



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le _____

Par : Emilie BONIN

Titre: Méthodes de projection du risque santé : intérêt des séries temporelles.

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaire

Entreprise :

APRIL Assurances

Membres du jury I.S.F.A.

- M. Jean Claude AUGROS
- M. Alexis BIENVENÛE
- Mme Diana DOROBANTU
- Mme Anne EYRAUD-LOISEL
- M. Jean-Paul LAURENT
- M. Nicolas LEBOISNE
- M. Stéphane LOISEL
- Mlle Esterina MASIELLO
- Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
- M. Frédéric PLANCHET
- M. François QUITTARD-PINON
- Mme Béatrice REY-FOURNIER
- M. Didier RULLIERE

Directeur de mémoire en entreprise :
Fabienne DEBOST

Invité :

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

RESUME

Mots clés : Risque santé, Assurance Individuelle, Assurance Maladie, Montants de prestations, Projections, Séries temporelles, Tendances, Saisonnalité, Stationnarité, Processus ARMA, Choix de modèle.

Dans le cadre du suivi technique de son portefeuille santé, APRIL Assurances réalise à l'heure actuelle des projections de la charge sinistre santé via deux méthodes basées sur les données du portefeuille. Ce mémoire qui traite des méthodes de projection du risque santé a été réalisé dans le but d'avoir une lecture complémentaire à celle des méthodes actuelles de projection et d'envisager des projections mensuelles et à plus court terme que celles obtenues via les méthodes existantes.

Nous envisageons tout d'abord le développement d'une méthode de prévision basée sur un indicateur exogène à APRIL Assurances, l'Assurance Maladie. La difficulté majeure qui émane de ce type de modélisation provient du fait que la définition du risque santé diffère selon qu'il s'agit du périmètre de l'Assurance Maladie ou de celui des complémentaires santé en assurance individuelle.

Nous souhaitons ensuite réaliser une modélisation statistique du risque santé, via un modèle de séries temporelles, modèle basé sur l'historique des prestations mensuelles du portefeuille santé. Initialement, quatre méthodes de projections sont envisagées et les modélisations sont réalisées sur différents périmètres du portefeuille selon l'ancienneté ou le type de population assurée. Le choix du modèle retenu est motivé par des raisons théoriques et opérationnelles.

Tout au long de ce mémoire, nous présentons les différentes utilisations des projections de la charge sinistre santé pour l'entreprise. Dans la dernière partie, nous envisageons une utilisation potentielle supplémentaire des projections via les séries temporelles pour réaliser du calcul de provisions.

ABSTRACT

Key words : Health insurance, Complementary private health insurance, the National system of health insurance in France : Social Security, Health care benefits, Forecasting, Time series, Trend, Seasonal component, Stationary, ARMA process, model selection.

In the context of the technical follow up of its health care portfolio, APRIL Assurances currently forecasts future claims payments thanks to two different methods, both based on the data of the health care portfolio. This report which deals with different ways of forecasting claims payment cash flows was realised in order to enhance the reliability of currently used methods and to obtain monthly projections as well, that is to say short term projections by comparison with the existing methods.

We first consider the development of a forecast method based on an external indicator, the French Social Security which is the French national system of health insurance. The main difficulty that emerges in this type of model comes from the fact that health care risk definition is different whether we consider the Social Security field or private complementary health insurance such as APRIL Assurances.

We then want to realize a statistic model of health care risk, using time series, modelling which is based on the data of the health care portfolio and more precisely on the health care expenses paid each month. Initially, four methods of projections are considered and the models are tested on various fields of the portfolio. The selection of the final model to use is made thanks to theoretical reasons and implementation ones.

All along this report, we present different uses of the health claim payments projections in the company. In the last part, we consider an additional use of time series forecasts in order to realize some calculation of claims reserves.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier APRIL Assurances de m'avoir accueillie en alternance pour ma dernière année de formation à l'ISFA. Je souhaite remercier Laurence HENRIET GERMAIN, Fabienne DEBOST et Gérard MONCHANIN pour la confiance qu'ils m'ont témoignée durant cette année, leur disponibilité et leurs conseils avisés. Je remercie également toute l'équipe actuariat qui m'a réservé un excellent accueil et avec qui j'ai pris plaisir à travailler.

Je remercie tout particulièrement Fabienne DEBOST pour le suivi en entreprise de la réalisation de ce mémoire, les nombreux conseils prodigués et les éclairages nouveaux apportés à ce travail. Je remercie l'équipe administrative et le personnel enseignant de l'ISFA, notamment Madame Véronique MAUME DESCHAMPS, tutrice de ce mémoire, pour sa disponibilité et l'aide qu'elle m'a apportée.

SOMMAIRE

RESUME	2
ABSTRACT	3
REMERCIEMENTS	4
SOMMAIRE	5
INTRODUCTION	6
Partie 1 : Présentation du risque santé et projection de la charge sinistre du portefeuille	8
1 Présentation du risque santé	8
1.1 Le périmètre de l'Assurance Maladie	8
1.2 Le périmètre d'APRIL Assurances	15
2 Méthodes de projection de la charge sinistre en santé	20
2.1 Indicateur exogène	20
2.2 Projection par déformation des résultats	27
2.3 Projection avec les cadences	31
Partie 2 : Méthode alternative de projection de la charge sinistre santé via les séries temporelles	33
1 Théorie des séries temporelles	33
1.1 Généralités	34
1.2 Transformation de la série temporelle	42
1.3 Modélisation de série stationnaire par un processus ARMA.....	46
1.4 Différentes méthodes de projection pour l'étude des prestations santé APRIL Assurances.....	50
1.5 Choix de modèle – performances des prévisions.....	55
2 Projection des montants de prestations santé en mois de règlement par les séries temporelles	57
2.1 Données disponibles	58
2.2 Analyse de l'historique – détection de tendance et de saisonnalité	58
2.3 Différentes méthodes de projection des prestations santé via les séries temporelles	61
2.4 Méthode de projection retenue.....	73
3 Présentation des résultats sur les différents périmètres.....	74
3.1 Stock et affaires nouvelles : janvier 1998 à mai 2009	74
3.2 Stock	75
3.3 Exclusion des non assujettis.....	75
3.4 Affaires nouvelles	76
3.5 Autres modélisations.....	76
Partie 3 : Utilisation des projections via les séries temporelles pour le provisionnement	79
1 Chain Ladder standard	80
2 Séries temporelles pour le provisionnement	84
CONCLUSION	88
BIBLIOGRAPHIE	90
ANNEXES	94

INTRODUCTION

APRIL Assurances conçoit des produits et services, dans le domaine de l'assurance individuelle de personnes, dont elle assure la promotion auprès de distributeurs indépendants qui les commercialisent auprès du client final. Ce réseau indépendant distribue les contrats APRIL Assurances aux particuliers et professionnels. L'offre APRIL Assurances concerne les domaines de la santé, la prévoyance individuelle et l'assurance de prêt.

En termes de couverture santé, APRIL Assurances dispose d'une gamme de produits variée, s'adressant à plusieurs cibles, les personnes relevant d'un régime d'Assurance Maladie d'une part et les non assujettis à la Sécurité Sociale d'autre part. L'une des particularités du domaine d'activité de l'assurance et notamment de l'assurance santé, est l'inversion du cycle de production. En effet, l'assuré paie des primes pour se couvrir contre un risque qui peut survenir ou non. L'assureur connaît alors le montant des primes perçues pour chaque année de couverture mais son engagement, c'est-à-dire les montants de prestations à verser, demeure inconnu. L'étude du risque santé implique donc notamment de réaliser des prévisions des montants de prestations futures à payer, notamment pour être en mesure de les provisionner.

De par sa qualité de courtier, APRIL Assurances bénéficie de conventions de délégation de gestion de la part de ses partenaires assureurs et souhaite ainsi pouvoir projeter les montants de prestations santé futurs, notamment pour établir des comptes de résultats prévisionnels. Ces projections sont utilisées pour le pilotage technique du portefeuille santé et également par d'autres services de l'entreprise, notamment la direction financière, pour gérer par exemple la trésorerie. En termes de suivi technique du portefeuille, cela permet d'identifier un besoin éventuel de revalorisation tarifaire des contrats, d'anticiper la poursuite d'une tendance à la hausse des dépenses de santé ou d'un ralentissement, d'estimer les effets de certaines réformes de l'Assurance Maladie, d'anticiper une aggravation du risque due par exemple à une épidémie. Notons qu'il s'agit ici d'estimer les montants de prestations versés, tous produits et toutes affaires confondus, c'est-à-dire les règlements globaux du portefeuille et non pas tête par tête.

Nous présentons dans un premier temps le risque santé dans les périmètres respectifs de l'Assurance Maladie et d'APRIL Assurances. Nous étudions ensuite les différentes méthodes envisagées pour la projection de la charge sinistre de notre portefeuille santé. Celle-ci étant directement liée à la prise en charge de l'Assurance Maladie, nous essayons de modéliser les montants de prestations santé de notre portefeuille à partir de cet indicateur exogène. Nous présentons ensuite les méthodes de projection actuellement utilisées. L'une d'entre elles est basée sur l'étude des rythmes de liquidation des prestations santé par exercice de soins et la seconde sur la déformation des comptes de l'année précédente. Il s'agit de deux méthodes basées directement sur l'étude de notre portefeuille.

Nous nous tournons ensuite vers une méthode de projection alternative via les séries temporelles, basée sur l'historique des montants de prestations santé réglés mensuellement. L'objectif de cette modélisation est d'une part de fiabiliser nos méthodes actuelles de suivi d'évolution du coût du risque santé, et d'autre part d'envisager des projections à plus court terme de la charge sinistre du portefeuille. Nous donnons les définitions et théorèmes utilisés lors de la projection ultérieure des prestations du portefeuille santé d'APRIL Assurances, ainsi que la méthodologie employée. Les résultats des modélisations réalisées sur différents périmètres du portefeuille sont également développés. Enfin, nous expliquons les motivations théoriques et opérationnelles qui nous conduisent à retenir une modélisation particulière et un périmètre donné pour projeter l'évolution de la charge sinistre du portefeuille.

Dans une dernière partie, nous envisageons enfin l'utilisation des projections via les séries temporelles pour réaliser du calcul de provisions. Nous comparons les résultats à ceux obtenus par la méthode de Chain Ladder Standard.

Partie 1 : Présentation du risque santé et projection de la charge sinistre du portefeuille

1 Présentation du risque santé

1.1 Le périmètre de l'Assurance Maladie

La Sécurité Sociale a été créée en 1945 avec la volonté de garantir l'égalité d'accès aux soins, la qualité des soins et la solidarité. L'Assurance Maladie est constituée de trois principaux régimes, le régime général, le régime agricole et le régime social des indépendants. Le régime général est lui-même subdivisé en différentes branches depuis 1967, la branche maladie, famille, retraite et recouvrement. A l'heure actuelle, le régime général compte environ 56 millions de bénéficiaires, ce qui correspond à 89 % de la population et représente 76 % des dépenses de l'Assurance Maladie.

1.1.1 Les grands postes de soins du risque santé

Le risque santé, selon l'Assurance Maladie, peut être subdivisé en différents postes de soins :

- Soins de ville :
 - o Honoraires du secteur privé : consultations, visites, actes techniques, dentaire...
 - o Prescriptions : auxiliaires médicaux, analyses, pharmacie, optique...
 - o Autres prestations de soins santé : frais de déplacement des malades...
 - o Prestations en espèces
- Versements aux établissements de santé publics et privés
- Versements aux établissements médico-sociaux
- Réseaux de Santé¹

¹ La définition officielle des réseaux de santé est donnée dans le Code de la santé publique, article L6321-1 : « Les réseaux de santé ont pour objet de favoriser l'accès aux soins, la coordination, la continuité ou l'interdisciplinarité des prises en charge sanitaires, notamment de celles qui sont spécifiques à certaines populations, pathologies ou activités sanitaires. Ils assurent une prise en charge adaptée aux besoins de la

- Indemnités Journalières : ces indemnités concernent les arrêts de travail, ceux-ci ne rentrent pas dans le cadre de notre étude.

Selon les postes de soins, les prises en charge de l'Assurance Maladie varient de manière importante. Pour une prise en charge par l'Assurance Maladie, les soins et produits doivent être dispensés par un établissement public ou privé autorisé ou un praticien ou personnel paramédical habilité à exercer, ils doivent également figurer dans la nomenclature des actes professionnels ou sur la liste des médicaments et produits remboursables.

A chaque acte de santé, correspond un tarif de base, appelé Tarif de Convention (TC) ou Base de Remboursement de la Sécurité Sociale (BRSS) et un Taux de Remboursement (TRSS) qui s'applique à ce tarif de base afin de déterminer le montant pris en charge par l'Assurance Maladie. Il existe également un certain nombre de majorations conventionnelles (déplacement, urgence...).

Remarque : Le ticket modérateur correspond à la différence entre la base de remboursement de l'Assurance Maladie et la part qu'elle prend effectivement en charge. La complémentaire santé peut ensuite prendre en charge tout ou partie de ce montant. La participation forfaitaire de 1 € et les franchises ne sont pas remboursables dans le cadre de contrats responsables.

Les montants remboursés par l'Assurance Maladie dépendent également de la situation de l'assuré dans le parcours de soins coordonnés et du secteur conventionnel du médecin. En effet, si un assuré est hors du parcours de soins, c'est-à-dire s'il n'a pas déclaré son médecin traitant ou s'il consulte directement un médecin sans être orienté par son médecin traitant, depuis le 1^{er} janvier 2009, le montant de ses remboursements est diminué. De plus, un médecin conventionné de secteur 1 applique le tarif conventionnel alors qu'un médecin de secteur 2 pratique des honoraires libres. Dans ce cas, les dépassements d'honoraires ne sont pas remboursés par l'Assurance Maladie.

Les soins dentaires comprennent les soins dits « conservateurs » comme le détartrage, le traitement d'une carie... et les soins chirurgicaux, les extractions par exemple. Les prothèses

personne tant sur le plan de l'éducation à la santé, de la prévention, du diagnostic que des soins. Ils peuvent participer à des actions de santé publique. Ils procèdent à des actions d'évaluation afin de garantir la qualité de leurs services et prestations. »

dentaires et l'orthodontie contrairement aux consultations et aux soins, ont un tarif libre. Leur prise en charge est basée sur des tarifs dits de responsabilité, très souvent inférieurs à leur coût réel. Pour être pris en charge par l'Assurance Maladie, les soins tout comme les prothèses et l'orthodontie doivent figurer sur la liste des actes et prescriptions remboursables.

Les actes des auxiliaires médicaux sont ceux effectués par les infirmiers, les masseurs-kinésithérapeutes, les orthophonistes, les orthoptistes...

La prise en charge de la pharmacie dépend du type de vignette du médicament :

- La vignette blanche barrée concerne les médicaments reconnus comme irremplaçables et coûteux, elle correspond à un taux de remboursement de 100 %.
- La vignette blanche s'applique à la plupart des médicaments courants et correspond à un taux de remboursement de 65 %.
- La vignette bleue concerne les médicaments dits de « confort ». Il s'agit des médicaments pour des troubles ne présentant pas de caractère de gravité. Le taux de remboursement est alors de 35 %.

Ces taux de remboursement s'appliquent soit sur la base de leur prix de vente qui est fixé réglementairement, soit sur la base d'un tarif forfaitaire de responsabilité (TFR). Ce dernier correspond à un tarif de référence pour le remboursement de certains médicaments, il est destiné à prendre en charge, sur la base d'un tarif unique, des produits d'efficacité similaire tels que les génériques et les médicaments de marque.

Les modalités de prise en charge de l'optique varient selon l'âge. Le taux de remboursement de la monture et des verres est fonction de l'âge de l'assuré, selon s'il a plus ou moins de 18 ans, et la base de remboursement des verres dépend du degré de correction. Les montants donnés dans le tableau à titre d'exemple sont pour une personne âgée de plus de 18 ans.

Pour la prise en charge d'une prothèse auditive, deux conditions doivent être remplies par l'assuré. Il doit bénéficier d'une prescription de son médecin et l'appareil utilisé doit faire partie de la liste des produits et prestations remboursables par l'Assurance Maladie. Le remboursement varie ensuite selon l'âge, le type de handicap et l'appareillage choisi.

Différents frais sont engendrés lors d'une hospitalisation. Le forfait hospitalier représente la participation financière du patient aux frais d'hébergement entraînés par son hospitalisation. Il est dû pour tout séjour supérieur à 24 heures dans un établissement hospitalier public ou privé,

y compris le jour de sortie. Il s'élève à 16 € par jour en hôpital ou en clinique et à 12 € par jour dans le service psychiatrique d'un établissement de santé. Dans un hôpital public ou une clinique privée conventionnée, les frais liés à l'hospitalisation sont pris en charge à 80 %² par l'Assurance Maladie. S'agissant des cliniques privées non conventionnées, elles remboursent 80 % des frais de séjour et honoraires médicaux sur la base des tarifs en vigueur.

L'Assurance Maladie ne prend pas en charge le forfait hospitalier ni les suppléments tels qu'une chambre individuelle, le téléphone ou les dépassements d'honoraires.

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de prise en charge de l'Assurance Maladie. Il s'agit de montants hors majorations conventionnelles et avant déduction d'une éventuelle franchise ou participation forfaitaire.

Poste de soin		Acte de santé	Base de remboursement	Taux de remboursement	Montant remboursé	
Honoraires du secteur privé	Consultations, Visites	Généraliste	22 €	70 %	15.40 €	
		Spécialiste	25 €	70 %	17.50 €	
	Dentaire	Soin détartrage	28.92 €	70 %	20.24 €	
		Prothèse : couronne	107.50 €	70 %	75.25 €	
Prescriptions	Auxiliaires médicaux	Acte infirmier	3.60 €	60 %	2.16 €	
	Analyses	Acte de biologie	0.27 €	60 %	0.16 €	
	Pharmacie	Vignette blanche barrée	Prix de vente ou TFR		100 %	
		Vignette blanche	Prix de vente ou TFR		65 %	
		Vignette bleue	Prix de vente ou TFR		35 %	
	Optique	Monture	2.84 €	65 %	1.85 €	
		Verre	2 €	65 %	1.3 €	
Hospitalisation			Tarifs en vigueur	80 %		

² Les taux de prise en charge peuvent s'avérer différents selon la situation de l'assuré (ALD, femme enceinte...), celui-ci peut également être exonéré du forfait hospitalisation dans certains cas.

1.1.2 Franchises médicales et participation forfaitaire

La participation forfaitaire³ de 1 € est due par les assurés depuis le 1^{er} janvier 2005. Elle est demandée à toutes les personnes âgées de plus de 18 ans, elle s'applique pour toutes les consultations et actes réalisés par un médecin, mais également sur les examens radiologiques ou analyses de biologie médicale. Elle est limitée à 4 € par jour pour un même professionnel de santé, à 4 € par jour et par laboratoire exécutant pour les actes prescrits par le médecin. Il y a également un plafond de 50 € par an.

Une participation forfaitaire de 18 € est à la charge de l'assuré lorsqu'il bénéficie d'actes dont le tarif est supérieur ou égal à 91 € ou ayant un coefficient supérieur ou égal à 50. Certaines prestations en sont toutefois exonérées.

Les franchises médicales⁴ sont dues par les assurés depuis le 1^{er} janvier 2008. La franchise est une somme déduite des remboursements effectués par l'Assurance Maladie sur les médicaments, les actes paramédicaux et les transports sanitaires. Elle a pour but le financement des investissements consacrés à la lutte contre le cancer, la maladie d'Alzheimer et l'amélioration des soins palliatifs.

Le montant de la franchise est de 0.50 € par boîte de médicaments et par acte paramédical et de 2 € par transport sanitaire. Le montant de la franchise est plafonné à 50 € par an pour l'ensemble des actes et prestations concernés. La franchise ne peut pas dépasser 2 € par jour pour les actes paramédicaux et 4 € par jour pour les transports sanitaires. Il y a également un plafond de 50 € par an⁵.

Avec l'instauration de ces franchises, l'économie visée est de 850 millions d'euros par an.

³ Dans certains cas cette participation ne s'applique pas, par exemple pour les consultations des moins de 18 ans, chez le chirurgien-dentiste...

⁴ Certaines personnes sont exonérées de ces franchises, les moins de 18 ans par exemple.

⁵ Il existe deux plafonds distincts de 50 € par an pour la participation forfaitaire d'une part et les franchises d'autre part.

1.1.3 Affection Longue Durée

La définition d’Affection Longue Durée figure à l’article L 322-3 du Code de la Sécurité Sociale, il s’agit d’une « affection comportant un traitement prolongé et une thérapeutique particulièrement coûteuse ». Une ALD exonérante ouvre le droit pour l’assuré à une prise en charge du ticket modérateur à 100 % par l’Assurance Maladie, pour les actes et produits qui visent à soigner l’affection. L’objectif de ce dispositif est d’éviter que l’aspect financier ne constitue un obstacle à l’accès aux soins.

Les pathologies considérées comme étant des ALD sont répertoriées dans une liste modifiée sur avis de la Haute Autorité de Santé, elles sont au nombre de 30. Par ailleurs, sont également considérées comme ALD, les affections non inscrites sur la liste mais correspondant à la forme évolutive ou invalidante d’une affection grave caractérisée, pour des soins d’une durée prévisible de plus de 6 mois, et les poly pathologies invalidantes nécessitant des soins continus d’une durée prévisible supérieure à 6 mois.

Le médecin traitant, en concertation avec les autres médecins qui suivent l’ALD exonérante, établit un protocole de soins pour une durée déterminée. Ce protocole de soins vise une meilleure coordination de l’information et permet notamment à l’assuré de savoir quels sont les actes et prestations pris en charge à 100 % dans le cadre de son ALD. Pour les soins sans rapport avec l’ALD, ce sont les taux de remboursement habituels qui sont appliqués.

Il convient de souligner ici que si ce mécanisme dispense l’assuré du paiement des tickets modérateurs liés à la maladie, il n’annule pas pour autant les restes à charge du patient. En effet, l’exonération ne concerne que les prestations prises en charge par l’Assurance Maladie pour la maladie considérée et sur la base des tarifs remboursables. Les éventuels dépassements d’honoraires ainsi que les prestations non admises au remboursement de façon générale, restent à la charge du patient.

Au 31 décembre 2007, 8 millions d’assurés du régime général sont en ALD, soit 14.2 % des assurés. L’âge moyen des personnes en ALD est de 61.6 ans sachant qu’il existe d’importantes disparités selon les pathologies concernées. Les ALD toutes affections

confondues représentent 64 % des dépenses de l'Assurance Maladie et 90 % de leur progression annuelle⁶.

L'Assurance Maladie a des taux et montants de prise en charge très variables selon les postes de soins et les situations des assurés. Ces différences s'illustrent à travers les poids des différents postes de soins dans les dépenses de l'Assurance Maladie. Ainsi, l'hospitalisation représente plus de la moitié de ses dépenses, les prescriptions environ un quart et les honoraires du secteur privé 13 % environ.

Pour le poste hospitalisation, l'Assurance Maladie ne rembourse ni le forfait journalier, ni la chambre particulière, ni les dépassements d'honoraires. Elle prend en charge les consultations et visites à 100 % seulement s'il s'agit d'une affection longue durée. La pharmacie est prise en charge à hauteur de 65 % pour les médicaments à vignette blanche et 35 % pour ceux à vignette bleue sauf pour les ALD où la prise en charge est là encore à hauteur de 100 %. Concernant le poste dentaire, le niveau de remboursement de l'Assurance Maladie est proche du coût réel pour les soins dentaires mais le coût réel des prothèses et de l'orthodontie dépasse généralement largement le montant remboursé par l'Assurance Maladie dans la mesure où les tarifs sont libres pour ces deux types de soins. Certaines prothèses ainsi que les implants ne sont pas remboursés. Le coût réel d'un équipement optique est généralement bien supérieur au montant remboursé par l'Assurance Maladie.

Ces dernières années, afin de limiter les dépenses et d'essayer de responsabiliser les assurés, des mesures telles que la participation forfaitaire et les franchises ont été prises. Ces mesures ne concernent pas toutes les catégories d'assurés, les personnes en ALD en sont par exemple exonérées afin de garantir l'accès aux soins et la qualité des soins dispensés.

Nous avons identifié les composantes essentielles des dépenses santé de l'Assurance Maladie. Nous allons maintenant nous intéresser à la définition du risque santé par les complémentaires santé et en particulier par APRIL Assurances.

⁶ Source : **Haut Conseil de l'Assurance Maladie**. *Note sur le régime des affections de longue durée (ALD)*, 2005.

1.2 Le périmètre d'APRIL Assurances

A sa création en 1988 par Bruno Rousset, APRIL Group a pris l'engagement de « changer l'image de l'assurance », cela aussi bien auprès de ses clients, de ses distributeurs que de ses partenaires. APRIL Group est aujourd'hui composé de plus de 70 sociétés réparties en France et à l'étranger. Le groupe distribue différents types d'assurances qui peuvent être regroupés en cinq domaines principaux, l'assurance santé, la prévoyance et l'assurance vie, l'assurance des véhicules et du transport, l'assurance des biens meubles et immeubles et l'assurance voyage, assistance et risque juridique.

APRIL Assurances est un « courtier grossiste », c'est-à-dire qu'il développe une activité de conception, de gestion et d'aide à la vente de contrats d'assurance individuelle de personnes. Le réseau de distributeurs indépendants distribue les contrats APRIL Assurances aux particuliers et professionnels. Son activité est organisée autour de 3 directions générales, la Direction Générale de la Relation Client, la Direction Générale du Développement et la Direction de l'Ingénierie. Le service actuariat dépend de cette dernière et l'activité se répartit entre deux pôles, l'actuariat et R&D prévoyance et l'actuariat et R&D santé et autres risques non vie.

En termes de couverture santé, APRIL Assurances dispose d'une gamme de produits variée, s'adressant à plusieurs cibles, les personnes relevant d'un régime d'Assurance Maladie d'une part et les non assujettis à la Sécurité Sociale d'autre part.

Ces deux types de contrats induisent des garanties spécifiques ainsi qu'un suivi technique différent. Les assurés n'ont en effet pas les mêmes besoins de couverture selon qu'ils bénéficient ou non du régime d'Assurance Maladie. S'ils en bénéficient, APRIL Assurances intervient en complément des prestations versées par l'Assurance Maladie, dans le cas contraire, la complémentaire santé intervient dès le premier euro de la dépense engagée.

Pour chaque garantie, le montant des remboursements est défini au sein du tableau de garanties des conditions générales, en fonction du niveau souscrit par l'assuré et de la nature des dépenses médicales.

1.2.1 Personnes relevant d'un régime d'Assurance Maladie

Les produits adressés aux personnes relevant d'un régime d'Assurance Maladie, selon le niveau de garantie souscrit, prennent en charge le remboursement :

- des frais médicaux et chirurgicaux restant à charge de l'assuré après remboursement de l'Assurance Maladie,
- des dépenses de soins médicalement prescrits à caractère thérapeutique non prises en charge par l'Assurance Maladie mais relevant des garanties du contrat d'assurance souscrit,
- des dépenses de soins dans le cadre de forfaits spécifiques prévus dans le tableau de garantie du contrat, l'optique par exemple.

Les montants de remboursement peuvent être libellés soit en pourcentage du tarif en vigueur fixé par l'Assurance Maladie (Base de Remboursement ou Tarif de Convention) soit en euros sous la forme de forfait. Les remboursements sont toujours effectués déduction faite du remboursement de l'Assurance Maladie ou de toute autre complémentaire santé et sont toujours limités au montant de la dépense réelle engagée. Certaines garanties vont au-delà du ticket modérateur, c'est-à-dire qu'il peut y avoir une prise en charge des éventuels dépassements.

Le risque santé, selon APRIL Assurances, peut être subdivisé en différents postes de soins dont les libellés et périmètres sont différents de ceux de l'Assurance Maladie :

- Frais hospitaliers
- Frais médicaux :
 - o Consultations, visites
 - o Auxiliaires médicaux, analyses...
 - o Appareillage (orthopédie, prothèses auditives...)
 - o Transport...
- Pharmacie
- Frais dentaires
- Forfait optique
- Médecines naturelles
- ...

En cas d'hospitalisation, peuvent être pris en charge, selon le niveau de garantie souscrit, les honoraires chirurgicaux, le forfait journalier, les frais de séjour, la chambre particulière, les frais d'accompagnant. Les frais tels que le téléphone ou la télévision ne seront pas pris en charge.

Les dépassements d'honoraires des consultations et actes hors parcours de soins ne sont pas pris en charge par les contrats responsables. Tout comme la participation forfaitaire et les franchises qui restent à la charge de l'assuré dans ce type de contrats. La grande majorité des contrats APRIL Assurances est responsable.

La garantie relative aux frais de pharmacie prend en charge les frais de médicaments restant à la charge de l'assuré après remboursement de l'Assurance Maladie. S'agissant des contrats responsables, la franchise sur les médicaments n'est pas remboursée. Sur certains produits, une garantie automédication existe. Il s'agit d'un forfait annuel utilisable sur présentation de la facture pharmaceutique relative aux médicaments non remboursés par l'Assurance Maladie et figurant sur la liste AFSSAPS⁷. Il s'agit essentiellement de trois classes de médicaments, les médicaments antalgiques, ceux pour l'aide à l'arrêt du tabac et ceux pour le traitement des troubles gastro-intestinaux.

La garantie frais dentaires prend en charge les soins dentaires, l'orthodontie et les prothèses dentaires faisant l'objet d'un remboursement partiel de l'Assurance Maladie dans la limite du forfait le cas échéant. Cette garantie propose également un forfait pour les prothèses dentaires et l'orthodontie non remboursées.

La garantie optique prend en charge, dans la limite du forfait annuel indiqué au tableau de garanties, l'achat des verres, montures ou lentilles remboursé partiellement par l'Assurance Maladie. Selon les contrats, il est possible de souscrire en option une garantie « renfort optique-dentaire ». Un forfait cure thermale ou médecine naturelle existe parfois également selon les contrats.

⁷ L'AFSSAPS est l'Agence Française de Sécurité Sanitaire des Produits de Santé. Ses missions sont définies dans le Code de la santé publique, article L5311-2. Il s'agit d'un établissement public de l'Etat, placé sous la tutelle du ministre de la santé, qui est chargé de mettre en œuvre les vigilances des produits à finalité sanitaire destinés à l'homme. Il s'agit notamment de pharmacovigilance et de pharmacodépendance.

1.2.2 Non-assujettis

Un produit s'adresse spécifiquement aux non-assujettis, c'est-à-dire aux personnes qui ne bénéficient d'aucun régime obligatoire d'Assurance Maladie (CMU comprise). Pour souscrire ce contrat, il y a des formalités médicales dans la mesure où la prise en charge intervient dès le premier euro de la dépense.

Il existe différents niveaux de garantie, les montants de remboursement peuvent être libellés soit en pourcentage du tarif en vigueur fixé par l'Assurance Maladie (Base de Remboursement ou Tarif de Convention) soit en euros sous la forme de forfait. Selon les niveaux de garantie, les dépassements d'honoraires peuvent également être pris en charge.

1.2.3 Postes de soins APRIL Assurances

Le tableau ci-dessous donne des exemples de prise en charge d'APRIL Assurances selon les postes de soins. Les montants sont indiqués sans tenir compte de la participation forfaitaire et des franchises.

Poste de soin	Acte de santé	Dépense Réelle	Remboursement Régime Obligatoire (RO)	Garantie APRIL (sous déduction RO)	Montant remboursé APRIL
Hospitalisation	Forfait journalier	18 €	-	Frais réels	18 €
	Ch. Part. (par jour)	50 €	-	35 €	35 €
Frais médicaux	Consultation généraliste	22 €	15.40 €	100 %	$22 - 15.40 = 6.60$ €
Pharmacie	Vignette bleue	10 €	3.50 €	100 %	$10 - 3.5 = 6.50$ €
Frais dentaires	Prothèses non prises en charge par le RO	400 €	-	100 €	100 €
Forfait optique	Monture et verres acceptés par RO	250 €	$1.85 + 2 * 1.3 = 4.45$ €	70 €	70 €

Avec les exemples précédents, l'assuré doit financer la participation forfaitaire de 1 € et les franchises éventuelles. Restent à sa charge également 300 € de frais dentaires et 175.55 € d'équipement optique.

La prise en charge APRIL Assurances dépend du niveau de garantie souscrit par l'assuré mais aussi et surtout de la prise en charge de l'Assurance Maladie dans la mesure où elle intervient sous déduction des montants pris en charge par cette dernière. La variabilité des taux de

remboursement de l'Assurance Maladie selon les postes de soin, a un impact sur les remboursements APRIL Assurances et les poids de chaque poste de soins dans le montant global de prestations.

Les périmètres de remboursement de l'Assurance Maladie et d'APRIL Assurances sont différents tant au niveau des soins pris en charge que des personnes assurées. En effet, l'Assurance Maladie couvre une très grande partie de la population tandis qu'APRIL Assurances offre une couverture à adhésion individuelle. Cette différence de périmètres s'illustre notamment par les répartitions différentes des dépenses observées chez ces deux acteurs.

2 Méthodes de projection de la charge sinistre en santé

Nous allons ici nous intéresser à l'estimation et à la projection du montant des prestations santé à régler avec plusieurs objectifs différents selon que la vision adoptée se situe à plus ou moins long terme.

En cours d'année, nous souhaitons avoir une vision aussi précise que possible des résultats du portefeuille santé. En effet, le suivi technique du portefeuille implique par exemple l'établissement de comptes de résultats techniques prévisionnels et de provisions. D'autres services ont également besoin d'estimer ces montants futurs à régler : la direction financière afin de pouvoir gérer au mieux la trésorerie, la direction de la gestion pour anticiper les flux et organiser l'activité. A moyen terme, et notamment pour l'année suivante, les objectifs financiers et de gestion sont identiques. En termes de suivi technique du portefeuille, ces projections permettent d'identifier un besoin éventuel de revalorisation tarifaire des contrats, d'anticiper la poursuite d'une tendance à la hausse des dépenses de santé ou d'un ralentissement, d'estimer les effets de certaines réformes de l'Assurance Maladie, d'anticiper une aggravation du risque due par exemple à une épidémie.

Toutes ces motivations, entre autres, nous conduisent à envisager différentes méthodes de projection de la charge sinistre de notre portefeuille santé. L'une des méthodes est basée sur l'observation d'un indicateur exogène à APRIL Assurances, l'évolution des prestations santé de l'Assurance Maladie, les autres sont issues du suivi du portefeuille santé APRIL Assurances.

2.1 Indicateur exogène

Diverses publications relatives entre autres aux prestations santé paraissent régulièrement. Nous nous sommes ainsi naturellement intéressés à l'évolution des prestations santé de l'Assurance Maladie et sa projection afin d'essayer de trouver un moyen d'anticiper le montant de prestations à régler par APRIL Assurances à partir de ces observations.

2.1.1 Données disponibles

La Caisse Nationale d'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) publie mensuellement un communiqué sur les dépenses relatives à la maladie, la maternité et l'arrêt de travail, les indices d'évolution en date de soins pour les soins de ville et les résultats détaillés en date de remboursement. Ces publications sont accessibles au grand public sur le site de l'Assurance Maladie en ligne : Ameli.

Communiqué de presse sur les dépenses de santé

Un communiqué de presse sur les dépenses de santé est publié chaque mois. Il analyse les dernières données disponibles sur les décaissements. Les informations diffusées à cette occasion s'appuient sur des données concernant les règlements effectués par le régime général au cours du mois. Il présente les évolutions des remboursements effectués par postes de soins sous différentes approches. Les évolutions sont observées en données brutes et en données corrigées des variations saisonnières et/ou corrigées des jours ouvrables. Les taux de croissance des remboursements sont observés mensuellement, en année complète mobile c'est-à-dire en 12 mois glissants ou encore depuis le mois de janvier jusqu'au mois en cours par rapport à la même période l'année précédente.

Ne sachant pas précisément quels sont les retraitements effectués sur les données afin d'obtenir celles-ci corrigées des variations saisonnières (CVS) et/ou corrigées des jours ouvrés (CJO), nous nous sommes intéressés à d'autres publications de la CNAMTS.

Statistique mensuelle en mois de soins

La statistique mensuelle en mois de soins permet de s'affranchir des aléas dus aux délais d'envoi et de traitement des dossiers. Il s'agit d'un outil d'analyse de la consommation médicale des ressortissants du régime général et de suivi de l'activité des professionnels de santé. Cette publication concerne exclusivement les soins de ville et est constituée de l'évolution de différents indices CJO/CVS en base 100.

Dans la mesure où nous nous intéressons à l'ensemble des dépenses de santé et pas seulement aux soins de ville, nous préférons nous intéresser à la publication en date de remboursement.

Statistique mensuelle en dates de remboursements

Chaque mois, la CNAMTS publie un document intitulé Statistique Mensuelle. Celui-ci indique dans un premier temps plusieurs indices d'évolution des principaux postes de dépenses, en euros et en nombre d'actes. Il présente également les dépenses du régime général en euros. Elles sont données mensuellement et en cumulé de janvier au mois en cours. Il s'agit des dépenses relatives à la maladie, la maternité et l'arrêt de travail. Par ailleurs, il convient de souligner que les montants publiés sont en date de remboursement et tous exercices de soins confondus. Un exemple en est donné en annexe 1. Des tableaux présentent également le nombre d'actes ou de journées selon les postes de soins.

Nous avons finalement choisi de travailler directement à partir des montants des dépenses de santé du régime général en euros et en mois de remboursement. L'objet de notre étude ici ne concerne pas l'arrêt de travail mais bien la santé uniquement.

Dans un premier temps, nous avons constitué une base de données des prestations réglées par l'Assurance Maladie à partir des documents « statistique mensuelle » en date de règlement. Nous avons réussi à reconstituer l'historique des prestations payées mensuellement depuis 2005 sur les postes de soins suivants :

- les soins de ville, subdivisés en :
 - o honoraires en secteur privé (médicaux et dentaires)
 - o prescriptions
 - o autres prestations de soins santé
 - o prestations en espèce
- établissements de santé privés et publics
- établissements médico-sociaux
- réseaux de santé

Ces montants sont lisibles dans une page de synthèse présente dans chaque document publié. En ce qui concerne les soins de ville, il est possible de reconstituer, à partir du détail des postes de soins, la part de ces soins relative à l'hospitalisation ce qui permet de visualiser la dépense totale du poste hospitalisation. Une vision détaillée des montants réglés par poste de soins est également donnée selon qu'il s'agit d'actes avec ticket modérateur (ATM) ou sans ticket modérateur (STM). Ces derniers correspondent à une prise en charge à 100 % de l'Assurance Maladie, dans le cadre d'une affection longue durée par exemple. Dans la mesure

où APRIL Assurances intervient en complément de l'Assurance Maladie, nous aurions souhaité étudier séparément l'évolution des prestations santé des actes ATM et des actes STM. Cependant, les données dont nous disposons font cette distinction pour les soins de ville exclusivement ce qui ne nous permet pas d'étudier deux évolutions distinctes. Nous travaillons donc sur les montants de prestations tous actes confondus.

2.1.2 Modélisation de l'évolution de la charge sinistre APRIL Assurances sur la base des données de l'Assurance Maladie

Notre objectif est de nous baser sur un indicateur exogène, l'Assurance Maladie, afin d'estimer l'évolution du coût du risque santé de notre portefeuille, encore appelée « dérive sinistralité ». L'objectif étant d'essayer d'anticiper les évolutions de la sinistralité du portefeuille santé d'APRIL Assurances. L'historique des prestations santé payées par l'Assurance Maladie permet de calculer l'alourdissement de sa charge sinistre d'une année à l'autre que nous appellerons encore « dérive des prestations ». Nous calculons l'évolution du coût du risque santé à partir des montants de prestations cumulés chaque mois par rapport aux montants de prestations cumulés sur la même période l'année précédente.

Dans la partie 1 de présentation du risque santé, nous avons expliqué en quoi les périmètres d'APRIL Assurances et de l'Assurance Maladie sont différents. En particulier, les postes de soins n'ont pas les mêmes intitulés et leurs poids respectifs dans la charge globale des prestations diffèrent. La lecture directe de l'alourdissement de la charge de l'Assurance Maladie ne permet pas de conclure quant à la dérive sinistralité de notre portefeuille.

Nous pouvons cependant utiliser ces dérivées prestations pour calculer une dérive sinistralité théorique du portefeuille. Le calcul de l'alourdissement de la charge sinistre de l'Assurance Maladie au global n'est donc pas suffisant pour modéliser l'évolution théorique du risque santé d'APRIL Assurances, nous réalisons par conséquent ce calcul sur chaque poste de soins.

La première étape consiste à étudier les poids des règlements des différents postes de soins dans la dépense annuelle du régime général pour chaque année entre 2005 et 2008. A partir de l'historique des montants réglés entre 2005 et 2008, nous constatons que la répartition des prestations payées annuellement par poste de soins est stable d'une année sur l'autre (variation inférieure à 0.8 %). Elle est également stable d'un mois sur l'autre d'une même année.

Nous retenons la répartition suivante correspondant à l'année 2008 :

POSTES DE SOINS	Assurance Maladie
Hospitalisation	54,1%
Honoraires secteur privé	13,3%
Prescriptions	25,7%
Autres prestations de soins santé	2,3%
Prestations en espèce	4,8%
Total des règlements année 2008	100%

Dans un deuxième temps, nous calculons l'évolution du coût du risque d'une année sur l'autre sur chaque poste de soins de l'Assurance Maladie. Ce calcul est réalisé chaque mois sur les prestations cumulées depuis le mois de janvier de l'année en cours par rapport à la même période l'année précédente. Notons qu'en pondérant les évolutions du coût des postes de soins par leurs poids respectifs, nous retrouvons bien l'évolution globale du coût du risque santé.

Nous réalisons ensuite le même calcul des poids des postes de soins d'APRIL Assurances dans la dépense globale du portefeuille santé. Ceci est effectué afin de pondérer ensuite les dérives prestations observées sur les différents postes de l'Assurance Maladie par les poids APRIL Assurances correspondant dans le but de reconstituer une dérive sinistralité théorique de notre portefeuille.

La première difficulté rencontrée a été le rapprochement des postes de soins d'APRIL Assurances de ceux de l'Assurance Maladie, dans la mesure où leurs périmètres de prise en charge diffèrent comme nous l'avons évoqué précédemment. A partir du détail des postes de soins de l'Assurance Maladie présents dans les documents de « statistique mensuelle », nous avons décidé de regrouper par analogie les postes de la façon suivante :

- l'hospitalisation comprend chez APRIL Assurances les honoraires chirurgicaux, les frais de séjour, le forfait journalier, les frais d'accompagnement d'enfant et ceux de la chambre particulière.
- les honoraires du secteur privé sont assimilés chez APRIL Assurances aux consultations, visites et radiologies.
- les prescriptions incluent les auxiliaires médicaux, soins infirmiers, massages, analyses et prélèvements et la pharmacie.
- le libellé autres prestations de soins de santé englobe chez APRIL Assurances les cures, transport et appareillage.

- les prestations en espèces correspondent à des indemnités journalières en cas d'arrêt de travail et se situent hors du périmètre santé d'APRIL Assurances.

En théorie, le dentaire devrait être intégré dans les honoraires de secteur privé et l'optique dans les prescriptions. Cependant, ces deux postes représentent une part nettement plus importante dans les prestations APRIL Assurances que dans celles de l'Assurance Maladie. Afin d'avoir des paniers de soins comparables, nous avons choisi de ne pas comptabiliser les dépenses relatives à ces deux postes dans le calcul des poids.

Soulignons également le fait que l'Assurance Maladie ne prend jamais en charge les dépassements d'honoraires contrairement à APRIL Assurances qui, selon le niveau de garantie, peut en prendre une partie en charge voire la totalité.

Exemple de calcul au 31/12/2007 :

Pour plus de lisibilité au niveau des formules et pour des raisons de confidentialité, nous noterons les poids des postes de soins dans la charge annuelle d'APRIL Assurances respectivement v_{AA} , w_{AA} , x_{AA} , y_{AA} , z_{AA} pour les postes hospitalisation, honoraires secteur privé, prescriptions, autres prestations de soins de santé et prestations en espèces. Nous avons calculé ci-dessous les dérivées prestations de l'Assurance Maladie par postes de soins à fin décembre. Rappelons qu'il s'agit des prestations cumulées de l'année en cours par rapport à la même période l'année précédente.

Postes de soins	Dérives Assurance Maladie
Hospitalisation	3,2%
Honoraires secteurs privés	3,7%
Prescriptions	5,6%
Autres prestations de soins de santé	5,4%
Prestations en espèces	3,2%

La dérive des prestations globales observée pour l'Assurance Maladie est de 3.9%, elle se retrouve par le calcul suivant :

$$D_{\text{Assurance Maladie}} = 54.1 \% * 3.2 \% + 13.3 \% * 3.7 \% + 25.7 \% * 5.6 \% + 2.3 \% * 5.4 \% + 4.8 \% * 3.2 \%$$

$$D_{\text{Assurance Maladie}} = 3.9 \%$$

La dérive sinistralité théorique d'APRIL Assurances se calcule avec la formule suivante :

$$D_{\text{Théorique AA}} = v_{\text{AA}} * 3.2 \% + w_{\text{AA}} * 3.7 \% + x_{\text{AA}} * 5.6 \% + y_{\text{AA}} * 5.4 \% + z_{\text{AA}} * 3.2 \%$$

Nous obtenons un indicateur théorique de l'évolution du coût du risque santé APRIL Assurances, la difficulté étant d'établir un lien ou d'intégrer les postes sous-représentés voire non représentés au niveau de l'Assurance Maladie que sont l'optique, le dentaire et les dépassements d'honoraires. Ces postes de soins ont effectivement un impact non négligeable sur l'évolution de la charge sinistre des complémentaires santé car leur poids dans les dépenses totales de celles-ci s'avère assez important. L'IGAS⁸ estime notamment que les dépassements d'honoraires représentent 11 % des honoraires totaux sachant qu'ils ne peuvent en aucun cas être financés par l'Assurance Maladie mais seulement par les complémentaires santé ou les assurés.

2.1.3 Limites de la méthode

Les périmètres de l'Assurance Maladie et de notre portefeuille sont différents en termes de composition des différents postes de soins. La repondération des postes de soins APRIL Assurances en fonction des postes de l'Assurance Maladie, présentée dans le paragraphe précédent, est donc partielle, dans la mesure où certains postes sont sous-représentés, et subjective. En effet, selon les hypothèses retenues pour la répartition des postes de soins APRIL Assurances, le résultat obtenu en termes d'alourdissement de la charge sinistre varie.

Les périmètres d'intervention sont également différents au niveau des personnes couvertes. L'Assurance Maladie couvre toute la population, ce qui n'est pas le cas d'APRIL Assurances qui propose des contrats d'assurance individuelle. Les assurés ont donc une sensibilité différente au coût et à l'utilisation de leur couverture.

Par ailleurs, selon si l'assuré est en ALD ou pas, la prise en charge d'APRIL Assurances diffère, ce qui implique une évolution différente du coût. Ainsi, pour un assuré en ALD dont le ticket modérateur est pris en charge à 100 % par l'Assurance Maladie, selon le niveau de garantie, APRIL Assurances prendra éventuellement en charge une partie des dépassements d'honoraires mais n'aura pas de ticket modérateur à financer.

⁸ IGAS : Inspection Générale des Affaires Sociales, rapport sur les dépassements d'honoraires médicaux, avril 2007.

D'autre part, cette méthode alternative a été envisagée dans un contexte de projection de la dérive sinistralité. Or, il existe un décalage de deux à trois mois par rapport au mois en cours en termes de publication des statistiques mensuelles de l'Assurance Maladie. Cette méthode peut donc difficilement être envisagée dans une optique de projection.

Cette méthode de projection par le biais d'un indicateur exogène à APRIL Assurances n'est donc pas concluante. Nous préférons privilégier la recherche d'une méthode alternative.

2.2 Projection par déformation des résultats

Toujours dans une optique d'estimation au plus juste des prestations futures et des résultats du portefeuille en cours d'année, l'une des méthodes de projection utilisée actuellement est la déformation des comptes de l'année précédente (arrêté à fin avril N-1).

2.2.1 *Dérive sinistralité*

L'indicateur appelé dérive sinistralité correspond à l'évolution de la charge sinistre de l'exercice de soins en cours par rapport à l'exercice de soins précédent. Plusieurs méthodes auraient pu être envisagées pour suivre cette évolution, nous aurions pu étudier l'évolution de la prestation moyenne par tête assurée ou encore travailler par postes de soins. Dans un souci de simplification du suivi de portefeuille et des projections, nous avons choisi de travailler tous postes de soins confondus et avec des montants de prestations globaux sans tenir compte du nombre de personnes assurées.

Pour estimer l'alourdissement de la charge sinistre d'une année à l'autre, nous ne pouvons pas nous contenter de reproduire le même type de calcul que nous avons effectué pour l'Assurance Maladie, à savoir, calculer le rapport des prestations cumulées de janvier au mois en cours par rapport à la même période l'année précédente. Il est essentiel de ramener le montant de prestations payées à celui des cotisations encaissées. En effet, contrairement à l'Assurance Maladie qui couvre l'ensemble de la population et dont le périmètre des personnes assurées est stable d'une année à l'autre, il y a des fluctuations dans le portefeuille APRIL Assurances dues aux résiliations de contrat et à la création d'affaires nouvelles. Ainsi, une augmentation des prestations ne signifie pas nécessairement que la sinistralité du portefeuille est plus importante, elle peut tout simplement provenir de la création de nouvelles

affaires. A l'inverse, une diminution des prestations payées n'implique pas une diminution de la charge sinistre, cette observation peut être la conséquence de la résiliation d'affaires.

Nous effectuons par conséquent un suivi du ratio P/C pour obtenir ensuite l'alourdissement de la charge sinistre après correction de la revalorisation tarifaire.

Chaque mois, un fichier est alimenté avec les montants de prestations cumulées depuis le mois de janvier de l'année N, de même pour les cotisations de l'année N. Nous disposons des mêmes données pour l'année N-1, ce qui nous permet de déterminer l'évolution mensuelle du ratio P/C. Nous noterons P les prestations et C les cotisations.

$$\text{Evolution P/C} = \frac{\frac{P_N}{C_N}}{\frac{P_{N-1}}{C_{N-1}}} - 1$$

Cette évolution traduit une augmentation ou une diminution du ratio P/C selon les cas. Nous cherchons ensuite à estimer l'alourdissement de la charge sinistre intrinsèque, encore appelée dérive sinistralité.

Or, chaque année, des revalorisations des cotisations sont susceptibles d'avoir lieu ce qui introduit un biais dans l'étude de l'évolution du P/C. Pour visualiser la dérive sinistralité en tant que telle, nous devons alors corriger cette évolution de la revalorisation tarifaire éventuelle.

$$\text{Dérive Sinistralité} = (1 + \text{Evolution P/C}) * (1 + \text{Revalorisation}_N) - 1$$

Cet indicateur donne une tendance de l'évolution de la charge sinistre du portefeuille et peut être utilisé pour le pilotage du portefeuille, notamment lors de l'établissement des revalorisations tarifaires.

Il convient cependant de souligner que les évolutions mensuelles de la dérive sinistralité sont en dents de scie et qu'il est donc difficile de statuer à l'avance sur l'évolution de l'indicateur en fin d'année. L'utilisation de différentes hypothèses de dérive sinistralité permet cependant de donner une fourchette d'estimation des futurs montants de prestations à payer.

2.2.2 Projection grâce à l'indicateur de dérive sinistralité

Afin d'estimer au plus juste les prestations futures et les résultats du portefeuille en cours d'année, une déformation des comptes de l'année précédente est réalisée afin de projeter le compte de l'année N (arrêté au 30 avril N+1).

Au 30 avril N, différents paramètres sont connus :

- le chiffre d'affaires hors taxes de l'année N-1 qui correspond aux primes hors taxe encaissées à la date d'arrêté des comptes c'est-à-dire au 30 avril N.
- le taux de chargement APRIL Assurances qui est défini contractuellement.

Nous pouvons également calculer une estimation du ratio P/C hors taxe de l'année N-1 et le taux de résultat brut N-1.

Plusieurs hypothèses sont alors nécessaires pour effectuer une déformation du compte N-1 afin de projeter celui de l'année N :

- le taux de chute c'est-à-dire le taux de résiliation des affaires en portefeuille,
- le taux de revalorisation tarifaire éventuelle,
- le chiffre d'affaires hors taxes issu de la production nouvelle, c'est-à-dire les primes encaissées au titre des affaires nouvelles,
- la dérive sinistralité c'est-à-dire l'alourdissement de la charge sinistre santé.

Parmi ces différents indicateurs, celui qui a la variabilité la plus importante est la dérive sinistralité. En pratique, nous essayons de déterminer une fourchette d'évolution de cet indicateur pour l'année à venir. Plusieurs simulations sont alors effectuées avec des taux de dérive sinistralité plus ou moins élevés afin de visualiser l'impact possible de cette évolution sur le résultat du portefeuille.

Ces différentes hypothèses nous permettent de projeter :

- le chiffre d'affaire hors taxe de l'année N

$$CA_N^{HT} = CA_{N-1}^{HT} * (1 - \text{Taux Chute}) * (1 + \text{Revalorisation}) + CA_{\text{Affaires Nouvelles}}$$

- le ratio P/C hors taxes de l'année N : $P/C_N = P/C_{N-1} * \frac{1 + \text{Dérive Sinistralité}}{1 + \text{Revalorisation}}$
- le taux de résultat brut de l'année N : $\text{Taux Résultat}_N = 1 - \text{Taux Chargement} - P/C_N$

Exemple de projection :

Afin d'illustrer l'utilisation de l'indicateur de dérive sinistralité, nous présentons ci-dessous un exemple de projection de compte de résultat pour l'exercice N. Pour des raisons de confidentialité, les données sont déformées et données en base 100.

Ci-dessous, voici les données dont nous disposons pour l'exercice N :

N	
CA HT N	100
Taux de Chargement	25
Prestations exercice N	70
Taux de Résultat brut N	5

La projection du compte de résultat pour l'exercice N+1 est effectuée grâce aux formules vues précédemment. Les hypothèses qui doivent être effectuées pour les projections apparaissent en bleu dans le tableau suivant :

	N	N+1
CA HT N	100,0	110,0
Taux de Chargement	25,0	27,5
Prestations	70,0	73,5
Taux de Résultat brut N	5,0	9,0

$(1 - \text{Taux de chute}) * (1 + \text{Revalorisation})$

$1 + \text{Dérive Sinistralité}$

L'historique des taux de résiliation observés sur les derniers exercices permet d'estimer le taux de chute de l'exercice à venir. Les taux de revalorisation tarifaire éventuelle sont déterminés à l'avance et sont donc connus. Enfin, la dérive sinistralité nous permet d'estimer les prestations futures dans la mesure où elle reflète l'évolution de la charge sinistre santé. Etant donné la sensibilité de ce dernier indicateur, différents scénarios plus ou moins optimistes sont réalisés dans le but de définir une fourchette de résultats envisageables pour l'exercice à venir.

2.3 Projection avec les cadences

En cours d'année, nous souhaitons avoir une vision la plus juste possible des prestations relatives à l'exercice de soins à régler par APRIL Assurances. L'une des méthodes envisagées que nous venons de développer est l'estimation de l'alourdissement de la charge sinistre santé à venir, grâce au calcul mensuel de la dérive sinistralité à partir des prestations cumulées. Une autre méthode consiste à utiliser l'historique des cadences de règlement, c'est-à-dire les rythmes de liquidation des derniers exercices de soins.

Ainsi, une cadence de x % pour un mois M d'un exercice N signifie que les prestations relatives à l'exercice N , payées de janvier au mois M , correspondent à x % du montant total des prestations de l'exercice N . Ce montant est connu a posteriori, c'est-à-dire à l'issue des 24 mois, durée maximum de liquidation.

La mise en œuvre de cette méthode s'appuie sur l'expérience des exercices antérieurs pour en déduire une loi de règlement pour l'exercice étudié. Chaque mois, les différents tableaux de cadences sont alimentés avec les montants de prestations réglés par exercices de soins afin de mettre à jour les rythmes de liquidation des derniers exercices de soins. Cet historique permet de visualiser les rythmes de liquidation des exercices de soins au global et peut également être ventilé selon les différents critères de segmentation choisis.

Pour un même exercice de survenance, les cadences de règlement sont calculées sur 24 mois car cela correspond à la durée maximum de liquidation envisageable.

Exemple d'utilisation des cadences pour les projections :

A fin septembre N , nous souhaitons estimer le montant global de prestations au titre de l'exercice de soin N pour les affaires d'un assureur donné.

A cette période de l'année, nous disposons des informations suivantes :

- Montant global de prestations N payé entre janvier et septembre N : noté P ,
- Cadence de règlement à fin septembre $N-1$ pour l'exercice $N-1$: x %,
- Cadence de règlement à fin septembre $N-2$ pour l'exercice $N-2$: y %.

Nous pouvons ainsi estimer le montant global de prestations payé au titre de l'exercice de soin N par la formule suivante : $P_N = \frac{P}{C}$ avec C la cadence de règlement retenue.

Supposons que la cadence de règlement x % est inférieure à la cadence y %. A partir des données dont nous disposons, nous envisageons deux scénarios, le scénario pessimiste qui correspond à l'hypothèse de cadence de règlement x % car celle-ci est plus faible, ce qui implique un montant restant plus important à payer, et le scénario optimiste qui retient comme hypothèse la cadence y %.

Cette méthode permet d'établir plusieurs scénarios possibles pour les projections des prestations santé à moyen terme. Il faut cependant souligner certaines limites qu'elle présente. Les rythmes de règlement des prestations dépendent de l'activité de gestion interne APRIL Assurances et de la gestion de l'Assurance Maladie (télétransmission ou envoi des feuilles de soins), ce qui peut introduire un biais d'une année sur l'autre. Les cadences de règlement dépendent également du régime obligatoire de l'assuré. Enfin ce type de projections est utilisable uniquement sur l'exercice de soins en cours. En effet, il est nécessaire d'observer les règlements des prestations sur plusieurs mois de l'exercice de soin en cours avant de pouvoir projeter le montant de prestation souhaitée.

La méthode de projection à partir de l'évolution des prestations santé du régime général de l'Assurance Maladie ne répondant pas exactement à tous nos objectifs, nous envisageons alors une méthode alternative de projection de la charge sinistre afin de fiabiliser les méthodes existantes et d'envisager des projections à plus court terme. Nous nous sommes ainsi tournés vers une modélisation statistique grâce aux séries temporelles. Cette méthode est basée sur le suivi de notre propre portefeuille.

Partie 2 : Méthode alternative de projection de la charge sinistre santé via les séries temporelles

Dans la partie 1, nous avons présenté les différences de périmètres entre l'Assurance Maladie et APRIL Assurances et les différentes méthodes de projections qui en découlent, à partir de données de l'Assurance Maladie ou du suivi du portefeuille santé APRIL Assurances. Nous avons exposé ces différentes méthodes ainsi que leurs limites respectives. Les méthodes de projection à partir des cadences de règlement et par déformation des résultats permettent un suivi d'évolution du coût du risque santé à moyen terme. Nous envisageons alors une méthode de projection via les séries temporelles dans le but de réaliser des prévisions à court terme et d'avoir un contrôle supplémentaire sur celles à moyen terme effectuées avec les deux méthodes précédemment évoquées.

Cette deuxième partie a pour objectif de présenter les séries temporelles d'un point de vue théorique et la méthodologie employée pour aboutir aux projections des prestations du portefeuille santé. Nous présentons ensuite les données dont nous disposons et les différentes méthodes de projections envisageables. Enfin nous expliquons les raisons qui nous poussent à retenir une modélisation en particulier et nous présentons les résultats obtenus sur différents périmètres du portefeuille santé.

1 Théorie des séries temporelles

Une série temporelle est une suite finie de données évolutives, relevées chronologiquement à différentes dates. Ce type de série se rencontre dans de nombreux domaines, nous pouvons citer l'économie (taux de chômage, PNB...), la finance (cours d'action...), le transport (trafic aérien international,...).

Des principes physiques ou socio-économiques peuvent permettre d'expliquer l'évolution temporelle de la variable lorsque le phénomène étudié est relativement simple. Pour des variables plus compliquées ou pour lesquelles il n'existe pas de modélisation déterministe, on

a recours à une approche probabiliste. On considérera alors la série temporelle comme réalisation d'un processus stochastique.

L'objectif le plus fréquent de ce type d'étude est la projection, c'est-à-dire la prévision des valeurs futures d'une variable grâce aux valeurs observées dans le présent et le passé de cette même variable. C'est en cela que les séries temporelles se distinguent des modèles linéaires généralisés car ceux-ci cherchent à prévoir le niveau d'une variable en fonction d'autres variables explicatives et non pas via une dépendance temporelle.

Les modélisations probabilistes les plus simples sont données par régression sur le temps (linéaire, polynômiale,...). Ces modélisations fournissent des intervalles de prévision pour les projections lorsque l'on est dans un cadre gaussien. D'autres méthodes de projection se sont développées plus récemment (modélisation ARMA, ARCH...), elles sont plus performantes mais plus coûteuses en calcul.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous limiterons à l'étude des séries temporelles univariées et en temps discret compte tenu des données dont nous disposons. Cette partie a pour objectif de présenter les définitions et théorèmes utilisés lors de la modélisation des prestations du portefeuille santé d'APRIL Assurances, ainsi que la méthodologie employée.

1.1 Généralités

1.1.1 *Processus stochastique*

Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in T\}$, T étant l'ensemble des instants. Nous considérerons ici des instants discrets c'est-à-dire $T \in \mathbb{N}$, \mathbb{N} étant l'ensemble des entiers naturels.

Pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire réelle $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pour $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ est une réalisation de la variable aléatoire X_t .

Les fonctions $\{t \mapsto X_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ sont les trajectoires du processus.

Si pour tout $t \in T$, les variables aléatoires X_t admettent un moment d'ordre 2 alors le processus $(X_t, t \in T)$ est un **processus de second ordre**.

On considère qu'une **série temporelle** est un morceau d'une trajectoire d'un processus stochastique avec n le nombre d'observations, appelé longueur de la série.

1.1.2 Structures de modèles

Une série temporelle peut avoir une **structure additive** de la forme $X_t = d_t + \varepsilon_t$, d_t étant la composante déterministe et ε_t la partie aléatoire. Elle peut également avoir une **structure multiplicative**, c'est à dire de la forme $X_t = d_t * \varepsilon_t$.

Nous étudierons exclusivement des modèles additifs par la suite dans la mesure où il suffit de considérer le logarithme d'un modèle multiplicatif pour se ramener à un modèle additif.

Soit une série chronologique ayant la structure additive générale suivante : $X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t$.

m_t est la **tendance** qui peut être linéaire, polynômiale, exponentielle... Elle correspond à l'évolution au cours du temps indépendamment des fluctuations saisonnières.

s_t est la **saisonnalité**, c'est-à-dire une composante périodique de période d telle que $\exists d, \forall t, s_{t+d} = s_t$. La saisonnalité correspond aux variations saisonnières pures.

ε_t est le **résidu** ou **bruit** de la série temporelle.

La tendance et la saisonnalité correspondent à la partie déterministe de la série, le bruit est la composante aléatoire.

L'étude des séries temporelles revêt deux aspects, d'une part l'extraction du caractère déterministe et d'autre part la détermination d'un modèle pour le bruit. Ces deux étapes sont nécessaires pour pouvoir réaliser des prévisions.

Remarque : Certains modèles peuvent résulter de combinaisons plus complexes, avec notamment la superposition de plusieurs tendances et/ou saisonnalités.

1.1.3 Bruit blanc⁹

Nous avons vu précédemment que pour un modèle $X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t$, la partie non déterministe ε_t du processus s'appelle le bruit.

Notons que : $E(X_t) = m_t + s_t + E(\varepsilon_t)$ et $Cov(X_t, X_s) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$.

$(\varepsilon_t, t \in T)$ est un **bruit blanc fort** si les $(\varepsilon_t, t \in T)$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) et d'espérance nulle. Il n'y a donc aucune dépendance temporelle.

Si, de plus, les $(\varepsilon_t, t \in T)$ suivent une loi normale $N(0, h)$, on parle de bruit blanc gaussien.

$(\varepsilon_t, t \in T)$ est un **bruit blanc faible** si c'est un processus de second ordre, centré, non corrélé et tel que $\forall t, Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. On n'observe pas de corrélation entre le processus observé au temps t et au temps s (différent de t).

$(\varepsilon_t, t \in T)$ est un processus non corrélé signifie $\forall t \neq s, Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$.

1.1.4 Stationnarité¹⁰

Le processus $(X_t, t \in T)$ est **fortement stationnaire** si pour tout (t_1, \dots, t_n) et tout h , la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est la même que celle de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$. Cela revient à dire que la loi est invariante en temps.

Le processus $(X_t, t \in T)$ est **faiblement stationnaire** si c'est un processus de second ordre tel que pour tout $t, E(X_t) = \mu$ et pour tout $s, t, h, Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, \dots, X_{s+h})$. En d'autres termes, l'espérance est constante et indépendante du temps et la covariance est également indépendante du temps.

Remarque : Ces définitions sont équivalentes s'il s'agit d'un processus gaussien.

On appelle **fonction d'auto-covariance** d'un processus faiblement stationnaire, la fonction $h \mapsto \gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_0, X_h)$. Les covariances ne dépendent que de h .

⁹ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. Cours de Séries temporelles 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

¹⁰ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. Cours de Séries temporelles 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

On appelle **fonction d'auto-corrélation** d'un processus faiblement stationnaire, la fonction $h \mapsto \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$.

Soit X_t un processus faiblement stationnaire et centré. On note M_h le sous-espace vectoriel engendré par (X_2, \dots, X_h) et P_{M_h} la projection sur ce sous-espace.

La **fonction d'auto-corrélation partielle** du processus est définie par $\alpha(h) = \text{corr}(X_{h+1} - P_{M_h}(X_{h+1}), X_1 - P_{M_h}(X_1))$ pour $h \geq 2$. On adopte par convention $\alpha(1) = \text{corr}(X_1, X_2) = \rho(1)$.

Des estimateurs de ces fonctions peuvent être calculés de façon empirique grâce aux formules suivantes :

La **fonction d'auto-covariance empirique** est définie par

$$h \mapsto \hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{k=1}^{n-h} (X_k - \bar{X})(X_{k+h} - \bar{X})$$

La **fonction auto-corrélation empirique** est définie par $h \mapsto \hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{k=1}^{n-h} (X_{k+h} - \bar{X})(X_k - \bar{X})}{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}$.

Les logiciels de statistique donnent les auto-corrélations empiriques, avec les intervalles de confiance à 5 %. On considère qu'une valeur à l'intérieur de cet intervalle n'est pas significative c'est-à-dire, h étant fixé, sous l'hypothèse de nullité des auto-corrélations empiriques, la probabilité que celles-ci soient à l'intérieur des bornes est approximativement de 95 %.

Afin d'identifier si un processus est stationnaire ou non, plusieurs tests statistiques peuvent être utilisés. Les plus nombreux sont les tests de racines unitaires. Nous présentons en annexe 2, 3 et 4 les principes des tests utilisés lors des différentes études menées par la suite, le test de Dickey-Fuller augmenté, le test de Phillips-Perron et le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS).

1.1.5 Opérateurs de décalage et de différence

Les opérateurs de décalage et de différence aident à détecter les tendances et saisonnalités éventuelles et à rendre la série stationnaire.

On appelle **opérateur de décalage** ou de **retard** l'opérateur L défini par $L(X_t) = X_{t-1}$.

On appelle **opérateur de différence d'ordre k** l'opérateur Δ^k défini par $\Delta^k(X_t) = (1-L)^k(X_t) = X_t - X_{t-k}$.

On définit également l'opérateur Δ_r tel que $\Delta_r(X_t) = (1-L^r)X_t$.

Si $X_t = m_t + \varepsilon_t$ avec m_t une tendance polynômiale de degré k alors $\Delta^1(X_t) = m'_t + \varepsilon'_t$ avec m'_t une tendance polynômiale de degré $k-1$.

Si $X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t$ avec m_t une tendance polynômiale de degré k et s_t une saisonnalité de période d , alors $\Delta^d(X_t) = m'_t + \varepsilon'_t$.

On appelle **filtre** tout opérateur de la forme $A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i L^{-i}$ où $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite absolument sommable. Un filtre est **causal** si et seulement si $a_i = 0$ pour $i < 0$.

1.1.6 Processus MA, AR et ARMA¹¹

Un processus $(X_t, t \in T)$ est une **moyenne mobile d'ordre q** si et seulement si il existe un bruit blanc faible $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ et un filtre causal A d'ordre q avec $a_0 \neq 0$ tel que $X_t = A(\varepsilon_t)$, autrement dit : $X_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}$

La famille des moyennes mobiles d'ordre q est notée MA(q), le terme anglais correspondant étant moving average process. On note aussi $X_t = A(L)\varepsilon_t$ avec $A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_q z^q$.

¹¹ Sources : MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009. BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion*. Paris : DUNOD, 2008, 329 p. LUTKEPOHL Helmut, KRATZIG Markus. *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press, 2004, 317 p.

Si $(X_t, t \in T)$ est un processus faiblement stationnaire, d'espérance nulle et de fonction d'auto-corrélation telle que $\gamma(h) = 0$ pour tout $h > q$ et $\gamma(q) \neq 0$ alors, $(X_t, t \in T)$ est une moyenne mobile d'ordre q .

Un processus MA(q) est toujours stationnaire, mais il n'est inversible que si les racines du polynôme caractéristique sont à l'extérieur du disque unité.

Un processus $(X_t, t \in T)$ est un processus **auto-régressif d'ordre p** si et seulement si il existe un bruit blanc faible $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ et un filtre causal A d'ordre p avec $a_0 \neq 0$ tel que $\varepsilon_t = A(X_t)$, autrement dit : $\varepsilon_t = a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p}$.

La famille des processus auto-régressifs d'ordre p est notée AR(p), le terme anglais correspondant étant auto-regressive process. On note aussi $\varepsilon_t = A(L)X_t$ avec $A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$.

Si $(X_t, t \in T)$ est un processus auto-régressif d'ordre p de fonction d'auto-corrélation partielle α alors, $\alpha(h) = 0$ pour tout $|h| > p$.

Un processus AR(p) est stationnaire si les racines du polynôme retard $A(L)$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Un processus $(X_t, t \in T)$ est dit **ARMA(p, q)** si et seulement si il existe un bruit blanc faible $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ et deux filtres causaux A et B d'ordres respectifs p et q tel que $A(L)X_t = B(L)\varepsilon_t$, autrement dit : $a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$.

On supposera que les polynômes A et B n'ont pas de racines de module strictement supérieur à 1 et n'ont pas de racine commune.

Remarque : Les processus moyennes mobiles et auto-régressifs sont des cas particuliers des processus ARMA(p, q) avec respectivement $p = 0$ et $q = 0$.

1.1.7 Processus intégrés¹²

Les processus intégrés ne sont pas stationnaires. Il s'agit de processus qui donnent un ARMA stationnaire par différenciation.

Un processus $(X_t, t \in T)$ est un **ARIMA (p,d,q)** si et seulement si, $Y_t = \Delta^d(X_t) = (1-L)^d(X_t)$ est un ARMA (p,q), autrement dit, $A(L)(1-L)^d(X_t) = B(L)(\varepsilon_t)$.

On supposera que les polynômes A et B n'ont pas de racines de module strictement supérieur à 1 et n'ont pas de racine commune.

Si le processus présente une composante saisonnière, il peut être modélisé par un modèle **saisonnier multiplicatif (p,d,q) x (P,D,Q)_r** si et seulement si, il existe un bruit blanc faible $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ et des polynômes A, B, C et D d'ordres respectifs p, q, P et Q tels que $A(L)C(L^r)(1-L)^d(1-L^r)^P(X_t) = B(L)D(L^r)(\varepsilon_t)$.

On supposera que les polynômes A, B, C et D n'ont pas de racines de module strictement supérieur à 1 et n'ont pas de racine commune.

En particulier, un processus $(X_t, t \in T)$ est un **SARIMA (p,d,r,q)** si et seulement si, $Y_t = \Delta_r \Delta^d(X_t) = (1-L^r)(1-L)^d(X_t)$ est un ARMA (p,q), autrement dit, $A(L)(1-L^r)(1-L)^d(X_t) = B(L)(\varepsilon_t)$.

Cela revient à prendre dans la formule précédente $P = Q = 0$ et $D = 1$.

1.1.8 Méthodologie de Box et Jenkins pour la modélisation¹³

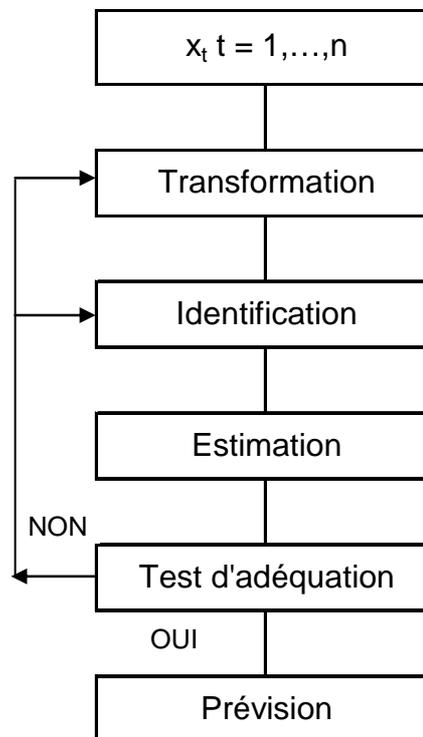
Dans l'approche probabiliste, la question du choix du modèle le mieux adapté se pose. Dans les années 1970, Box et Jenkins ont proposé une démarche systématique permettant d'aboutir, si c'est possible, au choix d'un modèle pour la série temporelle étudiée. Cette démarche pour

¹² Sources : **LUTKEPOHL Helmut, KRATZIG Markus.** *Applied Time Series Econometrics.* Cambridge University Press, 2004, 317 p.

BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

¹³ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

aboutir à des prévisions s'utilise pour les séries univariées. Ce choix repose sur les différentes étapes détaillées ci-dessous.



La première étape a pour objet de transformer la série de données afin d'éliminer d'éventuelles causes de non stationnarité telles qu'une tendance et/ou une saisonnalité. Pour cela, une transformation peut être réalisée sur la série, ainsi qu'une différenciation simple et/ou saisonnière. Les tests cités dans la partie 1.1.4. permettent de conclure quant à la stationnarité ou non de la série étudiée.

Il s'agit ensuite d'identifier pour les données transformées et rendues stationnaires, un modèle de type ARMA. L'examen des auto-corrélations empiriques et des auto-corrélations empiriques partielles sur les graphiques ACF et PACF permet la plupart du temps de sélectionner des modèles à tester. Il convient de noter qu'à ce stade, plusieurs modèles peuvent parfois être envisagés.

Les paramètres du modèle doivent ensuite être estimés avant de tester l'adéquation du modèle aux données pour pouvoir envisager de faire de la prévision. Plusieurs critères d'aide à la décision permettent de sélectionner le modèle le plus pertinent.

1.2 Transformation de la série temporelle

L'étape de transformation de l'algorithme a pour but de rendre la série stationnaire si celle-ci ne l'est pas. Avant d'envisager une transformation éventuelle, il faut tout d'abord essayer d'identifier la présence d'une tendance et/ou d'une saisonnalité. La transformation est ensuite effectuée dans le but de retrancher les effets à l'origine de la non stationnarité de la série.

1.2.1 *Détection de tendance et saisonnalité*

La fonction d'auto-corrélations et les tests d'indépendance décrits en 1.1.4 permettent la mise en évidence d'une tendance et/ou d'une saisonnalité. Il s'agit ensuite d'estimer ces deux composantes puis de les retirer afin de construire un modèle probabiliste pour le bruit de la série.

Lorsqu'une tendance existe et présente une forme analytique assez prononcée, comme une tendance linéaire par exemple, la fonction d'auto-corrélations de la série possède des valeurs élevées qui décroissent lentement vers 0. Par ailleurs, la présence d'une saisonnalité peut se détecter par l'observation d'une périodicité sur l'ACF.

Ces tests graphiques des auto-corrélations s'avèrent être de bons indicateurs de la présence a priori d'une tendance et d'une saisonnalité ou non, il convient cependant de les valider par des tests statistiques. Pour détecter les mouvements de long terme de type aléatoire ou déterministe d'un processus, on peut avoir recours à différents tests et notamment le test des points tournants et le test du signe de la différence. Les principes de ces tests sont donnés en annexe 5 et 6.

Pour détecter la présence d'une saisonnalité, un outil graphique est à notre disposition.

Le **périodogramme** permet de détecter une ou plusieurs composantes saisonnières. Il est défini, pour une série de longueur n par :

$$I(w) = \frac{1}{2\pi * n} \left[\left(\sum_{t=1}^n \cos(wt) X_t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n \sin(wt) X_t \right)^2 \right].$$

Si X_t est purement périodique de période d et est observé sur une longueur $n = jd$, alors $I(w_j)$ est un maximum pour la fonction I atteint en $w_j = \frac{2\pi * j}{n}$. Les $w_j = \frac{2\pi * j}{n}$ sont appelées fréquences de Fourier.

Les séries temporelles étudiées dans la pratique sont rarement des réalisations de processus aléatoires stationnaires. La non-stationnarité, comme nous l'avons souligné, peut provenir notamment de la présence d'une tendance et/ou d'une saisonnalité. Parmi les cas de non-stationnarité les plus fréquents, on distingue deux types de processus, les processus « Trend Stationary » (TS) qui présentent une non-stationnarité de type déterministe, et les processus « Differency Stationary » (DS) avec une non-stationnarité de type stochastique. Cette terminologie a été proposée par Nelson et Plosser (1982).

Nous allons présenter ces deux types de processus et les méthodes utilisées pour les rendre stationnaires afin d'envisager ensuite une modélisation.

1.2.2 Processus TS : non stationnarité de type déterministe

Un **processus TS**¹⁴ est de la forme $X_t = f(t) + \varepsilon_t$ où f est une fonction déterministe du temps et ε_t un processus stationnaire.

Si ε_t est un bruit blanc, on a alors :

- $E(X_t) = f(t) + E(\varepsilon_t) = f(t)$ car un bruit blanc est un processus centré
- $V(X_t) = 0 + V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$
- $\forall t \neq s, Cov(X_t, X_s) = 0$

Ce processus TS est non stationnaire car son espérance dépend du temps dans la mesure où f est une fonction du temps. Pour rendre stationnaire un processus TS, il convient de retirer la composante déterministe f .

L'une des propriétés de ce type de processus est l'absence de persistance des chocs. Cela signifie qu'en cas de choc à une date donnée, toutes choses égales par ailleurs, l'influence de ce choc a tendance à s'estomper au cours du temps. La variable considérée rejoint alors sa tendance de long terme déterminée par f .

¹⁴ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

Estimation de la tendance

L'estimation de la tendance peut se faire en imposant une forme paramétrée, par exemple une fonction affine s'il s'agit d'une tendance linéaire. Dans le cas d'une tendance linéaire, l'estimation et le retrait de la tendance se fait par régression linéaire simple. Nous pouvons alors estimer les paramètres de la fonction f en utilisant un modèle linéaire qui estime les paramètres du modèle par maximum de vraisemblance. Plusieurs hypothèses doivent être vérifiées, les résidus doivent être de moyenne nulle, de même variance, indépendants et gaussiens.

Estimation de la saisonnalité¹⁵

Désaisonnaliser une série, c'est éliminer la saisonnalité sans modifier les autres composantes de la série. Le choix de la technique la mieux appropriée dépend de la nature déterministe ou aléatoire de la saisonnalité. Lorsque celle-ci est déterministe, bien marquée et répétitive, les méthodes de régression et l'emploi de coefficients saisonniers identiques sur la période historique sont adaptés. Lorsqu'elle est aléatoire en amplitude et/ou en période, les techniques de filtrage par moyennes mobiles doivent être utilisées.

Nous définissons ici la saisonnalité déterministe comme celle qui se présente sous la forme d'une cyclicité très marquée, régulière en période et en amplitude ; tous les autres cas seront considérés comme des saisonnalités aléatoires.

Toujours dans le cas d'une saisonnalité déterministe, nous pouvons utiliser une moyenne mobile simple pour estimer la saisonnalité de la série puis la retirer. La moyenne mobile simple est un filtre symétrique à horizon fini. Il s'agit d'une succession de moyennes arithmétiques de longueur choisie égale à d , la période de la saisonnalité, appelée ordre de la moyenne mobile.

Les formules générales de filtrage par moyenne mobile symétrique sont les suivantes :

- Si l'ordre de la moyenne mobile correspond à un nombre impair : $d = 2q + 1$

$$M = \sum_{j=-q}^q a_j L^{-j} \text{ avec } a_j = \frac{1}{d}.$$

¹⁵ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

- Si l'ordre de la moyenne mobile correspond à un nombre pair : $d = 2q$

$$M = \sum_{j=-q}^q a_j L^{-j} \text{ avec } a_j = \begin{cases} \frac{1}{2q} \text{ pour } |j| \neq q \\ \frac{1}{4q} \text{ sinon} \end{cases} .$$

Ces moyennes mobiles vérifient la propriété suivante dans le cas d'une structure additive. La somme des coefficients saisonniers est nulle, si ce n'est pas le cas, les coefficients trouvés sont normés afin de se ramener à une somme nulle.

Ces moyennes mobiles préservent les tendances linéaires car la somme des coefficients vaut un et éliminent la saisonnalité de période égale à l'ordre de la moyenne mobile. Par construction, les moyennes mobiles sont plus courtes en nombre d'observations du fait de la perte de q valeurs aux extrémités de la série.

Les estimateurs de la saisonnalité se déterminent de la manière suivante :

Soit $T = Jd + r$, T étant l'ensemble des instants de la série et d la période de la saisonnalité observée.

Considérons $w_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^J (X_{k+jd} - M(X_{k+jd}))$ et $\hat{s}_k = w_k - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d w_i$ pour k variant de 1 à d .

Or, \hat{s}_k vérifie $\hat{s}_k = \hat{s}_{k+d}$ et $\sum_{j=1}^d \hat{s}_j = 0$, nous retiendrons donc \hat{s}_k comme estimateur de la saisonnalité s_k .

Les coefficients saisonniers calculés par les méthodes précédentes représentent le profil saisonnier de la série. En faisant l'hypothèse que la saisonnalité se reproduit à l'identique, ils peuvent être utilisés pour prévoir les valeurs de cette composante.

Dans le cas d'une saisonnalité aléatoire, on utilise une méthode de désaisonnalisation par itérations successives de plusieurs moyennes mobiles. Nous ne détaillerons pas cette méthode ici car nos données ne rentrent pas dans ce cadre là.

Une fois la tendance et la saisonnalité estimées, nous les retranchons dans le but d'obtenir une série stationnaire. Nous verrons ultérieurement la méthode utilisée pour modéliser le bruit de la série de départ par un processus ARMA.

1.2.3 Processus DS : non stationnarité de type aléatoire

La non stationnarité d'un processus DS ne provient pas d'une composante déterministe tendancielle, mais d'une source stochastique.

Un **processus DS**¹⁶ est un processus que l'on peut rendre stationnaire par l'utilisation d'un filtre aux différences $\Delta^d(X_t) = (1-L)^d(X_t) = \varepsilon_t$ où ε_t est un processus stationnaire. On dit aussi qu'il s'agit d'un processus intégré d'ordre d, noté I(d) ou encore un processus ARIMA (p,d,q). S'il existe de plus une composante saisonnière, il peut s'agir également d'un processus SARIMA.

Pour rendre stationnaire un processus TS, nous avons vu que nous pouvons procéder par régression sur le temps. Il est également possible d'utiliser des filtres aux différences. Pour rendre stationnaire un processus DS, il faut utiliser des filtres aux différences.

1.3 Modélisation de série stationnaire par un processus ARMA

La première étape consiste à identifier l'ordre du processus ARMA utilisé pour modéliser la série stationnaire. Une fois ceci effectué, il convient d'estimer les paramètres du modèle, puis de vérifier, grâce à des tests statistiques, l'adéquation du modèle aux données de la série. Une fois les conditions réunies, le modèle peut être utilisé dans le but de réaliser des prévisions.

1.3.1 Identification du modèle ARMA

Nous avons étudié la façon dont on rend stationnaire un échantillon d'un processus aléatoire non stationnaire. Nous cherchons ensuite le processus générateur de la série dans la classe des processus ARMA stationnaires. Il s'agit de la phase d'identification dans l'algorithme de Box et Jenkins. C'est une étape délicate car elle conditionne ensuite les prévisions effectuées de la série. Il s'agit de trouver le processus ARMA qui s'adapte le mieux aux données empiriques qui constituent la série temporelle.

Un processus est caractérisé par ses moments. Logiquement, Box et Jenkins proposent de recourir aux ACF et PACF des séries pour sélectionner de bonnes valeurs de p et q à tester pour la modélisation du bruit par un ARMA (p,q) car les fonctions d'auto-corrélations sont des processus de second ordre.

¹⁶ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

En effet, dans la partie généralités 1.1., nous avons vu qu'un processus moyenne mobile d'ordre q est caractérisé par le fait que ses auto-corrélations théoriques $\rho(k)$ sont nulles pour $k > q$. Nous avons vu également que les auto-corrélations partielles $\alpha(k)$ d'un processus auto-régressif d'ordre p sont nulles pour $k > p$. En pratique, la sélection s'effectue suite à l'examen des estimations empiriques de ces fonctions représentées sur l'ACF et le PACF. Notons que ces observations n'ont un sens que pour les processus stationnaires, condition dont dépend l'existence des fonctions d'auto-corrélations simple et partielle.

Un tableau en annexe 7 présente les propriétés des fonctions d'auto-corrélations simple et partielle des processus AR, MA et ARMA. Il s'agit donc d'observer l'ACF et le PACF afin de visualiser l'ordre des pics significatifs et déterminer ainsi les valeurs des paramètres p et q à tester.

1.3.2 Estimation des paramètres du modèle ARMA

L'objectif après avoir identifié l'ordre du processus ARMA est d'estimer les paramètres du processus de la série. L'échantillon utilisé pour l'estimation peut être le résultat d'une transformation de la série de départ par régression ou d'une transformation de la série initiale par filtrage.

Pour réaliser cette estimation, nous pouvons procéder par maximisation de la vraisemblance du processus ARMA, nous pouvons également appliquer le critère des moindres carrés sur les résidus.

Soit un processus ARMA (p,q) centré tel que $A(L)X_t = B(L)\varepsilon_t$, autrement dit :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t - b_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - b_q \varepsilon_{t-q}$$

Dans la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance, en plus de la définition standard d'un processus ARMA, on fait l'hypothèse de la normalité des résidus ε_t afin de spécifier une forme fonctionnelle à la vraisemblance du modèle. On suppose donc que les résidus ε_t sont décrits par un bruit blanc gaussien, condition pour pouvoir appliquer la méthode classique d'estimation par maximum de vraisemblance.

Les moindres carrés conditionnés consistent à minimiser la somme des carrés des résidus, soit

$$\text{minimiser } \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 .$$

Nous retiendrons pour notre étude l'estimation par maximum de vraisemblance qui permet notamment de calculer la matrice de variances covariances des estimateurs, d'effectuer des tests de significativité des paramètres et d'obtenir plusieurs critères de choix de modèle qui sont présentés dans la partie suivante.

1.3.3 Tests d'adéquation du modèle

A l'étape de l'identification, compte tenu du fait que les principaux tests sont graphiques, plusieurs modèles sont généralement retenus et estimés. L'ensemble de ces modèles est alors soumis aux différents tests statistiques pour comparer les performances entre modèles et vérifier l'adéquation entre le modèle retenu et la série de données.

Test de significativité des coefficients

L'une des hypothèses requises dans notre modélisation par un processus ARMA est la normalité des résidus ε_t . Or, les paramètres p_i du modèle ARMA vérifient la propriété

suivante : $\sqrt{n} \frac{(p_i - \hat{p}_i)}{\hat{\sigma}_{p_i}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$ avec \hat{p}_i l'estimateur du paramètre p_i et

$\hat{\sigma}_{p_i}$ l'estimateur de son écart type.

On peut alors réaliser le test d'hypothèse nulle, le paramètre est non significatif ie $p_i = 0$. Il peut arriver qu'un ou plusieurs paramètres ne soient pas significativement différents de 0, le modèle est donc rejeté et l'on estime à nouveau le modèle en excluant les variables correspondantes.

Test de bruit blanc

Lorsque le processus est bien estimé, la série calculée suit les évolutions de la série empirique. Les innovations doivent se comporter comme un bruit blanc. On notera par la suite ε_t les innovations du modèle.

Les innovations, si elles sont un bruit blanc, ne peuvent contenir des mouvements de long terme de type aléatoire ou déterministe c'est-à-dire elles ne peuvent contenir de tendance. Cette vérification peut s'effectuer par un test de recherche de racine unitaire de type Dickey et Fuller, un test des points tournants ou encore un test du signe de la différence. Ces tests ont été développés dans la partie 1.2.1 concernant la détection de tendance.

On cherche ensuite à tester l'auto-corrélation des innovations. Si les innovations $(\varepsilon_t, t \in T)$ obéissent à un bruit blanc, il ne doit pas exister d'auto-corrélation dans la série. Les premières vérifications peuvent s'effectuer graphiquement grâce aux ACF et PACF qui représentent les fonctions d'auto-corrélations totale et partielle. Il faut alors vérifier qu'il n'existe aucune auto-corrélation ou auto-corrélation partielle significativement non nulle pour le processus étudié. Ces conclusions graphiques doivent néanmoins être utilisées avec prudence, elles servent surtout à invalider le modèle et doivent être confirmées par l'utilisation de tests statistiques. En effet, l'étude est ensuite prolongée par les « portmanteau test », suivant l'expression anglo-saxonne, qui peuvent prendre deux formes, le test de Box et Pierce et le test de Ljung-Box dont les principes sont détaillés en annexe 8.

Test de normalité

Pour vérifier que les innovations $(\varepsilon_t, t \in T)$, en plus de former un bruit blanc, forment un bruit blanc gaussien, plusieurs tests peuvent être utilisés. Nous utiliserons le test de Shapiro Wilk décrit en annexe 9.

Si plusieurs modèles sont envisageables suite à ces différents tests, différents critères d'information¹⁷ peuvent aider à choisir le modèle ARMA (p,q) le plus pertinent. Un critère d'information est un critère fondé sur le pouvoir prédictif du modèle considéré et qui tient compte notamment du nombre de paramètres à estimer. Le meilleur modèle est celui qui minimise ces critères d'information.

Le critère d'Akaike est défini par $AIC(p, q) = n * \ln(\hat{\sigma}^2) + 2 * (p + q)$, n étant le nombre de données et p+q le nombre de paramètres de l'ARMA (p,q). Ce critère est à utiliser avec précaution car il a tendance à favoriser les modèles sur-paramétrés.

¹⁷ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

On lui préfère généralement l'un des deux critères suivants :

- le critère de Schwarz : $SC(p, q) = n * \ln(\hat{\sigma}^2) + (p + q) * \ln(n)$

- le critère d'information Bayésien :

$$BIC(p, q) = n * \ln(\hat{\sigma}^2) - (n - p - q) * \ln\left(1 - \frac{p + q}{n}\right) + (p + q) * \ln(n) + \ln\left((p + q)^{-1} * \left(\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2 - 1}\right)\right)$$

1.4 Différentes méthodes de projection pour l'étude des prestations santé APRIL Assurances

Au début de l'étude, plusieurs transformations sont envisagées pour rendre la série temporelle stationnaire et la modéliser par un processus ARMA. Lors de l'étape de prévision de la série temporelle initiale, nous allons voir comment est prise en compte la transformation retenue.

Si l'on utilise la régression afin de retirer une ou plusieurs composantes déterministes estimées par maximum de vraisemblance, ces dernières sont projetées jusqu'à l'horizon prévisionnel choisi puis recombinaées avec les valeurs prévisionnelles de l'ARMA qui modélise le bruit de la série temporelle. Pour un modèle additif, il s'agit de faire la somme des trois composantes : tendance, saisonnalité et bruit.

Si la transformation est opérée grâce à un filtre linéaire. Le processus sous-jacent pour la série de départ est un processus de type SARIMA pour lequel on peut directement effectuer des projections. L'autre possibilité est de réaliser des prévisions sur la série filtrée stationnaire puis de reconstruire les prévisions sur la série initiale par inversion du filtre.

1.4.1 *Prédictions pour un processus ARMA*¹⁸

Présentons tout d'abord la méthode de projection pour un processus ARMA. Nous considérons ici des processus centrés, de second ordre et stationnaires.

¹⁸ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

On appelle **meilleure prédiction linéaire à horizon h**, la projection orthogonale de X_{t+h} sur $W_t = \text{Vect}(X_j, j \leq t)$. Si l'on connaît (X_1, \dots, X_n) et que l'on veut prédire X_{n+1} , on parle de prévision à un pas. Le meilleur prédicteur linéaire de X_{n+1} est $\hat{X}_{n+1} = P_{\text{vect}(X_1, \dots, X_n)}$.

On démontre que $\hat{X}_{n+1} = \gamma_n \Gamma_n^{-1} X^n$ avec $X^n = (X_n, \dots, X_1)$ et Γ_n^{-1} la matrice variance-covariance. L'erreur quadratique moyenne du prédicteur est $\sigma_{n+1}^2 = \gamma(0)^{-t} \gamma_n \Gamma_n^{-1} \gamma_n$.

Plusieurs algorithmes existent afin de donner des formules récursives de calcul de prévisions de la forme suivante : $\hat{X}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \phi_{n,i} X_{n+1-i}$. L'algorithme de Durbin-Levison détaillé en annexe 10 permet de calculer les $\phi_{n,i}$.

On considère un ARMA (p,q) défini par $A(L)X = B(L)\varepsilon_t$ avec A et B sans racines communes et avec toutes leurs racines de module strictement supérieur à 1. Le processus est donc causal et inversible et l'on a $X_{n+1} = -a_1 X_n - \dots - a_p X_{n+1-p} + \varepsilon_{n+1} + b_1 \varepsilon_n + \dots + b_q \varepsilon_{n+1-q}$.

La meilleure prédiction à un pas h est donc $\hat{X}_{n+h} = -a_1 X_n - \dots - a_p X_{n+h-p} + b_1 \varepsilon_n + \dots + b_q \varepsilon_{n+h-q}$. L'erreur de prédiction est donnée par $X_{n+h} - \hat{X}_{n+h} = \varepsilon_{n+h}$, de moyenne nulle par définition et de variance $\sigma_\varepsilon^2 = \text{Var}(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h}) = \text{Var}(\varepsilon_{n+h})$.

Un intervalle de prévision est un intervalle contenant la prévision avec une probabilité donnée. Ainsi, $I_\alpha(t, h)$ est un intervalle de prévision au niveau α de \hat{X}_{t+h} si et seulement si $P(\hat{X}_{t+h} \in I_\alpha(t, h))$.

Si le processus X_t est gaussien, on peut déterminer un intervalle de prévision. En effet, on a $\hat{X}_{t+h} - X_{t+h} \rightarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
 Un intervalle de prévision pour X_{t+h} s'écrit donc $[\hat{X}_{t+h} - z_{1-\alpha} \sigma_\varepsilon, \hat{X}_{t+h} + z_{1-\alpha} \sigma_\varepsilon]$
 avec $z_{1-\alpha}$ le $1-\alpha$ -quantile d'une loi normale centrée réduite.

1.4.2 Projection à partir de la série de départ

Méthode par estimation de la tendance et de la saisonnalité

Nous nous plaçons toujours dans l'hypothèse d'une structure additive pour la série, c'est-à-dire $X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t$ et d'une tendance linéaire $m_t = a * t + b$.

La première méthode utilisée consiste à détecter la présence d'une tendance et/ou d'une saisonnalité sur la série de départ. La tendance est ensuite estimée par régression sur le temps, on a par exemple pour une tendance linéaire, $\hat{m}_t = \hat{a} * t + \hat{b}$. La saisonnalité quant à elle est estimée par moyenne mobile avec la méthode vue précédemment en 1.2.2.

Il faut ensuite retrancher la tendance et la saisonnalité à la série de départ et vérifier que la série alors obtenue est bien stationnaire $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t$. On modélise ensuite cette série $\hat{\varepsilon}_t$ par un processus ARMA (p,q).

Pour obtenir les prévisions pour la série de départ, on effectue les projections $\hat{\varepsilon}_{t+h}$ de l'ARMA(p,q) jusqu'à l'horizon prévisionnel h choisi et l'on rajoute ensuite la saisonnalité et la tendance extrapolées $\hat{X}_{t+h} = \hat{m}_{t+h} + \hat{s}_{t+h} + \hat{\varepsilon}_{t+h}$.

Nous avons vu dans la partie précédente que l'on obtient un intervalle de prévision lors de projections pour un ARMA (p,q) c'est-à-dire dans le cas présent pour $\hat{\varepsilon}_{t+h}$. Pour obtenir un intervalle de prévision pour la projection de la série de départ, il suffit de rajouter à l'intervalle de prévision de l'ARMA (p,q) les termes de tendance et de saisonnalité.

Modèle SARIMA

Les prédictions s'effectuent directement à partir de la série de départ via le filtre de Kalman¹⁹ qui permet de réaliser un calcul récursif des prévisions. Cette méthode de projection est présentée en annexe 11. Avec cette méthode il est également possible d'obtenir des intervalles de prévision. Cependant leur obtention est moins immédiate que dans la méthode précédente

¹⁹ **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p. **MADSEN Henrik.** *Time Series Analysis.* Chapman & Hall/CRC.

dans la mesure où elle implique d'exprimer le modèle SARIMA sous forme d'une moyenne mobile infinie. La méthode est présentée en annexe 11 également.

D'autres méthodes de projection comme les deux suivantes, n'utilisent pas d'estimation de la tendance et de la saisonnalité mais au contraire un filtrage de ces composantes afin d'estimer directement le terme aléatoire, voire éventuellement une combinaison des méthodes d'estimation et de filtrage.

1.4.3 Projection à partir de la série différenciée

Considérons la série différenciée une fois afin d'enlever la tendance $Y_t = X_t - X_{t-1} = s_t' + \varepsilon_t'$. On estime tout d'abord la saisonnalité de la série différenciée par moyenne mobile avec la méthode vue en 1.2.2, les estimateurs sont notés \hat{s}_t' . Il est important de souligner ici que les estimateurs de la saisonnalité de la série différenciée sont totalement distincts de ceux de la série de départ, il s'agit bien de deux méthodes d'estimation et de projection différentes.

On retranche ensuite la saisonnalité estimée à la série différenciée et l'on vérifie que la série alors obtenue est bien stationnaire $\hat{\varepsilon}_t' = Y_t - \hat{s}_t'$. On modélise ensuite cette série $\hat{\varepsilon}_t'$ par un processus ARMA (p,q).

Pour obtenir les prévisions pour la série différenciée, on effectue les projections $\hat{\varepsilon}_{t+h}'$ de l'ARMA(p,q) jusqu'à l'horizon prévisionnel h choisi et l'on rajoute ensuite la saisonnalité extrapolée $\hat{Y}_{t+h} = \hat{s}_{t+h}' + \hat{\varepsilon}_{t+h}'$.

Il faut ensuite reconstituer les projections pour la série de départ à partir de celles de la série différenciée. Quel que soit t, on a $\hat{Y}_t = \hat{X}_t - \hat{X}_{t-1}$ ce qui permet d'obtenir la formule de reconstitution suivante pour la série de départ $\hat{X}_t = X_1 + \sum_{i=2}^t \hat{Y}_i$. La démonstration de cette formule est donnée en annexe 12.

Remarque : Il n'y a pas d'obligation de remonter jusqu'à la première valeur de la série de départ, si par exemple la dernière valeur connue pour la série de départ est X_{100} et que l'on

souhaite projeter à horizon h, on a $\hat{X}_{100+h} = X_{100} + \sum_{i=101}^{100+h} \hat{Y}_i$.

Pour obtenir des intervalles de prévision pour cette méthode de calcul, il faut procéder de la même façon que lors d'une modélisation via un modèle SARIMA sur la série de départ (méthode présentée en annexe 11). En effet, un processus $(X_t, t \in T)$ est un **SARIMA** $(\mathbf{p}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ si et seulement si, $Y_t = \Delta_r \Delta^d (X_t) = (1 - L^r)(1 - L)^d (X_t)$ est un ARMA (p, q) . Le calcul n'est donc pas immédiat.

1.4.4 Projection à partir de la série différenciée et désaisonnalisée

Considérons la série différenciée et désaisonnalisée $Z_t = \Delta_{12} \Delta_1 X_t = X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13}$. On vérifie que la série obtenue est bien stationnaire puis on la modélise par un processus ARMA (p, q) . Pour obtenir les prévisions pour la série différenciée et désaisonnalisée, on effectue les projections Z_{t+h} de l'ARMA (p, q) jusqu'à l'horizon prévisionnel h .

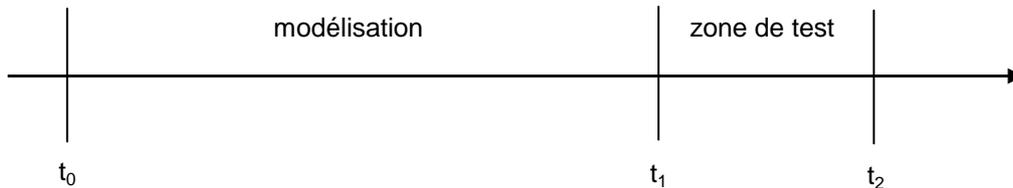
Il faut ensuite reconstituer les projections pour la série de départ. Quel que soit t , on a $\hat{Z}_t = \hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} - \hat{X}_{t-12} + \hat{X}_{t-13}$ ce qui permet d'obtenir la formule de reconstitution suivante pour la série de départ $\hat{X}_t = \sum_{i=14}^t \hat{Z}_i + X_{13} + X_4 - X_1$. La démonstration de cette formule est donnée en annexe 12.

Remarque : Comme dans le cas précédent, on n'est pas obligé de remonter jusqu'aux premières valeurs de la série de départ.

Pour obtenir des intervalles de prévision pour la méthode de calcul par différenciation et désaisonnalisation, il faut procéder de la façon présentée en annexe 11 pour la modélisation via un modèle SARIMA sur la série de départ. En effet, un processus $(X_t, t \in T)$ est par définition un **SARIMA** $(\mathbf{p}, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ si et seulement si, $Y_t = \Delta_r \Delta^d (X_t) = (1 - L^r)(1 - L)^d (X_t)$ est un ARMA (p, q) . Le calcul n'est donc pas immédiat.

1.5 Choix de modèle – performances des prévisions

La performance des prévisions dépend de l'importance des erreurs de prévisions. Il s'agit de comparer les prédictions avec les valeurs réellement observées. Pour cela, on divise les données de l'intervalle de temps dont nous disposons en deux parties :



La première partie détermine les données utilisées pour la modélisation alors que la deuxième partie est utilisée comme zone de test. La zone de test comprend les valeurs que nous allons enlever afin de les projeter à partir de la zone de modélisation. Nous comparons alors les projections effectuées avec les données de la zone de test. On parle de données post-sample et d'évaluation post-sample des erreurs.

Pour évaluer la qualité des prévisions à l'horizon h , on calcule les erreurs réelles :

$$e(t, h) = \hat{X}(t, h) - X_{t+h} \text{ avec } t_1 < t \leq t_2.$$

On peut mesurer l'importance de ces erreurs par le critère d'erreur quadratique moyenne ou

« Mean Square Error » $MSE(h) = \frac{1}{t_2 - t_1 + 1} \sum_{t=t_1+1}^{t_2-h} e(t, h)^2$. Le meilleur modèle est celui qui

minimise cette erreur.

L'évaluation post-sample des erreurs constitue un critère d'aide au choix de modèle supplémentaire après ceux vus dans la partie 1.3.3. Soulignons que le choix d'une modélisation en série temporelle implique de retenir le modèle utilisant le moins de paramètres et ayant le meilleur comportement en prévision.

Les différents critères de choix permettent de sélectionner le meilleur modèle d'un point de vue théorique, néanmoins, il faut également considérer les critères de choix « opérationnels » du modèle, notamment la facilité d'implémentation et d'utilisation du modèle sélectionné comme nous le verrons au cours de la partie suivante.

Nous avons développé ici la modélisation et la projection avec des modèles ARMA, il faut souligner que pour les processus dont les moments d'ordre 1 ou 2 ne sont pas linéaires, il existe de nombreux autres modèles que nous n'étudierons pas ici (AutoRegressive Conditionnal Heteroscedasticity, Threshold AR...)

2 Projection des montants de prestations santé en mois de règlement par les séries temporelles

Pour des raisons de confidentialité, les graphiques de cette partie sont donnés sans échelle.

Nous venons de réaliser une présentation théorique des séries temporelles ainsi que la méthodologie à suivre pour aboutir à une modélisation de la série, puis réaliser des projections. Cette partie a ainsi pour objectif de présenter dans un premier temps les données du portefeuille APRIL Assurances dont nous disposons. Les séries temporelles étudiées sont issues de l'historique des données du portefeuille sur différents périmètres. Il s'agit également d'analyser la série de données et de la modéliser en suivant la méthodologie décrite dans la partie précédente. Enfin, des projections via le modèle sélectionné sont réalisées. Elles sont réalisées avec un objectif de prévision à court ou moyen terme, c'est-à-dire avec un horizon prévisionnel de moins d'un an. Les résultats des études menées sur différents périmètres du portefeuille sont également présentés.

Les notions de choix du modèle et du périmètre d'étude sont ici capitales. Elles doivent être envisagées à la fois sous un angle théorique, comme dans la partie précédente, mais également d'un point de vue opérationnel c'est-à-dire dans le but de mettre en évidence un modèle facilement utilisable pour les études ultérieures.

En plus des objectifs classiques des méthodes de projection évoqués en partie 1, les projections effectuées à l'aide des séries temporelles pourront également servir d'outil de veille sur l'évolution de la charge sinistre. En effet, nous pourrions comparer les montants de prestations payés aux prévisions effectuées auparavant et aux intervalles de confiance. Si le positionnement du réel par rapport aux prédictions faites antérieurement est considéré comme étant anormalement élevé ou faible, nous pourrions alors tenter d'établir la raison de ce règlement anormal. Il pourrait être dû par exemple à un retard de gestion au niveau de l'Assurance Maladie ou d'APRIL Assurances, ou encore à des réformes au niveau des remboursements de l'Assurance Maladie... Si aucune cause n'est identifiée et que des comportements anormaux perdurent sur plusieurs mois, cela pourrait également être le signe que le modèle n'est plus approprié et qu'il convient de réaliser une nouvelle modélisation.

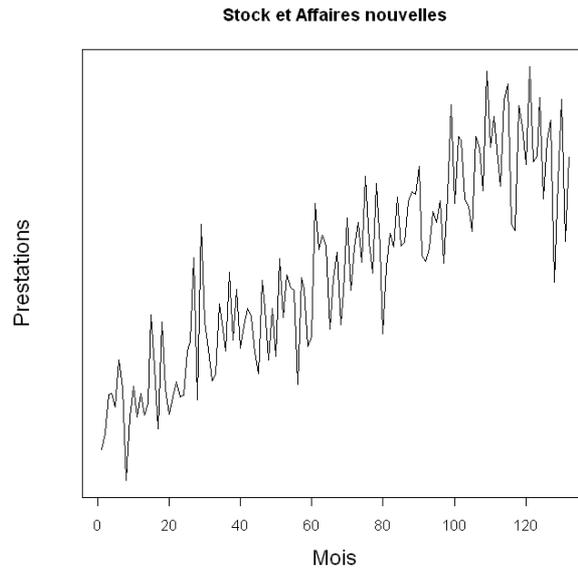
2.1 Données disponibles

Nous disposons de l'historique mensuel depuis 1998 des montants de prestations santé tous postes de soins confondus et au global, c'est-à-dire sans tenir compte du nombre de personnes assurées. Il s'agit des montants en mois de règlement. Dans cet historique, nous pouvons distinguer les prestations réglées au titre des affaires nouvelles en portefeuille, c'est-à-dire les affaires créées dans l'année, de celles payées pour des affaires qui sont depuis un an et plus en portefeuille, ce que nous appellerons le stock. Nous pouvons également distinguer les montants de prestations réglés pour les assurés assujettis à l'Assurance Maladie de ceux qui ne sont pas assujettis. Nous envisageons alors l'étude des séries temporelles sur différents périmètres du portefeuille, les prestations globales, les prestations relatives au stock et celles relatives aux affaires nouvelles, les prestations hors celles relatives aux non assujettis... Le but étant d'essayer d'identifier des comportements caractéristiques de chaque périmètre et des modèles de projection appropriés.

Nous détaillerons dans un premier temps étape par étape la méthodologie employée pour aboutir aux projections des montants de prestations, tous régimes obligatoires confondus et stock et affaires nouvelles confondus. Nous présenterons ensuite les résultats principaux sur les différents périmètres du portefeuille santé étudiés. Cette première étude que nous présentons est basée sur l'historique des montants globaux de prestations santé de janvier 1998 à décembre 2008. Les résultats des différentes modélisations réalisées sur d'autres périmètres sont présentés dans la partie 3.

2.2 Analyse de l'historique – détection de tendance et de saisonnalité

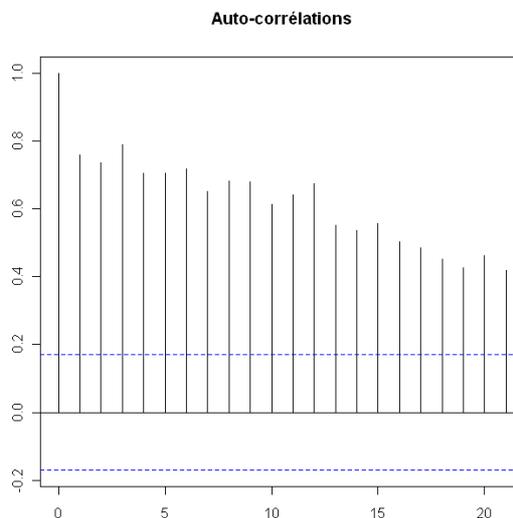
Nous commençons par tracer l'allure des prestations santé réglées mensuellement entre 1998 et 2008, soit 132 données au total.



Nous constatons une augmentation relativement régulière des montants de prestations réglés hormis sur les derniers mois d'observation où l'on observe un ralentissement de la progression. Nous observons également des fluctuations saisonnières.

Comme nous l'avons vu en 1, différents tests graphiques et statistiques sont à notre disposition pour détecter et estimer une éventuelle tendance et/ou saisonnalité.

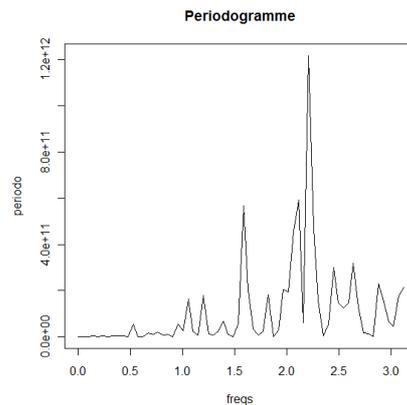
Nous commençons par tracer le graphique d'auto-corrélations simples de la série.



La fonction d'auto-corrélations de la série présente des valeurs élevées qui décroissent lentement vers 0, la série présente donc a priori une tendance. Ce test graphique indique que la série n'est pas stationnaire, nous allons vérifier cette observation par des tests statistiques.

Au vu de l'allure de la série, la tendance, si elle existe, semble être linéaire. Nous faisons un test du signe de la différence et un test des points tournants sur la série. Dans les deux cas, la p-valeur est petite, on rejette donc l'hypothèse nulle d'indépendance et identique distribution des X_i . Nous pouvons donc conclure à la présence d'une tendance.

Nous traçons ensuite le périodogramme de la série différenciée une fois. La présence d'un pic indique que la série présente une saisonnalité. Après vérification par un test statistique, il s'agit d'une saisonnalité de période 12.



La série présente donc une tendance et une saisonnalité de période 12. Elle n'est pas stationnaire. Comme nous l'avons vu en 1, plusieurs méthodes de projections peuvent alors être envisagées. Dans le premier cas, nous travaillons à partir de la série de départ pour estimer la tendance et la saisonnalité afin de rendre la série stationnaire. Dans le second cas, nous rendons la série stationnaire par utilisation de filtres.

Nous envisageons ainsi quatre méthodes de projections différentes développées en 2.3, avant de choisir la modélisation retenue en 2.4.

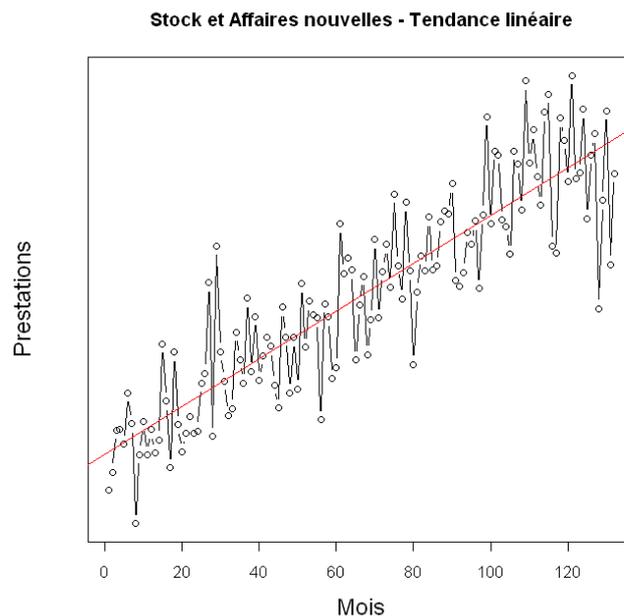
2.3 Différentes méthodes de projection des prestations santé via les séries temporelles

2.3.1 *Projections à partir de la série de départ*

Projections après stationnarisation de la série

Nous faisons ici l'hypothèse d'une non stationnarité déterministe. Il s'agit dans un premier temps d'estimer la tendance par régression sur le temps puis la saisonnalité par moyenne mobile. L'estimation de la série est donnée par $\hat{X}_t = \hat{a} + \hat{b} * t + \hat{s}_t + \hat{\varepsilon}_t$.

Au vu de ce qui précède, nous commençons par tester une tendance linéaire pour la série. Le logiciel R permet d'estimer les coefficients a et b. La tendance est représentée en rouge sur le graphe suivant.

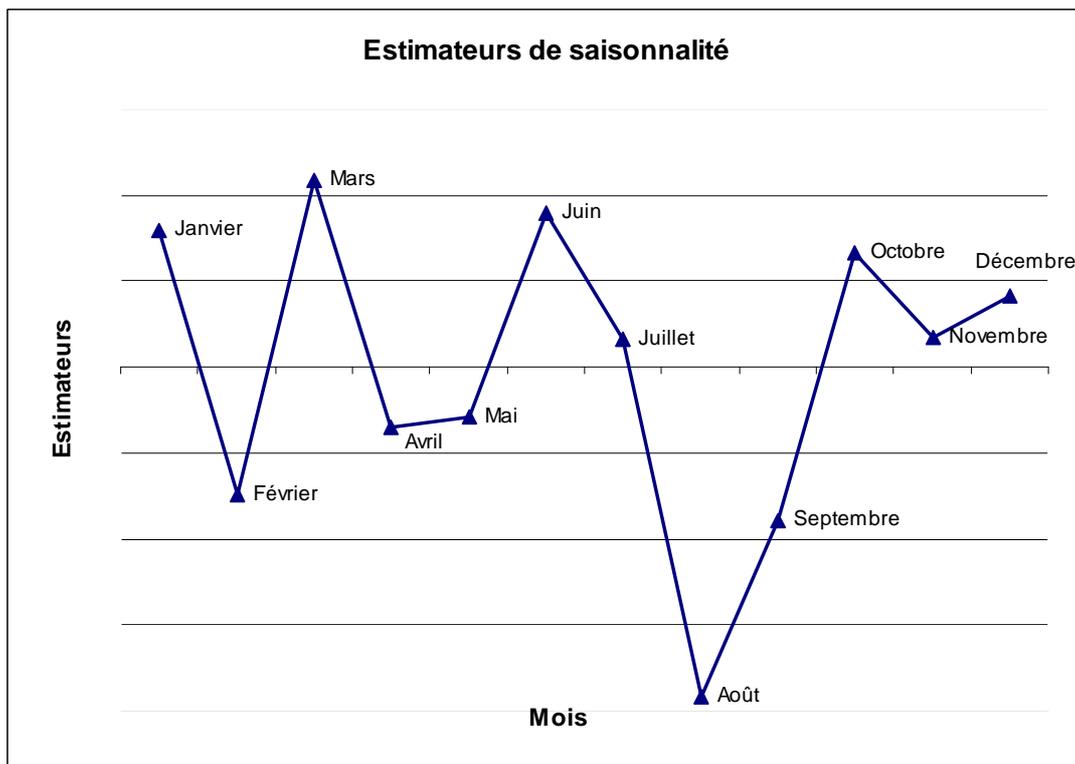


La p-valeur obtenue sous R pour le coefficient relatif au temps est $2e-16$, le R^2 ajusté vaut 0.7802 et sa p-valeur $2e-16$. Le modèle de tendance linéaire est donc pertinent. Nous retiendrons donc une tendance linéaire pour la série des montants de prestations santé globaux.

Nous souhaitons ensuite estimer les coefficients saisonniers par moyenne mobile. La série présente une saisonnalité de période $d = 12$. Conformément à ce que nous avons vu dans la partie 1.2.2, nous choisissons la moyenne mobile suivante pour estimer la saisonnalité :

$$M = \left[\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \right].$$

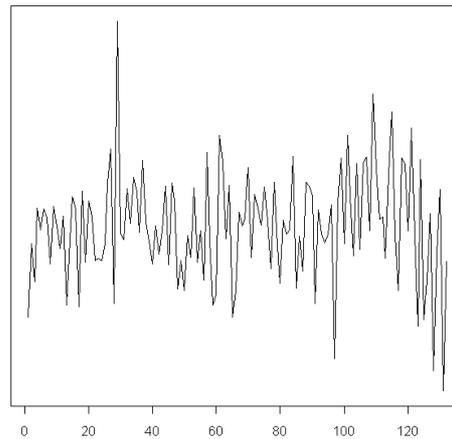
Les estimateurs des coefficients saisonniers sont représentés ci-dessous :



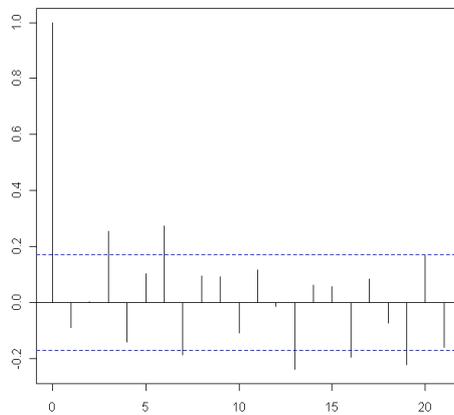
Connaissant l'expression de la tendance et de la saisonnalité, nous pouvons ensuite estimer le bruit de la série de départ $\hat{\varepsilon}_t = X_t - (\hat{a} + \hat{b} * t + \hat{s}_t)$. Avant de le modéliser par un modèle de type ARMA, il est nécessaire de vérifier que la série du bruit estimé est bien stationnaire. Le test de Phillips-Perron et le KPSS test donnent tous les deux la série stationnaire avec des p-valeurs respectives de 0.01 et 0.1.

Nous cherchons alors la meilleure modélisation ARMA pour $\hat{\varepsilon}_t$. Nous traçons ci-dessous les auto-corrélogrammes de la série $\hat{\varepsilon}_t$ et la série elle-même :

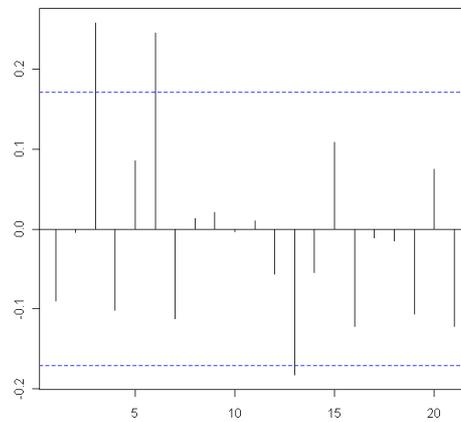
Bruit de la série de départ



Auto-corrélations du bruit de la série de départ



Auto-corrélations partielles du bruit de la série de départ



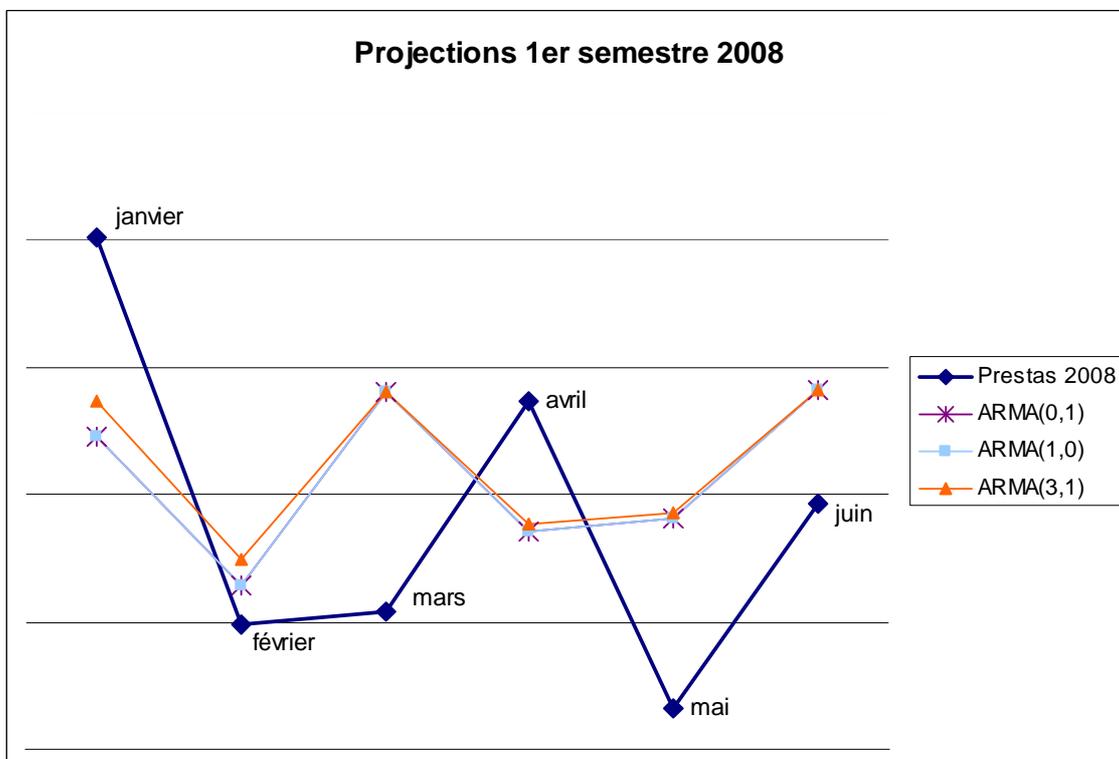
En observant la significativité des pics sur l'ACF et le PACF, nous décidons de tester les valeurs de p comprises entre 0 et 3 et celles de q comprises entre 0 et 3 également. Nous testons pour chaque ordre, la blancheur des innovations par un test de Box-Pierce et leur normalité par un test de Shapiro. Nous calculons également pour chaque modèle les valeurs des critères AIC, BIC et SC. Pour plus de lisibilité nous avons rassemblé les résultats pour les différents modèles ARMA envisagés dans le tableau situé en annexe 13. Nous présentons ci-dessous les résultats pour les trois modèles à tester que nous avons finalement sélectionnés, l'ARMA (0,1), l'ARMA (1,0) et l'ARMA (3,1).

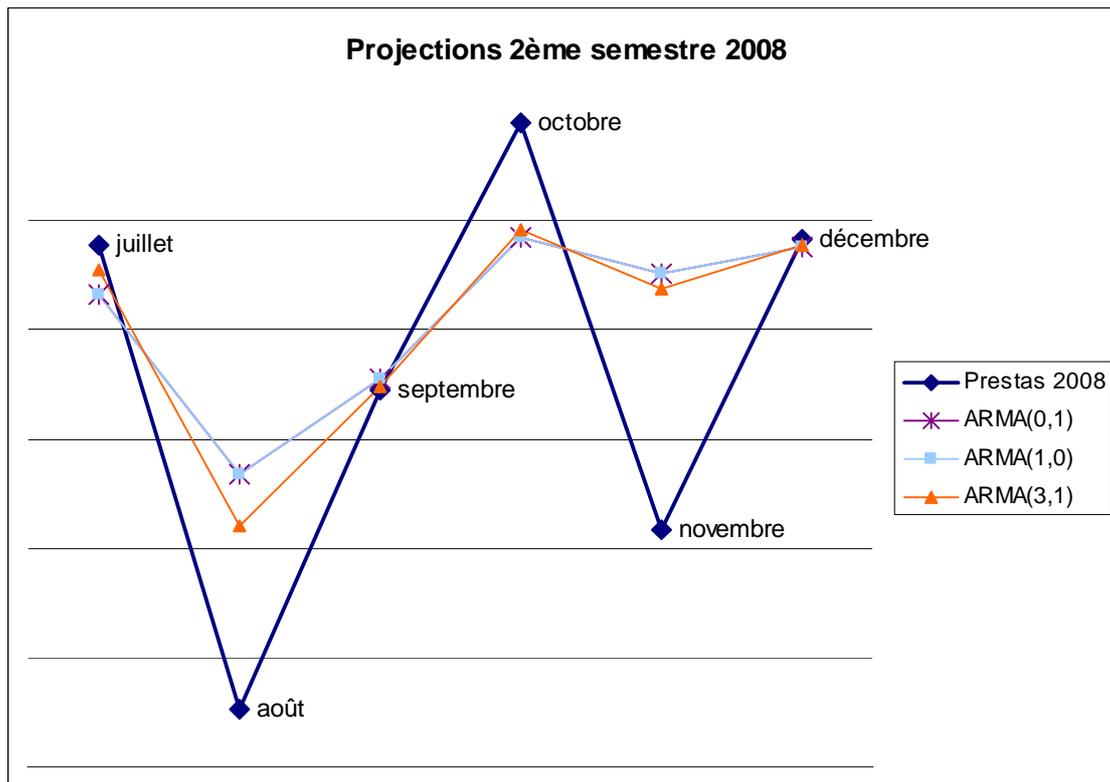
p	q	p-value test de Box-Pierce	Bruit blanc fort	p-value test de Shapiro	AIC	SC	BIC
0	1	0.9576	Oui	0.2795	3814.72	3817,60	3818,60
1	0	0.9799	Oui	0.3061	3814.65	3817,53	3818,53
3	1	0.9728	Oui	0.3966	3807.88	3819,41	3821,96

Les résidus de ces trois modèles ARMA forment chacun un bruit blanc fort qui est de plus gaussien. Le caractère gaussien des résidus nous permettra d'obtenir des intervalles de prévision lors des projections. Les tests de significativité des coefficients indiquent pour chaque modèle ARMA que tous les coefficients sont significatifs. Nous nous intéressons alors aux performances de prédictions de ces modèles comme vu dans la partie 1.5. Nous prenons comme zone de test successivement le premier semestre 2008 et le deuxième semestre 2008. Il s'agit ensuite de comparer les prédictions aux valeurs réelles des zones de test, le but étant de minimiser l'erreur moyenne quadratique.

Rappelons que les projections sont effectuées pour le bruit avec chacun des trois processus ARMA retenus. Pour obtenir les prédictions pour les montants de prestations globaux, il faut ensuite rajouter les termes de saisonnalité et de tendance aux projections du bruit, c'est-à-dire utiliser la formule suivante $\hat{X}_t = \hat{a} + \hat{b} * t + \hat{s}_t + \hat{\varepsilon}_t$.

Voici la représentation graphique des montants de prestations réels 2008 (en bleu) et des projections effectuées à partir des différents processus ARMA retenus et pour les différentes zones de test.





Nous constatons selon les mois des écarts plus ou moins importants entre le réel et les projections effectuées. D'où l'intérêt des intervalles de prévision qui permettent de déterminer une fourchette pour les montants de prestation projetés. Le but ici étant tout d'abord de tester les performances de prédictions des trois modèles envisagés, nous présentons les résultats dans le tableau ci-dessous.

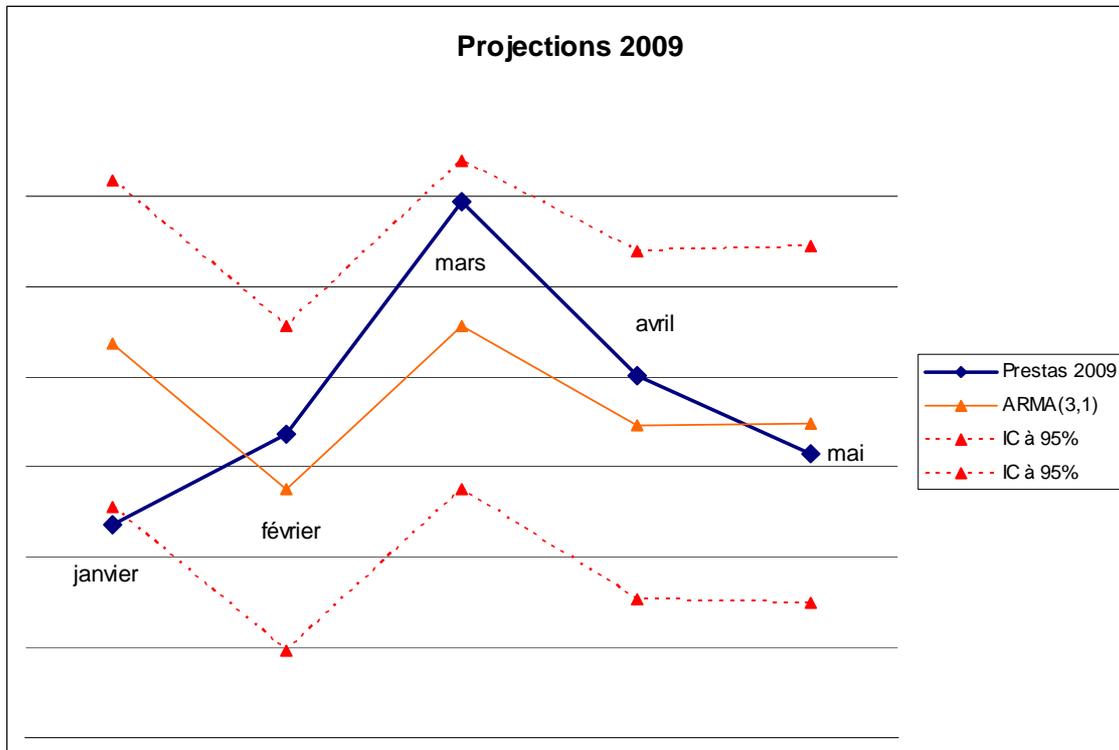
\sqrt{MSE}	ARMA (0,1)	ARMA (1,0)	ARMA (3,1)
1 ^{er} semestre 2008	631 275	631 193	611 805
2 ^{ème} semestre 2008	690 211	689 925	602 276

Le modèle avec les meilleurs performances de prédiction est celui qui modélise le bruit de la série par un ARMA (3,1). Nous avons effectué le même type de projections sur d'autres zones de test en 2007 et 2008 et ce modèle ressort à chaque fois comme étant le plus performant, nous le retiendrons donc définitivement pour modéliser le bruit de la série.

Notons que les erreurs brutes semblent importantes, cependant au regard des montants en jeu, les erreurs relatives restent raisonnables par rapport à nos objectifs opérationnels.

Le choix de modèle étant effectué, nous souhaitons tester la pertinence de ce modèle sur des données n'ayant pas participé à l'élaboration du modèle. Nous projetons donc les prestations des cinq premiers mois de 2009, nous faisons également apparaître l'intervalle de prévision à

95 % afin de visualiser si les prestations réglées en 2009 (une fois connues) se situent ou pas dans cet intervalle.



Nous observons que les valeurs réelles, à l'exception de celle du mois de janvier, se trouvent dans la fenêtre prévue. En donnant un ordre de grandeur de l'incertitude future, les intervalles de prévision sont sans aucun doute une information très intéressante.

Notons que cette méthode de projection par estimation de la tendance, de la saisonnalité et projection du bruit modélisée par un ARMA (3,1), est relativement aisée à mettre en œuvre d'un point de vue opérationnel. La pertinence de ce modèle est validée à partir des projections effectuées pour début 2009.

Projections par un modèle SARIMA

Nous souhaitons ici effectuer les projections d'un processus non stationnaire qui modélise directement la série de départ. Nous avons vu précédemment que la série présente une tendance linéaire ainsi qu'une composante saisonnière de période 12, nous envisageons donc un modèle de type SARIMA (p,d,r,q). Dans notre cas, d vaut 1 et r vaut 12. Ceci est

équivalent à considérer un modèle saisonnier multiplicatif $(p,d,q) \times (P,D,Q)_r$ avec $d = D = 1$, $r = 12$ et $P = Q = 0$.

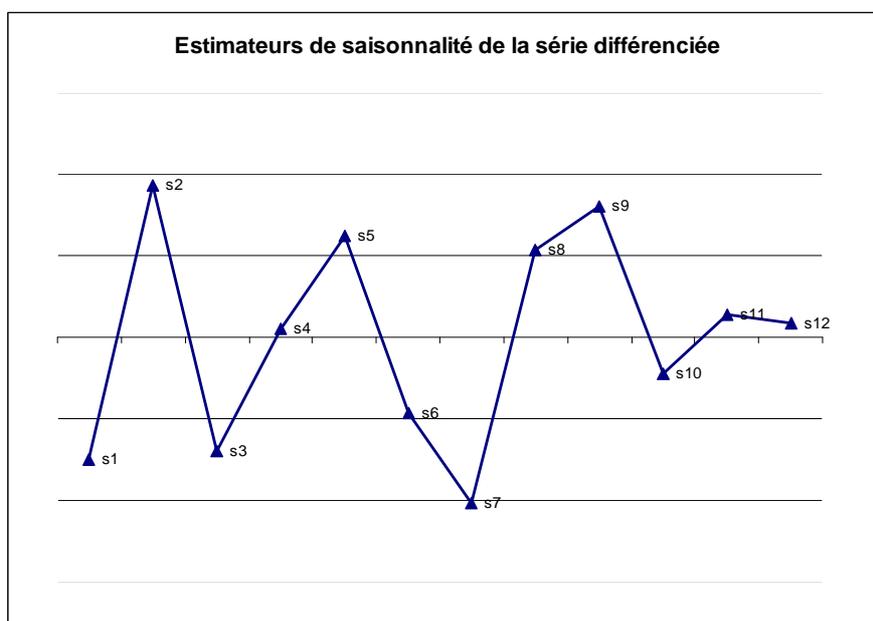
Nous testons plusieurs couples de valeurs pour p et q , en vérifiant l'adéquation ou non de ces modèles d'une part par des tests sur les résidus relatifs à leur blancheur et leur normalité et d'autre part, par les critères d'informations AIC, BIC, SC. A l'issue de ces tests trois modèles sont retenus. Lors des tests de performance de prédictions, à de nombreuses reprises l'estimation des paramètres n'aboutit pas. Les projections s'avèrent donc impossibles.

Nous ne retenons donc pas la modélisation de la série par un processus SARIMA pour projeter les montants de prestations santé dans la mesure où elles ne peuvent pas être effectuées dans tous les cas.

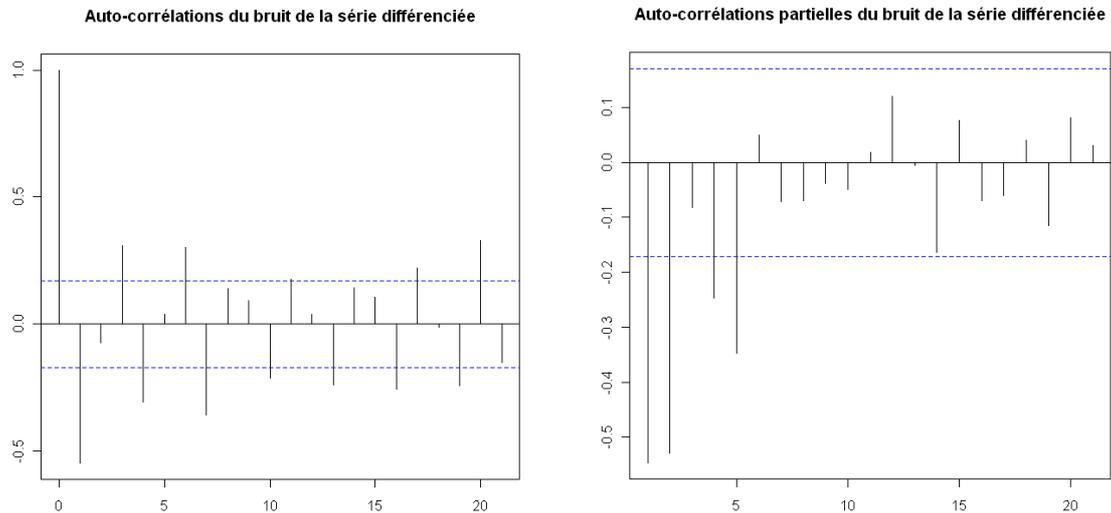
2.3.2 Projections à partir de la série différenciée

Nous faisons ici l'hypothèse d'une non stationnarité aléatoire. Il s'agit dans un premier temps d'utiliser un opérateur de différence pour enlever la tendance de la série, la série différenciée est notée $Y_t = X_t - X_{t-1} = s_t + \varepsilon_t'$.

Puis nous estimons les coefficients saisonniers de la série différenciée par moyenne mobile. Il est important de noter que ces coefficients saisonniers n'ont aucun lien avec ceux calculés pour la série de départ, il s'agit de la saisonnalité de la série différenciée Y_t .



Par différence entre la série différenciée et les coefficients saisonniers nous obtenons ensuite une estimation du bruit $\hat{\varepsilon}_t' = Y_t - \hat{s}_t'$. Les tests de Dickey-Fuller, KPSS et Phillips-Perron confirment tous que le bruit de la série est stationnaire. Nous pouvons donc modéliser le bruit $\hat{\varepsilon}_t'$ par un modèle ARMA. Nous commençons donc par tracer les auto-corrélogrammes de la série bruit pour déterminer les modèles ARMA à tester.



Après observation de l'ACF et du PACF, nous décidons de tester les valeurs de p comprises entre 0 et 2 et celles de q comprises entre 0 et 3. L'ensemble des résultats des tests statistiques effectués pour les différents modèles ARMA envisagés sont présentés en annexe 14. Nous présentons ici les résultats pour les trois modèles que nous avons finalement sélectionnés, l'ARMA (0,2), l'ARMA (0,3) et l'ARMA (1,2).

p	q	p-value du test de Box-Pierce	Blancheur des résidus	p-value du test de Shapiro	AIC	SC	BIC
0	2	0.8594	Oui	0.6774	3787.79	3793,54	3794,83
0	3	0.8966	Oui	0.4651	3788.59	3797,22	3799,08
1	2	0.9623	Oui	0.5237	3788.88	3797,51	3799,37

Les résidus de ces trois modèles ARMA forment chacun un bruit blanc fort qui est de plus gaussien. De plus, quel que soit le modèle ARMA considéré, les paramètres de chaque modèle sont significatifs.

Nous nous intéressons alors aux performances de prédictions de ces modèles comme vu dans la partie 1.5 toujours sur les mêmes zones de test en 2008. Rappelons que les projections dans cette méthode sont effectuées pour le bruit avec chacun des trois processus ARMA retenus.

Pour obtenir les prédictions pour les montants de prestations globaux, il faut ensuite rajouter les termes de saisonnalité aux projections du bruit pour obtenir les projections de la série différenciée Y_t . Enfin, les projections pour la série de départ correspondant aux montants

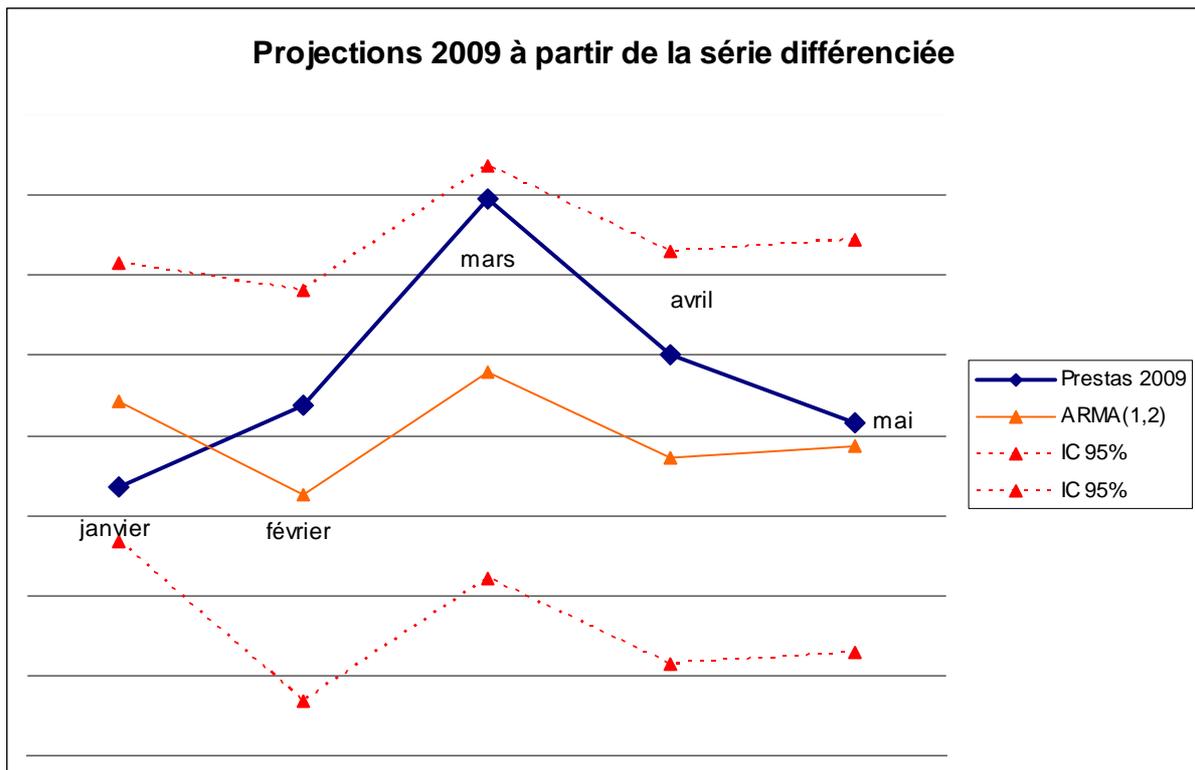
globaux de prestations santé s'obtiennent par la formule $\hat{X}_t = X_1 + \sum_{i=2}^t \hat{Y}_i$.

La représentation graphique des montants de prestations réels 2008 et des projections à partir de la série différenciée effectuées à partir des différents processus ARMA retenus et pour les différentes zones de test est présentée en annexe 15. Nous obtenons par ailleurs les résultats suivants pour les deux zones de test.

\sqrt{MSE}	ARMA (0,2)	ARMA (0,3)	ARMA (1,2)
1 ^{er} semestre 2008	730 570	732 803	730 117
2 ^{ème} semestre 2008	667 932	660 053	653 805

Le modèle avec les meilleurs performances de prédiction est celui qui modélise le bruit de la série différenciée par un ARMA (1,2). Nous avons effectué le même type de projections sur d'autres zones de test en 2007 et 2008 et ce modèle ressort dans la majorité des cas comme étant le plus performant, nous le retiendrons donc définitivement pour modéliser le bruit de la série différenciée.

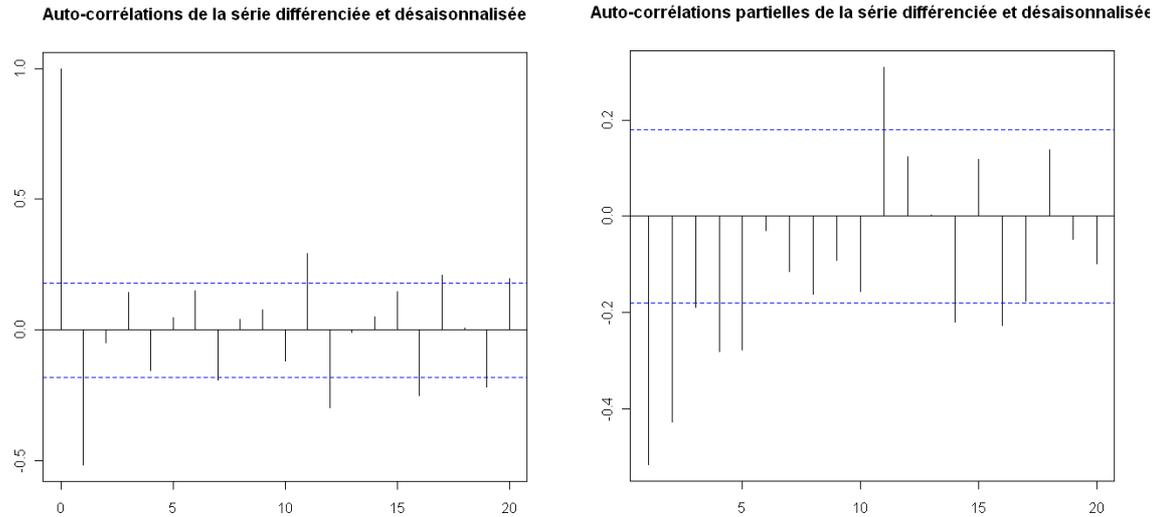
Le choix de modèle étant effectué, nous projetons maintenant les prestations des cinq premiers mois de 2009, nous faisons également apparaître l'intervalle de prévision à 95 % afin de visualiser si les prestations réglées en 2009 (une fois connues) se situent ou pas dans cet intervalle.



Nous observons des écarts plus ou moins importants entre les prévisions et le réel observé, cependant, toutes les projections se situent dans l'intervalle de prévision.

2.3.3 Projections à partir de la série différenciée et désaisonnalisée

Nous faisons ici encore l'hypothèse d'une non stationnarité aléatoire. Il s'agit dans un premier temps d'utiliser des opérateurs de différenciation pour enlever la tendance et la saisonnalité de la série, la série différenciée et désaisonnalisée est notée $Z_t = \Delta_{12}\Delta_1 X_t = \varepsilon_t''$. Les tests de Dickey-Fuller, KPSS et Phillips-Perron confirment tous que le bruit de la série est stationnaire. Nous pouvons donc modéliser le bruit ε_t'' par un modèle ARMA. Nous commençons donc par tracer les auto-corrélogrammes de la série bruit pour déterminer les modèles ARMA à tester.



Après observation de l'ACF et du PACF, nous décidons de tester les valeurs de p comprises entre 0 et 2 et celles de q comprises entre 0 et 3. Les résultats pour les différents modèles ARMA envisagés dans un tableau en annexe 16. Les résultats pour les trois modèles ARMA finalement retenus sont les suivants :

p	q	p-value du Box.test	Blancheur des résidus	p-value shapiro	Log vrais	$\hat{\sigma}^2$	AIC	SC	BIC
0	2	0.9635	Oui	0.1371	-1757.16	3.863e+11	3522.33	3527,89	3529,18
1	1	0.8459	Oui	0.1156	-1757.35	3.874e+11	3522.7	3528,26	3529,55
2	1	0.962	Oui	0.08257	-1756.69	3.833e+11	3523.38	3531,72	3533,58

Nous avons finalement sélectionné trois modèles à tester, l'ARMA (0,2), l'ARMA (1,1) et l'ARMA (2,1). Les résidus de ces trois modèles ARMA forment chacun un bruit blanc fort qui est de plus gaussien. Pour chaque modèle, tous les paramètres sont significatifs.

Rappelons que les projections sont effectuées pour le bruit avec chacun des trois processus ARMA retenus. Les projections pour la série de départ correspondant aux montants globaux

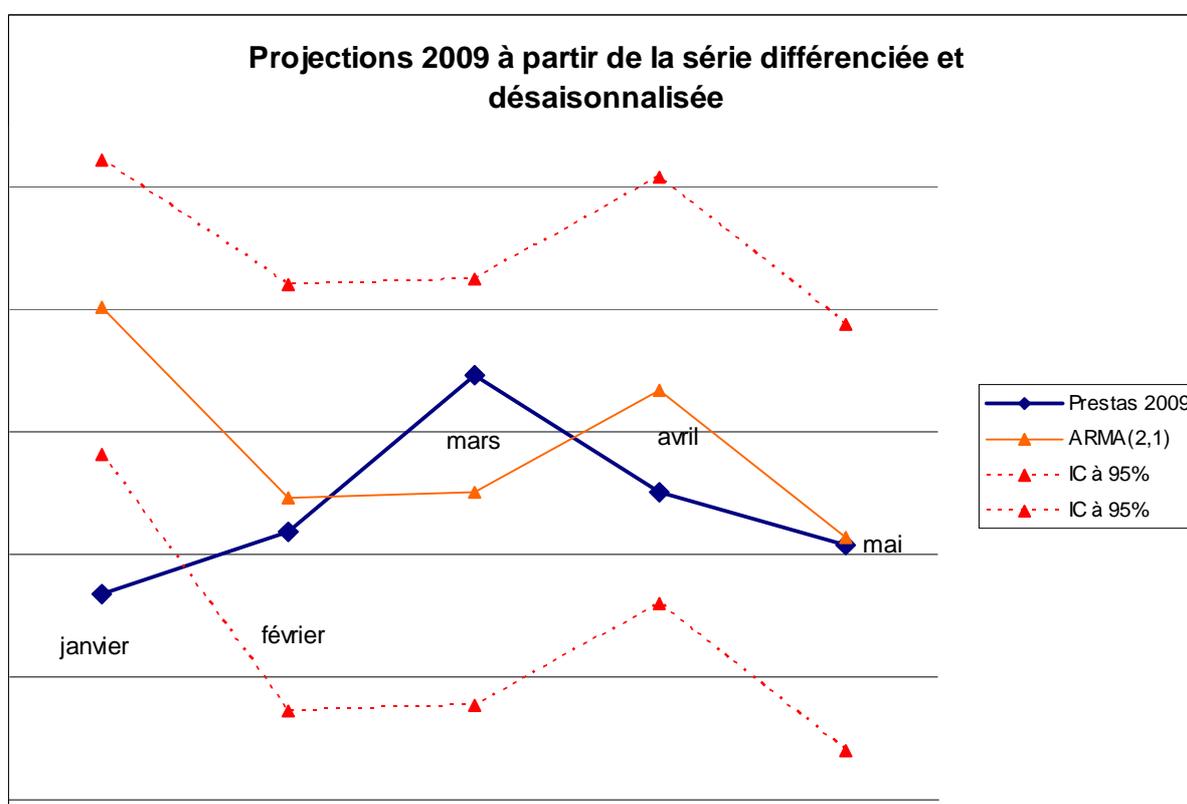
de prestations santé s'obtiennent par la formule $\hat{X}_t = \sum_{i=14}^t Z_i + X_{13} + X_4 - X_1$.

La représentation graphique des montants de prestations réels 2008 et des projections à partir de la série différenciée effectuées à partir des différents processus ARMA retenus et pour les différentes zones de test est présentée en annexe 17. Nous obtenons les résultats suivants pour les différentes zones de test.

\sqrt{MSE}	ARMA (0,2)	ARMA (1,1)	ARMA (2,1)
1 ^{er} semestre 2008	666 157	665 982	665 889
2 ^{ème} semestre 2008	894 481	894 184	790 823

Le modèle avec les meilleures performances de prédiction est celui qui modélise le bruit de la série différenciée par un ARMA (2,1) nous le retiendrons donc définitivement pour modéliser la série différenciée et désaisonnalisée.

Le choix de modèle étant effectué, nous projetons maintenant les prestations des cinq premiers mois de 2009, nous faisons également apparaître l'intervalle de prévision à 95 %.



Les montants réels de prestation, hormis celui du mois de janvier, se situent dans l'intervalle de prévision déterminé pour les projections.

2.4 Méthode de projection retenue

Nous avons éliminé dans la partie 2.3. la méthode de projection par un modèle SARIMA sur la série de départ. En effet, les paramètres ne peuvent pas toujours être estimés, l'incertitude sur l'aboutissement de cette méthode de projection nous pousse donc à ne pas la retenir.

D'un point de vue opérationnel, la première méthode présentée qui consiste, à estimer la tendance par régression sur le temps, la saisonnalité par moyenne mobile, puis à modéliser le bruit résiduel de la série de départ par un modèle ARMA, est la plus simple à mettre en œuvre, tant au niveau des projections que dans la détermination d'intervalles de prévisions.

D'un point de vue théorique, le critère de minimisation des erreurs moyennes quadratiques confirme qu'il s'agit a priori du meilleur modèle à utiliser pour faire des projections. Ce résultat s'observe non seulement sur les deux zones de test présentées ici, le premier et le deuxième semestre 2008, mais également sur d'autres zones de test en 2007 et 2009. Les montants 2009 n'ayant pas participé à l'élaboration du modèle, cela permet d'avoir une validation supplémentaire quant à la pertinence du modèle sélectionné.

Nous retenons donc cette méthode comme celle à utiliser à des fins de prédictions des montants futurs de prestations santé à payer par APRIL Assurances. Il convient de souligner l'importance de pouvoir obtenir des intervalles de prévision pour les projections effectuées. En effet, nous avons constaté sur les différentes zones de test que selon les mois, l'écart entre les prévisions effectuées et le réel observé est plus ou moins important. L'obtention d'un intervalle de prévision permet alors d'avoir une meilleure idée de la qualité de la prévision a posteriori. D'un point de vue opérationnel, les intervalles de prévisions obtenus ont une précision a priori suffisante dans la mesure où les séries temporelles sont un outil envisagé notamment dans le but de servir d'alerte par rapport à des montants de prestations réglés atypiques. Le cas échéant, nous pouvons nous interroger sur l'origine d'un montant anormalement élevé ou bas par rapport à l'intervalle de prévision. Une telle observation, si elle est récurrente, peut également être le signe que la modélisation adoptée n'est peut être plus appropriée et qu'il faut rechercher un nouveau modèle pour effectuer les projections.

3 Présentation des résultats sur les différents périmètres

Dans la partie 2, nous avons présenté l'étude de l'historique des montants globaux de prestations santé de janvier 1998 à décembre 2008 sur le stock et les affaires nouvelles du portefeuille, ainsi que les projections effectuées à partir du modèle retenu.

Nous avons ensuite envisagé successivement différents périmètres pour réaliser le même type d'analyse et choisir ensuite le périmètre d'étude le plus pertinent pour effectuer les projections avec la méthodologie retenue, c'est-à-dire via une estimation de la tendance par régression sur le temps, une estimation de la saisonnalité par moyenne mobile et enfin une modélisation du bruit résiduel de la série par un modèle ARMA. Cette partie a pour but de présenter brièvement les conclusions observées lors des différentes études menées.

3.1 Stock et affaires nouvelles : janvier 1998 à mai 2009

Dans la partie 2, pour le périmètre du stock et des affaires nouvelles de 1998 à 2008 nous avons identifié une tendance linéaire ainsi qu'une saisonnalité de période 12, le bruit résiduel étant modélisé par un ARMA (3,1).

Nous avons ensuite souhaité réaliser la même analyse en intégrant les données 2009 disponibles à l'époque dans l'historique. Nous avons ainsi procédé avec la même méthodologie en rajoutant les montants de prestations versés pour le stock et les affaires nouvelles confondus pour les mois de janvier à mai 2009. Dans cette modélisation, la tendance se trouve légèrement modifiée, elle reste cependant linéaire, la saisonnalité est identique à celle trouvée sans les données 2009 par construction du modèle de moyenne mobile. Enfin, le bruit résiduel de la série est modélisé par un ARMA (1,1).

En calculant les erreurs moyennes quadratiques sur différentes zones de test, nous observons que les prédictions via ce modèle sont légèrement meilleures pour 2008 et 2009 que celles effectuées avec le modèle ne prenant pas en compte l'historique de janvier à mai 2009. En revanche, sur la zone de test 2007, le modèle qui intègre les données 2009 est légèrement moins bon. Or, à partir de 2008, un léger « tassement » de la tendance linéaire est observé, c'est ce qui explique a priori l'observation d'erreurs quadratiques moyennes moindres lorsque

les données de janvier à mai 2009 sont prises en compte dans le modèle. Pour les projections ultérieures, nous envisageons donc de conserver cette nouvelle modélisation.

3.2 Stock

Nous nous sommes également intéressés aux projections sur le stock seul. En effet, ce périmètre est généralement plus stable que celui des affaires nouvelles et nous avons ainsi souhaité visualiser si de meilleures projections étaient envisageables sur ce périmètre d'étude.

Nous observons toujours une tendance linéaire qui est logiquement différente de celle observée sur le stock et affaires nouvelles confondus, la saisonnalité est toujours de période 12 et le bruit résiduel est modélisé ici par un ARMA (3,1), modélisation identique à celle réalisée pour les prestations du stock et des affaires nouvelles cumulées. En pratique, sur les différentes zones de test, on observe des prédictions légèrement meilleures ce qui peut être en partie expliqué par la plus grande stabilité du stock par rapport au stock et affaires nouvelles confondus.

3.3 Exclusion des non assujettis

Nous disposons de l'historique des prestations réglées pour les contrats concernant les assurés non assujettis au régime général à partir de janvier 2001 et jusqu'au mois de mai 2009. Nous avons souhaité observer les modèles obtenus d'une part en observant les périmètres précédents hors non assujettis et sur le périmètre des non assujettis exclusivement. Nous envisageons en effet des modèles différents a priori car les prestations versées aux non assujettis sont en général source de plus de variations dans la mesure où la couverture APRIL Assurances intervient au premier euro de la dépense.

Sur le périmètre du stock et des affaires nouvelles hors non assujettis, nous observons toujours une tendance linéaire et une saisonnalité de période 12, le bruit résiduel étant modélisé par un ARMA (1,0). La tendance et la saisonnalité varient car nous sommes sur un périmètre de personnes assurées différent mais également car nous disposons de l'historique à partir de 2001 seulement au lieu de 1998. En termes de projections, cette modélisation est légèrement meilleure que celle qui prend en compte les prestations du stock et des affaires nouvelles y compris celles des non assujettis.

Sur le périmètre du stock seul hors non assujettis, on obtient également un modèle légèrement meilleur que celui obtenu pour le stock y compris les non assujettis.

Nous nous sommes intéressés enfin à la modélisation des prestations relatives exclusivement aux non assujettis afin d'essayer d'établir un modèle leur étant propre. Cette modélisation n'a pas pu être réalisée dans la mesure où il a été impossible de se ramener à une série stationnaire pour modéliser le bruit par un modèle ARMA. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, les prestations versées aux non assujettis sont généralement source de plus de variations dans la mesure où la couverture APRIL Assurances intervient au premier euro de la dépense. Ce périmètre est donc plus délicat à modéliser, phénomène accentué par le fait que les montants de prestations versés sont moindres par rapport au portefeuille santé dans son ensemble et que ce périmètre est donc nettement plus sensible aux variations à la hausse ou à la baisse des montants de prestations.

3.4 Affaires nouvelles

La suite logique de ces études a ensuite consisté à nous intéresser aux projections sur les affaires nouvelles seules afin de visualiser si un modèle à part entière et des projections pouvaient être envisagés sur ce périmètre plus instable dont le comportement, en termes de montants de prestations réglées, diffère de celui du stock seul.

Lors de l'étude, aucune tendance ne s'est dégagée. Nous avons rencontré ici des difficultés lors de tentatives pour se ramener à une série stationnaire modélisable par un modèle ARMA. Le périmètre des affaires nouvelles recèle une certaine instabilité dans la mesure où il est influencé par les dates de sortie des produits. Cette instabilité explique en grande partie les difficultés rencontrées au cours des tentatives de modélisation.

3.5 Autres modélisations

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons étudié les différences de périmètres entre l'Assurance Maladie et APRIL Assurances. En termes d'évolution des montants de prestations réglés, l'une des différences majeures réside dans le fait qu'APRIL Assurances crée régulièrement de nouveaux produits santé, créations produits susceptibles d'avoir un impact non négligeable au niveau des prestations futures à payer. Ces impacts peuvent être

issus des cibles visées par chaque création produit, et provenir également du fait qu'il y ait ou non de la sélection médicale en amont de la souscription, selon qu'il s'agit de produits anciens ou plus récents.

Pour essayer de mettre en évidence de tels impacts sur la sélection de modèle pour la série de départ, nous avons souhaité étudier le comportement du stock du portefeuille à partir de 2004. En effet, un produit phare de la gamme santé est sorti au dernier trimestre 2002, il s'agit du premier produit sans sélection médicale à l'adhésion et avec une cible relativement généraliste. Les premières affaires ayant été créées en 2002 et 2003, nous avons réalisé notre étude à compter de janvier 2004 pour que ces affaires fassent partie du stock du portefeuille.

Lors de la modélisation, nous observons une tendance linéaire, de pente plus faible ainsi qu'une saisonnalité de période 12. La tendance de pente plus faible est vraisemblablement due au « tassement » de la courbe des prestations observé à partir de 2008 qui a une influence plus importante lorsque l'historique est réduit comme ici. Par ailleurs, l'intervalle de prévisions n'est pas meilleur que celui obtenu en travaillant sur le stock dans son ensemble et l'historique de 65 données ne permet pas d'envisager de prévisions à un horizon suffisamment important.

Nous ne pouvons finalement pas conclure quant à l'impact d'absence de sélection médicale sur les contrats santé à partir d'une date donnée. Cette modélisation n'étant pas plus pertinente que celle de départ en termes de prévisions, nous ne la retiendrons pas.

Dans la méthode de projection envisagée via l'indicateur exogène qu'est l'Assurance Maladie, l'un des problèmes majeurs rencontrés pour réaliser des prédictions est la disponibilité tardive des données mensuelles (données disponibles avec un délai de deux à trois mois). Les séries temporelles ne permettent pas de résoudre cette problématique dans la mesure où nous disposons uniquement d'un historique des prestations réglées par l'Assurance Maladie à partir de 2005 ce qui s'avère insuffisant pour envisager des projections.

La prise en charge des frais de santé par l'Assurance Maladie a également un impact sur les montants de prestations payés par APRIL Assurances. En effet, comme nous l'avons souligné auparavant, les complémentaires santé interviennent sous déduction des montants remboursés par l'Assurance Maladie. Par ailleurs, des réformes telles que l'introduction de franchises peuvent également modifier le comportement des assurés.

Voici un récapitulatif succinct des différentes réformes de la Sécurité Sociale depuis 1998 susceptibles d'avoir un impact sur les prestations santé versées par APRIL Assurances. En 1999, la notion de médecin référent est introduite, les taux de remboursement des médicaments sont modifiés, la télétransmission se développe également. En 2000, la Couverture Maladie Universelle est mise en place et la carte vitale diffusée pour les ayants droits de plus de 16 ans. En 2004, la participation forfaitaire à la charge des assurés pour les actes ou les consultations des médecins est instaurée. En 2007, une participation supplémentaire est demandée aux patients qui ne respectent pas le parcours de soins coordonnés et le développement des médicaments génériques est renforcé. En 2008, des franchises médicales sont mises en place sur les médicaments, pour les auxiliaires médicaux et les transports.

Pour tenter de mesurer l'impact de ces réformes sur notre portefeuille, il faudrait pouvoir faire une modélisation poste par poste car au global l'effet de ces différentes réformes n'est pas visible. Ceci n'est pas réalisable car nous ne disposons pas de l'historique des règlements par poste de soins mais seulement au global.

Par ailleurs, les autres méthodes de projection via les séries temporelles, par différenciation, ont également été testées sur les périmètres précités. Elles ont confirmé que la méthodologie la plus pertinente à retenir est bien l'estimation de la tendance par régression sur le temps, puis celle de la saisonnalité par moyenne mobile et enfin la modélisation du bruit résiduel de la série par un modèle ARMA. D'un point de vue opérationnel, le périmètre retenu comme étant le plus intéressant est celui du portefeuille santé global, c'est-à-dire les prestations relatives au stock et aux affaires nouvelles confondus. En effet, nous avons pour objectif la prévision globale de la charge sinistre du portefeuille santé. Par ailleurs, nous travaillons déjà sur ce périmètre avec les méthodes existantes, dans un souci de fiabilisation des résultats, nous souhaitons travailler sur ce même périmètre dans notre modélisation par les séries temporelles.

Partie 3 : Utilisation des projections via les séries temporelles pour le provisionnement

Nous avons vu précédemment que la réalisation de prévisions des montants de prestations à payer dans le futur a différents objectifs. D'un point de vue du suivi technique du portefeuille santé, différentes provisions doivent être constituées et nous devons en estimer le montant. Par ailleurs, la direction financière a également besoin de ces prévisions à des fins de gestion de la trésorerie.

L'article R331-6 du code des assurances définit les provisions techniques qui doivent être constituées, la provision mathématique des rentes, la provision pour primes non acquises, la provision pour risque en cours, la réserve de capitalisation, la provision pour sinistre à payer (PSAP), la provision pour risques croissants (PRC), la provision pour égalisation, la provision pour risque d'exigibilité.

Nous nous intéressons ici au calcul de provisionnement nécessaire pour déterminer la PSAP. La provision pour sinistre à payer est définie comme « la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés » par le code des assurances. Elle doit être suffisante pour faire face intégralement à l'engagement vis-à-vis des bénéficiaires des contrats.

L'article R331-15 du code des assurances stipule que la PSAP doit être calculée exercice par exercice, la méthode de base pour son évaluation étant la méthode dossier-dossier. Cette provision doit ensuite être augmentée d'une estimation du coût des sinistres déjà survenus mais pas encore déclarés à la date de calcul. L'entreprise, sous réserve d'obtenir l'accord de l'Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles, peut également utiliser des méthodes statistiques pour l'évaluation des sinistres survenus au cours des deux derniers exercices. Généralement, les méthodes statistiques sont souvent utilisées dans le but de comparer leurs différents résultats.

L'évaluation des provisions en assurance non vie dépend de la loi de survenance des sinistres. Cette évaluation peut être réalisée via différentes méthodes statistiques, déterministes ou

stochastiques. Elles supposent souvent de disposer de données historiques de la sinistralité. Nous présentons dans cette partie la méthode déterministe la plus utilisée, la méthode de Chain Ladder. Puis, nous envisageons dans un deuxième temps l'utilisation des projections effectuées grâce aux séries temporelles pour calculer les PSAP.

1 Chain Ladder standard²⁰

Nous allons ici présenter la méthode de Chain Ladder standard. Il s'agit d'un modèle d'évaluation par cadences de règlement qui s'applique sur des triangles de paiements cumulés. Pour le risque santé en particulier, les triangles de paiements utilisés ne sont pas annuels mais mensuels dans la mesure où le délai de forclusion limite dans le temps (24 mois environ après la survenance du sinistre) le remboursement des soins par l'Assurance Maladie.

Les triangles de paiement présentent en ligne (i), les mois de survenance du sinistre, encore appelés origine, les colonnes (j) représentent les délais de règlement en nombre de mois depuis la survenance du sinistre. Notons $X_{i,j}$ le montant des sinistres réglés en i+j au titre du mois i. Les paiements de sinistres antérieurs à la date de calcul « n » sont présentés sous la forme d'un triangle de liquidation des montants non cumulés. Les sinistres ayant le même mois de survenance sont donc situés sur une même ligne et ceux qui ont le même délai de règlement sur une même colonne.

Triangle de liquidation des montants non cumulés

Mois d'origine i	Délai de règlement j (en mois)						
	0	1	...	j	...	n-1	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,j}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,n-1}$	
...		
i	$X_{i,j}$			
...				
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$					
n	$X_{n,0}$						

²⁰ Source : **DEVINEAU Laurent**. *Cours de Provisionnement non-vie* 2^{ème} et 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

A partir de ce triangle, il est possible de déduire le triangle des montants cumulés avec $C_{i,j} = \sum_{h=0}^j X_{i,h}$ le montant cumulé des règlements pour le mois d'origine i jusqu'au délai de règlement j .

Triangle de liquidation des montants cumulés

Mois d'origine i	Délai de règlement j (en mois)						
	0	1	...	j	...	$n-1$	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$...	$C_{0,j}$...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,n-1}$	
...		
i	$C_{i,j}$			
...				
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$					
n	$C_{n,0}$						

On définit par ailleurs le **j -ième facteur de développement** par $f_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et la **j -ème**

cadence de règlement par $f_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}$, pour j compris entre 0 et $n-1$.

L'utilisation de la méthode de Chain Ladder standard nécessite deux hypothèses importantes :

- la constance des cadences de règlement de sinistre,
- l'indépendance des facteurs de développement vis-à-vis de l'année d'origine i des sinistres.

Remarque : Dans la pratique, ces hypothèses ne sont pas toujours parfaitement vérifiées. En effet, selon le poste de soin étudié, les cadences de règlement diffèrent notamment entre deux postes qui bénéficient ou non de la télétransmission.

Théoriquement, nous devrions donc réaliser un triangle de liquidation différent pour chaque poste de soins pour satisfaire cette hypothèse. En pratique, nous ne disposons pas de l'historique des montants réglés par poste de soins, nous travaillons donc sur les montants totaux des prestations santé APRIL Assurances.

En pratique, nous utilisons les estimateurs des facteurs de développement

suivants $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$ pour j compris entre 0 et $n-1$.

Les valeurs pour compléter la partie inférieure du triangle de liquidation des montants

cumulés peuvent être estimés grâce à la formule suivante : $\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} * \prod_{h=n-i}^{j-1} \hat{f}_h$.

On obtient enfin le montant R de la PSAP par différence entre les montants estimés de la dernière colonne du triangle de liquidation et les derniers montants connus, soit par la formule

suivante : $R = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$.

Exemple de calcul de PSAP au 31/12/2007 :

Nous disposons des montants de règlements mensuels relatifs aux mois de soins de janvier 2006 à décembre 2007 en fonction du délai de règlement, présenté sous forme de triangle de liquidation.

Nous utilisons les formules précédentes pour établir le triangle de liquidation des montants cumulés dont la partie inférieure est ensuite complétée par la méthode de Chain Ladder vue ci-dessus. Nous pouvons alors calculer le montant de la PSAP.

Plusieurs mises en garde quant à l'utilisation de la méthode de Chain Ladder doivent néanmoins être faites :

- Les facteurs de développement concernant les périodes élevées sont calculés à partir de peu de données, une valeur atypique peut donc avoir une influence importante dans la mesure où ces coefficients sont utilisés pour estimer la partie inférieure du triangle.
- Cette méthode qui est basée sur un historique de données est très sensible à une forte variation, d'une année sur l'autre, d'un montant du triangle de liquidation.
- Pour la dernière année de survenance des sinistres, seule une valeur est connue, à laquelle on applique tous les facteurs de développement. Une valeur très importante ou très faible aura un impact décuplé car il sera répercuté de façon multiplicative. En prenant le cas extrême où aucun sinistre ne s'est produit pour un mois de survenance, le règlement final estimé pour ce mois sera nul !

D'autres méthodes déterministes peuvent également être utilisées, en pratique Chain Ladder est la plus utilisée car il s'agit d'une méthode relativement simple à mettre en œuvre et aisément interprétable.

2 Séries temporelles pour le provisionnement

La méthode de Chain Ladder standard correspond à un raisonnement en date de soins, il s'agit d'un provisionnement effectué avec une logique de date de survenance des sinistres.

Les séries temporelles permettent de faire des projections des montants de prestations par date de règlement, tous exercices de soins confondus. Il s'agit d'un provisionnement, avec une logique financière et comptable et non pas technique. L'estimation des règlements des mois à venir via les séries temporelles permet en effet d'anticiper les sorties de trésorerie à venir.

Dès lors que nous considérons avoir obtenu un modèle de séries temporelles satisfaisant pour pouvoir réaliser des projections, nous souhaitons également trouver une méthode permettant d'utiliser ces projections en mois de règlement pour faire un calcul de provisions techniques, c'est-à-dire estimer la PSAP. Nous venons de voir que pour appliquer la méthode de Chain Ladder, il faut disposer d'un historique des paiements de sinistres antérieurs à la date de calcul « n » en mois de soins.

L'idée est d'utiliser les projections à horizon h, réalisées avec le modèle de séries temporelles retenu, pour réaliser un calcul de type Chain Ladder à une date future n+h. Les projections des prestations effectuées étant en mois de règlement, il s'agit de trouver un moyen de reconstituer le triangle de liquidation des montants non cumulés en mois de soins.

Pour chaque mois de soins, nous disposons d'un historique de la proportion des prestations payées au titre de ce mois de soins en fonction du délai de règlement. Pour chaque délai de règlement, nous calculons donc la proportion moyenne des prestations payées par rapport au total des prestations payées au titre de ce mois de soins. Notons a %, ... x %, les proportions des prestations payées respectivement pour les délais de règlement 0 mois, ..., 23 mois.

De plus, grâce aux séries temporelles, nous projetons les montants de prestations en date de règlement pour les mois n+1 à n+h, notons ces montants respectivement P_{n+1} , ..., P_{n+h} . Nous obtenons alors le triangle de liquidation des montants non cumulés en mois de soins grâce aux formules suivantes :

- pour i allant de n+1 à n+h, $X_{i,0} = P_i * a\%$,

- pour i allant de n à $n+h-1$, $X_{i,1} = P_i * b\%$,
- ...
- pour i égal 0, $X_{0,n+h} = P_{n+h} * x\%$.

Nous pouvons ensuite appliquer à nouveau la méthode de Chain Ladder standard pour calculer le triangle des paiements cumulés, compléter la partie inférieure et estimer la PSAP.

Exemple de calcul de PSAP au 31/12/2007 avec un historique jusqu'à juin 2007 :

Ici nous souhaitons reprendre l'exemple de la partie précédente en effectuant le calcul avec la méthode utilisant les séries temporelles afin de comparer les résultats obtenus. Nous faisons ici l'hypothèse que seuls sont connus les montants de règlements mensuels relatifs aux mois de soins de janvier 2006 à juin 2007 en fonction du délai de règlement, présenté sous forme de triangle de liquidation.

Nous souhaitons compléter le triangle de liquidation grâce aux séries temporelles pour estimer la PSAP à fin décembre 2007.

A partir de l'historique des montants de prestations par mois de règlement de janvier 1998 à juin 2007, nous projetons à l'aide du modèle de série temporelle établi, les prestations en mois de règlement de juillet à décembre 2007, notées respectivement P_{18}, \dots, P_{23} .

Grâce aux proportions moyennes des prestations payées par délai de règlement, nous pouvons ensuite compléter le triangle de liquidation des montants de prestations non cumulés par mois d'origine et par délai de règlement. La partie reconstituée à partir des séries temporelles apparaît en bleu sur le triangle suivant.

X_{ij}	Délai de règlement j (en mois)																									
Mois d'origine i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
janv-06	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$																							$X_{0,23}=P_{23}*x\%$	
févr-06	$X_{1,0}$																									
mars-06																										
avr-06																										
mai-06																										
juin-06																										
juil-06																										
août-06																										
sept-06																										
oct-06																								
nov-06																										
déc-06																										
janv-07																										
févr-07																										
mars-07																										
avr-07																										
mai-07																										
juin-07																										
juil-07																										
août-07																										
sept-07																										
oct-07																										
nov-07																										
déc-07																										

Nous utilisons ensuite les formules de la méthode Chain Ladder standard pour établir le triangle de liquidation des montants cumulés dont la partie inférieure est ensuite complétée. Nous pouvons alors calculer le montant de la PSAP.

Nous trouvons un montant de PSAP inférieur de 3.3 % à celui calculé grâce à la méthode Chain Ladder standard appliquée au 31/12/2007 une fois connu le triangle de liquidation des montants de prestations.

Le résultat obtenu sur cet exemple ne permet pas en tant que tel de valider l'efficacité de cette méthode. Il faudrait pour cela reproduire le test sur plusieurs exercices a posteriori. Les séries temporelles combinées avec l'utilisation des méthodes de provisionnement de type Chain Ladder peuvent cependant être un outil envisageable à l'avenir pour anticiper le calcul de PSAP. En effet, pour effectuer un calcul de PSAP à une date donnée, l'historique nécessaire pour utiliser Chain Ladder est moins important grâce aux projections pouvant être réalisées par les séries temporelles.

Des méthodes stochastiques comme le bootstrap permettent également de réaliser des calculs de provisionnement technique. Cette technique que nous ne détaillerons pas ici constitue une alternative intéressante car elle permet de rechercher des intervalles de confiance pour l'estimation des provisions techniques et des PSAP en particulier.

CONCLUSION

Ces dernières années, la législation concernant les dépenses de santé et les dépenses de l'Assurance Maladie en particulier a beaucoup évolué. Ces évolutions traduisent notamment une volonté de donner accès aux soins à tous avec l'instauration de la CMU et le souhait de recentrer le financement de l'Assurance Maladie sur les postes de soins tels que l'hospitalisation ou les dépenses relatives aux ALD, en instaurant parallèlement un déremboursement de certains autres postes comme la pharmacie. Par ailleurs, nous constatons depuis plusieurs années également, une accélération des dépenses relatives aux frais de santé et une augmentation de la part du financement des complémentaires santé dans ces dépenses.

Ces évolutions nous poussent à avoir une connaissance plus précise de notre portefeuille santé et notamment à vouloir anticiper davantage l'évolution de la charge sinistre à venir. Les projections du risque santé ont vocation à être utilisées dans le cadre du pilotage technique du portefeuille, elles sont également utilisées par d'autres services de l'entreprise comme nous l'avons évoqué précédemment. L'objet de ce mémoire a donc été de tester de nouvelles méthodes de projection des prestations futures du portefeuille santé, tous produits et toutes affaires confondus. La modélisation via les séries temporelles permet ainsi d'avoir une lecture différente de celle des méthodes existantes, de réaliser des prévisions à plus court terme et d'obtenir des intervalles de confiance pour ces prédictions. Elle peut également remplir le rôle d'un outil de veille sur l'évolution de la charge sinistre du portefeuille santé.

Sur les quatre méthodes envisagées pour réaliser des projections avec les séries temporelles, la méthode la plus pertinente d'un point de vue théorique et la plus simple à mettre en œuvre d'un point de vue opérationnel, est l'estimation de la tendance par régression sur le temps suivie de l'estimation de la saisonnalité par moyenne mobile et de la modélisation du bruit par un processus ARMA. Les intervalles de prévision que nous obtenons confèrent à cette modélisation via les séries temporelles, un rôle d'alerte face à une éventuelle évolution atypique des montants de prestations réglés mensuellement. Cette méthode de projection a été

testée et validée en travaillant à partir de l'historique des données de 1998 à 2008 pour projeter les mois de janvier à mai 2009.

Dans la mesure où les complémentaires santé interviennent sous déduction des montants pris en charge par l'Assurance Maladie, les réformes à venir, selon leur envergure, auront un impact directement observable sur les montants de prestations réglés par les complémentaires. Si à l'avenir l'Assurance Maladie se désengage à un point tel qu'elle ne prend plus en charge les ALD, le risque santé en assurance individuelle ne sera alors plus considéré uniquement comme un risque de court terme. En effet, la constitution de provisions pour faire face à un risque croissant d'année en année pourrait s'avérer nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages :

BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

LUTKEPOHL Helmut, KRATZIG Markus. *Applied Time Series Econometrics.* Cambridge University Press, 2004, 317 p.

MADDALA G.S., IN MOO KIM. *Unit Roots, Cointegration and Structural Change.* Cambridge University Press, 1998, 492 p.

MADSEN Henrik. *Time Series Analysis.* Chapman & Hall/CRC.

THIRIA S., LECHEVALLIER, GASCUEL O., et al. *Statistiques et méthodes neuronales.* Paris : DUNOD, 1997.

Codes :

Code des Assurances

Code de la Santé Publique

Code de la Sécurité Sociale

Sites internet :

ABALLEA Pierre, BARTOLI Fabienne, ESLOUS Laurence et al. *Les dépassements d'honoraires médicaux,* 2007. Source :

<http://www.sante.gouv.fr/htm/actu/depassements_honoraires/rapport.pdf>

BERTRAND P. *Introduction au logiciel R*, 2008-2009. Source :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~rahal/TD_AFDD/TD5_Intro%20%E0%20R/TP-intro.pdf>

BOUTAHAR Mohamed. *Séries temporelles – Estimation paramétrique et non paramétrique avec le logiciel R*, 2007. Source :

<<http://lumimath.univ-mrs.fr/infoetudiant/STATSBOUTAHARMINT.pdf>>

CHARPENTIER Arthur. *Cours de séries temporelles théorie et applications*. Source

<<http://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/TS1.pdf>>

CHEVILLON Guillaume. *Econométrie*, 2005. Source :

<<http://guillaume.chevillon.free.fr/teaching/IEP/Econometrie.pdf>>

FROMONT Magali. *Introduction à R*, 2007-2008. Source :

<http://www.ensai.com/userfiles/coursr_1Kd4eT.pdf>

PHILIPPE Anne. *Le logiciel R*, 2004.

Source <<http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/M41/Anne-Philippe-cours-R.pdf>>

Universite Dauphine. Cours de Séries temporelles. Sources :

<http://www.dauphine.fr/eurisco/eur_wp/CoursSeriesTemp_Chap1.pdf>

<http://www.dauphine.fr/eurisco/eur_wp/CoursSeriesTemp_Chap2.pdf>

<http://www.dauphine.fr/eurisco/eur_wp/CoursSeriesTemp_Chap3.pdf>

<http://www.dauphine.fr/eurisco/eur_wp/CoursSeriesTemp_Chap4.pdf>

ROUSTANT O. *Aide à l'utilisation du logiciel R pour l'étude des séries chronologiques*, 2005-2006. Source :

<http://www.emse.fr/~roustant/Documents/Guide_R_Series_Chronologiques.pdf>

Sécurité Sociale. *Quelques repères sur l'histoire de la Sécurité Sociale*. Source

<http://www.securite-sociale.fr/comprendre/histo/historique/chrono_ss.htm#apres_1945>

Sécurité Sociale. *La branche maladie.* Source :

<<http://www.securite-sociale.fr/comprendre/organisation/brmaladie.htm>>

Site de l'Assurance Maladie. Source <www.ameli.fr>

Site de la Haute Autorité de Santé. Source <<http://www.has-sante.fr>>

Site de l'Agence Française de Sécurité Sanitaire des Produits de Santé. Source <www.afssaps.fr>

Documents :

Assurance Maladie. *Statistiques mensuelles* (historique en version papier).

Assurance Maladie. *Statistique Mensuelle en date de soins.* Source :

<<http://www.ameli.fr/l-assurance-maladie/statistiques-et-publications/analyse-des-depenses/depenses-les-informations-du-mois/la-statistique-en-mois-de-soins.php>>

Assurance Maladie. *Statistique mensuelle en date de remboursement.* Source

<http://www.ameli.fr/fileadmin/user_upload/documents/Stat_mensuelle_resultats_a_fin_mai.pdf>

Assurance Maladie. *Communiqué de presse sur les dépenses de santé à fin juin 2009.* Source

<http://www.ameli.fr/fileadmin/user_upload/documents/Communique_depenses_juin_09.pdf>

BIENVENUE Alexis. *Cours de Modèles Linéaires* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

BIPE. *Club Complémentaire Santé.*

DEVINEAU Laurent. *Cours de Provisionnement non-vie* 2^{ème} et 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

Haut Conseil de l'Assurance Maladie. *Note sur le régime des affections de longue durée (ALD)*, 2005.

Inspection Générale des Affaires Sociales. *Les dépassements d'honoraires médicaux*, Rapport RM 2007-054P – Avril 2007.

Institut Pharmaco-épidémiologique Belge. *Prévisions mensuelles et trimestrielles au départ d'une banque de données médicamenteuses.*

IRDES. *Historique des plans de réformes santé.*

MARION Anne. *Cours de Protection Sociale 3^{ème} année ISFA*, 2008-2009.

MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles 3^{ème} année ISFA*, 2008-2009.

ANNEXES

Annexe 1 : Extrait de la Statistique Mensuelle de décembre 2008

RESULTATS DE SYNTHESE					VII
ASSURANCES : MALADIE MATERNITE INVALIDITE DECES ACCIDENTS DU TRAVAIL DEPENSES en milliers d'euros					
MOIS DE DECEMBRE 2008					
PRESTATIONS	maladie	maternité	AT	TOTAL	
Consultations	509 734	12 973	9 235	531 941	
Visites	74 042	888	274	74 983	
Actes techniques	495 228	17 197	7 297	519 722	
Forfaits Scanner et IRMN	28 882	119	808	29 409	
Autres honoraires du secteur privé	64 532	10 933	1 757	77 221	
Participations forfaitaires - médecins+participations assurés	-29 224		-462	-29 686	
TOTAL HONORAIRES MEDICAUX	1 142 994	41 898	18 709	1 203 591	
Honoraires dentaires D, DC, So, SPR, TO.	221 118	689	40	221 825	
TOTAL HONORAIRES SECTEUR PRIVE (médicaux et dentaires)	1 364 110	42 556	18 749	1 425 415	
Auxiliaires médicaux	528 528	4 057	14 515	546 098	
dont franchises sur actes d'auxiliaires médicaux	-4 117		-272	-4 389	
Actes en B, BP et BR.	228 988	14 006	559	243 553	
Actes en KB, PB et TB et Frais de dép. dir. de laboratoire	12 379	1 064	34	13 478	
Participations forfaitaires - laboratoires	-14 139		-30	-14 169	
Dépenses médicaments	1 628 879	5 920	5 511	1 640 310	
dont franchises sur médicaments	-39 302		-248	-39 550	
Produits d'origine humaine	2 808	0		2 808	
Appareils matériels de traitement et pansements	224 553	1 517	1 583	227 654	
Autres biens médicaux inscrits à la LPP	78 125	604	1 845	78 374	
TOTAL PRESCRIPTIONS	2 685 920	27 167	23 819	2 736 906	
Frais de déplacement des malades	218 298	905	4 922	222 123	
dont franchises sur frais de transport	-531		-27	-557	
Autres prestations diverses hors CAMSP	35 772	8 375	-395	43 753	
TOTAL AUTRES PRESTATIONS DE SOINS SANTE	252 068	9 280	4 527	265 876	
TOTAL PRESTATIONS EN ESPECES	507 851		205 136	712 987	
TOTAL SOINS DE VILLE	4 809 948	79 004	252 231	5 141 183	
Objectif de dépenses méd.-chir.-obst. (ODMCO) secteur public	2 389 718	2 805	4 838	2 377 160	
Objectif de dépenses méd.-chir.-obst. (ODMCO) secteur privé	685 953	41 830	6 582	714 245	
TOTAL Objectif de dépenses méd.-chir.-obst. (ODMCO)	3 035 669	44 435	11 400	3 091 504	
Dotations annuelles de financement des MIGAC secteur public	609 442	10 987	334	620 743	
Dotations annuelles de financement des MIGAC secteur privé	17 353		31	17 384	
TOTAL Dotations annuelles de financement des MIGAC	626 795	10 967	365	638 127	
TOTAL DAF et autres versements du secteur public	1 163 773	4 166	6 727	1 174 666	
OQN psychiatrie et soins de suite et de réadapt. (secteur privé)	181 243	31	2 748	184 022	
Autres versements secteur privé	13 827	454	53	14 133	
TOTAL OQN et autres versements du secteur privé	174 870	485	2 800	178 155	
TOTAL VERSEMENTS AUX ETABLISSEMENTS DE SANTE PUBLICS ET PRIVES	5 001 106	60 053	21 293	5 082 452	
Enfance inadaptée hors dotation globale	450 888			450 888	
Enfance inadaptée en dotation globale	181 534			181 534	
TOTAL Enfance inadaptée	612 399			612 399	
Adultes handicapés hors dotation globale	141 281		5 353	146 614	
Adultes handicapés en dotation globale	72 886			72 886	
TOTAL Adultes handicapés	214 127		5 353	219 480	
Personnes âgées	538 480			538 480	
Autres prestations médico-sociales	2 398			2 398	
TOTAL VERSEMENTS AUX ETABLISSEMENTS MEDICO-SOCIAUX	1 367 384		5 353	1 372 737	
TOTAL ONDAM	11 178 438	139 057	278 877	11 596 372	
Prestations en espèces maternité		222 232		222 232	
Incapacité permanente AT + charges d'expertise + préjudice amiante			359 985	359 985	
Assurance Invalidité				388 382	
Assurance Décès				13 057	
TOTAL STATISTIQUE MENSUELLE DES DEPENSES	11 178 438	361 289	638 862	12 558 029	

Annexe 2 : Test de Dickey-Fuller augmenté - principe²¹

Les tests de Dickey-Fuller simples peuvent être regroupés en différents types de modèles :

- Modèle AR (1) : $(1 - \Phi_1 L)X_t = \varepsilon_t$: sous $H_0 : \Phi_1 = 1$
- Modèle AR (1) avec constante : $(1 - \Phi_1 L)(X_t - \mu) = \varepsilon_t$: sous $H_0 : \Phi_1 = 1$
- Modèle AR (1) avec tendance : $(1 - \Phi_1 L)(X_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$: sous $H_0 : \Phi_1 = 1$

avec ε_t i.i.d.

Le principe de ces tests est que si l'un des trois modèles est tel que $\Phi_1 = 1$, alors le polynôme d'opérateur du processus contient une racine unitaire, le processus est alors non stationnaire. Les tests de Dickey-Fuller testent donc l'hypothèse H_0 : le processus est non stationnaire contre l'hypothèse alternative de stationnarité du processus.

Pour chaque cas, Dickey et Fuller ont déterminé les statistiques des tests et les tables associées. Il convient de choisir l'alternative décrivant le mieux la série sous peine de voir l'hypothèse H_0 rejetée non pas parce qu'il n'y a pas de racine unité mais parce que le modèle est mal spécifié. Si l'estimation calculée de la statistique est supérieure à la valeur tabulée, on accepte H_0 , le processus n'est donc pas stationnaire. Sinon, on rejette H_0 et le processus est stationnaire.

Dans les modèles présentés pour les tests de Dickey-Fuller simples, il est supposé que le processus ε_t est un bruit blanc. Les tests de Dickey-Fuller augmentés ont été créés pour pouvoir traiter les cas où les résidus sont auto-corrélés. Le modèle de départ est alors transformé pour que les résidus forment un bruit blanc et que l'on puisse se ramener aux cas des tests de Dickey-Fuller simples.

²¹ Sources : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel**. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion*. Paris : DUNOD, 2008, 329 p. **CHARPENTIER Arthur**. *Cours de séries temporelles théorie et applications*.

Annexe 3 : Tests de Phillips-Perron - principe²²

Il s'agit de tests non paramétriques, introduits en 1988. Ils généralisent les tests de Dickey-Fuller simples en ne supposant plus que ε_t est un bruit blanc et en autorisant que ce processus soit autocorrélé. Le test de Phillips-Perron teste donc également l'hypothèse H_0 : le processus est non stationnaire contre l'hypothèse alternative de stationnarité du processus.

Le test se déroule en quatre étapes :

- Estimation par les moindres carrés ordinaires des modèles de base des tests de Dickey-Fuller et calcul des statistiques associées, soit $\hat{\varepsilon}_t$ le résidu estimé.
- Estimation de la variance des résidus $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.
- Estimation d'un facteur correctif qui intervient dans le calcul de la statistique du test.
- Calcul de la statistique de Phillips-Perron.

²² Sources : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel.** *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion.* Paris : DUNOD, 2008, 329 p. **CHARPENTIER Arthur.** *Cours de séries temporelles théorie et applications.*

Annexe 4 : Test KPSS - principe²³

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992) ont proposé un test d'hypothèse nulle, la stationnarité du processus. Après estimation des modèles 2 ou 3 définis précédemment, on calcule la somme partielle des résidus et l'on estime un facteur correctif comme dans le test de Phillips et Perron vu précédemment.

La statistique du test est alors calculée et comparée aux valeurs tabulées pour savoir si l'on rejette ou si l'on accepte l'hypothèse nulle.

²³ Sources : **BOURBONNAIS Régis**, **TERRAZA Michel**. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion*. Paris : DUNOD, 2008, 329 p. **CHARPENTIER Arthur**. *Cours de séries temporelles théorie et applications*.

Annexe 5 : Test des points tournants²⁴

Le test des points tournants est un test non paramétrique, il est donc valable quelle que soit la loi. Il teste l'hypothèse H_0 d'indépendance des observations contre l'hypothèse alternative de présence d'une tendance.

Soit une série X_t de longueur n .

Un point tournant est une observation telle que $(X_{t-1} < X_t \text{ et } X_t > X_{t+1})$ ou $(X_{t-1} > X_t \text{ et } X_t < X_{t+1})$. On définit les variables aléatoires U_i telles qu'elles valent 1 si le point est un point tournant et 0 sinon. Les U_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre $2/3$, la probabilité d'avoir un retournement en un point pour un bruit blanc. Soit $Z = \sum_{i=2}^{n-1} U_i$ le nombre de points tournants.

Z vérifie le théorème de la limite centrale, on a donc : $V = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{\text{Var}(Z)}} \rightarrow N(0,1)$.

Or, $E(Z) = (n-2) \cdot \frac{2}{3}$ et $\text{Var}(Z) = \frac{16n-29}{90}$,

D'où la statistique du test $V = \frac{Z - \frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$ qui est asymptotiquement gaussienne.

On rejette l'hypothèse H_0 au seuil de 5 % si $|V| > 1.96$. Dans ce cas, la série possède donc une tendance.

²⁴ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

Annexe 6 : Test du signe de la différence²⁵

Le test du signe de la différence est un indicateur de la présence d'une tendance. On teste l'hypothèse H_0 les X_i sont indépendants identiquement distribués contre l'hypothèse H_1 de la présence d'une tendance.

Soit les variables aléatoires U_i telles que $U_i = 1$ si $X_{i+1} > X_i$, $U_i = 0$ sinon. Sous H_0 les variables U_i suivent des lois de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus, $Var(U_i) = \frac{1}{4}$ et $Cov(U_i, U_{i+1}) = -\frac{1}{12}$.

Soit $C = \sum_{i=1}^n U_i$, on a alors par le théorème de la limite centrale, $W = \frac{C - \frac{n-1}{4}}{\frac{n+1}{12}} \rightarrow N(0,1)$.

On rejette l'hypothèse H_0 au seuil de 5 % si $|W| > 1.96$. Dans ce cas, la série possède donc une tendance.

²⁵ Source : MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

Annexe 7 : Caractéristiques des ACF et PACF des processus ARMA²⁶

Processus	ACF	PACF
AR(1)	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie.	Pic significatif pour le premier retard. Les autres coefficients sont nuls pour des retards > 1.
AR(2)	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie.	Pics significatifs pour le premier et second retard. Les autres coefficients sont nuls pour des retards > 2.
AR(p)	Décroissance exponentielle et/ou sinusoïdale rapide.	Pics significatifs pour les p premiers retards, les autres coefficients sont nuls pour des retards > p.
MA(1)	Pic significatif pour le premier retard. Les autres coefficients sont nuls pour des retards > 1.	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie.
MA(2)	Pics significatifs pour le premier et second retard. Les autres coefficients sont nuls pour des retards > 2.	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie.
MA(q)	Pics significatifs pour les q premiers retards, les autres coefficients sont nuls pour des retards > q.	Décroissance exponentielle et/ou sinusoïdale amortie.
ARMA(1,1)	Décroissance géométrique à partir du premier retard.	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie.
ARMA(p,q)	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie tronquée après (q-p) retards.	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie tronquée après p-q retards.

²⁶ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel**. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion*. Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

Annexe 8 : Tests de Box-Pierce et test de Ljung-Box²⁷

Notons $\hat{\rho}_k$ l'auto-corrélation empirique d'ordre k des résidus $(\varepsilon_t, t \in T)$. Pour un ordre K , le **test de Box-Pierce** est le test de l'hypothèse $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_K = 0$ c'est à dire les résidus forment un bruit blanc, contre $H_1 : \exists j \in [1, K]$ tel que $\rho_j \neq 0$.

Pour un processus ARMA (p, q) , la statistique de ce test est :

$$Q_{BP} = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(K - p - q).$$

L'hypothèse H_0 est rejetée au seuil de 5 % si Q_{BP} est supérieur au quantile à 95 % de la loi du Chi 2 correspondant.

Remarque : Pour effectuer ce test, il est conseillé de choisir K , le nombre de retards pour calculer les auto-corrélations, proche du tiers du nombre d'observations.

Le **test de Ljung-Box** correspond à l'hypothèse nulle $H_0 : \hat{\rho}_1 = \dots = \hat{\rho}_K = 0$ c'est-à-dire les auto-corrélations sont nulles de l'ordre 1 à k , avec la statistique suivante :

$$Q_K = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(K - p - q).$$

²⁷ Source : **BOURBONNAIS Régis, TERRAZA Michel**. *Analyse des séries temporelles, Applications à l'économie et à la gestion*. Paris : DUNOD, 2008, 329 p.

Annexe 9 : Test de Shapiro Wilk

Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire et (Y_1, \dots, Y_n) le vecteur ordonné associé. On teste $H_0 : X$ suit une loi normale contre $H_1 : X$ ne suit pas une loi normale.

Soit (U_1, \dots, U_n) des variables aléatoires i.i.d. et suivant une loi normale centrée réduite et (V_1, \dots, V_n) les statistiques d'ordre associées.

On définit $\mu = E \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}$ et la matrice variance-covariance des V_i $(a_1, \dots, a_n) = {}^t \mu \Sigma^{-1} ({}^t \mu \Sigma^{-2} \mu)^{-1/2}$.

Le test de Shapiro Wilk compare l'estimateur de la variance $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ à

l'estimateur de la variance sous H_0 $T_n = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n-i+1} (Y_{n-i+1} - Y_i) \right]^2$.

La statistique du test est $SW = \frac{T_n}{S_n^2}$. Le test de région de rejet $\{SW > k\}$ est de

sensibilité α avec k le $1 - \alpha$ quantile d'une loi SW.

Annexe 10 : Algorithme de Durbin-Levinson²⁸

Les projections peuvent être calculées récursivement par la formule $\hat{X}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \phi_{n,i} X_{n+1-i}$.

L'algorithme de Durbin-Levinson permet le calcul des coefficients $\phi_{n,i}$ et est donné par le théorème suivant.

Soit $(X_t, t \in T)$ un processus faiblement stationnaire et centré dont la fonction d'auto-covariance vérifie $\gamma(h) \rightarrow 0$. Les coefficients $\phi_{n,i}$ et l'erreur quadratique moyenne vérifient :

$$\begin{cases} \phi_{1,1} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \\ \phi_{n,n} = \left[\gamma(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{n-1,i} * \gamma(n-i) \right] * \frac{1}{\sigma_n^2} \text{ et } \begin{cases} \sigma_1^2 = \gamma(0) \\ \sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 [1 - \phi_{n,n}^2] \end{cases} \\ \phi_{n,i} = \phi_{n-1,i} - \phi_{n,n} * \phi_{n-1,n-i} \end{cases}$$

²⁸ MAUME DESCHAMPS Véronique. *Cours de Séries temporelles* 3^{ème} année ISFA, 2008-2009.

Annexe 11 : Filtre de Kalman et intervalles de prévision pour un processus SARIMA

Filtre de Kalman²⁹

Le filtre de Kalman est un modèle espace-état qui permet de réaliser des prédictions de façon récursive.

Un modèle **espace-état** est défini par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} Z_{t+1} = A_t Z_t + \varepsilon_t : \text{équation d'état} \\ Y_t = C_t Z_t + \eta_t : \text{équation de mesure} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \text{ un bruit blanc normal}$$

A_t et C_t déterministes et $Z_0 \sim N(m, p)$

Les variables peuvent être de dimension supérieure à 1. On note V la matrice de variance-covariance de $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix}$.

- (Z_t) est l'**état du système à la date t** et n'est pas observable,
- (Y_t) sont les **observations du système à la date t**, elles sont observables,
- (ε_t) sont les **innovations du système à la date t** et ne sont pas observables,
- (η_t) est le **bruit en t** et est inobservable,
- (A_t) est la **matrice de transition**,
- (C_t) est la **matrice de mesure**,
- $(C_t Z_t)$ est le **signal à la date t**.

Le filtre de Kalman permet de calculer la prévision de Z_t , ${}_t \hat{Z}_t = E[Z_t | Y_0, \dots, Y_t]$. On note :

$$\begin{cases} {}_t \Sigma_t = E[(Z_t - {}_t \hat{Z}_t)(Z_t - {}_t \hat{Z}_t)'] : \text{erreur quadratique du filtre sur } Z_t \text{ en } t \\ {}_{t-1} \hat{Z}_t = E[Z_t | Y_0, \dots, Y_{t-1}] : \text{prévision de } Z_t \text{ faite en } t-1 \\ {}_{t-1} \Sigma_t = E[(Z_t - {}_{t-1} \hat{Z}_t)(Z_t - {}_{t-1} \hat{Z}_t)'] : \text{erreur quadratique moyenne de prévision} \end{cases}$$

²⁹ Sources : **CHARPENTIER Arthur**. *Cours de séries temporelles théorie et applications*. **MADSEN Henrik**. *Time Series Analysis*. Chapman & Hall/CRC.

Dans le cas où les bruits (ε_t) et (η_t) ne sont pas corrélés, alors, pour tout t positif, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad {}_t\hat{Z}_t = {}_{t-1}\hat{Z}_t + K_t [Y_t - C_t * {}_{t-1}\hat{Z}_t] \\ \text{(b)} \quad {}_t\hat{Z}_{t+1} = A_t {}_t\hat{Z}_t \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \text{(a')} \quad {}_t\Sigma_t = [I - K_t C_t] {}_{t-1}\Sigma_t \\ \text{(b')} \quad {}_t\Sigma_{t+1} = A_t {}_t\Sigma_t A_t' + Q \end{array} \right.$$

Avec la matrice de gain du filtre à la date t définie par : $K_t = {}_{t-1}\Sigma_t * C_t' (C_t * {}_{t-1}\Sigma_t * C_t' + R)^{-1}$.

Soit ${}_{t-1}\hat{Y}_t = E[Y_t | Y_0, \dots, Y_{t-1}]$ et ${}_{t-1}M_t = V(Y_t - {}_{t-1}\hat{Y}_t)$, on peut alors déduire de ce qui précède les

formules de calcul de prévisions de la variable observée (Y_t) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{(c)} \quad {}_t\hat{Y}_{t+1} = C_{t+1} * {}_t\hat{Z}_{t+1} \\ \text{(c')} \quad {}_tM_{t+1} = C_{t+1} * {}_t\Sigma_{t+1} * C_{t+1}' \end{array} \right.$

On initialise le filtre avec ${}_{-1}\hat{Z}_0 = E(Z_0) = m$ et ${}_{-1}\hat{\Sigma}_0 = V(Z_0) = P$. On calcule ensuite de façon récursive les prédictions pour (Z_t) avec (a) et (a'), puis ${}_t\Sigma_t$ et ${}_t\hat{Y}_{t+1}$ à l'aide de (b), (b'), (c) et (c').

Exemple : écriture d'un processus ARMA (2,1) sous la forme d'un modèle espace-état.

Soit Y_t un processus défini par : $Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$ avec ε_t un bruit blanc.

Ce processus ARMA (2,1) peut se réécrire dans un espace état sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \end{pmatrix} \varepsilon_t \\ Y_t = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Intervalles de prévision

Soit un processus SARIMA (p,d,r,q) . On a $A(L)(1-L^r)(1-L)^d(X_t) = B(L)(\varepsilon_t)$, soit encore $(1+a_1L+\dots+a_pL^p)(1-L^r)(1-L)^d(X_t) = (1+b_1L+\dots+b_qL^q)(\varepsilon_t)$.

Les paramètres du modèle $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ sont estimés par maximum de vraisemblance ce qui nous permet de connaître également l'écart type de la valeur estimée de chaque paramètre.

Notons l'erreur de prévision mensuelle à l'horizon h $e_t(h) = X_{t+h} - \hat{X}_t(h)$. On peut exprimer par ailleurs le processus sous sa forme moyenne mobile infinie $X_t = \Psi(L)\varepsilon_t$ avec

$$\Psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j L^j \text{ et } \Psi_0 = 1.$$

Or, d'après l'expression initiale du processus on a $X_t = \frac{(1+b_1L+\dots+b_qL^q)(\varepsilon_t)}{(1+a_1L+\dots+a_pL^p)(1-L^r)(1-L)^d}$ ce

qui nous permet d'exprimer les paramètres de la forme moyenne mobile infinie en fonction de ceux du modèle SARIMA. Il faut résoudre pour cela l'équation suivante :

$$(1+b_1L+\dots+b_qL^q) = (1+a_1L+\dots+a_pL^p)(1-L^r)(1-L)^d(1+\Psi_1L+\Psi_2L^2+\dots)$$

Pour le modèle moyenne mobile infinie, la prévision à horizon h au sens des moindres carrés

s'exprime $\hat{X}_t(h) = \sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j}$, s'en suit l'expression de l'erreur de prévision

$e_t(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j}$. Celle-ci est essentiellement constituée de bruits blancs de moyenne nulle

et de variance σ_ε^2 . Or, les bruits blancs sont non corrélés, la variance de l'erreur de prévision

$$\text{s'écrit donc } \sigma_{e_t(h)}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j^2.$$

En remplaçant les coefficients du modèle moyenne mobile infinie par leurs expressions en fonction des paramètres du modèle SARIMA, on obtient des expressions pour la variance de l'erreur de prévision en fonction des paramètres du modèle SARIMA.

Ceux-ci ayant été estimés par maximum de vraisemblance, les erreurs de prévisions mensuelles $e_t(h)$ sont supposées de distribution asymptotiquement normale, de moyenne nulle et de variance $\sigma_{e_t(h)}^2$.

On obtient alors l'intervalle de prévision mensuelle au niveau $1-\alpha$:

$$\left[\hat{X}_t(h) - u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon_t(h)}; \hat{X}_t(h) + u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon_t(h)} \right] \text{ avec } u_{1-\alpha/2} \text{ le } 1-\alpha/2 \text{ quantile d'une loi } N(0,1).$$

Annexe 12 : Preuves des formules de reconstitution des projections de la série de départ

Preuve expression 1.4.3.

On souhaite montrer que la formule de reconstitution pour la série de départ à partir de la série

différenciée est la suivante : $\hat{X}_t = X_1 + \sum_{i=2}^t \hat{Y}_i$

$$\text{On sait que } \begin{cases} \hat{Y}_t = \hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} \\ \hat{Y}_{t-1} = \hat{X}_{t-1} - \hat{X}_{t-2} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \hat{X}_{t-1} = \hat{Y}_{t-1} + \hat{X}_{t-2} \\ \hat{X}_t = \hat{Y}_t + \hat{Y}_{t-1} + \hat{X}_{t-2} \end{cases} .$$

En raisonnant par récurrence, on obtient $\hat{X}_t = X_1 + \sum_{i=2}^t \hat{Y}_i$.

Preuve expression 1.4.4.

On souhaite montrer que la formule de reconstitution pour la série de départ à partir de la série

différenciée et désaisonnalisée est la suivante : $\hat{X}_t = Z_t + \dots + Z_{14} + X_{13} + X_4 - X_1$

$$\text{On sait que } \hat{Z}_t = \Delta_{12} \Delta^1 \hat{X}_t = \Delta_{12} (\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1}), \text{ soit } \begin{cases} \hat{Z}_t = \hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} - \hat{X}_{t-12} + \hat{X}_{t-13} \\ \hat{Z}_{t-1} = \hat{X}_{t-1} - \hat{X}_{t-2} - \hat{X}_{t-13} + \hat{X}_{t-14} \end{cases} .$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \hat{X}_{t-1} - \hat{X}_{t-13} = \hat{Z}_{t-1} + \hat{X}_{t-2} - \hat{X}_{t-14} \\ \hat{X}_t = \hat{Z}_t + \hat{Z}_{t-1} + \hat{X}_{t-2} - \hat{X}_{t-14} + \hat{X}_{t-12} \end{cases} .$$

Le premier terme défini pour la série différenciée et désaisonnalisée est

$Z_{14} = X_{14} - X_2 - X_{13} + X_1$, on obtient en raisonnant par récurrence le résultat

$$\hat{X}_t = Z_t + \dots + Z_{14} + X_{13} + X_4 - X_1 .$$

Annexe 13 : Tableau récapitulatif pour le choix de modèle ARMA partie 2.3.1.

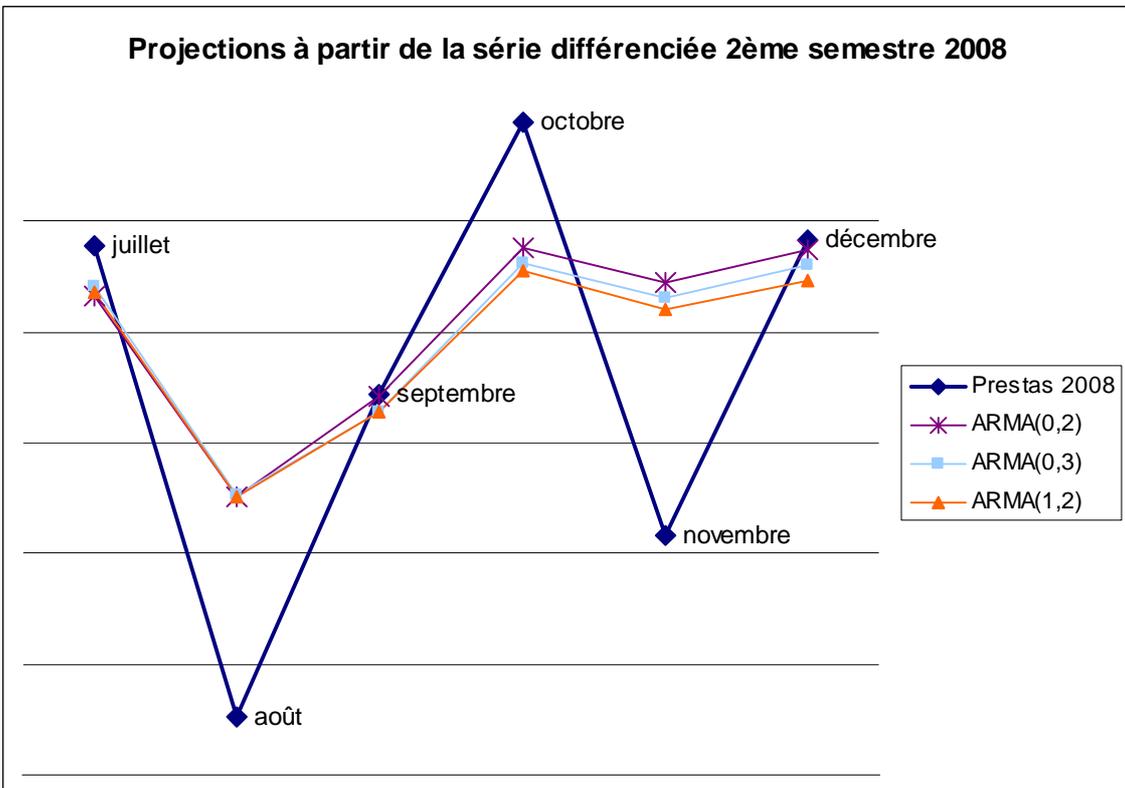
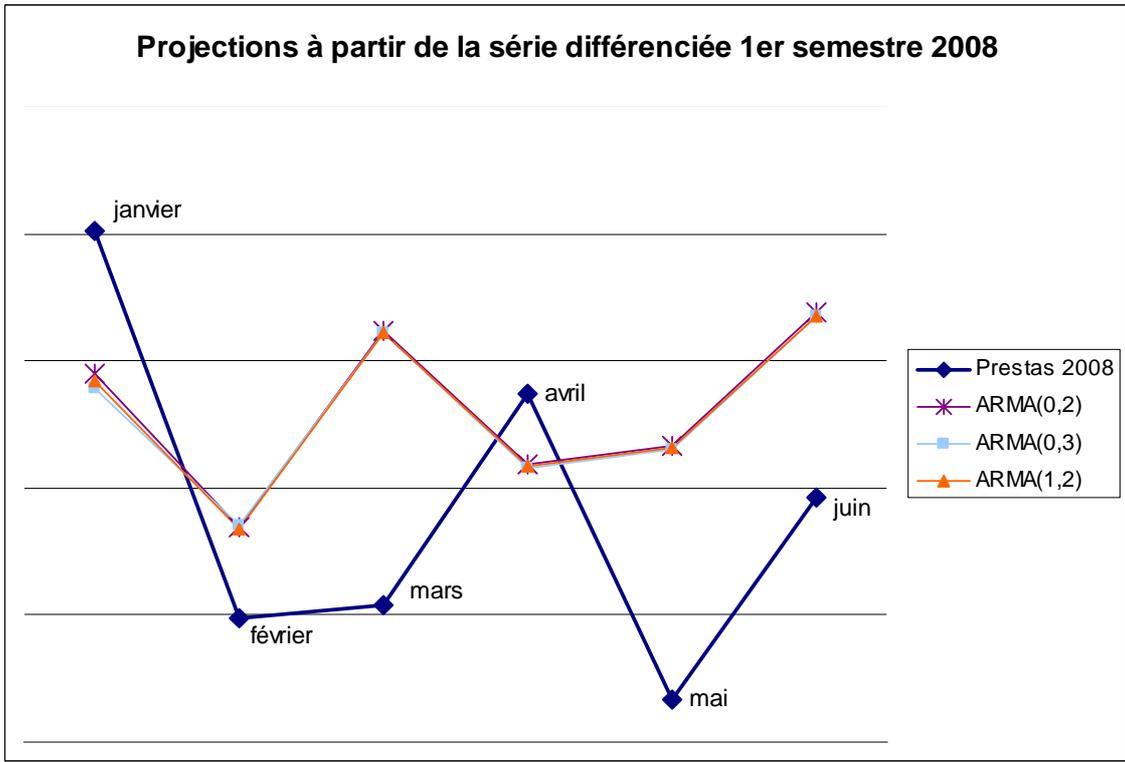
p	q	p-value test de Box-Pierce	Blancheur des résidus	p-value test de Shapiro	AIC	SC	BIC
0	0	0.3605	Non				
0	1	0.9576	Oui	0.2795	3814.72	3817,60	3818,60
0	2	0.7871	Oui				
0	3	0.901	Oui	0.267	3812.01	3820,66	3822,53
1	0	0.9799	Oui	0.3061	3814.65	3817,53	3818,53
1	1	0.9811	Oui	0.3160	3816.64	3822,41	3823,70
1	2	0.8275	Oui	0.5507	3810.88	3819,53	3821,40
1	3	0.9433	Oui	0.2786	3813.36	3824,89	3827,44
2	0	0.9373	Oui	0.3768	3816.57	3822,34	3823,63
2	1	0.7437	Oui				
2	2	0.2057	Non				
2	3	0.9423	Oui	0.3711	3811.65	3826,06	3829,36
3	0	0.7891	Oui				
3	1	0.9728	Oui	0.3966	3807.88	3819,41	3821,96

Les modèles qui apparaissent en couleur foncé sont les premiers à être éliminés dans la mesure où le test de Box-Pierce pour la blancheur des résidus n'est pas concluant. Ceux qui sont de couleur claire sont éliminés suite à l'observation des critères de choix de modèle que l'on cherche à minimiser.

Annexe 14 : Tableau récapitulatif pour le choix de modèle ARMA partie 2.3.2.

p	q	p-value du test de Box-Pierce	Blancheur des résidus	p-value du test de Shapiro	AIC	SC	BIC
0	0	3.867e-10	Non				
0	1	0.07584	Non				
0	2	0.8594	Oui	0.6774	3787.79	3793,54	3794,83
0	3	0.8966	Oui	0.4651	3788.59	3797,22	3799,08
1	0	0.000865	Non				
1	1	0.7322	Oui				
1	2	0.9623	Oui	0.5237	3788.88	3797,51	3799,37
1	3	0.9183	Oui	0.5008	3788.64	3800,14	3802,69
2	0	0.6217	Oui				
2	1	0.7847	Oui				
2	2	0.817	Oui	0.565	3786.16	3797,66	3800,21

Annexe 15 : Graphiques des projections à partir de la série différenciée sur différentes zones de test



Annexe 16 : Tableau récapitulatif pour le choix de modèle ARMA partie 2.3.2.

p	q	p-value du Box.test	Blancheur des résidus	p-value shapiro	Log vrais	$\hat{\sigma}^2$	AIC	SC	BIC
0	0	1.764e-08	Non						
0	1	0.3177	Non						
0	2	0.9635	Oui	0.1371	-1757.16	3.863e+11	3522.33	3527,89	3529,18
0	3	0.9424	Oui	0.05339					
1	0	0.01258	Non						
1	1	0.8459	Oui	0.1156	-1757.35	3.874e+11	3522.7	3528,26	3529,55
1	2	0.8956	Oui	0.1195	-1756.48	3.821e+11	3522.95	3531,29	3533,15
1	3	0.9967	Oui	0.09187	-1754.93	3.660e+11	3521.86	3532,98	3535,52
2	0	0.3728	Non						
2	1	0.962	Oui	0.08257	-1756.69	3.833e+11	3523.38	3531,72	3533,58
2	2	0.9486	Oui	0.06285	-1756.39	3.813e+11	3524.78	3535,90	3538,44
2	3	0.9577	Oui	0.09912	-1754.48	3.636e+11	3522.96	3536,86	3540,14

Annexe 17 : Graphiques des projections à partir de la série différenciée et désaisonnalisée sur les différentes zones de test

