Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech

pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 26 juin 2012

Par : Ilan HABIB, Stéphane RIBAN

Titre: Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires signature

Membres présents du jury de la filière

Entreprise :

Nom : WINTER & Associés

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Frédéric PLANCHET, Marc JUILLARD

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique (ENSAE)
3, Avenue Pierre Larousse – 92245, MALAKOFF CEDEX, FRANCE

Résumé

La mise en place des dispositifs de provisionnement Solvabilité 2 est l'occasion pour les assureurs de revisiter les procédures en place et de vérifier leur pertinence au regard du nouveau référentiel. Ce mémoire a pour objectif, sur la base d'une synthèse des différentes méthodes disponibles et de données provenant de différentes branches d'assurance, de construire des outils de comparaison. Il portera notamment sur les enjeux réglementaires, économiques et temporels que sont l'incertitude sur les provisions, l'inflation, ou la durée de stabilisation des paiements, qui sont autant d'éléments à considérer dans l'élaboration et le choix d'un modèle.

Mots clés : provisionnement non-vie, méthodes agrégées, Solvabilité 2, incertitude, inflation

Abstract

The implementation of Solvency 2 directive framework is an opportunity for insurers to rethink the procedures currently in place, and check their relevance regarding the new repository. The purpose of this report is, on a base of a synthesis of different methods and of data from multiple insurance lines, to build comparison tools. It will address the regulatory, economic and temporal issues such as the uncertainty on provisions, the inflation, or the stabilization of the payments, which are all necessary factors for developing and choosing a model.

Keywords: non-life reserving, aggregated methods, Solvency 2, uncertainty, inflation

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Frédéric Planchet et Marc Juillard pour nous avoir proposé ce sujet, encadrés tout au long de la réalisation de ce mémoire, et fait bénéficier de leur expérience.

Nous souhaitons également remercier Xavier Milhaud pour sa disponibilité et son implication.

Enfin, nous remercions nos familles et amis pour tout leur soutien et leurs conseils.

Table des matières

Introduction **5**

1 L'agrégation des sinistres **7**

2 Méthodes classiques de provisionnement **10**

2.1 Méthodes déterministes 10

2.1.1 Méthode de référence : Chain-Ladder 10

2.1.2 Variantes de Chain-Ladder 17

2.1.3 Conclusion sur les méthodes déterministes 25

2.2 Méthodes stochastiques 25

2.2.1 Intérêt 25

2.2.2 Modèle de Mack (1993) 26

2.2.3 Modélisation GLM : modèle Poissonnien de A.E. Renshaw et R.J. Verrall (1998) 29

2.3 Extension : Gestion de la liquidation incomplète des triangles 33

2.4 Choix de la méthode 38

2.4.1 Comparaison des méthodes 39

2.4.2 Un outil de choix de la méthode 43

3 Mesures de l'incertitude à un an et à l'ultime **47**

3.1 Mesure de l'incertitude à l'ultime 47

3.2 Mesure de l'incertitude à un an 49

3.2.1 Vision prospective 50

3.2.2 Vision rétrospective 52

3.2.3 Agrégation sur les années de survenance 53

3.2.4 Exemple 54

3.3 Utilisation du bootstrap pour l'évaluation du risque à un an 59

3.3.1 Rappel sur la méthode de bootstrap 59

3.3.2 Application au calcul du risque à un an : le *re-reserving* 62

3.4 Comparaison : incertitude à l'ultime et à un an 66

4 Prise en compte de l'inflation **71**

4.1 Problématique 71

4.2 L'enjeu de l'inflation 71

4.3 Généralités sur la pondération d'un triangle 72

4.4 Correction de l'inflation 73

4.4.1 Triangle complet sans inflation 73

4.4.2 Prédiction de l'inflation 74

4.4.3 Réinjection de l'inflation pour le calcul des réserves 76
4.5 Intérêts de la correction de l'inflation 77

Conclusion **80**

5 Bibliographie **82**

Annexe A : Triangle RC Automobile utilisé lors de l'étude **84**

Annexe B : Vérification de l'hypothèse de proportionalité des $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ **86**

Annexe C : Extrapolation des coefficients de Chain-Ladder **89**

Annexe D : Comparaison des mesures d'incertitudes **91**

Annexe E : Exemple d'un triangle pour lequel l'incertitude à un an est supérieure à l'incertitude à l'ultime **93**

Introduction

Une compagnie d'assurance a pour contrainte première de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés. Or en assurance, le cycle de production est inversé : le paiement de la prime est effectué avant le règlement des sinistres, autrement dit avant que le service soit fourni ; d'où cette préoccupation d'un assureur vis-à-vis de ses engagements. Ces primes récoltées sont à la disposition de la compagnie, et lui permettent de ce fait de constituer des réserves pour les sinistres à venir. Ainsi, l'enjeu pour une compagnie est d'évaluer le montant des réserves à constituer afin d'être capable de faire face à toutes les indemnisations qu'elle aura à verser pour les sinistres qui seront survenus pendant la période couverte par la police. Elle pourra ainsi garantir sa solvabilité, pourvu qu'elle ait comblé ses besoins en capitaux propres (voir les articles R334-1 et R334-3 du Code des Assurances). La prévision des réserves est donc un enjeu crucial.

Nous considérerons dans cette étude uniquement des engagements non-vie. Et dans ce cadre, en général, le règlement des sinistres ne s'effectue pas directement après la déclaration mais s'étale sur plusieurs exercices, notamment pour les branches de l'assurance à déroulé long (RC corporels, RC générale...) qui nécessitent une expertise, ou une stabilisation de la situation, autrement dit que le montant à verser au bénéficiaire soit connu avec précision. Les provisions prévues à cet effet sont appelées "Provisions pour sinistres à payer" (PSAP). À cela s'ajoutent les sinistres qui sont survenus mais n'ont pas encore été déclarés (Incurred But Not Reported, IBNR) : on parle des sinistres "tardifs". Ainsi, une des principales problématiques, notamment en assurance IARD, est la constitution de provisions : on parle de provisionnement ou *reserving*. Tout l'objectif est donc de prévoir les indemnisations qui devront être réglées au cours du temps.

Dans le cadre de ce calcul de provisionnement, l'actuaire devra donc se faire une image de la charge ultime de sinistralité, et de sa répartition dans le temps. Pour cela, il lui est possible de travailler dans un cadre ligne à ligne (modèles collectif et individuel) ou bien agrégé (méthodes de triangle, déterministes ou stochastiques). Cette problématique est d'autant plus d'actualité du fait de la mise en place des dispositifs de provisionnement Solvabilité 2 à l'horizon 2014. Cette norme introduit une exigence de fonds propres traduisant explicitement les sources de risques pesant sur le portefeuille. Il s'agit donc d'une vision analytique du risque en nécessitant une meilleure connaissance par les acteurs du marché assurantiel. Aussi est-ce l'occasion pour les assureurs de revisiter les procédures en place et de vérifier leur pertinence au regard du nouveau référentiel.

La méthode ligne à ligne se base sur des données détaillées : les paiements de chaque sinistre sont connus (totalement ou non s'ils ne sont pas terminés) par les dates de règlement et les flux à chaque date. Ainsi, pour cette méthode l'actuaire devra modéliser les dates des flux, les montants, et la date de clôture. Pour ce type de méthode, on pourra par exemple se référer à Beneteau [2004].

Notre travail portera sur les méthodes de type "agrégé". Dans ce cas, les données issues de la même année de survenance et de développement sont regroupées. Par conséquent, il y a inévitablement une perte d'information par rapport aux méthodes ligne à ligne. En revanche, elles possèdent l'avantage d'être généralement plus simples à appliquer, mais aussi plus robustes aux erreurs de modèle.

Il convient donc de disposer d'éléments permettant de retenir la méthode la plus adaptée et notamment de pouvoir justifier du recours à une méthode agrégée. Aussi faudra-t-il, au-delà de la cohérence du modèle avec les données historiques des sinistres, tenir compte de l'incertitude sur les réserves engendrée par le modèle choisi. En effet, alors que l'incertitude sur la charge à l'ultime prévalait jusque là, Solvabilité 2 a introduit la notion d'incertitude à un an et qui se base sur l'erreur d'estimation à horizon un an. Cette quantification s'avère donc nécessaire. Et c'est ici que rentre en jeu la gestion de l'inflation, qui aura un intérêt particulier de ce point de vue là. Dans le cadre de l'élaboration de l'inventaire des principales méthodes existantes, nous nous sommes notamment référés Denuit et Charpentier [2005] ou encore Partrat et al. [2007].

1 L'agrégation des sinistres

Une des difficultés intrinsèques au provisionnement est qu'un sinistre peut couvrir plusieurs années. Chaque sinistre s survenu l'année i, donne lieu à un premier remboursement dont on supposera qu'il s'effectue cette même année i ("année d'origine" ou "de survenance"). Bien qu'il puisse y avoir discordance entre ces deux dates, cette hypothèse n'est pas restrictive. Ce premier remboursement constitue le point de départ d'un processus de paiements $(X_k^{s_i})_{k\geq 0}$ qui s'étale dans le temps (sur plusieurs "années de développement" k), mais dont le délai et les montants sont inconnus à l'avance.

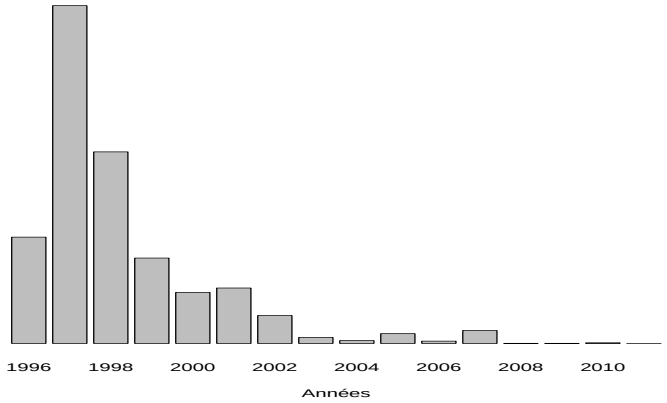


FIGURE 1 – Evolution du processus de paiement d'un sinistre

Ce processus est particulier à chaque sinistre, et nous donne donc une idée fine de l'évolution des paiements auxquels fait face la compagnie d'assurance : une vision détaillée dans le temps (dates d'indemnisation), une description des montants pour chaque date, et ceci quel que soit la branche d'assurance associée au risque souscrit (frais de santé, dommages corporels, responsabilité civile, IARD...). Un travail ligne à ligne, qui repose sur une observation individuelle des sinistres, offrirait ainsi l'avantage d'informations fournies et détaillées. En particulier, il permet la construction d'une loi d'expérience qui repose sur la segmentation de chacune des polices, et d'obtenir des intervalles de confiance pour les montants à provisionner. Toutefois, sa mise en œuvre peut se révéler lourde et contraignante, notamment du fait qu'un accès aux données par police est indispensable.

Construction d'un triangle de développement

Un triangle de développement consiste en un tableau à double entrée, dont seule la partie supérieure gauche est connue. Les lignes du triangle correspondent aux

années d'origine des sinistres qui y seront reportés, et les colonnes aux années de développement (qui représentent la durée de règlement d'un sinistre). Il existe différents types de triangles de développement, à savoir les triangles des charges, les triangles de règlements ou encore les triangles des règlements cumulés.

Prenons pour exemple un triangle de règlement. Le report des sinistres dans chaque cellule (i,k) se fait de la façon suivante :

$$Z_{i,k} := \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} X_k^{s_i}$$

où $\mathcal{S}_i$ est l'ensemble des sinistres déclarés à l'année i, on dit d'origine i. $Z_{i,k}$ correspond donc aux paiements concernant les sinistres d'année d'origine i, et qui ont été effectués lors de leur $k^{\text{ème}}$ année de développement.

	0	1	...	J-1	J
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,J-1}$	$Z_{0,J}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,J-1}$	
⋮					
I-1	$Z_{I-1,0}$	$Z_{I-1,1}$			
I	$Z_{I,0}$				

TABLE 1 – Triangle de règlements

La construction du triangle (pour une catégorie de risque précise) entraîne donc inévitablement une perte d'information : toutes les données spécifiques à une police sont ignorées. Seul l'étalement des coûts est retenu.

Cela nous amène à considérer des modèles de type agrégé qui, bien que raisonnant sur une information réduite à propos des sinistres, présentent l'avantage d'être simples à utiliser et robustes à l'erreur de modèle. Dans ce cadre, le principe est d'estimer les flux futurs en raisonnant par année de survenance des sinistres, et d'évaluer une cadence de paiement pour régir l'évolution des remboursements des sinistres d'une même année de survenance. Nous verrons en particulier la méthode de Chain-Ladder qui est la méthode de référence.

On distingue deux classes de méthodes : les méthodes déterministes et stochastiques. La première ne fait aucune hypothèse probabiliste permettant de mesurer l'incertitude associée à la prédiction du montant des réserves. Elle reflète de manière brute le principe de cadence de paiement d'une année de développement à une

autre. La deuxième a été introduite justement afin d'obtenir une estimation de cette erreur de prévision et d'intervalle de confiance ; elle reprend toutefois les idées des méthodes déterministes comme nous le verrons. Nous allons donc ici présenter les techniques classiques de provisionnement de type agrégé.

2 Méthodes classiques de provisionnement

Nous allons passer en revue les principales méthodes de provisionnement, que l'on partitionne ici en deux catégories : les méthodes déterministes, et les méthodes stochastiques. Pour cela, nous travaillerons sur un triangle de développement dont les lignes représentent les années d'origine notées de 0 à I, et les colonnes celles des années de développement notées de 0 à J. La valeur J correspond donc à la durée de développement, et I l'année civile actuelle (la construction se base sur l'hypothèse importante qui limite à J le nombre d'années de développement).

Définitions et notations

- $Z_{i,k}$: "l'incrément", soit le paiement dans l'année de développement k pour des sinistres d'année d'origine i.

- $C_{i,k}$: le paiement cumulé, soit :

$$C_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} Z_{i,j}$$

- R_i : montant de réserves nécessaires pour financer les encours futurs des sinistres d'année d'origine i, et se définit comme suit : $R_i := C_{i,J} - C_{i,I-i}$

- R : réserve globale, définie par $R = \sum_{i=0}^{I} R_i$

2.1 Méthodes déterministes

2.1.1 Méthode de référence : Chain-Ladder

Cette méthode de calcul de provision (que l'on appelle aussi "cadence de règlement") est relativement ancienne puisqu'on peut trouver la trace de ses premières apparitions dans des livres de droit des assurances des années 1930, comme par exemple Astesan [1938]. C'est une méthode générique qui peut s'appliquer sur tous les types de triangles (de développement, de charges etc.)

L'idée ici est de considérer que l'évolution des encours cumulés d'une année de développement à une autre reste identique pour toutes les années de survenance. Cette évolution est caractérisée par un facteur multiplicatif propre à chaque année de développement. Sa simplicité et son intuitivité font de ce modèle un modèle de

référence en termes de provisionnement, et incitent à l'utiliser pour se faire une première idée des montants de réserve. Les autres modèles tendent d'ailleurs à s'aligner sur les résultats obtenus par Chain-Ladder, comme nous le verrons par la suite.

Pour appliquer cette méthode, il est nécessaire de disposer d'un portefeuille homogène et grand, sans événements extrêmes. Ces conditions sont indispensables pour obtenir des résultats satisfaisants. En effet, la présence d'un grand sinistre, dont le déroulement au cours du temps peut-être différent des sinistres classiques (étalement, en général plus long), perturbera l'hypothèse d'égalité des facteurs de développement pour toutes les années d'origine i. Toutefois, un moyen de pallier à ce problème est d'effectuer un pré-traitement visant à ne retenir que les risques attritionnels (répétitifs, nombreux, de petite taille), et donc retirer les risques graves et extrêmes.

Hypothèses du modèle

Cette modélisation repose sur l'hypothèse qu'il existe une relation de proportionnalité entre les montants cumulés, d'une année de développement à la suivante. De plus, il est supposé que le coefficient de proportionnalité d'une année de développement est identique pour toutes les années de survenance.

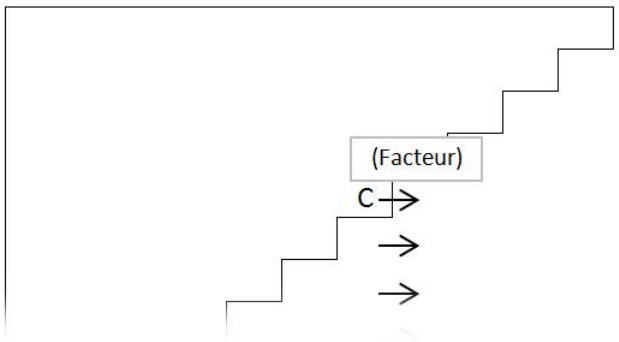


FIGURE 2 – Représentation graphique du principe de développement selon Chain-Ladder

Pour résumer, on suppose que la relation suivante est satisfaite :

$$\forall\ 0 \leq i \leq I-1,\ 0 \leq k \leq J-1,\ C_{i,k+1} = f_k.C_{i,k}$$

où f_k, $\forall\ k \geq I-i+1$, est estimé avec l'historique de données par :

$$\hat{F}_k := \frac{\sum_{j=0}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=0}^{I-k} C_{j,k}} \tag{1}$$

Il est alors possible d'estimer les montants des sinistres survenus en année i, après k années de développement, par la relation suivante :

$$\forall\ k \geq I - i, \quad \hat{C}_{i,k}^{CL} := C_{i,I-i} \prod_{l=I-i}^{k-1} \hat{F}_l$$

Ce qui permet de calculer les réserves et réserve globale pour chaque année de survenance :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, ..., I\}, \quad \hat{R}_i^{CL} &:= \hat{C}_{i,J}^{CL} - \hat{C}_{i,I-i}^{CL} \\ \hat{R}^{CL} &:= \sum_{i=0}^{I} \hat{R}_i^{CL} \end{aligned}$$

Exemple 2.1.1. *Illustrons cette méthode.*

<u>*Présentation des données*</u>

Les données utilisées sont un triangle de développement sur la RC automobile (cf. Annexe A p 84). Il s'agit d'un triangle des cumuls de paiements, typiquement celui sur lequel repose la méthode de Chain-Ladder. Les années de survenance s'étalent de 1996 à 2011, et les paiements sont exprimés en euros. Notons que ce triangle présente un incrément négatif. Cette particularité peut avoir différentes raisons : recours (règlements provenant de tiers), annulation totale ou partielle de créances en faveur de l'assureur ou encore tout simplement d'erreurs.

<u>*Validation du modèle*</u>

Si l'hypothèse selon laquelle il existe une relation linéaire entre les paiements cumulés d'une année de déroulement à l'autre est vérifiée, les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=0,...,I-j}$ *doivent être alignés sur une droite passant par l'origine. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons tracé le C-C-plot représentant l'ensemble de ces points selon les années de développement, une couleur différente étant attribuée à chacune de ces dernières. Au regard de cette figure, l'hypothèse paraît raisonnable car les points semblent alignés sur des droites issues de l'origine pour chaque année de développement. (ce type de C-C-plot a été réalisé pour d'autres branches d'assurance en Annexe B p 86)*

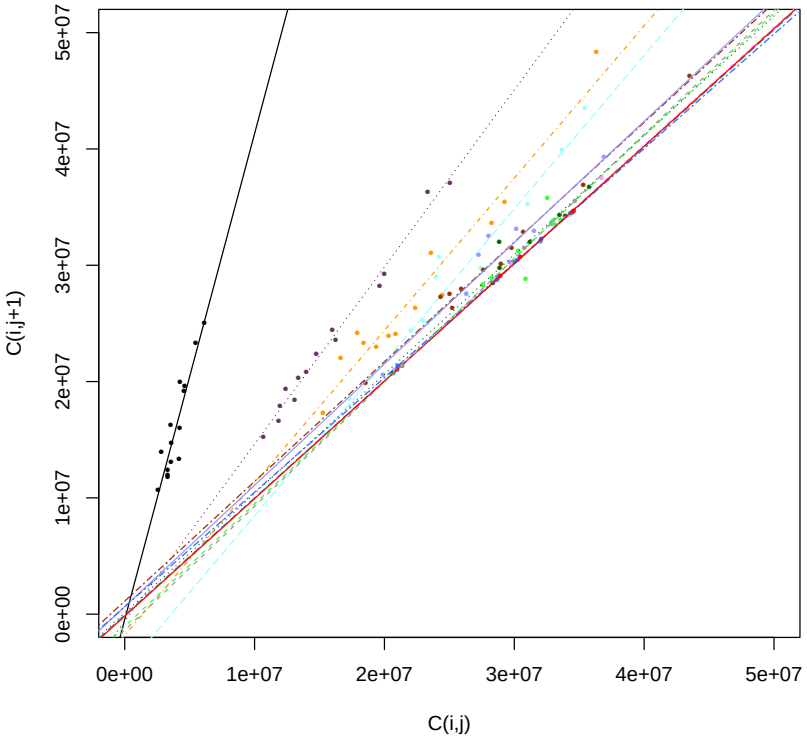


FIGURE 3 – Droite de régression, points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ pour $i \in 1, ..., J-1$

Par ailleurs, en effectuant les régressions linéaires (voir les résultats dans la partie concernant la méthode de London-Chain), les ordonnées à l'origine ne sont, pour la quasi-totalité, pas significatifs, ce qui valide aussi l'hypothèse que seul un coefficient de proportionnalité lie les montants cumulés de deux années de développement consécutives.

La seconde hypothèse à vérifier est que ce coefficient de linéarité est identique sur les années de survenance : $f_{i,k} = f_k \ \ \forall i = 0, ...I-k-1, \ \forall k = 0, ...J-1$. *Pour chaque année de développement* k, *il s'agit de calculer les* $(f_{i,k})_{i=0,...I-k-1}$ *et les comparer à leur moyenne* $f_{\bullet k}$ *(s'ils sont identiques, alors ils valent la moyenne).*

Principe numérique

Calcul des $\hat{F}_{i,k}$, *puis des* $\hat{F}_{\bullet k}$ *et* $S_{\bullet k}$ *:*

$$\hat{F}_{\bullet k} = \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I}\hat{F}_{i,k} = \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I}\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$$
$$S^2_{\bullet k} = \frac{1}{I}\sum_{i=0}^{I}(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{F}_{\bullet k})^2$$

Le calcul préalable des coefficients nous donne, dans notre exemple, les résultats suivants (utilisation de la librairie ChainLadder du logiciel R) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{F}_k$	4,061	1,485	1,230	1,137	1,068	1,066	1,019	1,03
$\hat{F}_{\bullet k}$	4.062	1.482	1.227	1.1314	1.07	1.066	1.019	1.03
$S^2_{\bullet k}$	0.477	0.052	0.081	0.0727	0.0248	0.0496	0.0421	0.034

k	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{F}_k$	1,007	1,004	1,007	1,004	1,018	1,017	1
$\hat{F}_{\bullet k}$	1.007	1.004	1.007	1.004	1.0162	1.0141	1
$S^2_{\bullet k}$	0.007	0.003	0.005	0.004	0.014	0.019	/

TABLE 2 – Résultats numériques pour la vérification des hyphotèses

On remarque que les coefficients de Chain-Ladder sont proches des moyennes des ratios évalués ligne par ligne. Le premier facteur, par exemple, s'interprète comme ceci : le passage d'un encours cumulé de l'année de développement 0, à celui de l'année de développement 1, se fait par un facteur de 4,061.

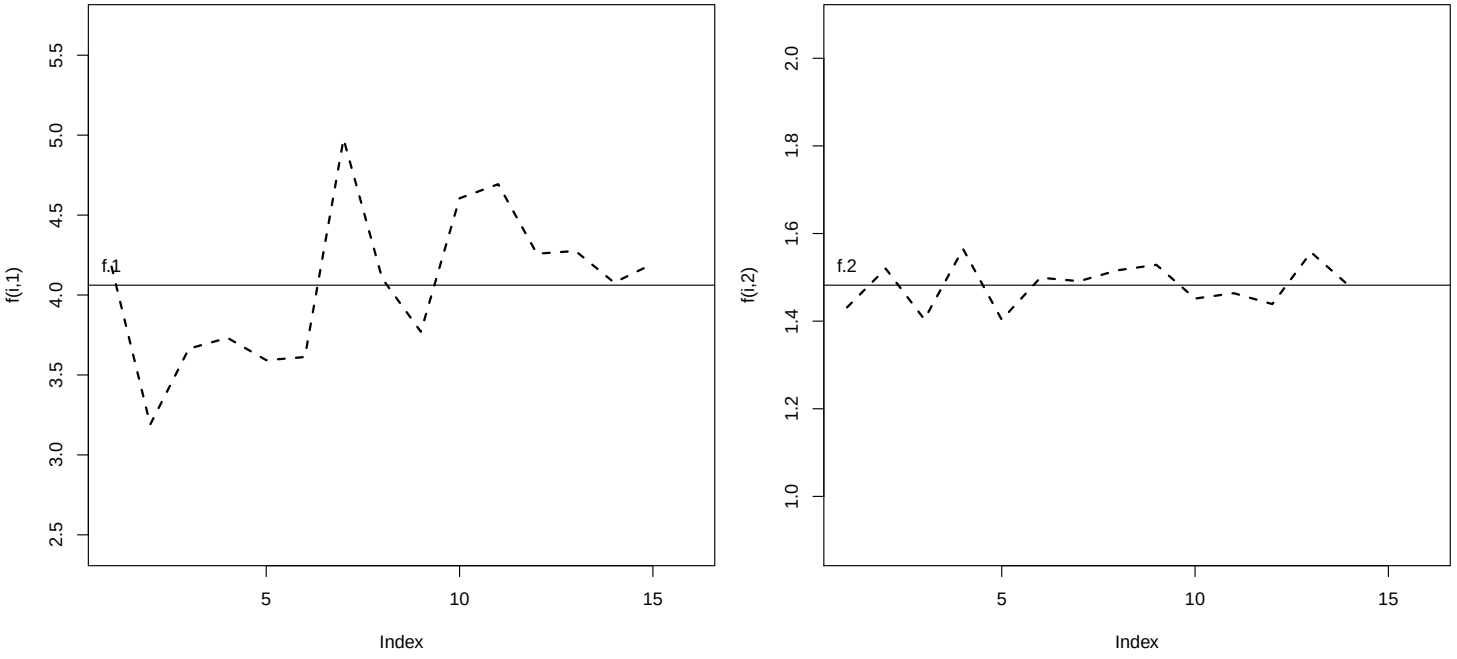


FIGURE 4 – Comparaison des $(\hat{F}_{i,k})_{i=0,\dots I-k-1}$ à $\hat{F}_{\bullet k}$, pour k=0 et 1

Pour la première année de développement (voir figure ci-dessus), l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survenance ne semble pas réaliste ; d'ailleurs, la variance $S^2_{\bullet 0}$ est relativement élevée et signifie que les coefficients par année dont

plutôt volatiles autour de la moyenne. En revanche, elle paraît plus vraisemblable pour les années de développement suivantes. A titre d'exemple, le graphique de droite montre que les facteurs sont relativement stables pour la deuxième année de développement. Il en est de même pour les autres années, et cela se remarque aussi avec des variances faibles. Nous considérons donc que les hypothèses du modèle de Chain-Ladder sont ici vérifiées, et nous pouvons appliquer le modèle.

Application du modèle

Le calcul des prévisions des paiements cumulés nous permet alors d'obtenir les figures suivantes :

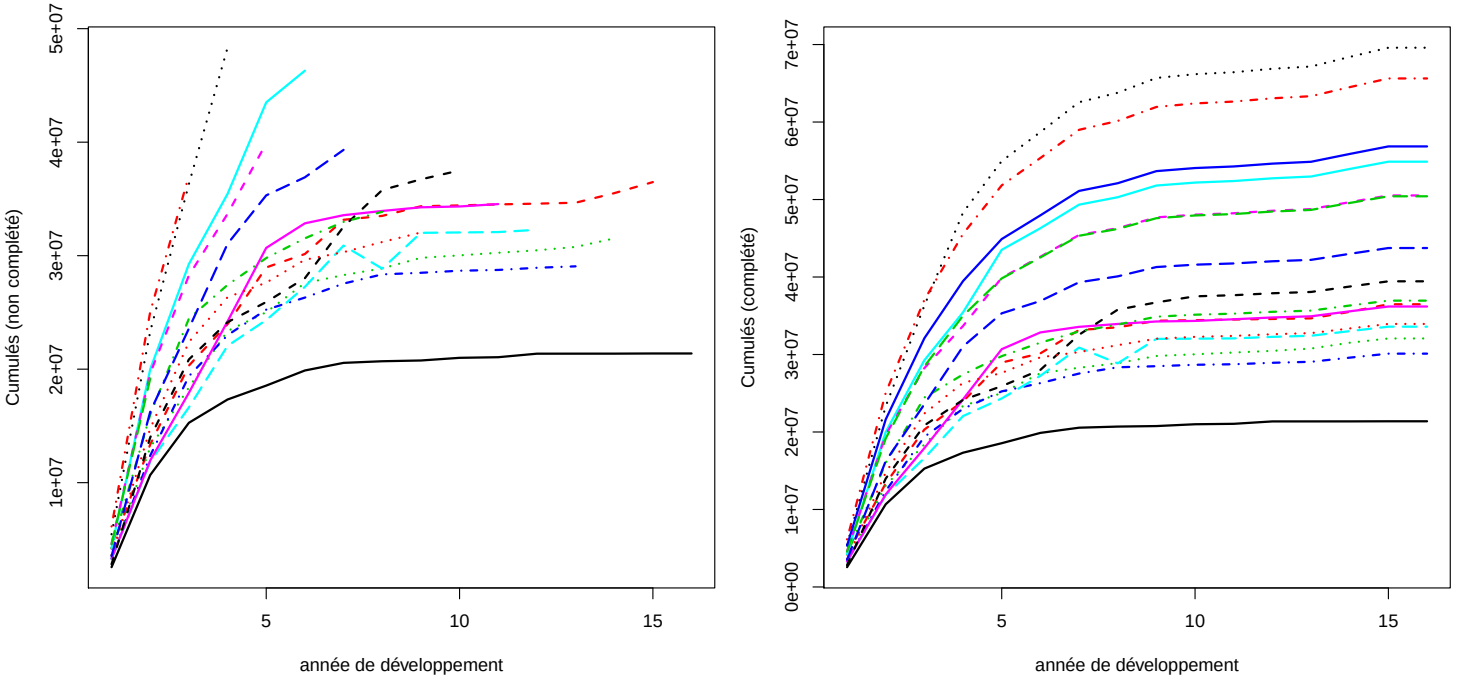


FIGURE 5 – Courbes des cumuls par année de survenance pour le triangle de départ (gauche) et celui complété avec Chain-Ladder (droite)

En supposant que le déroulement des sinistres est terminé ($J \leq I$) la provision totale à effectuer est de 167,73 M€.

Notons que cette modélisation est faite sous l'hypothèse forte que les déroulements sont clos au bout de J années. Pour pallier à cette restriction, il est possible d'introduire un tail factor ou facteur de queue (cf. section 2.3).

Critiques de la méthode Chain-Ladder

Nous avons vu que cette méthode a l'avantage d'être aisée à appliquer. Cependant, elle repose sur des hypothèses qui peuvent ne pas s'avérer réalistes dans la pratique.

En effet, le schéma de développement, selon lequel le cumul d'une année de développement est proportionnel à celui de l'année précédente, doit être similaire pour toutes les années d'origine. Ainsi, ce schéma ne tient pas compte d'une évolution probable dans le déroulement des règlements des sinistres au cours du temps. Par exemple, en cas de changement de jurisprudence, il peut y avoir une variation notable au niveau des montants de paiement. Ou encore en cas de changement de management au niveau de la gestion des sinistres visant à accélérer ou ralentir les rythmes de remboursements. Pour résumer, cette méthode repose sur l'hypothèse d'une très grande stabilité au niveau des facteurs de développement de la sinistralité. .

D'autre part, l'instabilité de la prévision des charges finales pour les années récentes est très importante. De fait, la charge finale correspondant à la dernière année de survenance du triangle est le résultat du produit de J estimations de facteurs de développement $\hat{F}_k$, $k \in \{0, ..., J\}$. Ce qui induit une forte sensibilité à la première valeur. Avec les données utilisées dans l'exemple, les paiements de la première année représentent 9,4 % du montant totale déterminé par Chain-Ladder. À titre de mesure de sensibilité (voir l'encadré ci-dessous), une baisse de 1 % du premier paiement (c'est-à-dire que l'on passe de 9,4 % à 8,4 %), entraîne une réduction de 10,67 % de la charge finale estimée, ce qui correspond en fait au produit des facteurs de développement multiplié par la variation introduite (ici 1 %)

Principe numérique

1. p la proportion $C_{I,1}/\hat{C}_{I,J}$
2. $\hat{C}'_{I,J} = \{(p - 1\%)C_{I,1}\} \times \prod_{l=0}^{J-1} \hat{F}_l$ la charge finale estimée si la proportion de $C_{I,1}$ n'était plus que de $(p - 1\%)$
3. Sensibilité : $\frac{\hat{C}_{I,J} - \hat{C}'_{I,J}}{\hat{C}_{I,J}}$

2.1.2 Variantes de Chain-Ladder

A. <u>Méthode de London-Chain</u>

Cette méthode a été introduite par Benjamin et Eagles [1986] afin de calculer des provisions aux Lloyd's.

Hypothèses du modèle

Ce modèle reprend les hypothèses précédentes, mais repose sur une relation moins contraignante entre les états $C_{i,k}$ et $C_{i,k+1}$, selon laquelle l'un est fonction affine de l'autre :

$\forall k \in \{0, ..., J-1\}\ \exists f_k\ et\ a_k$ tels que :

$$\forall i \in \{0, ..., I-k-1\} \quad C_{i,k+1} = f_k.C_{i,k} + a_k$$

Estimateurs du modèle

On a dans ce modèle deux fois plus de paramètres à estimer que dans la méthode de Chain-Ladder : les f_k et les a_k pour $k = 0, ..., J$. Ce modèle se présente sous la forme de régressions linéaires et ainsi, la manière qui semble la plus naturelle pour estimer ces paramètres consiste en la méthode des moindres carrés. Les estimateurs vérifient donc, pour tout $k = 0, ..., J$:

$$(\hat{F}_k^{LC}, \hat{a}_k^{LC}) = argmin \left\{ \sum_{i=0}^{I-k-1} (C_{i,k+1} - a_k - f_k C_{i,k})^2 \right\}$$

ce qui donne les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned} \hat{F}_k^{LC} &= \frac{\frac{1}{I-k} \sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k} C_{i,k+1} \ - \ \bar{C}_k \bar{C}_{k+1}}{\frac{1}{I-k} \sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k}^2 - \bar{C}_k^2} \\ \hat{a}_k^{LC} &= \bar{C}_{k+1} - \hat{F}_k^{LC} \bar{C}_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{C}_k &= \frac{1}{I-k} \sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k} \\ \bar{C}_{k+1} &= \frac{1}{I-k} \sum_{i=0}^{I-k-1} C_{i,k+1} \end{aligned}$$

Remarque 1. *Notons que :*

$$\hat{F}_k^{LC} = \frac{cov(colonne_k, colonne_{k+1})}{var(colonne_k)}$$

Apports de cette méthode

La méthode de London-Chain est plus élaborée et souple que la méthode de Chain-Ladder dans la mesure où elle tient compte d'une tendance multiplicative, mais aussi d'une tendance additive (ou incrémentale). En posant cette dernière à zéro, on retrouve le modèle de Chain-Ladder.

Ainsi, contrairement à la méthode de Chain-Ladder qui ne pouvait être appliquée que lorsque les points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ étaient sensiblement alignés (à k fixé) sur une droite passant par l'origine, la méthode de London-Chain suppose elle aussi un alignement des points sur une même droite, mais relâche l'hypothèse d'alignement avec l'origine. Le relâchement de cette contrainte peut-être validé à l'aide d'un test statistique concernant la significativité du facteur incrémental. De manière formelle, le test d'hypothèse est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : a_k = 0 \\ \mathcal{H}_1 : a_k \neq 0 \end{cases}$$

Dans le cas où l'on suppose la normalité des résidus ϵ_k, on peut montrer que l'estimateur $\hat{a}_k^{LC}$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(a_k, \frac{\sigma_k^2}{I-k} + \frac{\sigma_k^2 \bar{C}_k^2}{(I-k-1)S_{C_k}^2}\right)$ où σ_k^2 est la variance de ϵ_k et $S_{C_k}^2$ est un estimateur sans biais de la variance de C_k.

On définit ensuite la statistique de test suivante :

$$T_k = \frac{\hat{a}_k^{LC} - a_k}{S_{\epsilon_k}\sqrt{\frac{1}{I-k} + \frac{\bar{C}_k^2}{(I-k-1)S_{C_k}^2}}}$$

où $S_{\epsilon_k}^2$ est un estimateur sans biais de σ_k^2.

Ainsi, sous les hypothèses précédentes, $T_k \sim t_{I-k-2}$, ce qui nous permet d'obtenir une zone de rejet de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ pour un niveau de confiance arbitraire. On pourra alors par exemple valider le modèle à 95 % dans le cas où la p-valeur associée à ce test est inférieure 5 %.

Remarque 2. *On remarque par ailleurs qu'il existe un modèle d'estimation des provisions qui est intermédiaire entre Chain-Ladder et London Chain, appelé*

London-Pivot *et proposé par Straub [1988], où l'on suppose que la relation est la suivante :* $\forall k \in \{0, ..., J-1\} \quad \forall i \in \{0, ..., I-k-1\}$ *:*

$$C_{i,k+1} + a = f_k(C_{i,k} + a)$$

Graphiquement, l'hypothèse s'avère envisageable lorsque :
$\forall k \in \{0, ..., J-1\}$*, les points* $(C_{i,k}, C_{i,k+1})_{i=0,...,I-k-1}$ *sont plus ou moins alignés sur des droites, et ces droites sont concourantes en* $(-a, a)$*, qu'on appelle le point pivot (et qui correspond à l'origine dans le cas Chain-Ladder). La calibration de ce modèle se fait une nouvelle fois par méthode des moindres carrés. Il s'agit de minimiser le critère :*

$$\Delta = \sum_{k=0}^{J-1} \sum_{i=0}^{I-k-1} [(C_{i,k+1} + a) - f_k(C_{i,k} + a)]^2$$

Il n'existe pas de solution analytique au problème, la résolution se fait donc numériquement.

Exemple 2.1.2. *En guise d'aperçu, on peut commencer par tracer les deux droites de régressions pour l'année de développement* k *: non contrainte, correspondant à la méthode de London-Chain (de la forme* $y = ax + b$*), et contrainte pour la méthode de Chain-Ladder (de la forme* $y = ax$*). On obtient la Figure 6 suivante :*

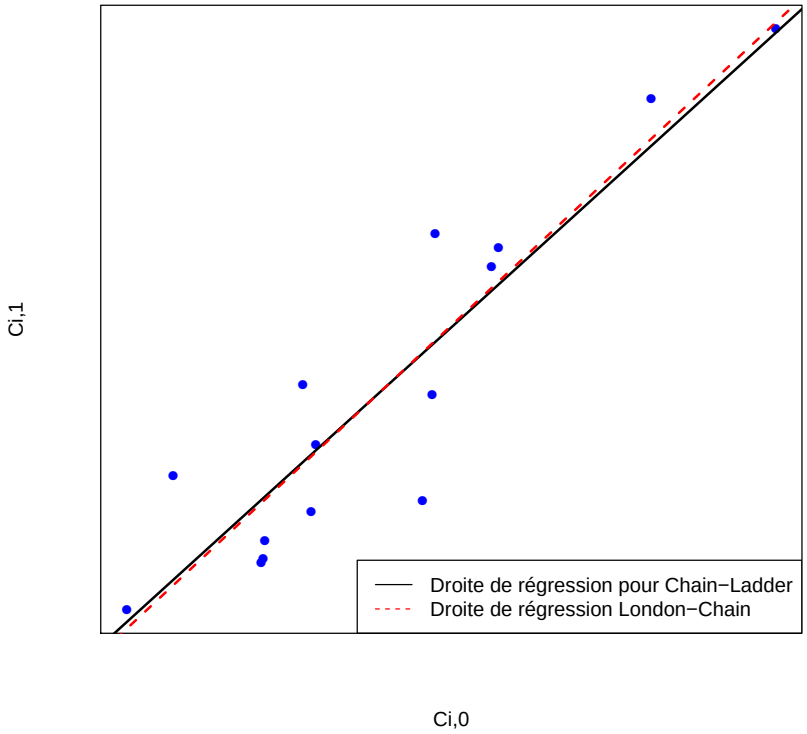


FIGURE 6 – Droite de régression, points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ pour k=0

On remarque que les pentes sont sensiblement les mêmes, ce qui implique que les coefficients déduits de chacune des méthodes devraient être relativement proches.

Vérifions maintenant les hypothèses du modèles. Elles ont toutes été vérifiées dans l'exemple de la méthode Chain-Ladder, hormis la significativité des paramètres additifs $(a_k)_{k=0,...J-1}$.

Principe numérique

Régression linéaire sans contrainte des $(C_{i,k+1})_{i=0,I-k}$ *sur* $(C_{i,k})_{i=0,I-k}$ $\forall k \in \{0, ..., J-1\}$
Obtention des paramètres multiplicatifs et additifs, et des p-valeurs pour chacun de ces paramètres.

Pour notre triangle, les résultats des estimations sont :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{F}_k^{LC}$	4,178	1,523	1,310	1,319	1,029	1,044	1,055
$\hat{a}_k^{LC}$('000)	-464,15	-603,31	-1814,20	-4726,84	1119,18	642,12	-1062,77

k	7	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{F}_k^{LC}$	1,026	1,012	1,006	0,985	1,010	1,066	1,068	1
$\hat{a}_k^{LC}$('000)	-107,82	-147,55	-63,71	639,46	-168,06	-1384,42	-1438,15	/

TABLE 3 – Estimation des paramètres par méthode des moindres carrés

Toutefois, seulement un des $(a_k)_{k=0,...J-1}$ *est significatif à un niveau de 95 %. Le modèle de London-Chain n'est donc pas nécessairement le plus ajusté à notre exemple, car ce résultat montre que les paiements cumulés d'une année de survenance à l'autre ont une relation plutôt linéaire qu'affine. Néanmoins, malgré la pertinence limitée de l'application de ce modèle à notre triangle, nous garderons les résultats pour la suite, à titre de comparaison.*

Après calcul des estimateurs de f_j *et* a_j *grâce à nos données, le montant des réserves obtenu par la méthode London-Chain est de 206,29 M€, soit un montant de réserves plus élevé que celui obtenu par la méthode Chain-Ladder. L'écart relatif s'élève à 22,3 %.*

Ici aussi, nous pourrions envisager un tail factor, mais la projection des futurs coefficients multiplicatifs devrait être accompagnée de celle des coefficients additifs également, qui n'ont cependant pas d'évolution logique apparente.

B. Méthode Grossing-Up

Cette méthode a été présentée par Schmidt [2003].

Hypothèses du modèle

(**H1**) On suppose l'existence de facteurs $\gamma_1, ..., \gamma_J \ \in]0;1]$, tels que

$$\forall i = 1, ..., I, \ k = 1, ..., J \ \ C_{i,k} = C_{i,J}.\gamma_k$$

(**H2**) Pour toute année de développement $k = 1, ..., J$, $\sum_{j=0}^{I-k} C_{j,k-1} \ > \ 0$

Estimateurs du modèle

Cette méthode est récursive dans la mesure où seuls les états terminaux sont estimés, chaque estimation étant fonction des précédentes. Ainsi, en notant le taux de Grossing-Up de l'année d'origine i :

$$\hat{G}^{GU}_{J-i} := \begin{cases} 1 & si \ i = 0 \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{i-1} C_{j,J-i}}{\sum_{j=0}^{i-1} \hat{C}^{GU}_{j,J}} & si \ i \geq 1 \end{cases}$$

On peut estimer l'état final de l'année d'origine i :

$$\hat{C}^{GU}_{i,J} := \frac{C_{i,J-i}}{\hat{G}^{GU}_{J-i}}$$

Exemple 2.1.3. *Cette méthode appliquée aux données de l'exemple précédent nous permet d'obtenir exactement les mêmes montants de réserve que la méthode de Chain-Ladder, à savoir 167,73 M€. La différence réside dans le fait qu'elle ne donne pas l'ensemble des paiements cumulés intermédiaires mais seulement la charge de sinistre ultime. La concordance des résultats des deux méthodes provient du fait qu'il existe une relation entre les facteurs de Chain-Ladder et les taux de Grossing-Up :*

$$\gamma_k = \prod_{l=k+1}^{J} \frac{1}{f_k}$$

Finalement, cette méthode propose simplement une approche différente de Chain-Ladder, en considérant plutôt les taux que les facteurs.

C. Méthode factorielle des moindres carrés de De Vylder

Cette méthode a été introduite par De Vylder [1978].

Hypothèses du modèle

Ce modèle se base sur les incréments $(Z_{i,k})_{i,k}$, et tient sur la relation suivante :

$$\forall i \in \{0, ..., I\},\ k \in \{0, ..., J\}, \quad Z_{i,k} = z_i y_k \lambda_{i+k}$$

c'est-à-dire que l'incrément s'exprime comme le produit des paramètres z_i (traduisant l'effet de l'année d'origine i), y_k (pour l'effet de l'année de développement k), et λ_{i+k} (qui correspond à l'impact de l'année calendaire, soit $i+k$; ce facteur représente l'inflation annuelle).

Notons que sans contrainte supplémentaire, le modèle n'est pas identifiable : les triplets $(az_i, \frac{y_k}{a}, \lambda_{i+k})$ fournissent les mêmes résultats pour tout a non nul.

Par ailleurs, dans le cadre d'une inflation constante dans le triangle[1] ($\lambda = cte$), nous pouvons envisager l'hypothèse supplémentaire : $\sum_{k=0}^{J} y_k = 1$, et l'on interprète alors facilement les deux autres paramètres. De fait,

$$\sum_{k=0}^{J} Z_{i,k} = z_i \sum_{k=0}^{J} y_k = z_i$$

Autrement dit z_i représente la charge sinistrale ultime de l'année i, et $y_k = \frac{Z_{i,k}}{z_i}$ la part de cette charge totale qui a été payée lors de l'année de développement k. Cette contrainte d'inflation constante sera conservée pour la suite.

Estimateurs du modèle

Les estimateurs s'obtiennent par minimisation des moindres carrés pondérés :

$$\Delta = \sum_{i=0}^{I} \sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} (Z_{i,k} - z_i y_k)^2$$

[1] Ce qui est le cas lorsque l'inflation a été retraitée (voir section 4).

On aboutit donc au système :

$$\forall\ 0 \leq i \leq I,\quad 0 \leq k \leq J,\ \begin{cases} z_i &= \dfrac{\sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} Z_{i,k} y_k}{\sum_{k=0}^{I-i} w_{i,k} y_k^2} \\ \\ y_k &= \dfrac{\sum_{i=0}^{I-k} w_{i,k} Z_{i,k} z_i}{\sum_{i=0}^{I-k} w_{i,k} z_i^2} \end{cases} \tag{2}$$

On peut voir que la solution du système d'équation n'est pas explicite. En revanche, il peut se résoudre de manière récursive. Pour cela, on réécrit le système (2) comme suit :

$$\begin{cases} z_i &= f_i(y_0, ..., y_J) \\ y_k &= g_k(z_0, ..., z_I) \end{cases}$$

On raisonne alors par suites de solutions, en choisissant arbitrairement la solution initiale $\left(y_k^{(0)}\right)_{k=0,...,J}$ tout en sachant que du choix de la solution initiale va dépendre la vitesse de convergence, puis en itérant de la manière suivante :

$$\forall\ m \geq 1,\ \begin{cases} z_i^{(m-1)} &= f_i\left(y_0^{(m-1)}, ..., y_J^{(m-1)}\right) \\ y_k^{(m)} &= g_k\left(z_0^{(m-1)}, ..., z_I^{(m-1)}\right) \end{cases}$$

Finalement, les termes des deux suites $\left(z_1^{(m)}, ..., z_I^{(m)}\right)_{m\geq 1}$ et $\left(y_1^{(m)}, ..., y_J^{(m)}\right)_{m\geq 1}$ convergent vers les solutions $(\hat{z}_1, ..., \hat{z}_I)$ et $(\hat{y}_1, ..., \hat{y}_J)$.

Exemple 2.1.4. *Cette méthode appliquée au même triangle de développement que dans les exemples précédents nous permet d'obtenir un montant de réserves de 171,41 M€, soit un écart relatif de 2,2 % par rapport à la méthode de référence Chain-Ladder.*

Limites de cette méthode

Nous avons $(2I + J + 1)$ paramètres à estimer, ce qui peut nous conduire, sans contrainte préalable sur le modèle, à une surparamétrisation ; le modèle ne sera pas identifiable. D'un point de vue de la qualité de l'estimation, les performances sur l'ensemble d'apprentissage (i.e. les données ayant servi à la construction du modèle) seront meilleures que dans le cas de Chain-Ladder par exemple. En revanche, elles seront probablement plus mauvaises pour les nouvelles données (en termes de prédiction) du fait de la trop forte variance des estimateurs locaux.

D. Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Cette méthode a l'avantage d'assurer une meilleure stabilité des estimations. En effet, elle repose sur une hypothèse exogène d'estimation préalable de la charge finale, sur laquelle il suffit d'appliquer un taux de liquidation (croissant sur les années de développement). De cette manière, les estimations récentes (processus de développement encore jeune) dépendent moins des premiers paiements qu'avec Chain-Ladder, qui au contraire inscrit une dépendance d'une année à l'autre. Ainsi, cette méthode est particulièrement adaptée aux triangles dont les paiements sont instables.

Hypothèses du modèle

Il s'agit d'un modèle multiplicatif pour les états $(C_{i,k})_{i,k}$ qui vérifie :

$$\forall\ i \in \{0, ..., I\},\ k \in \{0, ..., J\},\ C_{i,k} = \alpha_i \gamma_k$$

où $\alpha_0, ..., \alpha_I > 0$ représentent les charges finales prévisibles pour chaque année de survenance et $\gamma_0, ..., \gamma_J \in]0, 1]$ représentent les cadences de paiement cumulées.

Estimateurs du modèles

Il faut préalablement disposer d'estimateurs a priori des charges finales espérées $\hat{\alpha}_0, ..., \hat{\alpha}_I$ (variables exogènes, pouvant provenir d'informations extérieures). La seconde étape consiste à déterminer les facteurs de développement de la même façon que Chain-Ladder, pour en déduire les pourcentages des pertes $1 - \hat{\gamma}_0, ..., 1 - \hat{\gamma}_J$ qui seront encourus <u>dans l'avenir</u> :

$$1 - \hat{\gamma}_k = 1 - \frac{1}{\prod_{j=k}^{J} \hat{F}_j}$$

Enfin, les espérances des états futurs sont estimées par :

$$\hat{C}_{i,k}^{BF} := C_{i,I-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{I-i})\, \hat{\alpha}_i$$

Avantages et limites de cette méthode

Soulignons que ce modèle permet, contrairement aux autres méthodes déterministes, d'incorporer de l'information extérieure, notamment au travers de l'expertise de l'actuaire pour la détermination des $\hat{\alpha}$, et ainsi de ne pas s'attacher

uniquement aux informations apportées par les données. De plus, l'introduction de données exogènes permet de remédier au fait que dans la méthode Chain-Ladder, le montant de la charge ultime dépend entièrement de la dernière position connue et donc si celle-ci est nulle, la charge ultime le sera aussi.
Toutefois, ces données exogènes sont aussi un inconvénient : elles doivent être justes, d'autant que ce sont ces charges finales qui sont justement le point d'intérêt du provisionnement et des modèles à ce sujet.

2.1.3 Conclusion sur les méthodes déterministes

Pour conclure, toutes ces méthodes déterministes permettant d'estimer les réserves de sinistres sont relativement simples d'utilisation, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Pour mesurer cette incertitude de provisionnement, nous allons avoir recours aux méthodes stochastiques de provisionnement.

2.2 Méthodes stochastiques

2.2.1 Intérêt

L'idée dans cette partie est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, notamment par la construction d'intervalles de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant des provisions. Pour cela, les méthodes stochastiques sont adaptées, puisqu'elles considèrent les réserves sous un angle probabiliste en considérant leur distribution. Ceci est d'autant plus important à ce jour du fait de la mise en place de la réglementation Solvabilité 2. En effet, cette directive a crée des besoins de calculs notamment en matière d'incertitude sur les réserves .

Introduisons la notion d'information disponible par les données observées avant l'année de développement $I - i$, pour l'année de survenance i :

$$\mathcal{F}_{i,I-i} := \{C_{i,k},\ k = 0, ..., I - i\}$$

Posons également l'ensemble d'information suivant :

$$\mathcal{B}_k = \{C_{i,j} | j \leq k, i + j \leq I\}$$

qui correspond à l'information disponible à la date actuelle et qui concerne une année de développement antérieure à k.

À titre d'illustration, la figure ci-après schématise bien les deux ensembles :

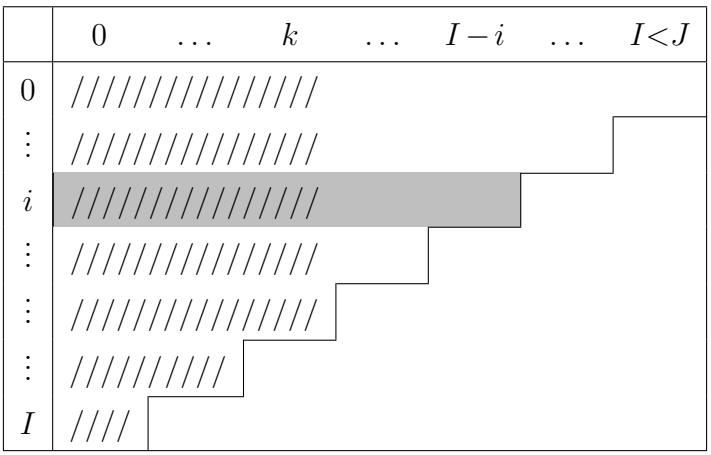


TABLE 4 – Représentation graphique des deux ensembles d'information : $\mathcal{B}_k$ (hachuré), $\mathcal{F}_{i,I-i}$ (grisé)

2.2.2 Modèle de Mack (1993)

Hypothèses du modèle

Le modèle proposé par Mack [1993] est un modèle non paramétrique, conditionnel à la réalisation du triangle, et qui permet d'estimer les erreurs commises lors du calcul des réserves. Il s'agit en fait d'un modèle stochastique pour la méthode de Chain-Ladder. Les hypothèses sous-jacentes à ce modèle sont les suivantes :

(**H1**) Les paiements cumulés $C_{i,k}$ sont indépendants par année d'accident *i.e* $\forall\ i, j\ \{C_{i,1}, ..., C_{i,J}\}, \{C_{j,1}, ..., C_{j,J}\}$ sont indépendants.

(**H2**) Il existe des paramètres $f_1, ..., f_J > 1$ et $\sigma_1^2, ..., \sigma_J^2 > 0$ tels que : $\forall\ i \in \{0, ..., I\},\ k \in \{0, ..., J\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_{i,k+1}|\mathcal{F}_{i,k}) &= C_{i,k} f_k \\ Var(C_{i,k+1}|\mathcal{F}_{i,k}) &= C_{i,k}\sigma_k^2 \end{aligned}$$

Précisons que l'hypothèse (H1) n'est plus vérifiée dès lors qu'intervient un changement de mode de gestion, ou dans les taux d'inflation de la branche considérée. Des mises en *as if* (voir section 4) permettent cependant de limiter ce point. Sous ces deux hypothèses, Mack [1993] a montré que ce modèle stochastique permet d'obtenir exactement les mêmes montants de provision que la méthode standard de Chain-Ladder, qui est la référence en matière de provisionnement.

On introduit les termes $\gamma_0, ..., \gamma_J$ qui vérifient : $\forall\ k \in \{1, ..., J-1\}$

$$\begin{cases} \gamma_k &= \frac{\gamma_{k+1}}{f_{k+1}} \\ \gamma_J &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall\ i \in \{0, ..., I\}$ et $k \in \{0, ..., J\}$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k}}{\gamma_k}\middle|\mathcal{F}_{i,k-1}\right) = \frac{C_{i,k-1}}{\gamma_{k-1}} \tag{3}$$

Estimateurs du modèle

On remarque d'après la formule précédente que la famille $\left(\frac{C_{i,k}}{\gamma_k}\right)_{k=1,...,J}$ forme une $\mathcal{F}$-martingale. Nous pouvons donc en déduire l'expression suivante :

$$\mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,I-i}) = C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^{k} f_l \tag{4}$$

Démonstration . *Nous savons que :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,I-i}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,k-1})|\mathcal{F}_{i,I-i}\right] \\ & \quad \textit{car } \mathcal{F}_{i,I-i} \subseteq \mathcal{F}_{i,k-1} \\ \mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,I-i}) &= \mathbb{E}(C_{i,k-1}|\mathcal{F}_{i,I-i}).\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \\ & \quad \textit{d'après la relation (3)} \end{aligned}$$

Par itération, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,I-i}) &= \mathbb{E}(C_{i,I-i}|\mathcal{F}_{i,I-i}) \prod_{l=I-i+1}^{k} \frac{\gamma_l}{\gamma_{l-1}} \\ \textit{d'où}\ \ \mathbb{E}(C_{i,k}|\mathcal{F}_{i,I-i}) &= C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^{k} f_l \end{aligned}$$

□

On va alors estimer les $f_0, ..., f_J$ par les estimateurs de Chain-Ladder donnés par (1), dont on rappelle l'expression :

$$\forall\ k \geq I-i+1,\ \hat{F}_k := \frac{\sum_{j=0}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=0}^{I-k} C_{j,k}}$$

On peut alors définir l'estimateur suivant :

$$\hat{C}^M_{i,k} := C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^{k} \hat{F}_l$$

Les propriétés suivantes montrent qu'estimer $f_{I-i+1}, ..., f_{J-1}$ par $\hat{F}_{I-i+1}, ..., \hat{F}_{J-1}$

fournit de bons estimateurs.

Propriétés

(a) Les estimateurs $\hat{F}_k$ sont non biaisés : $\mathbb{E}[\hat{F}_k] = f_k$

(b) Les estimateurs $\hat{F}_k$ sont non corrélés : $\mathbb{E}[\hat{F}_0 ... \hat{F}_k] = \mathbb{E}[\hat{F}_0] ... \mathbb{E}[\hat{F}_k]$

(c) L'estimateur $\hat{C}^M_{i,I}$, est non biaisé pour $\mathbb{E}[C_{i,I}|\mathcal{B}_I]$: $\mathbb{E}[\hat{C}^M_{i,I}] = \mathbb{E}[C_{i,I}|\mathcal{B}_I]$

Démonstration . *(a) Nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{F}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{F}_k|\mathcal{B}_k]] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=0}^{I-k} \mathbb{E}[C_{i,k+1}|\mathcal{B}_k]}{\sum_{i=0}^{I-k} C_{i,k}}\right] \\
&\quad \textit{car le dénominateur est mesurable par rapport à } \mathcal{B}_k \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=0}^{I-k} f_k C_{i,k}}{\sum_{i=0}^{I-k} C_{i,k}}\right] \\
&= f_k
\end{aligned}$$

(b) On considère $j < k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{F}_k.\hat{F}_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{F}_k.\hat{F}_j|\mathcal{B}_k]] \\
&= \mathbb{E}[\hat{F}_j.\mathbb{E}[\hat{F}_k|\mathcal{B}_k]] \\
&\quad \textit{car } F_j \textit{ est mesurable par rapport à } \mathcal{B}_{j+1} \subseteq \mathcal{B}_k \\
&= \mathbb{E}[\hat{F}_j].f_k \textit{ d'après la démonstration précédente} \\
&= \mathbb{E}[\hat{F}_k].\mathbb{E}[\hat{F}_j] \textit{ d'après (a)}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{C}^M_{i,I}] &= C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^{I} \mathbb{E}[\hat{F}_l] \quad \textit{par indépendance des années de survenance} \\
&= C_{i,I-i} \prod_{l=I-i+1}^{I} f_l \quad \textit{d'après (a) et (b)} \\
&= \mathbb{E}[C_{i,I}|\mathcal{F}_{i,I-i}] \quad \textit{par la formule (4)}
\end{aligned}$$

□

2.2.3 Modélisation GLM : modèle Poissonnien de A.E. Renshaw et R.J. Verrall (1998)

En 1998, Renshaw et Verrall sont parvenus à répliquer les résultats obtenus par la méthode standard de Chain-Ladder à l'aide d'un modèle GLM (Modèle Linéaire Généralisé). Avant de détailler le cas particulier du modèle de Renshaw et Verrall, nous allons présenter plus généralement en quoi consiste les méthodes de provisionnement basées sur les modèles GLM. Ces derniers ont été introduits par J. Nelder et R. Wedderburn en 1972. Il s'agit en fait d'extensions du modèle linéaire Normal. Ils ont commencé à être utilisés pour la détermination stochastique des provisions pour sinistres à partir des années 1990.

Les modèles GLM

Ces modèles sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien.

- **La composante aléatoire**

On cherche à expliquer les variables aléatoires réelles $(Z_{i,k})_{i\in\{0,..,I\},k\in\{0,..,J\}}$ indépendantes et dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe donc dans le cadre suivant :

(**H1**) Les paiements annuels non cumulés $Z_{i,k}$ sont indépendants.

(**H2**) Les paiements annuels non cumulés $Z_{i,k}$ appartiennent à la famille exponentielle, de densité :

$$f(z_{i,k}|\theta_{i,k};\phi) = exp\left(\frac{z_{i,k}\theta_{i,k} - b(\theta_{i,k})}{\frac{\phi}{w_{i,k}}} + c(z_{i,k};\phi)\right)$$

Où : $\theta_{i,k}$ est un paramètre réel, appelé paramètre naturel,
ϕ est un paramètre de dispersion strictement positif,
$w_{i,k}$ est est une pondération (=1 par la suite),
b et c sont des fonctions spécifiques de la distribution,
b étant deux fois dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et c à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

On peut alors montrer que :

$$\begin{cases} \mu_{i,k} = \mathbb{E}[Z_{i,k}] = b'(\theta_{i,k}) \text{ soit } \theta_{i,k} = b'^{-1}(\mu_{i,k}), \text{ si } b' \text{ est inversible} \\ Var[Z_{i,k}] = b''(\theta_{i,k})\phi = b''\left[b'^{-1}(\mu_{i,k})\right]\phi = V(\mu_{i,k})\phi \end{cases}$$

La fonction $V(.) = b''[b'^{-1}(.)]$ est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans la modélisation GLM.

- **La composante systématique**

Soit M la matrice de régression et ξ le vecteur des paramètres. La composante systématique est notée η et est définie par $\eta = M\xi$.

Dans le cas du provisionnement à deux variables exogènes qualitatives par exemple, la composante systématique s'écrit :

$$\eta_{i,k} = \mu + \alpha_i + \beta_k,\ 0 \leq i \leq I,\ 0 \leq k \leq J$$

avec, pour raison d'identifiabilité du modèle, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

- **La fonction lien**

C'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Il s'agit d'une fonction réelle g, strictement monotone et dérivable telle que :

$$\eta_{i,k} = g(\mu_{i,k})\ ou\ \mu_{i,k} = g^{-1}(\eta_{i,k})$$

Pour résumer, un modèle GLM est la donnée de :

1. la distribution de probabilité des variables réponses $Z_{i,k}$,
2. la fonction variance V et, éventuellement, un paramètre de dispersion ϕ avec :
$$\mathbb{E}[Z_{i,k}] = \mu_{i,k},\ Var[Z_{i,k}] = V(\mu_{i,k})\phi,$$
3. la fonction lien $\eta_{i,k} = g(\mu_{i,k})$.

Notons que les paramètres $\theta_{i,k}$ figurant dans l'expression de la densité ne présentent en fait qu'un intérêt transitoire.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le modèle de Renshaw et Verrall [1998] est un cas particulier de modèle GLM. Il s'agit en fait d'un modèle "Log Poisson" dans lequel les composantes aléatoires suivent une loi de Poisson, pour tout i, k, $Z_{i,k} \sim \mathcal{P}(\mu_{i,k})$ et où la fonction lien est logarithmique $g = ln$. On a ainsi :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Z_{i,k}] = \mu_{i,k},\ \phi = 1,\ V(\mu_{i,k}) = \mu_{i,k} \\ ln(\mu_{i,k}) = \mu + \alpha_i + \beta_k \end{cases}$$

Les montants de provisions estimés par ce modèle coïncident exactement avec ceux obtenus grâce à la méthode Chain-Ladder standard (cf. Renshaw et Verall [1998]) dans un triangle de liquidation à incréments positifs.

On peut interpréter le paramètre e^{μ} comme l'effet lié à l'inflation. Dans ce modèle, celle-ci est considérée constante, hypothèse qui se trouve être rarement vérifiée et que nous étudierons par la suite. Les paramètres e^{α_i}, quant à eux, correspondent à un effet volume. Enfin, les paramètres e^{β_k} indiquent la fraction des sinistres réglés au cours de l'année de développement k.

Inférence

Il s'agit ensuite de déterminer les estimateurs des paramètres μ, (α_i), (β_k). On peut les obtenir par maximisation de la fonction de vraisemblance, notée $L\left((z_{i,k});\xi,\phi\right)$ et associée aux observations du triangle supérieur et au paramètre $\xi = [\mu, (\alpha_i), (\beta_k)]$. Il faut annuler les dérivées partielles de $ln(L) = l$ par rapport aux paramètres de régression μ, (α_i), (β_k). On arrive alors au système des équations dites de Wedderburn :

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{k=0}^{J-i}\frac{(z_{i,k}-\mu_{i,k})}{V(\mu_{i,k})}\frac{\delta\mu_{i,k}}{\delta\eta_{i,k}}b_{i,k}^{(n)},\ n = 1, ..., I+J+1$$

où $b_{i,k}^{(n)}$ est la dérivée partielle de $\eta_{i,k}$ par rapport au $n$ième élément de la suite μ, (α_i), (β_k). Notons que dans ce système, le paramètre ϕ n'apparaît pas, mais qu'un estimateur peut être obtenu de manière indépendante à l'aide des résidus de Pearson.

Ce système n'est résoluble que numériquement (par un algorithme standard de Newton-Raphson par exemple) et sa résolution conduit à l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\xi} = [\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_k)]$ de $\xi = [\mu, (\alpha_i), (\beta_k)]$

Dans le cadre du modèle de Renshaw et Verrall, la log-vraisemblance l a pour expression :

$$l\left((z_{i,k});\xi,\phi\right) = \frac{1}{\phi}\sum_{i=0}^{I}\sum_{k=0}^{J-i}(z_{i,k}ln(m_{i,k}) - m_{i,k}) + \sum_{i=0}^{I}\sum_{k=0}^{J-i}c(z_{i,k},\phi)$$

où la fonction $c(z_{i,k},\phi)$ n'a pas d'importance pour la suite du raisonnement car elle s'annule lors de la dérivation de la fonction.

En utilisant la relation $ln(\mu_{i,k}) = \mu + \alpha_i + \beta_k$, on obtient :

$$l\left((z_{i,k});\xi,\phi\right) = \frac{1}{\phi}\sum_{i=0}^{I}\sum_{k=0}^{J-i}(z_{i,k}(\mu+\alpha_i+\beta_k) - e^{\mu+\alpha_i+\beta_k}) + \sum_{i=0}^{I}\sum_{k=0}^{J-i}c(z_{i,k},\phi)$$

Pour déterminer nos $p = J+I+1$ paramètres (on prend α_0 et β_0 nuls pour éviter la surparamétrisation du modèle), on va dériver la log-vraisemblance par rapport à μ, α_1,...,α_I, β_1,...,β_J. On obtient alors les équations :

$$\begin{cases} \frac{\delta l}{\delta \mu} = \sum_{i=0}^{I} \sum_{k=0}^{J-i} (z_{i,k} - e^{\mu+\alpha_i+\beta_k}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta l}{\delta \alpha_n} = \sum_{k=0}^{J-n} (z_{n,k} - e^{\mu+\alpha_n+\beta_k}) = 0, \ n = 1, ..., I \\ \vdots \\ \frac{\delta l}{\delta \beta_n} = \sum_{i=0}^{I-n} (z_{i,n} - e^{\mu+\alpha_i+\beta_n}) = 0, \ n = 1, ..., J \end{cases}$$

Enfin, par invariance fonctionnelle du maximum de vraisemblance, l'e.m.v de $\mu_{i,k}$ est $\hat{\mu_{i,k}} = g^{-1}(\hat{\eta}_{i,k})$ avec $\hat{\eta}_{i,k} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_k$.

Une fois ces estimateurs obtenus, on peut calculer un estimateur $\hat{C}_{i,J}^{RV}$ de la charge ultime, ce qui nous permet d'obtenir ensuite une estimation des réserves :

$$\forall i = 1, ..., I, \quad \hat{C}_{i,J}^{RV} = C_{i,J-i+1} + \sum_{k=J-i+2}^{J} e^{\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_k}$$

Exemple 2.2.1. *Nous avons appliqué le modèle de Renshaw et Verrall à notre triangle de développement provenant de la branche RC Automobile. Les estimateurs du maximum de vraisemblance que nous avons obtenus sont les suivants :*

$$\hat{\mu} = 14,51$$

$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
0	0,53	0,41	0,34	0,45	0,53	0,61	0,46
$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$
0,55	0,72	0,94	0,86	1,18	1,12	0,86	0,98

TABLE 5 – Estimateurs du maximum de vraisemblance des α_i

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$	$\hat{\beta}_7$
0	1,12	0,68	0,33	0,02	-0,55	-0,52	-1,68
$\hat{\beta}_8$	$\hat{\beta}_9$	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{13}$	$\hat{\beta}_{14}$	$\hat{\beta}_{15}$
-1,23	-2,60	-3,25	-2,68	-3,10	-1,66	-1,70	-23,66

TABLE 6 – Estimateurs du maximum de vraisemblance des β_k

Après calculs, on obtient un montant de réserves de 167,72 M€, ce qui correspond à un écart relatif de 0,0004%. On retrouve bien le fait que le modèle de Renshaw et Verrall donne les mêmes montants de réserves que la méthode de Chain-Ladder. Le

très faible écart provient simplement du fait que la maximisation de la vraisemblance est réalisée de manière numérique, il existe donc des erreurs d'arrondis.

Pour terminer cette section de présentation des différentes méthodes de provisionnement, voici un tableau récapitulatif des avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

Méthodes	Avantages	Inconvénients
Chain-Ladder	• Application simple • Méthode de référence	• Hypothèses fortes • Sensibilités fortes des estimations des provisions
London-Chain	• Application simple • Moins contraint que Chain-Ladder	• Sensibilités fortes des estimations des provisions
Grossing-up	• Application simple • Relation entre les facteurs CL et les taux GU	• Méthode peu répandue • Estimation de la charge ultime uniquement
Factorielle	• Prise en compte des effets calendaires	• Estimation des paramètres lourde
Bornhuetter-Ferguson	• Faibles Sensibilités des estimations des provisions	• Besoin de données exogènes
Mack	• Mêmes résultats que Chain-Ladder • Mesures de l'aléa associé • Modèle utilisé par M & W pour le calcul de l'incertitude à 1 an	• Hypothèses fortes • Sensibilités fortes des estimations des provisions
GLM	• Choix de la distribution des incréments • Mêmes résultats que Chain-Ladder (dans le cas log-Poisson) • Mesures de l'aléa associé • Utilisé lors des procédures bootstrap	• Hypothèses paramétriques • Estimation des paramètres lourde

TABLE 7 – Tableau récapitulatif des avantages et inconvénients de chacune des méthodes

2.3 Extension : Gestion de la liquidation incomplète des triangles

Pour les risques longs (par exemple ceux pouvant être entièrement réglés après plusieurs dizaines d'années), le triangle n'est parfois pas complet, c'est-à-dire que nous ne disposons pas du développement complet de la sinistralité. Il s'agit de troncature droite. Cela conduit à une sous estimation des charges ultimes, sauf en cas de recours durant les dernières années. Il est donc nécessaire d'estimer une queue de développement du triangle.

Nous présentons dans la suite deux méthodes d'estimation de cette queue de développement. La première peut être utilisée dans les modèles reposant sur les hypothèses de Chain-Ladder et est basée sur les coefficients de déroulement. La

deuxième méthode, elle, est utilisable dans les modèles de type GLM et repose sur les paramètres de régression.

Extrapolation des facteurs de développement

Dans les modèles de type Chain-Ladder, nous estimons des facteurs de développement $\hat{F}_j$, $j = 1, ..., J$ en considérant que la $J^{ème}$ année est l'année de clôture. Comme nous l'avons évoqué précédemment, cela n'est pas toujours le cas. Pour pallier à ce problème, on peut avoir recours à une estimation des facteurs de développement pour les années suivantes (pour $k \in \{J, ..., ult\}$). Pour cela, nous cherchons à ajuster une fonction $y = f(k)$, régulière et supérieure à 1, afin de les extrapoler. Il semble judicieux, au vue de l'allure de la courbe des facteurs $\hat{F}_k$ en fonction des années de développement (cf. Annexe C p 89), d'extrapoler par une fonction de type "exponentielle inverse". On va en fait chercher les paramètres a et b tels que la fonction $f(k) = e^{a-bk} + 1$ soit la plus proche de l'évolution des $\hat{F}_k$ en fonction des années de développement. La fonction f va ensuite nous permettre d'extrapoler et d'estimer les valeurs des coefficients de Chain-Ladder pour des années de développement supérieures à la dernière année connue. Le passage au logarithme permet de résoudre ce problème par les moindres carrés. On réalise ainsi une extrapolation linéaire de $ln(\hat{F}_k - 1)$.

Le *tail factor* F_{ult} est alors obtenu grâce à la relation

$$F_{ult} = \prod_{k=J}^{\infty} \hat{F}_k$$

Et ainsi on a :

$$C_{i,ult} = F_{ult}.\hat{C}_{i,J}^{CL}$$

Mais il faut toutefois que ce *tail factor* soit plausible et en concordance avec l'expérience acquise sur le développement des sinistres.

Exemple 2.3.1. *Reprenons l'exemple de Chain-Ladder précédent. Le tail factor est obtenu par extrapolation exponentielle. Notons qu'il faut retirer le dernier facteur $\hat{F}_J^{CL}$ car il vaut 1 et exclurait ainsi l'utilité d'un tail factor.*

Théoriquement, la clôture d'un triangle de liquidation se traduit par le fait que le dernier coefficient de passage est égal à 1. Pour mettre en pratique la méthode du tail factor, nous avons fait l'hypothèse que la clôture du triangle aurait lieu dès lors que le coefficient de passage serait inférieur ou égal à 1,00001.

Appliquée sur nos données, l'extrapolation exponentielle nous donne une estimation des coefficients qui semble passer en dessous du seuil de 1,00001 au bout de vingt-huit années.

Principe numérique

Régression linéaire des logarithmes : $\lambda_k = ln(f_k - 1) = B + A \times k$ *:*
Prédiction des λ_k *sur 28 années :* $\hat{\lambda}^p_{J+1,\ldots 28}$
On obtient les coefficients du tail factor : $\hat{f}^p_k = 1 + e^{\hat{\lambda}^p_k}$

Voici la représentation des coefficients issus de la méthode Chain-Ladder d'une part, et de ceux déterminés par extrapolation exponentielle d'autre part, que nous avons obtenue :

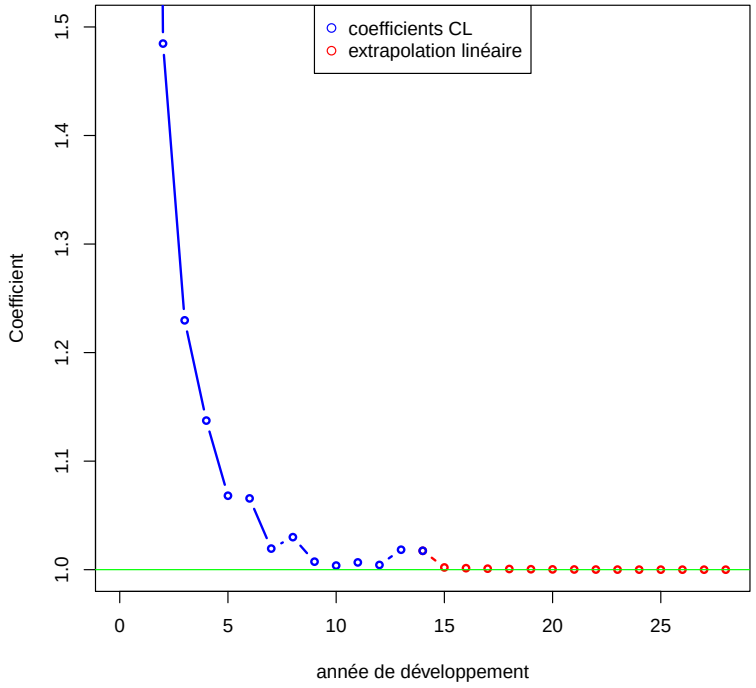


FIGURE 7 – Coefficients de Chain-Ladder et leur extrapolation

On peut alors appliquer au triangle initial l'ensemble des coefficients obtenus, et ainsi calculer un montant de réserves dans un cadre où l'on considère que la durée de liquidation totale du triangle a été atteinte. On observe sur le graphique suivant que les paiements cumulés prédits sont quasiment stables au bout des 28 années :

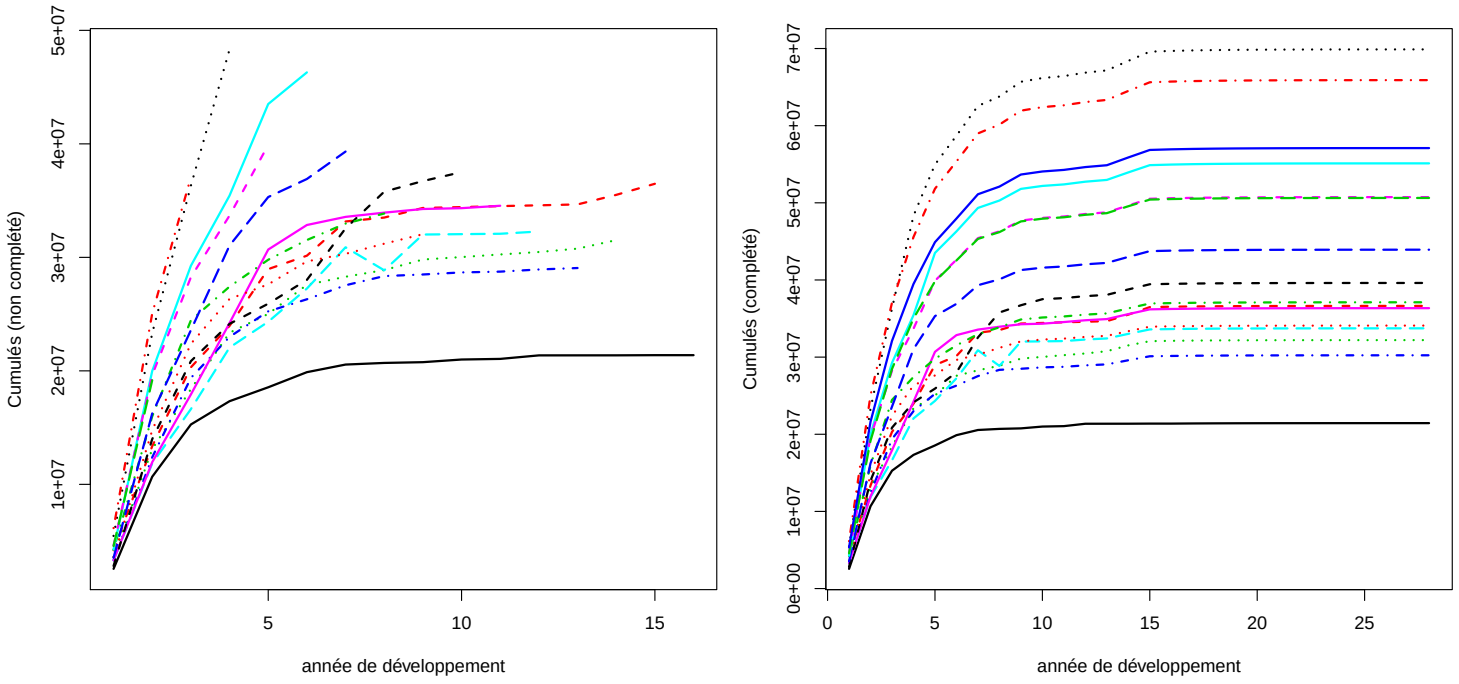


FIGURE 8 – Courbes des cumulés par année de survenance pour le triangle de départ et celui complété avec Chain-Ladder, en présence de *tail factor*

Finalement, en se tenant à notre extrapolation et donc en considérant que les sinistres sont entièrement réglés après 28 ans, le montant estimé des réserves est de 170,62 M€, montant logiquement supérieur au cas d'absence de tail factor, avec une différence relative de 1,73 %.

Il est possible d'appliquer le lissage précédent (extrapolation exponentielle) sur la totalité des années de développement, afin de remplacer les facteurs initiaux par leur interpolation. Cela permettrait d'obtenir une courbe plus lisse en estompant les oscillations visibles sur la figure 7 (au-delà de 5 ans). Cela permettrait également de pouvoir passer en cadence plus fine, semestrielle ou mensuelle par exemple.

Extrapolation des paramètres de développement

Dans le cadre des modèles GLM, le passage d'une année de développement à l'autre est représenté par les paramètres (β_j) (cf section 2.2.3). Ce sont donc ces coefficients qu'il faut chercher à extrapoler. Au regard de ces coefficients, on peut observer une relation linéaire entre ces derniers et les années de déroulement. Une regression linéaire simple de type $y = ax + b$ semble donc bien s'adapter à l'ajustement des (β_j) ; ils seront donc estimés ainsi pour $j > J$.

Exemple 2.3.2. *Nous allons appliquer cette méthode à notre triangle. Notons que le dernier incrément étant nul, cette année est considérée comme la dernière année de déroulement. De ce fait, le dernier paramètre concernant l'effet de l'année de développement ($\hat{\beta}_{15}$) est très faible comparé aux autres paramètres (-23,66). Par conséquent, nous ne l'avons pas pris en compte car cela exclurait l'utilité d'une extrapolation des paramètres.*

Théoriquement, la clôture d'un triangle de liquidation se traduit par le fait que les incréments de paiements de chaque année de déroulement sont nuls (ainsi, les paiements cumulés restent constants). Dans cette application, nous faisons l'hypothèse que le développement est terminé dès lors que la moyenne des incréments associés à l'année de développement j est inférieure à 1. En effet, le modèle ne permettant pas d'avoir des incréments nuls (car ils s'expriment comme une exponentielle), nous avons fixé le seuil à l'entier positif le plus proche de 0. Il faut donc estimer les paramètres jusqu'à cette date.

Appliquées sur nos données et selon notre hypothèse, l'extrapolation linéaire des β devrait être faite jusqu'à la cinquante huitième année. Cependant, en pratique, la branche RC Automobile ne présente jamais de risques à déroulé aussi long. Ainsi, au regard des résultats et des montants des paiements (de l'ordre de 10^8€), nous avons considéré le déroulement clos lorsque les incréments deviennent inférieurs à 1000 €, c'est-à-dire à la $33^{\text{ème}}$ année.

Principe numérique

Régression linéaire : $\beta_k = B + A \times k$
Prédiction des β_k sur 33 années : $\hat{\beta}^p_{J+1,\ldots 33}$

Voici la représentation des paramètres représentant l'effet des années de développement issus de la méthode GLM d'une part, et de ceux déterminés par extrapolation linéaire d'autre part, que nous avons obtenue :

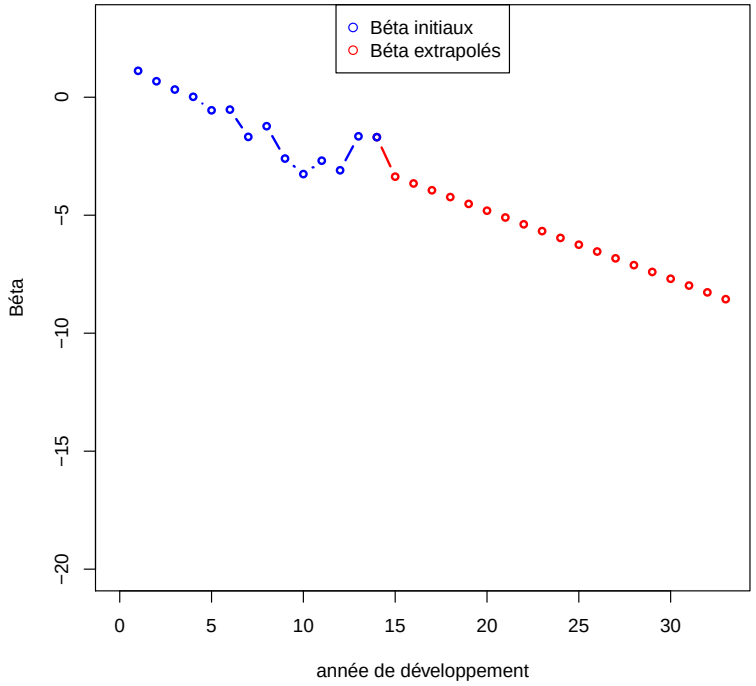


FIGURE 9 – Paramètres de développements et leur extrapolation

Finalement, en tenant compte de l'extrapolation et donc en considérant que les sinistres sont entièrement réglés après 33 ans, le montant estimé des réserves est de 170,5 M€. La différence relative des réserves par rapport à celles obtenues par la méthode GLM sans extrapolation est de 3,62 %.

2.4 Choix de la méthode

Il s'agit pour l'actuaire de choisir parmi les diverses méthodes à disposition, sachant qu'il n'existe pas de méthode générale. En effet, le choix doit tenir compte de nombreux paramètres, notamment du risque en question, des contraintes réglementaires, de la politique de la compagnie, de la branche d'assurance étudiée, etc.

Nous avons jusque-là évoqué et appliqué plusieurs méthodes de provisionnement stochastiques et déterministes, mais sur un seul et même triangle. Nous avons remarqué qu'elles n'aboutissent pas aux mêmes montants de réserves finales. Nous avons choisi d'orienter cette comparaison sur la particularité de la nature du triangle. Dans la suite, nous avons donc voulu étudier si ces divergences persistaient d'une branche d'assurance à l'autre ; ce qui nous a menés à appliquer ces méthodes sur des triangles provenant de secteurs d'assurance différents.

Nous proposerons dans un premier temps un critère de différenciation des méthodes autour de la vitesse de stabilisation des montants cumulés, puis dans un second temps, une façon de sélectionner une de ces méthodes sur un critère purement historique par rapport au triangle étudié.

2.4.1 Comparaison des méthodes

Branche d'assurance	Chain-Ladder / Mack	London-Chain	Méthode Factorielle (inflation nulle)
RC Automobile (M€)	167,73	206,29 (+27,7 %)	171,41 (+2,2 %)
RC Médicale (M€)	63,86	66,43 (+4 %)	70,89 (+11 %)
RC Décennale (M€)	47,94	47,57 (-0,8 %)	49,30 (+2,8 %)
Dommage Automobile (M€)	26,12	30,89 (+18,3 %)	28,38 (+8,7 %)

TABLE 8 – Réserves obtenues pour les différentes méthodes et branches d'assurance. Entre parenthèses, l'écart relatif par rapport à la méthode de Chain-Ladder

Au regard de ce tableau comparatif, la première impression semble être que les méthodes de London-Chain et factorielle conduisent globalement à un montant de réserves plus élevé. Le provisionnement est dit plus "prudent", mais ce n'est nullement un indice de qualité du modèle puisqu'un sur-provisionnement reflète, au même titre qu'un sous-provisionnement, une mauvaise gestion des ressources financières face au risque.

Cette observation doit cependant être prise avec précaution. D'une part, même si l'écart est très faible, il existe un cas dans le tableau (RC Décennale) où le montant de réserves obtenus par la méthode de London-Chain est plus faible que celui obtenu avec notre méthode de référence (-0,8 %). Cela implique que l'on ne peut pas généraliser le fait que London-Chain entraîne un sur-provisionnement par rapport à Chain-Ladder. D'autre part, ces trois méthodes n'ont été testées que sur quatre triangles différents, ce qui, encore une fois, ne nous permet pas de faire une généralisation de nos résultats.

Ce tableau nous montre également qu'il n'apparaît pas de logique globale entre ces méthodes. On y observe de fortes disparités, sur certaines lignes la méthode factorielle propose des réserves bien plus importantes que London-Chain (cas de la RC Médicale, 70,89M€ contre 64,43M€) et pour d'autres c'est l'inverse (cas de la RC Automobile, 206,29M€ pour London-Chain contre 170,48M€ pour la méthode factorielle). Néanmoins, nous pouvons remarquer que pour les branches RC Médicale et RC Décennale, c'est la méthode factorielle qui produit les provisions les plus importantes et que pour les branches RC Automobile et Dommage Automobile, c'est la méthode de London-Chain.

Nous avons donc cherché à voir s'il existait des similitudes dans les caractéristiques de chacune de ces branches pouvant expliquer ces résultats. Après avoir

représenté graphiquement les facteurs de développement de Chain-Ladder pour ces quatre triangles (cf. figure ci-dessous), nous avons observé que pour la RC Médicale et la RC Décennale, la stabilisation des facteurs semblait bien plus lente que pour la RC Automobile et le Dommage Automobile.

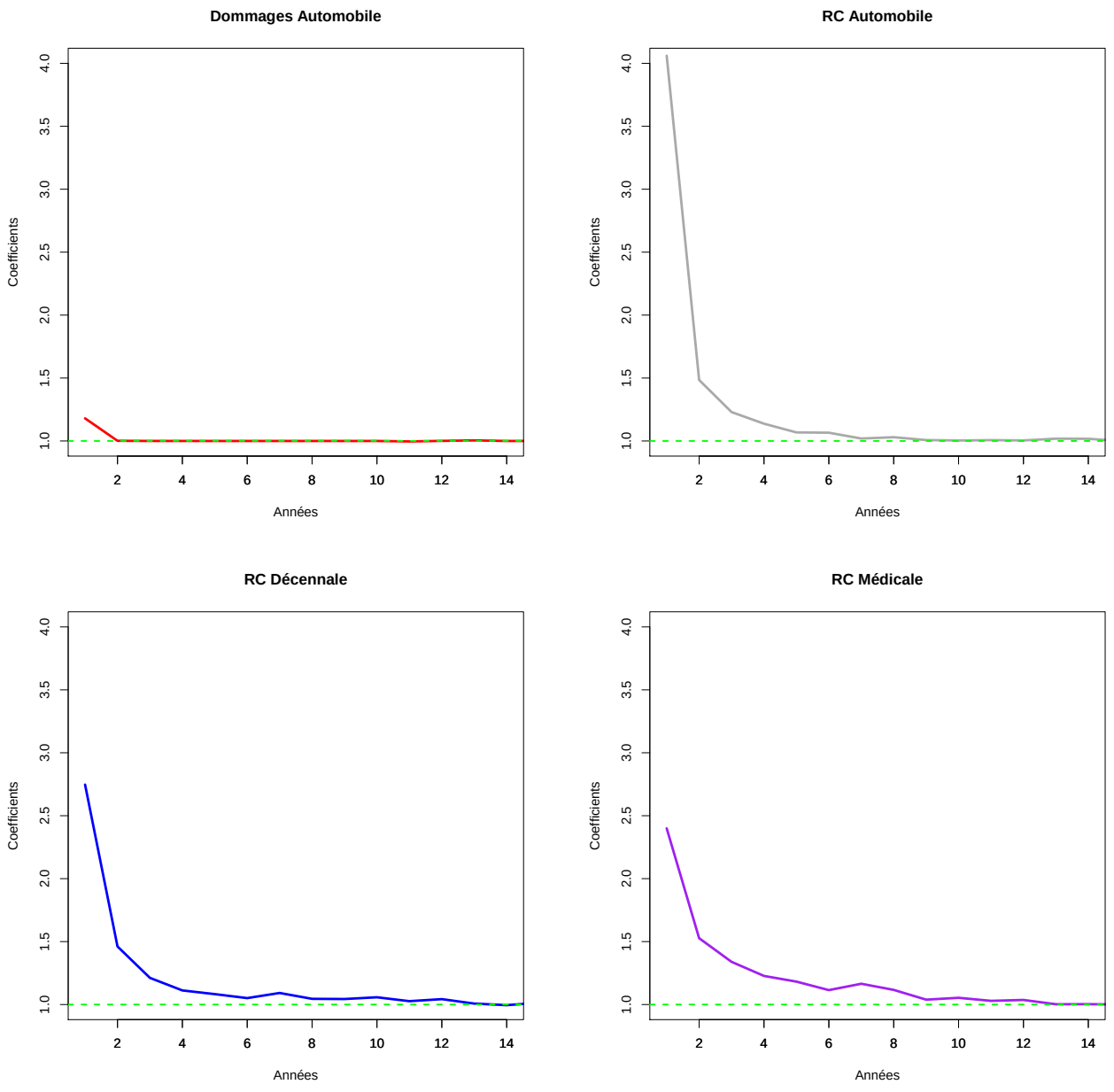


FIGURE 10 – Représentation graphique des coefficients de Chain-Ladder pour diverses branches d'assurance

Pour vérifier cette conjecture de manière plus quantitative, nous avons créé un "indice de stabilisation" associé à chaque triangle, censé refléter la rapidité avec laquelle les paiements se stabilisent ; plus cet indice est élevé et plus la stabilisation est rapide. Il est défini de la manière suivante :

$$Indice := \sum_{k=0}^{J*} \frac{\hat{F}_k}{\prod_{l=0}^{J*} \hat{F}_l} \times \frac{1}{k+1}$$

où $J*$ est le maximum des indices de clôture parmi les 4 triangles : $J* = max(J_1, J_2, J_3, J_4)$; cela évite un biais pour des triangles qui se sont stabilisés plus rapidement que d'autres. Les vecteurs tels que $J_i < J*$ sont complétés par un tail factor. Le principe de cet indice est en fait de sommer les "proportions de déroulement" $\frac{\hat{F}_k}{\prod_{l=0}^{J*} \hat{F}_l}$, en attribuant un poids plus important aux proportions les plus récentes à l'aide du terme $\frac{1}{k+1}$, de sorte à ce que plus la charge finale est déterminée rapidement après l'année de survenance (forte proportion en début de déroulement), plus l'"indice de stabilisation" est élevé.

Après calcul de cet indice sur chacun des quatre triangles, nous avons obtenu les résultats suivants :

Branche d'assurance	**Valeur de l'indice**
Dommage Automobile	2,963
RC Automobile	0,633
RC Décennale	0,617
RC Médicale	0,434

TABLE 9 – Valeurs de l'"indice de stabilisation" pour les différentes branches d'assurance

Finalement, les résultats du tableau 9 confirment notre hypothèse. En effet, on remarque que l'indice le plus élevé est celui de la branche Dommage Automobile, branche pour laquelle la stabilisation paraît la plus rapide. Viennent ensuite la RC Automobile et la RC Décennale qui sont graphiquement relativement proches. Et finalement, La RC Médicale, qui a l'air d'avoir la stabilisation la plus longue, s'avère avoir l'indice le plus faible. On peut également noter une forte disparité entre les branches concernant la responsabilité civile (quelle qu'elle soit) qui ont un indice de stabilisation relativement faible, et la branche dommage automobile qui, elle, a un indice de stabilisation bien plus élevé. Ce résultat est en adéquation avec le fait que la plupart du temps, les sinistres couverts par des garanties de dommage automobile sont quasiment entièrement réglés la première année.

Notre première intuition est confortée par ces résultats. En effet, les branches à stabilisation plus longues (RC Médicale et Décennale) font l'objet d'une surprovision

plus conséquente par la méthode factorielle, tandis que c'est la méthode de London-Chain qui provisionne plus pour les branches à stabilisation plus rapide (RC et Dommages Automobile).

Calcul de duration

Nous pouvons comparer ces résultats avec ceux obtenus par le calcul de la duration : nous calculons la duration sur les flux de la dernière année de survenance (celle qui est entièrement déterminée par l'application des coefficients de développement de Chain-Ladder). La duration s'écrit donc comme suit :

$$D = \frac{\sum_{k=0}^{J}(k+1)\frac{Z_{I,k}}{(1+r)^k}}{\sum_{k=0}^{J}\frac{Z_{I,k}}{(1+r)^k}}$$

où r est le taux d'actualisation. Puisqu'il s'agit de visualiser un classement des durations, leur valeur en absolue n'est pas nécessaire, et nous pouvons donc choisir arbitrairement r, fixée à 0 pour simplifier le calcul. De plus, pour $k \geq 2$, $Z_{I,k} = C_{I,k} - C_{I,k-1} = Z_{I,0} \times \prod_{j=0}^{k-2} \hat{F}_j \times (\hat{F}_{k-1} - 1)$, et $Z_{I,1} = Z_{I,0}(\hat{F}_0 - 1)$, ce qui nous donne la formule de duration suivante :

$$D = \frac{Z_{I,0} + 2Z_{I,0}(\hat{F}_0 - 1) + \sum_{k=2}^{J}(k+1)Z_{I,0} \times \prod_{j=0}^{k-2} \hat{F}_j \times (\hat{F}_{k-1} - 1)}{Z_{I,0} + Z_{I,0}(\hat{F}_0 - 1) + \sum_{k=2}^{J} Z_{I,0} \times \prod_{j=0}^{k-2} \hat{F}_j \times (\hat{F}_{k-1} - 1)}$$

Notons que la duration doit être interprétée de façon inverse à celle exposée précédemment avec l'indice de stabilisation : une duration élevée correspond à des paiements plus rapprochés de la date de début, donc à une stabilisation plus rapide.

L'observation des durations dans notre exemple vient confirmer la conclusion précédente avec l'indice de stabilisation.

Branche d'assurance	**Valeur de la duration**
Dommage Automobile	1,156
RC Automobile	3,870
RC Décennale	4,498
RC Médicale	5,886

TABLE 10 – Valeurs de la duration pour les différentes branches d'assurance

2.4.2 Un outil de choix de la méthode

Il est possible d'avoir une idée de la méthode qui s'avère être la plus adaptée au triangle considéré, dans la mesure où elle serait la méthode qui colle le mieux au développement passé (information connue) du triangle. Plus concrètement, cette technique proposée par Denuit et Charpentier [2005] mettrait en évidence l'erreur d'estimation des provisions faites dans le passé de chacune des méthodes par rapport aux vraies valeurs observées dans le passé. Il est important de noter encore une fois que cette technique, bien que pouvant paraître objective et pertinente, ne se fonde que sur un critère historique, particulier au triangle. Par conséquent, un modèle sur-paramétré par exemple pourrait obtenir de bons résultats (car performant sur l'ensemble d'apprentissage) , mais sa qualité prédicitive pourrait se révéler médiocre.

Il suffit pour cela de prendre un sous-triangle qui, complété, reste inclus dans le triangle de base. Puis après avoir complété ce sous-triangle par une des méthodes, on compare les provisions estimées avec les vraies valeurs lisibles dans le triangle de développement. La méthode la plus adaptée au triangle sera celle qui fournira la somme des carrés des erreurs minimale. Pour améliorer cet outil de comparaison, nous ne choisirons pas qu'un sous-triangle mais tous les sous-triangle possible du triangle de départ, au nombre de $\lfloor (I \wedge J)/2 \rfloor - 2$. Ainsi, pour chacune des méthodes, la somme des carrés des erreurs se calcule comme suit :

$$SSE = \sum_{m=1}^{\lfloor min(I,J)/2 \rfloor} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=m-i+1}^{m} \left(\hat{C}_{i,k} - C_{i,k} \right)^2$$

A titre d'illustration, nous avons appliqué cette technique sur le triangle de RC Automobile. Les résultats sont récapitulés dans le tableau suivant :

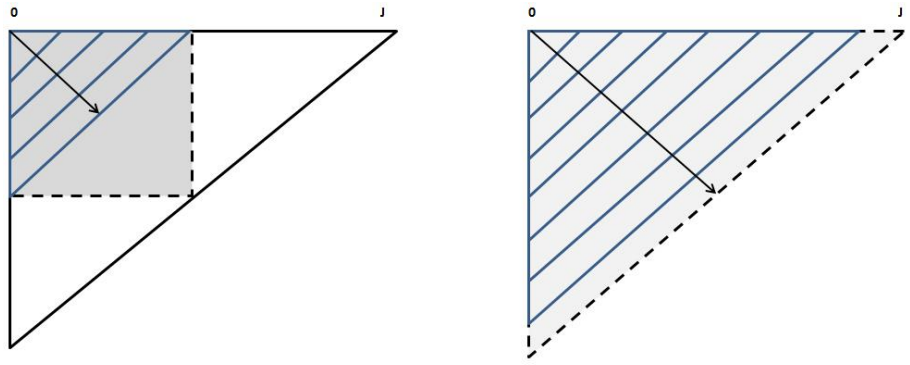
Méthode	**SSE**
London-Chain	9,43e+14
Chain-Ladder	9,46e+14
Mack	9,46e+14
Renshaw-Verrall	9,46e+14
Factorielle	9,69e+14

Table 11 – Choix de la méthode par SSE

Il en ressort donc, d'après cette méthode de comparaison par SSE sur les sous-triangles, que la méthode de provisionnement la plus adaptée à notre exemple est la méthode de London-Chain. Nous attirons une fois de plus l'attention sur l'application de cette méthode, dont la pertinence n'est pas toujours vérifiée dans cette exemple.

Comparaison par SSE sur les diagonales

Nous pouvons étendre ce procédé de sorte à tenir compte d'une plus large quantité de données du triangle, en allant jusqu'à la dernière diagonale, sans s'arrêter au plus grand sous-triangle intérieur. Par exemple, nous pouvons restreindre le calcul du SSE aux termes qui suivent la diagonale, et nous pourrons dès lors utiliser tous les montants du triangle supérieur pour le calcul de l'erreur.



Méthode par sous-triangles Méthode par diagonales

L'application de cette méthode donne pour notre triangle les résultats suivants :

Méthode	**SSE**
London-Chain	2,82e+14
Chain-Ladder	2,32e+14
Mack	2,32e+14
Renshaw-Verrall	2,32e+14
Factorielle	3,89e+14

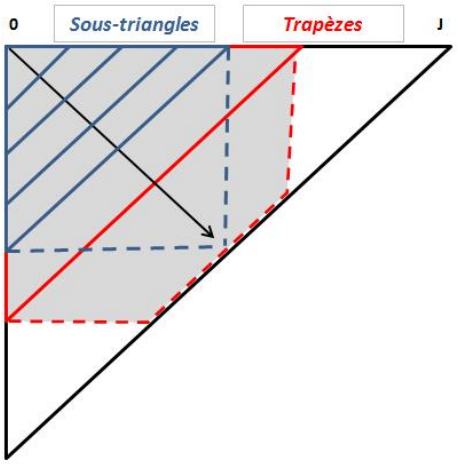
TABLE 12 – Choix de la méthode par SSE appliquée aux diagonales

Cette fois-ci, la méthode qui semble la plus adaptée à nos données est la méthode de Chain-Ladder.

Comparaison par SSE sur les trapèzes

Il existe encore une façon d'étendre la méthode précédente en combinant les SSE sur sous-triangles et SSE sur les diagonales. Il suffit de continuer le calcul des SSE avec les sous-triangle jusqu'au bout, mais qui sera tronqué au niveau de la diagonale du triangle initial : la SSE se calcule donc sur des diagonales étendues (trapèzes).

À la différence des méthodes précédentes, toutes les données du triangle supérieur initial pourront être prises en compte lors de la procédure de comparaison.



Méthode par trapèzes

L'application de cette version améliorée nous donne :

Méthode	SSE
London-Chain	3,40e+15
Chain-Ladder	2,75e+15
Mack	2,75e+15
Renshaw-Verrall	2,75e+15
Factorielle	2,89e+15

Table 13 – Choix de la méthode par SSE appliquée aux trapèzes

Finalement, ces résultats nous permettent de conclure que la méthode de Chain-Ladder se révèle plus concordante avec le triangle, et donc il est justifié de choisir cette méthode pour le calcul des réserves, dans la mesure où l'on suppose que les montants futurs ont le même profil d'évolution que dans le passé.

Un mot sur le principe de prudence

Nous pouvons aussi introduire la notion de prudence. La règle de prudence prévue actuellement par la législation européenne impose que les provisions techniques doivent être "suffisantes" (troisième directive "assurance non-vie"), afin "d'honorer, dans la mesure de ce qui est raisonnablement prévisible, les engagements résultant de contrats d'assurance" (Principes d'évaluation des provisions techniques en assurance non-vie). Or le niveau de prudence n'est pas clairement défini. Les interprétations divergentes du niveau de prudence résultent, comme le montre la situation actuelle,

en des politiques de provisionnement différentes. Néanmoins, Solvabilité 2 reste un référentiel prudentiel et, dans le doute, il peut être choisi de privilégier l'option la plus prudente. En réalité, sous Solvabilité 2, la prudence doit être explicite et non implicite : la provision à passer est donc la somme d'une évaluation *best estimate* (donc sans prudence) et d'une marge pour risque (calibrée selon une approche coût du capital). .

Dans le cadre de Solvabilité 2 : l'incertitude à prendre compte

La directive Solvabilité 2 met particulièrement l'accent sur le risque de réserve, et incite les acteurs du marché de l'assurance non-vie notamment à réduire l'incertitude sur les prévisions. Par conséquent, le choix de la méthode de provisionnement qui permettra de prédire au mieux les paiements futurs, et avec une moindre incertitude, est primordial. Nous allons donc maintenant présenter d'une part la notion d'incertitude et ses différentes déclinaisons, et d'autre part les moyens de la quantifier.

3 Mesures de l'incertitude à un an et à l'ultime

Il existe deux approches concernant la mesure de l'incertitude suite au calcul du provisionnement : l'incertitude à l'ultime introduite par Mack [1993], et l'incertitude à un an introduite par Merz et Wüthrich [2008]. Dans la première approche, nous cherchons à prédire la variabilité de la charge totale en se basant simplement sur sa valeur à l'ultime. En revanche, dans la vision à un an (vision nécessaire dans le cadre du nouveau référentiel *Solvabilité 2*), la prédiction de la variabilité se fait en se basant sur la valeur de la charge totale estimée durant l'année calendaire suivante. Autrement dit, la variation de la charge ultime à un an est définie comme la différence entre la valeur de la charge ultime calculée en date $t+1$ et sa valeur calculée en date t. Cette vision court terme peut s'avérer pertinente pour l'aide à la décision prise dans le cadre de la gestion des risques, notamment pour le régulateur, les investisseurs, le calcul de l'allocation actif-passif...

Avant de présenter ces différentes mesures d'incertitude, nous introduisons deux ensembles d'information qui nous serons utiles tout au long de cette partie :

Soit $\mathcal{D}_I = \{C_{i,j} | i \leq I, i+j \leq I\}$ les paiements disponibles à la date $t = I$,

et $\mathcal{D}_{I+1} = \{C_{i,j} | i \leq I, i+j \leq I+1\}$ les paiements disponibles à la date $t = I+1$

Pour avoir une meilleure vision de ces deux ensembles, ces derniers ont été représentés dans la figure suivante :

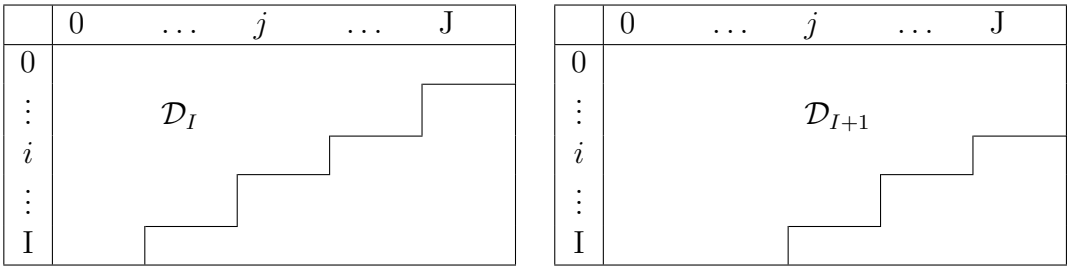


TABLE 14 – Triangle de développement aux dates $t = I$ et $t = I+1$

3.1 Mesure de l'incertitude à l'ultime

Dans ce paragraphe, nous présentons une vision à long terme de l'incertitude développée par Thomas Mack. En effet, le modèle érigé par ce dernier a l'avantage de permettre d'obtenir un intervalle de confiance pour le montant des paiements à venir,

et ainsi, de calculer une provision pour incertitude, permettant d'avoir suffisamment de fonds pour indemniser les assurés dans 95% des cas par exemple. L'incertitude à l'ultime s'adapte donc à ce cadre et correspond concrètement à l'erreur de prédiction de la charge totale, soit la quantité :

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}\left[(\hat{R}_i - R_i)^2 | \mathcal{D}_I\right]$$

Or,
$$\hat{R}_i - R_i = \hat{C}_{i,J} - C_{i,I-i} - (C_{i,J} - C_{i,I-i}) = \hat{C}_{i,J} - C_{i,J}$$

D'où,
$$mse(\hat{R}_i) = \mathbb{E}\left[(\hat{C}_{i,J} - C_{i,J})^2 | \mathcal{D}_I\right] = mse(\hat{C}_{i,J})$$

Mais,

$$\begin{aligned}
mse(\hat{C}_{i,J}) &= \mathbb{E}\left[(\hat{C}_{i,J} - C_{i,J})^2 | \mathcal{D}_I\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\hat{C}_{i,J}^2 - 2C_{i,J}\hat{C}_{i,J} + C_{i,J}^2 | \mathcal{D}_I\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\hat{C}_{i,J}^2 | \mathcal{D}_I\right] - 2\hat{C}_{i,J}\mathbb{E}\left[C_{i,J} | \mathcal{D}_I\right] + \mathbb{E}\left[C_{i,J}^2 | \mathcal{D}_I\right] \\
&\quad \pm \mathbb{E}\left[C_{i,J} | \mathcal{D}_I\right]^2 \\
&= \underbrace{Var(C_{i,J} | \mathcal{D}_I)}_{\text{Erreur de modélisation}} + \underbrace{(\mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] - \hat{C}_{i,J})^2}_{\text{Erreur d'estimation}}
\end{aligned}$$

La $mse(\hat{R}_i)$ se décompose donc en deux termes. D'une part, l'erreur de modélisation mesure la variabilité interne du modèle. La variable $C_{i,J}$ étant stochastique, il en résulte forcément une certaine variabilité ; ce terme permet donc de mesurer l'écart à la moyenne de cette variable et peut se calculer explicitement. D'autre part, l'erreur d'estimation provient du fait que l'on n'a pas utilisé les coefficients de Chain-Ladder réels f_j, mais leur estimation$\hat{F}_j$. Elle mesure donc le biais qui a été commis lors de cette estimation. Un estimateur de cette quantité a été fourni par Mack :

$$\widehat{mse(\hat{R}_i)} = \hat{C}_{i,J}^2 \sum_{k=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{(\hat{F}_k)^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{n=0}^{I-k-1} C_{n,k}} \right)$$

où $\hat{\sigma}_k^2$ est définie par (voir Mack [1993]) :

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{J-k-1} \sum_{i=0}^{J-k-1} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{F}_k \right)^2 \quad \forall 0 \leq k \leq J-2$$

Et par extrapolation

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = min\left(\frac{\hat{\sigma}_{J-2}^4}{\hat{\sigma}_{J-3}^2}, min(\hat{\sigma}_{J-2}^2, \hat{\sigma}_{J-3}^2) \right)$$

Définissons par ailleurs :

$$se(\hat{R}_i) := \sqrt{\widehat{mse(\hat{R}_i)}}$$

On peut alors en déduire un estimateur de la *mean square error* agrégée de l'estimation du montant total de réserves $\hat{R}$:

$$\widehat{mse(\hat{R})} = \sum_{i=1}^{I} \left\{ \widehat{mse(\hat{R}_i)} + 2\hat{C}_{i,J} \sum_{l=i+1}^{I} \hat{C}_{l,J} \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{\sum_{n=0}^{I-j-1} C_{n,j}} \right\}$$

Illustrons ceci pour notre triangle RC automobile. La fonction $MackChainLadder$ de la librairie $ChainLadder$ sous R, utilise par défaut un modèle log-linéaire pour l'extrapolation de $\hat{\sigma}_{J-1}^2$, ce qui aboutit à des mse différents de ceux qui sont obtenus avec l'extrapolation proposée par Mack. Or nous avons souhaité concorder avec la formule de Mack, et nous avons donc corrigé cette différence ; ce qui nous donne les résultats suivants :

$se(\hat{R}_1)$	$se(\hat{R}_2)$	$se(\hat{R}_4)$	$se(\hat{R}_4)$	$se(\hat{R}_5)$
683 957	921 534	982 306	1 071 658	1 141 763

$se(\hat{R}_6)$	$se(\hat{R}_7)$	$se(\hat{R}_8)$	$se(\hat{R}_9)$	$se(\hat{R}_{10})$
1 219 779	1 126 883	1 689 747	2 560 148	3 648 530

$se(\hat{R}_{11})$	$se(\hat{R}_{12})$	$se(\hat{R}_{13})$	$se(\hat{R}_{14})$	$se(\hat{R}_{15})$	$se(\hat{R})$
3 613 780	5 628 116	6 480 977	5 798 537	8 457 782	20 137 891

TABLE 15 – Estimateurs des $se(\hat{R}_i),\ i = 1, ..., I$ et de $se(\hat{R})$ des réserves

3.2 Mesure de l'incertitude à un an

L'incertitude à un an repose quant à elle sur une vision court terme (d'une année sur l'autre). En effet, selon la nouvelle réglementation, l'horizon temporel n'est plus la fin de la vie des sinistres déjà survenus, mais simplement la situation comptable dans un an. Cette méthode de calcul de l'incertitude est d'ailleurs préconisée par l'Eiopa comme applicable dans le cadre des USP. Pour déterminer cette incertitude, la méthode officielle dans le QIS 5 est celle de Merz et Wüthrich, qui se base sur le modèle de Mack. Cependant, nous verrons une approche par bootstrap, permettant de sortir du cadre de ces hypothèses.

En pratique, chaque année les actuaires mettent à jour leur prédiction de coûts de sinistres à payer. Si l'estimation de la charge ultime est revue à la hausse, l'assureur annonce des "mali" (les provisions initialement constituées se sont avérées insuffisantes) tandis qu'il annoncera des "boni" si l'estimation est revue à la baisse.

C'est justement cette incertitude (associée au montant de boni ou mali) que l'on se propose de mesurer, et qu'il faudra couvrir. Finalement, il ne s'agit pas de l'incertitude de la prédiction des paiements qui seront effectués l'an prochain, mais bien l'incertitude associée à la révision d'un estimateur.

Plus concrètement, la différence des estimations faites entre l'année calendaire I et l'année calendaire $I+1$, appelée *Claim Development Result (CDR)*, est la quantité :

$$CDR_i(I+1) = \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]$$

dite "CDR réelle", estimée par la "CDR observable" :

$$\widehat{CDR_i}(I+1) = \hat{C}_{iJ}^{I} - \hat{C}_{i,J}^{I+1}$$

où $\hat{C}_{i,J}^{I}$ et $\hat{C}_{i,J}^{I+1}$ correspondent respectivement à l'estimation du règlement cumulé final faite en fin d'année calendaire I et celle faite en fin d'année $I+1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,J}^{I} &= C_{i,I-i}\hat{F}_{I-i}^{I}...\hat{F}_{J-1}^{I} \\ \hat{C}_{i,J}^{I+1} &= C_{i,I-i+1}\hat{F}_{I-i+1}^{I+1}...\hat{F}_{J-1}^{I+1} \end{aligned}$$

où $\hat{F}^m$ désigne le facteur de Chain-Ladder évalué avec l'information disponible à l'année m, avec $m \in \{I, I+1\}$.

Or l'information en $t = I+1$ n'est pas disponible à la date $t = I+1$. Merz et Wütrich, en se plaçant dans le cadre du modèle de Mack, proposent pour cela deux points de vue pour quantifier et estimer cette mesure de l'incertitude : le premier consiste en une vision prospective et la seconde en une vision rétrospective.

3.2.1 Vision prospective

Tout d'abord, par définition du $CDR_i(I+1)$, et du fait que la variable aléatoire M_i définit par $M_i := \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]$ est une martingale, nous pouvons en déduire que, conditionnellement à l'information $\mathcal{D}_I$, le $CDR_i(I+1)$ est centré, *i.e* :

$$\mathbb{E}\left[CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I\right] = 0$$

Par conséquent, en date $t = I$, la meilleure estimation du $CDR_i(I+1)$ est simplement 0. C'est en général la prédiction du CDR qui est faite pour l'année calendaire $(I, I+1)$. Il est alors important de déterminer et mesurer de combien la réalisation des CDR à la fin de l'année calendaire aura dévié de 0. On rappelle que la marge de solvabilité requise dans Solvabilité 2 doit contenir le capital nécessaire pour faire

face à de possibles déviations du CDR autour de 0 (l'exigence en fonds propres doit en fait permettre de couvrir les "réalisations" du CDR dans 99,5 % des cas). Une mesure de cette déviation est donnée par la grandeur suivante :

$$\begin{aligned}
mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \mathbb{E}[(CDR_i(I+1)-0)^2|\mathcal{D}_I] \\
&= Var(CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I) \\
&= Var\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]\ |\mathcal{D}_I\right) \\
&= Var\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]|\mathcal{D}_I\right) \\
&= Var\left(C_{i,I-i+1}|\mathcal{D}_I\right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j^2 \\
&= C_{i,I-i}.\sigma_{I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J-1} f_j^2 \\
&= \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2/f_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}
\end{aligned}$$

Cette quantité correspond en fait à la variance du CDR car ce dernier est centré conditionnellement à l'information $\mathcal{D}_I$. Elle peut être estimée de la manière suivante :

$$\widehat{Var}(CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I) = (\hat{C}_{i,J})^2 \frac{\hat{\sigma}_{I-i}/(\hat{F}_{i,I-i})^2}{C_{i,I-i}}$$

On définit une version observable de cette quantité à l'aide du CDR observable notée $\widehat{CDR}_i(I+1)$, c'est-à-dire que l'on obtient sa variance autour du meilleur estimateur qui est 0 :

$$Var(\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I) = mse_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = \mathbb{E}[(\widehat{CDR}_i(I+1)-0)^2|\mathcal{D}_I]$$

Cette quantité donne une vision prospective de l'incertitude à un an, en mesurant la qualité de la prédiction de $\widehat{CDR}_i(I+1)$ par 0. Elle est estimée par :

$$\widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = \hat{C}_{i,J}^2(\hat{\Gamma}_{i,J}^I + \hat{\Delta}_{i,J}^I)$$

Où

$$\hat{\Delta}_{i,J}^I = \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/(\hat{F}_{I-i})^2}{\sum_{l=0}^{i-1} C_{l,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{\sum_{l=0}^{I-j-1} C_{l,j}}$$

$$\hat{\Gamma}_{i,J}^I = \left[1 + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/(\hat{F}_{I-i})^2}{C_{i,I-i}}\right] \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{(\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j})^2} C_{I-j,j}\right) - 1$$

Remarque 3. *Notons qu'il est possible, pour simplifier les calculs, de donner une approximation de $\hat{\Gamma}^I_{i,J}$. En effet, nous avons la propriété suivante :*

$$\prod_i (1+a_i) \approx 1 + \sum_i a_i \qquad si\ a_i << 1 \tag{5}$$

Or l'hypothèse est vérifiée si l'on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{(\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j})^2} C_{I-j,j} << 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}} \left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j}} \right)^2 << 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}} << 1 \end{aligned}$$

car $\left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j}} \right) < 1.$

Ainsi, l'approximation de $\hat{\Gamma}^I_{i,J}$ est :

$$\hat{\Gamma}^I_{i,J} \approx \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/(\hat{F}_{I-i})^2}{C_{i,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j},j}{\sum_{l=0}^{I-j} C_{l,j}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}}$$

3.2.2 Vision rétrospective

Merz et Wüthrich considèrent une seconde approche "rétrospective", qui consiste cette fois à se positionner en l'année calendaire $I+1$. On obtient ainsi une observation pour les CDR et il est alors possible d'analyser si cette dernière est dans un intervalle raisonnable autour du CDR réel. On rappelle que la formule du CDR observable est la suivante :

$$\widehat{CDR_i}(I+1) = \hat{C}^I_{i,J} - \hat{C}^{I+1}_{i,J}$$

où $\hat{C}^I_{i,J}$ (resp. $\hat{C}^{I+1}_{i,J}$) est l'estimation de $\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]$ faite en I (resp. de $\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]$ faite en $I+1$).

On peut alors définir une mesure de la distance entre le CDR observable et le CDR réel de la manière suivante :

$$mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(\widehat{CDR_i}(I+1)) \ = \ \mathbb{E}[(CDR_i(I+1) - \widehat{CDR_i}(I+1))^2|\mathcal{D}_I]$$

Cette dernière peut alors être estimée par :

$$\widehat{mse}_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(\widehat{CDR_i}(I+1)) = \hat{C}^2_{iJ}(\hat{\Phi}^I_{iJ} + \hat{\Delta}^I_{iJ})$$

où

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{i,J}^{I} &= \left[1+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^{2}/(\hat{F}_{I-i})^{2}}{C_{i,I-i}}\right]\left(\prod_{j=I-i+1}^{J-1}\left(1+\frac{\hat{\sigma}_{j}^{2}/(\hat{F}_{j})^{2}}{(\sum_{l=0}^{I-j}C_{l,j})^{2}}C_{I-j,j}\right)-1\right)\\ &\approx \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{l=0}^{I-j}C_{l,j}}\right)^{2}\frac{\hat{\sigma}_{j}^{2}/(\hat{F}_{j})^{2}}{C_{I-j,j}}\end{aligned}$$

Sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent.

3.2.3 Agrégation sur les années de survenance

Lorsque l'on agrège les $CDR_i(I+1)$ sur l'ensemble des années de survenance $i \in \{1,...,I\}$, il faut prendre en compte les corrélations qui existent entre ces différentes années. En effet, les mêmes observations sont utilisées pour estimer les coefficients de Chain-Ladder et sont ensuite appliquées à différentes années de survenance.

Compte tenu de cette remarque, nous obtenons l'estimateur suivant pour la *mse* des CDR réels agrégés :

$$\begin{aligned}\widehat{mse}_{\sum_{i=1}^{I}CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}\left(\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR}_i(I+1)\right) &= \sum_{i=1}^{I}\widehat{mse}_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}\left(\widehat{CDR}_i(I+1)\right)\\ &\quad +2\sum_{0<i<k}\hat{C}_{i,J}\hat{C}_{k,J}(\hat{\Phi}_{i,J}^{I}+\hat{\Lambda}_{i,J}^{I})\end{aligned}$$

avec $\hat{\Phi}_{i,J}^{I}$ défini comme précédemment et $\hat{\Lambda}_{i,J}^{I}$ donné par la formule suivante :

$$\hat{\Lambda}_{i,J}^{I}=\frac{C_{i,I-i}}{\sum_{k=0}^{i}C_{k,I-i}}\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^{2}/(\hat{F}_{I-i})^{2}}{\sum_{k=0}^{i-1}C_{k,I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{l=0}^{I-j}C_{l,j}}\right)^{2}\frac{\hat{\sigma}_{j}^{2}/(\hat{F}_{j})^{2}}{\sum_{l=0}^{I-j-1}C_{l,j}}$$

De même, nous obtenons un estimateur pour la *mse* des CDR observables agrégés :

$$\begin{aligned}\widehat{mse}_{\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \sum_{i=1}^{I}\widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)\\ &\quad +2\sum_{0<i<k}\hat{C}_{i,J}\hat{C}_{k,J}(\hat{\Xi}_{i,J}^{I}+\hat{\Lambda}_{i,J}^{I})\end{aligned}$$

avec $\hat{\Lambda}_{i,J}^{I}$ défini comme ci-dessus et $\hat{\Xi}_{i,J}^{I}$ défini par :

$$\hat{\Xi}_{i,J}^{I}=\hat{\Phi}_{i,J}^{I}+\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^{2}/(\hat{F}_{I-i})^{2}}{\sum_{k=0}^{i}C_{k,I-i}}$$

Enfin, comme les sinistres des différentes années de survenance sont indépendants, on peut estimer la variance des CDR réels agrégés simplement par la somme

des estimations des variances des CDR réels :

$$\widehat{Var}\left(\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I\right) = \sum_{i=1}^{I} \widehat{Var}(CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I)$$

3.2.4 Exemple

Nous allons maintenant présenter un exemple afin d'illustrer les différentes mesures d'incertitudes mentionnées précédemment. Le triangle de la page suivante contient les paiements cumulés pour un risque de Dommage Automobile. Dans l'objectif de pouvoir obtenir des valeurs explicites de CDR observables, nous avons ajouté une diagonale à notre triangle. Ainsi, le tableau contient les paiements cumulés $C_{i,j}$ pour les années de survenance $i \in \{0, ..., 14\}$ aux dates $I = 15$ et $I + 1 = 16$. Cette diagonale ne constitue pas une donnée mais elle résulte d'une estimation obtenue par bootstrapping.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2 554 368	10 671 566	15 275 057	17 326 685	18 552 093	19 883 656	20 554 320	20 697 774	20 764 341
1	4 189 931	13 364 857	20 313 611	23 964 839	28 964 631	30 147 030	33 161 255	33 504 877	34 352 096
2	3 574 458	13 099 576	18 393 003	23 361 381	25 017 362	27 580 611	28 291 764	28 880 363	29 809 519
3	3 318 630	12 384 314	19 377 638	22 996 402	25 241 564	26 306 520	27 540 437	28 350 455	28 491 329
4	3 298 244	11 848 687	16 627 598	22 055 236	24 325 960	27 251 261	30 888 036	28 859 364	32 011 561
5	3 309 182	11 952 897	17 919 746	24 214 504	30 686 833	32 850 233	33 567 039	33 938 976	34 261 475
6	2 810 424	13 985 177	20 854 509	24 141 083	25 915 377	28 014 062	32 551 433	35 785 803	36 722 530
7	3 598 963	14 766 757	22 388 036	26 336 821	27 623 835	29 641 410	30 309 766	31 202 954	32 040 285
8	4 242 628	15 995 291	24 449 956	27 422 123	29 788 653	31 526 560	32 974 109	33 863 629	34 778 763
9	3 527 765	16 245 573	23 581 244	31 043 216	35 313 736	36 904 586	39 320 336	40 273 159	
10	4 259 160	19 988 762	29 259 576	35 441 339	43 509 711	46 297 193	49 210 939		
11	4 610 101	19 631 332	28 248 764	33 683 319	39 902 304	42 548 258			
12	5 454 236	23 318 708	36 312 125	48 322 808	54 872 285				
13	6 143 400	25 050 143	37 055 657	45 534 956					
14	4 570 299	19 174 866	28 435 472						
15	5 324 265	21 672 373							

	9	10	11	12	13	14	15
0	20 998 410	21 053 285	21 363 410	21 365 510	21 367 720	21 382 240	21 382 240
1	34 427 485	34 516 045	34 584 861	34 663 937	35 506 599	36 482 343	36 387 190
2	30 026 624	30 255 197	30 471 988	30 768 169	31 519 401	31 960 783	
3	28 673 021	28 742 499	28 931 882	29 059 635	29 504 619		
4	32 044 278	32 078 452	32 277 882	34 373 768			
5	34 334 067	34 546 014	34 679 543				
6	37 508 510	37 570 231					
7	32 177 998						
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

TABLE 16 – Triangle de développement (paiements cumulés $C_{i,j}$) aux dates I=15 et I=16

À l'aide de ce triangle, il est possible de calculer les estimateurs des coefficients de Chain-Ladder $\hat{F}_j^I$ et $\hat{F}_j^{I+1}$ déterminé respectivement avec l'information disponible à la date $t = I$ et $t = I+1$. Le tableau 17 contient leurs valeurs ainsi que l'estimation des paramètres σ_j issus du modèle de Mack.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{F}_j^I$	4,0611	1,4847	1,2297	1,1374	1,0682	1,0657	1,0194	1,0300
$\hat{F}_j^{I+1}$	4,0618	1,4846	1,2296	1,1371	1,0679	1,0653	1,0201	1,0296
$\hat{\sigma}_j$	906,61	201,76	379,85	370,93	127,24	263,42	236,56	181,16

j	7	8	9	10	11	12	13
$\hat{F}_j^I$	1,0074	1,0038	1,0067	1,0044	1,0184	1,0174	1,0000
$\hat{F}_j^{I+1}$	1,0070	1,0034	1,0062	1,0176	1,0176	1,0162	0,9984
$\hat{\sigma}_j$	42,29	14,18	23,11	21,70	68,83	97,89	68,83

TABLE 17 – Coefficients de Chain-Ladder avec l'information disponible en $t = I$ et $t = I + 1$ et paramètres de variance du modèle de Mack

Les estimateurs $\hat{F}_j^I$ et $\hat{F}_j^{I+1}$ nous permettent ensuite d'obtenir le montant des réserves $\hat{R}_i^I$ calculées avec l'information disponible en $t = I$ et $\hat{R}_i^{I+1} + Z_{i,I-i+1}$ calculées avec l'information disponible en $t = I + 1$. Nous pouvons ainsi déterminer les réalisations des CDR observables pour chaque année de survenance et pour toutes les années agrégées. Le tableau 18 contient l'ensemble des ces valeurs. On peut noter que nous obtenons en $t = I + 1$ un CDR agrégé observable négatif de -5,3 M€.

i	$\hat{R}_i^I$	$\hat{R}_i^{I+1} + Z_{i,I-i+1}$	$\widehat{CDR}_i(I+1)$
0	0	0	0
1	0	-95 153	95 153
2	548 798	388 826	159 973
3	1 049 646	873 545	176 102
4	1 312 336	3 209 540	-1 897 204
5	1 645 917	1 887 880	-241 964
6	1 936 754	2 205 867	-269 113
7	1 903 445	2 091 033	-187 588
8	3 087 426	3 284 275	-196 849
9	4 419 066	4 970 350	-551 285
10	8 585 430	8 908 026	-322 597
11	10 623 205	10 945 384	-322 179
12	21 269 871	21 708 281	-438 410
13	28 569 905	29 027 062	-457 158
14	31 243 944	31 568 001	-324 056
15	51 529 656	52 090 289	-560 632
Total	167 725 398	173 063 206	-5 337 807

TABLE 18 – Réalisations des CDR observables à la date $t = I + 1$

Une fois ces réalisations de CDR obtenues, il reste à quantifier l'incertitude qui résulte des ces estimations. C'est au travers des calculs des différentes *mean square errors* que nous allons pouvoir le faire. Selon les deux points de vue que nous avons exposé précédemment (prospectif et rétrospectif), deux questions se présentent à nous.

Tout d'abord, dans le cadre de la vision rétrospective, on veut évaluer l'erreur commise par le CDR observable par rapport au CDR réel que l'on aurait obtenu si l'on avait connu les vrais coefficients de Chain-Ladder f_j en $t = I$. Dans notre exemple, cela nous permettra de déterminer la probabilité en date $t = I$ que le CDR réel soit effectivement un mali. La justification de l'utilisation des formules approchées se trouve dans la remarque plus loin.

Ensuite, dans le cadre de la vision prospective, on souhaite déterminer si la valeur de la réalisation du CDR correspond à l'incertitude de prédicition, sachant qu'en date $t = I$ le CDR est prédit égal à 0.

On peut obtenir ces informations grâce aux calculs des variances et *mse* que nous avons présentés précédemment. Ci-dessous, on trouve le tableau récapitulatif des valeurs des estimations (exactes et approchées) de ces différentes grandeurs.

			$mse^{1/2}_{\widehat{CDR}}(0)$		$mse^{1/2}_{CDR}(\widehat{CDR})$	
i	$MSE^{1/2}_{Mack}$	$\widehat{Var}(CDR_i(I+1)\|\mathcal{D}_I)^{1/2}$	Approchée	Exacte	Approchée	Exacte
0	0	0	0	0	0	0
1	684	416	684	790	543	543
2	922	550	783	783	558	558
3	982	378	608	608	476	476
4	1 0717	128	509	509	493	493
5	1 142	1 414	550	550	531	531
6	1 220	91	584	584	576	576
7	1 127	252	564	564	504	504
8	1 690	1 117	1 309	1 309	683	683
9	2 560	1 619	1 855	1 855	906	906
10	3 649	1 994	2 319	2 319	1 184	1 184
11	3 614	953	1 322	1 322	916	917
12	5 628	3 265	3 703	3 703	1 747	1 747
13	6 481	3 330	3 733	3 733	1 686	1 687
14	5 799	1 565	1 898	1 898	1 075	1 075
15	8 458	5 501	5 847	5 848	1 983	1 984
Total	20 138	7 996	14 622	14 628	10 641	10 641

TABLE 19 – Volatilités des estimateurs ('000)

Dans un premier temps, on remarque que l'estimation de l'écart-type des CDR réels vaut environ 7 996 K €. Cela correspond à une estimation de l'écart du CDR réel à sa moyenne (qui est, pour rappel, égale à 0). Ce résultat est cohérent avec la valeur de notre CDR observable : il est probable que le CDR réel se situe dans l'intervalle ±5 337 K €. De plus, la racine carrée de l'estimation de la *mse* entre les CDR réel et observable est environ égale à 10 641 K €. Cela correspond cette fois-ci à la distance entre les CDR réel et observable.

Comme $\widehat{mse}_{\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}\left(\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR_i}(I+1)\right) > \sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1)$, on peut penser que le CDR a une probabilité assez importante de ne pas être du même signe que le CDR observable. Ainsi la connaissance des vrais coefficients de Chain-Ladder aurait très bien pu nous mener à un boni au lieu d'un mali.

Dans un deuxième temps, on peut noter que l'incertitude de prédiction du CDR observable par rapport à 0 est de 14 622 K €. Il n'est donc encore une fois pas improbable d'avoir un CDR observable de -5 337 K €. Comme la marge de solvabilité doit contenir le capital nécessaire pour faire face à de possibles déviations du CDR autour de 0, elle doit tenir compte de cette valeur de 14 622 K €.

Enfin, l'incertitude à un an représente environ 72 % de l'incertitude à l'ultime fournie par la méthode de Mack. Cela montre que l'information de l'exercice comptable suivant (contenue dans la diagonale supplémentaire) contribue fortement au risque total de la charge ultime. Cela dit, cette proportion peut varier selon la branche d'assurance considérée. En effet, dans une branche d'assurance à déroulé court, l'incertitude qui est contenue dans l'exercice comptable suivant est plus importante que pour celle à déroulé long car les variations des réserves dans ce dernier cas apparaissent plus progressivement au fil des exercices. Le paragraphe suivant abordera ce point, et nous verrons que, s'il existe un ordre théorique entre l'incertitude à un an et à l'ultime, il est plus délicat d'affirmer qu'il en existe un entre les estimateurs des ces deux grandeurs.

Remarque 4. *Nous pouvons tester dans ce triangle l'hypothèse énoncée précédemment dans la remarque 3 permettant d'utiliser les formules approchées pour les calculs de différents mse. Rappelons que l'hypothèse à vérifier est la suivante :* $\dfrac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}} << 1$

Le tableau suivant résume les valeurs que nous avons obtenues :

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}}$	2,3e-03	5,1e-04	3,0e-03	3,7e-03	4,4e-04	1,8e-03	1,4e-03	9,7e-04
j	8	9	10	11	12	13	14	
$\frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}}$	5,2e-05	5,1e-06	1,1e-05	1,2e-05	9,5e-05	2,5e-04	2,4e-05	

TABLE 20 – Résultats obtenus pour la vérification de l'hypothèse d'approximation

Les résultats semblent bien proches de 0, ce qui nous conduit à dire que nos données nous permettent effectivement d'approcher les formules d'estimation à l'aide de (5).

3.3 Utilisation du bootstrap pour l'évaluation du risque à un an

3.3.1 Rappel sur la méthode de bootstrap

La méthode bootstrap a été introduite par Efron en 1979. Adaptée au provisionnement, elle permet d'obtenir plus d'informations que les seuls moments d'ordre 1 et 2 sur les montants de provisions donnés par Mack. En effet, celle-ci permet de produire la distribution complète des réserves. Il s'agit d'une puissante technique utilisée pour obtenir à partir d'un échantillon observé d'autres échantillons.

La méthode bootstrap est souvent associée à un modèle GLM où la distribution du terme d'erreur peut être log-Normale, Poisson sur-dispersée ou Gamma. Comme nous l'avons évoqué précedemment (cf. section 2.2.3), le modèle de Poisson a la particularité de permettre d'obtenir les mêmes réserves estimées que celles données par la méthode de Chain-Ladder, dans le cas d'un triangle à incréments positifs et avec un lien logarithmique (cf. Renshaw et Verall [1998]). Les calculs de réserves et d'erreur de prédiction deviennent alors plus faciles dans la mesure où il est possible d'appliquer directement la méthode de Chain-Ladder à chaque étape de la procédure bootstrap. Nous supposerons donc dans la suite être dans le cas d'un modèle de Poisson sur-dispersé. Pour rappel, dans ce modèle, les incréments $Z_{i,k}$, variables réponses du modèle GLM, suivent une loi de Poisson sur-dispersée de paramètres ϕ et $\mu_{i,k}$ (*i.e.* $\frac{Z_{i,k}}{\phi} \sim \mathcal{P}(\frac{\mu_{i,k}}{\phi})$) avec :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Z_{i,k}] = \mu_{i,k}, Var(Z_{i,k}) = \phi\mu_{i,k} \\ ln(\mu_{i,k}) = \mu + \alpha_i + \beta_k, \ \forall i \in \{1, ..., I\}, \ k \in \{1, ..., J\} \text{ avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0 \end{cases}$$

Les variables utilisées pour la méthode de bootstrap doivent être indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Or ce n'est pas forcément le cas des incréments $Z_{i,k}$. En revanche, les résidus calculés sont plus à même de vérifier ces hypothèses. Le bootstrap sera donc appliqué sur ces derniers. Pour les modèles GLM, les résidus les plus communs sont les résidus de Pearson définis par :

$$r_{i,k}^{P} = \frac{Z_{i,k} - \hat{Z}_{i,k}}{\sqrt{\hat{Z}_{i,k}}}, \ \forall i \in \{0, ..., I\}, \ k \in \{0, ..., J - i\} \tag{6}$$

où $\hat{Z}_{i,k}$ est l'estimation de $Z_{i,k}$ obtenue grâce au modèle.

Après ré-échantillonnage des $(r_{i,k}^{P})_{i,k}$, on obtient un jeu de nouveaux échantillons de résidus, notés $(r_{i,j}^{P*})_{i,k}$, $i \in \{0, ..., I\}$, $k \in \{0, ..., J - i\}$. L'inversion de la formule (6) nous permet d'obtenir de nouveaux incréments $Z_{i,k}^{*}$ et donc de nouveaux triangles de liquidation. La démarche est la suivante :

1. Appliquer le modèle sur le triangle des charges cumulées. Comme nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle GLM de Poisson, nous appliquerons de manière équivalente la méthode de Chain-Ladder. Il faut donc calculer les coefficients de développement $\hat{F}_{k}^{CL}$.

2. Reconstruire, à partir de la dernière diagonale connue, les données du triangle supérieur à l'aide des coefficients de développement calculés en étape 1. Il s'agit de diviser les données du triangle initial par ces coefficients. Cela revient en fait à re-calculer les données du triangle supérieur comme si celles-ci étaient inconnues, et selon les hypothèses du modèle. On obtient ainsi un triangle supérieur *ajusté*.

3. Calculer les résidus de Pearson. En notant $Z_{i,k}$ les incréments du triangle et $\hat{Z}_{i,k}$ les incréments ajustés (cf. étape 2), on peut déterminer les résidus de Pearson définis par la formule (6). Grâce à ces résidus, il est possible d'estimer le paramètre d'échelle ϕ. L'estimateur est donné par la formule suivante :

$$\hat{\phi} = \frac{1}{n - p} \sum_{i+k \leq I} r_{i,k}^{2}$$

4. L'erreur standard du bootstrap ne tient pas compte du nombre de paramètres du modèle. Ceci introduit un biais que l'on corrige en ajustant les résidus de Pearson. On note $n = I(J + 1)/2$ le nombre de données et $p = I + J + 1$ le

nombre de paramètres. Les résidus ajustés sont alors :

$$r_{i,k}^{adj} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} r_{i,k}^{P}, \ \forall i \in \{0, ..., I\}, \ k \in \{0, ..., J-i\}$$

Les résidus étant en moyenne proches de zéro, cet ajustement augmente leur variance.

5. Enfin, les étapes suivantes sont répétées B fois, avec B grand :

   a. Ré-échantillonnage des résidus de Pearson ajustés. On obtient alors un échantillon de résidus bootstrapés $(r_{i,j}^{adj^*})_{i,k}$.

   b. Reconstitution du pseudo-triangle supérieur bootstrapé, par inversion de la formule (6) :

   $$Z_{i,k}^{*} = \hat{Z}_{i,k} + r_{i,j}^{adj}.\sqrt{\hat{Z}_{i,k}}$$

   c. Reconstitution du pseudo-triangle des cumulés :

   $$C_{i,k}^{*} = \sum_{j=0}^{k} Z_{i,j}^{*}$$

   d. Calcul des facteurs de développement à l'aide de la méthode de Chain-Ladder.

   e. Réutilisation du modèle pour d'une part obtenir le triangle inférieur et d'autre part estimer la provision globale.

   f. Stocker le résultat de la provision et réitérer.

Après ces B itérations, on dispose d'une distribution empirique pour chaque point du triangle inférieur ainsi que pour les réserves totales.

Remarque 5. *Dans la section 3.1, nous avons rappelé que l'erreur de prédiction $mse(\hat{R}_i)$ se décompose en une composante "**erreur de modélisation**" (ou erreur de process) et une composante "**erreur d'estimation**". La méthode de bootstrap présentée ci-dessus permet de prendre en compte uniquement cette seconde composante.*

Cependant, il est également possible de prendre en considération l'erreur de modélisation qui provient, pour rappel, du fait que chaque composante du triangle est stochastique. Pour ce faire, il s'agit d'adapter l'étape 5.e. Après avoir obtenu le triangle inférieur constitué des $\hat{\mu}_{i,k}$, $i \in \{0, ..., I\}$, $k \in \{J-i+1, ..., J\}$, il va falloir réaliser un tirage aléatoire. Le principe est de simuler, pour chaque cellule du triangle inférieur, un nouveau paiement par un tirage aléatoire selon une distribution de moyenne $\hat{\mu}_{i,k}$ et de variance $\hat{\phi}.V(\hat{\mu}_{i,k})$.

Dans le cas du modèle de Poisson sur-dispersé, on aura une moyenne de $\hat{\mu}_{i,k}$ et une variance de $\hat{\phi}.\hat{\mu}_{i,k}$. On simulera donc une loi de Poisson de paramètre $\frac{\hat{\mu}_{i,k}}{\hat{\phi}}$ que l'on multipliera ensuite par $\hat{\phi}$.

Notons de plus que cette amélioration de la méthode de bootstrap est utilisé lors du calcul du risque à un an..

3.3.2 Application au calcul du risque à un an : le *re-reserving*

Nous avons vu que les modèles GLM bootstrap permettent d'avoir une alternative intéressante au modèle de Mack et de pallier à ses insuffisances (obtention d'informations plus complètes sur la distribution des réserves). Il existe également une alternative GLM au modèle de Merz et Wüthrich, il s'agit de la méthode dite du *re-reserving*. Elle consiste à obtenir des simulations de la diagonale future à partir d'une procédure bootstrap, puis pour chaque simulation à ré-estimer le montant de réserve par une méthode prédéfinie. Le *re-reserving* a été introduit par Ohlsson et Lauzeningks [2009] et Diers [2007].

Le principe général de simulation se décompose en 3 étapes :

1. Estimation des réserves par une méthode de provisionnement choisie, en $t = I$.
2. Simulation des paiements futurs pour l'année calendaire suivante.
3. Estimation des réserves par la méthode de provisionnement choisie sur le triangle enrichi de la nouvelle diagonale, en $t = I + 1$.

Cet algorithme fournit les données nécessaires au calcul du $CDR(I + 1)$ agrégé. Répété autant de fois qu'il y a de simulations, il permet d'obtenir la distribution du $CDR(I+1)$ agrégé, ce qui présente un apport par rapport à la méthode de Merz et Wüthrich.

Il est possible d'adapter la méthode de bootstrap présentée précédemment afin d'obtenir la distribution du $CDR(I + 1)$. La procédure détaillée est la suivante :

1. Les étapes 1 à 4 sont les mêmes que celles présentées ci-dessus. On obtient en particulier une estimation du montant total de réserve R. Seule la procédure itérative change.
2. Les étapes suivantes sont répétées B fois (pour $b \in \{1, ..., B\}$), avec B grand :
   a. Ré-échantillonnage des résidus de Pearson ajustés. On obtient alors un échantillon de résidus bootstrapés $(r_{i,j}^{adj^*})_{i,j}$.

b. Reconstitution du pseudo-triangle supérieur bootstrapé, par inversion de la formule (6) ; reconstitution du pseudo-triangle des cumulés ; calcul des facteurs de développement à l'aide de la méthode de Chain-Ladder et stockage du montant de réserve estimé, noté R_b^I.

c. Estimation de la diagonale suivante à l'aide des facteurs de développement déterminés par la méthode de Chain-Ladder, puis estimation des incréments diagonaux $\hat{\mu}_{i,I-i+1}$, $i \in \{1, ..., I\}$, qui vont correspondre à la moyenne de la loi utilisée (Poisson sur-dispersée dans notre cas) pour la simulation des nouveaux incréments diagonaux, notés $Z^{*b}_{i,I-i+1}$, conformément à la méthode présenté dans la remarque 5.

d. Calcul des facteurs de développement à l'aide de la méthode de Chain-Ladder appliquée au triangle auquel on a ajouté la diagonale de l'année calendaire $I+1$, ainsi que du montant de réserve correspondant, noté R_b^{I+1}.

e. Stocker $CDR_b(I+1) = R_b^I - (R_b^{I+1} + \sum_{i=1}^{I} Z^{*b}_{i,I-i+1})$

Cette procédure permet finalement d'obtenir la distribution du $CDR(I+1)$, et donc de calculer diverses variables qui sont utilisées au sein du référentiel Solvabilité 2, comme notamment la marge pour risque.

Remarque 6. *L'utilisation de la méthode re-reserving pour le calcul du $CDR(I+1)$ présente l'avantage d'introduire des simulations. Ainsi, le modèle de Chain-Ladder et les hypothèses de Mack peuvent être remplacées par d'autres. L'ajustement et l'extrapolation d'un facteur de queue devient également possible.*

De plus, la méthode re-reserving est généralisable à horizon k. Il est alors possible d'avoir une idée du risque à k années.

Exemple 3.3.1. *Nous avons appliqué la méthode du re-reserving à notre triangle de RC Automobile.*

Tout d'abord, nous avons pu obtenir des informations sur la distribution des montants de réserves constitués en $t = I$, et déterminées respectivement avec l'information $\mathcal{D}_I$ et $\mathcal{D}_{I+1}$. Ces résultats sont résumés dans les tableaux 21 et 22 ci-dessous :

Moyenne	Ecart-type	$VaR_{75\%}$	$VaR_{99,5\%}$
168 075 925	23 052 121	180 901 791	246 973 187

TABLE 21 – Informations sur R^I, montant de réserve calculé avec l'information $\mathcal{D}_I$

Moyenne	Écart-type	$VaR_{75\%}$	$VaR_{99,5\%}$
168 063 588	25 258 341	182 574 077	251 002 923

TABLE 22 – Informations sur $R^{I+1} + \sum_{i=1}^{I} Z_{i,I-i+1}$, montant de réserve constitué en $t = I$ et calculé avec l'information $\mathcal{D}_{I+1}$

On remarque dans un premier temps que le montant moyen des réserves est très proche de celui obtenu par la méthode de Chain-Ladder (167,73 M€), ce qui est conforme aux attentes puisque le modèle sous-jacent utilisé lors de la procédure bootstrap reproduit cette méthode.

Dans un deuxième temps, on peut noter que l'écart-type de R^I nous donne l'incertitude à l'ultime. Bien qu'un peu plus élevée, sa valeur est du même ordre de grandeur que celle obtenue dans l'exemple de la section 3.2.4 (environ 20 M).

Ensuite, nous avons tracé la distribution empirique du $CDR(I+1)$ agrégé (figure 11) :

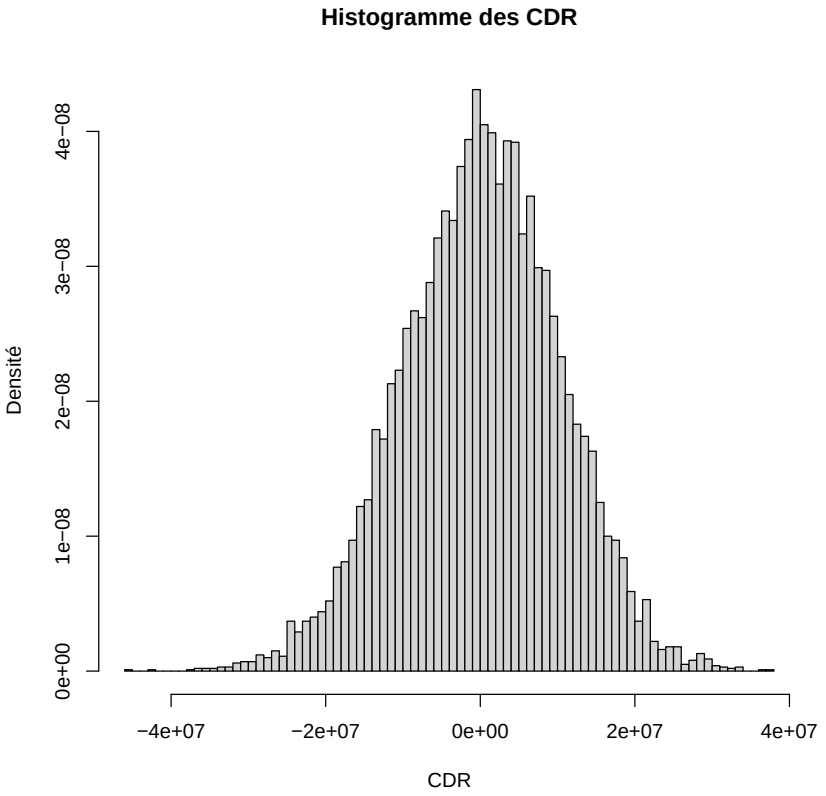


FIGURE 11 – Distribution de $CDR(I+1)$

Nous avons également pu déterminer certaines informations sur cette dernière (tableau 23) :

Moyenne	Écart-type	$VaR_{75\%}$	$VaR_{99,5\%}$
12 337	10 328 415	7 005 857	26 078 022

TABLE 23 – Informations sur $CDR(I+1)$

Comme le laissaient penser les valeurs des montants de réserve observés précédemment, on trouve un $CDR(I+1)$ moyen positif, ce qui correspond à un boni. Or, à ce stade d'information $\mathcal{D}_I$, ce boni n'a pas lieu d'être. En effet, en théorie, nous avons : $\mathbb{E}[CDR(I+1)|\mathcal{D}_I] = 0$.

Cet écart est dû à un nombre insuffisant de simulations bootstrap. En augmentant le nombre de simulations, nous obtenons la figure suivante qui illustre la loi des grands nombres et la convergence de la moyenne empirique du $CDR(I+1)$ vers la moyenne théorique, à savoir 0.

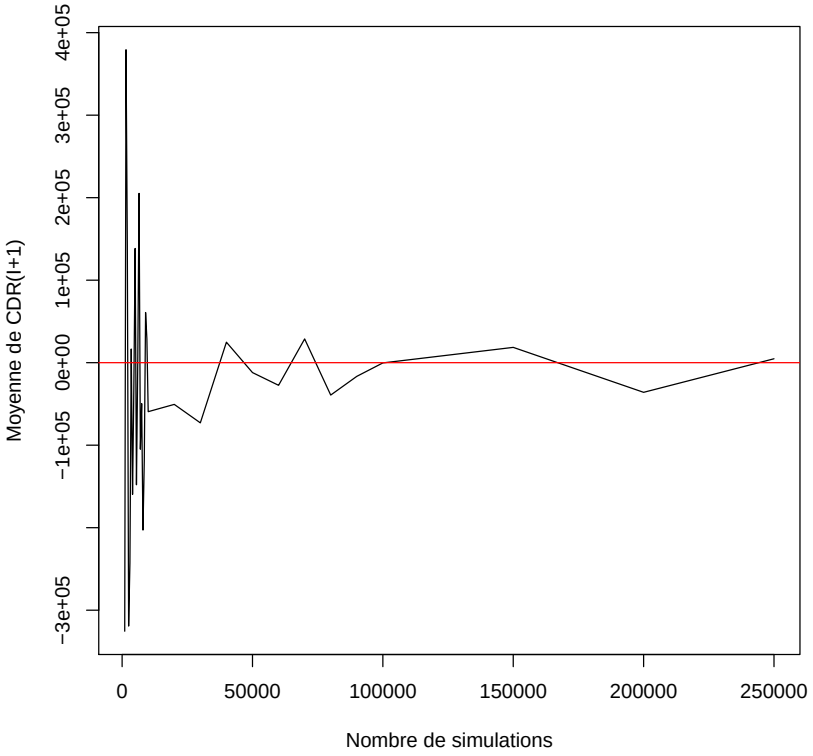


FIGURE 12 – Représentation du $CDR(I+1)$ espéré en fonction du nombre de simulations bootstrap

Enfin, conformément aux provisions pour incertitude requises par la réglementation Solvabilité 2, il faut s'intéresser particulièrement à l'écart-type du $CDR(I+1)$. C'est la mesure de l'incertitude à un an que nous recherchons. Il s'agit en fait de la version empirique de la racine carrée de la $mse_{\sum_{i=1}^{I} CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)$. *C'est ce montant qu'il faudra prendre en compte lors de la constitution de la marge pour risque requise dans Solvabilité 2. Notons que la valeur que nous obtenons ici est plus faible que celle obtenue dans l'exemple de la section 3.2.4 (environ 14,6 M).*

3.4 Comparaison : incertitude à l'ultime et à un an

De manière générale, il semble que l'incertitude à un an soit plus faible que l'incertitude à l'ultime. Ce résultat a d'ailleurs été entériné lors de l'étude de AISAM-ACME [2007] ; celle-ci trouvait en moyenne un risque à un an égal à environ 2/3 du risque à l'ultime. Dans cette partie, nous allons étudier les relations d'ordre qui peuvent exister entre ces deux mesures d'incertitude.

Dans un premier temps, il est possible de montrer d'un point de vue théorique que dans le cadre du modèle de Mack, l'incertitude à l'ultime est effectivement supérieure à l'incertitude à un an pour chaque année de survenance $i \in \{0, ..., I\}$.

En effet, on rappelle que :

$$\begin{cases} mse(\hat{R}_i) = Var(C_{i,J}|\mathcal{D}_I) + (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \hat{C}_{i,J})^2 \\ mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = Var\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I])^2 + (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \hat{C}_{i,J})^2 \\ &\quad -\mathbb{E}[\mathbb{E}(C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1})^2|\mathcal{D}_I] + (\mathbb{E}[\mathbb{E}(C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1})|\mathcal{D}_I])^2 \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Jensen et du théorème d'emboîtement des espérances conditionnelles permet d'obtenir le résultat suivant :

$$mse(\hat{R}_i) \geq mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)$$

Le lecteur intéressé pourra se référer à l'Annexe D p 91 pour voir la démonstration détaillée.

Ainsi, on a montré que sous les hypothèses du modèle de Mack, l'incertitude à un an est plus faible que l'incertitude à l'ultime. Cependant, il ne s'agit que d'un résultat théorique qui peut se trouver réfuté dans la pratique. En effet, il est seulement possible de comparer des estimateurs de ces grandeurs et non leurs vraies valeurs : lors de l'estimation, un biais est à prendre en compte et peut venir contredire la théorie.

Schématiquement, si l'on exprime chaque estimation comme la vraie valeur à laquelle on ajoute une erreur, notée ξ :

$$\begin{aligned} \widehat{mse}(\hat{R}_i) &= mse(\hat{R}_i) + \xi_1 \\ \widehat{mse}_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) + \xi_2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{mse}(\hat{R}_i) - \widehat{mse}_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) + (\xi_1 - \xi_2)$

Il serait alors possible que la valeur de $(\xi_1 - \xi_2)$ soit significativement négative, ce qui pourrait entraîner que l'incertitude à un an soit supérieure à celle à l'ultime. Dans ce cas, la position respective des estimateurs ne concorderait pas avec la position respective des vraies valeurs.

Ce type de résultat peut provenir de deux causes. Il peut tout d'abord s'agir simplement d'un écart d'échantillonnage. Cela peut également être dû au fait que les hypothèses sous-jacentes au modèle ne sont pas vérifiées par le triangle, par exemple la relation de proportionnalité entre les paiements d'une année de développement à une autre ou l'égalité des coefficients de proportionnalité à travers les années de survenance dans le cas du modèle de Mack. Les estimateurs sont alors incorrects et se trouvent éloignés des valeurs réelles. En particulier, l'incertitude à un an peut être gonflée par ce biais d'estimation, et alors devenir supérieure à l'incertitude à l'ultime.

Finalement, l'idéal serait de pouvoir proposer un test pour décider entre ces alternatives. Ce test serait de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{incertitude à l'ultime } \geq \text{ incertitude à un an} \\ \mathcal{H}_1 : \text{incertitude à l'ultime } < \text{ incertitude à un an} \end{cases}$$

Ainsi, si l'on se trouve dans le cas où l'incertitude à un an est supérieure à celle à l'ultime, l'intervalle de confiance offert par le test permettra de déterminer si cette "anomalie" provient simplement d'une erreur d'échantillonage (*i.e.* modèle correct mais données particulières) ou bien du fait que les hypothèses du modèle ne sont pas vérifiées et que les estimateurs sont incorrects.

Nous verrons dans la suite de cette section l'exemple particulier d'un triangle de développement pour lequel la position respective des estimateurs ne respecte pas la position théorique.

Dans un deuxième temps, toujours dans une optique de comparaison des deux mesures d'incertitude, nous allons montrer que la formule approchée de l'estimateur de l'incertitude à un an donnée par Merz et Wüthrich (basée sur l'approximation (5) de la remarque 3) est contrainte à être inférieure à l'estimateur de l'incertitude à horizon ultime proposée par Mack. Ceci reste vrai, que ce soit dans le cas de chaque année de survenance ou dans le cas agrégé.

Pour chaque année de survenance $i \in \{1, ..., I-1\}$, montrons que :

$$\widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) \leq mse(\hat{R}_i)$$

Pour simplifier les expressions, on pose $\forall j \in \{1, ..., J-1\}$:

$$\begin{aligned} S_j^m &= \sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}, \text{ avec } m \in \{I, I+1\} \\ \beta_j &= \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}}, \ \beta_j \leq 1 \end{aligned}$$

On a les deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \hat{C}_{i,J}^2 \left(\underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/(\hat{F}_{I-i})^2}{C_{i,I-i}}}_{A} + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/(\hat{F}_{I-i})^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \beta_j \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{S_j^I}}_{B} \right) \\ \widehat{mse(\hat{R}_i)} &= \hat{C}_{i,J}^2 \left(\underbrace{\sum_{k=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2/(\hat{F}_k)^2}{\hat{C}_{i,k}}}_{C} + \underbrace{\sum_{k=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2/(\hat{F}_k)^2}{S_k^I}}_{D} \right) \end{aligned}$$

Or, d'une part : $A \leq C$ car A correspond en fait au premier terme de la somme C, celle-ci étant composée d'éléments positifs (Sous condition que les recours n'excèdent pas les paiements cumulés).
D'autre part, du fait que $\beta_j \leq 1$, $\forall j \in \{1, ..., J-1\}$ on a :

$$B \leq \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{S_j^I} = D$$

Ainsi,

$$\hat{C}_{i,J}^2(A+B) \leq \hat{C}_{i,J}^2(C+D), \ i.e. \ \widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) \leq \widehat{mse(\hat{R}_i)}$$

On a donc bien montré que pour chaque année de survenance, l'incertitude à un an **calculée avec l'approximation (5)** est bien toujours inférieure à l'incertitude à l'ultime de Mack.

Ce résultat reste vérifié lorsque l'on agrège sur les années de survenances. En effet, on a les deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{mse}_{\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{I}\widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)}_{E} \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=i+1}^{I}\hat{C}_{i,J}\hat{C}_{k,J}\left[\underbrace{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}/(\hat{F}_{I-i})^2}{S^I_{I-i}}+\sum_{j=I-i+1}^{J-1}\beta_j\frac{\hat{\sigma}^2_j/(\hat{F}_j)^2}{S^I_j}}_{B}\right] \\
\widehat{mse(\hat{R})} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{I}\widehat{mse(\hat{R}_i)}}_{F}+2\sum_{i=1}^{I}\sum_{l=i+1}^{I}\hat{C}_{i,J}\hat{C}_{l,J}\underbrace{\sum_{j=I-i}^{J-1}\frac{\hat{\sigma}^2_j/(\hat{F}_j)^2}{S^I_j}}_{D}
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\widehat{mse}_{\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) \leq \widehat{mse(\hat{R}_i)}$ donc leurs sommes également : $E \leq F$. De plus, on a déjà montré que $B \leq D$.

Finalement, $\widehat{mse}_{\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR}_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) \leq \widehat{mse}(\hat{R})$ lorsque l'on utilise la formule approchée de la *mse* du CDR agrégé proposée par Merz et Wüthrich.

Cependant, cette approximation ne peut être utilisée qu'à condition que l'hypothèse de la propriété (5) (Remarque 3) soit vérifiée, à savoir $a_i << 1,\ \forall i$. Dans ce cas, on a :

$$\textbf{\textit{mse} observable exacte} \approx \textbf{\textit{mse} observable approché} \leq \textbf{mse}_{\textbf{Mack}}$$

De plus, nous avons nécessairement la relation suivante, du fait que les termes $(a_i)_i$ de (5) sont positifs :

$$\textbf{\textit{mse} observable exacte} \geq \textbf{\textit{mse} observable approché}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) &= 1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{i_1,\dots i_k\in\{1,\dots n\}:\\ i_1<\dots<i_k}} a_{i_1}\times\dots\times a_{i_k} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}a_i+\sum_{k=2}^{n}\sum_{\substack{i_1,\dots i_k\in\{1,\dots n\}:\\ i_1<\dots<i_k}} a_{i_1}\times\dots\times a_{i_k} \\
&\geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_i
\end{aligned}$$

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, les résultats obtenus grâce à cette approxi-

mation peuvent être très éloignés des valeurs réelles des *mse*. Il s'agit en fait d'une des causes pouvant être à l'origine de l'obtention d'une incertitude à un an supérieure à celle à l'ultime.

Autrement dit, il suffit pour inverser l'ordre général que l'on ait :

$$\exists i \in \{0, ...J-1\} \text{ tel que } \frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}} \text{ soit suffisamment élevé.}$$

Prenons pour cela un triangle (fictif, cf. Annexe E p 93) assez volatile, et dont les facteurs de développement sont plutôt faibles, de sorte que le ratio ci-dessus soit significativement élevé pour au moins une année de développement. Le tableau 24 résume les quantités obtenues :

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
$\hat{F}_j$	2,600	1,004	1,348	0,984	0,993	0,997
$\hat{\sigma}_j^2$	5671,13	139,27	2178,04	2,16	1,84	1,57
$\frac{\hat{\sigma}_j^2/(\hat{F}_j)^2}{C_{I-j,j}}$	271,09	1,20	172,85	3,10e-04	1,76e-04	2,06e-04

Table 24 – Estimation des facteurs de développement, des variances et du ratio évoqué ci-dessus

Voici les valeurs des *mse* à l'ultime et à un an obtenues pour ce triangle :

$mse_{Mack}^{1/2}$	$1,151 \times 10^6$
$mse_{1an}^{1/2}$	$2,746 \times 10^6$

Table 25 – Incertitudes à l'ultime et à un an

On remarque que dans le cas particulier de ce triangle, l'incertitude à un an est 2,4 fois plus élevée que l'incertitude à l'ultime. Nous avons donc trouvé un triangle de développement illustrant les propos du début de cette section. Les estimateurs des deux mesures d'incertitude n'étant pas corrects (car les hypothèses sous-jacentes ne sont pas vérifiées), on aboutit à un résultat en désaccord avec la théorie.

Remarque 7. *Concernant le résultat sur l'approximation de l'estimateur de l'incertitude à un an proposée par Merz et Wüthrich, nous pouvons noter que dans cette exemple où l'incertitude à un an est supérieure à celle à l'ultime, la valeur approchée de* $mse_{1an}^{1/2}$ *est* $1,026 \times 10^6$*, et reste malgré tout inférieure à* $mse_{Mack}^{1/2}$*.*

4 Prise en compte de l'inflation

4.1 Problématique

Les méthodes présentées en première partie n'aboutissent aux provisions exactes que si les hypothèses de stabilité des cadences de règlement et de l'inflation sont respectées. Or en pratique, il se peut que cette dernière ne le soit pas. Nous nous intéressons donc dans cette partie à l'inflation dans le cadre du provisionnement. Nous verrons en particulier comment corriger l'inflation, et l'influence de cette correction sur l'estimation des réserves et sur leur variance.

4.2 L'enjeu de l'inflation

Au moment du règlement d'un sinistre, l'assureur a, auparavant, estimé les coûts de l'indemnisation : réparation, frais médicaux, etc. en tenant compte de multiples paramètres tels que le prix de la main d'œuvre, des matières premières, soins médicaux... Or d'une année à l'autre, les prix de ces différents facteurs changent. Il est indispensable pour l'assureur de faire cas de ce point, car l'omission peut aboutir à un provisionnement insuffisant ou trop important. En effet, étant donné que les estimations des facteurs de développement (et donc in fine des réserves) se basent sur l'hypothèse que l'inflation passée est constante et qu'elle le restera dans le futur, alors un changement à ce niveau va donc nécessairement perturber les cadences futures, et les réserves finales avec. Par exemple, si un changement de jurisprudence mène à une augmentation de l'inflation, les prix futurs (et donc les réserves) seront sous-estimés, conduisant de cette manière à un sous-provisionnement.

Exemple 4.2.1. *Pour montrer cela, on suppose que le taux d'inflation de référence utilisé pour le provisionnement est τ, mais que, dans le futur, c'est-à-dire après l'année actuelle I, le taux (inconnu) sera de τ'. On note $\gamma_0, ..., \gamma_J$ les cadences de règlements des années de développement. Ainsi, pour les années passées (telles que $i + j \leq I$) :*

$$Z_{i,j} = \gamma_j \hat{C}_{iJ}(1+\tau)^{i+j}$$

Et pour les années telles que $i + j > I$, celles qui nous intéressent ici, les accroissements exacts (en termes d'inflation) et estimés sont :

$$Z_{i,j} = \gamma_j \hat{C}_{iJ}(1+\tau)^{I}(1+\tau')^{i+j-I}$$

$$\hat{Z}_{i,j} = \gamma_j \hat{C}_{iJ}(1+\tau)^I(1+\tau)^{i+j-I}$$

Ce qui donne les réserves estimées et exactes suivantes :

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I-i+1}^{I} \hat{Z}_{i,k} = \hat{C}_{iJ}(1+\tau)^I \sum_{k=I-i+1}^{I} \gamma_k(1+\tau)^{i+k-I}$$

$$R_i = \sum_{k=I-i+1}^{I} Z_{i,k} = \hat{C}_{iJ}(1+\tau)^I \sum_{k=I-i+1}^{I} \gamma_k(1+\tau')^{i+k-I}$$

D'où le "ratio de provisions" :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{R}_i}{R_i} &= \left(\frac{1+\tau'}{1+\tau}\right)^{I-i} \frac{\sum_{k=I-i+1}^{I} \gamma_k(1+\tau)^k}{\sum_{k=I-i+1}^{I} \gamma_k(1+\tau')^k} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i} \gamma_{j+I-i}(1+\tau)^j}{\sum_{j=1}^{i} \gamma_{j+I-i}(1+\tau')^j} \end{aligned}$$

On voit donc bien que :

$$\tau < \tau' \;\Leftrightarrow\; \frac{\hat{R}_i}{R_i} < 1 \;\Leftrightarrow\; \textit{Sous-provisionnement}$$

4.3 Généralités sur la pondération d'un triangle

Dans certains cas particuliers, il est pertinent de mettre un poids sur les cellules du triangle : pour modérer l'influence des années anciennes (trop éloignées de la réalité actuelle), ou bien annuler l'effet de certaines cellules porteuses de données abérrantes.

Un des moyens consiste à multiplier le triangle par une matrice de poids $W = (w_{i,k})_{i\in\{0,...I\},k\in\{0,...J\}}$.

Il est alors intéressant d'étudier l'impact sur les réserves et sur l'incertitude sur les provisions. Concrètement, le triangle à étudier n'est plus T mais WT (produit terme à terme et non matriciel), c'est-à-dire que dans les nouvelles formules s'obtiennent en remplaçant $C_{i,k}$ par $\tilde{C}_{i,k} = w_{i,k}C_{i,k}$.

Notons que dans le cas d'équipondération (sans intérêt en pratique) où $w_{i,k} = w \;\forall i \in \{0,...I\}, k \in \{0,...J\}$, les réserves et incertitudes à l'ultime et à un an sont simplement multipliées par w, sans changer les estimations des facteurs de développement (la vérification est directe par les formules de Mack et de Merz et Wüthrich).

Le cas de l'inflation

Le traitement de l'inflation est un cas particulier de pondération. En effet, la mise en "as if" du triangle (c'est-à-dire lorsqu'il est libre d'inflation) revient à lui retirer les effets de l'inflation en le divisant par les inflations cumulées par année calendaire (voir ci-après). Cette étape équivaut à rajouter des poids (inférieurs à 1 en cas d'inflation, et supérieurs à 1 en cas de déflation) sur les cellules. Ainsi, $w_{i,k} = \prod_{j=1}^{i+k} \frac{1}{(1+\tau_j)}$, où τ_j est le taux d'inflation de l'année j. L'impact de cette pondération sera vu dans la section 4.5.

4.4 Correction de l'inflation

Afin de pouvoir travailler sur des montants en valeur réelle, et éviter ainsi les phénomènes de sur et sous-provisionnement présentés précédemment, nous allons corriger le triangle de l'inflation. Le processus est le suivant :

1. Nous travaillons sur le triangle des accroissements, pour distinguer chaque année et sa propre inflation.

2. Nous pourrons alors effectuer l'actualisation des valeurs à l'année 0 grâce aux indices d'inflation passée. Le triangle est en *as if*.

3. Ce n'est qu'ensuite que nous procéderons à l'estimation des provisions à l'aide de Chain-Ladder par exemple.

4. Enfin, nous rajouterons l'inflation sur les montants passés et futurs, de sorte à obtenir les montants des réserves en valeur nominale.

4.4.1 Triangle complet sans inflation

Pour notre illustration, les indices d'inflation ont été récupérés sur le site de l'INSEE[2], et correspondent aux indices de prix à la consommation. Il est utile de remarquer que ceux-ci sont des grandeurs économiques globales et doivent être, en pratique, plus spécifiques au triangle étudié ; il faut effectivement considérer la garantie en question, et les indices de prix qui y sont relatifs (par exemple, l'évolution de la politique d'attribution des rentes en RC médicale). Dans notre cas, il serait donc plus judicieux d'utiliser les indices des coûts de réparation par exemple, ou encore de la main d'œuvre.

[2]http ://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp ?ref_id=NATTEF08108&reg_id=0

Tout d'abord, pour retirer l'effet de l'inflation aux accroissements du triangle (et se retrouver en base de l'année 1996), il faut calculer les indices cumulés depuis 1996 :

$$Indice_i = \prod_{j=1996}^{i} Indice_j \qquad \text{où} \quad Indice_{1996} = 1$$

Il suffit alors de diviser les accroissements par l'indice cumulé de l'inflation selon leur année calendaire. Nous obtenons ainsi un triangle de développement sans inflation.

Ce n'est qu'ensuite que nous utilisons la méthode de Chain-Ladder pour l'estimation des provisions. L'inflation étant nulle, elle est a fortiori constante, et l'application de la méthode a donc un sens.

La réserve à effectuer s'élève alors à (montant réel) : 124, 9 M unités de prix. En "comparaison" (les unités n'étant pas les mêmes), la valeur nominale des réserves était de 167, 7 M €.

4.4.2 Prédiction de l'inflation

La dernière étape consiste à réinjecter l'inflation dans le triangle complet. Il est donc nécessaire d'estimer les indices de l'inflation future. Plusieurs modèles ont été développés à ce sujet ; cependant cela ne constitue pas l'essentiel de cette partie, nous retiendrons ici un modèle simple du type autorégressif d'ordre 1 (AR(1)), avec des données de l'INSEE depuis 1950 jusqu'à 2011. Le principe est simplement de considérer que l'indice d'inflation est, chaque année, fonction linéaire de l'indice de l'année précédente uniquement. Autrement dit, en notant $X_t = ln(Indice_t), \quad t = 1950, ...2011$:

$$X_t = \mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + \sigma\epsilon \tag{7}$$

où $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\mu = \mathbb{E}[(X_t)_t]$. Ou encore, en travaillant sur les données centrées $Y_t = X_t - \mu$:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \sigma\epsilon \tag{8}$$

L'estimation du paramètre μ est simple, il s'agit de la moyenne empirique, ce qui nous permet d'obtenir le jeu de données $(Y_t)_t$. Reste à estimer le paramètre ϕ. Pour cela, une simple régression linéaire suffit, au même titre que la fonction *arima* sous R. Les résultats de l'estimation de la série sont les suivants :

$\hat{\mu}$	0.0474
$\hat{phi}$	0.7335
$\widehat{s.e.}(\phi)$	0.0838
$\hat{\sigma}^2$	7.054e-04

TABLE 26 – Estimation des paramètres

Graphiquement :

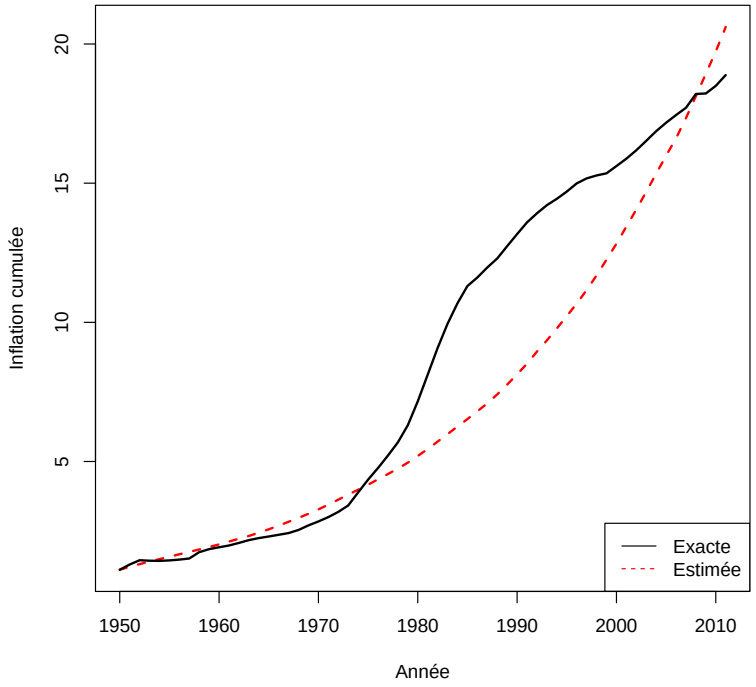


FIGURE 13 – Approximation de l'inflation par un AR(1)

L'approximation semble satisfaisante pour les trente premières années ; au-delà, il se peut que l'inflation ait subi un changement structurel. L'historique est sans doute trop long, et nous allons donc le réduire aux années 2000-2011. La même procédure nous donne :

$\hat{\mu}$	0,0172
$\hat{phi}$	-0,3412
$\widehat{s.e.}(\phi)$	0,2759
$\hat{\sigma}^2$	3,427e-05

TABLE 27 – Estimation des paramètres

Graphiquement, nous obtenons :

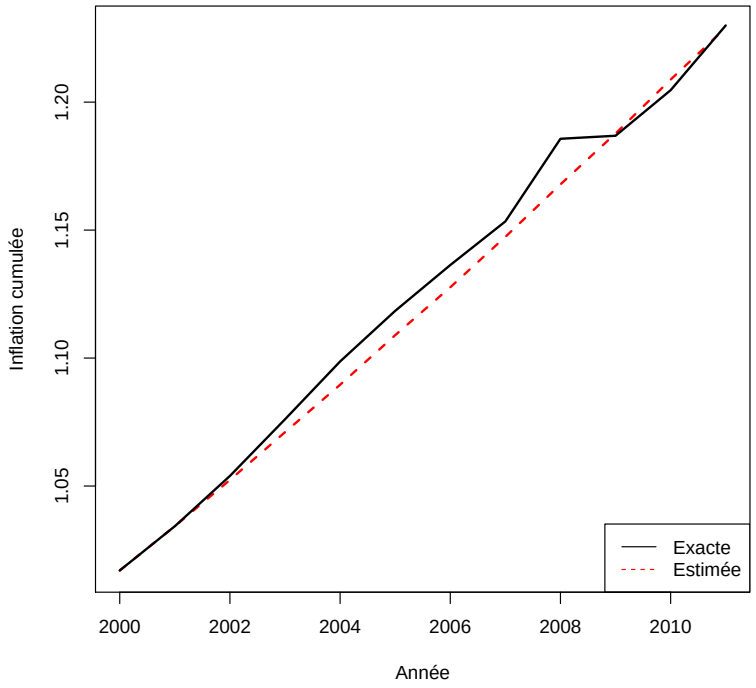


FIGURE 14 – Approximation de l'inflation par un AR(1)

L'approximation est meilleure, et c'est sur la base de ces estimations que nous allons projeter les indices futures notés $(\widehat{Indice}_k)_{k=2012,...2026}$, calculés par la formule (7) :

Année	$\widehat{Indice}$	Année	$\widehat{Indice}$	Année	$\widehat{Indice}$
2012	1,0166	2017	1,0183	2022	1,0170
2013	1,0168	2018	1,0167	2023	1,0179
2014	1,0177	2019	1,0177	2024	1,0176
2015	1,0175	2020	1,0171	2025	1,0172
2016	1,0175	2021	1,0175	2026	1,0177

TABLE 28 – Prediction des indices d'inflation

4.4.3 Réinjection de l'inflation pour le calcul des réserves

Désormais, il est possible de réinjecter les inflations passées et celles projetées, dans le triangle complet précédent (*as if*, dépourvu d'inflation), en le multipliant par la matrice M de termes les produits cumulés des indices :

$$M_{i,j} = \prod_{k=1996}^{i+j} \widetilde{Indice}_k \qquad i = 0, ...I \;\; j = 0, ...J$$

où :

$$\widetilde{Indice_k} = \begin{cases} Indice_k & si \quad i+j \leq 2011 \\ \\ \widehat{Indice_k} & si \quad i+j > 2011 \end{cases}$$

Finalement, en calculant les réserves à effectuer pour chacun des triangles, nous obtenons un sur-provisionnement de 995 626,2 € de la part du premier triangle, non traité de l'inflation.

4.5 Intérêts de la correction de l'inflation

Comme cela a été vu plus haut, un des points intéressants du traitement de l'inflation réside dans l'obtention de cadences de paiement libres de l'inflation. Cette correction permet donc de travailler avec des cadences plus régulières et plus exactes car elles ne contiennent pas l'information de l'inflation passée qui, en général, ne reflète pas l'évolution future des prix - et qui n'a donc aucune raison de servir à calculer les montants futurs. Ces nouvelles cadences sont d'ailleurs plus faibles dans notre cas, tout en restant proches de celles estimées précédemment :

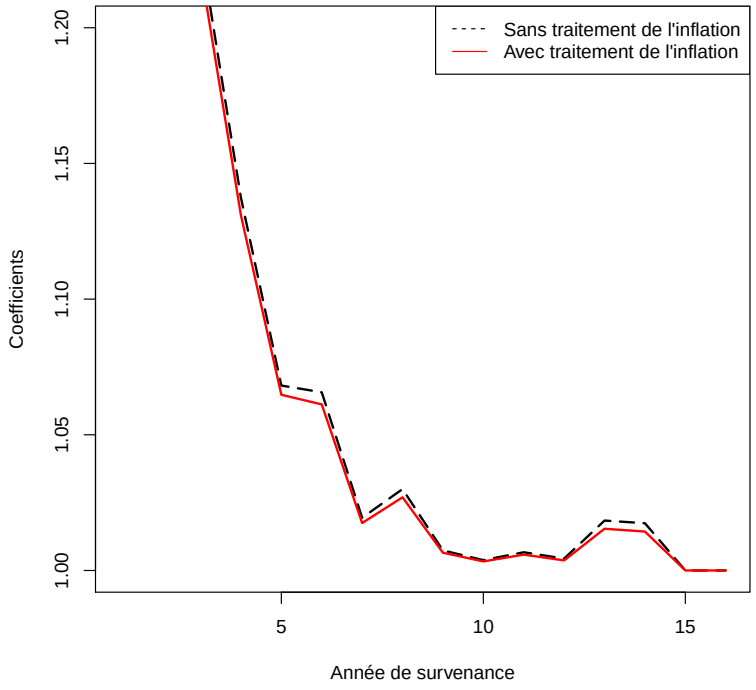


FIGURE 15 – Différence des estimateurs des facteurs de développement (avec inflation, sans inflation)

Ce point de vue s'attache à la volonté d'être plus juste dans les estimations.

Un traitement de l'inflation préalable au calcul de provisionnement présente également l'avantage de réduire la volatilité du montant de provision total. En effet, il est possible de montrer que la variance du montant de provision total déflaté est inférieure à celle du montant de provision inflaté.

Pour ce faire, nous allons utiliser la formule de décomposition de la variance suivante :
Si X est une variable aléatoire et $\mathcal{B}$ est un ensemble d'information alors :

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|\mathcal{B})] + Var[\mathbb{E}(X|\mathcal{B})]$$

On définit la tribu engendrée par le passé du processus d'inflation $(\tau_s)_s$ par $\underline{\tau_t} = \sigma(\tau_s, s \leq t)$.

On pose également $\widetilde{R}$ et $\widetilde{Z}_{i,k}$, $i \in \{0, ..., I\}$ et $k \in \{0, ..., J\}$ respectivement la provision totale et les incréments de paiement sans inflation. On a donc :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_{i,k} = \dfrac{Z_{i,k}}{\tau_{i+k}} \\ \widetilde{R} = \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \widetilde{Z}_{i,k} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \frac{Z_{i,k}}{\tau_{i+k}} \end{cases}$$

Enfin, on se place sous l'hypothèse d'indépendance des incréments. On a donc :

$$Var(\widetilde{R}) = \underbrace{\mathbb{E}[Var(\widetilde{R}|\underline{\tau_I})]}_{A} + \underbrace{Var[\mathbb{E}(\widetilde{R}|\underline{\tau_I})]}_{B}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } A &= \mathbb{E}\left[Var\left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \frac{Z_{i,k}}{\tau_{i+k}} \middle| \underline{\tau_I}\right)\right] = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \frac{1}{\tau_{i+k}^2} \mathbb{E}[Var(Z_{i,k}|\underline{\tau_I})] \\ A &\leq \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \mathbb{E}[Var(Z_{i,k}|\underline{\tau_I})] \text{ car } \forall t,\ \tau_t \geq 1 \\ A &\leq \mathbb{E}[Var(R|\underline{\tau_I})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, on a : } B &= Var\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \frac{Z_{i,k}}{\tau_{i+k}} \middle| \underline{\tau_I}\right)\right] = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} \frac{1}{\tau_{i+k}^2} Var[\mathbb{E}(Z_{i,k}|\underline{\tau_I})] \\ B &\leq \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=J-i+1}^{J} Var[\mathbb{E}(Z_{i,k}|\underline{\tau_I})] \text{ car } \forall t,\ \tau_t \geq 1 \\ B &\leq Var[\mathbb{E}(R|\underline{\tau_I})] \end{aligned}$$

Et donc finalement, on trouve :

$$Var(\widetilde{R}) \leq A + B = Var(R)$$

Ce résultat est intéressant notamment dans le contexte du référentiel Solvabilité 2. En effet, au travers de la réduction de l'erreur de modélisation (ou erreur de *process*) lié au traitement de l'inflation, il va être possible de diminuer le risque de provisionnement. Ceci se traduit dans les calculs des *mse*. Que ce soit selon la vision à l'ultime ou à un an, ces derniers sont à chaque fois plus faibles sur les triangles mis en *as if*. Ainsi, en modélisant d'une part l'évolution du processus d'inflation, et en calculant d'autre part les *mse*, on peut obtenir des provisions pour risque plus justes.

Dans notre triangle, le calcul de l'incertitude à un an selon la formule de Merz et Wüthrich nous donne un *mse* observable de 7,409 M avec les cadences libres d'inflation, tandis qu'elle est de 7,996 M sans correction de l'inflation. Ce qui correspond à une différence de 7,91 %. De même, en termes d'incertitude à l'ultime, le *mse* agrégé du montant total des provisions est réduit de 5,87 %.

La figure ci-dessous illustre ces résultats. On peut observer que pour chaque année de survenance, les valeurs des *mse* calculées sur le triangle mis en *as if* est toujours inférieure à celles calculées sur le triangle non traité.

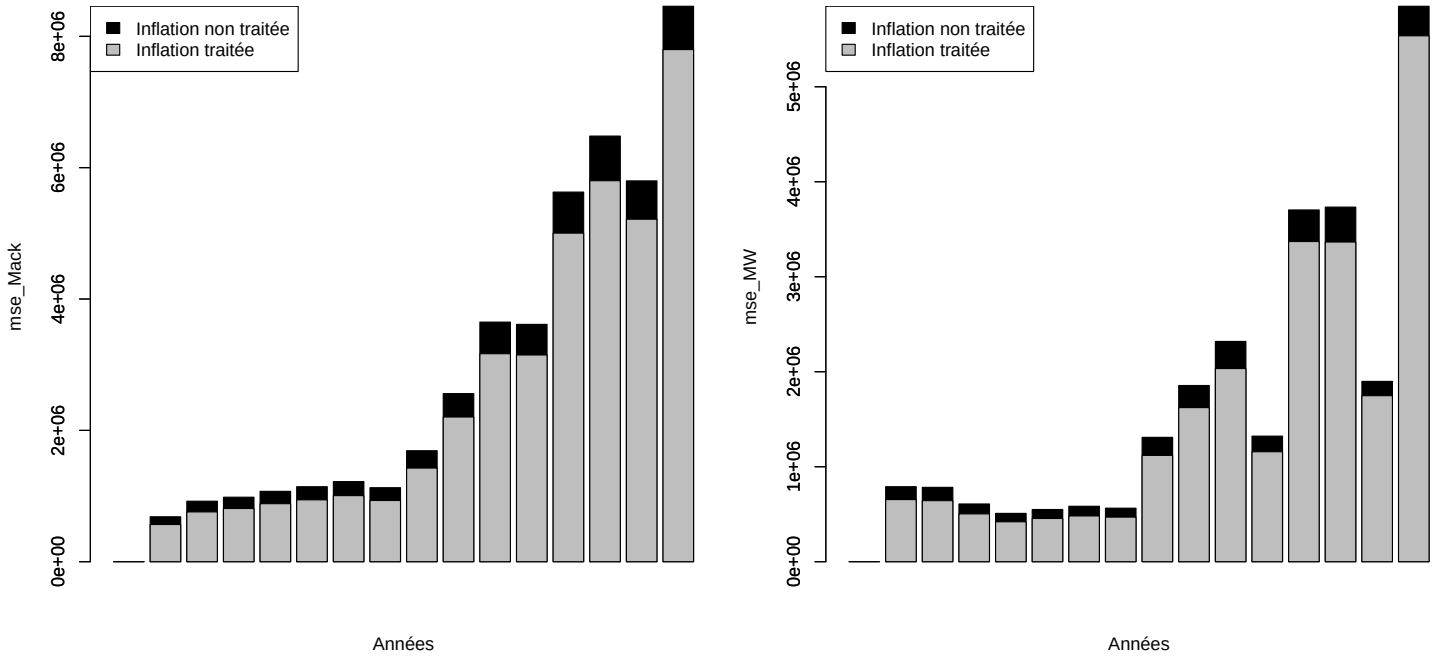


FIGURE 16 – Différences des mse : à l'ultime puis à un an, par année d'accident

Conclusion

À travers ce mémoire, nous avons eu l'occasion de réétudier les méthodes de provisionnement classiques, et avons pu comparer les différents résultats par le biais d'applications numériques sur un triangle de développement. Ceci nous a permis de mettre en avant les disparités des réserves estimées, et par conséquent d'introduire la question de l'existence d'une méthode générale, ou du moins la plus adaptée à l'historique des sinistres à étudier.

Dans le but d'expliquer ces divergences, nous nous sommes orientés dans une perspective de comparaison intersectorielle, c'est-à-dire entre triangles issus de branches d'assurances différentes. Ceci nous a conduit à prendre en compte la vitesse de stabilisation des incréments comme critère de différenciation parmi les méthodes. Mais de ce fait, cette étude comparative donnait des résultats purement relatifs, sans critère de décision dans l'absolu. C'est pourquoi nous avons ensuite cherché à introduire le calcul du SSE pour avoir une idée de la méthode la plus appropriée aux données historiques, en nuançant toutefois sur le fait que le futur puisse évoluer sans cohérence avec le passé.

L'inconnue face auquel se trouve alors l'actuaire va l'inciter à quantifier l'incertitude sur les réserves estimées. Bien que l'approche à l'ultime ait été introduite depuis 1993 par Mack, la directive Solvabilité 2 suggère une approche sur un horizon d'un an. Nous avons vu à cette occasion que certaines méthodes s'avèrent capable de fournir plus ou moins aisément et de manière exhaustive, des informations sur cette incertitude. La méthode par bootstrap par exemple, produit des résultats bien plus complets puisqu'elle donne une vision de la distribution des $CDR(I+1)$.

Enfin, nous avons abordé la problématique de l'inflation et son impact sur l'incertitude. La prise en compte de l'effet calendaire inflationniste tend, comme nous l'avons illustré, à réduire cette incertitude.

Finalement, bien qu'il soit possible de mesurer l'adéquation d'un modèle particulier au triangle étudié, il serait prétentieux de conclure que telle ou telle méthode paraît la plus appropriée au provisionnement non-vie et dans le cadre de la directive Solvabilité 2, du fait que le choix ne repose pas simplement sur l'estimation des réserves ou le calcul de l'incertitude. Tout d'abord il faut évidemment vérifier que les hypothèses sous-jacentes d'un modèle sont respectées. De plus, les caractéristiques différentes des branches d'assurance (comme la longueur ou le comportement du déroulement), la politique suivie par l'assureur, ou encore l'appétance au risque, sont

autant de facteurs qui font que les situations diffèrent, et qu'un provisionnement ne puisse pas s'imposer plutôt qu'un autre.

En guise de piste de développement, il serait possible de se pencher sur la question du choix du seuil délimitant les grands sinistres des petits sinistres. Ce seuil est important et a une veritable influence : il sert à construire les triangles et est donc structurant. Cependant, son choix est aujourd'hui souvent arbitraire. Il pourrait donc être intéressant de chercher à déterminer un seuil optimal permettant d'obtenir des triangles dans lesquels les méthodes de provisionnement à employer se démarqueraient plus aisément.

5 Bibliographie

AISAM-ACME [2007] Study on non-life long tail liabilities : Reserve risk and risk margin assessment under solvency II, Version 17 October 2007.

ASTESAN E. [1938] Les réserves techniques des sociétés d'assurance contre les accidents d'automobiles, thèse de droit.

BENETEAU G. [2004] Modèle de provisionnement sur données détaillées en assurance non-vie, Mémoire d'actuariat, ENSAE.

BENJAMIN S, EAGLES L.M. [1986] Reserves in Lloyd's and the London Market, Journal of the Institute of Actuaries 113 : 197-256.

CHARPENTIER A. [2010] Statistiques de l'Assurance, partie 1 - assurance non-vie tarifcation et provisionnement, Cours des universités de Rennes et Montréal.

CHARPENTIER A. , DEVINEAU L. , NESSI J.M. [2010] Mesurer le risque lors du calcul des provisions pour sinistres à payer, Risques, Les cahiers de l'assurance n°83.

Commission Européenne [2002] Les provisions techniques en assurance non-vie au sous-comité solvabilité du CA, Septembre 2002, Commission européenne.

DAVIDOV D. [2009] Modélisation de la variance dans l'analyse stochastique du passif des polices, Mémoire, Université du Québec.

DENUIT M. , CHARPENTIER A. [2005] Mathématiques de l'assurance non-vie - Tome 2, Tarification et provisionnement, Economica.

DE VYLDER F. [1978] Estimation of IBNR claims by least squares, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 78, 249-254.

DIERS D. [2007] Stochastic re-reserving in multi-year internal model - an approach based on simulations, ASTIN Colloquium Helsinki.

JAZIRI S. [2011] Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire d'actuariat, ISFA.

LACOUME A. [2008] Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an, Mémoire d'actuariat, ISFA.

LUZI M. [2007] Assurance IARD, interprétation des chiffres, Economica.

MACK T. [1993] Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates.

GESMANN M., ZHANG Y. [2011]. ChainLadder : Mack, bootstrap, Munich and Multivariate-chain-ladder Methods. R package version 0.1.4-3.4.

MERZ M. , WÜTHRICH M.V. [2008] Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes, CASACT.

OHLSSON E., LAUZENINGKS J. [2009] The one-year non-life insurance risk, Insurance : Mathematics and Economics.

PARTRAT C. ; LECOEUR E. ; NESSI J.-M. ; NISIPASU E. ; REIZ O. [2007] Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica.

PITREBOIS S., DENUIT M., DE LONGUEVILLE P. WALHIN J.F. [2002] Etude de techniques IBNR modernes. ACTU-L ,2, 29-62.

RENSHAW A.E. , VERRALL R.J. [1998] A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique, British Actuarial Journal, Volume 4, Issue 04, pp 903-923.

SCHMIDT K.D. [2003] Modèles et Méthodes de Réservation, Cours de l'université de Strasbourg.

STRAUB E. [1988] Non-life insurance mathematics, Springer Verlag .

WÜTHRICH M.V. , MERZ M. et LYSENKO N. [2008] Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method, Scandinavian Actuarial Journal.

Annexe A : Triangle RC Automobile utilisé lors de l'étude

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2 554 368	10 671 566	15 275 057	17 326 685	18 552 093	19 883 656	20 554 320	20 697 774	20 764 341
1	4 189 931	13 364 857	20 313 611	23 964 839	28 964 631	30 147 030	33 161 255	33 504 877	34 352 096
2	3 574 458	13 099 576	18 393 003	23 361 381	25 017 362	27 580 611	28 291 764	28 880 363	29 809 519
3	3 318 630	12 384 314	19 377 638	22 996 402	25 241 564	26 306 520	27 540 437	28 350 455	28 491 329
4	3 298 244	11 848 687	16 627 598	22 055 236	24 325 960	27 251 261	30 888 036	28 859 364	32 011 561
5	3 309 182	11 952 897	17 919 746	24 214 504	30 686 833	32 850 233	33 567 039	33 938 976	34 261 475
6	2 810 424	13 985 177	20 854 509	24 141 083	25 915 377	28 014 062	32 551 433	35 785 803	36 722 530
7	3 598 963	14 766 757	22 388 036	26 336 821	27 623 835	29 641 410	30 309 766	31 202 954	32 040 285
8	4 242 628	15 995 291	24 449 956	27 422 123	29 788 653	31 526 560	32 974 109	33 863 629	
9	3 527 765	16 245 573	23 581 244	31 043 216	35 313 736	36 904 586	39 320 336		
10	4 259 160	19 988 762	29 259 576	35 441 339	43 509 711	46 297 193			
11	4 610 101	19 631 332	28 248 764	33 683 319	39 902 304				
12	5 454 236	23 318 708	36 312 125	48 322 808					
13	6 143 400	25 050 143	37 055 657						
14	4 570 299	19 174 866							
15	5 324 265								

	9	10	11	12	13	14	15
0	20 998 410	21 053 285	21 363 410	21 365 510	21 367 720	21 382 240	21 382 240
1	34427485	34516045	34584861	34663937	35506599	36482343	
2	30 026 624	30 255 197	30 471 988	30 768 169	31 519 401		
3	28 673 021	28 742 499	28 931 882	29 059 635			
4	32 044 278	32 078 452	32 277 882				
5	34 334 067	34 546 014					
6	37 508 510						
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

TABLE 29 – Triangle de développement (paiements cumulés $C_{i,j}$) aux dates I=15 et I=16

Annexe B : Vérification de l'hypothèse de proportionalité des $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$

L'hypothèse de proportionalité entre les paiements cumulés d'une année de survenance à l'autre est une des principales hypothèses dans plusieurs modèles tels que Chain-Ladder, London-Chain, ou encore Mack.

Les figures ci-dessous permettent de déterminer graphiquement si les $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ semblent alignés sur une droite d'une part, et si cette droite passe par l'origine d'autre part. Ce type de figure a été réalisé dans le corps du mémoire pour la branche RC Automobile, section 2.1.1. Nous présentons ici les résultats pour les trois autres branches d'assurance étudiées : la RC Médicale, la RC Décennale et le Dommage Automobile.

Comme expliqué dans la section 2.1.2.A, il est préférable d'accompagner ce type de graphique d'un test permettant de déterminer si ces points sont alignés ou non avec l'origine. Il s'agit simplement d'un test de significativité de la constante dans la régression des $C_{i,j+1}$ sur les $C_{i,j}$ (que l'on a noté $\hat{a}_k^{LC}$). Les résultats des tests sont dans les tableaux ci-dessous [3].

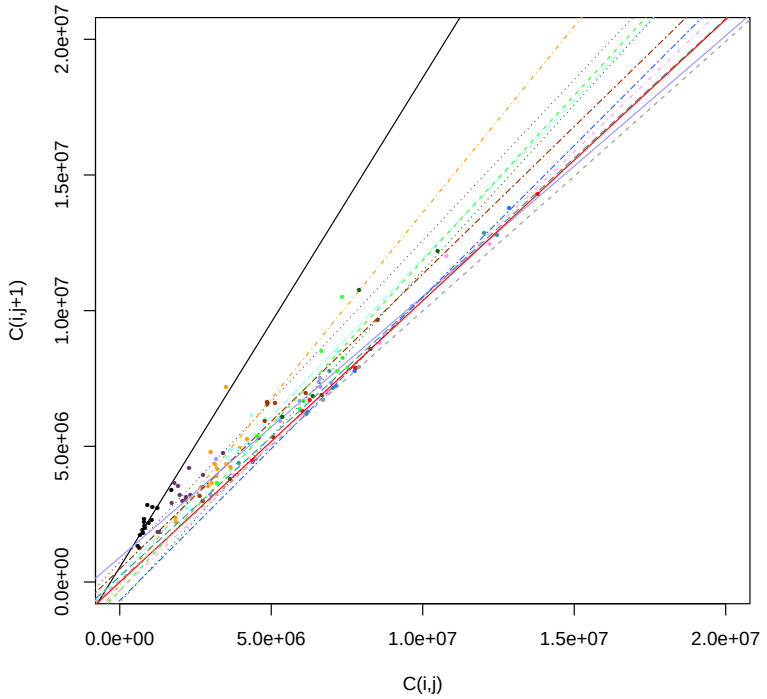


FIGURE 17 – Droite de régression, points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ pour $i \in 1, ..., J-1$, **Branche RC Médicale**

[3]codes de significativité : 0 "***" 0.001 "**" 0.01 "*" 0.05 "•" 0.1 "×" 1

	$\hat{a}_0^{LC}$	$\hat{a}_1^{LC}$	$\hat{a}_2^{LC}$	$\hat{a}_3^{LC}$	$\hat{a}_4^{LC}$	$\hat{a}_5^{LC}$	$\hat{a}_6^{LC}$
Significativité	•	×	×	×	×	*	×
	$\hat{a}_7^{LC}$	$\hat{a}_8^{LC}$	$\hat{a}_9^{LC}$	$\hat{a}_{10}^{LC}$	$\hat{a}_{11}^{LC}$	$\hat{a}_{13}^{LC}$	$\hat{a}_{14}^{LC}$
Significativité	×	×	×	•	×	×	×

TABLE 30 – *p-values* du test de significativé de la constante, **Branche RC Médicale**

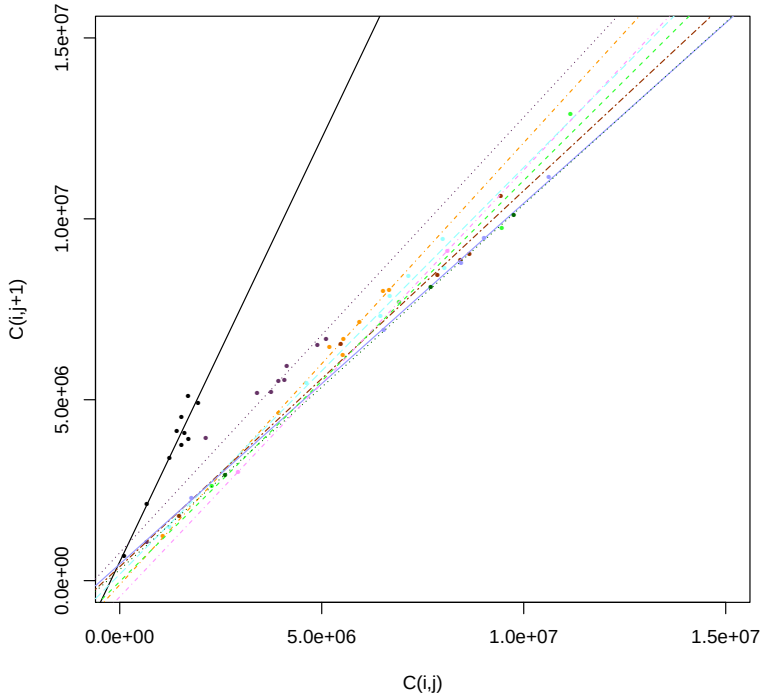


FIGURE 18 – Droite de régression, points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ pour $i \in 1, ..., J-1$, **Branche RC Décennale**

	$\hat{a}_0^{LC}$	$\hat{a}_1^{LC}$	$\hat{a}_2^{LC}$	$\hat{a}_3^{LC}$	$\hat{a}_4^{LC}$	$\hat{a}_5^{LC}$	$\hat{a}_6^{LC}$	$\hat{a}_7^{LC}$
Significativité	×	×	×	×	×	×	×	×
	$\hat{a}_8^{LC}$	$\hat{a}_9^{LC}$	$\hat{a}_{10}^{LC}$	$\hat{a}_{11}^{LC}$	$\hat{a}_{13}^{LC}$	$\hat{a}_{14}^{LC}$	$\hat{a}_{15}^{LC}$	$\hat{a}_{16}^{LC}$
Significativité	×	×	×	×	×	×	×	×

TABLE 31 – *p-values* du test de significativé de la constante, **Branche RC Décennale**

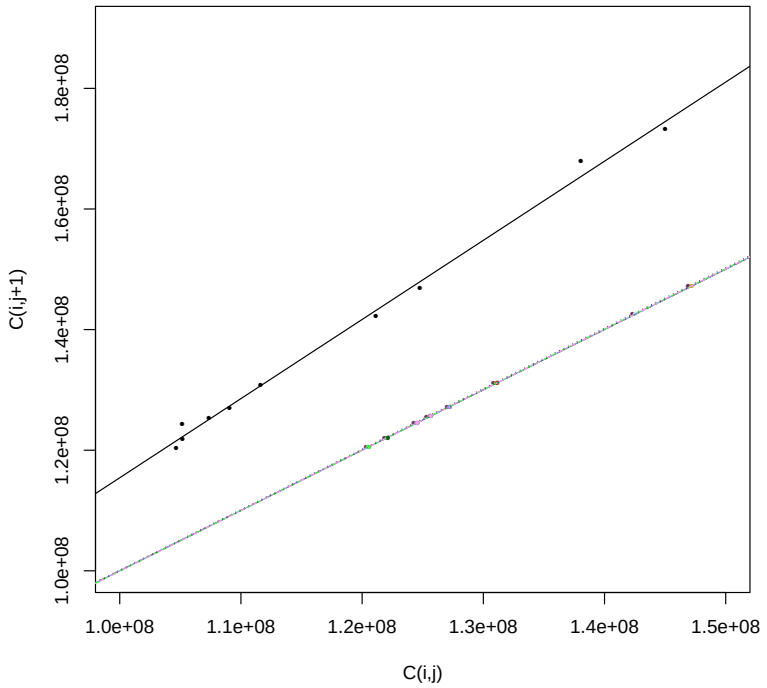


FIGURE 19 – Droite de régression, points $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ pour $i \in 1, ..., J-1$, **Branche Dommage Automobile**

	$\hat{a}_0^{LC}$	$\hat{a}_1^{LC}$	$\hat{a}_2^{LC}$	$\hat{a}_3^{LC}$	$\hat{a}_4^{LC}$	$\hat{a}_5^{LC}$	$\hat{a}_6^{LC}$	$\hat{a}_7^{LC}$
Significativité	$\times$	***	***	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	$\hat{a}_8^{LC}$	$\hat{a}_9^{LC}$	$\hat{a}_{10}^{LC}$	$\hat{a}_{11}^{LC}$	$\hat{a}_{13}^{LC}$	$\hat{a}_{14}^{LC}$	$\hat{a}_{15}^{LC}$	$\hat{a}_{16}^{LC}$
Significativité	$\times$	$\times$	*	$\times$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$

TABLE 32 – *p-values* du test de significativé de la constante, **Branche RC Décennale**

Finalement, les résultats montrent que dans ces triangles issus de trois branches d'assurance différentes, l'hypothèse de proportionalité paraît vérifiée. De plus, le fait que les constantes soient de manière générale très peu significatives laisse penser que l'alignement avec l'origine est également vérifié.

Annexe C : Extrapolation des coefficients de Chain-Ladder

Cette annexe constitue simplement une justification graphique à l'utilisation d'une extrapolation exponentielle pour les coefficients de Chain-Ladder lors de la gestion des liquidations incomplétes. On peut voir dans le graphique ci-dessous que la représentation graphique des $(\hat{F}_k)_k$ en fonction des années de survenance est proche de l'allure d'une fonction "inverse exponentielle".

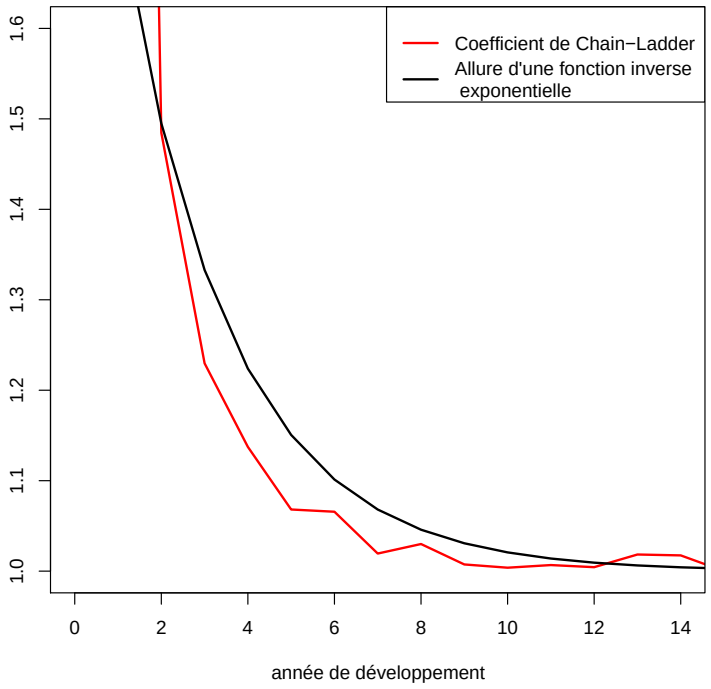


FIGURE 20 – Coefficients de Chain-Ladder et fonction "inverse exponentielle"

De plus, en passant au logarithme, on peut voir sur la figure ci-dessous qu'il y a bien une tendance linéaire de l'évolution des $ln(\hat{F}_k - 1)$ en fonction des années de survenance.

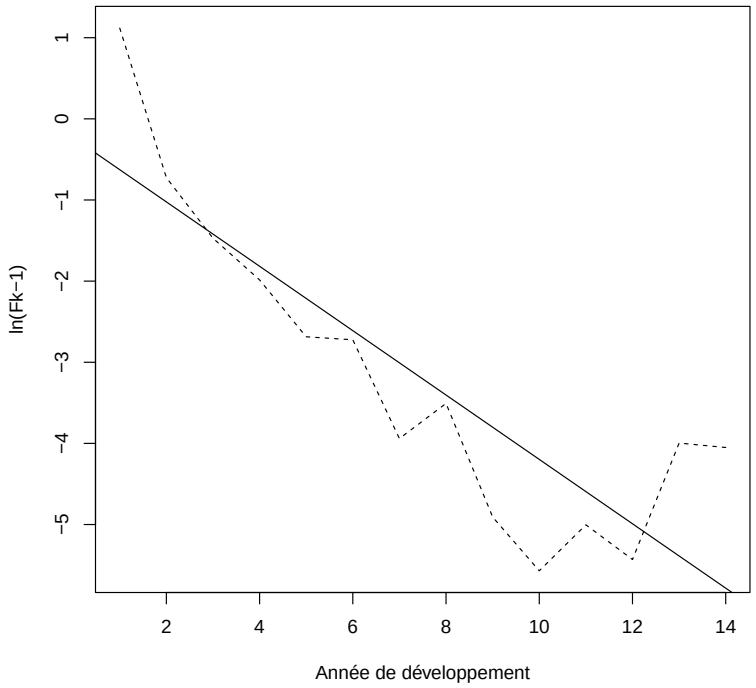


FIGURE 21 – Tendance linéaire des $ln(\hat{F}_k - 1)$

Finalement, il semble donc convenable d'extrapoler les coefficients de Chain-Ladder par une fonction "inverse exponentielle" ; ceci permettant en plus de déterminer les paramètres de la fonction d'extrapolation par les moindres carrés ordinaires.

Annexe D : Comparaison des mesures d'incertitudes

Nous allons montré ici que dans le cadre du modèle de Mack, on a :

$$mse(\hat{R}_i) \geq mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)$$

On rappelle que :

$$mse(\hat{R}_i) = Var(C_{i,J}|\mathcal{D}_I) + (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \hat{C}_{i,J})^2$$

Et :

$$\begin{aligned} mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= Var(CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I) \\ &= Var\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]|\mathcal{D}_I\right) \text{ par définition du } CDR \\ &= Var\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]\right) \text{ car } \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] \text{ est } \mathcal{D}_I \text{ mesurable} \end{aligned}$$

Pour simplifier la suite des calculs, on pose :

$$X_m = \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_m], \text{ avec } m \in \{I, I+1\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= Var(C_{i,J}|\mathcal{D}_I) + (X_I - \hat{C}_{i,J})^2 - Var\left(X_{I+1}|\mathcal{D}_I\right) \\ &= \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I])^2 + (X_I - \hat{C}_{i,J})^2 \\ &\quad -\mathbb{E}[X_{I+1}^2|\mathcal{D}_I] + (\mathbb{E}[X_{I+1}|\mathcal{D}_I])^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } (\mathbb{E}[X_{I+1}|\mathcal{D}_I])^2 &= (\mathbb{E}[\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]|\mathcal{D}_I])^2 \\ &= (\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I])^2 \text{ par le théorème d'emboîtement, avec } \mathcal{D}_I \subset \mathcal{D}_{I+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] + (X_I - \hat{C}_{i,J})^2 - \mathbb{E}[X_{I+1}^2|\mathcal{D}_I] \\ &= (X_I - \hat{C}_{i,J})^2 + \mathbb{E}[C_{i,J}^2 - X_{I+1}^2|\mathcal{D}_I] \end{aligned}$$

Notons A l'erreur d'estimation $(X_I - \hat{C}_{i,J})^2$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= A + \mathbb{E}\left(C_{i,J}^2 - \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]^2|\mathcal{D}_I\right) \\ &= A + \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]^2|\mathcal{D}_I\right) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &\geq A + \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_{I+1}]|\mathcal{D}_I] \\ &\geq A + \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] \\ &\geq A \geq 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &\leq A + \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+1}]|\mathcal{D}_I]^2 \\ &\leq A + \mathbb{E}[C_{i,J}^2|\mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,J}|\mathcal{D}_I]^2 \\ &\leq A + Var(C_{i,J}|\mathcal{D}_I) \end{aligned}$$

Nous avons l'encadrement suivant :

$$(mse(\hat{R}_i) - mse_{CDR_i(I+1)}(0)) \in [A; A + Var(C_{i,J}|\mathcal{D}_I)]$$

Annexe E : Exemple d'un triangle pour lequel l'incertitude à un an est supérieure à l'incertitude à l'ultime

Dans cette annexe, nous présenterons les résultats obtenus dans le triangle évoqué dans la section 3.4 pour lequel l'incertitude à un an est supérieure à l'incertitude à l'ultime.

Le triangle est le suivant :

	0	1	2	3	4	5	6
0	10	40 120	17 263	18 163	17 564	17 611	17 750
1	6 049	10 138	16 022	16 505	16 300	16 017	
2	103	521	16	15 109	15 109		
3	9 958	12 926	15 133	15 500			
4	4 888	4 002	19 534				
5	9 687	12 100					
6	10 108						

TABLE 33 – Triangle des paiements cumulés $C_{i,j}$ pour lequel l'incertitude à un an est supérieure à l'incertitude à l'ultime

La représentation de son déroulement est le suivant :

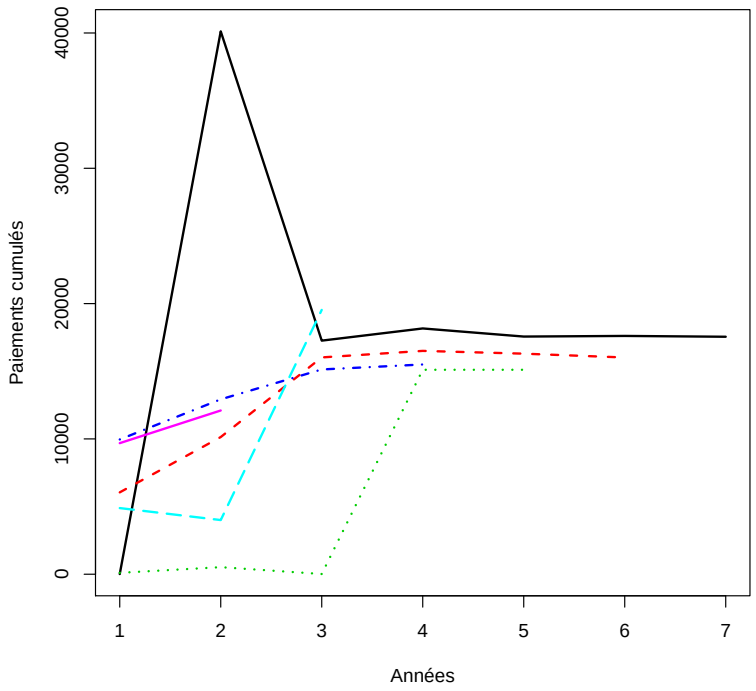


FIGURE 22 – Déroulement d'un triangle pour lequel l'incertitude à un an est supérieure à l'incertitude à l'ultime

On obtient pour ce triangle les résultats suivants concernant les volatilités :

i	$MSE_{Mack}^{1/2}$	$\widehat{Var}(CDR_i(I+1)\|\mathcal{D}_I)^{1/2}$	$mse_{\widehat{CDR}}^{1/2}(0)$		$mse_{CDR}^{1/2}(\widehat{CDR})$	
			Approchée	Exacte	Approchée	Exacte
0	0	0	0	0	0	0
1	275	199	275	297	189	189
2	377	225	297	297	194	194
3	486	265	339	339	210	210
4	351 094	296 378	351 093	351 103	188 220	188 237
5	262 288	20 102	66 431	94 213	63 317	92 044
6	966 590	751 046	876 610	2 692 028	452 078	2 585 139
Total	1 151 491	807 660	1 026 301	2 745 775	548 749.51	2 603 723

Table 34 – Volatilités des estimateurs