

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour la validation du
cursus à la Formation d'Actuaire du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le : 28 janvier 2014**

Par : **Davy SENGDY**

Titre : **Optimisation du SCR Risque de Réserve sous Solvabilité II**

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présent du jury de
l'Institut des Actuaires :*

*Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :*

Thomas BEHAR

Vincent DAMAS

Gérard CROSET

Arnaud COHEN

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Frédéric PLANCHET

Michel FROMENTEAU

Stéphane MENART

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Arnaud BURGER

Marine CORLOSQUET-HABART

Aymeric KAMEGA

Damien TREMEL

Florence PICARD

Olivier LOPEZ

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : **Pricewaterhouse Coopers**

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : **Stéphane KUYPERS**

Signature :

Invité :

Nom : _____

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Optimisation du SCR Risque de Réserve sous Solvabilité II

***“Ne répétez pas les mêmes tactiques victorieuses,
mais adaptez-vous aux circonstances chaque fois particulières.”***

Sun Tzu, L’Art de la Guerre

Remerciements

Je tiens à remercier tous mes collègues de l'actuariat PwC et amis pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Résumé

Afin de garantir leur solvabilité, les sociétés d'assurance doivent détenir au-delà des provisions qui couvrent déjà l'intégralité des engagements souscrits, des fonds propres en quantité suffisante pour faire face à des dérives imprévues pouvant remettre en cause le respect de leurs engagements.

La future Directive européenne Solvabilité II va imposer de nouvelles exigences en matière de capital réglementaire requis. En effet, son mode de calcul est en tout point différent de celui actuellement en vigueur. Il se base sur une approche modulaire qui tient compte de tous les risques quantifiables auxquels est exposée la compagnie.

Dans ce nouvel environnement, un sous-module de risque est dédié au risque de réserve qui représente le risque de sous-évaluation des provisions techniques relatives aux sinistres survenus. Ainsi, les composantes de ce risque sont étudiées aux travers des méthodes de provisionnement à l'ultime pour le Best Estimate, et à horizon un an pour la détermination du SCR, mais également des méthodes de projections des SCR futurs pour la marge de risque.

Une fois ces composantes calculées, nous étudions la possibilité d'optimiser le besoin en capital réglementaire du risque de réserve dans le cadre des normes Solvabilité II en proposant de modifier la structure des passifs en imaginant trois stratégies de restructuration d'entreprise. L'idée de ces stratégies est de « remodeler » le volume et le profil des provisions avec comme concept sous-jacent la mutualisation des provisions par la fusion (option 1), la séparation en deux groupes de provisions homogènes, les provisions relatives aux survenances récentes et celles relatives aux survenances anciennes (option 2). Enfin, la dernière option correspond à une combinaison des deux concepts (option 3).

La stratégie de fusion des deux sociétés permet d'optimiser le SCR par l'effet de la mutualisation, notamment sur les risques longs. Pour la deuxième option stratégique, dont le principe est de séparer les anciennes survenances des nouvelles, l'optimisation du SCR s'opère sur les risques courts lorsqu'un maximum de survenances anciennes est regroupé. Sur les risques longs, l'optimisation est possible dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'un minimum de survenances anciennes est regroupé. Dans l'option 3, l'optimisation du SCR est du même ordre que l'option précédente, avec toutefois un avantage à l'assureur présentant une volatilité plus importante que l'autre assureur par le jeu de la mutualisation.

Globalement, ces options ont permis de réduire le SCR du risque de réserve. Toutefois, nous avons remarqué qu'un risque présentant une volatilité importante pouvait affecter l'optimisation du SCR. Ainsi, de manière analogue à la précision d'une estimation des provisions, l'efficacité de la stratégie d'optimisation dépend également de la stabilité des développements des sinistres étudiés.

Mots clés : Risque de réserve Non-Vie, Solvabilité II, SCR, Provisionnement Non-Vie, Risque de réserve à horizon un an, CDR, Marge de Risque, Chain Ladder, Mack, Merz et Wüthrich, bootstrap.

Abstract

Beyond their reserves which already cover their entire undertaking risk, insurance companies are required to hold a sufficient amount of capital to face potential deviations that could affect their solvency.

The future Directive Solvency II will impose new requirements in terms of solvency capital. Its method of calculation is very different from that which is currently in place. It will be based on a modular approach which takes into account all the quantifiable risks faced by the insurance companies.

In this new environment, reserve risk, which represents the risk of under-estimation of the technical reserves for outstanding claims, is apprehended within a risk module. The different components of this risk are analyzed using ultimo reserving methods for the determination of the Best Estimate, and one-year methods for the calculation of the SCR, as well as future SCR projection methods for the computation of the risk margin.

We first discuss the estimation of these components. Then, we study the possibility of optimizing the reserve risk capital requirement within Solvency II by suggesting a modification of the liabilities structure imagining three company restructuration strategies. The idea of these strategies is to “remodel” the reserves’ volume and profile with the underlying concept of either mutualization of reserves by merging (option 1), the split of reserves in two homogeneous groups, the new accident years and the old accident years (option 2). Finally, the last option is a combination of the two concepts (option 3).

The merging of two companies allows for a reduction of the SCR due to the mutualization effect, as could be expected, especially for long lines of business. For the second option, which consists in separating old accident years from new ones, the optimization of the SCR is carried out on short term LoBs when the highest possible number of old accident years are grouped together. On long term LoBs, the optimization of the SCR is possible in the opposite case, that is when the lowest possible number of old accident years are grouped together. In option 3, the optimization of SCR is the same as option 2, however there is an advantage for the insurer with an important volatility thanks to mutualization.

Overall, these options have led to a reduction of the reserve risk SCR. However, in some cases, the optimization cannot be effective. This is the case when the considered risk has an important volatility (especially on long term LoBs). Then, as for the calculation of reserve estimates, the efficiency of the optimization strategy depends on the stability of the loss development of the studied claims.

Keywords: Non-Life reserve risk, Solvency II, SCR, Non-Life Reserving, One year reserve risk, CDR, Risk Margin, Chain Ladder, Mack, Merz and Wüthrich, bootstrap.

Sommaire

Résumé	6
Abstract	7
Note à l'attention du lecteur.....	11
Introduction.....	12
1. Le risque de réserve en Assurance Non-Vie	14
1.1. L'Assurance	15
1.1.1. L'activité d'Assurance	15
1.1.2. L'inversion du cycle de production	15
1.1.3. Le rôle de l'Assurance dans l'économie.....	16
1.1.4. Une Assurance en bonne santé : sa solvabilité	17
1.1.5. Solvabilité I	18
1.2. La Directive Solvabilité II.....	20
1.2.1. La révolution Solvabilité II.....	20
1.2.2. L'exigence quantitative	23
1.2.3. Le capital cible Solvabilité II : le SCR	25
1.2.4. Le risque de réserve.....	29
1.3. Le risque de réserve Non-Vie : une opportunité nouvelle	31
1.3.1. Une opportunité pour mieux gérer ses passifs.....	31
1.3.2. Optimisation du SCR risque de réserve par différentes options stratégiques.....	32
1.3.3. Disclaimer	34
2. Méthodes actuarielles pour l'évaluation du risque de réserve Non-Vie	35
2.1. Descriptif des données.....	36
2.1.1. Les triangles de liquidation des sinistres.....	36
2.1.2. Données utilisées pour le mémoire.....	38
2.2. Méthodes de provisionnement « à l'ultime »	40
2.2.1. Le provisionnement technique	40
2.2.2. Méthode de Chain Ladder.....	41
2.2.3. Modèle de Mack.....	43
2.2.4. Méthode du Bootstrap.....	48

2.2.5.	Applications	53
2.3.	Méthodes de mesure du risque de provisionnement « à horizon un an ».....	62
2.3.1.	La vision à horizon un an du provisionnement, le CDR.....	62
2.3.2.	Le modèle de Merz & Wüthrich	63
2.3.3.	La méthode du re-reserving : le bootstrap.....	71
2.3.4.	Applications	76
2.4.	Calcul de la marge de risque Solvabilité II	85
2.4.1.	Contexte.....	85
2.4.2.	Définition théorique et méthode de calcul préconisées par le régulateur	86
2.4.3.	Méthode par formule fermée	88
2.4.4.	Méthode par simulation.....	90
2.4.5.	Méthode DEKL.....	93
2.4.6.	Applications	95
3.	Calcul du SCR du risque de réserve dans le cadre de différentes options stratégiques.....	99
3.1.	Méthode retenue pour le calcul du SCR	100
3.2.	Assureur A et Assureur B.....	101
3.3.	Option 1 : Fusion des 2 assureurs	104
3.3.1.	Principe	104
3.3.2.	Sociétés A et B en mono-activité.....	104
3.3.3.	Sociétés A et B en multi-activité	105
3.4.	Option 2 : Création d'une société dédiée à la gestion des anciennes survenances	107
3.4.1.	Principe	107
3.4.2.	Société A en mono-activité.....	108
3.4.3.	Société A en multi-activité	111
3.4.4.	Société B en mono-activité.....	112
3.4.5.	Société B en multi-activité	115
3.4.6.	Synthèse	115
3.5.	Option 3 : Mise en commun des anciennes survenances dans une société dédiée à la gestion des passifs	117
3.5.1.	Principe	117
3.5.2.	Sociétés A et B en mono-activité.....	118
3.5.3.	Société A et B en multi-activité.....	120
3.5.4.	Synthèse	121

Conclusion	123
Table des figures	125
Liste des Tableaux.....	127
Bibliographie	129
Annexes.....	131
Annexe 1 : Calcul du SCR par la Formule Standard.....	132
Annexe 2 : Calibrage de la procédure bootstrap.....	140
Annexe 3 : Méthodes de calcul de la marge de risque préconisées par l'EIOPA	144
Annexe 4 : Résultats par branche d'activité et par société	147

Note à l'attention du lecteur

Le présent mémoire se base sur les textes disponibles ou en vigueur au moment de sa réalisation. En particulier, les références à la Directive Solvabilité II s'appuie principalement sur les spécifications techniques du 28 janvier 2013 (Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment [10]).

Introduction

« Provision », du latin « provisio » qui signifie « action de prévoir » et « action de pourvoir ». Ce terme désigne la matière première de l'activité d'assurance. En effet, c'est l'unique secteur d'activité où les provisions jouent un rôle essentiel puisqu'au passif du bilan d'un assureur, c'est le poste le plus important en termes de volumétrie.

Cette importance relève de la spécificité de l'activité d'assurance où l'assureur s'engage auprès de ses assurés à supporter le coût d'un éventuel sinistre sans en connaître le montant exact à l'avance. Ce risque est matérialisé par les provisions techniques qui correspondent à « ce que l'assureur met de côté au cas où ... ». A combien se chiffre ces réserves ? C'est à ce moment qu'intervient l'actuaire qui grâce à des méthodes de provisionnement va estimer le montant de provisions nécessaires jusqu'au développement ultime des sinistres, pour que l'assureur puisse honorer ses engagements vis-à-vis de ses assurés.

En plus de cette provision technique, la réglementation impose aux entreprises d'assurance de disposer d'une marge de solvabilité ayant pour rôle d'absorber des dérives imprévues au-delà des réserves.

L'avènement dans un futur proche de la Directive Solvabilité II, va imposer aux compagnies d'assurance une nouvelle façon de quantifier cette exigence de marge de solvabilité. Elle se base sur une approche modulaire des risques et à chaque risque sera associé un Capital de Solvabilité Requis, le SCR. Dans ce nouvel environnement, un module de risque est dédié au risque de réserve, également nommé risque de provisionnement. Il représente le risque de sous-évaluation des provisions techniques relatives aux sinistres survenus. C'est ce module qui sera traité dans ce mémoire.

L'évaluation de ce SCR repose sur des principes inédits : un horizon temporel d'un an et une notion de Value-at-Risk à 99,5% qui traduit le fait que le SCR doit pouvoir absorber un choc suite à une sinistralité exceptionnelle avec une probabilité de 99,5% à un horizon un an. Cette nouvelle vision va introduire l'utilisation de nouvelles méthodes de provisionnement pour estimer la volatilité à horizon un an. Jusqu'à présent les méthodes permettaient uniquement d'estimer la volatilité des provisions à l'ultime. Toutefois ces méthodes restent utiles pour l'évaluation des provisions techniques qui sous Solvabilité II correspondront à une évaluation des réserves dites « Best Estimate » complétées d'une marge de risque (la Risk Margin).

Ainsi cette nouvelle exigence en capital pour le risque de réserve va devenir une problématique majeure pour tous les acteurs du marché de l'assurance Non-Vie. Son calcul sera plus complexe et plus détaillé et elle devra respecter un minimum, mais en même temps, elle ne devra pas être excessivement élevée. De plus, la réforme va imposer aux compagnies une meilleure connaissance de leurs propres risques de sorte que toutes les décisions stratégiques et commerciales tiennent compte de ce besoin en capital.

Face à ces problématiques, ce mémoire propose d'utiliser la finesse et la complexité de calcul imposées par Solvabilité II comme un outil pour optimiser le SCR du risque de réserve par des options stratégiques d'entreprise. Nous proposons de modifier la structure de la gestion des passifs

en imaginant trois stratégies de restructurations d'entreprise dans le but de « remodeler » le volume et le profil des provisions avec comme concept sous-jacent la mutualisation des provisions ou la séparation en groupe de provisions homogènes.

La première stratégie correspond à la fusion de deux sociétés et donc la mise en commun de leur provision. La deuxième stratégie consiste à séparer les sinistres selon deux catégories : les survenances anciennes par opposition aux survenances récentes. Ainsi, il est proposé de créer une structure dédiée à la gestion des sinistres de survenances anciennes; les survenances récentes restant quant à elle gérées dans la société d'origine. Enfin la troisième option est une combinaison des deux premières, puisqu'il s'agit de mettre en commun les survenances anciennes de deux sociétés dans une structure dédiée, alors que les survenances récentes resteront gérées dans les compagnies d'origine respectives. Ainsi, cette grille d'analyse plus fine permettra d'identifier, voire de quantifier les expositions consommatrices de capital.

Pour y parvenir, nous poserons dans un premier temps le cadre de l'étude en rappelant les principes fondamentaux de l'assurance permettant de définir la notion de Solvabilité et de démontrer l'importance pour une entreprise d'assurance d'être solvable à tout moment. Nous nous placerons alors dans le contexte réglementaire de Solvabilité II dont les principes et les concepts seront détaillés, ainsi que le mode de calcul de l'exigence en capital au titre du risque de réserve Non-Vie. Puis, nous poserons les bases de réflexion sur la problématique d'optimisation de ce SCR en présentant les différentes stratégies pour y parvenir

Dans un deuxième temps, nous aborderons les méthodes actuarielles indispensables à l'évaluation du risque de réserve sous Solvabilité II. Il y a tout d'abord les méthodes de provisionnement à l'ultime qui permettent d'estimer le Best Estimate des réserves. Ensuite, nous traiterons le cas du nouvel horizon de provisionnement initié par Solvabilité II où seront présentées les méthodes de mesure du risque de provisionnement à horizon un an indispensables dans la détermination du SCR du risque de réserve. Puis, nous compléterons l'arsenal de méthodes par celles servant au calcul de la marge de risque et ainsi nous traiterons l'ensemble des postes du passif d'un bilan Solvabilité II. Pour chacune des méthodes, nous effectuerons une application sur un exemple tiré de données réelles.

Enfin, nous mettrons en perspective les résultats obtenus à l'étape précédente en quantifiant le SCR du risque de réserve dans les différentes options stratégiques. Ces SCR seront analysés et l'impact de la mise en place de ces stratégies sur le SCR sera mesuré.

1. Le risque de réserve en Assurance Non-Vie

1.1. L'Assurance

1.1.1. L'activité d'Assurance

Dans le monde d'aujourd'hui, il existe une demande d'assurance du fait de l'aversion au risque des agents économiques (entreprises et individus). En effet, ces derniers sont soumis à des aléas dont les conséquences financières peuvent menacer voire anéantir leur patrimoine.

L'opération d'assurance consiste à transférer les risques aléatoires à autrui. Cette activité est une opération par laquelle une partie (l'assuré) contracte, moyennant un paiement (la prime ou la cotisation), une prestation par une autre partie (l'assureur) en cas de réalisation d'un risque.

Le risque est la notion abstraite « d'aléa » sur les conditions financières, matérielles, corporelles ou de vie des individus. Ce risque est incertain (accident de la route) ou de terme indéterminé (décès) ne dépendant pas exclusivement de la volonté des parties.

1.1.2. L'inversion du cycle de production

Dans le cas d'une entreprise traditionnelle, lors de la commercialisation d'un nouveau produit ou service, le prix de vente est connu. Il est fixé au regard de son prix de revient. L'incertitude réside dans le chiffre d'affaires, à savoir le nombre de biens ou de services qui seront vendus.

Le modèle économique de l'assurance est spécifique du fait de l'inversion de ce processus. La société d'assurance va fixer a priori sa prime (prix de vente) et va vendre ses contrats aux différents agents économiques. Elle connaît donc son chiffre d'affaires avant de constater a posteriori les montants de sinistres et frais afférents (prix de revient). C'est ce qui s'appelle communément l'inversion du cycle de production.

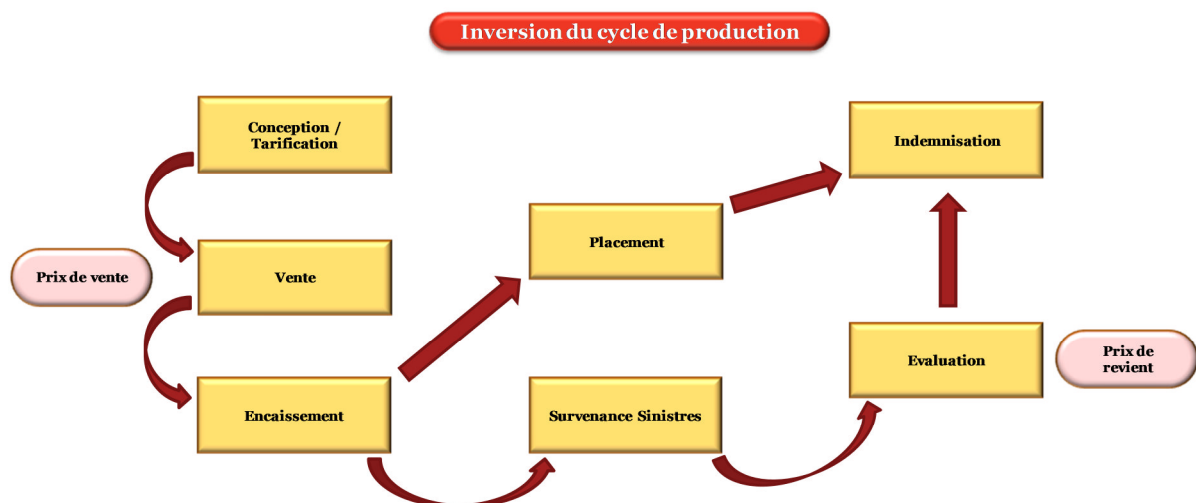


Figure 1.1 : Inversion du cycle de production

Autrement dit, l'assureur s'engage à verser une prestation à l'assuré si le risque (défini contractuellement) se réalise, sans connaître le « vrai » coût de cette éventuelle prestation.

Les primes sont fixées en fonction d'estimations statistiques des montants futurs de sinistres. Cette particularité constitue un risque pour l'assureur. En effet, les prestations futures peuvent s'avérer supérieures à ces estimations (Risque de primes sous Solvabilité II).

Parallèlement, dans l'optique de garantir l'intérêt des assurés, la société d'assurance doit constituer des provisions techniques à partir de tout ou partie des primes. Ces provisions doivent lui permettre de régler les sinistres et constituent donc une dette envers les assurés. De ce fait, elles doivent posséder un caractère suffisant (Risque de réserves sous Solvabilité II).

Dans l'intérêt des assurés, la capacité des sociétés d'assurance à faire face à leurs engagements est indispensable, et ce même en cas de survenance d'événements imprévus.

1.1.3. Le rôle de l'Assurance dans l'économie

Historiquement, l'assurance a tenu un rôle important dans l'économie. L'origine de l'assurance moderne illustre bien son rôle dans le développement de l'économie. Les premiers dispositifs assimilables à des contrats d'assurance au XIV^{ème} siècle, étaient souscrits par des marchands qui devaient disposer de sommes considérables pour armer des navires. En effet, étant de condition assez modeste, ils ne pouvaient financer seuls leurs expéditions. Ils empruntaient alors le capital nécessaire à des banquiers mais plus généralement à de riches particuliers.

Si le navire faisait naufrage, les marchands ne remboursaient pas le prêteur ; à l'inverse, s'il arrivait à bon port, ce dernier était remboursé et touchait des intérêts pouvant aller jusqu'à 30% de la somme prêtée. L'importance du taux d'intérêt s'expliquait par les nombreux dangers ou infortunes de mer pesant sur l'expédition maritime (naufrage, pirates, tempêtes), qui exposaient donc le prêteur à un fort risque de perdre la somme prêtée ; d'où le terme de « prêt à la Grosse Aventure » pour nommer ce type d'emprunt.

Sans ce système d'assurance, peu de marchands auraient pu ou même risqué de s'engager dans une telle expédition. L'assurance a ainsi permis à l'économie de se développer en transférant un risque qui ne serait pas supportable par un unique individu vers une société plus à même de le supporter du fait de la mutualisation des risques.

De nos jours, dans les économies de marché, les compagnies d'assurance jouent de plus un rôle d'investisseur institutionnel. Du fait de l'inversion du cycle de production, l'assureur a la possibilité (le temps) de placer sur les marchés financiers les primes perçues avant de payer les sinistres. Les sommes en jeu sont considérables et permettent à de nombreuses entreprises de se développer grâce à cet apport massif de capitaux.

L'assurance facilite les initiatives économiques et participe au développement économique, d'où l'appellation d'investisseur institutionnel.

1.1.4. Une Assurance en bonne santé : sa solvabilité

Le mot « solvable » provient du latin « solvere », « payer » ou « s'acquitter d'une dette ». L'assureur est en effet un débiteur vis-à-vis des bénéficiaires du contrat d'assurance dont la prime a déjà été payée, alors que le coût de la prestation n'est pas encore connu. La solvabilité décrit donc la capacité d'une compagnie d'assurance à faire face à ses engagements. Elle dépend de l'importance de ces engagements et des ressources dont dispose la société d'assurance pour y faire face, notamment sous la forme des fonds propres et des actifs qu'elle détient.

De manière générale, on peut représenter d'une façon très simplifiée le bilan d'une société comme un actif et un passif (hors fonds propres). L'excédent du premier sur le second constitue alors les fonds propres de la société. Ces fonds propres ont communément un rôle de réserve dans la laquelle on « puise » pour réaliser tout type d'investissement.

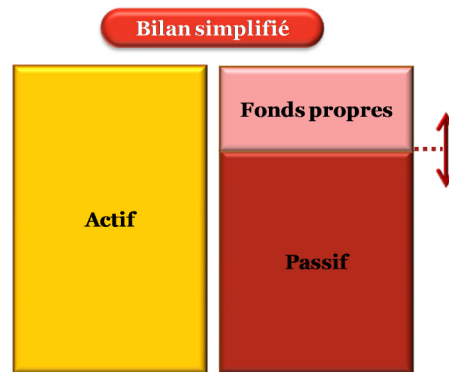


Figure 1.2 : Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

Cependant, l'évaluation du passif d'une compagnie d'assurance est soumise à beaucoup plus d'incertitudes que celle des autres industries. Cette incertitude est traduite par la double flèche du graphique ci-dessus. Ainsi, les fonds propres d'une compagnie d'assurance jouent également le rôle de « tampon » pour absorber d'éventuels chocs sur le passif assurantiel. Dans le cas où ces fonds propres seraient insuffisants pour faire face à une perte annuelle, la compagnie serait en situation d'insolvabilité.

De part son rôle d'investisseur institutionnel et son devoir d'honorer ses engagements vis-à-vis des assurés, il serait catastrophique et non sans conséquence qu'une compagnie d'assurance se retrouve en situation d'insolvabilité. Il est donc important que cette solvabilité des entreprises d'assurance soit réglementée. Au fil du temps, face aux nouveaux risques et aux nouvelles contraintes, une succession de mesures ont été prises et accumulées jusqu'à former l'ossature actuelle du système de solvabilité : Solvabilité I.

1.1.5. Solvabilité I

1.1.5.1. La réglementation actuelle

Une première tentative de mise à jour de la réglementation sur la solvabilité s'est opérée le 5 mars 2002 sous le nom de Solvabilité I (2002/13/CE). La Directive Solvabilité I s'accompagne de 3 principes fondamentaux :

- ✓ Le provisionnement : Les provisions techniques doivent être évaluées correctement et avoir un montant suffisant.
- ✓ Les contraintes sur les actifs : En représentation des engagements réglementés, la compagnie d'assurance doit détenir des actifs répondant à des critères de qualité, de diversification et de congruence.
- ✓ L'exigence de fonds propres : Un niveau minimum de fonds propres est imposé aux sociétés d'assurance afin de faire face à une sinistralité anormale où les pertes ne seraient pas couvertes par les provisions.

A tout moment, la marge de solvabilité doit être supérieure à l'exigence de marge de solvabilité dont le calcul s'effectue comme suit une compagnie d'assurance Non-Vie :

$$EMS_{Non-Vie} = \text{Max}(EMS_{Primes} ; EMS_{Sinistres}) \times \text{Max}(50\% ; \tau_{\text{réention}})$$

Où,

$$\begin{cases} EMS_{Primes} = 18\% \times \text{Max}(Primes ; 61,3M) + 16\% \times \text{Max}(Primes - 61,3M ; 0) \\ EMS_{Sinistres} = 26\% \times \text{Max}(Sinistres ; 42,9M) + 23\% \times \text{Max}(Sinistres - 42,9M ; 0) \end{cases}$$

- ✓ Les assiettes de primes et de sinistres sont une moyenne sur 3 années.
- ✓ Les tranches de calcul, 61,3 M€ et 42,9 M€ sont variables. Ces montants sont ceux du Code des Assurances dans sa version de Juin 2013.
- ✓ Il existe quelques variantes avec notamment des taux plus faibles en Santé, des assiettes de primes et de sinistres majorées en RC, ...

1.1.5.2. Les limites de Solvabilité I

Le système Solvabilité I a l'avantage d'être simple à appliquer, cependant, il présente quelques limites. En effet, il pénalise la prudence dans le provisionnement et dans la tarification. Ainsi, deux compagnies possédant le même portefeuille d'assurés mais dont une serait plus prudente dans sa tarification et son provisionnement se verrait avoir une exigence de marge de solvabilité plus importante.

De plus, il ne tient pas compte du profil de risque. Ainsi, deux compagnies possédant la même assiette de primes, l'un souscrivant des contrats Auto pour les conducteurs malusés et l'autre des contrats Auto pour les conducteurs à bonus 50 auront une exigence de marge de solvabilité

identique (dans le cas où la méthode sur les primes est retenue). Enfin, la réglementation actuelle ne prend pas en compte le risque de marché.

Pour remédier à ces critiques, les autorités européennes développent un nouveau cadre réglementaire dans un dispositif plus complet en tenant compte des risques sous-jacents à l'activité de l'assureur : Solvabilité II.

1.2. La Directive Solvabilité II

1.2.1. La révolution Solvabilité II

1.2.1.1. Les objectifs de la réforme

Solvabilité II est une Directive de l'Union Européenne qui s'adresse à l'ensemble des assureurs et réassureurs européens, avec pour principal objectif la protection des assurés par l'intermédiaire d'une meilleure estimation de leur solvabilité. Le but est donc de créer un cadre prudentiel plus adapté aux risques réels pesant sur ces entreprises. Pour y parvenir, ces dernières seront donc amenées à mieux comprendre et à mieux mesurer les risques inhérents à leur activité et ainsi permettre aux dirigeants d'optimiser l'allocation stratégique de leur capital et donc d'obtenir une meilleure couverture de l'ensemble des risques.

La réforme a également pour ambition de construire un marché européen de l'assurance homogène pour :

- ✓ favoriser la compétitivité des assureurs européens sur le plan international,
- ✓ harmoniser et améliorer la réglementation,
- ✓ garantir la transparence du marché de l'assurance.

Enfin, Solvabilité II apportera des nouveautés concernant la communication aux assurés et la gouvernance.

1.2.1.2. La mise en place de la réforme

En 2001, la Commission Européenne a voté la création du CEIOPS (Committee of European Insurers and Occupational Pensions Supervisors), aujourd'hui EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority). Cette instance joue un rôle central dans la conception, la mise en place et le suivi de la nouvelle Directive.

L'ensemble des travaux relatifs à la réforme suit le processus Lamfalussy. Ce processus basé sur un système à quatre niveaux a pour objectif de simplifier et d'accélérer le processus législatif européen dans le domaine des services financiers.

Niveau 1 : Législation cadre

La Commission Européenne propose un cadre conceptuel de directives après un processus de consultation avec notamment les recommandations de l'EIOPA. Il est soumis au Conseil européen et au Parlement Européen pour adoption de la directive.

Niveau 2 : Mesures d'exécution

La Commission Européenne décide des mesures d'exécution à l'intérieur du prisme défini au niveau 1 et sur la base des propositions de l'EIOPA et des échanges avec le marché.

Niveau 3 : Application des mesures adoptées aux niveaux 1 et 2

L'EIOPA coordonne la transposition et l'application cohérentes et uniformes des dispositions de niveau 1 et de niveau 2 dans les Etats membres en formulant des normes et des lignes directrices destinées à favoriser l'objectif d'un rapprochement des pratiques de surveillance sur le marché européen des services financiers.

Niveau 4 : Contrôle de l'application des mesures adoptées aux niveaux 1 et 2

La Commission Européenne veille à ce que les Etats membres respectent la législation et prend des mesures en cas d'infraction.

Dans le cadre de Solvabilité II, le premier niveau correspond à la Directive qui fixe les grands principes sans détailler les modalités de calcul. Le deuxième niveau décrit les principes de calcul applicables dans toute l'Europe. Le troisième niveau correspond aux particularités propres à chaque marché. Le quatrième niveau est prévu pour le renforcement des procédures de suivi.

1.2.1.3. Les Etudes Quantitatives d'Impact

Dans le but de déterminer les mesures d'implémentation de niveau 2, l'EIOPA a mené différents questionnaires auprès des assureurs et réassureurs : les Etudes Quantitatives d'Impact (Quantitative Impact Study – QIS). Ces études permettent de tester les orientations incluses dans les Consultations Papers publiés par l'EIOPA en réponse aux demandes d'avis de la Commission. Elles consistent en des « aller-retour » entre la théorie et la pratique, les compagnies appliquant les mesures proposées directement sur leurs portefeuilles.

Ces échanges ont tout d'abord permis de recueillir auprès du marché des retours concernant l'impact quantitatif et qualitatif de la réforme. En fonction des résultats, ces études permettent également d'affiner et de calibrer les modalités de calcul du besoin en capital exigé par Solvabilité II. Enfin, elles donnent l'opportunité aux compagnies de se familiariser avec les notions de la réforme et d'en comprendre les enjeux.

Six études quantitatives d'impact ont été réalisées jusqu'à présent. La dernière étude s'est réalisée au début de l'année 2013 et portait sur les branches longues.¹

¹ Cf. [10]

1.2.1.4. La structuration de la réforme

Le 25 novembre 2009, le Parlement et le Conseil Européen publient la directive 2009/138/CE sur « l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité II) »².

Cette nouvelle directive s'appuie sur une vision radicalement différente et beaucoup plus complète de la situation et des engagements d'un assureur, à travers une approche exhaustive des facteurs de risque. Cette Directive repose ainsi sur trois piliers :

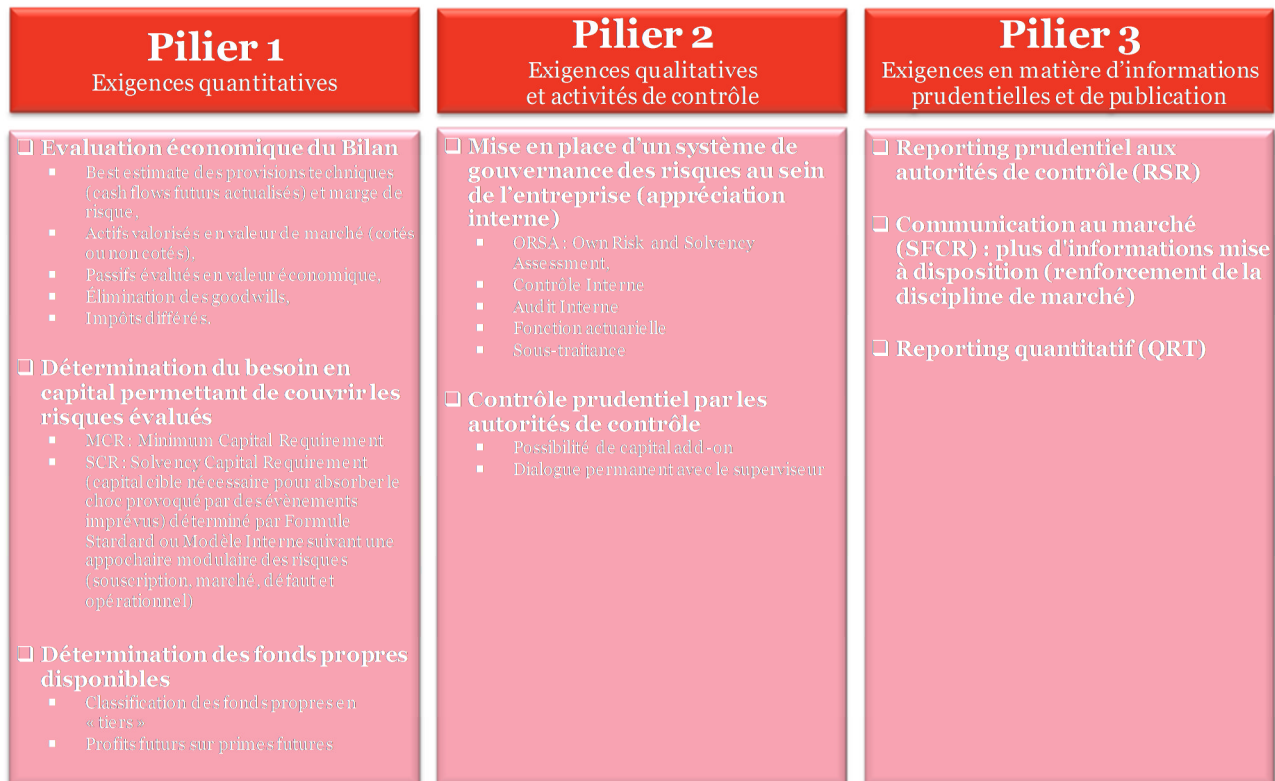


Figure 1.3 : Les 3 piliers de la Directive Solvabilité II

Le pilier 1 définit les principes et les modalités de calculs pour l'évaluation économique du bilan et pour la détermination du besoin en capital sous Solvabilité II. L'objectif est d'harmoniser le calcul de ces indicateurs à toutes les compagnies d'assurance européenne.

Le pilier 2 fixe les normes qualitatives à respecter par l'ensemble des acteurs du marché. Il fait office de contrôle pour les autorités et de contrôle interne pour les entreprises. En effet, l'un des objectifs de la réforme est de permettre aux entreprises d'être autonomes dans l'évaluation de leurs risques. L'article 45 de la Directive introduit un processus d'évaluation des risques, l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). C'est un outil de gestion des risques propre à l'entreprise qui doit permettre aux dirigeants de suivre en continu le besoin en capital et de piloter leur business plan.

Le pilier 3 a pour vocation d'assurer la transparence dans la communication de l'entreprise vis-à-vis des autorités de contrôle, du marché et du public.

² [23]

Ce mémoire porte sur la détermination du SCR du risque de réserve Non-Vie. Il est donc concerné par les éléments du pilier 1 que nous allons détailler dans la suite.

1.2.2. L'exigence quantitative

L'objectif majeur du pilier 1 est la définition de l'exigence de besoin en capital sous Solvabilité II, mais plus généralement, il s'agit de définir les modalités de calcul des composantes du bilan Solvabilité II :

- ✓ *Les actifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes. (Article 75 de la Directive, cf. [23])*
- ✓ *Les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre parties informées et consentantes. (Article 75 de la Directive, cf. [23])*

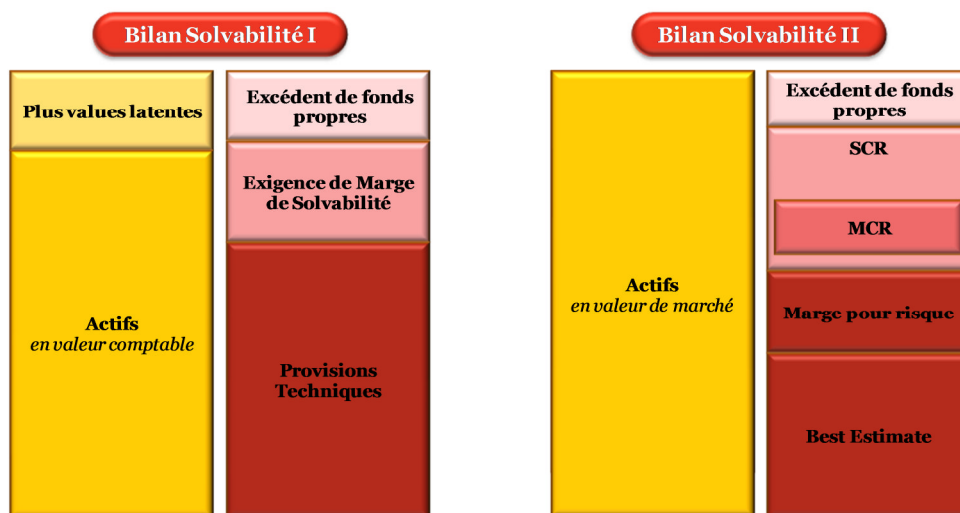


Figure 1.4 : Comparaison des bilans Solvabilité I et Solvabilité II

1.2.2.1. Les provisions techniques

La valeur des provisions techniques correspond au montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champs leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance. (Article 76 de la Directive, cf. [23]).

La valorisation des actifs s'effectue simplement en prenant « la valeur à laquelle ils pourraient être échangés », autrement dit, la valeur de marché.

L'évaluation des passifs diffère de celle des actifs car le passif est essentiellement constitué des provisions techniques et il n'existe pas de « marché » où s'échangent ces passifs. Afin de rester cohérent avec les actifs, Solvabilité II préconise une approche « Market Consistent Value » dans la valorisation du passif.

Dans ce cadre, il faut déterminer le positionnement du passif par rapport à un risque de marché en intégrant la notion de risque répliquable :

- ✓ Si le passif est répliquable, c'est-à-dire qu'il existe un instrument financier ou un actif sur un marché suffisamment liquide dont les cash-flows futurs couvrent exactement ceux du passif, la valorisation de ce passif consiste à calculer la valeur actuelle du portefeuille répliquant.
- ✓ Si le passif n'est pas répliquable, la valorisation du passif doit correspondre à la somme d'un Best Estimate et d'une marge de risque.
 - *Le Best Estimate des provisions correspond à la moyenne pondérée par leurs probabilités des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. (Article 77 de la Directive, cf. [23])*
 - *La marge de risque est le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal à l'exigence de solvabilité en capital nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci. (Article 77 de la Directive, cf. [23])*

Les provisions techniques en assurance Non-Vie sont des passifs non répliquables. Dans ce cas, il faudra déterminer un Best Estimate correspondant aux flux de provisions futurs en vision économique, sans prudence ni marge de sécurité. Les déviations possibles seront couvertes par la marge de risque, puis par le SCR si nécessaire.

1.2.2.2. Les fonds propres et l'exigence en capital

Les fonds propres correspondent aux ressources financières disponibles d'une entreprise d'assurance ou de réassurance dans lequel les compagnies vont puiser si les provisions ne suffisent pas à couvrir leur engagement. Cela nous amène à la notion de solvabilité et d'exigence de fonds propres dictée par Solvabilité II.

Le pilier 1 introduit deux niveaux de seuil quantitatifs réglementaires :

- ✓ Le Minimum Capital Requirement (MCR).
- ✓ Le Solvency Capital Requirement (SCR).

Le MCR définit le niveau de capital minimum requis, c'est-à-dire le minimum de fonds propres de base éligibles à détenir. En dessous de ce seuil, l'entreprise est considérée comme « techniquement » non solvable et ne peut plus fonctionner normalement avec comme conséquence

l'intervention automatique de l'autorité de contrôle. Le détail du calcul du MCR se trouve en Annexe 1.1.

Tout l'enjeu de la Directive se situe au niveau du SCR, nous détaillons ses modalités de calcul dans la partie suivante.

1.2.3. Le capital cible Solvabilité II : le SCR

1.2.3.1. Définition

Le SCR (Solvency Capital Requirement) définit le niveau de capital cible (fonds propres) pour lequel l'entreprise d'assurance ou de réassurance est suffisamment capitalisée et peut absorber des pertes imprévues. En dessous de ce seuil, le superviseur local intervient et enjoint l'entreprise de mettre en œuvre un plan d'action afin de reconstituer le SCR.

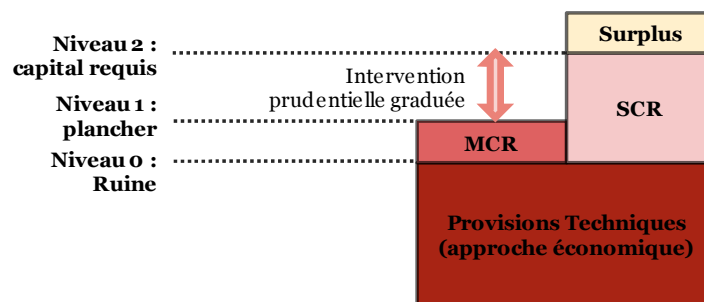


Figure 1.5 : Les 2 niveaux d'exigence en capital de Solvabilité II

1.2.3.2. Le concept du SCR

Le capital de solvabilité requis correspond à la Value-at-Risk des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% à horizon un an. Autrement dit, le SCR Solvabilité II doit amener la probabilité de ruine de la compagnie d'assurance à 0,5% à horizon un an (soit une ruine tous les 200 ans).

La vision « à horizon un an » est un élément clé du concept du SCR tel que défini dans Solvabilité II. Nous porterons une attention particulière à cet horizon, notamment au moment de décrire les méthodes de provisionnement en assurance Non-Vie.

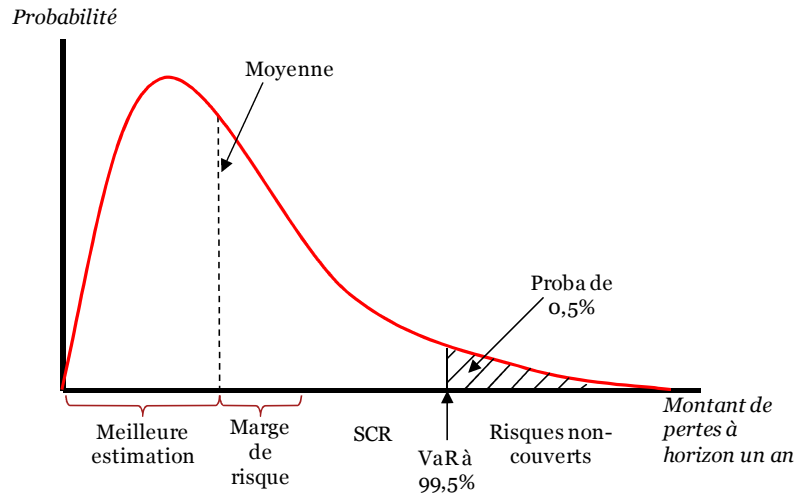


Figure 1.6 : Représentation de la VaR 99,5%

1.2.3.3. Les différentes approches pour déterminer le SCR

Il existe différentes approches possibles pour le calcul de l'exigence en capital :

- ✓ La Formule Standard qui repose sur une méthodologie de calcul et un calibrage donnés par la Directive.
- ✓ Un modèle interne partiel qui remplace la structure par défaut de la Formule Standard sur un ou plusieurs modules de risques, par une structure de calcul propre à l'entreprise.
- ✓ Un modèle interne totale qui remplace la structure par défaut de la Formule Standard sur l'ensemble des modules de risques par une structure de calcul propre à l'entreprise.

L'approche modèle interne partiel ou total permet de prendre en compte les caractéristiques spécifiques de l'entreprise et peut également servir d'outil de pilotage et de contrôle des risques. Ces approches doivent faire l'objet d'une approbation par les autorités de contrôle.

1.2.3.4. La composition du SCR dans la Formule Standard

Le SCR Solvabilité II est calibrée de manière à garantir que tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée soient pris en considération. La Directive définit les modules de risques qui doivent être considérés dans la détermination du SCR global :

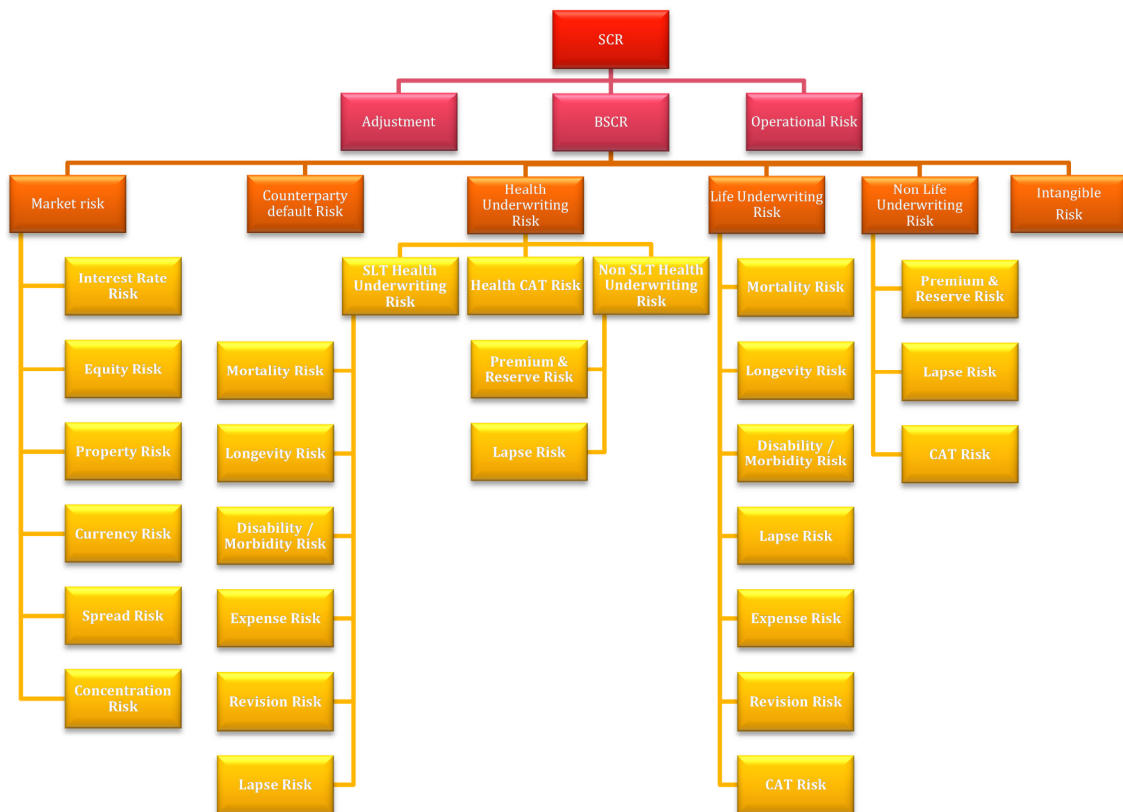


Figure 1.7 : Structure actuelle de l'approche standard ³

Des « sous-SCR » sont calculés pour chacun des modules de risque quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée (cf. figure ci-dessus). Ces « sous-SCR » sont agrégés au moyen de matrices de corrélation afin de prendre en considération des effets de dépendance. Le résultat de cette agrégation donne le SCR de Base ou BSCR.

Ce BSCR est ensuite ajusté au titre des propriétés d'absorption du risque des futures participations aux bénéfices et des impôts différés, puis agrégé avec le risque Opérationnel pour donner l'exigence en capital global : le SCR (Les formules de calcul du SCR se trouvent en Annexe 1.2).

Les résultats du QIS 5 ont permis d'avoir une idée de la composition du SCR pour des sociétés d'assurance Non-Vie :

³ D'après les Articles 103 à 108 de la Directive, cf. [23]

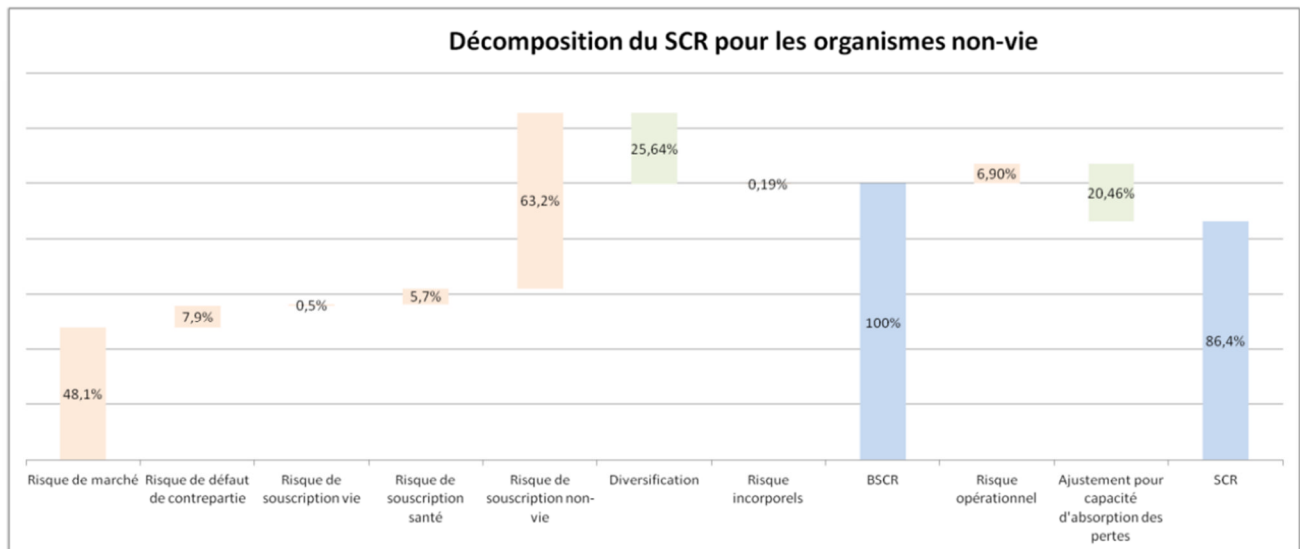


Figure 1.8 : Décomposition du SCR pour les organismes Non-Vie 4

Sans surprise le risque de souscription Non-Vie contribue le plus au SCR. C'est sur ce module de risque que nous allons nous focaliser dans la suite du mémoire, et plus particulièrement sur le risque de provisionnement.

Voici pour résumer, les principales étapes de la détermination du SCR :

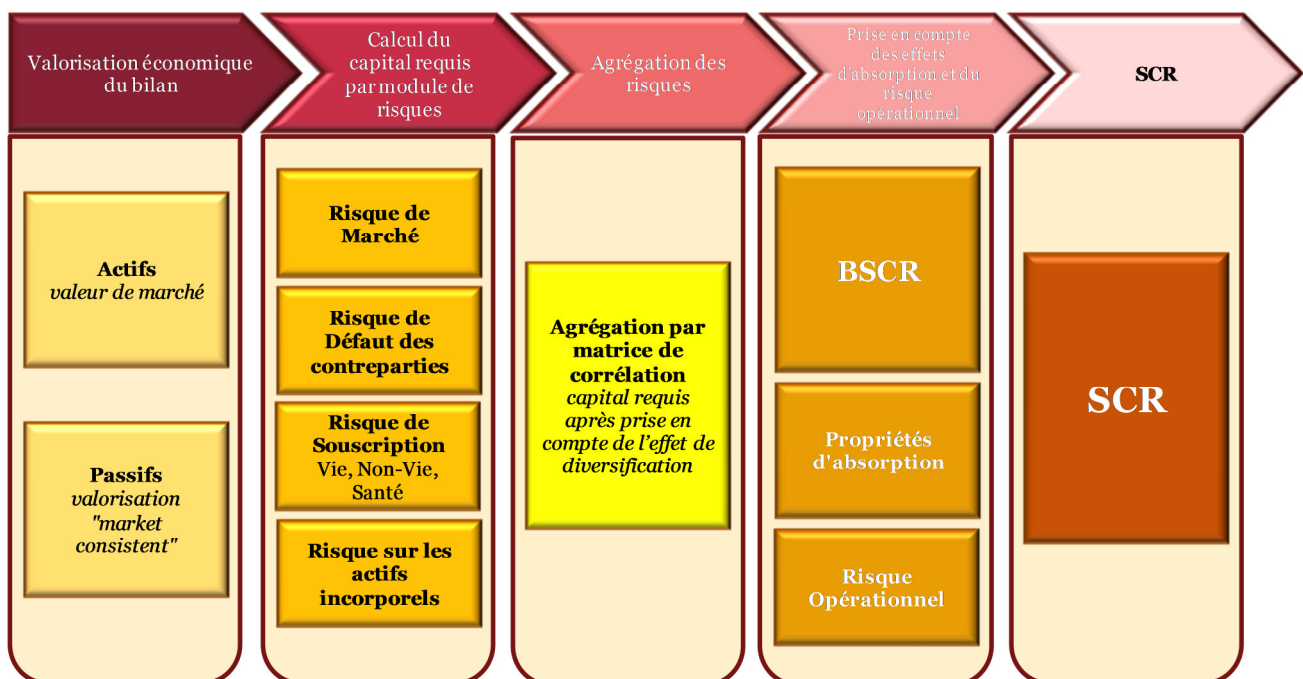


Figure 1.9 : Les grandes étapes du calcul du SCR Solvabilité II

4 Résultats du QIS5 [1]

1.2.4. Le risque de réserve

1.2.4.1. Le risque de souscription Non-Vie

Le risque de réserve ou risque de provisionnement est une des composantes du module de risque de souscription Non-Vie (cf. « Non-Life Underwriting Risk » en figure 1.7).

Le module « risque de souscription en Non-Vie » reflète le risque découlant des engagements d'assurance non-vie, compte tenu des périls couverts et des procédés appliqués dans l'exercice de cette activité. Il tient compte de l'incertitude pesant sur les résultats des entreprises d'assurance et de réassurance dans le cadre de leurs engagements d'assurance et de réassurance existants, ainsi que du nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. (Article 105 de la Directive, cf. [23])

Ce module est composé des 3 risques suivants :

- ✓ Le risque de primes et de réserve est lié à l'insuffisance de provisionnement (sinistres passés) et à l'insuffisance de tarification (sinistres de l'année à venir).
- ✓ Le risque catastrophe est lié aux événements extrêmes ou exceptionnels, qui ne sont pas correctement appréhendés par l'approche facteur utilisée pour la composante risque de primes et de provisions.
- ✓ Le risque de rachat est lié aux contrats intégrant une clause de reconduction annuelle et unilatérale disponible pour l'assuré ou une option permettant de terminer le contrat avant la fin de la période de couverture initialement prévue.

Ce mémoire est consacré au risque de réserve, nous détaillons donc uniquement ce risque dans la suite du document.

1.2.4.2. Définition du risque de réserve

Le risque de réserve est un risque de sous-évaluation des provisions techniques relatives aux sinistres survenus découlant d'une mauvaise estimation du montant des provisions pour sinistres mais aussi de l'écart entre le montant réel des sinistres et l'estimation moyenne qui peut en être faite.

1.2.4.3. La segmentation par LoB

Le calcul de l'exigence en capital au titre du risque de primes et de réserve Non-Vie doit s'effectuer à la maille Line of Business (LoB) a minima. La segmentation proposée par Solvabilité II est la suivante :

LoB
Motor vehicle liability <i>RC véhicules terrestres à moteur</i>
Other motor <i>Véhicules terrestres à moteur, autres branches</i>
Marine, Aviation and Transport <i>Maritime, Aviation et Transport</i>
Fire and other damage to property <i>Incendie et autres dommages</i>
General liability <i>Responsabilité civile générale</i>
Credit and Surety ship <i>Crédit et Caution</i>
Legal expenses <i>Protection Juridique</i>
Assistance <i>Assistance</i>
Miscellaneous financial loss <i>Risques divers</i>
Non-proportionnal reinsurance Property <i>Réassurance non-proportionnelle en Dommages</i>
Non-proportionnal reinsurance Casualty <i>Réassurance non-proportionnelle en Responsabilité</i>
Non-proportionnal reinsurance MAT <i>Réassurance non-proportionnelle en MAT</i>

Tableau 1.1 : Les Lines Of Business Non-Vie de Solvabilité II ⁵

L'objectif de cette segmentation est de constituer des groupes homogènes de risques de sorte à pouvoir renforcer la robustesse des méthodes appliquées. Cette segmentation est également exigée pour le calcul des provisions techniques. Les méthodes et hypothèses retenues dans l'estimation de ce dernier doivent s'appliquer sur des données homogènes au risque de créer des distorsions et de fausser les résultats.

Les compagnies d'assurance sont même invitées à affiner chaque LoB par des Groupes de Risques Homogènes. On peut par exemple citer la LoB RC Automobile dont la séparation en deux, RC Corporelle et RC Matérielle serait pertinente. En effet, ce sont deux risques qui ne possèdent pas les mêmes caractéristiques sur de nombreux points.

Cependant, ce niveau de finesse n'est rendu possible que si le suivi des indicateurs et si les outils informatiques le permettent. Solvabilité II peut permettre à certains assureurs de prendre conscience de cette nécessité.

⁵ Cf. [10], section TP.1.14

1.3. Le risque de réserve Non-Vie : une opportunité nouvelle

Nous allons désormais traiter uniquement le risque de réserve (ou risque de provisionnement) dans le cadre de solvabilité II.

1.3.1. Une opportunité pour mieux gérer ses passifs

1.3.1.1. Une meilleure connaissance de ses propres risques

La réforme Solvabilité II va obliger les assureurs à mieux connaître leur risque et leur portefeuille. Pour illustrer ce concept, nous pouvons par exemple considérer une compagnie d'assurance Non-Vie présentant les indicateurs suivants (les données sont fictives et n'ont qu'un but illustratif) :

	Primes	Résultat technique	Taux de marge
Auto	37 500	2 250	6%
Domage	50 000	2 500	5%
RC	62 500	3 750	6%
CatNat	100 000	7 500	8%
Total	250 000	16 000	6%

Tableau 1.2 : Exemple de calcul du taux de marge

Il est facile de conclure que le risque Catastrophes Naturelles est le plus rentable puisqu'il présente le taux de marge le plus élevé. Cependant, cette vision n'intègre pas le risque pris pour obtenir cette rentabilité. En effet, les sinistres Catastrophes Naturelles ne sont pas réputés pour leur fréquence mais pour leur sévérité. Cette sévérité peut engendrer des déviations au-delà de l'espérance et implique donc une analyse du coût en capital de ce risque.

	Primes	Résultat technique	SCR	SCR / Primes
Auto	37 500	2 250	3 750	10%
Domage	50 000	2 500	5 000	10%
RC	62 500	3 750	7 500	12%
CatNat	100 000	7 500	15 000	15%
Total	250 000	16 000	26 575	11%

Tableau 1.3 : Exemple de calcul du coût en capital

L'apport de la vision « risque » par l'indicateur SCR modifie l'analyse. Bien que rentable, la branche Catastrophes Naturelles est plus gourmande en capital. Cette nouvelle vision permettra aux entreprises d'étudier et peut-être d'appliquer de nouvelles orientations stratégiques non encore exploitées à ce jour. Cet exemple illustre la connaissance que doit avoir une compagnie d'assurance de ses risques, notamment dans le cadre de l'ORSA qui offre l'opportunité de mieux piloter et mesurer ses risques.

1.3.1.2. Une exigeante exigence de capital requis

La Directive Solvabilité II va complètement changer le monde de l'assurance. La détermination de l'exigence en capital (SCR) se base sur une approche bien plus complexe et détaillée que les normes actuelles l'imposent. Ce SCR sera probablement supérieur à l'Exigence de Marge de Solvabilité requise sous Solvabilité I.

Ce besoin en capital deviendra une problématique majeure pour tous les acteurs du marché. En effet, il doit respecter un niveau minimum pour faire face à tous les engagements pris (contrainte réglementaire), mais en même temps, il ne doit pas être excessivement élevé (contrainte d'immobilisation de capitaux), les capitaux libérés pourraient être utiles à la rémunération des actionnaires en dividendes, des employés en salaires ou en primes, ou dans l'investissement de projets de développement.

Des solutions sont données par la Directive pour calculer ce SCR au plus juste, en laissant la possibilité aux compagnies d'utiliser un modèle interne pour établir le montant de capital requis. Néanmoins, d'autres stratégies valent la peine d'être exploitées.

Pour le risque de réserve, le calcul du SCR au titre de ce risque est plus fin et plus détaillé. Cependant, on peut tirer avantage de cette nouvelle complexité de calcul. En effet, cette finesse et ce détail exigés peuvent donner l'opportunité d'avoir une vision plus fine du provisionnement, d'identifier, voire de quantifier les expositions consommatrices de capital et celles où il serait possible de créer de la valeur.

1.3.2. Optimisation du SCR risque de réserve par différentes options stratégiques

Le contexte économique de ces dernières années ainsi que l'impact de la Directive Solvabilité II a conduit de nombreux assureurs à initier des restructurations de différentes natures. Ainsi, au cours des dernières années, le monde de l'assurance a vu s'opérer des ventes de portefeuilles en run-off, des cessions et donc des acquisitions mais également des restructurations internes.

Ainsi, pour répondre à la question d'optimiser le SCR du risque de réserve sous Solvabilité II, nous proposons de modifier la structure de gestion des passifs en passant par des options

stratégiques de restructurations d'entreprise. Ces restructurations ont pour but de « remodeler » le volume et le profil des provisions par :

- ✓ La mutualisation des provisions.
- ✓ La séparation des provisions en groupe de provisions homogènes à l'instar des groupes de risques homogènes plus fins que les LoB.

Pour illustrer ces concepts, nous nous baserons sur trois options stratégiques de restructuration d'entreprise :

- ✓ Une fusion de deux sociétés, mutualisant ainsi leurs provisions;
- ✓ Une mise en place d'une structure dédiée à la gestion d'une partie des provisions suite à la séparation de ces dernières;
- ✓ Une combinaison des deux options précédentes, à savoir la fusion d'une partie des provisions.

Ainsi pour mettre cela en perspective, nous considérons deux sociétés d'assurance Non-Vie constituées de trois mêmes risques : La Responsabilité Civile, Automobile, le Dommage Automobile et le Dommage Aux Biens. Ces sociétés sont appelées assureur A et assureur B.

L'objectif est de calculer leur besoin en capital réglementaire au titre du risque de réserve et d'observer leur variation dans ces trois options stratégiques d'entreprise.

1.3.2.1. Option 1 : Fusion de 2 assureurs

Il s'agit pour les deux assureurs A et B de fusionner pour ne former qu'une seule entité. Ainsi, leurs provisions sont mises en commun sous une seule entité « Fusion A+B ». Le concept sous-jacent à cette stratégie est l'effet de mutualisation.

1.3.2.2. Option 2 : Création d'une société dédiée à la gestion d'une catégorie de sinistres

Il existe sur le marché de l'assurance des exemples de compagnies ayant créé une structure interne pour gérer leur portefeuille en run-off. On pourrait s'inspirer de cette pratique et l'adapter non pas aux sinistres des contrats en run-off, mais à une autre catégorie de sinistres : les sinistres « anciens » (ou sinistres de survenances anciennes).

L'âge d'un sinistre peut être déterminé par la différence entre la date d'aujourd'hui et la date de survenance. Selon les risques, les anciennes survenances faisant référence aux sinistres âgés ont des comportements différents par rapport aux jeunes sinistres correspondant aux survenances récentes.

En théorie, les branches à déroulement long présentent encore des volumes de provisions conséquents sur les survenances anciennes, alors que pour les risques courts, il n'y a pratiquement

plus de provisions sur les anciens sinistres puisque la majorité de ces derniers ont déjà été réglées et clôturées. De même, il réside une incertitude sur les anciennes survenances des branches longues alors qu'il n'y a vraisemblablement plus d'incertitude au bout d'un an pour les risques rapides.

L'idée est que la volatilité entre ces deux catégories de sinistres est différente et qu'il peut donc être pertinent et intéressant de mesurer séparément et de manière décorrélée le risque de réserve sur les survenances anciennes d'une part et sur les survenances récentes d'autre part. Ainsi, l'entreprise de départ conservera les survenances récentes (et les provisions afférentes) et laissera la structure dédiée gérer les anciennes survenances (et les provisions afférentes). Il faut donc prendre une hypothèse de seuil séparant les anciennes des nouvelles survenances.

Nous testerons plusieurs seuils en partant du postulat que le seuil doit répartir les survenances en gardant un minimum de 5 années pour chacune des deux catégories. En effet, nous considérons que d'un côté comme de l'autre il faut disposer d'un minimum d'historique pour obtenir des résultats fiables et robustes.

1.3.2.3. Option 3 : Mise en commun d'une catégorie de sinistres de deux assureurs dans une société dédiée

La troisième option stratégique étudiée peut être définie comme une combinaison des deux précédentes, à savoir la création d'une société dédiée à la gestion des sinistres de survenances considérées comme anciennes. Mais dans le cas de cette stratégie, cette structure sera commune aux deux sociétés et gèrera les anciennes survenances provenant des deux assureurs.

L'idée est de mesurer si les sociétés A et B auraient un intérêt à mettre en commun leurs anciennes survenances (et donc leur provisions) dans cette structure dédiée et pourquoi pas de profiter également d'un effet de mutualisation.

Nous supposons que les deux sociétés se mettent d'accord pour transférer le même nombre d'années de survenances.

1.3.3. Disclaimer

Ce mémoire n'est pas porté sur les restructurations d'entreprises. Ainsi, il ne sera fait aucun commentaire sur la pertinence des options stratégiques et de leurs impacts. Ce mémoire traite uniquement de l'aspect risque de réserve et les options stratégiques ne sont qu'une manière de l'illustrer.

2. Méthodes actuarielles pour l'évaluation du risque de réserve Non-Vie

2.1. Descriptif des données

2.1.1. Les triangles de liquidation des sinistres

Dans le cadre du provisionnement Non-Vie, les données nécessaires à l'estimation d'une provision sont l'évolution des sinistres dans le temps et par année de survenance. Cette information se présente le plus souvent sous la forme d'un triangle. En effet, cette forme permet d'étudier le comportement des sinistres selon deux axes de temps :

- ✓ Le premier axe correspond à l'année de survenance du sinistre (en ligne).
- ✓ Le second axe décrit l'évolution du sinistre au cours du temps (en colonne).

Soit un triangle de liquidation, on note :

- ✓ i , l'année de survenance avec $i = 1, \dots, n$
- ✓ j , l'année de développement avec $j = 1, \dots, n$
- ✓ $D_I = \{i + j \leq I\}$, l'information disponible à la date I .

2.1.1.1. Triangles incrémentaux

Soit une famille de variables aléatoires $(X_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots n}$ où $X_{i,j}$ représente le montant incrémental des sinistres rattachés à l'année de survenance i et l'année de développement j .

		Année de développement						
		1	...	j	...	n-i	...	n
Année de survenance	1	$X_{1,1}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,n-i}$	...	$X_{1,n}$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	$X_{i,1}$	...	$X_{i,j}$	...	$X_{i,n-i}$	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n-j	$X_{n-j,1}$	...	$X_{n-j,j}$	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	$X_{n,1}$	...	...	...	...	...	...

Figure 2.1 : Triangles incrémentaux

2.1.1.2. Triangles cumulés

Soit une famille de variables aléatoires $(C_{i,j})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}$ où $C_{i,j}$ représente le montant cumulé des sinistres rattachés à l'année de survenance i et à l'année de développement j , tel que pour $1 \leq i \leq n$:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}$$

		Année de développement						
		1	...	j	...	n-i	...	n
Année de survenance	1	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n}$
	...	...		...		...		
	i	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$	...	$C_{i,n-i}$		
	...	...		...				
	n-j	$C_{n-j,1}$	...	$C_{n-j,j}$				
	...	...						
	n	$C_{n,1}$						

Figure 2.2 : Triangles cumulés

Dans un triangle cumulé, deux séries de valeurs sont particulièrement importantes :

- ✓ $(C_{i,n-i+1})_{i=1,\dots,n}$ correspondant à la valeur cumulée présente des sinistres, c'est la dernière diagonale.
- ✓ $(C_{i,n})_{i=1,\dots,n}$ correspondant à la valeur ultime des sinistres, c'est la dernière colonne.

2.1.1.3. Triangles des facteurs de développement individuels

Dans les méthodes de provisionnement qui seront présentées ci-après, il est fait appel à plusieurs reprises aux facteurs de développement individuels résultant de l'expression suivante pour i et j tel que $1 \leq i + j \leq n - 1$:

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

	Année de développement						
	1	...	j	...	n-i	...	n
Année de survenance	1	$f_{1,1}$	...	$f_{1,j}$	...	$f_{1,n-i}$	...
	...	...	...	...	...	...	...
	i	$f_{i,1}$	...	$f_{i,j}$	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...
	n-j	$f_{n-j,1}$	...	...	...	...	...
	n	...	...	...	...	...	...

Figure 2.3 : Triangles des facteurs de développement individuels

2.1.1.4. Principe de projection des triangles

Les triangles de liquidation des sinistres sont construits à partir des observations réelles du passé. A l'aide de méthodes statistiques, ils sont complétés dans le but d'estimer le comportement futur des montants de sinistres.

Le triangle supérieur est un triangle d'observation, il représente l'information disponible à une date donnée. Il contient les montants cumulés des sinistres, soit $D = \{C_{i,j} : i + j \leq n + 1\}$.

Le triangle inférieur doit être prédit par des méthodes de projections actuarielles.

2.1.2. Données utilisées pour le mémoire

Dans le cadre de ce mémoire, l'application des méthodes actuarielles qui seront présentées s'effectuera sur la base de triangles réels de paiements de deux compagnies d'assurance Non-Vie. Ces triangles sont dotés d'une profondeur d'historique de seize années et se déclinent sous trois risques qui peuvent être rattachés aux LoB Solvabilité II :

Branches d'activité	LoB SII
RC Automobile	Motor vehicle liability <i>RC véhicules terrestres à moteur</i>
Domage Automobile	Other motor <i>Véhicules terrestres à moteur, autres branches</i>
Domage aux biens	Fire and other damage to property <i>Incendie et autres dommages</i>

Tableau 2.1 : Branches d'activité étudiées

Sauf avis contraire, les montants énoncés seront en milliers d'euros.

Les méthodes de provisionnement ont toutes été développées dans le cadre de ce mémoire soit directement dans Excel, avec l'accompagnement d'une programmation VBA dans certains cas, soit sous le logiciel R.

Thèmes	Méthodes	Outils
Provisionnement à l'ultime	Mack	Excel / VBA
Provisionnement à l'ultime	Bootstrap	Excel / VBA
Provisionnement à horizon un an	Merz et Wüthrich	Excel / VBA
Provisionnement à horizon un an	Re-reserving	Excel / VBA et R
Marge de risque	EIOPA	Excel / VBA et R
Marge de risque	Approche Bootstrap	R
Marge de risque	Approche DEKL	Excel / VBA

Tableau 2.2 : Outils actuariels développés

2.2. Méthodes de provisionnement « à l'ultime »

2.2.1. Le provisionnement technique

2.2.1.1. Rappel du contexte

En assurance Non-Vie, certaines informations ne sont connues que de façon provisoire. C'est notamment le cas des sinistres qui peuvent être survenus, mais dont on ne sait pas quand ils seront déclarés. Une fois ces sinistres connus, on ne connaît pas non plus leur coût final et le délai plus ou moins long qu'il faudra pour définitivement les régler.

Ce délai dépend de la nature du sinistre, un sinistre matériel peut se régler dans le mois, alors qu'un sinistre en Dommages Corporels peut prendre des années pour cause de procédure judiciaire ou dans l'attente de la consolidation de la victime.

En résumé, on se retrouve souvent dans la situation où l'observation à un moment donné ne correspond pas à la situation définitive. Là est le défi de tout actuaire qui s'exerce dans le provisionnement technique en assurance Non-Vie, détecter des comportements réguliers et systématiques afin de les anticiper et de les intégrer directement dans le résultat.

Concrètement, l'assureur se doit d'anticiper le coût probable du sinistre et par conséquent constituer une provision pour y faire face quelque soit le moment où le ou les règlements s'effectueront. Cette provision est communément appelée Provision pour Sinistres A Payer (PSAP).

2.2.1.2. Estimation des PSAP

La réglementation impose aux compagnies d'assurance de constituer des provisions techniques à hauteur des engagements pris vis-à-vis de leurs assurés. Ces réserves doivent permettre le règlement des sinistres survenus et non payés qu'ils soient déclarés ou non. Les provisions techniques sont une dette envers les assurés et leur montant est considérable dans les comptes d'une société d'assurance.

L'évaluation du montant de PSAP commence par une évaluation dossier/dossier qui consiste en l'estimation par un gestionnaire de sinistres du montant restant à payer pour chaque sinistre déclaré et non clôturé. Cette première évaluation est complétée par l'application de méthodes statistiques pour estimer d'une part la charge des sinistres tardifs, à savoir les sinistres survenus mais pas encore déclarés (IBNYR – Incurred But Not Yet Reported) et d'autre part les mali de liquidation des sinistres antérieurs (IBNER – Incurred But Not Enough Reported). Les IBNYR et les IBNER forment les IBNR (Incurred But Not Reported).

Il est important que l'évaluation des IBNR soit faite de manière rigoureuse et repose sur des hypothèses réalistes. Une surestimation des provisions peut compromettre la rentabilité de la

compagnie d'assurance, inversement, une évaluation insuffisante peut empêcher l'assureur d'honorer ses engagements et conduire à des pertes voire à des problèmes de solvabilité.

L'évaluation statistique des provisions s'appuie sur les triangles de liquidation des sinistres qui serviront à estimer une charge ultime. Cette charge correspond à l'anticipation de l'assureur sur le coût définitif des sinistres. Elle va évoluer tout au long de la « vie » des sinistres.

$$\text{Charge ultime} = \text{Règlements} + \text{Provisions dossier/dossier} + \text{IBNYR} + \text{IBNER}$$

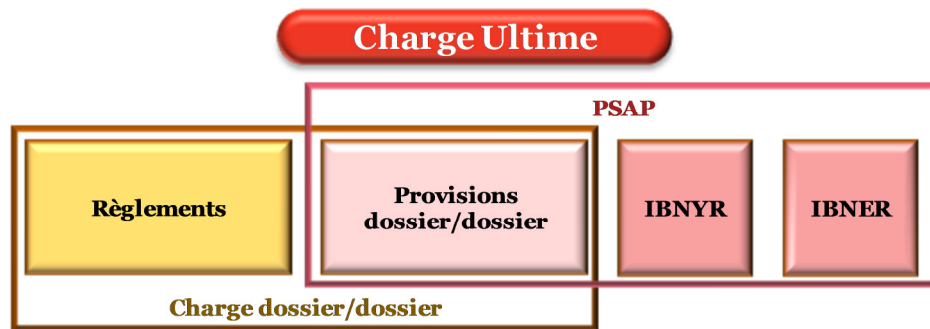


Figure 2.4 : Décomposition de la charge ultime

2.2.2. Méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder permet de projeter les montants cumulés de sinistres dans le futur. Elle s'applique à des triangles cumulés et s'appuie sur des facteurs de développement qui permettent de proche en proche de passer d'une année de développement j à une année de développement $j+1$.

C'est la méthode la plus utilisée du fait de sa simplicité de mise en œuvre. Elle sert également de base pour de nombreuses autres méthodes de provisionnement.

La méthode de Chain Ladder s'appuie sur l'hypothèse que les années de survenance sont indépendantes.

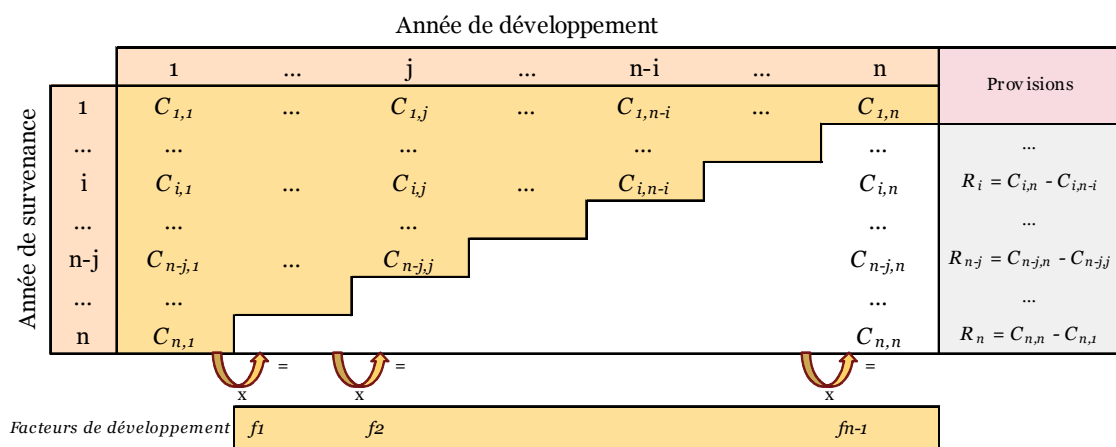


Figure 2.5 : Application de la méthode de Chain Ladder

2.2.2.1. Estimation de la provision

Le modèle Chain Ladder définit les facteurs de développement Chain Ladder comme :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \text{ avec } j = 1, \dots, n-1$$

Les facteurs de développement Chain Ladder $\hat{f}_j$ sont sans biais et non corrélés et vont permettre d'estimer la charge ultime par année de survenance i , avec $i = 2, \dots, n$:

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \times \hat{f}_{n-i+1} \times \hat{f}_{n-1} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{f}_k$$

Le montant de provisions peut alors être déduit pour chaque année de survenance i , avec $i = 1, \dots, n$:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

D'où une provision totale égale à :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

On peut aussi reconstituer le triangle inférieur de proche en proche avec la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i+1} \times \hat{f}_{n-i+1} \times \hat{f}_{j-1} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{k=n-i+1}^{j-1} \hat{f}_k$$

2.2.2.2. Critiques

Le principal avantage de cette méthode est sa simplicité de mise en œuvre. Néanmoins, elle présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, l'hypothèse d'indépendance des années de survenance est une hypothèse forte souvent non vérifiée. Dans la réalité le déroulement des sinistres n'est pas identique d'une survenance à l'autre. Le plus souvent, des « ruptures » peuvent apparaître dans les triangles suite à des modifications dans la gestion des sinistres (changements opérationnels, passage à un coût forfaitaire, ...).

De plus, il existe une incertitude importante sur les survenances récentes. En effet, le calcul de la charge ultime de ces années s'appuie sur le produit des estimations de nombreux facteurs de développement. L'incertitude est alors d'autant plus grande que le risque est long.

Enfin, la méthode donne un montant de provisions mais ne mesure pas l'incertitude autour de cette estimation. Le calcul d'une VaR ou d'un intervalle de confiance n'est donc pas possible.

Une première avancée pour prendre en compte l'erreur d'estimation a été introduite par Thomas MACK dans (cf. [17]).

2.2.3. *Modèle de Mack*

« Estimer, c'est se tromper ». Cette phrase résume parfaitement le travail d'un statisticien. Il applique des modèles complexes avec de nombreuses hypothèses sous-jacentes, pour obtenir une « estimation ». Or il n'y a pas de vérité absolue en statistique, donc quand il s'agit de faire une estimation, l'important est de savoir de combien nous nous trompons, dans quel intervalle notre estimation reste acceptable.

La méthode Chain Ladder est une méthode déterministe dans le sens où elle ne définit pas de modèle probabiliste permettant de mesurer l'incertitude autour du montant de provisions estimé. Cette valeur moyenne peut varier, la question est alors « De combien peut-elle varier ? ». Mack répond à cette question en mettant en place un modèle stochastique permettant d'évaluer l'erreur d'estimation de la méthode Chain Ladder (cf. [17] et [19]).

Le modèle de Mack est donc une méthode stochastique basée sur Chain Ladder permettant de mesurer par une formule fermée, la volatilité autour de la valeur estimée par l'approche Chain Ladder.

2.2.3.1. *Quantification de l'erreur de prédiction*

Dans l'approche de Mack, les données $C_{i,j}$ du triangle sont des variables aléatoires. Cette approche stochastique fournit l'erreur de prédiction qui est quantifiée par l'écart quadratique moyen de prédiction noté MSEP (Mean Square Error of Prediction) :

$$MSEP(\hat{R}) = E\left[(\hat{R} - R)^2\right]$$

Alors que la variance mesure l'écart entre une variable et sa moyenne, la MSEP va mesurer l'écart entre la variable et sa valeur estimée, conditionnellement aux informations déjà connues.

L'erreur quadratique moyenne de prédiction peut être décomposée en deux :

- ✓ Une erreur d'estimation liée au modèle qui traduit l'incertitude provenant de l'estimation des paramètres et de leur espérance conditionnelle (les $\hat{f}_j$).

$$E\left[(\hat{R} - E[R])^2\right]$$

- ✓ Une erreur de processus (ou variance process) correspondant à un facteur de variance lié à l'évaluation des paiements futurs mesurant l'écart à la moyenne.

$$E[(R - E[R])^2]$$

Soit,

$$MSEP(\hat{R}) = E[(\hat{R} - E[R])^2] + E[(R - E[R])^2]$$

2.2.3.2. Hypothèses sous-jacentes au modèle

Le modèle de Mack repose sur trois hypothèses :

- ✓ (H1) $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendants pour $i \neq k$
- ✓ (H2) Il existe f_j tel que $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = f_j C_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
- ✓ (H3) Il existe σ_j^2 tel que $Var(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

L'hypothèse (H1) signifie que les années de survénance sont indépendantes entre elles. L'hypothèse (H2) signifie que seule la valeur la plus récente $C_{i,j}$ est utile pour déterminer $C_{i,j+1}$ et que le facteur f_j est indépendant de l'année de survénance i considérée. Enfin, l'hypothèse (H3) est analogue à (H2) mais elle concerne la variabilité et non l'espérance.

2.2.3.3. Calcul de l'erreur de prédiction

Les formules de calcul des paramètres $\hat{f}_j, \hat{C}_{i,n}$ et $\hat{R}_i$ définis dans la méthode de Chain Ladder restent valables dans le modèle de Mack.

Les volatilités σ_j^2 de l'hypothèse (H3) se définissent comme :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 & \forall j = 1, \dots, n-2 \\ \hat{\sigma}_{n-1}^2 = \text{Min} \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \text{Min}(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right) \end{cases}$$

$\hat{\sigma}_j^2$ représente l'écart entre les facteurs de développement individuels $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et les facteurs de développements estimés $\hat{f}_j$, proportionnellement aux montants. C'est un estimateur sans biais.

L'erreur quadratique moyenne de prédiction peut alors être estimée pour chaque année de survenance i par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right), i = 1, \dots, n$$

Cette expression peut être décomposée comme la somme de deux termes principaux. Le premier terme comprenant $\frac{1}{\hat{C}_{i,j}}$ correspond à l'erreur de processus et le second terme comprenant $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}}$ correspond à l'erreur d'estimation.

L'estimation de la MSEP toutes survenances s'obtient par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{l=1}^{n-j} C_{l,j}} \right\}$$

Les $\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$ étant toutes influencées par les mêmes $\hat{f}_j$, il faut tenir compte d'un terme de covariance en plus de la somme des erreurs par année de survenance.

2.2.3.4. Intervalle de confiance

Nous disposons des estimations pour la moyenne de la variable R_i (notée $\hat{R}_i$), nous avons dorénavant accès à son écart-type $\sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}$. En faisant une hypothèse paramétrique sur la distribution des R_i , nous pouvons mettre en place des intervalles de confiance autour des $\hat{R}_i$.

Si la distribution des R_i est supposée Normale, d'espérance $\hat{R}_i$ et d'écart-type $\sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}$, l'intervalle de confiance à 95% sera de la forme :

$$\left[\hat{R}_i - 2\sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)} ; \hat{R}_i + 2\sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)} \right]$$

Cependant, cette hypothèse de normalité implique que la vraie distribution des provisions soit symétrique. De plus, elle peut conduire à des bornes de l'intervalle négatives. Une solution pour

contourner ses contraintes serait de supposer une distribution Log-Normale de paramètres μ_i et σ_i tel que la moyenne et la variance des deux distributions coïncident :

$$\begin{cases} \hat{R}_i = \exp(\mu_i + \sigma_i^2/2) \\ \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 = \ln\left(1 + \frac{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i^2}\right) \end{cases}$$

Finalement, l'intervalle de confiance à 95% pour une distribution Log-Normale des provisions est de la forme :

$$[\exp(\mu_i - 2\sigma_i); \exp(\mu_i + 2\sigma_i)] = \left[\hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 2\sigma_i\right); \hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 2\sigma_i\right) \right]$$

2.2.3.5. Validation des hypothèses (H2) et (H3)

L'application de tout modèle nécessite au préalable une étude sur le respect des hypothèses sous-jacentes. Concernant le modèle de Mack, l'hypothèse (H2) peut être validée par l'alignement sur une représentation graphique des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j}$.

Pour la validation de l'hypothèse (H3) portant sur la variance, Mack propose dans son article [18] d'étudier pour j fixé les résidus standardisés $(r_{i,j})_{i=1, \dots, n-j}$ définit par :

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j} f_j}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Ainsi, pour j fixé, si la représentation graphique des couples $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=1, \dots, n-j}$ montre un caractère non aléatoire, l'hypothèse est rejetée.

2.2.3.6. Validation de l'hypothèse (H1)

Dans le même article, Mack propose un test pour vérifier l'adéquation à l'hypothèse (H1) sur l'indépendance des années de survenance. Ce test consiste à étudier les facteurs de développement individuels et à détecter d'éventuelles tendances (à la hausse ou à la baisse) sur chaque diagonale du triangle.

En effet, une diagonale d'un triangle de liquidation correspond à une année calendaire et l'indépendance des années de survenances peut être remise en cause suite à des effets calendaires tels que des changements dans la gestion des sinistres ou dans l'inflation.

Nous disposons des facteurs de développement individuels $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et nous définissons les éléments d'une diagonale D_j par :

$$D_j = \{D_{j,1}, D_{j-1,2}, \dots, D_{2,j-1}, D_{1,j}\} \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

Pour chaque colonne j du triangle des facteurs de développement individuels, nous comparons ses éléments à la médiane des facteurs de développement individuels med_j de cette même colonne :

$$med_j = \text{médiane}\{f_{1,j}, \dots, f_{n-j,j}\} \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1$$

Nous créons alors un triangle qui sera constitué des symboles suivants :

- ✓ Un « - », si pour un j fixé, $f_{i,j} < med_j$,
- ✓ Un « + », si pour un j fixé, $f_{i,j} > med_j$,
- ✓ Un « * », si pour un j fixé, $f_{i,j} = med_j$. Ce cas est uniquement présent pour les colonnes composées d'un nombre impair de facteurs de développement individuels.

Pour chaque diagonale, nous comptons le nombre de « + » et de « - », respectivement notés L_j et S_j (pour « Larger » et « Smaller »). En théorie, L_j et S_j doivent être proche s'il n'y a pas d'effets calendaires, chaque facteur ayant une probabilité de 50% d'être plus grand ou plus petit que la médiane.

Nous définissons alors la variable aléatoire $Z_j = \text{Min}(L_j; S_j)$ qui doit donc théoriquement être proche de $\frac{L_j + S_j}{2}$. A cet effet, un test statistique est mis en place dans lequel il faut au préalable déterminer l'espérance et la variance de Z_j .

Dans le cas de non rejet de l'hypothèse de non effet calendaire, Z_j suit alors une loi binomiale de paramètres $n_j = L_j + S_j$ et $p=0,5$. Mack démontre que :

$$\begin{cases} E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j-1}{m_j} \frac{n_j}{2^{n_j}} \\ Var(Z_j) = \frac{n_j(n_j-1)}{4} - \binom{n_j-1}{m_j} \frac{n_j(n_j-1)}{2^{n_j}} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2 \end{cases} \text{ avec } m_j = \left\lfloor \frac{n_j-1}{2} \right\rfloor$$

Nous définissons ensuite la variable aléatoire $Z = \sum_{i=2}^{n-1} Z_i$, avec :

$$E(Z) = \sum_{i=2}^{n-1} E(Z_i) \text{ et } \text{Var}(Z) = \sum_{i=2}^{n-1} \text{Var}(Z_i)$$

La somme de variables aléatoires binomiales convergeant vers une variable aléatoire normale, nous supposons que Z suit une loi Normale. On peut alors construire un intervalle de confiance dans lequel l'hypothèse de non effet calendaire ne serait pas rejetée. Pour un niveau de confiance à 95%, on obtient :

$$E(Z) - 1,96\sqrt{\text{Var}(Z)} \leq Z \leq E(Z) + 1,96\sqrt{\text{Var}(Z)}$$

2.2.3.7. Critiques

Le modèle de Mack a l'avantage de mesurer l'erreur d'estimation de la provision obtenue au moyen de Chain Ladder par application d'une formule fermée. Néanmoins, il est basé sur la méthode de Chain Ladder, il rencontre de ce fait les mêmes inconvénients que ce dernier (hypothèse d'indépendance des années de survenance pas toujours vérifiée et sensibilité importante liée aux facteurs de développement).

De plus, le modèle de Mack ne permet pas d'obtenir une distribution complète de l'estimation de la provision sans avoir recours à des hypothèses de loi de probabilité (Normale, Log-Normale, ...).

Une solution pour pallier à ce manque est d'utiliser une méthode de ré-échantillonnage pour le provisionnement : la méthode du bootstrap.

2.2.4. Méthode du Bootstrap

Le bootstrap est une méthode de ré-échantillonnage utilisant des simulations Monte-Carlo, inventée par Bradley Efron en 1979. Le mot bootstrap vient de l'expression « to pull oneself up by one's bootstrap » qui illustre parfaitement le principe de cette méthode. En effet, elle consiste à créer « artificiellement » de nouveaux échantillons de données à partir d'un unique échantillon par tirage avec remise.

Cette technique a été adaptée pour des problématiques de provisionnement et permet in fine d'obtenir une distribution de la provision estimée. Il est ainsi possible de déduire des caractéristiques statistiques spécifiques comme la Value-at-Risk dont l'importance est grandissante notamment dans le cadre de la réglementation Solvabilité II.

England & Verrall ont proposé dans l'article [12] l'utilisation du modèle de Mack comme modèle sous-jacent à l'application du bootstrap qui présente l'avantage de s'appliquer aux triangles à incréments négatifs. Dans le cadre de ce mémoire, c'est ce modèle qui est utilisé.

2.2.4.1. Hypothèses du bootstrap

L'utilisation du bootstrap suppose que les éléments de l'échantillon de départ soient indépendants et identiquement distribués. Les variables $X_{i,j}$ ne sont en général pas identiquement distribuées, il faut donc appliquer le ré-échantillonnage sur les résidus (définis au paragraphe suivant) qui respectent mieux cette contrainte que les variables initiales.

L'erreur de prédiction résultant du bootstrap ne prend pas en compte le nombre de paramètre du modèle, ce qui introduit un biais lors de la comparaison des estimations d'erreur du bootstrap à celui d'un calcul analytique. Pour pallier à ce manque, il faut donc ajuster les résidus en y intégrant le nombre de paramètres de régression dans l'erreur de prédiction du bootstrap.

Les hypothèses du modèle sous-jacent doivent également être respectées. Dans le cas présent, il s'agit des hypothèses de Mack et donc de Chain Ladder.

2.2.4.2. Calcul des résidus

Les formules de calcul des paramètres $f_{i,j}$, $\hat{f}_j$, $\hat{C}_{i,n}$, $\hat{R}_i$ et $\hat{\sigma}_j$ définis précédemment restent valables pour le bootstrap.

Les résidus sont ceux de Mack et sont définis comme suit pour i et j tel que $1 \leq i + j \leq n - 1$:

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

$$r_{i,j}^{ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

- ✓ Le facteur d'ajustement $\sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$ permet de corriger le biais induit par la procédure bootstrap sur l'estimation de l'erreur de prédiction. Ce facteur vient de l'estimateur sans biais $\hat{\sigma}_j$ défini précédemment pour le modèle de Mack :

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_j^2 &= \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} (f_{i,j} - \hat{f}_j)^2 \\
&= \frac{n-j}{n-j-1} \times \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} (f_{i,j} - \hat{f}_j)^2 \\
&= \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}} \sqrt{C_{i,j}} (f_{i,j} - \hat{f}_j) \right)^2
\end{aligned}$$

- ✓ Ces résidus sont calculés à partir de facteurs de développement associés aux montants cumulés rendant possibles l'application aux triangles à incréments négatifs.
- ✓ Le modèle de Mack utilise un paramètre d'échelle non-constant matérialisé par $\hat{\sigma}_j$.

2.2.4.3. Etapes du bootstrap sur modèle de Mack

Etape 1 : Estimation des provisions $\hat{R}_i$ par Chain Ladder

Etape 2 : Calcul des résidus de Mack :

$$r_{i,j}^{ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}} (f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

Début de la phase simulatoire du bootstrap effectuée N fois

Etape 3 : Ré-échantillonnage des résidus et obtention des nouveaux résidus $\tilde{r}_{i,j}$

Etape 4 : Calcul des nouveaux facteurs de développement individuels pour $1 \leq i+j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_{i,j} = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} \tilde{r}_{i,j}$$

Etape 5 : Calcul des nouveaux facteurs de développement pour $1 \leq j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Etape 6 : Projection du triangle inférieur avec $\tilde{f}_j$ en y intégrant l'erreur de processus par un tirage aléatoire d'une loi de probabilité choisie. Par exemple, pour les lois Normale, Log-Normale et Gamma :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,j+1} &= N(C_{i,j} \tilde{f}_j ; C_{i,j} \hat{\sigma}_j^2) \\ \tilde{C}_{i,j+1} &= LN\left(\ln(C_{i,j} \tilde{f}_j) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j} \tilde{f}_j^2}\right) ; \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j} \tilde{f}_j^2}\right)\right) \\ \tilde{C}_{i,j+1} &= \Gamma\left(\frac{C_{i,j} \hat{f}_j^2}{\hat{\sigma}_j^2} ; \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j}\right)\end{aligned}$$

Etape 7 : Calcul des nouveaux montants des provisions par année de survenance et au global :

$$\tilde{R}_i = \tilde{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n \tilde{R}_i$$

A chaque itération, les résultats $\tilde{R}$ et $\tilde{R}_i$ sont stockés pour constituer la distribution des provisions à partir de laquelle il sera possible de calculer différentes grandeurs statistiques: moyenne, écart-type, skewness, kurtosis, quantiles, ...

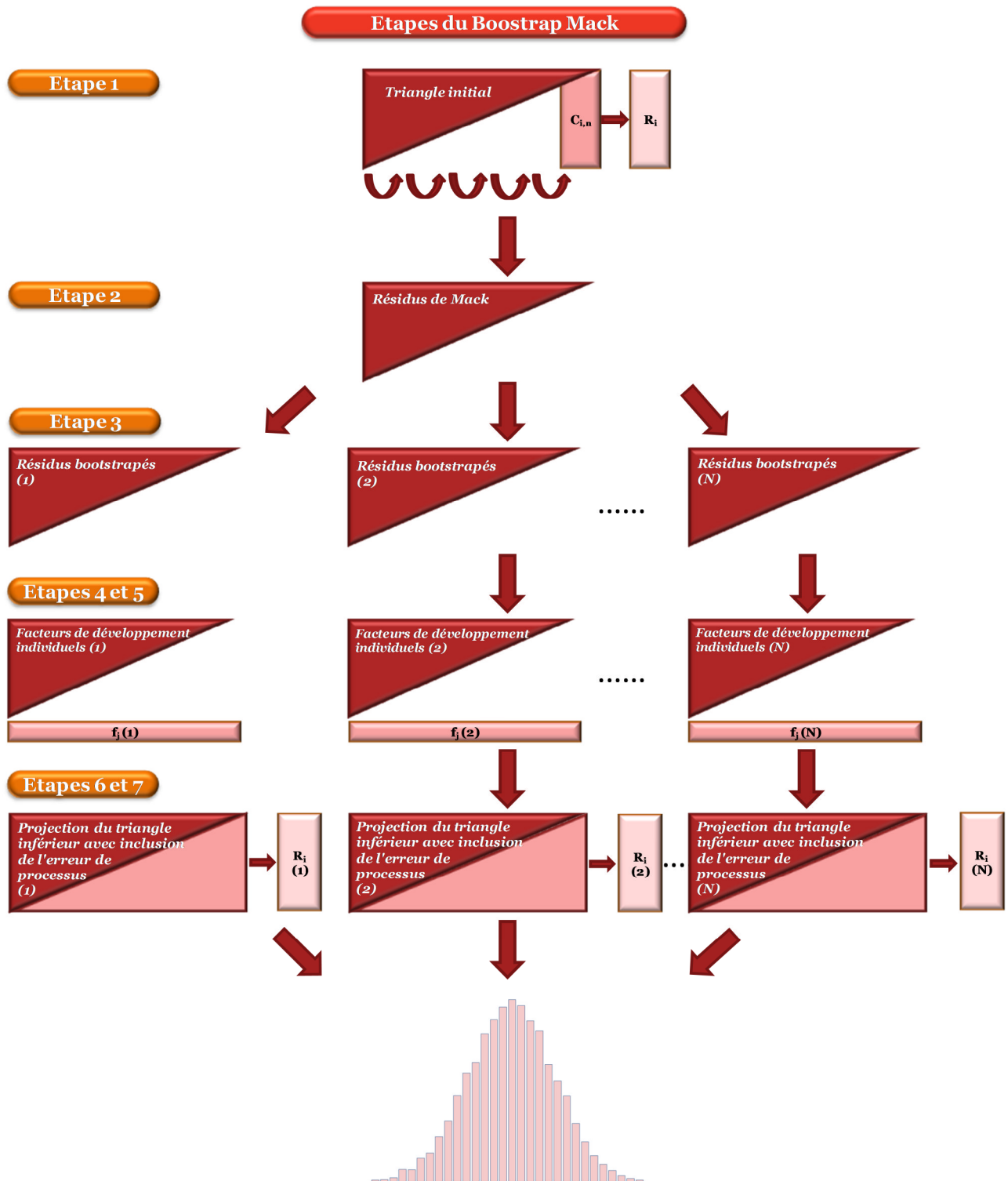


Figure 2.6 : Illustration des étapes du bootstrap à l'ultime

2.2.4.4. Critiques

La méthode du bootstrap est une méthode facile à implémenter qui donne une distribution simulée d'une variable. Elle s'avère donc très utile lorsque la distribution des données n'est pas connue ou que les propriétés statistiques sont difficiles à dériver analytiquement.

Néanmoins, le temps de calcul peut se révéler long. En effet, il faut un certain nombre de simulations pour obtenir des résultats robustes. Une optimisation de la programmation informatique est indispensable.

Enfin, le bootstrap utilise les méthodes de Chain Ladder pour estimer à chaque simulation les facteurs de développement. Cette méthode hérite également des contraintes liées à ce modèle.

2.2.5. Applications

Afin d'illustrer les méthodes de provisionnement « à l'ultime », nous allons les appliquer à nos données triangulées. Les résultats détaillés sont donnés pour la branche RC Automobile de la société A. Le détail des autres branches se trouvent en Annexe 4.

2.2.5.1. Validation des hypothèses de Mack

La première étape à effectuer avant d'appliquer un modèle est de vérifier le respect des hypothèses sous-jacentes (cf. 2.2.3.2).

2.2.5.1.1. Hypothèse sur l'absence d'effet calendaire (H_1)

Le calcul des $f_{i,j}$ puis des médianes med_j permettent de construire le triangle des symboles. A partir de ce triangle, qu'il faut lire par diagonale (année calendaire), on déduit les grandeurs qui vont permettre d'effectuer le test sur l'hypothèse d'indépendance des années calendaires.

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	*	-	*
1	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-	-	-	+
2	-	+	+	+	+	-	+	-	*	-	+	+	+	+	
3	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+			
4	+	-	*	+	-	-	*	-	-	-	*				
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+				
6	-	-	-	-	-	-	-	+	+						
7	-	-	+	-	+	+	-	+							
8	-	-	-	+	*	-	-								
9	-	-	+	-	-	+									
10	+	+	+	-	-										
11	-	+	-	-											
12	*	+	-												
13	+	+													
14	+														

j	L _j	S _j	Z _j	n _j	m _j	E(Z _j)	Var(Z _j)
1	2	0	0	2	1	0,50	0,25
2	0	3	0	3	1	0,75	0,19
3	4	0	0	4	2	1,25	0,44
4	2	3	2	5	2	1,56	0,37
5	3	3	3	6	3	2,06	0,62
6	4	2	2	6	3	2,06	0,62
7	4	4	4	8	4	2,91	0,80
8	3	6	3	9	4	3,27	0,74
9	4	6	4	10	5	3,77	0,99
10	5	4	4	9	4	3,27	0,74
11	6	6	6	12	6	4,65	1,17
12	6	4	4	10	5	3,77	0,99
13	4	10	4	14	7	5,53	1,35
14	9	4	4	13	6	5,03	1,10
Total				40		40,39	10,35

Indépendance des années calendaires	
Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[34 ; 47]
Test	Hypothèse non rejetée

Tableau 2.3 : Validation de l'hypothèse d'absence d'effet calendaire pour la RC Auto de la société A

Ainsi, on obtient $Z = 40 \in [34; 47]$ pour un niveau de confiance de 95%. Ce résultat permet de ne pas rejeter l'hypothèse d'indépendance des années calendaires dans 95% des cas.

Ci-dessous les résultats pour l'ensemble des risques étudiés :

Indépendance des années calendaires		
Société A	RC Automobile	Hypothèse non rejetée
Société A	Domage Automobile	Hypothèse non rejetée
Société A	Domage Aux Biens	Hypothèse non rejetée
Société B	RC Automobile	Hypothèse rejetée
Société B	Domage Automobile	Hypothèse non rejetée
Société B	Domage Aux Biens	Hypothèse non rejetée

Tableau 2.4 : Synthèse de la validation de l'hypothèse d'absence d'effet calendaire

Pour l'ensemble des risques étudiés, excepté le risque RC Automobile de l'assureur B, nous ne rejetons pas l'hypothèse d'indépendance des années calendaires dans 95% des cas. Nous validons de ce fait, l'une des trois hypothèses du modèle de Mack. Pour le risque RC Automobile de l'assureur B, l'hypothèse est rejetée. Il convient donc de s'interroger sur la source de l'effet calendaire (inflation, gestion des sinistres) et d'en tenir compte dans l'estimation de la provision et de sa volatilité (retraitement de coefficients, mise en as if, ...).

2.2.5.1.2. Hypothèse sur l'espérance (H2)

L'hypothèse sur l'espérance peut se vérifier par une représentation graphique des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Nous ne représentons ci-dessous que les « premiers » j :

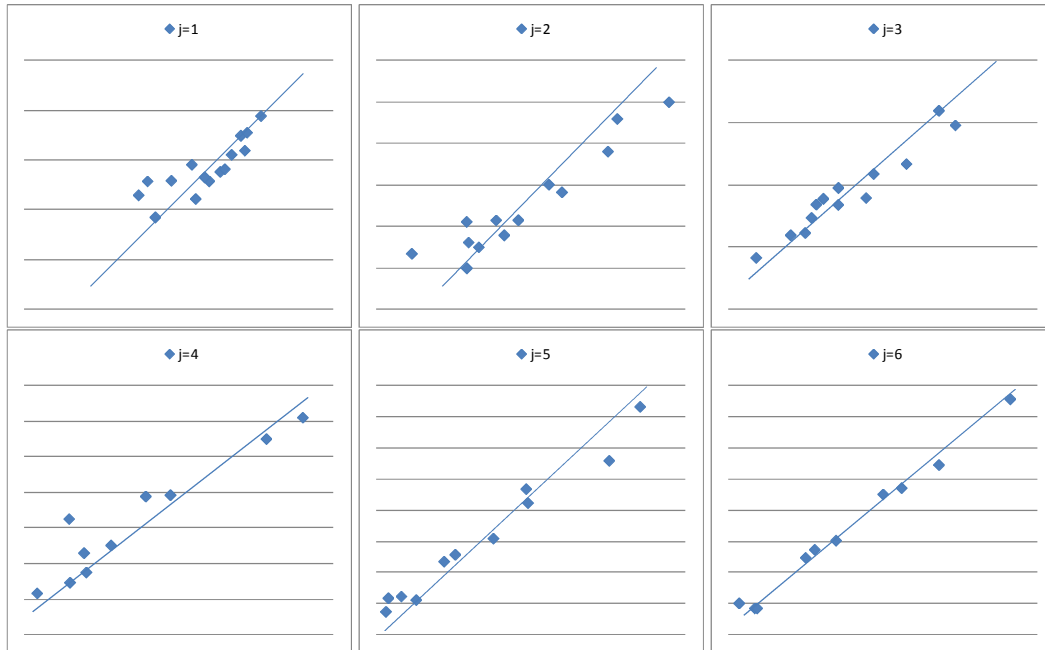
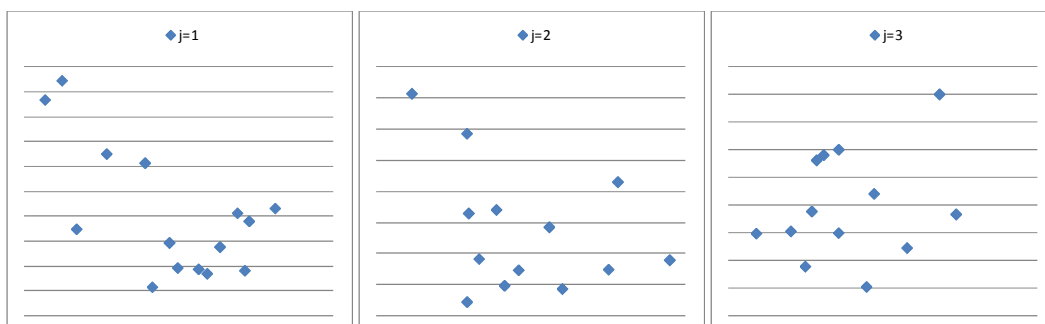


Figure 2.7 : Validation graphique de l'hypothèse de Mack sur l'espérance pour la RC Auto de la société A

Nous sommes loin des alignements parfaits présentés dans la littérature actuarielle. Néanmoins, nous pouvons dire que les points sont « sensiblement » alignés sur la droite. Il subsiste néanmoins quelques points non alignés notamment pour $j=1$ et $j=4$, qu'il faut garder à l'esprit pour toute analyse ou interprétation faites sur ces données. Il est important de rappeler que ces résultats concernent la branche RC Automobile réputée pour sa volatilité.

2.2.5.1.3. Hypothèse sur la variance (H3)

L'hypothèse sur la variance peut se vérifier par une représentation graphique des couples $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=1, \dots, n-j}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Nous ne représentons ci-dessous que les « premiers » j :



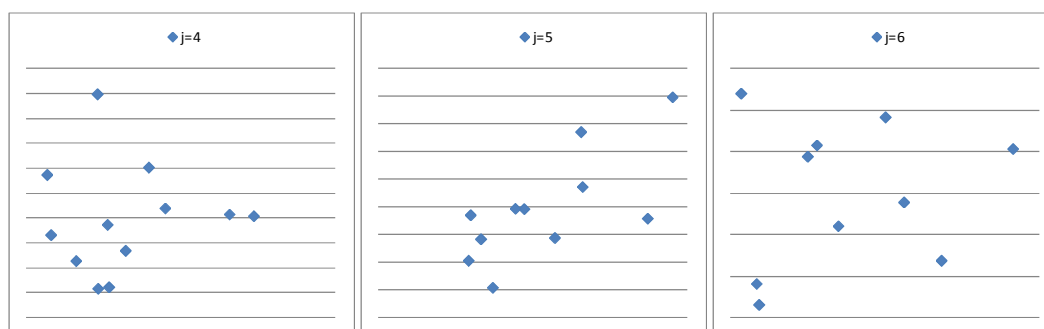


Figure 2.8 : Validation graphique de l'hypothèse de Mack sur la variance pour la RC Auto de la société A

Définir le caractère aléatoire ou non reste un exercice difficile et subjectif. Dans le cas présent, les différents graphiques semblent démontrer le caractère aléatoire des points pour les différents j .

2.2.5.2. Résultats du modèle de Mack

Le tableau ci-dessous donne les résultats du modèle de Mack ainsi que l'intervalle de confiance à 95% autour de la provision calculée par Chain Ladder, pour la branche RC Automobile de la société A :

Année de survenance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} / Provisions	Int. de Conf. Inférieur	Int. de Conf. Supérieur
2	0	0	1%	0	0
3	1	1	47%	0	3
4	55	101	181%	2	299
5	445	763	172%	22	2 333
6	974	956	98%	135	3 594
7	2 172	3 006	138%	161	10 069
8	3 149	3 554	113%	341	12 794
9	3 792	3 597	95%	554	13 657
10	5 498	4 005	73%	1 205	16 387
11	6 531	4 051	62%	1 773	17 371
12	8 443	4 151	49%	2 988	19 215
13	10 726	4 237	39%	4 658	21 365
14	15 290	4 588	30%	8 141	26 347
15	20 378	4 605	23%	12 721	31 059
16	39 531	5 469	14%	29 731	51 573
Total	116 988	18 312	16%	84 673	157 770

Tableau 2.5 : Résultats de Mack sur la RC Auto de la société A

Les trois survenances les plus récentes représentent environ 2/3 des provisions totales. Il reste donc une quantité non négligeable de provisions rattachée aux survenances plus anciennes. Ceci est une caractéristique propre aux branches à déroulement long. En effet, les sinistres vont mettre plusieurs années à être réglés.

Inversement, sur des branches courtes, la quasi-totalité des provisions appartient aux survenances récentes (100% sur la survenance la plus récente pour le risque Dommage Automobile et sur les deux dernières survenances pour le risque Dommage Aux Biens).

Les résultats du modèle de Mack pour l'ensemble des risques étudiés sont :

Société	Branche	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	Int. de Conf. Inférieur	Int. de Conf. Supérieur
A	RC Automobile	116 988	18 312	84 673	157 770
A	Dommage Automobile	15 459	2 872	9 714	21 204
A	Dommage Aux Biens	24 218	6 087	12 043	36 393
B	RC Automobile	152 937	35 933	93 648	236 695
B	Dommage Automobile	16 328	4 393	7 542	25 114
B	Dommage Aux Biens	31 251	6 236	18 780	43 722

Tableau 2.6 : Synthèse des résultats de Mack

L'intérêt du modèle de Mack réside dans l'obtention de la volatilité des provisions estimées. On peut ainsi créer des intervalles de confiance (cf. tableau ci-dessus), ou encore émettre une hypothèse paramétrique de loi de probabilité pour obtenir une fonction de répartition et une fonction de densité.

Nous avons sélectionné trois lois de probabilité à titre d'exemple (Normale, Log-Normale et Gamma), dont les fonctions de répartition et de densité sont représentées ci-dessous. L'utilisation d'une hypothèse paramétrique présente comme inconvénient l'incapacité d'effectuer des tests d'adéquation de loi du fait de l'absence d'une distribution empirique. Nous ne pouvons privilégier une loi plutôt qu'une autre que par un jugement d'expert ou en nous appuyant sur l'analyse des quantiles.

Le tableau des quantiles ci-dessous montre qu'il réside un écart non significatif entre les trois lois sur les quantiles élevés. Ainsi, on peut par prudence préférer la loi Log-Normale qui présente le quantile 99,5% le plus élevé.

Le rapport entre le quantile 99,9% et 99,5% donne une idée de la stabilité de la queue de distribution. Dans le cas présent, c'est la loi Normale qui présente la meilleure stabilité en queue de distribution, cependant les résultats sur les autres lois, bien que plus élevés sont très proches.

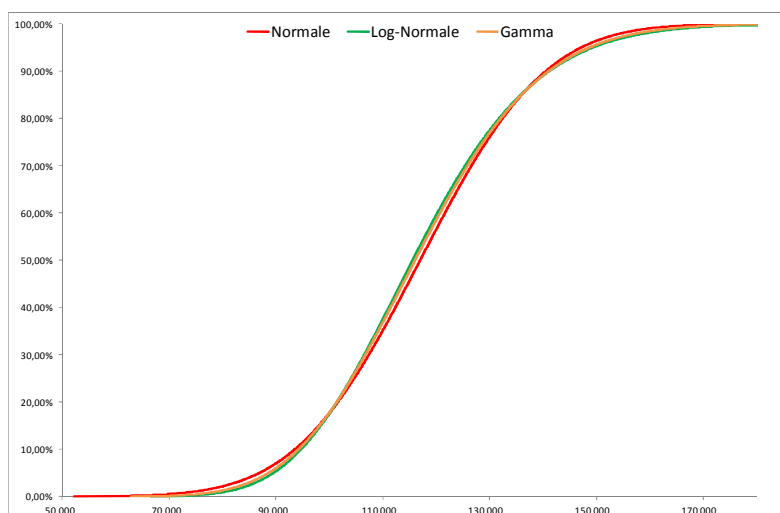


Figure 2.9 : Fonction de répartition des provisions par Mack pour la RC Auto de la société A

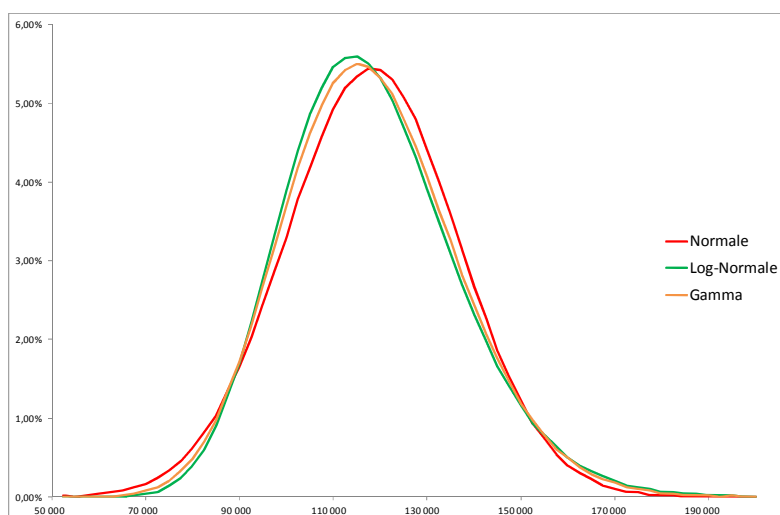


Figure 2.10 : Fonction de densité des provisions par Mack pour la RC Auto de la société A

Quantile	Normale	Log Normale	Gamma
5%	86 866	89 483	88 582
10%	93 519	94 687	94 218
25%	104 636	104 066	104 171
50%	116 988	115 580	116 034
75%	129 339	128 369	128 764
95%	147 109	149 289	148 649
99%	159 589	165 988	163 750
99,5%	164 158	172 558	169 517
99,9%	173 578	186 936	181 819
99,9% / 99,5%	1,06	1,08	1,07

Tableau 2.7 : Quantiles des provisions pour la RC Auto de la société A

2.2.5.3. Résultats du bootstrap à l'ultime

La procédure bootstrap a été au préalable calibrée afin de déterminer le nombre de simulations nécessaires et suffisantes pour obtenir des résultats précis avec un temps de calcul raisonnable. De plus, un test de sensibilité sur le choix de la loi de probabilité utilisée pour l'intégration de l'erreur de processus est réalisé. Ces calibrages sont formalisés en Annexe 2.1.

Le tableau ci-dessous donne l'erreur de prédiction du bootstrap comparé à celui du modèle de Mack, pour la branche RC Automobile de la société A. Comme évoqué précédemment, le bootstrap s'effectue avec une loi Log-Normale pour l'erreur de processus et la distribution empirique est retenue :

Année de survenance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime
2	0	0	0
3	1	1	1
4	55	101	99
5	445	763	768
6	974	956	941
7	2 172	3 006	2 978
8	3 149	3 554	3 555
9	3 792	3 597	3 598
10	5 498	4 005	4 032
11	6 531	4 051	4 043
12	8 443	4 151	4 147
13	10 726	4 237	4 220
14	15 290	4 588	4 609
15	20 378	4 605	4 576
16	39 531	5 469	5 499
Total	116 988	18 312	18 354

Tableau 2.8 : Résultats du bootstrap pour la RC Auto de la société A

Les résultats des deux méthodes sont très proches aussi bien au global que par année de survenance.

2.2.5.4. Test de sensibilité sur l'hypothèse paramétrique d'une loi

Malgré la présence de la distribution empirique complète des provisions, il peut être utile de chercher à ajuster cette distribution à une loi théorique. En effet, il est plus simple de stocker les paramètres d'une loi (au nombre de deux le plus souvent) plutôt que de stocker toutes les observations. De plus, l'utilisation de certains outils actuariels (modélisation, analyse financière dynamique, ...) proposés sur le marché, exige que les « inputs » soient une loi de probabilité et ses paramètres.

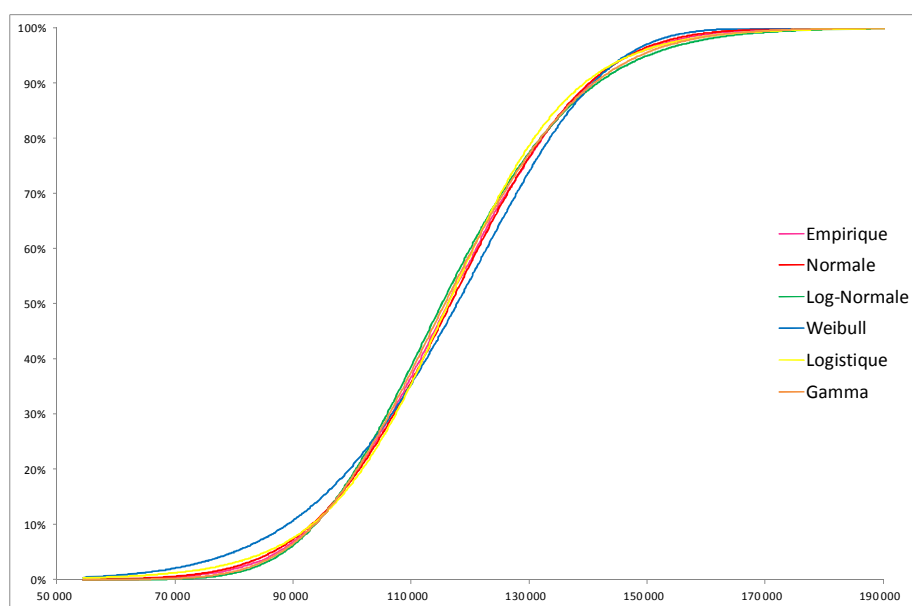


Figure 2.11 : Fonction de répartition des provisions par Bootstrap pour la RC Auto de la société A

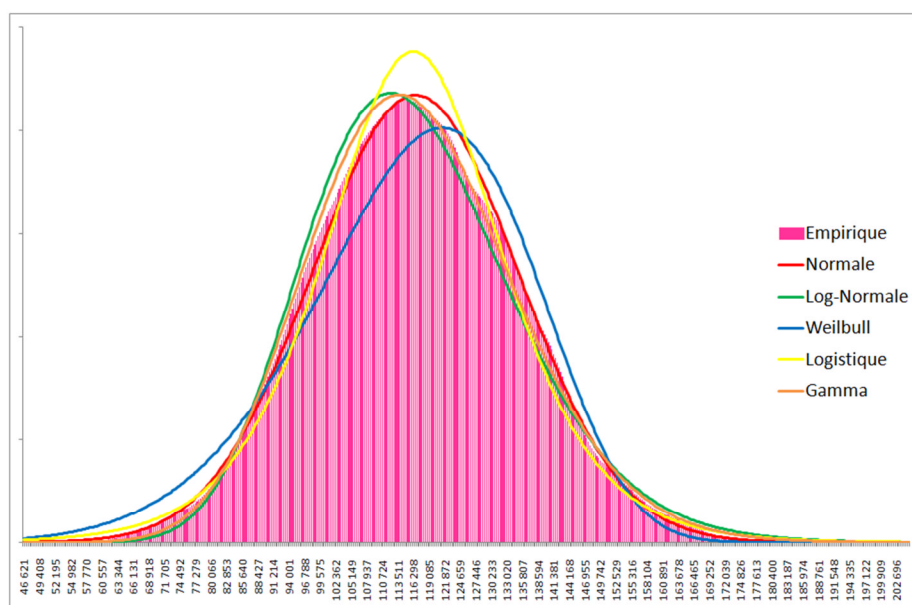


Figure 2.12 : Fonction de densité des provisions par Bootstrap pour la RC Auto de la société A

Le tableau ci-dessous donne la moyenne des provisions, leur écart-type et leur VaR 99,5% pour différentes lois de probabilités ainsi que pour la distribution empirique :

Distribution	Moyenne	Ecart-type	VaR 99,5%	VaR 99,9%	Log-vraisemblance	
Empirique	116 680	18 354	165 668	179 937		
Normale	116 680	18 353	163 955	173 396	-	112 365
Lognormale	116 707	18 869	174 257	189 268	-	112 448
Weibull	116 111	20 230	159 341	165 745	-	112 711
Logistique	116 281	19 029	171 813	188 740	-	112 462
Gamma	116 680	18 531	169 914	182 407	-	112 412

Tableau 2.9 : Comparaison des lois de probabilités sur les provisions pour la RC Auto de la société A

En plus des tests graphiques et des résultats numériques, le test de Log-vraisemblance permet de conforter le choix de la loi la plus adéquate. Aussi bien dans le graphique de la densité que dans le test de la log-vraisemblance, il semblerait que la loi Normale soit la plus proche de la distribution empirique. La loi Log-Normale souvent utilisée, donne l'avantage d'être plus prudente. La loi Weibull ne présente pas un bon ajustement avec la distribution empirique comme l'atteste sa fonction de densité.

Pour la suite des applications, n'ayant pas de contraintes de stockage, nous retenons la distribution empirique comme distribution de référence.

2.2.5.5. Synthèse des résultats du provisionnement à l'ultime

Les résultats du Bootstrap pour l'ensemble des risques étudiés sont indiqués ci-dessous :

Société	Branche	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime
A	RC Automobile	116 988	18 312	18 354
A	Domage Automobile	15 459	2 872	2 875
A	Domage Aux Biens	24 218	6 087	6 077
B	RC Automobile	152 937	35 933	36 198
B	Domage Automobile	16 328	4 393	4 344
B	Domage Aux Biens	31 251	6 236	6 209

Tableau 2.10 : Synthèse des résultats du bootstrap et de Mack

La méthode du bootstrap offre davantage de possibilités d'analyse, mais exige un minimum de temps de calcul. La méthode de Mack est plus pratique à utiliser puisqu'elle donne la volatilité de l'estimation des provisions par une formule fermée.

Les résultats du bootstrap sont proches de ceux de Mack pour l'ensemble des risques étudiés. Le choix de la méthode sera dicté par l'utilisation des résultats et la profondeur d'analyse que l'on souhaite effectuer. Par exemple, si le nombre de branches étudiées est faible, le temps de calcul du bootstrap ne sera pas pénalisant, alors que pour un assureur qui possède plusieurs branches et qui souhaite obtenir l'erreur de prédiction de ses provisions fréquemment, la procédure bootstrap peut devenir lourde.

Le calcul du Best Estimate des provisions n'est que la première étape dans la détermination du SCR comme l'a montré la figure 1.9. L'étape suivante consiste alors à déterminer l'exigence en capital par module de risque. Le module qui est traité dans ce mémoire est celui du risque de réserve dont l'approche consiste à estimer la volatilité de ces provisions Best Estimate dans une autre échelle de mesure : l'horizon à un an.

2.3. Méthodes de mesure du risque de provisionnement « à horizon un an »

Les méthodes actuarielles de provisionnement ont toujours été le fer de lance de l'actuariat Non-Vie. Il existe de multiples méthodes, des modèles les plus simples, jusqu'aux modèles les plus complexes pour estimer la Provision pour Sinistres A Payer à l'ultime.

Cependant, avec l'avènement de la réforme Solvabilité II, un nouvel horizon temporel est étudié dans le provisionnement Non-Vie : l'horizon à un an. En effet, l'ensemble des risques doit être mesuré selon cet horizon pour déterminer le SCR.

C'est en 2007, suite au résultat du QIS3, qu'une étude de l'AISAM-ACME (association des assureurs mutuelles européens) sur le risque de provisionnement et la marge de risque des branches longues Non-Vie a été réalisée. La question centrale de cette étude réside dans cet horizon pour le risque de réserves. Les calibrations du QIS3 basées sur des méthodes de provisionnement à l'ultime avait démontré le caractère exagéré de la prudence sur ce risque.

Par conséquent, les méthodes de provisionnement ont alors été adaptées pour mesurer la volatilité des estimations de provisions à horizon un an. Cette vision à court terme est également mieux adaptée à la prise de décision du top management (qui est l'un des objectifs de la réforme) et plus intéressante pour un investisseur (avant de se projeter à long terme, il est important de connaître la situation économique à court terme).

2.3.1. La vision à horizon un an du provisionnement, le CDR

Le risque de réserve à un an est le risque de sous-provisionnement des sinistres passés, soit le risque d'enregistrer des mali sur antérieurs pour un horizon d'un an. Il correspond donc à la ré-estimation Best Estimate de la charge ultime de la compagnie entre deux années consécutives.

Pour estimer ce risque, la notion de Claims Development Result (CDR) est introduite. Le CDR est la différence entre deux estimations successives du montant de la charge ultime.

Nous adopterons les notations suivantes :

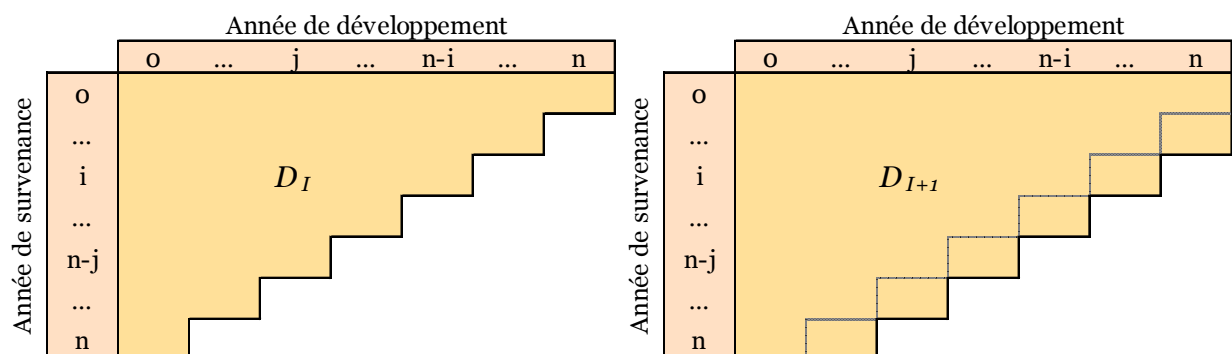


Figure 2.13 : Triangles de liquidation au temps I et I+1

- ✓ L'information disponible au temps I : $D_I = \{C_{i,j}; i+j \leq n \text{ et } i \leq n\}$
- ✓ L'information disponible au temps I+1 : $D_{I+1} = \{C_{i,j}; i+j \leq n+1 \text{ et } i \leq n\}$
- ✓ Les provisions estimées au temps I : $R_i^I = C_{i,n} - C_{i,n-i}$ pour $1 \leq i \leq n$
- ✓ Les provisions estimées au temps I+1 : $R_i^{I+1} = C_{i,n} - C_{i,n-i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$
- ✓ Les paiements incrémentaux réalisés entre I et I+1 : $X_{i,n-i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$

On peut alors définir le CDR comme la différence des provisions estimées aux temps I et I+1 ajustée de l'information nouvelle portée à notre connaissance, à savoir les paiements effectués entre I et I+1, autrement dit, les $X_{i,n-i+1}$. C'est la nouvelle diagonale du triangle de droite ci-dessus.

$$CDR_i(I+1) = R_i^I - R_i^{I+1} - X_{i,n-i+1}$$

Il s'agit de la formule du risque de provisionnement explicitée en Annexe 1.3.1. Pour mesurer la volatilité de ce risque à horizon un an, le modèle de Mack a été adapté : il s'agit du modèle de Merz et Wüthrich.

2.3.2. Le modèle de Merz & Wüthrich

Merz et Wüthrich ont adapté le modèle de Mack afin de mesurer la volatilité à horizon un an de l'estimation des provisions par une formule fermée. Ces travaux ont été exposés dans leurs articles [21] et [22].

2.3.2.1. Hypothèses sous-jacentes au modèle

- ✓ On se place dans l'intervalle de temps (I ; I+1].
- ✓ Les années de survénances sont indépendantes entre elles :

$$\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\} \text{ et } \{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\} \text{ sont indépendants pour } i \neq k$$

- ✓ Les $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ sont des chaînes de Markov et il existe $f_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ pour $j = 0, \dots, n-1$ tel que pour tout $i = 0, \dots, n$:

$$E(C_{i,j+1} | C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

$$Var(C_{i,j+1} | C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

Cette hypothèse est plus forte que celle de Mack qui stipulait que la valeur de $C_{i,j+1}$ était seulement déterminé par la valeur la plus récente $C_{i,j}$. Dans le cas présent, $C_{i,j+1}$ dépend des $(C_{i,k})_{k < j}$.

2.3.2.2. CDR (Claims Development Result)

En théorie, l'estimation faite de la charge ultime au temps I serait égale à l'estimation de la charge ultime au temps $I+1$. En pratique, au temps $I+1$ nous disposons de nouvelles informations qui vont demander certains ajustements et par conséquent, notre estimation de la charge ultime au temps $I+1$ sera modifiée. C'est la raison pour laquelle le risque de réserve à horizon un an s'appuie sur l'analyse du CDR.

Le CDR est sujet à deux facteurs d'incertitudes :

- ✓ Un facteur de variance lié à l'évaluation des paiements futurs (erreur de processus).
- ✓ Un facteur d'estimation lié aux paramètres estimés (erreur d'estimation).

Ce CDR est considéré à deux moments :

- ✓ La vision prospective.
 - o Au temps I , une estimation de la charge ultime est réalisée. Le CDR pour la période $(I ; I+1]$ est alors considéré comme nul. Il subsiste néanmoins une incertitude sur l'exactitude de cette affirmation. De combien la réalisation du CDR va-t-elle dévier par rapport à 0 ?
- ✓ La vision rétrospective.
 - o Au temps $I+1$, une fois les observations du développement des sinistres connus, on obtient la réalisation du CDR. On peut alors analyser si cette observation est dans un intervalle raisonnable autour de 0.

2.3.2.3. Calcul de l'erreur de prédiction de Merz et Wüthrich

Les formules de calcul des paramètres $f_{i,j}$, $\hat{f}_j$, $\hat{C}_{i,n}$, $\hat{R}_i$ et $\hat{\sigma}_j$ définis précédemment restent valables pour le modèle de Merz et Wüthrich.

2.3.2.3.1. Le CDR réel

Le CDR réel est inconnu puisque les « vrais » facteurs de Chain Ladder servant à atteindre la charge ultime le sont également. Pour une année de survenance i , il est défini par :

$$CDR_i(I+1) = E(R_i^I | D_I) - (X_{i,n-i+1} + E(R_i^{I+1} | D_{I+1})) = E(C_{i,n}^I | D_I) - E(C_{i,n}^{I+1} | D_{I+1})$$

Le CDR réel toutes survenances agrégées est donné par la formule suivante :

$$CDR = \sum_{i=1}^n CDR_i(I+1)$$

2.3.2.3.2. Le CDR observable

Le CDR observable est l'estimateur du CDR réel. Pour une année de survenance i , il est défini par :

$$\widehat{CDR}_i(I+1) = \hat{R}_i^{D_I} - (X_{i,n-i+1} + \hat{R}_i^{I+1}) = \hat{C}_{i,n}^I - \hat{C}_{i,n}^{I+1}$$

Le CDR observable toutes survenances agrégées est donné par la formule suivante :

$$\widehat{CDR} = \sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)$$

2.3.2.3.3. Erreur de provisionnement à horizon un an

Pour estimer le risque à horizon un an, l'objectif est de mesurer dans un premier temps la distance entre le CDR réel et son estimateur, le CDR observable :

$$MSEP_{CDR_i(I+1)|D_I}(\widehat{CDR}_i(I+1)) = E \left[\left(CDR_i(I+1) - \widehat{CDR}_i(I+1) \right)^2 \middle| D_I \right]$$

Il s'agit également de mesurer l'erreur de prédiction entre le CDR observable et 0. C'est cette grandeur qui est concernée par Solvabilité II puisqu'elle mesure la déviation du CDR autour du scénario central qui correspond à un CDR nul. La marge de solvabilité est censée faire face à une déviation de cet ordre-là :

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = E \left[\left(\widehat{CDR}_i(I+1) - 0 \right)^2 \middle| D_I \right]$$

Dans leur article, Merz et Wüthrich définissent les variables suivantes pour simplifier les formules des MSEP par survénance (cf. 2.3.2.4 pour le détail sur la simplification) :

$$\begin{aligned}
 S_j^I &= \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \text{ et } S_j^{I+1} = \sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j} \\
 \hat{\Delta}_{i,n}^I &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{S_{n-i}^I} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \\
 \hat{\phi}_{i,n}^I &= \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \\
 \hat{\Psi}_i^I &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{C_{i,n-i}} \\
 \hat{\Gamma}_{i,n}^I &= \hat{\phi}_{i,n}^I + \hat{\Psi}_i^I
 \end{aligned}$$

- ✓ Les erreurs de prédiction entre le CDR réel et le CDR observable pour une année de survénance i est donnée par :

$$MSEP_{CDR_i(I+1)|D_I}(\widehat{CDR}_i(I+1)) = (\hat{C}_{i,n}^I)^2 (\hat{\phi}_{i,n}^I + \hat{\Delta}_{i,n}^I)$$

- ✓ Les erreurs de prédiction pour chaque année de survénance i , entre le CDR observable et o s'écrivent en fonction des erreurs de prédiction entre le CDR réel et observable (définis ci-dessus) :

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = MSEP_{CDR_i(I+1)|D_I}(\widehat{CDR}_i(I+1)) + Var(CDR_i(I+1)|D_I)$$

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = (\hat{C}_{i,n}^I)^2 (\hat{\phi}_{i,n}^I + \hat{\Delta}_{i,n}^I + \hat{\Psi}_i^I)$$

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = (\hat{C}_{i,n}^I)^2 (\hat{\Gamma}_{i,n}^I + \hat{\Delta}_{i,n}^I)$$

- ✓ Les erreurs de prédiction toutes années de survénance confondues tiennent compte d'un terme de corrélation. Ils s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}
 \widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n CDR_i(I+1)|D_I} &\left(\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(I+1)|D_I}(\widehat{CDR}_i(I+1)) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^I \hat{C}_{k,n}^I (\hat{\phi}_{i,n}^I + \hat{\Delta}_{i,n}^I)
 \end{aligned}$$

$$\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^I \hat{C}_{k,n}^I (\hat{\Xi}_{i,n}^I + \hat{\Lambda}_{i,n}^I)$$

Avec,

$$\hat{\Lambda}_{i,n}^I = \frac{C_{i,n-i}}{S_{n-i}^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{S_{n-i}^I} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I}$$

$$\hat{\Xi}_{i,n}^I = \hat{\phi}_{i,n}^I + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{S_{n-i}^{I+1}}$$

Pour la mesure du risque de réserve à horizon un an, c'est l'erreur de prédiction entre le CDR observable et o qui est utilisée ($\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)$).

2.3.2.4. Approximation des formules de Merz et Wüthrich

Les formules de calcul proposées par Merz et Wüthrich dans [21] donnent en réalité une version approchée de la MSEP. En effet, l'hypothèse suivante est définie :

$$\prod_{j=1}^n (1+a_j) - 1 \approx \sum_{j=1}^n a_j \text{ avec } 0 \leq a_j \ll 1$$

En effet,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (1+a_j) &= 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_j \\ i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, n\}}} a_{i_1} \times \dots \times a_{i_j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_j \\ i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, n\}}} a_{i_1} \times \dots \times a_{i_j} \end{aligned}$$

Par exemple, avec cette approximation, l'expression de $\hat{\phi}_{i,n}^I$ se simplifie avec

$$a_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \right)^2 \text{ comme suit :}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{i,n}^I &= \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{C_{i,n-i}}\right) \left[\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\right) - 1 \right] \\ &\approx \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{C_{i,n-i}}\right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2\end{aligned}$$

Sachant que $\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} < 1$, cette approximation implique donc :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 &<< 1 \\ \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} &<< 1\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\hat{\phi}_{i,n}^I \approx \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2$$

Cette approximation est également utilisée pour les autres variables explicitées dans la partie précédente (cf. 2.3.2.3.3).

Il paraît donc important de vérifier sur les données utilisées la réalité de l'hypothèse $\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} << 1$.

2.3.2.5. Comparaison avec Mack

La formulation de la MSEP pour une année de survenance i , du modèle de Merz et Wüthrich s'écrit comme suit :

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(l+1)|D_I}(0) = (\hat{C}_{i,n}^I)^2 \left(\underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{C_{i,n-i}}}_{A_{MW}} + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{S_{n-i}^I} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I}}_{B_{MW}} \right)$$

- ✓ Le premier terme (A_{MV}) représente l'erreur de processus (ou Variance process). La formule de Merz et Wüthrich ne prend en compte qu'une seule diagonale et non toutes les diagonales comme dans Mack. C'est la différence entre la vision à horizon un an et la vision ultime.
- ✓ Les deux autres termes (B_{MV}) représentent l'erreur d'estimation. Le premier terme correspond à la première diagonale simulée alors que les autres diagonales sont représentées par le second terme. Ce dernier est pondéré par le rapport entre la dernière diagonale connue et le reste de l'année de développement considérée.

Nous la comparons à la formulation de la MSEP de Mack :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = (\hat{C}_{i,n})^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \left(\underbrace{\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{i,j}}}_{A_{Mack}} + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I}}_{B_{Mack}} \right)$$

- ✓ $A_{MW} \leq A_{Mack}$ puisque A_{MW} correspond au premier terme de la somme A_{Mack} .
- ✓ $B_{MW} \leq B_{Mack}$ puisque $\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} < 1$, le second terme de B_{MW} est négligeable et B_{MW} devient alors le premier terme de la somme de B_{Mack} .

Finalement, $MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \leq \widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$ pour toute survénance i . De façon analogue, on peut montrer cette inégalité sur les MSEP toutes survénances confondues de Mack ($\widehat{MSEP}(\hat{R})$) et de Merz et Wüthrich ($\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)$) :

$$\begin{aligned} \widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) &= \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,n} \underbrace{\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{f}_{n-i}^I)^2}{S_{n-i}^I} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{I+1}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right)}_{B_{MW}} \end{aligned}$$

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,n} \underbrace{\sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{S_j^I}}_{B_{Mack}}$$

- ✓ $\sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \leq \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$ puisque $MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \leq \widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$.
- ✓ $B_{MW} \leq B_{Mack}$ démontrée précédemment.

Donc, $\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \leq \widehat{MSEP}(\hat{R})$ démontrant ainsi que la formule approchée de Merz et Wüthrich implique comme hypothèse implicite que la volatilité à horizon un an soit inférieure à la volatilité à l'ultime (par survenance et au global). Pour rappel, ce sujet était l'élément central des discussions sur la calibration du risque de réserve lors de l'étude AISAM-ACME en 2007.

2.3.2.6. Détermination du SCR

Une fois l'écart quadratique moyen de prédiction de Merz et Wüthrich obtenu ($\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)$), nous l'utilisons pour déterminer la volatilité du risque de provisionnement à horizon un an (σ) comme suit :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)}}{PCO}$$

- ✓ PCO : Best Estimate des provisions pour sinistres à payer.

Nous déduisons alors le SCR par la formule suivante :

$$SCR_{res} = \rho(\sigma) * V$$

Avec $\rho(\sigma)$ une fonction de σ qui permet d'obtenir l'écart entre le quantile 99,5% du risque et son espérance. Cette fonction s'écrit comme suit :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(N_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)}\right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1, \text{ dans l'hypothèse d'une distribution Log-Normale du risque}$$

sous-jacent. $N_{99,5\%}$ est le quantile 99,5% d'une loi Normale centrée réduite. La démonstration de l'écriture de $\rho(\sigma)$ est donnée en Annexe 1.3.5.

Cette fonction peut être approximé par $\rho(\sigma) \approx 3\sigma$. La formule de calcul du SCR devient alors :

$$SCR_{res} = 3\sigma V$$

2.3.2.7. Critiques

Le modèle de Merz et Wüthrich a l'avantage de mesurer le risque de provisionnement à horizon un an par application d'une formule fermée. L'implémentation dans un tableur Excel est aisément réalisable et permet une facilité d'application du modèle sur les triangles de liquidation des sinistres.

Néanmoins, le modèle de Merz et Wüthrich souffre des mêmes inconvénients que sa version à l'ultime, à savoir des hypothèses fortes pas toujours respectées par les données réelles (indépendance des années de survenance et sensibilité importante liée aux facteurs de développement).

La formule proposée par Merz et Wüthrich se base sur une approximation qui implique comme hypothèse implicite que la volatilité à horizon un an soit inférieure à la volatilité à l'ultime. Intuitivement cette remarque semble correcte, mais il peut exister des cas particuliers où elle ne serait pas vérifiée.

Enfin, le modèle de Merz et Wüthrich ne permet pas d'obtenir une distribution de l'estimation du CDR.

Une autre méthode qui pourrait combler certaines limites du modèle de Merz et Wüthrich serait d'utiliser une méthode de ré-échantillonnage : la méthode du bootstrap adaptée à un an.

2.3.3. La méthode du re-reserving : le bootstrap

De manière analogue à l'adaptation à horizon un an du modèle de Mack par Merz et Wüthrich, il existe une adaptation de la méthode du bootstrap pour mesurer la volatilité des réserves à horizon un an. Cette méthode est couramment appelée méthode de re-reserving ou de re-provisionnement.

Ce terme illustre le principe du Claims Development Result qui consiste pour rappel à estimer la charge ultime au temps (I), puis à effectuer une seconde estimation de cette charge ultime dans un second temps (I+1) en tenant compte de la nouvelle information sur la période (I ; I+1]. Ce principe d'estimations successives des charges ultimes a été repris dans le nom de cette méthode.

Le principe du bootstrap adapté pour la mesure du risque de réserve à horizon un an se résume ainsi pour $1 \leq i \leq n$:

- ✓ Estimation des provisions au temps I par la méthode de Chain Ladder : R_i^I .
- ✓ Simulation d'une nouvelle diagonale correspondant à la nouvelle information : $X_{i,n-i+1}$.
- ✓ Ré-estimation des provisions au temps I+1 par la méthode de Chain Ladder : R_i^{I+1} .
- ✓ Déduction du CDR : $CDR_i(I+1) = R_i^I - R_i^{I+1} - X_{i,n-i+1}$.

L'intérêt principal de cette méthode réside dans l'obtention de la distribution empirique des CDR rendant possible le calcul de diverses statistiques sur cette variable, notamment la VaR 99,5% dans le cadre de la détermination du SCR du risque de réserve Solvabilité II. Il est important de noter que

l'utilisation de cette méthode place l'assureur en dehors du périmètre de la Formule Standard de Solvabilité II et le conduit donc à évaluer son risque de réserve sous le prisme Modèle interne.

2.3.3.1. Calcul des résidus

Les formules de calcul des paramètres $f_{i,j}$, $\hat{f}_j$, $\hat{C}_{i,n}$, $\hat{R}_i$ et $\hat{\sigma}_j$ définis précédemment restent valables pour la méthode du re-reserving. Pour rappel, les résidus sont ceux de Mack et sont définis comme suit pour i et j tel que $0 \leq i + j \leq n - 1$:

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

$$r_{i,j}^{ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

2.3.3.2. Etapes du bootstrap à horizon un an

Etape 1 : Estimation des provisions $\hat{R}_i^I$ au temps I par Chain Ladder

Etape 2 : Calcul des résidus de Mack :

$$r_{i,j}^{ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

Début de la phase simulatoire du bootstrap effectuée N fois

Etape 3 : Ré-échantillonnage des résidus et obtention des nouveaux résidus $\tilde{r}_{i,j}$

Etape 4 : Calcul des nouveaux facteurs de développement individuels pour $0 \leq i + j \leq n - 1$:

$$\tilde{f}_{i,j}^I = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} \tilde{r}_{i,j}$$

Etape 5 : Calcul des nouveaux facteurs de développement au temps I, pour $0 \leq j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}^I}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Etape 6 : Simulation pour $1 \leq i \leq n$, de la nouvelle diagonale $\tilde{C}_{i,n-i+1}$ avec $\tilde{f}_j^I$ en y intégrant l'erreur de processus par un tirage aléatoire d'une loi de probabilité choisie. Par exemple, pour les lois Normale, Log-Normale et Gamma :

$$\tilde{C}_{i,n-i+1} = N\left(C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^I ; C_{i,n-i} \hat{\sigma}_{n-i}^2\right)$$

$$\tilde{C}_{i,j+1} = LN\left(\ln\left(C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^I\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2}{C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^I}\right) ; \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2}{C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^I}\right)\right)$$

$$\tilde{C}_{i,j+1} = \Gamma\left(\frac{C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^I}{\hat{\sigma}_{n-i}^2} ; \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2}{\tilde{f}_j^I}\right)$$

D'où, les paiements incrémentaux de la période (I ; I+1] : $X_{i,n-i+1} = \tilde{C}_{i,n-i+1} - C_{i,n-i}$.

Etape 7 : Calcul des nouveaux facteurs de développement au temps I+1, pour $0 \leq j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} f_{i,j} + C_{n-j,j} \tilde{f}_{n-j,j}^{I+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$$

Etape 8 : Ré-estimation des provisions au temps I+1 par année de survénance et au global, pour $2 \leq i \leq n$:

$$\tilde{C}_{i,n} = \tilde{C}_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \tilde{f}_j^{I+1}$$

$$R_i^{I+1} = \tilde{C}_{i,n} - \tilde{C}_{i,n-i+1}$$

$$R^{I+1} = \sum_{i=1}^n R_i^{I+1}$$

Etape 9 : Calcul du CDR :

$$CDR(I+1) = R^I - R^{I+1} - X^{(I;I+1]}$$

A chaque itération, le $CDR(I+1)$ est stocké pour constituer la distribution des CDR à partir de laquelle il sera possible de calculer différentes grandeurs statistiques : moyenne, écart-type, skewness, kurtosis, quantiles, ...

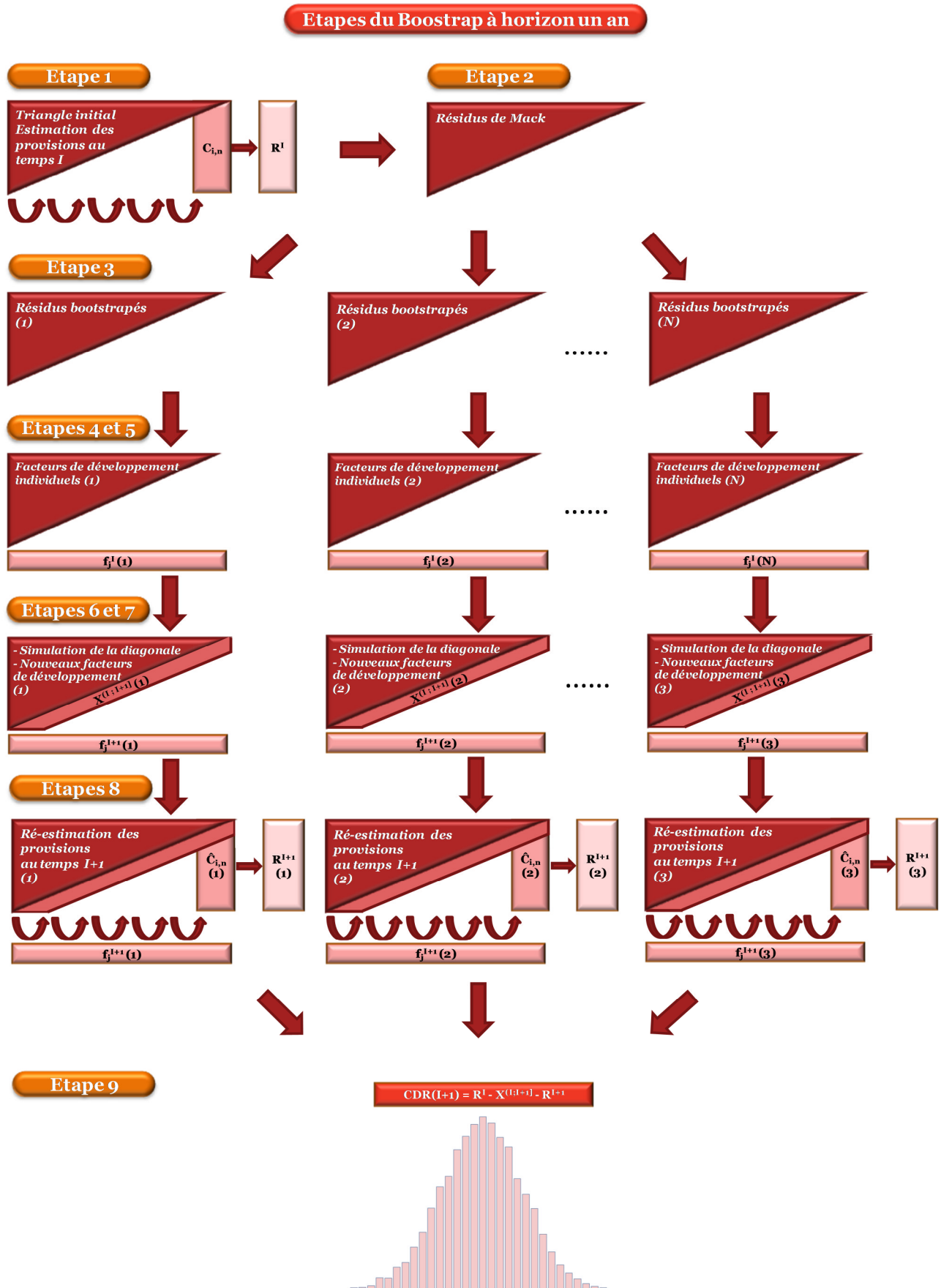


Figure 2.14 : Illustration des étapes du bootstrap à horizon un an

2.3.3.3. Critiques

La méthode du bootstrap adaptée à horizon un an présente des caractéristiques très similaires à la méthode du bootstrap classique. Par conséquent, elle souffre des mêmes inconvénients énoncés précédemment (temps de calcul, modèle Chain Ladder, ...).

Cette approche possède néanmoins l'avantage d'être facile à implémenter. Elle donne la distribution empirique du Claims Development Result qui représente le risque de provisionnement. Ainsi, l'erreur de prédiction (MSEP) correspond tout simplement à l'écart-type de la distribution de CDR.

De plus, la méthode du bootstrap est plus souple et permet l'inclusion d'un facteur de queue ou d'une étape de calcul reposant sur le modèle de Bornhuetter-Ferguson. Elle présente également l'avantage d'être généralisable à un horizon t variable. Cet aspect peut se révéler utile pour le calcul des SCR futurs dans le cadre de la détermination de la marge de risque.

2.3.4. Applications

Afin d'illustrer les méthodes de provisionnement « à horizon un an », nous allons les appliquer à nos données triangulées. Les résultats détaillés sont données pour la branche RC Automobile de la société A. Le détail des autres branches se trouvent en Annexe 4.

2.3.4.1. Validation de l'hypothèse de Merz et Wüthrich

La formule fermée de Merz et Wüthrich repose sur une approximation basée sur la contrainte suivante :

$$\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{C_{n-j,j}} \ll 1, \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1$$

Le tableau ci-dessous donne le résultat de ce ratio qui doit théoriquement être significativement inférieur à 1 :

Société	Branche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	Domage Aux Biens	6,54E-03	9,20E-05	7,65E-05	3,13E-05	3,82E-06	2,44E-05	4,09E-05	2,21E-05	2,05E-05	5,33E-07	2,94E-09	1,10E-09	4,51E-07	2,85E-09	1,53E-11
A	Domage Automobile	8,68E-04	1,78E-06	2,61E-07	2,19E-07	2,62E-08	2,28E-08	6,12E-09	2,00E-10	4,55E-11	4,74E-10	2,82E-11	2,58E-12	4,70E-11	0,00E+00	0,00E+00
A	RC Automobile	2,14E-03	3,56E-04	2,62E-04	3,54E-04	2,69E-04	5,27E-05	6,43E-04	2,48E-04	6,12E-04	2,04E-03	1,90E-05	9,56E-05	1,39E-06	4,46E-11	1,43E-15
B	Domage Aux Biens	7,74E-03	1,64E-04	3,37E-05	2,25E-05	4,61E-06	7,06E-06	1,18E-05	1,76E-05	2,16E-06	3,61E-06	2,12E-07	3,43E-08	3,22E-09	7,67E-10	1,42E-10
B	Domage Automobile	2,44E-03	1,73E-06	1,60E-06	1,59E-06	2,44E-07	9,37E-08	5,45E-08	6,75E-08	3,67E-08	1,65E-08	4,17E-09	2,67E-09	4,91E-11	0,00E+00	0,00E+00
B	RC Automobile	4,46E-03	2,56E-04	3,30E-04	2,08E-04	3,49E-04	3,90E-03	3,91E-04	2,43E-04	4,20E-04	1,38E-04	1,14E-04	3,97E-05	9,57E-07	1,59E-03	8,84E-07

Tableau 2.11 : Test de l'hypothèse d'approximation de la formule de Merz et Wüthrich

De manière générale, la contrainte est bien respectée pour l'ensemble des triangles étudiés. Cela nous permet donc d'avoir suffisamment de confort quant aux résultats donnés par le modèle de Merz et Wüthrich.

2.3.4.2. Résultats de Merz et Wüthrich

2.3.4.2.1. Comparaison de la volatilité du risque de provisionnement à horizon un an et à l'ultime

Le tableau ci-dessous compare les MSEP en vision ultime (obtenues par la méthode de Mack) aux MSEP en vision un an (obtenues par la méthode de Merz et Wüthrich). Il permet de comparer, pour chaque survenance et au global, l'incertitude à long terme (vision à l'ultime) à l'incertitude à court terme :

Année de survenance	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} M&W
2	0	0
3	1	1
4	101	101
5	763	758
6	956	453
7	3 006	2 907
8	3 554	1 745
9	3 597	1 104
10	4 005	1 727
11	4 051	682
12	4 151	1 162
13	4 237	1 260
14	4 588	1 218
15	4 605	1 305
16	5 469	2 995
Total	18 312	9 057

Tableau 2.12 : Résultat de Merz et Wüthrich et comparaison avec Mack pour la RC Auto de la société A

La volatilité des provisions à horizon un an pour la branche RC Automobile de la société A est deux fois moins importante que la volatilité des provisions à l'ultime (9 057 vs 18 312). Ainsi, 49% de l'erreur de prédiction à l'ultime est situé dans la première année. Ce taux est cohérent avec le risque RC Automobile. En effet, après la première année, il subsiste encore de grandes incertitudes quant à l'évaluation définitive d'un sinistre. En effet, les victimes n'ayant probablement pas tous atteint leur état de consolidation, il subsiste un doute sur leur état de santé réel. De plus, l'aspect judiciaire de ces types de dossiers peut également prolonger la période d'incertitude sur l'évaluation du coût ultime.

L'ensemble des résultats est donné dans le tableau ci-dessous :

Société	Branche	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} (M&W) / MSEP ^{1/2} (Mack)
A	RC Automobile	18 312	9 057	49%
A	Domage Automobile	2 872	2 866	100%
A	Domage Aux Biens	6 087	5 594	92%
B	RC Automobile	35 933	22 736	63%
B	Domage Automobile	4 393	4 381	100%
B	Domage Aux Biens	6 236	5 928	95%

Tableau 2.13 : Synthèse des résultats de Merz et Wüthrich

La comparaison entre l'erreur de prédiction à horizon un an et celle à l'ultime est cohérente avec les risques étudiés. Pour l'ensemble des triangles, la volatilité à horizon un an est bien inférieure à la volatilité ultime confortant ainsi les conclusions de l'étude AISAM-ACME de 2007, notamment sur les risques longs.

Nous constatons logiquement que la part d'incertitude à l'ultime est en quasi-totalité contenue en première année pour les risques à déroulement court, alors que les branches réputés à développement long ont une part d'incertitude dans la première année moins importante puisqu'il subsiste encore une forte incertitude les années suivantes :

- ✓ Nous avons vu qu'en RC Automobile, la part d'incertitude à l'ultime n'était que partiellement soulevée après la première année.
- ✓ Inversement, on observe qu'en Domage Aux Biens, une grande partie de l'incertitude à l'ultime se résorbe après la première année (~90%). Sur ce type de risque, les règlements sont rapides et seuls quelques dossiers peuvent être longs à se clôturer.
- ✓ Enfin, sur le Domage Automobile réputé pour le développement rapide des sinistres, la quasi-totalité de l'erreur de prédiction à l'ultime réside dans l'incertitude de première année. En effet, les sinistres gérés au sein de ce risque laissent très peu de place à l'incertitude et sont donc très rapidement réglés et clôturés (bris de glaces par exemple).

2.3.4.2.2. Ajustement à une loi de probabilité

Comme le modèle de Mack, le modèle de Merz et Wüthrich ne fournit que les deux premiers moments de la mesure du risque de provisionnement à horizon un an. Les caractéristiques spécifiques comme la VaR ne peuvent se calculer qu'en supposant une loi sous-jacente. Avec cette hypothèse, il est alors possible de tracer les fonctions de répartition et de densité et d'obtenir les quantiles, notamment le quantile 99,5% qui correspond au SCR risque de réserve.

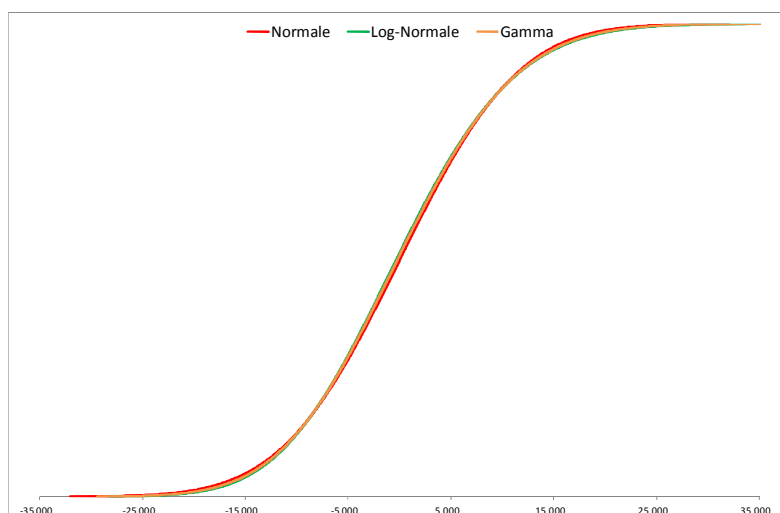


Figure 2.15 : Fonction de répartition des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A

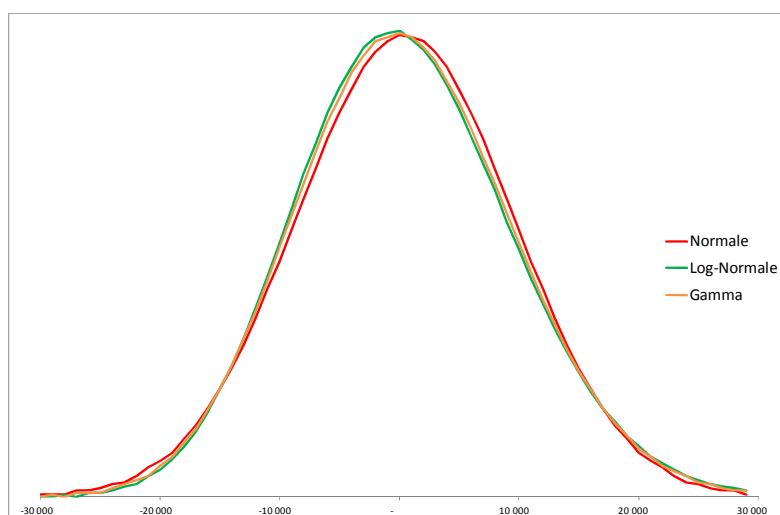


Figure 2.16 : Fonction de densité des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A

Quantile	Normale	Log Normale	Gamma
75%	6 109	5 894	5 975
90%	11 607	11 798	11 746
95%	14 897	15 466	15 285
99%	21 069	22 630	22 094
99,5%	23 329	25 349	24 643

Tableau 2.14 : Quantiles des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A

Le tableau ci-dessus donne les CDR à différents quantiles pour différentes lois. Nous observons que la loi Log-Normale donne systématiquement les montants les plus élevés pour les quantiles élevés. Nous rappelons également que le risque de réserve dans la Formule Standard de Solvabilité

II est calibré sur une loi Log-Normale. Cela prouve le caractère relativement « prudent » du choix de la loi de probabilité.

2.3.4.3. Résultats du bootstrap à horizon un an

Les résultats du bootstrap à horizon un an présentés dans cette partie supposent une loi Log-Normale pour l'intégration de l'erreur de processus et sont issus de 10 000 simulations. Le calibrage de la procédure bootstrap afin de déterminer le nombre de simulations et le test de sensibilité sur le choix de la loi de probabilité utilisée pour l'intégration de l'erreur de processus est formalisé en Annexe 2.2.

2.3.4.3.1. Comparaison des résultats du bootstrap avec ceux issus du modèle Merz et Wüthrich

Une comparaison entre les deux méthodes d'évaluation de la volatilité des provisions à horizon un an présentées précédemment est illustrée dans le tableau ci-dessous pour le risque RC Automobile de la société A :

Année de survenance	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
2	0	-
3	1	1
4	101	107
5	758	774
6	453	462
7	2 907	2 924
8	1 745	1 750
9	1 104	1 117
10	1 727	1 768
11	682	684
12	1 162	1 164
13	1 260	1 256
14	1 218	1 202
15	1 305	1 312
16	2 995	3 009
Total	9 057	9 113

Tableau 2.15 : Comparaison des résultats du bootstrap avec Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A

Les MSEP des deux méthodes sont très proches aussi bien au global que par survenance. Nous notons néanmoins que le bootstrap donne pour quasiment toutes les survenances des MSEP supérieures à ceux du modèle de Merz et Wüthrich.

2.3.4.3.2. Comparaison des bootstrap à horizon un an et ultime

Comme pour les modèles de Mack et de Merz et Wüthrich, nous effectuons une comparaison entre les résultats des bootstrap à l'ultime et à horizon un an :

Année de survenance	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
2	0	-
3	1	1
4	99	107
5	768	774
6	941	462
7	2 978	2 924
8	3 555	1 750
9	3 598	1 117
10	4 032	1 768
11	4 043	684
12	4 147	1 164
13	4 220	1 256
14	4 609	1 202
15	4 576	1 312
16	5 499	3 009
Total	18 354	9 113

Tableau 2.16 : Comparaison des bootstrap à l'ultime et à horizon un an pour la RC Auto de la société A

Les résultats de Mack et de Merz et Wüthrich sont respectivement très proches de ceux du bootstrap à l'ultime et celui à horizon un an, les conclusions sur la comparaison des deux bootstrap sont identiques aux conclusions des deux modèles à formule fermée.

Les distributions entières des deux bootstrap permettent en plus une illustration graphique :

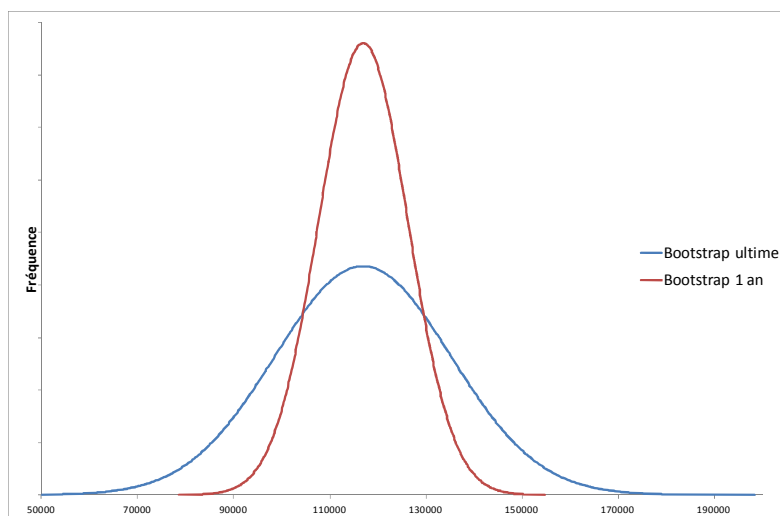


Figure 2.17 : Densité des distributions des bootstrap à l'ultime et à un an pour la RC Auto de la société A

Nous observons le caractère plus « étalé » de la densité du bootstrap à l'ultime caractérisant une volatilité plus importante de ce dernier par rapport à celle du bootstrap à horizon un an.

2.3.4.3.3. *Test de sensibilité sur l'hypothèse paramétrique de loi*

Nous présentons ci-dessous les ajustements de la distribution des CDR à une loi de probabilité. Ce procédé permet de définir les caractéristiques du CDR uniquement par une loi et ses paramètres et non par toute l'exhaustivité de sa distribution.

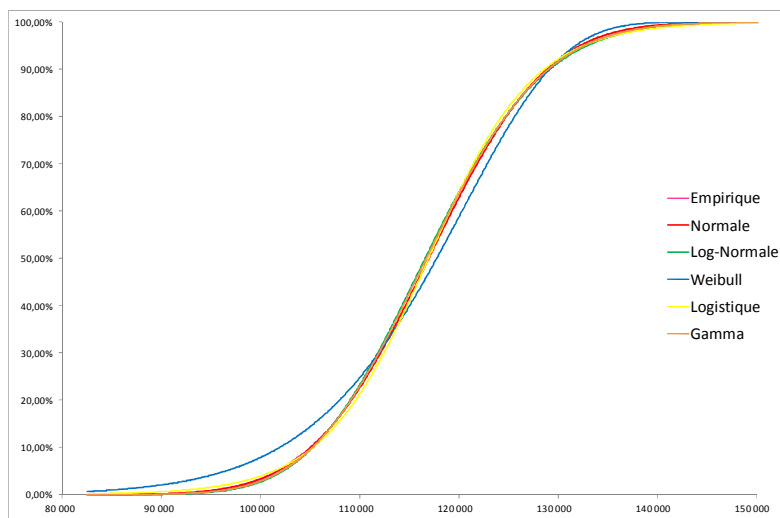


Figure 2.18 : Fonction de répartition des CDR par bootstrap pour la RC Auto de la société A

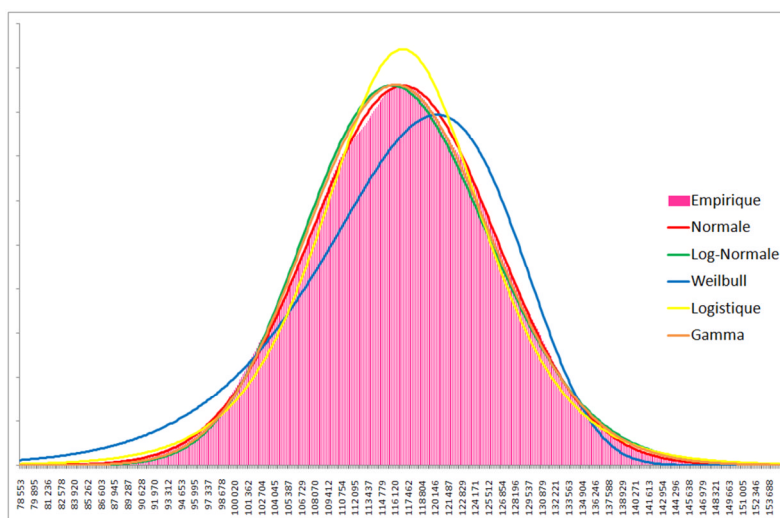


Figure 2.19 : Fonction de densité des CDR par bootstrap pour la RC Auto de la société A

Distribution	VaR 90%	VaR 99%	VaR 99,5%	VaR 99,9%	Log-vraisemblance	VaR 99,9% / VaR 99,5%
Empirique	11 445	21 289	23 703	27 918		1,18
Normale	11 513	21 034	23 307	27 995	- 105 363	1,20
Lognormale	11 820	22 845	25 614	31 498	- 105 409	1,23
Weibull	11 698	18 538	19 965	22 706	- 105 853	1,14
Logistique	11 283	23 750	27 380	35 768	- 105 447	1,31
Gamma	11 655	22 074	24 641	30 033	- 105 384	1,22

Tableau 2.17 : VaR des CDR obtenus par bootstrap pour la RC Auto de la société A

La loi qui semble la plus proche de la distribution empirique est la loi Normale. Graphiquement, sa fonction de densité s'ajuste bien avec la densité empirique. De plus, elle possède la Log-vraisemblance la moins élevée. Enfin, ses quantiles sont très proches de celles de la distribution empirique.

Nous constatons une fois de plus que la distribution Log-Normale, choisie pour le calibrage de la Formule Standard, donne les montants les plus élevés sur les quantiles élevés après la distribution Logistique. Cependant, cette dernière présente une instabilité plus importante sur la queue de distribution comme l'atteste le rapport entre les quantiles 99,5% et 99,9% qui montre que le passage du premier quantile vers le second implique une augmentation de l'ordre de 30%.

Le choix d'une distribution Log-Normale est donc à la fois prudent et fiable. Nous retenons néanmoins pour la suite la distribution empirique comme distribution de référence.

2.3.4.4. Synthèse des résultats de la mesure du risque de provisionnement à horizon un an

Les résultats globaux pour l'ensemble des risques étudiés sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Société	Branche	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
A	RC Automobile	9 057	9 113
A	Domage Automobile	2 866	2 870
A	Domage Aux Biens	5 594	5 634
B	RC Automobile	22 736	26 339
B	Domage Automobile	4 381	4 407
B	Domage Aux Biens	5 928	5 927

Tableau 2.18 : Synthèse des résultats du bootstrap à horizon un an

Globalement, les résultats des deux méthodes sont proches. Cependant, nous pouvons remarquer un écart significatif sur le risque RC Automobile la société B : le bootstrap estime une erreur plus grande de 16% par rapport au modèle de Merz et Wüthrich.

Les méthodes de Mack et du bootstrap à l'ultime donnaient des résultats similaires sur le segment RC Automobile de l'assureur B. Ainsi, la part de l'erreur à l'ultime contenue dans la première année est plus importante avec le bootstrap à horizon un an.

Pour rappel, ce risque chez l'assureur B n'avait pas validé l'hypothèse d'indépendance des années calendaires, l'étude du triangle montrait des rechargements importants sur certaines survenances.

La mesure de la volatilité des provisions à horizon un an est la clé de voûte du risque de réserve Non-Vie de Solvabilité II. En effet, elle permet de calculer l'exigence en capital pour ce risque : le SCR du risque de réserve.

2.4. Calcul de la marge de risque Solvabilité II

Les provisions techniques en assurance Non-Vie sont des passifs non répliquables. Leur valorisation dans le bilan Solvabilité II consiste dans un premier temps à évaluer leur valeur Best Estimate des provisions. Différentes méthodes ont été présentées dans la partie 2.2 pour effectuer cette estimation. Or, comme nous l'avons vu précédemment, il subsiste des incertitudes quant à ces estimations (hypothèses, méthodes, ...). Il s'agira donc dans un second temps, de déterminer la marge de risque (ou Risk Margin) qui peut être considérée comme un spread du Best Estimate et qui ajoutée à cette dernière, constituera la valeur de marché des provisions techniques d'assurance Non-Vie. Nous étudierons trois méthodes, une méthode basée sur une formule fermée, une méthode qui repose sur le principe du CDR adapté à un horizon quelconque et une méthode qui utilise les formules de Merz et Wüthrich.

2.4.1. Contexte

Dans le référentiel Solvabilité II, une compagnie d'assurance doit disposer, outre des réserves dites « Best Estimate », d'une marge de solvabilité, le SCR (Solvency Capital Requirement). Cette marge doit permettre à l'assureur de rester solvable à un horizon d'un an avec une probabilité de 99,5 %.



Figure 2.20 : Illustration du Best Estimate et du SCR

Un assureur est donc contraint d'immobiliser des capitaux en fonction de son profil de risque pour assurer sa solvabilité. Cette immobilisation a un coût, puisqu'il s'agit de capitaux bloqués qui constituent une perte de rendement pour l'assureur.

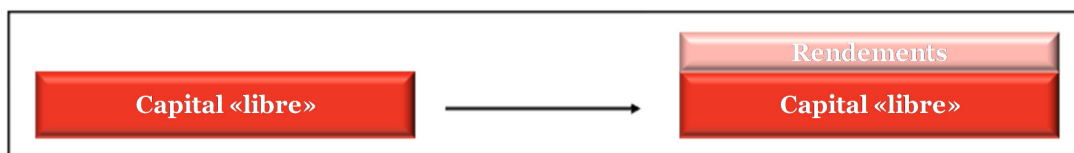


Figure 2.21 : Evolution d'un capital « libre » au cours du temps

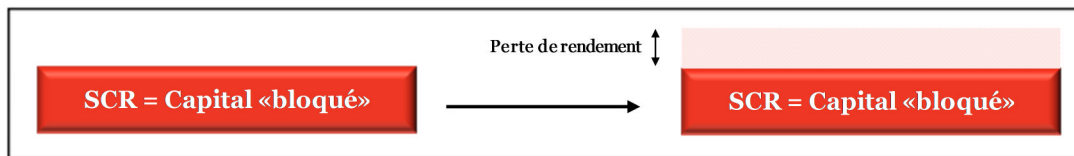


Figure 2.22 : Evolution d'un capital « bloqué » au cours du temps

En cas de cession du portefeuille d'assurance, la compagnie qui acquiert le portefeuille sera dans l'obligation de bloquer un montant de capital au moins équivalent au capital requis par le régulateur : le SCR. La compagnie acquérant le portefeuille demandera donc, outre les provisions « Best Estimate », une marge supplémentaire correspondant au coût de l'immobilisation de capital nécessaire pour la constitution de la marge de solvabilité exigée par le régulateur.

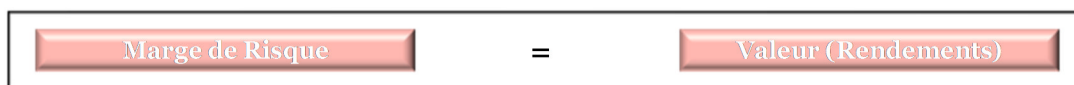


Figure 2.23 : Illustration de la marge de risque

Cette marge vient donc compléter les provisions techniques dans le passif du bilan Solvabilité II :



Figure 2.24 : Illustration du passif du bilan Solvabilité II

2.4.2. Définition théorique et méthode de calcul préconisées par le régulateur

2.4.2.1. Définition théorique

Dans les spécifications techniques pour le LTGA (cf. [10]), le dernier exercice organisé par l'EIOPA, celle-ci définit la marge de risque comme une provision technique permettant de s'assurer que la valeur des provisions techniques est équivalente à la somme qu'une compagnie d'assurance ou de réassurance extérieure exigerait pour prendre en charge les obligations d'assurance du portefeuille.

2.4.2.2. Méthode de calcul

L'EIOPA préconise de calculer la marge de risque à travers une approche « coût du capital », en déterminant le coût résultant de la levée de capitaux équivalents aux SCR nécessaires jusqu'à l'extinction du portefeuille concerné. Le taux utilisé pour déterminer la rémunération nécessaire en contrepartie de l'immobilisation du capital requis est appelé « taux de Coût de Capital ».

Plus précisément, la marge de risque (RM) peut être obtenue à travers la formule suivante :

$$RM = CoC \sum_{t \geq 1} \frac{SCR_t}{(1 + r_t)^t}$$

Avec $\begin{cases} CoC : \text{taux de Coût du Capital} \\ SCR_t : \text{capital requis à l'année } t \\ r_t : \text{taux sans risque pour une maturité } t \end{cases}$

Le calcul de la marge de risque consiste donc en un pourcentage de la somme des SCR futurs actualisés. Ce pourcentage est le taux de Coût du Capital fixé à 6% par l'EIOPA lors des études quantitatives d'impact. L'enjeu du calcul de la marge de risque va donc se situer dans la détermination des SCR futurs.

2.4.2.3. Principe de calcul des SCR futurs

Les SCR utilisés doivent correspondre aux SCR agrégés pour chaque année t de projection. Le SCR agrégé englobe :

- ✓ Le risque de Souscription,
- ✓ Le risque de Marché résiduel, autre que le risque de Taux,
- ✓ Le risque de Crédit,
- ✓ Le risque Opérationnel.

Pour s'assurer que la marge de risque est calculée en conformité avec le calcul de la marge de solvabilité, les compagnies d'assurance doivent utiliser la même approche pour la détermination des SCR futurs. Ainsi, si une compagnie d'assurance utilise un modèle interne pour le calcul de son SCR, les SCR pour les années futures ($t \geq 1$) devront être calculés à travers le même modèle.

L'EIOPA propose plusieurs méthodes de calcul pour les SCR futurs. Ces méthodes sont classées en fonction de leur complexité, de la plus précise à la plus simple. Chaque assureur doit justifier le choix de la méthode retenue en montrant que le degré de précision de l'approche appliquée est conforme au profil de risque de son portefeuille.

Les méthodes préconisées pour la projection des SCR futurs sont :



1. Recalcul de l'ensemble des SCR futurs sans utiliser de simplifications
2. Simplification du calcul des SCR par modules ou sous-modules de risque
3. Approximation du SCR annuel en utilisant une approche proportionnelle
4. Approximation de tous les SCR futurs en utilisant la durée du portefeuille
5. Approximation de la marge de risque comme un pourcentage du Best Estimate



Les détails des 5 méthodes préconisées par l'EIOPA sont exposés en Annexe 3.

2.4.3. *Méthode par formule fermée*

Il existe plusieurs méthodes par formule fermée permettant d'effectuer une projection des SCR futurs. Dans le cadre de ce mémoire, seul le risque de provisionnement est abordé. Les méthodes sont donc toutes basées sur des données triangulées, outil principal en provisionnement.

Une des approches pour la projection des SCR futurs consiste à estimer un pourcentage de sinistralité par année calendaire (a_k) en utilisant les informations du triangle inférieur projeté par Chain Ladder. Autrement dit, il s'agit du poids de chaque année calendaire sur la provision totale :

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} X_{n-i+1;i+k}}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} X_{n-i+1;i+j}}$$

Avec,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1$$

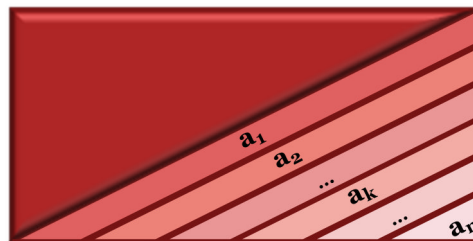


Figure 2.25 : Illustration des diagonales du triangle inférieur

La méthode par formule fermée pour projeter les SCR futurs repose sur le pourcentage de sinistralité restant à développer à chaque année calendaire suivant les hypothèses suivantes :

- ✓ A horizon un an, l'exposition du portefeuille est totale. En effet, la sinistralité peut survenir en totalité durant cette première année. Il est donc nécessaire de disposer de la totalité du capital requis à l'ultime afin de pouvoir pallier à une telle situation.
- ✓ Pour le passage de l'année t à l'année $t+1$, la sinistralité en année t est supposée connue. Notre exposition est donc diminuée des risques antérieurs de l'année t . Le capital requis en année $t+1$ diminuera donc en proportion par rapport à la sinistralité développée.

Ces hypothèses s'écrivent avec les variables SCR_{ultime} et a_t comme suit :

$$\begin{cases} SCR_t = SCR_{ultime} \\ SCR_t = SCR_{ultime} \times \left(1 - \sum_{i=1}^{t-1} a_i\right), \text{ pour } t > 1 \end{cases}$$

Avec, $SCR_{ultime} = VaR_{99,5\%}(U_0) - E(U_0)$ la volatilité autour de l'estimation moyenne des provisions à l'ultime, mesuré à un niveau de confiance 99,5%. Les U_0 s'obtiennent par exemple par la méthode du bootstrap à l'ultime.

Cette approche correspond à la simplification par années de projection (niveau 3) proposée par l'EIOPA dans [10]. Nous l'appellerons par la suite « méthode EIOPA ». En effet, nous pouvons réécrire la formule de calcul des SCR futurs comme suit :

$$1 - \sum_{l=1}^{t-1} a_l = \sum_{l=t+1}^{n-1} a_l = \sum_{l=t+1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-l} C_{n-i+1,i+l}}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{n-i+1,i+j}} = \frac{\sum_{l=t+1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-l} C_{n-i+1,i+l}}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{n-i+1,i+j}} = \frac{BE_t}{BE_o}$$

2.4.3.1. Critiques

La méthode EIOPA repose sur l'hypothèse que pour chaque année de projection, la totalité de la sinistralité à développer se matérialisera. Cette hypothèse peut être justifiée sur une branche courte où la quasi-totalité de la sinistralité se développe effectivement durant la première année, mais pas sur une branche longue où elle va conduire à surestimer la marge de risque.

De plus, ces deux méthodes s'appuient sur le pourcentage de sinistralité par année calendaire (a_k) qui peut être nul ou négatif. Dans ce cas, le SCR projeté est considéré comme nulle alors qu'il est possible que l'ultime ne soit pas encore atteint.

On peut qualifier cette méthode de « statique » puisqu'elle utilise l'information calculée au temps 0 uniquement. Il peut donc être utile d'utiliser des méthodes plus sophistiquées pour projeter les SCR, basées sur une approche dynamique consistant à intégrer au fur et à mesure, l'information du développement des sinistres. C'est le principe du bootstrap à horizon un an présenté précédemment. La généralisation de cette technique à un horizon t est une solution envisageable pour obtenir des SCR futurs plus précis.

2.4.4. Méthode par simulation

2.4.4.1. Principe

La méthode du bootstrap adaptée à horizon un an pour l'estimation de la volatilité des provisions à cet horizon et par conséquent pour le calcul du SCR du risque de réserve a été présentée en partie 2.3.3. Cette méthode peut être généralisée à un horizon quelconque et ainsi permettre de calculer les SCR futurs par simulations successives des diagonales du triangle inférieur.

L'approche se base sur le rééchantillonnage des résidus représentatifs de la variabilité du triangle à chaque simulation. Plus spécifiquement, à chaque simulation, le rééchantillonnage des résidus permet de calculer des nouveaux pseudo-facteurs de développement que l'on utilise pour développer de nouvelles diagonales (jusqu'à la clôture de toutes les années de survenance). A la création de chaque nouvelle diagonale représentant le temps t , on obtient une valeur de CDR_t . Pour un triangle de taille n , on obtient donc à chaque simulation $n-1$ valeurs de CDR (il s'agit du CDR à un an, entre 1 et 2 ans, ..., entre $n-2$ et $n-1$ ans). On peut ainsi en déduire les caractéristiques des distributions des CDR_t telles que la VaR à 99,5% et obtenir le SCR_t correspondant.

2.4.4.2. Etapes de calcul

Etape 1 : Estimation des provisions $\hat{R}_i^0$ au temps i par Chain Ladder

Etape 2 : Calcul des résidus de Mack :

$$r_{i,j}^{ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

Début de la phase simulatoire du bootstrap effectuée N fois

Etape 3 : Ré-échantillonnage des résidus et obtention des nouveaux résidus $\tilde{r}_{i,j}$

Etape 4 : Calcul des nouveaux facteurs de développement individuels pour $0 \leq i + j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_{i,j}^1 = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} \tilde{r}_{i,j}$$

Etape 5 : Calcul des nouveaux facteurs de développement pour la simulation de la première diagonale, pour $0 \leq j \leq n-1$:

$$\tilde{f}_j^1 = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}^1}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Etape 6 : Simulation des CDR_t . Pour chaque temps t jusqu'à la liquidation totale du triangle, on effectue les étapes suivantes :

Etape 6.1 - Simulation de la diagonale t :

La diagonale t est simulée en tenant compte de l'erreur de processus par un tirage aléatoire d'une loi de probabilité choisie. On note $\tilde{C}_{i,j}$ les montants ainsi simulés.

- ✓ Pour la première diagonale simulée ($\tilde{C}_{i,n-i+1}$) le procédé est le même que pour le bootstrap à un an. On utilise $\tilde{f}_j^1$ et $\hat{\sigma}_j^2$ pour le tirage aléatoire. Pour la loi Normale, la formule s'écrit comme suit :

$$\tilde{C}_{i,n-i+1} = N(C_{i,n-i} \tilde{f}_{n-i}^1 ; C_{i,n-i} \hat{\sigma}_{n-i}^2)$$

On obtient les paiements incrémentaux de la première diagonale par :

$$X_{i,n-i+1} = \tilde{C}_{i,n-i+1} - C_{i,n-i}$$

- ✓ Pour la deuxième diagonale et les suivantes ($t > 1$), on se base sur les diagonales déjà simulées pour « mettre à jour » les facteurs de développement, mais également les variances :

$$\text{o Pour les facteurs de développement : } \tilde{f}_j^t = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}^1 + \sum_{i=n-j}^{n-j+t-1} \tilde{C}_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} + \sum_{i=n-j}^{n-j+t-1} \tilde{C}_{i,j}}$$

- o Pour les variances :

$$\tilde{\sigma}_j^{t^2} = \frac{1}{n-j+t-1} \left[\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} (f_{i,j} - \hat{f}_j^t)^2 + \sum_{i=n-j+1}^{n-j+t} \tilde{C}_{i,j} (f_{i,j} - \hat{f}_j^t)^2 \right]$$

Les contraintes sur $\tilde{\sigma}_{n-1}^{t^2}$ sont maintenues (cf. 2.2.3.3).

La simulation de la nouvelle diagonale s'obtient par tirage aléatoire d'une loi Normale de moyenne $\tilde{C}_{i,n-i+t-1} \tilde{f}_{n-i+t-1}^t$ et de variance $\tilde{C}_{i,n-i+t-1} \tilde{\sigma}_{n-i+t-1}^t$.

Les paiements incrémentaux sont : $X_{i,n-i+t} = \tilde{C}_{i,n-i+t} - \tilde{C}_{i,n-i+t-1}$

Etape 6.2 - Calcul des nouveaux facteurs de développement au temps t pour le re-reserving :

Les nouveaux facteurs de développement sont calculés en utilisant les règlements cumulés du triangle d'origine et les nouvelles diagonales simulées.

$$\ddot{f}_j^t = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}^1 + \sum_{i=n-j}^{n-j+t-1} \tilde{C}_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} + \sum_{i=n-j}^{n-j+t-1} \tilde{C}_{i,j}}$$

Etape 6.3 - Ré-estimation des provisions au temps t+1 par année de survenance et au global :

$$\tilde{C}_{i,n} = \tilde{C}_{i,n-i+t} \prod_{j=n-i+t}^{n-1} \ddot{f}_j^t$$

$$\tilde{R}_i^t = \tilde{C}_{i,n} - \tilde{C}_{i,n-i+t}$$

$$\tilde{R}^t = \sum_{i=1}^n R_i^t$$

Etape 6.4 - Calcul du CDR :

$$CDR(I+1)^t = R^{t-1} - R^t - X^{(t-1;t]}$$

La simulation dans le cas présent est bien plus complexe que la bootstrap à horizon un an. A chaque simulation, les étapes pour aboutir au CDR doivent être ré-itérer n-1 fois pour obtenir les n-1 CDR en tenant compte au fur et à mesure des nouvelles diagonales simulées. Ainsi, à chaque simulation s'opèrent n-1 fois les étapes suivantes :

- ✓ Recalcul des facteurs de développement et de la variance pour la simulation d'une nouvelle diagonale,
- ✓ Simulation d'une diagonale,
- ✓ Recalcul des facteurs de développement du nouveau triangle pour la projection à l'ultime,

- ✓ Projection à l'ultime,
- ✓ Calcul du CDR.

Au final, nous obtenons N simulations des $n-1$ CDR. A partir de ces distributions empiriques, nous pouvons déduire les SCR_t pour le calcul de la marge de risque.

2.4.4.3. Critiques

La première critique de cette méthode est la complexité de sa mise en œuvre. Son principe paraît simple puisqu'il s'agit de généraliser l'approche à horizon un an. Cependant, cette approche implique le calcul de plusieurs paramètres à des temps différents. De plus, le temps de calcul peut s'avérer long sur des grands triangles. Pour N simulations d'un triangle de taille n , il y a donc $N \times n$ itérations.

Néanmoins, les SCR obtenus respectent les principes du risque de provisionnement sous Solvabilité II, à savoir la ré-estimation de la charge ultime à deux années successives. Les SCR sont également obtenus par une VaR à 99,5%. Ces SCR futurs sont plus précis car ils tiennent compte du développement du triangle par la prise en compte des facteurs de développement ainsi que la volatilité inhérente au triangle.

2.4.5. Méthode DEKL

2.4.5.1. Principe

Cette méthode proposée par DIERS, ELING, KRAUS et LINDE dans leur article sur le risque pluri-annuel en assurance Non-Vie [9] repose sur un bootstrap classique permettant d'obtenir N pseudo triangles à partir du rééchantillonnage des résidus de Mack ajustés. Afin d'éviter l'utilisation de techniques de simulations dans les simulations, ils proposent d'utiliser sur ces N pseudo triangles, la formule analytique de Merz et Wüthrich de manière itérative. Ainsi, N SCR sont calculés pour chaque année calendaire future.

Nous nommerons cette méthode par la première lettre des 4 co-auteurs de l'article [9], soit la méthode DEKL.

2.4.5.2. Etapes de calcul

Etape 1 : Bootstrap à l'ultime (cf. 2.2.4)

Etape 2 : Application de la formule de Merz et Wüthrich

Pour chaque pseudo triangle, les paiements de la prochaine année calendaire (nouvelle diagonale) sont simulés à partir d'une loi donnée avec comme espérance et variance, le Best Estimate des réserves R_t et l'erreur quadratique de prédiction $\widehat{mse}p_{CDR,t}$. Ces dernières sont déduits par les formules respectives :

$$R_t = \sum_{i=1}^n C_{i,n} - C_{i,n-i+t}$$

$$\widehat{mse}p_{CDR,t} = \sqrt{\widehat{mse}p_{proc,t}^2 + \widehat{mse}p_{est,t}^2}$$

Avec $\left\{ \begin{array}{l} C_{i,j} : \text{les paiements cumulés la } j^{\text{ème}} \text{ année de développement pour l'année de survenance } i \\ \widehat{mse}p_{proc,t}^2 : \text{l'erreur de processus obtenue par Merz et Wüthrich} \\ \widehat{mse}p_{est,t}^2 : \text{l'erreur d'estimation obtenue par Merz et Wüthrich} \end{array} \right.$

Le SCR_t correspondant est obtenu en appliquant les formules de Merz et Wüthrich sur les pseudo triangle incluant une nouvelle diagonale et une année de développement en moins. Nous obtenons N valeurs de SCR_t différentes. Le SCR retenu est alors la moyenne de ses SCR :

$$SCR_t = \frac{\sum_{i=1}^Z SCR_{t,i}}{N}$$

Cette étape est itérée jusqu'au déroulement complet des pseudo triangles. Cette itération permet d'obtenir des valeurs de SCR pour les années calendaires futures jusqu'à extinction du triangle. La marge de risque est ensuite déduite en actualisant les SCR obtenus par l'approche « Cost of Capital ».

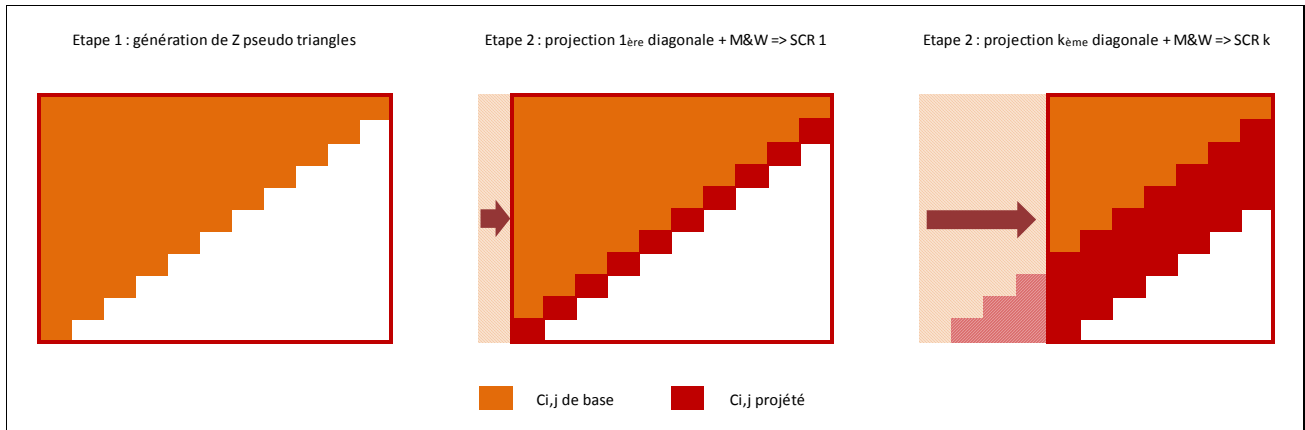


Figure 2.26 : Illustration des étapes de la méthode DEKL

2.4.5.3. Critiques

Cette méthode a l'avantage d'être rapide à implémenter. Elle s'appuie sur l'obtention de N pseudo triangles par la méthode du bootstrap à l'ultime, sur lesquels s'appliquent les formules

analytiques de Merz et Wüthrich. Le temps de calcul est bien moins important que pour la méthode par simulation basée sur les CDR.

Néanmoins, l'utilisation des formules du modèle de Merz et Wüthrich implique les mêmes inconvénients que ce dernier, notamment sur les hypothèses relatives au modèle de Chain Ladder.

2.4.6. Applications

2.4.6.1. Exemple illustré sur une branche

Pour illustrer l'application des méthodes de calcul de la marge de risque, nous présentons dans cette section les résultats détaillés de la branche RC Automobile de la société A.

Pour le calcul de la marge de risque par la méthode EIOPA, nous avons besoin d'estimer dans un premier temps le pourcentage de sinistralité par année calendaire (a_k) et le capital requis à l'ultime (SCR_{ultime}) :

	a_k
1	34,05%
2	17,68%
3	12,44%
4	9,51%
5	7,29%
6	5,51%
7	4,65%
8	3,35%
9	2,59%
10	1,92%
11	0,61%
12	0,34%
13	0,04%
14	0,00%
15	0,00%

SCR_{ultime}	48 988
----------------	--------

Ce capital requis à l'ultime équivaut à une déviation correspondant à une VaR 99,5% de la provision moyenne à l'ultime. Il s'obtient à partir des résultats du bootstrap à l'ultime présentés dans la section 2.2.4.

Tableau 2.19 : Pourcentage de sinistralité par année calendaire

Les résultats des projections de SCR et le calcul de la marge de risque en fonction des trois méthodes sont donnés par le tableau ci-dessous :

	EIOPA	Bootstrap	DEKL
1	48 988	23 676	22 579
2	32 306	21 914	19 916
3	23 644	17 672	17 261
4	17 549	16 600	15 565
5	12 890	15 300	14 038
6	9 319	13 251	12 591
7	6 620	12 276	11 589
8	4 340	11 306	10 303
9	2 699	9 986	9 119
10	1 429	8 723	7 635
11	486	2 336	2 007
12	187	2 018	1 711
13	20	249	210
14	1	2	1
15	0	-	0
Risk Margin	9 629	9 319	8 672

Tableau 2.20 : Marge de risque pour la RC Auto de la société

Comme prévu, la méthode EIOPA donne des SCR très élevés sur les premières années. Elle devient inférieure à la méthode bootstrap à partir de la 5^{ème} année de projection. Les SCR futurs de la méthode DEKL restent proches de ceux de la méthode bootstrap tout en restant constamment inférieure. Globalement, la marge de risque de la méthode EIOPA est légèrement supérieure à celle du bootstrap. Les trois méthodes montrent une fin des développements de la sinistralité après la 13^{ème} année.

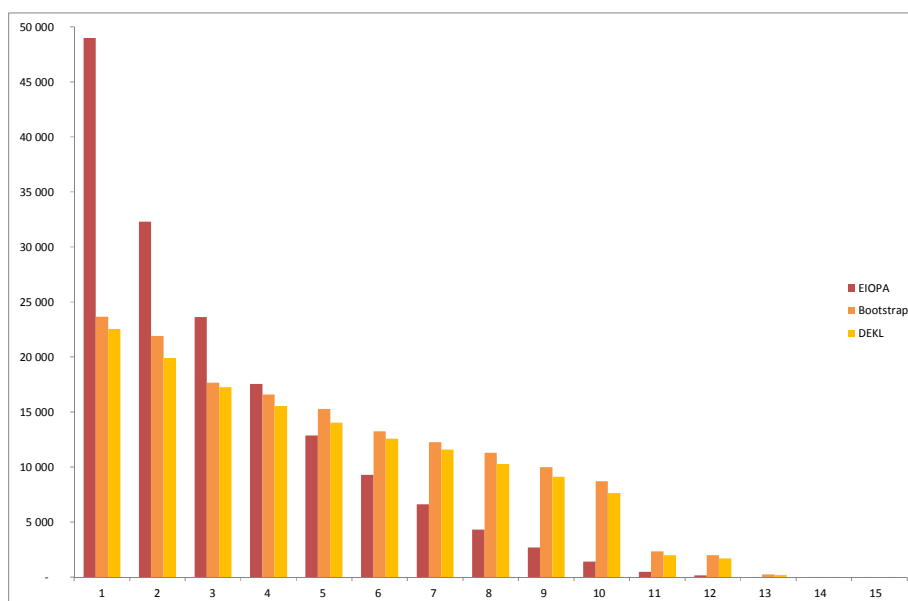


Figure 2.27 : Représentation graphique des SCR projetés

Le graphique ci-dessous montre les fonctions de densité des SCR projetés issus des 10 000 simulations du bootstrap généralisé à tous les horizons. Plus l'horizon est éloigné, plus la volatilité est petite et donc plus le capital requis l'est également. En effet, plus on avance dans le temps, plus il y a d'information portée à notre connaissance et donc moins la volatilité est importante.

Ceci est traduit dans le graphe ci-dessous par la largeur de moins en moins importante des « cloches ». De même, plus l'horizon est éloigné, plus le volume de provisions diminue comme l'illustre le décalage vers la gauche des densités.

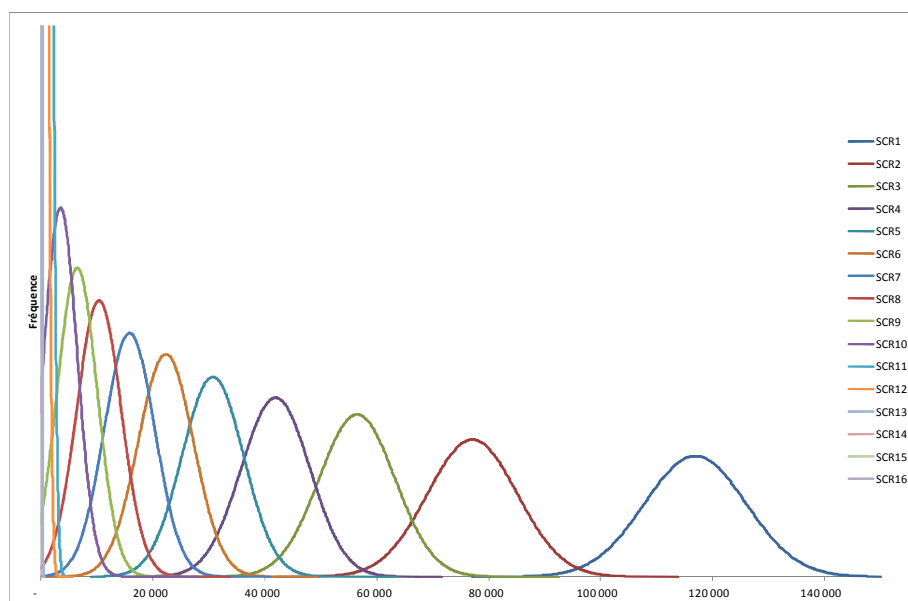


Figure 2.28 : Distribution des densités des SCR futurs

2.4.6.2. Synthèse des résultats de la marge de risque

Les marges de risque calculées en fonction des différentes méthodes présentées dans ce mémoire sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Société	Branche	EIOPA	Bootstrap	DEKL
A	RC Automobile	9 629	9 319	8 672
A	Dom mage Automobile	454	513	484
A	Dom mage Aux Biens	1 088	1 902	1 854
B	RC Automobile	25 074	19 812	6 238
B	Dom mage Automobile	697	815	793
B	Dom mage Aux Biens	1 265	1 728	1 660

Tableau 2.21 : Synthèse des résultats du calcul de la marge de risque

Dans l'ensemble, les méthodes bootstrap et DEKL sont très proches. L'analyse des SCR futurs de ces deux méthodes montrent qu'ils possèdent les mêmes ordre de grandeur avec toutefois, des SCR futurs de la méthode DEKL systématiquement inférieurs à ceux de la méthode bootstrap. Ainsi, la marge de risque issue de la méthode DEKL va systématiquement être inférieure à celle de la méthode bootstrap.

Sur les branches courtes (Dom mage Automobile et Aux Biens), la méthode EIOPA donne donnent des marges de risque inférieures à celles des méthodes bootstrap et DEKL. Ces dernières

tiennent en compte l'information nouvelle obtenue dans les simulations des nouvelles diagonales jusqu'à ce que l'ultime soit atteint.

Sur la branche longue (RC Automobile), la marge de risque de la méthode EIOPA est plus élevée que celle des deux autres méthodes, elle reste relativement proche pour la société A, mais est très éloignée pour la société B.

En fonction des risques étudiés, la méthode EIOPA donne des résultats convenables au regard des deux autres méthodes. Elle peut constituer une approximation acceptable par rapport aux autres méthodes dans le cadre d'une approche simplifiée du calcul de la marge de risque. L'obtention d'une marge de risque tenant compte des volatilités inhérentes aux triangles étudiées obligent à utiliser des techniques plus complexes comme dans les méthodes bootstrap et DEKL. Cette dernière présente l'avantage de se baser sur la formule analytique du modèle de Merz et Wüthrich et de contourner la problématique de temps de calcul.

Les méthodes employées reposent sur des triangles et sur leur liquidation jusqu'à l'ultime. Cela suppose donc que la taille du triangle soit importante de sorte à ce que la première survenance soit complètement déroulée.

Avec le calcul de la marge de risque et celui du Best Estimate, nous avons constitué les provisions techniques du bilan Solvabilité II. L'estimation de la volatilité des provisions à horizon un an permet quant à elle de calculer le dernier poste du passif Solvabilité II, à savoir le SCR risque de réserve.

3. Calcul du SCR du risque de réserve dans le cadre de différentes options stratégiques

3.1. *Méthode retenue pour le calcul du SCR*

Le calcul du SCR risque de réserve s'effectue comme indiqué dans la partie 2.3.2.6, le provisionnement à l'ultime et à horizon un an s'effectue comme présenté dans les parties 2.2 et 2.3. Pour maintenir la comparabilité entre les différentes sociétés et les différentes options stratégiques d'optimisation du SCR risque de réserve, la même méthode sera employée dans la détermination de l'exigence en capital réglementaire Solvabilité II au titre du risque de réserve :

- ✓ Les provisions ultimes sont estimées par Chain Ladder et l'incertitude afférente est calculée par le modèle de Mack.
- ✓ Les volatilités à horizon un an sont estimées par le modèle de Merz et Wüthrich.

Ces indicateurs sont à calculer sur 3 risques pour 2 sociétés pour différentes options stratégiques, soit au total 114 triangles à appliquer. La méthode du bootstrap bien qu'avantageuse dans divers cas est très contraignante en termes de temps de calcul face au nombre important de triangles à étudier. Ainsi, la formule fermée du modèle de Merz et Wüthrich est privilégiée.

Le calcul de chaque SCR sera accompagné de l'estimation du coût en capital défini par :

$$\frac{SCR}{Primes}$$

Nous ne disposons pas des données de primes, néanmoins à partir des triangles nous estimons une charge ultime, ainsi en prenant l'hypothèse d'un ratio sinistre à primes à l'équilibre (égal à 100%) nous déduisons que la prime est égale à la charge ultime.

Cet indicateur permettra de calculer le coût en capital pour chaque euro de primes acquises et de mesurer la consommation de capital par branche d'activité.

3.2. Assureur A et Assureur B

Le tableau ci-dessous donne les SCR au titre du risque de réserve pour les sociétés A et B. Les SCR par branche correspondent au besoin en capital dans le cas où la société en question serait en mono-activité sur la branche donnée. Le SCR total correspond à la prise en compte des 3 risques avec effet de diversification entre les lignes d'activité.

Société	Branche	SCR Réserve	Société	Branche	SCR Réserve
A	RC Automobile	27 170	B	RC Automobile	68 208
A	Domage Automobile	8 599	B	Domage Automobile	13 144
A	Domage Aux Biens	16 783	B	Domage Aux Biens	17 784
A	Total	40 344	B	Total	82 227

Tableau 3.1 : SCR par risque pour les sociétés A et B

Le SCR pour la société B est deux fois plus important que celui de la société A, principalement expliqué par le risque RC Automobile. Les graphiques ci-dessous permettent de visualiser et de comparer le profil de risque des deux compagnies d'assurance :

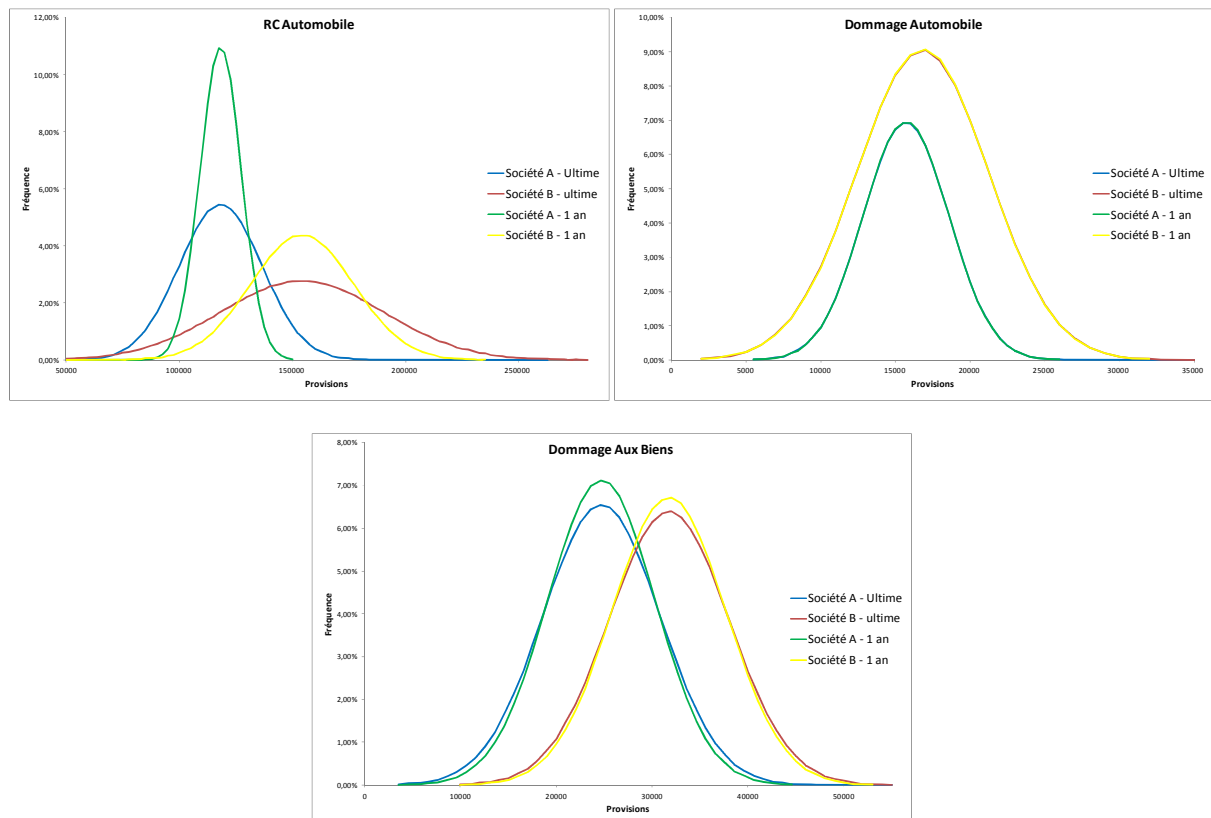


Figure 3.1 : Comparaison des densités ultime et à un an par risque entre les assureurs A et B

Ces graphiques représentent les distributions des provisions selon la vision ultime et la vision à horizon un an respectivement déterminées par les modèles de Mack et de Merz et Wüthrich, les courbes sont tracées sous une hypothèse de normalité des distributions.

Le Best Estimate des provisions correspond à la moyenne de la distribution. L'« étalement » de la distribution dénote une volatilité plus importante que celle d'une distribution « concentrée ».

- ✓ RC Automobile : Les volatilités à horizon un an sont inférieures à celles à l'ultime. Les courbes montrent que la volatilité de la société B est extrêmement importante par rapport à celle de la société A confirmant l'écart de SCR entre ces deux portefeuilles.
- ✓ Dommage Automobile : Les courbes ultimes et à un an se confondent confirmant que l'incertitude sur ce risque est concentrée sur la première année.
- ✓ Dommage Aux Biens : Les volatilités des deux assureurs sont très proches, de même entre la vision ultime et la vision à horizon un an.

Il apparaît clairement que l'estimation des provisions de l'entreprise B est plus volatile que celle de l'entreprise A. En termes de provisions, la société B présente également des montants supérieurs à celle de la société A. Pour les deux sociétés, c'est le risque RC Automobile qui prédomine :

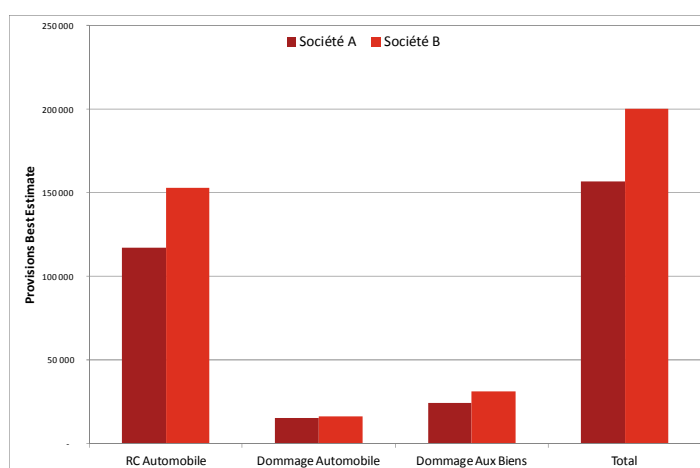


Figure 3.2 : Répartition des provisions par risque pour les assureurs A et B

Le tableau ci-dessous donne les coûts en capital pour chaque branche d'activité des deux sociétés, sous l'hypothèse d'un résultat technique équilibré.

Branche	Coût en capital (Société A)	Coût en capital (Société B)
RC Automobile	3 %	6 %
Dommage Automobile	1 %	1 %
Dommage Aux Biens	2 %	2 %

Tableau 3.2 : Coûts en capital par branche d'activité des assureurs A et B

Nous observons qu'une hiérarchie se dessine au niveau des risques étudiés. Les risques courts sont moins consommateurs de capital que les risques longs. Il apparaît également que le portefeuille d'assurés en RC Automobile de la société B est plus consommateur de capital que celui de la société A.

3.3. Option 1 : Fusion des 2 assureurs

Dans un premier temps, il sera traité le cas d'une société en mono-activité de sorte à calculer séparément les SCR des différentes branches pour avoir une meilleure visibilité des impacts de l'opération risque par risque.

3.3.1. Principe

Il s'agit pour les deux assureurs A et B de mettre en commun leurs risques sous une seule entité « Fusion A+B ». En matière de provisionnement, cela revient à considérer un triangle unique pour les deux sociétés.

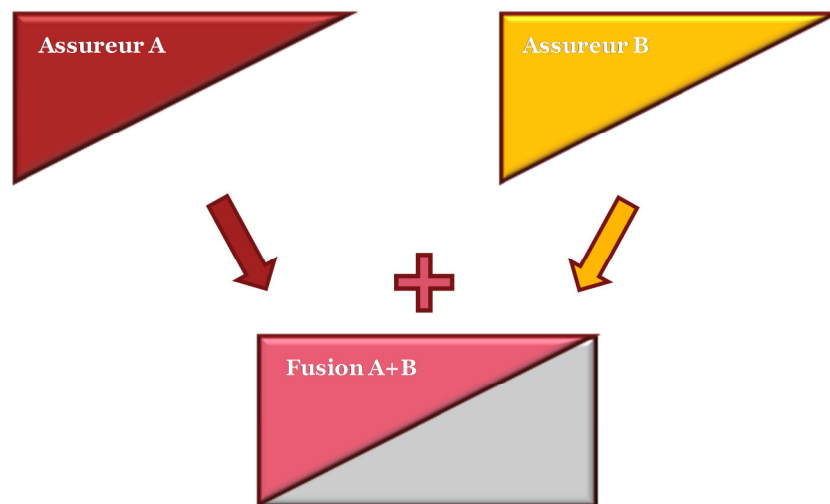


Figure 3.3 : Stratégie de fusion de deux sociétés

3.3.2. Sociétés A et B en mono-activité

Les SCR par risque dans le cas de sociétés en mono-activité sont donnés dans le tableau ci-dessous :

SCR	RC Automobile	Dommage Automobile	Dommage Aux Biens
A	27 170	8 599	16 783
B	68 208	13 144	17 784
A+B	95 378	21 742	34 567
Fusion A+B	72 293	19 848	32 012
Variation après fusion	-24 %	-9 %	-7 %
Coût en capital	3 %	1 %	2 %

Tableau 3.3 : SCR par risque dans la stratégie de fusion des sociétés A et B

Le SCR de la nouvelle société « Fusion A+B » est inférieur à la somme des SCR pris séparément. C'est le résultat de la mutualisation de deux sociétés possédant chacun un portefeuille important.

Néanmoins, on peut remarquer que le « gain » est nettement moins important sur les branches à déroulement court. Cela s'explique par le volume de provisions bien moins important sur ces risques, limitant l'effet de mutualisation.

En matière de consommation en capital, nous observons que le risque RC Automobile est le plus gourmand en capital puisque pour 100 € de primes, il génère une immobilisation de 3 € en capital dans le cas d'un résultat technique à l'équilibre. Les risques courts que sont les Dommages Automobile et Aux Biens sont moins consommateurs avec respectivement 1 € et 2 € de capital requis pour 100 € de primes acquises.

3.3.3. Sociétés A et B en multi-activité

Lorsque les deux sociétés sont en multi-activité, la tendance constatée précédemment sur les risques pris à part est toujours de vigueur :

SCR	Total
A	40 344
B	82 227
A+B	122 571
Fusion A+B	97 748
Variation après fusion	-20%

Tableau 3.4 : SCR tous risques agrégés dans la stratégie de fusion des sociétés A et B

Le poids important de la branche RC Automobile va fortement influencer sur le résultat agrégé. Ainsi, on retrouve une variation du SCR de -20% du SCR fusionné par rapport à la somme des SCR des sociétés A et B calculés séparément.

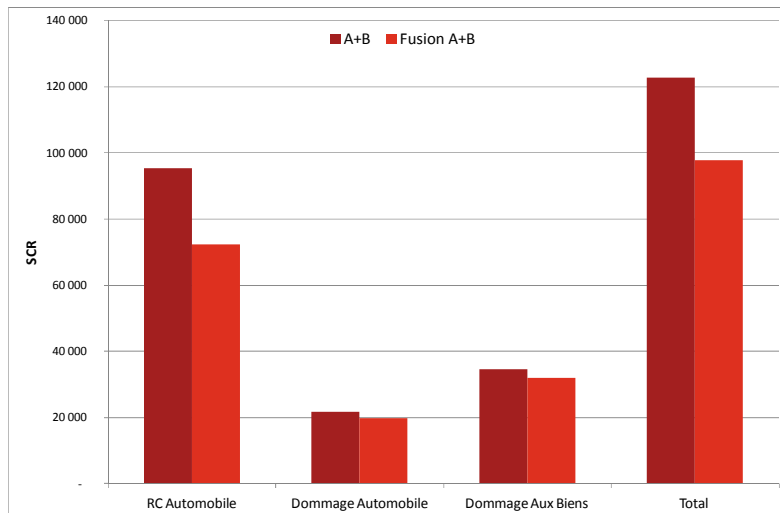


Figure 3.4 : Illustration des SCR dans la stratégie de fusion des sociétés A et B

Bien évidemment une fusion d'entreprises implique de nombreux autres impacts. Néanmoins concernant le risque de réserve, cette première option permet de voir le comportement de chacun des risques face à la mutualisation.

Si une fusion de deux entreprises est une hypothèse trop forte, on pourrait transposer cette approche pour deux entités d'un même groupe et élargir l'analyse sur d'autres risques. En effet, il existe dans les grands groupes d'assurance de nombreuses entités héritées de l'histoire, des précédentes fusions ou créer pour séparer les différents réseaux de distributions.

L'avènement de Solvabilité II pourrait être l'occasion pour ces groupes de se pencher sur la pertinence de disposer de deux entités juridiques gérant les mêmes risques et partageant les mêmes politiques de souscription ou de gestion des sinistres.

3.4. Option 2 : Création d'une société dédiée à la gestion des anciennes survenances

3.4.1. Principe

Il s'agit de séparer les sinistres d'une société en deux catégories : ceux des anciennes survenances et ceux des nouvelles survenances. L'assureur d'origine conserve les survenances récentes (et les provisions afférentes) et laissera la structure dédiée gérer les anciens sinistres (et les provisions afférentes). Plusieurs scénarii seront testés en fonction du seuil séparant ces deux catégories de sinistres. En termes de provisionnement, cela revient à séparer les données en deux triangles que l'on étudiera séparément :

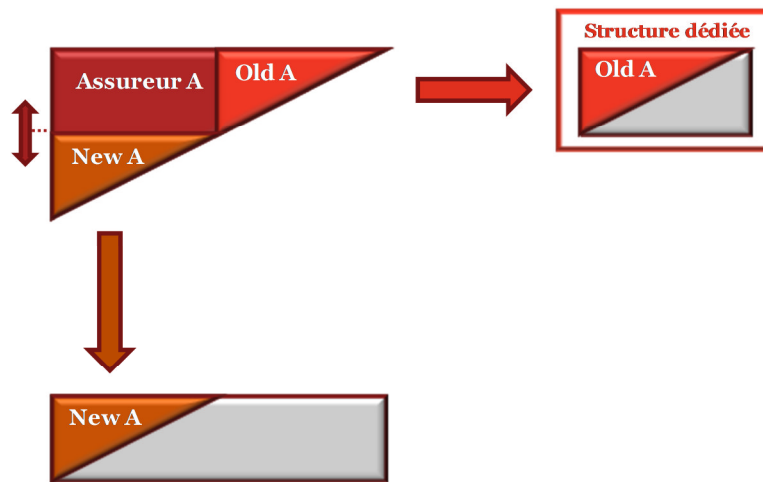


Figure 3.5 : Stratégie de mise en place d'une structure dédiée à la gestion des anciennes survenances

Nous adopterons les notations suivantes :

- ✓ N : le nombre d'années de survenance à l'origine (taille du triangle de départ),
- ✓ x : le nombre d'années de survenance conservé par la société d'origine, avec $5 \leq x \leq N - 5$,
- ✓ $N-x$: le nombre d'années de survenance transféré à la structure dédiée,
- ✓ C_x : les x années de sinistres conservés,
- ✓ T_{N-x} : les $N-x$ années de sinistres transférés.

7 scénarios seront ainsi étudiés :

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| ✓ C_5/T_{11} | ✓ C_8/T_8 | ✓ C_{11}/T_5 |
| ✓ C_6/T_{10} | ✓ C_9/T_7 | |
| ✓ C_7/T_9 | ✓ C_{10}/T_6 | |

Pour chacun des 7 cas, 2 SCR seront calculés impliquant donc le calcul des Best Estimate des provisions et des volatilités du provisionnement à horizon un an. Les résultats seront comparés aux SCR de la société d'origine ayant conservé toutes les survenances. Nous supposons que le SCR total correspond à la somme du SCR conservé et du SCR transféré sans corrélation.

Le SCR se calcule en fonction de deux paramètres : le volume provisions à l'ultime et la volatilité des provisions à horizon un an. Nous nous attendons donc à ce que l'effet volume se traduise par l'affirmation suivante : à volatilité constante, plus le nombre d'années conservé est faible, plus le SCR associé le sera. Ceci implique également que plus le nombre d'années transférées est important, plus le SCR transféré le sera. L'objectif est donc de trouver la répartition optimale entre ces 7 scénarii tout en sachant que la volatilité peut varier d'un scénario à l'autre.

3.4.2. Société A en mono-activité

3.4.2.1. Responsabilité Civile Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	27 170	16 374	21 330	21 431	27 514	20 867	26 003	24 719
Transféré		2 303	3 125	9 411	11 805	13 461	15 652	17 171
Total	27 170	18 677	24 455	30 842	39 319	34 328	41 655	41 890
Ecart par rapport à C16		-31%	-10%	14%	45%	26%	53%	54%
Coût en capital Conservé	3%	2%	3%	4%	6%	5%	7%	8%
Coût en capital Transféré		1%	1%	2%	2%	2%	2%	2%

Tableau 3.5 : SCR RC Auto pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Initialement le risque RC Automobile de l'assureur A exigeait un besoin en capital de 27 170. La répartition optimale se situe au niveau du scénario C11/T5 où le gain sur le SCR d'origine s'élève à 31%. Autrement dit, l'optimisation est réalisée lorsque le nombre d'années de survenance considérées comme anciennes est minimal.

Ainsi, le SCR calculé sur les cinq années transférées est faible et s'explique par la combinaison d'un volume de provisions et d'une volatilité des provisions à horizon un an moins importants, contribuant à la baisse du SCR total.

Ce dernier point reflète bien le profil du risque RC Automobile, où les années de survenances anciennes (au moins 10 ans d'ancienneté) sont moins volatiles que les survenances récentes.

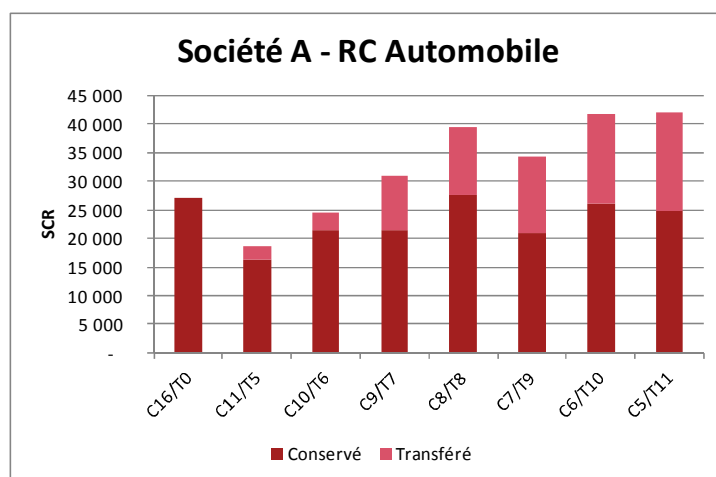


Figure 3.6 : Illustration des SCR par scénario pour la RC Auto de l'assureur A

3.4.2.2. Dommage Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	8 599	8 811	9 202	8 995	7 841	4 966	4 029	2 932
Transféré		2	3	7	8	10	22	45
Total	8 599	8 813	9 205	9 002	7 849	4 976	4 052	2 977
Ecart par rapport à C16		2%	7%	5%	-9%	-42%	-53%	-65%
Coût en capital Conservé	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%
Coût en capital Transféré		0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.6 : SCR Dommage Auto pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Pour le risque Dommage Automobile de la société A, le SCR optimal est réalisé dans le cas C5/T11 où le gain est estimé à 65%. Il s'agit du scénario où un maximum d'années de survenance est transféré.

Sur ce type de risque, le fait de transférer un grand nombre d'années implique un faible montant de SCR. En effet, il s'agit des anciennes survenances ne contenant plus d'incertitude pour un risque rapide et dont le volume de provisions est faible. Ces sinistres ont déjà été réglés et clôturés pour la quasi-totalité à l'issu de leurs premières années de vie. Il y a donc un vrai avantage à isoler et à transférer le plus grand nombre d'années de survenances sur ce type de risque.

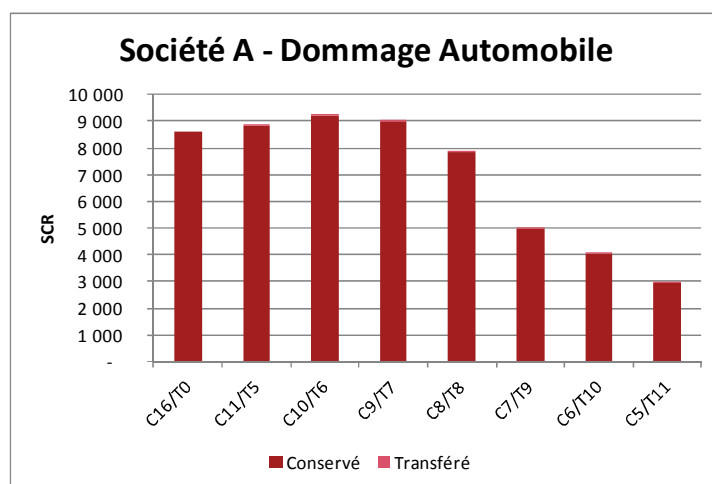


Figure 3.7 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Auto de l'assureur A

3.4.2.3. Dommage Aux Biens

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	16 783	15 027	14 668	17 499	9 451	8 030	6 564	4 241
Transféré		133	164	233	841	1 305	1 845	2 285
Total	16 783	15 160	14 831	17 732	10 293	9 335	8 409	6 526
Ecart par rapport à C16		-10%	-12%	6%	-39%	-44%	-50%	-61%
Coût en capital Conservé	2%	2%	3%	3%	2%	2%	2%	1%
Coût en capital Transféré		0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.7 : SCR Dommage Aux Biens pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Au même titre que le risque Dommage Automobile, le risque Dommage Aux Biens est un risque supposé court. Ainsi, le risque Dommage Aux Biens génère également un gain maximum sur le SCR pour le cas extrême C5/T11. La diminution du SCR est évaluée à 61%.

Cependant, ce risque présente l'avantage de générer un gain sur le SCR sur quasiment tous les scénarii, excepté le scénario C9/T7 où la conservation de neuf années de survenances fait augmenter la volatilité des provisions à horizon un an et par conséquent augmente le SCR total sur ce scénario.

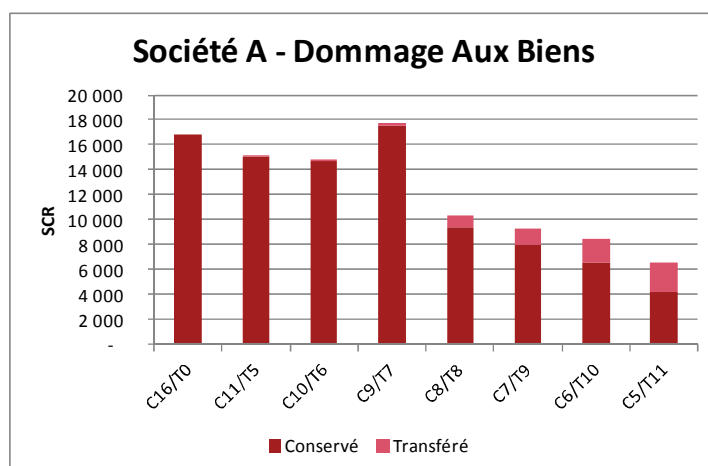


Figure 3.8 : Illustration des SCR par scénario pour le Dommage Aux Biens de l'assureur A

3.4.3. Société A en multi-activité

Si on considère les 4 risques au sein d'une même entreprise, les SCR agrégés avec la prise en compte de l'effet de diversification sont comme suit :

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	40 344	28 987	39 605	42 371	36 873	27 789	28 364	23 376
Transféré		2 341	3 172	9 475	12 047	13 850	16 223	17 903
Total	40 344	31 328	42 777	51 846	48 920	41 638	44 587	41 279
Ecart par rapport à C16		-22%	6%	29%	21%	3%	11%	2%

Tableau 3.8 : SCR global pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Le SCR optimal pour la société A en multi-activité est celui du scénario C11/T5. Ce résultat s'explique principalement par les conclusions tirées de l'analyse du risque RC Automobile. En effet, nous avons vu que le poids de ce risque était bien plus important que les trois autres risques. L'analyse isolée de ce risque avait montré que le SCR optimal se situait également au niveau du scénario C11/T5.

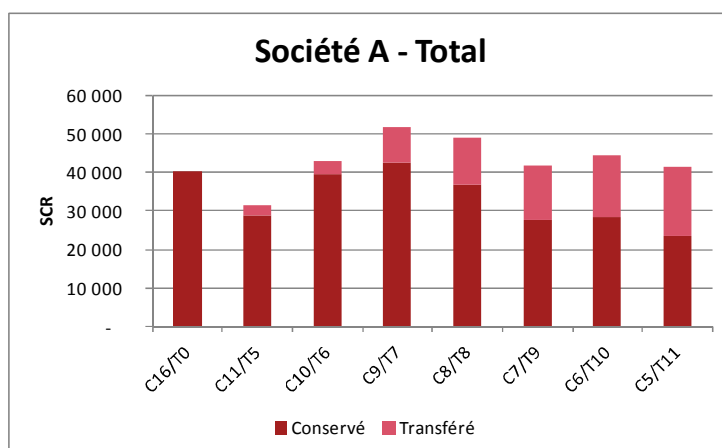


Figure 3.9 : Illustration des SCR agrégés par scénario de l'assureur A

3.4.4. Société B en mono-activité

3.4.4.1. Responsabilité Civile Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	68 208	43 137	62 041	71 624	107 747	38 678	31 248	21 413
Transféré		20 398	24 972	29 547	33 892	38 562	42 713	47 765
Total	68 208	63 534	87 012	101 170	141 639	77 240	73 961	69 178
Ecart par rapport à C16		-7%	28%	48%	108%	13%	8%	1%
Coût en capital Conservé	6%	6%	9%	12%	21%	9%	9%	7%
Coût en capital Transféré		6%	6%	6%	6%	6%	6%	6%

Tableau 3.9 : SCR RC Auto pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Le point optimal se situe au niveau du cas C11/T5 où le gain sur le SCR d'origine s'élève à 7%. Les conclusions sont donc les mêmes dans le cas de la société A.

Le cas C8 donne un SCR plus important que celui d'origine alors que 8 années de survenances ont été retirées. En analysant le triangle associé, nous remarquons que la neuvième survenance du triangle d'origine (et donc la première survenance du triangle C8) contient un rechargement atypique (cf. tableau ci-dessous) qui vient influencer fortement sur la volatilité de ce risque.

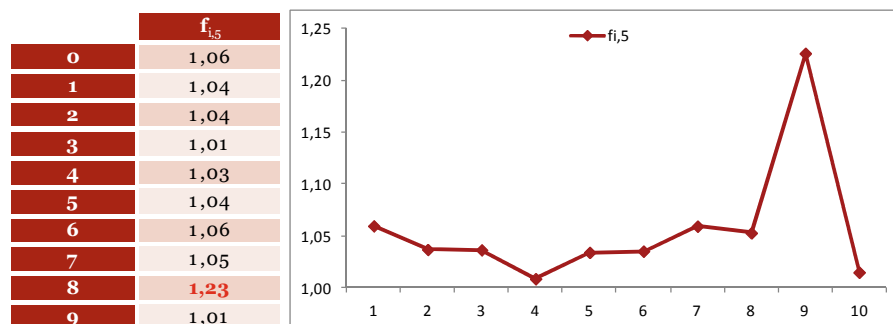


Tableau 3.10 : Facteurs de développement individuels du risque RC Automobile de la société B

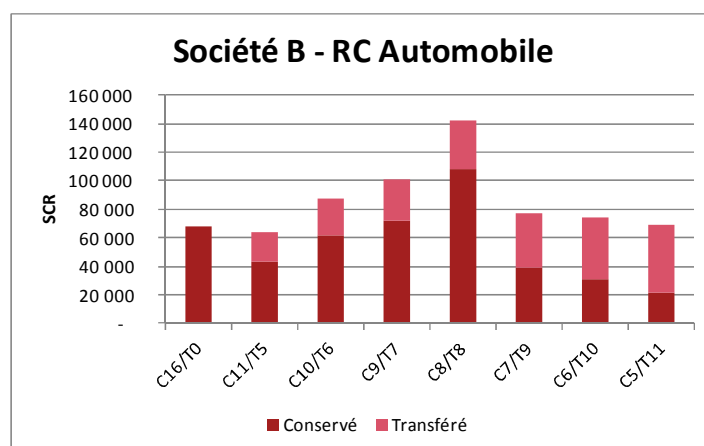


Figure 3.10 : Illustration des SCR par scénario pour la RC Auto de l'assureur B

3.4.4.2. Dommage Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	13 144	14 521	14 749	15 098	14 653	12 866	10 172	2 122
Transféré		13	23	42	67	93	114	138
Total	13 144	14 534	14 772	15 141	14 720	12 959	10 286	2 260
Ecart par rapport à C16		11%	12%	15%	12%	-1%	-22%	-83%
Coût en capital Conservé	1%	2%	2%	2%	2%	2%	2%	1%
Coût en capital Transféré		0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.11 : SCR Dommage Auto pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Pour le risque Dommage Automobile de la société B, le SCR optimal est réalisé dans le cas C5/T11 où le gain est estimé à 83%. Les raisons sont les mêmes que celle de l'assureur A sur cette branche, et plus généralement pour les risques à déroulement court.

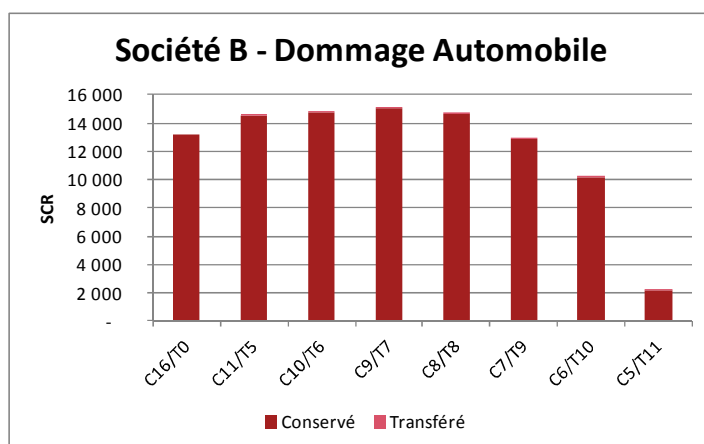


Figure 3.11 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Auto de l'assureur B

3.4.4.3. Dommage Aux Biens

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	17 784	15 385	15 135	14 769	16 425	17 853	14 595	7 102
Transféré		35	94	384	554	1 030	1 317	1 525
Total	17 784	15 421	15 229	15 152	16 979	18 882	15 912	8 628
Ecart par rapport à C16		-13%	-14%	-15%	-5%	6%	-11%	-51%
Coût en capital Conservé	2%	2%	2%	3%	3%	4%	4%	2%
Coût en capital Transféré		0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.12 : SCR Dommage Aux Biens pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Une fois encore sur un risque court, le SCR optimal se situe pour le cas extrême C5/T11. La diminution du SCR est évaluée à 51%.

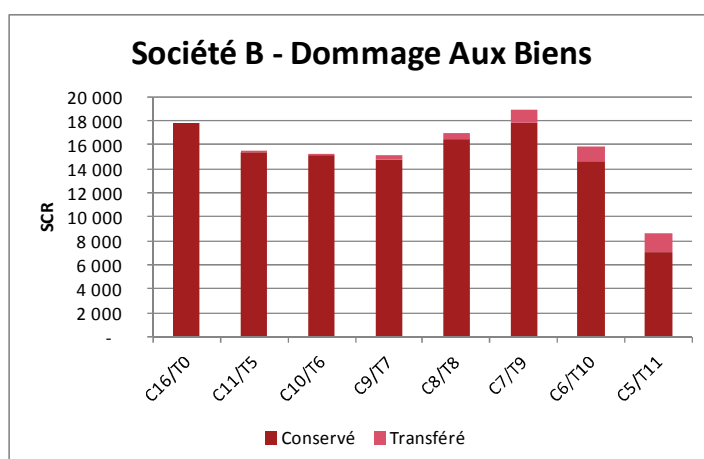


Figure 3.12 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Aux Biens de l'assureur B

3.4.5. Société B en multi-activité

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé	82 227	58 787	75 054	81 876	112 832	59 297	48 415	23 031
Transféré		20 413	25 007	29 666	34 068	38 880	43 119	48 239
Total	82 227	79 200	100 061	111 542	146 900	98 176	91 534	71 271
Ecart par rapport à C16		-4%	22%	36%	79%	19%	11%	-13%

Tableau 3.13 : SCR global pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances

Le SCR optimal pour la société B en multi-activité se trouve dans le cas C5/T11. C'est dans ce cas de figure que les risques courts analysés de manière isolée possèdent leur SCR optimal.

Nous observons également un gain pour le cas C11/T5 expliqué par le poids important du risque RC automobile.

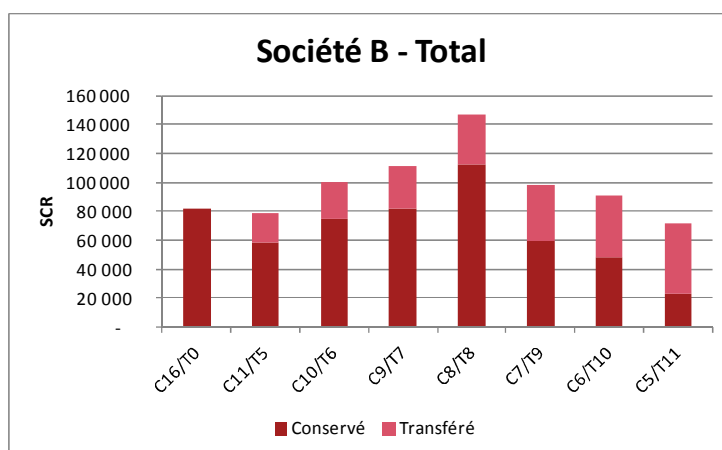


Figure 3.13 : Illustration des SCR agrégés par scénario de l'assureur B

3.4.6. Synthèse

Dans le cadre stricte de l'étude du risque de réserve, la mise en place d'une structure dédiée à la gestion des sinistres de survenances anciennes peut contribuer à l'optimisation du SCR des deux assureurs avec plus ou moins d'efficacité en fonction de la répartition des sinistres.

De manière générale, sur les risques courts, l'optimisation se réalise lorsqu'un maximum d'années de survenances est transféré. En effet, sur ce type de risque, hormis sur les deux ou trois premières années de survenances, la volatilité n'est pas significative. Ainsi, le fait d'isoler ces

survenances au même profil permet de diminuer fortement le besoin en capital de la structure dédiée à la gestion des anciennes survenances.

Sur les risques longs, le raisonnement s'inverse. En effet, l'optimisation se réalise lorsqu'un minimum d'années de survenance est transféré. Sur ce type de risque, il subsiste une forte incertitude quant aux provisions ultimes, et ce même pour des sinistres âgés. Seules les plus anciennes années de survenance possèdent une volatilité négligeable. Le fait d'isoler ces survenances au même profil permet de diminuer le besoin en capital global.

Enfin, une instabilité dans les triangles peut créer une augmentation de la volatilité et contrecarrer l'optimisation espérée. En effet, lorsque nous séparons le triangle en deux, nous allons à l'encontre du principe de mutualisation et nous obtenons alors deux ensembles au volume moins important. Cette diminution du volume a pour conséquence de rendre le risque étudié plus sensible aux volatilités présentes.

3.5. Option 3 : Mise en commun des anciennes survenances dans une société dédiée à la gestion des passifs

3.5.1. Principe

La troisième option stratégique étudiée est une combinaison des deux premières, à savoir la création d'une structure dédiée à la gestion commune des sinistres de survenances anciennes des deux sociétés. Nous supposons que les deux sociétés s'accordent pour transférer le même nombre d'années de survenances.

En termes de provisionnement, cela revient à considérer trois triangles : les deux triangles contenant les survenances récentes et qui restent gérés dans leur société d'origine et le triangle fusionné des survenances anciennes des deux assureurs :

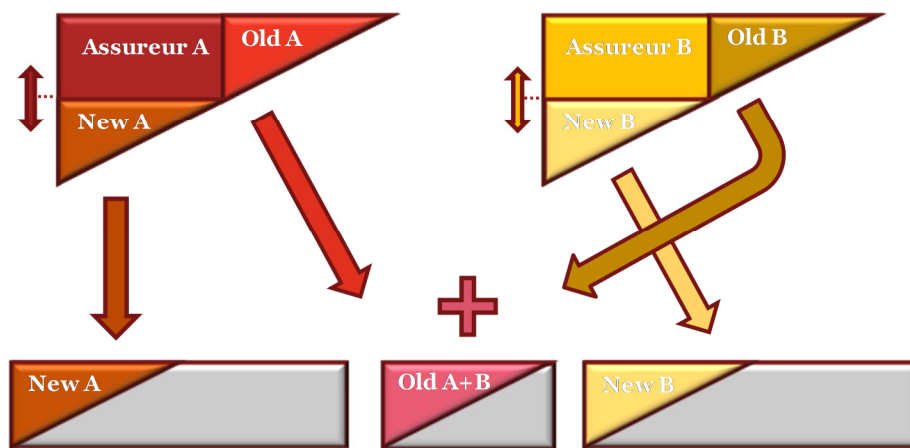


Figure 3.14 : Stratégie de mise en commun des anciennes survenances dans une structure dédiée

Nous adopterons les mêmes notations que précédemment et nous étudierons les 7 mêmes cas que l'option stratégique précédente. Pour chacun des 7 scénarii, 3 SCR seront calculés, le SCR conservé pour la société A, le SCR conservé pour la société B et le SCR transféré de A et B en commun. Pour ce dernier SCR, il faut pouvoir identifier la part revenant à chacune des deux sociétés. Nous choisissons de le faire en fonction de la valeur de σV puisque le SCR est fonction de la volatilité des provisions à horizon un an ainsi que du volume de provisions.

Une répartition à part égale du SCR fusionné serait trop pénalisante pour la société A qui présente une volatilité bien moins importante que la société B sur le risque RC Automobile notamment (cf. 3.2).

3.5.2. Sociétés A et B en mono-activité

3.5.2.1. Responsabilité Civile Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé (A)	27 170	16 374	21 330	21 431	27 514	20 867	26 003	24 719
Conservé (B)	68 208	43 137	62 041	71 624	107 747	38 678	31 248	21 413
Transféré (A+B)		19 999	24 726	29 978	34 511	39 145	43 754	48 905
Part (A) dans (A+B)		2 029	2 750	7 242	8 916	10 129	11 734	12 932
Part (B) dans (A+B)		17 970	21 976	22 736	25 596	29 016	32 021	35 973
Total (A)	27 170	18 403	24 080	28 673	36 430	30 996	37 737	37 651
Ecart par rapport à C16 (A)		-32%	-11%	6%	34%	14%	39%	39%
Total (B)	68 208	61 107	84 017	94 360	133 343	67 694	63 268	57 386
Ecart par rapport à C16 (B)		-10%	23%	38%	95%	-1%	-7%	-16%

Tableau 3.14 : SCR RC Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

Les résultats de la société A pour cette option sont similaires à ceux de l'option 2, à savoir une optimisation dans le scénario où le nombre d'années transféré est minimum.

Les résultats de la société B sont plus surprenants puisqu'elle réalise son optimisation dans le scénario C5/T11. Autrement dit, les scénarii où le nombre d'années conservées est inférieur au nombre d'années transférées présentent un SCR global en diminution par rapport au SCR initial de l'assureur B. Cela s'explique par le caractère atypique de la neuvième année de survenance du triangle d'origine. Le fait de transférer cette dernière (dans les scénarii C7/T9, C6/T10 et C5/T11) et donc de la mutualiser avec les années de survenance transférées par l'assureur A permet à l'assureur B de réaliser un gain sur son SCR par effet de la mutualisation. Nous notons également un gain pour le scénario C11/T5.

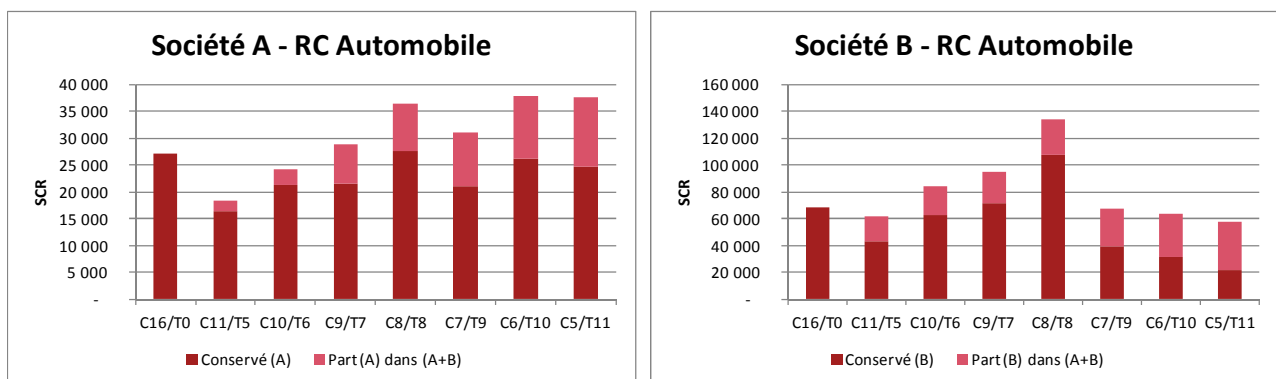


Figure 3.15 : Illustration des SCR RC Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

3.5.2.2. Dommage Automobile

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé (A)	8 599	8 811	9 202	8 995	7 841	4 966	4 029	2 932
Conservé (B)	13 144	14 521	14 749	15 098	14 653	12 866	10 172	2 122
Transféré (A+B)		13	24	44	67	95	119	154
Part (A) dans (A+B)		2	3	6	7	9	19	38
Part (B) dans (A+B)		11	21	37	60	85	99	116
Total (A)	8 599	8 813	9 205	9 001	7 848	4 975	4 049	2 970
Ecart par rapport à C16 (A)		2%	7%	5%	-9%	-42%	-53%	-65%
Total (B)	13 144	14 532	14 770	15 136	14 713	12 951	10 272	2 238
Ecart par rapport à C16 (B)		11%	12%	15%	12%	-1%	-22%	-83%

Tableau 3.15 : SCR Dommage Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

Les résultats sont équivalents à ceux de l'option précédente pour les deux assureurs. On retrouve pour ce risque court, une optimisation du SCR dans le cas où le minimum d'années de survenance est conservé, à savoir 5 années.

L'effet de la mutualisation des anciennes survenances est quasiment nul. En effet, les provisions sont quasi-nulles sur ces anciennes années de survenance rendant toute mutualisation inutile.

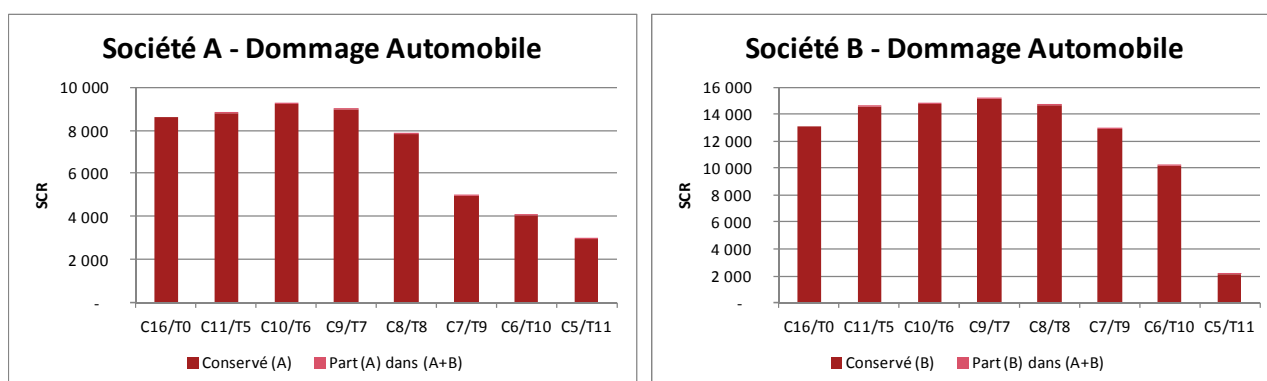


Figure 3.16 : Illustration des SCR Dommage Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

3.5.2.3. Dommage Aux Biens

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé (A)	16 783	15 027	14 668	17 499	9 451	8 030	6 564	4 241
Conservé (B)	17 784	15 385	15 135	14 769	16 425	17 853	14 595	7 102
Transféré (A+B)		150	202	494	1 077	1 763	2 227	2 647
Part (A) dans (A+B)		118	128	187	649	985	1 299	1 587
Part (B) dans (A+B)		31	74	308	428	778	928	1 059
Total (A)	16 783	15 146	14 796	17 686	10 101	9 015	7 863	5 828
Ecart par rapport à C16 (A)		-10%	-12%	5%	-40%	-46%	-53%	-65%
Total (B)	17 784	15 417	15 209	15 076	16 853	18 630	15 523	8 162
Ecart par rapport à C16 (B)		-13%	-14%	-15%	-5%	5%	-13%	-54%

Tableau 3.16 : SCR Dommage Aux Biens dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

Les conclusions sont identiques à celles de l'option stratégique précédente, à savoir une optimisation maximum réalisée pour le scénario C5/T11. Nous notons toutefois qu'un léger effet de mutualisation se réalise pour la société A traduit par une optimisation plus importante dans le cas présent (-65%) par rapport à l'option 2 (-61%). De manière analogue, l'assureur B tire également avantage de la mutualisation des anciennes survenances.

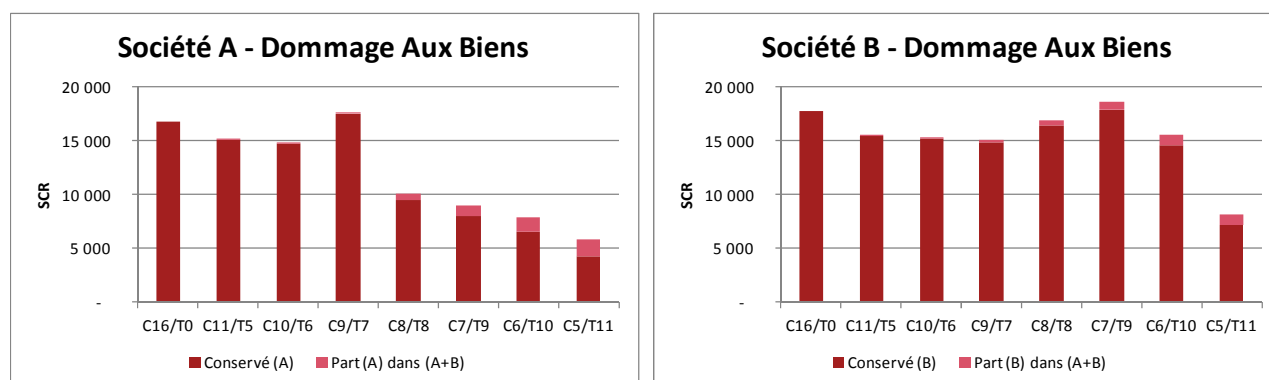


Figure 3.17 : Illustration des SCR Dommage Aux Biens dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

3.5.3. Société A et B en multi-activité

SCR	C16/T0	C11/T5	C10/T6	C9/T7	C8/T8	C7/T9	C6/T10	C5/T11
Conservé (A)	40 344	28 987	39 605	42 371	36 873	27 789	28 364	23 376
Conservé (B)	82 227	58 787	75 054	81 876	112 832	59 297	48 415	23 031
Transféré (A+B)		20 044	28 480	30 127	34 830	39 670	44 424	49 711
Part (A) dans (A+B)		2 136	3 304	7 338	9 345	10 763	12 621	14 064
Part (B) dans (A+B)		17 908	25 176	22 789	25 485	28 908	31 803	35 647
Total (A)	40 344	31 123	42 909	49 709	46 218	38 551	40 985	37 440
Ecart par rapport à C16 (A)		-23%	6%	23%	15%	-4%	2%	-7%
Total (B)	82 227	76 695	100 230	104 665	138 317	88 204	80 218	58 678
Ecart par rapport à C16 (B)		-7%	22%	27%	68%	7%	-2%	-29%

Tableau 3.17 : SCR agrégé dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

Dans la vision agrégée, la mutualisation des survenances anciennes est un réel avantage pour les sociétés A et B. Les scénarii présentant une diminution du SCR dans l'option 2 voient leur gain renforcer dans l'option 3. De plus, cette troisième option fait apparaître de nouveaux scénarii favorables (C7/T9 et C5/T11 pour A et C6/T10 pour B).

Ainsi, l'assureur A en multi-activité optimiserait son SCR dans le cas du scénario C11/T5. Ce scénario correspond principalement à l'optimisation réalisée par la branche RC Automobile.

L'assureur B en multi-activité présente une optimisation maximale de son SCR dans le cas du scénario C5/T11. En effet, c'est ce scénario qui présente l'optimisation la plus efficace pour les trois risques étudiés.

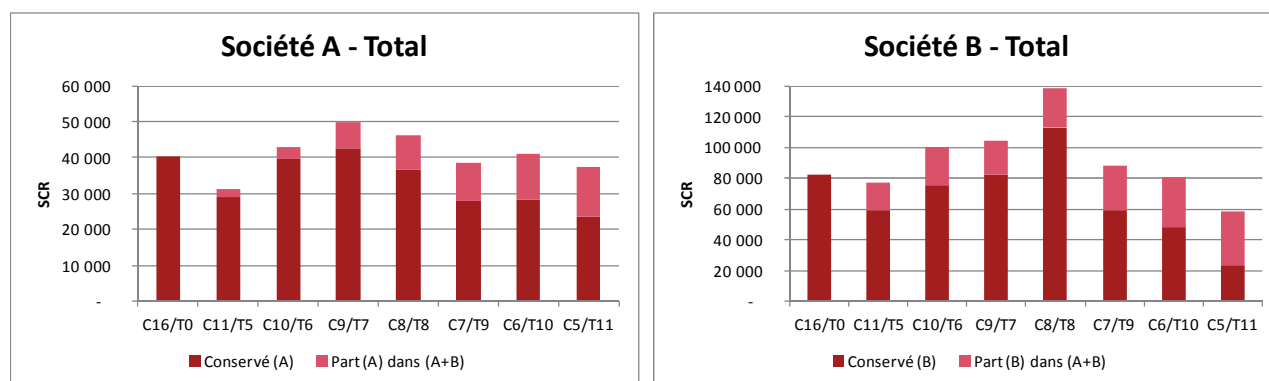


Figure 3.18 : Illustration des SCR agrégés dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B

3.5.4. Synthèse

Nous avons dans un premier temps étudié la stratégie de fusion totale des deux sociétés où nous avons conclu sur la baisse du SCR fusionné par rapport aux cumuls des SCR des deux sociétés isolés, pour tous les risques étudiés.

Puis, nous avons exploité la possibilité de séparer les sinistres en deux catégories suivant leur âge. Les sinistres anciens ainsi que leurs provisions ont été transférés vers une structure dédiée, alors que les sinistres plus récents sont conservés au sein de la structure d'origine. L'idée sous-jacente à cette option était de mettre ensemble les survenances avec des profils « similaires ». Ainsi, nous avons mis en avant la possibilité d'une optimisation du SCR pour un seuil séparant les deux catégories de survenances bien choisi.

Enfin, la dernière option résultait de la combinaison des deux premières, à savoir une mise en commun des sinistres des deux assureurs mais seulement sur les anciennes survenances. Globalement, la création d'une structure dédiée couplée à une mutualisation entre les deux assureurs a surtout été profitable à l'assureur B qui présentait des portefeuilles plus volatiles que l'assureur A. En effet, nous pouvons citer le risque RC Automobile de la société B qui par le jeu de la mutualisation sur les anciennes survenances, à réaliser une optimisation efficace de son SCR. L'assureur A n'a pas tiré un réel avantage de cette troisième option, si ce n'est de contribuer à l'optimisation du SCR de l'autre assureur.

Nous avons supposé que les deux sociétés conservent le même nombre d'années de survenance dans leur entité d'origine. Or, dans le cas présent, le scénario le plus favorable pour l'assureur A n'est pas le plus favorable pour B. Ainsi, selon le scénario choisi en commun par les deux compagnies, le SCR sera certes inférieur à celui d'origine mais ne sera pas nécessairement le SCR optimal comme estimé par l'étude qui vient d'être menée.

La fusion de deux sociétés, par l'effet de mutualisation permet un gain sur le SCR du risque de réserve. L'option 2 permet d'obtenir une optimisation plus conséquente de ce SCR mais seulement sur certains scénarii. L'option 3 permet une optimisation de même ordre que l'option 2. Néanmoins, la collaboration de deux assureurs dont le profil des provisions (volume et volatilité) est différent peut avantager l'assureur possédant une volatilité de ses provisions plus importante par effet de mutualisation avec le portefeuille moins volatile.

Conclusion

L'objet de ce mémoire est d'étudier la possibilité d'optimiser le besoin en capital réglementaire du risque de réserve dans le cadre de la Directive Solvabilité II. Pour y parvenir, nous avons proposé de modifier la structure des passifs en imaginant trois stratégies de restructuration d'entreprise.

Après avoir rappelé le contexte de l'activité d'assurance et l'importance pour une compagnie d'assurance d'être solvable, notamment sous le prisme de Solvabilité II, nous avons calculé les différents indicateurs nécessaires à la détermination du SCR du risque de réserve. Nous avons donc appliqué sur nos triangles de liquidation des sinistres les méthodes de provisionnement les plus répandues, une basée sur une formule fermée et une basée sur des simulations et ce, à l'ultime et à horizon un an. Il s'agit du modèle de Mack et du bootstrap pour mesurer le risque de provisionnement à l'ultime et du modèle de Merz et Wüthrich et du bootstrap re-reserving pour évaluer la volatilité des provisions à horizon un an.

La cohérence des résultats a été vérifiée par la validation préalable des hypothèses sous-jacentes aux différents modèles, par la comparaison des résultats entre les différentes méthodes et par l'analyse du rapport entre la volatilité à l'ultime et la volatilité à un an. Sur ce dernier point, la comparaison des erreurs de prédiction aux deux horizons montre que la volatilité des provisions à l'ultime est clairement supérieure à celle à un an pour les risques longs. Ainsi, les ratios des écarts-type à un an sur les écarts-type à l'ultime sont compris entre 50% et 60% pour les risques RC Automobile, alors qu'ils sont compris entre 90% et 100% pour les risques Dommage Automobile et Aux Biens. Ces ratios sont conformes à l'étude réalisée par l' AISAM-ACME lors du calibrage du risque de réserve.

Une fois le volume et la volatilité à horizon un an des provisions obtenus, nous avons calculé les SCR dans le cadre des différentes stratégies. La première stratégie consiste en la fusion des deux sociétés dont le concept sous-jacent était la mutualisation des provisions. Cette mutualisation permet d'optimiser le SCR à hauteur de 24% sur les risques longs (RC Automobile). L'impact est moins important pour les risques courts (Dommage Aux Biens et Dommage Automobile) puisque le volume de provisions plus faible ne permet pas l'effet de mutualisation.

La deuxième stratégie consiste à séparer les sinistres selon leur survenance sur la base que les anciennes survenances ont un profil différent des survenances récentes; l'hypothèse sous-jacente à cette seconde option étant la séparation des provisions en deux groupes de provisions homogènes. Ainsi, il est proposé de créer une structure dédiée à la gestion des sinistres des survenances anciennes à l'image des structures internes gérant les portefeuilles en run-off. Les survenances récentes restent dans la société d'origine. Plusieurs scénarios sont testés en fonction du choix du seuil séparant les anciennes des nouvelles survenances.

Sur les risques courts, l'optimisation se réalise lorsqu'un maximum de survenances est transféré. En effet, sur ce type de risque, hormis les deux ou trois premières survenances, il n'y a pratiquement plus aucune volatilité. Ainsi, le fait d'isoler ces survenances au même profil permet de diminuer fortement le besoin en capital de la structure dédiée. En parallèle, l'assureur d'origine voit son nombre d'années de survenance conservé se réduire à son minimum de sorte que le SCR afférent diminue par un effet volume.

Sur les risques longs, le scenario optimal correspond à celui où les anciennes survenances sont les moins nombreuses. En effet, sur ce type de risque, il subsiste encore de nombreuses incertitudes quelques années après l'ouverture du sinistre. L'optimisation est ainsi réalisée lorsqu'un minimum de survenances est transféré. Ces survenances correspondent aux sinistres les plus « âgés » qui présentent donc un volume et une volatilité des provisions moins importants.

Enfin, l'instabilité inhérente à ces risques peut créer une augmentation de la volatilité et contrecarrer l'optimisation espérée. C'est ce qui ressort de l'analyse des branches à déroulement long dont la volatilité joue un rôle important dans l'optimisation ou non.

La troisième option est une combinaison des deux premières. En effet, elle consiste en la fusion des sinistres de survenances anciennes et leur transfert vers une structure commune aux deux sociétés. L'idée de cette option est de profiter des avantages des deux premières options, la mutualisation et la séparation en groupe de sinistres homogènes.

Les résultats montrent une optimisation de même ordre que l'option précédente. Elle montre également que l'assureur présentant une volatilité plus importante gagne davantage que l'autre assureur par le jeu de la mutualisation.

La démarche que nous proposons comporte bien sûr des limites qui amènent donc à la plus grande modestie quant à ce constat, et aux conclusions qui pourraient en être tirées. Les options proposées ont un caractère illustratif et se base sur des notions (fusion et séparation en profil de survenance homogène) qui ne peuvent être appliquées en l'état dans la réalité. L'application de ces stratégies est soumise à bien plus de contraintes que dans le cadre de ce mémoire. Néanmoins, l'étude réalisée reste un bon indicateur pour initier une analyse plus fine de l'optimisation du capital réglementaire requis.

En effet, le principe de solvabilité II réside dans une approche globale des risques, alors que nous avons seulement étudié le risque de réserve dans ce mémoire. Bien qu'étant un des risques le plus significatif pour une compagnie Non-Vie, il peut être intéressant d'étendre l'analyse vers tous les autres risques dont les compagnies d'assurance Non-Vie sont exposées et d'y associer des stratégies proches des réalités actuelles des compagnies d'assurance.

L'option 1 (fusion) mérite d'être creusée notamment en tenant compte de la dimension actif passif. En effet, que deviendra l'actif de cette société fusionnée après la mutualisation des passifs ? L'option 2 (structure dédiée) pourrait être assimilée à une gestion des portefeuilles en run-off. Une étude sur ce sujet pourrait permettre de savoir s'il existe un réel avantage à gérer son portefeuille en run-off dans une structure dédiée sous Solvabilité II.

Enfin, nous ne disposons pas des données de primes, qui nous auraient permis de calculer le ratio SCR / Primes sans prendre l'hypothèse d'un résultat technique équilibré et d'avoir une idée réelle de ce qu'un euro de prime acquise coûterait en capital et ainsi placer cette analyse purement actuarielle dans la stratégie commerciale de développement ou non d'un risque.

Winston Churchill a dit : « *Un pessimiste voit la difficulté dans chaque opportunité, un optimiste voit l'opportunité dans chaque difficulté* ». La Directive Solvabilité II arrivera bientôt avec son lot de contraintes, mais pourquoi ne pas utiliser cette contrainte comme une opportunité ? Ce mémoire est une manière de montrer comment l'actuaire et son savoir-faire peut se retrouver au cœur de la stratégie d'entreprise et répondre ainsi à une des exigences de Solvabilité II qui souhaite que les sociétés d'assurance comprennent et connaissent mieux leur risque et utilise cette connaissance comme un outil de pilotage et de prise de décision.

Table des figures

Figure 1.1 : Inversion du cycle de production	15
Figure 1.2 : Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance	17
Figure 1.3 : Les 3 piliers de la Directive Solvabilité II.....	22
Figure 1.4 : Comparaison des bilans Solvabilité I et Solvabilité II	23
Figure 1.5 : Les 2 niveaux d'exigence en capital de Solvabilité II	25
Figure 1.6 : Représentation de la VaR 99,5%.....	26
Figure 1.7 : Structure actuelle de l'approche standard	27
Figure 1.8 : Décomposition du SCR pour les organismes Non-Vie	28
Figure 1.9 : Les grandes étapes du calcul du SCR Solvabilité II	28
Figure 2.1 : Triangles incrémentaux	36
Figure 2.2 : Triangles cumulés	37
Figure 2.3 : Triangles des facteurs de développement individuels.....	38
Figure 2.4 : Décomposition de la charge ultime	41
Figure 2.5 : Application de la méthode de Chain Ladder	41
Figure 2.6 : Illustration des étapes du bootstrap à l'ultime	52
Figure 2.7 : Validation graphique de l'hypothèse de Mack sur l'espérance pour la RC Auto de la société A	55
Figure 2.8 : Validation graphique de l'hypothèse de Mack sur la variance pour la RC Auto de la société A	56
Figure 2.9 : Fonction de répartition des provisions par Mack pour la RC Auto de la société A....	58
Figure 2.10 : Fonction de densité des provisions par Mack pour la RC Auto de la société A.....	58
Figure 2.11 : Fonction de répartition des provisions par Bootstrap pour la RC Auto de la société A	60
Figure 2.12 : Fonction de densité des provisions par Bootstrap pour la RC Auto de la société A	60
Figure 2.13 : Triangles de liquidation au temps I et I+1	63
Figure 2.14 : Illustration des étapes du bootstrap à horizon un an	75
Figure 2.15 : Fonction de répartition des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A	79
Figure 2.16 : Fonction de densité des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A	79
Figure 2.17 : Densité des distributions des bootstrap à l'ultime et à un an pour la RC Auto de la société A	81
Figure 2.18 : Fonction de répartition des CDR par bootstrap pour la RC Auto de la société A....	82
Figure 2.19 : Fonction de densité des CDR par bootstrap pour la RC Auto de la société A.....	82
Figure 2.20 : Illustration du Best Estimate et du SCR.....	85
Figure 2.21 : Evolution d'un capital « libre » au cours du temps	85
Figure 2.22 : Evolution d'un capital « bloqué » au cours du temps	86
Figure 2.23 : Illustration de la marge de risque.....	86
Figure 2.24 : Illustration du passif du bilan Solvabilité II.....	86
Figure 2.25 : Illustration des diagonales du triangle inférieur	88
Figure 2.26 : Illustration des étapes de la méthode DEKL.....	94
Figure 2.27 : Représentation graphique des SCR projetés	96
Figure 2.28 : Distribution des densités des SCR futurs	97

Figure 3.1 : Comparaison des densités ultime et à un an par risque entre les assureurs A et B..	101
Figure 3.2 : Répartition des provisions par risque pour les assureurs A et B.....	102
Figure 3.3 : Stratégie de fusion de deux sociétés	104
Figure 3.4 : Illustration des SCR dans la stratégie de fusion des sociétés A et B	106
Figure 3.5 : Stratégie de mise en place d'une structure dédiée à la gestion des anciennes survenances.....	107
Figure 3.6 : Illustration des SCR par scénario pour la RC Auto de l'assureur A	109
Figure 3.7 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Auto de l'assureur A.....	110
Figure 3.8 : Illustration des SCR par scénario pour le Dommage Aux Biens de l'assureur A.....	111
Figure 3.9 : Illustration des SCR agrégés par scénario de l'assureur A	112
Figure 3.10 : Illustration des SCR par scénario pour la RC Auto de l'assureur B.....	113
Figure 3.11 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Auto de l'assureur B.....	114
Figure 3.12 : Illustration des SCR par scénario pour la Dommage Aux Biens de l'assureur B.....	115
Figure 3.13 : Illustration des SCR agrégés par scénario de l'assureur B.....	115
Figure 3.14 : Stratégie de mise en commun des anciennes survenances dans une structure dédiée	117
Figure 3.15 : Illustration des SCR RC Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	118
Figure 3.16 : Illustration des SCR Dommage Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	119
Figure 3.17 : Illustration des SCR Dommage Aux Biens dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	120
Figure 3.18 : Illustration des SCR agrégés dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	121

Liste des Tableaux

Tableau 1.1 : Les Lines Of Business Non-Vie de Solvabilité II	30
Tableau 1.2 : Exemple de calcul du taux de marge	31
Tableau 1.3 : Exemple de calcul du coût en capital.....	31
Tableau 2.1 : Branches d'activité étudiées	38
Tableau 2.2 : Outils actuariels développés.....	39
Tableau 2.3 : Validation de l'hypothèse d'absence d'effet calendaire pour la RC Auto de la société A.....	54
Tableau 2.4 : Synthèse de la validation de l'hypothèse d'absence d'effet calendaire	54
Tableau 2.5 : Résultats de Mack sur la RC Auto de la société A	56
Tableau 2.6 : Synthèse des résultats de Mack.....	57
Tableau 2.7 : Quantiles des provisions pour la RC Auto de la société A.....	58
Tableau 2.8 : Résultats du bootstrap pour la RC Auto de la société A.....	59
Tableau 2.9 : Comparaison des lois de probabilités sur les provisions pour la RC Auto de la société A	61
Tableau 2.10 : Synthèse des résultats du bootstrap et de Mack	61
Tableau 2.11 : Test de l'hypothèse d'approximation de la formule de Merz et Wüthrich.....	77
Tableau 2.12 : Résultat de Merz et Wüthrich et comparaison avec Mack pour la RC Auto de la société A.....	77
Tableau 2.13 : Synthèse des résultats de Merz et Wüthrich	78
Tableau 2.14 : Quantiles des CDR par Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A	79
Tableau 2.15 : Comparaison des résultats du bootstrap avec Merz et Wüthrich pour la RC Auto de la société A.....	80
Tableau 2.16 : Comparaison des bootstrap à l'ultime et à horizon un an pour la RC Auto de la société A.....	81
Tableau 2.17 : VaR des CDR obtenus par bootstrap pour la RC Auto de la société A.....	83
Tableau 2.18 : Synthèse des résultats du bootstrap à horizon un an.....	83
Tableau 2.19 : Pourcentage de sinistralité par année calendaire.....	95
Tableau 2.20 : Marge de risque pour la RC Auto de la société	96
Tableau 2.21 : Synthèse des résultats du calcul de la marge de risque.....	97
Tableau 3.1 : SCR par risque pour les sociétés A et B	101
Tableau 3.2 : Coûts en capital par branche d'activité des assureurs A et B.....	102
Tableau 3.3 : SCR par risque dans la stratégie de fusion des sociétés A et B	105
Tableau 3.4 : SCR tous risques agrégés dans la stratégie de fusion des sociétés A et B	105
Tableau 3.5 : SCR RC Auto pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances.....	108
Tableau 3.6 : SCR Dommage Auto pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances	109
Tableau 3.7 : SCR Dommage Aux Biens pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances	110
Tableau 3.8 : SCR global pour la société A dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances.....	111
Tableau 3.9 : SCR RC Auto pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances.....	112

Tableau 3.10 : Facteurs de développement individuels du risque RC Automobile de la société B	113
Tableau 3.11 : SCR Dommage Auto pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances	113
Tableau 3.12 : SCR Dommage Aux Biens pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances	114
Tableau 3.13 : SCR global pour la société B dans la stratégie de gestion dédiée des anciennes survenances.....	115
Tableau 3.14 : SCR RC Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B	118
Tableau 3.15 : SCR Dommage Auto dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	119
Tableau 3.16 : SCR Dommage Aux Biens dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B.....	120
Tableau 3.17 : SCR agrégé dans la stratégie de gestion commune des anciennes survenances A et B	121

Bibliographie

- [1] ACP (2011), Solvabilité 2 : Principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5), *Analyses et Synthèses*, n°1 mars 2011.
- [2] AISAM-ACME (2007), Study on non-life long tail liabilities: Reserve risk and risk margin assessment under Solvency II, *Version du 17 Octobre 2007*.
- [3] BOUMEZOUED A., ANGOUA Y., DEVINEAU L., BOISSEAU J-P (2011), One-year reserve risk including a tail factor: closed formula and bootstrap approaches, *Working paper submitted to ASTIN*.
- [4] BOUTHIER D., HIPPOLYTE H. (2012), Mesure du risque de provisionnement à un an en assurance IARD, *mémoire d'actuariat ENSAE*.
- [5] CEIOPS (2010), Advice for Level 2 Implementing measures on Solvency II: SCR standard formula - Article 111 j, k - Undertaking-specific parameters, *EIOPA publications 29.10.2010*.
- [6] CEIOPS (2010), QIS5 Technical Specifications, *Technical report, 05.10.2010*.
- [7] DENUIT M., CHARPENTIER A. (2005), Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. TOME II : Tarification et Provisionnement, *ECONOMICA*.
- [8] DIERS D. (2008), Stochastic re-reserving in multi-year internal models: An approach based on simulations, *ASTIN Colloquium Helsinki 2009*.
- [9] DIERS D., ELING M., KRAUS C., LINDE M. (2011), The multi-year Non-Life insurance risk, *Working papers on Risk Management and Insurance, No. 96, November 2011*.
- [10] EIOPA (2013), Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment (Part I), *Technical report, 14.06.2013*.
- [11] ENGLAND P.D., VERRALL R.J. (2002), Stochastic claims reserving in general insurance, *Presented to the Institute of Actuaries, 28 January 2002*.
- [12] ENGLAND P.D., VERRALL R.J. (2006), Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance, *Annals of Actuarial Science, Issue 02, September 2006 pp221-270*.
- [13] GUILLOU C. (2011), Les risques en IARD et les impacts de Solvabilité II, *mémoire d'actuariat EURIA*.
- [14] HÜRLIMANN W. (2007), On the non-life Solvency II model, *Paper presented at the 38th International ASTIN Colloquium*.
- [15] JAZIRI S., (2011), Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, *mémoire d'actuariat ISFA*.
- [16] LADAN A. (2011), Capital requis à travers le temps pour le risque de provisionnement non vie dans un contexte Solvabilité 2, *mémoire d'actuariat ISUP*.

-
- [17] MACK T. (1993), Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates, *ASTIN bulletin*, Vol. 23, No. 2, pp213-225.
 - [18] MACK T. (1994), Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, Vol. 15, No. 2 pp133-138.
 - [19] MACK T. (1999), The standard error of Chain Ladder reserve estimates : Recursive calculation and inclusion of a tail factor. *ASTIN bulletin*, Vol. 29, No. 2, pp361-366.
 - [20] MARQUETTY Stéphane (2012), L'activité d'Assurance, *Assurance Audit Actuariat, ECONOMICA*.
 - [21] MERZ M., WÜTHRICH M.V. (2008), Modeling the Claims Development Result for solvency purposes, *Casualty Actuarial Society E-Forum*, pp542-568.
 - [22] MERZ M., WÜTHRICH M.V., LYSENKO N. (2008), Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp63-84.
 - [23] PARLEMENT ET CONSEIL EUROPEEN (2009), Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009, *Journal Officiel de l'Union Européenne*.
 - [24] PARTRAT C., LECOEUR E., NESSI J-M., NISIPASU E, REIZ O. (2007), Provisionnement technique en Assurance Non-Vie : Perspectives actuarielles modernes, *Assurance Audit Actuariat, ECONOMICA*.
 - [25] PASQUIER L. (2011), Solvabilité II et IARD : Provisionnement, exigence de solvabilité, modèle interne, *mémoire d'actuariat ISUP*.
 - [26] PITREBOIS S., DE LONGUEVILLE P., DENUIT M., WALHIN J-F. (2002), Etude de techniques IBNR modernes, *Actu-L*, Vol. 2, pp29-62.

Annexes

Annexe 1 : Calcul du SCR par la Formule Standard

Annexe 1.1 : Calcul du MCR

Le MCR définit le niveau de capital minimum requis, c'est-à-dire le minimum de fonds propres de base éligibles à détenir. En dessous de ce seuil, l'entreprise est considérée comme « techniquement » non solvable et ne peut plus fonctionner normalement avec comme conséquence l'intervention automatique de l'autorité de contrôle.

Il est calculé à partir d'une approche combinée qui fait intervenir une formule linéaire (calibrée selon une VaR 85% à un an) et un corridor (entre 25% et 45% du SCR).

$$MCR = \text{Max}(MCR_{combined} ; AMCR)$$

Où,

- ✓ $MCR_{combined} = \text{Min}[\text{Max}(MCR_{linear} ; 25\% \times SCR) ; 45\% \times SCR]$,
- ✓ AMCR est le seuil de plancher absolu.

Pour l'activité Non-Vie :

- ✓ $AMCR = 2,2 \text{ M€}$
- ✓ $MCR_{linear} = \sum_s \alpha_s \times TP_s + \beta_s \times P_s$, correspondant à la combinaison linéaire des primes et des provisions techniques sans marge pour risque des différentes LoB.
- ✓ α_s et β_s sont définis en fonction de la branche d'activité (cf. [10], section MCR.3).

Annexe 1.2 : Calcul du SCR

Le SCR se calcule comme suit :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Avec :

- ✓ Adj : Ajustements liés aux propriétés d'absorption du risque des futures participations aux bénéfices et des impôts différés.
- ✓ SCR_{op} : Le SCR au titre du risque Opérationnel.
- ✓ BSCR : le SCR de base.

Le BSCR s'obtient par la formule suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangible}$$

Où $Corr_{ij}$ est la matrice de corrélation des risques :

$Corr_{ij}$	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	100%				
Default	25%	100%			
Life	25%	25%	100%		
Health	25%	25%	25%	100%	
Non-Life	25%	50%	0%	0%	100%

Annexe 1.3 : Démonstration des formules mathématiques du risque de primes et de réserve dans la Formule Standard

1. Contexte

On se place dans le contexte suivant :

- ✓ Une période $[I ; I+1]$ représentant une année.
- ✓ En début de période, nous avons connaissance du volume des primes perçues P ,
- ✓ Ainsi que des provisions R_n .
- ✓ L'inconnue réside dans la charge de sinistres S de cette période.

La perte (potentielle) de l'assureur sur la période $[I ; I+1]$ est définie comme la différence entre les charges à supporter sur la période et les primes perçues :

$$L = S - P$$

La charge de la période peut se décomposer comme la somme des règlements et de la variation des provisions entre la fin et le début de la période, et ce en séparant les sinistres connus (survenance antérieures) des sinistres à venir :

$$S = D^{PY} + D^{NY} + R_{I+1}^{PY} - R_I^{PY} + R_{I+1}^{NY}$$

Avec, $\left\{ \begin{array}{l} D^{PY} : \text{les règlements des sinistres connus} \\ D^{NY} : \text{les règlements des sinistres à venir} \\ R_{I+1}^{PY} : \text{la provision en } I+1 \text{ des sinistres connus} \\ R_I^{PY} : \text{la provision en } I \text{ des sinistres connus} \\ R_{I+1}^{NY} : \text{la provision en } I+1 \text{ des sinistres à venir} \\ R_I^{NY} : \text{la provision en } I \text{ des sinistres à venir,} \\ \text{soit } 0 \text{ (pas de provisions pour des sinistres non survenus)} \end{array} \right.$

D'où finalement, $L = \underbrace{D^{PY} + R_{I+1}^{PY} - R_I^{PY}}_{\text{Risque de réserve}} + \underbrace{D^{NY} + R_{I+1}^{NY}}_{\text{Risque de primes}} - P$

155

On retrouve les deux risques décrits précédemment :

- ✓ Le risque de réserve sur les sinistres connus.
- ✓ Le risque de primes sur les sinistres à venir.

2. Volume du portefeuille

Le volume du portefeuille de l'assureur se définit comme la somme des primes et des provisions observées en début de période, soit : $V = P + R_I^{PY}$

Toujours dans le souci de distinguer les 2 risques, on peut noter $\begin{cases} V_{pr} = P, \text{ le volume de primes} \\ V_{res} = R_I^{PY}, \text{ le volume de réserve} \end{cases}$

D'où, $V = V_{pr} + V_{res}$

3. Ratio de perte

Le ratio de perte est défini comme le rapport de la perte sur le volume du portefeuille, soit :

$$\begin{aligned} \frac{L}{V} &= \frac{D^{PY} + R_{I+1}^{PY} - R_I^{PY} + D^{NY} + R_{I+1}^{NY} - P}{P + R_I^{PY}} \\ &= \frac{D^{PY} + D^{NY} + R_{I+1}^{PY} + R_{I+1}^{NY} - (P + R_I^{PY})}{P + R_I^{PY}} \\ &= \frac{D^{PY} + D^{NY} + R_{I+1}^{PY} + R_{I+1}^{NY}}{P + R_I^{PY}} - 1 \\ &= Y - 1 \end{aligned}$$

Avec $Y = \frac{D^{PY} + D^{NY} + R_{I+1}^{PY} + R_{I+1}^{NY}}{P + R_I^{PY}}$ le ratio combiné de l'assureur qui matérialise le risque de ruine.

Ce ratio combiné peut se réécrire comme : $Y = \frac{D^{PY} + D^{NY}}{P} \times \frac{P}{P + R_I^{PY}} + \frac{R_{I+1}^{PY} + R_{I+1}^{NY}}{R_I^{PY}} \times \frac{R_I^{PY}}{P + R_I^{PY}}$

Ce qui permet de distinguer $\begin{cases} Y_{pr} = \frac{D^{PY} + D^{NY}}{P}, \text{ le ratio du risque de primes} \\ Y_{res} = \frac{R_{I+1}^{PY} + R_{I+1}^{NY}}{R_I^{PY}}, \text{ le ratio du risque de réserve} \end{cases}$ et finalement :

$$Y = Y_{pr} \times \frac{V_{pr}}{V} + Y_{res} \times \frac{V_{res}}{V}$$

4. Espérance et variance du ratio combiné

Espérance :

On cherche à calculer l'espérance du ratio combiné dans l'hypothèse que l'espérance de la perte soit nulle :

$$E(L) = 0 \Leftrightarrow E(V(Y-1)) = 0 \Leftrightarrow V \times E(Y-1) = 0 \Leftrightarrow E(Y-1) = 0 \Leftrightarrow E(Y) = 1$$

On note alors $\mu = E(Y) = 1$.

Variance :

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \text{Var}\left(Y_{pr} \times \frac{V_{pr}}{V} + Y_{res} \times \frac{V_{res}}{V}\right)$$

On suppose qu'il existe une corrélation entre le risque de primes et le risque de réserve, notée $\rho_{pr\&res}$.

$$\text{En notant } \begin{cases} \sigma^2 = \text{Var}(Y) \\ \sigma_{pr}^2 = \text{Var}(Y_{pr}) \\ \sigma_{res}^2 = \text{Var}(Y_{res}) \end{cases} \text{ et avec la relation } \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \times \text{Cov}(X, Y)$$

on obtient alors :

$$\sigma^2 = \frac{(\sigma_{pr} \times V_{pr})^2 + (\sigma_{res} \times V_{res})^2 + 2 \times \rho_{pr\&res} \times (\sigma_{pr} \times V_{pr}) \times (\sigma_{res} \times V_{res})}{V^2}$$

La volatilité du ratio combiné est donc constituée des volatilités des risques de primes et de réserve ainsi que de la corrélation entre ces deux risques. Cette écriture correspond à la formule permettant de déterminer pour une LoB donnée, la volatilité agrégée des risques de primes et de réserve dans la Formule Standard de Solvabilité II.

5. Capital requis en VaR 99,5% : SCR du risque de primes et réserve

Sous les hypothèses de Solvabilité II, le capital doit correspondre à une VaR des fonds propres de base de l'entreprise avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon un an (Article 101.3 de la Directive Solvabilité II, cf. [23]). Cela se traduit mathématiquement par :

$$\text{VaR}_{99,5\%}(L)$$

$$\text{VaR}_{99,5\%}(L) = \text{VaR}_{99,5\%}(V \times (Y-1)) = (\text{VaR}_{99,5\%}(Y) - 1) * V$$

On cherche donc à déterminer $\text{VaR}_{99,5\%}(Y)$.

Par définition de la VaR : $P(Y \leq \text{VaR}_{99,5\%}(Y)) = 99,5\%$

On suppose que Y suit une loi Log-Normale d'espérance μ et de variance σ^2 tels que définis précédemment. On sait alors que $X = \ln(Y)$ suit une loi Normale d'espérance μ_X et de variance σ_X^2 ,

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu_X = \ln(\mu) - \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1+\sigma^2}{\mu^2}\right) \\ \sigma_X^2 = \ln\left(\frac{1+\sigma^2}{\mu^2}\right) \end{cases}, \text{ soit sachant que } \mu=1 : \begin{cases} \mu_X = -\frac{1}{2} \times \ln(1+\sigma^2) \\ \sigma_X^2 = \ln(1+\sigma^2) \end{cases}$$

On obtient,

$$\begin{aligned} P(Y \leq \text{VaR}_{99,5\%}(Y)) &= 99,5\% \\ P(\ln(Y) \leq \ln(\text{VaR}_{99,5\%}(Y))) &= 99,5\% \\ P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{\ln(\text{VaR}_{99,5\%}(Y)) - \mu_X}{\sigma_X}\right) &= 99,5\% \\ P\left(N(0,1) \leq \frac{\ln(\text{VaR}_{99,5\%}(Y)) - \mu_X}{\sigma_X}\right) &= 99,5\% \end{aligned}$$

On déduit que $\frac{\ln(\text{VaR}_{99,5\%}(Y)) - \mu_X}{\sigma_X} = N_{99,5\%}$, où $N_{99,5\%}$ est le quantile 99,5% de la loi Normale centrée réduite, soit :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{99,5\%}(Y) &= \exp(\mu_X) \times \exp(N_{99,5\%} \times \sigma_X) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \times \ln(1+\sigma^2)\right) \times \exp\left(N_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right) \\ &= \frac{\exp\left(N_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right)}{\sqrt{1+\sigma^2}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{VaR}_{99,5\%}(L) = \left(\frac{\exp\left(N_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right)}{\sqrt{1+\sigma^2}} - 1 \right) * V$$

Cette écriture représente l'écart entre la VaR à 99,5% du ratio combiné et sa moyenne supposée égale à 1. En appliquant cet écart au volume du portefeuille, on obtient alors la mesure du risque de primes et de réserve sous les principes de Solvabilité II.

Annexe 1.4 : Calcul du SCR Risque de primes et de réserve en Formule Standard

1. Définitions

La Directive définit dans l'Article 105 le risque de primes et de réserve comme « le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de

fluctuations affectant la date de survenance, la fréquence et la gravité des événements assurés, ainsi que la date et le montant des règlements de sinistres. »

Le risque de primes est un risque de sous-tarification en relation avec les sinistres qui surviendront dans un an, il concerne la possibilité que les dépenses et les pertes soient supérieures aux primes perçues.

Le risque de réserve est un risque de sous-évaluation des provisions techniques relatives aux sinistres survenus découlant d'une mauvaise estimation du montant des provisions pour sinistres mais aussi de l'écart entre le montant réel des sinistres et l'estimation moyenne qui peut en être faite.

2. Calcul du SCR

Le calcul du SCR relatif au risque de primes et de réserve dans la Formule Standard de Solvabilité II s'effectue en 3 étapes :

- ✓ Détermination des indicateurs de volume de primes et de réserve.
- ✓ Détermination de la volatilité agrégée du risque de primes et de réserve.
- ✓ Détermination du montant de capital exigé au titre du risque de primes et de réserve.

Ce mémoire porte sur le risque de réserve Non-Vie, néanmoins son calcul par la Formule Standard est lié à celui du risque de primes. Nous allons donc décrire par la suite les modalités de calcul au titre de ces deux risques dans la Formule Standard.

Indicateur de volume

Le volume agrégé de chaque LoB est donné par :

$$V_s = (V_{(pr,s)} + V_{(res,s)}) \times (0,75 + 0,25 \times DIV_s)$$

Avec,

- ✓ $V_{(pr,s)}$ l'indicateur de volume de primes,
- ✓ $V_{(res,s)}$ l'indicateur de volume de réserves correspondant au Best Estimate des provisions pour sinistres à payer nettes de réassurance pour chaque segment s,
- ✓ DIV_s l'effet de diversification géographique.

Le volume global toutes LoB confondues est donné par la formule suivante :

$$V = \sum_s V_s$$

Volatilité

Pour chaque LoB, la volatilité σ_s agrégeant les aspects primes et réserves est calculée en tenant compte du volume et de la volatilité des deux risques, ainsi qu'une corrélation de 50% entre eux :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{(pr,s)} \times V_{(pr,s)})^2 + (\sigma_{(pr,s)} \times V_{(pr,s)}) \times (\sigma_{(res,s)} \times V_{(res,s)}) + (\sigma_{(res,s)} \times V_{(res,s)})^2}}{V_{(pr,s)} + V_{(res,s)}}$$

La démonstration de cette formule se trouve en Annexe 1.3.4. Les volatilités des primes $\sigma_{(pr,s)}$ et des réserves $\sigma_{(res,s)}$ par LoB, calibrés pour la Formule Standard sont les suivantes :

LoB	σ_{primes}	$\sigma_{\text{réserves}}$
Motor vehicle liability	10% * NP _{lob}	9%
Other motor	8% * NP _{lob}	8%
Marine, Aviation and Transport	15% * NP _{lob}	11%
Fire and other damage to property	8% * NP _{lob}	10%
General liability	14% * NP _{lob}	11%
Credit and Suretyship	12% * NP _{lob}	19%
Legal expenses	7% * NP _{lob}	12%
Assistance	9% * NP _{lob}	20%
Miscellaneous financial loss	13% * NP _{lob}	20%
Non-proportionnal reinsurance Property	17%	20%
Non-proportionnal reinsurance Casualty	17%	20%
Non-proportionnal reinsurance MAT	17%	20%

Les volatilités des primes ont été calibrées par l'EIOPA sur des données en brutes de réassurance. Le facteur NP est un terme utilisé pour réduire la volatilité en cas d'utilisation d'un traité de réassurance non-proportionnelle.

Enfin, la volatilité globale est obtenue en agrégeant toutes les LoB au moyen d'une matrice de corrélation des LoB Non-Vie par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{1}{V} \times \sqrt{\sum_{s,t} CorrLoB_{(s,t)} \times \sigma_s \times \sigma_t \times V_s \times V_t}$$

Où, $CorrNL_{(s,t)}$ est la matrice de corrélation des LoB Non-Vie.

CorrLoB _(s,t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 : Motor vehicle liability	100%											
2 : Other motor	50%	100%										
3 : Marine, Aviation and Transport	50%	25%	100%									
4 : Fire and other damage to property	25%	25%	25%	100%								
5 : General liability	50%	25%	25%	25%	100%							
6 : Credit and Suretyship	25%	25%	25%	25%	50%	100%						
7 : Legal expenses	50%	50%	25%	25%	50%	50%	100%					
8 : Assistance	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%	100%				
9 : Miscellaneous financial loss	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	100%			
10 : Np reinsurance Property	25%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	25%	100%		
11 : Np reinsurance Casualty	25%	25%	50%	50%	25%	25%	25%	25%	50%	25%	100%	
12 : Np reinsurance MAT	25%	25%	25%	50%	25%	25%	25%	50%	25%	25%	25%	100%

SCR

Le SCR du risque de primes et de réserve est donné par :

$$SCR_{pr\&res} = \rho(\sigma) * V$$

Avec $\rho(\sigma)$ une fonction de σ qui permet d'obtenir l'écart entre le quantile 99,5% du risque et son espérance. Cette fonction s'écrit comme suit :

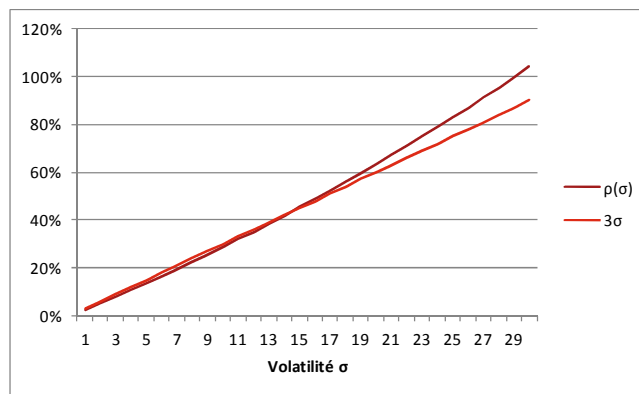
$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(N_{99,5\%} \times \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)}\right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1, \text{ dans l'hypothèse d'une distribution Log-Normale du risque}$$

sous-jacent. $N_{99,5\%}$ est le quantile 99,5% d'une loi Normale centrée réduite.

La démonstration de l'écriture de $\rho(\sigma)$ est donnée en Annexe 1.3.5.

Annexe 1.5 : Analyse de l'approximation de la formule de calcul du SCR du risque de primes et de réserves

Les écarts entre les formules exactes et approximées sont faibles pour des valeurs de σ inférieures à 15%. Au-delà, les deux fonctions divergent, comme l'illustre le graphe ci-dessous :



L'approximation va légèrement amplifier le besoin en capital pour des valeurs de σ inférieures à 15%. C'est l'inverse qui se produit pour des volatilités supérieures à 15%.

Annexe 2 : Calibrage de la procédure bootstrap

Annexe 2.1 : Bootstrap à l'ultime

1. Nombre de simulations nécessaires

La procédure bootstrap repose sur des simulations pour estimer l'erreur quadratique moyenne de prédiction des provisions. L'idéal serait d'effectuer un très grand nombre de simulations. Cependant, face à la problématique du temps de calcul et du nombre de triangle à manipuler, nous cherchons dans un premier temps à déterminer le nombre de simulations nécessaires et suffisantes pour obtenir des résultats précis avec un temps de calcul raisonnable.

Dans le cadre de ce mémoire, la méthode du bootstrap a été implémentée sous Excel avec la programmation Vba. Pour ce test, nous considérons les nombres de simulations possibles suivantes : 1 000, 2 000, 5 000, 10 000, 20 000, 50 000 et 100 000 simulations. A chaque nombre de simulations, cinq procédures bootstrap sont lancées. Ainsi, pour chaque série de cinq, nous en déduisons une moyenne et une écart-type puis nous les comparons à la moyenne et l'écart-type des 5 résultats issus de 100 000 simulations, que nous considérons comme le nombre de simulations de référence.

Le tableau ci-dessous donne pour chaque nombre de simulations, la moyenne des 5 procédures bootstrap associées ainsi que l'écart par rapport à 100 000 simulations :

Nombre de simulations	Provisions	Ecart par rapport à 100 000	MSEP ^{1/2}	Ecart par rapport à 100 000	VaR 50%	Ecart par rapport à 100 000	VaR 99,5%	Ecart par rapport à 100 000	Temps de calcul par rapport à 100 000
1 000	117 017	0,17%	18 233	-0,07%	116 583	0,18%	166 644	0,74%	103
2 000	115 770	-0,89%	18 761	2,82%	115 794	-0,50%	164 134	-0,77%	47
5 000	116 788	-0,02%	18 538	1,60%	116 708	0,29%	165 891	0,29%	20
10 000	116 878	0,05%	18 473	1,24%	116 469	0,08%	166 210	0,48%	10
20 000	116 746	-0,06%	18 304	0,32%	116 354	-0,02%	166 070	0,40%	5
50 000	116 868	0,05%	18 323	0,42%	116 322	-0,04%	165 276	-0,08%	2
100 000	116 815		18 246		116 373		165 413		

Le tableau ci-dessous donne les écarts-type et le coefficient de variation pour chaque nombre de simulations sur les indicateurs suivis :

Ecart-type sur les 5 séries de simulations								
	Provisions	cv	MSEP ^{1/2}	cv	VaR 50%	cv	VaR 99,5%	cv
1 000	529	0,45%	390	2,11%	974	0,84%	1 556	0,93%
2 000	651	0,56%	420	2,31%	651	0,56%	2 711	1,64%
5 000	197	0,17%	272	1,49%	233	0,20%	1 062	0,65%
10 000	165	0,14%	132	0,72%	189	0,16%	372	0,22%
20 000	95	0,08%	116	0,63%	95	0,08%	679	0,41%
50 000	105	0,09%	73	0,40%	78	0,07%	742	0,45%
100 000	24	0,02%	36	0,20%	43	0,04%	309	0,19%

Au vu des résultats, le meilleur compromis entre temps de calcul et précision semble être 10 000 simulations. Le temps de calcul y est 10 fois plus rapide et les écarts sont raisonnables et assez proches des résultats à 20 000 simulations. Nous opterons pour des bootstrap à 10 000 simulations.

2. Test de sensibilité de l'erreur de processus

Dans la procédure bootstrap, l'erreur de processus est captée par l'intermédiaire d'une distribution théorique. L'outil bootstrap implémenté dans le cadre de ce mémoire permet de choisir entre les lois Gamma, Normale ou Log-Normale.

Le tableau ci-dessous donne pour les 4 branches de la société A, les quantiles de la distribution obtenue en fonction des lois choisies pour intégrer l'erreur de processus (moyenne sur 5 procédures) :

RC Automobile :

	5%	10%	25%	50%	75%	95%	99%	99,5%
Normale	87 773	93 439	104 284	116 708	129 092	147 389	159 786	165 276
Log-Normale	87 610	93 738	104 212	116 259	128 812	147 210	161 428	166 230
Gamma	87 365	93 283	104 252	116 629	129 179	147 613	161 018	166 145

Dommage Automobile :

	5%	10%	25%	50%	75%	95%	99%	99,5%
Normale	10 689	11 780	13 497	15 416	17 365	20 100	21 925	22 565
Log-Normale	10 824	11 864	13 529	15 456	17 347	20 244	22 174	22 935
Gamma	10 712	11 731	13 509	15 430	17 361	20 208	22 132	22 811

Dommages Aux Biens :

	5%	10%	25%	50%	75%	95%	99%	99,5%
Normale	14 102	16 322	20 037	24 102	28 081	33 940	38 793	40 146
Log-Normale	14 623	16 571	20 028	23 823	28 092	34 346	38 779	40 273
Gamma	14 260	16 355	19 741	23 761	28 116	34 354	38 188	40 150

RC Générale :

	5%	10%	25%	50%	75%	95%	99%	99,5%
Normale	14 482	16 786	20 264	24 366	28 655	34 978	39 517	41 120
Log-Normale	14 482	16 786	20 264	24 359	28 622	34 898	39 535	41 206
Gamma	14 723	16 811	20 349	24 359	28 620	35 172	40 044	41 558

Les VaR restent proches quelque soit la loi sélectionnée, même si les lois Log-Normale ou Gamma donnent très souvent les valeurs les plus importantes aux quantiles élevés.

Le choix de la loi de probabilité pour tenir compte de l'erreur de processus dans la procédure bootstrap n'a donc pas d'impact important sur le résultat. Nous opterons donc pour l'incorporation de l'erreur de processus par une loi Log-Normale.

Annexe 2.2 : Bootstrap à horizon un an

1. Nombre de simulations nécessaires

En termes de temps de calcul, on observe un vrai gain de temps jusqu'à 10 000 simulations par rapport à 100 000 simulations. Pour 10 000 simulations les écarts sont acceptables et on n'observe pas de réel « gain » à passer à 20 000 simulations comme le montrent les coefficients de variation.

Nombre de simulations	MSEP ^{1/2}	Ecart par rapport à 100 000	VaR 99,5%	Ecart par rapport à 100 000	Temps de calcul par rapport à 100 000
1 000	9 272	1,33%	24 262	1,85%	65
2 000	9 231	0,87%	24 520	2,93%	37
5 000	9 183	0,35%	24 044	0,93%	19
10 000	9 134	-0,18%	23 742	-0,33%	10
20 000	9 169	0,20%	23 572	-1,05%	5
50 000	9 159	0,09%	23 689	-0,56%	2
100 000	9 151		23 822		

	Ecart-type sur les 5 séries de simulations			
	MSEP ^{1/2}	cv	VaR 99,5%	cv
1 000	210	2,27%	685	2,83%
2 000	107	1,16%	1 303	5,31%
5 000	125	1,36%	827	3,44%
10 000	46	0,51%	377	1,59%
20 000	40	0,44%	436	1,85%
50 000	34	0,37%	351	1,48%
100 000	23	0,25%	354	1,49%

Un choix de 10 000 simulations est donc un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Nous réalisons par la suite 10 000 simulations pour l'application de la méthode du bootstrap à horizon un an.

2. Test de sensibilité sur l'erreur de processus

Pour chaque risque, 5 séries de 10 000 simulations ont été effectuées pour chacune des 3 lois de probabilité sélectionnées pour l'intégration de l'erreur de processus. Une moyenne sur chacune des 5 séries a été calculée et est présentée dans le tableau ci-dessous :

RC Automobile :

	50%	75%	90%	95%	99%	99,5%	99,9%	99,9% / 99,5%
Normale	- 98	6 090	11 614	14 919	21 242	23 487	28 596	1,22
Log-Normale	- 159	6 086	11 794	15 277	21 879	24 146	29 433	1,22
Gamma	- 123	6 017	11 781	15 171	21 879	24 406	29 160	1,19

Domage Automobile :

	50%	75%	90%	95%	99%	99,5%	99,9%	99,9% / 99,5%
Normale	35	1 973	3 737	4 787	6 740	7 529	9 494	1,26
Log-Normale	- 12	1 917	3 699	4 778	6 791	7 545	8 603	1,14
Gamma	29	1 952	3 704	4 771	6 745	7 538	9 068	1,20

Dommmages Aux Biens :

	50%	75%	90%	95%	99%	99,5%	99,9%	99,9% / 99,5%
Normale	- 93	3 713	7 089	9 184	13 316	14 694	17 512	1,19
Log-Normale	- 235	3 645	7 217	9 642	13 567	15 206	18 357	1,21
Gamma	- 119	3 677	7 132	9 252	13 413	14 664	17 342	1,18

RC Générale :

	50%	75%	90%	95%	99%	99,5%	99,9%	99,9% / 99,5%
Normale	203	2 502	4 558	5 865	8 375	9 267	10 935	1,18
Log-Normale	120	2 474	4 661	6 095	8 771	9 731	11 366	1,17
Gamma	71	2 434	4 585	5 962	8 198	9 280	11 428	1,23

La loi Log-Normale donne majoritairement les VaR les plus élevées pour les quantiles élevés. Le rapport entre la VaR 99,9% et la VaR 99,5% montre qu'elle présente également une certaine stabilité au niveau de sa queue de distribution. Le choix de cette distribution pour l'intégration de l'erreur de processus est donc satisfaisant.

Annexe 3 : Méthodes de calcul de la marge de risque préconisées par l'EIOPA

1. Recalcul du SCR agrégé pour chaque année de projection (niveau 1)

La méthode la plus précise pour calculer la marge de risque consiste à calculer un par un les SCR agrégés pour chaque année de projection, et ensuite les actualiser au taux sans risque. Si bien que cette approche soit la plus exacte, elle requiert des ressources non négligeables en temps et en efforts de calcul. En effet, pour chaque année, il est nécessaire de recalculer le SCR correspondant, et donc d'appliquer la formule standard ou le modèle interne sur l'ensemble des modules de risque pour ensuite obtenir un SCR agrégé.

2. Simplifications par modules et sous-modules de risque (niveau 2)

Solvabilité II repose sur une approche modulaire : le risque supporté par l'assureur est décomposé en modules de risque, à la fois décomposés en sous-modules. Chaque sous-module peut regrouper des facteurs de risque élémentaires. Le SCR résulte de l'agrégation des capitaux sous risque de chaque module. Nous pouvons effectuer des simplifications au sein de certains modules de risque pour optimiser le calcul du SCR pour chaque année de projection. Dans le cas d'un portefeuille Non-Vie, nous pouvons réaliser les approximations suivantes :

- ✓ Le risque de marché résiduel peut être considéré comme immatériel.
- ✓ Si le volume de primes pour l'année t est négligeable par rapport au volume de réserves, le volume de primes pour l'année correspondante peut être fixé à 0. C'est notamment le cas de portefeuilles n'incluant pas de contrats pluriannuels, pour lesquels le volume de primes peut être fixé à zéro dès la deuxième année de projection.
- ✓ Si le volume de primes est nul, le SCR pour le module « risque de Souscription Non-Vie » peut être approché par la formule : $SCR_{Non-Vie} = 3 \times \sigma_{res} \times PCO_t$

$$\text{Avec } \begin{cases} \sigma_{res} : \text{l'écart-type correspondant au risque de réserve} \\ PCO_t : \text{le Best Estimate des provisions pour sinistre} \end{cases}$$

- ✓ De plus, l'écart-type peut être considéré comme constant au cours du temps.

3. Simplifications sur le SCR par années de projection (niveau 3)

Au lieu de recalculer le SCR pour chaque année de projection par agrégation des modules de risque, nous pouvons considérer que le SCR agrégé est proportionnel au Best Estimate des provisions techniques pour chaque année de projection. Ainsi, le SCR correspondant à l'année t peut être déduit à partir des provisions projetées pour l'année t .

Le coefficient de proportionnalité est donné par le rapport entre le SCR et le Best Estimate des provisions de l'année en cours. Ainsi, pour chaque année de projection, on a :

$$SCR_t = SCR_0 \times \frac{BE_t}{BE_0}, \text{ pour } (t \geq 1)$$

Cette approximation permet de prendre en compte à la fois la maturité et le profil de liquidation du portefeuille, tout en supposant que le profil de risque du portefeuille est invariant au cours du temps.

Cette approche peut être utilisée « par parties », sur différentes périodes de temps, afin d'obtenir des résultats plus précis, notamment en cas de changements ponctuels de la structure du portefeuille.

4. Estimation de l'ensemble des SCR futurs en une seule étape (niveau 4)

Cette approche consiste à utiliser la duration du passif afin de calculer l'ensemble des SCR futurs en une seule étape, et donc d'obtenir directement la marge de risque, à travers la formule :

$$RM = \frac{CoC}{1+r_1} \times Dur_0^{\text{mod}} \times SCR_0$$

Avec $\begin{cases} CoC : \text{taux de Coût de Capital} = 6\% \\ Dur_0^{\text{mod}} : \text{duration modifiée du passif} \\ r_1 : \text{taux sans risque à horizon un an} \end{cases}$

Cette approximation permet de prendre en compte la duration des engagements d'assurance dans le calcul de la marge de risque, mais suppose que le profil de liquidation et le profil de risque soient stables au cours du temps.

5. Estimation de la marge de risque proportionnellement au BE (niveau 5)

Cette approche, très simplifiée, suppose que la marge de risque est proportionnelle au Best Estimate des provisions techniques pour l'année en cours :

$$RM = \alpha_{lob} \times BE_0$$

Avec $\begin{cases} \alpha_{lob} : \text{un pourcentage fixé pour une branche d'activité donnée} \\ BE_0 : \text{Best Estimate des provisions techniques calculé en } t=0 \end{cases}$

Le pourcentage à appliquer doit être calibré en fonction du profil de risque et de la duration du portefeuille considéré.

6. Remarques concernant la justification du niveau de simplification retenu

Lorsqu'un assureur décide d'appliquer une des approches simplifiées (niveaux 2 à 5), il doit évaluer à quel point les hypothèses nécessaires pour appliquer une telle simplification sont vérifiées (invariabilité des profils de risque, stabilité de la structure du portefeuille au cours du temps, duration commune à l'ensemble des engagements ...).

Si certaines hypothèses ne sont pas vérifiées, l'assureur doit mener une étude pour quantifier l'impact lié au non respect des hypothèses concernées.

- ✓ Si l'impact s'avère non significatif, l'assureur peut utiliser cette formule.
- ✓ Sinon, il devra utiliser soit l'approche non simplifiée (niveau 1), soit une approche plus sophistiquée.

De plus, l'approche la plus simplifiée ne peut être utilisée que si l'assureur est capable de démontrer qu'aucune des autres approximations précédentes n'est applicable.

Annexe 4 : Résultats par branche d'activité et par société

Domage Automobile / Société A :

➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H1)

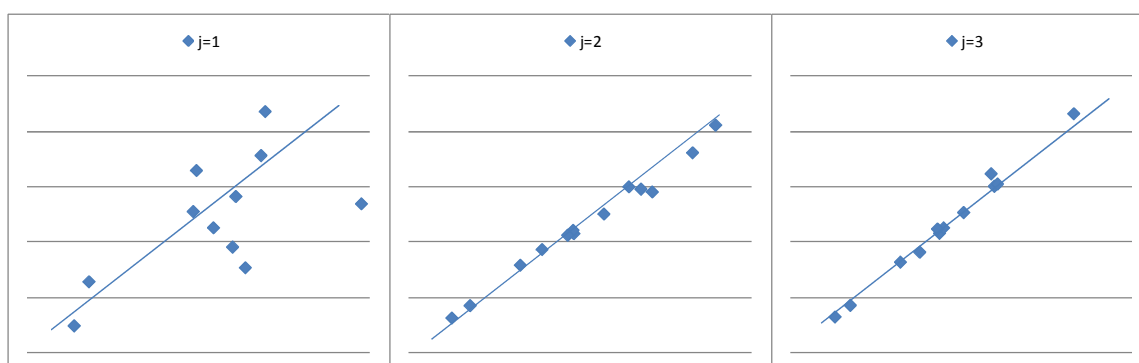
i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	+	+	*
2	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	*	+	-	-	
3	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	*		
4	*	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-			
5	-	+	+	-	*	-	-	+	-	-	-				
6	-	-	-	-	+	+	*	+	+	+					
7	-	-	-	+	-	-	-	-	*						
8	-	-	+	+	+	+	-	+							
9	+	-	+	+	+	+	-								
10	+	+	+	-	+	+									
11	+	+	+	-	-										
12	+	+	*	+											
13	+	+	+												
14	+	+													
15	+														

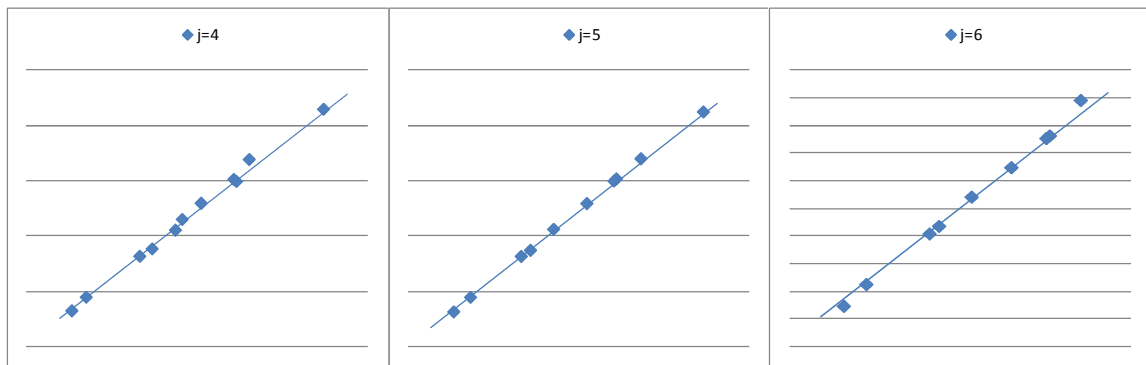
j	Lj	Sj	Zj	nj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2	0	2	0	2	1	0,50	0,25
3	1	2	1	3	1	0,75	0,19
4	0	3	0	3	1	0,75	0,19
5	0	5	0	5	2	1,56	0,37
6	2	4	2	6	3	2,06	0,62
7	3	4	3	7	3	2,41	0,55
8	3	5	3	8	4	2,91	0,80
9	4	4	4	8	4	2,91	0,80
10	5	5	5	10	5	3,77	0,99
11	8	3	3	11	5	4,15	0,92
12	7	3	3	10	5	3,77	0,99
13	9	4	4	13	6	5,03	1,10
14	7	6	6	13	6	5,03	1,10
15	7	5	5	12	6	4,65	1,17
Total			39			40,24	10,04

Indépendance des années calendaires

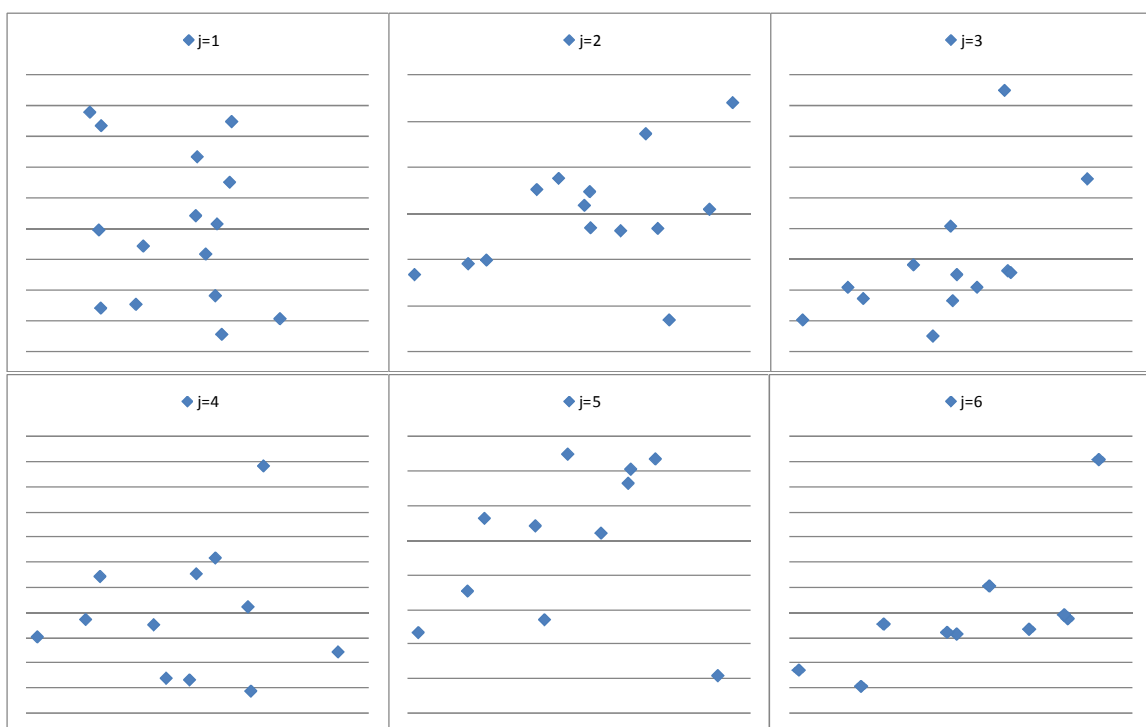
Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[34 ; 46]
Test	Hypothèse non rejetée

➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H2)





➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H_3)*



➤ *Résultat du provisionnement à l'ultime et à horizon un an et marge de risque*

Année de survénance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-
4	0	1	1	1	1
5	0	1	1	0	0
6	- 0	1	1	1	1
7	- 1	2	2	2	2
8	- 1	2	2	1	1
9	- 2	2	2	1	1
10	- 6	7	7	6	7
11	- 11	14	15	13	13
12	- 13	20	20	13	13
13	- 42	49	48	44	44
14	- 125	73	72	52	52
15	- 292	164	164	146	148
16	15 950	2 865	2 868	2 861	2 865
Total	15 459	2 872	2 875	2 866	2 870

Année de projection	Pricing	Bootstrap	Incrémentale
1	7 564	7 649	7 797
2	-	428	-
3	-	194	-
4	-	132	-
5	-	58	-
6	-	41	-
7	-	20	-
8	-	8	-
9	-	7	-
10	-	6	-
11	0	3	-
12	0	2	0
13	0	2	0
14	-	-	-
15	-	-	-
Risk Margin	454	513	468

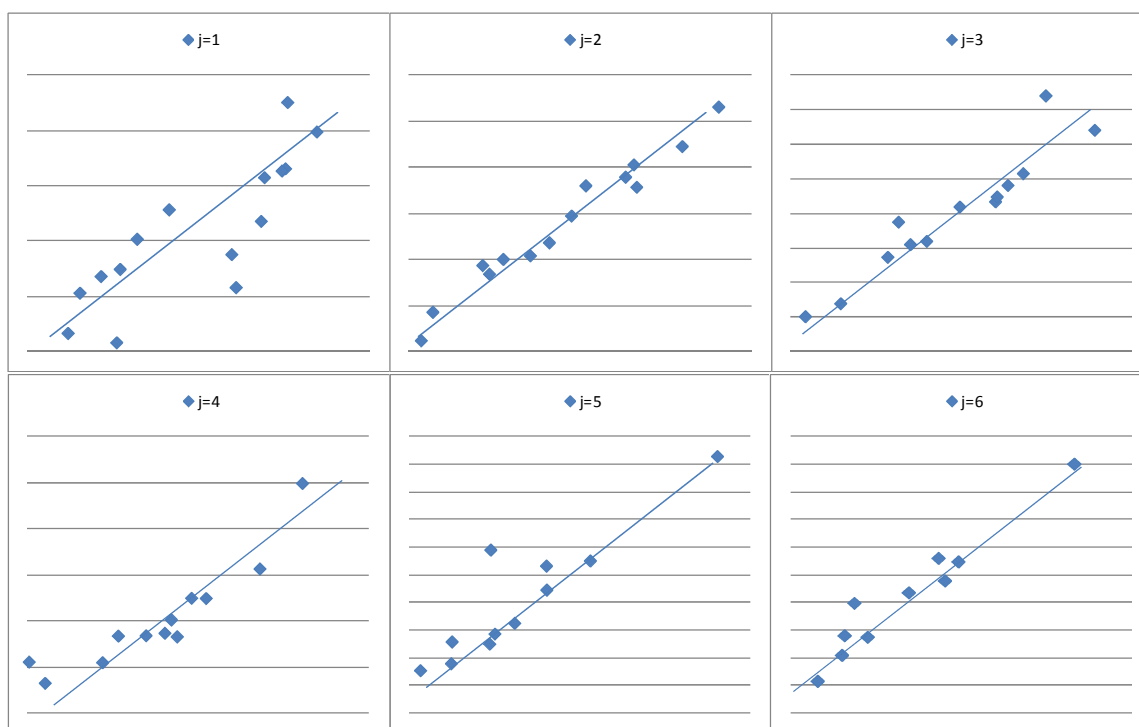
Domage Aux Biens / Société A :➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H1)*

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	-	-	+	+	-	-	+	*	-	*	*	+	*	*
2	-	+	-	+	*	+	+	-	+	+	*	*	*	*	
3	-	-	-	-	-	+	-	+	-	+	*	*	*		
4	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
5	-	-	+	-	-	-	*	-	-	-	-	-			
6	*	+	+	-	+	+	+	+	+	+					
7	-	-	-	-	+	-	+	+	+						
8	-	-	+	+	-	+	+	-							
9	-	+	*	+	-	-	-								
10	+	-	+	+	+	+									
11	+	+	+	-	+										
12	+	+	-	+											
13	+	+	+												
14	+	+													
15	+														

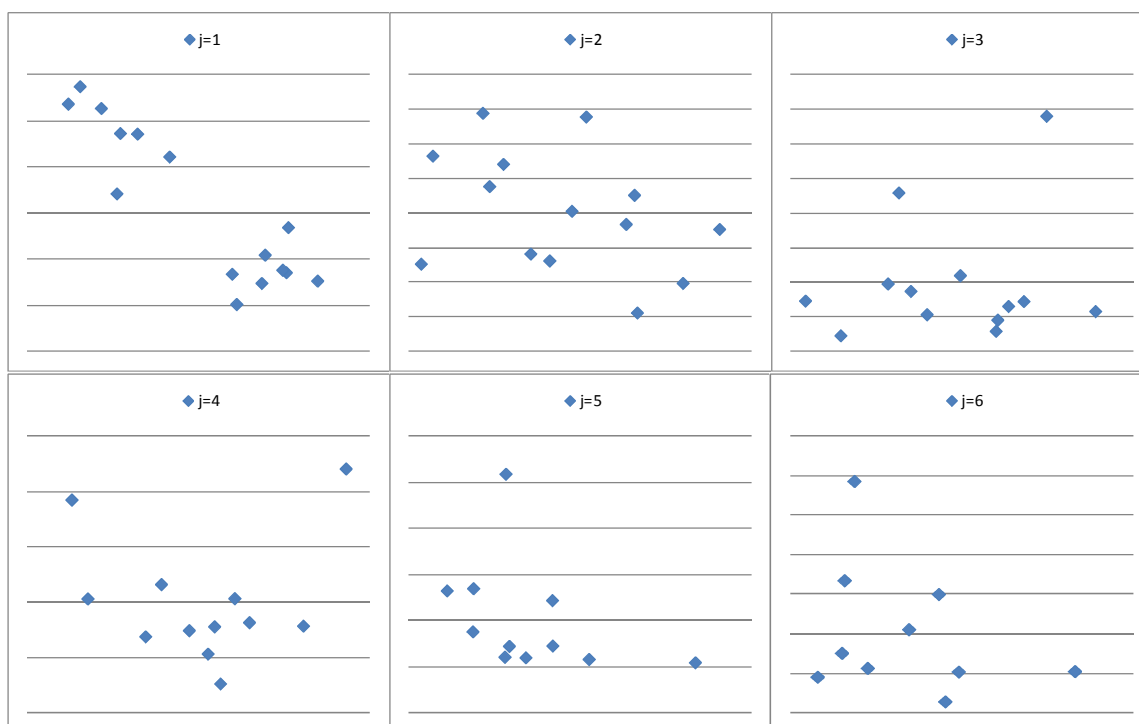
j	Lj	Sj	Zj	nj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2	0	2	0	2	1	0,50	0,25
3	1	2	1	3	1	0,75	0,19
4	2	2	2	4	2	1,25	0,44
5	2	3	2	5	2	1,56	0,37
6	0	4	0	4	2	1,25	0,44
7	3	4	3	7	3	2,41	0,55
8	4	4	4	8	4	2,91	0,80
9	0	8	0	8	4	2,91	0,80
10	6	4	4	10	5	3,77	0,99
11	5	3	3	8	4	2,91	0,80
12	6	4	4	10	5	3,77	0,99
13	8	3	3	11	5	4,15	0,92
14	6	5	5	11	5	4,15	0,92
15	8	4	4	12	6	4,65	1,17
Total			35			36,92	9,62

Indépendance des années calendaires	
Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[31 ; 43]
Test	Hypothèse non rejetée

➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_2)



➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_3)



➤ *Résultat du provisionnement à l'ultime et à horizon un an et marge de risque*

Année de survénance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
2	- 0	0	0	0	0
3	- 2	3	3	3	3
4	- 21	35	34	35	36
5	- 23	36	36	10	10
6	- 27	38	37	11	11
7	- 52	57	57	43	44
8	43	272	271	266	269
9	- 46	405	400	294	297
10	- 148	542	545	377	378
11	- 77	659	661	329	330
12	- 105	607	611	127	128
13	- 63	675	680	306	306
14	293	901	900	540	542
15	2 010	1 142	1 143	648	654
16	22 435	5 498	5 447	5 379	5 414
Total	24 218	6 087	6 077	5 594	5 634

Année de projection	Pricing	Bootstrap	Incrémentale
1	16 887	14 611	15 632
2	1 255	3 729	1 409
3	-	3 113	229
4	-	2 368	-
5	-	1 999	-
6	-	1 877	-
7	-	1 584	-
8	-	1 147	-
9	-	736	39
10	-	173	-
11	-	119	-
12	-	125	-
13	-	115	-
14	-	9	-
15	-	0	-
Risk Margin	1 088	1 902	1 039

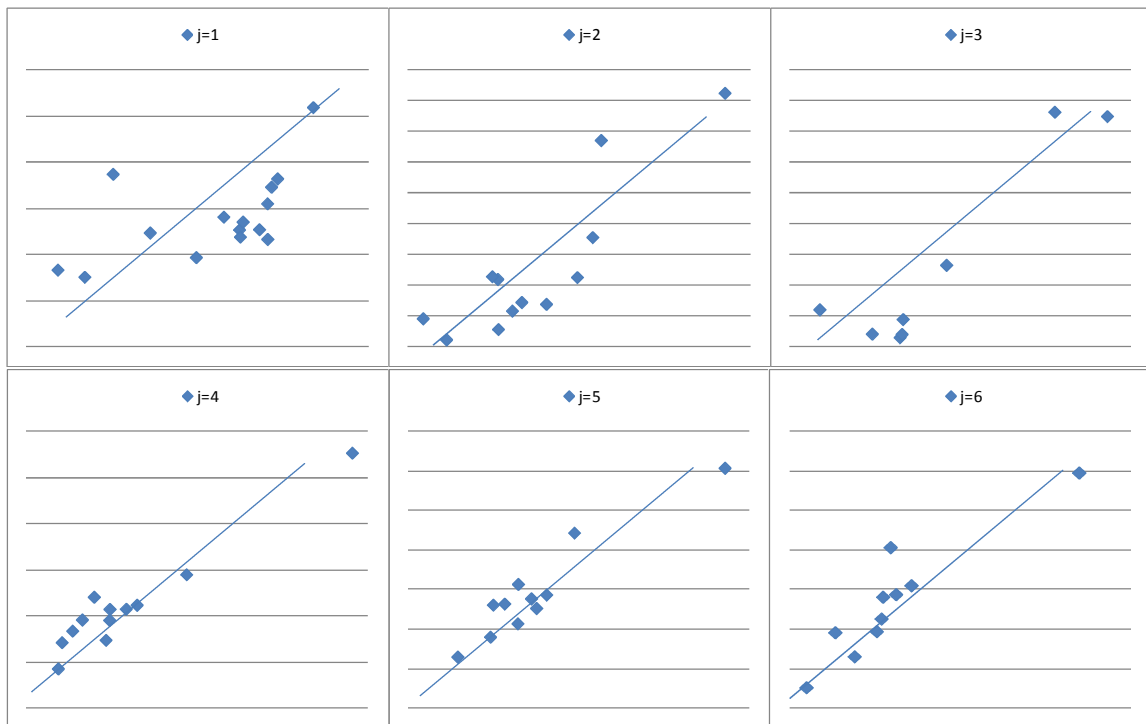
RC Automobile / Société B :➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H1)*

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	*
2	-	-	+	-	+	+	+	+	-	+	*	-	*	+	
3	-	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-		
4	-	-	+	-	-	-	*	-	*	+	+	-			
5	*	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+				
6	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-					
7	+	+	-	+	*	+	+	+	+						
8	-	-	+	-	+	+	+	-							
9	-	+	-	+	+	+	-								
10	+	-	*	+	+	-									
11	-	-	-	+	-										
12	+	+	+	-											
13	+	+	-												
14	+	-													
15	+														

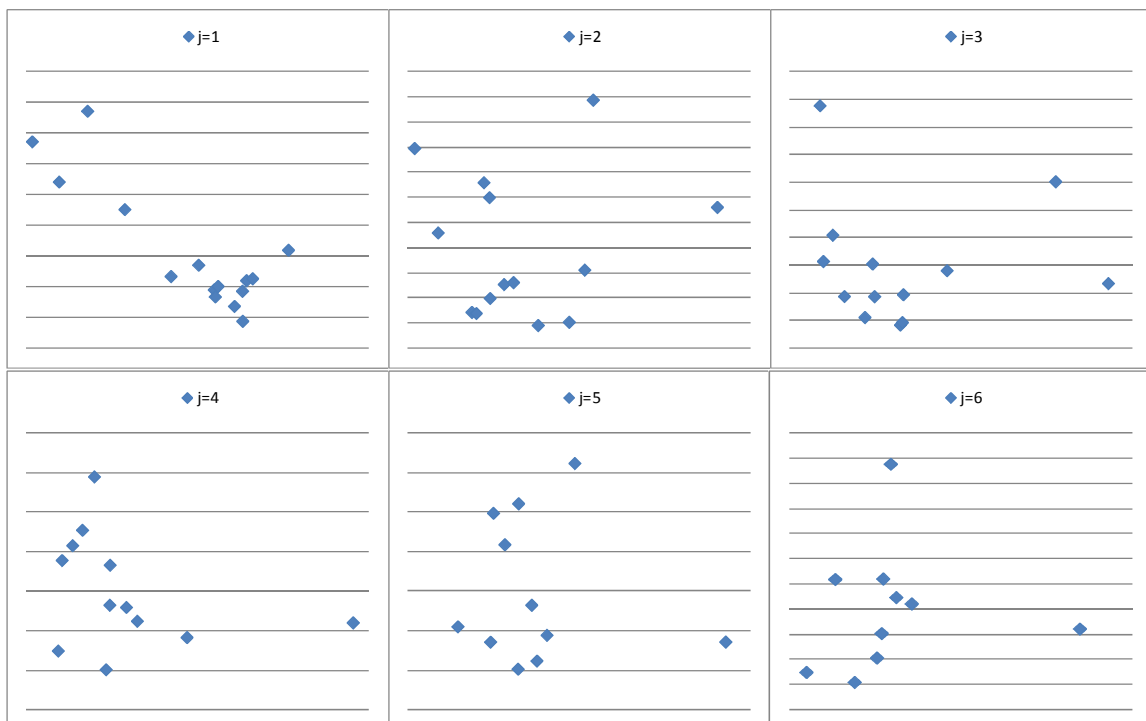
j	Lj	Sj	Zj	nj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2	1	1	1	2	1	0,50	0,25
3	0	3	0	3	1	0,75	0,19
4	1	3	1	4	2	1,25	0,44
5	1	3	1	4	2	1,25	0,44
6	6	0	0	6	3	2,06	0,62
7	5	2	2	7	3	2,41	0,55
8	4	4	4	8	4	2,91	0,80
9	2	7	2	9	4	3,27	0,74
10	4	5	4	9	4	3,27	0,74
11	2	8	2	10	5	3,77	0,99
12	5	4	4	9	4	3,27	0,74
13	9	4	4	13	6	5,03	1,10
14	12	1	1	13	6	5,03	1,10
15	4	10	4	14	7	5,53	1,35
Total			30			40,30	10,03

Indépendance des années calendaires	
Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[34 ; 47]
Test	Hypothèse rejetée

➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H2)*



➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H3)*



➤ *Résultat du provisionnement à l'ultime et à horizon un an et marge de risque*

Année de survenance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an	Année de projection	Pricing	Bootstrap	Incrémentale
2	49	97	97	97	97	1	103 959	62 045	29 944
3	2 686	4 091	4 110	4 090	4 833	2	74 015	45 005	16 222
4	2 307	3 620	3 624	1 299	1 534	3	57 793	40 415	12 114
5	2 430	3 826	3 835	1 481	1 728	4	45 679	31 820	9 878
6	3 644	4 078	4 003	1 728	1 959	5	35 800	26 734	8 291
7	4 480	4 178	4 195	1 766	2 011	6	27 509	23 352	6 562
8	5 513	4 197	4 224	2 023	2 213	7	20 947	18 170	4 777
9	7 025	4 640	4 722	1 955	2 180	8	16 171	15 370	4 064
10	7 132	4 480	4 457	1 909	2 079	9	12 106	13 181	3 331
11	9 255	5 746	5 771	4 092	4 173	10	8 775	12 514	2 498
12	10 889	5 795	5 763	1 664	1 826	11	6 277	10 940	1 899
13	13 081	5 820	5 790	1 480	1 642	12	4 378	10 387	1 317
14	15 864	5 853	5 844	1 590	1 724	13	3 061	11 435	1 668
15	27 015	6 819	6 830	1 913	2 125	14	1 394	8 824	1 365
16	41 566	7 385	7 470	4 312	4 363	15	29	11	29
Total	152 937	35 933	36 198	22 736	26 339	Risk Margin	25 074	19 812	6 238

Domage Automobile / Société B :➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H1)*

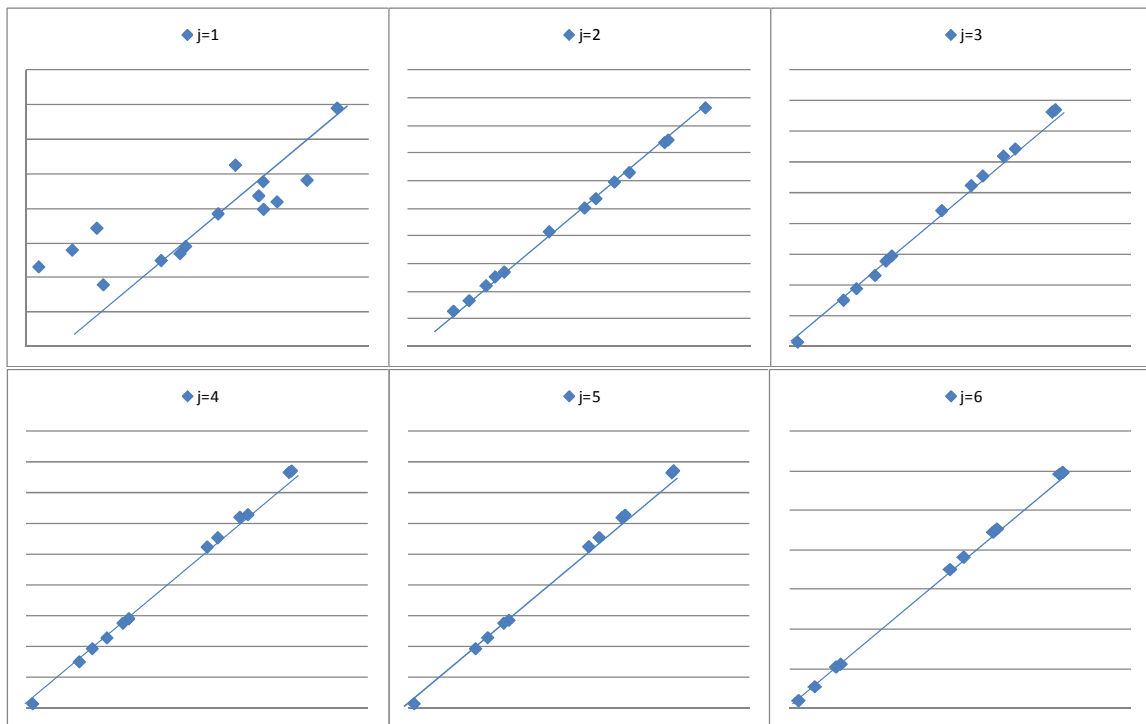
i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	*	-	-	*	*
2	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	*	*	
3	+	+	+	-	*	+	-	-	*	-	-	+	*		
4	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-			
5	+	-	*	+	+	-	+	-	-	-	-				
6	*	-	-	-	-	+	*	+	-	+					
7	-	-	+	+	+	-	+	-	+						
8	-	-	-	-	+	+	+	+							
9	-	+	-	-	+	-	-								
10	-	-	-	+	-	+									
11	-	+	-	-	+										
12	+	+	-	+											
13	+	+	+												
14	+	+													
15	+														

j	Lj	Sj	Zj	nj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
2	1	1	1	2	1	0,50	0,25
3	2	1	1	3	1	0,75	0,19
4	4	0	0	4	2	1,25	0,44
5	2	3	2	5	2	1,56	0,37
6	1	4	1	5	2	1,56	0,37
7	2	3	2	5	2	1,56	0,37
8	2	6	2	8	4	2,91	0,80
9	4	5	4	9	4	3,27	0,74
10	4	6	4	10	5	3,77	0,99
11	5	4	4	9	4	3,27	0,74
12	5	6	5	11	5	4,15	0,92
13	8	5	5	13	6	5,03	1,10
14	5	7	5	12	6	4,65	1,17
15	9	3	3	12	6	4,65	1,17
Total			39			38,88	9,60

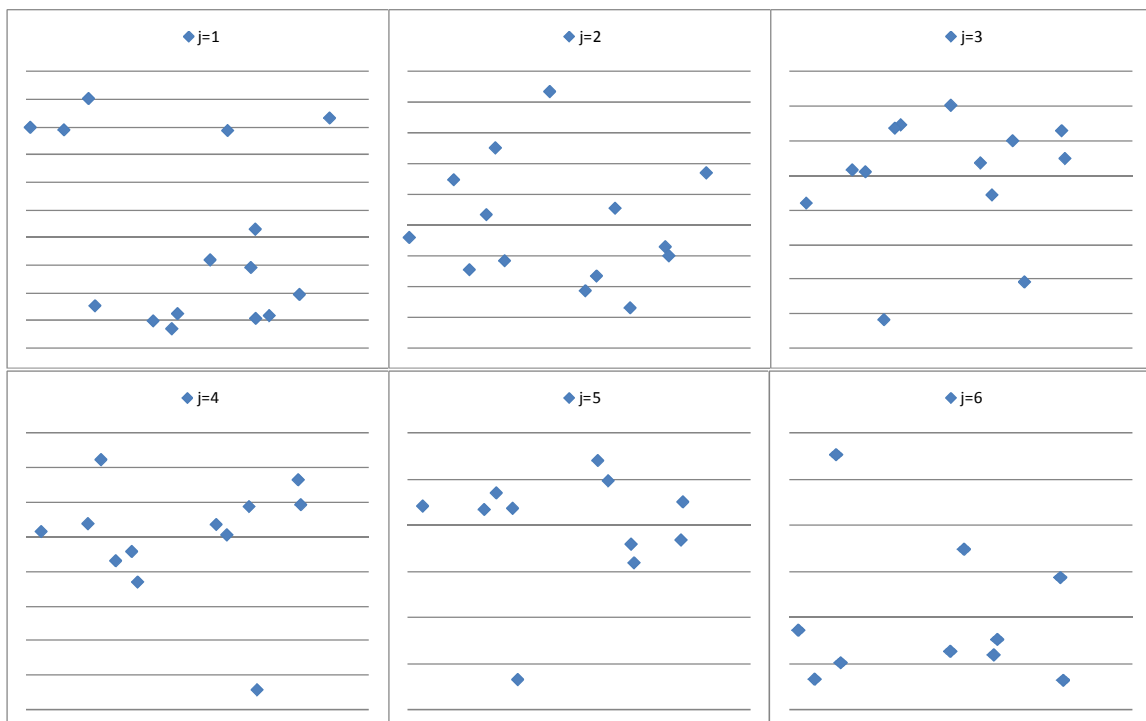
Indépendance des années calendaires

Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[33 ; 45]
Test	Hypothèse non rejetée

➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_2)



➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_3)



➤ *Résultat du provisionnement à l'ultime et à horizon un an et marge de risque*

Année de survenance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an	Année de projection	Pricing	Bootstrap	Incrémentale
2	-	-	-	-	-	1	11 609	11 621	12 014
3	-	-	-	-	-	2	-	581	-
4	- 0	1	1	1	1	3	-	468	-
5	- 2	4	4	4	4	4	-	325	-
6	- 1	7	7	5	6	5	-	158	-
7	- 5	13	13	11	11	6	-	122	-
8	- 9	20	20	15	16	7	-	98	-
9	- 13	27	27	19	19	8	-	81	-
10	- 23	31	31	17	17	9	-	60	-
11	- 15	36	36	21	21	10	-	36	-
12	- 26	51	51	34	35	11	-	19	-
13	- 57	109	110	95	95	12	-	13	-
14	- 134	158	158	108	108	13	-	2	-
15	- 277	206	207	124	122	14	-	-	-
16	16 890	4 380	4 337	4 375	4 401	15	-	-	-
Total	16 328	4 393	4 344	4 381	4 407	Risk Margin	697	815	721

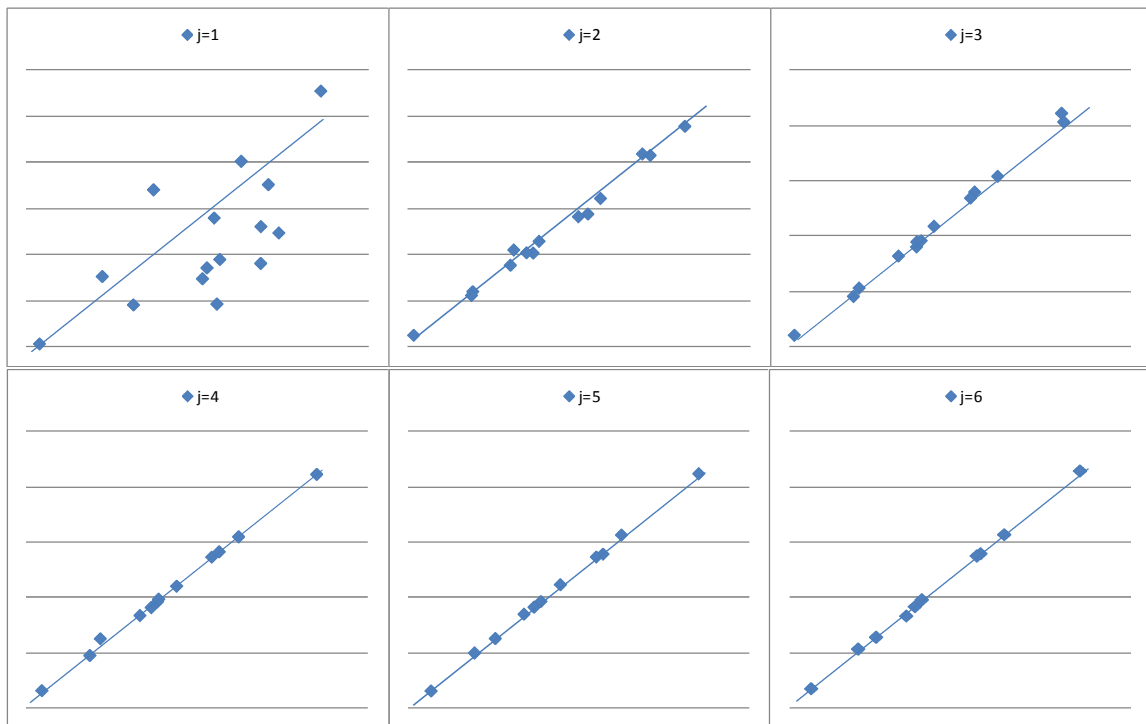
Domage Aux Biens / Société B :➤ *Validation de l'hypothèse de Mack (H1)*

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	j	Lj	Sj	Zj	nj	mj	E(Zj)	Var(Zj)
1	-	-	-	-	*	-	-	-	+	-	+	-	+	+	*	2	0	2	0	2	1	0,50	0,25
2	-	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	*	-		3	1	2	1	3	1	0,75	0,19
3	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	*	-	-			4	1	3	1	4	2	1,25	0,44
4	-	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+				5	2	1	1	3	1	0,75	0,19
5	*	-	-	+	+	+	+	+	*	+	-					6	2	4	2	6	3	2,06	0,62
6	-	+	-	-	-	+	*	+	-	-						7	3	4	3	7	3	2,41	0,55
7	-	-	+	-	-	-	-	-	+							8	5	3	3	8	4	2,91	0,80
8	+	+	+	-	+	+	+	+								9	6	3	3	9	4	3,27	0,74
9	+	+	-	-	+	-	-									10	4	6	4	10	5	3,77	0,99
10	-	-	-	+	-	-										11	4	7	4	11	5	4,15	0,92
11	-	+	+	-	+											12	5	6	5	11	5	4,15	0,92
12	+	+	-	+												13	10	1	1	11	5	4,15	0,92
13	+	+	*													14	6	7	6	13	6	5,03	1,10
14	+	+														15	7	6	6	13	6	5,03	1,10
15	+															Total			40			40,17	9,72

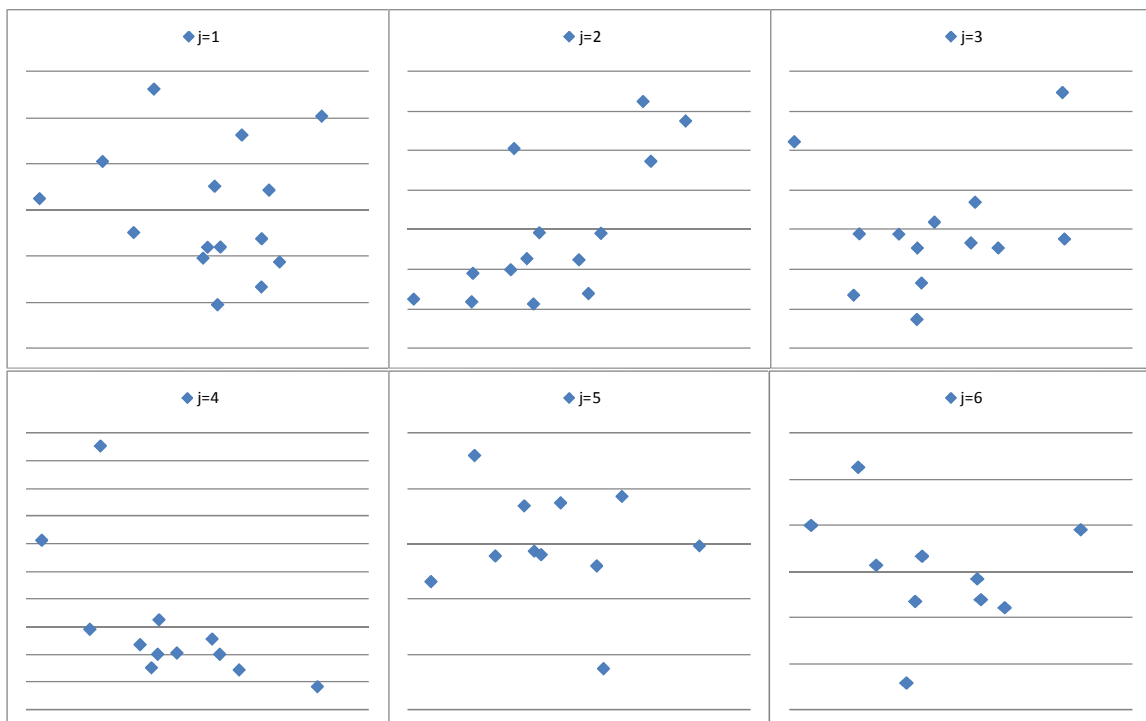
Indépendance des années calendaires

Niveau de confiance	95%
Intervalle de confiance	[34 ; 46]
Test	Hypothèse non rejetée

➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_2)



➤ Validation de l'hypothèse de Mack (H_3)



➤ *Résultat du provisionnement à l'ultime et à horizon un an et marge de risque*

Année de survenance	Provisions	MSEP ^{1/2} Mack	MSEP ^{1/2} Bootstrap ultime	MSEP ^{1/2} M&W	MSEP ^{1/2} Bootstrap 1 an
2	- 4	1	1	1	1
3	- 3	2	2	2	2
4	- 1	4	4	4	4
5	- 7	11	11	10	11
6	- 22	30	30	28	29
7	- 65	126	127	122	125
8	- 108	172	171	109	111
9	- 75	317	316	272	273
10	- 62	377	380	217	215
11	54	400	396	163	164
12	104	414	415	131	132
13	419	562	563	332	333
14	914	713	708	423	423
15	3 680	1 259	1 262	1 015	1 023
16	26 428	5 849	5 817	5 737	5 725
Total	31 251	6 236	6 209	5 928	5 927

Année de projection	Pricing	Bootstrap	Incrémentale
1	17 781	15 738	15 309
2	2 472	3 434	1 803
3	669	2 116	513
4	156	1 779	244
5	-	1 434	89
6	-	1 319	41
7	-	1 118	-
8	-	921	-
9	-	482	-
10	-	333	-
11	-	89	-
12	-	29	-
13	-	12	-
14	-	5	-
15	-	0	-
Risk Margin	1 265	1 728	1 080

