



Mémoire présenté devant l'ENSAE  
pour l'obtention du diplôme  
*de la filière Actuariat*  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

le \_\_\_\_\_

Par : \_\_\_\_\_ Marie-Pierre Giroux

Titre: **Modélisation d'un Générateur de Scénarios Economiques**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Membre présent du jury de l'Institut  
des Actuaires

signature

Entreprise :

Nom : PricewaterhouseCoopers

Signature :

Membres présents du jury *de la filière*

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Gueorgui Nedev

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de**

**diffusion de documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :



# Remerciements

Je remercie toute l'équipe RMS, "Risk Measurement Services" de PricewaterhouseCoopers pour l'aide et le soutien que j'ai reçus durant mon stage.

Je remercie tout particulièrement Gueorgui Nedev, auprès duquel j'ai beaucoup appris et dont les conseils avisés et les critiques constructives m'ont permis de mener à bien ce projet.



# Note de synthèse

L'équipe "Risk Measurement Services" de PricewaterhouseCoopers accompagne les grands établissements financiers, banques et sociétés d'assurance, dans la mesure et le pilotage des risques et de la performance, notamment dans le domaine des activités de marché. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce mémoire.

La modélisation de l'actif étant une importante problématique chez les organismes assureurs et réassureurs, la demande concernant la génération stochastique de scénarios économiques est forte. En effet, la mise en place de Solvabilité II, qui entrera en vigueur au 1er janvier 2013, pousse les assureurs à se tourner de plus en plus vers le développement interne de ce type d'outil afin de respecter les exigences en capitaux propres tout tenant en compte des risques inhérents à leurs activités. Ainsi, les Générateurs de Scénarios Economiques, ou ESG selon l'acronyme anglo-saxon, s'avèrent des outils de gestion des risques qui permettent d'intégrer les facteurs impactant la rentabilité et la stabilité d'un assureur, comme l'allocation des capitaux, la tarification ou encore le provisionnement. En raison de l'inversion du cycle de production, l'actif des bilans assurantiels est principalement composé de placements en actions, en obligations et en investissements immobiliers. Dans ce contexte, le générateur mis en place au sein de PwC contient des indicateurs tels que les taux d'intérêt, le rendement des actions, l'inflation ou encore le taux de change. La récente crise financière a mis en avant les insuffisances de certains générateurs existants, notamment en terme de survenance d'événements extrêmes et de structure de dépendance dans les queues de distributions. Notre travail cherche à réduire ces limites.

L'objet de notre ESG est de générer divers scénarios économiques probables afin de constater les réactions d'un bilan à ces différentes situations. L'approche utilisée est une méthode de *Bootstrapping*. Il s'agit d'une technique non paramétrique consistant à constituer des échantillons, pour l'ensemble des variables composant le modèle, à partir des données historiques observées. Un scénario se forme à l'aide de tirages aléatoires des *innovations* d'actifs déjà observées par le passé et appliquées à des dates futures. Le *Bootstrapping* présente l'avantage de capter directement les corrélations entre les variables de notre modèle, mais dépend des historiques disponibles. Nous choisissons de modéliser les grandeurs suivantes :

- Le taux d'inflation,
- Les taux d'intérêt nominaux : un court terme (1 an) et un long terme (10 ans),
- Les actions,
- L'immobilier,
- Le taux de change,
- Le spread de crédit.

Nous disposons des historiques de 1990 à 2010 en fréquence mensuelle, soit 252 observations pour chaque variable. Cela semble suffisant pour appliquer la technique du *Bootstrapping*.

Supposons que ces variables subissent des variations à la hausse ou à la baisse en fonction de la survenance d'informations financières. L'idée sous-jacente de notre ESG est de considérer que ces dernières tombent aléatoirement et non de manière déterministe, par exemple tous les mois ou encore tous les trimestres. Nous combinons alors la technique de *Bootstrapping* à des processus aléatoires indexés par un temps stochastique. Nous mettons pour cela en place une montre indiquant une autre échelle de temps à

l'aide d'un processus stochastique Gamma. En fonction du paramètre choisi pour ce dernier, la montre, dite montre Gamma, marquera plus ou moins d'arrêts. Plus ce paramètre est petit, plus la fréquence des sauts subit par le processus est importante. A l'inverse, plus il est grand, plus nous approchons une montre classique. Ce dernier est au choix de l'utilisateur du générateur.

Ce procédé nécessite néanmoins certaines améliorations, en particulier en ce qui concerne la dynamique des taux et la prise en compte des queues épaisses de distributions. En effet, les taux d'intérêt et l'inflation présentent un phénomène de retour à la moyenne : ils ne peuvent atteindre des valeurs ni trop élevées ni trop basses. Nous utilisons notamment les dynamiques d'Ornstein Uhlenbeck pour l'inflation et de Cox-Ingersoll-Ross pour les taux d'intérêt nominaux. Un facteur de volatilité stochastique est également intégré dans la diffusion des indices actions, afin que ces derniers dépendent d'une volatilité non constante dans le temps.

Les premiers résultats obtenus sont encourageants. En effet, ils répondent à nos objectifs à plusieurs points de vue. Par la projection à pas de temps trimestriels de nos variables financières et macroéconomiques à horizon 5 ans, l'utilisation d'une montre aléatoire permet d'obtenir des valeurs extrêmes plus élevées en valeur absolue qu'une montre classique (ou montre astronomique). De plus, l'estimation de l'ensemble des densités à horizon 1 an montre une plus grande survenance d'événements extrêmes, notamment dans les queues basses de distribution. Nous constatons également une relative bonne conservation des corrélations dans le temps quelque soit la montre utilisée. L'analyse des corrélations implicites entre deux indices actions, le Dax et le Dow Jones, met en avant un résultat très intéressant : plus le paramètre de la montre Gamma est petit, plus la corrélation dans les queues de distributions est importante. Cela répond bien au principe mis en évidence dans les travaux de Login et Solnik [2007] : le coefficient de corrélation et donc la dépendance entre les indices boursiers est d'autant plus forte que le marché est agité.

Si ces travaux nécessitent encore quelques développements, notamment à travers l'amélioration de la prise en compte du risque de crédit ou du risque de liquidité ; les résultats obtenus semblent concluants et nous encouragent à continuer dans cette voie.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Gestion des risques et scénarios économiques en assurance</b>	<b>11</b>
<b>1 Les évolutions prudentielles en assurance</b>	<b>13</b>
1.1 Nécessité d'un cadre réglementaire . . . . .	13
1.2 De Solvabilité I à Solvabilité II : vers une approche dynamique de la gestion des risques . . . . .	16
<b>2 Les enjeux de la gestion actif-passif en assurance</b>	<b>23</b>
2.1 Le rôle de la gestion actif-passif . . . . .	23
2.2 Les risques sous-tendant les éléments du bilan . . . . .	23
<b>3 La génération de scénarios économiques en assurance</b>	<b>25</b>
3.1 Présentation générale . . . . .	25
3.2 Utilité d'un générateur en assurance . . . . .	26
<b>II Présentation et mise en oeuvre du Générateur de Scénarios Economiques</b>	<b>29</b>
<b>1 Structures de dépendance et modèles de référence</b>	<b>31</b>
1.1 Modèle composite et modèle intégré . . . . .	31
1.2 Exemples de modèles . . . . .	31
<b>2 Choix des variables du modèle</b>	<b>37</b>
2.1 Les actions . . . . .	37
2.2 Le taux d'inflation . . . . .	38
2.3 Les taux d'intérêts . . . . .	39
2.4 Le risque de crédit . . . . .	40
2.5 L'immobilier . . . . .	40
2.6 Le taux de change . . . . .	41
<b>3 Principe de base du générateur</b>	<b>43</b>
3.1 Méthode de Monte-Carlo . . . . .	43
3.2 Structure schématique de projection des scénarios . . . . .	43
3.3 Structure de dépendance et méthodologie pour la génération des scénarios . . . . .	44
3.4 Introduction d'un temps stochastique . . . . .	45

<b>III</b>	<b>La méthode du <i>Bootstrapping</i> appliquée aux différentes variables</b>	<b>49</b>
<b>1</b>	<b>Processus de Lévy et subordination</b>	<b>51</b>
1.1	Présentation générale et propriétés mathématiques . . . . .	51
1.2	Les processus subordonnés . . . . .	52
1.3	Le processus Variance Gamma . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Le risque action</b>	<b>55</b>
2.1	Le modèle action . . . . .	55
2.2	Introduction d'une volatilité stochastique . . . . .	57
2.3	<i>Bootstrapping</i> et modèle Variance Gamma . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Le risque d'inflation</b>	<b>63</b>
3.1	Les modèles à un facteur . . . . .	63
3.2	<i>Bootstrapping</i> et modèle de Vasicek . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Le risque de taux</b>	<b>69</b>
4.1	Les modèles multifactoriels . . . . .	69
4.2	<i>Bootstrapping</i> et modèles à deux facteurs . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Les autres risques : crédit, immobilier et change</b>	<b>77</b>
5.1	Le risque de crédit . . . . .	77
5.2	Le risque immobilier et le risque de change . . . . .	79
<b>IV</b>	<b>Application numérique : la génération de scénarios économiques à horizon moyen terme</b>	<b>83</b>
<b>1</b>	<b>Analyse descriptive des historiques</b>	<b>85</b>
1.1	Statistiques descriptives . . . . .	85
1.2	Les corrélations historiques . . . . .	86
<b>2</b>	<b>La génération de scénarios économiques à horizon 5 ans</b>	<b>87</b>
2.1	Paramètres d'entrée . . . . .	87
2.2	Moments d'ordre 1 et 2 . . . . .	87
<b>3</b>	<b>Analyse des corrélations</b>	<b>89</b>
3.1	Stabilité des corrélations . . . . .	89
3.2	Analyse des corrélations implicites des indices actions . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Analyse des queues de distributions</b>	<b>95</b>
4.1	La Value-at-Risk (VaR) . . . . .	95
4.2	Estimations des densités . . . . .	99
	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>
	<b>Annexes</b>	<b>111</b>



# Introduction

La situation économique internationale a évolué en profondeur ces dernières années. Il convient alors de veiller à ce que le marché de l'assurance se dote d'une offre de qualité, fiable et compétitive. Dans un contexte de crise bancaire et de risque systématique, la mise en place de la directive Solvabilité II, votée en 2009, a pour objectif de mieux adapter les exigences en capital des organismes assureurs et réassureurs aux risques qu'ils encourent à travers le développement de modèles internes. Les compagnies d'assurance se tournent ainsi de plus en plus vers la génération aléatoire de scénarios économiques afin de mesurer les risques inhérents à leurs activités et développer leurs réflexions autour de l'actif. En effet, les générateurs permettent de projeter des grandeurs financières et macroéconomiques sur un horizon d'intérêt afin de décrire les états du monde plus ou moins probables vers lesquels l'économie pourrait aboutir. Ces modèles d'actifs s'avèrent être des outils d'aide à la décision indispensables dans le cadre de la modélisation en gestion actif passif ou de l'évaluation des sociétés d'assurance vie.

La littérature traitant la génération stochastique de scénarios économiques est conséquente. Cependant, la crise financière et économique de 2007 a remis en cause de nombreux modèles mathématiques en finance. En effet, les récents événements du marché ont permis de constater les insuffisances de la modélisation en gestion des risques et des générateurs existants. Leurs limites concernent principalement le manque de prise en considération du risque de liquidité, du risque de crédit et d'une structure de dépendance adéquate. En théorie, la corrélation est d'autant plus forte que le marché est agité ; il s'agit alors de mieux tenir compte des dépendances extrêmes. Il faut alors envisager une modélisation plus efficace qui incorpore mieux les subtilités du marché, notamment concernant le crédit et les corrélations dans les queues épaisses de distribution. C'est dans ce cadre que s'inscrit le Générateur de Scénarios Economiques (ESG) mis en place au sein de PricewaterhouseCoopers.

L'objectif de cette étude est donc de représenter l'économie à l'aide de certaines variables fondamentales et de diffuser sur un horizon d'intérêt ces grandeurs en tenant compte de leurs dépendances, notamment lors de la survenance d'événements extrêmes. Nous souhaitons établir l'ensemble des distributions des variables composants le modèle et non en faire une prévision exacte. L'intuition de ce modèle est de faire l'hypothèse que les grandeurs économiques et financières choisies subissent des mouvements à la hausse ou à la baisse lors de la diffusion d'informations financières qui a lieu de manière aléatoire et non déterministe. Nous utiliserons pour cela une méthode de *Bootstrapping* que nous combinerons à des processus aléatoires indexés par un temps stochastique. Au-delà de reproduire des phénomènes déjà constatés par le passé, il est important d'introduire des événements extrêmes non encore observés. Le choix des variables, ainsi que la mise en oeuvre du modèle dépend principalement de la finalité du générateur. Dans ce contexte, nous allons tenir compte des principales variables impactants les comptes d'un organisme assureur comme par exemple l'inflation, les taux d'intérêts ou encore la performance des actions.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux évolutions réglementaires et aux apports de scénarios économiques en assurance, puis au principe de base du générateur et à l'introduction d'un temps stochastique. Nous développerons ensuite les améliorations à apporter au modèle initial pour intégrer des notions comme le retour à la moyenne ou la volatilité stochastique. Enfin, nous nous attarderons sur une appli-

cation numérique à horizon moyen terme de notre ESG.

Première partie

**Gestion des risques et scénarios  
économiques en assurance**



# Chapitre 1

## Les évolutions prudentielles en assurance

### 1.1 Nécessité d'un cadre réglementaire

#### 1.1.1 Le rôle de l'assurance dans l'économie

##### Généralités

Un **contrat d'assurance** est un contrat par lequel un assuré paye une prime pour se prémunir contre un risque. L'assurance répond donc à un besoin de l'homme de se prémunir contre l'aléa de la survenance de sinistres, que cela concerne la protection des patrimoines ou la protection des personnes. Le risque, auparavant supporté par une société ou un individu seul est transféré à une société d'assurance capable de le gérer. En effet, le regroupement des risques au sein d'une société d'assurance permet à celle-ci de les supporter. Il s'agit du phénomène de **mutualisation des risques**. Le transfert des risques favorise donc les initiatives économiques.

##### L'inversion du cycle de production

Un bilan d'une société d'assurance est caractérisé par **l'inversion de son cycle de production**. Usuellement, une entreprise qui souhaite commercialiser un produit ou un service fixe son prix de vente en fonction du prix de revient, le chiffre d'affaire dépend alors du nombre de biens ou de services vendus. L'assurance est l'unique secteur économique où ce processus est inversé : la prime est encaissée avant le versement éventuel d'une indemnité. Autrement dit, une société d'assurance fixe *a priori* sa **prime** (prix de vente) et connaît son chiffre d'affaire avant de constater *a posteriori* le montant total des **sinistres survenus** (prix de revient). De plus, il existe un décalage entre la survenance d'un sinistre, générateur de versement et le paiement effectif de cette indemnité. Les primes vont alors être la résultante d'estimations statistiques des montants futurs de sinistres. L'assureur devant faire face à tout moment à ses engagements, il constitue des réserves, ou **provisions techniques** à partir des primes collectées. Les provisions permettent à la société d'assurance de régler les sinistres : ces dernières constituent une dette à l'égard de l'assuré. Il est important pour un assureur de ne pas sous-évaluer ces provisions au profit d'une hausse du résultat de l'entreprise. En effet, une telle politique pourrait amener un assureur à ne pas pouvoir faire face à ses engagements, ce qui mettrait en péril non seulement la continuité de la société mais également les intérêts des assurés. Dans l'intérêt des bénéficiaires, des assurés ainsi que des victimes, la capacité des sociétés d'assurance à faire face à leurs engagements doit ainsi être sujette à un contrôle. Selon le référentiel comptable français actuel, le bilan d'un assureur se présente schématiquement de la manière suivante :

ACTIF	PASSIF
Placements	Fonds propres
	Provisions Techniques
Contrats de réassurance	Dettes et autres passifs
Créances et autres actifs	

FIGURE 1.1 – Bilan simplifié en assurance

### L'assurance : un investisseur institutionnel

La conséquence principale de ce phénomène d'inversion du cycle de production est la suivante : une société d'assurance détient une masse de capitaux très importante, le patrimoine ne permettant pas de juger de la bonne gestion de l'assureur. Cela permet aux assureurs de placer les primes avant de régler l'éventuelle survenance de sinistres. **Les placements viennent en représentation des engagements** ; ces derniers dépendent de la nature et de la durée des contrats. Les montants placés par les sociétés d'assurance sont donc conséquents et souvent investis dans des obligations d'Etat, ou de très bonne qualité. Les assureurs jouent ainsi un rôle primordial dans l'économie : dans le cadre d'une économie de marché celui d'investisseur institutionnel.

En France, malgré la baisse des marchés boursiers en 2010, l'allocation d'actifs est restée favorable aux actifs d'entreprise, notamment à travers les actions, les obligations et l'immobilier. A la fin de l'année 2010, près de 1 000 milliards d'euros sont investis par les sociétés d'assurance dans les entreprises. Cette somme représente un peu plus de la moitié (56%) des actifs détenus par les sociétés d'assurance en France. Cette part est en progression par rapport aux années précédentes, avec 54% en 2009 et 51% en 2008. Notons que 285 milliards de cette somme est investie en actions, soit directement, soit par le biais de fonds. Les placements doivent être sûrs, liquides et rentables.

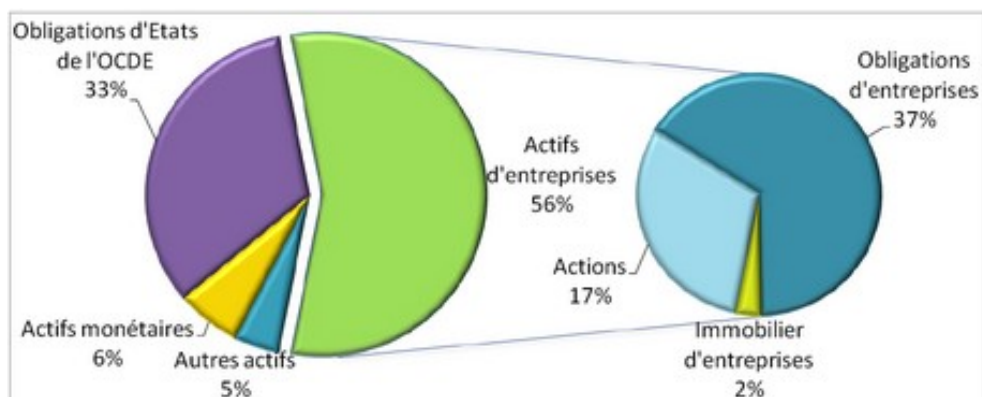


FIGURE 1.2 – Placements des sociétés d'assurance françaises en 2010

Par ailleurs, l'assurance vie est le premier investissement d'épargne longue en France, représentant 57% des placements à moyen et à long terme (se référer au schéma situé en **Annexe 1**).

En plus de fournir une protection aux assurés, les sociétés d'assurance réinjectent l'argent perçu des primes

sur les marchés financiers et dans l'économie. Il est alors extrêmement important que les réassureurs et les assureurs atteignent des objectifs de solvabilité et estiment prudemment leurs provisions techniques afin qu'à tout instant, ils puissent faire face à leurs engagements. Les compagnies d'assurance ont une importance non seulement économique, mais aussi sociale qui justifie la réglementation et le contrôle de ce secteur.

### 1.1.2 Réglementation et marché de l'assurance en France

#### Domaines et acteurs de l'assurance en France

Le **principe de spécialisation** dicte le principe de séparer les sociétés ayant une activité d'**assurance vie** des sociétés ayant une activité d'**assurance non vie**. Ce principe a pour motivation la différence des durées des engagements de ces deux activités. En effet, une société d'assurance vie a, de manière générale, des engagements de long terme quand une société d'assurance non vie a des engagements de court terme. Les engagements pris par l'assureur et le souscripteur dans le cadre d'un contrat d'assurance vie dépendent de la durée de vie humaine. L'Union Européenne applique le principe de spécialisation depuis 1976. Cependant, l'hypothèse prise sur la durée des engagements n'est vraie qu'en moyenne dans la mesure où, en France, les contrats garantissant le cas de décès de l'assuré sont d'une durée d'un an et que les contrats d'assurance construction comporte une garantie décennale. Le tableau ci-dessous résume de manière synthétique les spécificités des activités vie et non vie.

	ASSURANCE VIE	ASSURANCE NON VIE
<b>Prime</b>	Versement d'un capital au début du contrat, et versement libre au cours de la vie du contrat	Versement annuel d'une prime
<b>Principale provision technique</b>	Provisions mathématiques : engagements futurs envers l'assuré	Provisions pour sinistres à payer: évaluation des sinistres survenus (connus ou inconnus) à la date d'inventaire mais non encore payés
<b>Actifs</b>	Investissements en fonction de la nature et de la durée du produit d'assurance : actifs financiers, immobilier, non coté	
<b>Prestation</b>	A l'échéance du contrat (vie ou décès de l'assuré), versement d'un capital ou d'une rente	Remboursement des dommages couverts par l'assurance

TABLE 1.1 – Spécificités des activités vie et non vie

De plus, les opérations d'assurance sont regroupées en **25 branches** (se référer à l'**Annexe 2** pour un détail des différentes branches). Pour exercer dans une branche d'activité, une société d'assurance doit faire une **demande d'agrément** à l'Autorité de Contrôle Prudenciel. L'agrément s'effectue à "l'entrée de vie" d'une entreprise d'assurance. Sans ce dernier, elle ne peut exercer. L'agrément est accordé pour les opérations d'une ou plusieurs branches d'assurance. Les activités sont donc limitées aux branches pour laquelle elle a été agréée. Néanmoins, toute entreprise agréée pour un risque relatif à une branche d'assurance non vie peut éventuellement couvrir des risques relatifs à d'autres branches non vie (sauf branches 14,15 et 17), si ces derniers sont liés au risque principal. Le principe de spécialisation peut être également nuancé avec la création de **sociétés mixtes** qui s'avère être des sociétés opérant dans certaines branches d'assurance vie et qui peuvent couvrir des risques d'atteintes corporelles, de décès accidentels ou encore d'invalidité du à un accident ou une maladie.

Il existe différents types d'entreprises d'assurance en France :

- Les sociétés anonymes d'assurance régies par le Code des Assurance,
- Les sociétés d'assurance mutuelles régies par le Code des Assurance,
- Les mutuelles dites "Mutuelles 45" régies par le Code de la Mutualité,
- Les Instituts de prévoyance et caisses de retraite régis par le Code de la Sécurité Sociale.

A l'inverse des deux premières catégories, les deux dernières sont à but non-lucratif. Se référer à l' **Annexe 3** pour plus de détails.

### L'Autorité de Contrôle Prudentiel

Créée en 2010 à la suite de la réforme du système français de supervision, l'Autorité de Contrôle Prudentiel(ACP) est issue de la fusion de la Commission Bancaire (CB), de l'Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles (ACAM), du Comité des Entreprises d'Assurance (CEA) et du Comité des Etablissements de Crédit et des Entreprises d'Investissement (CECEI). L'ACP est une autorité indépendante. Cette dernière est en charge de surveiller l'activité des banques et des sociétés d'assurance en France, en s'assurant du respect des dispositifs législatifs et réglementaires. Plus précisément, l'ACP a pour mission de *"veiller à la préservation de la stabilité du système financier et à la protection des clients, assurés, adhérents et bénéficiaires des personnes soumises à son contrôle"* (art . L612-1 du Code Monétaire et Financier, CMF). Elle contrôle les sociétés d'assurance, les mutuelles et les instituts de prévoyance à l'entrée et en cours de vie. Elle cherche également à renforcer l'influence de la France dans les négociations internationales sur la réforme de la régularisation financière.

L'ACP est une entité adossée à la Banque de France permettant de garantir la stabilité du système financier. En effet, La Banque de France profite de l'expertise de la Banque Centrale. L'ACP est donc composée d'un collège présidé par le gouverneur de la Banque de France. A cela s'ajoute deux sous-collèges sectoriels séparant ainsi les métiers de la banque et les métiers de l'assurance, ces derniers ayant des spécificités propres à chacun des deux secteurs. Il existe également une commission de sanction. Nous pourrions retrouver sa composition détaillée en **Annexe 4**.

## 1.2 De Solvabilité I à Solvabilité II : vers une approche dynamique de la gestion des risques

La **solvabilité** en assurance correspond à la capacité d'un assureur à faire face à tout moment à ses engagements vis-à-vis des assurés, et de manière plus générale vis-à-vis des créanciers. Bien qu'évaluées de manière prudente, les provisions techniques sont estimées grâce à des méthodes statistiques et actuarielles. Cela ne garantit pas qu'elles soient suffisantes : une marge de solvabilité doit être mise en place. La mesure de la solvabilité dépend avant tout du mode d'évaluation du passif et de l'actif.

### 1.2.1 Les limites de Solvabilité I

Le système prudentiel actuel Solvabilité I répond à un objectif : les sociétés d'assurance doivent rester en mesure d'honorer ses engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrat ainsi que des victimes. Cette directive, datant de 1973, se caractérise autour de trois axes :

- Evaluer prudemment les **provisions techniques** en brut de réassurance,
- Les **placements** doivent être des actifs de qualité avec des contraintes de nature, d'émetteur et de devise,
- Mise en place d'une marge de solvabilité : l'**exigence de marge de solvabilité**. La méthode de calcul du minimum réglementaire avec Solvabilité I dépend de l'activité de la société d'assurance, à savoir s'il s'agit d'une société d'assurance vie ou non vie et dépend du recours à la réassurance. En assurance non-vie, l'évaluation dépend des primes encaissées et des sinistres payés quand il est



fonction des provisions mathématiques en assurance vie.

Aujourd'hui, cette directive s'avère dépassée à plusieurs points de vue. Au **manque d'harmonisation des normes et des pratiques au niveau européen** s'ajoute le manque de flexibilité de Solvabilité I par rapport aux développements internationaux. De plus, il s'agit d'**exigences principalement quantitatives**. Le calcul de l'exigence de marge de solvabilité en France ne reflète pas le risque supporté par l'assureur. Un des principaux manques est le calcul des exigences s'avérant peu analytique. En effet, l'exigence minimal de solvabilité est calculée de manière forfaitaire, plus précisément en proportion du chiffre d'affaire d'une branche et ne tient ainsi pas compte des spécificités de chaque entreprise. L'autre limite est la **non responsabilisation des entreprises vis-à-vis des risques**. L'exigence en capital ne permet pas de combattre les risques à la source à l'aide d'une organisation adéquate et de la diversification du portefeuille. Les conséquences sont alors multiples : l'absence de réglementation permet aux entreprises de pouvoir adopter un comportement risqué, pour prendre par exemple un avantage concurrentiel, qui peut directement se répercuter sur le client. Citons une proposition du Parlement Européen et du Conseil : *"Assureurs et réassureurs doivent remplir un certains nombres d'exigences de solvabilité pour être en mesure de tenir leurs promesses aux preneurs. Les règles actuelles sont dépassées. Elles ne sont pas sensibles au risque, laissent trop de place aux variantes nationales dans les Etats membres, ne traitent pas du contrôle de groupe et ont été supplantées par l'évolution intervenue dans la branche ainsi qu'au niveau transsectoriel et international."*

En conséquence, afin de garantir aux clients la solvabilité à long terme de la compagnie qui les assure et de compenser les insuffisances de plus en plus marquées de Solvabilité I, la Commission Européenne a cherché à mettre à jour le système de solvabilité européen à travers l'élaboration du projet Solvabilité II.

### 1.2.2 Solvabilité II et son approche autour de trois piliers

Solvabilité II est une réforme engagée au niveau européen du système prudentiel qui a vocation, là où Solvabilité I est bâtie sur des règles simples, d'aller plus loin dans l'évaluation du risque d'une société d'assurance. Il s'agit alors de passer d'une vision macro à un système analytique en décomposant et en évaluant les différents risques. Ce projet, dont un des objectifs est l'harmonisation des règles de solvabilité au niveau européen, se base sur les nouvelles normes comptables IFRS et notamment sur la norme IFRS 4. De plus, cette directive va concerner l'ensemble de l'industrie de l'assurance en y incluant la réassurance non comprise dans Solvabilité I. Solvabilité II va responsabiliser les sociétés d'assurance en les incitant à mieux gérer les risques à travers le développement de modèles internes. En plus d'exigences quantitatives, elle intègre également des éléments qualitatifs à travers une meilleure gouvernance des risques. A l'image de Bâle II pour les banques, Solvabilité II repose sur trois piliers représentés schématiquement de la manière suivante :

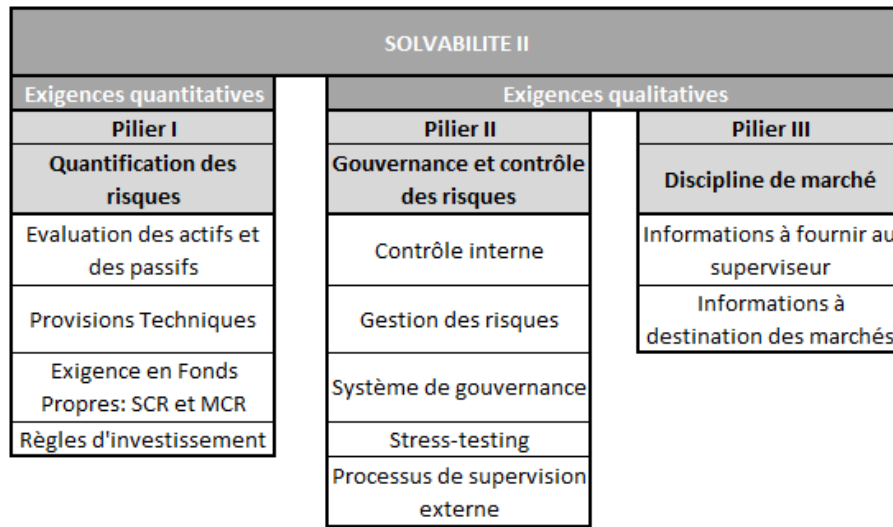


FIGURE 1.3 – Les trois piliers de Solvabilité II

**Les exigences quantitatives du Pilier I**

Il existe deux niveaux d'exigence de capital : le **capital minimum requis** (MCR) et le **capital de solvabilité requis** (SCR). Le SCR correspond au capital requis pour ne pas être en ruine à horizon 1 an avec une probabilité de 99,5%, soit une ruine tous les 200 ans. Il permet d'absorber les pertes imprévues. Sa fréquence de calcul est annuelle avec notification du résultat aux autorités. Deux modes de calcul sont possibles : la **formule standard** ou le développement d'un **modèle interne** partiel ou intégral. Le calcul du SCR par la formule standard se fait par l'agrégation d'un calcul de capital pour chaque risque. Le schéma suivant illustre cette **approche modulaire**, qui peut éventuellement prendre en compte les effets de diversification à l'aide d'une matrice de corrélations :

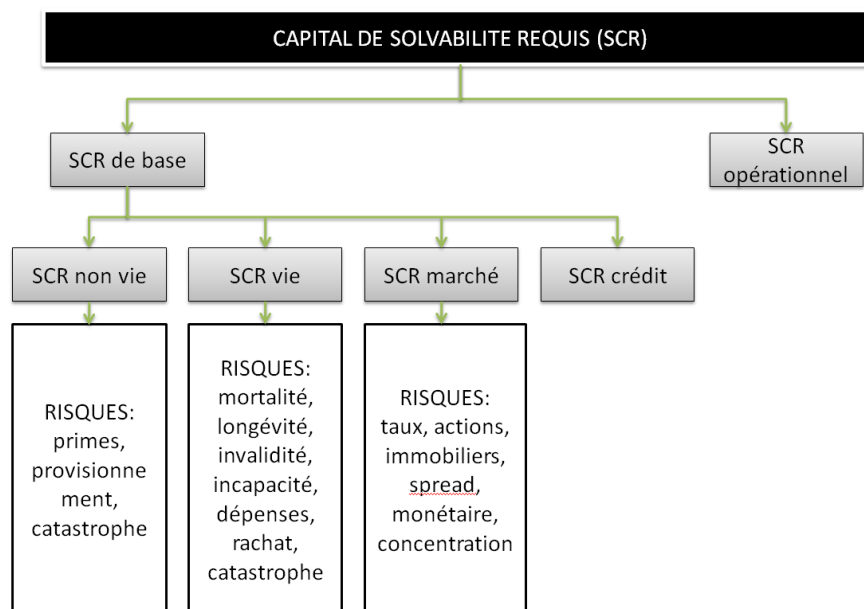


FIGURE 1.4 – Approche modulaire de la formule standard dans le calcul du SCR

Le MCR correspond au capital nécessaire pour ne pas être en ruine à horizon 1 an avec une probabilité aux environs de 80%. La fréquence de calcul est trimestrielle, avec soumission du montant aux autorités de contrôle. La méthode de calcul du MCR s'effectue à l'aide d'un pourcentage du SCR. Si ce ratio n'est pas respecté, il y a retrait d'agrément. Le seuil minimum en assurance vie est de 2 millions d'euros contre 1 millions en assurance non vie. Notons que ces montants fixes défavorisent les petites structures.

L'évaluation des actifs et des passifs d'assurance et de réassurance se font à leur **juste valeur**. La juste valeur se définit comme *"le montant pour lequel un actif ou un passif peut être échangé entre deux parties informées et consentantes, dans des conditions normales de concurrence"*. Les provisions techniques sont ainsi calculées en approchant au mieux les données historiques et en prenant en compte les valeurs de marché pour les éléments qui le permettent. *"La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente."* Le calcul est basé sur une approche économique et ajoute une **marge de prudence** à cette évaluation en *"Best Estimate"*. La marge de sécurité permet de s'assurer que 75% des sinistres seront inférieurs au montant qui leur sont alloués. De plus, Solvabilité II définit les actifs éligibles au titre de fonds propres et classe les actifs en différentes qualités. Le schéma suivant illustre les grandes lignes du Pilier I :

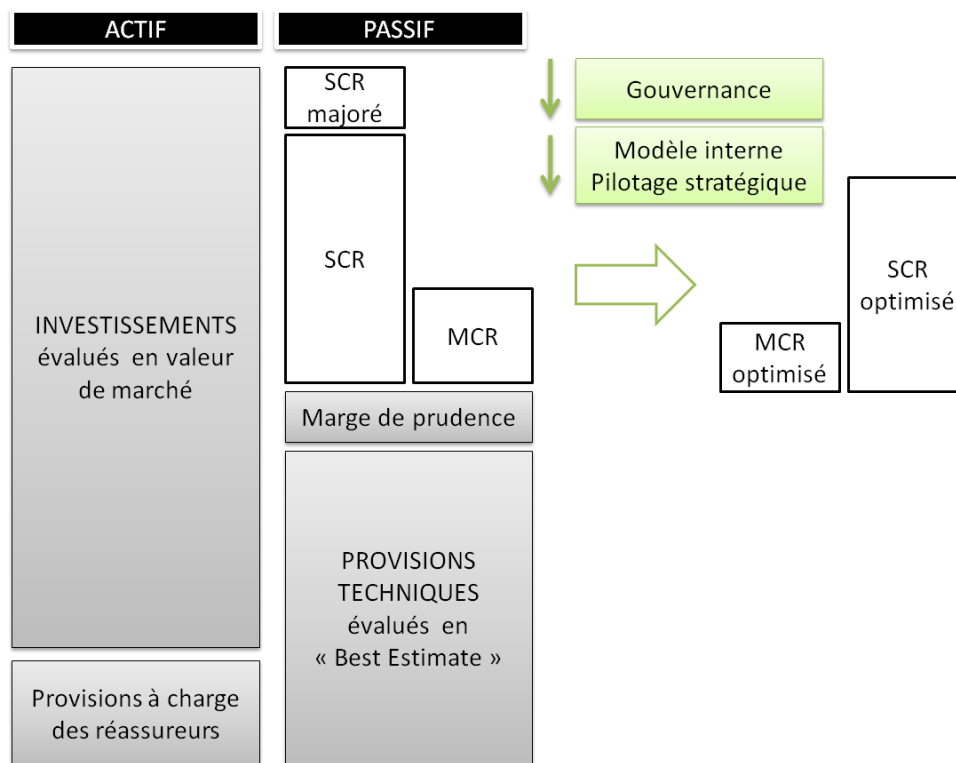


FIGURE 1.5 – Bilan prudentiel sous Solvabilité II

### Les exigences qualitatives du Pilier II et du Pilier III

Il existe un lien entre le **Pilier II** et le calcul du SCR : en cas d'insuffisance de contrôle interne, le SCR peut être majoré d'un *"capital add-on"*. Ce phénomène est représenté dans le schéma ci-dessus sous le nom "SCR majoré". De manière générale, le Pilier II vise à **renforcer le processus de surveillance**, à travers l'augmentation des visites sur sites, des actions préventives, des exigences d'informations et de

documentations nécessaires au contrôle, du développement d'outils permettant d'identifier en amont les risques émergents ainsi que des sanctions administratives et financières en cas de risque de préjudices aux assurés. Ce pilier s'attarde également sur la structuration du contrôle interne et du risk management en terme d'existence d'une organisation bien définie avec des responsabilités établies, de mécanismes de contrôles internes adaptés à l'activités, de mise en place de processus efficaces pour évaluer/gérer/mesurer et reporter les risques existants ou potentiels.

Le **Pilier III** concerne la **communication et la publication de l'information** sur laquelle les deux premiers piliers sont basés. Ces informations sont à destination des assurés, des analystes ainsi que des régulateurs qui pourront alors juger si les analyses effectuées par les assureurs et les réassureurs concernant leurs exigences en capital sont fidèles à la réalité. Il dicte également le principe de proportionnalité en ce qui concerne les exigences d'informations en fonction de la taille des entreprises.

Ainsi, les assureurs et les réassureurs devront montrer que la dimension "risque" est bien intégrée dans les décisions.

### 1.2.3 Les étapes de la mise en place de Solvabilité II

#### Le processus Lamfalussy

Depuis 2003, Solvabilité II s'inscrit dans le cadre du processus Lamfalussy. Ce dernier correspond à une approche réglementaire en 4 niveaux : de l'adoption à la mise en oeuvre et le contrôle de l'application de la législation et des mesures d'exécution. *"L'objectif du processus Lamfalussy est d'assurer un dialogue permanent et transparent entre le législateur et les acteurs du marché, notamment par le biais de consultations publiques à chaque niveau de la procédure"*. Revenons maintenant sur les quatre niveaux appliqués à Solvabilité II :

- **Niveau 1** : directives adoptées par le Conseil et le Parlement
- **Niveau 2** : mesures adoptées par la Commission Européenne et détaillant les textes de niveau 1
- **Niveau 3** : recommandations du Comité Européen des Contrôleurs des Assurances et des Pensions Professionnelles (CEIOPS) auquel participe l'ACP. Plus particulièrement, le CEIOPS conseille la Commission Européenne en ce qui concerne les aspects techniques des textes de niveau 1 et 2
- **Niveau 4** : contrôle approfondi des infractions potentielles par la Commission Européenne

Ce processus cherche à renforcer l'harmonisation des législations nationales au niveau européen.

#### Les Etudes Quantitatives d'Impact (QIS)

Les Etudes Quantitatives d'Impacts sont des travaux réalisés par le CEIOPS et ont pour objectifs de **mesurer l'impact des nouvelles règles mises en place par Solvabilité II** concernant le calcul des exigences de capital et sur l'évaluation des postes du bilan prudentiel. Les exigences quantitatives de la nouvelle directive sont nombreuses, cela passe par le calcul des provisions techniques, les exigences de capital (MCR et SCR) ou encore la définition des actifs exigibles à la couverture des exigences de capital et les règles de placements. Le CEIOPS a publié plusieurs QIS successifs, elles sont aujourd'hui au nombre de 5. Attachons nous à présent à les détailler :

- **QIS 1** : évaluation des provisions techniques (fin 2005)
- **QIS 2** : première approche sur la détermination des exigences en capital (SCR et MCR) et sur les éléments éligibles à la couverture des exigences (mai 2006)
- **QIS 3** : travail sur le calibrage des formules standards pour le calcul de la MCR et SCR, et

- introduction de la problématique relative aux groupes d'assurance
- **QIS 4** : meilleure quantification des formules standards (MCR et SCR) (plus cohérente et mieux calibrée); tests des simplifications promises aux assureurs de taille plus réduite (règle de proportionnalité) concernant l'évaluation des provisions techniques ainsi que de l'utilisation de paramètres spécifiques à l'entité pour la détermination du risque de souscription; mesures de l'impact de l'effet de diversification pour les groupes et identification de l'état de préparation des modèles internes
  - **QIS 5** : fournir des éléments détaillés sur les impacts quantitatifs de la réforme, notamment des mesures de niveau 2, sur le bilan; vérifier l'adéquation des spécifications techniques aux objectifs de Solvabilité II; collecter des données qualitatives et quantitatives sur les options afin de parfaire le calibrage de la formule standard

Les QIS permettent ainsi aux entreprises et aux autorités de contrôle de se familiariser avec Solvabilité II et de mieux cerner les améliorations internes à apporter. Ils servent également à se rendre compte de la faisabilité de la réforme et des calculs demandés.

### Le calendrier de la réforme

Nous avons ainsi vu les principales caractéristiques de la nouvelle directive européenne Solvabilité II. Le schéma suivant permet de se rendre compte des différentes étapes de sa mise en place :

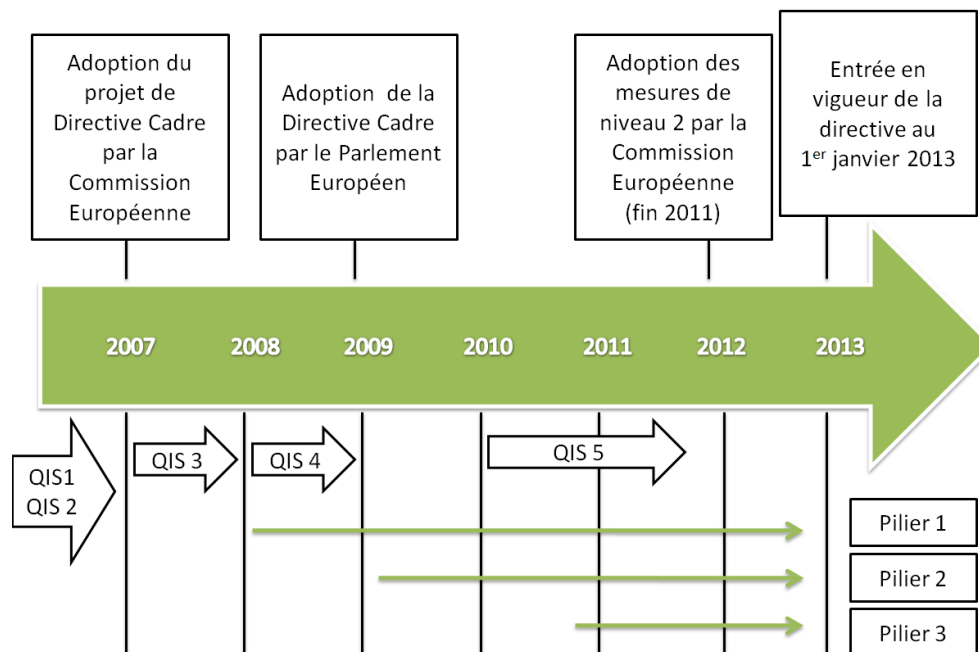


FIGURE 1.6 – Le calendrier de la réforme



## Chapitre 2

# Les enjeux de la gestion actif-passif en assurance

### 2.1 Le rôle de la gestion actif-passif

La gestion actif passif, ou ALM selon l'acronyme anglo-saxon d'*Asset Liability Management*, s'est dans un premier temps développé au sein des institutions financières. Le principe de base était d'**associer un pilotage stratégique à une bonne gestion des risques**. L'objet de l'ALM est donc d'analyser l'actif et le passif du bilan ainsi que son évolution probable. Autrement dit, il s'agit d'apprécier les risques à l'actif du bilan (ce que l'entreprise possède) et au passif (ce que l'entreprise doit) de manière à mieux les gérer et de préserver la capacité de la société à honorer ses engagements.

Si la banque a un actif au bilan important en raison des engagements pris vis-à-vis des déposants, une compagnie d'assurance a, quant à elle, un actif important en contrepartie des engagements pris vis-à-vis des assurés. Nous pouvons définir la gestion actif passif comme *"un ensemble de techniques de gestion agissant sur l'actif et le passif de manière coordonnée"*. Ces dernières années, le concept d'ALM a pris de l'ampleur chez les organismes assureurs, notamment en raison des évolutions réglementaires. Nous retrouvons ainsi l'article suivant dans le code des assurances :

*"Les entreprises d'assurance doivent procéder en permanence à une évaluation de leurs risques financiers en effectuant notamment des simulations de l'impact de la variation des taux d'intérêts et des cours boursiers sur leur actif et leur passif et des estimations comparées de l'exigibilité de leur passif et de la liquidité de leur actif"* (article R.332-1-2 du Code des Assurances)

La démarche actif passif cherche à répondre à deux objectifs principaux :

- l'évaluation permanente des risques financiers
- le processus de décision permettant de faire face à ces risques

De plus, l'inversion du cycle de production propre au secteur de l'assurance modifie la perception d'un bilan : l'activité s'illustre dans son passif. L'actif montre comment sont utilisés les fonds reçus et comment pourront être réglés les engagements à l'égard des assurés.

### 2.2 Les risques sous-tendant les éléments du bilan

Comme nous l'avons précédemment remarqué, l'actif réel du bilan d'une société d'assurance est principalement constitué de placements quand le passif réel est essentiellement constitué des engagements contractés à l'égard des assurés, autrement dit des provisions techniques. Introduisons alors la définition

d'un risque pour l'assureur :

**Définition 2.2.1** *Un **risque** correspond à tout événement aléatoire qui réduit la capacité de l'assureur à honorer ses engagements.*

Les risques inhérents aux activités des compagnies d'assurance ou des fonds de retraites sont multiples. Nous allons présenter ici les principaux risques pouvant affecter la solvabilité des organismes assureurs.

Le risque peut provenir d'une erreur dans l'évaluation des primes, avec notamment un **risque de sous-tarifification**. Le taux d'inflation joue un rôle essentiel dans ce phénomène. Un autre risque est la **sous-évaluation des sinistres restant à payer**, que cela concerne le montant des sinistres ou les frais d'exploitation engagés pour les gérer et les liquider, à travers par exemple la possible insuffisance des provisions techniques. Les **risques liés à la sinistralité** sont également importants : la survenance de sinistres extrêmes en assurance non vie ou encore le risque de défaut d'un réassureur. La **souscription** est également un élément risqué.

Les **risques financiers**, risques sur lesquels nous allons nous attarder dans cette étude, sont conséquents en assurance. Le risque d'actif concerne principalement le **risque de moins values** lors de la réalisation de placements, avec des problématiques comme les risques de dépréciation, de liquidité ou encore d'évaluation. Rappelons que les placements des sociétés d'assurance ou fonds de retraite sont nombreux et principalement investis en actions, obligations et immobilier. Le **risque de taux**, lié aux variations des taux d'intérêt, est un élément fondamental d'un bilan en assurance. En effet, il existe un risque non seulement à la hausse mais également à la baisse. Le risque de réinvestissement correspond au risque que le taux de rendement des futurs investissements soit inférieur aux taux garantis au titre des contrats d'assurance. A l'inverse, le risque de liquidation correspond au risque de céder des obligations avant le remboursement alors que ces dernières sont en moins values par rapport au prix d'achat.

En assurance, il existe un **risque de désadéquation** entre actif (placements) et passif (engagements réglementés). Les placements doivent, en effet, offrir une couverture suffisante des passifs techniques. Cependant, la valeur et le rendement des actifs sont soumis aux influences des marchés de capitaux, rendant cette couverture plus qu'incertaine. Notre étude s'attache à mettre en place un outil robuste d'aide à la gestion de l'actif.

Le chapitre suivant s'attache à présenter les générateurs de scénarios économiques et de les remettre dans le contexte assurantiel.



## Chapitre 3

# La génération de scénarios économiques en assurance

### 3.1 Présentation générale

Afin de présenter les Générateurs de Scénarios Economiques (ESG), rappelons tout d’abord la définition d’un scénario économique introduite par Planchet, Théron et Kamega [2009] : *”un scénario économique correspond à une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d’intérêt”*. Autrement dit, la génération aléatoire de scénarios économiques permet de projeter à plus ou moins long terme des valeurs de marchés de différents actifs financiers ainsi que des variables macroéconomiques pertinentes.

Une des principales problématiques de la mise en place d’un ESG est le choix des éléments composant le modèle : l’économie est représentée par un certains nombres de variables fondamentales. L’objectif d’un ESG est alors de modéliser ces différentes variables, tout en tenant compte de leur dépendance, afin de décrire les états du monde plus ou moins probables sur lesquels l’économie pourra aboutir au terme d’un horizon de temps donné. Dans le cas de compagnies d’assurance et de fonds de retraite, il s’agit notamment des variables affectants différents postes du bilan : taux d’intérêt, performance des actions ou encore inflation.

Un ESG peut avoir plusieurs utilisations, à savoir la prévision, la valorisation de produits financiers ou encore l’analyse des risques. Remarquons alors qu’un bon outil de génération aléatoire de scénarios remplit au moins l’une des trois applications citées. Dans le cas de projections à court terme, il permet l’évaluation des prix d’équilibre de produits financiers, autrement dit : le *pricing*. Lorsqu’il s’agit de projections à un horizon plus long terme, l’ESG s’apparente à un outil d’aide à la décision dans le cadre de la gestion des risques. Le générateur mis en place au sein de PricewaterhouseCoopers s’inscrit dans ce dernier. Avec la mise en place de Solvabilité II, les assureurs se tournent d’avantage vers les ESG afin de mesurer les risques inhérents à leurs activités. De plus, un ESG permet de tenir compte de l’horizon long terme de certains placements des assureurs.

La littérature sur les ESG est abondante. Nous donnerons par la suite quelques exemples de générateurs déjà existants. Cependant la récente crise financière, qui a débuté par une crise de liquidité, a mis en évidence certaines lacunes de ces générateurs. Les remises en cause portent principalement sur la prise en compte des risques de liquidité et de crédit, ainsi que sur la modélisation des dépendances entre les différentes variables choisies. Notre ESG cherche à répondre en partie à ces problèmes avec notamment une meilleure prise en compte de la survenance d’évènements extrêmes. Ainsi, le choix des grandeurs économiques et financières que nous souhaitons modéliser, ainsi que la mise en oeuvre de l’outil, dépend principalement de la finalité du générateur.

La construction d'un générateur passe par plusieurs étapes. Avant de nous concentrer sur le développement de notre ESG, nous allons dans la section suivante nous attarder plus longuement sur l'utilité de la mise en place d'un tel outil au sein d'une compagnie d'assurance ou d'un fonds de retraite.

## 3.2 Utilité d'un générateur en assurance

Un ESG a de multiples utilisations en assurance. Il joue un rôle central dans le cadre de la gestion actif-passif. Ainsi, en raison des évolutions prudentielles, du calcul de l'Embedded Value et de la professionnalisation de la gestion financière, les assureurs doivent développer leur réflexion sur la modélisation de l'actif des bilans. Cette section s'attache à mieux décrire l'importance de la mise en place d'un ESG au sein d'un organisme assureur ou d'un gestionnaire de fonds (par exemple un fonds de retraite).

### 3.2.1 Le générateur au service de la réglementation prudentielle

La mise en place de nouvelles provisions techniques et de nouveaux états réglementaires a créé un besoin en termes de génération de scénarios économiques. Faisons à présent un tour d'horizon des principaux éléments réglementaires pouvant bénéficier de l'apport d'un ESG.

Rappelons que la provision mathématique d'un contrat à la date  $t$  se définit comme la différence entre les valeurs actuelles probables des engagements pris par l'assureur et ceux pris par l'assuré et est calculé à partir d'un taux fixé à la souscription du contrat. La **provision pour aléas financiers** fait partie des provisions techniques vie, cette dernière se constitue lorsque les produits financiers sont insuffisants, d'où la nécessité de disposer d'un modèle d'actif.

Les **états réglementaires** sont des états normalisés au service de l'autorité de contrôle, selon une périodicité annuelle ou trimestrielle. L'**Etat T3**, ou simulation actif passif, fait partie des états trimestriels recueillant les informations essentielles à collecter. Ce dernier compare les évolutions de la valeur de marché des placements et des engagements d'assurance vie et viager. Il s'agit d'un outil d'analyse statique dans la mesure où aucune interaction n'est envisagée entre l'actif et le passif. L'**Etat C6 bis**, ou test d'exigibilité, est un état annuel à fournir à l'ACP. Il correspond à un stress test de la capacité d'une entreprise d'assurance à faire face à ses engagements à horizon 5 ans.

Si ces éléments nécessitent la mise en place d'un ESG, la nouvelle directive **Solvabilité II** pourrait également bénéficier de cet outil. En effet, cela s'avère utile à deux niveaux dans l'estimation de la solvabilité globale : dans le cadre de l'évaluation des provisions techniques relatives aux engagements contenant des options et des garanties financières ainsi que dans celui du capital de solvabilité requis (SCR). A partir de 2013, les assureurs pourront utiliser un modèle interne pour calculer la richesse qu'ils doivent posséder pour ne pas être en ruine à horizon un an avec une probabilité de 99,5%. Un ESG permettrait ainsi de simuler les distributions des risques financiers inhérents à l'activité de l'assurance. Il est d'autant plus utile que les actifs et les passifs seront évalués à leur juste valeur et joue un rôle crucial dans l'évaluation du risque de marché.

### 3.2.2 Le générateur au service de l'Embedded Value

Apparue dans les années 1980, l'embedded value, ou valeur intrinsèque, est la méthode classique d'évaluation des portefeuilles d'assurance vie. Ce calcul permet d'informer les actionnaires sur la performance financière des entreprises d'assurance vie et a pour fin la transaction ou la communication.

**Définition 3.2.1** *L'embedded value est la valeur actualisée des flux (ou des résultats) futurs distribuables aux actionnaires. Il s'agit de la "valeur des intérêts des actionnaires dans les revenus distribuables*

issus des actifs alloués au business couvert après pris en compte de l'ensemble des risques liés au business couvert" (*Principe 3 du CFO Forum*)

L'embedded value prend ainsi en compte l'actif net, ou "*part de l'actif revenant aux actionnaires en date d'évaluation*" et l'*In Force*, ou "*valeur actuelle des profits futurs à destination des actionnaires et relatifs aux contrats d'assurance présents dans le portefeuille*". La baisse des cours boursiers à la fin des années 1990 a remis en cause le calcul d'un embedded value déterministe. Il est apparu plusieurs variantes de cette méthode, notamment l'**European Embedded Value**(EEV) en 2004. Cette dernière se base sur une valorisation stochastique. L'approche **Market Consistent Embedded Value** (MCEV) est par la suite devenue un standard de la valorisation des sociétés d'assurance vie avec la publication en juin 2008 des "*MCEV Principles & Guidance*". La MCEV avait alors pour but de palier le manque d'harmonisation du calcul de l'EEV au sein des sociétés d'assurance. Depuis fin 2009, l'approche MCEV constitue le nouveau référentiel de publication et cherche à évaluer de manière explicite les risques impactant les compagnies d'assurance. Ces calculs peuvent nécessiter la génération aléatoire de scénarios économiques.

### 3.2.3 Le générateur au service de l'allocation stratégique d'actifs

L'allocation stratégique d'actifs ne consiste plus seulement en la valorisation des engagements réglementés. De nos jours, cette dernière doit tenir compte d'objectifs de **rentabilités sous contraintes des risques** qu'elle engendre. C'est dans ce cadre que peuvent s'inscrire les générateurs stochastiques de scénarios économiques.



## Deuxième partie

# Présentation et mise en oeuvre du Générateur de Scénarios Economiques



# Chapitre 1

## Structures de dépendance et modèles de référence

Il existe deux structures de dépendance possibles, à savoir la **structure par cascade** et la **structure basée sur les corrélations**. Quand la première permet de partir de la détermination d'une variable pour déduire les valeurs des autres variables ; la seconde est basée sur les corrélations des données historiques. Définissons à présent les deux catégories de modèles issues des différentes structures et illustrons les par des exemples de générateurs existants.

### 1.1 Modèle composite et modèle intégré

Les **modèles composites** sont des modèles simples à concevoir : ils s'appuient sur les corrélations, la plupart du temps historiques, des différentes classes d'actifs sélectionnées. Chaque variable est modélisée à l'aide d'un modèle au choix, par exemple Black & Scholes pour les actions, le lien les unissant étant les corrélations. Il s'agit d'une structure de dépendance basée sur les corrélations.

Les **modèles dits intégrés** s'appuient sur la détermination d'une variable clé, par exemple l'inflation, pour déduire les valeurs des autres grandeurs macroéconomiques ou financières. La structure de dépendance est alors une structure par cascade. Des exemples représentatifs de cette catégorie de modèle sont le modèle de Wilkie et le modèle d'Ahlgrim présentés dans la section suivante.

Ces deux catégories présentent chacune des avantages et des inconvénients. En effet, quand les modèles intégrés apparaissent plus cohérents dans la prise en compte des dépendances entre les grandeurs, les modèles composites permettent de choisir des modèles de diffusion plus pertinents pour chaque classe d'actif.

Introduisons dans la section suivante trois ESG connus. Nous nous sommes en particulier inspirer des deux derniers pour concevoir notre ESG.

### 1.2 Exemples de modèles

#### 1.2.1 Le modèle de Wilkie

Apparu en 1986, le modèle de Wilkie [39] marque un tournant dans la conception d'ESG. Non seulement les travaux réalisés sont les premiers à intégrer l'interaction des différentes variables entre elles afin de rendre les projections plus cohérentes ; mais, il prend également en compte l'ensemble des grandeurs financières et macroéconomiques (inflation, action, taux d'intérêt et immobilier). Ce dernier a l'avantage

d'être relativement simple à implémenter.

Afin de caractériser la structure de dépendance, Wilkie choisit une approche par cascade dont la variable centrale indépendante est l'indice des prix à la consommation. Les autres valeurs sont déduites de cette dernière. Le schéma suivant illustre cette structure :

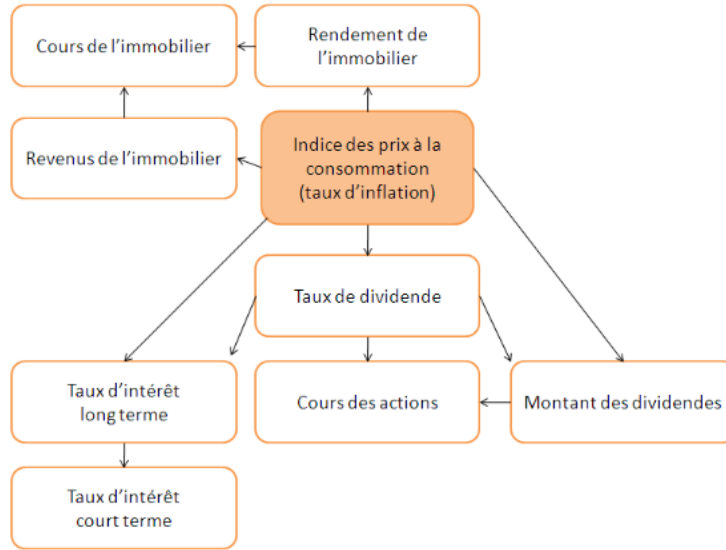


FIGURE 1.1 – Structure du modèle de Wilkie

Si Wilkie avait choisi en 1986 de modéliser le taux d'inflation à l'aide d'un processus autorégressif, il met à jour ses travaux en 1995 [40] en choisissant notamment d'utiliser à la place un processus ARCH. De plus, il dispose également d'un historique et d'une périodicité des données plus importants.

Malgré sa popularité, l'approche de Wilkie a, sur de nombreux points, été remise en cause. Son faible pouvoir de prévision, du à son grand nombre de paramètres, s'avère être son plus gros inconvénient. Ses travaux s'inscrivent dans le cadre de la gestion des risques et n'ont pas pour objectif l'évaluation de prix de produits financiers.

### 1.2.2 Le modèle d'Ahlgrim et al.

Dans le cadre de la recherche sur l'analyse financière dynamique (*Dynamic Financial Analysis - DFA* ou ALM non-vie) et soutenu par deux associations professionnelles américaines, la *Casualty Actuarial Society* et la *Society Of Actuaries*, Ahlgrim développe en 2005 une nouvelle approche de génération aléatoire de scénarios économiques [1]. Le modèle regroupe la plupart des grandeurs macroéconomiques et financières, notamment les taux d'intérêt, les rendements des actions, les taux de dividende, les taux d'inflation et enfin la performance de l'immobilier. Ce travail cherche à développer le choix des modélisations des classes d'actifs et la prise en compte de l'interdépendance des variables. Si l'interdépendance des variables s'appuie sur les corrélations historiques, ces travaux souhaitent répondre aux limites des modèles intégrés ainsi que des modèles composites. Le schéma suivant illustre la structure du modèle d'Ahlgrim :



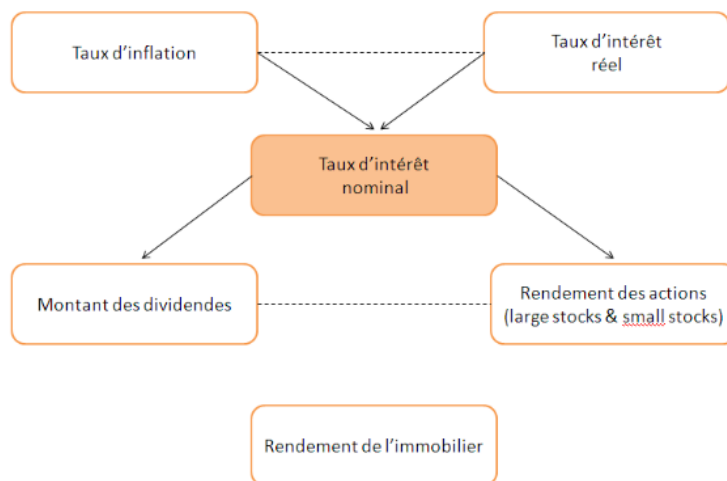


FIGURE 1.2 – Structure du modèle d'Ahlgrim

### 1.2.3 Le Générateur de Scénarios Economiques selon SCOR

L'idée du travail réalisé chez SCOR [30] est de représenter l'économie à l'aide de plusieurs variables clés. L'objectif est de produire différents états du monde probables de l'économie afin d'étudier les réactions du bilan de la société à ces diverses situations. Il s'agit d'estimer les distributions des grandeurs économiques et financières utilisées et non d'offrir une prévision précise de ces dernières. Dans le cadre du Test Suisse de Solvabilité, l'ESG de SCOR permet de générer à la fois des scénarios réalistes et extrêmes à un horizon d'un an. Ainsi, les scénarios reproduisent non seulement la réalité passée et la dépendance entre les variables ; mais introduisent également une part d'événements extrêmes non encore observés.

#### Les variables choisies

Afin de représenter l'économie, SCOR choisit les variables macroéconomiques et financières suivantes :

- Taux d'intérêt pour différentes maturités,
- Taux de change pour les différentes devises présentes dans l'ESG,
- Indices actions,
- Taux d'inflation,
- Produit Intérieur Brut.

Les grandeurs sont traitées pour les principales devises : USD, EUR, JPY, GBP, CHF et AUD.

#### Principe général : la méthode du *Bootstrapping*

Afin de générer des scénarios futurs, SCOR se base sur une méthode non-paramétrique connue sous le nom de *Bootstrapping*. Cette dernière repose uniquement sur le comportement passé des différentes variables du modèle. Il faut d'abord transformer les historiques des variables économiques. Soit  $X_i$ , la valeur historique de la variable  $X$  à la date  $i$ , alors :

$$x_i = \ln(X_i)$$

L'innovation  $I_i$  se traduit alors par :

$$I_i = x_i - \mathbb{E}_{i-1}(x_i)$$

où  $\mathbb{E}_{i-1}(x_i)$  correspond à l'attente de  $x_i$  à la date  $i - 1$ . Notons que si  $\mathbb{E}_{i-1}(x_i) = x_{i-1}$ , alors  $I_i$  correspond au taux de rentabilité. Cependant, cela diffère pour certaines variables, comme les taux d'intérêt, afin de tenir compte du retour à la moyenne. Il s'agit de sélectionner aléatoirement un date passée  $i$  parmi l'historique disponible, de prendre à cette date l'ensemble des innovations de chacune des variables et de les appliquer à l'instant  $j$  futur en question. La génération de scénarios s'avère être une accumulation d'innovations :

$$x_j = \mathbb{E}_{j-1}(x_j) + I_i$$

Notre Générateur de Scénarios Economiques reposant en partie sur cette méthode de *Bootstrapping*, nous détaillerons ce procédé plus en détail par la suite.

Cette méthode comporte des avantages, comme la conservation des corrélations historiques, mais présente néanmoins certains inconvénients. En effet, certaines tendances aléatoires peuvent être indéfiniment prolongées dans le futur, les autocorrélations pourraient être perdues à cause du choix aléatoire des dates sélectionnées et finalement, la taille de l'échantillon historique pourrait s'avérer trop petit pour couvrir l'ensemble des valeurs économiques d'une variable, sous estimant ainsi la probabilité de survenance de valeurs extrêmes. SCOR intègre donc plusieurs procédures supplémentaires traitées dans le paragraphe suivant.

## Les améliorations apportées au Bootstrapping

### Modèle GARCH

Afin de tenir compte de l'instabilité de la volatilité dans le temps, un processus GARCH(1,1) est appliqué aux innovations :

$$I_i = \sigma_i \varepsilon_i$$

$$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 I_i^2 + \beta_1 \sigma_{i-1}^2$$

où  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont positifs,

$\varepsilon_i$  est i.i.d. de moyenne nulle et de variance 1.

Cette correction est appliquée aux innovations de l'ensemble des variables, à l'exception des taux d'intérêt forward.

### Tendance

Les rendements des actifs, qui prennent des valeurs positives ou négatives, peuvent avoir une moyenne non nulle. L'utilisation brute de ces derniers peut introduire une tendance dans la simulation des processus. SCOR choisit de corriger les rendements issus des données historiques en leur retranchant leur moyennes empiriques et en les multipliant par un coefficient permettant néanmoins de conserver leurs variances.

### Retour à la moyenne

Des variables, comme les taux d'intérêt, n'atteignent jamais de valeurs trop élevées ni trop faibles : ce phénomène se nomme le retour à la moyenne. Il faut alors en tenir compte dans la prévision  $\mathbb{E}_{i-1}(x_i)$ .

### Traitement des queues épaisses

La technique de *Bootstrapping* repose sur les échantillons historiques des variables. Ce dernier n'est pas forcément assez large pour traiter la survenance de cas extrêmes. Pour y parvenir, il faut multiplier les innovations par un coefficient  $\eta$  :

$$I'_i = \eta I_i$$

où  $\eta$  suit une loi de Pareto.

### Autres améliorations

D'autres améliorations sont apportées par SCOR : la désaisonnalisation de certaines variables économiques ou encore le prise en compte du bruit pouvant affecter le calcul des innovations de certaines grandeurs en augmentant leurs variances.



## Chapitre 2

# Choix des variables du modèle

Le choix des variables modélisées dépend non seulement de la finalité de l'ESG mais également de leurs disponibilités. Notre technique de génération de scénarios, détaillées par la suite, nécessite de disposer d'un historique de données important. De plus, les historiques disponibles doivent couvrir la même période, ainsi que la même fréquence de cotation.

Nous nous servons donc des séries de données mensuelles de 1990 à 2010, soit 21 ans. Les variables retenues seront décrites dans ce chapitre. Les données sont principalement issues du marché US et auront pour but de présenter les résultats de notre générateur.

### 2.1 Les actions

#### 2.1.1 Les indices actions

Sélectionnons deux indices actions : le Dow Jones et le Dax. L'indice Dow Jones est probablement le plus connu de tous les indices boursiers : il s'agit de l'indice de référence du premier marché financier mondial, la Bourse de New-York. Le Dow Jones se compose des 30 plus grosses capitalisations américaines. L'influence de cet indice est internationale et donne donc le ton aux autres places boursières. Le second indice, le Dax, est l'indice action de référence du marché allemand. Il s'appuie sur les 30 capitalisations boursières les plus importantes de la place de Francfort. Ce dernier est également d'importance, dans la mesure où la bourse allemande se situe au premier rang européen et au troisième rang mondial.

Pour chacun des deux indices, nous prenons les derniers prix mensuels. Notre source est *Bloomberg*. La méthode de calcul des rendements annuels est la suivante :

$$R_n^i = \ln \left( \frac{S_n^i}{S_{n-12}^i} \right)$$

où  $R_n^i$  : taux de rentabilité annuel de l'indice  $i$  au mois  $n$ ,  
 $S_n^i$  : prix de l'indice  $i$  au mois  $n$ .

Le graphique suivant nous renseigne sur l'évolution de ces indices de 1990 à 2010 :



FIGURE 2.1 – Evolution du Dow Jones et du Dax de 1990 à 2010

### 2.1.2 L'indice VIX

Souhaitant introduire un facteur de volatilité stochastique dans la modélisation des actions, nous nous tournons vers l'indice VIX, indice de référence de la volatilité des actions en bourse. Les derniers prix mensuels du VIX sont téléchargés à partir de *Bloomberg* de 1990 à 2010.

Le graphique suivant illustre l'évolution du VIX, ainsi que l'évolution des volatilités sur 12 mois glissant des rendements annuels du Dax et du Dow Jones :

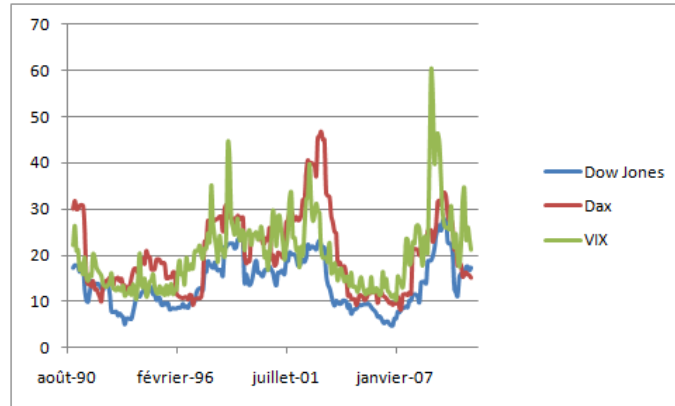


FIGURE 2.2 – Evolution du VIX et des volatilités des rendements annuels du Dax et du Dow Jones

Le lien entre le VIX et les volatilités du Dow Jones et du Dax est alors évident et montre la pertinence d'utiliser ce dernier pour introduire un facteur de volatilité stochastique.

## 2.2 Le taux d'inflation

Nous déduisons l'historique du taux d'inflation annuel à fréquence mensuelle de l'Indice des Prix à la Consommation américain, où CPI selon l'acronyme anglo-saxon, de la manière suivante :

$$q_n = \ln \left( \frac{CPI_n}{CPI_{n-12}} \right)$$

où  $q_n$  : taux d'inflation annuel au mois  $n$ ,

$CPI_n$  : indice des prix à la consommation au mois  $n$ .

Nous obtenons le CPI mensuel grâce à la *Federal Reserve Economic Data* (FRED); la source étant l'*U.S. Department of Labor : Bureau of Labor Statistics*. Il importe de choisir l'indice désaisonnalisé, afin que nos scénarios n'incluent pas de tendance saisonnière.

## 2.3 Les taux d'intérêts

Sélectionnons un taux nominal court terme ainsi qu'un taux nominal long terme. Il est souvent considéré qu'à horizon long terme, il existe un fort lien entre taux d'intérêt nominal, taux d'intérêt réel et taux d'inflation. Nous pouvons représenter ce lien à l'aide de la formule suivante :

$$\text{Taux d'intérêt nominal} = \mathbb{E}_t(\text{Taux d'inflation}) + \text{Taux d'intérêt réel}$$

où  $\mathbb{E}_t(\text{Taux d'inflation})$  : anticipation du taux d'inflation à la date  $t$ .

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du taux d'inflation annuel, du taux nominal à court terme et du taux nominal à long terme :

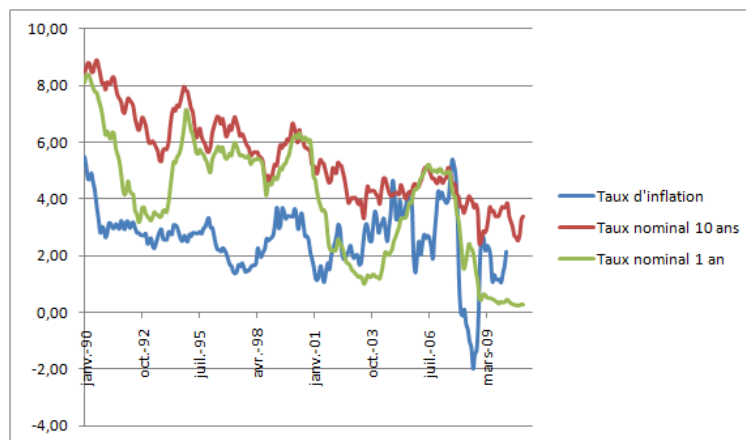


FIGURE 2.3 – Evolution des taux nominaux à court terme et à long terme et du taux d'inflation (1990-2010)

Afin de tenir compte de la relation, nous pourrions modéliser les taux d'intérêt réels pour déduire ultérieurement les taux nominaux de la diffusion des taux réels et du taux d'inflation.

Nous prendrons le parti d'effectuer deux modèles de diffusion : un pour les taux réels et l'autre pour les taux nominaux à partir des données brutes. Les résultats nous permettront de sélectionner le mieux adapter à la mise en oeuvre de notre ESG.

### 2.3.1 Le taux d'intérêt à court terme

Sélectionnons le taux nominal à 1 an : *1-Year Treasury Constant Maturity Rate* publié par le *Board of Governors of the Federal Reserve System* et disponible via la FRED. Ce taux est disponible à fréquence mensuelle.

L'historique du taux d'intérêt réel à court terme se déduit des historiques du taux nominal à court terme choisi et du taux d'inflation. Le calcul est le suivant :

$$r_n^{reel} = r_n^{nominal} - q_n$$

où  $r_n^{reel}$  : taux d'intérêt réel à court terme au mois  $n$ ,  
 $r_n^{nominal}$  : taux d'intérêt nominal à court terme au mois  $n$ ,  
 $q_n$  : taux d'inflation annuel au mois  $n$ .

### 2.3.2 Le taux d'intérêt à long terme

Sélectionnons le taux nominal à 10 ans : *10-Year Treasury Constant Maturity Rate* publié par le *Board of Governors of the Federal Reserve System* et disponible via la FRED. Ce taux est disponible à fréquence mensuelle.

A l'image du taux à court terme, l'historique du taux d'intérêt réel à long terme se déduit des historiques du taux nominal à long terme choisi et du taux d'inflation. Le calcul est le suivant :

$$l_n^{reel} = l_n^{nominal} - q_n$$

où  $l_n^{reel}$  : taux d'intérêt réel à long terme au mois  $n$ ,  
 $l_n^{nominal}$  : taux d'intérêt nominal à long terme au mois  $n$ ,  
 $q_n$  : taux d'inflation annuel au mois  $n$ .

## 2.4 Le risque de crédit

Pour représenter le risque de crédit, nous choisissons de modéliser le *swap spread US 10 ans*. Il se déduit de la courbe des taux de swaps et des emprunts d'Etat. A partir de *Bloomberg*, nous sélectionnons le taux de swap US à 10 ans (*USSW10 Curncy*) et le taux d'emprunt d'Etat à 10 ans (*USGG10YR Index*) :

$$(\text{Swap Spread } 10Y)_t = (\text{USSW10 Curncy})_t - (\text{USGG10YR Index})_t$$

Il s'agit de la mesure principale du niveau des spreads de crédit. Il constitue également leur instrument de couverture privilégié. Le graphique suivant illustre son évolution depuis 1990 :

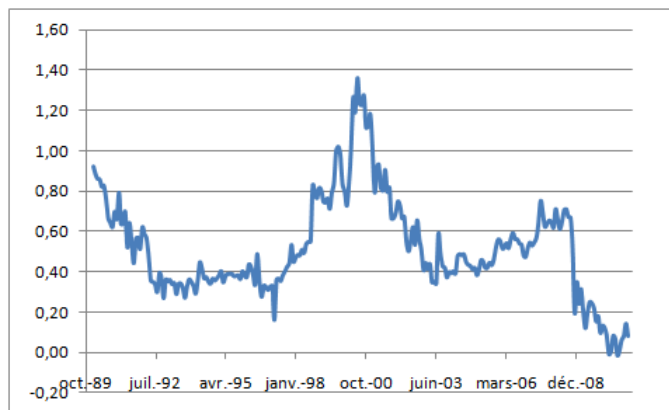


FIGURE 2.4 – Evolution du swap spread US 10 ans de 1990 à 2010

## 2.5 L'immobilier

Sélectionnons l'indice *Case-Shiller 10* disponible sur *Bloomberg* à fréquence mensuelle. Il mesure la valeur nominale du marché de l'immobilier résidentiel dans dix régions métropolitaines des États-Unis. Cet indice est la référence du marché immobilier aux États-Unis. Nous choisissons le *Case-Shiller 10* et



non le *Case-Shiller* 20 en raison de sa disponibilité à partir de 1990. Le graphique suivant illustre son évolution :

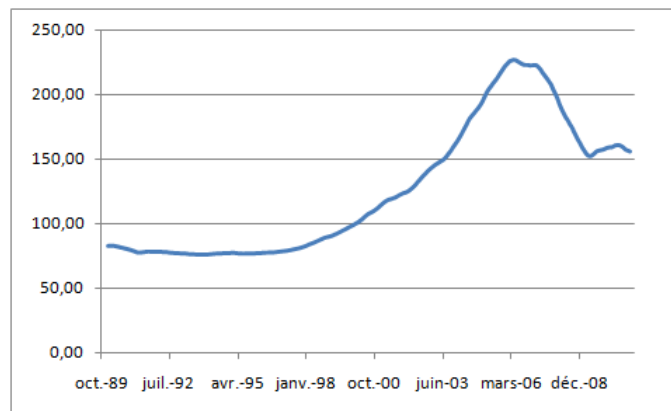


FIGURE 2.5 – Evolution du Case-Shiller 10 de 1990 à 2010

## 2.6 Le taux de change

Ayant sélectionné le Dax et le Dow Jones comme indices actions, nous choisissons le taux de change mensuel EUR/USD téléchargé à partir de *Bloomberg*. Le graphique suivant illustre son évolution :



FIGURE 2.6 – Evolution du taux Euro-Dollar de 1990 à 2010

Au vue des grandeurs choisies, le générateur mis en place au sein de PwC s'attache à aller plus loin dans la modélisation de l'actif du bilan d'un organisme assureur. Notre approche de génération de scénarios économiques est présentée dans le chapitre suivant.



## Chapitre 3

# Principe de base du générateur

### 3.1 Méthode de Monte-Carlo

Le terme méthode de Monte-Carlo désigne toutes techniques visant à déterminer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Elle repose sur le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Soit une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, intégrables, (i.e  $E(|X_0|) < +\infty$ ), alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X_0)$$

Il s'agit de la **Loi des Grands Nombres**. Nous introduisons alors une définition plus détaillée du principe de Monte-Carlo :

**Définition 3.1.1** *La méthode de Monte-Carlo est une procédure numérique qui permet d'estimer les caractéristiques de la loi de probabilité de  $F(X)$ , telles que la moyenne, l'écart-type ou encore les quantiles, à partir de la densité de probabilité de  $X$ .*

*Elle consiste à générer des tirages aléatoires indépendants  $x_1, \dots, x_n$  en fonction de la densité de probabilité de  $X$ , puis à estimer les caractéristiques de la loi de probabilité  $F(X)$  à partir de statistiques établies sur l'échantillon des  $n$  résultats  $F(x_1), \dots, F(x_n)$ .*

Dans le cadre de ce mémoire, cette méthode consiste à générer de nombreux scénarios économiques pour obtenir divers indicateurs. De plus, cette technique permet d'observer la distribution des variables macroéconomiques et financières de notre modèle.

Un nombre suffisant de simulations doit être effectué afin de garantir une certaine robustesse des résultats. Nous choisirons de générer **10 000** scénarios économiques.

### 3.2 Structure schématique de projection des scénarios

La structure schématique de projection de scénarios correspond au schéma de transition de la valeur d'une variable entre deux dates successives. Il est possible de représenter l'évolution dans le temps de nos variables financières et macroéconomiques selon deux formes schématiques : la structure linéaire et la structure d'arbre de scénarios. Définissons un noeud comme une réalisation possible d'une variable. A la date  $t=0$ , nous disposons d'une réalisation.

### 3.2.1 Structure par arbre des scénarios

Selon la structure d'arbre de projection, si nous disposons de  $n$  noeuds à une date  $t$  donnée ( $t > 0$ ), le nombre de scénarios à la fin de la période  $t+1$  sera de  $m$ , avec  $m > n$ . Le schéma suivant illustre cette structure :

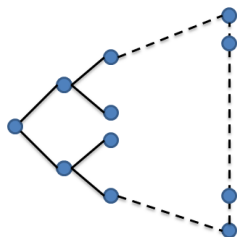


FIGURE 3.1 – Structure d'arbre de scénarios

Soulignons que le nombre de noeuds-enfants peut être différent à chaque fin de période.

### 3.2.2 Structure linéaire des scénarios

Une structure linéaire introduit un nombre  $n$  fixe de scénarios de la fin de la première période au terme de l'horizon des projections. Le schéma suivant illustre cette structure dans le cas où  $n = 3$  :

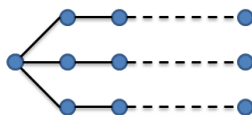


FIGURE 3.2 – Structure linéaire de scénarios

Si la première approche est mieux adaptée à l'allocation stratégique d'actifs, nous choisissons d'utiliser une structure linéaire pour la mise en oeuvre de notre ESG.

## 3.3 Structure de dépendance et méthodologie pour la génération des scénarios

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour la génération de scénarios économiques. Ces dernières sont regroupées autour de quatre groupes principaux :

- Méthode de matching des propriétés statistiques
- L'Analyse en Composante Principale, ou ACP
- Méthode d'échantillonnage
- Méthode du *Bootstrapping*

Notre approche de générations de scénarios se base sur les techniques dites de *Bootstrapping*. Ce principe consiste à simuler une variable en se basant sur son comportement passé afin de déterminer les scénarios futurs. Le *Bootstrapping* présente l'avantage de conserver les corrélations historiques entre les variables. De plus, elle est flexible dans la mesure où elle permet une insertion facile de plusieurs nouvelles grandeurs économiques.

A l'image de l'ESG mis en place chez SCOR, nous appelons **innovations** les log-rendements dans le cas de variables simples comme les indices actions. Il s'agira de transformations plus complexes dans le cas de grandeurs présentant un retour à la moyenne. Ces distinctions se feront dans la partie suivante. Cependant, nous retranchons dans tous les cas les moyennes empiriques des innovations afin de supprimer leurs tendances.

Le *Bootstrapping* se formalise de la manière suivante : supposons que nous disposons des innovations des différentes variables aux instants  $t_i = i\Delta t, i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons alors un historique de  $n$  innovations par variable. Supposons également que notre ESG prenne en compte  $K$  variables économiques, nous souhaitons générer un scénario, autrement dit projeter nos  $K$  variables, à une date future  $t_{n+k}, k \in \{1, \dots, m\}$ , dans le cas où notre horizon de prévision est de  $m\Delta t$  années. Nous effectuons pour cela un tirage aléatoire avec remise d'un entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ . Nous prenons alors toutes les innovations des  $K$  actifs à la date  $t_i$  pour les associer au scénario générer à la date  $t_{n+k}, k \in \{1, \dots, m\}$ . Il suffit de réitérer cette opération  $m$  fois pour disposer d'un scénario complet à un horizon de  $m\Delta t$  années et pour un pas de temps  $\Delta t$ . Ce processus représente la génération d'un unique scénario, il doit être répéter un certain nombre de fois pour obtenir différents scénarios probables dans le futur.

Pour une plus grande flexibilité, l'horizon de prévision  $m\Delta t$ , la fréquence annuelle de prévision  $\Delta t$  ainsi que le nombre de scénarios seront des paramètres choisis par l'utilisateur de l'ESG.

Si le *Bootstrapping* fait partie de la famille des méthodes non-paramétriques, cette technique requiert néanmoins certaines améliorations pour tenir compte de certains phénomènes. Ces modélisations additionnelles seront vues plus en détail en partie III. Afin de mieux tenir compte de la survenance d'événements extrêmes et ainsi prendre en considération les queues épaisses de distributions, nous introduisons un temps stochastique expliqué dans la section suivante.

### 3.4 Introduction d'un temps stochastique

Appliquer la méthode de *Bootstrapping* seule n'est pas suffisant. Au delà de la non prise en compte du retour à la moyenne, elle ne tient pas compte des queues épaisses de distributions. De manière générale, les modèles à temps stochastique permettent de tenir compte de la présence de sauts dans l'évolution du prix des actifs. Nous introduisons alors un temps aléatoire.

La projection de données financières ou macroéconomiques sur un horizon d'intérêt suppose que ces dernières évoluent au cours du temps. Nous faisons l'hypothèse que les variables subissent un mouvement à la hausse ou à la baisse au moment où une nouvelle information financière est diffusée. Or, l'idée originale et innovante de ce mémoire est de considérer qu'une information survient de façon aléatoire et non de façon déterministe (par exemple chaque mois, chaque trimestre ou encore chaque année). Nous mettons alors en place une montre stochastique, dans laquelle la suite des dates de survenance d'une information est supposée être un processus Gamma. Nous appellerons cela une **montre Gamma**. Le but de la mise en place d'un temps stochastique est d'introduire des sauts dans la diffusion des variables du générateur. L'objectif est non seulement d'augmenter la survenance et la sévérité d'événements extrêmes, mais également de modifier la structure de dépendance des variables avec une amplification des corrélations dans les queues de distribution.

#### Montre Gamma

Un **processus Gamma**  $\gamma(t, \mu, \nu)$  de moyenne  $\mu > 0$  et de variance  $\nu > 0$  est un processus dont les incréments indépendants sur un intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  suivent une loi Gamma. La densité,  $f$ , de l'incrément  $g = \gamma(t + \Delta t, \mu, \nu) - \gamma(t, \mu, \nu)$  se caractérise par la densité d'une loi Gamma de moyenne  $\mu\Delta t$

et de variance  $\nu\Delta t$ . Nous nous intéressons au cas où  $\mu = 1$  :

$$f(g) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\Delta t}{\nu}} \frac{g^{\frac{\Delta t}{\nu}-1} \times e^{-\frac{g}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{\Delta t}{\nu}\right)}$$

où  $\Gamma(x)$  : fonction Gamma.

Cette dernière a pour fonction caractéristique :

$$\Phi_{\gamma(t)}(u) = \left(\frac{1}{1 - \frac{iu}{\nu}}\right)^{\frac{\Delta t}{\nu}}$$

Illustrons la mise en place d'un temps Gamma à travers un exemple :

**Exemple 3.4.1** *Considérons un horizon de temps de quatre ans avec comme unité de temps le trimestre et  $\frac{1}{\nu} = 1$ . Nous obtenons les 4 premières valeurs du processus Gamma :*

$t$	$G_t^{1/\nu}$
0	0
0.25	0.55
0.50	0.73
0.75	0.76
1	1.70

*Dans cet exemple dont l'unité de temps est le trimestre (0.25 an), la montre Gamma a déjà dépassé son deuxième trimestre au bout d'un trimestre astronomique (0.55 > 0.25) et ne saute aucune barrière entre le 2ème et le 3ème trimestre calendrier. Celle-ci atteint le troisième trimestre un peu avant la montre calendrier (0.76 > 0.75) et atteint plus d'un an et demi au bout d'un an astronomique.*

## Pont Gamma

Une fois la montre Gamma simulée, la seconde étape est de déterminer les dates astronomiques auxquelles la montre Gamma marque l'arrêt. En effet, supposons que notre unité de temps est le trimestre, nous savons où en est la montre Gamma à chaque début de trimestre calendrier ; mais nous ne connaissons pas les temps astronomiques auxquels la montre Gamma marque le début d'un de ses trimestres. Ces moments, pour l'instant inconnus, sont les dates adaptées au *Bootstrapping*. En reprenant les données de l'exemple précédent, le problème consiste à retrouver les instants astronomiques  $t_1$  et  $t_2$  tels que :

$$\begin{cases} G_{t_1}^{1/\nu} = \frac{1}{4} \\ G_{t_2}^{1/\nu} = \frac{1}{2} \\ 0 < t_1 < t_2 < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il s'agit donc de retrouver les caractéristiques d'un point entre deux autres connus d'un processus stochastique. Nous allons alors déterminer grâce à un **pont Gamma**, les moments astronomiques auxquels la montre gamma marque le début d'un trimestre.

**Principe du pont Gamma :**

Soit un processus Gamma ( $G_t^{1/\nu}$ ), la loi de  $G_{t+\Delta t_1}^{1/\nu} = \gamma_1$  sachant que  $G_t^{1/\nu} = \gamma_0$  et  $G_{t+\Delta t_1+\Delta t_2}^{1/\nu} = \gamma_2$  est une variable aléatoire réelle équivalente à :

$$\gamma_0 + (\gamma_2 - \gamma_0) \times X$$

où X variable aléatoire réelle suivant une loi Beta de paramètres  $\beta(\frac{\Delta t_1}{\nu}, \frac{\Delta t_2}{\nu})$ .  
 Nous choisissons d'utiliser un algorithme dichotomique sur  $[t; t + \Delta t + \Delta t_2] \times [\gamma_0; \gamma_2]$  pour la mise en place du pont Gamma. Cela permet notamment de conserver les propriétés càdlàg du processus Gamma.

Le graphique suivant illustre les résultats obtenus à l'aide d'un pont Gamma en reprenant les données de l'exemple 3.4.1 :

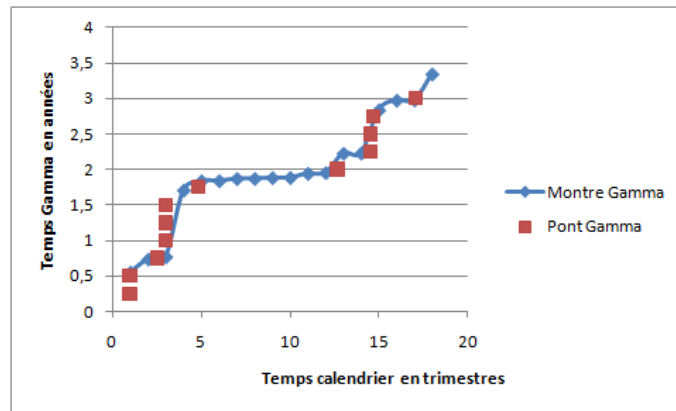


FIGURE 3.3 – Exemple de pont Gamma avec  $\nu = 1$

L'abscisse des points rouges correspond aux dates astronomiques auxquelles la montre Gamma marque l'arrêt. Ces moments ainsi déterminés sont en réalité les dates adaptées au *Bootstrapping*. Nous allons ainsi insérer les innovations prises aléatoirement dans l'échantillon historique à ces dates.

**Choix du paramètre de la montre Gamma**

A un horizon et à une unité de temps donnés, selon le **paramètre**  $\frac{1}{\nu}$  choisi pour le processus Gamma, la montre Gamma va marquer plus ou moins d'arrêts que ne l'aurait fait la montre classique, ou montre calendrier. Plus ce paramètre sera proche de zéro, plus le nombre et l'amplitude des sauts sera grand. Nous imposons à la montre Gamma au moins un arrêt. L'exemple suivant permet de ce rendre compte du paramètre à choisir en fonction de la fréquence de sauts souhaitée.

**Exemple 3.4.2** *Considérons un horizon de temps de 4 ans avec comme unité de temps le trimestre, soit 16 arrêts pour une montre classique. Le tableau suivant illustre le nombre d'arrêts en 4 ans astronomiques d'une montre Gamma en fonction du paramètre  $\frac{1}{\nu}$  :*

NOMBRE D'ARRÊTS		
Paramètre	Moyenne	Ecart-Type
0,01	85	166
0,025	45	79
0,05	31	48
0,075	27	36
0,1	24	30
0,15	21	23
0,2	20	20
0,25	19	17
0,5	18	11
0,75	17	9
1	16	8
1,25	16	7
1,5	16	7
2	16	6
4	16	4

TABLE 3.1 – Evolution du nombre d'arrêts en fonction du paramètre  $\frac{1}{\nu}$

*Ainsi, plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  augmente, plus nous nous rapprochons d'un temps astronomique.*

L'**Annexe 5** présente plusieurs exemples de ponts Gamma en fonction du paramètre  $\frac{1}{\nu}$  choisi. Ainsi, plus ce dernier est faible, plus la fréquence et l'intensité des sauts sont importantes. A l'inverse plus il est grand, plus nous nous approchons d'une montre classique.

La technique de *Bootstrapping* subordonnée à un temps stochastique nécessite néanmoins la mise en place de procédures supplémentaires présentées dans la partie suivante.



Troisième partie

La méthode du *Bootstrapping* appliquée  
aux différentes variables



# Chapitre 1

## Processus de Lévy et subordination

Nous introduisons dans ce chapitre la classe des processus de Lévy. En effet, celle-ci tient compte de la présence de sauts dans l'évolution du prix des actifs.

### 1.1 Présentation générale et propriétés mathématiques

**Définition 1.1.1** *Un processus stochastique est une série de variables aléatoires  $X_t$  indexées par le temps. Il peut être défini en temps continu ou en temps discret (hebdomadaire, mensuel, annuel, etc).*

Un processus de Lévy est une extension de la notion de processus stochastique, dans la mesure où ces derniers prennent en compte l'existence de sauts dans les valeurs prises par le processus. Nous nous concentrerons ici sur le cas unidimensionnel. Rappelons dans un premier temps la définition d'un processus de Lévy.

**Définition 1.1.2** *Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est appelé un processus de Lévy, ou processus à accroissements indépendants et stationnaires si :*

- $X_0 = 0$  p.s,
- $\forall s \leq t, X_t - X_s$  est indépendant de  $\sigma(X_u, u \leq s)$  (propriété d'indépendance),
- $\forall s \leq t, X_t - X_s$  a même loi que  $X_{t-s}$  (propriété de stationnarité),
- le processus est càdlàg (continu à droite limite à gauche).

Ayant rappelé la définition d'un processus de Lévy, nous allons donner deux exemples fondamentaux de ces processus : le processus de Poisson composé et le mouvement brownien.

**Exemple 1.1.1** *Le Processus de Poisson Composé avec intensité de sauts  $\lambda$  et distribution de la taille des sauts  $F$  est un processus de Lévy  $(X_t)_{t \geq 0}$  défini par*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

où  $Y_i, i \geq 1$  est une suite de variable aléatoire i.i.d. de loi  $F$  et  $N$  est un processus de Poisson standard d'intensité  $\lambda$  indépendant des  $Y_i, i \geq 1$ .

*Autrement dit, un Processus de Poisson Composé est un processus constant par morceaux. Ce dernier saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson. De plus, les tailles de ces sauts sont des variables aléatoires i.i.d. de loi  $F$ .*

**Exemple 1.1.2** *Un Mouvement Brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy tel que  $\forall t \geq 0, B_t \sim N(0, t)$ .*

Ces exemples sont parmi les plus communs des processus de Lévy. Les processus de Lévy vérifient de plus la propriété d'infinie divisibilité :

**Définition 1.1.3** La loi d'une variable aléatoire  $X$  est **infiniment divisible**, si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe  $X_1^{1/n}, \dots, X_n^{1/n}$ , variables aléatoires i.i.d, telles que :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i^{1/n}$$

Nous pouvons alors écrire la **représentation de Lévy-Kintchine** suivante :

**Théorème 1.1.1** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy, nous noterons  $\Psi(u)$  l'exposant caractéristique,  $\Phi$  sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\Phi : u \mapsto \mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \exp(\Psi(u)) = \exp\left(aitu - \frac{1}{2}\sigma^2tu^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{|x|<1})\Pi(dx)\right)$$

où  $a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$  et  $\Pi$  une mesure de Lévy vérifiant  $\int_{\mathbb{R}^*} \min(1, x^2)\Pi(dx) < \infty$ .

Cette représentation permet de mettre en évidence les trois composants d'un processus de Lévy : le drift ( $aitu$ ), la composante de diffusion ( $\frac{1}{2}\sigma^2tu^2$ ) et enfin la composante de saut ( $\int_{\mathbb{R}^*} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{|x|<1})\Pi(dx)$ ). Un processus de Lévy est donc entièrement défini par le triplet  $(a, \sigma^2, \Pi)$ .

Présentons dans la section suivante les processus subordonnés.

## 1.2 Les processus subordonnés

Intéressons nous au concept de subordination et faisons le lien avec l'introduction aux processus de Lévy vue auparavant.

**Définition 1.2.1**  $Y$  est un **subordinateur** si et seulement si  $Y$  est un processus croissant.

Un subordinateur permet d'effectuer un changement de temps : ce concept s'appelle la **subordination**.

La notion de subordination va permettre de faire le lien avec le concept de temps astronomique et de temps stochastique, comme nous l'avons déjà introduit dans la partie précédente.

**Proposition 1.2.1** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un subordinateur indépendant, alors le processus  $(X_{Y_t})_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy.

Nous allons maintenant présenter un théorème fondamental. En effet, ce dernier justifie l'usage des subordinateurs comme nouveaux référentiels temporels pour les processus de Lévy.

**Théorème 1.2.1** Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un subordinateur de mesure de Lévy  $\rho$ , de drift  $b$  et d'exposant de Laplace  $l(u)$ . Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy unidimensionnel sur  $\mathbb{R}$  de triplet  $(a, \sigma^2, \Pi)$  et d'exposant caractéristique  $\Psi(u)$ . Alors le processus  $(X_{Y_t})_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy de fonction caractéristique  $\Phi$  :

$$\Phi : u \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{iuX_{Y_t}}) = e^{tl(\Psi(u))}$$

Son triplet  $(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\Pi})$  est donné par :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{b} \\ \tilde{\Pi}(B) = b\Pi(B) + \int_0^\infty \mathbb{P}_{X_s}(B)d\rho(s), \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \\ \tilde{a} = ba + \int_0^\infty \int_{|x| \geq 1} xd\mathbb{P}_{X_s}(x)d\rho(s) \end{cases}$$

A présent que nous avons introduit les processus de Lévy et les subordinateurs, ainsi que les propriétés nécessaires à la compréhension du mémoire, présentons le processus Variance Gamma.

### 1.3 Le processus Variance Gamma

Le processus Variance Gamma (VG) est sans doute le plus connu des processus à temps stochastique. Explicitons le succinctement afin de bien cerner le concept de processus subordonné.

**Définition 1.3.1** Un **processus Gamma**  $\gamma(t, 1, \nu)$ , avec  $\nu > 0$ , est un processus de Lévy dont les incréments  $\gamma(t + \Delta t, 1, \nu) - \gamma(t, 1, \nu)$  suivent une loi Gamma de moyenne  $\Delta t$  et de variance  $\nu \Delta t$ .

**Définition 1.3.2**  $X_t$  est un **processus Variance Gamma** à trois paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $\nu > 0$  si :

$$X_t = \mu \gamma(t, 1, \nu) + \sigma W(\gamma(t, 1, \nu))$$

où  $(W(t))_{t \geq 0}$  mouvement brownien standard.

$X_t$  peut donc être représenté comme un mouvement brownien subordonné à un temps aléatoire donné par un processus Gamma.

Nous aborderons le modèle Variance Gamma plus en détails dans le chapitre concernant le risque action.



# Chapitre 2

## Le risque action

Le risque action correspond au risque de fluctuation du cours de ces actifs. Il faut apporter une grande importance à la modélisation de ces derniers, dans la mesure où ils constituent une part importante des placements des sociétés d'assurance et présentent une forte volatilité.

### 2.1 Le modèle action

Avant de parler plus amplement de l'approche Variance Gamma, base de notre modélisation des indices actions, introduisons le modèle le plus connu : le modèle de Black & Scholes.

#### 2.1.1 Le modèle de Black & Scholes

Publié en 1973, le modèle de Black & Scholes est un modèle permettant d'estimer en théorie la valeur d'une option européenne. L'intuition fondamentale de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent. La modélisation retenue pour représenter la dynamique de prix de l'actif sous-jacent dans un monde risque neutre repose sur l'utilisation d'un mouvement brownien géométrique. Ici, nous nous servons uniquement du processus de prix de l'actif sous-jacent. Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé pour modéliser le prix d'un indice action.

Nous écrivons communément le modèle sous la forme l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = S(0) \end{cases}$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien standard,  
 $\mu$  est le taux de rendement attendu,  
 $\sigma$  est la volatilité de l'actif sous-jacent.

Nous en déduisons que  $\frac{\Delta S}{S}$ , qui correspond à la variation proportionnelle du prix du sous-jacent entre  $t$  et  $t + \Delta t$  suit une loi normale de paramètres  $N(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$ .

En appliquant le lemme d'Ito à  $\ln(S_t)$ , nous obtenons le mouvement brownien suivant :

$$\begin{cases} d\ln(S_t) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t \\ S_0 = S(0) \end{cases}$$

$\ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t)$  correspond au taux de rentabilité en composition continue. Ainsi, si le rendement de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, alors  $\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})$  suit une loi normale de pa-

ramètres  $N((\mu - \sigma^2/2)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$ .

En intégrant entre  $s$  et  $t$ , nous obtenons :

$$S_t = S_s \exp\left((\mu - \sigma^2/2)(t - s) + \sigma \int_s^t dW_u\right)$$

Il nous suffit alors d'estimer  $\mu$  et  $\sigma$  pour effectuer des simulations de Monte-Carlo de notre processus de prix.

A partir de la résolution précédente, nous utilisons le schéma d'Euler de discrétisation et les propriétés du mouvement brownien standard pour obtenir le résultat suivant :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp((\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \times \varepsilon \sqrt{\Delta t})$$

où  $\varepsilon$  suit une loi normale centrée réduite.

Ce modèle constitue une référence en finance, il présente cependant d'importantes limites, notamment en ce qui concerne la loi suivie par le processus.

### 2.1.2 Le modèle Variance Gamma

Cette section vise à définir le modèle Variance Gamma noté VG. Nous étudions un processus stochastique  $X_t$  à trois paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $\nu > 0$ , permettant ainsi de contrôler la volatilité, le kurtosis ainsi que le skewness des indices actions choisis.

Soit  $X_t$  un processus à sauts de mesure de Lévy  $k(x)$  :

$$k(x)dx = \frac{\exp(\frac{\mu x}{\sigma^2})}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}} |x|\right) dx$$

$$\mathbb{E}(\exp(iuX_t)) = \left(\frac{1}{1 - iu\mu\nu + \frac{1}{2}\nu\sigma^2 u^2}\right)^{\frac{t}{\nu}}$$

Un processus VG,  $X_t$ , peut être représenté comme un mouvement brownien subordonné :  $X_t = w_{\gamma(t,1,\nu)}$  où  $w_t$  est un mouvement brownien de drift  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  et  $\gamma(t, 1, \nu)$  un processus gamma de densité  $f$ , conditionnellement à  $\gamma(0, 1, \nu) = 0$  :

$$f(g) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \times e^{-\frac{g}{\nu}}}{\Gamma(\frac{t}{\nu})}$$

Nous retrouvons bien la densité explicitée lors de la présentation de l'introduction d'un temps stochastique. Cela revient donc à évaluer un mouvement brownien avec drift et variance subordonné à un temps aléatoire donné par un processus gamma. Le skewness est contrôlé via  $\mu$  et le kurtosis via  $\nu$ . Nous pouvons alors en déduire la densité  $f_{X_t}(X)$  du processus VG  $X_t$  :

$$f_{X_t}(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu g}{\sigma\sqrt{g}}\right)^2\right] \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{t}{\nu}} \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \times e^{-\frac{g}{\nu}}}{\Gamma(\frac{t}{\nu})} dg$$

Nous en déduisons la fonction caractéristique suivante :

$$\Phi_{X_t}(u) = \left[\frac{1}{1 - iu\mu\nu + (\sigma^2 \frac{\nu}{2})u^2}\right]^{\frac{t}{\nu}}$$



Considérons que le prix d'un indice action à la date  $t$  se note :  $S_t$ . Nous ne prenons pas en compte les dividendes.  $S_t$  se modélise de la manière suivante :

$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t - \omega t)$$

où  $X_t$  : processus variance gamma,

$r$  : taux court,

$\omega$  définit tel que  $e^\omega = \mathbb{E}(\exp(X_1))$ . Nous avons :

$$\omega = -\frac{1}{\nu} \ln \left[ 1 - \mu\nu - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 \right]$$

Autrement dit,  $\ln \left[ \frac{S_t}{S_0} \right]$  a pour densité  $f_{X_t}(X')$  ou  $X' = X - rt - \frac{t}{\nu} \ln \left[ 1 - \mu\nu - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 \right]$ .

## 2.2 Introduction d'une volatilité stochastique

Nous souhaitons apporter une amélioration à la modélisation des indices actions en ajoutant un facteur de volatilité stochastique à l'aide de l'indice VIX. Ce choix a pour but d'introduire un paramètre qui permet de tenir compte de la non constance de la volatilité dans le temps et d'augmenter la survenance d'événements extrêmes.

### 2.2.1 Présentation de l'indice VIX (Volatility Index)

L'indice de volatilité VIX a été introduit pour la première fois en 1993 par le *Chicago Board Options Exchange* (CBOE). Le VIX, tel que nous le connaissons aujourd'hui, repose sur une méthode de calcul mise à jour en 2003 par le CBOE avec l'aide de Goldman Sachs. Cependant son historique remonte à 1990. Cet indice reflète la volatilité implicite à 30 jours du *S&P500*. Cette volatilité se déduit du prix des options d'achat et de vente ayant les deux premières échéances les plus proches. Le VIX est rapidement devenu le benchmark pour les volatilités des actions sur les marchés.

Nous pouvons retrouver une explication succincte de la méthode de calcul du VIX en **Annexe 6**. Présentons maintenant le modèle usité pour diffuser le VIX.

### 2.2.2 Le modèle de Heston et facteur de volatilité stochastique

Le modèle de Heston est une généralisation du modèle de Black & Scholes dans la mesure où il introduit une volatilité qui varie avec le temps, autrement dit une volatilité stochastique. Le processus de diffusion de ce modèle est représenté par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + v_t S_t dW_t \\ S_0 = S(0) \end{cases}$$

où  $W_t$  : mouvement brownien standard,

$\mu$  : taux de rentabilité attendu,

$v_t$  : volatilité de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$ .

La volatilité du sous-jacent à l'instant  $t$ ,  $v_t$ , suit le processus de Cox-Ingersoll-Ross suivant :

$$dv_t^2 = \lambda(\theta - v_t^2)dt + \sigma v_t dW_t$$

où  $\lambda$  la vitesse de retour à la moyenne,

$\theta$  la moyenne de la variance de long terme,

$\sigma$  la volatilité du processus,  
 $W_t$  un mouvement brownien standard.

A l'image du modèle de Heston, nous supposons que la variance, représentée à l'aide de l'indice VIX, suit un modèle de Cox-Ingersoll-Ross, dont l'EDS est écrite précédemment.

### 2.2.3 Estimation des paramètres

Nous estimons les paramètres de diffusion du VIX à l'aide de l'historique de la série et en utilisant les Moindres Carrés Ordinaires (MCO). Supposons que le niveau du VIX suit un modèle auto-régressif d'ordre 1 :

$$v_{t+\Delta t}^2 = \alpha + \beta v_t^2 + \varepsilon$$

Considérons alors le problème en temps discret :

$$v_{t+\Delta t}^2 - v_t^2 = \lambda(\theta - v_t^2)\Delta t + \sigma v_t(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

D'où

$$v_{t+\Delta t}^2 = \lambda\theta\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)v_t^2 + \sigma v_t(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

La méthode du *Bootstrapping* nous dispense d'évaluer le paramètre  $\sigma$  dans l'immédiat. De plus, pour une plus grande souplesse de notre générateur, nous souhaitons pouvoir modifier la moyenne de long terme de l'indice VIX qui sera un paramètre entrant de notre générateur. Il nous reste seulement à estimer la vitesse de retour vers la moyenne de long terme de la volatilité. Donc, par identification :

$$\beta = (1 - \lambda\Delta t)$$

D'où :

$$\lambda = \frac{(1 - \beta)}{\Delta t}$$

Sur l'historique mensuel de 1990 à 2010, nous obtenons :

Estimation des paramètres
$\lambda = 1.84$

## 2.3 *Bootstrapping* et modèle Variance Gamma

### 2.3.1 Application au *Bootstrapping*

#### Sans facteur de volatilité stochastique

Nous considérons pour l'instant qu'un indice action ne requiert pas d'amélioration au modèle de *Bootstrapping* à temps stochastique, autrement dit on ne tient pas compte du VIX. Nous expliquons la méthode utilisée à l'aide du Dow Jones, la technique étant identique pour le Dax. Soit  $(S_{t_i}^{DJ})_{1 \leq i \leq n+1}$  la série brute du Dow Jones, nous calculons alors l'historique :

$$H_{t_i}^{DJ} = \ln \left( \frac{S_{t_{i+1}}^{DJ}}{S_{t_i}^{DJ}} \right)$$

Centrons ces historiques. Leurs écart-types sont calculés à partir de l'historique des innovations,  $\sigma^{DJ} = 7.13 \times 10^{-2}$  et  $\sigma^{Dax} = 0.11$  et seront utiles lors de la mise en place du pont brownien.

Disposant des dates astronomiques où la montre Gamma marque un arrêt (grâce au pont Gamma explicité dans la partie II) et soit  $m$  ce nombre d'arrêts, nous leur associons les innovations cumulées des indices actions (Dax et Dow Jones) provenant des historiques  $(H_{t_i}^{DJ})_{1 \leq i \leq n}$  et  $(H_{t_i}^{Dax})_{1 \leq i \leq n}$ . Autrement dit, soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$  :

$$X_{t_{n+j}} = \mathbb{E}_{t_{n+j-1}}(X_{t_{n+j}}) + H_{t_i}^{DJ} - \omega$$

où  $\omega$  drift tel quel  $\omega = \ln(\mathbb{E}(\exp(H_{t_i}^{DJ})))$ .

Cependant, nous souhaitons retrouver la valeur des rendements aux dates où la montre astronomique marque l'arrêt (par exemple tous les trimestres), il faut alors mettre en oeuvre un **pont brownien**. Formellement un pont brownien se traduit de la manière suivante :

$$t_0 < t_1 < t_2 \Rightarrow X_{t_1} = X_{t_0} + \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}(X_{t_2} - X_{t_0}) + \sigma \sqrt{\frac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)}{t_2 - t_0}} \times \mathcal{N}(0, 1)$$

où  $t_1$  : la date astronomique (par exemple le début d'un trimestre) à laquelle nous souhaitons retrouver  $X_{t_1}$ ,

$\sigma$  : volatilité,

$t_0$  et  $t_2$  : instants astronomiques auxquels les rendements  $X_{t_0}$  et  $X_{t_2}$  sont connus.

La combinaison d'un pont gamma et un pont brownien tels qu'effectués recrée un processus Variance Gamma.

Ainsi pour  $k \geq 1$  où  $t_{n+k}$  date astronomique où nous souhaitons avoir la valeur du processus, nous avons :

$$S_{t_{n+k}}^{DJ} = S_{t_n}^{DJ} \exp(X_{t_{n+k}})$$

où  $X_{t_{n+k}}$  obtenu grâce au pont brownien.

Résumons formellement la méthode pour un scénario, ce principe restant globalement le même pour toutes les variables du modèle :

**Principe général pour la génération d'un scénario :**

- Extraire les innovations de l'historique de taille  $n$  (ici, les rendements logarithmiques),
- Générer une montre Gamma sur la plage de temps astronomique souhaitée,
- Extraire, à l'aide du pont Gamma, les dates astronomiques auxquelles la montre Gamma marque l'arrêt, notons  $m$  ce nombre d'arrêts,
- Tirer  $m$  entiers aléatoires avec remise dans  $\{1, \dots, n\}$ ,
- Accumuler les innovations (correspondantes aux entiers aléatoires générés) aux dates où la montre Gamma marque l'arrêt,
- Appliquer le pont brownien pour retrouver les valeurs aux dates astronomiques souhaitées.

**Avec facteur de volatilité stochastique**

Il s'agit alors d'intégrer le modèle comportant un facteur de volatilité stochastique dans la technique du *Bootstrapping*.

Concentrons nous dans un premier temps sur l'extraction de l'historique des innovations du VIX, ce dernier suivant un processus CIR.

$$H_{t_i}^{VIX} = \frac{1}{v_{t_{i-1}}} [v_{t_i}^2 - \lambda\theta\Delta t_i + v_{t_{i-1}}^2(1 - \lambda\Delta t_i)]$$

Nous en déduisons la variance à la date  $t_{n+j}$ ,  $j \in \mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$v_{t_{n+j}}^2 = \lambda\theta\Delta t + v_{t_{n+j-1}}^2(1 - \lambda\Delta t) + v_{t_{n+j-1}} H_{t_i}^{VIX}$$

Ainsi, pour  $t_{n+j}$ ,  $j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$  :

$$X_{t_{n+j}} = \mathbb{E}_{t_{n+j-1}}(X_{t_{n+j}}) + H_{t_i}^{DJ} \times \frac{v_{t_{n+j}}}{v_{t_n}} - \omega_t$$

où  $\omega_t$  drift tel que  $\omega_t = \ln(\mathbb{E}(\exp(H_{t_i}^{DJ} \times \frac{v_{t_{n+j}}}{v_{t_n}})))$ .

Ainsi après mise en oeuvre du pont brownien, avec  $k \geq 1$ , nous avons :

$$S_{t_{n+k}}^{DJ} = S_{t_n}^{DJ} \exp(X_{t_{n+k}})$$

où  $X_{t_{n+k}}$  obtenu grâce au pont brownien.

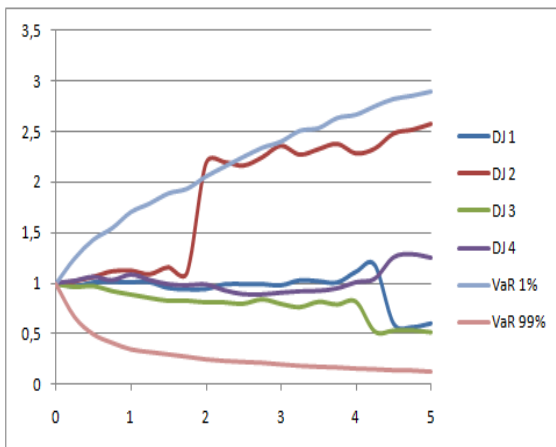
### 2.3.2 Exemples des simulations

Nous ne présentons ici les résultats concernant le Dow Jones seuls, ceux du Dax se trouvent en **An-nexe 7**. A horizon 5 ans, 4 exemples de simulations avec les VaR associées résultant de 10 000 simulations à pas de temps trimestriel sont présentés pour chaque graphique.

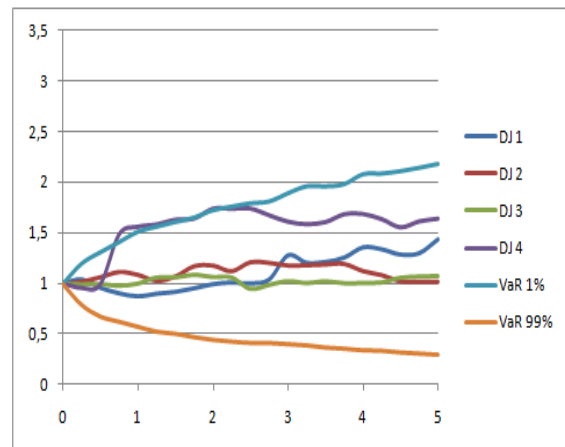
Les paramètres de la diffusion sont les suivants :

Série	Prix initial	Moyenne de long terme
Dow Jones	$S_{t_n}^{DJ} = 1$	
Dax	$S_{t_n}^{Dax} = 1$	
VIX	$v_{t_n} = 20$	$\theta = 20$

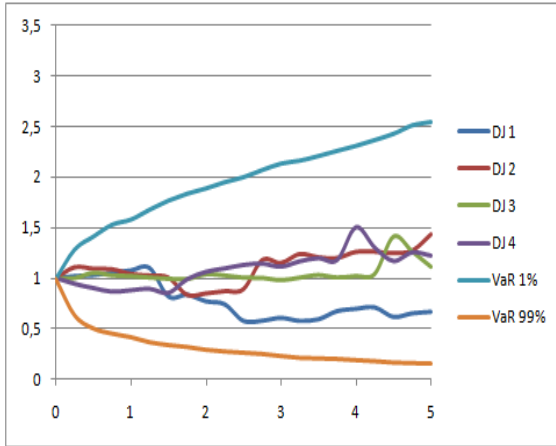
Ces graphiques présentent les résultats pour 3 paramètres différents de la montre Gamma et pour la montre astronomique et montrent l'apport de l'introduction d'un facteur de volatilité stochastique dans la survenance d'événements extrêmes.



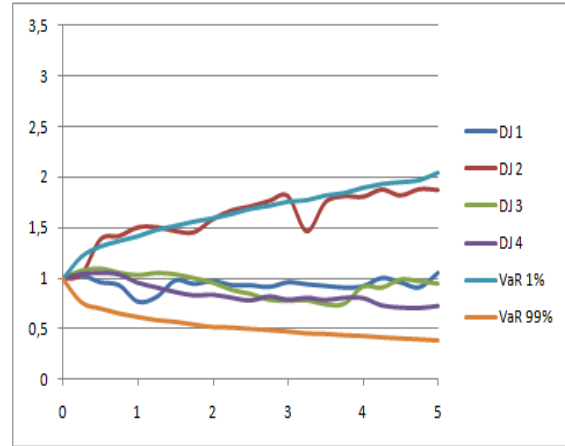
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ ) avec VIX



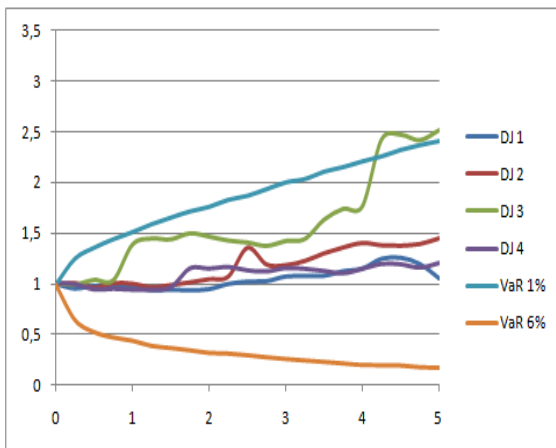
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ ) sans VIX



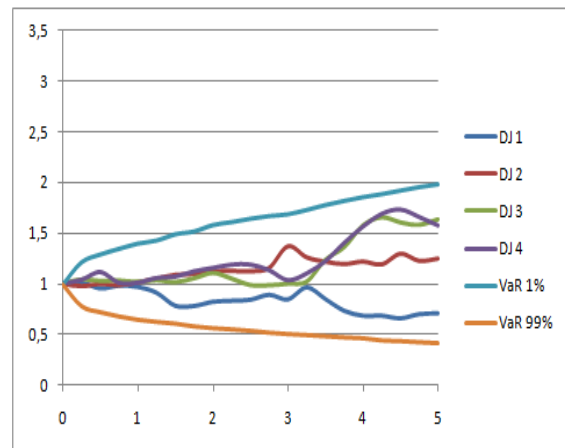
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ ) avec VIX



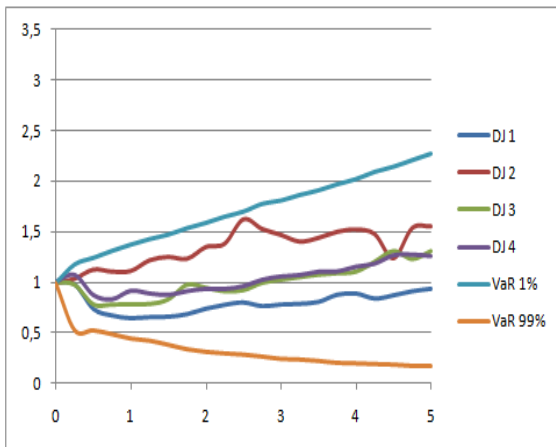
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ ) sans VIX



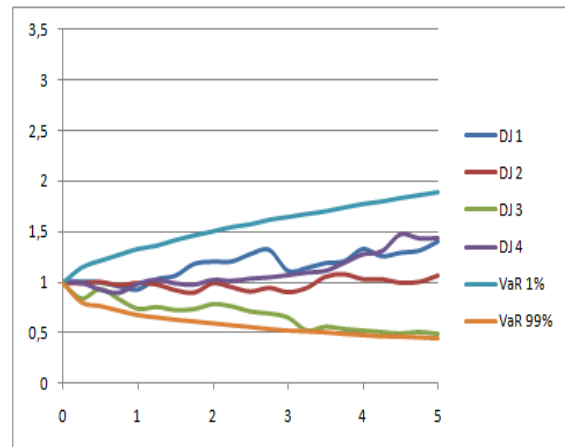
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ ) avec VIX



Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ ) sans VIX



Montre astronomique avec VIX



Montre astronomique sans VIX

Ainsi, plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  du processus Gamma est faible, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible. Autrement dit, plus la sévérité des événements extrêmes est importante. Remarquons également que l'introduction d'un facteur de volatilité stochastique produit le même phénomène à paramètre  $\frac{1}{\nu}$  inchangé. Les résultats concernant le Dax nous amènent aux mêmes constats.

Par la suite, nous modéliserons les indices actions en intégrant systématiquement le facteur de volatilité stochastique.

# Chapitre 3

## Le risque d'inflation

Le risque d'inflation naît de fluctuations de l'indice des prix à la consommation. L'impact de l'inflation est fort sur un bilan en assurance : il touche le prix des actifs ainsi que les prestations futures.

### 3.1 Les modèles à un facteur

#### 3.1.1 Présentation générale

Les modèles à un facteur sont, en principe, des modèles caractérisant les taux d'intérêt dans la mesure où ils incluent le retour à la moyenne. De manière générale, l'équation différentielle stochastique se présente, sous la probabilité historique  $P$ , de la manière suivante :

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t$$

En appliquant le théorème de Girsanov à  $\varphi(t) = -\lambda(t)$ , on obtient :

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \lambda(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^Q$$

où  $W_t^Q$  mouvement brownien sous la probabilité  $Q$ .

Plusieurs modèles de taux découlent de cet EDS. Le tableau suivant regroupe les principaux modèles de taux à un facteur :

Modèle	EDS	$r > 0$	$r \sim$
Vasicek	$dr_t = \lambda(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$	Non	$\mathcal{N}$
CIR	$dr_t = \lambda(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	Oui	$NC\chi_2$
Dothan	$dr_t = ar_tdt + \sigma dW_t$	Oui	$LN$
Vasicek Exponentiel	$dr_t = r_t[\eta - a\ln(r_t)]dt + \sigma r_t dW_t$	Oui	$LN$
Hull White	$dr_t = \lambda(\mu_t - r_t)dt + \sigma dW_t$	Non	$\mathcal{N}$
Black Karasinski	$dr_t = r_t[\eta_t - a\ln(r_t)]dt + \sigma r_t dW_t$	Oui	$LN$
CIR++	$r_t = x_t + \varphi_t, dx_t = \lambda(\mu - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t$	Oui	$SNC\chi_2$
EEV	$r_t = x_t + \varphi_t, dx_t = x_t[\eta - a\ln(x_t)]dt + \sigma x_t dW_t$	Oui	$SLN$

Ayant donné une description générale des modèles de taux court à un facteur, nous allons présenter dans les sections suivantes les deux modèles employés dans notre étude.

#### 3.1.2 Le modèle de Vasicek

Dès 1977, Oldrich Vasicek s'est inspiré du modèle de Black Scholes pour fonder la théorie moderne des taux d'intérêt. Un modèle de retour à la moyenne, comme le propose Vasicek, semble donc approprié

pour décrire ce mécanisme. Ce modèle est un cas particulier du modèle de Hull White, il part du principe que le prix de l'actif sous-jacent suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck (OU).

Son EDS est la suivante :

$$\begin{cases} dr_t = \lambda(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \\ r_0 = q(0) \end{cases}$$

où  $\lambda$  est la vitesse de retour à la moyenne, qui permet de déterminer le temps moyen de retour à la moyenne de long terme

$\mu$  la moyenne de long terme,

$\sigma$  la volatilité de l'actif sous-jacent,

$W_t$  un mouvement brownien standard.

En appliquant le lemme d'Ito à  $Y_t = \exp(-\lambda t)r_t$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} dY_t = \lambda\mu\exp(\lambda t)dt + \sigma\exp(\lambda t)dW_t \\ Y_0 = Y(0) \end{cases}$$

Donc en intégrant entre  $s$  et  $t$ ,  $s \leq t$ , nous obtenons la résolution suivante :

$$r_t = r_s e^{-\lambda(t-s)} + \mu(1 - e^{-\lambda(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u$$

Puis, nous utilisons le schéma d'Euler de discrétisation :

$$r_{t+\Delta t} = r_t \exp(-\lambda\Delta t) + \mu(1 - \exp(-\lambda\Delta t)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\lambda\Delta t)}{2\lambda}} \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  suit une  $N(0, 1)$ .

Sous la mesure risque neutre, les deux premiers moments conditionnels de  $r_t$  sont donnés par :

$$\mathbb{E}(r_t | \mathfrak{F}_s) = r_s e^{-\lambda(t-s)} + \mu(1 - e^{-\lambda(t-s)})$$

$$Var(r_t | \mathfrak{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda(t-s)})$$

### 3.1.3 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross se caractérise par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dr_t = \lambda(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \\ r_0 = r(0) \end{cases}$$

Notons que les paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  ont la même signification que dans le modèle de Vasicek. La partie déterministe est identique à celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck alors que la partie stochastiques contient en plus le terme  $\sqrt{r_t}$ . Ce terme implique la positivité de  $r_t$ ; dans le cas où  $2\lambda\mu > \sigma^2$ , cela entraîne même sa stricte positivité.  $\sigma\sqrt{r_t}$  signifie que plus le taux d'intérêt est élevé, plus la volatilité est élevée.

Selon le modèle CIR, le taux suit une loi du  $\chi_2$  non centrée de densité :

$$p_{r_t} = p_{\chi_2(\nu, \theta_t)/c_t}(x) = c_t p_{\chi_2(\nu, \theta_t)}(xc_t)$$



$$\begin{aligned} \text{où } c_t &= \frac{4\lambda}{\sigma^2(1-e^{-4\lambda})} \\ \nu &= \frac{4\lambda\mu}{\sigma^2} \\ \theta_t &= c_t r_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Sous la mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$ , les deux premiers moments conditionnels sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_t | \mathfrak{F}_s) &= r_s e^{-\lambda(t-s)} + \mu(1 - e^{-\lambda(t-s)}) \\ \text{Var}(r_t | \mathfrak{F}_s) &= r_s \frac{\sigma^2}{\lambda} \left( e^{-\lambda(t-s)} - e^{-2\lambda(t-s)} \right) + \frac{\mu\sigma^2}{2\lambda} \left( 1 - e^{-2\lambda(t-s)} \right)^2 \end{aligned}$$

Les deux principaux modèles monofactoriels ainsi présentés, nous choisissons d'utiliser celui de Vasicek pour modéliser le taux d'inflation  $q_t$ . En effet, il paraît mieux adapter dans la mesure où il permet la négativité de ce taux. Dans la section suivante, nous présenterons comment intégrer Vasicek dans une méthode de *Bootstrapping*.

## 3.2 *Bootstrapping* et modèle de Vasicek

### 3.2.1 Estimation des paramètres du modèle de Vasicek

Nous calibrons le modèle à l'aide de l'historique des prix de l'actif sous-jacent par les Moindres Carrés Ordinaires. En considérant que le prix de l'actif sous-jacent suit un modèle auto-régressif d'ordre 1, la régression linéaire effectuée est la suivante :

$$q_{t+\Delta t} = \alpha + \beta q_t + \epsilon$$

où  $q_t$  : taux d'inflation à la date  $t$ .

Rappelons que nous avons :

$$q_{t+\Delta t} = q_t \exp(-\lambda\Delta t) + \mu(1 - \exp(-\lambda\Delta t)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\lambda\Delta t)}{2\lambda}} \epsilon$$

Donc, par identification, nous obtenons :

$$\begin{cases} \beta = \exp(-\lambda\Delta t) \\ \alpha = \mu(1 - \beta) \\ sd(\epsilon) = \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\lambda\Delta t)}{2\lambda}} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{\ln(\beta)}{\Delta t} \\ \mu = \frac{\beta}{1-\alpha} \\ \sigma = sd(\epsilon) \sqrt{\frac{-2\ln(\alpha)}{\Delta t(1-\alpha^2)}} \end{cases}$$

Dans la mesure où nous nous basons sur une méthode de *Bootstrapping*, nous n'avons pas à calibrer  $\sigma$  dans l'immédiat. Pour une plus grande souplesse de notre générateur, nous fixons la moyenne de long terme du taux d'inflation,  $\mu$ , comme input de notre modèle. Il ne nous reste alors qu'à estimer la vitesse de retour à la moyenne et nous obtenons :

Estimation des paramètres
---------------------------

$\lambda = 1.16$
------------------

### 3.2.2 Application au *Bootstrapping*

Il s'agit alors d'intégrer ce modèle dans la technique de *Bootstrapping*. Nous allons alors procéder différemment par rapport au cas du risque action.

Nous construisons notre historique des innovations  $(H_{t_i}^{CPI})_{1 \leq i \leq n}$  à l'aide du  $\lambda$  estimé (vitesse de retour à la moyenne) et de l'input  $\mu$  (moyenne de long terme) :

$$H_{t_i}^{CPI} = [q_{t_{i+1}} - \mu(1 - \exp(-\lambda\Delta t_i)) - q_{t_i} \exp(-\lambda\Delta t_i)]$$

Dériftons alors l'historique ainsi obtenu et calculons son écart-type  $\sigma = 0.79$  qui nous sera utile lors de la mise en place du pont brownien.

Soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$ . Nous en déduisons le taux d'inflation à la date  $t_{n+j}$ , date d'un arrêt de la montre Gamma, de la manière suivante :

$$q_{t_{n+j}} = \mu(1 - \exp(-\lambda\Delta t)) + q_{t_{n+j-1}} \exp(-\lambda\Delta t) + H_{t_i}^{CPI}$$

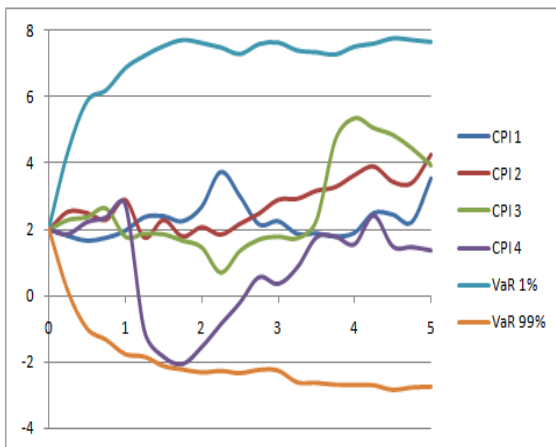
Il faut ensuite appliquer le pont brownien pour obtenir la valeur du taux d'inflation aux dates astronomiques  $(t_{n+k})_{k \geq 1}$  souhaitées.

### 3.2.3 Exemples des simulations

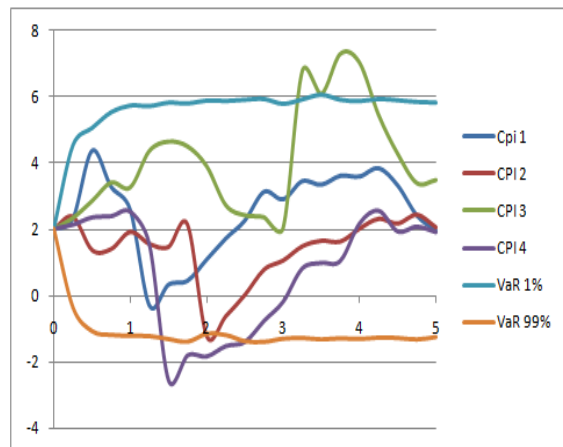
A horizon 5 ans, 10 000 simulations sont effectuées à pas de temps trimestriel avec comme paramètres :

Série	Prix initial	Moyenne de long terme
Taux d'inflation	$q_{t_n} = 2$	$\mu = 2, 5$

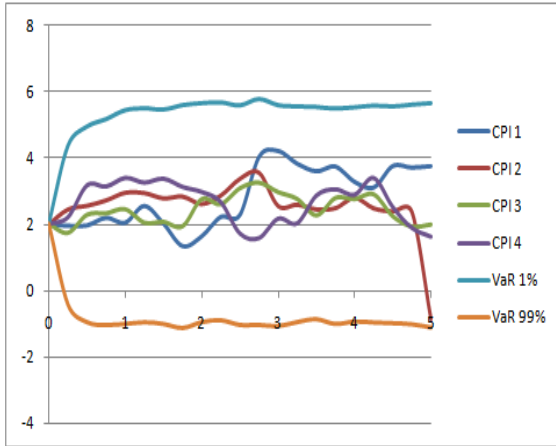
Nous présentons 4 exemples de simulations avec les VaR associées pour chaque montre.



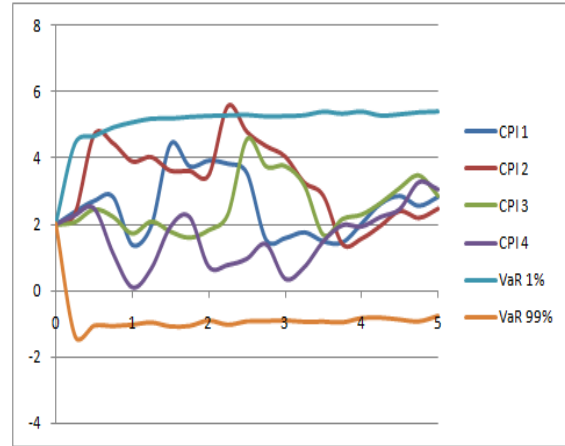
Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{v} = 0,1$ )



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{v} = 0,5$ )



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )



Simulations avec montre calendrier classique

Ainsi, plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  du processus Gamma est faible, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible. Autrement dit, plus la sévérité des événements extrêmes est importante.



# Chapitre 4

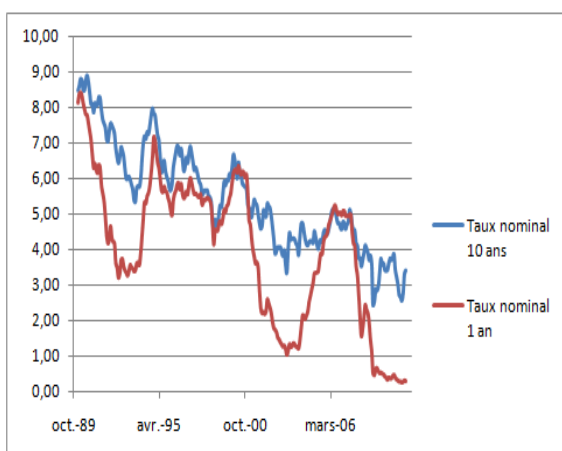
## Le risque de taux

Deux modèles de taux sont mis en place : un pour les taux nominaux et un pour les taux réels. Dans le cas des taux réels, nous déduisons les taux nominaux de la diffusion des taux réels et du taux d'inflation. Nous implémentons ces deux approches afin de voir laquelle répond le mieux aux besoins de notre ESG.

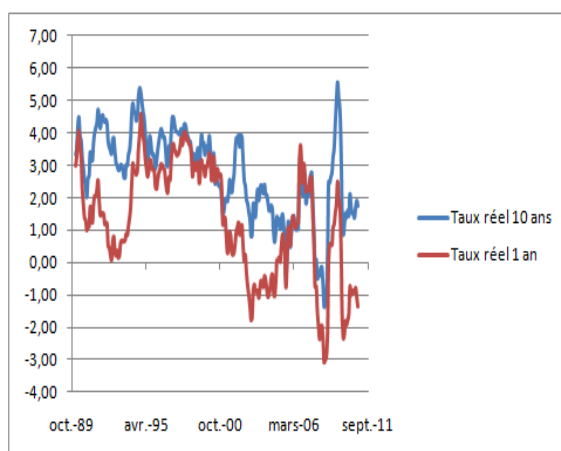
### 4.1 Les modèles multifactoriels

#### 4.1.1 Présentation générale

Dans le chapitre précédent, les modèles monofactoriels les plus populaires ont été exposés. Utiliser un tel modèle dans le cas des taux d'intérêt signifierait qu'un unique facteur est à l'origine de l'évolution de la courbe des taux. Les limites de ces derniers sont alors multiples. Ils ne permettent pas de rendre compte des différentes formes de la courbes des taux et impliquent également que les taux évoluent de façon corrélée pour les différentes maturités. Un modèle à deux facteurs semble alors mieux adapter. Les graphiques suivants illustrent l'imparfaite corrélation des taux réels à 1 an et à 10 ans, ainsi que des taux nominaux à 1 an et à 10 ans :



Historique des taux nominaux



Historique des taux réels

#### 4.1.2 Le modèle de Hull & White à deux facteurs

Le modèle de Hull & White à deux facteurs fait partie des modèles de taux à deux facteurs. Ce modèle aura pour fin de diffuser les taux réels. Notons  $r_t$  le taux d'intérêt réel à court terme, ici 1 an, et  $l_t$  le taux d'intérêt à long terme, ici 10 ans. Ce modèle reprend la dynamique de taux avec retour à la moyenne de

Vasicek. Les EDS des deux taux sont :

$$\begin{aligned} dr_t &= \lambda_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dW_{r,t} \\ dl_t &= \lambda_l(\theta_l - l_t)dt + \sigma_l dW_{l,t} \end{aligned}$$

où  $\lambda_r$  : vitesse de convergence du taux court vers le taux long,

$\sigma_r$  : volatilité du taux court,

$W_{r,t}$  : mouvement brownien standard,

$\lambda_l$  : vitesse de retour à la moyenne du taux long,

$\theta_l$  : moyenne de long terme du taux long,

$\sigma_l$  : volatilité du taux long,

$W_{l,t}$  : mouvement brownien standard.

A l'image du modèle de Vasicek (modèle à un facteur), nous obtenons, en appliquant le lemme d'Ito à  $e^{-\lambda_r t} r_t$  et  $e^{-\lambda_l t} l_t$ , la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta t} &= r_t \exp(-\lambda_r \Delta t) + l_t (1 - \exp(-\lambda_r \Delta t)) + \sigma_r \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\lambda_r \Delta t)}{2\lambda_r}} \varepsilon_{r,t} \\ l_{t+\Delta t} &= l_t \exp(-\lambda_l \Delta t) + \theta_l (1 - \exp(-\lambda_l \Delta t)) + \sigma_l \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\lambda_l \Delta t)}{2\lambda_l}} \varepsilon_{l,t} \end{aligned}$$

Il est possible de déduire le prix à l'instant  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  à l'aide d'une formule de la forme :

$$P(t, T) = e^{A(T-t) - B(T-t)l_t - B'(T-t)r_t}$$

Nous ne reconstituerons pas les prix des obligations zéro-coupons dans cette étude, cela pourra néanmoins être effectué par la suite.

### 4.1.3 Le modèle de Longstaff & Schwartz

Le modèle de Longstaff & Schwartz [26] fait également partie des modèles de taux à deux facteurs. Ce modèle aura pour fin de diffuser les taux nominaux. Notons  $r_t$  le taux d'intérêt nominal à court terme, ici 1 an, et  $l_t$  le taux d'intérêt nominal à long terme, ici 10 ans. Ce modèle reprend la dynamique de taux avec retour à la moyenne de Cox-Ingersoll-Ross. Les EDS des deux taux sont :

$$\begin{aligned} dr_t &= \lambda_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \\ dl_t &= \lambda_l(\theta_l - l_t)dt + \sigma_l \sqrt{l_t} dW_{l,t} \end{aligned}$$

où  $\lambda_r$  : vitesse de convergence du taux court vers le taux long,

$\sigma_r$  : volatilité du taux court,

$W_{r,t}$  : mouvement brownien standard,

$\lambda_l$  : vitesse de retour à la moyenne du taux long,

$\theta_l$  : moyenne de long terme du taux long,

$\sigma_l$  : volatilité du taux long,

$W_{l,t}$  : mouvement brownien standard.

Notons que ce modèle n'admet pas de discrétisation exacte, nous considérerons donc les processus en temps discrets :

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta t} &= \lambda_r l_t \Delta t + r_t (1 - \lambda_r \Delta t) + \sigma_r \sqrt{r_t} (W_{r,t+\Delta t} - W_{r,t}) \\ l_{t+\Delta t} &= \lambda_l \theta_l \Delta t + l_t (1 - \lambda_l \Delta t) + \sigma_l \sqrt{l_t} (W_{l,t+\Delta t} - W_{l,t}) \end{aligned}$$

A l'image du modèle de Hull & White à deux facteurs, une formule existe pour calculer le prix à l'instant  $t$  des obligations zéro-coupons de maturité  $T$ . Nous pourrions reconstituer les prix des obligations zéro-coupons ultérieurement.

## 4.2 *Bootstrapping* et modèles à deux facteurs

### 4.2.1 Estimation des paramètres des modèles

Eu égard à la dépendance entre le taux d'intérêt à court terme et le taux d'intérêt à long terme, la méthode classique des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) semble inappropriée pour estimer les paramètres d'un modèle à 2 facteurs. A l'image de la méthode utilisée dans le modèle d'Ahlgrim et al. [2005], nous envisageons une technique s'appuyant sur deux étapes successives des MCO, que nous pourrions appeler Double Moindres Carrés. La procédure est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Etape 1 : } l_{t+\Delta t} &= \alpha + \beta l_t + \gamma \varepsilon_{l,t} \\ \text{Etape 2 : } r_{t+\Delta t} &= \alpha' \widehat{l}_t + \beta' r_t + \gamma' \varepsilon_{r,t} \end{aligned}$$

Autrement dit, l'étape 1 consiste à appliquer de manière classique les MCO pour estimer les paramètres du taux long. En revanche, l'étape 2 diverge dans la mesure où l'estimation des paramètres du taux court dépend de l'estimation faite à l'étape 1 de  $\widehat{l}_t$  :

$$\widehat{l}_t = \alpha + \beta l_{t-\Delta t}$$

Ainsi, les variables  $\widehat{l}_t$  et  $r_t$  expliquent  $r_{t+\Delta t}$  et  $\alpha' + \beta' = 1$ . Nous pouvons alors écrire le problème de la manière suivante et estimer les paramètres à l'aide des MCO :

$$(r_{t+\Delta t} - r_t) = \alpha'(\widehat{l}_t - r_t) + \gamma' \varepsilon_{r,t}$$

Dans la mesure où nous nous basons sur une méthode de *Bootstrapping*, nous n'avons pas à estimer les paramètres  $\sigma_l$  et  $\sigma_r$  dans l'immédiat. Pour une plus grande souplesse du modèle, nous choisissons de fixer la moyenne de long terme du taux 10 ans  $\theta_l$  comme paramètre entrant de notre générateur. Il ne nous reste alors qu'à calibrer  $\lambda_l$  vitesse de retour à la moyenne du taux long et  $\lambda_r$  vitesse de convergence du taux court vers le taux long.

Dans le cas du modèle de Hull & White et donc de la modélisation des taux réels, nous obtenons par identification les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_l &= -\ln\left(\frac{\beta}{\Delta t}\right) \\ \lambda_r &= -\ln\left(\frac{1-\alpha'}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle de Longstaff & Schwartz et donc de la modélisation des taux nominaux, par identification, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \frac{1-\beta}{\Delta t} \\ \lambda_r &= \frac{\alpha'}{\Delta t} \end{aligned}$$

Finalement, nous avons les résultats suivants :

Estimation des paramètres	
Taux réels	Taux nominaux
$\lambda_l = 1.03$	$\lambda_l = 0.17$
$\lambda_r = 0.38$	$\lambda_r = 1.33$

### 4.2.2 Application au *Bootstrapping*

#### Modèle de Hull & White à 2 facteurs (HW)

Intégrons alors le modèle de Hull & White à 2 facteurs nous permettant de diffuser les taux réels dans la technique de *Bootstrapping*.

Nous construisons nos historiques des innovations  $(H_{t_i}^{LT})_{1 \leq i \leq n}$  du taux réel long à l'aide du  $\lambda_l$  estimé, vitesse de retour à la moyenne du taux réel long et de l'input  $\theta_l$ , moyenne de long terme du taux réel 10 ans et  $(H_{t_i}^{CT})_{1 \leq i \leq n}$  à l'aide de la vitesse de convergence du taux court vers le taux long  $\lambda_r$  :

$$H_{t_i}^{LT} = [l_{t_{i+1}}^{reel} - \theta_l(1 - \exp(\lambda_l \Delta t_i)) - l_{t_i}^{reel} \exp(\lambda_l \Delta t_i)]$$

$$H_{t_i}^{CT} = [r_{t_{i+1}}^{reel} - l_{t_i}^{reel}(1 - \exp(\lambda_r \Delta t_i)) - r_{t_i}^{reel} \exp(\lambda_r \Delta t_i)]$$

où  $l_{t_i}^{reel}$  : taux d'intérêt réel 10 ans à la date  $t_i$ ,

$r_{t_i}^{reel}$  : taux d'intérêt réel 1 an à la date  $t_i$ .

Dédriftons alors les historiques ainsi obtenus et calculons leurs écart-types  $\sigma_l = 0.86$  et  $\sigma_r = 0.91$  qui nous seront utiles lors de la mise en place du pont brownien.

Soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$ . Nous en déduisons les taux réels à long terme et à court terme à la date  $t_{n+j}$ , date d'un arrêt de la montre Gamma, de la manière suivante :

$$l_{t_{n+j}}^{reel} = \theta_l(1 - \exp(\lambda_l \Delta t)) + l_{t_{n+j-1}}^{reel} \exp(\lambda_l \Delta t) + H_{t_i}^{LT}$$

$$r_{t_{n+j}}^{reel} = l_{t_{n+j-1}}^{reel}(1 - \exp(\lambda_r \Delta t)) + r_{t_{n+j-1}}^{reel} \exp(\lambda_r \Delta t) + H_{t_i}^{CT}$$

Il faut ensuite appliquer le pont brownien pour obtenir la valeur des taux réels aux dates astronomiques  $(t_{n+k})_{k \geq 1}$  souhaitées. Enfin pour retrouver les taux nominaux, nous effectuons l'addition suivante :

$$l_{t_{n+k}} = l_{t_{n+k}}^{reel} + q_{t_{n+k}}$$

$$r_{t_{n+k}} = r_{t_{n+k}}^{reel} + q_{t_{n+k}}$$

où  $q_{t_{n+k}}$  : taux d'inflation à la date  $t_{n+k}$ ,

$l_{t_{n+k}}$  et  $r_{t_{n+k}}$  : taux nominaux respectivement de long terme et de court terme à la date  $t_{n+k}$ ,

$l_{t_{n+k}}^{reel}$  et  $r_{t_{n+k}}^{reel}$  : taux réels respectivement de long terme et de court terme à la date  $t_{n+k}$ .

#### Modèle de Longstaff & Schwartz (LS)

Intégrons le modèle de Longstaff & Schwartz nous permettant de diffuser les taux nominaux dans la technique de *Bootstrapping*.

Nous construisons nos historiques des innovations  $(H_{t_i}^{LT})_{1 \leq i \leq n}$  du taux nominal long à l'aide du  $\lambda_l$  estimé, vitesse de retour à la moyenne du taux nominal long et de l'input  $\theta_l$ , moyenne de long terme du taux nominal de long terme et  $(H_{t_i}^{CT})_{1 \leq i \leq n}$  à l'aide de la vitesse de convergence du taux nominal court vers le taux nominal long  $\lambda_r$  :

$$H_{t_i}^{LT} = \frac{1}{\sqrt{l_{t_i}}} [l(t_{i+1}) - \theta_l \lambda_l \Delta t_i - l_{t_i}(1 - \lambda_l \Delta t_i)]$$

$$H_{t_i}^{CT} = \frac{1}{\sqrt{r_{t_i}}} [r(t_{i+1}) - l_{t_i} \lambda_r \Delta t_i - r_{t_i}(1 - \lambda_r \Delta t_i)]$$



où  $l_{t_i}$  : taux d'intérêt nominal 10 ans à la date  $t_i$ ,  
 $r_{t_i}$  : taux d'intérêt nominal 1 an à la date  $t_i$ .

Dédriftons alors les historiques ainsi obtenus et calculons leurs écart-types  $\sigma_l = 0.17$  et  $\sigma_r = 0.25$  qui nous seront utiles lors de la mise en place du pont brownien.

Soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$ . Nous en déduisons les taux nominaux à court terme et à long terme à la date  $t_{n+j}$  de la manière suivante :

$$l_{t_{n+j}} = \theta_l \lambda_l \Delta t + l_{t_{n+j-1}} (1 - \lambda_l \Delta t) + \sqrt{l_{t_{n+j-1}}} H_{t_i}^{LT}$$

$$r_{t_{n+j}} = l_{t_{n+j-1}} \lambda_r \Delta t + r_{t_{n+j-1}} (1 - \lambda_r \Delta t) + \sqrt{r_{t_{n+j-1}}} H_{t_i}^{CT}$$

Il faut ensuite mettre en place un pont brownien pour obtenir la valeur des taux aux dates astronomiques  $(t_{n+k})_{k \geq 1}$  souhaitées.

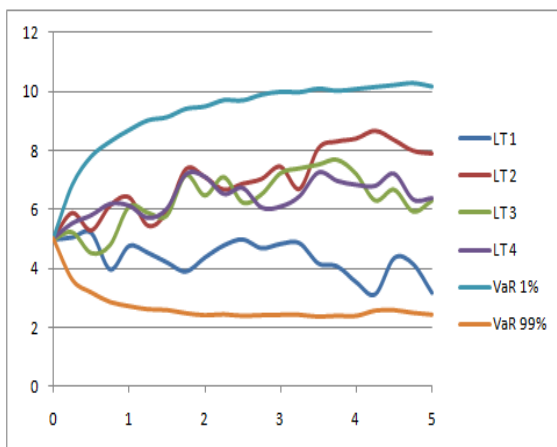
### 4.2.3 Exemples de simulations

A horizon 5 ans, 10 000 simulations à pas de temps trimestriel sont effectués avec comme paramètres :

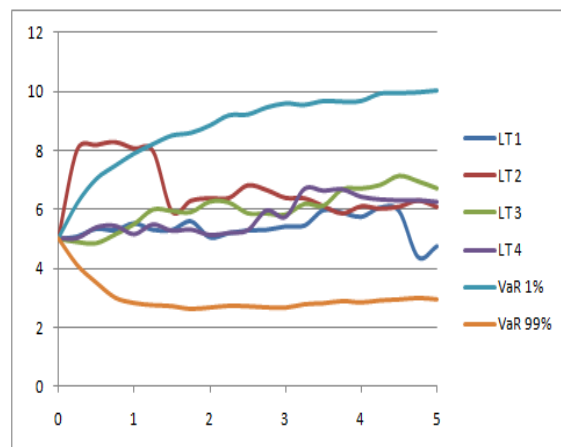
Série	Prix initial	Moyenne de long terme
Taux d'inflation	$q_{t_n} = 2$	$\mu = 2,5$
Taux nominal 1 an	$r_{t_n} = 3$	
Taux nominal 10 ans	$l_{t_n} = 5$	$\theta_l = 6,5$
Taux réel 1 an	$r_{t_n}^{reel} = 1$	
Taux réel 10 ans	$l_{t_n}^{reel} = 3$	$\theta_l = 4$

Nous présentons 4 exemples de simulations avec les VaR associées pour chaque modèle (LS et HW) et chaque montre.

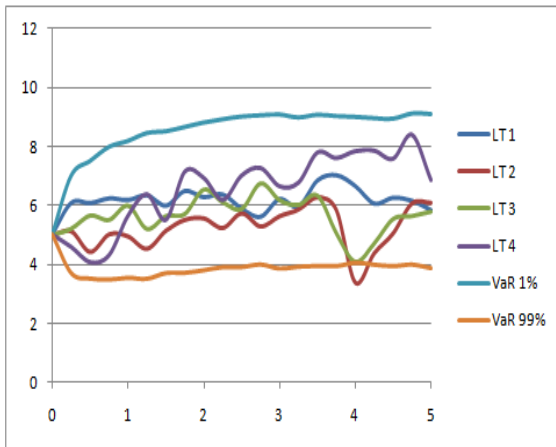
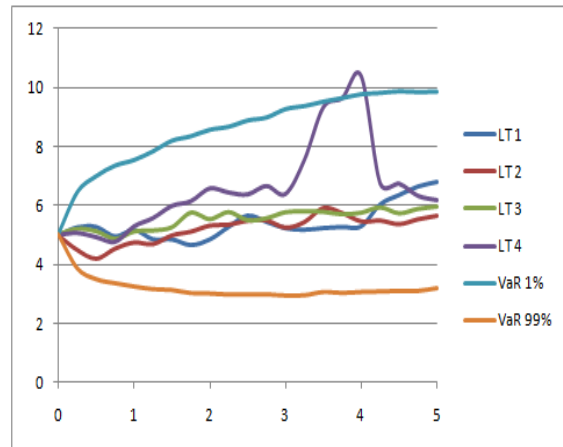
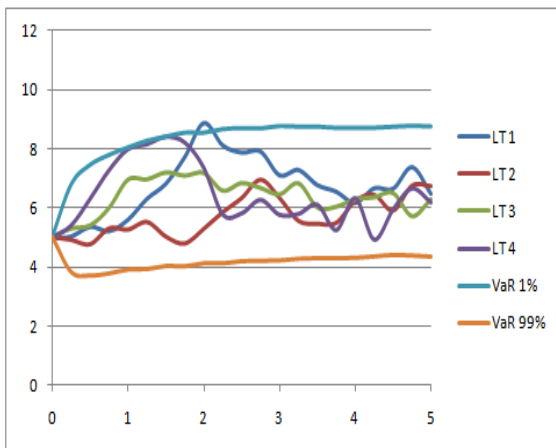
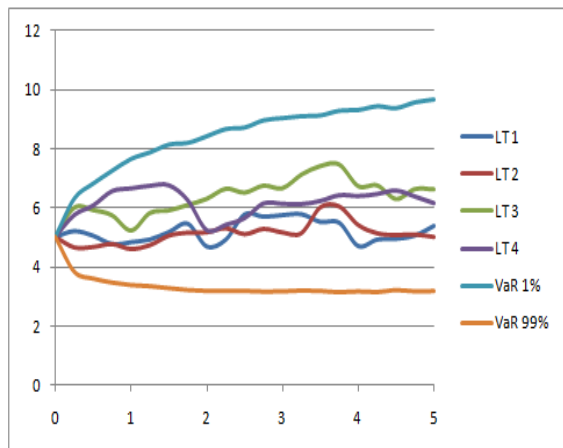
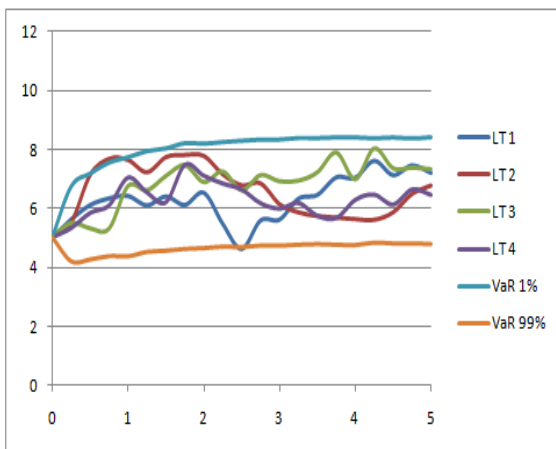
#### Taux d'intérêt nominal 10 ans



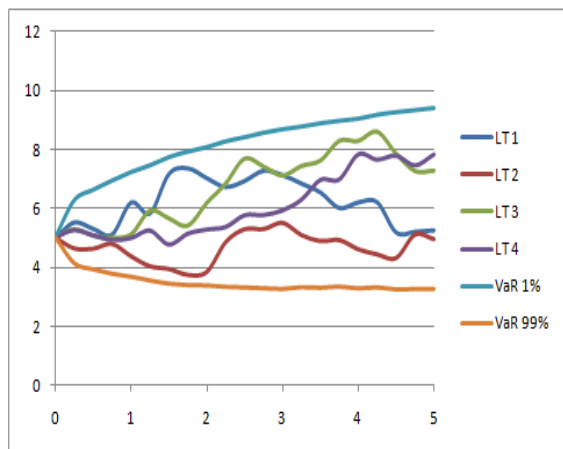
Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{v} = 0, 1$ )



Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{v} = 0, 1$ )

Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,5$ )Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,5$ )Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )

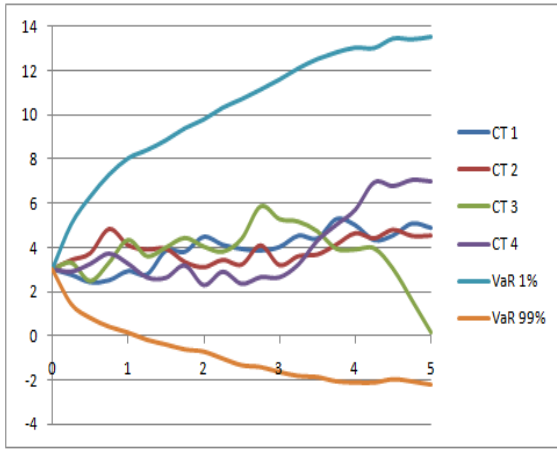
Simulations HW - Montre calendrier



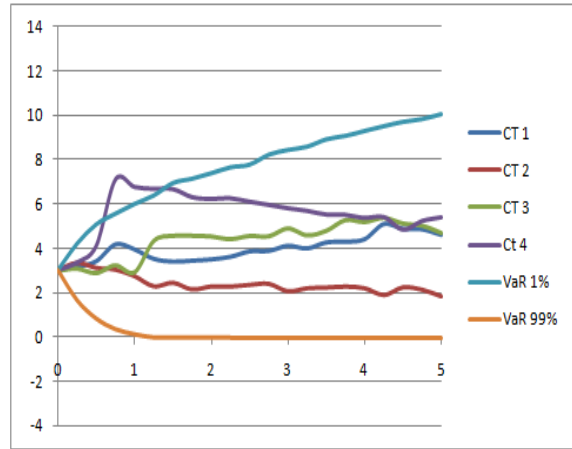
Simulations LS - Montre calendrier

Quelque soit le modèle utilisé (HW ou LS), plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  du processus Gamma est faible, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible. Autrement dit, plus la sévérité des événements extrêmes est importante. Les VaR du taux long calculée à l'aide du modèle LS paraissent néanmoins plus élevées en valeur absolue que celles calculées à l'aide du modèle HW.

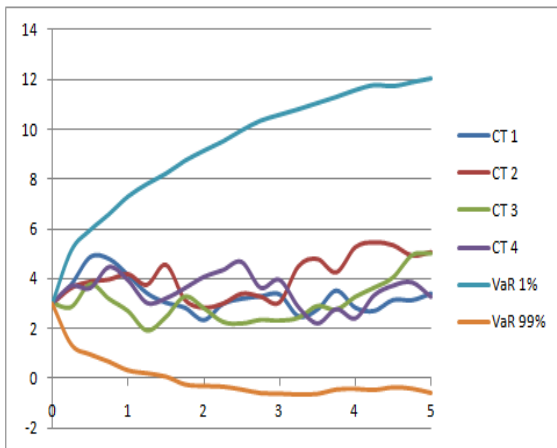
Taux d'intérêt nominal 1 an



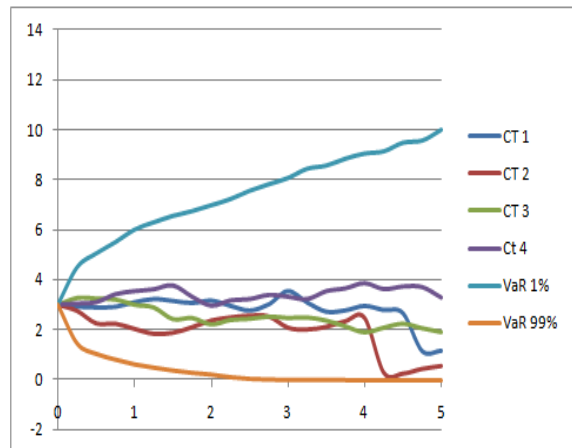
Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0, 1$ )



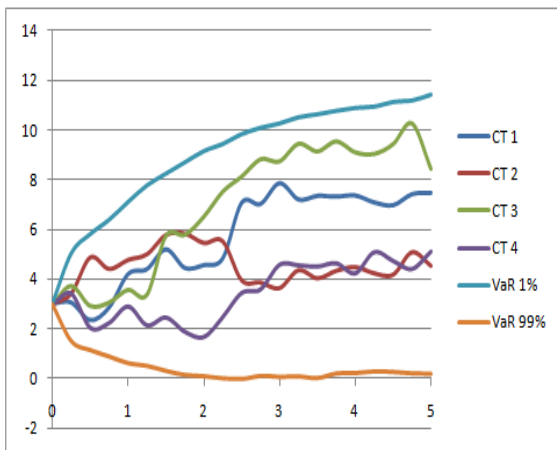
Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0, 1$ )



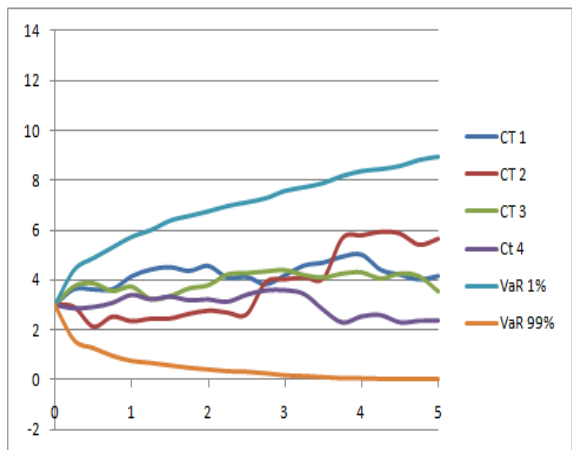
Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0, 5$ )



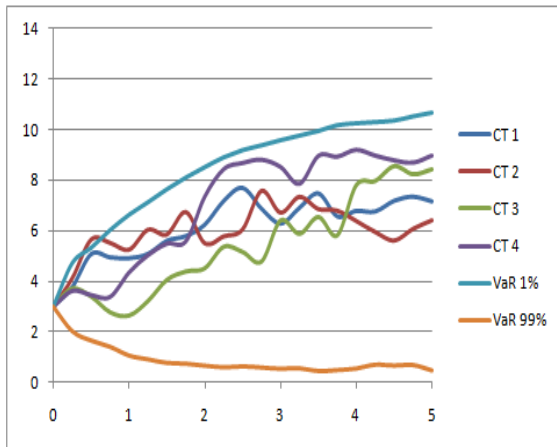
Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0, 5$ )



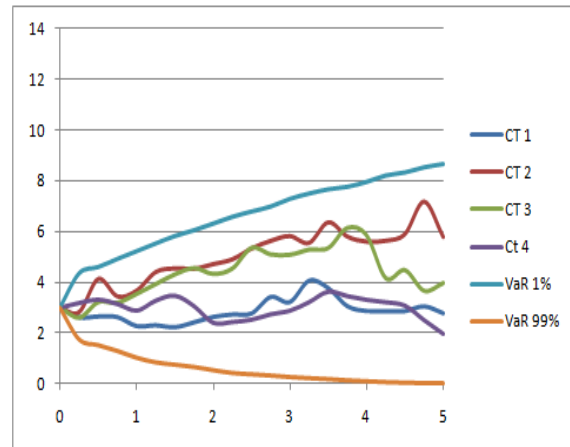
Simulations HW - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )



Simulations LS - Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )



Simulations HW - Montre calendrier



Simulations LS - Montre calendrier

Quelque soit le modèle utilisé (HW ou LS), plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  du processus Gamma est faible, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible. Autrement dit, plus la sévérité des événements extrêmes est importante. Les VaR du taux à 1 an calculée à l'aide du modèle LS paraissent sembler moins élevées en valeur absolue que celles calculées à l'aide du modèle HW. De plus, les VaR 99% du modèle HW sont très largement négatives ; elles atteignent jusqu'à  $-2\%$ . Ce résultat ne semble à première vue pas raisonnable.

## Chapitre 5

# Les autres risques : crédit, immobilier et change

### 5.1 Le risque de crédit

Le risque de crédit correspond au risque qu'une entité dans laquelle l'assureur a des intérêts fasse défaut ou que ce dernier subisse une dégradation de sa qualité de crédit. Ce phénomène est ici représenté par le *swap spread* 10 ans. En assurance, cela concerne notamment des émetteurs obligataires et des réassureurs.

Afin de modéliser le *swap spread* 10 ans, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross présenté dans le chapitre "Le risque d'inflation" sera utilisé.

#### 5.1.1 Estimation des paramètres du modèle CIR

Rappelons dans un premier temps, l'équation différentielle stochastique du modèle CIR :

$$\begin{cases} dr_t = \lambda(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \\ r_0 = r(0) \end{cases}$$

où  $\lambda$  est la vitesse de retour à la moyenne,  
 $\mu$  la moyenne de long terme,  
 $\sigma$  la volatilité de l'actif sous-jacent,  
 $W_t$  un mouvement brownien standard.

Le modèle est calibré à l'aide de l'historique des prix de l'actif sous-jacent par les Moindres Carrés Ordinaires. En considérant que le prix de l'actif sous-jacent suit un modèle auto-régressif d'ordre 1, La régression linéaire effectuée est la suivante :

$$r_{t+\Delta t} = \alpha + \beta r_t + \epsilon$$

En considérant le problème en temps discret, nous avons :

$$r_{t+\Delta t} = \lambda\mu\Delta t + r_t(1 - \lambda_r\Delta t) + \sigma\sqrt{r_t}(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

Comme précédemment, nous n'estimerons ni  $\sigma$  ni  $\mu$ . Par identification, nous obtenons :

$$\lambda = \frac{1 - \beta}{\Delta t}$$

Finalement, nous avons :

Estimation des paramètres
---------------------------

$\lambda = 0.43$
------------------

### 5.1.2 *Bootstrapping* et modèle CIR

Il s'agit alors d'intégrer ce modèle dans la technique de *Bootstrapping*.

Construisons notre historique des innovations  $(H_{t_i}^{SPREAD})_{1 \leq i \leq n}$  à l'aide du  $\lambda$  estimé (vitesse de retour à la moyenne) et de l'input  $\mu$  (moyenne de long terme) :

$$H_{t_i}^{SPREAD} = \frac{1}{\sqrt{r_{t_i}}} [r(t_{i+1}) - \mu\lambda\Delta t_i - r_{t_i}(1 - \lambda\Delta t_i)]$$

Dériftons alors l'historique ainsi obtenu et calculons son écart-type  $\sigma = 0.18$  qui nous sera utile lors de la mise en place du pont brownien.

Soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$ . Nous en déduisons le taux d'inflation à la date  $t_{n+j}$ , date d'un arrêt de la montre Gamma, de la manière suivante :

$$r_{t_{n+j}} = \mu\lambda\Delta t + r_{t_{n+j-1}}(1 - \lambda\Delta t) + \sqrt{r_{t_{n+j-1}}} H_{t_i}^{SPREAD}$$

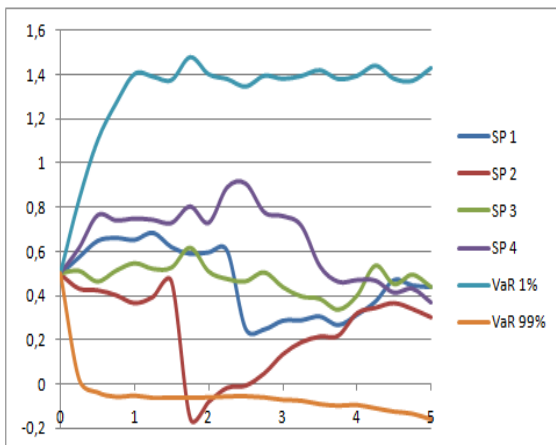
Appliquons le pont brownien pour obtenir la valeur du *swap spread* 10 ans aux dates astronomiques  $(t_{n+k})_{k \geq 1}$  souhaitées.

### 5.1.3 Exemples de simulations

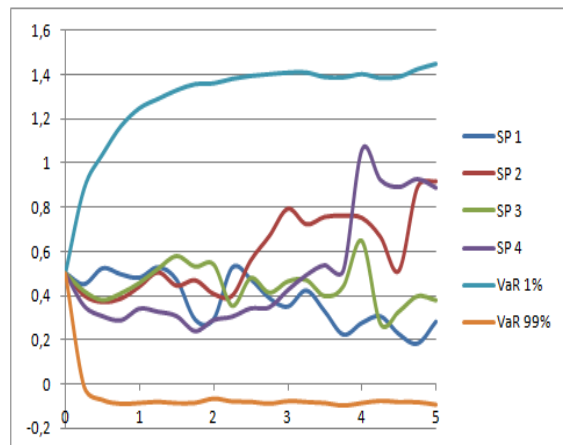
A horizon 5 ans, 10 000 simulations à pas de temps trimestriel sont effectuées avec comme paramètres :

Série	Prix	Moyenne de long terme
Swap spread 10Y	$r_{t_n} = 0.5$	$\mu = 1$

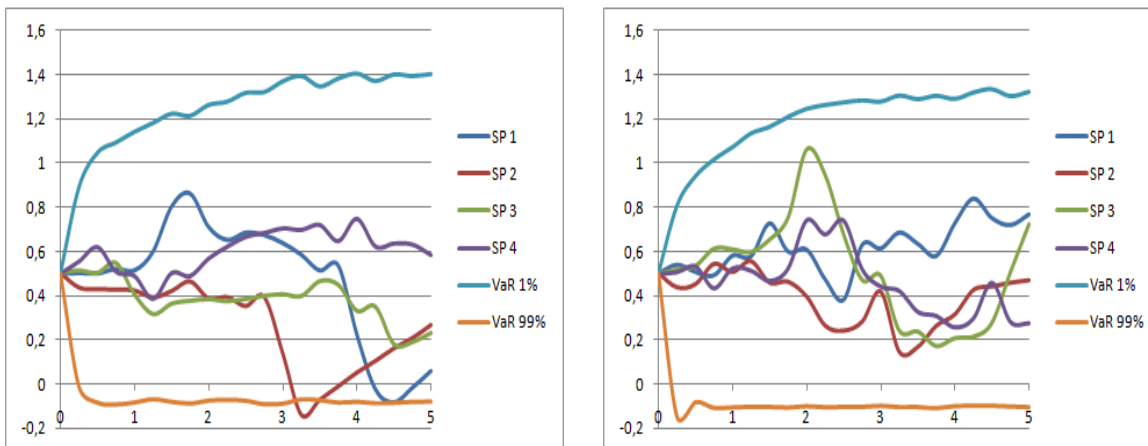
Nous présentons 4 exemples de simulations avec les VaR associées pour chaque montre.



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,1$ )



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,5$ )

Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )

Simulations avec montre calendrier classique

Plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  du processus Gamma est faible, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible. Autrement dit, plus la sévérité des événements extrêmes est importante.

## 5.2 Le risque immobilier et le risque de change

Le risque immobilier correspond au risque de fluctuations des prix de l'immobilier, ici représenté par l'indice *Case Shiller 10*. Notons que ces actifs sont en théorie moins volatiles que les actions.

Le risque de change correspond au risque de fluctuation du cours du change entre deux devises, ici le taux de change entre l'euro et le dollar. En assurance, ce risque apparaît notamment lorsque les actifs sont libellés dans une devise différente de l'engagement qu'ils doivent représenter au passif.

Nous modélisons ces deux catégories d'actif à l'aide du modèle Variance Gamma présenté dans le chapitre relatif au risque action. Nous ne tiendrons évidemment pas compte d'un facteur de volatilité stochastique dans cette section.

### 5.2.1 *Bootstrapping* et modèle Variance Gamma

A l'image des indices actions sans prise en compte d'un facteur de volatilité stochastique, cette section s'attache à appliquer la méthode de *Bootstrapping* au taux de change et au cours de l'indice immobilier. Soit  $(S_{t_i}^{FX})_{1 \leq i \leq n+1}$  la série historique du taux de change et  $(S_{t_i}^{RE})_{1 \leq i \leq n+1}$  l'historique du *CaseShiller10*. Nous en déduisons les innovations  $(H_{t_i}^{FX})_{1 \leq i \leq n}$  et  $(H_{t_i}^{Dax})_{1 \leq i \leq n}$  :

$$H_{t_i}^{FX} = \ln \left( \frac{S_{t_{i+1}}^{FX}}{S_{t_i}^{FX}} \right)$$

$$H_{t_i}^{RE} = \ln \left( \frac{S_{t_{i+1}}^{RE}}{S_{t_i}^{RE}} \right)$$

Dédriftons alors les historiques ainsi obtenus et calculons leurs écart-types  $\sigma^{FX} = 5.34 \times 10^{-2}$  et  $\sigma^{RE} = 2.48 \times 10^{-2}$  utilisé lors de la mise en place du pont brownien.

Soit  $t_{n+j}, j \in \mathbb{R}^+$  une date astronomique à laquelle la montre Gamma marque l'arrêt et  $i$  entier tiré

aléatoirement tel que  $1 \leq i \leq n$  :

$$X_{t_{n+j}}^{FX} = \mathbb{E}_{t_{n+j-1}}(X_{t_{n+j}}) + H_{t_i}^{FX} - \omega^{FX}$$

$$X_{t_{n+j}}^{RE} = \mathbb{E}_{t_{n+j-1}}(X_{t_{n+j}}) + H_{t_i}^{RE} - \omega^{RE}$$

où  $\omega^{FX}$  drift tel quel  $\omega^{FX} = \ln(\mathbb{E}(\exp(H_{t_i}^{FX})))$ ,  
 $\omega^{RE}$  drift tel quel  $\omega^{RE} = \ln(\mathbb{E}(\exp(H_{t_i}^{RE})))$ .

Appliquons alors un pont brownien pour retrouver la valeur des rendements du change et de l'immobilier aux dates astronomiques marquant le début d'un trimestre.

Ainsi pour  $k \geq 1$  où  $t_{n+k}$  date astronomique où nous souhaitons avoir la valeur du processus, nous avons :

$$S_{t_{n+k}}^{FX} = S_{t_n}^{FX} \exp(X_{t_{n+k}}^{FX})$$

$$S_{t_{n+k}}^{RE} = S_{t_n}^{RE} \exp(X_{t_{n+k}}^{RE})$$

où  $X_{t_{n+k}}^{FX}$  et  $X_{t_{n+k}}^{RE}$  obtenus grâce au pont brownien.

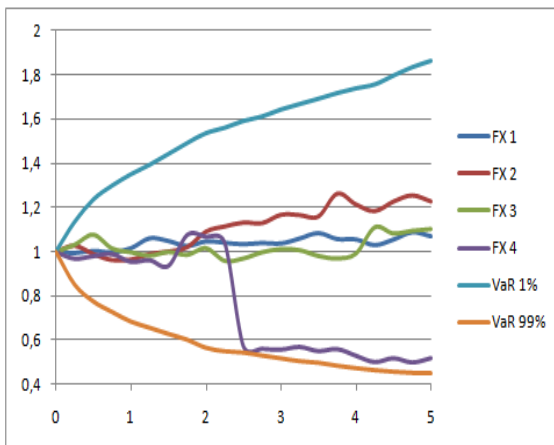
## 5.2.2 Exemples de simulations

10 000 simulations à pas de temps trimestriel à horizon 5 ans avec comme paramètres entrants :

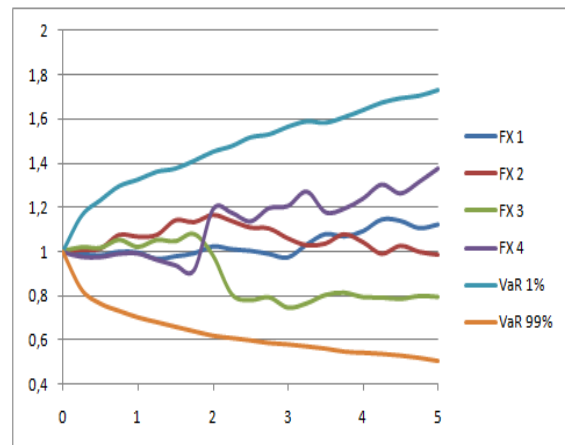
Série	Prix
Case Schiller 10	$S_{t_n}^{RE} = 1$
EUR/USD	$S_{t_n}^{FX} = 1$

Nous présentons 4 exemples de simulations avec les VaR associées.

### Taux de change EURUSD

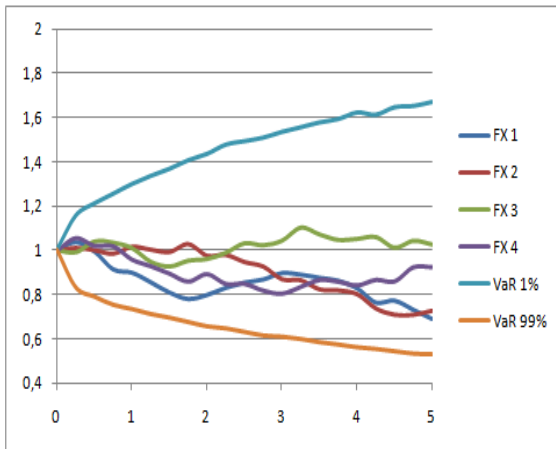


Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ )

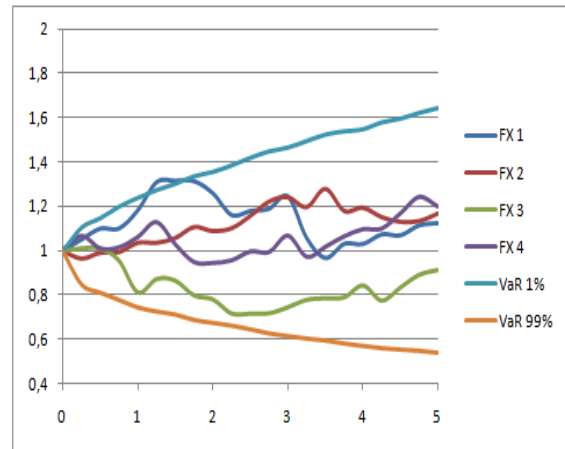


Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ )



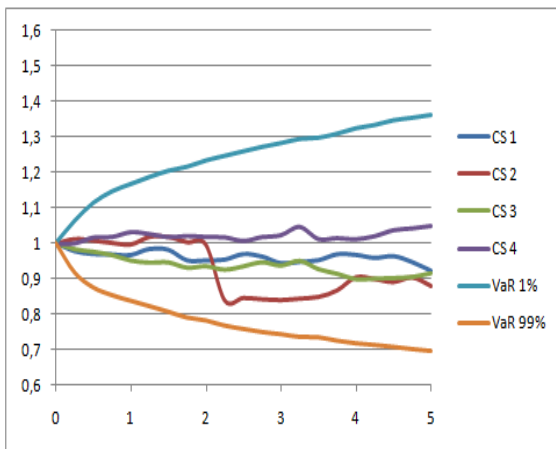


Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )

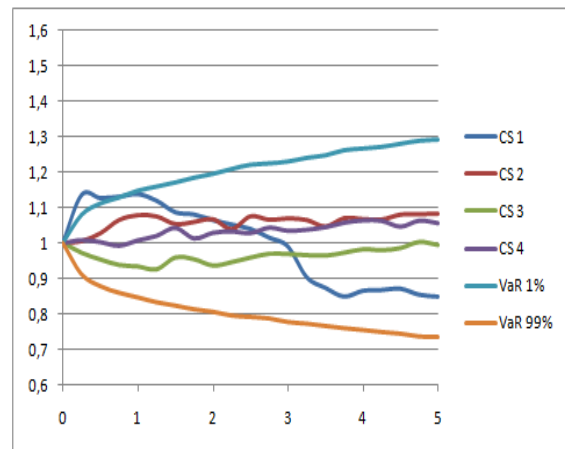


Simulations avec montre astronomique

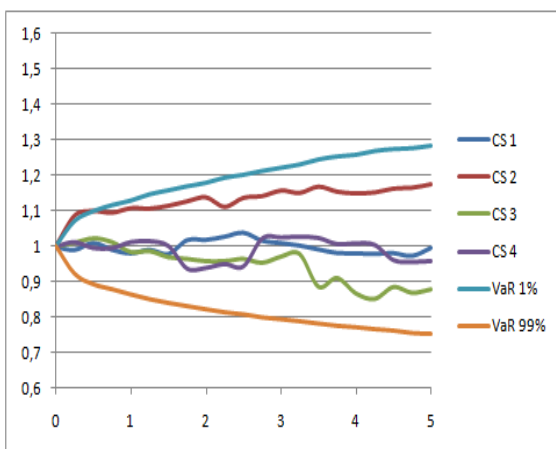
*Case-Schiller 10*



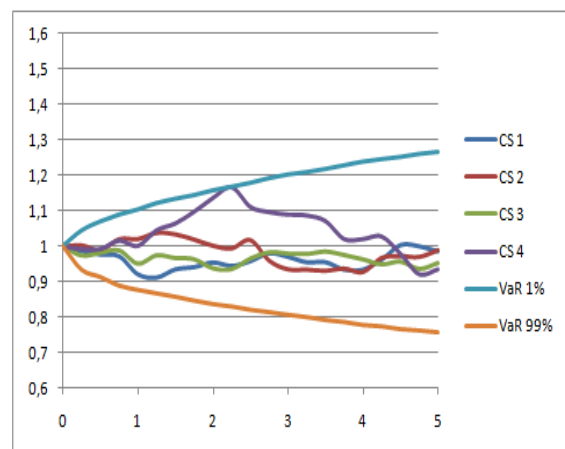
Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ )



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ )



Simulations avec montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )



Simulations avec montre astronomique

Que ce soit pour le change ou pour l'indice immobilier, les graphiques ci-dessus montrent que plus le paramètre  $\frac{1}{\nu}$  de la montre Gamma est petit, plus la  $VaR_{1\%}$  est élevée et la  $VaR_{99\%}$  faible et donc plus la

sévérité des événements extrêmes est importante. Ce qui est bien l'objectif de l'introduction d'une montre Gamma.

## Quatrième partie

# Application numérique : la génération de scénarios économiques à horizon moyen terme



# Chapitre 1

## Analyse descriptive des historiques

Nous travaillons ici à l'aide des historiques à fréquence trimestrielle explicités précédemment :  $(H_{t_i}^{DJ})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{Dax})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{CPI})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{LT})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{CT})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{FX})_{n \geq i \geq 1}$ ,  $(H_{t_i}^{RE})_{n \geq i \geq 1}$  et  $(H_{t_i}^{SPREAD})_{n \geq i \geq 1}$ . Disposant des historiques de 1990 à 2010 :  $n = 84$ .

### 1.1 Statistiques descriptives

Calculons les différents moments d'ordre 2 à 4 pour chaque série de données :

- La **volatilité** est définie comme étant l'écart-type. L'écart-type est l'outil statistique le plus connu pour mesurer la dispersion par rapport à une moyenne.
- Le **kurtosis** ou coefficient d'aplatissement, correspond à une mesure de l'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire réelle. Ce coefficient prend des valeurs comprises entre 0 et l'infini. Le kurtosis d'une loi normale est de 3.

On distingue 3 cas :

- Coefficient  $> 3$  : on parle de distribution leptokurtique (Distribution pointue)
- Coefficient  $< 3$  : on parle de distribution platikurtique (Distribution plate, à queue épaisse)
- Coefficient  $= 3$  : on parle de distribution mésokurtique (Distribution proche d'une normale)

Dans nos calculs, le kurtosis d'une normale vaut 0.

- Le **skewness** mesure l'asymétrie d'une distribution. Une valeur positive du coefficient d'asymétrie révèle une distribution plus étendue vers les valeurs positives, alors qu'une valeur négative met en évidence une distribution plus étendue vers les valeurs négatives. Pour un investissement, le skewness permet de relever les extrêmes d'une distribution des rendements : elle permet soit de désigner des cas de pertes extrêmes (skewness négative élevée), soit des cas de gains extrêmes (skewness positive élevée). Le skewness d'une loi normale est 0.

Le tableau suivant récapitule les différents moments de nos historiques centrés :

	Dow Jones	Dax	Taux nominal 10Y	Taux nominal 1Y	Taux d'inflation	Taux réel 10 Y	Taux réel 1Y	Taux de change	Immobilier	Swap spread 10Y
Volatilité	0,07	0,11	0,18	0,26	0,80	0,86	0,92	0,05	0,02	0,19
Kurtosis	0,98	1,00	0,55	1,36	4,90	3,25	4,58	0,53	0,55	6,28
Skewness	-0,78	-0,86	0,43	-0,34	-0,56	-0,39	-0,66	-0,70	-0,74	-1,12

FIGURE 1.1 – Statistiques descriptives

## 1.2 Les corrélations historiques

Ce tableau renseigne les corrélations historiques des variables :

	Dow Jones	Dax	Taux nominal 10Y	Taux nominal 1Y	Taux d'inflation	Taux réel 10 Y	Taux réel 1Y	Taux de change	Immobilier	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,79</b>	<b>0,26</b>	<b>0,25</b>	0,13	0,02	-0,06	-0,03	<b>0,15</b>	0,08
Dax		1,00	<b>0,36</b>	<b>0,44</b>	0,05	0,10	0,13	-0,20	<b>0,12</b>	0,07
Taux nominal 10 ans			1,00	<b>0,67</b>	<b>0,10</b>	<b>0,38</b>	<b>0,26</b>	-0,23	<b>0,11</b>	<b>0,32</b>
Taux nominal 1 an				1,00	<b>0,19</b>	<b>0,13</b>	<b>0,32</b>	-0,12	<b>0,37</b>	<b>0,21</b>
Taux d'inflation					1,00	-0,82	-0,80	0,18	<b>0,14</b>	0,11
Taux réel 10 ans						1,00	<b>0,87</b>	-0,30	-0,11	0,06
Taux réel 1 an							1,00	-0,31	-0,04	0,02
Taux de change								1,00	0,04	-0,05
Immobilier									1,00	0,13
Swap spread 10 ans										1,00

FIGURE 1.2 – Statistiques descriptives

Parmi les résultats attendus, nous constatons les fortes corrélations des indices actions; des taux d'intérêt nominaux long terme et court terme; des taux réel long terme et court terme; de l'inflation et des taux nominaux; des taux réels et des taux nominaux; du swap spread avec les taux nominaux; des indices actions avec les taux nominaux et enfin de l'immobilier avec les taux nominaux, l'inflation et les indices actions.

## Chapitre 2

# La génération de scénarios économiques à horizon 5 ans

### 2.1 Paramètres d'entrée

A horizon 5 ans, 10 000 scénarios sont générés à pas de temps trimestriels. Nous utilisons comme *inputs* les données à fin décembre 2010 :

Série	Prix	Moyenne de long terme
Dow Jones	11 577	
Dax	6914	
VIX	17,75	20
Case Schiller 10	155,86	
EUR/USD	1,34	
Taux d'inflation	1.64	2,5
Taux nominal 1 an	0,27	
Taux nominal 10 ans	3,39	5
Swap spread 10 ans	0,08	0,5

Présentons alors les principaux résultats obtenus.

### 2.2 Moments d'ordre 1 et 2

Calculons les moments d'ordre 1 à 2 à un horizon de 1 ans pour les simulations effectuées :

		Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Montre Calendrier	<b>Moyenne</b>	11577,70	6914,07	1,34	155,92	3,65	0,31	3,85	2,48	2,23	0,24
	<b>Volatilité</b>	2221,56	1955,19	0,14	7,63	0,62	0,28	0,72	1,13	1,12	0,13
Montre Gamma 1	<b>Moyenne</b>	11577,78	6914,21	1,34	155,80	3,67	0,31	3,71	2,31	2,20	0,25
	<b>Volatilité</b>	2213,73	1984,24	0,14	7,62	0,62	0,28	0,87	1,21	1,16	0,13
Montre Gamma 0,5	<b>Moyenne</b>	11577,27	6915,36	1,34	155,89	3,67	0,31	3,56	2,23	2,14	0,25
	<b>Volatilité</b>	2231,42	2041,75	0,14	8,02	0,63	0,28	0,97	1,27	1,20	0,13
Montre Gamma 0,1	<b>Moyenne</b>	11578,44	6916,29	1,34	155,86	3,66	0,31	2,95	2,03	1,98	0,26
	<b>Volatilité</b>	2819,31	2648,08	0,15	8,11	0,62	0,27	1,29	1,40	1,40	0,14

FIGURE 2.1 – Statistiques à horizon 1 an

A horizon 1 an, nous observons une relative bonne conservation des moyennes et des volatilités en fonction de la montre utilisée. Le paramètre 0,1 pour la montre Gamma semble néanmoins un peu trop extrême.



## Chapitre 3

# Analyse des corrélations

### 3.1 Stabilité des corrélations

Stabilité des corrélations en fonction de la montre utilisée

Analysons les corrélations à horizon 1 an résumées dans les tableaux suivants :

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,85</b>	0,03	<b>0,18</b>	<b>0,28</b>	<b>0,32</b>	0,24	0,02	0,25	0,09
Dax		1,00	-0,12	0,15	<b>0,34</b>	<b>0,44</b>	0,25	0,19	0,16	0,08
Taux de change			1,00	0,04	-0,24	-0,12	-0,24	-0,33	0,18	-0,04
Immobilier				1,00	0,11	0,35	0,02	0,07	0,12	0,11
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,64</b>	0,80	0,52	0,11	0,30
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,47	0,62	0,17	0,18
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,58	0,14	0,26
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,21	0,14
Taux d'inflation									1,00	0,10
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.1 – Coefficients de corrélation à 1 an avec la montre calendrier

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,83</b>	0,03	<b>0,18</b>	<b>0,28</b>	<b>0,30</b>	0,19	0,04	0,24	0,08
Dax		1,00	-0,12	0,13	<b>0,33</b>	<b>0,42</b>	0,19	0,18	0,14	0,08
Taux de change			1,00	0,03	-0,20	-0,09	-0,17	-0,27	0,16	-0,06
Immobilier				1,00	0,09	0,30	0,00	0,04	0,12	0,11
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,59</b>	0,63	0,45	0,10	0,29
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,36	0,52	0,15	0,17
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,54	0,24	0,17
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,12	0,12
Taux d'inflation									1,00	0,07
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.2 – Coefficients de corrélation à 1 an avec la montre Gamma 1

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,81</b>	0,02	<b>0,22</b>	<b>0,27</b>	<b>0,30</b>	0,17	0,04	0,21	0,05
Dax		1,00	-0,13	0,16	<b>0,32</b>	<b>0,40</b>	0,17	0,17	0,12	0,03
Taux de change			1,00	0,04	-0,21	-0,10	-0,16	-0,27	0,15	-0,03
Immobilier				1,00	0,10	0,29	0,00	0,04	0,14	0,07
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,56</b>	0,56	0,44	0,08	0,24
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,32	0,50	0,14	0,10
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,53	0,26	0,15
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,09	0,06
Taux d'inflation									1,00	0,09
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.3 – Coefficients de corrélation à 1 an avec la montre Gamma 0,5

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,80</b>	0,03	<b>0,15</b>	<b>0,27</b>	<b>0,25</b>	0,18	0,10	0,19	0,02
Dax		1,00	-0,09	0,10	<b>0,30</b>	<b>0,34</b>	0,18	0,19	0,12	0,01
Taux de change			1,00	0,04	-0,15	-0,06	-0,12	-0,21	0,13	0,00
Immobilier				1,00	0,09	0,22	0,03	0,07	0,08	0,09
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,41</b>	0,42	0,35	0,15	0,14
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,17	0,34	0,09	0,03
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,50	0,35	0,05
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	0,08	0,01
Taux d'inflation									1,00	0,07
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.4 – Coefficients de corrélation à 1 an avec la montre Gamma 0,1

Nous remarquons une bonne conservation générale des corrélations historiques quelque soit la montre utilisée. Illustrons cela à travers plusieurs exemples. La corrélation historique entre le Dax et le Dow Jones est de 79% quand les corrélations des simulations à horizon 1 an sont de 85% pour la montre calendrier, 83% pour la montre Gamma 1, 81% pour la montre Gamma 0.5 et enfin de 80% pour la montre Gamma 0.1. Ces dernières sont relativement plus élevées, mais cela vient probablement de l'introduction du facteur de volatilité stochastique. De même, il y a une bonne conservation de la dépendance entre le Dow Jones et l'immobilier, avec une corrélation de 15% et 18% pour la montre calendrier, 18% pour la montre Gamma 1, 22% pour la montre Gamma 0.5 ainsi que 15% pour la montre Gamma 0.1.

Concentrons nous sur les corrélations des taux nominaux et des indices actions. Comme constaté sur les tableaux, les coefficients historiques sont assez bien conservés. Pour le taux nominal 10 ans et 1 an, la dépendance historique est de 67% quand les corrélations à 1 an sont de 64% (montre calendrier), 59% (montre Gamma 1), 56% (montre Gamma 0.5) et 41% (montre Gamma 0.1) dans le cas du modèle de Longstaff & Schwartz (LS). Nous pouvons émettre une réserve quant à l'utilisation d'un paramètre très sévère (comme 0,1) pour la mise en place de la montre Gamma.

### Stabilité des corrélations dans le temps

Analysons les coefficients de corrélation à horizons 1 an, 2 ans et 5 ans dans le cas de la montre Gamma 1 :

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,83</b>	0,03	<b>0,18</b>	<b>0,28</b>	<b>0,30</b>	0,19	0,04	0,24	0,08
Dax		1,00	-0,12	0,13	<b>0,33</b>	<b>0,42</b>	0,19	0,18	0,14	0,08
Taux de change			1,00	0,03	-0,20	-0,09	-0,17	-0,27	0,16	-0,06
Immobilier				1,00	0,09	0,30	0,00	0,04	0,12	0,11
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,59</b>	0,63	0,45	0,10	0,29
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,36	0,52	0,15	0,17
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,54	0,24	0,17
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,12	0,12
Taux d'inflation									1,00	0,07
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.5 – Coefficients de corrélation à 1 an

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,83</b>	0,02	<b>0,19</b>	<b>0,27</b>	<b>0,28</b>	0,17	-0,01	0,21	0,07
Dax		1,00	-0,12	0,14	<b>0,32</b>	<b>0,40</b>	0,18	0,14	0,12	0,06
Taux de change			1,00	0,04	-0,21	-0,09	-0,20	-0,31	0,15	-0,04
Immobilier				1,00	0,11	0,30	0,01	0,00	0,11	0,11
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,58</b>	0,63	0,43	0,08	0,29
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,31	0,42	0,13	0,16
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,49	0,18	0,21
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,24	0,08
Taux d'inflation									1,00	0,09
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.6 – Coefficients de corrélation à 2 ans

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	<b>0,82</b>	0,02	<b>0,18</b>	<b>0,25</b>	<b>0,27</b>	0,12	-0,07	0,12	0,07
Dax		1,00	-0,11	0,13	<b>0,30</b>	<b>0,39</b>	0,13	0,07	0,07	0,07
Taux de change			1,00	0,03	-0,23	-0,10	-0,14	-0,31	0,09	-0,03
Immobilier				1,00	0,10	0,29	0,00	-0,03	0,08	0,09
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	<b>0,56</b>	0,51	0,39	0,06	0,28
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,22	0,31	0,08	0,16
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,44	0,26	0,19
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,12	0,09
Taux d'inflation									1,00	0,07
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 3.7 – Coefficients de corrélation à 5 ans

De manière générale, nous observons une bonne stabilité des corrélations dans le temps. Prenons par

exemple la dépendance entre le Dow Jones et le Dax, les corrélations sont de 83% à 1 an, 83% à 2 ans et 82% à 5 ans. Dans le cas du Dow Jones et du Case Schiller 10, les corrélations sont de 18% à 1 an, 19% à 2 ans et 18% à 5 ans. De plus, la dépendance est également bien conservée dans le temps entre le taux nominal 1 an (LS) et le taux nominal 10 ans (LS) avec 59% à 1 an, 58% à 2 ans et 56% à 5 ans. Nous constatons également une bonne stabilité entre les taux nominaux (LS) et les indices actions.

Nous pouvons nous référer à l'**Annexe 8** pour observer la stabilité des corrélations dans le temps dans le cas de la montre calendrier et de la montre Gamma 0.5.

## 3.2 Analyse des corrélations implicites des indices actions

### 3.2.1 Introduction aux corrélations implicites

Concernant la structure de dépendance, on note qu'aujourd'hui la majorité des ESG modélisent la dépendance entre les différentes grandeurs d'intérêt avec des corrélations, notamment en raison de la simplicité des modèles à dépendance linéaire. Cependant, lorsque l'objectif est de déterminer un quantile extrême d'une distribution engendrée par un grand nombre de risques interdépendants, la dépendance linéaire peut conduire à sous-estimer de manière significative les besoins en capitaux tant elle apparaît mal approprié à des situations extrêmes.

Quand la volatilité historique est déterminée à partir des variations passées du sous-jacent, la volatilité implicite correspond à l'anticipation de la volatilité future. Dans certaines circonstances, une corrélation implicite peut être dérivée des volatilités implicites associées. Extrayons dans un premier temps les volatilités implicites des diffusions à un an du Dax (avec  $S_{t_n}^{Dax} = 1$ ), du Dow Jones (avec  $S_{t_n}^{DJ} = 1$ ) et du panier Dow Jones/Dax déduit de la sorte :  $S_{t_{n+k}}^{Basket} = \sqrt{S_{t_{n+k}}^{DJ} \times S_{t_{n+k}}^{Dax}}$  à l'aide d'une méthode numérique (ici  $k=4$ , car les intervalles de temps sont trimestriels). Sur le marché des actions, nous supposons que  $x$  représente le Dow Jones et  $y$  le Dax. Nous pouvons alors déduire la formule suivant :

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y$$

où  $\sigma_{xy}$  : volatilité implicite du panier Dow Jones/Dax,

$\sigma_x$  : volatilité implicite du Dow Jones,

$\sigma_y$  : volatilité implicite du Dax.

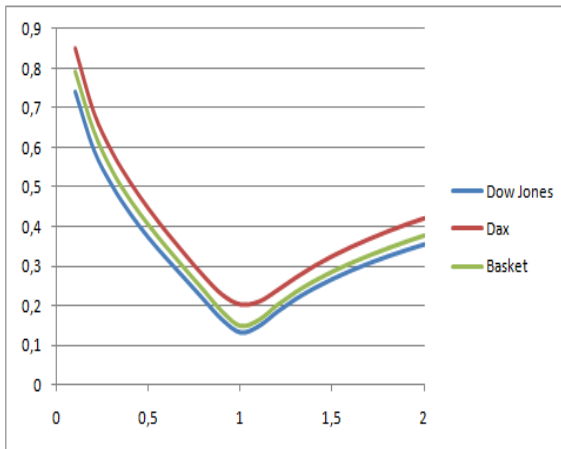
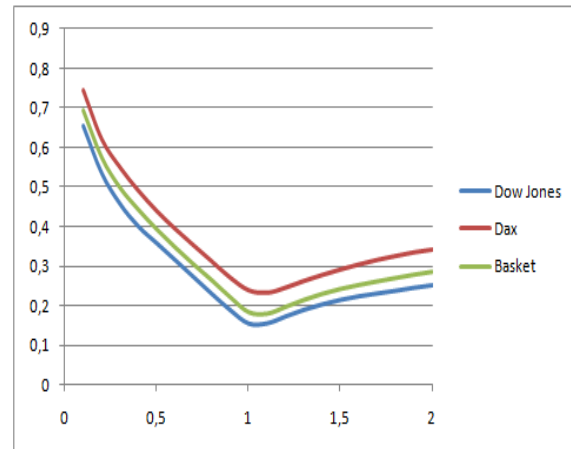
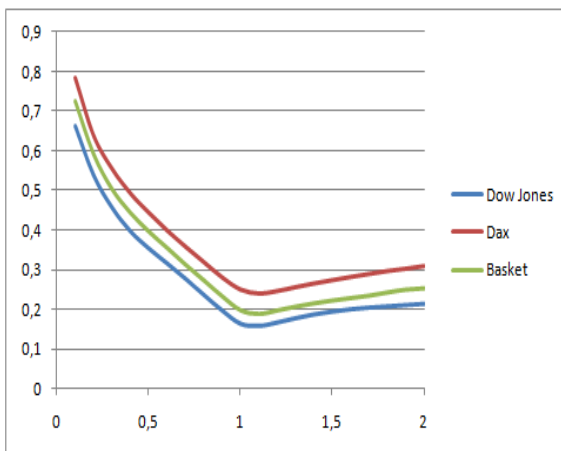
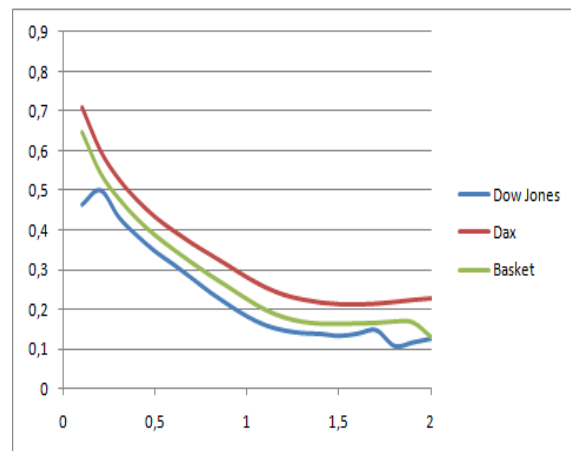
Nous déduisons la corrélation implicite des volatilités implicites :

$$\rho = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x\sigma_y}$$

Les résultats sont présentés dans la section suivante.

### 3.2.2 Résultats à horizon 1 an

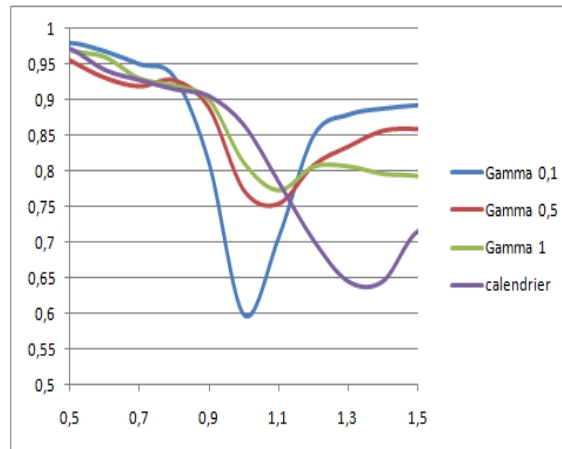
#### Volatilités implicites

Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,1$ )Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0,5$ )Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ )

Montre calendrier classique

Théoriquement, pour une maturité donnée, la volatilité implicite par rapport au prix d'exercice a une forme de sourire (appelé le *smile* de volatilité) : à la monnaie, la volatilité implicite est la plus basse et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. Les graphiques mettent bien en avant ce phénomène. De plus, nous constatons généralement de plus fortes volatilités implicites dans les queues basses de distributions lorsque nous utilisons la montre Gamma. Par ailleurs, le smile n'est pas symétrique sur le marché des actions : plus haut du côté put que du côté call. Les acteurs du marché sont en effet plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse. Comparons à présent les corrélations implicites.

### Corrélations implicites



Corrélations implicites

De manière générale, nous observons bien une plus forte dépendance dans les queues de distributions lors de l'utilisation de la montre Gamma avec un paramètre sévère (proche de zéro). La corrélations entre les indices actions est donc plus forte lorsque le marché est agité. Ce résultat permet de mettre en avant une structure de dépendance basée sur les corrélations non linéaire.

# Chapitre 4

## Analyse des queues de distributions

### 4.1 La Value-at-Risk (VaR)

#### 4.1.1 Introduction à la VaR

La Value-at-Risk est une mesure de risque très répandue dans les banques, notamment depuis la mise en place de la réglementation Bâle II. Mathématiquement, elle se définit de la manière suivante :

**Définition 4.1.1** On appelle **Value-at-Risk** (VaR) au niveau  $\alpha$ , le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution conditionnelle de perte :

$$VaR_{t,h}(\alpha) := \inf(x \in \mathbb{R} | P_t[L_{t,t+h} \leq x] \geq 1 - \alpha)$$

lorsque ce quantile est positif. Par convention,  $VaR_{t,h}(\alpha) = 0$  sinon.

Autrement dit :

$$P_t[L_{t,t+h} \leq VaR_{t,h}(\alpha)] \geq 1 - \alpha$$

En particulier,  $VaR_{t,h}(\alpha)$  augmente lorsque  $\alpha$  décroît.

Il s'agit de la perte maximale probable à un degré de confiance de  $\alpha\%$  (pour un horizon de temps donné). La VaR correspond donc à la perte qui ne sera pas dépassée dans plus de  $(100 - \alpha)\%$  des cas.

Il existe plusieurs méthodes de calcul de la VaR, à savoir la méthode historique, la méthode paramétrique et enfin la méthode de Monte-Carlo. Dans cette étude, nous n'utiliserons en pratique que la méthode de Monte-Carlo.

#### 4.1.2 Résultats

##### VaR à 1 an, 2 ans, 5 ans

Les VaR obtenues à horizon 1 an, 2 ans et 5 ans sont présentées dans les tableaux suivants :

	Quantile	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Montre Calendrier	99,50%	4106,66	1488,92	0,99	135,31	2,25	-0,11	2,07	-0,78	-1,56	-0,18
	99%	5035,31	1993,94	1,02	137,35	2,37	-0,10	2,24	-0,48	-1,09	-0,14
	95%	7287,59	3464,62	1,11	142,95	2,73	-0,06	2,71	0,54	0,38	0,05
Montre Gamma 1	99,50%	4016,66	1316,54	0,93	131,38	1,93	-0,11	1,24	-1,58	-1,67	-0,15
	99%	4819,98	1755,24	0,98	134,64	2,17	-0,10	1,53	-1,02	-1,23	-0,11
	95%	7455,90	3462,56	1,11	143,23	2,72	-0,06	2,31	0,36	0,34	0,06
Montre Gamma 0,5	99,50%	3890,63	1259,30	0,89	127,07	1,78	-0,11	0,78	-1,81	-2,25	-0,14
	99%	4661,91	1698,07	0,95	132,64	2,06	-0,10	1,08	-1,19	-1,39	-0,09
	95%	7752,73	3545,71	1,12	143,21	2,72	-0,05	1,95	0,26	0,24	0,06
Montre Gamma 0,1	99,50%	3095,21	773,02	0,79	123,56	1,36	-0,11	-0,65	-2,78	-3,67	-0,13
	99%	4572,56	1459,00	0,88	129,73	1,81	-0,09	-0,12	-1,74	-2,08	-0,07
	95%	8721,64	4111,52	1,16	145,75	2,86	-0,03	0,88	0,03	0,30	0,09

FIGURE 4.1 – VaR 1 an

	Quantile	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Montre Calendrier	99,50%	3072,14	897,41	0,87	128,10	2,13	-0,11	2,78	-1,57	-1,27	-0,18
	99%	3791,49	1177,56	0,91	130,40	2,25	-0,10	2,95	-1,06	-0,90	-0,14
	95%	5974,32	2478,86	1,03	137,90	2,64	-0,06	3,41	0,40	0,44	0,04
Montre Gamma 1	99,50%	2774,81	815,94	0,81	124,61	1,79	-0,11	2,03	-2,49	-1,54	-0,14
	99%	3547,59	1098,15	0,88	127,31	2,06	-0,09	2,36	-1,85	-1,13	-0,10
	95%	6121,10	2472,79	1,02	137,62	2,66	-0,05	3,12	0,12	0,35	0,05
Montre Gamma 0,5	99,50%	2422,12	591,49	0,81	121,54	1,68	-0,11	1,47	-2,81	-1,78	-0,12
	99%	3420,27	1017,26	0,87	126,26	1,92	-0,10	1,91	-1,97	-1,13	-0,08
	95%	6039,30	2515,66	1,01	137,74	2,64	-0,05	2,81	-0,08	0,29	0,08
Montre Gamma 0,1	99,50%	2002,02	360,34	0,68	112,40	1,24	-0,11	-0,66	-4,11	-4,13	-0,12
	99%	3119,82	699,31	0,77	121,15	1,70	-0,10	-0,11	-2,86	-2,55	-0,05
	95%	6651,78	2811,55	1,04	139,62	2,78	-0,03	1,15	-0,38	0,02	0,13

FIGURE 4.2 – VaR 2 ans

	Quantile	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Montre Calendrier	99,50%	1459,60	288,45	0,70	114,58	2,09	-0,10	3,12	-1,46	-1,36	-0,17
	99%	1994,89	504,89	0,75	118,44	2,20	-0,09	3,29	-0,89	-0,90	-0,11
	95%	4071,14	1284,84	0,88	128,54	2,69	-0,05	3,74	0,79	0,54	0,05
Montre Gamma 1	99,50%	1341,87	207,28	0,66	111,64	1,98	-0,10	2,43	-2,19	-1,53	-0,12
	99%	1863,81	400,59	0,71	115,46	2,13	-0,09	2,76	-1,55	-1,01	-0,08
	95%	4057,80	1269,64	0,87	128,28	2,77	-0,05	3,56	0,43	0,46	0,10
Montre Gamma 0,5	99,50%	1316,63	196,55	0,63	110,34	1,85	-0,11	2,25	-2,66	-2,01	-0,12
	99%	1839,96	363,94	0,69	115,69	2,09	-0,09	2,57	-1,88	-1,19	-0,08
	95%	3940,54	1248,95	0,87	128,71	2,79	-0,04	3,39	0,21	0,39	0,09
Montre Gamma 0,1	99,50%	963,88	87,54	0,51	100,10	1,53	-0,11	0,07	-5,81	-3,80	-0,11
	99%	1534,29	213,19	0,61	107,94	1,87	-0,09	0,61	-4,15	-2,62	-0,05
	95%	4037,17	1169,35	0,85	128,72	2,93	-0,03	2,28	-0,94	-0,16	0,15

FIGURE 4.3 – VaR 5 ans

Quelque soit l'horizon de temps, plus le paramètre de la montre Gamma est sévère (proche de zéro), plus les VaR sont basses. Autrement dit, la mise en place d'un temps stochastique influe sur la sévérité des événements extrêmes. Néanmoins, en étudiant le quantile 95%, nous remarquons peu de différence



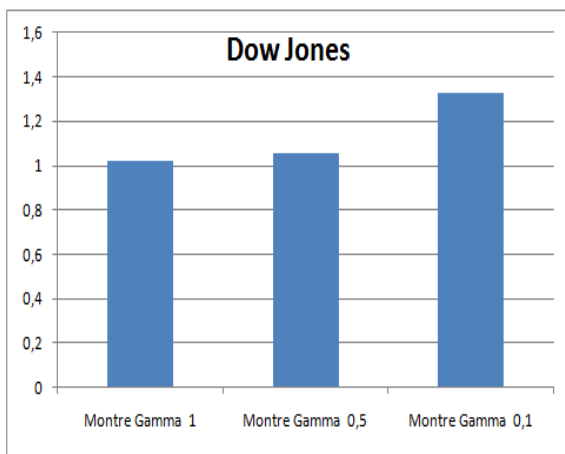
entre la montre stochastique et la montre Gamma. Examinons par exemple le taux de change à horizon 5 ans, les VaR à 95% sont de 0.88 pour la montre calendrier, 0.87 pour la montre Gamma 1, 0.87 pour la montre Gamma 0.5 et 0.85 pour la montre Gamma 0.1. Ces quantiles sont pratiquement égaux. Au contraire, les quantiles à 99% sont de 0.75 pour la montre calendrier, 0.71 pour la montre Gamma 1, 0.69 pour la montre Gamma 0.5 et 0.61 pour la montre Gamma 0.1. Cela montre une plus grande sévérité des événements très extrêmes. Ce phénomène peut se généraliser à l'ensemble des variables pour toutes les maturités.

Portons une attention particulière aux taux nominaux à court terme. Nous constatons que le taux nominal 1 an diffusé à l'aide du modèle HW atteint des valeurs très négatives : quantile à 5 ans au niveau 99.5% à  $-5.81\%$ . S'il n'est pas impossible d'avoir des taux nominaux négatifs, les chiffres obtenus ne semblent pourtant pas raisonnables. Les résultats obtenus grâce à la modélisation LS sont beaucoup plus réalistes. Quelque soit l'horizon, le quantile au niveau 99.5% ne dépasse jamais  $-0.11\%$ . Théoriquement, un processus CIR ne devrait pas atteindre de valeur négative, cela provient certainement de la méthode de diffusion et du manque de précision du calibrage. Cependant, la possibilité d'avoir des taux nominaux négatifs, comme entre 2002 et 2005 où les taux d'intérêts payés par les banques à la FED étaient négatifs, doit être prise en compte. Nous ne modifierons donc pas nos paramètres ni notre approche de diffusion.

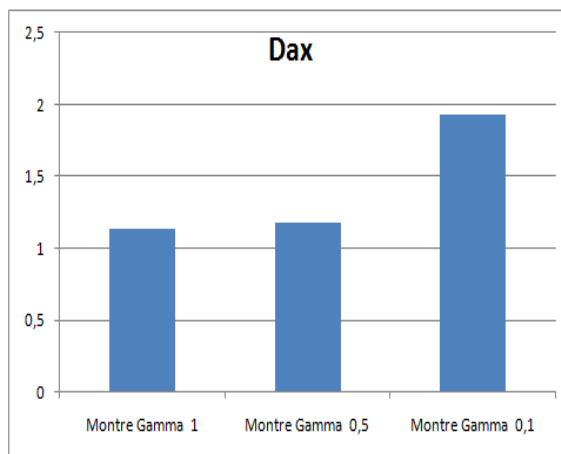
### Analyse des ratios de $VaR_{99,5\%}$ à 1 an

Dans le cadre du calcul du SCR, analysons les ratios de  $VaR_{99,5\%}$  à 1 an pour chaque paramètre  $\frac{1}{\nu}$  de la montre Gamma. Le calcul de ce ratio à horizon t est le suivant :

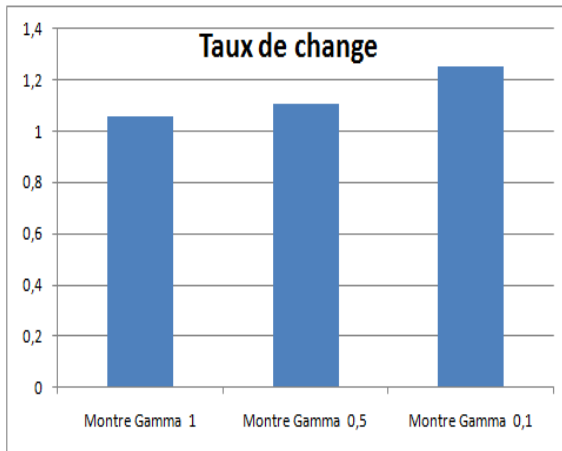
$$R_t^{1/\nu} = \frac{VaR_t^{Calendrier}}{VaR_t^{Gamma1/\nu}}$$



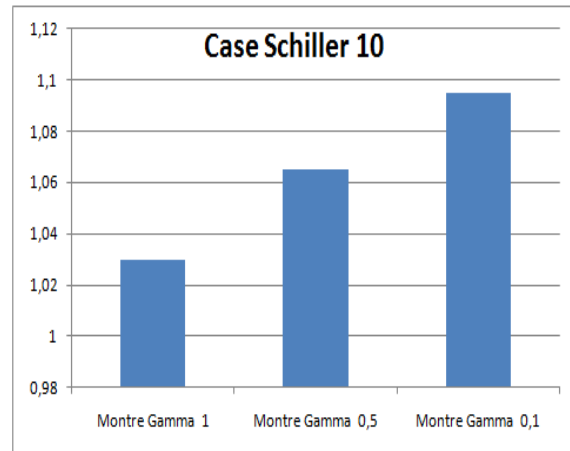
Ratio de VaR 99,5% à 1 an



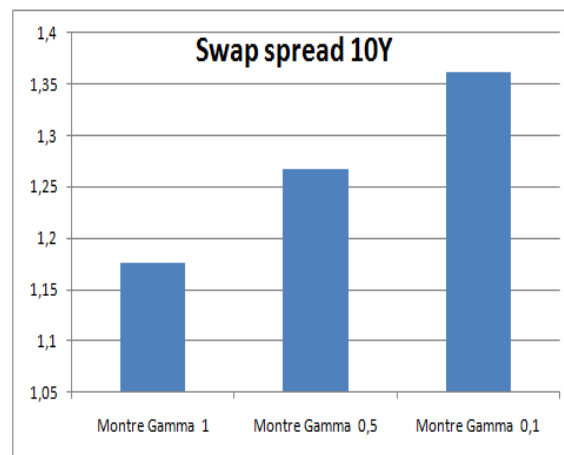
Ratio de VaR 99,5% à 1 an



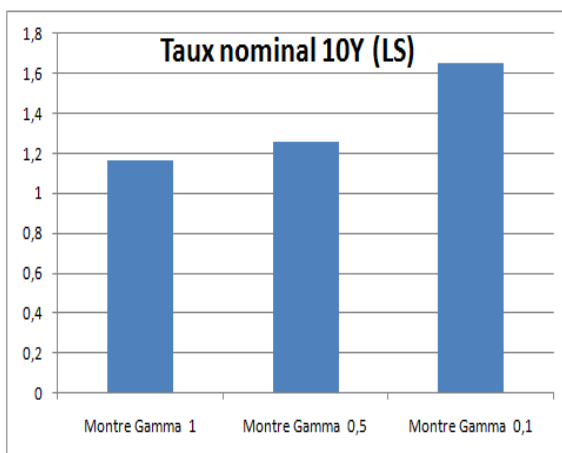
Ratio de VaR 99,5% à 1 an



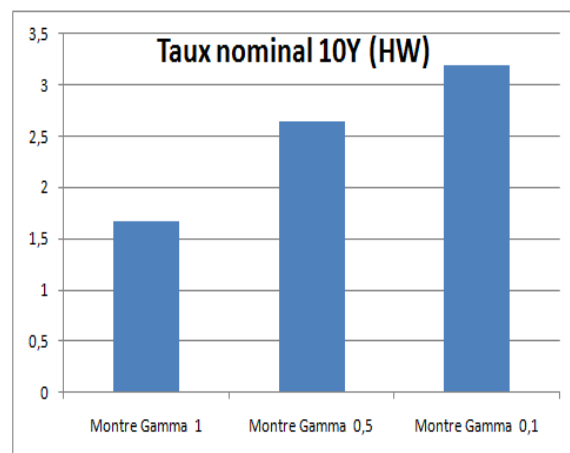
Ratio de 99,5% à 1 an



Ratio de VaR 99,5% à 1 an



Ratio de VaR 99,5% à 1 an



Ratio de VaR 99,5% à 1 an

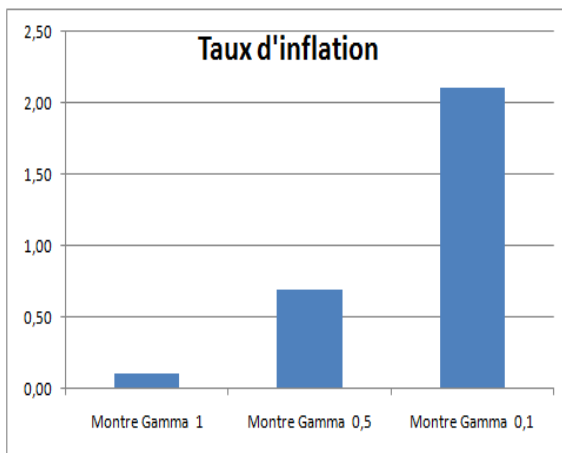
De manière générale, les VaR à 99,5% à horizon 1 an calculées à l'aide de la montre calendrier sont supérieures à celles calculées à partir de la montre Gamma. Plus le paramètre de la montre Gamma est sévère, plus le ratio à 1 an est important. Nous ne calculons pas ces ratios pour le taux d'inflation et les taux court terme car leurs VaR sont négatives.

Choisissons un exemple : le Dow Jones. Le ratio avec la montre Gamma 0.1 vaut 1.32, autrement dit le besoin en capital à un an est 32% supérieur à celui évalué grâce à la montre calendrier. Pour la montre Gamma 1, le ratio vaut 1.055 ; le besoin en capital est donc 5.5% supérieur à celui de la montre classique. Pour constater que ces ratios sont plus violents à horizon 2 ans, se référer à l'**Annexe 9**.

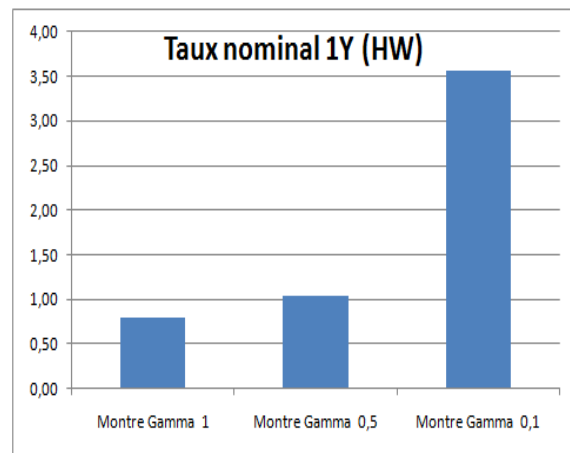
L'interprétation des résultats peut être la suivante : une montre classique surestime la VaR à 99.5% à horizon 1 an et peut conduire à sous-estimer la valeur des fonds d'un organisme assureur pour respecter les contraintes réglementaires.

### Apport de la montre stochastique aux $VaR_{99,5\%}$ à 1 an

N'ayant pas pu appliquer le ratio précédent au taux d'inflation et au taux nominal court terme, étudions l'apport en % de la montre stochastique en calculant la différence des  $VaR_{99,5\%}$  à 1 an par rapport à celles de la montre classique.



Apport de la montre Gamma à 1 an



Apport de la montre Gamma à 1 an

Ces graphiques confirment bien la plus grande sévérité des  $VaR_{99,5\%}$  à 1 an obtenues à l'aide de montres Gamma. Nous retrouvons les résultats à horizon 2 ans en **Annexe 10**.

## 4.2 Estimations des densités

### 4.2.1 Méthode d'estimation des densités : *Smoothing Kernel*

Les statistiques descriptives ne fournissent qu'une information partielle sur le comportement des rendements de nos actifs. Estimer la densité de probabilité permet une meilleure description de leur comportement, ce que nous allons réaliser à l'aide de la méthode du noyau.

Le principe de la méthode du noyau est la suivante :

Soit X une variable aléatoire dont les n observations sont notées  $x_1, \dots, x_n$ .

L'estimation de la densité de X au point x pour un noyau K est donnée par :

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

où  $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$  : noyau gaussien

$h = c\sigma n^{-1/5}$  expression de  $h$  dans le cas d'un noyau gaussien.  $\sigma$  désigne la valeur estimée des l'écart-type des observation et  $c$  une constante dont la valeur dépend du degré de lissage souhaité. Ici, nous prendrons  $c = (4/5)^{1/5}$ , ce chiffre correspond à une des valeurs de  $c$  les plus fréquemment rencontrées.

### 4.2.2 Résultats à horizon 1 an

Les graphiques suivants illustrent les densités à horizon 1 an des variables simulées après centrage :

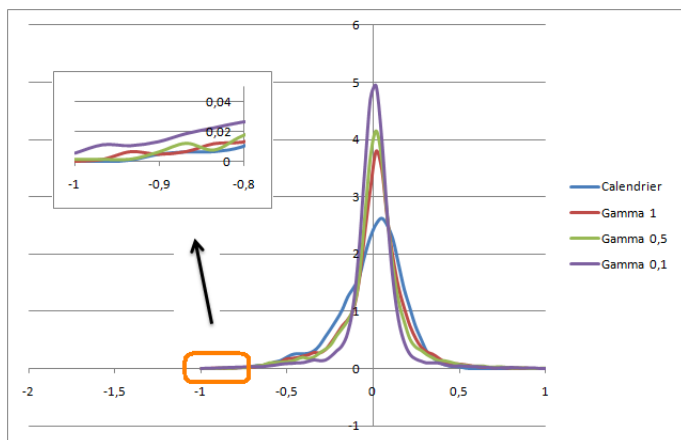


FIGURE 4.4 – Dow Jones

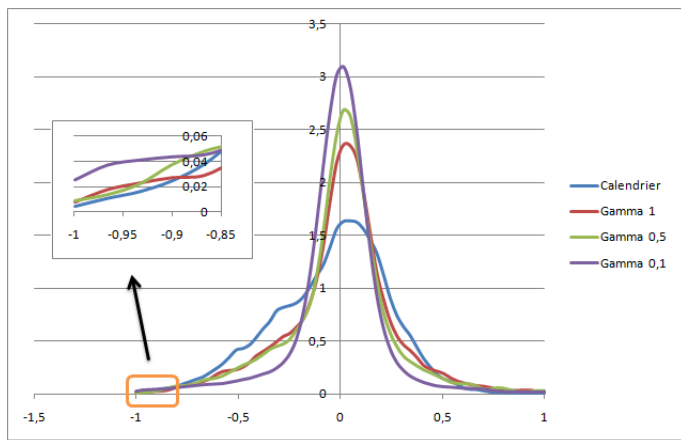


FIGURE 4.5 – Dax

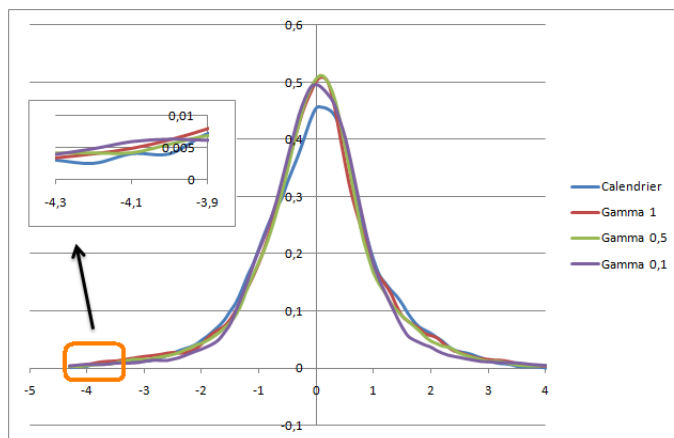


FIGURE 4.6 – Taux d'inflation

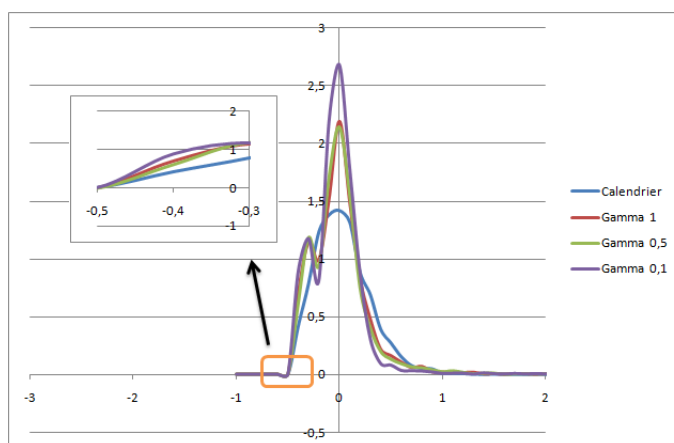


FIGURE 4.7 – Taux d'intérêt nominal à 1 an (Modèle de Longstaff & Schwartz)

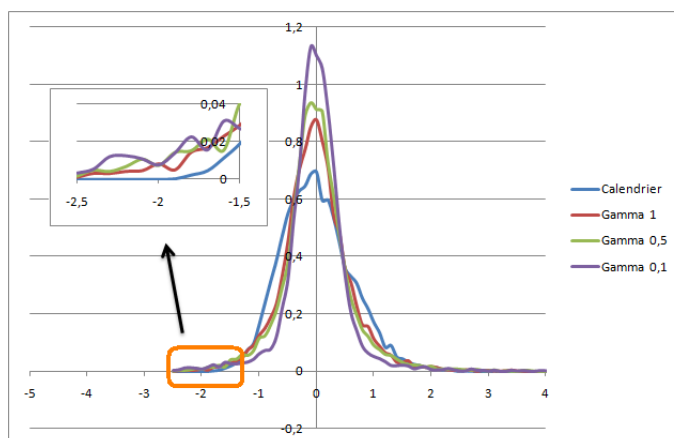


FIGURE 4.8 – Taux d'intérêt nominal à 10 ans (Modèle de Longstaff & Schwartz)

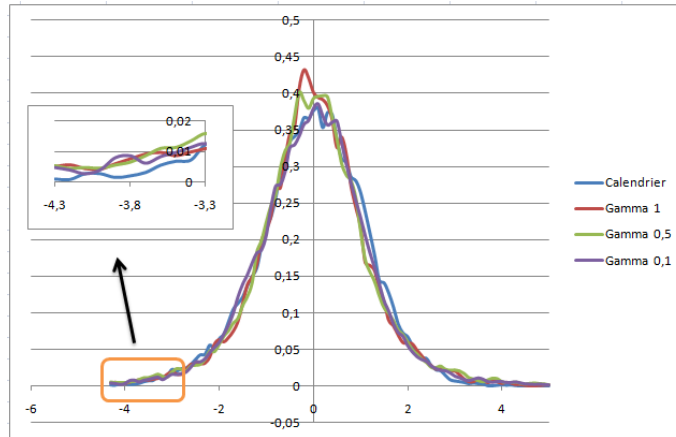


FIGURE 4.9 – Taux d'intérêt nominal à 1 an (Modèle de Hull & White à 2 facteurs)

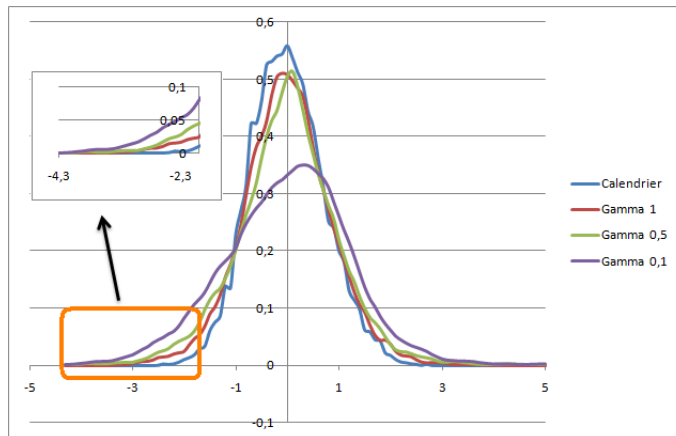


FIGURE 4.10 – Taux d'intérêt nominal à 10 ans (Modèle de Hull & White à 2 facteurs)

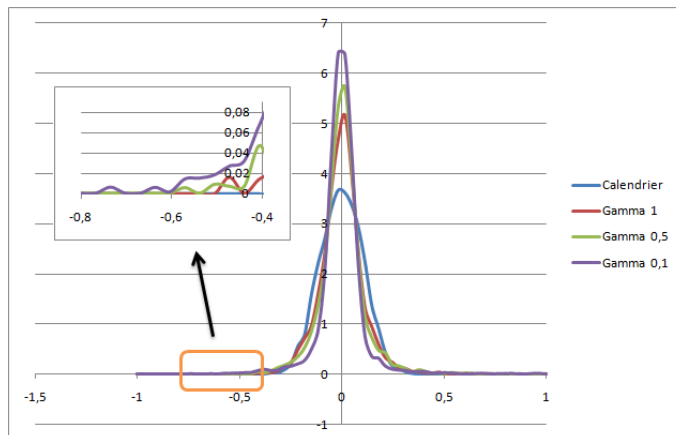


FIGURE 4.11 – Taux de change EUR/USD

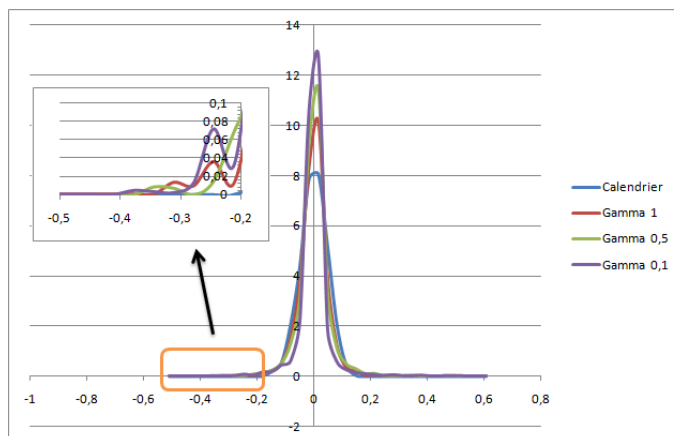


FIGURE 4.12 – Case Schiller 10

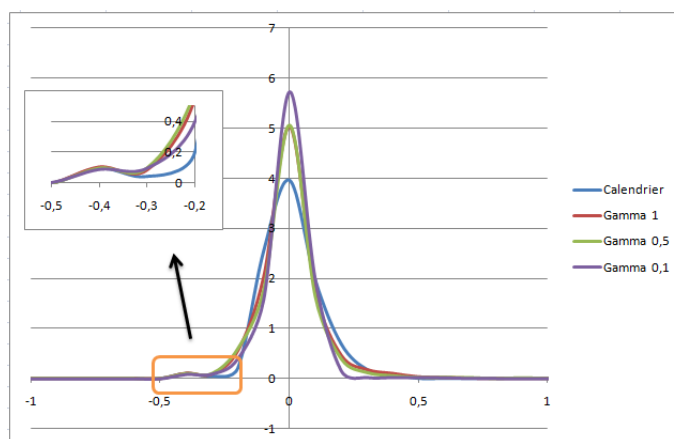


FIGURE 4.13 – Swap spread 10 ans

De manière générale, nous obtenons des queues de distributions plus épaisses en utilisant la montre Gamma. La mise en place d'un temps aléatoire permet donc de mieux prendre en compte la survenance de sinistres extrêmes, notamment dans les queues basses de distributions.





# Conclusion

La réalité des marchés financiers et, de manière plus générale, de l'économie est complexe et ne peut se résumer à une approximation mathématique. Néanmoins, la formalisation scientifique des grandeurs économiques et financières s'avère un outil essentiel des institutions financières ainsi que des organismes assureurs et réassureurs. En conséquence, la modélisation mathématique ne cesse d'être développée et améliorée afin de palier aux limites des outils existants. Dans ce contexte, nous avons cherché à approfondir la réflexion autour de l'actif des bilans des organismes assureurs et réassureurs.

Ce rapport avait pour but de présenter un Générateur de Scénarios Economiques basé sur une idée originale et innovante : les variables subissent des mouvements haussiers ou baissiers lors de la survenance aléatoire d'informations financières. Nous combinons alors la méthode du Bootstrapping à des processus aléatoires subordonnés à un temps stochastique. Comme nous l'avons exposée, cette technique nécessite quelques améliorations pour prendre en compte certains phénomènes, comme le retour à la moyenne. Les principaux objectifs de cette approche étaient la meilleure prise en compte de la survenance d'événements extrêmes. Les résultats ont montré l'épaississement des queues de distributions obtenu grâce à la montre Gamma. De manière générale, les événements extrêmes sont non seulement plus nombreux, mais surtout beaucoup plus violents. Soulignons que ces constats dépendent du paramètre affecté au processus Gamma. Le *Bootstrapping* permet de plus une relative bonne conservation de la dépendance entre les variables du à la synchronisation des opérations de tirages aléatoires dans la génération des scénarios. Une analyse simple des corrélations implicites entre deux indices actions a même mis en évidence une corrélation plus forte dans les queues de distribution.

Le générateur mis en place au sein de PwC présente des résultats très encourageants qui nous amènent à continuer et améliorer son développement. S'il traite les principales variables économiques et financières, il faut néanmoins rendre plus satisfaisant la modélisation du risque de crédit, à l'aide par exemple d'un modèle à deux voire trois facteurs pour le spread. Nous pourrions également reconstituer le prix à la date  $t$  des obligations zéro-coupon de maturité  $T$ .

Ce travail étant en cours de réalisation, des compléments seront effectués au cours du mois de juin.



# Bibliographie

- [1] Ahlgrim K.C., d'Acy S.P., Gorrivett R.W. [2008], "Modeling financial scenarios : a framework for the Actuarial Profession", Proceeding of the Casualty Society.
- [2] Armel K. [2010], "Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques - Modélisation et Simulation", Mémoire de recherche - EURIA.
- [3] Ball C.A., Torous W.N. [1995], "Unit roots and the estimation of interest rate dynamics".
- [4] Ballota L. [2005], "A Lévy process-based framework for the fair valuation of participating life insurance contracts", Insurance : Mathematics and Economics.
- [5] Bolder D.J. [2001], "Affine term-structure models : theory and implementation", Bank of Canada.
- [6] Carr P., Madan D.B., Chang E.C. [1998], "The Variance Gamma Process and Option Pricing".
- [7] CBOE, "The CBOE Volatility Index - VIX".
- [8] Cont R., Tankov P. [2004], "Financial Modelling with Jump Processes", Chapman & Hall, CRC Press.
- [9] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. [1985], "A theory of the term structure of interest rates".
- [10] Duffie D., Kan R. [1996], "A yield-factor model of Interest Rates", Mathematical Finance 6.
- [11] El-Ayoubi M. [2009], "Implémentation du modèle de Heston", Mémoire de recherche ISFA.
- [12] Embrechts P. [2000], "Actuarial versus financial pricing of insurance", Risk Finance.
- [13] Faleh A., Planchet F., Rullier D., "Les Générateurs de Scénarios Economiques : quelle utilisation en assurance ?", ISFA- Université de Lyon I, Caisse des Dépôts et Consignations.
- [14] Fiorani F., "The Variance Gamma Process for option pricing".
- [15] Friggit J. [2001], "Prix des logements, produits financiers immobiliers et gestion des risques", Economica.
- [16] Friggit J. [2007], "Long terme investment in Gold, Bonds, Stocks and Housing in France - with Insights into the USA and the UK : a few regularities", CGPC working paper.
- [17] He H. [1999], "Modeling term structures of swap spread", Yale School of Management.
- [18] Heston S.L. [1993], "A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options", The Review of Financial Studies.
- [19] Hull J. [2007], "Options, futures et autres actifs dérivés", 6ème édition.
- [20] Hull J., White A. [1994], "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-Factor Models", Journal of Derivatives.
- [21] Kou S.G. [2002], "A jump-diffusion model for option pricing", Management Science 13.
- [22] Lambert D., Lapeyre B. [1997], "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", 2ème édition, Ellipses.
- [23] Le Vallois F., Palsky P., Paris B., Tosetti A. [2003], "Gestion Actif Passif en Assurance Vie", Economica.

- [24] Le Vallois F. [2010], "Règlementation en assurance", ENSAE.
- [25] Lévy P. [1937], "Théorie de l'addition de variable aléatoires", Gauthier Villars.
- [26] Longstaff F., Schwartz E. [1992], "Interest rate volatility and the term structure : a two factor general equilibrium model", The Journal of Finance 47.
- [27] Longin F., Solnik B. [1995], "Is the correlation in international equity returns constant : 1960-1990 ?", Journal of International Money and Finance.
- [28] Madan D.B., Seneta E. [1990], "The VG Model for share market return".
- [29] Mashal R., Zeevi A. [2002], "Beyond correlation : extreme co-movements between financial assets", University of Columbia.
- [30] Müller U.A., Dacorogna M.M., Blum P. [2010], "Bootstrapping the economy - a non-parametric method of generating consistent future scenarios".
- [31] Planchet F., Thérond P., Kamega A. [2009], "Scénarios Economiques en Assurance - Modélisation et simulation", Economica.
- [32] Planchet F., Thérond P.E., Jacquemin J [2005], "Modèles financiers en assurance. Analyse de risque dynamiques", Economica.
- [33] Poncet P., Portait R. [2008], "Finance de marché - Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques", Dalloz.
- [34] Riveiro C., Webber N. [2002], "Valuing path dependent options in the Variance Gamma model by Monte Carlo with a Gamma bridge".
- [35] Roncalli T. [1998], "La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique", Thèse de doctorat - Université Bordeaux IV.
- [36] Sévellec E. [2010], "Gestion actif/passif pour une projection stochastique bayésienne", Mémoire de recherche - EURIA.
- [37] Staino A. [2007], "Financial models with Lévy processes".
- [38] Vasicek O. [1977], "An equilibrium characterisation of term structure", Journal of financial economics.
- [39] Wilkie A.D. [1986], "A stochastic asset model for actuarial use, British Actuarial Journal".
- [40] Wilkie A.D. [1995], "More a stochastic asset model for actuarial use, British Actuarial Journal".
- [41] Zeytun S., Gupta A. [2007], "A comparative study of the Vasicek and the CIR model of the short rate".

# Annexes



## Annexe 1 : Evolution des placements financiers des ménages français en 2010

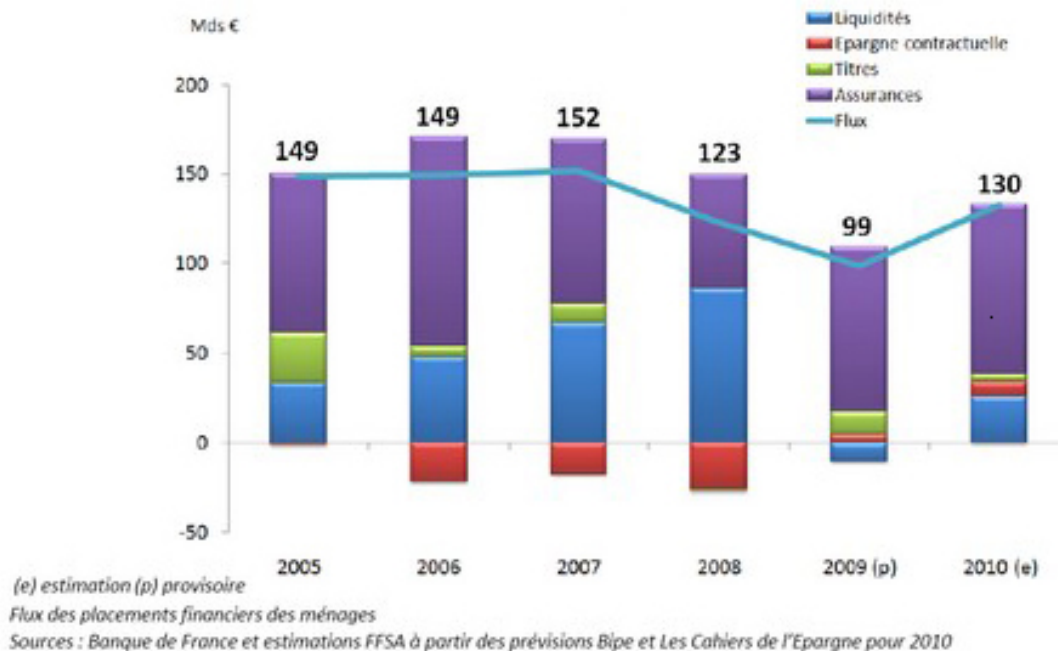


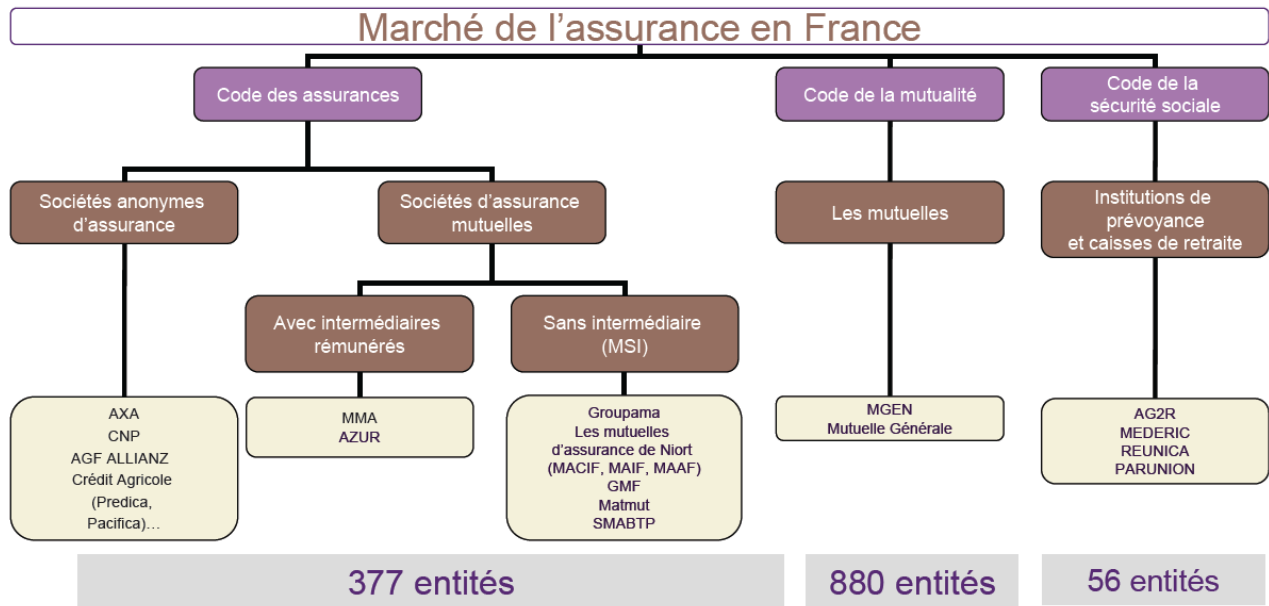
FIGURE 4.14 – Evolution des placements financiers des ménages français

## Annexe 2 : Les 25 branches d'activité de l'assurance

ASSURANCE VIE : Branches 20 à 26	ASSURANCE NON VIE : Branches 1 à 18	
20 - Vie - Décès	<b>Dommages aux personnes : 1 à 2</b>	<b>Responsabilité Civile : 10 à 15</b>
21 - Nuptialité - Natalité	1 - Accidents	10-12 Responsabilité des véhicules terrestres, aériens et maritimes
22 - Assurances liées à des fonds d'investissement (UC)	2-Maladie	13 - Responsabilité Civile générale
23 - Opérations tontinières	<b>Dommages aux biens : 3 à 9</b>	14 - Crédit
24 - Capitalisation	3-6 - Véhicules terrestres, ferroviaires, aériens et maritimes	15 - Caution
25 - Gestion des fonds collectifs	7 - Marchandises transportées	<b>Autres : 16 à 18</b>
26 - Opérations à caractères collectifs (épargne retraite en point)	8 - Incendie et éléments naturels	16 - Pertes pécuniaires diverses
	9 - Autres dommages aux biens	17-18 - Protection juridiques et assistance

TABLE 4.1 – Les différentes branches d'activité

### Annexe 3 : Le marché français de l'assurance



Source : ACAM – Rapport d'activité 2009

FIGURE 4.15 – La législation française



### Annexe 4 : La composition de l'Autorité de Contrôle Prudentiel

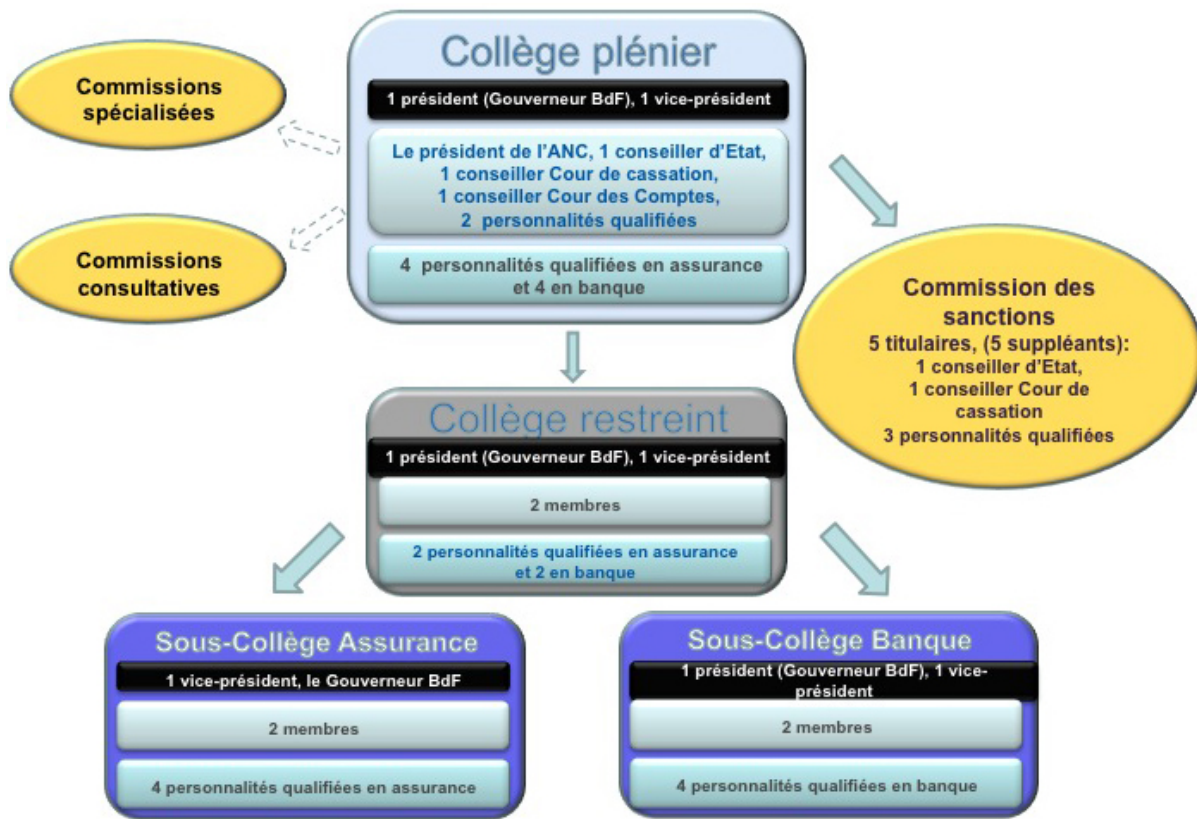
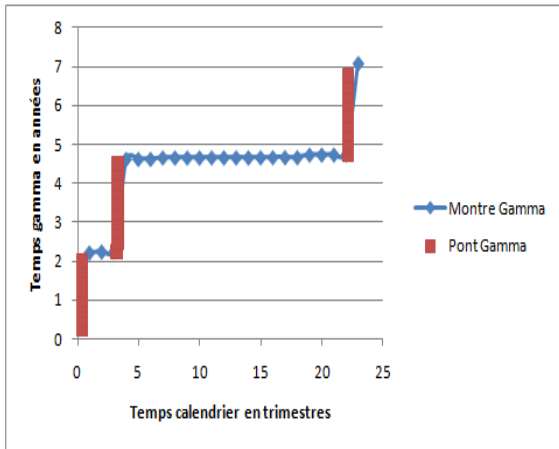
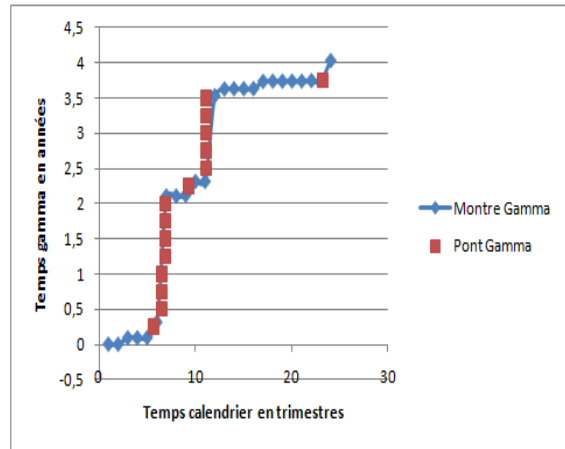


FIGURE 4.16 – L'Autorité de Contrôle Prudentiel

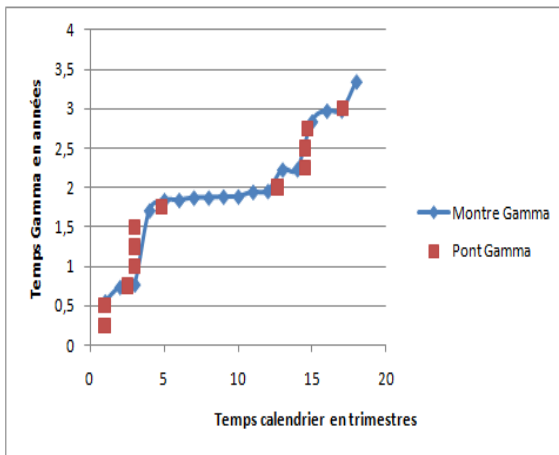
### Annexe 5 : Exemples de Ponts Gamma en fonction de $\frac{1}{\nu}$



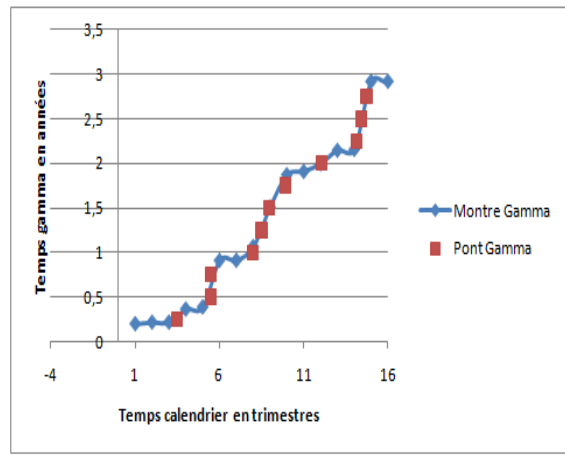
Pont Gamma avec  $\frac{1}{\nu} = 0.2$



Pont Gamma avec  $\frac{1}{\nu} = 0.5$



Pont Gamma avec  $\frac{1}{\nu} = 1$



Pont Gamma avec  $\frac{1}{\nu} = 2$

## Annexe 6 : Méthode de calcul du VIX

Le VIX, tel que nous le connaissons aujourd'hui, repose sur une méthode de calcul mise à jour en 2003 par le CBOE avec l'aide de Goldman Sachs. Cependant son historique remonte à 1990. Cet indice reflète la volatilité implicite à 30 jours du *S&P500*. Cette volatilité se déduit du prix des options d'achat et de vente ayant les deux premières échéances  $k = 1, 2$  les plus proches, où 1 représente l'échéance la plus proche. Le VIX est rapidement devenu le benchmark pour les volatilités des actions sur les marchés.

Le calcul du temps restant à courir jusqu'à échéance pour la  $k$ -ième échéance la plus proche,  $T_k$ , se fait de la manière suivante :

$$T_k = \frac{M_k^1 + M_k^2 + M_k^3}{M_k^4}$$

où  $M_k^1 = \frac{\text{minutes à courir jusqu'à minuit}}{24 \times 60}$  : fraction de jour à courir jusqu'à minuit le jour présent,

$M_k^2$  : nombre de jours à courir entre le jour présent et le jour du règlement,

$M_k^3 = \frac{\text{minutes de minuit jusqu'au moment du règlement à l'échéance}}{24 \times 60}$  : fraction de jour de minuit, la veille de l'échéance, jusqu'au moment du règlement à la date d'échéance,

$M_k^4$  : nombre de jours à courir jusqu'à l'échéance de l'option.

Il faut alors calculer le niveau de l'indice à terme  $F_k$  :

$$F_k = S_k + e^{rT_k}(C_k - P_k)$$

où  $S_k$  : strike pour lequel la différence absolue entre le prix du call et le prix du put est la plus petite,

$C_k$  : prix du call associé au strike  $S_k$ ,

$P_k$  : prix du put associé au strike  $S_k$ .

Le VIX repose sur la formule générale des volatilités implicites suivante :

$$\sigma_k^2 = \frac{2}{T_k} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} \times e^{rT_k} \times Q(K_i) - \frac{1}{T_k} \left( \frac{F_k}{K_0} - 1 \right)^2$$

où  $\sigma_k$  = volatilité attendue pour la  $k$ -ième échéance la plus proche,

$T_k$  : temps jusqu'à échéance,

$F_k$  : indice à terme,

$K_0$  : premier prix d'exercice inférieur à l'indice à terme  $F$ ,

$K_i$  : prix d'exercice de la  $i$ -ème option hors la monnaie,

$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$  : intervalle entre 2 prix d'exercice,

$r$  : taux sans risque jusqu'à maturité,

$Q(K_i)$  : prix d'exercice moyen de chaque option dont le strike est  $K_i$ .

Nous obtenons alors le VIX :

$$VIX = 100 \times \sqrt{\frac{N_{365}}{N_{30}} \left[ T_1 \sigma_1^2 \left( \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left( \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right]}$$

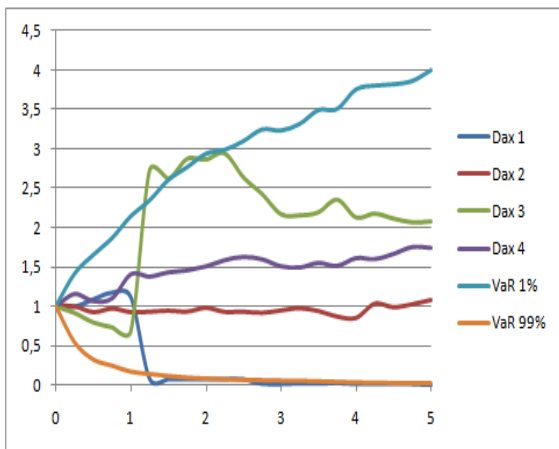
où  $N_{30}$  : nombre de minutes dans 30 jours,

$N_{365}$  : nombre de minutes dans 365 jours,

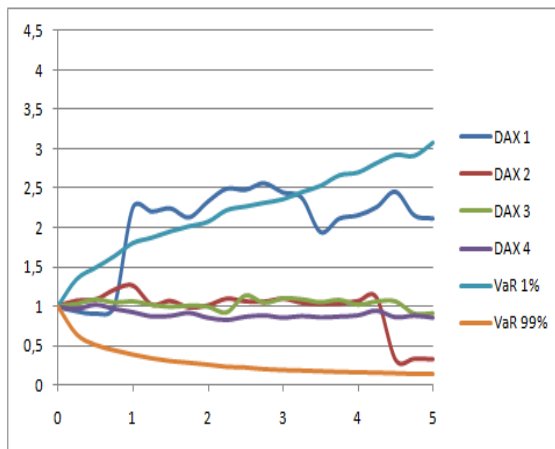
$N_{T_1}$  : nombre de minutes jusqu'à échéance de la 1ère échéance la plus proche,

$N_{T_2}$  : nombre de minutes jusqu'à échéance de la 2ème échéance la plus proche.

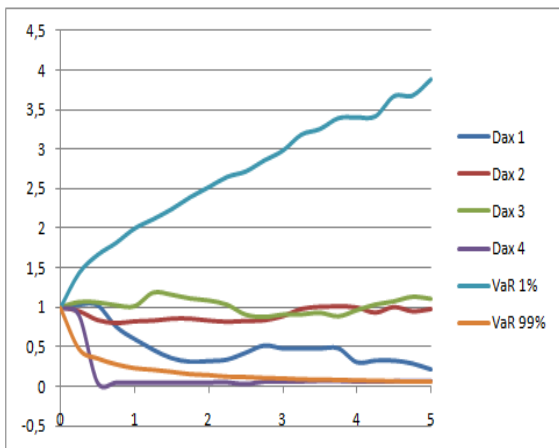
### Annexe 7 : Exemples de simulations du Dax



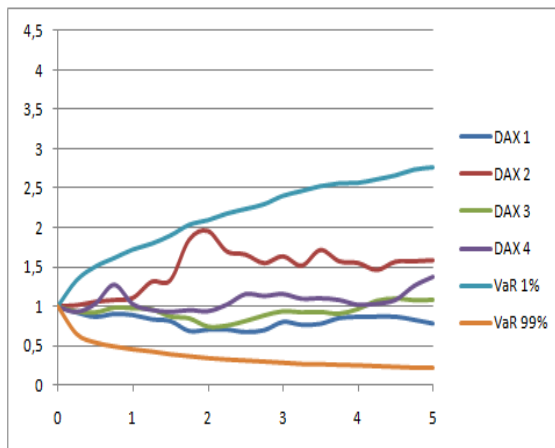
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ ) avec VIX



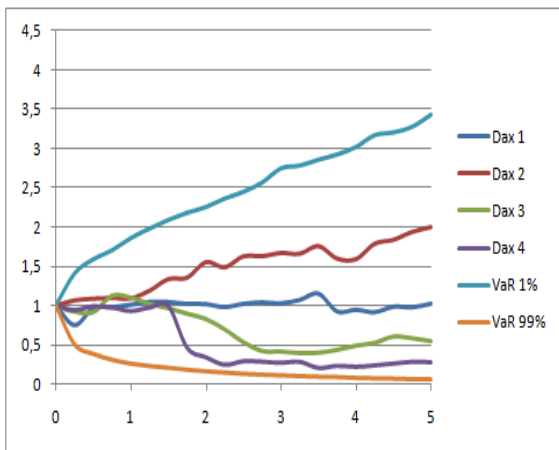
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.1$ ) sans VIX



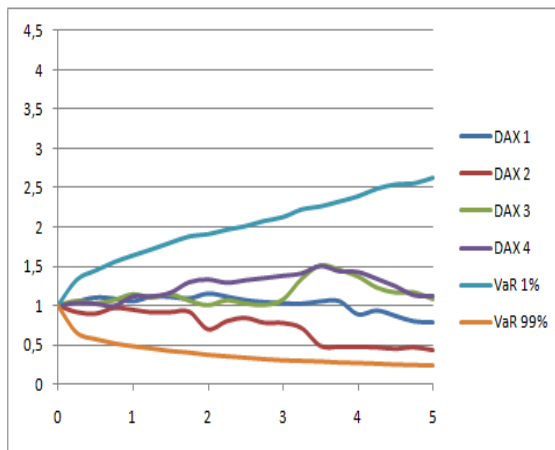
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ ) avec VIX



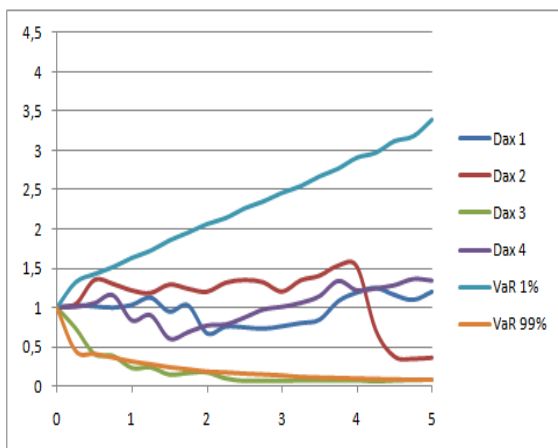
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 0.5$ ) sans VIX



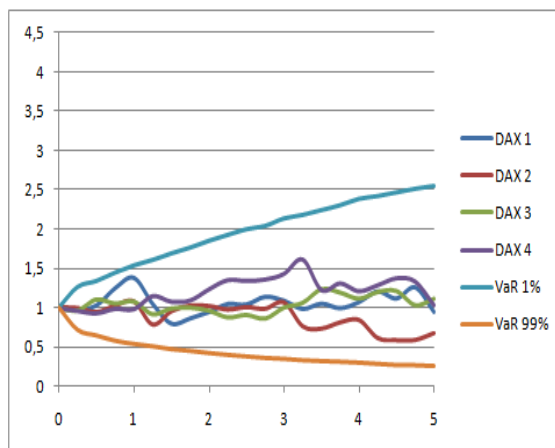
Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ ) avec VIX



Montre Gamma ( $\frac{1}{\nu} = 1$ ) sans VIX



Montre astronomique avec VIX



Montre astronomique sans VIX

## Annexe 8 : Stabilité des corrélations dans le temps

### Montre Calendrier

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,85	0,03	0,18	0,28	0,32	0,24	0,02	0,25	0,09
Dax		1,00	-0,12	0,15	0,34	0,44	0,25	0,19	0,16	0,08
Taux de change			1,00	0,04	-0,24	-0,12	-0,24	-0,33	0,18	-0,04
Immobilier				1,00	0,11	0,35	0,02	0,07	0,12	0,11
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,64	0,80	0,52	0,11	0,30
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,47	0,62	0,17	0,18
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,58	0,14	0,26
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,21	0,14
Taux d'inflation									1,00	0,10
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.17 – Coefficients de corrélation à 1 an

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,85	0,03	0,19	0,27	0,31	0,20	-0,03	0,20	0,08
Dax		1,00	-0,13	0,15	0,34	0,44	0,22	0,14	0,12	0,08
Taux de change			1,00	0,03	-0,24	-0,12	-0,23	-0,34	0,13	-0,06
Immobilier				1,00	0,10	0,33	0,00	0,01	0,12	0,10
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,61	0,74	0,45	0,09	0,29
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,39	0,46	0,14	0,16
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,51	0,12	0,26
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,28	0,12
Taux d'inflation									1,00	0,10
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.18 – Coefficients de corrélation à 2 ans

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,83	0,04	0,17	0,24	0,29	0,12	-0,08	0,14	0,07
Dax		1,00	-0,10	0,13	0,30	0,40	0,14	0,08	0,08	0,06
Taux de change			1,00	0,04	-0,23	-0,12	-0,17	-0,31	0,10	-0,04
Immobilier				1,00	0,10	0,30	0,01	-0,02	0,08	0,09
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,57	0,64	0,41	0,06	0,29
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,27	0,33	0,09	0,12
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,44	0,10	0,23
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,28	0,08
Taux d'inflation									1,00	0,10
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.19 – Coefficients de corrélation à 5 ans

## Montre Gamma 0.5

	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,81	0,02	0,22	0,27	0,30	0,17	0,04	0,21	0,05
Dax		1,00	-0,13	0,16	0,32	0,40	0,17	0,17	0,12	0,03
Taux de change			1,00	0,04	-0,21	-0,10	-0,16	-0,27	0,15	-0,03
Immobilier				1,00	0,10	0,29	0,00	0,04	0,14	0,07
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,56	0,56	0,44	0,08	0,24
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,32	0,50	0,14	0,10
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,53	0,26	0,15
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,09	0,06
Taux d'inflation									1,00	0,09
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.20 – Coefficients de corrélation à 1 an

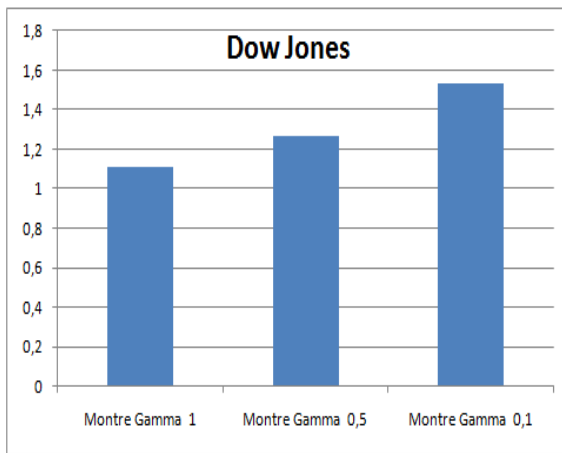
	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,82	0,01	0,20	0,27	0,29	0,17	0,00	0,21	0,04
Dax		1,00	-0,14	0,15	0,33	0,41	0,18	0,14	0,12	0,03
Taux de change			1,00	0,02	-0,22	-0,11	-0,15	-0,29	0,14	-0,06
Immobilier				1,00	0,09	0,28	0,00	-0,02	0,10	0,08
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,57	0,58	0,42	0,09	0,27
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,31	0,41	0,13	0,14
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,49	0,24	0,17
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	-0,19	0,09
Taux d'inflation									1,00	0,07
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.21 – Coefficients de corrélation à 2 ans

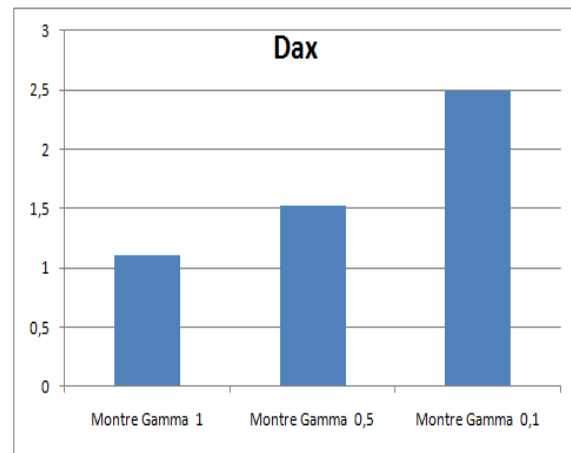
	Dow Jones	Dax	Taux de change	Immobilier	Taux nominal 10Y (LS)	Taux nominal 1Y (LS)	Taux nominal 10Y (HW)	Taux nominal 1Y (HW)	Taux d'inflation	Swap spread 10Y
Dow Jones	1,00	0,80	0,02	0,19	0,26	0,29	0,09	-0,03	0,07	0,05
Dax		1,00	-0,12	0,14	0,29	0,39	0,08	0,06	0,04	0,03
Taux de change			1,00	0,03	-0,21	-0,11	-0,08	-0,20	0,04	-0,04
Immobilier				1,00	0,10	0,28	0,00	-0,03	0,03	0,09
Taux nominal 10Y (LS)					1,00	0,55	0,33	0,27	0,04	0,25
Taux nominal 1Y (LS)						1,00	0,14	0,21	0,05	0,11
Taux nominal 10Y (HW)							1,00	0,71	0,73	0,12
Taux nominal 1Y (HW)								1,00	0,59	0,05
Taux d'inflation									1,00	0,04
Swap spread 10Y										1,00

FIGURE 4.22 – Coefficients de corrélation à 5 ans

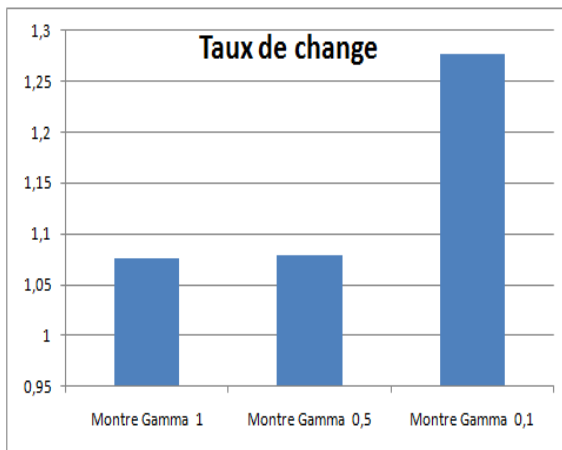
## Annexe 9 : Ratios de VaR 99,5% à horizon 2 ans



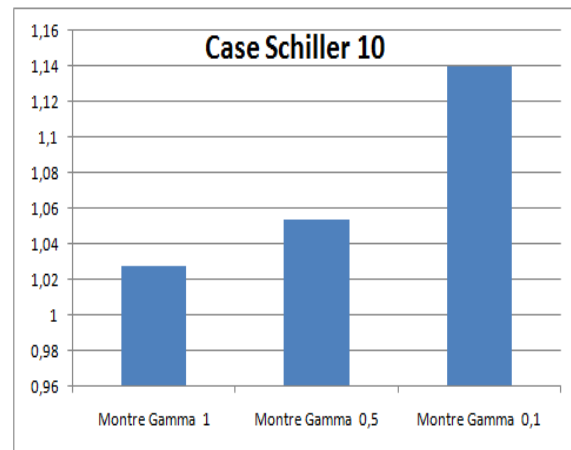
Ratio de VaR 99,5% à 2 ans



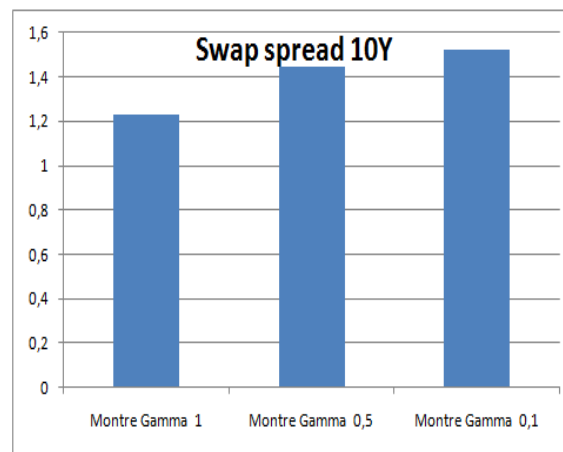
Ratio de VaR 99,5% à 2 ans



Ratio de VaR 99,5% à 2 ans

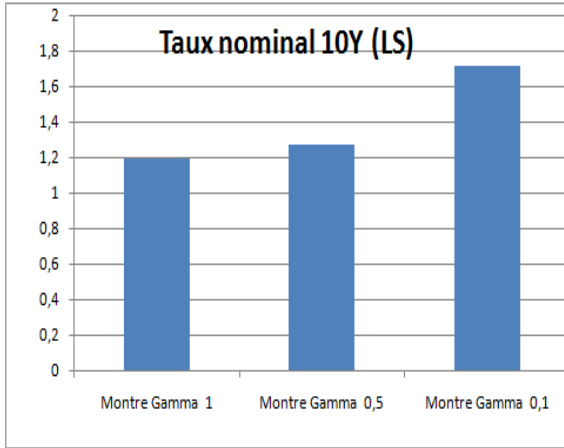


Ratio de VaR 99,5% à 2 ans

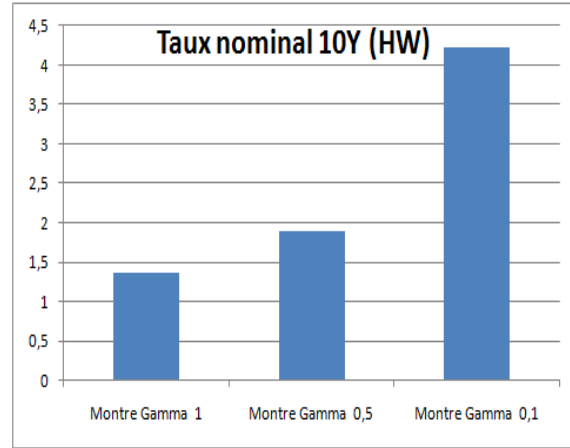


Ratio de VaR 99,5% à 2 ans



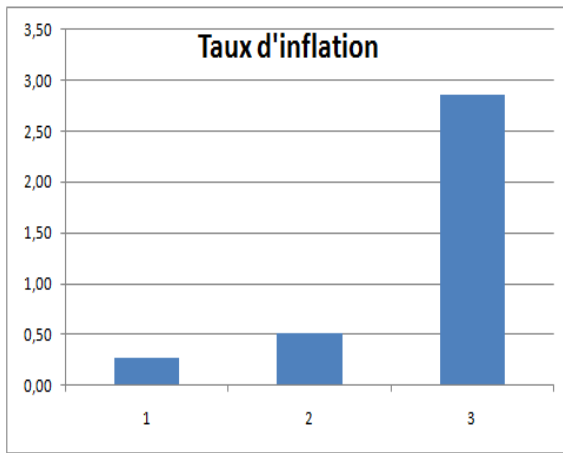


Ratio de VaR 99,5% à 2 ans

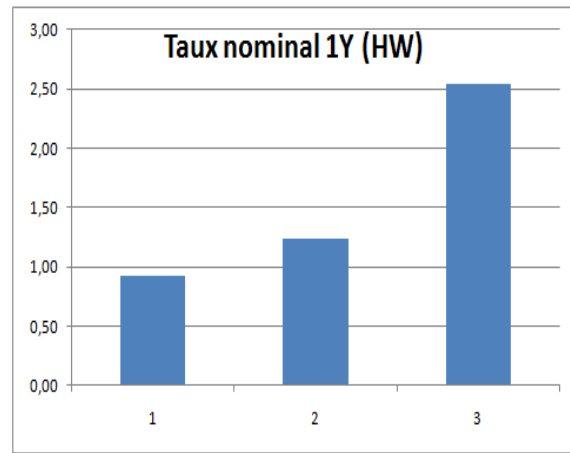


Ratio de VaR 99,5% à 2 ans

## Annexe 10 : Apport de la montre stochastique pour la VaR 99,5% à horizon 2 ans



Apport de la montre Gamma à 2 ans



Apport de la montre Gamma à 2 ans