédée}$$

S : Sinistralité de l'année N+1 modélisée par sa distribution.

P : prime acquise de l'année N+1 : on suppose que le portefeuille est constant et que les primes acquises annuelles sont constantes. P est alors déterministe.

F : Frais de l'année N+1, déterministe.

$P_{cédée}$: Prime de réassurance, elle est estimée soit par des formules fermées soit par simulation.

$S_{cédée}$: Sinistralité cédée au réassureur.

La modélisation du résultat net des branches agrégées se fait par modélisation des branches de manière séparée puis en agrégeant les différentes branches.

Enfin les notions de sinistralité grave et sinistralité grave réassurée sont définies comme étant respectivement la charge de sinistralité provenant des sinistres graves et la charge de sinistralité des sinistres graves à laquelle on soustrait la sinistralité prise en charge par le réassureur et à laquelle on ajoute la prime de réassurance.

$$S_{brut}^{Gra} = S^{Gra}$$

$$S_{nette}^{Gra} = S^{Gra} - S_{cédée} + P_{cédée}$$

Il est important de souligner que cette méthode ne cherche pas à minimiser les fonds propres requis par l'autorité de contrôle au titre du SCR. Etant donné que la plupart des assureurs utilisent la formule standard pour calculer leurs exigences réglementaires en termes de capitaux requis, ceux-ci devront prendre en compte aussi cette dimension lors de l'optimisation.

Ce type de réassurance est dit non-proportionnel car il n'y a pas de proportionnalité entre les primes de réassurance et les primes émises par l'assureur et entre les engagements de l'assureur et ceux du réassureur. Il existe plusieurs types de traités de réassurance non-proportionnelle. Ceux dits «traditionnels» comme les excédents de sinistres ou les excédents de pertes et ceux dits «non-traditionnels» comme les traités d'excédent de sinistre multi-branches.

1.1 Excédent de sinistre

Pour une branche d'assurance la charge totale d'une période est le montant S :

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}^{\mathrm{Att}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}} X_i^{Gra}$$

La couverture de réassurance en excédent de sinistres (XS) permet à l'assureur de se couvrir auprès d'un réassureur lorsque les sinistres dépassent un certain montant appelé priorité et dans une limite fixée par la portée, le montant maximal que peut payer le réassureur pour un sinistre. La convention pour désigner un tel traité est « portée XS priorité ».

Il existe des traités d'excédents de sinistre par risque ou par événement. Un traité en excédent de sinistre par risque considère chaque sinistre pris individuellement. La réassurance prendra effet si le montant du sinistre est supérieur à la priorité. L'excédent de sinistre par événement est lié à la survenance sur plusieurs risques d'un évènement de même cause. Les montants des sinistres de chaque risque sont regroupés et le réassureur paiera le montant de la perte totale supérieur à la priorité avec une limite supérieure correspondant à la portée. Dans ce mémoire, seuls les traités en excédent de sinistre par risque seront étudiés. De plus, si le seuil des sinistres graves est inférieur à la priorité du traité, la réassurance n'interviendra que sur les sinistres X_i^{Gra} modélisés individuellement.

Pour chaque montant de sinistre grave le montant à la charge du réassureur Y_i est :

$$Y_i = \begin{cases} 0 & si\ X_i^{Gra} < D \\ X_i^{Gra} - D & si\ D \leq X_i^{Gra} \leq P \\ P & si\ X_i^{Gra} > P \end{cases} = min\left[max\left(X_i^{Gra} - D; 0\right); P\right]$$

avec D le montant de la priorité et P celui de la portée.
On a alors :

$$\mathrm{S}_{nette} = \mathrm{S}^{\mathrm{Att}} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N^{Gra}}} X_i^{Gra} - Y_i$$

$$\mathrm{S}_{cédée} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N^{Gra}}} Y_i$$

La problématique est alors d'estimer la prime pure $\pi(D, P) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_{cédée})$

L'approche historique – le *Burning Cost*

Cette méthode consiste à calculer le taux moyen basé sur les données d'expérience de la cédante. Le taux *Burning Cost* sera la moyenne des taux des années d'expérience pondéré par les primes.

La première étape est de corriger les montants des sinistres et des primes de l'inflation et de modification de la composition du portefeuille de la cédante. Cette correction permet de trouver les montants de primes qui auraient été émises l'année de cotation pour une couverture semblable à celles des années de l'historique. Puis, il faut calculer le taux annuel, noté t_i, pour chaque année d'expérience.

$$BC = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i * t_i}{P_i}$$

Cette approche comporte de nombreux inconvénients. En effet elle ne permet pas de tarifer des tranches dites « non travaillantes » car, par définition, ces tranches n'ont aucune donnée d'expérience. De plus, elle suppose que les données disponibles du passé reflètent bien le futur, ce qui n'est généralement pas le cas en raison des changements dans les politiques de souscription. Par exemple, dans l'exemple ci-dessous, la tranche n°2 ne dispose presque pas de données d'expérience. On dit que c'est une tranche « non travaillante ».

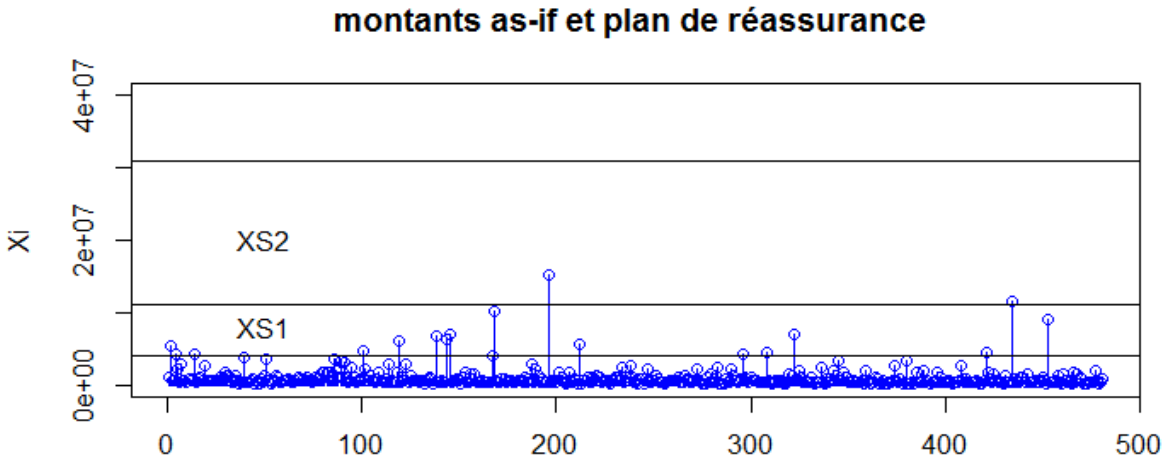


FIGURE 26: SINISTRES AS-IF ET PLAN DE REASSURANCE

Alors que l'approche historique consiste à trouver le taux moyen des années passées revalorisé en date de cotation, l'approche probabiliste a pour conviction de trouver, à partir des données d'expérience, les distributions des fréquences et des sévérités du risque de la cédante. A partir de ces lois, l'estimation du tarif sera possible soit par une formule soit par simulation.

L'approche probabiliste

Cette approche consiste à utiliser le modèle fréquence-coût de la modélisation des sinistres[18].

La théorie des valeurs extrêmes sera appliquée pour estimer le coût du traité de réassurance. L'idée est d'utiliser la modélisation de X^{Gra} comme étant une variable aléatoire de loi GPD. Cette méthode de tarification permet de tarifer toutes les tranches. Néanmoins, un risque de modèle est présent à cause du choix des lois et des paramètres. Le calcul diffère lorsque le traité a une portée finie ou illimitée ou lorsqu'il comporte des clauses particulières. Dans le cas où il n'y a ni clause de limitation annuelle ni franchise annuelle, un traité XS de priorité D et de portée illimitée peut être coté de la manière suivante[19] :

Formule de cotation d'un traité XS avec portée illimitée :

$$\pi(D, illimité) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_{cédée}) = \mathbb{E}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N^{Gra}}} Y_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{N^{Gra}}\right) * \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}\left(\mathrm{N^{Gra}}\right) * \mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right) = \int_D^{\infty} (x - D) f_{X^{Gra}} dx = \int_D^{\infty} \left(1 - F_{X^{Gra}}(x)\right) dx$$

En utilisant : $F_{X^{Gra}}(x) = G_{\gamma,\sigma}\,(x-u) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma(x-u)}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$ avec $\gamma > 0$ le paramètre de forme, σ le paramètre d'échelle et u le seuil des graves on a, sous réserve que $\gamma < 1$:

[18] Voir Beirlant et al. [2004] p.195-198
[19] Une démonstration détaillée est en annexe 6.

$$\int_D^{\infty} \bar{F}_{X^{Gra}}(x)dx = \int_D^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma(x-u)}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} dx$$

$$= \frac{\sigma}{\gamma}\left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma(x-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]_D^{\infty}$$

$$= \frac{\sigma}{1-\gamma}\left(1 + \frac{\gamma(D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On obtient alors l'expression de la prime pure :

$$\pi(D, illimité) = \mathbb{E}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right) * \frac{\sigma}{1-\gamma}\left(1 + \frac{\gamma(D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On peut alors estimer cette prime pure grâce aux paramètres estimés de la loi GPD et à l'estimation du paramètre λ de la loi de fréquence des sinistres graves :

$$\hat{\pi}(D, illimité) = \hat{\lambda} * \frac{\hat{\sigma}}{1-\hat{\gamma}}\left(1 + \frac{\hat{\gamma}(D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}}$$

Formule de cotation d'un traité XS avec portée finie :

De la même manière, lorsque la portée est limitée au montant P, la formule précédente peut être adaptée en remarquant que $Y_i = \left(X_i^{Gra} - D\right)\ \mathbf{1}_{\{0<X_i^{Gra}-D<P\}} + P\mathbf{1}_{\{X_i^{Gra}-D\geq P\}}$.

$$\pi(D,P) = \mathbb{E}(S_{cédée}) = \mathbb{E}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right) * \mathbb{E}(Y_i)$$

On a alors

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)\ \mathbf{1}_{\{0<X_i^{Gra}-D<P\}}\right) + P\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} \geq D + P\right)$$

On a d'une part :

$$\mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)\ \mathbf{1}_{\{0<X_i^{Gra}-D<P\}}\right)$$
$$= \int_D^{D+P} \bar{F}_{X^{Gra}}(x)dx - P\left(\bar{F}_{X^{Gra}}(D+P)\right)$$

d'autre part :

$$P\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} \geq D + P\right) = P\left(\bar{F}_{X^{Gra}}(D+P)\right)$$

Finalement :

$$\mathbb{E}(Y_i) = \int_D^{D+P} \bar{F}_{X^{Gra}}(x)dx = \frac{\sigma}{1-\gamma}\left[\left(1+\frac{\gamma(D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(1+\frac{\gamma(P+D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \; pour\; \gamma < 1$$

$$\pi(D,P) = \mathbb{E}(\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}})\left\{\frac{\sigma}{1-\gamma}\left[\left(1+\frac{\gamma(D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(1+\frac{\gamma(P+D-u)}{\sigma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}$$

La prime de réassurance peut alors être estimée par :

$$\hat{\pi}(D,P) = \hat{\lambda}\left\{\frac{\hat{\sigma}}{1-\hat{\gamma}}\left[\left(1+\frac{\hat{\gamma}(D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}} - \left(1+\frac{\hat{\gamma}(P+D-u)}{\hat{\sigma}}\right)^{\frac{\hat{\gamma}-1}{\hat{\gamma}}}\right]\right\}$$

Dans le cas où la sévérité des graves est modélisée par une loi Pareto Généralisée, l'estimation de la prime cédée au réassureur $P_{cédée}$ est directement calculée par l'une de ces deux formules en fonction de l'existence de la portée.

Pour illustrer cette méthode, nous allons calculer les primes pures d'un traité en excédent de sinistre dans trois cas :

- Lorsque la portée est illimitée : le traité est coté grâce à la première formule, la priorité varie de 1 million d'euros à 6 millions d'euros avec un pas de 100.000. La formule donne un montant en euros. Pour obtenir le coût du traité en % de la Prime, les montants trouvés sont divisés par la prime hypothétique de 62,5M€ ;
- Lorsque la portée est limitée à 20M€ ;
- Lorsque la portée est limitée à 5M€.

On obtient les prix résumés dans le graphique suivant :

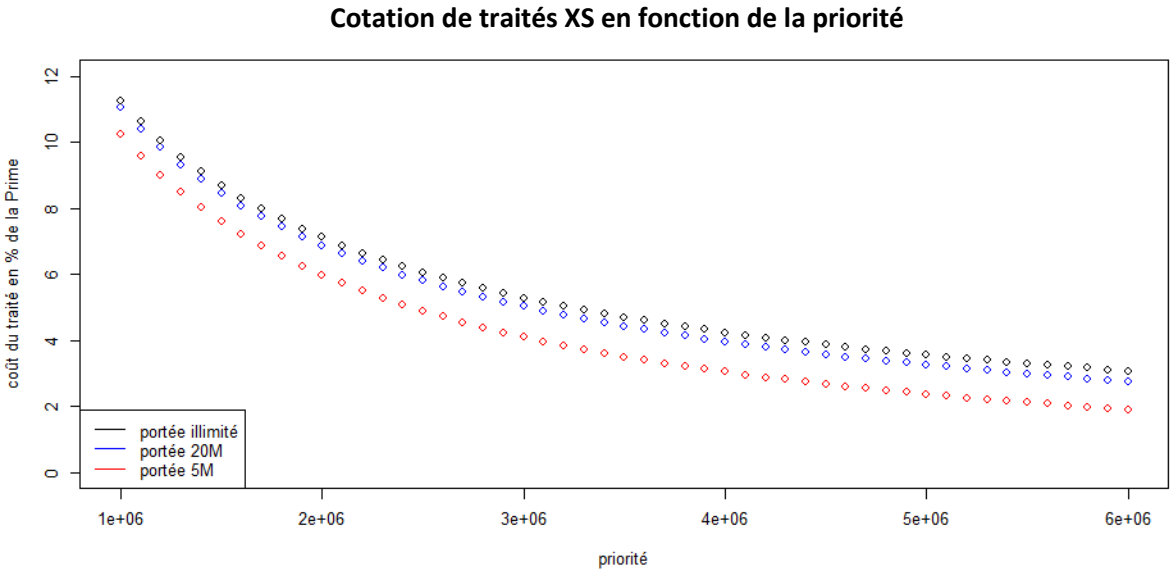


FIGURE 27: EXEMPLE DE COTATION DES TRAITES XS (BRANCHE RC AUTOMOBILE)

1.2 Excédent de perte

Dans le cadre d'un traité en excédent de perte ou *Stop Loss* (SL), la cédante se couvre sur le montant annuel des sinistres au-delà d'un certain niveau du ratio S/P. Le principe de fonctionnement est identique à celui en excédent de sinistre mais en considérant l'année entière comme un seule sinistre. La convention pour désigner un tel traité est « portée % SL priorité % ».

Le montant annuel à la charge du réassureur est :

$$S_{cédée} = min[max(0; S - dP); pP]$$

où :

- $d =$ priorité du traité (en %) ;
- $p =$ portée du traité (en %) ;
- $S =$ sinistralité annuelle ;
- $P =$ montant annuel des primes.

1.3 Les clauses

Franchise annuelle

La clause de franchise annuelle *ou annual aggregate deductible* (AAD) spécifie le montant minimal de la charge annuelle avant que le réassureur intervienne. Par exemple pour un traité XS avec le montant annuel éligible au traité de réassurance $\mathrm{S}_{cédée}$ on a la formule suivante :

$$S_{cédée}^{AAD} = max(\mathrm{S}_{cédée} - AAD; 0)$$

Engagement maximal annuel

La clause d'engagement maximal annuel ou *annual aggregate limit* (AAL) spécifie le montant maximal annuel payé par le réassureur.

$$S_{cédée}^{AAL} = min(\mathrm{S}_{cédée}; AAL)$$

Une combinaison de ces deux clauses donne le montant annuel à charge du réassureur

$$S_{cédée}^{AAD,AAL} = min\big[max(\mathrm{S}_{cédée} - AAD; 0) \;\; ; AAL\big]$$

Afin de tarifer un traité avec ce type de clause, il faut procéder par simulation. Pour chaque scénario, la charge annuelle à la charge du réassureur est calculée sans clause. La clause est ensuite appliquée pour tous les scénarios. La moyenne des charges du réassureur après prise en compte de la clause, d'après la loi des grands nombres, est un bon indicateur de la prime pure.

Clause de reconstitution

La clause de reconstitution permet à la cédante de rétablir l'engagement du réassureur à son état initial après que des sinistres aient affecté l'engagement restant. La prime de reconstitution est en général un pourcentage qui dépend à la fois de la prime initiale et du montant déjà payé par le réassureur.

Ces clauses permettent d'introduire un nouveau type de traité de réassurance non-proportionnelle présent sur le marché depuis quelques années : le traité « excédent de sinistre multi-branches ».

1.4 Traité excédent de sinistre multi-branches

Un traité en excédent de sinistre multi-branches ou *aggregate XL* est une couverture de réassurance non traditionnelle qui couvre plusieurs branches d'assurance à la fois. Il combine à la fois la notion de franchise annuelle, d'engagement maximal annuel mais pour plusieurs branches d'activité en même temps. Certains réassureurs proposent aussi des traités multi-branches et multi-périodes. Dans cette étude, nous nous limiterons à une période de 1 an.

Le principe de fonctionnement est le suivant : les excédents de sinistre éligibles au traité viennent d'abord alimenter la franchise du traité qui correspond à une rétention additionnelle à celle de chaque branche. Une fois que ce montant est atteint, le traité prend effet et couvre les montants éligibles tels qu'une réassurance en excédent de sinistre classique pour toutes les branches, et dans la limite de la portée définie dans le traité.

Ils servent à protéger la cédante des sinistres de tailles moyennes et du risque de sur-fréquence.

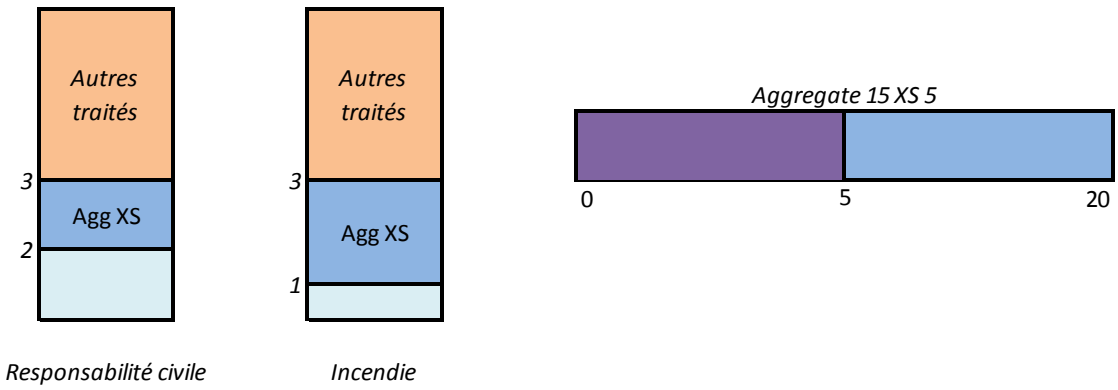
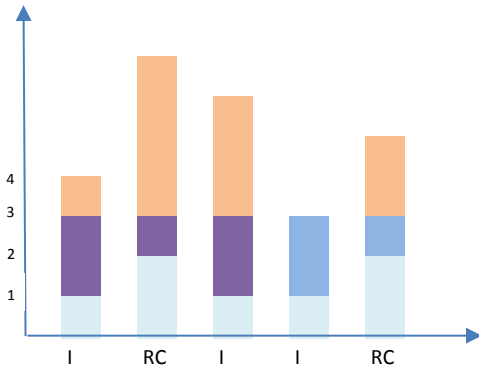


FIGURE 28: ILLUSTRATION TRAITE MULTI-BRANCHES

Dans l'exemple simple ci-dessus, le traité XS multi-branches est défini pour deux branches : la responsabilité civile et l'incendie. Le réassureur interviendra uniquement si la somme des excédents à 2M€ des sinistres RC et des excédents à 1M€ des sinistres incendie dépassent 5M€. L'intervention maximale du réassureur dans ce cas est limitée par la portée de 15M€. Dans cette exemple, la compagnie a mis en place des traités traditionnels avec une priorité fixée à 3M€ pour ces deux branches.



Les trois premiers sinistres sont éligibles mais la franchise du traité n'est pas encore complétée donc l'assureur ne prend pas en charge ces montants. Après le troisième sinistre la franchise est atteinte car le premier sinistre a eu un montant éligible de 2M€, le deuxième de 1M€ et le troisième de 2M€. Ainsi pour les prochains sinistres de ces branches, ce traité est considéré comme un XS classique 1M XS 2M pour la responsabilité civile et 2M XS 1M pour l'incendie. C'est la raison pour laquelle le réassureur interviendra pour le 4ème et 5ème sinistre. Dès que son intervention aura atteint la portée de 15M€, la couverture s'arrête. Comme pour les premiers sinistres, la réassurance sera prise en compte par les traités classiques de chaque branche représentée par la couleur beige dans l'exemple.

La prime pure d'un tel traité s'obtient par simulation. Elle consiste à reproduire la sinistralité annuelle à charge du réassureur par la méthode de Monte-Carlo pour l'ensemble des branches et donc de la sinistralité agrégée. La charge du réassureur est calculée pour chaque scénario et la prime pure finale s'obtient en faisant la moyenne des charges du réassureur de chaque scénario.

Supposons que la société d'assurance souhaite souscrire à un traité multi-branches pour ses deux branches responsabilité civile automobile et dommages aux biens des particuliers. Elle souhaiterait étudier les bénéfices d'un tel traité sur ses risques. Les différents indicateurs de risques retenus sont les VaR et la TVaR à différents niveaux de la distribution de la charge réassurée.

Les notations suivantes doivent être introduites :

- X_i^{RC}, X_i^{DAB} : les i^{èmes} montants des sinistres de la branche RC automobile et dommage aux biens des particuliers.
- N^{RC}, N^{DAB} : les nombres de sinistres de la branche RC automobile et dommage aux biens des particuliers.
- $T^{RC} = \sum_{i=1}^{N^{RC}} X_i^{RC}$: sinistralité annuelle de la branche RC automobile.
- $T^{DAB} = \sum_{i=1}^{N^{DAB}} X_i^{DAB}$: sinistralité annuelle de la branche dommages aux biens des particuliers.
- d^{RC}, d^{DAB} : les priorités des branche RC automobile et dommages aux biens des particuliers du traité multi-branches.
- p^{RC}, p^{DAB} : les portées des branche RC automobile et dommages aux biens des particuliers du traité multi-branches.

Pour chaque sinistre le montant éligible au traité est alors :

- $Y_i^{RC} = min\left[max\left(X_i^{RC} - d^{RC}; 0\right); p^{RC}\right]$
- $Y_i^{DAB} = min\left[max\left(X_i^{DAB} - d^{DAB}; 0\right); p^{DAB}\right]$

Les montants agrégés associés sont :

- $S^{RC} = \sum_{i=1}^{N^{RC}} Y_i^{RC}$
- $S^{DAB} = \sum_{i=1}^{N^{DAB}} Y_i^{DAB}$

Les montants des sinistres non éligibles pour la cédante sont :

- $C_i^{RC} = X_i^{RC} - Y_i^{RC}$
- $C_i^{DAB} = X_i^{DAB} - Y_i^{DAB}$

Enfin le traité multi-branches prend la forme de :

- $MAAD$: la franchise annuelle du traité multi-branches.
- $MAAL$: la limite annuelle du traité multi-branches.
- $S_{cédée}^{MAAD,MAAL} = min\left[max(S^{RC} + S^{DAB} - MAAD; 0) \;\; ; MAAL\right]$.
- $\mathbb{E}\left(S_{cédée}^{MAAD,MAAL}\right)$: la prime pure de réassurance.

Cotation d'un traité XS multi-branches

Cotation dans le cas d'hypothèse d'indépendance

Les sinistres étant simulés de façon indépendante pour chaque scénario, sous l'hypothèse d'indépendance, la tarification d'un tel traité est simple. Il suffit de sommer les sommes éligibles des deux branches pour chaque scénario. Ensuite, la fonction $min\left[max(S_B - MAAD; 0) \;\; ; MAAL\right]$ est appliquée à chaque sinistralité éligible totale $S_B = S_B^{RC} + S_B^{DAB}$ pour déterminer la charge du réassureur.

La prime pure est alors obtenue en faisant la moyenne des charges du réassureur. En notant B le nombre de scénarios la prime pure est estimée par :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(S_{cédée}^{MAAD,MAAL}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} min\left[max(S_i - MAAD; 0) \;\; ; MAAL\right]$$

Cotation avec prise en compte de la dépendance par une copule gaussienne de dimension deux[20]

L'idée est d'introduire une dépendance entre les sinistralités annuelles simulées T_i^{RC} et T_i^{DAB} en les réorganisant de telle manière à ce que leurs rangs soient ceux d'une copule gaussienne de dimension deux. Un point délicat concerne le choix du paramètre de la copule Gaussienne. Nous prendrons ici 0,25 par exemple, à dire d'expert. Il est cependant primordial d'estimer ce paramètre à partir des données historiques.

L'échantillon des sinistralités annuelles des scénarios trié est : $T_{1,B}^{RC} \leq \cdots \leq T_{b,B}^{RC} \leq \cdots \leq T_{B,B}^{RC}$

L'exemple ci-dessous permettra de mieux comprendre la méthode de réorganisation des T_i en deux étapes.

[20] Voir MERCAT [2015] pour l'agrégation de N branches avec d'autres structures de dépendance pour ce type de traité MAXL (Multiline Aggregate Excess of Loss)

Exemple : simulation d'un échantillon de taille 10 de variables aléatoires uniformes selon une copule gaussienne puis calcul des rangs

Etape 1 : Simulation et calcul des rangs

U1	U2		Rang U1	Rang U2
0,27328663	0,5461689		4	6
0,91033918	0,93989444		10	10
0,64960394	0,73809693		6	8
0,84903742	0,46788716		8	3
0,89382562	0,50960255		9	5
0,19901414	0,19373893		3	2
0,08751282	0,80295939		2	9
0,70389028	0,6076233		7	7
0,44623655	0,5051581		5	4
0,03757582	0,0437074		1	1

Etape 2 : Réorganisation des T_i

Les scénarios réorganisés sont :

$\boldsymbol{T^{RC}}$	$\boldsymbol{T^{DAB}}$		Rang U1	Rang U2
$\boldsymbol{T^{RC}_{4,10}}$	$T^{DAB}_{6,10}$		4	6
$\boldsymbol{T^{RC}_{10,10}}$	$T^{DAB}_{10,10}$		10	10
$\boldsymbol{T^{RC}_{6,10}}$	$T^{DAB}_{8,10}$		6	8
$\boldsymbol{T^{RC}_{8,10}}$	$T^{DAB}_{3,10}$		8	3
$\boldsymbol{T^{RC}_{9,10}}$	$T^{DAB}_{5,10}$		9	5
$\boldsymbol{T^{RC}_{3,10}}$	$T^{DAB}_{2,10}$		3	2
$\boldsymbol{T^{RC}_{2,10}}$	$T^{DAB}_{9,10}$		2	9
$\boldsymbol{T^{RC}_{7,10}}$	$T^{DAB}_{7,10}$		7	7
$\boldsymbol{T^{RC}_{5,10}}$	$T^{DAB}_{4,10}$		5	4
$\boldsymbol{T^{RC}_{1,10}}$	$T^{DAB}_{1,10}$		1	1

Ensuite, la fonction $min\big[max(S_B - MAAD; 0) \quad ; MAAL\big]$ est appliquée à chaque scénario réorganisé $S_B = S_B^{RC} + S_B^{DAB}$ pour déterminer la charge du réassureur.

La prime pure est alors obtenue en faisant la moyenne des charges du réassureur. En notant B le nombre de scénarios la prime pure est estimée par :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(S_{cédée}^{MAAD,MAAL}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} min\big[max(S_i - MAAD; 0) \quad ; MAAL\big]$$

1.5 Calcul de la prime commerciale – chargements

Un chargement est appliqué à la prime pure pour prendre en compte les frais internes du réassureur, principalement les frais de gestion et les frais de courtage. Le réassureur peut aussi ajouter un chargement de sécurité. Nous supposerons que le tarif des traités XS modélisés corresponde à l'espérance de la sinistralité cédée à laquelle on applique un chargement hypothétique de 20%. Cette hypothèse est réaliste. En effet, la commission de courtage de réassurance est généralement de l'ordre de 10% et les frais généraux du réassureur autour de 10%.

$$P_{reass}^{''} = P_{reass} + \theta * P_{reass}^{''}$$

$$P_{reass}^{''} = \frac{P_{reass}}{1-\theta} = 1.25 * P_{reass}$$

où P_{reass} est la prime pure et $P_{reass}^{''}$ la prime commerciale.

2. OPTIMISATION DU COUPLE RENDEMENT RISQUE

Les structures initiales de réassurance sont d'abord présentées pour les deux risques responsabilité civile automobile et dommages aux biens des particuliers. Ensuite, nous vérifierons si ces plans de réassurance sont efficients en les considérant chacun individuellement. Enfin, l'impact d'un traité multi-branches mis en place en-dessous des priorités des plans XS traditionnels sera étudié. Par soucis de simplification, l'étude porte sur deux branches d'activité mais elle pourrait être appliquée à un nombre de branches supérieur.

2.1 Structure de réassurance initiale

Les structures de réassurances initiales sont les suivantes :

Structure de réassurance initiale RC automobile

	XS n°1	XS n°2	Totale
Priorité	4.000.000	11.000.000	4.000.000
Portée	7.000.000	30.000.000	30.000.000
Taux de prime	2,96%	1,57%	4,53%
Prime minimum	1.850.917	980.897	2.831.814

TABLEAU 7 : STRUCTURE DE REASSURANCE INITIALE RC AUTO (UNITE=EURO)

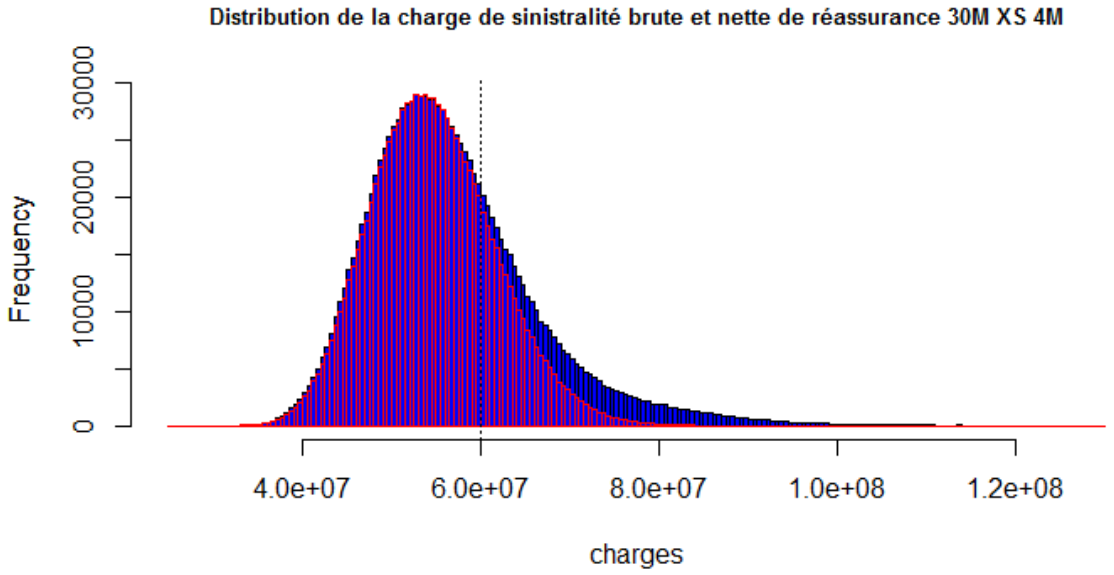


FIGURE 29: ILLUSTRATION DE L'IMPACT DU TRAITE XS SUR LA SINISTRALITE RC AUTOMOBILE

Structure de réassurance initiale DAB particuliers

	XS
Priorité	4.000.000
Portée	Illimitée
Taux de prime	3,70%
Prime minimum	1.662.727

TABLEAU 8 : STRUCTURE DE REASSURANCE INITIALE DAB PARTICULIERS(UNITE=EURO)

2.2 Excédent de sinistre

Branche Responsabilité civile automobile

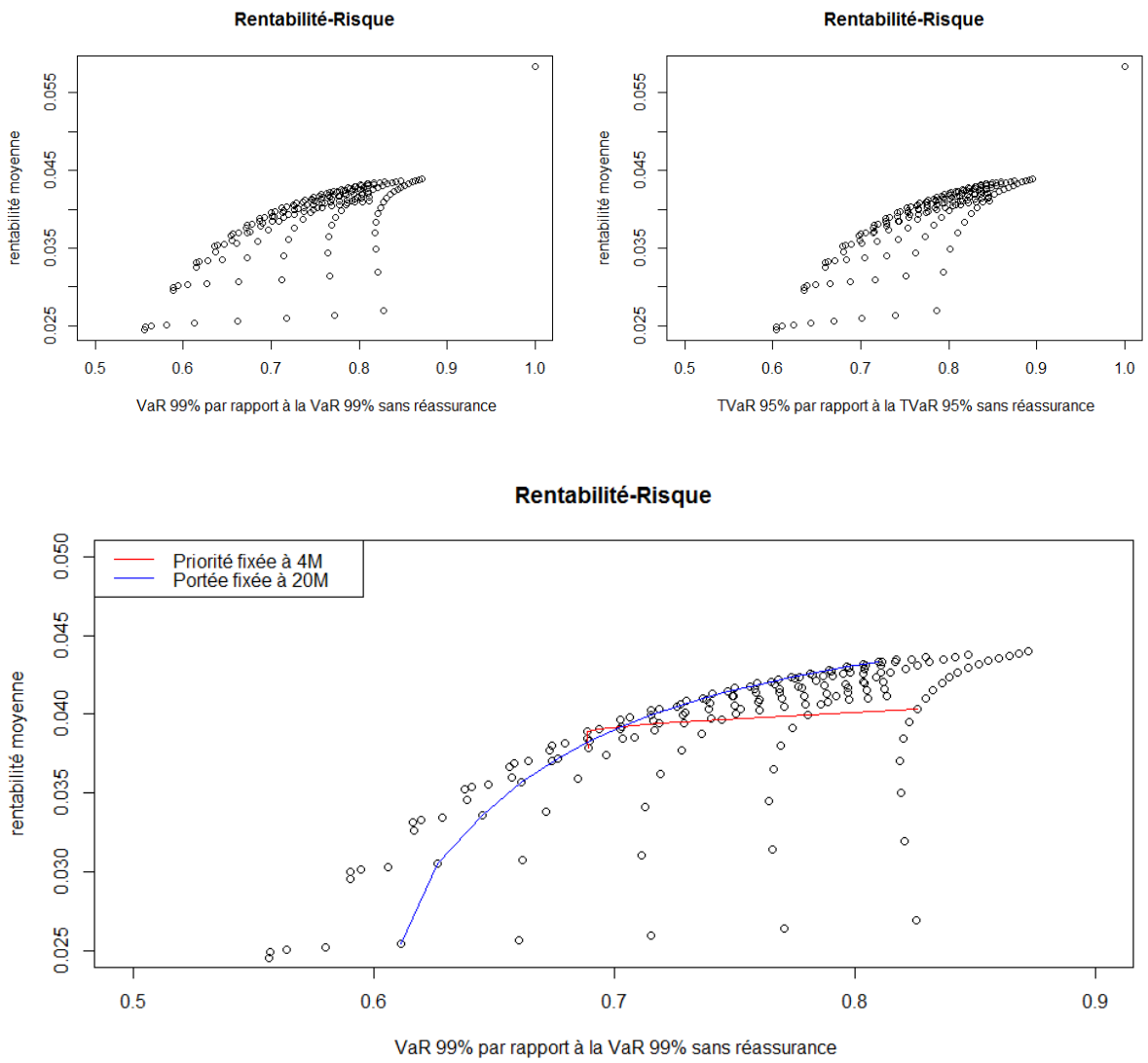


FIGURE 30: NUAGE DE POINTS RENTABILITE/RISQUE POUR LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

Chaque point du graphique correspond à un plan de réassurance XS. Les points supérieurs à droite correspondent à la sinistralité sans réassurance. Les VaR et TVaR sont les quantités calculées sur les échantillons de sinistralités graves annuelles avec prise en compte de la réassurance obtenus par simulation divisés par cette même mesure de risque sur l'échantillon sans réassurance. Les priorités varient de 1M€ à 10M€ avec un pas de 0,5M et les portées varient de 10M€ à 30M€ avec un pas de 2,5M.

Les points sur la courbe bleue correspondent tous à une portée de 20M€ mais pour une priorité qui varie de 1M€ à 10M€. Lorsque la priorité augmente, l'engagement du réassureur diminue et donc le risque augmente aussi. La rentabilité moyenne calculée comme étant le résultat économique divisé par la prime annuelle attendue augmente aussi car le prix du traité décroit. Les points sur la courbe rouge correspondent à une priorité fixée à 4M€ mais pour une portée qui varie de 10M€ à 30M€. Lorsque la portée augmente le risque et la rentabilité diminuent. Notons qu'à partir d'un certain

niveau de portée la rentabilité moyenne diminue sans perte de risque. Il s'agirait alors d'une prime de réassurance payée sur des montants de sinistres qui sont très rares, c'est-à-dire des sinistres dont le montant est supérieur à 25M€.

Nous remarquons dans ce graphique la présence d'une courbe d'efficience. Pour un même niveau de risque, la rentabilité moyenne peut être maximisée en choisissant un programme de réassurance appartenant à cette courbe. De même, pour un même niveau de rentabilité, par exemple le niveau minimum de rentabilité attendue, le risque peut être minimisé.

Finalement, le plan de réassurance actuel 30M XS 4M est un plan efficient. Si la cédante voudrait diminuer son risque elle pourrait opter pour un plan 30M XS 3M avec un gain de 3,2% de VaR et une perte de 0,18% de rentabilité moyenne.

Le graphique suivant illustre l'effet de l'augmentation de la priorité pour une portée fixée.

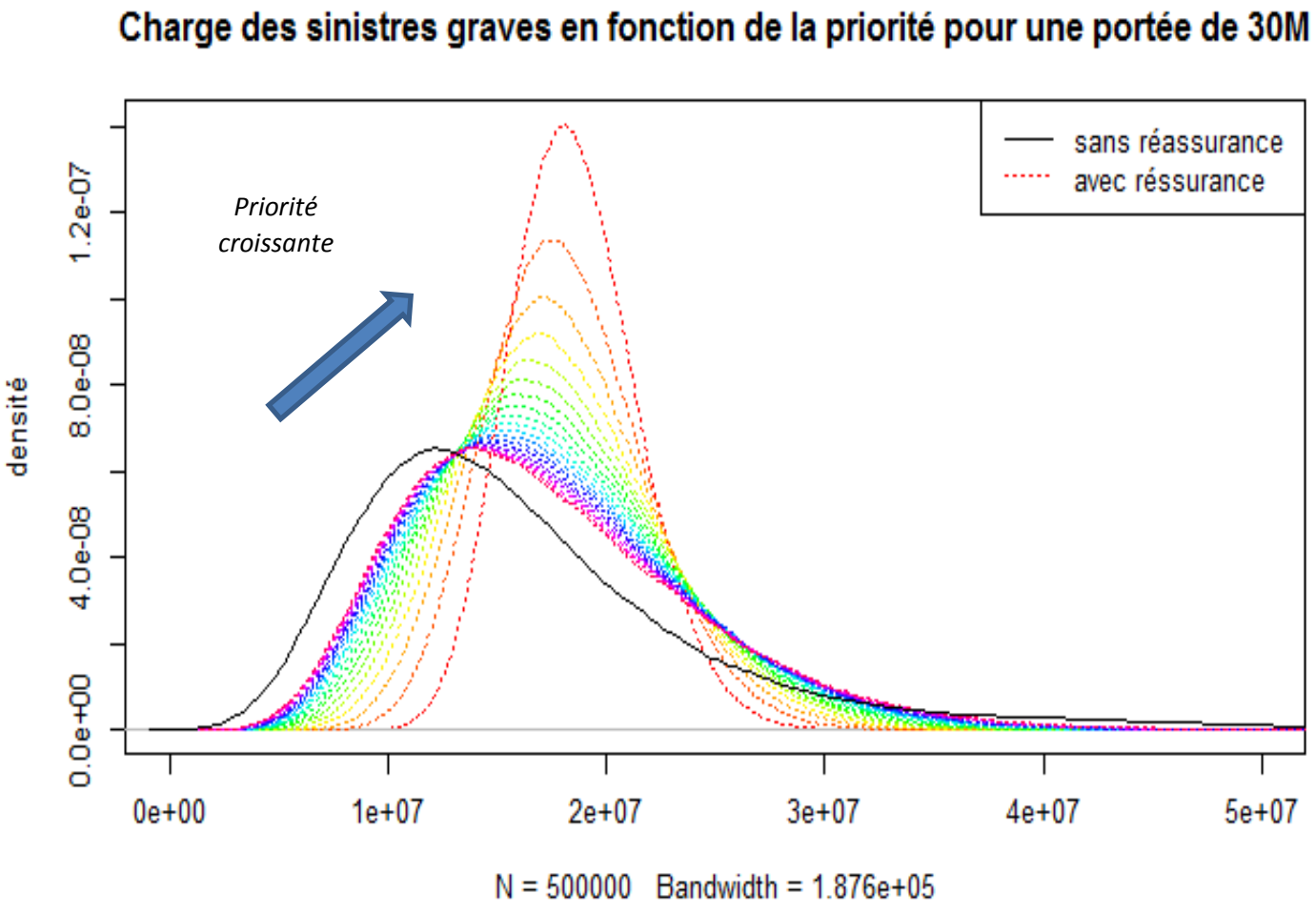
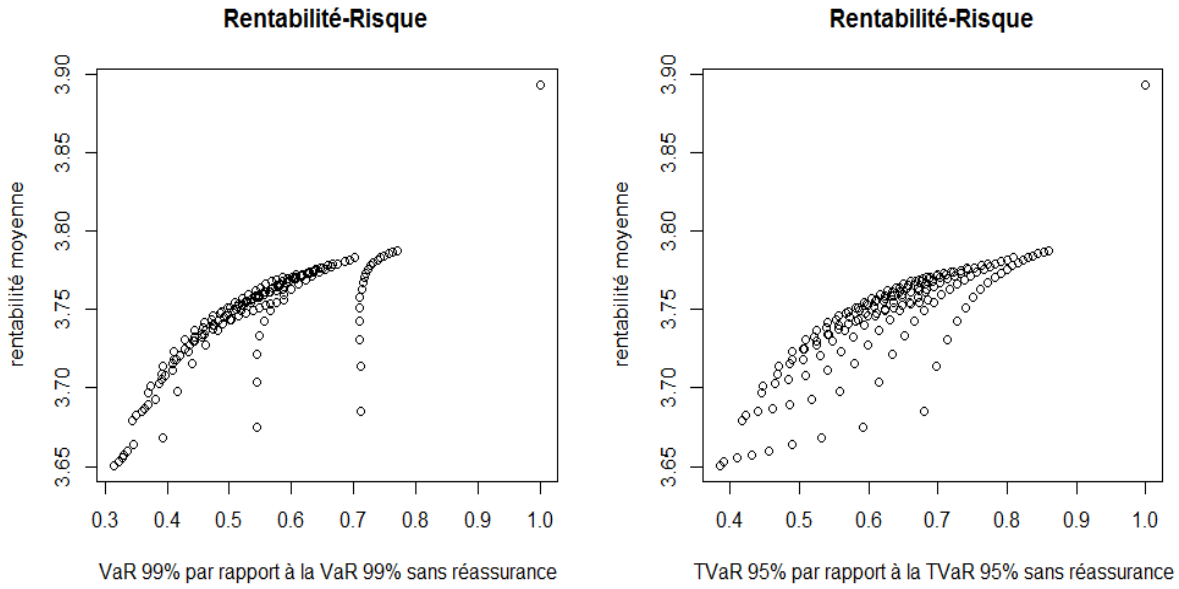


FIGURE 31: ILLUSTRATION DE L'EFFET DE L'AUGMENTATION DE LA PRIORITE SUR LA DISTRIBUTION DE LA CHARGE DES SINISTRES GRAVES

Branche dommages aux biens des particuliers



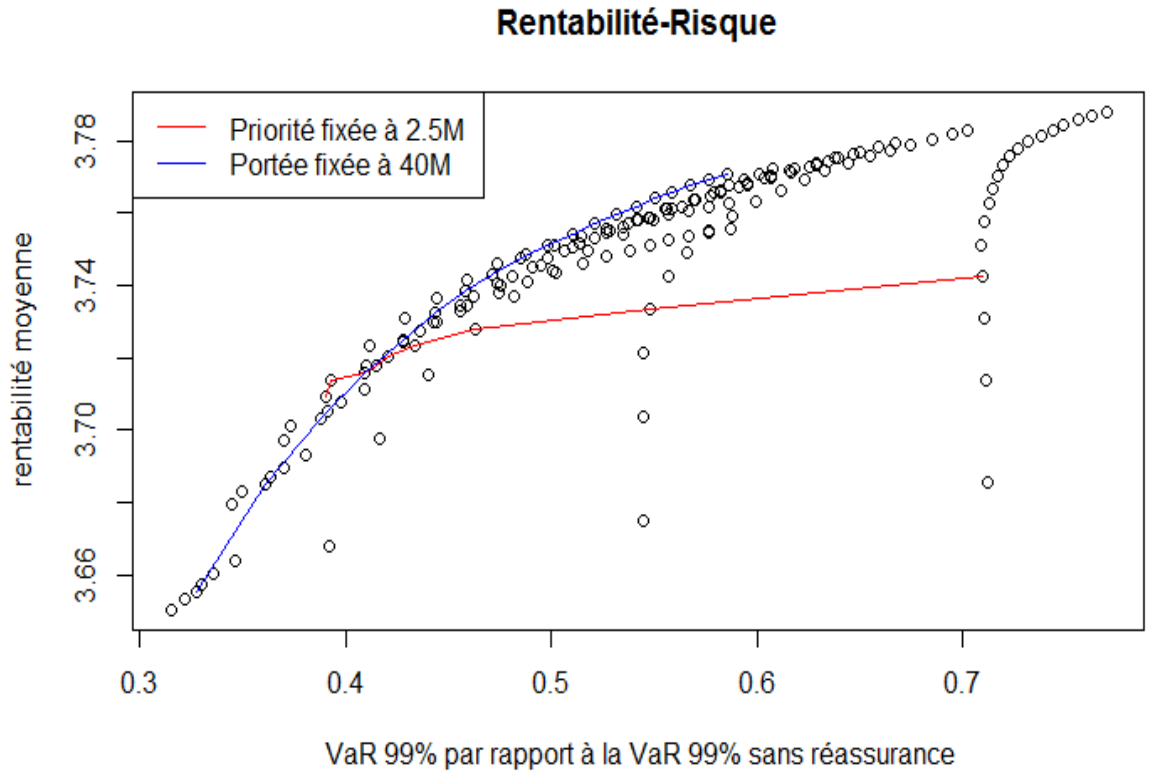


FIGURE 32: NUAGE DE POINTS RENTABILITE/RISQUE POUR LA BRANCHE DAB DES PARTICULIERS

Les résultats sont similaires à la branche RC automobile. La frontière d'efficience permet de sélectionner le programme correspondant à l'objectif établit dans le plan stratégique. Une portée de 40M€ est optimale à partir d'un certain niveau de rentabilité. Ainsi, pour une rentabilité minimum de 3,75%, les programmes de réassurance suivants sont optimaux. Il conviendra ensuite d'en choisir un en fonction de l'appétit pour le risque de la cédante.

40 XS 4
40 XS 4,5
40 XS 5
40 XS 5,5
40 XS 6
40 XS 6,5
40 XS 7
40 XS 7,5
40 XS 8
40 XS 8,5
40 XS 9
40 XS 9,5
40 XS 10

FIGURE 33: TRAITES XS OPTIMAUX DOMMAGES AUX BIENS DES PARTICULIERS(UNITE=M€)

2.3 Multi-branches XS

Afin de prendre en compte à la fois les traités en excédent de sinistre retenus à la section précédente et les traités multi-branches, les étapes à suivre sont les suivantes :

Etape 1 : Simuler les sinistres par une approche fréquence-coût pour chacune des deux branches de façon indépendante.

Etape 2 : Calculer les sinistralités annuelles pour chaque scénario.

Etape 3 : Réorganisation des sinistralités annuelles afin de tenir compte de la structure de dépendance.

a) Simulation d'une copule gaussienne de dimension deux et de paramètre 0,25 ;
b) récupération des vecteurs des rangs des deux variables ;
c) réorganisation des sinistralités en mettant à la ligne B la sinistralité de rang égal à celui de la ligne B du vecteur de rangs obtenu en b).

Etape 4 : Prise en compte des traités XS traditionnels pour chacune des branches et du coût de ces traités.

Etape 5 : Calcul des sommes éligibles pour chaque scénario

a) S_B^{RC}=$\sum_{i=1}^{N^{RC}} Y_i^{RC}$
b) S_B^{DAB}=$\sum_{i=1}^{N^{DAB}} Y_i^{DAB}$
c) $S_B = S_B^{RC} + S_B^{DAB}$

La somme s'effectue sur les montants éligibles dont la dépendance est prise en compte indirectement suite à la réorganisation des sinistralités annuelles.

Etape 6 : Cotation du traité $\widehat{\mathbb{E}}\left(S_{cédée}^{MAAD,MAAL}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} min\left[max(S_B - MAAD; 0) \;\; ; MAAL\right]$

Etape 7 : Prise en compte du traité XS multi-branches en-dessous de la priorité des traités XS de chacune des deux branches et de son coût.

Suites aux étapes 1 à 3, le graphique suivant illustre la différence au niveau de la courbe de la sinistralité grave si l'on modélise la structure de dépendance ou non. La courbe diffère peu. La sinistralité moyenne est égale. Néanmoins, les différents niveaux des quantiles diffèrent. La prise en compte de la dépendance augmente par exemple la VaR à 99% de 6% et la TvaR à 95% de 5,7%.

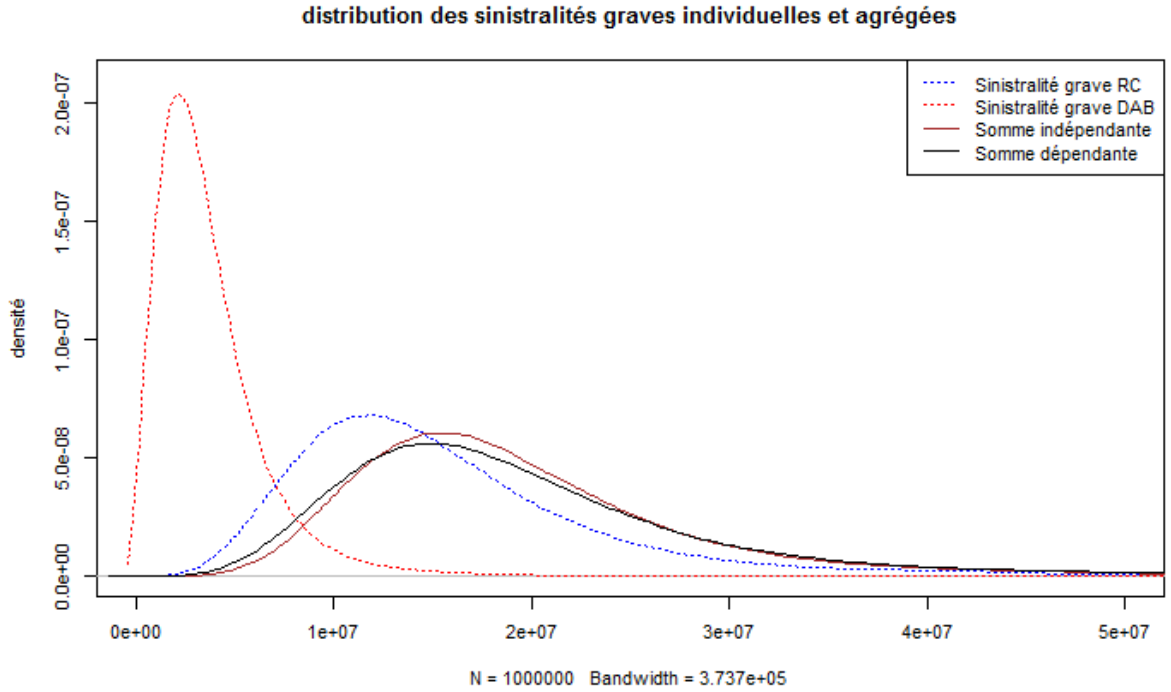


FIGURE 34: DISTRIBUTION DES SINISTRALITES GRAVES INDIVIDUELLES ET AGREGEES

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90	95	99	90	95	99
Sinistralité grave RC	15.776.566	25.785.518	31.786.583	45.340.805	34.299.450	40.248.507	51.927.349
Sinistralité grave DAB	3.780.426	7.085.753	9.018.059	15.430.757	10.764.254	13.612.358	23.573.305
Somme indépendante	19.556.992	30.479.671	36.738.954	50.543.679	39.280.043	45.407.154	58.110.909
Somme dépendante	19.556.992	31.511.804	38.289.267	53.581.971	41.218.922	48.000.610	62.885.246
Variation	+0%	+3,39%	+4,22%	+6.01%	+4,94%	+5,71%	+8,22%

TABLEAU 9: EFFET DE LA PRISE EN COMPTE DE LA DEPENDANCE (UNITE=EURO)

Etape 4 : Prise en compte des traités XS traditionnels pour chacune des branches et du coût de ces traités.

Cotation des traités XS traditionnels

	RC AUTO	DAB PART
Priorité	4.000.000	4.000.000
Portée	30.000.000	40.000.000
Taux de prime	4,53%	2,55%
Prime minimum	2.831.814	1.145.275

TABLEAU 10: COTATION DES TRAITES XS (UNITE=EURO)

Prise en compte des traités sur chacune des branches

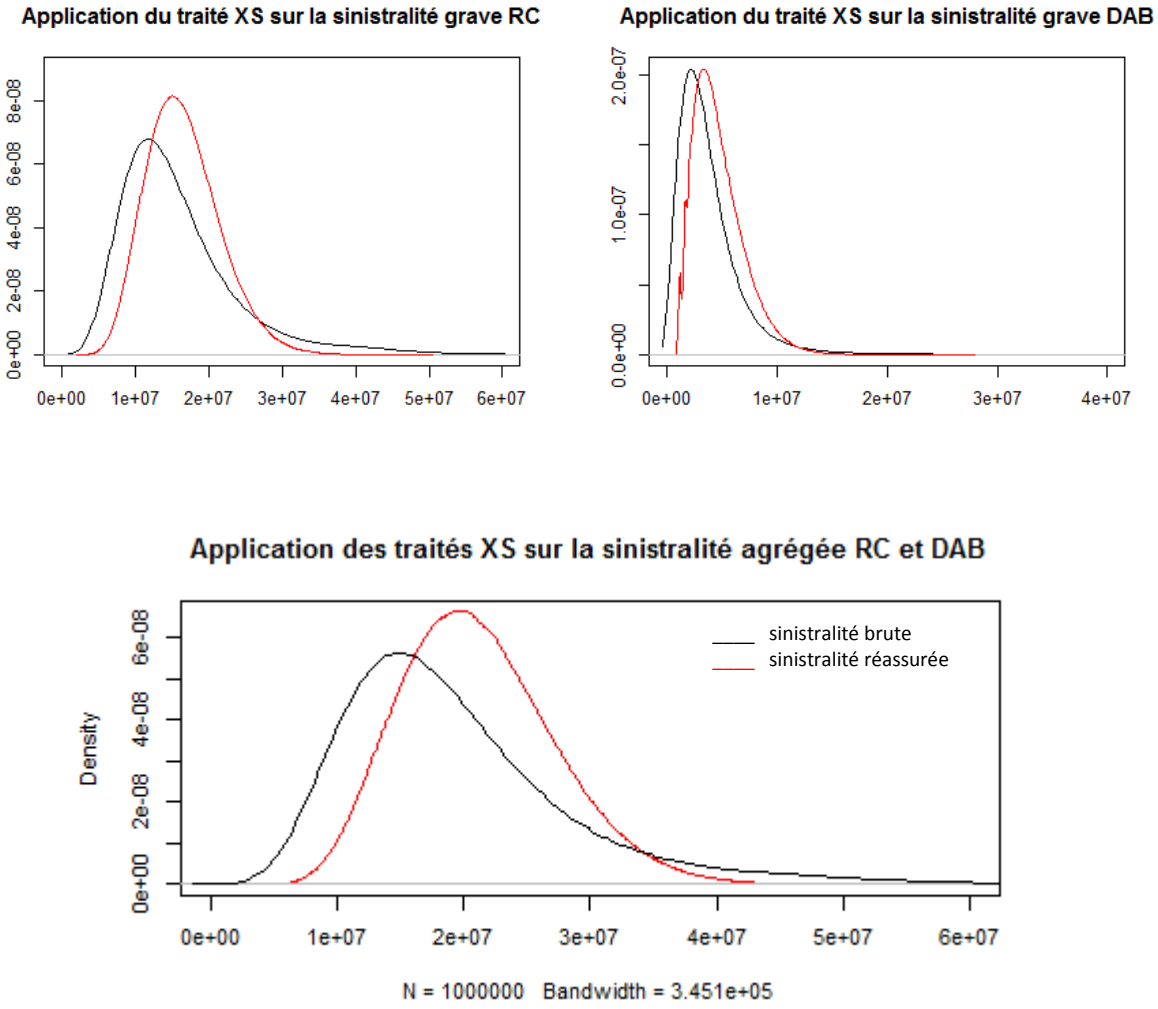


FIGURE 35: APPLICATION DES TRAITES XS

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90	95	99	90	95	99
Somme dépendante	19.556.992	31.511.804	38.289.267	53.581.971	41.218.922	48.000.610	62.885.246
Sinistralité réassurée	21.119.153	29.223.793	31.924.773	37.239.192	32.818.733	35.191.431	40.021.286
Variation	+8%	-7,26%	-16,62%	-30,50%	-20,37%	-26,68%	-36,36%

TABLEAU 11 : EFFET DES TRAITES XS SUR LA SINISTRALITE AGREGEE

Ainsi, la couverture par deux traités XS entraine une augmentation de la charge moyenne des sinistres graves à cause de la translation vers la droite de la courbe suite au paiement de la prime de réassurance. Néanmoins, nous remarquons que la queue de distribution de la sinistralité agrégée est beaucoup moins prononcée que sans programme de réassurance. Ce constat est confirmé par la variation des indicateurs de risque à la baisse.

Etape 5 : Calcul des sommes éligibles pour chaque scénario

L'idée étant que le traité multi-branches couvre les sinistres en-dessous des priorités des traités XS de chacune des branches. Il faudrait donc que les tranches se superposent c'est-à-dire que :

$$d^{RC} + p^{RC} = D^{RC} = 4M$$

$$d^{DAB} + p^{DAB} = D^{DAB} = 4M$$

On prendra par exemple,

$$d^{RC} = D^{RC} - p^{RC} = 4M - 1M = 3M$$

$$d^{DAB} = D^{DAB} - p^{DAB} = 4M - 1M = 3M$$

	Branche RC	Branche DAB
Priorité	3M	3M
Portée	1M	1M

TABLEAU 12: CHOIX N°1 DES PARAMETRES DU TRAITE MULTI-BRANCHES (UNITE=EURO)

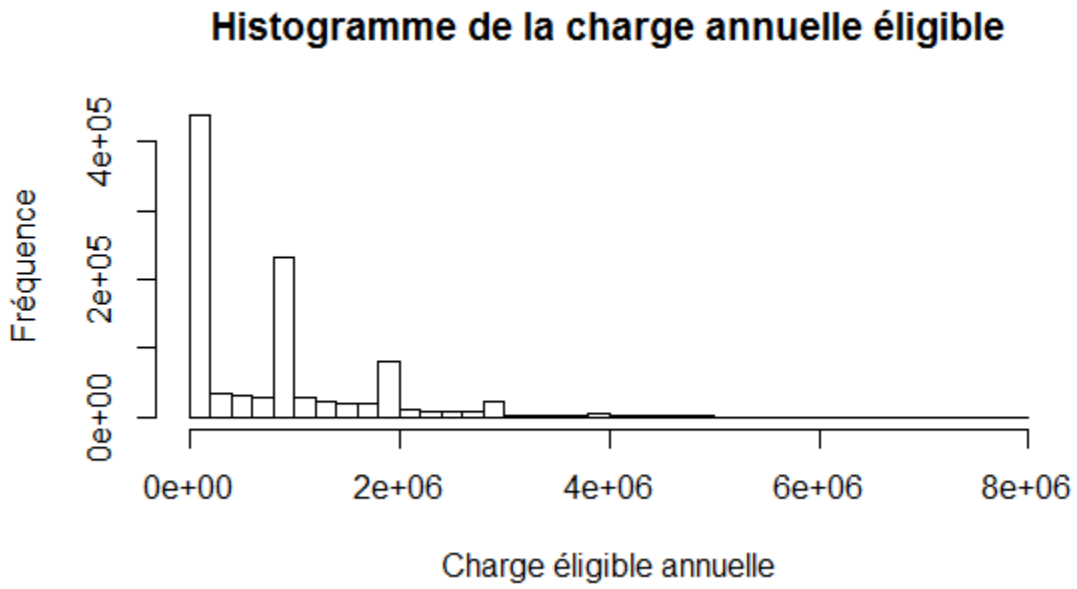


FIGURE 36: HISTOGRAMME DE LA CHARGE ANNUELLE ELIGIBLE AU TRAITE MULTI-BRANCHES N°1

L'histogramme de la charge annuelle éligible montre que les priorités et portées écrêtent trop les sinistres et que les montants résiduels sont faibles. En prenant par exemple $MAAD = 2M$ et $MAAL = 6M$, le réassureur prendra en charge une partie des sinistres au titre du traité multi-branches dans très peu de scénarios. Ainsi, la prime pure, étant la moyenne des charges probables du réassureur, sera aussi relativement faible.

Etape 6 : Cotation du traité multi-branches

Calcul de la prime

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(S_{cédée}^{MAAD,MAAL}\right) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} min\left[max(S_B - MAAD; 0) \;\; ; MAAL\right]$$

$$= \frac{1}{10^6}\sum_{i=1}^{10^6} min\left[max(S_B - 2M; 0) \;\; ; 6M\right]$$

$$= 60.667{,}55€$$

Etape 7 : Prise en compte du traité XS multi-branches en-dessous de la priorité des traités XS de chacune des deux branches et de son coût.

Impact sur la sinistralité

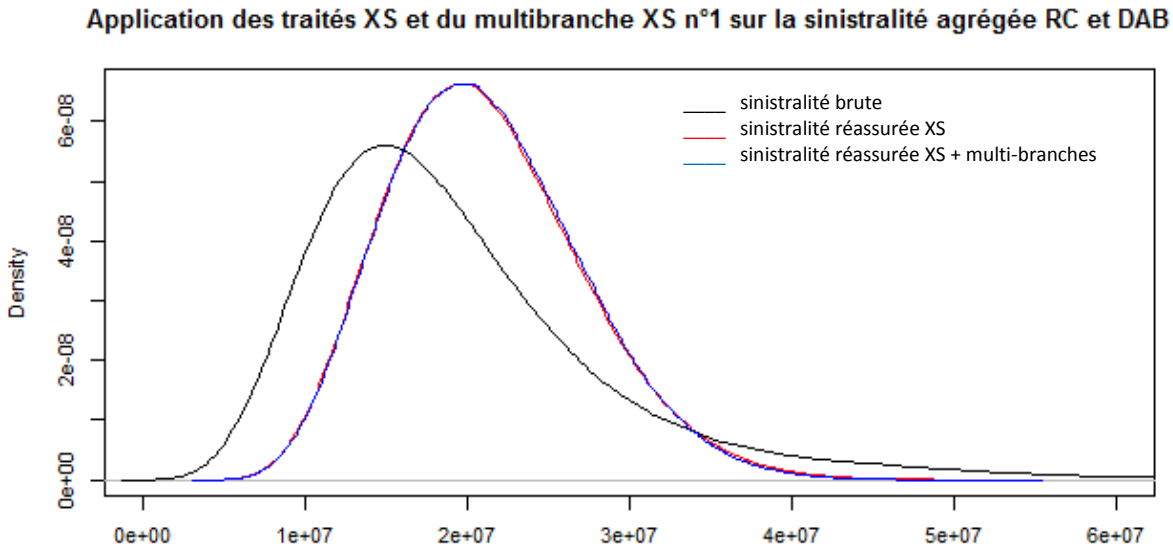


FIGURE 37: IMPACT D'UN PREMIER TRAITE MULTI-BRANCHES SUR LA SINISTRALITE AGREGEE

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90	95	99	90	95	99
Somme dépendante	19.556.992	31.511.804	38.289.267	53.581.971	41.218.922	48.000.610	62.885.246
Sinistralité réassurée XS	21.119.153	29.223.793	31.924.773	37.239.192	32.818.733	35.191.431	40.021.286
Variation	+8%	-7,26%	-16,62%	-30,50%	-20,37%	-26,68%	-36,36%
Multi-branches XS	21.134.320	29.119.727	31.664.439	36.548.647	32.465.961	34.657.466	39.029.312
Variation par rapport XS	=	-0,35%	-0,8%	-1,85%	-1,07%	-1,51%	-2,47%

TABLEAU 13 : EFFET DU TRAITE MULTI-BRANCHES N°1 SUR LA SINISTRALITE AGREGEE (UNITE=EURO)

Cette couverture n'est pas très intéressante. En effet, elle ne permet pas de respecter les contraintes de la compagnie en termes de réduction des niveaux des indicateurs de risques. On pourrait alors envisager une stratégie n°2 :

$$d^{RC} = D^{RC} - p^{RC} = 4M - 2M = 2M$$

$$d^{DAB} = D^{DAB} - p^{DAB} = 4M - 3M = 1M$$

	Branche RC	Branche DAB
Priorité	2M	1M
Portée	2M	3M

TABLEAU 14: CHOIX N°2 DES PARAMETRES DU TRAITE MULTI-BRANCHES (UNITE=EURO)

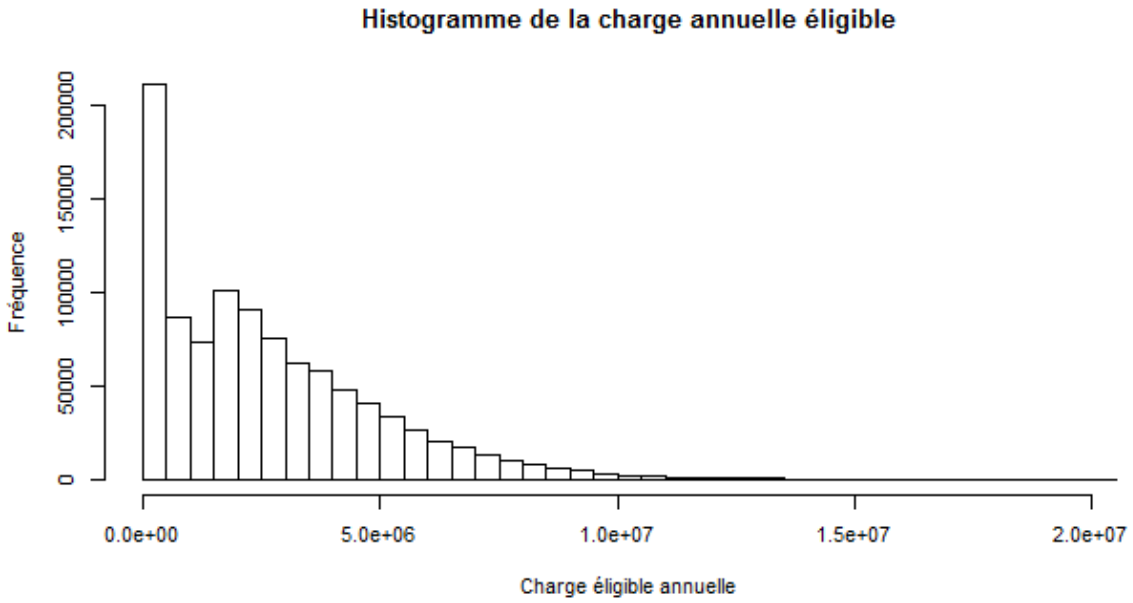


FIGURE 38: HISTOGRAMME DE LA CHARGE ANNUELLE ELIGIBLE AU TRAITE MULTI-BRANCHES N°2

L'histogramme montre, pour ce deuxième traité, des charges éligibles moins écrêtées et donc que ce programme aura un effet sur plus de scénarios.

En gardant $MAAD = 2M$ et $MAAL = 6M$. La prime estimée est :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(S_{cédée}^{2M,6M}\right) = 1.162.242€$$

Impact sur la sinistralité

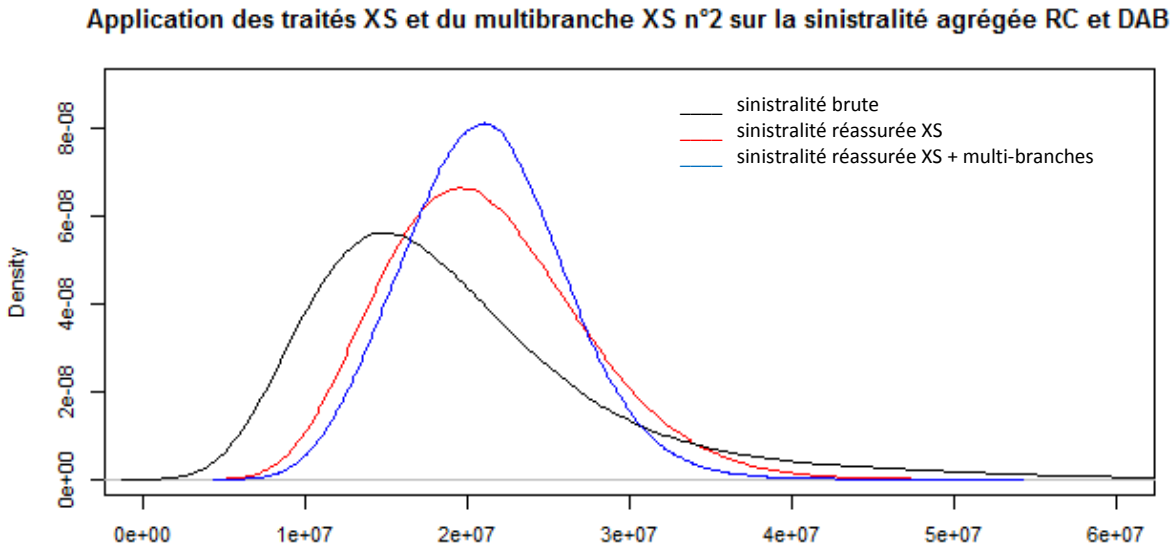


FIGURE 39 : IMPACT D'UN SECOND TRAITE MULTI-BRANCHES SUR LA SINISTRALITE AGREGEE

	Moyenne	VaR			TVaR		
		90	95	99	90	95	99
Somme dépendante	19.556.992	31.511.804	38.289.267	53.581.971	41.218.922	48.000.610	62.885.246
Sinistralité réassurée XS	21.119.153	29.223.793	31.924.773	37.239.192	32.818.733	35.191.431	40.021.286
Variation	+8%	-7,26%	-16,62%	-30,50%	-20,37%	-26,68%	-36,36%
Multi-branches XS	21.409.713	27.770.683	29.754.978	33.805.468	30.465.049	32.262.727	36.153.987
Variation par rapport XS	+1,37%	-4,97%	-6,80%	-9,22%	-7,17%	-8,32%	-9,66%

TABLEAU 15 : EFFET DU TRAITE MULTI-BRANCHES N°2 SUR LA SINISTRALITE AGREGEE (UNITE=EURO)

Le graphique indique une réduction de la queue de distribution et la courbe gagne en symétrie. La translation de la courbe à cause de la prime de réassurance est faible, entrainant une variation de 1,37% de la sinistralité moyenne. Ce programme permet de couvrir un risque de forte fréquence des sinistres « moyens », c'est-à-dire en dessous des rétentions des traités XS individuels. Les paramètres de ce traité, les MAAD et MAAL permettent de choisir les seuils d'intervention et de couverture de ces sinistres.

CONCLUSION

La première partie de ce mémoire a présenté une méthode de modélisation de la sinistralité des sociétés d'assurance non-vie. Cette approche a été conçue pour un portefeuille où les données historiques sont limitées et seuls les montants dépassant un seuil sont disponibles individuellement. Ainsi, il a d'abord fallu modéliser les sinistres de fréquence ou attritionnels à partir des triangles de règlements ou des triangles des coûts moyens et des nombres de sinistres. Le seuil de collecte entraine une troncature des données, et c'est la raison pour laquelle la modélisation des sinistres graves a été effectué avec des lois de probabilités tronquées à gauche : la loi de Pareto Généralisée, bien adaptée pour des données à queues lourdes, ou d'autres lois tronquées telles que la loi Log-Normale.

La problématique de la dépendance entre la sinistralité attritionnelle et la sinistralité grave d'une même année a été abordée. Lorsque ces deux types de sinistralité sont modélisés séparément, une approche possible serait de les agréger en modélisant la structure de dépendance par une copule de dimension deux en considérant que ce sont les nombres de sinistres qui sont source de dépendance. Une année avec beaucoup de sinistres attritionnels est une année qui comporte aussi un nombre important de sinistres graves. La copule normale, par sa simplicité, a été retenue pour cette modélisation. Néanmoins, celle-ci ne modélise pas bien les dépendances de la queue de distribution c'est-à-dire une dépendance plus forte sur les extrêmes que sur le reste de la distribution. La calibration d'une telle copule nécessite d'avoir un historique important des nombres de sinistres graves et des nombres de sinistres attritionnels par période. En l'absence de ces données, la copule normale a été calibrée à partir de l'estimation du coefficient de corrélation de Pearson calculée sur onze observations.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés au pilotage du programme de réassurance non-proportionnelle et plus précisément sur les deux types de traités excédents de sinistre et excédents de sinistre multi-branches (ou *Aggregate XL*) et de l'impact de ces traités sur la distribution de la sinistralité graves. La prime de réassurance payée par la cédante est un élément important qui translate la distribution de la sinistralité à droite. Il a donc fallu tarifer de tels produits de réassurance. Une approche par formule fermée a été possible concernant les traités XS, la prime pure dépendant à la fois des paramètres estimés de la distribution des sinistres graves retenue et des paramètres du traité, la priorité et la portée. La tarification du traité XS multi-branches a été effectuée à partir de simulations. Tout d'abord, l'approche a consisté à prendre en compte la structure de dépendance entre les sinistralités graves annuelles des branches réassurées puis d'appliquer le programme à chaque scénario. La prime pure s'obtient alors en faisant la moyenne de la charge du réassureur pour tous les scénarios. Ces programmes de réassurance ont été appliqués à deux branches calibrées dans la partie 1 : la responsabilité civile automobile et la branche « dommages aux biens des particuliers ».

L'idée a été que le traité multi-branches vienne s'ajouter en-dessous des rétentions des programmes XS individuels. Ainsi, la couverture multi-branches sert à couvrir un risque de forte fréquence des sinistres « moyens ». Il ressort de cette étude que de tels programmes multi-branches entrainent une réduction de la queue de la distribution des sinistres. De

même, les multiples paramètres comme la franchise annuelle ou la limite annuelle permettent de trouver un programme adapté à la politique ERM de la compagnie.

En effet, le choix d'un programme de réassurance doit suivre une étude approfondie sur un ensemble d'indicateurs de rentabilité et de risque. Il serait par exemple intéressant d'étudier l'impact des différents traités sur la réduction des fonds propres exigibles au titre de l'activité. Etant donné que de nombreuses compagnies d'assurance utilisent la formule standard afin de calculer les capitaux règlementaires, l'impact d'une réduction de SCR serait un critère important de sélection.

BIBLIOGRAPHIE

AGENOS Xavier. *Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance Non Vie.* 2006. Mémoire CEA.

BEIRLANT J., GOEGEBEUR Y., SEGERS J., TEUGELS J., [2004], "*Statistics of extremes: Theory and Applications"*, Wiley.

BOROWICZ J.P, NORMAN J.M. [2006], "The effects of parameter uncertainty in the extreme event frequency-severity model". ICA proceedings, Paris, 2006.

BOROWICZ J.P, NORMAN J.M. [2006], "The effects of parameter uncertainty in dependency structures. " ICA proceedings, Paris, 2006.

DAVISON A., SMITH H., [1990], "Models for exceedances over high thresholds (with discussion) *", Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 52, p. 393-442.

DIEBOLT J., GUILLOU A., RACHED I., [2007], "Approximation of the distribution of excesses through a generalized probability-weighted moments method", *Journal of statistical planning and inference*, n°137, p. 841-857.

FFSA, GEMA, [2011], "Le marché de l'assurance automobile en 2011".

GUILLOU A., YOU A., Introduction à la théorie des valeurs extrêmes : Applications en actuariat. Présentation. Ecole d'été, Strasbourg. 2011.

HOSKING J., WALLIS J., [1987], "Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution", *Technometrics*, n°29, p. 339-349.

JONDEAU E., ROCKINGER M., [1999], "The tail behavior of stock returns : emerging versus mature markets", Banque de France, Note d'étude et de recherche n°66.

MACK T., [1993], "Distibution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates" *ASTIN Bulletin*, n°2, p. 213-225.

MCNEIL A., [1997], "Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory", *ASTIN Bulletin*, n°27, p. 117-137.

MERCAT Mathias. *Relaxation de l'hypothèse d'indépendance dans la tarification des traités "Multiline Aggregate Excess of Loss"*. 2015. Mémoire ISUP.

PICKANDS, J. [1975], "Statistical inference using extreme order statistics", *Ann. Statist.,* n°3, p. 119-131.

PONS Arthur. *Risque de primes en assurances non vie – calibrage et formules d'approximation*. 2012. Mémoire ISFA.

SMITH R.L., [1984], "threshold methods for sample extremes", *Statistical Extremes and Applications*, ed. J. Tiago de Oliveira, p.621-638.

WALHIN J.F., [2001], "On the practical multiline excess of loss pricing", *CAS Forum*, p.121-152

WALHIN J.F., [2003], "On the optimality of multiline excess of loss covers", *Institut des Sciences Actuarielles*, *Université Catholique de Louvain*.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1: Cadre de l'assurance non vie 10
Figure 2: Risque de portefeuille et risque de sinistralite future 12
Figure 3: Processus de détermination de l'appétit pour le risque 15
Figure 4: Illustration distribution des valeurs extrêmes 19
Figure 5: Illustration densité de la Pareto Généralisée 20
Figure 6: Excès au dessus du seuil 23
Figure 7: Illustation estimation GPWM 26
Figure 8: Cadences des règlements en assurance IARD 29
Figure 9: Illustration méthode de choix du seuil 33
Figure 10: Illustration des lois tronquées exemple de la loi Log-Normale 39
Figure 11: Taux d'inflation annuels des salaires mensuels de base - Activités pour la santé humaine (source INSEE) 40
Figure 12: Taux d'inflation des prix à la consommation - Réparation de véhicules personnels (source INSEE) 41
Figure 13: Taux d'inflation pour la branche rc automobile 41
Figure 14: Montants "*as-if*" des sinistres graves de la branche RC automobile 42
Figure 15: Graphique des excès moyens empiriques de la branche responsabilité civile automobile 42
Figure 16: Estimateurs du paramètre de forme de la loi GPD en fonction du nombre d'excès pour la branche RC automobile 43
Figure 17: Qualité de l'ajustement par la GPD 43
Figure 18: Q-Q plot en fonction du nombre d'excès 44
Figure 19 : Mesure de l'ajustement de la fréquence des sinistres graves avec une loi de Poisson 46
Figure 20: Fonctions de répartition empirique et théoriques, ajustement des nombres de sinistres attritionnels 48
Figure 21: Illustration simulations Monte Carlo 49
Figure 22: Agrégation de la sinistralité 53
Figure 23: Illustration copule gaussienne δ=0,4 et δ=0,8 56
Figure 24: Nombre de sinistres attritionnels en fonction du nombre de sinistres graves de la même année 58
Figure 25: Distribution de la charge de sinistralité brute de la branche responsabilité civile automobile en fonction de la méthode d'agrégation des attritionnels et des graves 58
Figure 26: Sinistres as-if et plan de réassurance 63
Figure 27: Exemple de cotation des traités XS (branche RC automobile) 65
Figure 28: Illustration traité multi-branches 68
Figure 29: Illustration de l'impact du traité XS sur la sinistralité RC automobile 73
Figure 30: Nuage de points rentabilité/risque pour la branche RC automobile 74
Figure 31: Illustration de l'effet de l'augmentation de la priorité sur la distribution de la charge des sinistres graves 75
Figure 32: Nuage de points rentabilité/risque pour la branche DAB des particuliers 76
Figure 33: Traités XS optimaux Dommages aux biens des particuliers 77
Figure 34: Distribution des sinistralités graves individuelles et agrégées 79
Figure 35: Application des traités XS 80
Figure 36: Histogramme de la charge annuelle éligible au traité multi-branches n°1 81
Figure 37: Impact d'un premier traité multi-branches sur la sinistralité agrégée 82
Figure 38: Histogramme de la charge annuelle éligible au traité multi-branches n°2 83
Figure 39 : Impact d'un second traité multi-branches sur la sinistralité agrégée 84

ANNEXES

ANNEXE 1 : LISTE DES ABREVIATIONS ET NOTATIONS

Liste des abréviations :

AAD : *Annual aggregate deductible* ou franchise annuelle

AAL : *Annual aggregate limit* ou engagement maximal annuel

DAB : Dommages aux biens

ERM : *Entreprise Risk Management* ou gestion des risques de l'entreprise

GPD : *Generalized Pareto Distribution* ou loi de Pareto Généralisée

GEV : *Generalized Extreme Value* ou loi des valeurs extrêmes

GPWM : *Generalized Probability-Weighted Moments* ou moments pondérés généralisés

IARD : Incendie, acccidents et risques divers

IBNER : *Incurred But Not Enough Reported*

IBNYR : *Incurred But Not Yet Reported*

LOB : *Line Of Business* ou ligne d'activité

MI(P) : Modèle Interne (Partiel)

MLE : *Maximum Likelihood Estmation* ou estimation par maximum de vraisemblance

ORSA : *Own Risk and Solvency Assessment ou* évaluation interne des risques et de la solvabilité

POT : *Peaks Over Threshold* ou pics au-delà du seuil

SCR : *Solvency Capital Requirement* ou fonds propres exigés

SL : *Stop Loss* ou excédent de perte

XL : eXcess of Loss ou excédent de sinistre (XS)

Notations :

Pour toute variable aléatoire Z :

- La fonction de répartition est $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$
- La fonction de survie est $\bar{F}_Z(x) = \mathbb{P}(Z > x) = 1 - F_Z(x)$
- F_u est la fonction de répartition des excès $F_u(x) = \mathbb{P}(Z - u \leq x | Z > u)$
- La variable Z, u est la variable Z tronquée à gauche en u de fonction de répartition :

$$F_{Z,u}(x) = \mathbb{P}(Z \leq x | Z > u) = F_u(x - u)$$

ANNEXE 2 : TRIANGLES DES CHARGES ET DES NOMBRES POUR LA BRANCHE RC AUTOMOBILE

TRIANGLE DES REGLEMENTS TOTAUX (EN MILLIONS D'EUROS), NOMBRES TOTAUX, REGLEMENTS DES SINISTRES GRAVES (EN MILLIONS D'EUROS), ET NOMBRES DE SINISTRES GRAVES

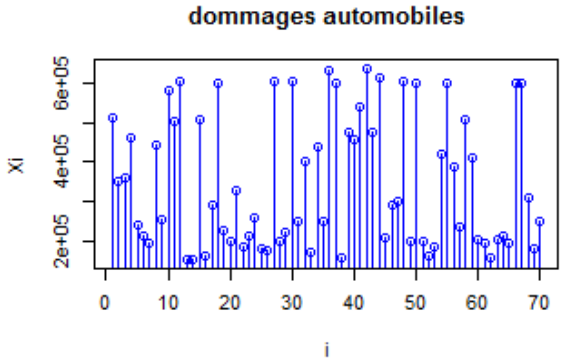
Règlements	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	17,20	32,93	37,48	40,21	41,47	43,27	44,23	45,23	45,60	45,77	45,93
2	17,84	32,91	36,84	39,52	41,06	42,03	42,46	42,88	42,96	43,08	
3	17,71	31,85	36,42	38,31	40,57	41,86	42,43	43,75	43,98		
4	19,18	36,70	41,77	44,83	46,69	48,62	49,10	49,79			
5	21,47	35,20	39,45	42,56	44,59	45,47	46,78				
6	19,02	32,89	37,32	40,65	41,83	43,37					
7	18,83	32,49	36,75	38,94	39,74						
8	20,16	34,65	39,96	41,90							
9	19,84	34,43	38,78								
10	20,93	36,58									
11	22,03										

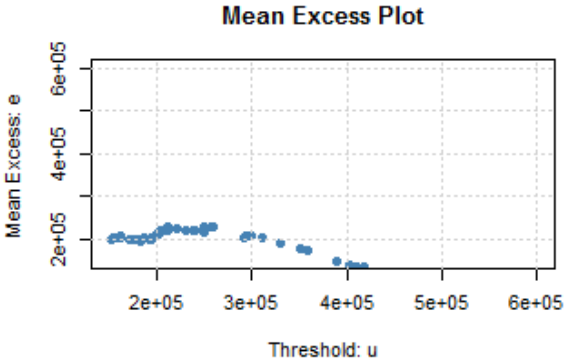
Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	23048	26276	26393	26425	26452	26460	26462	26467	26468	26468	26468
2	23839	27358	27538	27567	27586	27591	27594	27598	27599	27599	
3	24674	27768	28007	28032	28049	28061	28067	28067	28067		
4	27044	31398	31727	31765	31777	31781	31782	31783			
5	27737	31462	31684	31711	31719	31729	31729				
6	25874	29179	29367	29412	29425	29425					
7	24764	28302	28505	28527	28537						
8	27403	30966	31169	31201							
9	27510	30278	30452								
10	28933	31960									
11	28679										

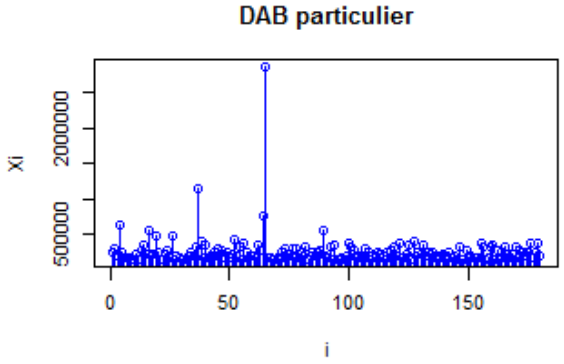
Règlements graves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,38	1,25	2,28	3,46	3,90	4,49	5,05	5,95	6,24	6,34	6,37
2	0,09	1,04	2,06	3,13	3,93	4,49	4,64	4,66	4,70	4,77	
3	0,23	1,01	1,81	1,96	3,30	4,06	4,28	5,57	5,71		
4	0,12	3,44	4,72	6,48	7,60	8,98	9,18	9,53			
5	0,05	0,71	1,19	2,49	3,44	4,11	4,87				
6	0,22	1,55	2,27	4,00	4,27	4,99					
7	0,07	1,11	1,57	1,80	2,01						
8	0,34	0,75	1,83	2,05							
9	0,08	1,13	1,43								
10	0,21	1,76									
11	0,40										

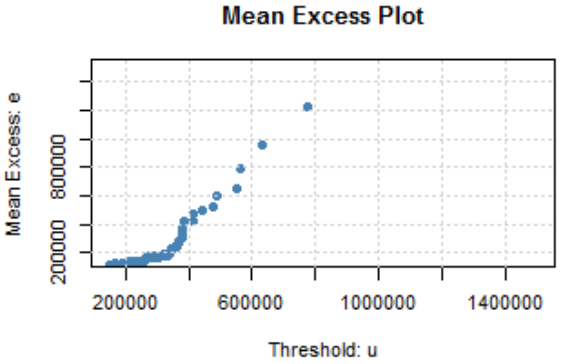
Nombre de graves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
3	7	7	7	7	7	8	8	8	8		
4	12	13	13	13	14	14	14	14			
5	8	9	9	9	9	9	9				
6	13	13	13	13	13	13					
7	11	12	12	12	12						
8	12	14	15	15							
9	13	14	14								
10	14	15									
11	15										

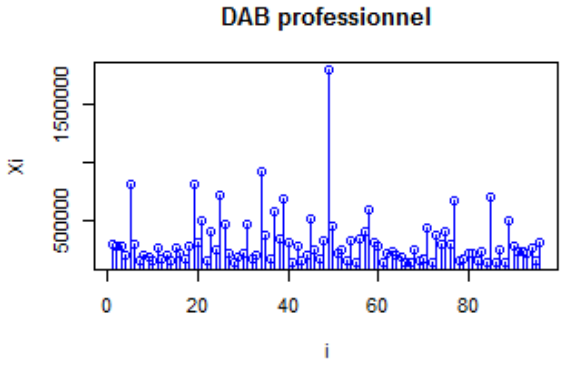
ANNEXE 3 : FONCTION DES EXCES MOYENS DES DIFFERENTES BRANCHES

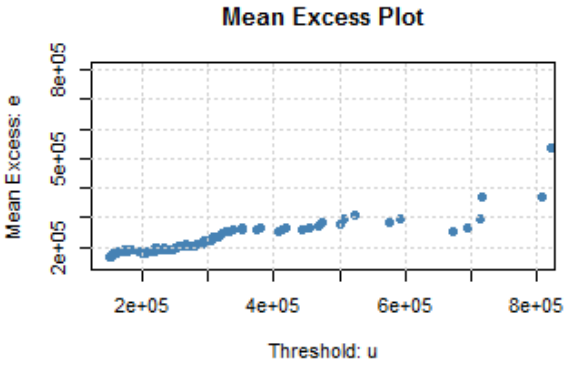


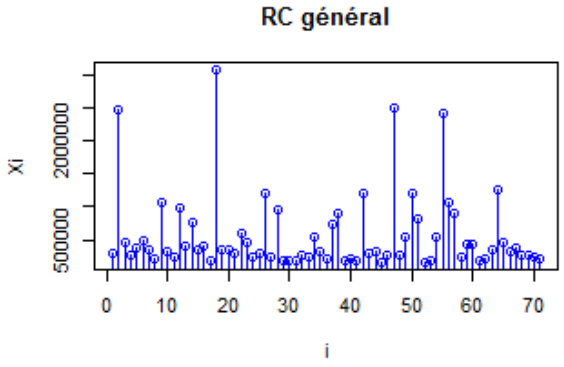


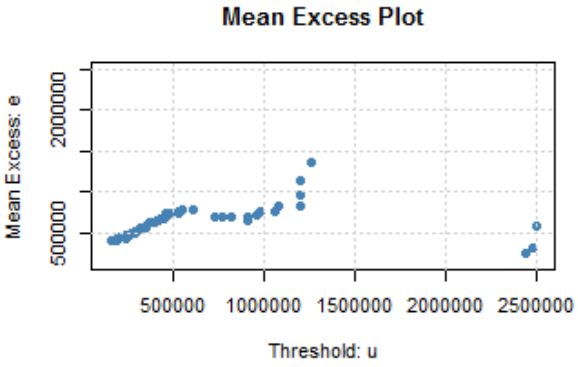












ANNEXE 4 : CALIBRAGE DES AUTRES BRANCHES D'ASSURANCE

Responsabilité civile générale

Sinistralité grave				**Sinistralité attritionnelle**			
Fréquence		Sévérité		Fréquence		Coût	
Loi	Poisson	Loi	Pareto généralisée	Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètre	$\lambda = 3{,}6$	Paramètres	$\gamma = 0{,}321$ $\sigma = 156878{,}2$	Paramètres	$r = 77{,}62$ $p = 1{,}17.10^{-2}$	Paramètres	$\mu = 867{,}46$ $\sigma = 161{,}03$
Seuil 200.000							

Dommages aux biens des particuliers

Sinistralité grave				**Sinistralité attritionnelle**			
Fréquence		Sévérité		Fréquence		Coût	
Loi	Poisson	Loi	Pareto généralisée	Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètre	$\lambda = 3$	Paramètres	$\gamma = 0{,}67$ $\sigma = 318227{,}7$	Paramètres	$r = 90{,}69$ $p = 3{,}79.10^{-3}$	Paramètres	$\mu = 750{,}76$ $\sigma = 64{,}27$
Seuil 350.000							

Dommages aux biens des professionnels

Sinistralité grave				**Sinistralité attritionnelle**			
Fréquence		Sévérité		Fréquence		Coût	
Loi	Poisson	Loi	Pareto généralisée	Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètre	$\lambda = 5{,}6$	Paramètres	$\gamma = 0{,}112$ σ =229146,3	Paramètres	$r = 27{,}05$ $p = 6{,}59.10^{-3}$	Paramètres	$\mu = 3217{,}27$ $\sigma = 428$
Seuil 300.000							

Dommages automobiles

Sinistralité grave				**Sinistralité attritionnelle**			
Fréquence		Sévérité		Fréquence		Coût	
Loi	Poisson	Loi	Log-Normale tronquée	Loi	Binomiale Négative	Loi	Normale
Paramètre	$\lambda = 11{,}2$	Paramètres	$\mu = 12{,}39$ $\sigma = 0{,}65$	Paramètres	$r = 385{,}89$ $p = 6{,}05.10^{-3}$	Paramètres	$\mu = 936{,}30$ $\sigma = 90{,}86$
Seuil=150.000							

ANNEXE 5 : CALCUL DES MOMENTS DE LA LOI LOG-NORMALE TRONQUEE A GAUCHE EN U

Calcul du moment d'ordre r

$$\mathbb{E}(X,u^r)=\int_u^{\infty}x^r.f_{X,u}(x)\,dx=\frac{\int_u^{\infty}x^r.f_X(x)\,dx}{1-\varphi\left(\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)}$$

Calcul du numérateur

$$\int_u^{\infty}x^r.f_X(x)\,dx=\int_u^{\infty}\frac{x^r}{\sqrt{2\pi}\sigma x}.exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\;\;dx$$

En posant le changement de variable $t=\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}$ il vient :

$$=\int_{\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;exp\{r(\sigma t+\mu)\}exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dx=exp\{r\mu\}\int_{\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;exp\left\{-\frac{t^2}{2}+r\sigma t\right\}dx$$

En remarquant que $-\frac{t^2}{2}+r\sigma t=-\frac{[(t-\sigma r)^2-(\sigma r)^2]}{2}$ et en posant le changement de variable $y=t-\sigma r$, il vient :

$$=exp\{r\mu\}\int_{\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}-\sigma r}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{y^2-(\sigma r)^2}{2}\right\}dy$$

$$=exp\left\{r\mu+\frac{(\sigma r)^2}{2}\right\}\int_{\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}-\sigma r}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy$$

$$=exp\left\{r\mu+\frac{(\sigma r)^2}{2}\right\}\varphi\left(\sigma r-\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(X,u^r)=\frac{exp\left\{r\mu+\frac{(\sigma r)^2}{2}\right\}\varphi\left(\sigma r-\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)}{\varphi\left(\frac{-ln(u)+\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\mathbb{E}(X,u\;\;)=\frac{exp\left\{\mu+\frac{(\sigma)^2}{2}\right\}\varphi\left(\sigma-\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right)}{\varphi\left(\frac{-ln(u)+\mu}{\sigma}\right)}$$

$$Var(X,u)=\mathbb{E}(X,u^2)-\left[\mathbb{E}(X,u\;\;)\right]^2$$

Formule de $\pi(D, illimité)$

Hypothèses : les Y_i sont indépendants et identiquement distribués et indépendants de $\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}$

$$\pi(D, illimité) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_{cédée})$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}} Y_i\right)$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N^{Gra}} Y_i \middle| N^{Gra}\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}[N^{Gra}.\,\mathbb{E}(Y_i)]$$
$$= \mathbb{E}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right) * \mathbb{E}(Y_i)$$
$$= \mathbb{E}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{Gra}}\right) * \mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right)$$

Le développement de $\mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right)$ donne :

$$\mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(X_i^{Gra} - D | X_i^{Gra} > D\right).\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} > D\right) + \mathbb{E}\left(X_i^{Gra} - D | X_i^{Gra} \leq D\right).\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} \leq D\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(X_i^{Gra} - D | X_i^{Gra} > D\right).\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} > D\right) + 0$$

En se rappelant que la fonction des excès moyens est :

$$e_{X_i^{Gra}}(x) = \mathbb{E}\left(X_i^{Gra} - x \middle| X_i^{Gra} > x\right) = \frac{\int_x^\infty \left(1 - F_{X_i^{Gra}}(x)\right) dx}{\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} > x\right)}$$

$$\mathbb{E}\left(\left(X_i^{Gra} - D\right)^+\right) = e_{X_i^{Gra}}(D).\mathbb{P}\left(X_i^{Gra} > D\right) = \int_D^\infty \left(1 - F_{X_i^{Gra}}(x)\right) dx$$
$$= \int_D^\infty \bar{F}_{X_i^{Gra}}(x) dx$$