

Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaire

Par :	Rachid ESAMSI		
Titre :	Allocation d'actifs obligataires sous Solvabilité 2 : L'approche d'Euler		
Confidentialité :	☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)		
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.			
Membres présents du jury de l'IA		Signature	Entreprise
M.	Frédéric PLANCHET		Nom : Natixis Asset Management
M.	Grégory BOUTIER		Signature :
Membres présents du jury de l'ISFA			Directeur de mémoire en entreprise
Mme.	Véronique MAUME-DESCHAMP		Nom : Xavier-André AUDOLI
			Signature :
			Invité
			Nom :
			Signature :
			Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)
			Signature du responsable entreprise
Secrétariat :			Signature du candidat
	Mme Christine DRIGUZZI		
Bibliothèque :			
	Mme Patricia BARTOLO		

Avertissement

Le contenu de ce document est exclusivement conçu à des fins d'information. Il ne constitue ni un élément contractuel, ni une recommandation d'achat ou de vente d'un fond de Natixis AM, titre ou stratégie d'investissement directement ou indirectement. Ce document reflète l'opinion personnelle de son auteur et la responsabilité de Natixis AM, de ses filiales ou de ses employées ne saurait être engagée par une prise de décision sur la base de ces informations. Les données contenues dans ce document, dans la mesure où elles sont issues de sources externes, n'ont pas fait l'objet de vérifications indépendantes et aucune déclaration ni aucun engagement ne sont donnés à leur égard. Aucune certitude ne doit donc être accordée sur l'exactitude, la sincérité, la précision et l'exhaustivité des données ou opinions contenues dans ce document.

Disclaimer

This material has been prepared solely for information purposes only and it is not intended to be and should not be considered as an offer, or a solicitation of an offer or an invitation or a personnel recommendation to buy or sell participating share in Natixis AM fund, any security or financial instrument, or to participate in any investment strategy, directly or indirectly. This material reflects the views and opinions of the individual authors at this date and in no way the official position or advices of any kind of these authors or of Natixis AM and thus does not engage the responsibility of Natixis AM nor of any of its officers or employees. All performance information set forth herein is based on historical data and, in some cases, hypothetical data. While the data (including any historical or hypothetical returns) in this material has been obtained from external sources deemed reliable, neither Natixis AM or their affiliates, officers employees guarantee its accuracy, timeliness or completeness.

Remerciements

Je remercie vivement Monsieur Frédéric PLANCHET, mon tuteur de mémoire, de m'avoir donné des conseils et explications tout au long de cette année de mémoire.

Je remercie également l'ensemble des professeurs de l'Institut de Science Financière et d'Assurance (ISFA) pour la qualité de leurs enseignements.

Je suis en particulier reconnaissant à Monsieur Xavier-André AUDOLI, mon responsable dans l'entreprise, d'avoir pris le temps de répondre à mes divers interrogations.

Résumé

Afin de piloter efficacement le niveau de fonds propres dans la nouvelle réglementation prudentielle solvabilité 2, les assureurs vont, plus que jamais, devoir définir des stratégies d'allocation d'actifs qui, tout en continuant à chercher un couple rendement-risque optimum, minimisent la consommation de capital réglementaire. Les gérants d'actifs ont l'opportunité de s'associer à leurs clients assureurs en les aidant à définir les meilleures stratégies d'actifs en fonction de leurs enjeux et objectifs de rentabilité et de consommation de fonds propres.

Ce travail s'intéresse à l'approche d'allocation d'actifs basée sur la méthode d'Euler et leur application dans le contexte de solvabilité 2. L'approche permet de disposer d'un budget de risque consolidé pour l'ensemble des risques auxquels le portefeuille obligataire est exposé. L'approche tient compte de la corrélation entre les différents actifs et le risque individuel de chaque titre, et nécessite de postuler une théorie afin de calculer les contributions au risque.

Nous cherchons donc à allouer le capital économique global Solvabilité II défini à partir d'une mesure de risque VaR (Value at Risk) en utilisant la méthode d'Euler.

Ce travail a également accordé une attention particulière aux modèles de taux d'intérêt appartenant à différentes classes de modèles (monofactoriel, multifactoriels, absence d'arbitrage, équilibre ou mixte des deux) ainsi qu'à la présentation des techniques et méthodes d'interpolation et extrapolation, essentielle pour la mise en place des courbes de taux et l'actualisation des flux d'engagements dans le cadre de LTGA.

Abstract

In order to efficiently manage the level of shareholder's equity under the new European insurance directive (Solvency 2), insurers will, more than ever, have to define asset allocation strategies which optimise the risk/return but, also minimize the regulatory capital charge. This presents an opportunity for asset managers to work with their insurance clients in defining the best asset strategies in light of their profitability objectives and the capital cost.

This document focuses on the Euler Asset Allocation approach and its application in the Solvency 2 context. The approach makes it possible to calculate an aggregated risk budget, by taking into account the correlation between assets and their stand-alone risk. An assumption as to the probability distribution has to be made in order to calculate risk contributions.

So, we seek to allocate the global economic capital defined with the risk measure VaR (Value at Risk) by using the Euler Method.

This document also pays particular attention to various classes of interest rate models (mono-factorial, multi-factorial, Arbitrage Free, a mix of the above) as well as a presentation of interpolation and extrapolation techniques and methods, essential for the implementation of rate curves and the actualization of the cash flows within the framework of LTGA.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Cadre réglementaire	4
3	Partie I : Évaluation du Risque de Taux et Crédit sous Solvabilité 2	5
3.1	Approche Standard	5
3.1.1	SCR Taux	6
3.1.2	SCR Credit	6
3.1.3	Exemple : Calcul de SCR de portefeuille obligataire :	8
3.1.4	Conclusion	9
3.2	Modèle interne	10
3.2.1	Analyse de Bilan et Expression Générale	10
3.2.2	Le modèle de Vasicek(1977)	11
3.2.3	Éléments de calibration du Modèle de Vasicek	12
3.2.4	Le modèle de Hull-White ou (Extended Vasicek)	13
3.2.5	Calibration de modèle de taux	16
3.3	Modèle Multi-factoriels de non-Arbitrage de Nelson-Siegel	18
3.3.1	Motivations	18
3.3.2	Formulation Mathématique	18
3.3.3	Application : La courbe de taux zéro-coupon	20
3.4	Les méthodes d'interpolation et d'extrapolation	30
3.5	Modélisation de risque de défaut	35
3.6	Le modèle à intensité de défaut LMN <i>Longstaff, Mithal, et Neis</i>	35
3.7	Calcul de SCR	40
3.8	Conclusion	42
3.8.1	Générateur de Scénarios Economiques (GSE)	43
4	Partie II : Modèles d'allocation d'actifs	44
4.1	Allocation stratégique d'un portefeuille obligataire dans le cadre de Solvabilité 2	44
4.2	L'approche d'Euler : le cas de parité de risque (Risk-Parity)	45
4.2.1	Motivations	45
4.2.2	Formulation mathématique	46
4.2.3	Application	49
4.2.4	lien avec le modèle de Markowitz.	52
4.3	L'allocation d'actifs dans le cadre de solvabilité 2	54
4.3.1	Maximisation de performance sous contrainte SCR	54
4.3.2	Risk Parity avec SCR	55

5 Conclusion générale **60**

6 Références **62**

7 Annexes **64**

7.1 Annexe A : Construction de la courbe zéro coupon initiale 64

7.2 Annexe C : Construction de la surface de volatilité forward 65

7.3 Filtre de Kalman 66

1 Introduction

La directive solvabilité 2, dont l'entrée en vigueur a été reportée à 2016, se traduit pour les assureurs par de nouvelles exigences en matière de gouvernance et gestion des risques, de reporting, de communication et de capital réglementaire, désormais calculées en fonction des risques inhérents à l'activité. L'objectif de la directive est de faire en sorte que les assureurs aient suffisamment de fonds propres pour faire face à leurs risques, sans mettre en danger leur pérennité et leurs engagements vis-à-vis des assurés. La directive concerne néanmoins une autre catégorie d'acteurs à laquelle elle ne fixe pourtant aucune obligation : les sociétés de gestion. En effet, les portefeuilles d'actifs que ces sociétés de gestion gèrent pour le compte des assureurs concentrent l'essentiel des risques de marché et de défaut auxquels ces assureurs sont exposés. L'un des enjeux majeurs des gestionnaires d'actifs est donc de satisfaire les besoins de pilotage et d'optimisation de niveau de fonds propres de leurs clients assureurs.

Pour faire face à ces exigences, les gestionnaires d'actifs doivent avoir une vision précise de la consommation de fonds propres induite par chaque investissement envisagé dans leur approche d'allocation. Pour cela, les gestionnaires d'actifs doivent notamment renforcer leurs outils et capacités de simulation d'actifs. La directive solvabilité 2 constitue donc pour les gestionnaires d'actifs une opportunité de renouveler leur offre de conseil et d'investissement en allocation d'actifs.

Compte tenu de la consommation élevée en fonds propres de certains investissements issus d'une allocation traditionnelle basée sur une approche rendement volatilité, les assets managers doivent adapter leur offre et intégrer les contraintes de solvabilité 2 dans la conception même des produits destinés à leurs clients assureurs.

La première partie de ce mémoire sera consacrée à la présentation des différentes approches de calcul de SCR dans le contexte de marché obligataire. Nous détaillerons l'aspect théorique et pratique de modèle de taux de Vasicek et Hull White et le modèle d'absence d'arbitrage de Nelson Siegel. Nous présenterons quelques méthodes d'interpolation et d'extrapolation nécessaires d'une part dans l'étape calibration des modèles de courbe de taux et d'autre part dans l'actualisation des flux de long terme (dans le cadre LTGA par exemple). Nous terminerons enfin par une présentation théorique de modèle de crédit de Longstaff, Mithal et Neis (LMN).

Dans la deuxième partie, nous décrirons l'approche de parité de risque *Risk-Parity* en l'adaptant à un besoin d'allocation sous contraintes de SCR sous certaines hypothèses en l'adaptant à l'environnement de solvabilité 2. Une modélisation en rendement volatilité est également donnée à titre de comparaison. Nous présenterons une application dans le cadre de l'optimisation d'un portefeuille obligataire à mettre en place pour couvrir les flux de passif.

2 Cadre réglementaire

Le projet solvabilité 2 a été adopté par la Commission européenne afin d’harmoniser et de renforcer la réglementation prudentielle de l’industrie d’assurance de l’Union européenne. Il s’agit donc d’un standard de marché qui vise à mieux mesurer et gérer les risques.

Cette réforme comporte trois grands volets appelés piliers :

Premier pilier : les exigences quantitatives, notamment en matière de fonds propres et de calcul des provisions techniques.

Deuxième pilier : les exigences en matière de gouvernance des organismes et d’organisation.

Troisième pilier : les exigences en matière d’informations prudentielles et de publications.

Afin d’analyser le passage de solvabilité 1 à solvabilité 2, différentes études d’impact quantitatives (QIS) de la directive ont été réalisées par EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*).

Ces études d’impact sont fondées sur 3 niveaux :

Provisions techniques : celles-ci sont évaluées de façon cohérente avec le marché et correspondent au montant d’actifs qu’un tiers exigerait pour reprendre les engagements de l’assureur. Les provisions sont donc calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs *Best Estimate* et d’une marge pour risque.

Capital de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement* SCR) : il correspond au montant des fonds propres à détenir pour limiter la probabilité de ruine à un an à 0.5%. Le SCR peut être calculé par une formule standard calibrée uniformément sur le marché européen ou bien par un modèle interne développé par l’assureur et validé par le superviseur ou bien encore par une combinaison de deux méthodes (modèle interne partiel).

Capital minimum requis (*Minimum Capital Requirement* MCR) : le niveau minimal de fonds propres que l’assureur doit détenir en permanence sous peine d’une action immédiate de l’autorité de contrôle susceptible d’entraîner un transfert de portefeuille.

Le régulateur européen a retenu une approche *risk-based capital* et modulaire (cf figure 1) pour apprécier les risques encourus par les sociétés d’assurance. La mesure du risque de référence choisie par l’Autorité de contrôle européen du secteur de l’assurance EIOPA est la *Value at Risk* (VaR). La VaR est égale à la perte maximale d’une entreprise, compte tenu d’un horizon de détention d’un an et d’un niveau de confiance $\alpha = 99,5\%$.

L’approche modulaire repose sur sept modules de risques : risques de marché, risque de souscription vie, non-vie, santé, risque de contrepartie, risque sur les intangibles et risque opérationnel. Le module des risques de marché mesure les risques engendrés par une variation du niveau ou de la volatilité des prix de marché des instruments financiers (actions, taux d’intérêt, immobilier et taux de change).

L’évaluation du risque obligataire relève de quatre des sept sous modules du risque de marché (cf. figure 1) : le risque de taux d’intérêt, le risque de spread, le risque monétaire (risque de change) et le risque de concentration. Les deux dernières seront exclues de notre étude. Nous traitons donc, dans la première partie, des sous-modules de risque de taux d’intérêt, de spread et de l’agrégation des sous-modules de risques de marché selon la formule standard et le modèle interne. Nous donnerons en outre un exemple de calcul du SCR obligataire.

3 Partie I : Évaluation du Risque de Taux et Crédit sous Solvabilité 2

Pour satisfaire aux exigences en capital, deux approches sont possibles : la formule standard et le modèle interne. Si la première est relativement simple à mettre en place et se concentre sur une série de stress tests des facteurs de risques appliqués de manière forfaitaire à tous les acteurs de l'industrie d'assurance, le modèle interne repose quant à lui sur une compréhension de la cartographie de risque ainsi que sur une modélisation et une simulation des facteurs de risques.

3.1 Approche Standard

Dans cette approche, l'exigence de capital pour chaque sous-module de risque repose sur un principe dite delta-NAV (*Net Asset Value*). En d'autres termes, il s'agit de mesurer l'impact d'un choc sur l'actif net réévalué de la société, c'est-à-dire la variation des actifs et des passifs de la société consécutivement à ce choc. L'actif net réévalué (NAV) n'intègre pas la marge de risque (*risk margin*) des provisions techniques. Les calculs ne sont réalisés par conséquent que sur le *Best Estimate*. En revanche, la mesure de l'impact des chocs sur l'actif net réévalué est réalisée après effets des instruments de couverture et autres techniques de réduction des risques, et après considération du changement du comportement des assurés vis-à-vis des options du passif, consécutivement à un choc. Dans tout ce travail nous considérons que le passif est constant et que le calcul du SCR dans le modèle standard et le modèle interne dépend seulement du comportement de l'actif financier.

Le modèle standard permet d'évaluer l'exigence de capital en fonction des risques avec peu d'expérience, de données et de capacités de modélisations et offre une vision cohérente des branches les plus consommatrices de capitaux propres.

Le calcul du SCR risqué de marché se décompose en plusieurs sous-modules agrégés par une matrice de corrélation. Nous nous intéressons dans ce document au calcul du SCR de crédit, taux et liquidité dont la description et le périmètre sont définis par :

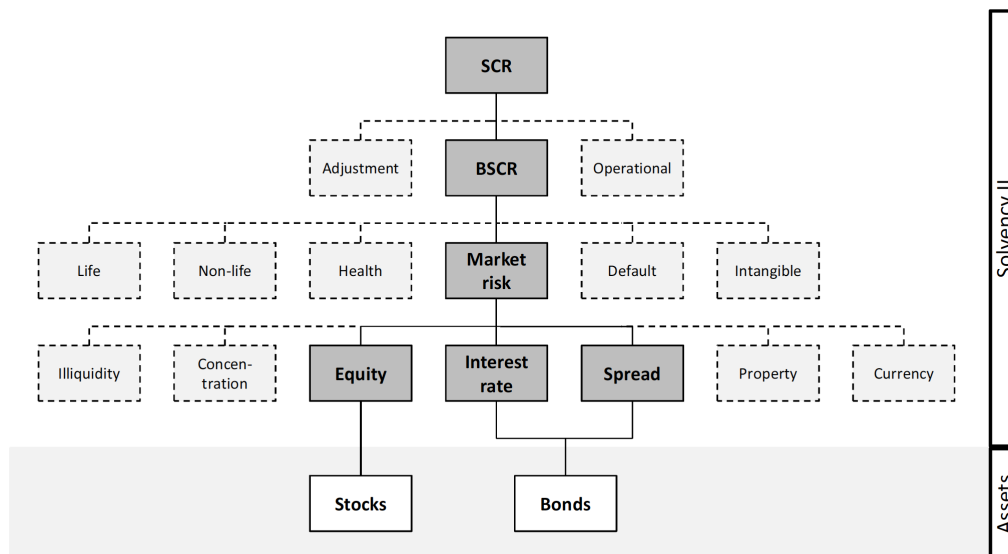


Figure 1 : Modèle Standard

3.1.1 SCR Taux

(Art.105 (a) de la directive 2009/138/EC; Art.145-148 de Draft Implementing measures Solvency II 10/31/2011)

Ce SCR vise à quantifier le besoin en capital nécessaire pour faire face à l'impact d'une évolution de la structure de la courbe des taux à la hausse et la baisse sur la valeur de bilan. À l'actif, les instruments financiers concernés par ce SCR sont :

- les produits de taux simples : obligations souveraines et d'entreprise, les titres de créances, la dette hybride
- les dérivés (options, futures warrants, swaps, CDS)
- les produits structurés (CDO (*Collateralized Debt Obligation*), CLO (*Collateralized loan Obligation*),
- les OPCVM ayant une sensibilité aux taux non nulle.

le besoin en capital est égal à la perte maximale générée par une hausse ou une baisse de la courbe de taux. Concrètement, pour chacun des actifs concernés, la courbe de taux est choquée à la hausse ou à la baisse (le choc est appliqué sur les taux de marché (interbancaires et taux swap)) avant de construire la courbe de taux d'actualisation zéro coupon).

Considérons une obligation émise par un État souverain, de maturité T , de coupons $CF(t)$, le prix défini par la formule :

$$P(t, T) = \sum_{t=1}^T \frac{CF(t)}{(1+r_f)^t}$$

Le prix $P_{up}(t, T)$ de l'obligation après un choc de taux s_{up} devient :

$$P_{up}(t, T) = \sum_{t=1}^T \frac{CF(t)}{(1+r_f(1+s_{up}(t)))^t}$$

On en déduit la valeur de SCR associé à un choc de taux d'intérêt s_{up} :

$SCR_{Taux} = \max(P(t, T) - P_{up}(t, T), 0)$ Les chocs s_{up} sont définies ci-dessous :

Table 3: Interest rate shock (upward movement) in the Solvency II standard model (see EIOPA, 2010a, p. 111)

Maturity t (years)	Relative change $s^{up}(t)$
1	0.70
2	0.70
3	0.64
...	...
25	0.26
>25	0.25

3.1.2 SCR Credit

(Art.105 (d) de la directive 2009/138/EC; Art.155-164 de Draft Implementing measures Solvency II 10/31/2011) Ce SCR vise à quantifier le besoin en capital correspondant au risque d'une évolution à la hausse ou à la baisse des spreads de crédit (écart entre le taux actuariel et le taux sans risque). A

l'actif, les instruments concernés par ce SCR sont : Les obligations d'entreprise, parapubliques, dettes subordonnées, dettes hybrides, obligations émises par les Etats en devise locale (hors euro), les ABS (*Asset Backed Security*), etc.

Ce SCR est divisé en trois termes :

$$SCR_{Spread} = SCR_{bonds} + SCR_{rpl} + SCR_{cd}$$

Avec :

- SCR_{bonds} concerne les obligations (y compris les *TCN (Titre de Créances Négociable)* et les loans (hors *mortgages Loans*).
- SCR_{rpl} concerne les repackaged loans ou *ABS Securities*.
- SCR_{cd} concerne les dérivés de crédit CDS, TRS (*Total Return Swap*) et il s'agit de la perte maximale générée entre un choc haussier et par un choc baissier des spreads de crédit.

$$SCR_{bonds} = \sum MV_i \cdot F(\text{Credit quality step}, \text{Modified duration})$$

$$SCR_{rpl} = F^{UP} \cdot \text{dur}_i \cdot MV_i.$$

$$SCR_{cd} = \max(\sum \text{chocspreadup}_i, \sum \text{chocspreaddown}_i).$$

Avec :

MV_i : la valeur de marché de l'obligation en euros.

Duration Modifiée est exprimée par la variation du prix de l'obligation pour une variation donnée de 1% du taux de rendement actuariel :

$$\text{Modified duration} = \frac{\sum_{t=1}^{T_{max}} (t \cdot CF(t) (1 + r_f (1 + s^{up}(t)))^{-t})}{\sum_{t=1}^{T_{max}} (CF(t) (1 + r_f (1 + s^{up}(t)))^{-t})} \frac{1}{(1 + r_{YTM})}$$

Avec $T_{max} = \max(t : CF(t) \neq 0)$, et r_{YTM} le taux de rendement interne (TRI).

$F(\text{Credit quality step}, \text{modified duration})$ est le choc du stress en fonction du rating et de la sensibilité.

FUP^{rf} est le facteur de risque en fonction du qualité de crédit.

choc spread up_i (resp choc spread $down_i$) le choc haussier (baissier) de spreads.

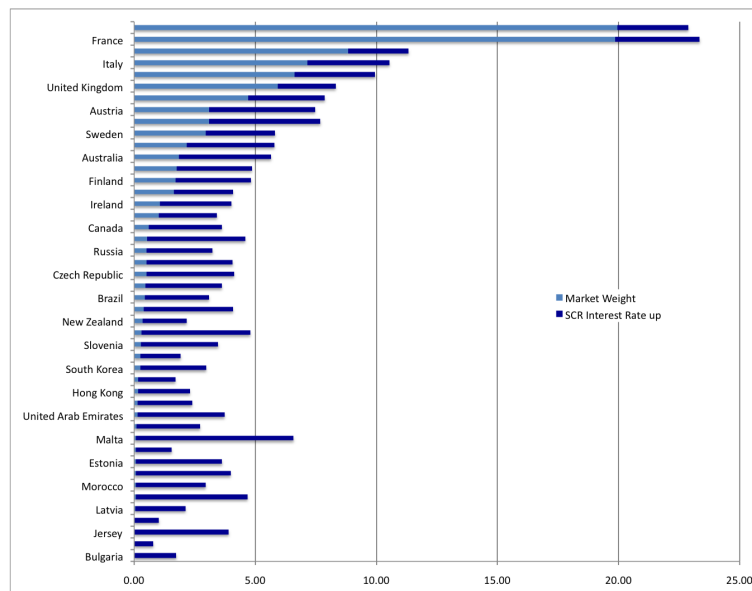
Table 4: Spread shock for corporates and non-EEA governments in the Solvency II standard model (see EIOPA, 2010a, pp. 122-123)

Rating	Spread shock corporates			Spread shock non-EEA governments		
	F^{up}	Duration Floor	Duration Cap	F^{up}	Duration Floor	Duration Cap
AAA	0.9%	1	36	-	-	-
AA	1.1%	1	29	-	-	-
A	1.4%	1	23	1.1%	1	29
BBB	2.5%	1	13	1.4%	1	23
BB	4.5%	1	10	2.5%	1	13
B or lower	7.5%	1	8	4.5%	1	10
Unrated	3.0%	1	12	3.0%	1	12

3.1.3 Exemple : Calcul de SCR de portefeuille obligataire :

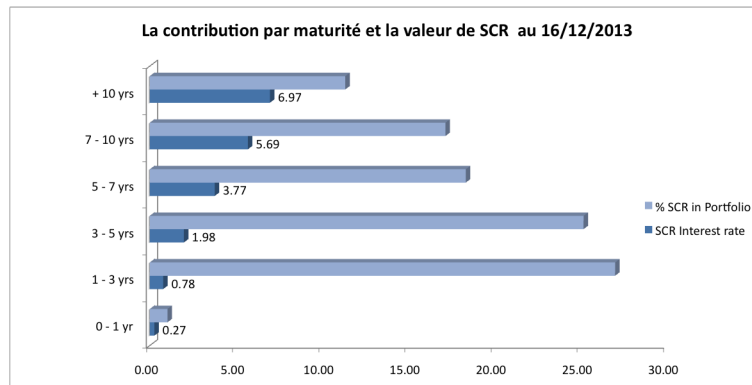
À partir de la base de données Bloomberg, nous avons construit un échantillon de 3100 titres obligataire, à taux fixe ou zéro coupon, émises par 46 pays. Pour le calcul de SCR taux, nous appliquons les chocs (ci-dessous) sur les courbes de taux et nous revalorisons les titres. (L'outil PORT de Bloomberg permet d'entrer les niveaux des chocs à la hausse et de revaloriser les titres.) En ce qui concerne le calcul de SCR, on applique la formule en utilisant les caractéristiques des titres que l'on peut récupérer directement de la base de données Bloomberg (Duration, Notation, Maturités, etc.).

Le graphique ci-dessous présente la composition en valeur de marché ainsi que l'exposition en SCR taux de l'échantillon groupés par pays d'émission calculé au 16/12/2013.

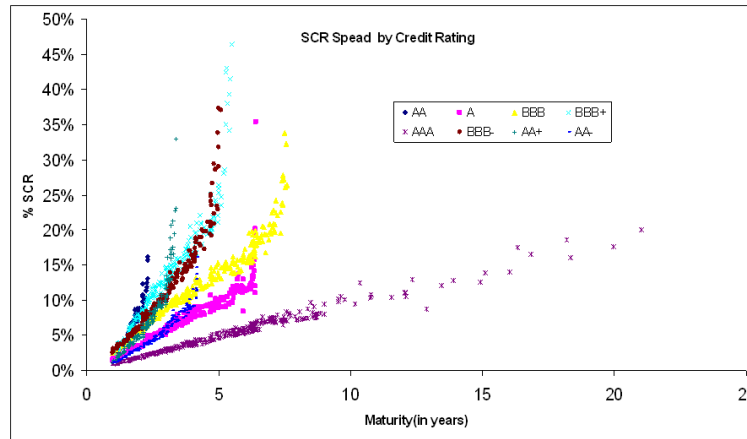


La contribution en valeur marché des pays les mieux notés (re dette) est importante dans l'échantillon avec une exposition en risque de crédit faible (l'exposition en taux est nulle). Inversement, les pays de mauvaise qualité de crédit sont plus exposés en risque de crédit et taux, car le besoin en financement à long terme (la sensibilité de SCR à la maturité des titres) est l'essentiel des émissions de ces pays.

Les deux graphiques ci-dessous présentent la répartition de l'échantillon dans le SCR de taux et crédit en fonction de la maturité et la notation des obligations.



Le graphique montre que la contribution des titres ayant une maturité courte (1-3 ans) présente plus d'un quart dans l'échantillon et contribue moins dans le SCR global d'échantillon.



Remarques :

À la lumière des résultats présentés dans les deux graphiques ci-dessus, nous observons que :

- Pour une maturité donnée, les obligations de notation AAA, AA et A consomment sensiblement moins que celles ayant des notations plus faibles.
- Plus la maturité de l'obligation est longue, plus les exigences en capital SCR sont élevées, et ce, quelle que soit la notation.
- Les obligations souveraines sont également soumises à un risque de spread. Ce risque n'est toutefois pas pris en compte dans le cadre du pilier 1 de la directive.

3.1.4 Conclusion

La formule standard est un moyen simplifié proposé par solvabilité 2 pour l'évaluation du SCR. Elle a bien sûr l'avantage de la simplicité, mais présente l'inconvénient d'être appliquée de manière identique, quelle que soit la société d'assurance. La formule standard est la méthode par défaut utilisée pour le calcul du SCR ; il est donc indispensable de comprendre son fonctionnement. C'est d'ailleurs la seule méthode qui est imposée par solvabilité 2 : même si une société d'assurance choisit un modèle interne pour l'évaluation de son SCR, elle devra quand même comparer ce résultat avec celui obtenu par application de la formule standard.

L'étude d'EDHEC (**les impacts de solvabilité II sur la gestion obligataire**) a comparé la VaR historique au SCR d'un échantillon d'obligations et a ainsi montré qu'en moyenne, les dépassements des pertes au SCR croissent avec la dégradation de la qualité de crédit. En outre, l'analyse par période montre qu'en absence de crise, les pertes des obligations avec des notations plus faibles sont surestimées, mais qu'en période de forte crise, les exigences sont suffisantes pour couvrir les pertes.

L'étude a également montré que lorsque la maturité augmente, les fréquences de dépassement diminuent et donc qu'une forte concentration d'obligations de bonne qualité, dont le SCR formule standard, est plutôt bien estimée et que les obligations avec des notations BBB et non notées, dont les SCR, sont surestimées.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de modèle interne, la seconde approche de calcul de SCR. Nous reprenons ici les démarches de l'étude *Estimation Errors and SCR Calculation* de F. PLANCHET & E. KARAM appliquées dans le cadre du modèle Hull-White. Ce choix repose sur un arbitrage entre la simplicité du modèle et la contrainte marché qui propose ce modèle par construction. Le résultat

de l'étude met l'accent sur le risque du modèle, en particulier le risque d'estimation sur le calcul de SCR.

3.2 Modèle interne

Le modèle interne est une approche basée sur la modélisation du risque d'actif et passif et leur interaction. Le besoin de capital peut donc s'apprécier directement à partir des résultats générés par ces modèles. Au-delà de leur utilité directe d'économie de fonds propres, les modèles internes sont nécessaires à l'appréciation du profil de risque de l'assureur, aux stratégies d'investissement et dans la communication sur la solvabilité et la gestion des risques avec des intervenants externes (autorités, agences de notation, clients, etc.). Le modèle interne requiert une bonne gestion des données ainsi qu'une expertise en modélisation stochastique et en simulation.

Dans le cadre de cette étude, une modélisation stochastique des taux d'intérêt, crédit et liquidité est nécessaire pour maîtriser les risques obligataires ainsi que la consommation en fonds propres des stratégies obligataires.

Dans le cadre du modèle interne, une analyse de bilan permet de comprendre l'interaction entre les différentes composantes de l'actif et du passif ainsi que le lien entre le capital requis et l'évolution du portefeuille d'allocation et des engagements de l'assureur.

3.2.1 Analyse de Bilan et Expression Générale

Dans cette section, nous illustrons l'interaction entre l'actif et le passif dans le calcul du SCR à l'aide d'un bilan simplifié de l'assureur, qui se présente de la manière suivante à l'instant t :

BILAN en 0	
A_0	FS_0
	$SCR = E_0 - FS_0$
	L_0

Avec : A_t (respectivement L_t) la valeur de l'actif à l'instant t (respectivement la valeur du passif à l'instant t) et $E_t = A_t - L_t$:

Ce bilan évolue selon la dynamique suivant :

$$A_{t+1} = A_t \cdot (1 + R_{t+1}) - F_{t+1} + C_{t+1}$$

$$L_{t+1} = BEL_{t+1} + RM_{t+1}$$

$$E_{t+1} = L_{t+1} - A_{t+1}$$

Ou :

R_{t+1} : le taux de rendement d'actif .

F_{t+1} : les prestations payées à l'assuré (aléatoire entre t et t+1).

C_{t+1} : les cotisations perçues (aléatoire entre t et t+1).

BEL_{t+1} : La valeur actuelle des flux de passif (Best Estimate).

RM_{t+1} : la marge pour le risque.

On supposera pour la suite que $C_{t+1} = 0$, dans le cadre de solvabilité 2 , la probabilité de ruine à l'horizon d'un an est exprimé par $P(A_1 - L_1 \geq 0) \geq 99.5\%$ ou bien : $P(A_0(1 + R_1) - F_1 - L_1 \geq 0) \geq 99.5\%$ En pratique, une partie des fonds propres correspond au fond propre requis SCR et une autre partie disponible (Free Surplus) qu'on supposera nulle par la suite.

Dans ce cas $SCR = E_0 = A_0 - L_0$ On en déduit la relation entre SCR, le passif L_1 et les prestations payées à l'instant 1 F_1 :

$$P(A_0(1 + R_1) - F_1 - L_1 \geq 0) \geq 99.5\%$$

$$P((SCR + L_0)(1 + R_1) - F_1 - L_1 \geq 0) \geq 99.5\%$$

$$P((SCR + L_0)(1 + R_1) \geq F_1 + L_1) \geq 99.5\%$$

$$P\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1} \leq SCR + L_0\right) \geq 99.5\%$$

On en déduit le capital requis par le régulateur :

$$SCR = VaR_{99.5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - L_0$$

Interpretations :

1-Le terme $\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}$ présente les charges actualisées au rendement de portefeuille d'actif et peut être interpréter comme l'engagement économique compte tenu de l'allocation d'actifs.

2-L'engagement initial $L_0 = BEL_0 + RM_0 = E\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) + RM_0$ dépend du taux de rendement R_1 du portefeuille d'actif.

Nous présentons dans la suite trois modèles d'intérêt : le modèle de Vasicek, le modèle de Hull-White et le modèle multifactoriels et d'absence d'arbitrage de Nelson-Seigel pour modéliser le taux court. Ces trois modèles présentent de nombreux avantages (simplicité à calibrer, simuler, formules analytiques des prix d'obligations et interprétation économique). Nous montrons que le choix de modèle de taux sur la base de ces critères n'est pas sans inconvénient, notamment en termes de risque d'estimation (papier *Estimation Errors and SCR Calculation* de F.PLANCHET & E.KARAM).

3.2.2 Le modèle de Vasicek(1977)

Le modèle de Vasicek utilise une structure simple pour modéliser le taux court et permet une formule analytique de prix zéro coupon. le modèle suppose qu'il y a un seuil aléa (W_t) qui influe le taux spot, dont la dynamique dans l'univers risque neutre est de la forme :

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

avec k, θ, σ , et r_0 constantes positives.

L'équation de diffusion suivie par Vasicek et celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire d'un processus gaussien, qui oscille autour d'une tendance centrale θ , avec une force de rappel d'intensité k .

L'équation (1) se résout comme une équation différentielle ordinaire bien que son second membre soit aléatoire.

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt} \int_0^{+\infty} e^{-ks} dW_s$$

Dans le modèle de Vasicek le prix d'un zéro coupon de maturité T est donné par :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

Avec

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{1 - \exp(k(T - t))}{k} \\ A(t, T) = \exp\left((B(t, T) - (T - t))(\theta - \sigma^2/2k^2) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2\right) \end{cases}$$

Remarques :

1-La courbe de taux est la fonction que donne différents taux de la date t en fonction de leur maturité T , soit $T \rightarrow R(t, T)$

Dans le cas de Vasicek la courbe de taux est définie en fonction de taux court r_t et taux long R_∞

$$R(t, T) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-kT}}{kT} + \frac{\sigma^2}{4k^3} (1 - e^{-kT})^3$$

avec

$$R_\infty = R(t, +\infty) = \theta - \sigma^2/2k^2$$

2-La volatilité de prix zéro coupon est défini par : $\sigma \frac{1 - \exp(k(T - t))}{k}$

3-Le modèle de Vasicek est présenté dans un espace de probabilité réel par une équation de diffusion similaire à celle de l'univers risque neutre en intégrant la prime de risque, pour cela on doit ajuster le paramètre θ par : $\theta^* = \theta - \frac{\sigma\lambda}{k}$.

4-Le modèle de Vasicek présente de nombreux éléments intéressants : distribution gaussienne et facile à manipuler, formules explicites pour les obligations et taux zéro coupon, cette simplicité ne va pas sans inconvénients nous citons quelques uns :

-Le caractère gaussien de modèle Vasicek ne peut pas garantir la positivité du taux court, ce qui présente un premier inconvénient. (Les taux d'obligations allemandes DBR de 2 en mois de juin/juillet 2012).

-Le modèle Vasicek est un modèle dit *endogène*, puisque la courbe de taux est entièrement défini par l'équation (3). On ne peut pas donc passer les observations du marché en entrée, ce qui représente une limite en matière d'exigences de solvabilité 2. (*Market Consistent*)

3.2.3 Éléments de calibration du Modèle de Vasicek

On se place dans l'univers de probabilité réel et on utilise la propriété de normalité de taux court suivie par le modèle de Vasicek, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t/f_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \\ \text{Var}[r_t/f_s] = \frac{\sigma^2}{2k} \cdot (1 - e^{-2k(t-s)}) \end{cases}$$

Ou bien en remplaçant t par $s+\delta$ avec δ suffisamment petit

$$r_{s+\delta} = r_s e^{-k\delta} + \theta(1 - e^{-k\delta}) + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-k\delta}}{2k}} \cdot \epsilon$$

Avec ϵ est normal centré réduite L'équation (4) nous permet d'appliquer la méthode d'estimation par régression OLS en posant :

$$\alpha = \theta(1 - e^{-k\delta}), \beta = e^{-k\delta}, \sigma^* = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-k\delta}}{2k}}, x_t = r_s \text{ et } y_t = r_{s+\delta} = \alpha + \beta \cdot x_t + \sigma^* \epsilon(s)$$

On déduit les paramètres de modèle par le système d'équations suivante :

$$\begin{aligned} k &= -\frac{\ln(\beta)}{\delta} \\ \theta &= \frac{\alpha}{1-\beta} \\ \sigma &= \frac{\sigma^*}{\sqrt{\frac{(\beta^2-1) \cdot \delta}{2 \cdot \ln(\beta)}}} \end{aligned}$$

Remarques :

1-Les paramètres estimés sont basés sur une diffusion dans l'univers probabilité réel, pour valoriser une obligation zéro coupon on doit déduire la valeur de la prime de risque λ en inversant le prix de zéro coupon calculé dans un univers neutre :

$$\theta^* = \theta - \frac{\sigma \lambda}{k}.$$

On peut donc déduire la formule de la prime de risque λ par :

$$\lambda = \left(\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) - \frac{\left(\frac{\sigma^2}{4k} \cdot B(0,T) + \ln P(0,T) \right)}{B(0,T) - T} \right) \cdot \frac{k}{\sigma}.$$

2-On peut directement déduire les paramètres de modèle dans un univers risque neutre en utilisant les caps-floors cotés sur le marché, dans ce cas on doit minimiser la somme d'erreur quadratique de l'écart entre les prix théoriques de caps/floors issues de modèle et les prix cotés.

3.2.4 Le modèle de Hull-White ou (Extended Vasicek)

le caractère *endogène* de modèle Vasicek présente un inconvénient majeur vis-à-vis d'exigence de solvabilité 2 qui impose d'utiliser un modèle prenant la courbe de taux zéro coupon initiale comme paramètre. Le modèle de Hull-White est l'extension de modèle de Vasicek, ce modèle fournit une présentation simple de prix zéro coupon prenant en compte la courbe de taux initiale.

Présentation de modèle Hull-White.

Ce modèle a été proposé par Hull & White (1990), dont la dynamique dans l'univers risque neutre est de la forme :

$$dr_t = (\theta(t) - a \cdot r_t) dt + \sigma dW_t$$

avec a constante positive et $\theta(t)$ une fonction déterministe, il s'agit donc d'un modèle Vasicek étendu au cas d'une moyenne long terme dépendante de temps.

Notons $P^M(0, T)$ le prix de l'obligation zéro coupon de maturité T et $f^M(0, T)$ le taux forward instantané associé :

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial \ln(P^M(0, T))}{\partial T}$$

Le modèle de Hull-White reproduit exactement la courbe des taux zéro coupon de marché si l'on pose :

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + a \cdot f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$$

Le taux court s'écrit :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} + \sigma e^{-at} \int_s^t e^{au} dW_u$$

avec :

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})^2$$

On en déduit que le taux court est gaussien, de moyenne et variance :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t/f_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} \\ \mathbb{V}ar[r_t/f_s] = \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - e^{-2a(t-s)}) \end{cases}$$

Dans le modèle de Hull-White, le prix zéro-coupon de maturité T à la date t s'écrit :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

avec

$$\begin{cases} B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\ A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \cdot \exp \left(B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right) \end{cases}$$

Remarques

1-Pour reconstituer la courbe de taux initiale, la méthode habituellement utilisée par les banques est le *Boostrapping*, qui est une méthode récursive qui calcule les taux zéro coupon de proche en proche. Cette méthode utilise les taux interbancaires pour des maturités allant jusqu'à un an, des contrats futurs sur Euribor jusqu'à deux ans et des taux swap pour des maturités supérieures. Récemment avec l'affaire de manipulation de taux EURIBOR, le taux de référence des swaps les banques préfèrent utiliser les taux OIS (*Overnight Index swap*). (L'annexe 1 détaille la méthode *Boostrapping*).

2-On utilise un panier des caps/floors pour calibrer le modèle de Hull-White et les taux interbancaires, swaps pour la construction de la courbe zéro coupon initiale.

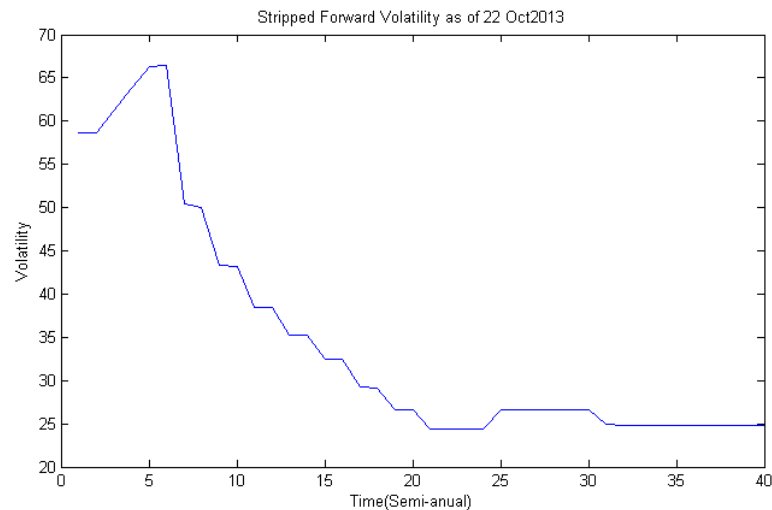
Les caps/Floors sont des options cotées en volatilité, on en déduit le prix de marché en utilisant le modèle de Black-Scholes en supposant que la volatilité est flat pour tous les caplets/Floorlets qui

composent un cap ou floor de maturité donnée. On détaille en annexe la méthode de stripping de volatilités des caplets (ou volatilité forward) à partir des volatilités cotées des options caps.

Ci-dessous un exemple d'application avec des données de marché EUR à la date de 22/10/2013 :

Term	Strike	ATM
1 YR	0.32	103.1
2 YR	0.42	92.95
3 YR	0.75	70.1
4 YR	1	62.1
5 YR	1.26	55.7
6 YR	1.48	50.8
7 YR	1.67	46.4
8 YR	1.84	43.05
9 YR	1.99	40.1
10 YR	2.12	37.6
12 YR	2.33	33.8
15 YR	2.54	31.25
20 YR	2.67	28.95

Caps Volatility for EUR as of 22 Oct 2013 (Source ICAP)



3-Le modèle de Hull-White ne garantit pas la positivité de taux court.En effet la probabilité $P(r_t < 0) = \phi\left(-\frac{\alpha(t)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2a}\right)(1-e^{-2a(t-s)})}}\right)$ est non nulle

4-L'équation de discrétisation de modèle de Hull-White nous permet de simuler les taux courts sans calculer la dérivée de taux forward instantanée comme le suggère la condition de paramètres $\theta(t)$.

3.2.5 Calibration de modèle de taux

Nous estimons le modèle de Vasicek à partir d'un historique de taux zéro coupon et nous déduisons ensuite la prime de risque à introduire pour valoriser les obligations. Le modèle de Hull-White est calibré directement au prix du marché des caps, cette étape nécessitant la construction de la courbe zéro-coupon initiale ainsi que l'implémentation des formules fermées des caps/Floors sous le modèle Hull-White et Black-Scholes, modèle de marché des caps et floors (voir les annexes A et B).

Données

Pour calibrer le modèle de Vasicek, on utilise des taux mensuels EURIBOR 3M fournis par la Fédération bancaire de l'Union européenne et des taux LIBOR 3 M fournis par la réserve Fédérale pour la courbe USD, l'historique de l'EURIBOR 3M allant de janvier 1999 jusqu'à décembre 2011 et l'historique de Libor 3M allant de janvier 1982 jusqu'en août 2008. Les données sur Libor 3M sont utilisées dans l'étude de (*Estimation Errors and SCR Calculation* de F. PLANCHET & E. KARAM). Afin de trouver la prime de risque (formule ci-dessus), on utilise le prix marché (déduit) d'une obligation zéro coupon 10 ans et/ou 5 ans pour l'EUR et USD.

Le taux mensuel de LIBOR 3M est la moyenne sur un mois des taux LIBOR 3M publiés chaque jour, les taux EURIBOR 3M étant des taux fixés à la fin de chaque mois.

Le modèle de Hull-White est calibré à partir des options caps de marché EUR en date du 22/10/2013 dont la courbe de taux zero-coupon et forward de marché (pour un EURIBOR 6M) est présentée ci-dessous.

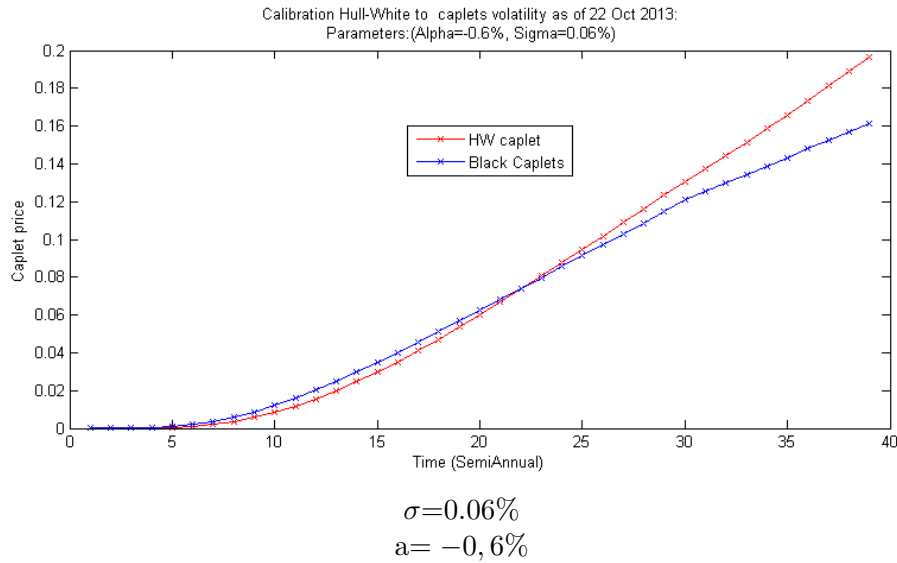


Résultats

Le Tableau suivant présente les paramètres de modèle sur EUR et USD :

Données	Libor 3M	Euribor 3M
Nombre de données	230	156
$r_0 =$	1.75 %	1.356 %
$P(0,10)=$	0.6775	0.8163

Parmètres	Libor 3M	Euribor 3M
$\theta =$	3.41%	1.29%
$\sigma =$	1.104 %	0.68%
$k=$	0.2189	0.0852
$\lambda =$	-0.4078	0.00852



Le graphique montre la volatilité implicite du marché (méthode de stripping en annexe) et la volatilité implicite des prix de caplets du modèle Hull-White. Nous pouvons constater que Hull-White reproduit mieux la structure en termes de volatilité du marché pour les caps à court terme mais génère un mauvais calage sur les caps à long terme.

Nous avons vu que les modèles mono factoriels tels que Vasicek ou Hull-White autorisent les taux à devenir négatifs avec une probabilité non nulle. La deuxième limite est le mauvais calage de ces modèles sur les données de marché, en particulier pour des produits taux avec des maturités. Troisièmement, ces modèles sont inadaptés pour l'évolution et la couverture de produits de taux. En effet, ces modèles reposent sur le fait que les taux évoluent de façon parfaitement corrélée et donc sur le fait que la corrélation de deux taux zéro-coupon de maturité T et S distinctes soit égale à 1. Quatrièmement, contrairement aux modèles empiriques, les paramètres de ces modèles ne sont pas économiquement interprétables, ce qui peut constituer un frein si l'on veut faire de l'analyse économique à long terme.

3.3 Modèle Multi-factoriels de non-Arbitrage de Nelson-Siegel

3.3.1 Motivations

Malgré l'accélération des émissions des obligations à long terme due aux besoins de financement croissants des États et celui des assureurs à des placements de longues maturités pour assurer des prestations futures à des épargnants ou la durée de vie résiduelle de plus en plus allongée, le segment très long de la courbe de taux reste moins liquide que le segment court de la courbe, ce qui facilitera l'existence d'opportunités d'arbitrage.

Il est donc nécessaire que le modèle de taux suppose l'absence des opportunités d'arbitrage d'une part une forme économiquement interprétable par les économistes et les opérateurs de marché d'autre part. S'inspirant du modèle de Nelson-Siegel, le modèle proposé par Diebold et Li (2006) décrit la structure par terme de taux d'intérêt en fonction de trois facteurs variables aléatoires dans le temps, souvent interprétés comme le niveau, la pente et la courbure.

En s'inspirant de modèle de Nelson-Siegel, le modèle proposé par Diebold et Li (2006) , décrit la structure par terme de taux d'intérêt en fonction de trois facteurs variable aléatoire dans le temps, ces facteurs sont souvent interprétés comme le niveau, la pente et la courbure.

Le but principal de cette section est de mettre en valeur l'approche de Diebold et Li (2006) en tirant profit des propriétés empiriques du modèle de Nelson-Siegel (1987) d'une part et d'autre part de la propriété d'absence d'arbitrage en introduisant une composante dite de convexité au modèle dynamique de Nelson-Siegel.

3.3.2 Formulation Mathématique

En reprenant les notations de l'article de Christensen, E Jens H, Francais X. Diebold, Glen D. Rudebusch, la fonctionnelle proposée par Nelson-Siegel modélise la courbe de taux d'intérêt sous forme :

$$R_t(\tau) = L + S \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda \cdot \tau}}{\lambda \tau} \right) + C \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} - e^{-\lambda \tau} \right)$$

Les composantes qui multiplient les paramètres L, S, C sont appelées *factors loadings* et qui représentent les contributions de chacun des facteurs dans la courbe de taux à un instant donné. La première composante est interprétée comme le niveau, la deuxième composante comme la pente et la troisième composante est interprétée comme la courbure.

On a les propriétés suivantes :

$$1 - \tau \mapsto \infty \quad R_t(\tau) \mapsto L$$

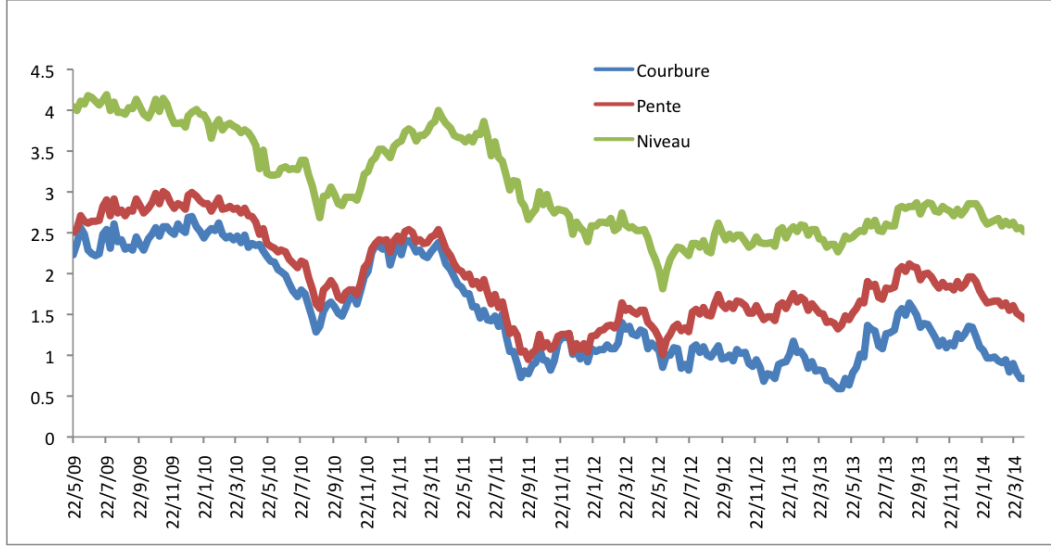
$$2 - \tau \mapsto 0 \quad R_t(\tau) \mapsto (L + S)$$

La fonctionnelle de Nelson-Siegel permet d'obtenir les quatre formes de la courbe classique (ascendante, descendante, plate et inversée).

Pour définir des proxies pour les facteurs pente, niveau et courbure, nous nous inspirons de Diebold et Li (2006) qui suppose le taux long comme proxy de la facteur niveau soit dans notre exemple le taux 30 ans, la pente est approchée par l'écart entre le taux à long terme et le taux à court terme soit dans notre application le taux 30 ans - Taux 3 mois et finalement le proxy de courbure comme l'écart

entre deux fois le taux moyenne terme et la somme des taux long terme et court terme, soit $2 \times \text{Taux}(15) - (\text{Taux}10 \text{ ans} - \text{Taux} 3 \text{ mois})$.

A partir d'une base de données historique (source Bloomberg) des taux zéro-coupon hebdomadaire d'EURO-Swap allant de 22/05/2009 au 11/04/2014 .



En s'inspirant de modèle de Nelson-Siegel, une extension a été apportée par Diebol,Rudebusch et Aruoba (2006) qui maintien l'interprétation des facteurs et en imposant aux facteurs à suivre une dynamique particulière .

Plus formellement,ils utilisent une représentation de la forme :

$$R_t(\tau) = L_t + S_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + C_t \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$$

Avec L_t, S_t, C_t sont respectivement le niveau, la pente et la courbure.

Nous présentons dans un premier temps l'équation d'observation (le taux) sous forme matricielle en deux dimensions, la dimension d'observation (1 à T) et la dimension maturité de taux (1 à N) à chaque date d'observation.

$$R_t = B X_t + E_t$$

Avec

$$\mathbf{E}_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \vdots \\ \epsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}, \mathbb{E}[\mathbf{E}_t] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{Var}[\mathbf{E}_t] = \mathbf{H}^{N \times N} = \text{diag}[\sigma_\epsilon^2(\tau_1), \dots, \sigma_\epsilon^2(\tau_N)],$$

$$\mathbf{R}_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} R_t(\tau_1) \\ \vdots \\ R_t(\tau_N) \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{N \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_1}}{\lambda \tau_1} & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_1}}{\lambda \tau_1} - e^{-\lambda \tau_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_N}}{\lambda \tau_N} & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_N}}{\lambda \tau_N} - e^{-\lambda \tau_N} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_t^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{bmatrix}$$

Les facteurs suivent un processus une forme Vecteur Autoregressive (VAR) :

$$X_t = AX_{t-1} + (I - A)u + N_t$$

Avec A la matrice de coefficient de chacun des facteurs L_t, S_t, C_t , N_t le vecteur d'innovations de chacun des facteurs $N_t \sim N(0, Q)$ et I la matrice d'identité 3×3 .

$$\mathbf{u}^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu_L \\ \mu_S \\ \mu_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_t^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{bmatrix}$$

Nous étudions deux formes de processus suivi par les facteurs X_t , la première forme impose des facteurs indépendants et une matrice A diagonale.

$$\mathbf{A}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} q_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33}^2 \end{bmatrix}$$

et la deuxième repose sur une hypothèse de corrélations entre facteurs et une matrice de transition A plein.

$$\mathbf{A}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

Afin d'estimer les paramètres (λ, Q, H, A) qui permettent d'extraire les facteurs de modèle dynamique nous utilisons le filtre de Kalman, la méthode repose sur une procédure récursive permettant de calculer la vraisemblance des variables observables lorsque les bruits du système dynamique sont gaussiennes. (L'article de Diebol, Rudebusch et Aruoba (2006) détaille l'algorithme de Filtre de Kalman).

3.3.3 Application : La courbe de taux zéro-coupon

Nous appliquons les démarches ci-dessous pour modéliser la courbe de taux sans risque construite à partir des taux interbancaires et taux EUR swap en utilisant la méthode de stripping décrite dans l'annexe.

Les données utilisées sont extraites des bases Bloomberg et couvrent des maturités allant de 3 mois à 30 ans. La fréquence choisie est la fréquence hebdomadaire sur une période allant du 22/05/2009 au 11/04/2014 (les algorithmes sont développés sous Matlab).

Ci-dessous les résultats d'estimation des paramètres (λ, Q, H, A) en cas de d'indépendance entre les termes $\mathbf{N}_t$.

Paramètre	Value
λ	0.603
Moyenne-Niveau	5.37%
Moyenne-Pente	-2.27%
Moyenne-Courbure	-1.13%
H	1.99^{-05}
Log-Lik	-34934

Le paramètre d'échelle λ présente la vitesse de décroissance de la courbe de taux vers 0 lorsque la maturité augmente.

1-La valeur moyenne de facteur niveau est égale à 5,37%, au-dessus de l'estimation empirique de taux long 30 ans(3,053%).

2-Le taux court (3mois) est égale à l'écart entre le facteur niveau et le facteur de la pente. Nous remarquons que sa valeur moyenne estimée par le modèle est égale à (2.27%) est légèrement au-dessus de sa valeur empirique (2,31%).

3-Dans la fonctionnelle de Nelson-Siegel, l'estimateur du facteur de courbure donne un signe sur la forme et la taille de la courbure. La valeur positive indique une forme de bosse et une valeur négative indique une forme convexe. Étonnement, dans notre exemple, l'estimateur de la courbure est négatif en comparant par une estimation empirique positive.

La matrice de Variance Q

Q	Niveau	Pente	Courbure
Niveau	6.641E-06	0	0
Pente	0	6.519E-06	0
Courbure	0	0	5.606E-06

La matrice de variances des facteurs montre d'une part une volatilité identique pour le facteur de la pente et de niveau et d'autre part une très faible volatilité pour le facteur de courbure

La matrice de transition A

A	Niveau	Pente	courbature
Niveau	0.893	0	0
Pente	0	0.998	0
Courbure	0	0	0.881

La matrice A qui représente les probabilités de transition d'un facteur à l'autre, montre une forte probabilité de transition entre les facteur de même nature.

Cas : de corrélation entre les facteurs :

Paramètre	Value
λ	0.633
Moyenne-Niveau	6.27%
Moyenne-Pente	-2.23%
Moyenne-Courbure	-1.14%
H	2.23^{-05}
Log-Lik	-34150

1-La valeur moyenne de facteur niveau est égale à 6,27%, au-dessus de l'estimation empirique de taux long 30 ans(3,053%).

2-Le taux court (3mois) est égale à l'écart entre le facteur niveau et le facteur pente, nous remarquons que la valeur moyenne estimée par le modèle (-2.32%) est légèrement au-dessus de sa valeur empirique (-2,31%).

3-Ici aussi l'estimateur de la courbure est négative ce qui laisse penser à une courbe de taux sous forme convexe contrairement à sa valeur empirique.

La matrice de Variance-Covariance Q

Q	Niveau	Pente	Courbure
Niveau	9.376E-06	8.791E-06	9.028E-06
Pente	8.791E-06	1.432E-05	1.419E-05
Courbure	9.028E-06	1.419E-05	1.516E-05

La matrice de variances-covariance montre une corrélation positive entre les facteurs pente, niveau et courbure.

La matrice de transition A

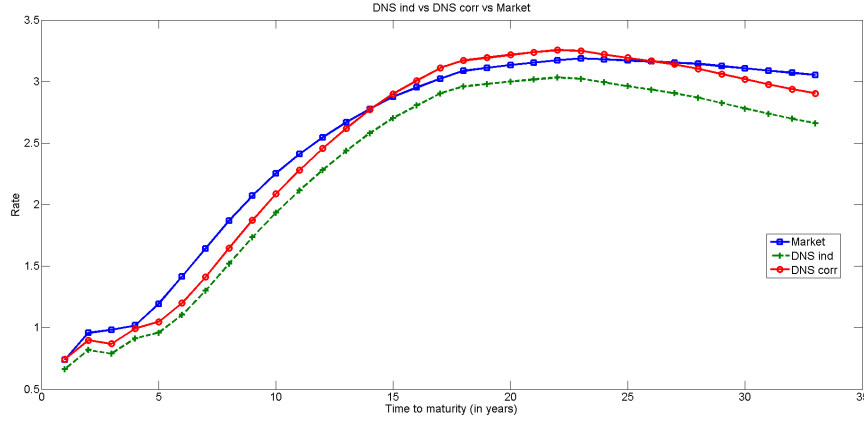
A	Niveau	Pente	Courbure
Niveau	0.9989	0.0105	0.0100
Pente	0.0121	0.7270	0.0087
Courbure	0.0121	0.0105	0.7256

Nous remarquons ici aussi une forte probabilité de transition d'un facteur à l'autre de même nature et une très faible probabilité de transition entre deux facteurs distincts.

La matrice H est supposée scalaire

Les paramètres estimées dans le cas d'un model DNS (*Dynamic Nelson-Siegel*) indépendant est atteint pour une valeur de log-vraisemblance de -34934 contre une valeur de -34150 pour le mdèle de DNS dépendant.

Le graphique ci-dessous montre lla courbe de taux moyenne de marché , de modèle de Nelson-Siegel dynamique sous l'hypothèse d'indépendance et corrélation entre les facteurs niveau, pente et courbure.



Contrairement à l'interprétation de l'estimateur de facteur courbature dans un modèle de Nelson-Siegel, nous remarquons que les trois courbes ont une bosse entre 15 et 20 ans.

Le modèle d'absence d'arbitrage de Nelson-Siegel

Le modèle dynamique de Nelson-Siegel présente l'avantage de reproduire la plupart des courbes de taux observées sur le marché avec des facteurs économiquement interprétables. Ce modèle est particulièrement intéressant pour la modélisation des taux long, il n'est toutefois pas compatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, et par conséquent présente une faiblesse vis à vis de la directive de solvabilité 2.

J H.E Christensen ,F X.Diebold et G D.Rudebush 2010 proposent une extension de modèle dynamique de Nelson-Siegel de qui conserve les principales propriétés de ce modèle et en intégrant l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage dans la définition de processus

Dans cette section nous nous inspirons de l'article de J H.E Christensen ,F X.Diebold et G D.Rudebush 2010 *The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models* en rappelant sans les démontrer les formules utilisées.

On note par la suite le modèle sans arbitrage de Nelson-Siegel par AFNS (*Arbitrage Free Nelson-Siegel*).

Le modèle AFNS repose sur une modélisation factorielle continue de taux en reprennent les mêmes spécifications de modèle dynamique de Nelson-Siegel (DNS) et en introduisant les facteurs niveau, pente et courbure sous forme d'un processus brownien.

Sous la probabilité neutre au risque Q , le modèle AFNS suit le processus suivant :

$$R_t = A_t + BX_t + \epsilon_t$$

$$dX_t = \kappa(t) (\theta(t) - X_t) dt + \Sigma(t) \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma^1(t) + \delta^1(t)X_t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\gamma^3(t) + \delta^3(t)X_t} \end{bmatrix} dZ_t$$

avec :

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma^1(t) \\ \vdots \\ \gamma^3(t) \end{bmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1^1(t) & \cdots & \delta_3^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^3(t) & \cdots & \delta_3^3(t) \end{bmatrix}$$

Afin d'exploiter les caractéristique empirique de modèle de Nelson-Siegel nous expliquons la dynamique de X_t sous la probabilité historique P sous forme :

$$dX_t = K^P(\theta^P - X_t)dt + \Sigma dW_t^P$$

Nous utilisons le théorème de Girsanov expliquer le modèle la probabilité historique P :

$$dW_t^Q = W_t^P + \Gamma_t dt$$

Avec Γ_t représente la prime de risque. Pour garder la structure affine sous P ($dX_t = K^P(\theta^P - X_t)dt + \Sigma dW_t^P$), nous imposons une structure spécifique sous forme (voir Duffee, 2002) :

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma_1^0 \\ \gamma_2^0 \\ \gamma_3^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11}^1 & \gamma_{12}^1 & \gamma_{13}^1 \\ \gamma_{21}^1 & \gamma_{22}^1 & \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{31}^1 & \gamma_{32}^1 & \gamma_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix}.$$

Afin de comparer les résultats avec le modèle DNS, nous conservons les deux spécifications de matrice de transition et la matrice de corrélation :

En cas d'indépendance entre les facteurs, le processus est présenté sous la forme matricielle sous la probabilité historique P :

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ dX_t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^P & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^P & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^P \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{1,P} \\ dW_t^{2,P} \\ dW_t^{3,P} \end{pmatrix}.$$

et dans le cas de corrélation entre les facteurs :

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ dX_t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^P & \kappa_{12}^P & \kappa_{13}^P \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P & \kappa_{23}^P \\ \kappa_{31}^P & \kappa_{32}^P & \kappa_{33}^P \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{1,P} \\ dW_t^{2,P} \\ dW_t^{3,P} \end{pmatrix}$$

Le taux zéro-coupon sous P s'écrit sous la forme suivant :

$$R(t)^{Nx1} = \begin{bmatrix} R(t) \\ R(t) \\ \vdots \\ R(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{C(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{C(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{C(\tau_N)}{\tau_N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix}$$

avec $\tau_t = T - t$ et le terme de convexité $C(\tau_t) = C(t, T)$ donné en cas d'indépendance entre les facteurs par :

$$\begin{aligned} -\frac{C(t, T)}{T-t} &= -\frac{\sigma_{11}^2}{2} \frac{1}{T-t} \int_t^T B^1(s, T)^2 ds - \frac{\sigma_{22}^2}{2} \frac{1}{T-t} \int_t^T B^2(s, T)^2 ds - \frac{\sigma_{33}^2}{2} \frac{1}{T-t} \int_t^T B^3(s, T)^2 ds \\ &= -\sigma_{11}^2 \frac{(T-t)^2}{6} - \sigma_{22}^2 \left[\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} + \frac{1}{4\lambda^3} \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{T-t} \right] \\ &\quad - \sigma_{33}^2 \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{4\lambda} (T-t) e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{2}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} + \frac{5}{8\lambda^3} \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{T-t} \right], \end{aligned}$$

et dans le cas de corrélation entre les facteurs :

$$\begin{aligned} -\frac{C(t, T)}{T-t} &= -\sigma_{11}^2 \frac{(T-t)^2}{6} - (\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2) \left[\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} + \frac{1}{4\lambda^3} \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{T-t} \right] \\ &\quad - (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{33}^2) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{4\lambda} (T-t) e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{2}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} + \frac{5}{8\lambda^3} \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{T-t} \right] \\ &\quad - \sigma_{11}\sigma_{21} \left[\frac{1}{2\lambda} (T-t) + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} \right] \\ &\quad - \sigma_{11}\sigma_{31} \left[\frac{3}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} + \frac{1}{2\lambda} (T-t) + \frac{1}{\lambda} (T-t) e^{-\lambda(T-t)} - \frac{3}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} \right] \\ &\quad - (\sigma_{21}\sigma_{31} + \sigma_{22}\sigma_{32}) \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{2\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{\lambda^3} \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{T-t} + \frac{3}{4\lambda^3} \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{T-t} \right]. \end{aligned}$$

le terme de convexité $C(t, T)$ dépend de paramètre λ , de maturité T , de volatilité et de corrélation entre facteurs et permet de se différencier du modèle dynamique de Nelson-Siegel.

Le modèle d'absence d'arbitrage de Nelson-Siegel : Estimation

Nous estimons les paramètres de modèle AFNS sur les mêmes données utilisées pour estimer le modèle DNS. Le nombre de paramètres à estimer dans le cas d'indépendance entre les facteurs de niveau, pente et courbure s'élève à 11 et qui se compose en trois paramètres de K^P , trois paramètres de θ^P , trois paramètres de la matrice de la volatilité diagonale Σ , le paramètre λ et la matrice de variance de bruit ϵ_t qu'on suppose constant H .

En cas de corrélation entre les facteurs, le nombre totale de paramètre à estimer s'élève à 20 et se compose en neuf paramètres de K^P , trois paramètre de θ^P , six paramètres de la matrice de volatilité Σ , le paramètre λ , et la matrice de variance de bruit ϵ_t qu'on suppose un scalaire H .

Cas : Indépendance entre les facteurs niveau, pente et Courbure :

Paramètre	Valeur
λ	0.537
Moyenne-Niveau(θ^P)	3.46%
Moyenne-Pente	-2.98%
Moyenne-Courbure	-1.03%
$K^P(Niveau)$	0.0484
$K^P(Pente)$	0.297
$K^P(Courbure)$	0.453
H	1.42^{-05}
Log-Lik	-36055

1-La vitesse de décroissance de la courbe de taux vers 0 lorsque la maturité augmente est légèrement faible dans le cas de modèle AFNS (0,537) indépendant par rapport au modèle DNS indépendant (0.603), ce qui impliquera un aplatissement plus fort de la courbe de taux pour DNS que AFNS.

2-La valeur moyenne de facteur niveau est égale à 3,46%, légèrement au dessus de l'estimation empirique de taux long 30 ans (3,053%).

3-La valeur moyenne estimée par le modèle de la pente est égale (2.98%) et légèrement au dessus de sa valeur empirique (2,31%).

La matrice de Variance Q

Q	Niveau	Pente	courbure
Niveau	2.914E-05	0	0
Pente	0	9.627E-05	0
courbure	0	0	9.908E-06

La volatilité est faible pour chacun des facteur pente, niveau et courbure

La matrice de transition A

A	Niveau	Pente	Courbure
Niveau	0.893	0	0
Pente	0	0.998	0
Courbure	0	0	0.881

Afin de comparer les résultats de modèle AFNS (modèle continue) avec le modèle DNS(modèle discret), nous convertissons les estimateurs des paramètres de retour à la moyenne K^P et la matrice de variance-covariance Σ à des estimateurs sur la base de pas de discrétisation de l'échantillon utilisé dans le cas discret à savoir 1/52 (hebdomadaire) en utilisant les deux formules suivantes $\text{Exp}(-K^P \frac{1}{52})$ et $\int_0^{\frac{1}{52}} e^{-K^P s} \Sigma \cdot \Sigma' e^{-K^P s} ds$

On obtient :

$$e^{-K^P \frac{1}{52}} = \begin{pmatrix} 0.999 & 0 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9913 \end{pmatrix}$$

La matrice Variance Q

$$\int_0^{\frac{1}{52}} e^{-K^P s} \Sigma \Sigma' e^{-K^{P'} s} ds = \begin{pmatrix} 5.60E-07 & 0 & 0 \\ 0 & 1.84E-06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.89E-07 \end{pmatrix}$$

Cas : de corrélation entre les facteurs :

Paramètre	Valeur
λ	0.4303
Moyenne-Niveau	5.975%
Moyenne-Pente	-2.77%
Moyenne-Courbure	-0.77%
$K^P(Niveau, Niveau)$	4.465
$K^P(Pente, Pente)$	0.662
$K^P(Courbure, Courbure)$	80.284
$K^P(Niveau, Pente)$	7.827
$K^P(Niveau, Courbure)$	-12.827
$K^P(Pente, Niveau)$	-0.329
$K^P(Pente, Courbure)$	-0.591
$K^P(Courbure, Niveau)$	-41.484
$K^P(Courbure, Pente)$	-57.330
H	9.6^{-06}
Log-Lik	-37296

1-La vitesse de décroissance de la courbe de taux vers 0 lorsque la maturité augmente est légèrement faible dans le cas de modèle AFNS (0.4303) avec corrélation par rapport au modèle DNS avec corrélation (0.633), ce qui impliquera un applaudissement plus fort de la courbe de taux pour DNS que AFNS.

2-La valeur moyenne de facteur niveau est égale à 5,975%, largement au-dessus de l'estimation empirique de taux long 30 ans (3,053%).

3-La valeur moyenne estimée par le modèle de la pente est égale (2.77%) et légèrement au-dessus de sa valeur empirique (2,31%).

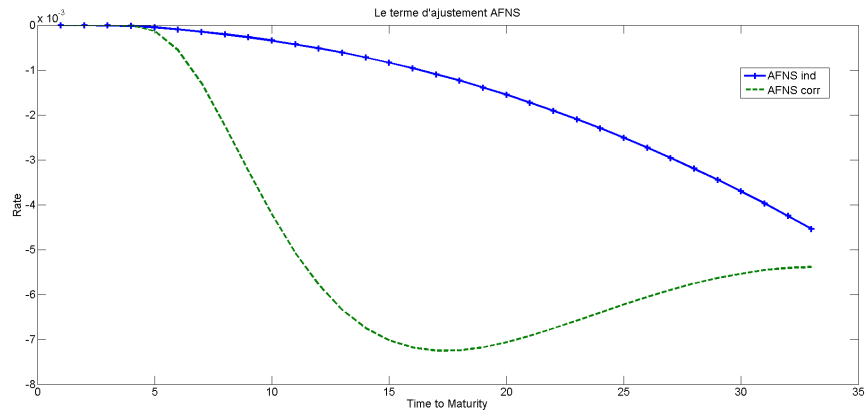
$$Exp(-K^P \frac{1}{52}) = \begin{pmatrix} 0.9769 & -0.0622 & 0.1226 \\ 0.0090 & 0.9909 & 0.0064 \\ 0.4005 & 0.5382 & 0.2531 \end{pmatrix}$$

La matrice Variance-Covariance Q

$$\int_0^{\frac{1}{52}} e^{-K^P s} \Sigma \Sigma' e^{-K^{P'} s} ds = \begin{pmatrix} 7.30E-07 & -8.46E-07 & -3.84E-06 \\ -8.46E-07 & 2.48E-06 & -1.90E-06 \\ -3.84E-06 & -1.90E-06 & 8.45E-05 \end{pmatrix}$$

Interprétations

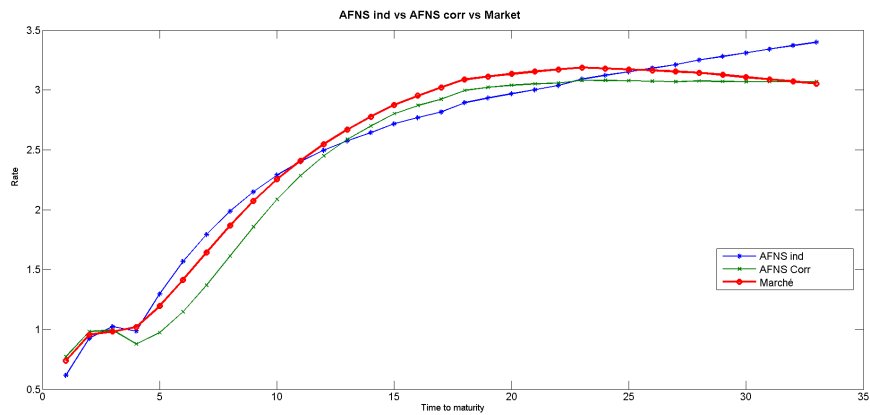
1-Le terme de convexité est la composante qui spécifie le modèle AFNS par rapport au modèle de DNS. Ce terme dépend seulement de la matrice de variance-covariance, le paramètre λ et la maturité.



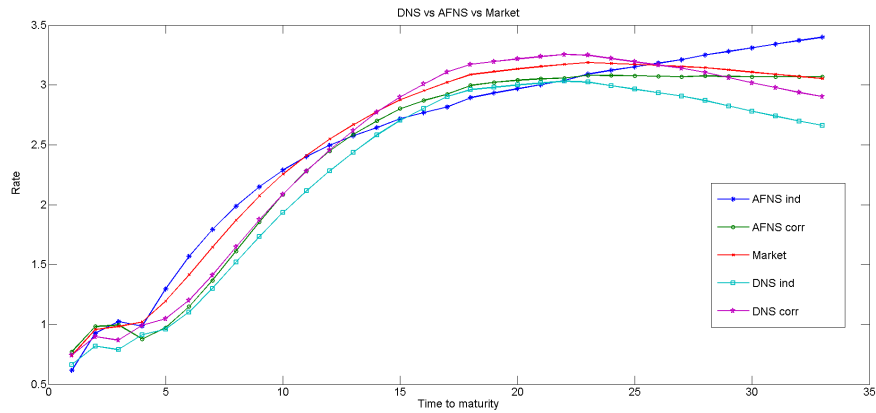
En cas d'influence négligeable des facteurs :

- 1- la décroissance de terme de convexité de modèle AFNS indépendant permettra de constater une convergence de la courbe AFNS vers la courbe DNS indépendante sur des maturités longues.
- 2- la forme convexe de terme de convexité permettra de constater un sur-positionnement et un sous-positionnement de la courbe AFNS avec corrélation au-dessus et au-dessous de la courbe DNS (avec corrélation) respectivement.

Nous comparons la qualité d'estimation des deux modèles AFNS par rapport à la structure par terme des taux moyens de marché (figure ci-dessous).



1-L'aplatissement de la courbe est plus visible pour la courbe de taux (moyenne de la courbe) AFNS en cas de corrélation entre facteurs que pour le modèle AFNS avec facteurs indépendants ce qui d'une part contre-dit l'interprétation de paramètre d'échelle λ (0.4303 pour AFNS avec corrélation vs 0,537 pour AFNS indépendant) et d'autre part confirme l'influence de facteur courbure sur la forme de la courbe.



1- L'aplatissement de la courbe est plus visible pour les courbes DNS que les courbes AFNS ce qui confirme l'interprétation de paramètres d'échelle λ .

2- La comparaison entre les modèles AFNS et DNS ne permet pas de confirmer l'absence d'influence de terme de convexité et les facteurs pente, niveau et courbure.

Le modèle AFNS présente l'avantage de réunir les caractéristiques empiriques du modèle de Nelson-Siegel et la propriété d'absence d'arbitrage expliquée principalement dans le terme de convexité C .

L'hypothèse d'une volatilité constante entre les facteurs de niveau, pente et courbure reste forte et non confirmée empiriquement.

4-L'étude de la performance de modèle consiste à tester la qualité prédictive sur un horizon de temps ce qui pourra aboutir à implémenter des stratégies d'achat vente sur la courbe de taux via des supports cotés (les futures sur obligations et Euribor par exemple), cette étape ne sera pas traitée dans le cadre de travail

3.4 Les méthodes d'interpolation et d'extrapolation

Les données du marché ne permettent pas de reconstituer les différentes courbes des taux (gouvernementales, swap, Over-night Index Swap OIS, etc.) pour toutes les échéances. Il est donc nécessaire d'employer des méthodes d'interpolation pour des maturités jusqu'à la maturité la plus élevée observée sur le marché et d'extrapolation au-delà de celle-ci.

Hagan et West définissent des critères et des caractéristiques à prendre en compte pour choisir une bonne méthode d'interpolation :

- La revalorisation exacte des instruments utilisées dans la méthode de bootstrapping
- Garantir la positivité et la continuité des taux forward instantanés (si les inputs le permettent (un taux négatif est observé sur le marché des obligations allemandes que l'on considère comme la référence de la zone euro))
- L'interpolation est-elle locale ? L'impact se cantonne-t-il au voisinage ou bien se propage-t-il le long de la courbe ?
- Les couvertures sont-elles locales ? L'impact d'un changement de données d'entrée sur la méthode d'interpolation et, par conséquent, sur le portefeuille de couverture.

Définitions et Notations

On considère un échéancier $t_1, t_2, \dots, t_n$ et on note :

$r(t)$: le taux zéro-coupon d'échéance t .

$D(t) = \exp(-r(t).t)$; le prix zéro-coupon ou le facteur d'actualisation (cas continue).

$C(t) = \exp(r(t).t)$: Le facteur de capitalisation.

$f(0, t_1, t_2) = \frac{r_2.t_2 - r_1.t_1}{t_2 - t_1}$, : le taux forward vue d'aujourd'hui pour un un taux fixé en t_1 et payé en t_2 en cas discret .

Rappelons que le taux forward instantané $f(t)$ et le taux court (ou spot) $r(t)$ sont liés par la formule

$$f(t) = \frac{d}{dt}.r(t).t$$

$f(0, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(0, t, t+\epsilon)$ taux forward instantanée pour une maturité t qu'on le note simplement $f(t)$

Le lien entre le taux forward instantanée, discount et le forward. $f(t) = r(t) + r'(t).t$

Interpolation linéaire Interpolation linéaire est l'une des méthodes la plus simple qu'on peut appliquer directement sur le taux ou discount ou bien sur le log des taux ou discount :

La formule de l'interpolation sur le taux $r(t) \forall t_{i-1} \leq t \leq t_i$ est donnée par :

$$r(t) = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}.r_i + \frac{t_i-t}{t_i-t_{i-1}}.r_{i-1}$$

ou bien

$$f(t) = \frac{2t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}.r_i + \frac{t_i-2t}{t_i-t_{i-1}}.r_{i-1}$$

La simplicité de cette méthode n'est pas sans inconvénient. Nous pouvons en effet remarquer que le taux forward est discontinu en t_i et, dans un environnement d'inversion de la courbe de taux (le taux court est supérieur au taux long), le taux forward interpolé est négatif sur certains points de la courbe. Une amélioration de cette méthode consiste à interpoler le logarithme de taux à condition que les taux soient positifs (ce qui n'est pas le cas sur certaines courbes, en particulier la courbe d'état allemande).

Une alternative à la méthode d'interpolation linéaire ci-dessus, qui repose sur l'hypothèse de forward constant par morceau, dans ce cas le forward instantané entre t_{i-1} et t_i est donné par la formule de forward discret $f(t) = \frac{r_i.t_i}{t_i-t_{i-1}}.r_{i-1}.t_{i-1}t_i - t_{i-1}$, on en déduit la formule d'interpolation en $r(t)t$:

$$r(t)t = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \cdot r_i t_i + \frac{t_i-t}{t_i-t_{i-1}} r_{i-1} t_{i-1}$$

Interpolation en spline L'interpolation en spline repose sur une paramétrisation en fonctions en spline de degré deux pour le spline quadratique et de degré trois pour le spline cubique. L'interpolation quadratique est l'une des méthodes les plus simples. Le but est de relier les points par des courbes de degré deux. Mais si nous nous contentons de faire passer une parabole par les trois premiers points puis une autre par les trois suivants, la courbe comportera des cassures « zigzag ». L'interpolation en quadratiques, s'exprime sous la forme :

$$r(t) = a_i + b_i \cdot (t - t_i) + c_i \cdot (t - t_i)^2 \quad \forall t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

avec des a_i, b_i, c_i des paramètres à estimer à chaque instant t_i
Quant à l'interpolation en spline cubiques a la forme suivant :

$$r(t) = a_i + b_i \cdot (t - t_i) + c_i \cdot (t - t_i)^2 + d_i \cdot (t - t_i)^3 \quad \forall t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

avec a_i, b_i, c_i, d_i des paramètres à estimer à chaque instant t_i
Les courbes sont très harmonieuses, car il n'y a pas de cassures. L'inconvénient est que la courbe est beaucoup moins robuste que l'interpolation quadratique, car un changement de point influence la totalité de la courbe. Le nombre élevé des paramètres à estimer est un inconvénient de l'interpolation quadratique et encore plus pour le cubique.

Les méthodes décrites ci-dessus ne satisfont pas les critères recommandés pour une bonne méthode d'interpolation au sens des caractéristiques proposées par Hagan et West, raison pour laquelle ces derniers proposent la méthode de Monotone Convexe comme alternative.

Interpolation Monotone Convexe

Dans l'article de Hagan et West, cette méthode repose sur deux hypothèses :

1-Le forward 'continu' à l'instant donné t_i est une interpolation linéaire entre les taux forward discret à t_i et t_{i+1} .

2-Les taux forward discrets sont les données d'entrée de la méthode de bootstrapping .

La méthode d'interpolation consiste donc à trouver une fonction qui passera sur les points des taux forward « continus » de manière à respecter les contraintes de positivité, continuité et monotonie locales :

La première hypothèse s'écrit sous la forme.

$$f_i = \frac{t_i-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} \cdot f_{i+1}^d + \frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_{i-1}} f_i^d$$

avec les conditions initiales :

$$f_n = f_n^d - \frac{1}{2}(f_{n-1} - f_n^d) \quad f_0 = f_1^d - \frac{1}{2}(f_1 - f_1^d)$$

$$f_i^d = \frac{r_i \cdot t_i}{t_i - t_{i-1}} r_{i-1} \cdot t_{i-1} \quad f_i = f t_i$$

Les critères imposés sur la fonction f :

$$(i) \frac{1}{t_i-t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt = f_i^d$$

(ii) f est positive

(iii) f est continue

(iv) si $f_{i-1}^d < f_i^d < f_{i+1}^d$, $f(t)$ est croissante sur (t_{i-1}, t_i) , sinon elle est décroissante

Hagan et West proposent une fonction $f(t)$ sous la forme :

$$f(t) = g\left(\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) + f_i^d$$

avec g une fonction définie par :

$$\begin{aligned} g : [0, 1]x &\mapsto g(0)(1 - 4x + 3x^2) + g(1).(-2x + 3x^2) \\ g(0) &= (f_{i-1} - f_i^d) \\ g(1) &= (f_i - f_i^d) \\ \int_0^1 g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Par construction f satisfait (i) et (iii) car g est une fonction quadratique, le critère (iv) est satisfait sur des intervalles définies par les valeurs de la fonction $g(0)$ et $g(1)$ ou implicitement f_i^d et f_{i-1}^d

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} g(0)(1-4x+3x^2) + g(1).(-2x + 3x^2) & \text{si } g(1) \in [-2g(0), -1/2g(0)], 0 \leq x \leq 1 \\ g(0) + (g(1)-g(0)).\left(\frac{x-\eta(1)}{1-\eta(1)}\right)^2 & \eta(1) < x \leq 1 \\ g(1) + (g(0)-g(1)).\left(\frac{\eta(2)-x}{\eta(2)}\right)^2 & \eta(2) \leq x < 1 \\ A + (g(0)-A).\left(\frac{\eta(3)-x}{\eta(3)}\right)^2 & 0 < x < \eta(3) \\ A + (g(0)-A).\left(\frac{x-\eta(3)}{1-\eta(3)}\right)^2 & \eta(3) < x < 1 \\ g(0) & 0 \leq x \leq \eta(1) \\ g(1) & \eta(2) \leq x < 1 \end{array} \right\}$$

avec :

$$\begin{aligned} \eta(1) &= \frac{g(1)+2g(0)}{g(1)-g(0)} \\ \eta(2) &= \frac{3g(1)}{g(1)-g(0)} \\ \eta(3) &= \frac{g(1)}{g(0)+g(1)} \\ A &= \frac{g(1).g(0)}{g(0)+g(1)} \end{aligned}$$

Contrairement aux méthodes de Spline cubique et quadratique, la méthode de monotone convexe n'exige pas d'estimer des paramètres. Au contraire, elle impose de définir des fonctions locales dépendantes des taux forward discrets pour assurer d'une part la monotonie locale dans le but de contrôler la sensibilité de la courbe de taux forward à un changement d'un point d'entrée, et d'autre part, la continuité et la positivité de taux forward en imposant de localiser le taux forward interpolé sur des segments bien déterminés.

En pratique, le choix de la courbe de taux ainsi que la méthode d'interpolation dépend de l'utilisation que l'on souhaite faire de cette courbe. Ainsi, lorsque cette courbe doit être utilisée pour détecter sur un marché des titres obligataires sur ou sous-évalués (Relative Value ou Stratégie d'arbitrage) ou pour évaluer des produits dérivés (options, contrats à terme, etc.), des modèles sans arbitrage ainsi que

des méthodes d'interpolation fiables et peu sensibles sont préférables. En revanche, si l'on souhaite seulement disposer de l'allure générale de la courbe pour expliquer des vues à long terme ou tout simplement à des fins d'analyse économique, il est alors raisonnable de se concentrer sur des formes paramétriques avec certaines interprétations économiques.

Dans la suite, nous analysons l'impact de la méthode d'extrapolation sur l'engagement de l'assureur dans le cadre de traitement des LTGA.

Dans le cadre de Solvabilité II, L'EIOPA recommande, pour l'actualisation des flux des prestations versées par les assureurs aux assurés, la méthode de Smith-Wilson à l'interpolation et l'extrapolation de la courbe de taux. Cette méthode, dont les paramètres sont interprétables économiquement, relie directement des grandeurs observables sur le marché comme le taux d'inflation et le taux d'intérêt réel espérés et le taux forward à long terme (ou taux forward ultime).

Le taux forward ultime (Last Liquid Point LL) est le taux vers lequel les taux forward vont converger.

$$f(t, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T)$$

Avec $f(t, T)$ le taux forward instantané constaté en t pour une maturité T .

Dans le cadre de solvabilité 2, le taux forward est la somme de l'estimation de l'inflation attendue à long terme et du taux d'intérêt réel espéré. Pour QIS5 et LTGA ce taux à 20 ans est estimé à 4.2 % par an, pour une estimation de l'inflation attendue de 2% et d'un taux réel de 2.2%.

La méthode d'extrapolation : Smith et Wilson :

Nous reprenons les mêmes termes de travail de Thierry MOUDIKI « Sensibilité d'une rente viagère à l'extrapolation de la courbe de taux dans un contexte LTGA ».

On considère les hypothèses suivantes pour un entier N :

-La partie liquide de la courbe de prix zéro coupons est connue pour les maturités : $u_1, u_2, \dots, u_N$ et de prix $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T$ avec $p_i = P(0, u_i)$

-Le taux forward instantané $f(0, T)$ converge quand la maturité T tend vers l'infini, vers une valeur f_∞

$-\alpha$ est un paramètre qui contrôle la vitesse de convergence de $f(0, T)$ vers $f(0, \infty)$

On définit ainsi la fonction symétrique de Wilson W pour toute maturité t et pour $j=1 \dots N$

$$W(t, u_j) = e^{-f_\infty \cdot (u_j + t)} [\alpha \cdot (t \wedge u_j) - e^{-\alpha \cdot (t \wedge u_j)} - \sinh(\alpha \cdot (t \vee u_j))]$$

Le prix d'un zéro-coupon à la date $t=0$ dans le modèle de Smith Wilson est donné par :

$$P(0, T) = e^{-f_\infty \cdot T} + \sum_{j=1}^N \xi_j W(T, u_j)$$

L'EIOPA fixe le paramètre f_∞ au niveau de taux forward ultime (4.2%) et le paramètre α est calibré itérativement de sorte, que la convergence ait lieu 40 ans après la dernière maturité considérée comme suffisamment liquide (LLP) pour les taux swaps fixes contre Euribor 6 mois. Les paramètres à estimer dans ce modèle sont donc ξ_j en comparant les prix des zéro coupons observés $P(0, u_j)$ et les prix donnés par le modèle $P(0, T)$ en remplaçant dans la formule précédente T par u_j

En réécrivant l'équation sous forme matricielle on obtient l'estimation de $\xi = (\xi_j) \forall j = 1 \dots N$

$$\hat{\xi} = (W^T W)^{-1} W^T (p - \mu) = W^{-1} (p - \mu)$$

car W est symétrique.

Avec :

$\mu = (e^{-f_{\infty} \cdot u_j}, \dots, e^{-f_{\infty} \cdot u_N})^T$ et $W = (W(u_i, u_j), 1 \leq i, j \leq N)$

La simplicité d'implémentation de cette méthode n'est pas sans inconvénient selon l'étude de Thierry MOUDI-KI. Ces derniers sont en effet nombreux, je cite :

-la méthode ne garantit pas la décroissance de prix zéro coupon en fonction de la maturité (des opportunités d'arbitrage peuvent être détectées).

-L'impact d'un changement de point d'entrée le long de la courbe interpolée.

Cette méthode ne satisfait pas les critères d'une bonne méthode d'interpolation ou d'extrapolation selon HAGAN et WEST (2006).

Conclusion : Interpolation

La méthode d'interpolation et d'extrapolation fait partie intégrante de la méthode de bootstrapping, qui est le point de départ pour valoriser des produits taux dans un environnement d'absence d'arbitrage la méthode de Monotone convexe et les critères fixés par HAGAN et West sont les mieux adaptés en finance de marché malgré l'absence des paramètres économiquement interprétables.

Par ailleurs malgré l'intérêt de la méthode de Smith Wilson en intégrant des paramètres interprétables, sa faiblesse réside d'une part dans la fixation de taux forward ultime qui pourra générer :

1-une sensibilité de passif au point LLP 20 ans de la courbe de taux

2-une forte exposition sur la pente 15-20 de la courbe de taux (multiple fois la sensibilité totale)

3-une couverture sur la base de la courbe extrapolée par la méthode Smith Wilson donnera lieu à une position d'achat de protection contre le point 20 ans. Un an après la couverture est sur 19 ans (sous couverture)

3.5 Modélisation de risque de défaut

Pour prendre en compte le risque de défaut des obligations corporate, nous nous proposons d'examiner le modèle d'intensité de défaut LMN.

Dans cette partie nous nous plaçons dans le cadre de l'évaluation risque neutre des obligations. Rappelons que le prix de l'obligation zéro coupon sans risque de défaut et de maturité T est :

$$B(t, T) = \mathbf{E}_t[\exp(-\int_t^T r_s ds)]$$

En cas de zéro coupon avec un risque de défaut de contrepartie, l'évaluation doit tenir compte de la possibilité du défaut de celui-ci. la perte en cas de défaut à l'instant τ s'exprime en terme d'un taux de recouvrement R, on définit alors la perte par LGD=1-R (*Loss Given Default*).

Le prix D(t,T) d'un zéro coupon risqué de maturité T est :

$$D(t, T) = \mathbf{E}_t[e^{-\int_t^T r_s ds} \cdot 1_{\tau > T} + R \cdot e^{-\int_t^T r_s ds} \cdot 1_{t < \tau \leq T}]$$

On considère un processus de Poisson standard $(M_u, u \geq 0)$ et on se donne une fonction strictement croissante λ_t appelée *intensité de défaut* ou *credit spread*. On modélise le temps de défaut τ par le processus $(N_t = M_{\gamma(t)})$ qui est un processus de poisson inhomogène en temps et d'intensité λ avec :

$\gamma(t) = \int_0^t \lambda_s ds$ On a bien $\gamma(\tau) \propto \exp(1)$ et que $\gamma(\tau)$ est indépendant de $(r_t, t \geq 0)$. on déduit le prix d'un zéro coupon risqué de maturité T (pay-off à T : $1_{\tau > T}$) est donnée par (*CZCB Corporate Zero-Coupon Bond*) :

$$CZB(t, T) = \mathbf{E}_t[\exp(-\int_t^T r_s ds) 1_{\tau > T}] = \mathbf{E}_t[\exp(-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds)].$$

On déduit le prix CB(t,T) d'une obligation d'entreprise (*Corporate Bond*) de coupon c, de maturité T.

$$CB(t, T) = \mathbf{E}_t[\int_t^T (\frac{\delta(u)}{\delta(t)} du) + \frac{\delta(T)}{\delta(t)} \cdot F_t(T)]$$

Avec : $F_t(T) = (\exp(-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds))$, $\delta(t) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$ et $f_t(u) = (c + R\lambda_u) \cdot \exp(-\int_t^T r_s ds)$

3.6 Le modèle à intensité de défaut LMN *Longstaff, Mithal, et Neis*

Dans cette partie nous présentons brièvement le modèle LMN qui suppose que le processus d'intensité de défaut λ_t est :

$$d\lambda_t = \kappa \cdot (\theta - \lambda_t) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{\lambda_t} \cdot dB_t.$$

Ou B_t est un mouvement brownien standard.

La probabilité de défaut $Q(t, T)$ issue par le modèle LMN (ou CIR) est donnée par la formule fermée suivante :

$$Q(t, T) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right) = \exp(a(t, T) + b(t, T)\lambda_t)$$

avec $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$

$$b(t, T) = \frac{-\sinh(\gamma(T-t))}{\gamma \cosh(\gamma(T-t) + 0.5\kappa \sinh \gamma T - t)} \text{ et } a(t, T) = \frac{2\kappa c}{\sigma^2} \cdot \log\left(\frac{-\gamma \exp(0.5\kappa(T-t))}{\gamma \cosh(\gamma(T-t) + 0.5\kappa \sinh \gamma T - t)}\right)$$

Afin de calibrer le modèle LMN nous utilisons des CDS cotés sur le marché, BRIGO, D et MERCURIO., F. décrivent la méthode de calibration en détail, nous rappelons brièvement la méthode pratique de valorisation des CDS ainsi que la méthode de stripping de probabilité de défaut induite à partir des spreads cotés sur le marché.

CDS :Evaluation et stripping

Evaluation de CDS

On considère un temps de défaut τ , et une date de référence t_0 ($\tau \geq t_0$). Un CDS portant sur ce défaut consiste en un swap, entre deux contreparties, appelées, respectivement, acheteur et vendeur de protection :

► L'acheteur (Protection Payer), respectivement le vendeur de protection (Protection Seller) va payer, respectivement recevoir, un certain coupon fixe c , à des dates fixées à l'avance, tant qu'il n'a pas eu de défaut.

► En cas de défaut, au cours de la vie de CDS, l'investisseur touche le coupon au prorata de la période d'intérêt en cours (accrued). Ces deux points constituent ce qu'on appelle la jambe de prime.

► Le vendeur, respectivement l'acheteur, de protection va payer, respectivement recevoir $(1-R)$ au moment du défaut, ou un certain nombre de jours après, si celui-ci survient avant la fin de la transaction, le nombre R désigne le taux de recouvrement qu'on supposera déterministe. Cette jambe est appelée jambe de défaut.

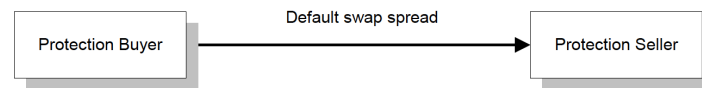
Notons, pour tout couple de date $t \leq T$.

$$P(t, T) = \mathbb{P}(\tau \in [t, T]), \text{ et } Q(t, T) = 1 - P(t, T)$$

Jambe de prime

Figure 1. Mechanics of a default swap premium leg

Between trade initiation and default or maturity, protection buyer makes regular payments of default swap spread to protection seller



La jambe de prime est décrite par un échéancier $T_i^S, T_i^E, \delta_i, 1 \leq i \leq M$ ou :

► La date T_i^S est la date de début de la $i^{\text{ème}}$ période d'intérêt.

- La date T_i^E est la date de fin de la $i^{ème}$ période d'intérêt et la date de paiement du coupon.
- Le terme δ_i est le coverage associé à la période $[T_i^S, T_i^E]$, on suppose que :

$$\delta_i = T_i^E - T_i^S \bar{b},$$

avec , en générale $b=360$.

Le MtM (*Mark-to-Market*) $PJ(t_0)$, de la jambe de prime s'écrit :

$$PJ(t_0) = c. \left[\sum_{i|t_0 < T_i^E} \delta_i \cdot B(t_0, T_i^E) \cdot Q(t_0, T_i^E) + \sum_{i|t_0 < T_i^E} \int_{T_i^S}^{T_i^E} \frac{(t - T_i^S)}{b} \cdot B(t_0, t) \cdot dP(t_0, t) \right] \text{ le terme } \frac{PJ(t_0)}{c} \text{ est}$$

applé *Risky-Duration* noté $RD(t_0)$.

Le deuxième terme de $RD(t_0)$ correspond aux accrued. Il peut se réécrire de la manière suivante :

$$A(t_0) = \sum_{i|t_0 < T_i^E} \int_{T_i^S}^{T_i^E} \frac{(t - T_i^S)}{b} \cdot B(t_0, t) \cdot dP(t_0, t) = \int_{T_1^S}^{T_M^E} \frac{(t - T_{\psi(t)}^S)}{b} \cdot B(t_0, t) \cdot dP(t_0, t)$$

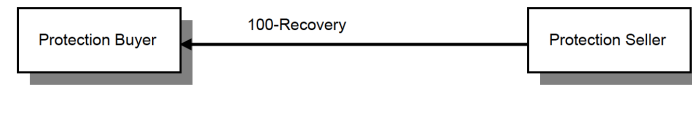
Ou $\psi(t) = \max k \in 1, \dots, M | T_k^S \leq t$, ou bien en forme discret :

$$A(t_0) = \sum_{j|1 \leq j, t_0 < t_j} \frac{(t_j - T_{\psi_j})}{b} \cdot B(t_0, t_{j-1}) (P(t_0, t_j) - P(t_0, t_0 v t_{j-1}))$$

avec : $\psi_j = \psi(t_j)$

Jambe de défaut

Figure 2. The protection leg following a credit event



le MtM de la jambe de défaut s'écrit :

$$LJ(t_0) = (1 - R) \cdot \int_{t_0}^{T_i^E} B(t_0, t) \cdot dP(t_0, t)$$

Ou bien sous la forme discret :

$$LJ(t_0) = (1 - R) \cdot \sum_{j|1 \leq j, t_0 < t_j} B(t_0, t_{j-1}) (P(t_0, t_j) - P(t_0, t_0 v t_{j-1}))$$

En pratique, et conformément aux nouvelles conventions de l'ISDA, les CDS européennes et américaines reposent sur les mécanismes suivants :

- Les dates de début des CDS sont des dates IMM : 20 mars, 20 juin, 20 septembre et 20 décembre.
- le vendeur de protection (respectivement, l'acheteur) paye (respectivement, reçoit) le coupon multiplié par la proportion de la période d'intérêt écoulée entre la date de départ du CDS et la date de transaction.
- Une standardisation des coupons qui conduit à l'échange d'une prime up front échangée. Une standardisation des coupons qui conduit à l'échange d'une prime up front échangée. Les CDS européens et américains sont désormais cotés sous la forme d'un couple prime up front /coupon. Le coupon fixe est, pour les CDS américains, de 100 ou de 500 bps. En ce qui concerne les CDS européens, on dispose de cotations up front pour les valeurs de coupons fixe suivantes : 25, 100, 500 and 1000 bps, ainsi que, parfois, pour des coupons de 300 et 750 bps.

Pour illustrer ce fonctionnement, on considère un CDS 5 ans acheteur de protection avec un spread de 60 bp, de nominal 10 Mln \$, de taux de recouvrement $R = 45\%$. L'acheteur de protection paie donc $10\text{Mln}\$ \times 0.006 \times 0,25 = 6000 \$$ chaque trimestre. En cas de défaut de l'entreprise sous jacent de CDS, :

- le vendeur de protection compense l'acheteur de protection de la perte de valeur de l'obligation à 45%, la compensation est égale $10\text{Mln}\$(100 - 45)45\% = 5.5\text{Mln} \$$:
- l'acheteur de protection paie la prorata de la précédente paiement à la date de l'évènement de défaut, si par exemple le défaut est survenu un mois après la date de contrat, l'acheteur de protection paie $10\text{Mln}\$ \times 0.06 \times 1/12 = 500$ (en cas d'obligation émise par un état souverain l'acheteur de protection ne paie pas de prorata)

Le calcul de PL d'une position d'achat de protection dépend de la structure par terme de spread de défaut, de taux de recouvrement R et de modèle. supposons qu'après 1 an le taux spread d'un CDS 4-ans est de l'ordre de 170 bps, la valeur marché de cette position est donné par :

MTM = La valeur marché de la prime d'un CDS 4 ans à 170 bps - valeur Marché de la prime de CDS 4 ans à 60 bp ou bien en utilisant le terme Risky PV01. $MTM = (170\text{bp} - 60\text{bp}) \times \text{Risky PV01}$

Le PL d'une position est réalisé en annulant le swap par le paiement de MTM soit en vendant la protection d'un CDS 4 ans à une autre contrepartie avec un coupon de 170 bp.

Stripping de l'intensité de défaut

Le stripping consiste à extraire la probabilité de défaut $Q(t, \cdot)$ à partir des fair spread ou des up front des CDS de différentes maturités, cotés sur le même émetteur.

Généralement, les cotations de CDS reposent sur la donnée d'un spread conventionnel. Utilisée comme courbe de spread flat dans le pricer Bloomberg, avec un taux de recouvrement de 0.4 pour les Senior Unsecured et de 0.2 pour les subordonnées, il permet de déterminer la prime up front associée à un niveau de coupon.

On se donne un couple (C, U) , représentant respectivement le coupon et la prime up front qui annulent le Mark to Market de CDS, soit alors :

$$C.RD(t_0) + (U - C.\delta_1.\frac{t_0-T_0}{T_1-T_0}).D(t_0, t^p) = LJ(t_0)$$

Où, t^p est la date de paiement de la prime up front et de couru sur le coupon du prochain coupon.

On se donne N CDS sur le même émetteur de maturité $T^1, T^2, \dots, T^N$, caractérisés par les couples $(c^1, U^1), (c^2, U^2), \dots, (c^N, U^N)$, où pour tout i U^i représente la prime Up front et c^i le coupon.

On suppose que la probabilité de défaut s'écrit :

$$Q(t_0, T) = \exp\left(-\int_{t_0}^T \lambda_s ds\right)$$

avec λ_s est une fonction constante par morceaux entre les T^i . Notons λ_i la valeur de λ_s entre T^{i-1} et T^i et $T^0 = t_0$.

La méthode de stripping se déroule comme suit :

1-On détermine λ_1 à partir de l'équation :

$$c^1.RD^1(t_0) + (U_1 - c^1.\delta_1.\frac{t_0-T_0}{T_1-T_0}).D(t_0, t^p) = LJ^1(t_0)$$

Avec $RD(t_0)^1$ et $LJ(t_0)^1$ sont respectivement le Risky-Duration et la jambe de défaut de CDS $n : 1$ définit précédemment.

2-Supposons connus $\lambda_i, i \leq l-1, 1 < l \leq N$, le couple coupon/up front du CDS $n : l$, dépend des $\lambda_i, i \leq l-1$. Les dates antérieures à T^{l-1} ne dépendent que des intensités connues. Celles strictement postérieures à T^{l-1} dépendent de k . Or, les probabilités de survies peuvent se factoriser sous la forme :

$$Q(t_0, t) = Q(t_0, T^{l-1})\exp(-\lambda_l.(t - T^{l-1})), \forall T^{l-1} \leq t$$

On résout donc λ_l de à partir de l'équation ci-dessus.

3.7 Calcul de SCR

Cas d'un zéro-coupon

On considère pour la suite que le taux d'intérêt est régi par un taux court $r(t)$ de Hull-White (Vasicek est un cas particulier en prenant $k=a$ et $\theta(t)=k \theta(t)$). Nous prenons un exemple de calcul de SCR d'un portefeuille qui contient un zéro coupon dont le risque de crédit est nul (le risque souverain n'est pas négligeable même pour les pays AAA depuis la crise des sub-prime).

(L'art.101 de la directive (cf, EOPIA 2010 a) exige que le niveau de SCR doit corresponde au niveau de VaR de fonds propre à un niveau de confiance de $p=99.5\%$ sur l'horizon d'un an.

Considérons un portefeuille V_t composé d'une seule obligation zéro coupon, de maturité T et de prix $P(t, T)$. La valeur à risque de portefeuille V_t , notée VaR_p est la perte maximale avec un niveau de confiance p à l'horizon d'un an. La variation de portefeuille dans une période d'un an est notée : $dV=P(0, T)-P(1, T-1)$. Ce terme est aléatoire car ne connaît pas la valeur de $P(1, T-1)$, on déduit donc la formule de SCR.

$$\begin{aligned} P(dV \geq -SCR) &= 1 - p \\ P(P(0, T) - P(1, T-1) \geq -SCR) &= 1 - p \\ P(P(1, T-1) \leq SCR - P(0, T)) &= 1 - p \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de SCR.

$$SCR = P(0, T) - VaR_p(P(1, T-1))$$

or d'après la section précédente :

$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$ suit une loi log normale de moyenne $m = \ln(A(t, T)) - B(t, T)\mu$ et de variance $\sigma^2 = \text{Var}[r_t]B(t, T)^2$ avec :

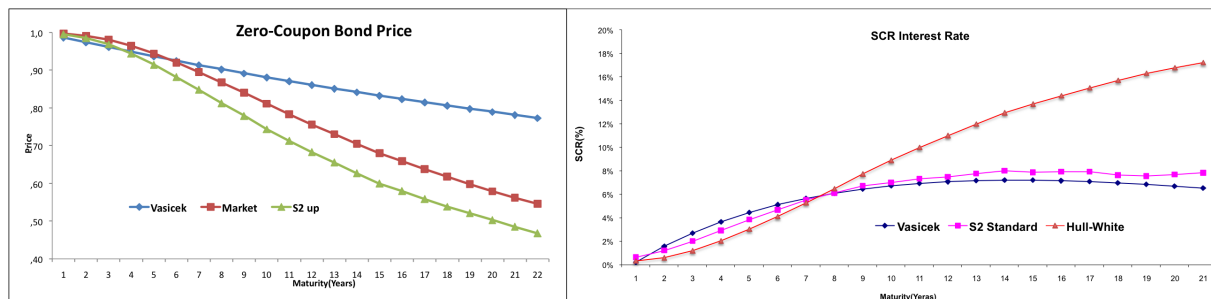
$$\mu = \mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-a(t)} \alpha(t) + \alpha(t) e^{-a(t)} \text{ et } \text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t)}).$$

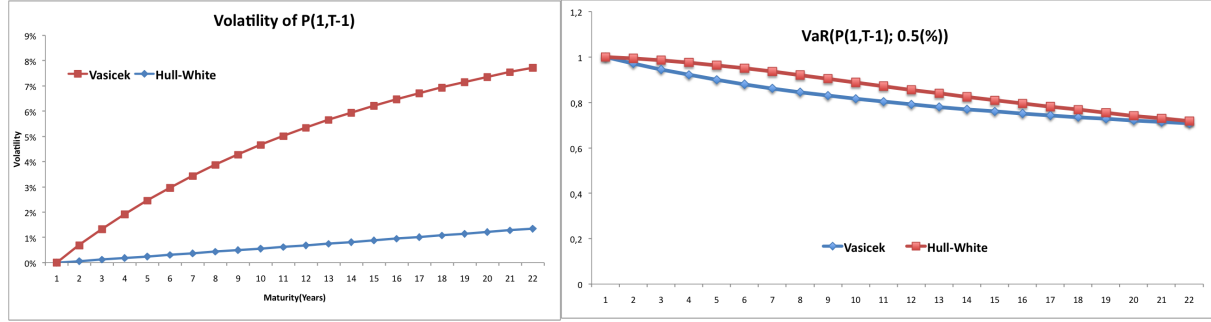
On en déduit la valeur de la $VaR_p(P(1, T-1))$:

$$VaR_p(P(1, T-1)) = F_{P(1, T-1)}^{-1}(p) = \exp(\sigma \phi^{-1}(p) + m)$$

Avec $\phi^{-1}(p)$ la quantile d'ordre p d'une loi normale centré.

Pour illustrer ces démarches, nous prenons la coube d'actualisation (Discount) strippée à partir de taux interbancaires et taux swap Européenne cotée au 22/10/2013 et nous comparons les valeurs de SCR calculés par les modèles Vasicek et Hull-White avec la formule standard .





Remarques

-Par construction de la formule de SCR donnée par le modèle de taux court, plus la volatilité de $P(1,T-1)$ est grande plus la $VaR_p(P(1,T-1))$ est élevée et par consequence le SCR est faible.

-Le faible SCR pour les zéro coupons ayant une maturité inférieure à 7 ans est dû à une surévaluation par rapport au prix marché (ou prix de de Hull-White (car c'est la courbe zéro-coupon utilisé dans la calibration)) et un légère écart de la volatilité de $P(1,T-1)$.

-La formule de calcul analytique de SCR dépendant de paramètres estimés de modèle, il est donc nécessaire de contrôler la méthode de calibration et la liquidité des produits utilisés en calibration. L'article F.PLANCHET & E.KARAM analyse l'impact d'erreur d'estimation des paramètres de modèle de taux de Vasicek sur l'évaluation de SCR de taux.

Cas d'un portefeuille de zéro-coupon

Nous adoptons l'approche suivie par F.Planchet et Karam (1). Pour cela nous considérons le cas d'un portefeuille composée de n zéro-coupon, de maturité T_i , et de prix $P(0, T_i) \forall i = 1 \dots n$.

On en déduit le prix P de portefeuille sous le modèle de Hull-White à l'instant $t = 0$.

$$P = \sum_{i=1}^n P(0, T_i)$$

avec $P(0, T_i) = A(t, T_i)e^{-B(t, T_i)r(t)}$ le prix de zéro coupon de maturité T_i et qui suit une loi lognormale de moyenne $m = \ln(A(t, T_i)) - B(t, T_i)\mu$ et de variance $\sigma^2 = \mathbb{V}ar[r_t]B(t, T_i)^2$ avec :

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-a(t)} + \alpha(t) - \alpha(t)e^{-a(t)} \\ \mathbb{V}ar[r_t] &= \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - e^{-2a(t)}). \end{aligned}$$

On applique l'approximation de Fenton-Wilkinson pour une somme de loi log-normale, $P = e^Z$ avec $Z \mapsto \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z)$ avec :

$$\begin{aligned} \mu_Z &= 2\ln(m_1) - 1/2\ln m_2 \\ \sigma_Z &= \ln m_2 - 2\ln(m_1) \end{aligned}$$

et

$$m_1 = \sum_{i=1}^n e^{\mu_{P(0, T_i)} + \sigma_{P(0, T_i)}}$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^n e^{2\mu_{P(0,T_i)} + 2\sigma_{P(0,T_i)}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n e^{\mu_{P(0,T_i)} + \mu_{P(0,T_j)}} \cdot e^{1/2(\sigma_{P(0,T_i)}^2 + \sigma_{P(0,T_j)}^2 + 2\rho_{i,j}\sigma_{P(0,T_i)}\sigma_{P(0,T_j)})}$$

On en déduit la valeur de SCR.

$$\begin{aligned} SCR &= P - x_p \left(\sum_{i=1}^n P(1, T_i - 1) \right) \\ SCR &= P - \exp(\sigma_Z \phi^{-1}(p) + \mu_Z) \end{aligned}$$

Avec $\phi^{-1}(p)$ la quantile d'ordre p d'une loi normale centré.

3.8 Conclusion

Le modèle interne permet aux assureurs, en prenant en compte les risques inhérents à leurs activités de tracer une image précise et réaliste du profil de risque et de fournir un indicateur de sa solvabilité afin de protéger les assurés. afin de construire un modèle interne fiable et fonctionnel à tous les niveaux, celle-ci devra être capable de fournir des informations interprétables et économiques sur le bilan et les engagements de l'assureur. La composante financière présente une part importante du bilan de l'assureur et en particulier des investissements dans des produits taux qui permettent d'une part d'adosser plus facilement les flux de passif et d'autre part de générer des revenus afin de rémunérer le capital. Le choix du modèle est donc primordial et doit coupler entre la facilité d'implémentation et de calibration pour réduire le risque de modèle et l'efficacité opérationnelle afin de maîtriser la valorisation des produits et le contrôle des risques. Les trois modèles de taux d'intérêt présentés ci-dessus présentent de nombreux avantages et limites. L'assureur doit faire un arbitrage entre la simplicité de modèle pour réduire le risque de modèle et la complexité pour mieux maîtriser le comportement des actifs financiers.

Au-delà de son rôle dans le calcul de SCR, le modèle interne peut fournir des données d'entrée d'un modèle d'allocation d'actifs en particulier dans l'estimation des taux de rendement futurs ou plus encore les matrices de variance-covariance, deux éléments indispensables dans le cadre d'un modèle d'allocation d'actifs (section suivante).

3.8.1 Générateur de Scénarios Economiques (GSE)

De manière générale, pour calculer le prix d'un instrument ou le risque associé nous préférons dans un premier temps et pour des raisons de simplicité d'implémentation de trouver des formules fermées ou des approximations. Cette méthode présente l'inconvénient de se fonder souvent sur des hypothèses fortes (la normalité des rendements, volatilité constante, etc.) rarement observées sur le marché. La méthode de Monte carlo et malgré sa sensibilité aux paramètres de processus de diffusion (risque de modèle) reste et grâce aux méthodes de réduction de variance la méthode la plus utilisée pour valoriser des produits complexes et le calcul de VaR. Cette méthode consiste à générer les trajectoires (souvent dans un univers risque neutre) d'un processus de diffusion sur un horizon de temps donné. Ce qui constitue dans l'assurance la composante financière d'un générateur de Scénario économique (et financière).

La projection sur le long terme des valeurs de marché des actifs financiers et des variables macroéconomiques (taux d'intérêt, crédit, inflation, change, chômage, etc.), appelée « Générateur de Scénarios économiques (GSE) » constitue une phase cruciale dans le processus d'allocation d'actifs et le calcul de SCR dans le cadre du modèle Interne (cf. Planchet (2009)).

Dans le cadre de la gestion obligataire, la détermination de la stratégie d'allocation optimale vient dans un deuxième temps, ultérieurement à la projection des scénarios issus des processus de diffusion de taux, crédit et inflation (section précédente). Concernant la corrélation entre les facteurs de risques, elle sera supposée linéaire et calibrée historiquement contrairement au calibrage des courbes de taux et volatilités, cela revient à l'absence de liquidité des produits de corrélation sur le marché organisé.

Le choix de la structure de projection, appelée aussi structure schématique de projection, pour chacune des variables du GSE peut être considéré comme une problématique à part (cf. Faleh et al. (2010)). Elle concerne la définition du schéma graphique de transition entre deux valeurs successives (Nœuds), observées entre deux dates t et $t1$. Il s'agit de deux principales structures, la structure linéaire (cf. Ahlgrim(2005)) et la structure d'arborescence (cf. Kouwenberg (2001)).

La différence principale entre ces deux schémas se situe au niveau de la nature de la dépendance entre les différentes trajectoires simulées. Alors que pour les projections linéaires, une seule trajectoire est dérivée à partir de chaque nœud, les structures par arborescences supposent quant à elles que chaque nœud possède différents nœuds- enfants et ainsi différentes trajectoires possibles sont déduites à partir de chaque nœud.

La modélisation de plusieurs facteurs de risques en même temps pose un problème majeur concernant la structure de dépendance entre ces facteurs. En finance de marché ce problème est souvent lié à la liquidité des produits de corrélation et supposés linéaires dans plusieurs cas. L'article d'Armél K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] propose une analyse théorique et empirique de l'impact du choix de la structure de dépendance intégrée à un générateur de scénarios économiques sur le niveau du capital de solvabilité dans le cadre du dispositif solvabilité 2.

Nous supposons pour la simplicité que la matrice variance covariance utilisée dans l'approche d'allocation que nous proposons (la dernière partie du mémoire) est estimée empiriquement et que les rendements utilisés dans le cadre d'ALM sont déduits empiriquement pour des raisons de comparaison et ne font pas partie de l'approche d'allocation (ou moins implicitement). Ainsi, contrairement à l'approche de Markowitz le risque d'estimation se situe seulement dans la matrice de variance covariance.

4 Partie II : Modèles d'allocation d'actifs

4.1 Allocation stratégique d'un portefeuille obligataire dans le cadre de Solvabilité 2

Les compagnies d'assurance sont amenées à déterminer le montant de capital (i.e. fonds propres) à allouer à un portefeuille, afin de lui permettre de faire face à des situations exceptionnelles. Par la suite, une allocation optimale du capital doit être effectuée en fonction de l'ensemble des risques composant chaque portefeuille. Cette allocation doit tenir compte de la contribution de chaque risque au risque global à l'aide d'une méthode d'allocation de risque laquelle permet une redistribution des ressources vers les composantes les plus viables du portefeuille de la compagnie. Il existe dans la littérature actuarielle deux principales approches d'allocations de capital. La première est l'approche top-down et elle consiste à déterminer le capital total d'un portefeuille à l'aide d'une mesure de risque. Ensuite, ce capital est partagé entre les différents risques. « Vision de la direction générale qui fixe un pourcentage des fonds propres dédiés à la couverture du risque de marché et établit une nouvelle contrainte de la gestion d'actifs en déterminant indirectement le portefeuille d'investissement ». La seconde approche, « bottom-up », consiste à considérer l'allocation de capital comme un problème de détermination de prix d'options de défaut de la compagnie. « Vision de la direction financière qui gère le portefeuille par rapport aux contraintes des passifs et actifs et en fonction du capital alloué par la direction générale pour la couverture du risque de placement »

Dans la suite, on s'intéresse à une approche qui a été récemment adoptée par plusieurs fonds de pension américains ou par diverses sociétés de gestion d'actifs après qu'elle ait fait l'objet d'une reconnaissance dans la littérature académique (réf Thiery Roncalli). Il s'agit de l'approche en parité de risque (Risk-Parity).

L'approche Risk-parity s'est développée comme une alternative à la construction classique de portefeuille. C'est une approche agnostique et systématique. Elle repose sur l'idée qu'en l'absence de vues sur les actifs, le portefeuille le plus efficient est celui qui est le plus diversifié. Ainsi, cette stratégie d'investissement vise à égaliser les contributions au risque des différentes composantes d'un portefeuille. Le fait de diversifier en risque et non en capital est l'une des marques fondatrices de cette approche. Le fait de diversifier en risque et non en capital est l'une des marques fondatrices de cette approche. Dans cette approche, l'investisseur peut allouer de telle sorte que chacune des composantes du portefeuille contribue à même hauteur au risque du portefeuille (on parle d'un portefeuille équipondéré en risque) ou bien en allouant un budget de risque en fonction de la performance de l'actif. Dans le cadre du portefeuille équipondéré en risque, les actifs relativement moins risqués ou ceux ayant des propriétés de dé-corrélation se verront attribuer un plus grand poids, par exemple les obligations d'état AAA se verront attribuer un poids plus important que les obligations BBB.

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous présentons l'aspect théorique de l'approche Risk-Parity simple ainsi qu'une application dans la gestion obligataire. Ensuite, nous ajustons cette approche en intégrant les rendements des titres et nous comparons les deux versions à l'aide d'une application spécifique. Finalement, nous adaptons ce modèle dans un environnement de solvabilité 2 en intégrant des contributions en SCR comme données de modèle.

4.2 L'approche d'Euler : le cas de parité de risque (Risk-Parity)

4.2.1 Motivations

Dans les années 1950, Harry M. Markowitz s'est posé des questions fondamentales quant à la structure d'un portefeuille. Il a été le premier à explorer l'arbitrage entre le risque et le rendement. Il a inventé le terme d'« efficience de portefeuille » et a démontré l'utilité d'une combinaison de placements non corrélés dans le contexte du portefeuille. Il a découvert la formule qui permet, considérant les rendements espérés, les volatilités et les corrélations des actifs, de construire les portefeuilles qui offrent le meilleur rendement espéré pour une volatilité donnée, ou la plus faible volatilité pour un rendement donné (optimisation dite en « moyenne-variance »).

$$\max w^T \Sigma w \text{ sujet to : } w^T \mu = u_p \quad w^T .e = 1$$

Avec w le poids des titres, u le rendement de portefeuille, $\mu = (\mu(i), \forall i)$ le rendement des titres, Σ la matrice de variance-covariance, u_p le rendement de portefeuille, $e = (1, \dots, 1)^T$

La crise de 2008 a fortement secoué les marchés, et presque toutes les catégories de placements ont connu des hauts et des bas. De nombreux investisseurs ont essuyé des pertes malgré une large diversification et un portefeuille optimisé face au risque. Des questions commencent à se poser quant à la validité de la théorie moderne du portefeuille. D'autres approches s'avèreront-elles nécessaires pour ajuster les portefeuilles à la « nouvelle normalité » des marchés financiers ? Quelles possibilités les placements traditionnels offrent-ils pour protéger un portefeuille contre les risques du marché ?

Même sans parler d'optimisation, de nombreux concepts financiers reposent sur ce point de départ puisque la démonstration du CAPM dans les années 60 suppose un monde idéal où tous les investisseurs optimisent la même fonction d'utilité (avec une aversion au risque spécifique à chaque investisseur). Il en résulte le bêta, l'alpha, le ratio de Sharpe et même le benchmark. Cependant, cette technique n'est pas exempte d'inconvénients.

- Les portefeuilles ont une sensibilité très forte aux rendements espérés qui sont pourtant l'input le plus instable (quoi de plus difficile que la prévision des rendements futurs !).
 - Les prédictions du CAPM ne sont pas vérifiées, de nombreuses études montrant que même sur une longue période, les rendements ne sont pas proportionnels au bêta, voire sont inversés.
- Pour résoudre le problème des rendements espérés, Fischer Black et Robert Litterman ont proposé en 1992 de considérer dans un premier temps que les rendements espérés sont ceux qui rendent le marché ou le benchmark - optimal (approche dite d'équilibre). Le gérant ou l'allocataire peut ensuite apporter sa valeur ajoutée en appliquant des vues. Le portefeuille optimal deviendrait alors (en l'absence de contraintes) une combinaison linéaire du benchmark et des vues (selon des proportions qui dépendent, entre autres, de l'amplitude et de la conviction des gérants).

Une formule matricielle permet de calculer les rendements implicites qui rendent optimal ce portefeuille, ce qui permet ensuite d'optimiser les portefeuilles. Là encore, le modèle a connu des limites, notamment lors du crash de 2007 : le problème vient cette fois des corrélations « cachées » (quand trop de monde applique le même modèle et doit déboucler les mêmes positions en même temps, la liquidité disparaît et les corrélations explosent).

La gestion par les risques est le nouveau concept à la mode depuis quelques années. C'est une méthode agnostique de construction de portefeuilles ou de benchmarks « intelligents », avec des noms tels que *equal weight*, *minimum variance*, *maximale diversification*, *risk parity*...

RONCALLI, T. [2013] relie les approches d'allocation de risque ou ('*Risk Budgeting*') à l'approche classique de Markowitz en faisant des contraintes suivantes :

- Ainsi un portefeuille Equally weighted n'est autre que le portefeuille optimal au sens de Markowitz si tous les actifs ont même rendement espéré, volatilité et corrélation.
- De même, le minimum -variance est le portefeuille optimal si tous les actifs ont le même rendement espéré, et les covariances estimées à partir des historiques.
- Le maximum diversification est le portefeuille optimal si tous les actifs ont les mêmes ratios de Sharpe, et corrélations estimées à partir des historiques.
- Enfin le *Risk parity* est optimal si tous les actifs ont les mêmes ratios de Sharpe et corrélations, et les volatilités estimées à partir des historiques.

Dans la suite nous nous inspirons des articles de Roncally,T [2012] pour mettre en place l'approche risk parity et essayer de l'adapter à l'environnement de solvabilité 2

4.2.2 Formulation mathématique

Définitions

Mesure du risque cohérente

Artzner, Delbaen, Eber et Heath ont introduit une caractérisation en axiomes des mesure de risque, permettant de définir le concept de mesure de risque cohérente, présenté ci-dessous.

Définition : Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque $R(X)$ est cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Invariance par translation : $R(X+m)=R(X)$ -m
2. Sous-additivité : $\forall X_1 \text{ et } X_2 \text{ deux variables aleatoires } R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$
3. Homogénéité positive : $\forall X \text{ variable, } R(\lambda X) = \lambda R(X) \text{ avec } \lambda \geq 0$
4. Monotonie : $\forall X \leq Y \text{ p-p.s } R(Y) \leq R(X)$

Follmer et Shied [2002] proposent de remplacer la propriété de sous-additivité et la propriété d'homogénéité par la condition de convexité :

Propriété

$$R((1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2) \leq (1 - \lambda)R(X_1) + \lambda R(X_2) \quad \forall X_1 \text{ et } X_2 \text{ deux variable aleatoires.}$$

Nous introduisons ci-dessous le concept de mesure de distorsion, permettant d'écrire certaines mesures de risque sous forme d'intégrale et ainsi calculer certaines formules relatives à la contribution au risque.

Définition : Mesure de distorsion

On appelle mesure de distorsion la quantité $f(F_X, G) = \int_0^1 F_X^{-1}(t) dG(t)$, ou G est une fonction de répartition sur $[0,1]$ appelée fonction de distorsion.

Notons que :

1-la VaR_α est une mesure de distorsion, obtenue en prenant comme fonction de distorsion la masse de

Dirac au point α .

$2 - LeTVaR_\alpha$ est une mesure de distorsion, obtenue en considérant la fonction de distribution $dG(t) = 11 - \alpha \mathcal{K}_{[0,1]}(t)$

capital plus élevé. L'invariance par translation met en évidence le fait que le variable $X+m$ ne crée pas de risque additionnel si ce n'est que l'ajout montant certain m . de la même manière un changement proportionnel de variable X n'induit pas de risque supplémentaire (cette propriété ignore les problèmes de liquidité). Enfin la contrainte de sous-additivité traduit bien l'effet diversification. En agrégeant deux actifs, il n'y a donc pas de création de risque supplémentaire.

Nous introduisons ci-dessous la définition de la contribution en risque et le principe de décomposition d'Euler, intervenant notamment lorsque nous souhaitons construire un portefeuille diversifié en agrégeant un budget de risque global sur les actifs de portefeuille.

La contribution au risque :

On définit la contribution de titre i au risque global de portefeuille par une simple produit de son poids par son risque marginale :

$$RC_i = w_i \frac{\partial R(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)}{\partial w_i}$$

Principe de décomposition d'Euler :

Une mesure de risque satisfait le principe de décomposition d'Euler si :

$$R(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n RC_i$$

Ce principe permet de décomposer parfaitement la mesure de risque et de connaître quelle est la part de risque imputable au titre i . Dans cette section, nous exploiterons ce principe pour construire un portefeuille diversifié en risque (et pas en dollar). Le portefeuille ainsi construit permet aux investisseurs de se protéger contre les changements brutaux de régimes de marché.

En s'inspirant de l'article de Roncalli, T [2012], nous commençons par mener une analyse théorique de la méthode Risk-Parity et nous donnerons des formules explicites dans le cas où la mesure de risque considérée est la volatilité. Cette analyse nous amène à adapter l'approche à un besoin d'agrégation de risque de taux en considérant la VaR paramétrique comme mesure de risque. Cette mesure de risque vérifié, en l'occurrence, est la propriété d'Euler dans le cas de rendements gaussiens .

Quelques exemples de mesure du risque satisfaisant le principe d'Euler

► la volatilité de perte de portefeuille.

$$\sigma(w) = \sqrt{w^T \cdot \Sigma w} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \cdot \Sigma w}}$$

► La volatilité de rendement.

$$Sd_c(w) = -\mu(w) + c\sigma(w)$$

avec $\sigma(w)$ la matrice de variance-covariance.

Nous supposons que le variable de profit et de perte P&L est normal d'espérance μ et de volatilité σ .

Nous avons :

$$VaR_\alpha(w) = -\mu(w) + \phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(w)$$

La VaR est donc une fonction décroissante de l'espérance de P&L et une fonction croissante de la volatilité du P&L. Rappelons ici, que du fait que la VaR ne satisfait pas la propriété de sous-additivité, la VaR n'est donc pas une mesure de risque cohérente.

Nous utilisons par la suite la formule suivante de VaR en supposant une espérance nulle de PL :

► **La VaR paramétrique.**

$$VaR_\alpha(w) = \phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(w)$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{\partial VaR(w)}{\partial w} = \phi^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma w)}{\sqrt{w^T \cdot \Sigma w}}$$

L'expression de la VaR marginale est donc :

$$MVaR = \phi^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \cdot \Sigma w}}$$

ou $(\Sigma w)_i$ est la i-ième élément du vecteur (Σw) . Nous avons.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i \cdot MVaR(w) &= w^T \cdot \frac{\partial VaR(w)}{\partial w} \\ &= w^T \phi^{-1}(\alpha) \frac{\Sigma w}{\sqrt{w^T \cdot \Sigma w}} \\ &= \phi^{-1}(\alpha) \cdot \frac{w^T \Sigma w}{\sqrt{w^T \cdot \Sigma w}} \\ &= \phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{w^T \cdot \Sigma w} \\ &= VaR(w) \end{aligned}$$

La VaR paramétrique vérifie donc le principe d'Euler

► **Expected shortfall.**

$$ES_\alpha(w) = \mathbf{E}[L(w) | L(w) \geq VaR_\alpha(w)] \text{ avec } L(w) \text{ la perte de portefeuille}$$

En cas général, la VaR marginale est donnée par la fomule suivante :

$$\frac{\partial VaR(w)}{\partial w} = \mathbf{E}[L_i | L = VaR_\alpha(L)]$$

et en cas de TVaR on a :

$$\frac{\partial VaR(w)}{\partial w} = \mathbf{E}[L_i | L \geq VaR_\alpha(L)]$$

On note que la variance ne satisfait pas le principe de décomposition d'Euler.

Après avoir introduire les propriétés et les formules liées à la contribution au risque, nous introduisons l'approche de Risk Parity en prenant comme mesure du risque la volatilité.

On considère dans la suite un portefeuille composé de n titres de matrice de variance-covariance Σ .

Spécification de l'approche Risk-Parity L'approche Risk Parity permet de construire un portefeuille où chaque actif contribue de façon identique au risque total. On définit mathématiquement le portefeuille de Risk Parity de la manière suivante :

$$w^* = \underset{w_i \geq 0 \forall i; \sum_{i=1}^n w_i = 1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n (RC_i(w) - 1/n)^2 \right\}$$

Avec RC_i la contribution de titre i au risque global.

La contrainte $w_i \geq 0$ limite le portefeuille à des positions d'achat seulement. et la contrainte $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ à un investissement total dans les titres.

Cas particulier 1-Si les corrélations entre les actifs sont égales, le poids de chaque actif est inversement proportionnel à sa volatilité :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}}$$

Nous en déduisons que plus la volatilité de titre est importante plus son poids est faible dans le portefeuille. C'est une propriété que l'on trouve aussi dans l'approche minimum variance mais avec une concentration plus forte car le poids de titre dans l'approche minimum variance est inversement proportionnel à la variance de titre.

2-La volatilité de portefeuille de Risk Parity se situe entre le portefeuille minimum variance et le portefeuille équi-pondéré

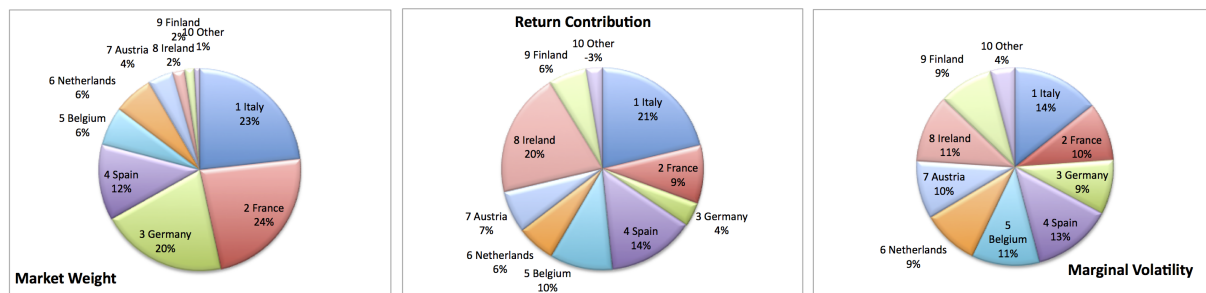
4.2.3 Application

L'application vise à mettre en œuvre l'approche de Risk-Parity sur un échantillon d'obligations à taux fixe ou zéro coupon des États de la zone euro. Ici, les volatilités et les corrélations sont fournies par un outil interne (que l'on peut également calculer historiquement). Nous reprenons les titres par risque de pays émetteurs de titres obligataires.

Pour ce faire, on considère un portefeuille du marché représenté par la composition de l'indice Barclays EURO-Aggregate, les rendements et la matrice de variance-covariances sont fournies par l'outil POINT de Barclays.

Le graphique ci-dessous montre de gauche à droite la composition de portefeuille du marché groupé par pays du risque, le rendement réalisé et la volatilité de chaque groupe en date du 31 octobre 2013.

Le rendement mensuel et la volatilité du portefeuille sont respectivement 1.40% et 1.198% :



1-Le portefeuille du marché est concentré sur les quatre pays de la zone euro qui émettent le plus d'obligations pour le besoin de financement, sans prendre en compte le risque souverain. À titre d'exemple, nous remarquons que le portefeuille contient 23 % de titres d'Italie contre 20 % de titre d'Allemagne ou encore contre 6 % pour les Pays-Bas.

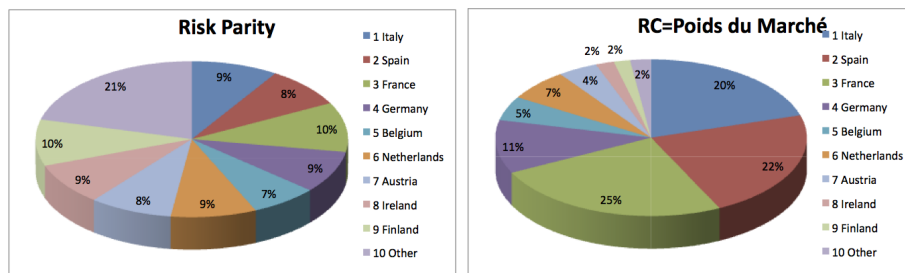
2-Nous remarquons que la contribution de l'Espagne dans le risque global de portefeuille (13 %) est plus importante que celle de l'Allemagne, malgré sa contribution en valeur marché de portefeuille.

La corrélation entre les pays

	1 Italy	2 Spain	3 France	4 Germany	5 Belgium	6 Netherlands	7 Austria	8 Ireland	9 Finland	10 Other
1 Italy	1,00	0,28	0,02	0,81	0,46	0,16	0,19	0,58	0,12	0,46
2 Spain	0,28	1,00	0,91	0,34	0,94	0,96	0,97	0,56	0,95	0,79
3 France	0,02	0,91	1,00	0,14	0,83	0,97	0,96	0,40	0,98	0,65
4 Germany	0,81	0,34	0,14	1,00	0,52	0,24	0,27	0,74	0,21	0,47
5 Belgium	0,46	0,94	0,83	0,52	1,00	0,89	0,92	0,67	0,88	0,81
6 Netherlands	0,16	0,96	0,97	0,24	0,89	1,00	0,98	0,48	0,99	0,73
7 Austria	0,19	0,97	0,96	0,27	0,92	0,98	1,00	0,54	0,98	0,76
8 Ireland	0,58	0,56	0,40	0,74	0,67	0,48	0,54	1,00	0,47	0,60
9 Finland	0,12	0,95	0,98	0,21	0,88	0,99	0,98	0,47	1,00	0,73
10 Other	0,46	0,79	0,65	0,47	0,81	0,73	0,76	0,60	0,73	1,00

Les deux graphiques ci-dessous présentent la composition de portefeuille optimal correspondant aux deux hypothèses ci-dessus

La composition de portefeuille en parité de risque et de budget de risque est égale au poids du Marché



1-Le groupe « Other » contient le reste des pays de la zone euro avec une contribution faible en valeur marché et en risque dans l'échantillon, ce qui justifie son poids dans le portefeuille de Risk Parity.

2- Le poids des autres pays est proche de 10 %, ce qui coïncide avec l'hypothèse de la contribution au risque de l'approche risk parity. Le portefeuille est donc diversifié en risque et en valeur marché.

3-La composition de portefeuille Risk Parity est plus proche d'un portefeuille équi-pondéré qu'un portefeuille minimum-variance qui sera, par construction, concentré sur le groupe « Other », ce qui confirme la propriété 3 indiquée dans la section précédente.

4-Le portefeuille « Market Weighted Risk Contribution » est construit en appliquant l'approche de

Risk Parity, mais en prenant des contributions au risque égales au poids de portefeuille du marché. Nous pouvons donc vérifier que la sélection des titres de portefeuille de marché est basée sur la valeur marché ou bien sur son exposition (ou le risque).

5-La contribution de la France dans le portefeuille du marché (20 %) est sous-estimée vue sa contribution au risque total (il faut un poids de 25 % dans le portefeuille du marché pour que la France contribue exactement à hauteur de 20 %).

Terme	Risk Parity	RC=Poids du Marché
Volatilité	1.04%	1.16%
Rendement	0.98%	1.30%

1-Si l'on considère le ratio de Sharpe définit par le ratio de rendement espéré sur la volatilité, le portefeuille « RC=Poids du Marché » présente une meilleure performance que le portefeuille Risk Parity.

2-Sans surprise, le portefeuille de Risk Parity est mieux diversifié que le portefeuille « RC=Poids du Marché » et le portefeuille du marché. Généralement, le portefeuille risk-parity performe moins qu'un portefeuille basé sur l'approche standard de Markowitz. Il est donc nécessaire que les gestionnaires d'actifs introduisent un effet de levier pour améliorer la performance du portefeuille Risk Parity tout en gardant son avantage de diversification.

Interprétations :

- Le portefeuille Risk Parity présente l'avantage d'être plus diversifié que les portefeuilles du marché et de minimum variance.
- L'exemple d'application ci-dessus permet de mettre en valeur l'utilité de l'approche de risk parity en tant que outil de gestion de budget de risque des titres. ce qui pourra etre un point d'entrée dans un processus de construction de portefeuille dunamique.

Nous avons considéré dans la section précédente une agrégation par pays du risque. Chaque groupe regroupant deux types de risque, le risque de taux et le risque de crédit, ce dernier est exclu dans le calcul de SCR par l'approche standard en supposant qu'il est nul (la crise de la dette souveraine qui frappe la zone euro depuis 2010 est un contre-exemple).

T. Roncalli et G. Weisang [2013] ont proposé dans l'article « A Risk Parity Approach to Manage Risk Factors for Strategic Asset Allocation » un modèle qui explique le rendement en fonction de ses facteurs de risque. Nous pouvons également intégrer une modélisation multifactorielles de la courbe de taux de type Nelson-Siegel pour étudier la contribution au risque global des facteurs pente, niveau et courbure.

Nous poursuivons notre application en appliquant l'approche de Risk Parity sur le même échantillon groupé par facteur du risque, le risque de taux et le risque de crédit. La matrice de corrélation ainsi que la volatilité des facteurs sont fournies par l'outil POINT de Barclays ou PORT de Bloomberg.

Le tableau ci-dessous présente la répartition du risque par facteur de risque :

Terme	Volatilité	Poids
La courbe de taux	1.733%	70.96%
Le spread Govt	3.286 %	29.04%

1-La corrélation entre les deux facteurs est égale à -0. 42%. On en déduit la volatilité de portefeuille 1. 198% (on retrouve la volatilité de la section précédente).

2-Nous avons vu dans la section précédente que quatre pays (l'Italie, la France, l'Allemagne et l'Espagne) représentent plus des $\frac{3}{4}$ de la valeur marché de portefeuille ce qui justifie la contribution de 70% pour la courbe de taux du fait que ces pays ont un spread très faible (par rapport à l'Allemagne).

Ci-deessous la composition de portefeuille Risk Parity.

Terme	Volatilité	Poids	La volatilité Marginale
La courbe de taux	1.733%	65.5%	0.93%
Le spread Govt	3.286 %	34.5%	1.77%

la volatilité de portefeuille devient 1,22%

Le poids de facteur Taux est réduit de 4,5% par rapport au portefeuille de marché pour une baisse de 20% de sa contribution au risque (70% dans le portefeuille marché).

La formule Standard de calcul de SCR propose d'agréger les capitaux économiques élémentaires (taux, action, spread, etc.) à partir de matrices de coefficients de corrélation linéaires. Nous pouvons donc adopter une stratégie d'allocation Risk Parity par facteur de risque au niveau de l'agrégation intra-modulaire (agrégation entre risques d'un même module) en utilisant la même matrice de corrélation.

Malgré un avantage en matière de diversification et la facilité d'implémentation, l'approche standard de Risk Parité est souvent critiquée par les praticiens parce qu'elle intègre la performance dans sa stratégie d'allocation. Thierry Roncalli, T [2014] a adapté l'approche en intégrant le concept de contribution à la performance. La mesure de risque considéré correspond à la fonction d'utilité de MarKowitz.

Dans la section suivante, nous introduisons l'extension de l'approche Risk Parity en intégrant la composante de performance dans la stratégie d'allocation.

4.2.4 lien avec le modèle de MarKowitz.

La fonction d'utilité de MarKowitz $U(w)$ est définie par :

$$U(w) = w^T \mu(w) - \frac{\phi}{2} w^T \sigma(w)$$

Avec ϕ l'aversion au risque de l'investisseur. On peut donc interpréter le problème de MarKowitz come un problème de minimisation de risque dont le mesure de risque $R(w)$ est définie par :

$$R(w) = -\mu(w) + c\sigma(w).$$

On en déduit le risque marginal et la contribution au risque en fonction des rendements espérés μ .

$$MR_i = -\mu_i + c \frac{w_i(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \text{ et } RC_i = w_i MR_i = -\mu_i w_i + c \frac{w_i(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

La formule de contribution de risque montre que plus le rendement du titre est élevé moins on lui alloue de budget de risque, ce qui implique, si l'on considère le taux de rendement interne d'obligation comme proxy de rendement espéré, que les titres de mauvaise qualité de crédit seront pénalisés en

budget de risque.

La mesure de risque $R(w)$ vérifie bien la propriété de la décomposition d'Euler :

$$R(w) = \sum_{i=1}^n RC_i$$

Propriété

La contribution normalisée au risque RC^* est une combinaison linéaire de la contribution normalisée à la performance PC^* et la contribution normalisée à la volatilité VC^* :

$$RC_i^* = (1 - \omega)PC_i^* + \omega VC_i^*$$

Avec $\omega = \frac{c \cdot \sigma(w)}{R(w)}$

$$RC_i^* = \frac{R_i}{R(w)}$$

$$PC_i^* = \frac{w_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n w_i \mu_i}$$

$$VC_i^* = \frac{w_i (\Sigma w)_i}{w^T \cdot \Sigma w}$$

Exemple

Nous reprenons l'exemple ci-dessus et nous supposons que les rendements espérés des actifs groupés par pays du risque sont donnés pour l'outil POINT. Nous comparons les portefeuilles issus de l'approche risk parité que l'on note par R-ERC pour des constantes $c=2,3, 4$ et 10 avec le portefeuille de référence « Market » :

Country	Market	R-ERC			
		C=2	C=3	C=4	C=10
Italy	23,36%	10,72%	8,84%	8,25%	7,52%
France	23,25%	7,18%	6,95%	6,79%	6,47%
Germany	20,32%	6,96%	6,70%	6,49%	6,11%
Spain	12,11%	16,49%	16,22%	16,14%	15,90%
Belgium	6,35%	11,41%	11,19%	11,08%	10,82%
Netherlands	6,22%	7,30%	7,05%	6,87%	6,53%
Austria	4,11%	12,27%	12,03%	11,88%	11,56%
Ireland	1,91%	6,98%	6,72%	6,62%	6,36%
Finland	1,48%	12,70%	12,45%	12,27%	11,93%
Other	0,89%	8,00%	11,85%	13,59%	16,80%
Volatility	1,296%	1,248%	1,257%	1,204%	1,182%
Return	1,413%	1,257%	1,185%	1,157%	1,110%

L'effet diversification est bien préservé dans cette approche, mais la performance des portefeuilles est toujours inférieure au portefeuille marché :

Commentaires :

► Nous avons essayé dans cette section d'arbitrer entre un modèle d'optimisation de portefeuille classique qui répond au besoin de l'investisseur en matière de performance en détriment de la stabilité et de la diversification et le modèle d'allocation en parité de risque qui met la gestion de risque au cœur de la stratégie d'allocation avec une certaine faiblesse en terme de performance.

► L'introduction des rendements dans l'approche Risk parity permet de garder la propriété de diversification de l'approche Risk Parity standard, mais on rajoute deux autres sources d'erreurs, l'erreur dans l'estimation des rendements et le calibrage de la constante c .

Afin de booster la performance de l'approche Risk Parity, il est donc nécessaire d'intégrer un effet de levier dynamique par un suivi systématique à un benchmark ou statique en fixant un niveau de risque prédéfini.

4.3 L'allocation d'actifs dans le cadre de solvabilité 2

La gestion de portefeuille dans le cadre de solvabilité 2 exigera donc une nouvelle contrainte, la Value at Risk. Dans cette partie, nous exposerons dans un premier temps l'optimisation de portefeuille sous contrainte de SCR et dans un second temps, l'approche de Risk adapté à la contrainte de SCR ou VaR. Une comparaison entre les deux approches est également fournie à la fin de la partie.

4.3.1 Maximisation de performance sous contrainte SCR

Nous étudions le portefeuille optimale au sens de Markowitz sous contrainte de VaR à un an et à un an à $q = 99.5\%$. Pour ce faire nous considérons un portefeuille de valeur V_t à la date t , composé de N actifs (obligations dans notre étude), de poids $w = (w_1, \dots, w_N)$ Le problème d'optimisation est défini par le système d'équations :

$$\text{subject to : } \begin{cases} \max \mu_V = \mu^T w \\ \bar{1}^T \cdot w = 1 \\ \mu_V = \mu^T w \\ P(\delta.V \leq VaR_q) \leq 1 - q \end{cases}$$

Ou bien en fonction du rendement et la volatilité de portefeuille si nous faisons l'hypothèse de la normalité de distribution $\delta.V$:

$$\text{subject to : } \begin{cases} \max \mu_V = \mu^T w \\ \bar{1}^T \cdot w = 1 \\ \mu_V = \mu^T w \\ \mu_V \leq -VaR_q - z_{1-q} \cdot \sigma_V \\ \sigma_V = \sqrt{w^T \cdot \Sigma w} \end{cases}$$

La frontière efficiente comprend les points sur le plan (μ_V, σ_V) ou la VaR est minimisée avec la moyenne donnée. Ces points définissent également les espérances de rendement maximales pour tous les niveaux de VaR_q On en déduit en fonction de VaR_q l'allocation w , le rendement μ_V et la volatilité de portefeuille optimale :

$$w = (\pm\sqrt{\Omega} - VaR_q)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{c}(1 - VaR_q b \pm \sqrt{\Omega})\Psi^{-1}\bar{1}$$

$$\mu_V = \mu^T w = (\pm\sqrt{\Omega} - VaR_q)a + \frac{1}{c}(1 - VaR_q b \pm \sqrt{\Omega}).b$$

$$\sigma_V = \frac{1}{z_{1-q}} \sqrt{\frac{1}{d}((d-c)\mu_V^2 + 2b\mu_V - a)}$$

Avec :

$$\Omega = \frac{1}{d}(VaR_q^2(d-c)\mu_V^2 - 2bVaR_q - 1)$$

$$\Psi = (\mu.\mu^T - z_{1-q}^2.\Sigma)$$

$$a = \mu^T \Psi^{-1} \mu$$

$$b = \mu^T \Psi^{-1} . \bar{1}$$

$$c = \bar{1}^T \Psi^{-1} . \bar{1}$$

$$d = ac - b^2$$

Commentaires :

Le portefeuille construit avec cette approche, comme dans le modèle de Markowitz, présente plusieurs limites. Nous citons :

- L'introduction d'une estimation des rendements dans la construction du portefeuille optimal peut rajouter une source d'erreur et d'instabilité de ce modèle.
- L'inverse d'une matrice de corrélation de taille supérieure présente un frein numérique à prendre en considération.

4.3.2 Risk Parity avec SCR

Nous considérons un portefeuille de n actifs, La $VaR_\alpha(w)$ (ou SCR) du portefeuille est la somme des contributions des titres dans la VaR totale de portefeuille avec $\alpha = 99.5\%$.

$$VaR_\alpha(w) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial VaR_\alpha(w)}{\partial w_i}$$

Avec : $\frac{\partial VaR}{\partial w_i}$ est la contribution marginale à la VaR de titre i

Ou bien en cas de distribution des rendements normale :

$$VaR_\alpha(w) = -\mu(w) + \phi^{-1}(\alpha).\sigma(w)$$

On en déduit la VaR marginale :

$$\frac{\partial VaR_\alpha(w)}{\partial w_i} = -w_i \mu_i + \phi^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

En cas de distribution non gaussienne nous utilisons l'approximation de Cornish-Fisher suivante :

$$VaR_\alpha(w) = -\mu(w) + z^* \sigma(w)$$

Avec

$$z^* = z + \frac{(z^2-1)s_p}{6} + \frac{(z^3-3z)k_p}{24} - \frac{(2z^3-5z)s_p^2}{36}$$

$$z = \phi^{-1}(\alpha)$$

Avec s_p le skewnes et k_p le kurtosis de la distribution de rendement r défini par :

$$s_p = m_3/m_2^{3/2}$$

$$k_p = m_4/m_2^2 - 3$$

$$m_2 = {}^T \Sigma w$$

$$m_3 = w^T M_3(w \otimes w)$$

$$m_4 = w^T M_4(w \otimes w \otimes w)$$

$$M_3 = E[(r - \mu)(r - \mu)^T \otimes (r - \mu)^T]$$

$$M_4 = E[(r - \mu)(r - \mu)^T \otimes (r - \mu)^T \otimes (r - \mu)^T]$$

Avec $\otimes$ le produit de Kronecker On en déduit la contribution marginale en cas de formulation de VaR par une approximation de Cornish-Fisher :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial VaR_\alpha(w)}{\partial w_i} = \\ & -w_i \mu_i + \phi^{-1}(\alpha) \cdot \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} + \frac{\partial m_2}{\sqrt{(m_2)}} \begin{pmatrix} -(1/12)(z^2 - 1)s_p \\ -(1/48)(z^3 - 3z)k_p \\ +(7/72)(2z^3 - 5z)s_p^2 \end{pmatrix} + \sqrt{(m_2)} \begin{pmatrix} -(1/6)(z^2 - 1)\partial_i s_p \\ -(1/24)(z^3 - 3z)\partial_i k_p \\ +(1/18)(2z^3 - 5z)s_p \partial_i s_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou :

$$\partial_i m_2 = 2.(\Sigma w)_i$$

$$\partial_i m_3 = 3.(M_3(w \otimes w))_i$$

$$\partial_i m_4 = 4(M_4(w \otimes w \otimes w))_i$$

$$\partial_i s_p = (2m_2^{3/2} \partial_i m_3 - 3m_2 m_2^{1/2} \partial_i m_2) / 2m_2^3$$

$$\partial_i k_p = (m_2 \partial_i m_4 - 2m_4 \partial_i m_2) / m_2^3$$

Application :

Pour illustrer l'approche de Risk-Parity dans un contexte de solvabilité 2, nous considérons un cas pratique de l'adossement de flux de passif. Pour ce faire, nous choisissons un univers d'obligations d'États de la zone euro. Nous exécutons un programme d'adossement en flux de passif (Cash Flux Matching) et nous appliquons les démarches décrites ci-dessus pour construire un portefeuille Risk Parity.

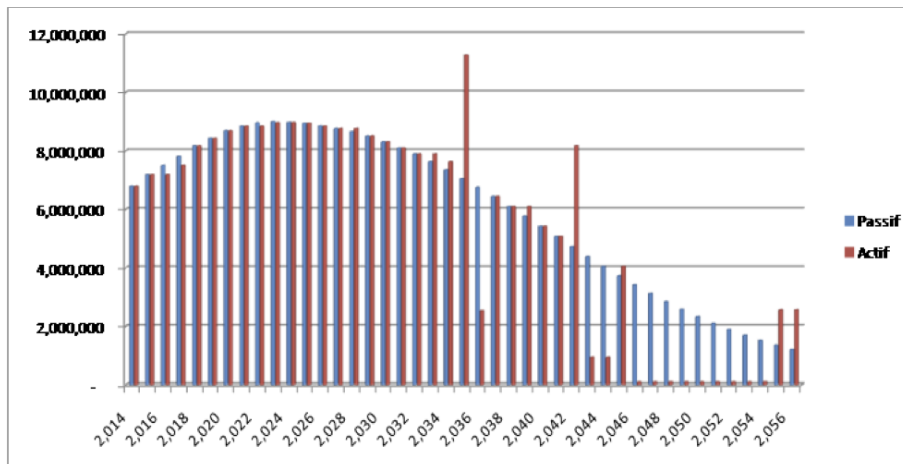
Nous comparons ensuite, la performance expliquée par le taux de rendement interne de portefeuille obligataire, la diversification et le risque mesuré par la VaR paramétrique.

Le passif a une durée de 14 ans dont les flux annuels vont jusqu'en 2056.

Nous analysons l'impact des quatre portefeuilles suivants :

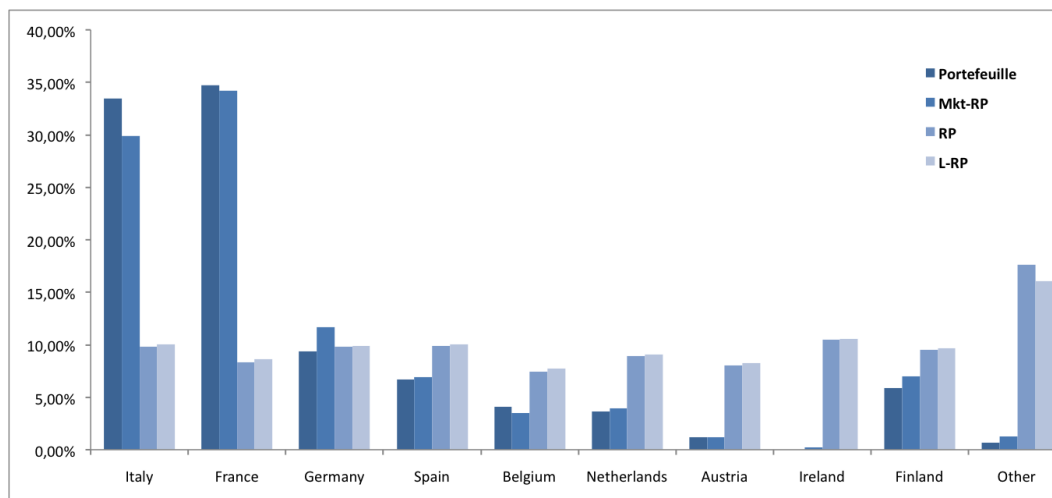
1. Portefeuille d'actif initial qui adosse le mieux le passif.
2. Le portefeuille d'actifs dont la contribution au risque de chaque pays est égale à la contribution de chaque pays dans la valeur Marché de portefeuille initial (134 Mln)(Mkt-RP).
3. le portefeuille de Risk Parity.
4. Le portefeuille RP dont la VaR (99.5) cible est égale à la VaR (99.5%) de portefeuille initial, qu'on note L-RP (Leverged Risk Parity).

Le graphique ci-dessous présente les flows de portefeuille d'actifs et passif.



Nous remarquons que le portefeuille d'actifs initial adosse mieux les flux de passif, avec des échéances déficitaires de 2046 à 2056 pour des raisons de liquidité des titres et deux échéances excédentaires en 2036 et 2043.

Ci-dessous la composition de portefeuille d'actifs, Mkt-RP, RP et L-RP groupés par pays de risque.



Nous remarquons que :

- 1-Le portefeuille initial et Mkt-RP sont concentrés sur les trois pays les mieux notés (les moins risqués) de la zone euro.
- 2- Les portefeuilles RP et L-RP sont plus diversifiés que les deux autres portefeuilles, avec une nette préférence pour le portefeuille RP.

Si nous analysons les indicateurs de performance des trois portefeuilles, nous constatons :

Un avantage au portefeuille initial et Mkt-RP en termes de taux de rendement, au détriment d'une valeur de VaR de 2,93% pour le portefeuille initial contre 2,88% pour le portefeuille Mkt-RP.

Indicateur	Portefeuille	Mkt-RP	RP	L-RP
VaR(99.5%)	2.93%	2.88%	2.57%	2.93%
Yield To Maturity	3.29%	3.22%	2.95%	2.95%
Duration	13.5%	13.58	12.06	12.14

Interprétations :

1. Le portefeuille initial se concentre sur la France et l'Italie (68%).
2. L'allocation de chaque pays dans le portefeuille Mkt-RP est légèrement différente du portefeuille initial. On en déduit que la contribution en valeur marché de portefeuille initial est proportionnelle à la contribution au risque.
3. Les deux portefeuilles RP et L-RP présentent une diversification entre les pays de risque au détriment d'un taux de rendement légèrement en-dessous du portefeuille initial (35 bps d'écart).
4. La raison d'intégrer le portefeuille L-RP est de rajouter un effet de levier dû à l'écart de volatilité entre le portefeuille initial et le portefeuille RP, mais cet effet est négatif dans le cas de cet exemple. (L'idéal est de consommer cet écart pour augmenter le YTM).

Ci-dessous, la contribution de chaque pays dans les portefeuilles d'actifs initiaux, Mkt-RP, RP et L-RP.

Country of Risk	Portefeuille	Mkt-RP	RP	L-RP
Italy	2,32%	2,07%	0,68%	0,70%
France	3,62%	3,56%	0,87%	0,90%
Germany	0,76%	0,94%	0,79%	0,80%
Spain	0,38%	0,40%	0,57%	0,57%
Belgium	0,35%	0,30%	0,63%	0,66%
Netherlands	0,34%	0,36%	0,82%	0,83%
Austria	0,11%	0,11%	0,74%	0,77%
Ireland	0,01%	0,01%	0,54%	0,55%
Finland	0,66%	0,78%	1,07%	1,08%
Other	0,07%	0,14%	1,84%	1,68%
Total	8,61%	8,68%	8,56%	8,53%

Ci-dessous la contribution de chaque pays dans le SCR_{Tax} (Formule Standard) global des portefeuilles d'actifs, initial, Mkt-RP, RP et L-RP

Country of Risk	Portefeuille	Mkt-RP	RP	L-RP
Italy	26,92%	23,89%	7,98%	8,16%
France	42,04%	41,02%	10,18%	10,51%
Germany	8,82%	10,87%	9,25%	9,35%
Spain	4,43%	4,56%	6,62%	6,74%
Belgium	4,02%	3,43%	7,35%	7,69%
Netherlands	3,89%	4,18%	9,53%	9,74%
Austria	1,32%	1,29%	8,68%	8,98%
Ireland	0,10%	0,16%	6,36%	6,40%
Finland	7,63%	9,01%	12,52%	12,71%
Other	0,83%	1,58%	21,54%	19,73%
Total	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

5 Conclusion générale

La directive Solvabilité 2 introduit la vision risque dans la détermination des fonds propres des sociétés d'assurance, ce qui renforce l'importance des choix de modèles d'évaluation de risque ainsi que le modèle d'allocation d'actifs.

Au terme de cette étude, nous pouvons tirer quelques conclusions des travaux présentés :

Concernant le calcul de SCR.

Le calcul du SCR par la méthode standard présente l'avantage de la facilité d'implémentation, ce qui ne va pas sans inconvénient. En effet, elle ne permet pas une identification du profil de risque, car les niveaux de chocs sont calibrés sur la base d'un échantillon de profil de risques différents. Le modèle interne, contrairement à la formule standard, retrace une image de profil de risque, car il repose sur une analyse de bilan économique de l'assureur. L'approche de calcul du SCR par le modèle interne est sensible à divers facteurs : nous citons le paramétrage du modèle de diffusion des facteurs de risque, l'historique et la source des données, la méthode de calibrage (optimisation non linéaire, convergence) et les simulations (les schémas de projection de Monte-Carlo et la réduction de variance). Tous ces éléments injectent un bruit dans le calcul du SCR et rendent les calculs beaucoup plus complexes, en particulier avec des instruments non linéaires. Un arbitrage entre l'utilisation des approximations, des méthodes de simulation peu coûteuses en temps et en variance ainsi que la liquidité des instruments utilisés dans l'étape de calibration permet donc facilement de privilégier l'utilisation du modèle interne au détriment de la formule standard.

Concernant la modélisation de la courbe de taux.

Le modèle interne repose sur une batterie de modèles d'évaluation des produits financiers (taux, inflation, crédit, etc.). Une attention particulière a été portée sur le modèle de taux d'intérêt, car l'actif obligataire est important dans le bilan d'une compagnie d'assurance. L'étude du modèle de Vasicek et Hull-White nous a permis d'écarter le premier du fait de son indépendance à la courbe de taux initiale et le deuxième par sa limite en fournissant des taux négatifs en plus de l'absence de l'interprétation économique malgré son caractère d'absence d'arbitrage.

Le modèle d'absence d'arbitrage de Nelson-Siegel couple entre l'avantage d'absence d'arbitrage, condition nécessaire dans le cadre de solvabilité 2 (Market Consistent) et le caractère empirique de ses facteurs de risque. Il intègre le caractère markovien de ses facteurs de risques (niveau, pente et courbure) avec ou sans dépendance et offre ainsi une souplesse de modélisation en fonction de la nature de la courbe de taux.

Du point de vue implémentation, le calibrage du modèle dépend d'une étape d'initialisation de ses paramètres qui pourra perturber la robustesse du modèle si l'on n'arrive pas à localiser d'avance une zone d'initialisation.

Concernant le modèle d'allocation d'actif.

Le modèle d'allocation d'actifs repose d'une part sur des hypothèses de rendements espérés, de volatilité et de corrélation des actifs et d'autre part sur le problème d'optimisation (Markovitz, Black-Litterman, Risk-Budgeting, Risk Parity, etc.). L'estimation des rendements et volatilité se fait par projection des scénarios fournis par un modèle de taux, inflation, crédit ou action et volatilité. Quant à la corrélation et par manque de liquidités des produits de corrélation, nous privilégions souvent une forme paramétrique calibrée empiriquement. Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé des estimations historiques de ces paramètres.

L'étude de l'approche en parité de risque (Risk Parity) est compatible avec l'objectif de mettre la gestion de risque au cœur de la stratégie financière et a montré, contrairement aux autres modèles d'allocation, une supériorité en matière de diversification avec une certaine limite sur l'aspect performance. L'intégration du SCR dans cette approche, soit directement en cas de distribution normale soit par le biais d'une approximation de la Var en cas de distribution non normale, permet de sélectionner les titres peu consommateurs de capital si l'on fixe a priori un budget de risque global (ou SCR global).

6 Références

- ARIAS L., FOULQUIER P., LE MAISTRE A. [2012] «The impact of Solvency II on Bond Management».
- AHMAD., RIAZ., WILMOTT, P. [2006]. «The Market Price of Interest-Rate Risk : Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-Income Markets.»Wilmott Magazine.
- ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] «Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ?», Bulletin Français d'Actuariat., vol. 11., n°22..
- BRAUN A., SCHMEISER H., SCHREIBER F., [2013]. «Portfolio Optimization Under Solvency II :Implicit Constraints Imposed by the Market RiskStandard Formula».
- BRIGO D., MERCURIO F., [2001] ; «Interest Rate Models Theory and Practice». Springer Finance
- BRIGO., DAMIANO., DALESSANDRO A.,NEUGEBAUER M,TRIKI F., [2008]. «A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management.»arXiv Preprint arXiv :0812.4210.
- BRUDER B., RONCALLI T., [2012] «Managing Risk Exposures Using the Risk Budgeting Approach.»
- CHRISTENSEN J., H. E., DIEBOLD., F. X., RUDEBUSCHE., G. D.,[2011] «The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models.» Journal of Econometrics 164.,4-20
- DUFFEE., G. R., [2002]«Term premia and interest rate forecasts in affine models». Journal of Finance 53., 527-552
- European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) (2010a) : QIS5 Technical Specifications., European Commission, Brussels, available at<https://eiopa.europa.eu/>, access 10/12/2011.
- FALEH A., [2011]. «Un Modèle de Programmation Stochastique Pour L'allocation Stratégique D'actifs D'un Régime de Retraite Partiellement Provisionné.»
- FALEH. A., PLANCHET F., RULLIÈRE D., [2009]. «Les Générateurs de Scénarios Economiques : Quelle Utilisation En Assurance ?»
- FALEH A., PLANCHET F., RULLIERE D. [2010] «Les générateurs de scénarios économiques : de la conception à la mesure de la qualité.», Assurances et gestion des risques., Vol. 78 (1/2)..
- GATZERT N., MARTIN M., [2012]. «Quantifying Credit and Market Risk under Solvency II : Standard Approach versus Internal Model.»Insurance : Mathematics and Economics 51 (3) : 649–66.
- GUIBERT Q., J M., PLANCHET F. [2010] «Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes» Bulletin Français d'Actuariat., vol. 10., n°20..
- HAGAN P., KONIKOV M. [2004]. «Interest Rate Volatility Cube : Construction and Use». Technical report., Bloomberg technical report.
- JURCZENKO., E., MICHELT., TEILETCHE., J., [2013]. « Generalized Risk-Based Investing» Available at SSRN 2205979.
- KARAM E., PLANCHET F. [2013] «Estimation Errors and SCR Calculation», Bulletin Français d'Actuariat., vol. 13., n°26..
- LONGSTAFF F., SANJAY M.,NEIS N.[2005]. «Corporate Yield Spreads : Default Risk or Liquidity ? New Evidence from the Credit Default Swap Market.»The Journal of Finance 60 (5) : 2213–53.
- MARTIN., MICHAEL. [2013]. «Assessing the Model Risk with Respect to the Interest Rate Term Structure under Solvency II.»Journal of Risk Finance., Vol 14 (3) : 200–233.
- NOUY., DANIELÉ. [2012]. «Le Risque Souverain Est-Il Correctement Traité Par La Réglementation Financière ?»RSF REVUE DE LA STABILITÉ FINANCIÈRE : 105.
- PLANCHET F., CAJA A. [2010] «La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?», Assurances et gestion des risques., Vol. 78 (3/4)..
- PLANCHETF.,GUIBERT Q.,JUILLARD M., [2010]. «Un Cadre de Référence Pour Un Modèle Interne Partiel En Assurance de Personnes.»Bulletin Franccais d'Actuariat 10 (20).
- PLANCHET F. [2008]«Evolution des modèles d'actifs pour le modèle interne», la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°123 du 01/04/2008.
- RONCALLI F., [2013] «Introducing Expected Returns into Risk Parity Portfolios : A New Framework

for Tactical and Strategic Asset Allocation».

THEROND P.E., PLANCHET F. [2007] «Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk Assurances et gestion des risques.», Vol. 74 (4).

7 Annexes

7.1 Annexe A : Construction de la courbe zéro coupon initiale

la courbe de taux zéro coupon que nous construisons est basée sur un panier de taux interbancaires « Money Market », taux swap et éventuellement sur les futures courts termes tels que coté par le marché et disponible sur Bloomberg.

La courbe de taux ainsi définie nous permet de construire une courbe des discounts, les taux d'intérêts implicites (spot et forwards) et la valeur mark to market d'instruments dérivés sur taux d'intérêt. La courbe « discount » est construite en utilisant la méthode standard de stripping des taux zéro coupon. Jusqu'à douze mois, les facteurs discount sont déduits des taux du marché « Money Market ». A partir de deux ans, une procédure de bootstrapping est appliquée sur les taux de swap pour successivement calculer les facteurs discount.

Nous avons construit nos courbes à partir de taux Libor ou (Euribor) et Swap. Le principe consiste à construire une courbe en partant des maturités les plus courtes pour arriver aux plus longues (bootstrapping). La méthode conduit à calculer des facteurs d'actualisation à des points de référence particuliers ; les facteurs d'actualisation qui correspondent à d'autres points sont obtenus par interpolation.

On note $L(t, \tau)$ le taux Libor ou (Euribor) à la date t pour une maturité τ . Le taux Libor est acheté à 1 en t et paye $1 + L(t, \tau)\alpha(t, t + \tau)$ en $t + \tau$, où $\alpha(t, t + \tau)$ est la fonction qui correspond à la convention sur les bases de calcul en vigueur sur les différents marchés (day count basis). Le facteur d'actualisation en τ est :

$$D(\tau) = \frac{1}{(1 + L(t, \tau)\alpha(t, t + \tau))}$$

Le facteur d'actualisation pour le swap est calculé à partir de la formule suivante :

$$D(t_i) = \frac{(1 - S(t_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha(t_{j-1}, t_j) \cdot D(t_j)))}{1 + S(t_i) \cdot \alpha(t_{i-1}, t_i)}$$

On voit bien que le discount $D(t_i)$ dépend des valeurs de $D(t_j)$ pour tout $j < i$ initialement calculé à partir des taux interbancaires ou interpolées. L'introduction des contrats future sur taux Euribor ou Libor permet d'éviter les points interpolés et lisser la courbe sur des points de marché.

On considère $f(t, T, S)$ le taux forward vue à t pour la période $[T : S]$.

$$f(t, T, S) = \frac{D(t, T) - D(t, S)}{(S - T) \cdot D(t, S)}$$

avec $D(., .)$ le discount factor. La valeur de contrat future sous la probabilité risque neutre Q est :

$$F(t, T, S) = \mathbf{E}_t^Q f(T, T, S)$$

Les contrats futures sur taux courts sont des contrats avec un paiement de taux constaté à la fin de la période "IN-ARRARS", cette particularité nous oblige à introduire un modèle de taux pour les valoriser. (En Générale on prend Hull-White). le biais entre le taux forward et le taux future est appelé l'ajustement de convexité. Nous allons négliger ce biais pour la suite.

Le figure 3 est un exemple de la courbe zéro coupon à la date de 22 Octobre construit à partir des taux interbancaires Euribor ,Futures sur Euribor 3M et le taux swap.

7.2 Annexe C : Construction de la surface de volatilité forward

Considérons un cap de maturité T_n , de nominal N et de taux d'exercice K , et dont la référence est le taux Euribor de maturité τ noté $L(t, \tau)$. on note $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ les dates de fixation de taux Euribor $L(t, \tau)$. Un cap est défini comme un portefeuille d'options appelées «Caplets».

Le pay-off payé à l'acheteur de cap à chaque date T_{i+1} pour tout $i = 0..n$ vaut : $P_{i+1} = N \cdot \tau \cdot (L(t, T_i) - K)^+$.

Le prix de caplet $Caplet_{i+1}$ dans le modèle de Black est donné par la formule :

$$Caplet_i = N \cdot \tau \cdot D(t, T_{i+1}) \cdot (F(t, T_i, T_{i+1}) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2))$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t, T_i, T_{i+1})}{K}\right) + 0.5 \cdot \sigma_{i+1} \cdot \alpha(T_i, T_{i+1})}{\sigma_{i+1} \sqrt{\alpha(T_i, T_{i+1})}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{i+1} \sqrt{\alpha(T_i, T_{i+1})}.$$

Ou :

$\alpha(t, t + \tau)$ est la fonction qui correspond à la convention sur les bases de calcul en vigueur sur les différents marchés (day count basis).

$F(t, T_i, T_{i+1})$ le taux forward vue à t pour la période $[T_i : T_{i+1}]$, σ_{i+1} la volatilité de taux forward, et $D(t, T_{i+1})$ la factor d'actualisation à la date T_{i+1} .

La prix de cap à la date t est donné en sommant les $n - 1$ «caplets».

$$Cap_t = \sum_{i=1}^n (Caplet_i)$$

Le cap est coté en volatilité dite *Flat* et c'est une volatilité constante applicable à la valorisation de chacun de ses *Caplets*. L'objectif de procédure de stripping est d'extraire les volatilités forward des *Caplets* à partir d'une série de prix de caps.

Pour illustrer l'approche nous considérons le marché Européenne ou les cotations en volatilité flat de taux EURIBOR 3M pour des caps de maturités jusqu'au deux ans, et un taux EURIBOR 6M pour des caps de maturités supérieurs (Figure 2).

Pour commencer le procédure, nous faisons l'hypothèse que la volatilité forward de 3 mois dans 3 mois et 6 mois dans 6 mois sont égales à la volatilité flat de cap à un an.

Pour un cap de deux ans, les volatilités forward 3 mois dans 15 mois et 18 mois sont inconnues, on interpole linéairement la première et on déduit la volatilité forward 3 mois dans 18 par la relation :

$$Caplet_{18} = Cap_{2ans} - Cap_{15mois}$$

Pour les caps supérieurs à deux ans nous déduisons les volatilités forward 6 mois en inversant la relation ci-dessus car les caplets sont semestriel.

Ce procédure nous permet de construire la structure par terme de volatilité implicite des taux forwards sans prendre en compte le smile de volatilité. Afin d'adapter le procédure de stripping nous interpolons une deuxième fois sur les strikes en utilisant le modèle SABR calibré sur un panier de volatilité implicite des swaptions (une smile de trois point suffit).

7.3 Filtre de Kalman

Etant donnée les deux équation d'observations et d'état ci dessous :

$$R_t = BX_t + E_t$$

$$X_t = AX_{t-1} + (I - A)u + N_t$$

La technique de Filtre de Kalman est un outil privilégié de l'estimation des modèles structurels à composantes cachées (inobservables). Elle consiste en un ensemble d'équations récursives et procède en deux temps. Premièrement une étape de prédiction qui permet d'obtenir la meilleure estimation de l'état X_t à l'instant t , conditionnement à l'information disponible jusqu'en $t-1$, soit :

$$\mathbf{X}_{t|t-1} = \mathbb{E}_{t-1} [\mathbf{X}_t] = \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u}$$

et une meilleur estimation de la matrice de variance covariance

$$\Sigma_{t|t-1} = \mathbb{E}_{t-1} \left[(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t|t-1}) (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t|t-1})^T \right] = \mathbf{A}\Sigma_{t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.$$

Et deuxièmement une étape de lissage et qui permet d'obtenir la meilleur estimation de l'état X_t à l'instant t , conditionnement à l'information disponible jusqu'en t , soit :

$$\mathbf{X}_{t|t} = \mathbb{E}_t [\mathbf{X}_t] = \mathbf{X}_{t|t-1} - \mathbf{X}_{t|t-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}_t^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_t$$

et une meilleur estimation de la matrice de variance covariance

$$\Sigma_t = \mathbb{E}_t \left[(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t|t}) (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t|t})^T \right] = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}\mathbf{B}^T\mathbf{F}_t^{-1}\mathbf{B}\Sigma_{t|t-1}$$

Avec la variance de l'erreur de prédiction :

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{R}_t - \mathbf{B}\mathbf{X}_{t|t-1}$$

et une meilleur estimation de la matrice de variance covariance

$$\text{Var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{F}_t = \mathbf{B}\Sigma_{t|t-1}\mathbf{B}^T + \mathbf{H}.$$

L'algorithme de filtre de Kalman dépend de valeurs initiales et des paramètres $\varphi = (B, A, u, H, Q)$ le maximum de vraisemblance est donné par :

$$f(R_1, \dots, R_T; \varphi) = \prod_{t=1}^T f(R_t | \mathcal{F}_{t-1}; \varphi)$$

Avec $\mathcal{F}_{t-1}$ la filtration engendré par R_t jusqu'en $t-1$ et $f(\cdot)$ la densité normale mult-dimensionnelle le maximum de vraisemblance redevient :

$$f(R) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{F}^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{v}_t^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v}_t)}$$

et le log-vraisemblance :

$$\text{Log}L(R_1, \dots, R_T; \varphi) = \sum_{t=1}^T \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{F}^{-1}| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v}_t \right)$$

Nous utilisons la méthode d'optimisation de Nelder-Mead (simplex) pour trouver les paramètres de filtre de Kalman