

Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Léo Tondolo

Titre : **Quantification de l'impact des erreurs opérationnelles sur les variables d'entrée d'un outil de calcul et de reporting Solvabilité 2 : approche par analyse de sensibilité**

Confidentialité : NON (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de Signature
l'Institut des Actuaires*

.....

.....

.....

*Membres présents du jury de
l'ISFA*

.....

.....

.....

Entreprise : **MILLIMAN SAS**
Nom : *Milliman* Avenue de la Grande Armée
75017 PARIS
Signature : Tél. : +33 1 42 99 15 60
SIREN : 501 636 534

*Directeurs de mémoire en entre-
prise :*

Noms : A. Boumezoued et A. Lasry

Signatures : 

Invité :

Nom :

Signature : 

**Autorisation de publication et
de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actua-
riels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES



Quantification de l'impact des erreurs opérationnelles sur les variables d'entrée d'un outil de calcul et de reporting Solvabilité 2 : approche par analyse de sensibilité

Auteur :
Léo TONDOLO

Tuteurs entreprise :
Alexandre BOUMEZOUED
Alexandre LASRY
Tuteur académique :
Stéphane LOISEL

1^{er} septembre 2019

Résumé

Mots clés : Analyse de sensibilité, indices de Sobol, indices de Shapley, méthode Delta, erreurs opérationnelles, variables d'entrée dépendantes, Solvabilité 2.

Les compagnies d'assurance et de réassurance sont soumises au cadre réglementaire de la directive européenne Solvabilité 2. Elles doivent alors déterminer plusieurs montants économiques devant être calculés de la manière la plus juste possible. Les modèles permettant de les obtenir sont plus ou moins complexes et nécessitent de nombreuses variables d'entrée ainsi qu'un temps de calcul important. De ce fait, les erreurs opérationnelles doivent être proscrites des variables d'entrée.

Nous chercherons dans ce mémoire à déterminer comment l'incertitude totale d'un modèle peut être répartie entre les incertitudes des différentes variables d'entrée. Ce processus correspond à ce que nous appelons l'analyse de sensibilité. Dans ce domaine, nous nous pencherons sur des méthodes reposant sur la décomposition de la variance. Ainsi, nous aborderons les indices de Sobol et particulièrement deux estimateurs associés que nous confronterons. Cependant, ces indices souffrent d'un problème d'interprétabilité lorsque nous intégrons la contrainte opérationnelle de la dépendance entre nos variables d'entrée. Afin de la prendre en considération, nous nous intéresserons aux indices de Shapley. Ceux-ci proviennent de la théorie des jeux coopératifs et sont généralement utilisés en actuariat dans le cadre d'une problématique d'allocation de capitaux. Nous présenterons également les principes de la méthode Delta qui permet d'approximer la variance d'un modèle en dimension quelconque. Nous l'appliquerons notamment pour obtenir une approximation des indices de Sobol.

Enfin, nous aborderons les avantages et les inconvénients de chacune des approches présentées. En particulier, nous nous baserons sur la qualité de l'estimation des coefficients de sensibilité et le temps calculatoire associé. Il sera également question d'apporter une méthode de génération des nombres aléatoires améliorant l'échantillonnage effectué et ainsi la précision des estimateurs pour un nombre égal de simulations.

Abstract

Key words : Sensitivity analysis, Sobol indices, Shapley indices, Delta method, operational errors, dependent input variables, Solvency 2.

Insurance and reinsurance companies are subject to the regulatory framework of the European Solvency 2 Directive. They must then determine several economic amounts that must be calculated as fairly as possible. The models used to obtain them are more or less complex and require many input variables as well as a significant computation time. As a result, operational errors must be avoided in the input variables.

In this paper, we will attempt to determine how the total uncertainty of a model can be distributed among the uncertainties of the different input variables. This process corresponds to what we call sensitivity analysis. In this area, we will focus on methods based on variance decomposition. Thus, we will discuss the Sobol indices and particularly two associated estimators that we will compare. However, these indices suffer from an interpretability problem when we integrate the operational constraint of dependence between our input variables. In order to take it into consideration, we will focus on Shapley's indices. These come from cooperative game theory and are generally used in actuarial science to address capital allocation issues. We will also present the principles of the Delta method, which allows us to approximate the variance of a model in any dimension. We will apply it in particular to obtain an approximation of the Sobol indices.

Finally, we will discuss the advantages and disadvantages of each of the approaches presented. In particular, we will be concerned by the quality of the estimation of sensitivity coefficients and the associated computational time. It will also be necessary to provide a method for generating random numbers that improves the sampling performed and thus the accuracy of the estimators for an equal number of simulations.

Note de synthèse

Contextualisation

Le contexte assurantiel actuel, notamment gouverné par la directive européenne Solvabilité 2, impose des contraintes strictes aux compagnies d'assurance et de réassurance. Celles-ci ont l'obligation de respecter un ensemble d'exigences réglementaires telles que celles quantitatives. Parmi ces dernières, nous retrouvons principalement le capital de solvabilité requis ou *Solvency Capital Requirement (SCR)* pour sa version anglaise. Il représente le capital qu'une entreprise d'assurance a besoin pour limiter à 0,5% sa probabilité de ruine à horizon un an. Dans le cadre de Solvabilité 2, le *SCR* est calculé selon une agrégation de capitaux économiques évalués pour l'ensemble des risques de la réglementation. Les compagnies d'assurance et de réassurance ont également une exigence de fonds propres. Ce sont les ressources financières que l'entreprise possède et qui doivent au minimum couvrir le besoin en solvabilité. Le rapport des fonds propres sur le capital de solvabilité requis (*SCR*) définit la notion fondamentale de la norme Solvabilité 2 qui est le ratio de solvabilité. Ce dernier est crucial. Il représente un indicateur de la bonne santé économique de l'entreprise, il permet une certaine gestion et il est également analysé par les réassureurs à des fins de tarification. Ainsi, il est impératif de déterminer l'ensemble de ces montants économiques de la manière la plus juste possible.

Motivations et problématiques

De nombreux logiciels ont vu le jour ces dernières années afin de répondre aux besoins du marché concernant la norme Solvabilité 2. En effet, ils permettent d'automatiser les calculs en réduisant leur temps au maximum. De plus, un certain nombre de contrôles sont implémentés, permettant d'éviter des erreurs dans les modèles. Cependant, lorsque nous souhaitons estimer les valeurs des capitaux économiques le plus précisément possible, nous faisons face à diverses problématiques. La première est que nous devons parfois utiliser des approximations ou des approches par simulation pour calculer les montants économiques. Cela implique que nous introduisons une erreur intrinsèque aux estimations des variables d'entrée dans notre modèle. Par conséquent, la variable de sortie sera impactée par ces erreurs en entrée. Nous ne pouvons pas l'éviter, par contre nous devons nous assurer que cette erreur d'estimation ne soit pas trop importante. Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés sur les erreurs opérationnelles présentes au niveau des variables d'entrée et que nous pouvons contrecarrer. Cela est dû au fait que, dans la majorité des cas, les montants des variables d'entrée du modèle sont remplis à la main dans des fichiers plats. Ainsi, de nombreuses erreurs opérationnelles surviennent. Effectivement, qui n'a jamais remplacé un chiffre par un autre en recopiant un nombre ? Qui n'a jamais tapé deux fois sur la même touche ou sur une autre touche de son clavier ? Qui n'a jamais confondu deux versions d'un même fichier en envoyant un mail ou en important des données ? Toutes ces situations font partie de notre quotidien. Elles peuvent avoir des conséquences considérables sur la variable de sortie d'un modèle. La fluctuation de la variable réponse est plus ou moins importante selon l'erreur effectuée mais également selon la variable d'entrée impactée. Il est alors naturel de nous demander comment déterminer les variables d'entrée qui impactent le plus l'incertitude totale du modèle ?

Cette étude est rendue complexe par le phénomène de corrélation qui existe entre les erreurs sur les variables d'entrée. Cela s'explique par le fait que les variables d'entrée proviennent de plusieurs modules de calcul en amont du notre. De ce fait, si un de ces modules est défaillant et retourne des montants erronés, il est logique de considérer que l'ensemble des variables de sortie seront contaminées de la même façon. Ainsi, nous voyons bien apparaître la dépendance entre les erreurs opérationnelles dans nos variables d'entrée. Nous pouvons donc nous demander comment modéliser les erreurs opérationnelles et l'interaction entre celles-ci ?

Analyse de sensibilité

Afin de répondre à nos différentes problématiques, nous nous sommes basés sur l'analyse de sensibilité. Elle représente l'étude qui cherche à identifier comment l'incertitude de la variable de sortie peut être répartie entre les différentes sources d'incertitude des variables d'entrée du modèle. De nombreuses méthodes ont été développées dans ce contexte. Dans ce mémoire, nous avons pris le parti de nous tourner vers des méthodes d'analyse de sensibilité par décomposition de la variance. Nous y intégrons également la modélisation de la structure de dépendance entre les variables d'entrée. Pour cela, nous nous reposons sur l'hypothèse que notre vecteur aléatoire est gaussien. La construction théorique des différentes méthodes dans le cadre de dépendance des variables d'entrée sera détaillée dans ce papier, notamment dans le Chapitre 3, mais nous en donnons les principaux tenants ci-dessous.

- **Indices de Sobol** : La première méthode retenue est celle introduite par Sobol (1993) et qui est connue sous le nom des indices de Sobol. Considérons que nos variables d'entrée sont représentées par le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ et que la sortie de notre modèle est $Y = f(\mathbf{X})$. Sous ces notations, l'indice de Sobol d'ordre 1 mesurant la part de variabilité de la sortie du modèle en fonction de la variabilité de la variable d'entrée X_i est donné par

$$S_i = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[Y|X_i]]}{\text{Var}[Y]}.$$

Nous avons mis en place deux approches différentes pour estimer numériquement les indices de Sobol de l'ensemble de nos variables d'entrée.

- **Approche brutale** : Elle tire son nom du fait que nous nous basons sur l'écriture directe de l'indice de Sobol pour dériver l'estimateur. Ce dernier nécessite deux boucles de *Monte-Carlo* pour être déterminé. Cela implique que nous devons générer un grand nombre de simulations afin que l'estimateur converge correctement. Dans le but de contrecarrer cette problématique, nous nous sommes tournés vers une seconde approche.
- **Approche alternative** : Après réécriture de l'indice de Sobol, nous sommes en mesure de proposer un estimateur qui nécessite une seule boucle de *Monte-Carlo*. Toutefois, pour chaque simulation, nous devons générer deux copies indépendantes du vecteur aléatoire des variables d'entrée. La conséquence est une importante augmentation du temps de calcul par rapport à l'approche brutale.

Rappelons que nous avons une contrainte opérationnelle de modélisation de la dépendance entre les erreurs des différentes variables d'entrée. Dans ce cadre, la somme des indices

de Sobol n'est plus égale à un. Ils ne sont alors plus convenablement interprétables. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés aux indices de Shapley.

- **Indices de Shapley** : Ils doivent leur origine aux travaux de [Shapley \(1953\)](#) sur la théorie des jeux coopératifs. C'est ensuite [Owen \(2014\)](#) qui adapte ces résultats en analyse de sensibilité en exhibant une fonction de coût particulière que nous retiendrons dans ce mémoire. Sous les mêmes notations que précédemment et en supposant que $-\{i\}$ correspond à l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, n\}$ ne contenant pas i , nous définissons l'indice de Shapley d'une variable d'entrée X_i comme

$$Sh_i = \frac{1}{n} \sum_{u \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} \left[\frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{u \cup \{i\}}]]}{\text{Var} [Y]} - \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_u]]}{\text{Var} [Y]} \right].$$

Il représente la valeur moyenne de la part d'incertitude du modèle $Y = f(\mathbf{X})$ associée à la connaissance supplémentaire de X_i , sachant que nous connaissons déjà $s = |u|$ autres variables d'un ensemble de n variables d'entrée. L'enjeu opérationnel de l'estimation des indices de Shapley est qu'ils nécessitent de simuler exactement les $n!$ permutations de l'ensemble des n variables d'entrée, sans compter le temps de calcul des fonctions de coût. Lorsque nous sommes en grande dimension, ce qui est le cas en pratique, cela devient impossible. Nous proposons alors dans ce mémoire un algorithme permettant d'accélérer les calculs et de converger en un temps polynomial. L'avantage par rapport aux indices de Sobol est que ceux de Shapley restent interprétables, qu'il y ait une structure de dépendance ou non, car ils sont toujours à un par construction.

- **Méthode Delta** : Cette dernière méthode ne relève pas de l'analyse de sensibilité mais donne un cadre d'approximation de la variance d'une fonction prenant en paramètre une variable aléatoire. Nous appliquerons cette approximation pour le calcul des indices de Sobol du modèle d'agrégation des capitaux économiques des différents modules de risques de Solvabilité 2, à savoir le *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)*.

Applications numériques

Dans un premier temps, nous avons confronté deux méthodes de génération des nombres aléatoires. La première correspond à la génération des nombres de manière pseudo-aléatoire. Il s'agit en fait de la méthode couramment utilisée, consistant à utiliser la loi uniforme. La seconde approche se base sur la volonté d'améliorer la qualité de la distribution des nombres aléatoires générés. Elle repose sur des suites de nombres quasi-aléatoires appelées suites à discrédance faible. Elles permettent notamment de réduire l'erreur d'estimation par *Monte-Carlo* tout en simulant exactement le même nombre de scénarios. Nous appellerons alors cette approche la méthode de *Quasi-Monte-Carlo* (QMC). Dans ce mémoire, nous avons retenu la suite à discrédance faible la plus populaire en finance qui est celle de Sobol. Nous démontrerons théoriquement et graphiquement comment la génération quasi-aléatoire est plus performante que celle pseudo-aléatoire. Ainsi, nous retiendrons la méthode QMC pour nos applications numériques.

Concernant les indices Sobol, deux approches ont été retenues pour les estimateurs : l'approche brutale et l'approche alternative. Nous avons mentionné le fait que l'approche alternative nécessitait un temps de calcul supérieur à l'approche brutale. Nous allons maintenant voir comment les indices de Sobol se comportent selon le type de fonction utilisé. Pour cela, nous avons

représenté les deux graphiques ci-dessous. Ils reprennent les valeurs retournées par nos algorithmes pour les indices de Sobol dans le cadre de la fonction linéaire et de la fonction *BSCR* en fonction du nombre de simulations.

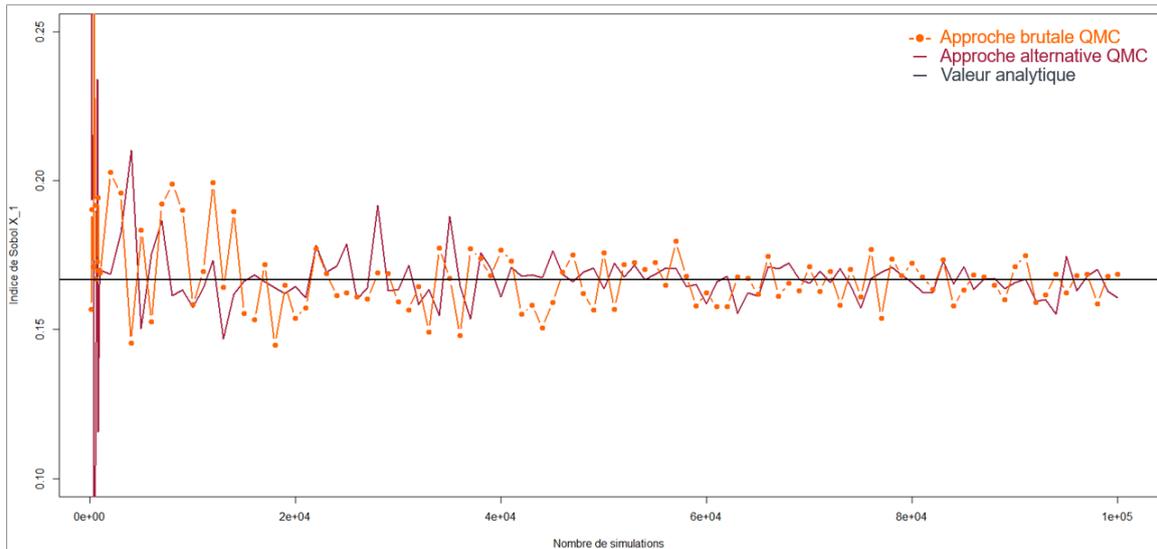


FIGURE 1 – Comparaison convergence approches brutale et alternative - linéaire

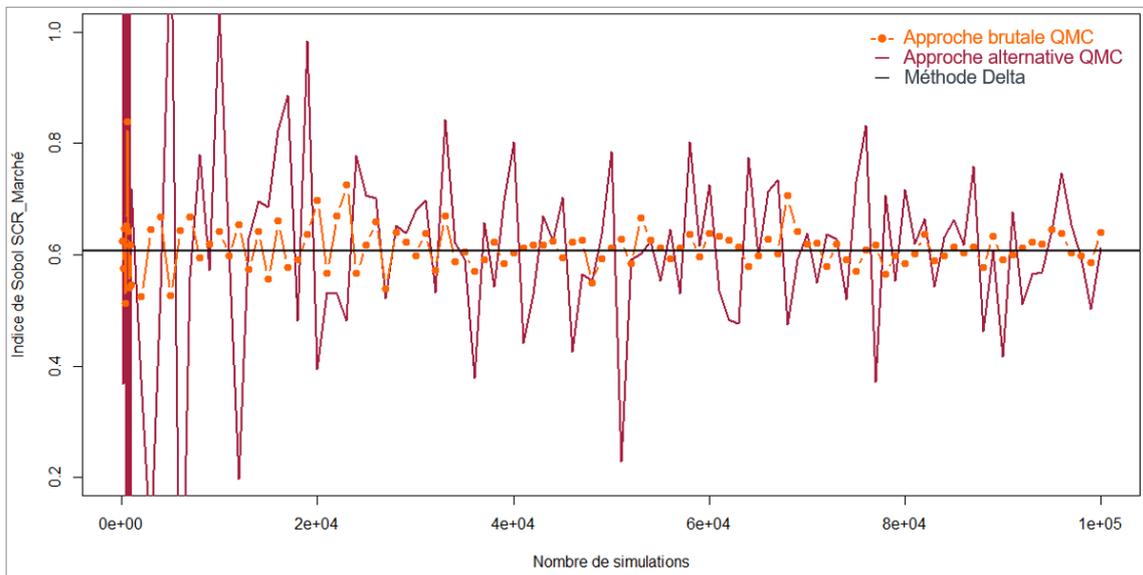


FIGURE 2 – Comparaison convergence approches brutale et alternative - *BSCR*

Nous constatons que l'approche alternative améliore l'estimation des indices de Sobol pour la fonction linéaire. Cependant, dès que nous nous éloignons de la linéarité, comme c'est le cas pour l'agrégation Formule standard, l'approche brutale est meilleure. De plus, nous notons que l'approche alternative ne semble plus converger. Par conséquent, nous préférons utiliser l'approche brutale dans notre étude.

Intéressons-nous pour finir à la comparaison entre les indices de Sobol et de Shapley dans le cadre de dépendance. Le tableau ci-après résume les valeurs des différents indices du modèle *BSCR* lorsque nous avons introduit un coefficient de corrélation de 0,5 entre la variable d'entrée *SCR* santé et celles vie et non-vie.

| <i>SCR</i> | Valeur | Indice de Sobol | IC Sobol | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|--------|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| Marché | 35 | 0.572 | [0.572, 0.576] | 0.594 | [0.594, 0.594] |
| Défaut | 14 | 0.0564 | [0.0562, 0.0564] | 0.0589 | [0.0588, 0.0590] |
| Vie | 27 | 0.220 | [0.220, 0.221] | 0.172 | [0.171, 0.172] |
| Non-vie | 21 | 0.115 | [0.115, 0.115] | 0.0823 | [0.0820, 0.0826] |
| Santé | 3 | 0.184 | [0.184, 0.185] | 0.0936 | [0.0928, 0.0935] |

TABLE 1 – **Comparaison indices de Sobol et de Shapley - *BSCR* - Dépendance**

Comme nous l'avons constaté plus haut, il résulte de ce tableau qu'à l'inverse des indices de Shapley, les indices de Sobol ne somment plus à un. Par soucis d'interprétabilité, nous retiendrons les indices de Shapley pour les applications aux fonctions *SCR* et ratio de solvabilité dont nous pouvons trouver les résultats en Annexes [C](#) et [D](#).

Executive summary

Contextualisation

The current insurance environment, particularly governed by the European Solvency 2 Directive, imposes strict constraints on insurance and reinsurance companies. They are required to comply with a set of regulatory requirements such as quantitative requirements. Among the latter, we find mainly the Solvency Capital Requirement (*SCR*). It represents the capital that an insurance company needs to limit its probability of ruin to 0.5% over one year. In Solvency 2, the *SCR* is calculated according to an aggregation of economic capital assessed for all regulatory risks. Insurance and reinsurance companies also have a capital requirement. These are the financial resources that the company has and which must at least cover the need for solvency. The ratio of own funds over the Solvency Capital Requirement defines the fundamental concept of Solvency 2, which is the solvency ratio. The latter is crucial. It is an indicator of the company's economic health, allows for some management and is also analyzed by reinsurers for pricing purposes. Thus, it is imperative to determine all these economic amounts in the fairest way possible.

Motivations and issues

Many software products have been developed in recent years to meet the market's needs for Solvency 2. Indeed, they allow to automate the calculations by reducing their time as much as possible. In addition, a number of controls are implemented to avoid errors in the models. However, when we want to estimate the values of economic capitals as fairly as possible, we face various problems. The first is that we sometimes have to use approximations or simulation approaches to calculate economic amounts. This implies that we introduce an intrinsic error in the estimates of the input variables into our model. Therefore, the output variable will be impacted by these input errors. We cannot avoid it, but we must ensure that this error of estimation is not too large. In this paper, we focused on operational errors in the input variables that we can counteract. This is because, in most cases, the amounts of the model input variables are filled manually in flat files. As a result, many operational errors occur. Indeed, who has never replaced one figure with another by copying a number? Who has never typed twice on the same key or on another key on his keyboard? Who has never confused two versions of the same file by sending an email or importing datas? All these situations are part of our daily lives. They can have important consequences on the output variable of a model. The fluctuation of the response variable is more or less important depending on the error made but also on the impacted input variable. It is then natural to ask ourselves how to determine the input variables that have the greatest impact on the total uncertainty of the model?

This study is made complex by the correlation phenomenon that exists between errors on input variables. This is explained by the fact that the input variables come from several calculation modules upstream of ours. Therefore, if one of these modules fails and returns incorrect amounts, it is logical to assume that all output variables will be contaminated in the same way. Thus, we can see the dependence between operational errors in our input variables. We can

therefore ask ourselves how to model operational errors and the interaction between them?

Sensitivity analysis

In order to answer our various problems, we based ourselves on sensitivity analysis. It represents the study that seeks to identify how the uncertainty of the output variable can be distributed among the different sources of uncertainty of the input variables of the model. Many methods have been developed in this context. In this paper, we decided to turn to methods of sensitivity analysis by decomposition of variance. We also integrate the modeling of the dependency structure between the input variables. To do this, we rely on the assumption that our random vector is Gaussian. The theoretical construction of the different methods in the framework of dependence on input variables will be detailed in this paper, particularly in Chapter 3, but we give the main tenants below.

- **Sobol indices** : The first method used is the one introduced by Sobol (1993) and known as the Sobol indices. Let's consider that our input variables are represented by the random vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ and that the output of our model is $Y = f(\mathbf{X})$. Under these notations, the first-order Sobol indice measuring the fraction of variability of the model output as a function of the variability of the input variable X_i is given by

$$S_i = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[Y|X_i]]}{\text{Var}[Y]}.$$

We have implemented two different approaches to numerically estimate the Sobol indices of all our input variables.

- **Brutal approach** : It takes its name from the fact that we use the direct writing of the Sobol index to derive the estimator. The latter requires two loops of *Monte-Carlo* to be determined. This implies that we have to generate a large number of simulations in order for the estimator to converge correctly. In order to counter this problem, we turned to a second approach.
- **Alternative approach** : After rewriting the Sobol indice, we are able to propose an estimator that requires a single loop of *Monte-Carlo*. However, for each simulation, we have to generate two independent copies of the random vector of the input variables. The consequence is a significant increase in computation time compared to the brutal approach.

Remember that we have an operational constraint to model the dependence between the errors of the different input variables. In this context, the sum of Sobol's indices is no longer equal to one. They are then no longer properly interpretable. That's why we looked at Shapley's indices.

- **Shapley indices** : They owe their origin to the work of Shapley (1953) on cooperative game theory. It is then Owen (2014) that adapts these results in sensitivity analysis by displaying a particular cost function that we will retain in this paper. Under the same notations as above and assuming that $- \{i\}$ corresponds to all the elements of $\{1, \dots, n\}$ not containing i , we define the Shapley indice of an input variable X_i as

$$Sh_i = \frac{1}{n} \sum_{u \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} \left[\frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{u \cup \{i\}}]]}{\text{Var} [Y]} - \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_u]]}{\text{Var} [Y]} \right].$$

It represents the average value of the uncertainty portion of the model $Y = f(\mathbf{X})$ associated with the additional knowledge of X_i , knowing that we already know $s = |u|$ other variables of a set of n input variables. The operational issue in estimating Shapley's indices is that they require exactly simulating the $n!$ permutations of all the n input variables, not to mention the time required to calculate the cost functions. When we are in a large dimension, which is the case in practice, it becomes impossible. In this thesis, we then propose an algorithm to accelerate the calculations and converge in a polynomial time. The advantage over Sobol's indices is that Shapley's indices remain interpretable, whether there is a dependency structure or not, because they always sum to one per construction.

- **Delta method :** The latter method does not fall within the scope of sensitivity analysis but provides a framework for approximating the variance of a function that takes a random variable as a parameter. We will apply this approximation for the calculation of the Sobol indices of the economic capital aggregation model of the different Solvency 2 risk modules, namely the *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)*.

Numerical applications

First, we confronted two methods of generating random numbers. The first one corresponds to the generation of numbers in a pseudo-random way. This is in fact the commonly used method, consisting by using the uniform distribution. The second approach is based on the will to improve the quality of the distribution of the random numbers generated. It is based on sequences of quasi-random numbers called low-discrepancy sequences. In particular, they reduce the estimation error by *Monte-Carlo* while simulating exactly the same number of scenarios. We will then call this approach the *Quasi-Monte-Carlo (QMC)* method. In this paper, we have retained the most popular low-discrepancy suite in finance, Sobol's. We will demonstrate theoretically and graphically how the quasi-random generation is more efficient than the pseudo-random generation. Thus, we will use the QMC method for our numerical applications.

For the Sobol indices, two approaches have been held for estimators : the brutal approach and the alternative approach. We mentioned the fact that the alternative approach required a longer calculation time than the brutal approach. We will now see how Sobol indices behave according to the type of function used. To do this, we have represented the two graphs below. They take the values returned by our algorithms for the Sobol indices as part of the linear function and the *BSCR* function according to the number of simulations.

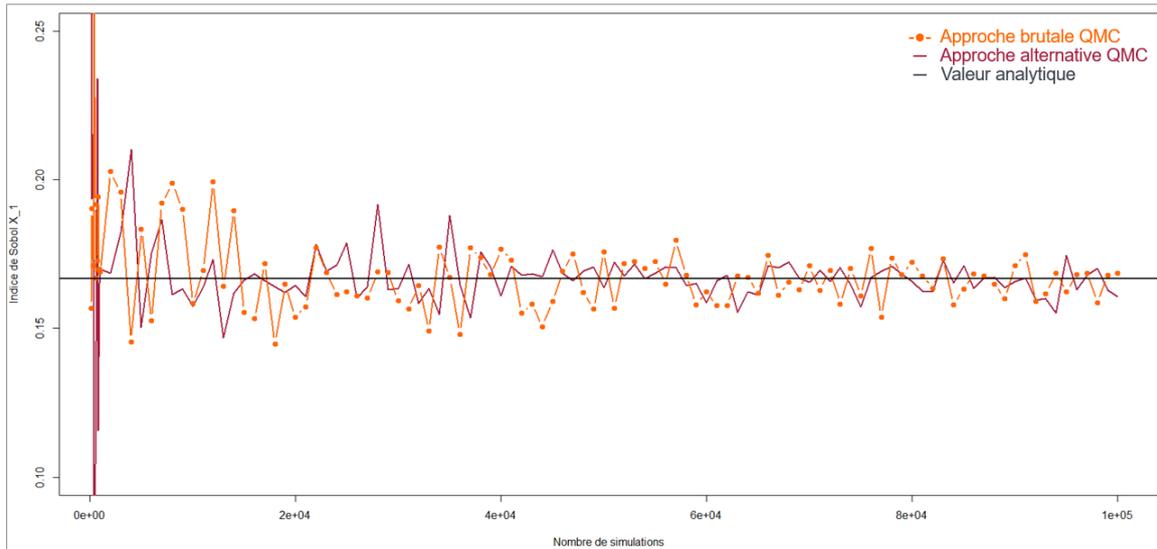


FIGURE 3 – Comparison of convergence of brutal and alternative approaches - linear

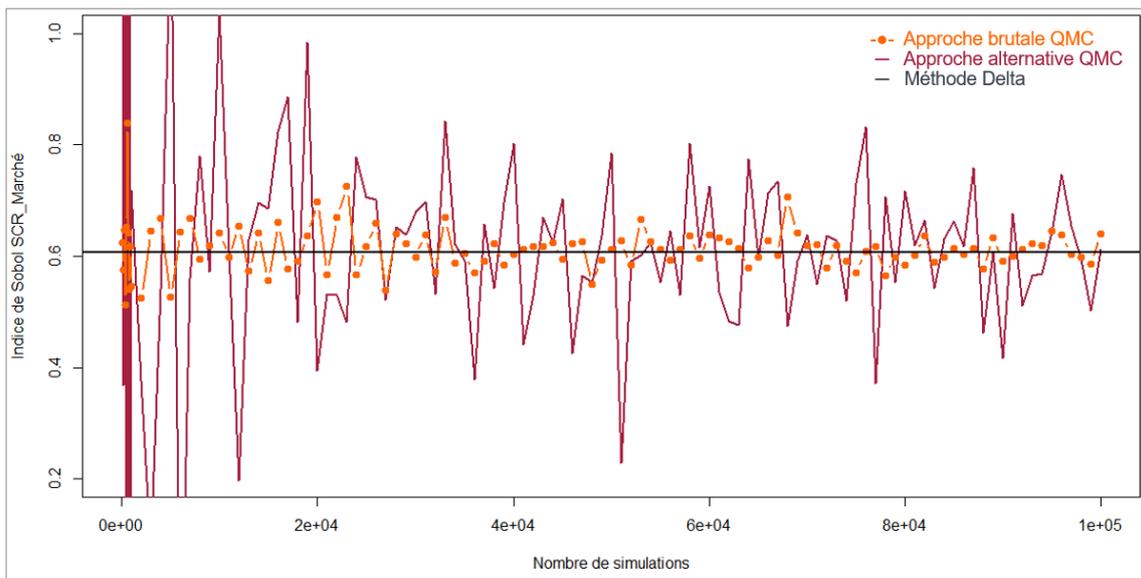


FIGURE 4 – Comparison of convergence of brutal and alternative approaches - *BSCR*

We find that the alternative approach improves the estimation of Sobol indices for the linear function. However, as soon as we move away from linearity, as is the case with the Standard Formula aggregation, the brutal approach is better. In addition, we note that the alternative approach no longer seems to be converging. Therefore, we prefer to use the brutal approach in our study.

Finally, let us look at the comparison between the Sobol and Shapley indices in the dependency framework. The table below summarises the values of the different indices of the *BSCR* model when we introduced a correlation coefficient of 0.5 between the input variable *SCR* health and those of life and non-life.

| <i>SCR</i> | Valeur | Indice de Sobol | IC Sobol | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|--------|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| Marché | 35 | 0.572 | [0.572, 0.576] | 0.594 | [0.594, 0.594] |
| Défaut | 14 | 0.0564 | [0.0562, 0.0564] | 0.0589 | [0.0588, 0.0590] |
| Vie | 27 | 0.220 | [0.220, 0.221] | 0.172 | [0.171, 0.172] |
| Non-vie | 21 | 0.115 | [0.115, 0.115] | 0.0823 | [0.0820, 0.0826] |
| Santé | 3 | 0.184 | [0.184, 0.185] | 0.0936 | [0.0928, 0.0935] |

TABLE 2 – Comparison of Sobol and Shapley indices - *BSCR* - Dependence

As we have seen above, it follows from this table that, unlike Shapley's indices, Sobol's indices sum no longer to one. For interpretability purposes, we will retain Shapley's indices for applications with *SCR* and solvency ratio functions, the results of which can be found in Appendix [C](#) and [D](#).

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mes tuteurs Alexandre LASRY, responsable du pôle logiciel VEGA de Milliman et Alexandre BOUMEZOUED, responsable du département de Recherche et Développement de Milliman. Merci pour votre encadrement précieux et notamment pour vos idées qui m'ont permis d'avancer positivement dans la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à mon tuteur académique Stéphane LOISEL. Tu as toujours su apporter les bonnes remarques et les bons conseils afin de m'aider à construire ce mémoire.

Je suis reconnaissant envers Pierre-Édouard ARROUY qui m'a donné l'opportunité d'échanger sur mes travaux avec son ami Thibault DELAGE, membre du département de Recherche et Développement de EDF. Lors de cette rencontre, j'ai tant appris sur l'analyse de sensibilité et particulièrement sur les indices de Shapley. Un grand merci à vous deux.

Pour finir, je remercie ma famille, mes amis et mes collègues de Milliman qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de ce mémoire. En particulier, un énorme merci à ma mère pour ses nombreuses relectures avisées.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Le rôle des outils de calcul et de reporting sous Solvabilité 2 | 4 |
| 1.1 Une exigence de solvabilité | 4 |
| 1.2 De Solvabilité 1 vers Solvabilité 2 | 5 |
| 1.3 Solvabilité 2 | 5 |
| 1.3.1 Pilier I | 6 |
| 1.3.2 Pilier II | 9 |
| 1.3.3 Pilier III | 9 |
| 1.4 Le rôle des outils de calcul et de reporting | 9 |
| 1.5 L'importance du ratio de solvabilité | 10 |
| 1.6 Motivations | 10 |
| 2 Périmètre de l'étude | 12 |
| 2.1 Calcul de capitaux économiques | 12 |
| 2.2 Agrégation des risques dans la Formule Standard | 13 |
| 2.3 Basic Solvency Capital Requirement | 14 |
| 2.3.1 Module de risques marché | 16 |
| 2.3.2 Module de risques défaut | 18 |
| 2.3.3 Module de risques souscription vie | 19 |
| 2.3.4 Module de risques souscription non-vie | 21 |
| 2.3.5 Module de risques souscription santé | 23 |
| 2.3.6 Module de risques actifs incorporels | 23 |
| 2.4 Risque opérationnel | 23 |
| 2.5 Solvency Capital Requirement | 24 |
| 2.6 Fonds propres | 24 |
| 3 Analyse de sensibilité | 27 |
| 3.1 Erreurs opérationnelles | 27 |
| 3.2 État de l'art | 29 |
| 3.3 Première approche de la sensibilité | 30 |
| 3.4 Modélisation de la dépendance et conditionnement gaussien | 32 |
| 3.5 Indices de Sobol | 34 |
| 3.5.1 Notations | 34 |
| 3.5.2 Cadre théorique | 34 |
| 3.5.3 Approche brutale | 37 |
| 3.5.4 Approche alternative | 39 |
| 3.6 Indices de Shapley | 41 |
| 3.6.1 Cadre théorique | 41 |
| 3.6.2 Estimation | 43 |
| 3.7 Approximation de l'indice de Sobol | 46 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.7.1 | Cadre théorique | 46 |
| 3.7.2 | Application au <i>BSCR</i> | 48 |
| 4 | Applications numériques | 50 |
| 4.1 | Quasi-aléatoire vs Pseudo-aléatoire | 50 |
| 4.1.1 | Estimateur <i>Monte-Carlo</i> et génération pseudo-aléatoire | 51 |
| 4.1.2 | Discrépance faible | 51 |
| 4.1.3 | Suite de Sobol | 53 |
| 4.2 | Étude comparative des méthodes | 55 |
| 4.2.1 | <i>Monte-Carlo vs Quasi-Monte-Carlo</i> | 55 |
| 4.2.2 | Approche brutale vs Approche alternative vs Méthode Delta | 58 |
| 4.2.3 | Indices de Sobol vs Indices de Shapley | 61 |
| 4.3 | Études de cas | 63 |
| 4.3.1 | Fonction <i>BSCR</i> | 63 |
| 4.3.2 | Fonction <i>SCR</i> | 65 |
| 4.3.3 | Fonction ratio de solvabilité | 66 |
| | Conclusion | 67 |
| | Bibliographie | 71 |
| | A Risque de primes et réserve | 72 |
| | B Propriété d'efficacité de la valeur de Shapley | 74 |
| | C Méthode Delta appliquée au <i>BSCR</i> | 76 |
| | D Résultats indices de Shapley du <i>SCR</i> | 78 |
| | E Résultats indices de Shapley du ratio de solvabilité | 83 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|------|
| 1 | Comparaison convergence approches brutale et alternative - linéaire | viii |
| 2 | Comparaison convergence approches brutale et alternative - <i>BSCR</i> | viii |
| 3 | Comparison of convergence of brutal and alternative approaches - linear | xiv |
| 4 | Comparison of convergence of brutal and alternative approaches - <i>BSCR</i> | xiv |
| 1.1 | Bilan S1 vs Bilan S2 | 7 |
| 1.2 | Bilan économique simplifié | 7 |
| 1.3 | Pieuvre Solvabilité 2 | 8 |
| 2.1 | Exemple calcul du <i>SCR</i> - approche par scénario | 13 |
| 2.2 | Matrice de corrélation <i>BSCR</i> | 15 |
| 2.3 | Matrice de corrélation <i>SCR</i> marché - hausse des taux | 16 |
| 2.4 | Matrice de corrélation <i>SCR</i> marché - baisse des taux | 16 |
| 2.5 | Matrice de corrélation <i>SCR</i> souscription vie | 19 |
| 2.6 | Matrice de corrélation <i>SCR</i> souscription non-vie | 21 |
| 4.1 | Génération quasi-aléatoire : suite de Sobol | 54 |
| 4.2 | Génération pseudo-aléatoire : loi uniforme | 55 |
| 4.3 | Méthodes <i>Monte-Carlo</i> et <i>Quasi-Monte-Carlo</i> - Approche brutale | 57 |
| 4.4 | Méthodes <i>Monte-Carlo</i> et <i>Quasi-Monte-Carlo</i> - Approche alternative | 57 |
| 4.5 | Comparaison convergence approches brutale et alternative | 58 |
| 4.6 | Comparaison temps de calcul approches brutale et alternative | 59 |
| 4.7 | Comparaison convergence approches brutale et alternative - <i>BSCR</i> | 60 |
| A.1 | Matrice de corrélation par segment - risque de prime et réserves | 73 |
| A.2 | Écart type de prime et de réserves par segment | 73 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Comparaison indices de Sobol et de Shapley - <i>BSCR</i> - Dépendance | ix |
| 2 | Comparison of Sobol and Shapley indices - <i>BSCR</i> - Dependence | xv |
| 2.1 | Éléments éligibles de niveau 1 | 25 |
| 2.2 | Éléments éligibles de niveau 2 | 25 |
| 2.3 | Éléments éligibles de niveau 3 | 25 |
| 3.1 | Exemple de l'impact des erreurs opérationnelles | 28 |
| 4.1 | Comparaison méthode Delta et approche brutale | 61 |
| 4.2 | Comparaison indices de Sobol et de Shapley - Fonction linéaire | 62 |
| 4.3 | Comparaison indices de Sobol et de Shapley - <i>BSCR</i> - Indépendance | 62 |
| 4.4 | Comparaison indices de Sobol et de Shapley - <i>BSCR</i> - Dépendance | 63 |
| 4.5 | Indices de Shapley - <i>BSCR</i> - Indépendance | 64 |
| 4.6 | Indices de Shapley - <i>BSCR</i> - Dépendance | 64 |
| A.1 | Liste des segments - risque de prime et réserves | 72 |
| D.1 | Indices de Shapley - <i>SCR</i> - Compagnie vie | 79 |
| D.2 | Indices de Shapley - <i>SCR</i> - Compagnie non-vie | 80 |
| D.3 | Indices de Shapley - <i>SCR</i> - Compagnie mixte | 82 |
| E.1 | Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie vie | 84 |
| E.2 | Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie non-vie | 86 |
| E.3 | Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie mixte | 88 |

Introduction

Aujourd'hui, la directive européenne Solvabilité 2 régit en grande partie le monde de l'assurance. Elle impose un cadre réglementaire strict aux entreprises d'assurance et de réassurance dans le but de protéger le consommateur. Cela se traduit notamment par des exigences réglementaires quantitatives. Le capital de solvabilité requis, communément appelé *SCR* en raison de sa dénomination anglaise *Solvency Capital Requirement*, représente une notion fondamentale de Solvabilité 2. Il correspond au capital nécessaire pour une entreprise d'assurance lui permettant de limiter à 0,5% la probabilité de ruine à horizon un an. Ce dernier repose sur une agrégation de capitaux économiques déterminés pour chacun des risques relevant de la cartographie des risques propre à Solvabilité 2. Dans ce mémoire, nous nous pencherons sur ses principes. Les fonds propres, correspondant aux ressources financières détenues par l'entreprise, doivent au minimum couvrir le besoin en solvabilité. Ainsi, le ratio de solvabilité, défini comme le rapport des fonds propres sur le *SCR*, est un élément crucial d'une compagnie d'assurance. Il est le reflet de sa bonne santé économique. Il est également utilisé à des fins de gestion ou encore analysé par les réassureurs pour tarifier les contrats. La détermination de ces éléments économiques doit donc se faire avec la plus grande précision possible.

En pratique, de nombreuses problématiques nous empêchent d'obtenir la valeur, la plus précise soit-elle, des capitaux économiques ou des autres variables d'entrée du modèle. Certains paramètres sont, par exemple, déterminés via des approches reposant sur des estimations par simulation. De ce fait, si une erreur intrinsèque d'estimation est présente en entrée du modèle, cela impliquera une incertitude à la sortie de celui-ci. Effectivement, ce type d'erreurs est inévitable et il nous revient de les prendre en compte dans notre modèle. A l'inverse, nous pouvons contrôler et éviter les erreurs opérationnelles présentes par mégarde dans les variables d'entrée du modèle et qui auront un impact significatif sur la variable réponse. C'est sur ces dernières que les travaux de ce mémoire se sont focalisés. Cette motivation provient du fait que les valeurs en entrée du modèle sont, dans la majorité des cas, rentrées à la main dans des fichiers plats et que de nombreuses erreurs apparaissent lors de ce processus. En effet, si nous nous penchons sur nos expériences personnelles, nous avons tous un jour ou l'autre tapé sur la mauvaise touche du clavier ou bien deux fois sur le même chiffre sans s'en apercevoir, décalé la virgule dans un sens ou dans l'autre ou encore rentré un montant dans la mauvaise devise. Tous ces exemples sont fréquents et entraînent une variation plus ou moins importante du résultat final. Dans certains cas, il est simple de voir la source de l'erreur avant de lancer le modèle. Lorsque ce n'est pas le cas, nous devons attendre de connaître le résultat pour vérifier s'il est cohérent ou non. Ceci se révèle problématique. En actuariat par exemple, il n'est pas rare d'être confronté à des modèles demandant un temps important de calcul. Par conséquent, au moment où nous lançons nos procédures, nous voulons être certains qu'il n'existe pas d'erreurs opérationnelles. Cette difficulté ne se limite bien évidemment pas au domaine de l'actuariat. En physique, par exemple, de nombreux modèles complexes sont utilisés. Certains peuvent mettre environ un mois pour un unique appel à la fonction. Cette problématique est expliquée par [Janon \(2012\)](#) dans le contexte géophysique. Lorsque la sortie du modèle nous paraît fortement incohérente, cela est probablement dû à une variable d'entrée très éloignée de la valeur attendue ou bien à un grand ensemble de variables contenant des erreurs. Cette fois encore, les erreurs sur les variables impactées sont

plus ou moins difficilement déterminées. Ceci s'avère encore plus compliqué lorsque nous nous plaçons dans un modèle contenant plusieurs centaines de variables. Il serait alors fastidieux de vérifier une à une si la bonne valeur a été rentrée. Ajoutons à cela le fait que chaque variable d'entrée n'a pas la même influence sur la sortie du modèle. Nous pouvons ainsi nous demander comment déterminer les variables d'entrée qui ont l'impact le plus important sur l'incertitude totale du modèle ?

L'approche la plus couramment utilisée dans la littérature pour répondre à notre problématique est l'analyse de sensibilité. Elle correspond à l'étude qui cherche à déterminer comment l'incertitude de la sortie du modèle peut être répartie entre les différentes sources d'incertitude des variables d'entrée. Pour cela, nous devons principalement stresser les variables d'entrée et regarder comment se comporte la variable réponse. Au cours du temps, plusieurs méthodes permettant d'estimer les coefficients de sensibilité sont apparues, par exemple celles présentées par Fang et al. (2004) ou Tsanakas and Millosovich (2016). Pour des raisons d'interprétation ou d'hypothèses que nous détaillerons dans ce mémoire, nous n'avons pas retenu ces méthodes mais nous nous sommes penchés sur des approches reposant sur la décomposition de la variance.

Le premier outil théorique étudié est l'indice de Sobol introduit par Sobol (1993). Ces indices de sensibilité sont le fruit de l'ajout par Sobol d'une condition d'orthogonalité aux travaux de Hoeffding (1948) sur la décomposition d'une fonction quelconque, portant le nom de décomposition fonctionnelle ANOVA pour *Analysis of Variance*. Cependant, la condition d'orthogonalité implique que nos variables d'entrée soient indépendantes entre elles. En pratique, les sources d'erreur afférentes aux variables ne sont, bien entendu, pas indépendantes. Pour nous en convaincre, considérons le cas d'un groupe de variables provenant d'un même outil de calcul. Si nous constatons une erreur d'estimation sur une de ces variables, il est alors raisonnable de penser que sa source provient, soit du fait que le modèle contient des erreurs, soit que des paramètres en entrée contiennent des erreurs ayant contaminé l'ensemble du modèle. Dans les deux cas, une corrélation entre les erreurs est à prendre en compte et l'hypothèse de la décomposition d'Hoeffding-Sobol ne tient plus. Toutefois, des travaux comme ceux de Chastaing (2013) nous permettent de considérer le cadre de dépendance entre les variables d'entrée. Ainsi, nous sommes toujours en mesure de calculer les indices de Sobol, mais ils ne seront plus convenablement interprétables. En effet, s'il n'y a pas de dépendance entre les variables, les indices de Sobol expliquent exactement la variance globale du modèle. Ce n'est plus le cas avec l'apparition de la dépendance. Afin de résoudre cette problématique, nous nous sommes tournés vers la théorie des jeux coopératifs et plus précisément vers la valeur de Shapley définie par Shapley (1953). Il faudra attendre bien des années et Owen (2014) avant que ses travaux ne soient utilisés en analyse de sensibilité sous le nom d'indice de Shapley. En actuariat, cette approche est largement répandue en allocation de capital comme nous pouvons le voir dans Decupère (2011). Elle est également de plus en plus répandue en data science à des fins d'interprétation des modèles. Le succès de la méthode de Shapley provient d'une propriété particulière que nous appellerons efficience mais qui porte aussi le nom de *full allocation* en allocation de capital. En analyse de sensibilité, cette dernière assure que si nous reprenons la fonction de coût particulière introduite par Owen, la somme des indices de Shapley sera toujours égale à un, qu'il y ait ou non indépendance entre nos variables d'entrée. De ce fait, nous pourrions interpréter facilement les coefficients de sensibilité. Nous nous proposons dans ce mémoire d'appliquer ces méthodes au cadre assurantiel et notamment aux modèles *SCR* et ratio de solvabilité dont nous définirons le périmètre.

Le contexte réglementaire et plus particulièrement la norme Solvabilité 2 seront abordés dans un premier chapitre. Ensuite, nous nous attarderons sur le calcul d'agrégation des capitaux économiques ainsi que sur le périmètre de notre étude reprenant l'ensemble des calculs réglementaires utilisés dans nos applications numériques. Le troisième chapitre sera axé sur la

modélisation de la dépendance entre les variables d'entrée de notre modèle et l'étude théorique de l'analyse de sensibilité. Nous consacrerons une section sur une pratique utilisée sur le marché et les défauts qui nous conduisent à vouloir l'améliorer. Nous aurons également l'occasion de présenter deux approches de l'estimation des indices de Sobol. La première, dite brutale, correspond à l'estimation à partir de l'écriture directe de l'indice de Sobol. La deuxième approche est nommée alternative. Elle permet d'améliorer l'approche brutale dans le cadre d'une fonction linéaire mais demeure moins performante lorsque nous nous éloignons de la linéarité. La construction des indices de Shapley sera ensuite détaillée et un algorithme permettant de réduire le coût calculatoire conséquent nécessaire à leur détermination sera exposé. Pour finir, nous évoquerons la méthode Delta qui donne un cadre pour approximer les calculs de variance d'un modèle. Dans un dernier chapitre, nous aborderons la manière de générer les nombres aléatoires et confronterons pour cela deux méthodes : générations pseudo-aléatoire et quasi-aléatoire. Il sera ensuite question de comparer numériquement les différentes approches théoriques du troisième chapitre et de conclure en apportant les résultats de notre étude sur le *SCR* et le ratio de solvabilité.

Chapitre 1

Le rôle des outils de calcul et de reporting sous Solvabilité 2

La question de solvabilité d'une société d'assurance est devenue un enjeu majeur au fil des années. Comment en sommes-nous arrivés là ? Pourquoi le ratio de solvabilité de l'entreprise est-il au coeur de nombreuses décisions ? Celui-ci repose en partie sur un capital de solvabilité requis, appelé *SCR*, mais que représente-t-il et comment est-il déterminé ?

Dans cette première partie, nous nous proposons de répondre à ces diverses interrogations.

1.1 Une exigence de solvabilité

Les premières lois régissant l'activité d'assurance sont rattachées au code d'Hammurabi vers 1750 avant J.-C. Depuis cette période et pendant longtemps, la notion d'assurance a été associée à la garantie de remboursement de la marchandise en cas de perte, lors de transports notamment maritimes et en échange d'une prime. Si elle a évolué en fonction des époques et des civilisations, ce sont les événements majeurs de l'histoire qui ont le plus bouleversé le monde de l'assurance. L'un des plus importants dans cette liste est certainement le grand incendie de Londres en 1666. En effet, c'est à la suite de cette tragédie qu'apparaissent et se développent les premières sociétés d'assurance. Elles ont aujourd'hui une place prépondérante dans notre quotidien. De ce fait, il a fallu réguler le marché de l'assurance dans le but de protéger, d'une part ces sociétés, mais surtout le consommateur.

Nous observons, depuis de nombreuses années, une volonté des instances européennes dans l'harmonisation du marché d'assurance. L'idée est d'avoir un marché unique afin de garantir l'homogénéité de la protection des consommateurs au niveau européen. C'est dans ce sens que sont apparues deux directives dans les années 1970. La première est celle du 24 juillet 1973 (73/239/CEE), concernant les assurances directes autres que la vie. La deuxième, traitant cette fois des assurances directes sur la vie, date du 5 mars 1979 (79/267/CEE). Ces deux textes mettent en avant un concept fondamental qu'est la solvabilité. Elle est décrite comme la capacité des entreprises à faire face à leurs engagements et représente le capital minimum que doivent disposer celles-ci pour exercer le métier d'assurance. Ce n'est que le 14 février 2002 que le Parlement européen et le Conseil de l'Union européenne les adoptent. Ces directives sont maintenant plus connues sous le nom de Solvabilité 1.

1.2 De Solvabilité 1 vers Solvabilité 2

Le but recherché derrière la norme Solvabilité 1 était de s'assurer que la société d'assurance aura la capacité de rembourser à tout moment ses engagements. Ceci, en partie, car les produits d'assurances sont devenus courants, et même obligatoires pour certains comme c'est le cas en France avec les assurances Responsabilité Civile automobile et Multirisque Habitation. Si l'entreprise fait défaut, cela impactera fortement l'ensemble des consommateurs ayant souscrit un contrat chez elle, en plus d'être en faillite. Ainsi, dès son apparition, la norme Solvabilité 1 a imposé aux sociétés d'assurance de respecter certains critères afin de s'assurer de sa bonne santé économique. Ces derniers sont au nombre de trois :

- avoir des actifs en quantité suffisante et de qualité,
- avoir des provisions techniques suffisantes afin de rembourser ses dettes,
- avoir un montant de fonds propres minimum, appelé marge de solvabilité, permettant de subvenir aux événements imprévus.

Un des points forts de Solvabilité 1 est sa relative simplicité. Cependant, elle ne lui a pas permis de résister aux critiques faites à son encontre. Il lui a été reproché de ne pas avoir tenu compte de la financiarisation et de la mondialisation du secteur de l'assurance. De plus, l'évaluation des actifs et des passifs ne semblait pas cohérente avec le marché et leur corrélation n'était pas prise en compte. Il faut ajouter à cela l'émergence de nouveaux risques tels que les risques terroristes ou climatiques, qui n'étaient également pas intégrés dans la norme. Une autre critique venait du fait qu'il n'y avait aucune exigence sur la gouvernance des entreprises, point central de la norme suivante. Tous ces éléments ont mené le régulateur à adopter, le 25 novembre 2009, la directive Solvabilité 2 (2009/138/CE).

1.3 Solvabilité 2

La norme Solvabilité 2 est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 2016, soit environ six ans après son adoption. Aujourd'hui, les organismes d'assurance concernés sont ceux qui, à compter du 1^{er} janvier 2012 et pendant trois années consécutives, ont rempli au moins l'une des conditions suivantes :

- avoir encaissé au minimum 5 millions d'euros de primes,
- avoir un total minimum de 25 millions d'euros de provisions techniques,
- ne pas faire partie d'un groupe prudentiel.

Dans les autres cas, l'entreprise reste soumise à Solvabilité 1. Nous pouvons noter que le principe de proportionnalité s'applique à Solvabilité 2. Cette norme étant beaucoup plus complexe et coûteuse à mettre en place que Solvabilité 1, ce principe permet aux plus petites structures de voir l'impact de la nouvelle réglementation réduit.

La norme Solvabilité 2 se décompose en trois piliers qui seront abordés de manière plus détaillée dans la suite de ce chapitre. Ils se distinguent essentiellement comme suit :

- **Pilier I** : nous y trouvons tout ce qui concerne les exigences quantitatives,
- **Pilier II** : il porte sur les exigences qualitatives,
- **Pilier III** : il a trait aux exigences d'information qui permettent de contrôler les deux autres piliers.

1.3.1 Pilier I

Le pilier I de solvabilité 2 regroupe l'ensemble des exigences prudentielles et financières que doivent respecter les sociétés d'assurance.

Nous trouvons dans un premier temps les règles de valorisation des actifs et des passifs. Les actifs, représentant l'ensemble des biens de l'organisme d'assurance, doivent permettre de couvrir à tout moment les engagements pris par l'assureur. A l'inverse, le passif représente l'ensemble des engagements contractés par l'organisme d'assurance. Nous distinguons deux éléments à l'intérieur du passif, les provisions techniques et les fonds propres.

Provisions techniques

Les provisions techniques, vie et non-vie, sont calculées de manière prudente, fiable et objective, et en cohérence avec le marché. Elles correspondent au montant que les organismes d'assurance devraient payer s'ils transféraient immédiatement leurs engagements d'assurance à une autre entreprise. Elles sont égales à la somme du *Best Estimate (BE)* et de la marge pour risques, où :

- le *Best Estimate* représente la valeur actuelle probable (VAP) des flux de trésorerie futurs, soit, la plus juste estimation de l'évolution des contrats du point de vue de l'organisme d'assurance,
- la marge pour risques est définie comme étant le montant de provisions, complémentaire au *Best Estimate*, qu'exigerait une entité de référence afin d'honorer l'ensemble des engagements à la charge de l'assureur. L'approche de valorisation retenue est celle dite du coût du capital.

Fonds propres

Les fonds propres sont les ressources financières que l'entreprise possède et qui permettent de faire face aux différents risques. Ils sont classés en niveaux, aussi appelés tiers (tiers 1, 2 et 3) et découpés en deux classes : les fonds propres dits de base et ceux dits auxiliaires. Nous nous attarderons sur ces différentes distinctions dans le prochain chapitre.

Nous constatons un changement par rapport à Solvabilité 1 dans la manière de valoriser les fonds propres. En effet, avec Solvabilité 2 nous passons d'un bilan comptable à un bilan économique. Par conséquent, les fonds propres sont maintenant calculés en valeur économique. Ils sont également soumis à certaines conditions d'éligibilité sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

Bilan économique

Nous venons d'évoquer le fait que le bilan n'est pas le même selon la norme utilisée. Nous pouvons voir ci-dessous une comparaison entre les bilans sous Solvabilité 1 et Solvabilité 2.

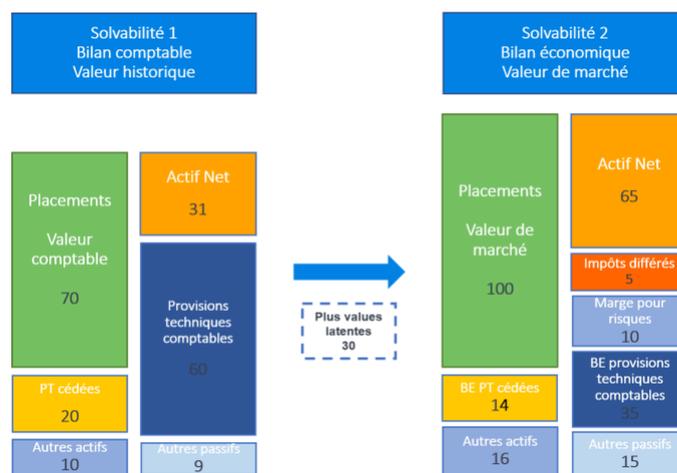


FIGURE 1.1 – Bilan S1 vs Bilan S2

Nous remarquons que le bilan version Solvabilité 2 fait apparaître des impôts différés, inclus dans les fonds propres économiques, et qui correspondent aux engagements vis-à-vis de l'Etat. Ils sont calculés comme les impôts sur la différence entre les fonds propres Solvabilité 2 et ceux comptables. Dans le cas où la différence est positive, les impôts différés seront placés au passif. Dans le cas contraire, ils seront inscrits à l'actif. L'actif net est la part du passif représentant les engagements vis-à-vis des actionnaires. Quant aux engagements vis-à-vis des assurés, ils sont constitués de la marge pour risques et du BE des provisions techniques soit, comme défini plus haut, des provisions techniques.

Exigences de capital

Nous retrouvons également dans ce premier pilier les exigences réglementaires de capital. Nous en comptons deux principales, le capital de solvabilité requis (*SCR*) et le minimum de capital requis (*MCR*).

Le *SCR* est le montant de capital réglementaire nécessaire pour limiter à 0,5% la probabilité de ruine à horizon 1 an. Plus concrètement, cela équivaut à une faillite tous les 200 ans au plus. Afin de comprendre la notion de ruine, regardons le bilan économique simplifié ci-dessous.

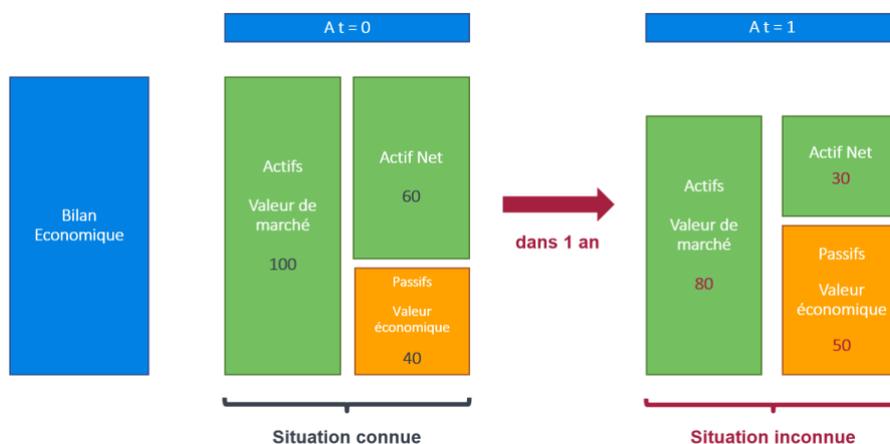


FIGURE 1.2 – Bilan économique simplifié

Nous considérons qu'une entreprise est en situation de ruine économique à partir du moment où les actifs deviennent inférieurs aux passifs. Si nous prenons l'exemple du bilan simplifié ci-dessus, cela correspond à l'événement où l'actif net est devenu négatif. L'actif net étant la différence entre la valeur de marché des actifs et l'évaluation *Market-Consistent* du *BE*. Dans ce cas, le *SCR* est donc le montant de capital nécessaire pour garder l'actif net strictement positif à horizon 1 an et avec un niveau de confiance de 99,5%. Si nous supposons que l'entreprise possède un montant de fonds propres à $t = 0$, FP_0 , nous devons nous assurer que ce montant dans un an, FP_1 , soit suffisant pour ne pas faire faillite. Nous utilisons pour cela un quantile d'ordre 0,5% avec la formule générique suivante : $SCR = FP_0 - q_{0,5\%}(FP_1 \cdot D_1)$, où D_1 est le facteur d'actualisation à $t = 1$, vu en $t = 0$. Ainsi, deux cas se présentent :

- le quantile est positif : le montant de fonds propres initial détenu par l'entreprise en $t = 0$ est suffisant pour se couvrir. Elle peut éventuellement reprendre une partie de celui-ci afin de l'investir,
- le quantile est négatif : le montant de fonds propres initial détenu par l'entreprise en $t = 0$ n'est pas suffisant pour se couvrir. Elle doit alors allouer du capital supplémentaire dans le but d'être solvable.

Ce capital peut-être déterminé grâce à la formule standard de Solvabilité 2 ou par un modèle interne. Concernant les détails sur la formule standard, nous pouvons nous orienter par exemple vers le Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 ainsi que dans les différents compléments publiés jusqu'à ce jour. Dans les grandes lignes, il s'agit de calculer les *SCR* par modules de risques, eux-mêmes découpés en sous-modules, et de les agréger pour obtenir le Basic Solvency Capital Requirement (*BSCR*) auquel nous ajouterons le *SCR* du risque opérationnel et un facteur d'ajustement. La schématisation de l'agrégation est résumée dans le graphique ci-dessous par ce qui est communément appelé "la pieuvre Solvabilité 2".

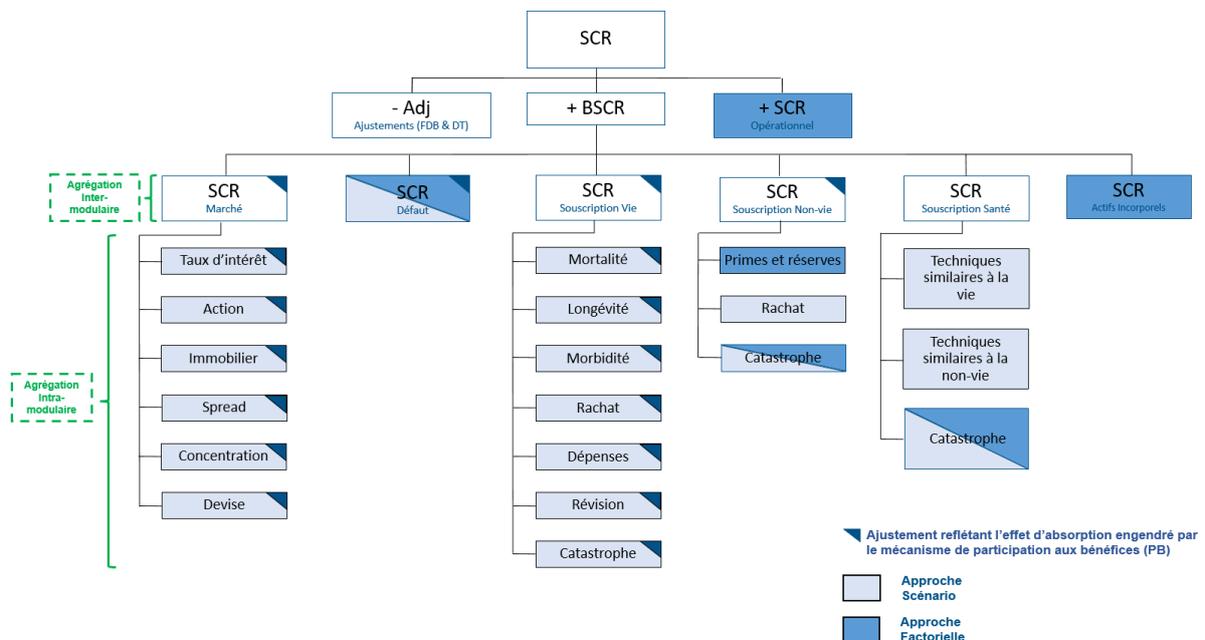


FIGURE 1.3 – Pieuvre Solvabilité 2

Soulignons le fait que les calculs de *SCR* intermédiaires s'effectuent via deux approches, l'une appelée facteur et l'autre scénario. L'approche factorielle utilise une formule fermée afin de déterminer le *SCR*. L'approche scénario consiste à appliquer un scénario de stress au bilan économique et d'en déduire, par différence entre l'actif net en $t=0$ et celui en $t=1$, le montant de *SCR*. L'actif net est lui obtenu en considérant la différence entre la valeur de marché des actifs et l'évaluation du *Best Estimate*.

Le *MCR*, quant à lui, correspond au montant de fonds propres de base minimum en-deçà duquel les bénéficiaires des contrats de la compagnie d'assurance seraient exposés à un niveau de risque inacceptable. Il est composé d'au moins 80% de fonds propres du tiers 1 et ne doit pas contenir de fonds propres auxiliaires.

1.3.2 Pilier II

Ce pilier ne faisant pas partie de l'objet de ce mémoire, nous resterons donc succincts. Il est centré sur le système de gouvernance des risques au sein de l'entreprise et notamment la notion de fonction clé. Elles sont au nombre de quatre : gestion des risques, audit interne, vérification de la conformité et actuarielle. Nous y retrouvons également les politiques écrites concernant ces fonctions clés ainsi que leurs compétences. Le contrôle prudentiel par les autorités de contrôle est aussi évoqué dans ce deuxième pilier.

1.3.3 Pilier III

Les entités d'assurance ont un devoir de transparence sous Solvabilité 2. C'est dans son pilier III que cette exigence se matérialise. Cela se traduit par une obligation de transmission de certains rapports narratifs, notamment financiers, à destination de l'assuré et des autorités de contrôle. Ces dernières sont en charge de vérifier la bonne cohérence et la véracité de ces documents. Par exemple, l'entreprise doit fournir à l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) ses données quantitatives, au format XBRL (eXtensible Business Reporting Language). Elles sont matérialisées par des rapports appelés Quantitative Reporting Templates (QRT). Ceux-ci sont soumis aux tests fournis par l'European Insurance and Occupational Pensions Authority, plus communément appelée EIOPA.

La transmission des données aux autorités de contrôle ne se limite pas à l'aspect financier des QRT, il faut également communiquer sur le côté prudentiel. Pour cela, la compagnie d'assurance se doit de leur remettre les Regulatory Technical Standards (RTS). Concernant la communication au marché, nous trouvons le rapport appelé Solvency and Financial Conditions Reports (SFCR).

1.4 Le rôle des outils de calcul et de reporting

Comme abordé dans la partie précédente, la norme Solvabilité 2 requiert, d'une part des calculs mathématiques développés, dans le cadre du pilier I et d'autre part un suivi qualitatif et quantitatif des valeurs obtenues, objet cette fois du pilier III. Le nombre d'opérations de calculs et de validations étant conséquent, il est primordial d'avoir recours à des outils informatiques réalisant ces tâches. Ces logiciels permettent un gain de temps très important mais surtout de réduire au maximum les erreurs opérationnelles. Ce bénéfice se reflète d'autant plus quand l'EIOPA impose de valider un grand nombre de contrôles réglementaires qui seraient fastidieux et source d'erreurs sans automatisation.

De manière plus générale, les assurances sont aujourd'hui et depuis quelques années déjà, confrontées à un afflux massif des données en tout genre concernant les assurés. Ce phénomène porte désormais le nom de *Big Data*. Il est ainsi nécessaire pour ces compagnies de traiter et d'analyser l'ensemble de ces données afin de les utiliser de la meilleure de façon possible comme, par exemple, en tarification ou en gestion des risques. L'enjeu que nous voyons apparaître est de pouvoir concilier rapidité d'exécution et précision dans ce travail. De nombreux logiciels sont apparus au fur et à mesure du temps pour les aider sur ces problématiques. Aujourd'hui encore, des solutions, diverses et variées, voient le jour ou sont en cours de développement afin de répondre à des besoins opérationnels, permanents et grandissants.

Actuellement, un des enjeux majeurs est la nécessité de traçabilité et d'audit de l'ensemble des opérations effectuées par les compagnies d'assurance. À cela s'ajoute le nouveau Règlement Général sur la Protection des Données (RGPD) du Parlement européen et du conseil, qui durcit les contraintes sur les données personnelles. Il y a alors un recours obligatoire aux logiciels pour les entreprises si elles veulent se conformer à ces exigences.

1.5 L'importance du ratio de solvabilité

Nous définissons le ratio de solvabilité comme étant le rapport entre les fonds propres et le *SCR* de l'entreprise. Cette dernière souhaite, bien entendu, voir ce ratio supérieur à 1. En effet, cela implique que l'entreprise possède suffisamment de réserves pour subvenir à ses besoins en capital et possède même un surplus. Dans ce cas, il semble naturel que la compagnie d'assurance veuille maximiser ce ratio dans le but d'avoir une marge pour, par exemple, investir de manière plus conséquente ou en prenant d'avantage de risques afin de maximiser son profit futur.

D'un autre côté, le ratio de solvabilité, mais aussi le bilan et le compte de résultat de l'entreprise sont minutieusement analysés par les réassureurs lors de la tarification des contrats. Par conséquent, une erreur dans le ratio final peut avoir une conséquence importante pour la compagnie. De plus, le niveau de solvabilité souhaité d'une compagnie d'assurance est en étroite lien avec la politique d'allocation de capital. Il est donc primordial d'arriver à stabiliser et contrôler ce ratio.

Il nous semble ainsi intéressant d'analyser l'impact des composantes du ratio de solvabilité, et donc du *SCR*. En effet, cela nous permettrait de comprendre comment nous pouvons ajuster ces montants économiques grâce, par exemple, à des changements dans le système de gestion des risques utilisé. De manière plus générale, cette étude nous sera utile afin de connaître les variables d'entrée devant être surveillées en priorité dans le but de réduire les erreurs sur l'élément crucial qu'est le ratio de solvabilité de la compagnie d'assurance.

1.6 Motivations

Les approches que nous détaillerons dans le troisième chapitre peuvent être appliquées à n'importe quel cadre si nous sommes en mesure d'obtenir une variable de sortie à partir de variables d'entrée. Dans ce mémoire, nous nous plaçons dans la situation où nous disposons d'un outil de calcul et de reporting Solvabilité 2 permettant notamment de calculer le *SCR* et le ratio de solvabilité d'une compagnie d'assurance. Nous avons expliqué dans la partie précédente que nous avons besoin d'estimer très précisément le ratio de solvabilité. Cependant, nous constatons en pratique que de nombreuses erreurs opérationnelles se glissent dans les variables d'entrée.

Nous entendons par cela que les montants économiques donnés en entrée du modèle ne sont pas les bons. Cela s'explique par plusieurs raisons. Les erreurs opérationnelles les plus courantes observées en entrée d'outils Solvabilité 2 sont celles relatives à un chiffre en trop, un décalage de virgule, un inversement de deux chiffres ou encore un nombre fourni dans la mauvaise monnaie. Selon la variable d'entrée affectée et l'erreur commise, ces erreurs auront un impact plus ou moins négligeable sur le résultat final du modèle. Notre motivation principale est donc de trouver une solution mathématique permettant de quantifier l'impact, sur la sortie du modèle, des erreurs opérationnelles présentes sur les variables d'entrée d'un outil de calcul et de reporting Solvabilité 2.

Les erreurs opérationnelles décrites dans le paragraphe précédent sont souvent la conséquence d'une mauvaise copie des montants de sortie provenant de logiciels annexes. Toutefois, nous remarquons qu'il arrive que ces erreurs soient directement contenues dans la sortie d'autres outils. Par exemple, des erreurs peuvent être présentes en entrée de ce modèle ou bien ce dernier peut être défaillant. Dans tous les cas, nous sommes amenés à penser qu'il existe une corrélation entre les erreurs des différentes variables d'entrée. Nous souhaitons également dans ce mémoire nous concentrer sur la modélisation et l'intégration dans nos modèles de la corrélation entre les variables d'entrée.

Pour répondre à nos motivations, nous allons dans un premier temps détailler le cadre de notre étude. Ensuite, nous exposerons nos méthodes de calcul des coefficients de sensibilité des variables d'entrée, tout en nous attardant sur la structure de dépendance des erreurs opérationnelles.

Chapitre 2

Périmètre de l'étude

Après avoir abordé la notion de solvabilité ainsi que certaines normes permettant de la réguler, notamment Solvabilité 2, nous allons dans ce deuxième chapitre nous pencher sur le périmètre de notre étude. Nous exposerons dans un premier temps le calcul générique des capitaux économiques, notamment dans le cadre de l'approche par scénario, ainsi que notre position vis-à-vis des variables d'entrée nécessaires à ces calculs. Ensuite, nous verrons le cadre théorique de l'agrégation de ces capitaux économiques. Enfin, nous nous concentrerons sur les différents modules de risques à agréger pour obtenir le Capital de Solvabilité Requis (*SCR*) ainsi que sur les fonds propres. Nous prenons ici le temps de rentrer dans le détail des calculs car l'ensemble de ceux qui seront exposés sont utilisés dans notre application numérique.

2.1 Calcul de capitaux économiques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (1.3.1), il existe deux approches pour calculer le montant de solvabilité requis d'un risque. Dans le cas où une formule fermée existe, l'approche factorielle, nous considérerons connues les variables d'entrée intervenant dans le calcul. Dans l'autre cas, l'approche scénario, nous supposerons qu'un outil de calcul fournit les valeurs de marché des actifs (*VM*) et les *Best Estimate* (*BE*) des scénarios central et stressés qui serviront de variables d'entrée dans notre étude. Connaissant l'ensemble de ces montants économiques, il nous est possible de calculer, dans le cadre d'une approche par scénario, le montant de *SCR* pour chaque risque. Nous connaissons donc pour chaque scénario la *VM* et le *BE* du portefeuille. Ainsi, nous sommes en mesure de calculer la *Net Asset Value* (*NAV*) qui est la désignation anglaise de l'actif net, comme suit : $NAV = VM - BE$. Pour connaître ensuite la charge en capital nécessaire pour se couvrir contre un risque, matérialisé par un scénario stressé, il nous suffit de considérer la différence $\Delta NAV = NAV_C - NAV_S$. Dans l'hypothèse d'un scénario choqué profitable au portefeuille de la compagnie d'assurance, le montant ΔNAV peut être négatif. Or, un capital requis ne peut pas être négatif, le cas échéant cela signifie que l'entreprise possède déjà suffisamment de capital pour se prémunir contre ce risque et qu'elle n'a donc pas besoin d'en allouer plus. Par conséquent, le *SCR* est finalement obtenu de la façon suivante :

$$SCR = \max[\Delta NAV; 0] = \max[(VM_C - VM_S) - (BE_C - BE_S); 0]. \quad (2.1)$$

Afin de mieux comprendre l'approche scénario, nous pouvons considérer l'exemple graphique et numérique ci-après. Nous avons pris un exemple fictif de calcul du *SCR* du risque de choc à la baisse de la courbe des taux sans risque. Un outil de calcul nous a permis d'obtenir les valeurs économiques exposées dans la figure ci-dessous.

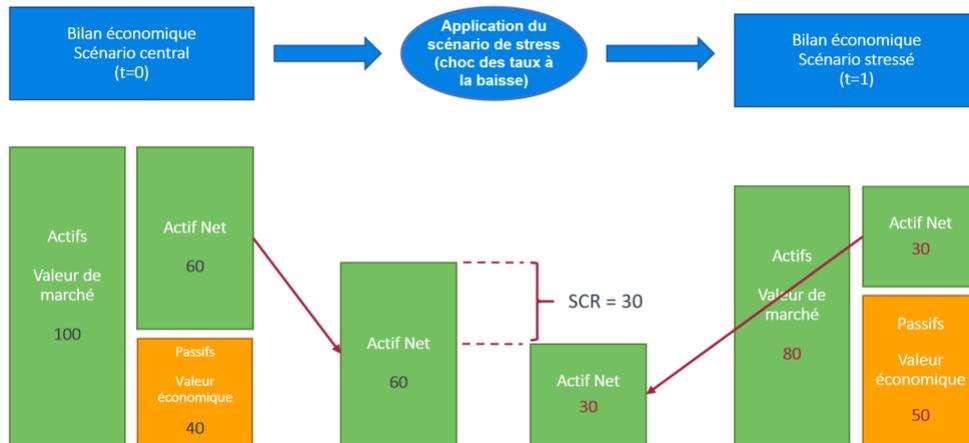


FIGURE 2.1 – Exemple calcul du *SCR* - approche par scénario

Nous avons donc ici un montant de *SCR* égal à

$$SCR = \max [(100 - 80) - (40 - 50); 0] = 30.$$

Dans le cadre de l'approche scénario, une autre particularité doit être prise en compte, l'absorption des pertes par la réserve de participation aux bénéfices (PB). Cela consiste, pour les contrats avec clause de PB, en une diminution de la PB future attribuée aux assurés afin d'absorber partiellement les chocs. Dans ce cas, il nous faudra calculer deux montants de *SCR*, l'un « net » de PB et l'autre « brut » de PB. Les effets d'absorption des pertes par la réserve de PB sont pris en compte dans le *SCR* « net » alors qu'ils sont exclus dans le calcul du *SCR* « brut ». Nous avons par définition, $SCR_B = SCR_N + (PBF_C - PBF_S)$.

La base du calcul des capitaux économiques étant posée, nous pouvons maintenant nous intéresser à la façon dont ils sont agrégés entre eux, mais également aux principales caractéristiques des risques sous-jacents.

2.2 Agrégation des risques dans la Formule Standard

Nous avons vu avec la schématisation de la pieuvre Solvabilité 2 (L.3), représentant le cadre de l'approche par la Formule Standard, qu'il existait différents niveaux de calculs de capitaux économiques avant d'arriver au résultat final souhaité, le *SCR*. En effet, avec cette approche dite "bottom-up", il convient dans un premier temps de regrouper les risques par catégorie en fonction de leur nature au sein de modules de risques. Dans un deuxième temps, il est nécessaire d'agréger les capitaux économiques de chaque module de risques. Nous appelons cette étape agrégation intra-modulaire. Elle s'effectue grâce à des matrices de coefficients de corrélation linéaire, fournies par l'EIOPA, mettant en exergue la corrélation linéaire entre les différents capitaux, et donc les effets de diversification entre ces risques. Ces modules de risques sont enfin agrégés entre eux, toujours à l'aide d'une matrice de coefficients de corrélation, dont la résultante est le *BSCR*.

Nous allons maintenant formaliser les agrégations de capitaux économiques. Pour cela, nous reprenons les notations utilisées par Decupère (2011) que nous introduisons ici :

- R_m : ensemble des risques de module m ,
- C_i : capital au titre du risque i ,
- $\rho_{i,j}^{R_m}$: coefficient de corrélation permettant l'agrégation des capitaux des risques i et j du module m ,
- M : ensemble des modules de risques,
- SCR_m : capital économique du module m ,
- $\rho_{i,j}^M$: coefficient de corrélation permettant l'agrégation des capitaux économiques des modules i et j .

Comme expliqué précédemment, lorsque nous utilisons l'approche par la Formule Standard, deux étapes sont nécessaires que nous formalisons comme suit :

Première étape - Agrégation intra-modulaire : nous agrégeons les risques de chaque module entre eux pour obtenir les différents capitaux économiques, prenant ainsi la diversification existante au sein des modules de risques. Par exemple, pour un module de risques m , nous avons la formule d'agrégation intra-modulaire suivante :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^{R_m} \cdot C_i \cdot C_j}. \quad (2.2)$$

Deuxième étape - Agrégation inter-modulaire : de même, nous agrégeons les capitaux économiques obtenus lors de la première étape pour obtenir le $BSCR$. La diversification entre les différents modules de risques est également prise en compte. Nous avons ainsi pour la formule d'agrégation inter-modulaire :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j}. \quad (2.3)$$

Une étape finale, permettant d'obtenir le SCR en prenant en compte le risque opérationnel et en intégrant des ajustements, sera détaillée plus loin.

2.3 Basic Solvency Capital Requirement

Le *Basic Solvency Capital Requirement*, ou $BSCR$, correspond au capital de solvabilité requis après la prise en compte des effets de diversification. Ceci s'explique par le fait que nous calculons, pour chaque module de risques, le montant de capital nécessaire pour se prémunir contre celui-ci. Or, les risques sous-jacents sont dans une certaine mesure corrélés les uns aux autres, comme vu avec la Formule (2.3). En effet, nous nous doutons bien que si un évènement impacte le risque marché, il impactera également, certes dans une moindre proportion, celui de souscription vie et non-vie. Dans ce cas, le capital déterminé pour couvrir chaque risque sert aussi à se protéger contre un certain pourcentage des autres risques. Il n'est donc pas nécessaire de comptabiliser doublement ces montants. C'est ainsi qu'apparaît une baisse dans le montant

de capital de solvabilité requis suite à la diversification du portefeuille.

Afin de calculer le $BSCR$, nous nous référons à l'Équation (2.3) et nous utilisons la matrice des coefficients de corrélation donnée par l'EIOPA et présentée ci-après.

| Coefficients de corrélation | SCR Marché | SCR Défaut | SCR Vie | SCR Non-vie | SCR Santé |
|-----------------------------|------------|------------|---------|-------------|-----------|
| SCR Marché | 1 | | | | |
| SCR Défaut | 0,25 | 1 | | | |
| SCR Vie | 0,25 | 0,25 | 1 | | |
| SCR Non-vie | 0,25 | 0,5 | 0 | 1 | |
| SCR Santé | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | 1 |

FIGURE 2.2 – Matrice de corrélation $BSCR$

La particularité du calcul du $BSCR$ est qu'il est obtenu en agrégeant les modules de risques (marché, défaut, vie, non-vie et santé) entre eux de manière classique (2.3) et que nous additionnons ensuite le SCR des actifs incorporels. Nous avons donc,

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{inc}. \quad (2.4)$$

Nous allons maintenant prendre un exemple numérique afin d'illustrer le phénomène de diversification. Considérons le cas d'une compagnie d'assurance vie fictive n'ayant aucun actif incorporel. Les valeurs de ses SCR sont les suivantes :

- SCR marché = 85,
- SCR défaut = 10,
- SCR souscription vie = 80,
- SCR souscription non-vie = 0,
- SCR souscription santé = 0.

Nous obtenons ainsi un montant de $BSCR$ égal à 134. Cependant, si nous n'avions pas agrégé les SCR entre eux, mais juste sommé, nous aurions eu un montant réglementaire de capital de 175. Le gain en capital dû aux effets de diversification pour cette entreprise est donc de $175 - 134 = 41$.

Nous avons fait remarquer dans la Section 2.1 que certains SCR étaient calculés net de PB et brut de PB. Il faudra donc faire la même chose pour le $BSCR$. Dans le cadre du calcul du $BSCR$ net de PB, pour les sous-modules de risque ne faisant pas intervenir cette distinction, nous prendrons le montant de SCR brut de PB obtenu.

Nous allons maintenant étudier l'ensemble des modules de risques pour en voir leurs spécificités.

2.3.1 Module de risques marché

Le premier module de risques auquel nous nous intéressons est celui de marché. Il est censé quantifier le risque de perte résultant de fluctuations sur les prix des instruments financiers que possède la compagnie d'assurance dans son portefeuille. Le capital requis résulte de l'agrégation intra-modulaire (2.2) de plusieurs risques que sont les risques de taux d'intérêt, action, immobilier, de spread, de concentration et de devise ou de change. Ce sont ceux recensés dans la cartographie des risques de l'EIOPA.

Comme pour toute agrégation, il y a une matrice de coefficients de corrélation qui est utilisée. Pour être plus précis, il en existe ici deux. L'une ou l'autre étant choisie en fonction de si le choc des taux d'intérêt retenu est à la hausse ou à la baisse. Nous expliquerons plus précisément cette sélection plus loin. Les deux matrices sont les suivantes :

| Coefficients de corrélation | Taux d'intérêt | Action | Immobilier | Spread | Concentration | Devise |
|-----------------------------|----------------|--------|------------|--------|---------------|--------|
| Taux d'intérêt | 1 | | | | | |
| Action | 0 | 1 | | | | |
| Immobilier | 0 | 0,75 | 1 | | | |
| Spread | 0 | 0,75 | 0,5 | 1 | | |
| Concentration | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| Devise | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | 1 |

FIGURE 2.3 – Matrice de corrélation *SCR* marché - hausse des taux

| Coefficients de corrélation | Taux d'intérêt | Action | Immobilier | Spread | Concentration | Devise |
|-----------------------------|----------------|--------|------------|--------|---------------|--------|
| Taux d'intérêt | 1 | | | | | |
| Action | 0,5 | 1 | | | | |
| Immobilier | 0,5 | 0,75 | 1 | | | |
| Spread | 0,5 | 0,75 | 0,5 | 1 | | |
| Concentration | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| Devise | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | 1 |

FIGURE 2.4 – Matrice de corrélation *SCR* marché - baisse des taux

Nous constatons que la corrélation change uniquement pour les taux d'intérêt. Dans le cas où le choc retenu est à la hausse, l'EIOPA considère qu'il n'y a aucune corrélation avec les risques action, de spread et de concentration, alors qu'en cas de baisse, elle est de 0,5.

Étudions maintenant l'ensemble des risques composant le module marché.

Risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt résulte du risque engendré par la variation de la courbe des taux. Nous considérons deux cas, choc à la hausse ou à la baisse des taux d'intérêt. Dans le scénario de hausse des taux, le choc appliqué doit être d'au moins 100 bps, soit 1%. Concernant la baisse des taux, il n'y a pas de choc si le taux est déjà négatif, sinon nous appliquons le choc de baisse réglementaire.

Nous devons ainsi calculer deux *SCR* différents : celui à la hausse et celui à la baisse des taux. Pour le *SCR* du risque de taux d'intérêt, nous retiendrons le cas le plus défavorable pour la compagnie d'assurance. Nous avons expliqué au début de la Partie 2.3.1 que l'agrégation du *SCR* de marché dépendait du choc retenu pour le taux d'intérêt. Par conséquent, si le capital requis est plus élevé pour le risque de hausse des taux, nous retiendrons comme matrice de corrélation celle prenant en compte la hausse des taux, et inversement si le *SCR* est plus élevé pour la baisse des taux. Ce risque se calculant en brut et net de PB, la distinction du maximum se fait sur le *SCR* net de PB. De manière générale, le choc retenu pour le *SCR* brut de PB est le même que celui pour le net de PB.

Risque action

Il faut ici quantifier le risque de baisse des niveaux des marchés actions. Ce sous-module de risque est lui-même divisé en trois catégories :

- les actions de type 1 : cotées sur les marchés de l'Espace Economique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Economiques (OCDE),
- les actions de type 2 : celles qui ne sont pas de type 1, soit les actions cotées sur les marchés des pays émergents ou non cotées,
- les actions d'infrastructures éligibles regroupant les investissements en action au sens de l'article 164 bis du Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

Nous devons donc calculer l'exigence en capital pour ces trois types d'actions et qui se fait par approche scénario. Pour l'agrégation selon la Formule (2.2), nous considérons que les actions de type 1 sont corrélées à 75% avec celles de type 2 et d'infrastructures éligibles, vues ensemble. Cela nous donne donc,

$$SCR_{Action} = \sqrt{SCR_{T1}^2 + 2 \times 0,75 \times SCR_{T1} \times (SCR_{T2} + SCR_{IE}) + (SCR_{T2} + SCR_{IE})^2}.$$

Risque immobilier

Nous calculons le capital requis de solvabilité pour le risque immobilier comme étant la perte en fonds propres de l'entreprise résultant d'une baisse instantanée de 25% de la valeur de marché des biens immobiliers.

Risque de spread

Il s'agit du risque engendré par la hausse des spreads de crédit. Le *SCR* du risque de spread est la résultante des besoins en capital au titre du risque de spread sur les prêts et obligations, les structurés de crédit et les dérivés de crédit. Dans le cas des obligations, le choc appliqué à la valeur de marché de ces dernières est fonction du rating et de la duration. Pour les produits titrisés, il dépend du rating et de la qualité de la titrisation. Enfin, concernant les dérivés de

crédit, le capital requis est égal au maximum soit de la perte en fonds propres résultant d'une hausse instantanée des spreads de crédit associés aux sous-jacents des dérivés de crédit (fonction du rating), soit de la perte en fonds propres résultant d'une baisse instantanée de 75% des spreads de crédit associés aux sous-jacents des dérivés de crédit.

Risque de concentration

Le risque de concentration correspond au risque engendré par l'accumulation d'expositions à une même contrepartie, que ce soit de manière directe ou indirecte. Les actifs pris en compte sont ceux déjà soumis aux risques de taux, action, immobilier et de spread. Par contre, il ne concerne pas ceux pris en compte dans le module de risques de défaut, comme nous le verrons ensuite. Le choc appliqué est fonction du rating de l'exposition. Dans le cas d'une entreprise d'assurance ou de réassurance, et s'il n'y a pas de rating disponible, le choc sera fonction du ratio Solvabilité 2 de la contrepartie. Le besoin en solvabilité au titre du risque de concentration est ensuite l'agrégation classique des capitaux requis de l'ensemble des expositions, où nous considérons qu'il n'y a aucune corrélation.

Risque de devise

Le risque de devise repose sur une fluctuation du taux de change de toutes les devises par rapport à la devise locale. Cette dernière étant la devise utilisée par la compagnie d'assurance pour établir ses comptes réglementaires locaux. Deux scénarios sont envisagés : hausse et baisse des valeurs des autres devises. Comme pour le risque immobilier, le coefficient de choc est de 25%. De même que lors du calcul du SCR du risque de taux d'intérêt, nous retiendrons le cas le plus défavorable des deux.

2.3.2 Module de risques défaut

Le risque de défaut est le risque lié au défaut de l'ensemble des contreparties. Les expositions peuvent être classées en deux catégories. Les expositions de type 1 sont composées des éléments suivants :

- instruments d'atténuation des risques, dont réassurance, titrisation et produits dérivés,
- dépôts auprès des cédantes (nombre de contreparties inférieur à 15),
- avoirs des banques,
- engagements appelés mais non payés (nombre de contreparties inférieur à 15),
- engagements fournis pouvant créer des obligations de paiement en fonction du degré de solvabilité ou de défaut de la contrepartie,

et les expositions de type 2 correspondent aux :

- montants à recevoir des intermédiaires,
- prêts hypothécaires,
- avances sur polices,

- dépôts auprès des cédantes (nombre de contreparties supérieur à 15),
- engagements ayant été appelés mais non payés (nombre de contreparties supérieur à 15).

Il nous faut alors quantifier le capital requis pour ces deux types d'exposition. Les calculs s'effectuent tous avec une approche facteur. Nous considérons dans notre étude que le montant de *SCR* brut est connu pour les expositions de type 1. Quant aux expositions de type 2, nous utiliserons le montant des pertes en cas de défaut, les *Loss Given Default (LGD)*, de deux catégories, afin de déterminer le capital requis. La catégorisation est faite entre les montants à recevoir des intermédiaires qui sont dus depuis plus de 3 mois (*LGB_{int}*) et les montants à recevoir des expositions de type 2 autres que ceux précédents (*LGB_{aqint}*). Le capital requis au titre du risque de défaut des expositions de type 2 est ensuite déterminé ainsi :

$$SCR_{ET2} = 0,9 \times LGB_{int} + 0,15 \times LGB_{aqint}.$$

Il nous est désormais possible de déterminer le besoin en capital final au titre du risque de défaut des contreparties en agréant les deux capitaux précédents, selon l'Équation (2.2), avec un coefficient de corrélation de 0,75. Nous avons donc l'expression suivante pour le *SCR* défaut :

$$SCR_D = \sqrt{SCR_{ET1}^2 + 2 \times 0,75 \times SCR_{ET1} \times SCR_{ET2} + SCR_{ET2}^2}.$$

Intéressons-nous maintenant aux différents modules de risques de souscription, à savoir, vie, non-vie et santé.

2.3.3 Module de risques souscription vie

Il est question dans ce module de se consacrer aux risques liés aux engagements d'assurance et de réassurance vie autres que ceux santé. Le capital économique est obtenu à l'aide de la formule d'agrégation (2.2) appliquée à la matrice de coefficients de corrélation suivante :

| Coefficients de corrélation | Mortalité | Longévité | Invalité - Morbidité | Rachat | Dépenses | Révision | Catastrophe |
|-----------------------------|-----------|-----------|----------------------|--------|----------|----------|-------------|
| Mortalité | 1 | | | | | | |
| Longévité | -0,25 | 1 | | | | | |
| Invalité - Morbidité | 0,25 | 0 | 1 | | | | |
| Rachat | 0 | 0,25 | 0 | 1 | | | |
| Dépenses | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 1 | | |
| Révision | 0 | 0,25 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | |
| Catastrophe | 0,25 | 0 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | 1 |

FIGURE 2.5 – Matrice de corrélation *SCR* souscription vie

L'ensemble des capitaux aux titres des risques de ce module sont obtenus via une approche scénario. Voici le détail succinct des différents stress considérés :

Risque de mortalité

Nous considérons ici le risque lié à la hausse soudaine et permanente de 15% des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques. Cette hausse ne s'applique que pour les polices pour lesquelles la hausse entraîne une hausse des provisions techniques, hors marge pour risque.

Risque de longévité

A l'inverse du risque précédent, nous regardons comment réagit le portefeuille à une baisse soudaine et permanente de 20% des taux de mortalité. De même, les polices impactées sont uniquement celles pour lesquelles la baisse des taux de mortalité implique une hausse des provisions techniques, hors marge pour risque.

Risque d'invalidité - morbidité

Nous nous intéressons avec ce risque à la combinaison de trois chocs soudains et permanents :

- hausse de 35% des taux d'invalidité - morbidité utilisés dans le calcul des provisions techniques pour les 12 mois à venir,
- hausse de 25% des taux d'invalidité - morbidité utilisés dans le calcul des provisions techniques pour l'ensemble des mois postérieurs aux 12 mois à venir,
- baisse de 35% des taux de recouvrement pour l'invalidité et la morbidité utilisés dans le calcul des provisions techniques pour les 12 mois à venir et l'ensemble des années ultérieures.

Risque de rachat

Pour la détermination du *SCR* du risque de rachat, nous retenons le cas le plus défavorable entre les trois scénarios choqués suivants :

- hausse soudaine et permanente de 50% des taux de cessation, tout en ne dépassant pas 100%, et s'appliquant uniquement aux options pour lesquelles l'exercice entraînerait une hausse du *BE*,
- baisse soudaine et permanente de 50% des taux de cessation, tout en ne diminuant pas le *BE* de plus de 20% en valeur absolue et s'appliquant uniquement aux options pour lesquelles l'exercice entraînerait une hausse du *BE*,
- rachat massif de 40% ou 70% des polices d'assurance selon le type de contrat.

Risque de dépenses

L'exigence en capital pour le risque de dépenses résulte de l'apparition soudaine et permanente des chocs suivants :

- augmentation de 10% du montant des frais pris en compte dans le calcul des provisions techniques,
- augmentation de 1% du taux d'inflation des frais utilisé dans le calcul des provisions techniques.

Risque de révision

Le risque de révision correspond à la situation d'une hausse soudaine et permanente de 3% du montant des prestations en rente uniquement sur les engagements soumis à ce risque.

Risque catastrophe

Il s'agit ici de quantifier le montant de capital nécessaire pour faire face à une hausse soudaine de 0,15% des taux de mortalité utilisés dans le calcul des provisions techniques au cours des 12 mois à venir.

2.3.4 Module de risques souscription non-vie

Après avoir vu les risques de souscription vie, nous allons maintenant regarder les risques liés aux engagements d'assurance et de réassurance non-vie autres que ceux santé. De la même façon, le capital économique est obtenu à l'aide de la formule d'agrégation (2.2) appliquée cette fois à la matrice de coefficients de corrélation suivante :

| Coefficients de corrélation | Primes et réserve | Rachat | Catastrophe |
|-----------------------------|-------------------|--------|-------------|
| Primes et réserve | 1 | | |
| Rachat | 0,5 | 1 | |
| Catastrophe | 0,25 | 0,25 | 1 |

FIGURE 2.6 – Matrice de corrélation SCR souscription non-vie

Nous nous intéressons désormais aux trois risques de ce module et plus particulièrement au risque de primes et réserve qui repose sur une approche factorielle.

Risque de primes et réserve

Pour calculer l'exigence de capital pour le risque de primes et réserve, nous avons besoin de déterminer deux grandeurs : la mesure de volume pour le risque de primes et réserve (V_{nv}) et l'écart-type du risque de primes et réserve (σ_{nv}). Dans les deux cas, nous avons besoin d'une segmentation de ces valeurs pour calculer le montant total. Les différents segments sont listés en annexe dans la Table A.1.

La mesure de volume totale est la somme des mesures du volume pour le risque de primes et réserve de chaque segment ($V_{nl} = \sum_s V_s$). Pour les calculer, nous considérons les variables d'entrée :

- $V_{prem,s}$: la mesure de volume pour le risque de primes du segment s,
- $V_{res,s}$: la mesure de volume pour le risque de réserve du segment s,
- DIV_s : le facteur de diversification géographique du segment s.

La mesure du volume pour un segment est ensuite déterminée grâce à la formule :

$$V_s = (V_{prem,s} + V_{res,s}) (0,75 + 0,25 \times DIV_s).$$

Concernant maintenant l'écart-type du risque de primes et réserve, nous avons besoin des variables d'entrée :

- $\sigma_{prem,s}$: l'écart-type du risque de primes du segment s dont les valeurs se trouvent en annexe dans la Figure [A.2](#),
- $\sigma_{res,s}$: l'écart-type du risque de réserve du segment s dont les valeurs se trouvent en annexe dans la Figure [A.2](#),
- $corr_{s,t}$: le coefficient de corrélation entre les segments s et t dont la matrice de ces coefficients est donnée en annexe avec la Figure [A.1](#)

Dans un premier temps, nous devons déterminer σ_s , l'écart-type du risque de primes et réserve pour le segment s :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{prem,s}^2 \cdot V_{prem,s}^2 + \sigma_{res,s}^2 \cdot V_{res,s}^2 + 2 \cdot \sigma_{prem,s} \cdot V_{prem,s} \cdot \sigma_{res,s} \cdot V_{res,s} \cdot corr_{s,t}}}{V_{prem,s} + V_{res,s}}.$$

Dans un deuxième temps, il nous faut agréger ces derniers afin d'obtenir l'écart-type global pour le risque de primes et réserve :

$$\sigma_{nl} = \frac{1}{V_{nl}} \sqrt{\sum_{s,t} corr_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}.$$

Pour finir, le capital requis pour le risque de primes et réserve s'exprime sous la forme

$$SCR_{nl,premres} = 3 \times \sigma_{nl} \times V_{nl}.$$

Risque de rachat

Le risque de rachat en souscription non-vie fait référence au risque sous-jacent aux événements soudains ci-dessous :

- cessation de 40% des contrats d'assurance pour lesquels l'exercice entraînerait une hausse du BE ,
- baisse de 40% du nombre des futurs contrats d'assurance ou de réassurance utilisé dans le calcul des provisions techniques.

Risque catastrophe

Nous considérons dans notre étude le montant de capital nécessaire pour ce risque comme connu. Il est lui-même calculé en considérant l'ensemble des sous-modules de risques « risque de

catastrophe naturelle », « risque de catastrophe en réassurance dommages non proportionnelle » et « risque de catastrophe d'origine humaine ».

2.3.5 Module de risques souscription santé

Les calculs du module de risques de souscription santé étant similaires à ceux effectués dans le cadre des exigences de capital pour les risques en souscription vie et non-vie, nous ne rentrons pas dans les détails ici. Cette motivation est d'autant plus grande que nous avons fait le choix, dans notre étude, de considérer le *SCR* santé comme une variable d'entrée. Toutefois, il est possible de se référer au Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 pour en connaître la teneur exacte.

2.3.6 Module de risques actifs incorporels

Ce module de risques concerne les actifs incorporels tels que définis par la norme Solvabilité 2. Nous notons par $V_{Incorporels}$ le montant total de ces actifs. Nous calculons le besoin en capital au titre du risque sur les actifs incorporels de la manière suivante :

$$SCR_{Inc} = 0,8 \times V_{Incorporels}.$$

2.4 Risque opérationnel

Le calcul du SCR du risque opérationnel repose, en partie, sur deux éléments : les provisions techniques et les primes acquises. Les provisions techniques correspondent ici au montant de provisions techniques brutes de réassurance et hors marge pour risque. Les primes acquises font référence au montant des cotisations acquises brutes de réassurance. Il faut également prendre en compte un pourcentage des frais annuels associés à la gestion des contrats en Unités de Compte (UC) pour les 12 derniers mois (EXP_UC). En détail, la formule est exposée ci-dessous :

$$SCR_{op} = 0,25 \times EXP_UC + \min [0,3 \times BSCR_B; \max [CR_{PT}; CR_{PA}]].$$

Le capital requis pour le calcul du risque opérationnel pour les provisions techniques (CR_{PT}) et pour les primes acquises (CR_{PA}) est calculé, dans les deux cas, en faisant intervenir des montants afférents à la vie et à la non-vie. De plus, concernant la vie, nous excluons les contrats en UC et ne prenons donc en compte que les contrats en euros. Concernant les primes, nous incluons également celles acquises lors de l'année précédant les 12 derniers mois. Nous avons donc, pour le calcul du capital requis au titre des provisions techniques,

$$CR_{PT} = 0,0045 \times \max [PT_V - PT_V_{UC}; 0] + 0,03 \times \max [PT_NV; 0],$$

et au titre des primes acquises,

$$\begin{aligned} CR_{PA} &= CR_{PA_V} + CR_{PA_NV} \\ &= 0,04 \times (PA_V_n - PA_V_{UC,n}) \\ &\quad + \max [0,04 \times (PA_V_n - 1,2 \times PA_V_{n-1} - (PA_V_{UC,n} - 1,2 \times PA_V_{UC,n-1})); 0] \\ &\quad + 0,03 \times PA_NV_n + \max [0; 0,03 \times (PA_NV_n - 1,2 \times PA_NV_{n-1})]. \end{aligned}$$

2.5 Solvency Capital Requirement

Maintenant que nous avons tous les éléments nécessaires pour déterminer le besoin en capital de solvabilité requis total, nous allons voir comment celui-ci est calculé. Comme nous l'avons vu avec la Schématisation [1.3](#), le *SCR* est la somme du *BSCR* et du *SCR* pour le risque opérationnel auquel nous retranchons des facteurs d'ajustement. Nous avons vu dans la Partie [2.3](#) comment trouver le *BSCR* et en [2.4](#) le calcul de capital pour le risque opérationnel. Il nous reste donc à nous intéresser aux ajustements.

Le premier facteur d'ajustement est celui visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes de provisions techniques (*AdjTP*). Il fait intervenir les *BSCR* brut et net de PB ainsi que les provisions techniques sans marge de risque afférentes à des prestations discrétionnaires futures (*FDB*) et se calcule de la manière suivante :

$$AdjTP = \max [\min [BSCR_B - BSCR_N; FDB]; 0].$$

Le deuxième facteur est celui tenant compte de la capacité d'absorption des impôts différés (*AdjID*). Nous le déterminons comme suit :

$$AdjID = \max [\min [IS \times (BSCR_B + SCR_{op} + AdjTP); IDP - IDA]; 0],$$

où *IS* correspond à l'impôt sur les sociétés. Nous prendrons comme convention la norme française, *IS* = 31% pour un exercice fiscal ouvert à compter du 1^{er} janvier 2019.

Il existe également un ajustement dû aux fonds cantonnés pour l'agrégation du *SCR* net de PB (*AdjRFF*), mais nous le considérerons comme nul dans notre étude.

Nous sommes maintenant en disposition de calculer le *SCR* global. Cependant, la formule évoquée précédemment n'est pas tout à fait exhaustive. En effet, deux autres facteurs sont pris en compte dans le calcul. Celui du capital requis pour les contrats en accord avec l'article 4 de la directive 2003/41/EC (*CRD*), qui est marginal, et l'ajout d'un capital *Add-on*. Ce dernier correspond à un besoin en capital supplémentaire au *SCR* et réclamé par les autorités de contrôle, afin de réduire l'exposition aux risques de la compagnie d'assurance. Nous avons donc finalement,

$$SCR = BSCR_B + SCR_{op} - AdjTP - AdjID - AdjRFF + CRD + Add_{on}.$$

2.6 Fonds propres

Comme évoqué dans la Partie [1.3.1](#), les fonds propres sont classés en deux catégories qui sont les fonds propres de base et auxiliaires. Les fonds propres de base sont inscrits dans le bilan prudentiel alors que ceux auxiliaires sont hors bilan car susceptibles d'être appelés pour compenser des dettes. Ils sont également découpés en tiers, aussi appelés niveaux. Cela permet de classer les fonds propres en trois catégories : les fonds propres de niveau 1, de niveau 2 et de niveau 3.

Les fonds propres de niveau 1 sont eux-mêmes divisés en deux catégories : ceux non restreints et ceux restreints. Ces distinctions de tiers se font selon certains critères comme, par exemple, la disponibilité permanente, la subordination ou la maturité. Les fonds propres de niveau 1 sont, bien entendu, supposés avoir la meilleure qualité ; la qualité étant ensuite décroissante.

Il est essentiel de préciser que les fonds propres de niveau 1 sont entièrement constitués de fonds propres de base alors que ceux de niveaux 2 et 3 peuvent être composés de fonds propres de base comme auxiliaires. Nous résumons dans les tableaux suivants les éléments éligibles pour les différentes catégories de fonds propres.

| | |
|-----------------------|--|
| Fonds propres de base | Capital social Fonds d'établissement Primes d'émission Report à nouveau (net des dividendes prévus au titre de l'exercice) Réserve de réconciliation Dette subordonnée (maturité à l'émission supérieure à 10 ans) Impôt différé actif (IDA) net |
|-----------------------|--|

TABLE 2.1 – **Éléments éligibles de niveau 1**

| | |
|---------------------------|---|
| Fonds propres de base | Dette subordonnée (maturité à l'émission supérieure à 5 ans) Capital appelé (déduction niveau 1) |
| Fonds propres auxiliaires | Capital souscrit non appelé Lettres de crédit et garanties Rappels de cotisation |

TABLE 2.2 – **Éléments éligibles de niveau 2**

| | |
|---------------------------|--|
| Fonds propres de base | Dette subordonnée (maturité à l'émission inférieure à 5 ans) IDA net |
| Fonds propres auxiliaires | Tout élément de fonds propres auxiliaires disponible et non éligible en niveau 2 |

TABLE 2.3 – **Éléments éligibles de niveau 3**

Un élément important des fonds propres de niveau 1 est la réserve de réconciliation, dans la mesure où celle-ci représente une part significative de l'ensemble des fonds propres. Elle correspond à l'excédent des actifs par rapport aux passifs auquel nous avons soustrait les actions propres à la compagnie d'assurance, les dividendes, les distributions et les charges prévisibles, les fonds propres de base hors dettes subordonnées et un ajustement pour les fonds propres restreints. La réserve de réconciliation peut être interprétée comme les plus ou moins-values latentes après prise en compte de l'impôt différé.

Intéressons-nous maintenant aux exigences et limites réglementaires concernant les différents types de fonds propres. D'après l'article 82 du Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive Solvabilité 2, nous avons les conditions suivantes :

- les fonds propres éligibles de niveau 1 doivent couvrir au moins 50% du *SCR*,
- les fonds propres éligibles de niveau 3 ne doivent pas dépasser 15% du *SCR*,
- le montant cumulé des fonds propres éligibles de niveaux 2 et 3 ne peut dépasser la moitié du *SCR*.

De plus, les fonds propres éligibles de niveau 1 restreints ne peuvent pas dépasser 25% du montant de fonds propres éligibles de niveau 1 non restreints. Ainsi, en utilisant les notations *FPE* (fonds propres éligibles), *FPB* (fonds propres de base) et *FPA* (fonds propres auxiliaires), nous pouvons résumer les conditions d'éligibilité avec les formules ci-dessous.

$$FPE_{NR_T1} = FPB_{NR_T1},$$

$$FPE_{R_T1} = \min [0, 25 \times \max [0; FPE_{NR_T1}]; FPB_{R_T1}],$$

$$FPE_{T2} = \max [0; \min [0, 5 \times SCR; FPB_{R_T1} - FPE_{R_T1} + FPB_{T2} + FPA_{T2}]],$$

$$FPE_{T3} = \max [0; \min [0, 5 \times SCR - FPE_{T2}; \min [0, 15 \times SCR; FPB_{T3} + FPA_{T3}]]].$$

Le montant total de fonds propres éligibles correspond à la somme, pour tous les niveaux, des fonds propres éligibles. Le ratio de solvabilité peut enfin être déterminé en considérant le rapport entre les fonds propres et le *SCR*.

Chapitre 3

Analyse de sensibilité

Les erreurs opérationnelles sont devenues une préoccupation majeure au fil des années. Bien qu'elles soient de types divers et variés, nous avons décidé de nous pencher sur le cas des erreurs en lien avec les variables d'entrée de nos modèles. Nous définirons dans une première section quelles sont précisément les erreurs d'intérêt pour notre étude. Nous chercherons ainsi à déterminer en quelle proportion l'incertitude d'une variable d'entrée impactera l'incertitude globale du modèle. Pour cela, nous utiliserons une analyse de sensibilité dont un état de l'art sera effectué. Nous présenterons notamment à titre illustratif une première approche possible, avec ses avantages et surtout ses inconvénients, qui feront que nous chercherons à proposer des approches plus en lien avec notre étude. En effet, nous verrons que les erreurs faites sur les variables d'entrée sont corrélées entre elles et que la méthode illustrative propose de simuler les variables de manière indépendantes. Cela a pour effet de sous-estimer l'indice de sensibilité obtenu, particulièrement lorsque la variance d'une variable d'entrée est grande devant les autres. La façon dont nous modélisons la structure de dépendance sera également détaillée dans ce chapitre.

Nous nous concentrerons ici sur les contributions théoriques de ce mémoire et nous aborderons trois méthodes d'estimation de coefficients de sensibilité. La première repose sur les indices de Sobol tels que définis par Sobol (1993). Après l'étude théorique de ces indices, nous en exposerons deux estimateurs. Le premier se base sur une approche brutale et qui nécessitera un grand nombre de simulations pour converger correctement. Le deuxième consiste en une approche alternative qui réduit le nombre d'évaluations et donc le temps de calcul mais qui a le défaut de ne pas être robuste lorsque le modèle s'éloigne de la linéarité, ce qui est notamment le cas pour la formule d'agrégation de la Formule Standard. De plus, nous constaterons qu'en la présence de dépendance, les indices de Sobol ne sont plus interprétables convenablement. Ainsi, nous nous tournerons vers les indices de Shapley introduits en analyse de sensibilité par Owen (2014). Ces derniers ont l'avantage d'être interprétables dans tous les cas mais ont le désavantage de nécessiter un temps de calcul conséquent. De plus, nous présenterons un algorithme permettant d'obtenir une complexité algorithmique proche de celle des indices de Sobol. Enfin, la dernière méthode présentée est basée sur une approche déterministe qui offre la possibilité d'approximer la variance d'un modèle quelconque. A des fins d'illustration, nous appliquerons cette approche au calcul du *BSCR*.

3.1 Erreurs opérationnelles

Qui n'a jamais confondu deux chiffres en recopiant un nombre ? Qui n'a jamais rentré un chiffre en trop en tapant deux fois sur la même touche ou sur une autre touche de son clavier ? Qui ne s'est jamais trompé de fichier en envoyant un mail ou en important des données ? Ces

situations nous sont toutes familières au quotidien. Que nous nous rendons compte ou non de nos erreurs, elles sont un risque que nous devons prendre en considération et que nous qualifions d'erreurs opérationnelles. Nous avons souligné dans la Section 1.4 que l'arrivée massive des données à disposition avait entraîné une complexification des modèles utilisés et une apparition d'outils de calcul et de reporting. Leur but est d'assurer une vitesse d'exécution optimale des modèles les plus complexes, tout en permettant de fiabiliser le processus et notamment en limitant les erreurs opérationnelles en tout genre. En effet, plus le modèle est complexe, plus la probabilité de commettre une erreur dans une formule, par exemple, est forte. Ceci constitue une autre source d'erreur opérationnelle à prendre en compte. De plus, pour pouvoir utiliser ces logiciels, il faut fournir un nombre conséquent de variables d'entrée. Elles sont souvent transmises ou importées via des fichiers plats (classeur Excel ou fichier csv) dans lesquels de nombreuses erreurs apparaissent. La motivation de notre étude est de nous intéresser à ces erreurs opérationnelles, à savoir celles en lien avec les variables d'entrée des modèles. Les erreurs que nous considérons sont diverses et variées, mais les plus fréquentes sont celles listées ci-dessous :

- mauvaise valeur : mauvais chiffre dans le nombre, décalage de la virgule, un chiffre en trop, mauvaise devise utilisée,
- mauvaise version du fichier,
- décalage d'une ligne dans tout le fichier,
- erreur qui provient d'un autre modèle et qui entraîne des erreurs sur d'autres variables d'entrée.

Sachant qu'une erreur est survenue, il est difficile de connaître à l'avance le pourcentage d'erreur effectué par rapport à la valeur attendue. En effet, selon le type d'erreur ou bien si la virgule est décalée dans un sens ou dans l'autre, nous n'obtenons pas le même impact. L'exemple ci-dessous met en lumière cette problématique. Nous avons considéré trois erreurs différentes sur le nombre 1859432,35 : deux chiffres ont été confondus, décalage de la virgule à gauche ou à droite. Nous avons délibérément omis les espaces qui séparent les puissances de mille du nombre afin de le représenter tel qu'il est écrit en réalité dans les fichiers plats. De cette façon, nous nous rendons compte qu'une erreur peut arriver rapidement et qu'il n'est pas évident de la détecter.

| Erreur commise | Valeur avec erreur | Écart | Pourcentage d'erreur |
|---------------------------------|--------------------|----------------|----------------------|
| Chiffre 6 à la place du 9 | 1856432,35 | -3 000,00 | -0,16% |
| Décalage de la virgule à gauche | 185943,235 | -1 673 489,12 | -90,00% |
| Décalage de la virgule à droite | 18594323,5 | -16 734 891,15 | 900,00% |

TABLE 3.1 – Exemple de l'impact des erreurs opérationnelles

Partons maintenant du dernier type d'erreur listé, à savoir celui qui correspond à une erreur sur la valeur due à un modèle en amont du notre et qui contamine de manière cohérente les autres variables d'entrée. Si nous reprenons le calcul d'un *SCR*, Équation (2.1), nos variables d'entrée sont les valeur de marché (*VM*) et *Best Estimate* (*BE*) qui sont calculées grâce à un outil de projection des flux indépendant de notre modèle. Si nous supposons que le logiciel a fait une erreur de 3% sur la *VM* du scénario central, il est raisonnable de considérer que cela impliquera une erreur sur le *BE* du scénario central ainsi que sur la *VM* du scénario stressé. Par exemple, cela peut être également de 3% sur le *BE* central et de 5% sur la *VM* choquée. A partir de ces cas fictifs, il est naturel de nous demander comment nous allons modéliser les

erreurs opérationnelles et l'interaction entre ces erreurs ?

Dans certains cas, il est aisé de s'apercevoir de la présence d'une erreur ainsi que de sa provenance. Cependant, de nombreux modèles demandent maintenant un nombre très élevé de variables en entrée et il est difficile, long et fastidieux de vérifier la ou les variables sources d'erreur. Si nous devons effectuer un audit ou un vérification des résultats et que nous disposons d'un cours laps de temps, cela devient encore plus compliqué. Pour traiter les fichiers contenant les variables d'entrée, plusieurs méthodes indicatives peuvent être utilisées. Nous pouvons, par exemple, regarder la cohérence avec l'année précédente ou calculer la somme des écarts au carré avec l'année précédente en décalant les valeurs d'une ligne vers le haut ou vers la bas et en s'assurant que dans les deux cas la somme augmente. Cependant, ces astuces ne permettent pas forcément de confirmer l'exactitude de la valeur en entrée mais simplement si des erreurs grossières sont présentes, des petites erreurs pouvant ainsi subsister. De plus, il est évident que certaines variables d'entrée ont plus ou moins d'impact sur l'erreur finale de notre modèle. Des erreurs minimales auront des conséquences inégales sur le résultat final en fonction de la variable d'entrée. Il faudra donc prêter plus d'attention aux variables induisant le plus d'erreur sur notre variable de sortie. Nous pouvons, à juste titre, nous demander comment déterminer les variables d'entrée qui contribuent le plus à l'incertitude final du modèle ?

Pour répondre à cette dernière question, nous allons utiliser des méthodes reposant sur le calcul de sensibilité. Dans la prochaine section, nous verrons les différentes approches mentionnées dans la littérature avant de nous pencher, dans les parties suivantes, sur les méthodes que nous avons développées dans notre étude.

3.2 État de l'art

Aujourd'hui, il n'est pas rare d'être confronté à des fonctions complexes qui prennent en entrée un nombre conséquent de variables. Dans de nombreux cas, la fonction en elle-même peut être compliquée à étudier en détail car trop sophistiquée, voire inconnue. Dans ce cas, elle s'apparente à une boîte noire dont nous connaissons essentiellement les variables d'entrée et leur sortie. Des études de cas concrets sur le risque de modèle concernant cette problématique de *black box* sont données par [Aggarwal et al. \(2016\)](#) et [Black et al. \(2017\)](#). Dès lors que la fonction est trop complexe, nous avons envie de regarder comment se comporte la sortie du modèle lorsque nous appliquons des perturbations aux variables d'entrée, afin de déterminer les sources d'erreur. Ce processus porte le nom d'analyse de sensibilité. Il est possible de voir l'analyse de sensibilité comme l'étude qui cherche à déterminer comment l'incertitude dans la variable de sortie peut être répartie entre les différentes sources d'incertitude des variables d'entrée. Nous pouvons nous référer à [Saltelli et al. \(2004\)](#) pour trouver un approfondissement sur les sensibilités. L'analyse de sensibilité et leur étude permettent notamment de repérer des erreurs techniques dans le modèle, d'identifier des régions critiques de l'espace de définition des variables d'entrée ou encore de simplifier les modèles en réduisant la dimension. Cette dernière problématique est traitée par [Janon \(2012\)](#) qui utilise une méta-modélisation, réduction du nombre de dimensions du modèle, dans le cadre de la modélisation de fluides géophysiques et à l'aide des indices de Sobol.

Dans la littérature de l'analyse de sensibilité, deux approches majeures se distinguent, celle locale et celle globale. La méthode locale consiste à étudier l'impact sur la sortie du modèle d'une petite variation d'une variable d'entrée autour d'une valeur de départ. De ce fait, cette approche repose sur des calculs de dérivés partielles, $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$, comme c'est le cas en grande partie en finance. Un des avantages est que nous obtenons des résultats avec un faible temps de calcul. Cependant,

cela ne nous permet pas d'étudier l'ensemble du domaine de définition des variables d'entrée. Pour cela, il faudrait utiliser l'approche globale qui s'intéresse principalement à la variabilité de la sortie du modèle suite à un choc sur une variable d'entrée. Dans ce mémoire, nous nous sommes, dans un premier temps, penchés sur une étude via une méthode globale particulière reposant sur la décomposition de la variance, les indices de Sobol. Cependant, un lecteur intéressé par un ouvrage complet sur l'analyse de sensibilité par approche globale peut se tourner vers [Saltelli et al. \(2008\)](#).

Au fil des années, de nombreuses méthodes de calcul de sensibilité ont vu le jour. Une première approche naturelle considère que nos variables d'entrée sont indépendantes et étudie la déformation de la sortie suite à un choc appliqué aux différentes variables. Le défaut majeur est que nous ne prenons pas en compte les corrélations entre les variables d'entrée. Ceci est pourtant un point central dans nos hypothèses sur les erreurs opérationnelles vues dans la partie précédente [\(3.1\)](#). Il nous faudra donc trouver une approche moins « naïve » prenant en considération les corrélations. Une méthode qui tient compte de la corrélation entre les erreurs sur nos variables d'entrée est donnée par [Fang et al. \(2004\)](#). Ils proposent d'estimer les coefficients de sensibilité en simulant dans un premier temps un grand nombre de points pour une variable donnée. Dans un second temps, pour chaque génération, ils considèrent le rapport de la différence entre la variable de sortie calculée avec la variable simulée et celle initiale sur la différence entre la variable d'entrée simulée et celle de départ. Pour finir, ils obtiennent la sensibilité d'une variable d'entrée en moyennant le rapport précédent sur l'ensemble des points simulés. L'avantage de cette approximation est qu'elle n'est pas coûteuse en temps de calcul. Cependant, l'interprétation des résultats est difficile. Nous nous sommes alors tournés vers les méthodes basées sur la décomposition de variance et qui ont la particularité de sommer à un et donc d'être interprétables. L'approche retenue est celle des indices de Sobol introduits par [Sobol \(1993\)](#) et que nous définirons par la suite. Bien que son utilisation ne soit pas aussi simple que dans la cas de l'indépendance, [Da Veiga et al. \(2009\)](#) et [Chastaing \(2013\)](#) nous proposent différentes méthodes pour le calcul des indices de Sobol dans le cadre de variables d'entrée dépendantes. Malheureusement, dans ce cadre de dépendance, la propriété d'interprétabilité recherchée ne fonctionne plus car les indices ne somment plus à un. C'est ainsi que nous nous sommes finalement tournés vers les indices de Shapley, qui eux restent interprétables dans le cas de dépendance entre les variables d'entrée, comme nous pouvons le voir avec [Iooss and Prieur \(2019\)](#).

Une approche émergente, intéressante et différente du calcul de sensibilité, est celle proposée par [Tsanakas and Millosovich \(2016\)](#) et [Pesenti et al. \(2018\)](#). Elle se base sur l'utilisation des mesures de risque. L'idée est de prendre la problématique à contre-pied et de stresser la variable de sortie pour calculer les sensibilités. Pour cela, il faut appliquer des mesures de distorsion et de risque sur la variable de sortie. Cela suppose de connaître la loi de distribution de la variable réponse, ce qui n'est pas le cas dans nos applications.

Après avoir réalisé un état de l'art de l'analyse de sensibilité, nous allons expliciter un exemple de première approche telle que parfois utilisée en pratique. Ensuite, nous rentrerons dans le détail des indices de Sobol et de Shapley et nous expliquerons notre contribution à ces approches.

3.3 Première approche de la sensibilité

Comme expliqué précédemment, une des contraintes principales de notre étude est la modélisation des corrélations entre les erreurs de l'ensemble des variables d'entrée de notre modèle. Ceci entraîne une complexification des méthodes d'estimation des coefficients de sensibilité ainsi

que du temps de calcul nécessaire. Par conséquent, cette hypothèse n'est pas toujours prise en compte dans la littérature et sur le marché. C'est ce que nous avons constaté lorsque nous nous sommes intéressés à une pratique utilisée sur le marché. En effet, dans cette méthode, les variables d'entrée sont toutes simulées indépendamment les unes des autres. Ensuite, la sensibilité de chaque variable d'entrée sur la variable de sortie est trouvée en calculant la corrélation absolue maximale avec la variable réponse :

$$s^* = \arg \max_i |corr(Y, X_i)|.$$

L'avantage de cette approche est qu'elle nous permet de visualiser les interactions entre les différents agrégats. Cependant, il nous est impossible de les comprendre et donc de les analyser. De plus, le défaut majeur est que nous ne prenons pas en compte la corrélation entre les erreurs des variables d'entrée. Ceci implique que nous sous-estimons la valeur réelle de la sensibilité. Pour le prouver, nous allons appliquer cette approche à l'exemple ci-dessous en calculant la sensibilité et en considérant un cas de corrélation.

Exemple 3.1. Supposons que nous sommes dans le cas bidimensionnel et que la variable de sortie s'écrit comme : $Y = X_1 + X_2$. Supposons de plus que nos variables d'entrée sont corrélées avec un facteur de corrélation ρ , $corr(X_1, X_2) = \rho$. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} corr(Y, X_1) &= corr(X_1 + X_2, X_1) \\ &= \frac{cov(X_1 + X_2, X_1)}{\sqrt{Var[X_1 + X_2]} \times \sqrt{Var[X_1]}} \\ &= \frac{Var[X_1] + \rho \times \sqrt{Var[X_1]} \times \sqrt{Var[X_2]}}{\sqrt{Var[X_1] + Var[X_2] + 2 \times \rho \times \sqrt{Var[X_1]} \times \sqrt{Var[X_2]}}} \times \sqrt{Var[X_1]}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant traiter les deux cas suivants :

- $\rho = 0$: les variables d'entrée sont indépendantes, ce qui est le cadre de la pratique de marché. L'expression précédente peut alors se simplifier et nous obtenons :

$$corr(Y, X_1) = \frac{\sqrt{Var[X_1]}}{\sqrt{Var[X_1] + Var[X_2]}} < 1,$$

- $\rho = 1$: les variables d'entrée sont corrélées. Nous avons cette fois :

$$corr(Y, X_1) = \frac{\sqrt{Var[X_1]} + \sqrt{Var[X_2]}}{\sqrt{Var[X_1] + Var[X_2] + 2 \times \sqrt{Var[X_1]} \times \sqrt{Var[X_2]}}} = 1.$$

Nous constatons donc que si nous simulons les variables X_1 et X_2 sans prendre en compte la corrélation ρ , nous sous-estimons la sensibilité. Toujours dans le cas de cette approche utilisée en pratique et pour aller plus loin, nous remarquons que la sensibilité tend vers 0 lorsque la variance de la variable d'entrée X_2 est grande devant celle de X_1 , alors qu'elle devrait être égale à 1. Ce phénomène montre que la sous-estimation peut être conséquente et problématique d'un point de vue opérationnel. Si nous rajoutons le fait qu'il est difficile d'analyser les valeurs obtenues et de les interpréter, nous ne pouvons pas nous baser sur cette pratique pour estimer nos coefficients de sensibilité. Ainsi, notre souhait est de mettre en place des approches qui améliorent et comblent

les défauts de ce qui peut être utilisé en pratique. Pour ces raisons, nous nous consacrerons, par la suite, à des méthodes d'estimation de coefficients de sensibilité qui prennent en compte les corrélations entre les erreurs des variables d'entrée. Nous verrons donc dans la prochaine partie comment nous avons choisi de modéliser cette dépendance.

3.4 Modélisation de la dépendance et conditionnement gaussien

Il existe plusieurs manières de prendre en compte la dépendance entre les variables d'entrée mais la principale façon est d'avoir recours aux copules. Cet outil mathématique permet de simuler les variables aléatoires en tenant compte de la structure de dépendance et des lois marginales. Il est largement utilisé en finance (Cherubini et al. (2004)), actuariat et gestion des risques (McNeil et al. (2005)). En analyse de sensibilité, il est possible de se référer à Kucherenko et al. (2012) qui modélise la dépendance de variables uniformément distribuées avec une copule gaussienne pour calculer les coefficients de sensibilité. Ils évoquent notamment le fait que dans le cadre de l'usage d'une copule gaussienne, le problème se ramène au cas de la loi normale multivariée.

Dans la Section 3.1, nous avons détaillé les différentes sources d'erreurs opérationnelles et leurs caractéristiques. Nous nous sommes aperçus qu'il était difficile de déterminer à l'avance l'impact qu'elles auraient, en terme de pourcentage d'erreur. Toutefois, il paraît cohérent de supposer qu'il y a une propriété de symétrie de ces erreurs. En effet, si nous nous trompons dans la valeur d'une variable d'entrée, il y aura autant de chance que l'erreur soit à la hausse ou à la baisse. Ce phénomène nous conduit à considérer les erreurs opérationnelles comme des stress appliqués sur la variable d'entrée. Elles seront donc modélisées comme des variables aléatoires gaussiennes dont la loi jointe est une loi multinormale. Pour formaliser la modélisation, nous supposons que notre modèle contient n variables d'entrée qui sont représentées par un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ et dont le vecteur d'espérance $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ correspond aux valeurs d'entrée attendues et qui est donc sans erreur. La corrélation entre les erreurs opérationnelles effectuées sur les variables d'entrée est captée par la matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}$. Ainsi, pour modéliser l'incertitude sur notre vecteur aléatoire de variables d'entrée, nous supposons que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

En plus de modéliser correctement notre problématique, le fait de considérer notre vecteur de variables d'entrée comme gaussien nous permettra ensuite de calculer plus aisément les indices de Sobol et de Shapley comme nous le verrons dans les parties dédiées à ces indices. Ceci s'expliquant par le fait qu'ils font intervenir des espérances conditionnelles. Par conséquent, il est nécessaire de connaître exactement la loi conditionnelle, ce qui n'est en pratique pas souvent le cas. L'avantage avec un vecteur aléatoire de loi multivariée est que nous sommes en mesure de déterminer la loi conditionnelle grâce au théorème ci-dessous dont une preuve est donnée par le Professeur Guyader dans son cours. Ces calculs sont également développés par El Bekri (2016) dans le cadre de la prédiction de mortalité.

Théorème 3.1. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ un vecteur gaussien. Nous supposons que \mathbf{u} est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ et \mathbf{v} son complémentaire tel que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$. Alors, le vecteur $(\mathbf{X}_v | \mathbf{X}_u)$ suit lui aussi une loi normale multidimensionnelle, $(\mathbf{X}_v | \mathbf{X}_u) \sim \mathcal{N}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\Omega})$, où

$$\mathbf{e} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_v | \mathbf{X}_u] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_v] + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_u}^{-1} (\mathbf{X}_u - \mathbb{E}[\mathbf{X}_u])$$

et

$$\Omega = \Sigma_{X_v} - \Sigma_{X_v, X_u} \Sigma_{X_u}^{-1} \Sigma_{X_u, X_v}.$$

Remarque 3.1. Les termes Σ_{X_v, X_u} , Σ_{X_u} et Σ_{X_u, X_v} correspondent à des sous-matrices de la matrice de variance-covariance globale Σ que nous pouvons voir de la façon suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{X_u} & \Sigma_{X_u, X_v} \\ \Sigma_{X_v, X_u} & \Sigma_{X_v} \end{pmatrix}.$$

Nous constatons donc que nous avons la relation $\Sigma_{X_v, X_u} = \Sigma_{X_u, X_v}^t$ par propriété de symétrie de la matrice de variance-covariance Σ .

Remarque 3.2. Le vecteur d'espérance conditionnelle $e = \mathbb{E}[X_v | X_u]$ correspond à la projection orthogonale du vecteur aléatoire X_v sur l'espace engendré par la variable aléatoire constante 1 et le vecteur aléatoire X_u , c'est-à-dire $\mathbf{Vect}(1, X_u)$. Celui-ci est dépendant de la réalisation des variables aléatoires X_u , ce qui n'est pas le cas de la nouvelle matrice de variance-covariance. Si nous nous plaçons dans le cas bidimensionnel, soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, nous avons les relations $\Sigma_{X_2, X_1} = \text{cov}(X_1, X_2) = \Sigma_{X_1, X_2}$ et $\Sigma_{X_1} = \text{Var}[X_1]$.

Le théorème précédent nous donne la loi conditionnelle d'un vecteur gaussien multidimensionnel qui a la propriété intéressante de rester gaussien par conditionnement. Nous allons maintenant voir comment, en pratique, nous pouvons simuler un vecteur aléatoire de distribution normale multivariée. Nous utiliserons le théorème exposé ci-après.

Théorème 3.2. (Factorisation de Cholesky) Soit \mathbf{A} une matrice réelle symétrique définie positive. Alors, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure \mathbf{L} telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$. De plus, si nous imposons que les coefficients diagonaux de \mathbf{L} soient strictement positifs, il y a unicité de la décomposition.

Une des applications de ce théorème est qu'il permet de simuler de manière très simple un vecteur de loi normale multidimensionnelle. Pour nous en convaincre, considérons $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ un vecteur gaussien de loi multivariée et $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_n)$ un vecteur de variables gaussiennes centrées, réduites et indépendantes. Les composantes Z_i du vecteur \mathbf{Z} sont donc des variables aléatoires telles que $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si nous nous assurons que la matrice de variance-covariance est réelle semi-définie positive, nous pouvons alors utiliser le Théorème 3.2 pour obtenir la factorisation $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$, où \mathbf{L} est une matrice réelle triangulaire inférieure. Ainsi, nous obtenons la simulation du vecteur \mathbf{X} en utilisant la relation : $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$. Ce dernier suit bien une loi normale multidimensionnelle d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de variance-covariance Σ . En effet, nous avons :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{L}\mathbb{E}[\mathbf{Z}] + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu},$$

et

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \text{Var}[\mathbf{L}\mathbf{Z}] = \mathbf{L}\text{Var}[\mathbf{Z}]\mathbf{L}^t = \mathbf{L}\mathbf{I}_n\mathbf{L}^t = \Sigma.$$

Nous venons de détailler le choix de notre modélisation des erreurs sur les variables d'entrée ainsi que des corrélations existantes entre elles. Nous avons également vu comment simuler en pratique ces variables. Nous allons maintenant nous pencher sur le cadre théorique des estimateurs de sensibilité et de leur mise en oeuvre algorithmique.

3.5 Indices de Sobol

Il est question dans cette section de présenter dans un premier temps le cadre théorique des indices de Sobol puis d'étudier différents estimateurs de ces indices de sensibilité. Nous proposerons ainsi deux approches : la première appelée approche brutale et la seconde nommée approche alternative. Nous en préciserons les avantages et les inconvénients.

3.5.1 Notations

Avant de commencer à aborder la partie théorique de notre étude, nous allons définir l'ensemble des notations retenues que nous garderons dans toute la suite du mémoire. Nous les listons ci-dessous :

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ désigne un vecteur de variables aléatoires de densité p , de vecteur d'espérance $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ de terme général $(\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Les composantes X_i du vecteur \mathbf{X} correspondent aux variables d'entrée de notre modèle qui sont supposées être au nombre de n . Dans le cadre de notre étude, elles font référence aux éléments définis dans le Chapitre 2 et sont par exemple les valeurs des VM , BE ou FP ,
- $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ la fonction de sortie du modèle que nous supposons de variance finie. Elle peut représenter la fonction de calcul du $BSCR$, du SCR ou bien du ratio de solvabilité et est elle-même divisée en sous-fonctions des variables d'entrée,
- $-\{i\}$ est l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, n\}$ ne contenant pas i ,
- $\mathbf{X}_{-\{i\}}$ est le vecteur contenant l'ensemble des variables de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ne contenant pas la variable d'entrée X_i ,
- \mathbf{u} un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ de dimension s ,
- \mathbf{v} le complémentaire de \mathbf{u} de dimension $n - s$,
- $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$ le sous-ensemble de \mathbf{X} ($\mathbf{X}_{\mathbf{u}} \subset \mathbf{X}$) associé à \mathbf{u} et donc de dimension s ,
- $\mathbf{X}_{\mathbf{v}}$ le complémentaire de $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$ tel que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\mathbf{u}}, \mathbf{X}_{\mathbf{v}})$,
- $\overline{\mathbf{X}_{\mathbf{v}}}$ le vecteur $\mathbf{X}_{\mathbf{v}}$ conditionnellement au vecteur $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$ et simulé grâce à la distribution conditionnelle $p(\mathbf{X}_{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{X}_{\mathbf{v}}} | \mathbf{X}_{\mathbf{u}})$,
- \mathcal{H}_n l'hypercube unité de dimension n , $\mathcal{H}_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$,
- $|\cdot|$ désignera le cardinal d'un ensemble.

Nous abordons maintenant la partie concernant la construction théorique des indices de Sobol.

3.5.2 Cadre théorique

Avant d'évoquer les travaux de Sobol, nous devons repartir de ceux effectués par [Hoeffding \(1948\)](#) sur les U-statistiques. C'est dans ce papier qu'apparaissent les prémices de la décomposi-

tion fonctionnelle ANOVA (*Analysis of Variance*). Cette expression, également appelée HDMR pour *High Dimensional Model Representations* (Li et al. (2008)), est donnée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 3.3. (Décomposition ANOVA) Soit f une fonction définie de \mathcal{H}_n dans \mathbb{R} . La fonction f peut se décomposer comme la somme de 2^n fonctions de dimension croissante suivante :

$$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots n}(X_1, \dots, X_n). \quad (3.1)$$

Une première remarque sur cette décomposition est le fait qu'elle est définie dans l'hypercube \mathcal{H}_n alors qu'en pratique nos variables d'entrée ne sont pas à valeurs dans $[0, 1]$. Cependant, cela ne pose pas de problème dans notre étude dans la mesure où tout espace peut être transformé en \mathcal{H}_n avec par exemple l'utilisation des fonctions de répartition inverse. De ce fait, nous pouvons généraliser la décomposition et les résultats obtenus. La seconde remarque que nous pouvons faire est qu'il existe une infinité de choix pour les composantes de la décomposition et donc qu'elle n'est pas unique. Afin de s'assurer de l'unicité de cette dernière (3.1), Sobol (1993) ajoute des contraintes d'orthogonalité sur les composantes de la somme. Cela donne lieu à la décomposition suivante :

Théorème 3.4. (Décomposition de Hoeffding-Sobol) Soit f une fonction définie de \mathcal{H}_n dans \mathbb{R} . Il existe une unique décomposition de f de la forme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots n}(X_1, \dots, X_n) \\ &= \sum_{u \subset \{1, \dots, n\}} f_u(\mathbf{X}_u), \end{aligned} \quad (3.2)$$

et telle que la condition d'orthogonalité ci-dessous soit respectée :

$$\mathbb{E}[f_{\mathcal{I}}(\mathbf{X}_{\mathcal{I}}) | \mathbf{X}_{\mathcal{K}}] = 0, \quad \forall \mathcal{K} \subset \mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}. \quad (3.3)$$

De plus, nous avons :

$$f_0 = \mathbb{E}[f(\mathbf{X})],$$

$$f_u(\mathbf{X}_u) = \mathbb{E}[f(\mathbf{X}) | \mathbf{X}_u] + \sum_{w \subset u} (-1)^{|u|-|w|} \mathbb{E}[f(\mathbf{X}) | \mathbf{X}_w].$$

Nous venons de voir la décomposition d'Hoeffding-Sobol pour le cas d'une fonction quelconque. Toutefois, nous nous intéressons dans notre étude à capter la contribution de chaque variable d'entrée à l'incertitude totale de notre modèle. Pour cela nous aimerions pouvoir appliquer le Théorème 3.4 à la fonction variance globale afin de l'exprimer en fonction d'une somme de variances partielles. Si la condition (3.3) est respectée, alors la décomposition (3.3) tient toujours dans le cas de la variance de notre modèle et nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{Var} [f(\mathbf{X})] &= \sum_{i=1}^n \text{Var} [f_i(X_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Var} [f_{ij}(X_i, X_j)] + \dots + \text{Var} [f_{1\dots n}(X_1, \dots, X_n)] \\
&= \sum_{\mathbf{u} \subset \{1, \dots, n\}} \text{Var} [f_{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{\mathbf{u}})], \tag{3.4}
\end{aligned}$$

où

$$\text{Var} [f_{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{\mathbf{u}})] = \text{Var} [\mathbb{E} [f(\mathbf{X}) | \mathbf{X}_{\mathbf{u}}]] + \sum_{\mathbf{w} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}| - |\mathbf{w}|} \text{Var} [\mathbb{E} [f(\mathbf{X}) | \mathbf{X}_{\mathbf{w}}]].$$

Cette dernière expression nous donne la variabilité induite par le groupe de variables d'entrée $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$ dans notre modèle $Y = f(\mathbf{X})$. Ainsi, en normalisant par la variance totale du modèle, nous obtenons des coefficients de sensibilité pour chaque groupe de variables du modèle qui sont appelés les indices de Sobol et que nous définissons ci-dessous.

Définition 3.1. L'indice de Sobol d'ordre $|\mathbf{u}|$ mesurant la part de variabilité de la sortie du modèle $Y = f(\mathbf{X})$ en fonction de la variabilité du groupe de variables d'entrée $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$ est donné par

$$S_{\mathbf{u}} = \frac{\text{Var} [f_{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{\mathbf{u}})]}{\text{Var} [Y]} = \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{\mathbf{u}}]] + \sum_{\mathbf{w} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}| - |\mathbf{w}|} \text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{\mathbf{w}}]]}{\text{Var} [Y]}. \tag{3.5}$$

Sous la condition (3.3) et d'après la décomposition (3.4), nous avons clairement les deux propriétés suivantes de l'indice de Sobol :

$$0 \leq S_{\mathbf{u}} \leq 1, \quad \forall \mathbf{u} \subset \{1, \dots, n\},$$

et

$$\sum_{\mathbf{u} \subset \{1, \dots, n\}} S_{\mathbf{u}} = 1.$$

Le fait que les indices de Sobol somment à 1 permet de pouvoir les interpréter très facilement. En effet, l'incertitude de la sortie du modèle sera d'autant plus induite par une variable d'entrée que son indice de Sobol sera proche de 1. A l'inverse, s'il est proche de 0, la variable d'entrée n'aura que très peu d'impact sur le résultat final et pourra être considérée comme négligeable. Cependant, si nous nous intéressons à l'interprétation de l'hypothèse (3.3), nous constatons qu'elle implique que les variables d'entrée soient indépendantes entre elles. Ceci n'est bien sûr pas le cas comme nous l'avons exposé dans la Partie 3.1. Chastaing et al. (2012) proposent une généralisation de la décomposition dans le cadre de dépendance en réarrangeant le vecteur de variables d'entrée par groupes de variables qui sont indépendants entre eux. Cela nous permet d'exploiter les indices de Sobol comme définis précédemment (3.1). Toutefois, si nous gardons la structure de dépendance sans créer une pseudo-indépendance par formation de groupes de variables, la somme des indices de Sobol ne sera plus 1. Ceci aura pour effet de nous empêcher d'interpréter de manière claire la contribution de chaque variable d'entrée sur l'incertitude du modèle. Nous serons donc amené à utiliser d'autres indices de sensibilité que sont les indices de

Shapley et que nous définirons plus loin dans ce chapitre.

Dans notre étude, nous nous intéressons à capter la part de variabilité induite par chaque variable d'entrée sur la variabilité totale du modèle. Par conséquent, nous devons nous intéresser à l'indice de Sobol d'ordre 1. D'après la Formule (3.5), nous pouvons le définir de la manière suivante :

$$S_i = \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y|X_i]]}{\text{Var} [Y]}. \quad (3.6)$$

Dans la littérature, il est possible de trouver un autre indice de sensibilité qui se base sur la décomposition (3.4) et les indices de Sobol. Il s'agit des indices totaux qui mesurent l'influence de la variable d'entrée X_i sur l'incertitude globale de modèle $Y = f(\mathbf{X})$ en incluant l'effet des interactions de X_i avec les autres variables du modèle. Ils sont définis comme suit :

$$S_i^T = \sum_{\substack{u \subset \{1, \dots, n\} \\ i \in u}} S_u = \frac{\mathbb{E} [\text{Var} [Y | \mathbf{X}_{-\{i\}}]]}{\text{Var} [Y]} = 1 - \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{-\{i\}}]]}{\text{Var} [Y]}. \quad (3.7)$$

Cette relation vient de l'utilisation du théorème de la variance totale en conditionnant par rapport à $\mathbf{X}_{-\{i\}}$:

$$\text{Var} [Y] = \text{Var} [\mathbb{E} [Y | \mathbf{X}_{-\{i\}}]] + \mathbb{E} [\text{Var} [Y | \mathbf{X}_{-\{i\}}]].$$

Dans le reste de notre mémoire, nous nous concentrerons uniquement sur les indices de Sobol. Un lecteur intéressé par une discussion sur les indices totaux pourra se tourner vers Kucherenko et al. (2012).

Si nous repartons de la Formule (3.6), en pratique, l'enjeu principal est de calculer les espérances conditionnelles. Cela nécessite de connaître la loi conditionnellement à la variable d'entrée X_i , ce qui n'est pas souvent le cas. Dans la Section 3.4, nous avons vu comment il était possible d'obtenir et de simuler la loi conditionnelle dans notre étude. Nous allons maintenant nous tourner vers deux estimateurs des indices de Sobol qui reposent sur une approche *Monte-Carlo* comme suggérée initialement par Sobol (1993) dans son article. Cependant, cette dernière approche n'est pas la seule manière de les estimer et plusieurs auteurs ont contribué au développement de nouvelles méthodes comme Saltelli (2002), Da Veiga et al. (2009) ou Chastaing (2013).

3.5.3 Approche brutale

Rappelons que nous cherchons ici à estimer l'indice de Sobol d'ordre 1 qui est défini comme suit : $S_i = \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [Y|X_i]]}{\text{Var} [Y]}$. La première méthode que nous avons retenue est celle que nous appelons approche brutale. Son nom vient du fait que nous avons, dans un premier temps, cherché à réécrire cet indice dans le but de faire apparaître des espérances, qui pourront ensuite être évaluées via une estimation par *Monte-Carlo*. Cette dernière consiste en la simulation d'un grand nombre de trajectoires aléatoires. Celles-ci permettent d'évaluer à chaque fois une réalisation de la fonction voulue que nous moyennons ensuite afin de déterminer une approximation de la

fonction souhaitée. Pour cela, nous avons transformé les différentes variances intervenant dans l'expression de l'indice de Sobol de la manière suivante :

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E} \left[(Y - \mathbb{E}[Y])^2 \right],$$

et

$$\text{Var}[\mathbb{E}[Y|X_i]] = \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y])^2 \right].$$

Nous allons maintenant détailler les étapes successives qui nous permettent d'estimer les indices de Sobol.

- **Étape 1 :** Commençons par déterminer la variance globale du modèle. Il n'y a pas de difficulté particulière dans cette première partie. Pour cela, nous utilisons la méthode de *Monte-Carlo* comme expliquée précédemment. Dans le cadre du calcul de $\text{Var}[Y]$, nous allons simuler N réalisations $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ en utilisant la décomposition de Cholesky décrite dans la Section 3.4. Nous désignerons par $Y_k = f(x_{1k}, \dots, x_{nk})$ la valeur de sortie du modèle pour la $k^{\text{ème}}$ simulation. Ainsi, nous avons l'estimateur classique de la variance suivant :

$$\widehat{\text{Var}}[Y] = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left[Y_k - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j \right) \right]^2. \quad (3.8)$$

- **Étape 2 :** Il s'agit maintenant de la partie la plus délicate, c'est-à-dire du calcul de $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|X_i]]$. Nous sommes ici confrontés à une double problématique. En effet, d'un côté il faut estimer une espérance conditionnelle et de l'autre la variance de cette dernière. Nous devons donc user de deux approximations de *Monte-Carlo*, l'une emboîtée dans l'autre. La façon dont nous avons traité ce problème est résumée ci-après.

- **Étape 2.1 :** Nous simulons dans un premier temps N réalisations $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ à l'aide de la décomposition de Cholesky (3.4).
- **Étape 2.2 :** A l'aide du Théorème 3.1 et connaissant la valeur de la variable X_i de la $k^{\text{ème}}$ réalisation, x_{ik} , nous sommes en mesure de déterminer la loi du vecteur $\overline{\mathbf{X}}_{-i_k} = (\mathbf{X}_{-i} | X_i = x_{ik})$.
- **Étape 2.3 :** L'étape précédente nous permet de simuler M réalisations $\overline{\mathbf{x}}_{-i_k} = (x_{1(i_k)}, \dots, x_{i-1(i_k)}, x_{i+1(i_k)}, \dots, x_{n(i_k)})$ du vecteur $\overline{\mathbf{X}}_{-i_k}$. A partir de ces M simulations, nous pouvons déterminer la valeur de l'espérance de la variable de sortie conditionnellement à la connaissance de la $k^{\text{ème}}$ réalisation de la variable d'entrée X_i par une méthode de *Monte-Carlo* :

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y|X_i = x_{ik}] = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M f \left(x_{1(i_k)j}, \dots, x_{i-1(i_k)j}, x_{ik}, x_{i+1(i_k)j}, \dots, x_{n(i_k)j} \right).$$

- **Étape 2.4 :** Nous répétons les étapes 2.2 et 2.3 pour chacune des N réalisations de la variable d'entrée X_i obtenues lors de l'étape 2.1. Ainsi, nous avons tous les

éléments nécessaires pour l'estimateur de la variance de l'espérance conditionnelle. En remarquant que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X_i = x_{i_k}]] = \mathbb{E}[Y]$ et en utilisant toujours la notation $Y_k = f(x_{1_k}, \dots, x_{n_k})$ pour désigner la valeur de sortie du modèle pour la $k^{\text{ème}}$ réalisation du vecteur \mathbf{X} , nous avons finalement l'estimateur suivant :

$$\widehat{\text{Var}}[\mathbb{E}[Y|X_i]] = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left[\widehat{\mathbb{E}}[Y|X_i = x_{i_k}] - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j \right) \right]^2. \quad (3.9)$$

L'algorithme d'estimation des coefficients de sensibilité présenté ci-dessus possède l'avantage d'être l'écriture directe des indices de Sobol ainsi que d'être simple d'implémentation. Cependant, il requiert $n \times N \times M$ simulations de points et donc $N \times M$ évaluations de la fonction f à chaque appel pour déterminer l'ensemble des indices de Sobol pour toutes les variables d'entrée du modèle. Si nous considérons que pour avoir une bonne convergence avec une méthode *Monte-Carlo* il faut au minimum 10 000 simulations, voire 100 000 dans certains cas, le temps de calcul augmente rapidement. De plus, avec des modèles complexes prenant en entrée un grand nombre de variables de l'ordre de la centaine ou du millier, nous nous retrouvons à devoir simuler dans le meilleur des cas $1,5 \times 10^{10}$ points pour 150 variables d'entrée. Ceci en fait le défaut majeur de cet estimateur même si la problématique d'interprétabilité dans le cadre de variables dépendantes n'est pas résolue. Afin de réduire la complexité de cet algorithme, nous nous sommes tournés vers une approche alternative de l'estimateur des indices de Sobol que nous présentons dans la partie suivante.

3.5.4 Approche alternative

La méthode présentée par la suite est celle développée par [Kucherenko et al. \(2012\)](#) qui est en fait une généralisation de celle exposée par [Xu and Gertner \(2008\)](#). Ces derniers sont partis d'une approche utilisant une base de régression linéaire pour estimer les coefficients de sensibilité. Ils s'appuient sur l'hypothèse que la sortie du modèle est approximativement linéaire en fonction des variables d'entrée. Nous détaillons ci-dessous les étapes de la généralisation en gardant toujours les notations définies en [3.5.1](#).

L'idée est de décomposer la contribution à l'incertitude totale du modèle d'une variable ou d'un groupe de variables d'entrée en deux parties : la contribution corrélée et celle non corrélée. Pour cela, nous utilisons la décomposition de la variance totale de $f(X_1, \dots, X_n)$ et nous avons l'expression suivante :

$$\text{Var}[Y] = \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[f(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v) \middle| \mathbf{X}_u \right] \right] + \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[f(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v) \middle| \mathbf{X}_u \right] \right],$$

d'où

$$1 = \underbrace{\frac{\text{Var} \left[\mathbb{E} \left[f(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v) \middle| \mathbf{X}_u \right] \right]}{\text{Var}[Y]}}_{\text{effet de premier ordre de } \mathbf{X}_u} + \underbrace{\frac{\mathbb{E} \left[\text{Var} \left[f(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v) \middle| \mathbf{X}_u \right] \right]}{\text{Var}[Y]}}_{\text{effet total de } \mathbf{X}_v}.$$

Le premier terme de l'expression précédente, représentant l'effet de premier ordre du sous-ensemble \mathbf{X}_u , correspond à l'indice de Sobol du vecteur \mathbf{X}_u ([3.5](#)). Le deuxième terme correspond

lui à l'indice total du vecteur \mathbf{X}_v (3.7). Nous nous intéressons donc uniquement au calcul du premier élément dans la suite. Avec nos notations, nous avons les relations ci-dessous.

$$\mathbb{E} \left[f \left(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v \right) \middle| \mathbf{X}_u \right] = \int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \right) p \left(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \middle| \mathbf{X}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v,$$

et en injectant cette dernière dans la formule de la variance, nous obtenons l'expression intégrale suivante pour la variance :

$$\begin{aligned} V_u &= \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[f \left(\mathbf{X}_u, \overline{\mathbf{X}}_v \right) \middle| \mathbf{X}_u \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} \mathbb{E} \left[f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{X}}_v \right) \middle| \mathbf{x}_u \right]^2 p \left(\mathbf{x}_u \right) d\mathbf{x}_u - f_0^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^s} p \left(\mathbf{x}_u \right) \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v \right]^2 d\mathbf{x}_u - f_0^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$f_0 = \mathbb{E} [f(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) p(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) d\mathbf{x}_u d\mathbf{x}_v.$$

Nous pouvons également écrire l'Équation (3.10) en transformant l'expression au carré en une double intégrale :

$$\begin{aligned} V_u &= \int_{\mathbb{R}^s} p \left(\mathbf{x}_u \right) \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v \right] \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v' \right] d\mathbf{x}_u - f_0^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il est possible d'utiliser le même changement d'écriture pour f_0^2 . Ainsi, avec cette modification et en la combinant avec (3.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_u &= \int_{\mathbb{R}^s} p \left(\mathbf{x}_u \right) \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v \right] \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v' \right] d\mathbf{x}_u \\ &\quad - \left[\int_{\mathbb{R}^n} f \left(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \right) p \left(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \right) d\mathbf{x}_u d\mathbf{x}_v \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} f \left(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_v \right) p \left(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_v \right) d\mathbf{x}'_u d\mathbf{x}'_v \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De plus, la formule de Bayes nous assure que $p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v \middle| \mathbf{x}_u \right) p \left(\mathbf{x}_u \right) = p \left(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \right)$. En injectant cette relation dans (3.12) et en factorisant, nous trouvons finalement que l'indice de Sobol d'ordre $|\mathbf{u}|$ de \mathbf{X}_u peut se traduire en l'expression :

$$\begin{aligned} S_u &= \frac{1}{\text{Var} [Y]} \int_{\mathbb{R}^n} f \left(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \right) p \left(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \right) d\mathbf{x}_v \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^{n-s}} f \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \right) p \left(\mathbf{x}_u, \overline{\mathbf{x}}_v' \middle| \mathbf{x}_u \right) d\overline{\mathbf{x}}_v' - \int_{\mathbb{R}^n} f \left(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_v \right) p \left(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_v \right) d\mathbf{x}'_u d\mathbf{x}'_v \right] d\mathbf{x}_u. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Un estimateur *Monte-Carlo* de (3.13) donné par Kucherenko et al. (2012) est le suivant :

$$\widehat{S}_u = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\mathbf{x}_{u,k}, \mathbf{x}_{v,k}) \left[f(\mathbf{x}_{u,k}, \overline{\mathbf{x}}_{v,k}') - f(\mathbf{x}'_{u,k}, \mathbf{x}'_{v,k}) \right]}{\widehat{\text{Var}}[Y]}. \quad (3.14)$$

L'estimateur proposé ci-dessus permet de répondre à notre problématique principale du coût en simulations important nécessaire pour déterminer l'estimateur présenté précédemment (3.9). En effet, nous n'avons ici plus qu'à simuler $2 \times n \times N$ points alors que nous devions en simuler $n \times N \times M$ avec le premier estimateur. Le facteur deux vient du fait que nous devons simuler une copie indépendante du vecteur X pour déterminer l'estimateur 3.14. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'un avantage supplémentaire de cet estimateur est qu'il permet une meilleure convergence numérique. Cependant, il souffre de deux problèmes. Le premier, que nous rencontrons uniquement avec cet estimateur, est le fait qu'il ne converge pas lorsque la fonction du modèle n'est pas linéaire. Nous verrons dans le prochain chapitre que c'est par exemple le cas avec la fonction *BSCR*. Le second souci, nous l'avons déjà évoqué, est commun aux deux estimateurs et plus particulièrement aux indices de Sobol. Il s'agit du fait que lorsque les variables d'entrée sont dépendantes, les indices ne somment plus à 1 et cela provoque une non possibilité d'interprétation des indices de sensibilité trouvés. C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de nous tourner vers les indices de Shapley que nous allons exposer dans la prochaine section.

3.6 Indices de Shapley

Initialement définis par Shapley (1953) dans le cadre de la théorie des jeux coopératifs, les valeurs ou indices de Shapley ont de multiples utilisations aujourd'hui. En actuariat, la méthode de Shapley est considérée pour des problématiques d'allocation de capital comme développé par Decupère (2011). Ils sont également de plus en plus répandus en data science afin d'avoir une idée d'interprétabilité des modèles comme, par exemple, avec l'utilisation du *package* SHAP (*SHapley Additive exPlanations*). Dans le cadre de l'analyse de sensibilité, c'est Owen (2014) qui exhibe une fonction de coût particulière pour adapter cette approche aux calculs de sensibilité. Nous allons maintenant voir la construction des valeurs de Shapley, leur transposition et avantages et inconvénients en analyse de sensibilité ainsi qu'un algorithme permettant de les estimer.

3.6.1 Cadre théorique

Afin de mieux comprendre la signification des indices de Shapley, nous allons repartir de la théorie des jeux. Un jeu coopératif est un jeu dans lequel les joueurs peuvent se concerter et coopérer dans le but de définir la meilleure stratégie à adopter. Considérons que le jeu est composé de n joueurs, notés $\{1, \dots, n\}$. Les sous-ensembles \mathbf{u} de cardinal s de $\{1, \dots, n\}$ correspondant à des groupes de s joueurs sont appelés coalitions. Nous supposons que le fait de jouer au jeu représente un coût total, $c(\{1, \dots, n\})$, calculé avec une fonction de coût c . L'objectif est de répartir ce coût entre tous les joueurs. La définition introduite par Shapley (1953) dans son article, et définie ci-dessous, nous permet d'avoir une méthode d'attribution des coûts pour chaque joueur.

Définition 3.2. La valeur de Shapley d'un joueur i représentant la valeur moyenne du coût associé à l'intégration d'une équipe \mathbf{u} constituée par s autres joueurs d'un ensemble de n joueurs est définie par

$$\phi_i = \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} [c(\mathbf{u} \cup \{i\}) - c(\mathbf{u})]. \quad (3.15)$$

Nous pouvons remarquer que pour les n tailles possibles ($s = 0, 1, \dots, n-1$) de sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, le même poids est appliqué, à savoir $\frac{1}{n}$. C'est la même chose pour tous les sous-ensembles de taille s avec le poids $\binom{n-1}{s}^{-1}$. De plus, nous pouvons reformuler la pondération de la différence des coûts comme :

$$\frac{1}{n} \binom{n-1}{s}^{-1} = \frac{(n-s-1)!s!}{n!}.$$

Cette écriture nous permet de démontrer plus facilement, en Annexe [B](#), la propriété intéressante d'efficience de la valeur de Shapley qui est la suivante :

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = c(\{1, \dots, n\}). \quad (3.16)$$

Afin de nous rendre compte de l'intérêt de cette dernière, nous devons conceptualiser les valeurs de Shapley dans le cadre de l'analyse de sensibilité. C'est [Owen \(2014\)](#) qui est le premier à s'y être intéressé. Dans son papier, il propose d'utiliser la fonction de coût suivante :

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}_{\mathbf{u}}]]}{\text{Var}[Y]}. \quad (3.17)$$

L'idée est de faire l'analogie, dans un premier temps, entre les joueurs et les variables d'entrée du modèle, puis dans un second temps entre le coût total d'un jeu et l'incertitude globale d'un modèle. De ce fait, il est alors simple d'interpréter la différence $c(\mathbf{u} \cup \{i\}) - c(\mathbf{u})$ pour un sous-ensemble \mathbf{u} ne contenant pas la variable d'entrée X_i . En effet, cela signifie que nous calculons la baisse de variabilité de la variable de sortie Y due à la connaissance supplémentaire de X_i . Nous sommes ensuite sur l'ensemble des groupes de variables ne contenant pas X_i , ce qui nous permet de déterminer la part d'incertitude globale du modèle associée à la variabilité de la variable d'entrée X_i . En injectant [\(3.17\)](#) dans la valeur de Shapley [\(3.15\)](#), nous obtenons la définition des indices de Shapley.

Définition 3.3. L'indice de Shapley d'une variable d'entrée X_i représentant la valeur moyenne de la part d'incertitude du modèle $Y = f(\mathbf{X})$ associée à la connaissance supplémentaire de X_i , sachant que nous connaissons déjà s autres variables d'un ensemble de n variables d'entrée est défini par

$$Sh_i = \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} \left[\frac{\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}_{\mathbf{u} \cup \{i\}}]]}{\text{Var}[Y]} - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}_{\mathbf{u}}]]}{\text{Var}[Y]} \right]. \quad (3.18)$$

Revenons maintenant sur l'intérêt de la propriété d'efficacité de la valeur de Shapley (3.16). Si nous l'appliquons cette fois au cas particulier de l'indice de Shapley (3.18), nous avons la relation :

$$\sum_{i=1}^n Sh_i = \frac{\text{Var} \left[\mathbb{E} \left[Y \mid \mathbf{X}_{\{1, \dots, n\}} \right] \right]}{\text{Var} [Y]} = 1.$$

Rappelons que le principal désavantage des indices de Sobol est que nous ne pouvons pas les interpréter dans le cadre de dépendance des variables d'entrée car ils ne somment plus à 1. C'est pour cela que nous nous sommes tournés vers les indices de Shapley. La dernière propriété nous assure donc que nous pouvons les interpréter sans problème, qu'il y ait ou non une structure de dépendance dans le modèle. Ceci prouve donc que les indices de Sobol et de Shapley ne permettent pas d'obtenir la même valeur de sensibilité pour les variables d'entrée dans un cas de corrélation.

Nous avons fait le choix d'utiliser la fonction de coût (3.17) qui nous permet d'obtenir la propriété d'efficacité (3.16). Cependant, ce n'est pas le seul choix possible pour le calcul de coefficients de sensibilité. Dans leur papier, Song et al. (2016) démontrent qu'il est en fait équivalent d'utiliser (3.17) ou alors la fonction de coût suivante :

$$\tilde{c}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbb{E} [\text{Var} [Y \mid \mathbf{X}_{-\mathbf{u}}]]}{\text{Var} [Y]}. \quad (3.19)$$

Dans la suite de notre étude nous garderons la convention (3.17) mais les résultats sont généralisables avec la fonction (3.19).

Contrairement à l'indice de Sobol, l'indice de Shapley permet une interprétation logique des valeurs obtenues. D'un autre côté, nous avons évoqué avec les différents estimateurs, que nous sommes confrontés à une autre problématique qui est celle du temps de calcul. Si nous voulons évaluer l'indice de Shapley d'une variable d'entrée, nous devons considérer l'ensemble des combinaisons de variables d'entrée possibles. Rappelons que pour un ensemble de dimension n , nous avons 2^n sous-ensembles possibles. Si par exemple notre modèle comporte 50 variables d'entrée, $2^{49} = 5,6 \times 10^{14}$ différences de coûts seront nécessaires. Si nous rajoutons de plus le temps associé au calcul de la variance de l'espérance conditionnelle, nous obtenons un temps de calcul nettement supérieur à celui des indices de Sobol. Nous présenterons dans la partie suivante un algorithme d'accélération des calculs pour estimer les indices de Shapley.

3.6.2 Estimation

Du fait de la complexité algorithmique de l'estimation des indices de Shapley, de nombreux auteurs se sont penchés sur des méthodes permettant de réduire le nombre de simulations et donc de gagner en temps de calcul. Nous pouvons nous tourner vers Fatima et al. (2008) qui recensent huit méthodes pour déterminer ces indices. Parmi celles-ci, nous en trouvons quatre qui calculent la valeur exacte et quatre autres qui sont des approximations. En complément, ils proposent une approche alternative dans le cadre d'un jeu de vote pondéré par approximation linéaire. La méthode retenue dans ce mémoire est celle apportée par Song et al. (2016) qui consiste à reformuler le calcul de l'indice de Shapley en considérant l'ensemble des permutations des joueurs. En approfondissement de cette nouvelle écriture, ils apportent des améliorations permettant de réduire le coût calculatoire que nous allons maintenant détailler. Pour cela, nous

allons considérer les notations supplémentaires ci-dessous :

- π désigne une permutation d'un ensemble à n variables d'entrée données qui peut se voir comme un ordre possible des classements pour ces variables. Pour plus de facilité, nous considérerons ici que les variables d'entrée X_i sont représentées par leur indice i ,
- $\Pi(\{1, \dots, n\})$ est l'ensemble des $n!$ permutations de l'ensemble des n variables d'entrée,
- $P_i(\pi)$ correspond à l'ensemble des variables d'entrée qui précèdent la variable i d'une permutation π donnée. Par exemple, si nous considérons la permutation $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)$ d'un ensemble à quatre variables d'entrées, nous avons $P_2(\pi) = \{1, 4\}$,
- $\pi(j)$ indique la variable d'entrée à la $j^{\text{ème}}$ position d'une permutation π donnée. Si nous reprenons la même permutation que précédemment, à savoir $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)$, alors $\pi(j) = 4$. Nous utiliserons de plus la convention suivante : $P_{\pi(j+1)}(\pi) = P_{\pi(j)}(\pi) \cup \{\pi(j)\}$.

La première étape est de transformer l'écriture de l'indice de Shapley. Pour cela, donnons-nous une permutation π de $\{1, \dots, n\}$. Ainsi, le coût d'inclure une variable d'entrée dans l'ensemble des variables $P_i(\pi)$ déjà connues est $c(P_i(\pi) \cup \{i\}) - c(P_i(\pi))$. Si nous prenons l'ensemble des $n!$ permutations possibles pour les n variables d'entrée considérées, la valeur de Shapley (3.15) peut se réécrire comme :

$$\nu_i = \sum_{\pi \in \Pi(\{1, \dots, n\})} \frac{1}{n!} [c(P_i(\pi) \cup \{i\}) - c(P_i(\pi))]. \quad (3.20)$$

Le fait que le nombre d'évaluations soit encore élevé, $n!$ permutations plus le calcul des fonctions de coût, a poussé Castro et al. (2009) à proposer un algorithme d'approximation qui converge en un temps polynomial. À la place de considérer l'ensemble des permutations $\Pi(\{1, \dots, n\})$, ils en génèrent seulement m : π_1, \dots, π_m . La valeur de Shapley ν_i (3.20) est alors estimée par

$$\hat{\nu}_i = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m [c(P_i(\pi_l) \cup \{i\}) - c(P_i(\pi_l))]. \quad (3.21)$$

Dans leur article, ils prouvent de plus que cet estimateur converge en probabilité vers ν_i . Retraçons maintenant les étapes de calcul pour une permutation π_l donnée de l'ensemble à trois éléments. Notons par simplification d'écriture, $\Delta_i c(\pi_l) = c(P_i(\pi_l) \cup \{i\}) - c(P_i(\pi_l))$. Si par exemple, $\pi_l = (3\ 1\ 2)$, nous avons à calculer pour l'ensemble des variables d'entrée avec l'estimateur (3.21) :

$$\Delta_1 c(\pi_l) = c(\{3, 1\}) - c(\{3\}),$$

$$\Delta_2 c(\pi_l) = c(\{3, 1, 2\}) - c(\{3, 1\}),$$

$$\Delta_3 c(\pi_l) = c(\{3\}) - c(\emptyset).$$

De cette manière, les quantités $c(\{3, 1\})$ et $c(\{3\})$ sont calculées deux fois chacune, ce qui provoque une augmentation du temps de calcul. Dans le but d'éviter cette double itération et

de réduire le coût calculatoire par deux, [Song et al. \(2016\)](#) calculent les coûts incrémentaux en partant du premier élément d'une permutation $\boldsymbol{\pi}$ jusqu'au dernier ($1 \leq j \leq n$) :

$$\begin{aligned}\Delta_{\pi(j)} c(\boldsymbol{\pi}) &= c\left(\mathbf{P}_{\pi(j)}(\boldsymbol{\pi}) \cup \{\pi(j)\}\right) - c\left(\mathbf{P}_{\pi(j)}(\boldsymbol{\pi})\right) \\ &= c\left(\mathbf{P}_{\pi(j+1)}(\boldsymbol{\pi})\right) - c\left(\mathbf{P}_{\pi(j)}(\boldsymbol{\pi})\right).\end{aligned}$$

Cette méthode permet de garder en mémoire la valeur du premier coût calculé et donc de l'injecter directement dans le calcul suivant sans avoir à faire de calculs supplémentaires. Si nous reprenons l'exemple précédent d'une simulation de la permutation $\boldsymbol{\pi}_l = (3 \ 1 \ 2)$ et en initialisant $prev = c(\emptyset) = 0$, le schéma calculatoire devient alors :

$$\begin{aligned}\Delta_{\pi_l(1)} c(\boldsymbol{\pi}_l) &= c(\{3\}) - c(\emptyset), \quad prev = c(\{3\}), \\ \Delta_{\pi_l(2)} c(\boldsymbol{\pi}_l) &= c(\{3, 1\}) - prev, \quad prev = c(\{3, 1\}), \\ \Delta_{\pi_l(3)} c(\boldsymbol{\pi}_l) &= c(\{3, 1, 2\}) - prev.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant résumer les différentes étapes de l'algorithme que nous appliquerons au cadre de notre étude, c'est-à-dire aux indices de Shapley. La fonction de coût est donc celle définie en [\(3.17\)](#) et nous avons les étapes expliquées ci-dessous.

- **Étape 1** : Nous estimons la variance avec l'estimateur de *Monte-Carlo* défini en [\(3.8\)](#) en utilisant N_V simulations et que nous noterons $\widehat{\text{Var}}[Y]$.
- **Étape 2** : Nous allons maintenant estimer les différents indices de Shapley dont les estimateurs sont notés $\widehat{Sh}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Nous les initialisons à 0 pour commencer et nous procédons comme suit :
 - **Étape 2.1** : Nous générons une permutation $\boldsymbol{\pi}_l \in \boldsymbol{\Pi}(\{1, \dots, n\}), \forall 1 \leq l \leq m$. Pour chaque π_l simulée, nous initialisons la valeur $prev$ à 0 et pour chacune des variables d'entrée ($1 \leq j \leq n$), nous estimons $\widehat{c}\left(\mathbf{P}_{\pi_l(j+1)}(\boldsymbol{\pi}_l)\right) = \widehat{\text{Var}}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathbf{X}_{\mathbf{P}_{\pi_l(j+1)}(\boldsymbol{\pi}_l)}\right]\right]$. Dans le cas où $j = n$, nous savons que $\widehat{c}\left(\mathbf{P}_{\pi_l(j+1)}(\boldsymbol{\pi}_l)\right) = \widehat{\text{Var}}[Y]$. Sinon, l'estimation est obtenue de la même façon que précisée pour l'estimateur [\(3.9\)](#), en sachant que nous ne conditionnons plus forcément par une seule variable d'entrée.
 - **Étape 2.2** : Nous pouvons maintenant calculer le coût incrémental :
$$\widehat{\Delta}_{\pi_l(j)} c(\boldsymbol{\pi}_l) = \widehat{c}\left(\mathbf{P}_{\pi_l(j+1)}(\boldsymbol{\pi}_l)\right) - prev.$$
 - **Étape 2.3** : Nous initialisons la nouvelle valeur de $prev$: $prev = \widehat{c}\left(\mathbf{P}_{\pi_l(j+1)}(\boldsymbol{\pi}_l)\right)$.
 - **Étape 2.4** : Nous ajoutons aux différents estimateurs des indices de Shapley le coût incrémental estimé :

$$\widehat{Sh}_{\pi_l(j)} = \widehat{Sh}_{\pi_l(j)} + \widehat{\Delta}_{\pi_l(j)} c(\boldsymbol{\pi}_l).$$

- **Étape 3** : Finalement, nous obtenons les estimateurs des indices de Shapley finaux en considérant :

$$\widehat{Sh}_i = \frac{1}{m} \times \frac{\widehat{Sh}_i}{\widehat{\text{Var}}[Y]}. \quad (3.22)$$

Cette approche permet d'avoir à ne simuler que $n \times N_V + (n - 1) \times m \times N \times M$ points. Song et al. (2016) préconisent certaines valeurs afin que l'estimation soit optimale. Ils recommandent dans un premier temps de choisir un nombre N_V suffisamment grand de simulations pour la variance. Concernant ensuite les fonctions de coût, ils montrent qu'il est optimal de prendre $N = 3$, $M = 1$ et m aussi grand que possible. Nous nous baserons sur ces valeurs dans le chapitre suivant pour les applications numériques.

3.7 Approximation de l'indice de Sobol

La méthode que nous allons maintenant proposer ne repose pas sur une approche par simulations. Il est question d'une méthode déterministe pour approximer à la fois la variance du modèle global et celle de l'espérance conditionnelle. Nous allons démontrer dans cette section le cas d'ordre 1 qui se généralise à toute dimension supérieure n . Nous exploiterons ensuite cette approche sur l'exemple concret de la fonction *BSCR* (2.4).

3.7.1 Cadre théorique

La méthode Delta permet d'approximer la variance d'une fonction prenant en paramètre une variable aléatoire dont nous connaissons *a priori* la variance et l'espérance. Nous cherchons donc $\text{Var}[f(X)]$ avec X une variable aléatoire de carré intégrable. Nous nous sommes reposés sur l'article de Ver Hoef (2012) pour présenter la démonstration de cette approche.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}[X] = \sigma^2$. Considérons que f est une fonction régulière à valeurs réelles et pouvant très bien ne pas être linéaire. D'après le développement de Taylor appliqué à f et pris en μ , nous avons :

$$Y = f(X) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(\mu)(X - \mu)^i}{i!} + R, \quad (3.23)$$

où $f^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de f et R est le reste d'ordre $k + 1$, soit

$$R = \frac{f^{(k+1)}(\xi)(X - \mu)^{k+1}}{(k + 1)!},$$

avec ξ compris entre X et μ . Si nous allons jusqu'à l'ordre $k = 1$ dans l'Expression (3.23), nous avons comme développement :

$$f(X) = f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu) + R.$$

Ainsi, d'après cette dernière, nous obtenons comme approximation à l'ordre 1,

$$f(X) - f(\mu) \approx f'(\mu)(X - \mu). \quad (3.24)$$

Un premier résultat peut être obtenu à partir de l'expression ci-dessus, c'est celui de l'approximation de l'espérance. En effet, en prenant l'espérance dans la Formule (3.24), nous avons :

$$\mathbb{E}[f(X) - f(\mu)] \approx f'(\mu) \mathbb{E}[(X - \mu)] = 0,$$

donc

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[f(X)] \approx f(\mu). \quad (3.25)$$

Remarque 3.3. *En fait, nous avons une meilleure approximation à l'ordre 2 :*

$$f(\mu + \sigma\epsilon) \approx f(\mu) + \sigma\epsilon f'(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\epsilon^2 f''(\mu),$$

et donc

$$\mathbb{E}[f(\mu + \sigma\epsilon)] \approx f(\mu) + \sigma\epsilon f'(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\epsilon^2 f''(\mu).$$

Cependant, dans une optique d'accélération des calculs, nous ne considérerons que l'Approximation (3.25) en pratique.

Finalement, en utilisant l'Équation (3.24) et le Résultat (3.25), nous sommes en mesure d'obtenir une approximation de la variance de notre modèle qui est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] \\ &\approx \mathbb{E}[(f(X) - f(\mu))^2] \\ &\approx \mathbb{E}[(f'(\mu)(X - \mu))^2] \\ &\approx \sigma^2 [f'(\mu)]^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cette approximation tient quand nous sommes en dimension 1. Cependant, dans les modèles complexes actuels, il est rare d'avoir une seule variable d'entrée. En pratique, nous nous trouvons plutôt dans un cadre de dimension n de l'ordre de la centaine ou du millier. Il est possible de généraliser l'Approximation (3.26) dans le cadre multidimensionnel :

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[f(\mathbf{X})] \approx \nabla f(\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma} \nabla f(\boldsymbol{\mu}), \quad (3.27)$$

où

$$\nabla f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Utilisons maintenant les Approximations (3.25) et (3.26) pour obtenir celle de la variance de l'espérance conditionnelle. Nous avons dans un premier temps :

$$\text{Var} [\mathbb{E} [f(\mathbf{X})|X_i]] \approx \text{Var} [f_i(X_i)]. \quad (3.28)$$

où f_i correspond à la fonction f prise en le vecteur d'espérance conditionnelle par rapport à la variable d'entrée X_i obtenu avec le Théorème (3.1). De plus, l'espérance conditionnelle étant une fonction de la variable sous conditionnement, f_i n'est plus qu'une fonction d'une seule variable d'entrée X_i . En utilisant la formule d'approximation de la variance en dimension 1 (3.26), nous avons donc en considérant les notations $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ et $\text{Var}[X_i] = \sigma_i^2$:

$$\text{Var} [\mathbb{E} [f(\mathbf{X})|X_i]] \approx \sigma_i^2 [f'_i(\mu_i)]^2. \quad (3.29)$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode Delta dans le cadre de notre étude.

3.7.2 Application au *BSCR*

En pratique, la méthode Delta est très utile quand le nombre de variables d'entrée n'est pas trop grand et la fonction n'est pas trop complexe. En effet, une fois que nous avons calculé le vecteur d'espérance conditionnelle, nous devons l'injecter dans la fonction f et ensuite dériver par rapport à la variable d'entrée d'intérêt. Si la fonction est trop complexe et qu'il y a un trop grand nombre de variables d'entrée, l'opération de dérivation sera difficile voire impossible dans certains cas. C'est la raison pour laquelle nous allons, dans notre étude, nous concentrer sur l'application à la fonction *BSCR* dont nous rappelons l'expression :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{inc}.$$

Dans la suite, nous indexerons les différents indices de 1 à 5 pour les capitaux économiques des modules de risques marché, défaut, souscription vie, souscription non-vie et souscription santé. Le capital économique au titre du module de risques des actifs incorporels sera indistinctement nommé SCR_6 ou SCR_{inc} .

Pour l'approximation de la variance, nous devons calculer le gradient de la fonction *BSCR*. En dérivant par rapport aux différents *SCR* l'expression du *BSCR*, nous obtenons directement les dérivés partielles données ci-après :

$$\frac{\partial BSCR}{\partial SCR_i}(SCR_1, \dots, SCR_{inc}) = \frac{SCR_i + \sum_{j=1, j \neq i}^5 \rho_{i,j}^M \cdot SCR_j}{BSCR}, \quad \text{si } i = 1, \dots, 5,$$

et

$$\frac{\partial BSCR}{\partial SCR_{inc}}(SCR_1, \dots, SCR_{inc}) = 1, \quad \text{si } i = 6.$$

Nous utilisons ensuite la Formule (3.27) pour déterminer l'approximation de la variance du modèle *BSCR*.

Concernant la variance de l'espérance conditionnelle, c'est moins immédiat. D'après (3.28), nous avons premièrement $\text{Var} [\mathbb{E} [BSCR (SCR_1, \dots, SCR_{inc}) | SCR_i]] \approx \text{Var} [BSCR_i (SCR_i)]$ où $BSCR_i$ est la fonction $BSCR$ évaluée en le vecteur d'espérance conditionnellement à SCR_i . Ce dernier est de la forme :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mu_j + b_j^i (SCR_i - \mu_i) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

avec $b_j^i = \Sigma_{SCR_{-\{i\}}, SCR_i} \Sigma_{X_{SCR_i}}^{-1}$. Nous démontrons en Annexe C que si nous imposons la contrainte $b_i^i = 1$ telle que $e_i = SCR_i$, nous arrivons à un résultat général qui est le suivant : $\forall k \in [1 \dots 6]$,

$$BSCR'_k(\mu_k) = \frac{\sum_{i=1}^5 b_i^k \cdot \mu_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \rho_{i,j}^M \cdot [\mu_i \cdot b_j^k + \mu_j \cdot b_i^k] + \frac{b_6^k}{2}}{BSCR}. \quad (3.30)$$

Enfin, nous pouvons conclure en utilisant (3.29) :

$$\text{Var} [\mathbb{E} [BSCR (SCR_1, \dots, SCR_{inc}) | SCR_i]] \approx \sigma_i^2 [BSCR'_i(\mu_i)]^2. \quad (3.31)$$

La relation précédente combinée à l'approximation de la variance nous permet donc d'approximer les indices de Sobol des différentes variables d'entrée du modèle $BSCR$ (2.4). Toutefois, la méthode Delta est également applicable au calcul des indices de Shapley. Il faudrait alors conditionner, dans l'espérance conditionnelle, par plusieurs variables et ensuite appliquer les mêmes méthodes de dérivation et d'approximation.

Nous utiliserons ces résultats dans le chapitre suivant à des fins de comparaison avec l'ensemble des approches étudiées dans cette partie.

Chapitre 4

Applications numériques

Après avoir cadré le périmètre de notre étude et abordé la partie théorique des estimateurs de sensibilité de ce mémoire, nous allons maintenant nous tourner vers les applications numériques. Nous verrons entre autres quelle approche, entre brutale et alternative, se révèle être la plus performante du point de vue de la convergence et du temps de calcul associé. Il sera vu que l'approche alternative est la plus satisfaisante tant que la fonction étudiée est proche de la linéarité. Cependant, si nous nous en éloignons comme c'est le cas avec le *SCR*, les valeurs estimées ne sont plus cohérentes. Nous serons également amené à confronter ces deux approches aux approximations données par la méthode Delta dans le cas du modèle *BSCR*. La comparaison entre les indices de Sobol et ceux de Shapley sera analysée à son tour. Nous verrons qu'ils donnent les mêmes coefficients pour la fonction linéaire mais qu'une divergence apparaît avec le *BSCR*. C'est en fait le cas dès que la fonction représentant le modèle n'est plus linéaire. De plus, si nous ajoutons de la corrélation entre les variables d'entrée, nous constaterons que les indices de Sobol ne sont effectivement plus interprétables alors que les indices de Shapley le sont encore. Pour finir, nous nous tournerons vers des études de cas reprenant le périmètre de notre étude. Nous aurons l'occasion de regarder quelles sont les variables contribuant le plus à l'incertitude du *SCR* et du ratio de solvabilité pour des compagnies d'assurance relevant de la vie, de la non-vie ou bien mixtes.

Avant de passer aux applications numériques, nous voulons nous attarder sur un dernier point théorique. Il concerne la façon de simuler les nombres aléatoires pour les estimateurs de *Monte-Carlo*. Nous allons confronter dans les applications numériques deux méthodes : la génération de nombres pseudo-aléatoires et quasi-aléatoires. La première correspond à une simulation avec une loi uniforme alors que la seconde fait appel à des suites à discrétion faible. Nous présenterons une suite à discrétion faible populaire et souvent utilisée en pratique en finance qui est la suite de Sobol.

4.1 Quasi-aléatoire vs Pseudo-aléatoire

Dans le chapitre précédent, nous avons, à plusieurs reprises, évoqué le fait que nous estimions les coefficients de solvabilité à l'aide d'une méthode par *Monte-Carlo*. Dans cette section, nous verrons une méthode permettant de réduire l'erreur d'estimation de cette approximation. Nous commencerons d'abord par formaliser l'estimateur *Monte-Carlo* et le cadre classique de la génération des nombres de manière pseudo-aléatoire.

4.1.1 Estimateur *Monte-Carlo* et génération pseudo-aléatoire

Lorsque nous voulons estimer l'espérance d'une valeur aléatoire, nous utilisons en pratique une méthode dite d'approximation *Monte-Carlo*. Le principe de cette dernière est de dire que si X est un vecteur aléatoire uniformément distribué sur \mathcal{H}_d alors, grâce au théorème de transfert, nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{H}_d} f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}.$$

De plus, la loi forte des grands nombres nous assure la convergence ci-dessous pour l'estimateur de *Monte-Carlo* :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \int_{\mathcal{H}_d} f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u},$$

où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ est une réalisation de vecteurs aléatoires de dimension d indépendants et identiquement distribués selon la loi uniforme sur \mathcal{H}_d . Cet échantillonnage correspond à une simulation des nombres de manière pseudo-aléatoire. Nous savons dans ce cadre que l'erreur d'estimation est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Ainsi, le nombre de simulations N doit être grand pour obtenir un estimateur de qualité. Dans de nombreux cas quotidiens, un unique appel à la fonction f peut durer plusieurs heures, ce qui empêche de générer un grand nombre de trajectoires aléatoires. De ce fait, l'estimateur *Monte-Carlo* reposant sur la loi des grands nombres commettra une grande erreur d'estimation. Nous proposons dans la suite une méthode d'échantillonnage du pavé $[0, 1]$ se basant sur des suites à discrétion faible et permettant une meilleure convergence de cet estimateur avec un nombre équivalent de simulations.

4.1.2 Discrétion faible

Dans cette partie, nous aborderons la notion de discrétion et évoquerons l'erreur d'estimation de l'estimateur de *Monte-Carlo*. Pour cela, nous gardons les notations définies en [3.5.1](#) et nous ajoutons les suivantes :

- \mathcal{J} l'ensemble des pavés de dimension d de la forme $\prod_{i=1}^d [0, x_i[$ où $x_i \in [0, 1[$,
- $\Delta(f, \mathbf{J}) = \sum_{u_1=0}^1 \dots \sum_{u_d=0}^1 (-1)^{u_1+\dots+u_d} f(x_1^{u_1}, \dots, x_d^{u_d})$ représente la somme alternée des valeurs de f prises aux bornes de $\mathbf{J} = \prod_{i=1}^d [x_i^0, x_i^1[\in \mathcal{J}$,
- pour deux ensembles \mathbf{A} et \mathbf{B} quelconques, nous dénoterons par $\text{card}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$, le nombre de points de \mathbf{B} qui appartiennent à \mathbf{A} ,
- $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre,
- λ_d la mesure de Lebesgue en dimension d .

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il nous faut un nombre élevé N de simulations afin d'obtenir la meilleure approximation possible. Cependant, dans certains cas où la fonction est coûteuse en temps de calcul ce n'est pas possible. Un autre moyen de réduire l'erreur d'estimation

en gardant constant le nombre de simulations est de s'assurer que nous quadrillons du mieux possible le pavé $[0, 1]$. Dans le but de caractériser l'échantillonnage effectué, nous introduisons la définition ci-après.

Définition 4.1. Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ une suite de points de \mathcal{H}_d . Nous dirons que \mathbf{x} est équirépartie si $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{J}$,

$$\frac{\text{card}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda_d(\mathbf{A}).$$

Cette dernière définition nous permet d'aborder la notion de discrédance à l'origine qui sera fondamentale dans la suite.

Définition 4.2. Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ une suite de points de \mathcal{H}_d . La discrédance à l'origine D_N^* est définie comme suit :

$$D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sup_{\mathbf{A} \in \mathcal{J}} \left| \frac{\text{card}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{N} - \lambda_d(\mathbf{A}) \right|.$$

La discrédance à l'origine détermine donc la densité de points des intervalles de \mathcal{J} la plus faible ou élevée par rapport à son volume. De cette façon, plus la discrédance à l'origine est petite, plus la séquence générée sera bien équirépartie. Nous allons maintenant caractériser l'erreur d'estimation de *Monte-Carlo* en fonction de la discrédance à l'origine. Nous devons tout d'abord définir la variation d'une fonction aux sens de Vitali et Hardy-Krause.

Définition 4.3. Soit f une fonction définie de \mathcal{H}_d dans \mathbb{R} . La variation d -dimensionnelle de f au sens de Vitali est donnée par :

$$V^{(d)}(f) = \sup_{\mathcal{J}} \sum_{\mathbf{J} \in \mathcal{J}} |\Delta(f, \mathbf{J})|.$$

De plus, f est dite à variation bornée au sens de Vitali si $V^{(d)}(f)$ est finie.

Remarque 4.1. Lorsque la dérivée partielle $\frac{\partial^d f}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$ est continue sur \mathcal{H}_d , alors nous pouvons utiliser l'écriture suivante :

$$V^{(d)}(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\frac{\partial^d f}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \right) du_1 \dots du_d.$$

Définition 4.4. Soit f une fonction définie de \mathcal{H}_d dans \mathbb{R} . La variation $V(f)$ de f au sens de Hardy-Krause est donnée par :

$$V(f) = \sum_{k=1}^d \sum_{1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq d} V^{(k)}(f; x_1, \dots, x_k).$$

De plus, f est dite à variation bornée au sens de Hardy-Krause si $V(f)$ est finie.

Nous en venons maintenant au théorème qui nous intéresse. Ce dernier n'est pas prouvé dans ce mémoire mais une démonstration peut être trouvée dans [Niederreiter \(1992\)](#).

Théorème 4.1. Si f est une fonction à variation bornée au sens de Hardy-Krause, de variation $V(f)$, alors $\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathcal{H}_d^N$,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) - \int_{\mathcal{H}_d} f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \right| \leq V(f) D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Nous constatons avec ce théorème que si une fonction est à variation finie, nous pouvons améliorer la convergence de son estimateur de *Monte-Carlo* en réduisant la discrédance de l'échantillonnage. L'avantage de cette approche est que nous gardons toujours le même nombre N de simulations et que nous jouons juste sur la qualité de la simulation des nombres aléatoires. Nous savons que dans le cadre de l'utilisation de la loi uniforme sur $[0, 1]$, la discrédance est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Les suites à discrédance faible sont construites de manière à minimiser la discrédance et il est possible d'avoir $D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = O\left(\frac{(\log N)^{d-1}}{N}\right)$. Ces suites sont également connues sous le nom de suites de nombres quasi-aléatoires. C'est notamment les cas des suites de Sobol introduites par [Sobol \(1967\)](#) et que nous allons évoquer dans la partie suivante.

4.1.3 Suite de Sobol

Il y a de nombreuses façons de générer des suites de nombres de manière quasi-aléatoire. [Varet \(2010\)](#) et [Thiérmard \(2000\)](#) présentent dans leur thèse plusieurs séquences quasi-aléatoires qui permettent de réduire la discrédance. Nous avons choisi dans ce mémoire de nous concentrer sur l'une des plus populaires et utilisées : la suite de Sobol. Pour commencer, nous rappelons que la représentation en base 2 d'un entier positif n , (n_1, \dots, n_m) , est donnée par :

$$n = \sum_{k=1}^m n_k 2^{k-1}, \quad \text{avec } m = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous supposons que nous nous plaçons en dimension d et que nous disposons d'un ensemble $\{m_1^d, \dots, m_q^d\}$ d'entiers impairs tels que $1 \leq m_i^d \leq 2^i, \forall i \in \{1, \dots, q\}$ avec $d > q$. Les entiers $\{m_{q+1}^d, m_{q+2}^d, \dots\}$ sont déterminés en utilisant la récurrence suivante :

$$m_k^d = 2a_1 m_{k-1}^d \oplus 2^2 a_2 m_{k-2}^d \oplus \dots \oplus 2^q a_q m_{k-q}^d \oplus m_{k-q}^d,$$

où $(a_i)_{1 \leq i \leq q}$ sont les coefficients d'un polynôme primitif de degré q de $\{0, 1\}$. Un polynôme de degré q de la forme $t^q + a_1 t^{q-1} + \dots + a_{q-1} t + a_q$ est dit primitif sur le corps $\{0, 1\}$ s'il est irréductible sur $\{0, 1\}$ et si le plus petit entier i pour lequel il divise $t^i + 1$ est égal à $2^d - 1$. Nous appellerons alors nombres directionnels les valeurs $l_k^d = \frac{m_k^d}{2^k}$. Nous sommes désormais en mesure de définir la suite de Sobol ([Sobol \(1967\)](#)) en utilisant les notations et résultats précédents.

Définition 4.5. Une suite de Sobol $S = (x_1, \dots, x_N)$ en dimension d est définie par les valeurs suivantes :

$$x_n^d = \bigoplus_{k=1}^m n_k l_k^d.$$

Par conséquent, pour construire une suite de Sobol, nous avons besoin de nous donner arbitrairement q entiers impairs $\{m_1^d, \dots, m_q^d\}$ respectivement inférieurs à $2, \dots, 2^q$. Dans son article, [Sobol \(1967\)](#) ajoute le théorème ci-dessous qui permet de caractériser la discrédance de la suite.

Théorème 4.2. Soit $S = (x_1, \dots, x_N)$ une suite de Sobol en dimension d . Alors, nous avons

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) \leq \frac{2t_d}{d! (\log 2)^d} \frac{1}{N} (\log N)^d + O\left(\frac{(\log N)^{d-1}}{N}\right),$$

où

$$k \frac{d \log d}{\log \log d} \leq t_d \leq + \frac{d \log d}{\log 2} + O(d \log \log d), \quad k > 0.$$

Nous avons mis en lumière avec le Théorème [4.1](#) que l'erreur d'estimation par *Monte-Carlo* était d'autant plus faible que la discrédance de l'ensemble des nombres aléatoires simulés était faible. Le Théorème [4.2](#) nous assure donc d'avoir une erreur d'estimation plus faible en utilisant une génération des nombres de manière quasi-aléatoire avec la suite de Sobol plutôt qu'en utilisant une méthode pseudo-aléatoire avec une loi uniforme. Nous ajoutons tout de même un point d'attention sur la suite de Sobol. Elle est connue pour être très performante pour les petites dimensions mais elle décroît en qualité quand la dimension augmente.

Intéressons nous maintenant à une comparaison graphique entre la simulation des nombres pseudo-aléatoires et quasi-aléatoires. Nous avons représenté, dans la première figure ci-dessous, la génération des 10 000 premiers points de la suite de Sobol en dimension 2. Dans la deuxième figure, la génération est faite à l'aide de la loi uniforme.

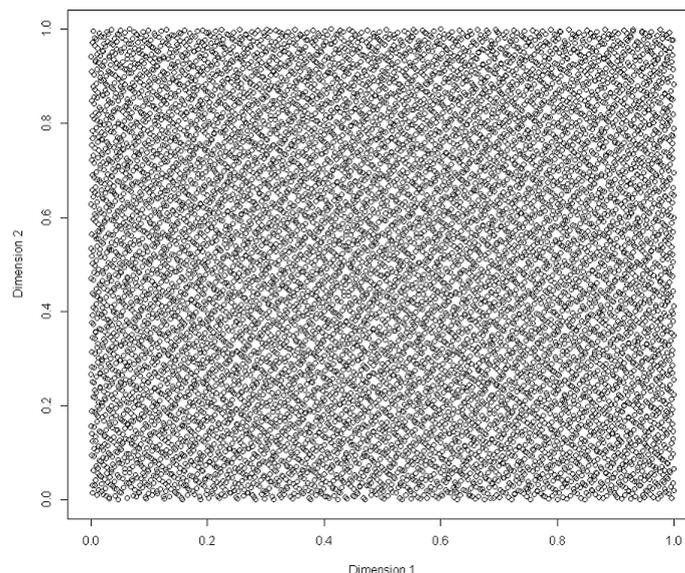


FIGURE 4.1 – Génération quasi-aléatoire : suite de Sobol

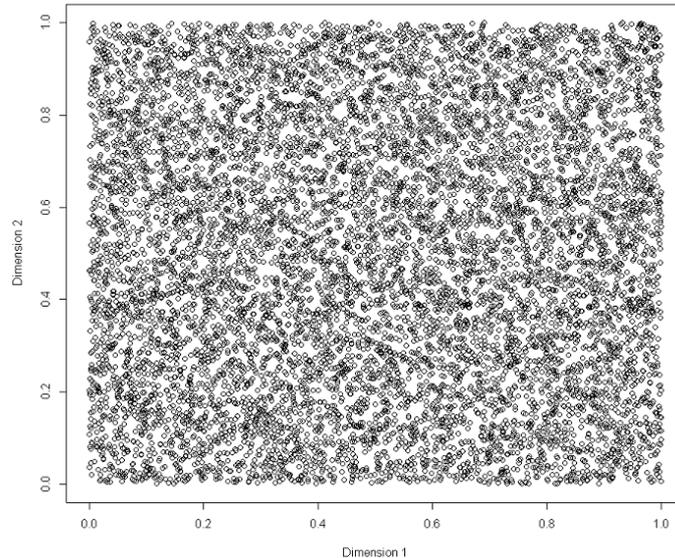


FIGURE 4.2 – Génération pseudo-aléatoire : loi uniforme

Nous constatons que la qualité de la distribution n'est pas bonne lorsque les nombres sont générés pseudo-aléatoirement (Figure 4.2). En effet, nous observons certaines régions contenant de nombreux points alors que d'autres sont entièrement vides. A l'inverse, si nous nous concentrons sur ceux générés quasi-aléatoirement avec la suite de Sobol (Figure 4.1), ils semblent très bien équirépartis sur le pavé $[0, 1]$. Rappelons-nous que nous cherchions à réduire l'erreur d'estimation en diminuant la discrédance et que cette dernière est d'autant plus petite que la séquence de nombres est bien équirépartie. De ce fait, il paraît logique, à la vue des deux graphiques précédents, que simuler les nombres de manière quasi-aléatoire réduira l'erreur d'estimation de notre estimation *Monte-Carlo*. Lorsque nous utilisons une génération quasi-aléatoire avec la méthode de *Monte-Carlo* (MC), nous parlerons alors de méthode *Quasi-Monte-Carlo* (QMC). Nous chercherons à vérifier cette constatation graphique dans la section suivante qui sera consacrée aux applications numériques et aux comparaisons des différentes approches présentées dans ce mémoire.

4.2 Étude comparative des méthodes

Dans le Chapitre 3, nous avons exposé plusieurs méthodes de calcul des coefficients de solvabilité. Pour les indices de Sobol, nous avons mis en place deux approches que nous comparerons ici. Nous opposerons ensuite ces indices à ceux de Shapley. Dans le cadre du calcul du *BSCR*, une troisième approche est même utilisée, la méthode Delta. Toutefois, nous commencerons par confronter les deux méthodes de génération de nombres aléatoires vues dans la première partie de ce chapitre.

4.2.1 *Monte-Carlo vs Quasi-Monte-Carlo*

Il résulte de la Section 4.1 que nous pouvons générer des nombres aléatoires de plusieurs façon. La plus communément utilisée est la génération pseudo-aléatoire qui repose sur l'utilisation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Cependant, notre travail théorique (4.1.2) et l'exemple graphique fourni (4.1.3) montrent que si nous simulons les nombres quasi-aléatoirement, par exemple avec

la suite de Sobol (4.1.3), nous sommes en mesure de réduire l'erreur d'estimation de la méthode de *Monte-Carlo*. Afin d'étudier si cette propriété est respectée en pratique, nous utiliserons la fonction linéaire. En effet, nous pouvons calculer analytiquement les indices de Sobol de cette dernière. Ceci nous permettra d'avoir les valeurs exactes des coefficients de sensibilité dans le but de comparer objectivement les méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo*.

Afin de s'assurer également de la bonne convergence de nos algorithmes, nous considérons le cas de la fonction linéaire, $f(\mathbf{X}) = X_1 + X_2 + X_3$, sur un exemple numérique que nous retrouvons dans la littérature (Kucherenko et al. (2012) ou Iooss and Prieur (2019)). Pour commencer, nous allons donner l'expression des indices de Sobol associés à f . Avec les notations définies dans la Partie 3.5.1, nous avons :

$$S_i = \frac{\text{Var} [\mathbb{E} [f(\mathbf{X}) | X_i]]}{\text{Var} [Y]} = \frac{\left(\sigma_i + \sum_{k=1, k \neq i}^3 \rho_{k,i} \cdot \sigma_k \right)^2}{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \rho_{k,l} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_l}.$$

Nous supposons que les variables ont une espérance nulle et qu'elles ne sont pas corrélées entre elles. La matrice de variance-covariance est la suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer analytiquement la valeur des trois indices de Sobol :

$$S_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2} = \frac{1}{1 + 1 + 4} = \frac{1}{6},$$

$$S_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2} = \frac{1}{1 + 1 + 4} = \frac{1}{6},$$

$$S_3 = \frac{\sigma_3^2}{\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2} = \frac{4}{1 + 1 + 4} = \frac{4}{6}.$$

L'idée est alors de comparer graphiquement les méthodes de *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* pour chacune des deux approches, brutale et alternative. Pour cela, nous allons exposer deux graphiques représentant, pour une approche donnée, les valeurs obtenues par les deux méthodes pour un nombre croissant de simulations considérées. Nous avons choisi de prendre un nombre de simulations compris entre 100 et 100 000. Sur chacun des graphiques, nous afficherons en plus la valeur analytique de l'indice de Sobol étudié afin de vérifier la convergence des méthodes vers la valeur exacte. A titre d'exemple, nous avons pris l'indice de Sobol correspondant à la variable d'entrée X_1 . Le premier graphique présenté est celui comparant les méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* pour l'approche brutale.

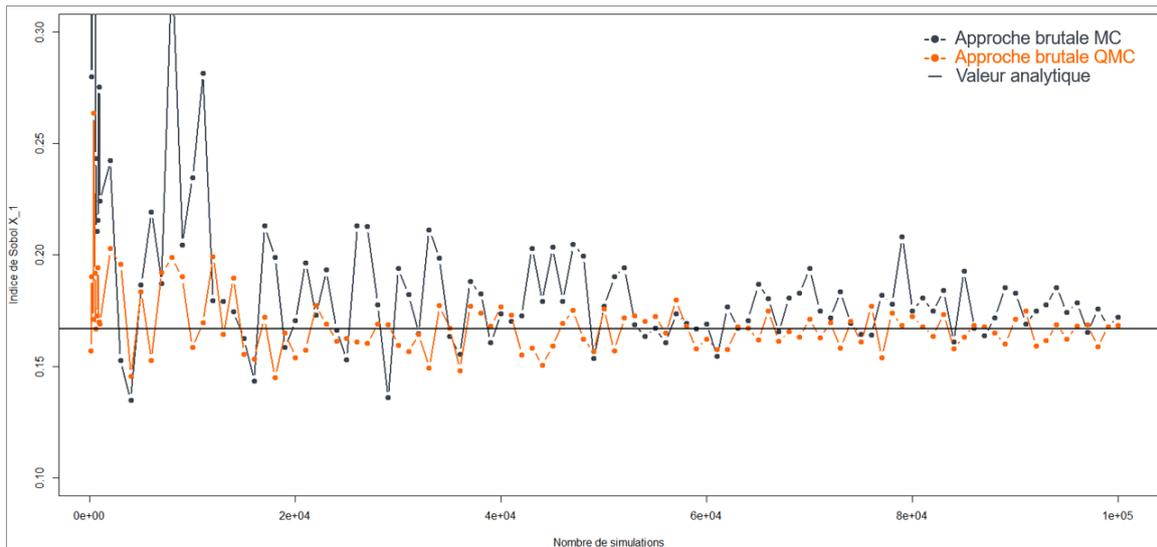


FIGURE 4.3 – Méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* - Approche brute

Le graphique ci-dessus nous confirme l'impression que nous avons concernant la comparaison sur la qualité de la distribution entre les méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* (4.1.3). Les deux méthodes semblent bien converger vers la valeur exacte de l'indice de Sobol. Cependant, nous constatons que la méthode avec génération pseudo-aléatoire (courbe noire) fluctue singulièrement même avec un grand nombre de simulations et surestime légèrement l'indice de Sobol de X_1 . D'un autre côté, la méthode *Quasi-Monte-Carlo* semble osciller dans un intervalle réduit autour de la valeur exacte. Ceci s'avère vrai pour un nombre de simulations pas trop élevé, ce qui permet de gagner en temps de calcul en vue d'avoir une bonne précision. Regardons si nous pouvons faire le même constat avec l'approche alternative.

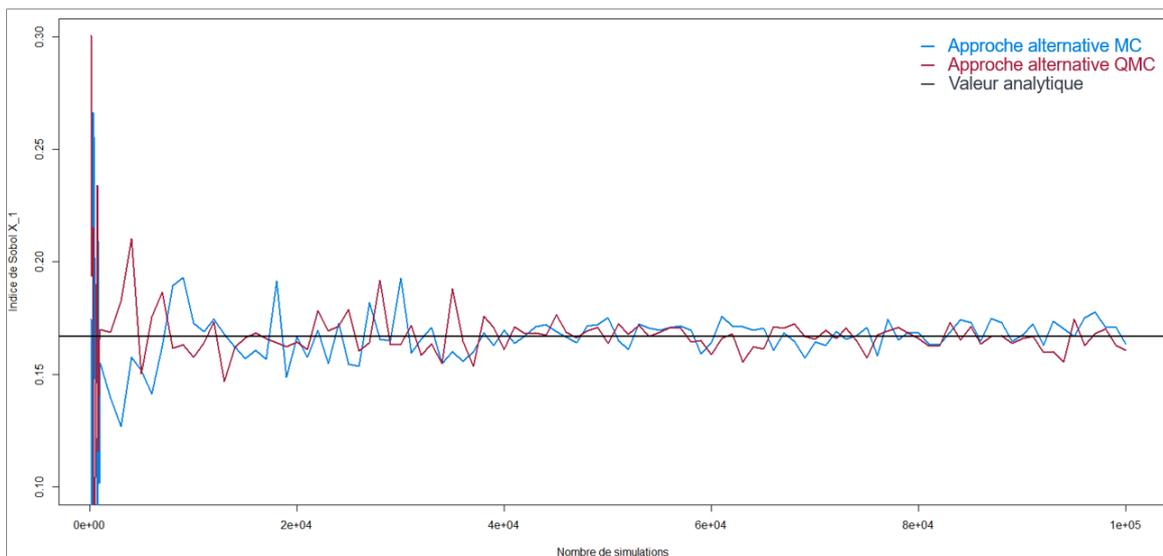


FIGURE 4.4 – Méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* - Approche alternative

La différence de performance entre les méthodes *Monte-Carlo* et *Quasi-Monte-Carlo* n'est pas aussi évidente avec l'approche brutale. De ce fait, nous nous sommes basés sur une méthode objective qu'est la somme des écarts au carré. Cette fois encore la génération des nombres avec la suite de Sobol améliore la convergence dans le sens où la somme des écarts au carré (0,051) est plus petite qu'avec une génération utilisant la loi uniforme (0,068). Ainsi, nous retiendrons la méthode *Quasi-Monte-Carlo* dans la suite des applications numériques. Nous allons maintenant essayer de comparer les approches brutale et alternative ensemble puis avec la méthode Delta.

4.2.2 Approche brutale vs Approche alternative vs Méthode Delta

Nous venons de constater graphiquement que la méthode *Quasi-Monte-Carlo* permettait une convergence plus rapide vers la valeur exacte de l'indice de Sobol quelle que soit l'approche utilisée. Nous voulons, dans cette partie et dans un premier temps, comparer non plus la méthode de génération des nombres aléatoires mais la qualité des estimateurs des deux approches définies dans le chapitre précédent, à savoir l'approche brutale (3.5.3) et l'approche alternative (3.5.4). Pour cela, nous reprenons les courbes des Graphiques (4.3) et (4.4) correspondant à la méthode *Quasi-Monte-Carlo* que nous fusionnons ci-dessous afin de les comparer.

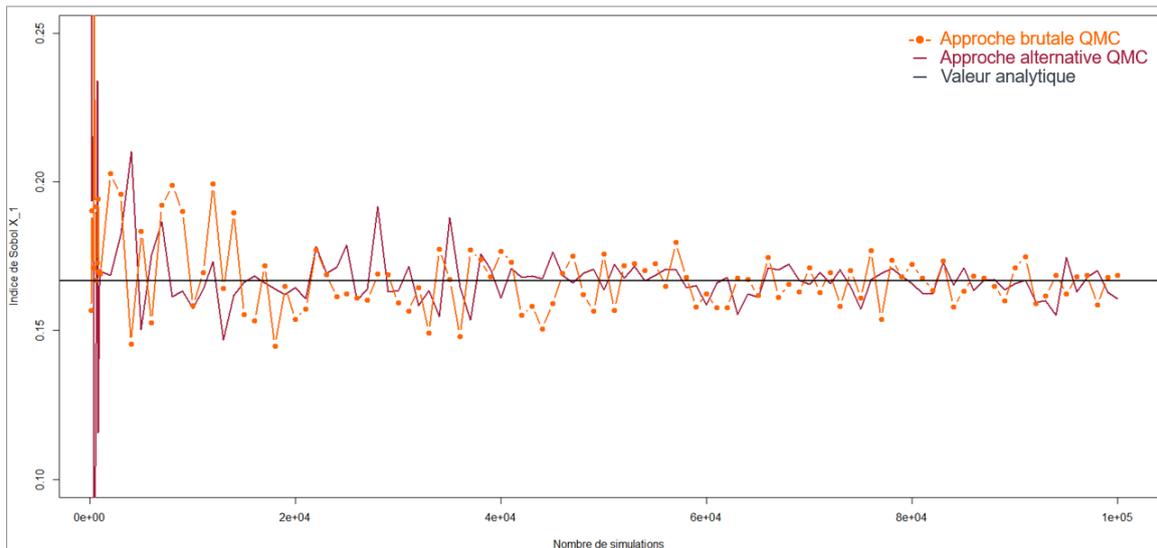


FIGURE 4.5 – Comparaison convergence approches brutale et alternative

Nous constatons avec ce graphique que l'approche alternative semble moins fluctuer autour de la valeur de l'indice de Sobol que l'approche brutale. De plus, elle converge plus rapidement vers la valeur exacte. Ces constats nous permettent de considérer que l'approche alternative est plus performante que l'approche brutale dans le cadre de la fonction linéaire.

Avant de regarder si c'est également le cas avec la fonction *BSCR*, intéressons-nous au temps de calcul nécessaire pour les deux méthodes. Dans la Section 3.5 nous avons vu que l'estimateur de l'approche alternative (3.14) nécessitait moins de simulations que celui de l'approche brutale (3.9). En effet, il faut $2 \times n \times N'$ simulations de points avec l'approche alternative où n est le nombre de variables d'entrée dans notre modèle et N' correspond au nombre de scénarios envisagés pour l'estimateur de *Monte-Carlo*. Pour l'approche brutale, le total de simulations est de $n \times N \times M$ avec N et M respectivement les nombres de scénarios primaires et secondaires

utilisés pour la méthode par *Monte-Carlo* de l'estimateur de la variance de l'espérance conditionnelle (3.9). Nous allons voir avec le graphique ci-après si le temps de calcul est impacté de la même façon. Il représente le temps de calcul en secondes permettant de déterminer l'ensemble des indices de Sobol de la fonction linéaire pour chacune des méthodes et des approches des Figures 4.3 et 4.4.

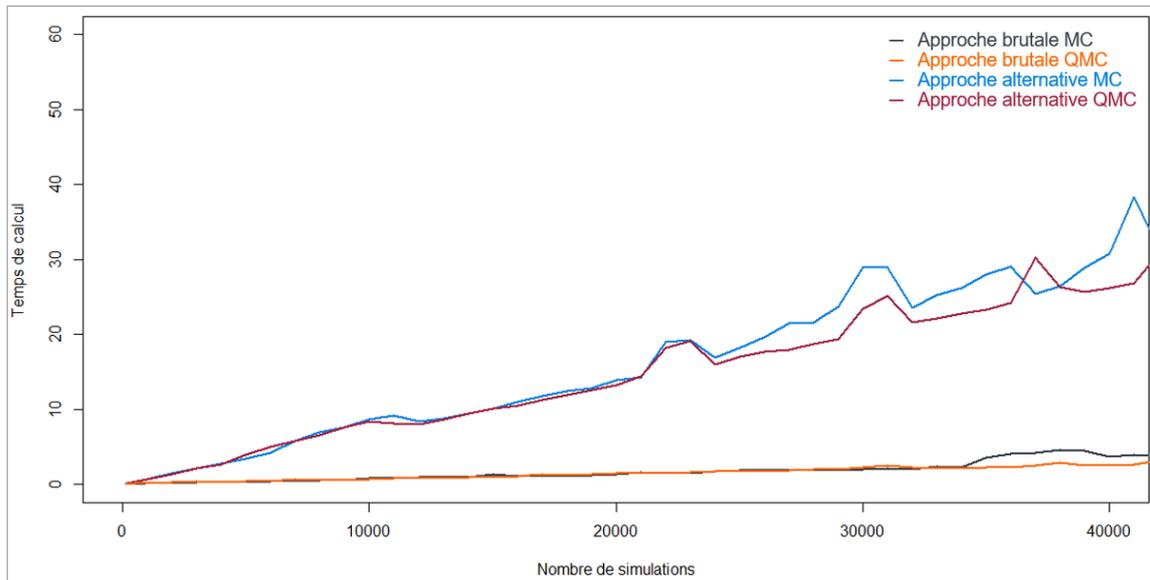


FIGURE 4.6 – Comparaison temps de calcul approches brutale et alternative

La Figure 4.6 nous indique le temps nécessaire pour chaque approche avec un nombre égal de simulations générées. Bien que l'approche alternative nécessite moins de scénarios pour converger vers la valeur exacte de l'indice de Sobol, il résulte de ce graphique que l'approche alternative est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que l'approche brutale. Ceci s'explique par le fait qu'avec l'approche brutale, la double boucle de *Monte-Carlo* faisant intervenir les $N \times M$ scénarios envisagés ne demande pas de simulation annexe. A l'inverse, lorsque nous générons N' scénarios avec l'approche alternative, nous devons en simuler N' autres pour obtenir l'estimateur (3.14). Par conséquent, le coût calculatoire augmente beaucoup plus rapidement avec l'approche alternative qu'avec l'approche brutale.

Nous allons maintenant nous tourner vers la fonction *BSCR* (2.4) pour arbitrer les deux approches. Nous avons vu dans la Partie 3.5.4 que l'approche alternative proposée par Kucherenko et al. (2012) et présentée dans ce mémoire était la généralisation de la méthode apportée par Xu and Gertner (2008). Cependant, cette dernière ne fournissait pas des résultats concluants pour une fonction s'éloignant de la linéarité. Se pose alors la question de tester l'approche alternative avec la fonction *BSCR* pour vérifier si elle améliore également l'approche brutale comme c'est le cas avec la fonction linéaire. Pour cela, nous supposons que les variables d'entrée, représentant les capitaux économiques des différents modules de risques, ne sont pas corrélées entre elles. Nous faisons le choix de considérer l'exemple d'une compagnie mixte ne possédant pas d'actifs incorporels. Le vecteur d'espérance ci-dessous correspond à la proportion possible de chaque *SCR* pour un acteur du marché dont les valeurs moyennes correspondent respectivement aux *SCR* marché, défaut, vie, non-vie et santé :

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ 27 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La variance des variables d'entrée a été déterminée en fonction de son coefficient de variation qui s'exprime sous la forme : $CV = \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{\mathbb{E}[X]}$. Ainsi, nous calculons la variance avec la formule : $\text{Var}[X] = CV^2 \times \mathbb{E}[X]^2$. Nous supposons pour cet exemple que le coefficient de variation est le même pour toutes les variables aléatoires et qu'il vaut $CV = 20\%$. Nous présentons sur le graphique ci-après les valeurs de l'indice de Sobol du *SCR* marché calculées avec les approches brutale et alternative en utilisant la méthode *Quasi-Monte-Carlo* pour un nombre de scénarios compris entre 100 et 100 000.

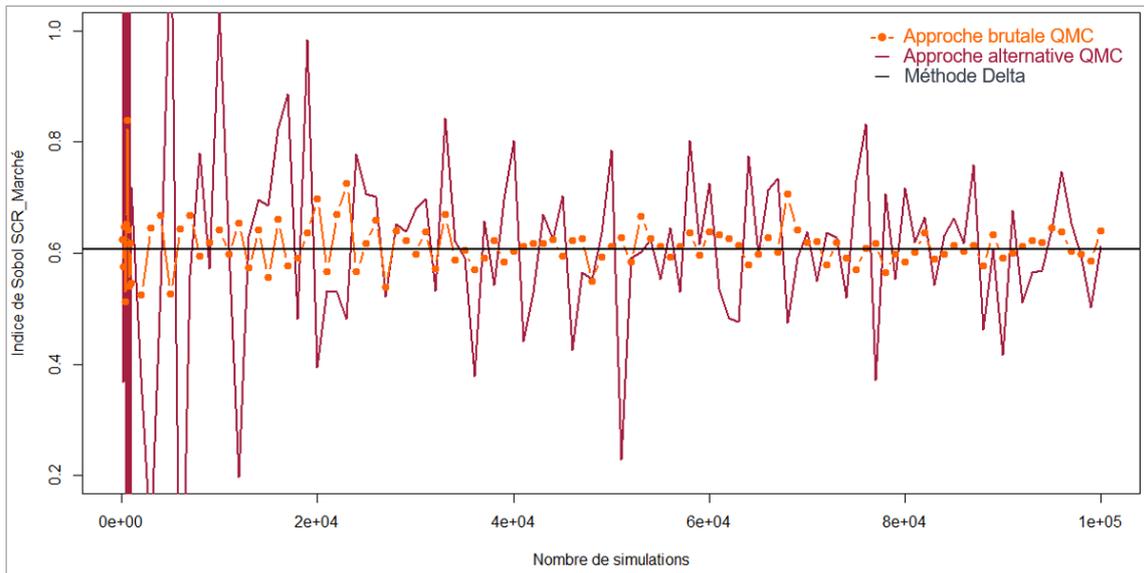


FIGURE 4.7 – Comparaison convergence approches brutale et alternative - *BSCR*

Contrairement à l'interprétation faite de la Figure 4.5, nous ne pouvons pas conclure ici que l'approche alternative soit plus performante que l'approche brutale. Bien que les deux algorithmes semblent converger vers une même valeur, cette fois c'est l'approche brutale qui fluctue le moins. De plus, même si l'approche alternative donne l'impression de converger, nous remarquons que les valeurs retournées restent assez largement éloignées de celles de l'approche brutale. Dans ce cas, il faudrait un nombre beaucoup plus conséquent de simulations pour que l'estimateur soit efficace. Cependant, la Figure 4.6 nous montre que l'approche alternative est beaucoup plus coûteuse en temps que l'approche brutale. Par conséquent, si nous augmentons le nombre de scénarios envisagés avec l'approche alternative, nous augmenterons considérablement le temps de calcul alors que l'approche brutale converge déjà mieux. Toutes ces remarques nous amènent à considérer l'approche brutale comme solution pour les fonctions non linéaires.

Nous venons de voir sur la Figure 4.7 que les deux algorithmes convergeaient vers une même valeur de l'indice de Sobol. Dans le cas de la fonction linéaire, il s'agissait de la valeur analy-

tique de cet indice. Ici, cette valeur est celle obtenue approximativement grâce à la méthode Delta. La première impression que nous avons avec ce graphique est que l'approximation de la méthode Delta est en adéquation avec les méthodes par simulation pour l'indice de Sobol du *SCR* marché. Nous allons maintenant nous intéresser aux indices de Sobol de l'ensemble des *SCR* pour vérifier si ce constat est juste. Pour les raisons expliquées précédemment, nous présenterons les estimations par simulation des indices de Sobol à l'aide de l'approche brutale. Nous considérerons pour cela un nombre de simulations primaires $N = 1\,000$ et secondaires $M = 1\,000$. Nous fournirons également les intervalles de confiance des différentes estimations de l'approche brutale. Nous avons retenu la méthode de *bootstrap* non paramétrique pour les déterminer. Les intervalles de confiance seront calculés sur $B = 1\,000$ simulations et à un niveau de confiance $\alpha = 95\%$. Les résultats obtenus sont présentés avec trois chiffres significatifs dans le tableau ci-dessous.

| <i>SCR</i> | Méthode Delta | Indice de Sobol | Intervalle de confiance |
|------------|---------------|-----------------|-------------------------|
| Marché | 0.606 | 0.605 | [0.603, 0.607] |
| Défaut | 0.0613 | 0.0612 | [0.0609, 0.0613] |
| Vie | 0.220 | 0.219 | [0.219, 0.220] |
| Non-vie | 0.112 | 0.112 | [0.112, 0.113] |
| Santé | 0.000820 | 0.000819 | [0.000816, 0.000820] |

TABLE 4.1 – Comparaison méthode Delta et approche brutale

Nous constatons que les valeurs retournées par l'approche brutale et la méthode Delta sont très proches, sans être à chaque fois exactement les mêmes. Les deux approches étant une approximation ou une estimation de la valeur de l'indice de Sobol, il est difficile de statuer sur lequel fourni le meilleur résultat. Cependant, si nous considérons l'intervalle de confiance de l'approche brutale, les valeurs de la méthode Delta sont à chaque fois comprises à l'intérieur. Ceci nous permet de considérer que les deux méthodes sont concluantes dans le cas du *BSCR*. Toutefois, la méthode Delta retourne les valeurs immédiatement alors qu'il faut plus de deux minutes pour l'approche brutale. Cet argument nous fait pencher en faveur de l'approximation par la méthode Delta. Rappelons tout de même qu'elle est très difficilement implémentable pour les modèles *SCR* et ratio de solvabilité. C'est en fait le cas dès que le modèle contient un grand nombre de variables d'entrée ou que la fonction est trop complexe.

Maintenant que nous avons vu les avantages et inconvénients de l'ensemble des approches permettant de déterminer l'indice de Sobol d'une variable d'entrée, dans la prochaine partie, nous les comparerons avec l'indice de Shapley.

4.2.3 Indices de Sobol vs Indices de Shapley

Nous testerons en premier lieu l'algorithme permettant d'estimer les indices de Shapley dans le cas de la fonction linéaire. Nous les confronterons aux valeurs analytiques et estimées de l'indice de Sobol. Pour cela, reprenons les mêmes hypothèses que dans la Partie [4.2.1](#). Les indices de Sobol ont été obtenus grâce à l'approche alternative et une génération des nombres quasi-aléatoire sur 1 000 000 simulations. L'estimation des indices de Shapley a été réalisée sur l'ensemble des $m = 3! = 6$ permutations des variables d'entrée. Les fonctions de coût sont calculées avec $N = 500$ et $M = 500$ simulations de telle sorte que le nombre total de points générés ($m \times (n - 1) \times N \times M = 4\,800\,000$) soit approximativement égal à celui des indices de Sobol (5 000 000). Les résultats sont donnés ci-après.

| | X_1 | X_2 | X_3 |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| Valeur analytique | 0.167 | 0.167 | 0.667 |
| Indice de Sobol | 0.168 | 0.166 | 0.668 |
| IC Sobol | [0.168, 0.168] | [0.166, 0.166] | [0.668, 0.668] |
| Indice de Shapley | 0.166 | 0.168 | 0.666 |
| IC Shapley | [0.166, 0.166] | [0.168, 0.168] | [0.666, 0.666] |

TABLE 4.2 – Comparaison indices de Sobol et de Shapley - Fonction linéaire

Le Tableau 4.2 nous montre que les indices de Shapley concordent avec ceux de Sobol dans le cadre de la fonction linéaire et de non corrélation entre les erreurs sur les variables d'entrée. Comme nous l'explique Song et al. (2016), ce résultat était attendu. Toutefois, ils précisent que ce n'est que dans le cas linéaire. De ce fait, si nous considérons la fonction d'agrégation du *BSCR* (2.4), nous sommes censés obtenir des valeurs différentes pour les coefficients de sensibilité. C'est ce que nous allons vérifier dans l'exemple ci-après. Nous gardons toujours le cadre d'indépendance des variables d'entrée et nous reprenons le vecteur d'espérance (4.2.2) utilisé pour le *BSCR*. Les valeurs estimées pour l'indice de Sobol sont celles reprises du Tableau 4.1. Pour considérer le même nombre de points générés sur les $m = 120$ permutations, nous avons fait tourner l'algorithme des indices de Shapley avec $N = 100$ et $M = 100$ simulations.

| <i>SCR</i> | Indice de Sobol | IC Sobol | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|-----------------|----------------------|-------------------|--------------------|
| Marché | 0.605 | [0.603, 0.607] | 0.604 | [0.604, 0.604] |
| Défaut | 0.0612 | [0.0609, 0.0613] | 0.0611 | [0.0610, 0.0612] |
| Vie | 0.219 | [0.219, 0.220] | 0.219 | [0.219, 0.219] |
| Non-vie | 0.112 | [0.112, 0.113] | 0.114 | [0.114, 0.114] |
| Santé | 0.000819 | [0.000816, 0.000820] | 0.00132 | [0.00126, 0.00134] |

TABLE 4.3 – Comparaison indices de Sobol et de Shapley - *BSCR* - Indépendance

Il s'avère avec le Tableau 4.3 que les coefficients de sensibilité retournés par les deux indices restent très proches les uns des autres bien que nous nous attendions à des différences. Ceci peut s'expliquer par le fait que la fonction *BSCR* reste tout de même proche de la linéarité. Toutefois, nous notons une nette différence sur l'indice de sensibilité correspondant au *SCR* santé. Ceci reste à relativiser étant donné de la faible importance de cette variable d'entrée.

Rappelons que nous sommes toujours dans le cadre non réaliste d'indépendance. De ce fait, ajoutons de la corrélation entre les erreurs opérationnelles. Les calculs nécessaires à la détermination du *SCR* de souscription en santé sont similaires, d'une part à ceux en souscription vie et d'autre part, à ceux en souscription non-vie. Il est raisonnable de penser qu'un module de calcul propre à la souscription vie sera également utilisé pour une partie des calculs du *SCR* santé. Il en sera de même avec le module de la souscription non-vie. Considérons donc que le *SCR* santé est corrélé avec les *SCR* vie et non-vie à hauteur de $\rho = 0,5$ par exemple. Ainsi, les indices de Sobol et de Shapley sont estimés de nouveau sous les mêmes conditions que précédemment mais en intégrant la dépendance. Les valeurs obtenues dans ce cadre sont présentées ci-dessous. Intuitivement, nous nous attendons à ce que le *SCR* de santé explique une plus grosse part de l'incertitude totale du modèle que dans le cadre d'indépendance. De la même façon, les indices de sensibilité des *SCR* marché et défaut devraient diminuer. C'est ce que nous allons vérifier. Nous représentons dans le tableau suivant les différentes valeurs des coefficients de sensibilité des indices de Sobol et de Shapley.

| <i>SCR</i> | Indice de Sobol | IC Sobol | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| Marché | 0.572 | [0.572, 0.576] | 0.594 | [0.594, 0.594] |
| Défaut | 0.0564 | [0.0562, 0.0564] | 0.0589 | [0.0588, 0.0590] |
| Vie | 0.220 | [0.220, 0.221] | 0.172 | [0.171, 0.172] |
| Non-vie | 0.115 | [0.115, 0.115] | 0.0823 | [0.0820, 0.0826] |
| Santé | 0.184 | [0.184, 0.185] | 0.0936 | [0.0928, 0.0935] |

TABLE 4.4 – Comparaison indices de Sobol et de Shapley - *BSCR* - Dépendance

Que ce soit pour les indices de Sobol ou de Shapley, la valeur du coefficient de sensibilité des *SCR* marché et défaut diminue comme nous l'attendions. Le constat est le même pour l'indice du *SCR* santé qui augmente dans les deux cas et notamment avec Sobol. La divergence apparaît pour les *SCR* vie et non-vie. Les indices de Shapley diminuent pour ces deux variables d'entrée alors qu'ils augmentent légèrement avec les indices de Sobol.

La principale différence qui nous intéresse ici est le fait que nous sommes en mesure d'interpréter les sensibilités des indices de Shapley mais pas ceux de Sobol. La raison est simple, la somme des indices de Sobol dépasse 1 et donc la répartition de la variance globale du modèle ne tient plus. Ainsi, il est difficile de déterminer réellement l'impact de l'incertitude des variables d'entrée sur celle de sortie. Une façon de voir les choses pourrait être de normaliser par la somme des indices et non plus par la variance du modèle mais encore une fois, nous ne capturons pas précisément ce que nous souhaitons. Cette problématique n'est pas présente avec les indices de Shapley qui somment bien à 1 en cas de dépendance comme nous pouvons le voir dans le Tableau 4.4. Rappelons que nous avons également constaté avec le Tableau 4.3 qu'en cas de dépendance, les indices retournés étaient similaires. Ces éléments nous poussent à ne considérer plus que les indices de Shapley pour nos applications numériques et études de cas présentés dans la section suivante.

4.3 Études de cas

Cette dernière section est consacrée à l'application des indices de Shapley à notre étude. Ceux-ci seront notamment utilisés pour quantifier l'impact des erreurs opérationnelles des variables d'entrée sur l'incertitude totale des modèles *BSCR*, *SCR* et ratio de solvabilité.

4.3.1 Fonction *BSCR*

La première fonction d'intérêt est celle du *BSCR* (2.4) dont nous avons déjà eu l'opportunité d'étudier dans les différentes parties de comparaison des méthodes. Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé comme valeurs du vecteur d'espérance pour les *SCR* une proportion d'un assureur mixte sur le marché (4.2.2). Toutefois, les résultats des Tableaux 4.2 et 4.3 nous montrent que dans notre modélisation, les ordres de grandeur conditionnent amplement la part d'incertitude du modèle induite par les variables d'entrée. Dans le cadre du *BSCR*, il peut être intéressant d'analyser l'impact des différents *SCR* dans la formule d'agrégation des capitaux en considérant des espérances égales. Nous estimerons alors les indices de Shapley en partant d'un vecteur d'espérance dont les composantes sont toutes égales à 20. Dans un premier temps, nous étudierons les impacts sans dépendance entre nos variables d'entrée puis, dans un second temps, nous introduirons une structure de dépendance entre les erreurs effectuées sur les montants des capitaux économiques. Ainsi, nous présentons et discutons ci-dessous des valeurs des indices de Shapley associées à notre nouveau vecteur d'espérance considéré :

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Les premiers résultats abordés sont ceux du cadre d'indépendance et sont fournis dans le tableau ci-après.

| <i>SCR</i> | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|-------------------|----------------|
| Marché | 0.216 | [0.216, 0.216] |
| Défaut | 0.278 | [0.278, 0.279] |
| Vie | 0.169 | [0.169, 0.170] |
| Non-vie | 0.168 | [0.168, 0.168] |
| Santé | 0.168 | [0.167, 0.168] |

TABLE 4.5 – Indices de Shapley - *BSCR* - Indépendance

De manière très claire, le *SCR* défaut est celui qui contribue le plus à l'incertitude du modèle *BSCR*. Ensuite, il s'agit du *SCR* marché qui a la plus grosse influence sur l'erreur globale. Enfin, les erreurs opérationnelles faites sur les *SCR* de souscription ont le même impact sur l'erreur du *BSCR*. Ces résultats nous indiquent qu'il faudra surveiller en priorité les valeurs remplies pour les *SCR* marché et défaut. Les *SCR* de souscription ne doivent pas être négligés du fait de leur influence relativement peu éloignée. Ceci est également à confronter avec la proportion de chaque *SCR* qui a un effet non négligeable sur les coefficients de solvabilité. Ajoutons maintenant de la corrélation et regardons si nous obtenons la même répartition. A titre d'exemple, nous continuons avec les mêmes hypothèses de dépendance, c'est-à-dire que la variable d'entrée *SCR* santé est corrélée à 0,5 avec celles des *SCR* vie et non-vie.

| <i>SCR</i> | Indice de Shapley | IC Shapley |
|------------|-------------------|----------------|
| Marché | 0.163 | [0.163, 0.163] |
| Défaut | 0.208 | [0.208, 0.209] |
| Vie | 0.180 | [0.179, 0.180] |
| Non-vie | 0.174 | [0.173, 0.175] |
| Santé | 0.274 | [0.272, 0.274] |

TABLE 4.6 – Indices de Shapley - *BSCR* - Dépendance

Comme ce fut déjà le cas avec les résultats du Tableau [4.4](#), la modélisation de la dépendance entre les erreurs dans le modèle modifie les coefficients de sensibilité. Cette fois, les montants de départs étant égaux, l'impact de la corrélation est plus important. Dans ce cadre, la variable d'entrée *SCR* santé devient celle qui contribue le plus à l'incertitude totale et celle du *SCR* marché le moins.

Après avoir étudié l'agrégation des capitaux économiques du *BSCR*, intéressons-nous désormais à l'agrégation Formule Standard pour obtenir le *SCR*.

4.3.2 Fonction *SCR*

De la même manière que pour le modèle *BSCR* dans la section précédente, nous nous sommes penchés sur l'application des indices de Shapley sur le *SCR*. Pour cela, nous les avons déterminés dans trois cadres différents : une compagnie d'assurance vie, une de non-vie et une dernière mixte.

Dans notre étude, nous avons dû faire des choix quant à la modélisation de la structure de dépendance de notre modèle ainsi que sur la valeur des coefficients de variation. Rappelons que nous avons définis le cadre théorique de la dépendance entre nos variables d'entrée dans la Section 3.4. Il s'agit donc ici de donner les éventuelles corrélations. Pour cela, nous gardons la même logique que précédemment, c'est-à-dire que les variables d'entrée de notre modèle sont la sortie d'autres outils de calcul et de projection. De ce fait, nous faisons le choix d'ajouter de la corrélation entre les variables de sortie d'un même module. Par exemple, la valeur de marché du scénario central est corrélée à hauteur de 0,25 avec les autres valeurs de marché ou les différents *Best Estimate*. De la même façon, les montants de primes et réserve sont corrélés entre eux. Concernant les coefficients de variation des variables d'entrée, nous avons considéré qu'ils étaient sensiblement équivalents pour l'ensemble des variables et égaux à 2%. Toutefois, deux exceptions sont à noter. Les impôts différés, à l'actif et au passif, ont un coefficient de variation de 5%. Cela s'explique par le fait que nous constatons, en pratique, plus de variation sur ces valeurs.

Outre la modélisation de la dépendance entre les variables d'entrée et la problématique de recherche de leur coefficient de variation, notre principal obstacle à la bonne estimation des coefficients de sensibilité est le temps de calcul. Effectivement, le nombre de variables présentes en entrée du modèle *SCR* de la compagnie d'assurance vie est de $n = 52$. Si nous souhaitons déterminer précisément les indices de Shapley, nous devons générer les $m = 52! = 8 \times 10^{67}$ permutations de l'ensemble à 52 variables d'entrée. L'algorithme que nous avons exposé dans la Partie 3.6.2 nous permet de réduire ce nombre à $(n-1) \times m \times N \times M$ et de rendre ainsi le temps de calcul polynomial. Précisons que Song et al. (2016) nous indiquent que les valeurs optimales sont $N = 3$, $M = 1$ et m aussi grand que possible. Ainsi, nous avons fait l'hypothèse de générer $m = 100\,000$ permutations. Cela nous amène à une demi-journée en temps de calcul pour obtenir l'ensemble des indices de Shapley en dimension 52. Les résultats sont présentés en Annexe D.

Le premier constat que nous faisons lorsque nous voyons les coefficients de sensibilité est que certains sont négatifs. Il faut interpréter ces variables d'entrée comme négligeables. En effet, cela s'explique par le fait que l'indice de Shapley est proche de 0 et que nous avons considéré uniquement 100 000 permutations. Ceci entraîne une erreur d'estimation qui fait que nous nous retrouvons avec des pourcentages négatifs. Dans le but de passer outre ces erreurs d'estimation, nous proposons la méthode suivante. L'idée est de dire que les coefficients de sensibilité négatifs, correspondant à des variables d'entrée négligeables, peuvent être considérés comme nuls. Ensuite, étant donné que nous voulons garder une somme à un des indices de Shapley et qu'elle est supérieure du fait que nous avons enlevé les coefficients négatifs, nous avons deux choix. Le premier est de diviser le montant négatif par le nombre de variables d'entrée restantes, donc non négligeables, et de rajouter à chacune de ces variables ce surplus négatifs. Le deuxième est d'incorporer le montant négatif proportionnellement aux coefficients de sensibilité des variables d'entrée non négligeables. Le fait de dire que seuls les coefficients négatifs sont négligeables peut être restrictif. Une autre approche aurait été de prendre le montant absolu maximal en négatif et de supposer que tous les coefficients positifs inférieurs à ce montant sont également négligeables. Nous pouvons alors répéter la méthode proposer plus haut pour réajuster la somme des indices de Shapley à un. Si nous nous concentrons maintenant sur les résultats, nous remarquons que nous obtenons des variables d'entrée significatives similaires pour toutes les compagnies et qui sont la valeur de marché et le *Best Estimate* du scénario central. Toutefois, nous notons une différence dans le pourcentage d'explication de l'incertitude totale du modèle entre la compa-

gnie d'assurance vie et celle non-vie. L'indice de Shapley BE est plus élevé de 10% dans le cadre de la compagnie vie et celui de la VM plus petit de 10%. Ceci est dû au fait que lorsque nous calculons le capital requis au titre des contrats d'assurance relevant de la vie, seul le *Best Estimate* des contrats est impacté. Il n'y a pas de variation de la valeur de marché dans les différents scénarios de stress. De plus, ces deux montants économiques semblent avoir la même influence pour la compagnie mixte. Cela s'explique par le fait que l'entreprise possède des SCR égaux en proportion au vecteur d'espérance de nos exemples (4.2.2). Dans ce cas, le SCR vie a la plus grande proportion derrière celle du SCR marché. Le BE aura une influence proche de celle de la compagnie d'assurance vie. L'ensemble des autres variables d'entrée n'impacte que marginalement l'erreur totale du modèle.

Tournons-nous désormais vers l'analyse des indices de Shapley dans le cadre de la fonction ratio de solvabilité.

4.3.3 Fonction ratio de solvabilité

Nous reprendrons les mêmes conventions de modélisation définies dans la partie précédente sur le SCR . De plus, la fonction ratio de solvabilité a besoin de variables d'entrée supplémentaires. Nous aurons notamment besoin des montants de fonds propres de l'entreprise. Nous considérerons qu'ils sont corrélés entre eux à hauteur de 0,25. Un élément principal des fonds propres, puisque correspondant à la majeure partie de ceux-ci dans le cadre de ces compagnies, est l'excédent des actifs par rapport au passif. De plus, l'impact d'une erreur sur les valeur de marché et *Best Estimate* étant conséquent sur ce montant économique, nous considérerons que son coefficient de variation est de 10%. Nous allons maintenant analyser les résultats que nous trouvons en Annexe E.

L'ajout des variables d'entrée concernant les fonds propres n'a pas d'impact sur celles expliquant le plus l'incertitude du modèle total. En effet, nous retrouvons la valeur de marché et le *Best Estimate* du scénario central comme ayant le plus d'influence. Cependant, ceci n'est vrai que pour les compagnies vie et mixte. Pour la compagnie d'assurance non-vie, l'excédent des actifs par rapport au passif représente plus de la moitié de l'incertitude globale du modèle ratio de solvabilité. Une explication à cette différence est que le ratio de la compagnie non-vie est proche de 100% alors que dans les autres cas il est d'environ 200%. Nous savons que la valeur de la variable d'entrée a une importance sur les indices de Shapley et que dans notre modèle, l'excédent des actifs par rapport au passif représente la plus grosse part des fonds propres. Par conséquent, plus le ratio de solvabilité sera bas, plus cette variable d'entrée sera proche du SCR et plus sa variation aura un impact considérable sur le ratio de solvabilité et donc sur l'indice de Shapley.

Les différentes applications des indices de Shapley sur l'ensemble de nos modèles nous ont permis de constater plusieurs points. Le premier est le fait qu'en grande dimension, le temps de calcul devient conséquent mais que l'algorithme utilisé permet d'estimer les indices de Shapley en un temps polynomial. Deuxièmement, nous avons constaté avec notre modélisation de la dépendance que, lorsque des variables ont un rôle équivalent dans les calculs, plus l'espérance considérée est élevée, plus le coefficient de sensibilité sera conséquent.

Conclusion

Les erreurs opérationnelles sont trop souvent présentes sur les variables d'entrée des outils de calcul et de reporting Solvabilité 2. Le but de ce mémoire était par conséquent de réussir à mettre en place une méthodologie permettant de quantifier l'impact de ces erreurs opérationnelles.

Dans un premier chapitre, nous avons abordé le cadre réglementaire assurantiel et notamment la directive européenne Solvabilité 2. Nous avons vu qu'aujourd'hui, les logiciels occupaient une place prépondérante dans le quotidien des assureurs. Ils permettent, en particulier, de réduire les erreurs opérationnelles à l'intérieur des modèles ainsi que le temps de calcul associé. Cependant, malgré certains contrôles de cohérence, ils ne peuvent pas empêcher la présence d'erreurs opérationnelles sur les variables d'entrée. Nous nous sommes placés dans ce contexte et avons tenté de déterminer comment elles pouvaient influencer sur l'incertitude totale du modèle sous étude. Dans le cadre de Solvabilité 2, un logiciel de calcul et de reporting détermine plusieurs montants économiques qui sont principalement le capital de solvabilité requis (*SCR*) et le ratio de solvabilité. Ainsi, ces modèles seront ceux que nous considérerons dans notre étude. C'est dans le deuxième chapitre que nous avons détaillé ces modèles et le périmètre de notre étude utilisé lors des applications numériques du mémoire.

Dans certains cas, l'appel à une fonction se compte en jours, voire en semaines. Par conséquent, il est primordial que les variables d'entrée ne comportent aucune erreur opérationnelle. Il est également souhaitable que nous en connaissions l'impact sur notre variable de sortie. De plus, les variables d'entrée étant la sortie d'autres logiciels de projection de flux ou de calcul, nous devons considérer une corrélation entre les différentes erreurs faites sur nos variables d'entrée provenant d'un même module de calcul. La gestion des erreurs opérationnelles est alors devenue un enjeu qui préoccupe de plus en plus les acteurs du marché. Dans cette optique, nous avons présenté, dans le troisième chapitre, des méthodes d'analyse de sensibilité permettant de répondre à nos problématiques. Les deux approches retenues ont été les indices de Sobol et de Shapley. Leur étude théorique inclue notamment la prise en compte de la dépendance entre les variables d'entrée, spécifiée au préalable. Concernant les indices de Sobol, une approche brutale et une approche alternative ont été apportées. La première est en fait l'écriture directe de l'indice et nécessite une double estimation de *Monte-Carlo* demandant un grand nombre de génération de points. La deuxième est une amélioration de l'approche brutale qui, elle, permet de n'avoir plus qu'une seule estimation de *Monte-Carlo* à effectuer. Enfin, nous avons apporté un cadre théorique et pratique d'approximation de la variance d'un modèle : la méthode Delta. Nous avons ensuite appliqué cette approximation au calcul des indices de Sobol dans le cas de l'agrégation des capitaux économiques du *Basic Solvency Capital Requirement*.

Le dernier chapitre fut consacré à l'application et à la comparaison des approches étudiées dans le troisième chapitre. Nous avons avant cela ajouté un point théorique sur la génération des nombres aléatoires. De manière générale, c'est la loi uniforme qui est utilisée pour cela. Cependant, nous avons montré d'une façon théorique qu'il était possible d'améliorer la qualité de la précision d'un estimateur en générant les nombres de manière pseudo-aléatoire, notamment

à l'aide de la suite de Sobol. Nos comparaisons numériques ont ensuite confirmé ce point sur le plan pratique. Nous avons également pu constater, à défaut d'un temps de calcul supérieur, que l'approche alternative des indices de Sobol permettait une meilleure convergence des coefficients de sensibilité dans le cadre de la fonction linéaire. Néanmoins, lorsque nous nous éloignons de la linéarité, comme c'est le cas dans notre étude, cette approche ne converge pas convenablement. Ainsi, dans ce mémoire, nous avons retenu l'approche brutale. Les indices de Sobol ont ensuite été comparés à ceux de Shapley. Il s'est avéré que nous avons préféré conserver les indices de Shapley car ils permettaient une meilleure interprétation avec une structure de dépendance entre les variables d'entrée. Effectivement, dans ce cas, les indices de Sobol ne somment plus à 1 et n'expliquent donc plus entièrement la variance totale du modèle. A l'inverse, la construction des indices de Shapley permet de s'assurer de cette propriété et donc de la bonne interprétation des coefficients de sensibilité en cas de dépendance. Nous avons par conséquent utilisé les indices de Shapley pour estimer l'influence des erreurs opérationnelles effectuées sur nos variables d'entrée des modèles *SCR* et ratio de solvabilité.

Nous avons évoqué dans l'état de l'art de l'analyse de sensibilité une méthode développée par [Tsanakas and Millosovich \(2016\)](#). Elle consiste à choquer la variable de sortie et utiliser des mesures de risque et de distorsion pour calculer les indices de sensibilité. Ce n'était pas applicable dans notre étude étant donné que nous ne connaissions pas la distribution de la variable de sortie. Un prolongement possible aux méthodes exposées dans ce mémoire serait d'envisager d'appliquer cette approche. Pour cela, il faudrait dériver une distribution pour le *SCR* et le ratio de solvabilité. Il serait possible, par exemple, de spécifier plusieurs structures de dépendance sur nos variables d'entrée afin de déterminer une loi pour nos variables de sortie.

Bibliographie

- Aggarwal, A., Beck, M., Cann, M., Ford, T., Georgescu, D., Morjaria, N., Smith, A., Taylor, Y., Tsanakas, A., Witts, L., et al. (2016). Model risk–daring to open up the black box. *British Actuarial Journal*, 21(2) :229–296.
- Black, R., Tsanakas, A., Smith, A., Beck, M., Maclugash, I., Grewal, J., Witts, L., Morjaria, N., Green, R., and Lim, Z. (2017). Model risk : illuminating the black box. *British Actuarial Journal*, 23.
- Castro, J., Gómez, D., and Tejada, J. (2009). Polynomial calculation of the shapley value based on sampling. *Computers & Operations Research*, 36(5) :1726–1730.
- Chastaing, G. (2013). *Indices de Sobol généralisés pour variables dépendantes*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- Chastaing, G., Gamboa, F., Prieur, C., et al. (2012). Generalized hoeffding-sobol decomposition for dependent variables-application to sensitivity analysis. *Electronic Journal of Statistics*, 6 :2420–2448.
- Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Commission, E. (2014). Règlement délégué (ue) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.
- Da Veiga, S., Wahl, F., and Gamboa, F. (2009). Local polynomial estimation for sensitivity analysis on models with correlated inputs. *Technometrics*, 51(4) :452–463.
- Decupère, S. (2011). Agrégation des risques et allocation de capital sous solvabilité ii. *Mémoire d’actuariat, ENSAE*.
- El Bekri, N. (2016). Mise à jour des tables de mortalité par approche multi-population. application au calcul de choc et au transfert du risque de longévité.
- Fang, S., Gertner, G. Z., and Anderson, A. A. (2004). Estimation of sensitivity coefficients of nonlinear model input parameters which have a multinormal distribution. *Computer Physics Communications*, 157(1) :9–16.
- Fatima, S. S., Wooldridge, M., and Jennings, N. R. (2008). A linear approximation method for the shapley value. *Artificial Intelligence*, 172(14) :1673–1699.
- Guyader, A. Espérance conditionnelle & chaînes de markov.
- Hoeffding, W. (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 19(293-325).
- Iooss, B. and Prieur, C. (2019). Shapley effects for sensitivity analysis with correlated inputs : comparisons with sobol’indices, numerical estimation and applications. *hal-01556303v6*.

- Jacques, J. (2011). *Pratique de l'analyse de sensibilité : comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématique*. Lille : *sn*.
- Janon, A. (2012). *Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- Kucherenko, S., Tarantola, S., and Annoni, P. (2012). Estimation of global sensitivity indices for models with dependent variables. *Computer Physics Communications*, 183(4) :937–946.
- Li, G., Rabitz, H., Hu, J., Chen, Z., and Ju, Y. (2008). Regularized random-sampling high dimensional model representation (rs-hdmr). *Journal of Mathematical Chemistry*, 43(3) :1207–1232.
- McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P., et al. (2005). *Quantitative risk management : Concepts, techniques and tools*, volume 3. Princeton university press Princeton.
- Niang, I. (2016). *Quantification et methodes statistiques pour le risque de modele*. PhD thesis, Université de Lyon.
- Niederreiter, H. (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63. Siam.
- Owen, A. B. (2014). Sobol'indices and shapley value. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2(1) :245–251.
- Pesenti, S. M., Millossovich, P., and Tsanakas, A. (2018). Reverse sensitivity testing : What does it take to break the model?
- Saltelli, A. (2002). Sensitivity analysis for importance assessment. *Risk analysis*, 22(3) :579–590.
- Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., and Tarantola, S. (2008). *Global sensitivity analysis : the primer*. John Wiley & Sons.
- Saltelli, A. and Sobol, I. M. (1995). About the use of rank transformation in sensitivity analysis of model output. *Reliability Engineering & System Safety*, 50(3) :225–239.
- Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., and Ratto, M. (2004). *Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models*. John Wiley & Sons.
- Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 2(28) :307–317.
- Sobol, I., SS, K., et al. (2005). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models. review. *Wilmott Mag*, 1 :56–61.
- Sobol, I. M. (1967). On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4) :784–802.
- Sobol, I. M. (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical modelling and computational experiments*, 1(4) :407–414.
- Sobol, I. M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3) :271–280.
- Song, E., Nelson, B. L., and Staum, J. (2016). Shapley effects for global sensitivity analysis : Theory and computation. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 4(1) :1060–1083.

- Thiémard, E. (2000). *Sur le calcul et la majoration de la discrédance à l'origine*. PhD thesis, EPFL.
- Tsanakas, A. and Cabantous, L. (2018). The model ajar : Building rationality infrastructures within insurance organizations.
- Tsanakas, A. and Millosovich, P. (2016). Sensitivity analysis using risk measures. *Risk Analysis*, 36(1) :30–48.
- Varet, S. (2010). *Développement de méthodes statistiques pour la prédiction d'un gabarit de signature infrarouge*. PhD thesis.
- Ver Hoef, J. M. (2012). Who invented the delta method? *The American Statistician*, 66(2) :124–127.
- Xu, C. and Gertner, G. Z. (2008). Uncertainty and sensitivity analysis for models with correlated parameters. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(10) :1563–1573.

Annexe A

Risque de primes et réserve

| Segment | Description |
|---------|--|
| 1 | Assurance de responsabilité civile automobile et réassurance proportionnelle y afférente |
| 2 | Autre assurance des véhicules à moteur et réassurance proportionnelle y afférente |
| 3 | Assurance maritime, aérienne et transport et réassurance proportionnelle y afférente |
| 4 | Assurance incendie et autres dommages aux biens et réassurance proportionnelle y afférente |
| 5 | Assurance de responsabilité civile générale et réassurance proportionnelle y afférente |
| 6 | Assurance crédit et cautionnement et réassurance proportionnelle y afférente |
| 7 | Assurance de protection juridique et réassurance proportionnelle y afférente |
| 8 | Assurance assistance et réassurance proportionnelle y afférente |
| 9 | Assurance pertes pécuniaires diverses et réassurance proportionnelle y afférente |
| 10 | Réassurance accidents non proportionnelle |
| 11 | Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle |
| 12 | Réassurance dommages non proportionnelle |

TABLE A.1 – Liste des segments - risque de prime et réserves

| Coefficients de corrélation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0,5 | 1 | | | | | | | | | | |
| 3 | 0,5 | 0,25 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 1 | | | | | | |
| 7 | 0,5 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 1 | | | | | |
| 8 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 1 | | | | |
| 9 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 | | | |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 1 | | |
| 11 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 1 | |
| 12 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 1 |

FIGURE A.1 – Matrice de corrélation par segment - risque de prime et réserves

| Segment | $\sigma_{prem,s}$ | $\sigma_{res,s}$ |
|---------|-------------------|------------------|
| 1 | 10% | 9% |
| 2 | 8% | 8% |
| 3 | 15% | 11% |
| 4 | 8% | 10% |
| 5 | 14% | 11% |
| 6 | 12% | 19% |
| 7 | 7% | 12% |
| 8 | 9% | 20% |
| 9 | 13% | 20% |
| 10 | 17% | 20% |
| 11 | 17% | 20% |
| 12 | 17% | 20% |

FIGURE A.2 – Écart type de prime et de réserves par segment

Annexe B

Propriété d'efficacité de la valeur de Shapley

Nous cherchons à démontrer dans cette annexe la propriété d'efficacité des valeurs de Shapley (3.16) énoncée dans la Partie 3.6.1 :

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = c(\{1, \dots, n\}),$$

où

$$\phi_i = \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} [c(\mathbf{u} \cup \{i\}) - c(\mathbf{u})].$$

Nous pouvons écrire, toujours avec la convention $|\mathbf{u}| = s$, la somme des valeurs de Shapley comme la différence de deux termes que nous traiterons à part :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \binom{n-1}{s}^{-1} [c(\mathbf{u} \cup \{i\}) - c(\mathbf{u})] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} c(\mathbf{u} \cup \{i\}) - \sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} c(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Remarquons que nous sommes sur tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ qui ne contiennent pas le joueur i . par conséquent, nous avons la condition sous-jacente $1 \leq s \leq n-1$. Ainsi, si nous considérons le changement de variable $\mathbf{u}' = \mathbf{u} \cup \{i\}$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} c(\mathbf{u} \cup \{i\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ i \in \mathbf{u}'}} \frac{(n-s')!(s'-1)!}{n!} c(\mathbf{u}').$$

De plus, pour un ensemble \mathbf{u}' donné de joueurs, les termes $\frac{(n-s')!(s'-1)!}{n!} c(\mathbf{u}')$ apparaissent exactement s' fois dans la somme, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ i \in \mathbf{u}'}} \frac{(n-s')!(s'-1)!}{n!} c(\mathbf{u}') &= \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s' \leq n}} s' \frac{(n-s')!(s'-1)!}{n!} c(\mathbf{u}') \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s' \leq n}} \frac{(n-s')!s!}{n!} c(\mathbf{u}'). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Caractérisons maintenant la deuxième somme. Soit $\mathbf{u} \subseteq -\{i\}$. Nous avons que $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cup \{j\}) \setminus \{j\}$, $\forall j \in \mathbb{C}\mathbf{u}$. Il y a donc $|\mathbb{C}\mathbf{u}| = n - s$ manières d'écrire $\mathbf{u}c$ à partir d'un sous-ensemble de la forme $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Nous pouvons donc écrire le deuxième terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} c(\mathbf{u}) &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s \leq n-1}} (n-s) \frac{(n-s-1)!s!}{n!} c(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s \leq n-1}} \frac{(n-s)!s!}{n!} c(\mathbf{u}). \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Nous combinons désormais les deux expressions modifiées, (B.1) et (B.2), pour obtenir le résultat final :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \phi_i &= \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s' \leq n}} \frac{(n-s')!s!}{n!} c(\mathbf{u}') - \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s \leq n-1}} \frac{(n-s)!s!}{n!} c(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{u}' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s' \leq n-1}} \frac{(n-s')!s!}{n!} c(\mathbf{u}') + \frac{(n-n)!n!}{n!} c(\{1, \dots, n\}) - \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ 1 \leq s \leq n-1}} \frac{(n-s)!s!}{n!} c(\mathbf{u}) \\
&= c(\{1, \dots, n\}).
\end{aligned}$$

Annexe C

Méthode Delta appliquée au *BSCR*

Nous démontrons dans cette annexe le résultat intermédiaire (3.30) nécessaire à l'approximation de la variance de l'espérance conditionnelle dans le modèle :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{inc}.$$

Nous allons traiter deux cas séparément : le conditionnement par rapport à $i = 1, \dots, 5$ et celui par rapport à $i = 6$. Nous commençons par le premier cas et cherchons d'abord à trouver la fonction $BSCR_i$ correspondant à la fonction $BSCR$ évaluée en le vecteur d'espérance conditionnellement à SCR_i . Nous savons que si nous conditionnons par rapport à SCR_i , le vecteur d'espérance conditionnelle est alors :

$$e = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mu_j + b_j^i (SCR_i - \mu_i) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

avec $b_j^i = \Sigma_{SCR_{-\{i\}}, SCR_i} \Sigma_{X_{SCR_i}}^{-1}$. Imposons maintenant la contrainte $b_i^i = 1$ telle que $e_i = SCR_i$. Ainsi, nous pouvons déterminer la fonction $BSCR_i$ qui ne dépend plus que du seul paramètre SCR_i :

$$BSCR_i(SCR_i) = \sqrt{\sum_{(l,k) \in M^2} \rho_{l,k}^M \cdot [\mu_l + b_l^i (SCR_i - \mu_i)] \cdot [\mu_k + b_k^i (SCR_i - \mu_i)]} + [\mu_6 + b_6^i (SCR_i - \mu_i)].$$

Pour obtenir l'approximation de la variance de cette fonction, nous devons dériver par rapport à la variable SCR_i et évaluer cette fonction en $\mathbb{E}[SCR_i] = \mu_i$, ce qui permet d'éliminer les termes $(SCR_i - \mu_i)$. De la même manière que pour le calcul des dérivées partielles, nous avons immédiatement :

$$BSCR'_i(\mu_i) = \frac{2 \cdot \sum_{j=1}^5 b_j^i \cdot \mu_j + 2 \cdot \sum_{1 \leq l < k \leq 5} \rho_{l,k}^M \cdot [\mu_l \cdot b_k^i + \mu_k \cdot b_l^i] + b_6^i}{2 \cdot BSCR}. \quad (C.1)$$

De façon similaire, nous avons les résultats suivants en considérant cette fois $i = 6$:

$$BSCR_6(SCR_6) = \sqrt{\sum_{(l,k) \in M^2} \rho_{l,k}^M \cdot [\mu_l + b_l^6(SCR_6 - \mu_6)] \cdot [\mu_k + b_k^6(SCR_6 - \mu_6)]} + SCR_6,$$

et

$$BSCR'_6(\mu_6) = \frac{2 \cdot \sum_{j=1}^5 b_j^6 \cdot \mu_j + 2 \cdot \sum_{1 \leq l < k \leq 5} \rho_{l,k}^M \cdot [\mu_l \cdot b_k^6 + \mu_k \cdot b_l^6] + 1}{2 \cdot BSCR}. \quad (C.2)$$

Rappelons-nous que pour $i = 1, \dots, 6$, nous avons supposé que $b_i^i = 1$. Nous avons donc en particulier $b_6^6 = 1$. En utilisant cette remarque et en divisant par 2 les Équations (C.1) et (C.2), nous obtenons bien que $\forall k \in [1..6]$,

$$BSCR'_k(\mu_k) = \frac{\sum_{i=1}^5 b_i^k \cdot \mu_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \rho_{i,j}^M \cdot [\mu_i \cdot b_j^k + \mu_j \cdot b_i^k] + \frac{b_6^k}{2}}{BSCR}.$$

Annexe D

Résultats indices de Shapley du *SCR*

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|--|---------------|-------------------|------------------|
| <i>VM</i> centrale | 6 210 628 812 | 29.89% | [29.87%, 29.91%] |
| <i>BE</i> central | 5 835 214 341 | 50.68% | [50.67%, 50.71%] |
| <i>VM</i> baisse taux d'intérêt | 6 338 130 536 | 0.95% | [0.93%, 0.97%] |
| <i>VM</i> hausse taux d'intérêt | 5 811 776 798 | 0.43% | [0.40%, 0.45%] |
| <i>VM</i> actions type 1 | 6 141 960 198 | 1.12% | [1.10%, 1.14%] |
| <i>VM</i> actions type 2 | 6 210 165 656 | 1.35% | [1.33%, 1.37%] |
| <i>VM</i> immobilier | 6 184 760 944 | 0.89% | [0.86%, 0.91%] |
| <i>VM</i> spread - obligations et prêts | 6 071 254 532 | 1.39% | [1.37%, 1.41%] |
| <i>VM</i> baisse monnaie étrangère | 6 201 057 731 | 0.77% | [0.75%, 0.80%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - net de PB | 5 956 481 173 | 0.38% | [0.37%, 0.41%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - net de PB | 5 457 659 689 | -0.15% | [-0.18%, -0.14%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - net de PB | 5 773 718 332 | 0.41% | [0.39%, 0.43%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 5 835 182 554 | 0.05% | [0.02%, 0.07%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 5 821 804 288 | 0.67% | [0.65%, 0.69%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 5 751 378 262 | -0,16% | [-0,19%, -0,14%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 5 828 208 757 | 0.47% | [0.46%, 0.51%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 5 949 133 159 | -0.34% | [-0.37%, -0.32%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 5 460 262 653 | 0.19% | [0.16%, 0.20%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - brut de PB | 5 778 312 306 | 0,42% | [0,40%, 0,45%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 5 835 165 401 | 0.37% | [0.35%, 0.39%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 5 834 581 986 | 0.44% | [0.42%, 0.46%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 5 828 108 715 | 0.61% | [0.58%, 0.63%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 5 830 752 535 | 0.60% | [0.59%, 0.63%] |
| <i>SCR</i> concentration - net de PB | 22 374 399 | 1.25% | [1.23%, 1.27%] |
| <i>SCR</i> concentration - brut de PB | 22 374 399 | 1.21% | [1.18%, 1.23%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 9 319 128 | 0.14% | [0.12%, 0.16%] |
| LGB_{int} | 367 948 | 0.29% | [0.27%, 0.31%] |
| LGB_{aqint} | 10 082 019 | 0.06% | [0.04%, 0.08%] |

| | | | |
|---|---------------|--------|------------------|
| <i>BE</i> mortalité - net de PB | 5 843 119 998 | -0.25% | [-0.26%, -0.22%] |
| <i>BE</i> longévité - net de PB | 5 837 504 789 | 0.43% | [0.41%, 0.45%] |
| <i>BE</i> rachat hausse - net de PB | 5 901 200 536 | 0.83% | [0.81%, 0.85%] |
| <i>BE</i> rachat baisse - net de PB | 5 865 861 539 | 0.60% | [0.57%, 0.61%] |
| <i>BE</i> rachat massif - net de PB | 5 876 327 249 | 0.09% | [0.07%, 0.12%] |
| <i>BE</i> dépenses - net de PB | 5 855 388 407 | 0.84% | [0.83%, 0.87%] |
| <i>BE</i> catastrophe - net de PB | 5 837 515 501 | 0.34% | [0.32%, 0.36%] |
| <i>BE</i> mortalité - brut de PB | 5 847 930 785 | -0.03% | [-0.05%, -0.00%] |
| <i>BE</i> longévité - brut de PB | 5 837 497 241 | 0.34% | [0.31%, 0.35%] |
| <i>BE</i> rachat hausse - brut de PB | 5 931 433 670 | 0.02% | [0.00%, 0.05%] |
| <i>BE</i> rachat baisse - brut de PB | 5 856 622 403 | 0.86% | [0.84%, 0.89%] |
| <i>BE</i> rachat massif - brut de PB | 5 895 692 040 | 0.36% | [0.34%, 0.38%] |
| <i>BE</i> dépenses - brut de PB | 5 855 630 002 | 0.54% | [0.52%, 0.57%] |
| <i>BE</i> catastrophe - brut de PB | 5 837 784 325 | -0.03% | [-0.05%, 0.00%] |
| <i>PT</i> vie | 5 519 113 552 | -0.16% | [-0.19%, -0.14%] |
| <i>PT</i> vie - UC | 389 434 241 | 0.36% | [0.33%, 0.37%] |
| <i>PA</i> - vie - 12 derniers mois | 679 352 361 | 0.74% | [0.72%, 0.76%] |
| <i>PA</i> - vie - UC - 12 derniers mois | 95 394 656 | 0.46% | [0.43%, 0.48%] |
| <i>PA</i> - vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 798 035 864 | 0.07% | [0.04%, 0.08%] |
| <i>PA</i> - vie - UC - 12 mois avant les 12 derniers mois | 36 328 511 | 0.01% | [-0.01%, 0.03%] |
| Frais UC des 12 derniers mois | 6 739 949 | -0.08% | [-0.10%, -0.06%] |
| Prestations discrétionnaires futures | 195 963 478 | -0.21% | [-0.23%, -0.19%] |
| Impôts différés à l'actif | 83 722 533 | -0.14% | [-0.17%, -0.12%] |
| Impôts différés au passif | 110 074 287 | -0.35% | [-0.38%, -0.33%] |

TABLE D.1: Indices de Shapley - *SCR* - Compagnie vie

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|---|-------------|-------------------|------------------|
| <i>VM</i> centrale | 650 302 235 | 38.91% | [38.89%, 38.94%] |
| <i>BE</i> central | 641 927 394 | 41.39% | [41.37%, 41.41%] |
| <i>VM</i> baisse taux d'intérêt | 653 857 901 | 0.42% | [0.40%, 0.45%] |
| <i>VM</i> hausse taux d'intérêt | 641 178 116 | -0.21% | [-0.23%, -0.19%] |
| <i>VM</i> actions type 2 | 649 976 047 | 1.86% | [1.83%, 1.88%] |
| <i>VM</i> immobilier | 627 183 273 | 2.66% | [2.63%, 2.68%] |
| <i>VM</i> spread - obligations et prêts | 634 378 822 | 2.39% | [2.36%, 2.41%] |
| <i>VM</i> hausse monnaie étrangère | 650 109 748 | 0.78% | [0.77%, 0.82%] |
| <i>VM</i> baisse monnaie étrangère | 649 916 559 | 0.78% | [0.75%, 0.80%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - net de PB | 642 464 172 | 0.50% | [0.47%, 0.53%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - net de PB | 633 895 576 | 0.86% | [0.84%, 0.89%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 641 921 394 | 0.50% | [0.47%, 0.52%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 641 926 858 | 0.79% | [0.77%, 0.82%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 641 931 537 | 0.29% | [0.28%, 0.33%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - net de PB | 641 923 907 | 0.21% | [0.20%, 0.25%] |

| | | | |
|--|-------------|--------|------------------|
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 641 931 445 | 0.74% | [0.72%, 0.77%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 642 461 719 | -0.08% | [-0.11%, -0.06%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 633 889 510 | -0.14% | [-0.16%, -0.12%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 641 928 718 | 0.74% | [0.72%, 0.76%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 641 925 985 | 2.15% | [2.13%, 2.19%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 641 922 076 | 2.18% | [2.15%, 2.20%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - brut de PB | 641 929 778 | 0.36% | [0.33%, 0.38%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 641 921 895 | 0.64% | [0.62%, 0.66%] |
| <i>SCR</i> concentration - net de PB | 4 768 953 | 1.07% | [1.04%, 1.09%] |
| <i>SCR</i> concentration - brut de PB | 4 768 953 | 0.65% | [0.62%, 0.67%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 10 396 214 | -0.51% | [-0.52%, -0.48%] |
| <i>LGB</i> _{int} | 3 897 747 | 0.61% | [0.58%, 0.63%] |
| <i>LGB</i> _{aqint} | 75 549 564 | 0.52% | [0.49%, 0.55%] |
| Primes segment 1 | 75 713 314 | 0.12% | [0.09%, 0.14%] |
| Primes segment 2 | 11 483 165 | -0.33% | [-0.35%, -0.30%] |
| Primes segment 3 | 63 083 | 0.41% | [0.39%, 0.43%] |
| Primes segment 4 | 35 156 568 | 0.07% | [0.05%, 0.10%] |
| Primes segment 5 | 20 914 195 | 0.08% | [0.05%, 0.10%] |
| Primes segment 6 | 2 368 027 | 0.57% | [0.55%, 0.59%] |
| Primes segment 7 | 408 560 | -0.31% | [-0.34%, -0.28%] |
| Primes segment 8 | 5 914 618 | -0.63% | [-0.66%, -0.60%] |
| Primes segment 9 | 4 527 842 | -0.29% | [-0.32%, -0.27%] |
| Réserve segment 1 | 140 603 223 | 0.26% | [0.23%, 0.28%] |
| Réserve segment 2 | 4 120 462 | 0.09% | [0.06%, 0.11%] |
| Réserve segment 3 | 2 218 386 | -0.28% | [-0.31%, -0.26%] |
| Réserve segment 4 | 21 056 681 | 0.32% | [0.28%, 0.33%] |
| Réserve segment 5 | 42 291 131 | 0.23% | [0.20%, 0.24%] |
| Réserve segment 6 | 12 066 943 | -0.66% | [-0.68%, -0.63%] |
| Réserve segment 7 | 5 039 028 | 0.46% | [0.44%, 0.49%] |
| Réserve segment 8 | 174 898 | -0.03% | [-0.06%, -0.01%] |
| Réserve segment 9 | 5 443 256 | -0.02% | [-0.04%, -0.01%] |
| <i>BE</i> non-vie - rachat | 642 399 628 | 0.74% | [0.71%, 0.76%] |
| <i>SCR</i> non-vie - catastrophe | 4 578 343 | -0.67% | [-0.69%, -0.64%] |
| <i>SCR</i> santé - net de PB | 11 239 053 | 0.11% | [0.09%, 0.14%] |
| <i>SCR</i> santé - brut de PB | 11 239 248 | -0.19% | [-0.22%, -0.17%] |
| <i>PT</i> non-vie | 684 894 889 | -0.15% | [-0.18%, -0.13%] |
| <i>PA</i> - non-vie - 12 derniers mois | 348 287 178 | -0.31% | [-0.34%, -0.29%] |
| <i>PA</i> - non-vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 387 773 569 | -0.05% | [-0.07%, -0.02%] |
| Impôts différés à l'actif | 94 024 411 | -0.09% | [-0.11%, -0.07%] |
| Impôts différés au passif | 10 559 902 | -0.52% | [-0.54%, -0.49%] |

TABLE D.2: Indices de Shapley - *SCR* - Compagnie non-vie

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|--|---------------|-------------------|------------------|
| <i>VM</i> centrale | 7 183 646 677 | 29.85% | [29.83%, 29.87%] |
| <i>BE</i> central | 6 690 589 282 | 50.04% | [50.01%, 50.05%] |
| <i>VM</i> baisse taux d'intérêt | 7 301 778 409 | 1.15% | [1.14%, 1.18%] |
| <i>VM</i> hausse taux d'intérêt | 6 820 401 678 | -0.21% | [-0.23%, -0.18%] |
| <i>VM</i> actions type 1 | 7 139 947 306 | 0.99% | [0.98%, 1.02%] |
| <i>VM</i> actions type 2 | 7 183 608 141 | 1.57% | [1.54%, 1.59%] |
| <i>VM</i> immobilier | 7 133 327 642 | 1.22% | [1.20%, 1.24%] |
| <i>VM</i> spread - obligations et prêts | 7 018 693 787 | 1.76% | [1.74%, 1.78%] |
| <i>VM</i> hausse monnaie étrangère | 7 183 556 089 | 0.01% | [0.00%, 0.04%] |
| <i>VM</i> baisse monnaie étrangère | 7 182 194 193 | 0.94% | [0.92%, 0.96%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - net de PB | 6 808 594 742 | 0.20% | [0.18%, 0.22%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - net de PB | 6 327 822 111 | -0.04% | [-0.06%, -0.02%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - net de PB | 6 649 489 818 | 0.02% | [0.00%, 0.04%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 6 690 601 211 | 0.75% | [0.72%, 0.77%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 6 681 974 164 | 0.61% | [0.58%, 0.63%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 6 621 695 427 | 0.46% | [0.44%, 0.48%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - net de PB | 6 690 538 362 | 0.58% | [0.57%, 0.61%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 6 689 595 439 | -0.10% | [-0.11%, -0.07%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 6 795 301 512 | 0.02% | [-0.01%, 0.04%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 6 281 067 523 | -0.45% | [-0.47%, -0.43%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - brut de PB | 6 649 509 292 | 0.29% | [0.28%, 0.32%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 6 690 598 700 | 0.42% | [0.40%, 0.44%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 6 689 323 400 | 0.17% | [0.15%, 0.20%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 6 673 733 842 | 0.52% | [0.50%, 0.54%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - brut de PB | 6 690 501 190 | -0.47% | [-0.49%, -0.45%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 6 689 753 920 | 0.73% | [0.71%, 0.76%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 32 011 925 | 0.20% | [0.17%, 0.22%] |
| LGB_{int} | 4 281 971 | 0.33% | [0.31%, 0.35%] |
| LGB_{aqint} | 101 954 850 | -0.18% | [-0.20%, -0.16%] |
| <i>BE</i> mortalité - net de PB | 6 700 340 230 | 0.42% | [0.39%, 0.44%] |
| <i>BE</i> longévité - net de PB | 6 693 613 476 | 0.13% | [0.11%, 0.16%] |
| <i>BE</i> rachat hausse - net de PB | 6 771 292 124 | 0.38% | [0.36%, 0.40%] |
| <i>BE</i> rachat baisse - net de PB | 6 719 245 885 | 0.81% | [0.80%, 0.84%] |
| <i>BE</i> rachat massif - net de PB | 6 754 952 062 | 0.20% | [0.17%, 0.21%] |
| <i>BE</i> dépenses - net de PB | 6 710 173 613 | 0.38% | [0.36%, 0.40%] |
| <i>BE</i> catastrophe - net de PB | 6 693 568 025 | 0.45% | [0.44%, 0.48%] |
| <i>BE</i> mortalité - brut de PB | 6 705 640 444 | 0.51% | [0.50%, 0.54%] |
| <i>BE</i> longévité - brut de PB | 6 693 463 190 | 0.60% | [0.59%, 0.63%] |

| | | | |
|---|---------------|--------|------------------|
| <i>BE</i> rachat hausse - brut de PB | 6 803 430 612 | 0.86% | [0.83%, 0.87%] |
| <i>BE</i> rachat baisse - brut de PB | 6 712 062 398 | 0.42% | [0.41%, 0.45%] |
| <i>BE</i> rachat massif - brut de PB | 6 789 609 540 | 0.36% | [0.34%, 0.38%] |
| <i>BE</i> dépenses - brut de PB | 6 710 340 571 | 0.94% | [0.92%, 0.96%] |
| <i>BE</i> catastrophe - brut de PB | 6 693 793 353 | 1.23% | [1.21%, 1.25%] |
| Primes segment 1 | 75 712 840 | 0.08% | [0.05%, 0.10%] |
| Primes segment 2 | 11 483 294 | 0.35% | [0.32%, 0.37%] |
| Primes segment 3 | 63 084 | -0.09% | [-0.12%, -0.07%] |
| Primes segment 4 | 35 156 360 | -0.40% | [-0.43%, -0.38%] |
| Primes segment 5 | 20 914 353 | -0.17% | [-0.18%, -0.14%] |
| Primes segment 6 | 2 368 066 | -0.11% | [-0.13%, -0.09%] |
| Primes segment 7 | 408 558 | -0.56% | [-0.58%, -0.53%] |
| Primes segment 8 | 5 914 653 | -0.23% | [-0.25%, -0.21%] |
| Primes segment 9 | 4 527 801 | -0.73% | [-0.75%, -0.71%] |
| Réserve segment 1 | 140 601 026 | 0.21% | [0.19%, 0.23%] |
| Réserve segment 2 | 4 120 478 | -0.29% | [-0.31%, -0.27%] |
| Réserve segment 3 | 2 218 381 | -0.03% | [-0.05%, -0.01%] |
| Réserve segment 4 | 21 056 355 | 0.09% | [0.06%, 0.11%] |
| Réserve segment 5 | 42 290 881 | 0.01% | [-0.01%, 0.03%] |
| Réserve segment 6 | 12 066 929 | -0.14% | [-0.16%, -0.12%] |
| Réserve segment 7 | 5 038 994 | -0.50% | [-0.53%, -0.49%] |
| Réserve segment 8 | 174 899 | 0.10% | [0.08%, 0.12%] |
| Réserve segment 9 | 5 443 295 | -0.10% | [-0.12%, -0.08%] |
| <i>BE</i> non-vie - rachat | 6 690 983 774 | 2.06% | [2.04%, 2.09%] |
| <i>SCR</i> non-vie - catastrophe | 4 578 357 | 0.24% | [0.22%, 0.27%] |
| <i>SCR</i> santé - net de PB | 11 239 065 | 0.60% | [0.58%, 0.62%] |
| <i>SCR</i> santé - brut de PB | 11 239 142 | 0.19% | [0.17%, 0.21%] |
| <i>PT</i> vie | 5 629 480 139 | -0.19% | [-0.21%, -0.17%] |
| <i>PT</i> vie - UC | 417 581 735 | -0.24% | [-0.26%, -0.22%] |
| <i>PT</i> non-vie | 684 886 744 | -0.17% | [-0.21%, -0.17%] |
| <i>PA</i> - vie - 12 derniers mois | 769 228 213 | -0.27% | [-0.29%, -0.25%] |
| <i>PA</i> - vie - UC - 12 derniers mois | 94 996 434 | -0.13% | [-0.16%, -0.12%] |
| <i>PA</i> - non-vie - 12 derniers mois | 348 287 214 | 0.74% | [0.72%, 0.76%] |
| <i>PA</i> - vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 679 345 998 | -0.06% | [-0.09%, -0.05%] |
| <i>PA</i> - vie - UC - 12 mois avant les 12 derniers mois | 95 394 301 | 0.21% | [0.19%, 0.24%] |
| <i>PA</i> - non-vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 387 770 528 | 0.38% | [0.34%, 0.39%] |
| Frais UC des 12 derniers mois | 7 951 273 | 0.26% | [0.24%, 0.29%] |
| Prestations discrétionnaires futures | 246 256 814 | -0.07% | [-0.10%, -0.06%] |
| Impôts différés à l'actif | 103 381 922 | -0.11% | [-0.13%, -0.09%] |
| Impôts différés au passif | 136 032 921 | 0.01% | [-0.01%, 0.04%] |

TABLE D.3: Indices de Shapley - *SCR* - Compagnie mixte

Annexe E

Résultats indices de Shapley du ratio de solvabilité

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|--|---------------|-------------------|------------------|
| <i>VM</i> centrale | 6 210 628 812 | 19.16% | [19.11%, 19.19%] |
| <i>BE</i> central | 5 835 214 341 | 49.67% | [49.63%, 49.71%] |
| <i>VM</i> baisse taux d'intérêt | 6 338 130 536 | 0.37% | [0.34%, 0.41%] |
| <i>VM</i> hausse taux d'intérêt | 5 811 776 798 | 1.03% | [0.99%, 1.06%] |
| <i>VM</i> actions type 1 | 6 141 960 198 | 1.22% | [1.18%, 1.25%] |
| <i>VM</i> actions type 2 | 6 210 165 656 | 0.38% | [0.35%, 0.42%] |
| <i>VM</i> immobilier | 6 184 760 944 | -0.52% | [-0.55%, -0.48%] |
| <i>VM</i> spread - obligations et prêts | 6 071 254 532 | 3.22% | [3.18%, 3.25%] |
| <i>VM</i> baisse monnaie étrangère | 6 201 057 731 | 0.21% | [0.18%, 0.25%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - net de PB | 5 956 481 173 | 0.85% | [0.82%, 0.88%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - net de PB | 5 457 659 689 | 0.71% | [0.67%, 0.74%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - net de PB | 5 773 718 332 | 0.92% | [0.89%, 0.96%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 5 835 182 554 | 1.01% | [0.98%, 1.06%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 5 821 804 288 | 1.50% | [1.46%, 1.53%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 5 751 378 262 | 1.17% | [1.14%, 1.21%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 5 828 208 757 | 0.96% | [0.93%, 1.01%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 5 949 133 159 | 0.63% | [0.59%, 0.67%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 5 460 262 653 | 0.68% | [0.64%, 0.71%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - brut de PB | 5 778 312 306 | 0,17% | [0,13%, 0,21%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 5 835 165 401 | 0.35% | [0.33%, 0.40%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 5 834 581 986 | 0.11% | [0.07%, 0.14%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 5 828 108 715 | 0.70% | [0.67%, 0.74%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 5 830 752 535 | 0.57% | [0.53%, 0.61%] |
| <i>SCR</i> concentration - net de PB | 22 374 399 | 1.63% | [1.59%, 1.67%] |
| <i>SCR</i> concentration - brut de PB | 22 374 399 | 0.09% | [0.06%, 0.14%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 9 319 128 | 0.20% | [0.17%, 0.24%] |
| <i>LGB</i> _{int} | 367 948 | 0.79% | [0.76%, 0.83%] |

| | | | |
|---|---------------|--------|------------------|
| <i>LGB_{aqint}</i> | 10 082 019 | -0.06% | [-0.10%, -0.02%] |
| <i>BE mortalité - net de PB</i> | 5 843 119 998 | 0.55% | [0.51%, 0.58%] |
| <i>BE longévité - net de PB</i> | 5 837 504 789 | -0.01% | [-0.05%, -0.03%] |
| <i>BE rachat hausse - net de PB</i> | 5 901 200 536 | 1.88% | [1.85%, 1.93%] |
| <i>BE rachat baisse - net de PB</i> | 5 865 861 539 | 0.87% | [0.83%, 0.90%] |
| <i>BE rachat massif - net de PB</i> | 5 876 327 249 | 0.60% | [0.56%, 0.64%] |
| <i>BE dépenses - net de PB</i> | 5 855 388 407 | 0.70% | [0.66%, 0.74%] |
| <i>BE catastrophe - net de PB</i> | 5 837 515 501 | 0.95% | [0.91%, 0.99%] |
| <i>BE mortalité - brut de PB</i> | 5 847 930 785 | 0.78% | [0.74%, 0.80%] |
| <i>BE longévité - brut de PB</i> | 5 837 497 241 | 1.62% | [1.57%, 1.65%] |
| <i>BE rachat hausse - brut de PB</i> | 5 931 433 670 | 1.28% | [1.24%, 1.32%] |
| <i>BE rachat baisse - brut de PB</i> | 5 856 622 403 | 0.92% | [0.90%, 0.96%] |
| <i>BE rachat massif - brut de PB</i> | 5 895 692 040 | -0.10% | [-0.14%, -0.06%] |
| <i>BE dépenses - brut de PB</i> | 5 855 630 002 | 1.02% | [0.99%, 1.07%] |
| <i>BE catastrophe - brut de PB</i> | 5 837 784 325 | 0.74% | [0.70%, 0.77%] |
| <i>PT vie</i> | 5 519 113 552 | -0.03% | [-0.07%, -0.01%] |
| <i>PT vie - UC</i> | 389 434 241 | 0.95% | [0.91%, 0.99%] |
| <i>PA - vie - 12 derniers mois</i> | 679 352 361 | 0.12% | [0.09%, 0.16%] |
| <i>PA - vie - UC - 12 derniers mois</i> | 95 394 656 | 0.08% | [0.04%, 0.11%] |
| <i>PA - vie - 12 mois avant les 12 derniers mois</i> | 798 035 864 | 1.08% | [1.05%, 1.12%] |
| <i>PA - vie - UC - 12 mois avant les 12 derniers mois</i> | 36 328 511 | -1.00% | [-1.04%, -0.96%] |
| Frais UC des 12 derniers mois | 6 739 949 | -0.88% | [-0.93%, -0.85%] |
| Prestations discrétionnaires futures | 195 963 478 | -0.54% | [-0.57%, -0.50%] |
| Impôts différés à l'actif | 83 722 533 | -0.33% | [-0.40%, -0.32%] |
| Impôts différés au passif | 110 074 287 | 0.44% | [0.41%, 0.49%] |
| Fonds propres de base | 51 059 565 | -0.46% | [-0.55%, -0.40%] |
| Excédent des actifs par rapport au passif | 298 989 513 | 1.41% | [1.37%, 1.44%] |
| Dividendes, distributions et charges prévisibles | 34 723 937 | -0.38% | [-0.42%, -0.35%] |

TABLE E.1: Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie vie

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|---|-------------|-------------------|------------------|
| <i>VM centrale</i> | 650 302 235 | 19.03% | [19.01%, 19.05%] |
| <i>BE central</i> | 641 927 394 | 19.26% | [19.24%, 19.28%] |
| <i>VM baisse taux d'intérêt</i> | 653 857 901 | 0.35% | [0.33%, 0.37%] |
| <i>VM hausse taux d'intérêt</i> | 641 178 116 | 0.13% | [0.11%, 0.15%] |
| <i>VM actions type 2</i> | 649 976 047 | 1.15% | [1.14%, 1.17%] |
| <i>VM immobilier</i> | 627 183 273 | 1.07% | [1.06%, 1.10%] |
| <i>VM spread - obligations et prêts</i> | 634 378 822 | 1.15% | [1.13%, 1.16%] |
| <i>VM hausse monnaie étrangère</i> | 650 109 748 | -0.30% | [-0.31%, -0.28%] |
| <i>VM baisse monnaie étrangère</i> | 649 916 559 | 0.28% | [0.26%, 0.30%] |
| <i>BE baisse taux d'intérêt - net de PB</i> | 642 464 172 | -0.46% | [-0.48%, -0.45%] |
| <i>BE hausse taux d'intérêt - net de PB</i> | 633 895 576 | 0.52% | [0.50%, 0.54%] |

| | | | |
|--|-------------|--------|------------------|
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 641 921 394 | -0.18% | [-0.19%, -0.16%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 641 926 858 | -0.05% | [-0.07%, -0.03%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 641 931 537 | -0,21% | [-0,23%, -0,19%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - net de PB | 641 923 907 | 0.12% | [0.10%, 0.14%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 641 931 445 | 0.26% | [0.24%, 0.28%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 642 461 719 | 0.64% | [0.62%, 0.65%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 633 889 510 | 0.12% | [0.10%, 0.14%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 641 928 718 | 0.39% | [0.37%, 0.41%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 641 925 985 | 1.78% | [1.77%, 1.80%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 641 922 076 | 0.94% | [0.92%, 0.96%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - brut de PB | 641 929 778 | 0.03% | [0.02%, 0.05%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 641 921 895 | 0.06% | [0.04%, 0.07%] |
| <i>SCR</i> concentration - net de PB | 4 768 953 | 0.43% | [0.42%, 0.45%] |
| <i>SCR</i> concentration - brut de PB | 4 768 953 | 0.84% | [0.82%, 0.85%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 10 396 214 | -0.22% | [-0.24%, -0.21%] |
| <i>LGB</i> _{int} | 3 897 747 | 0.08% | [0.06%, 0.09%] |
| <i>LGB</i> _{aqint} | 75 549 564 | -0.04% | [-0.06%, -0.03%] |
| Primes segment 1 | 75 713 314 | -0.03% | [-0.05%, -0.01%] |
| Primes segment 2 | 75 713 314 | -0.01% | [-0.04%, 0.00%] |
| Primes segment 3 | 63 083 | -0.25% | [-0.26%, -0.23%] |
| Primes segment 4 | 35 156 568 | -0.31% | [-0.33%, -0.29%] |
| Primes segment 5 | 20 914 195 | 0.12% | [0.11%, 0.14%] |
| Primes segment 6 | 2 368 027 | -0.10% | [-0.12%, -0.09%] |
| Primes segment 7 | 408 560 | 0.44% | [0.42%, 0.46%] |
| Primes segment 8 | 5 914 618 | 0.16% | [0.15%, 0.18%] |
| Primes segment 9 | 4 527 842 | -0.25% | [-0.27%, -0.24%] |
| Réserve segment 1 | 140 603 223 | 0.69% | [0.67%, 0.70%] |
| Réserve segment 2 | 4 120 462 | -0.01% | [-0.02%, 0.01%] |
| Réserve segment 3 | 2 218 386 | -0.23% | [-0.25%, -0.22%] |
| Réserve segment 4 | 21 056 681 | 0.01% | [-0.02%, 0.02%] |
| Réserve segment 5 | 42 291 131 | 0.26% | [0.24%, 0.28%] |
| Réserve segment 6 | 12 066 943 | 0.29% | [0.27%, 0.31%] |
| Réserve segment 7 | 5 039 028 | 0.56% | [0.54%, 0.57%] |
| Réserve segment 8 | 174 898 | -0.10% | [-0.12%, -0.09%] |
| Réserve segment 9 | 5 443 256 | 0.19% | [0.17%, 0.20%] |
| <i>BE</i> non-vie - rachat | 642 399 628 | 0.54% | [0.53%, 0.56%] |
| <i>SCR</i> non-vie - catastrophe | 4 578 343 | -0.47% | [-0.48%, -0.45%] |
| <i>SCR</i> santé - net de PB | 11 239 053 | 0.11% | [0.09%, 0.13%] |
| <i>SCR</i> santé - brut de PB | 11 239 248 | 0.33% | [0.31%, 0.35%] |
| <i>PT</i> non-vie | 684 894 889 | -0.20% | [-0.21%, -0.18%] |
| <i>PA</i> - non-vie - 12 derniers mois | 348 287 178 | -0.05% | [-0.06%, -0.03%] |

| | | | |
|--|-------------|--------|------------------|
| <i>PA</i> - non-vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 387 773 569 | 0.42% | [0.40%, 0.43%] |
| Impôts différés à l'actif | 94 024 411 | -0.63% | [-0.64%, -0.61%] |
| Impôts différés au passif | 10 559 902 | -0.01% | [-0.02%, 0.01%] |
| Fonds propres de base | 300 625 284 | 0.17% | [0.11%, 0.21%] |
| Excédent des actifs par rapport au passif | 197 658 389 | 1.19% | [51.17%, 51.20%] |

TABLE E.2: Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie non-vie

| Variable d'entrée | Valeur | Indice de Shapley | IC Shapley |
|--|---------------|-------------------|------------------|
| <i>VM</i> centrale | 7 183 646 677 | 22.89% | [22.87%, 22.91%] |
| <i>BE</i> central | 6 690 589 282 | 52.46% | [52.44%, 52.48%] |
| <i>VM</i> baisse taux d'intérêt | 7 301 778 409 | 0.45% | [0.43%, 0.47%] |
| <i>VM</i> hausse taux d'intérêt | 6 820 401 678 | 0.58% | [0.56%, 0.60%] |
| <i>VM</i> actions type 1 | 7 139 947 306 | 0.86% | [0.84%, 0.88%] |
| <i>VM</i> actions type 2 | 7 183 608 141 | 1.37% | [1.35%, 1.40%] |
| <i>VM</i> immobilier | 7 133 327 642 | 0.86% | [0.83%, 0.87%] |
| <i>VM</i> spread - obligations et prêts | 7 018 693 787 | 2.91% | [2.90%, 2.94%] |
| <i>VM</i> hausse monnaie étrangère | 7 183 556 089 | 0.42% | [0.40%, 0.44%] |
| <i>VM</i> baisse monnaie étrangère | 7 182 194 193 | 0.31% | [0.29%, 0.33%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - net de PB | 6 808 594 742 | 0.53% | [0.51%, 0.55%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - net de PB | 6 327 822 111 | -0.21% | [-0.23%, -0.18%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - net de PB | 6 649 489 818 | 0.11% | [0.08%, 0.12%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - net de PB | 6 690 601 211 | 0.38% | [0.36%, 0.40%] |
| <i>BE</i> immobilier - net de PB | 6 681 974 164 | -0.05% | [-0.07%, -0.03%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - net de PB | 6 621 695 427 | 1.01% | [1.00%, 1.04%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - net de PB | 6 690 538 362 | 0.32% | [0.30%, 0.34%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - net de PB | 6 689 595 439 | 0.69% | [0.66%, 0.71%] |
| <i>BE</i> baisse taux d'intérêt - brut de PB | 6 795 301 512 | 0.57% | [0.55%, 0.59%] |
| <i>BE</i> hausse taux d'intérêt - brut de PB | 6 281 067 523 | -0.21% | [-0.23%, -0.19%] |
| <i>BE</i> actions type 2 - brut de PB | 6 649 509 292 | 0.09% | [0.07%, 0.11%] |
| <i>BE</i> actions type 1 - brut de PB | 6 690 598 700 | 0.19% | [0.16%, 0.20%] |
| <i>BE</i> immobilier - brut de PB | 6 689 323 400 | 0.14% | [0.12%, 0.16%] |
| <i>BE</i> spread - obligations et prêts - brut de PB | 6 673 733 842 | 0.52% | [0.50%, 0.54%] |
| <i>BE</i> hausse monnaie étrangère - brut de PB | 6 690 501 190 | 0.22% | [0.19%, 0.23%] |
| <i>BE</i> baisse monnaie étrangère - brut de PB | 6 689 753 920 | 0.38% | [0.36%, 0.40%] |
| <i>SCR</i> expositions type 1 | 32 011 925 | 0.09% | [0.07%, 0.11%] |

| | | | |
|---|---------------|--------|------------------|
| <i>LGB_{int}</i> | 4 281 971 | 0.16% | [0.13%, 0.18%] |
| <i>LGB_{aqint}</i> | 101 954 850 | -0.22% | [-0.25%, -0.20%] |
| <i>BE mortalité - net de PB</i> | 6 700 340 230 | -0.45% | [-0.47%, -0.43%] |
| <i>BE longévité - net de PB</i> | 6 693 613 476 | 0.76% | [0.75%, 0.79%] |
| <i>BE rachat hausse - net de PB</i> | 6 771 292 124 | 0.87% | [0.85%, 0.89%] |
| <i>BE rachat baisse - net de PB</i> | 6 719 245 885 | 0.58% | [0.56%, 0.60%] |
| <i>BE rachat massif - net de PB</i> | 6 754 952 062 | 1.23% | [1.20%, 1.25%] |
| <i>BE dépenses - net de PB</i> | 6 710 173 613 | 0.81% | [0.79%, 0.83%] |
| <i>BE catastrophe - net de PB</i> | 6 693 568 025 | 0.47% | [0.45%, 0.49%] |
| <i>BE mortalité - brut de PB</i> | 6 705 640 444 | 0.04% | [0.02%, 0.07%] |
| <i>BE longévité - brut de PB</i> | 6 693 463 190 | 0.37% | [0.35%, 0.40%] |
| <i>BE rachat hausse - brut de PB</i> | 6 803 430 612 | 1.19% | [1.17%, 1.21%] |
| <i>BE rachat baisse - brut de PB</i> | 6 712 062 398 | 0.82% | [0.79%, 0.84%] |
| <i>BE rachat massif - brut de PB</i> | 6 789 609 540 | 0.58% | [0.56%, 0.60%] |
| <i>BE dépenses - brut de PB</i> | 6 710 340 571 | 1.40% | [1.37%, 1.42%] |
| <i>BE catastrophe - brut de PB</i> | 6 693 793 353 | 1.25% | [1.23%, 1.27%] |
| Primes segment 1 | 75 712 840 | -0.11% | [-0.14%, -0.09%] |
| Primes segment 2 | 11 483 294 | -0.30% | [-0.32%, -0.28%] |
| Primes segment 3 | 63 084 | -0.22% | [-0.25%, -0.21%] |
| Primes segment 4 | 35 156 360 | 0.30% | [0.28%, 0.32%] |
| Primes segment 5 | 20 914 353 | 0.03% | [0.00%, 0.05%] |
| Primes segment 6 | 2 368 066 | -0.58% | [-0.60%, -0.56%] |
| Primes segment 7 | 408 558 | 0.06% | [0.04%, 0.09%] |
| Primes segment 8 | 5 914 653 | 0.11% | [0.09%, 0.13%] |
| Primes segment 9 | 4 527 801 | 0.33% | [0.31%, 0.35%] |
| Réserve segment 1 | 140 601 026 | 0.02% | [0.00%, 0.04%] |
| Réserve segment 2 | 4 120 478 | -0.05% | [-0.07%, -0.03%] |
| Réserve segment 3 | 2 218 381 | -0.51% | [-0.54%, -0.50%] |
| Réserve segment 4 | 21 056 355 | 0.34% | [0.32%, 0.36%] |
| Réserve segment 5 | 42 290 881 | 0.21% | [0.18%, 0.22%] |
| Réserve segment 6 | 12 066 929 | -0.30% | [-0.32%, -0.28%] |
| Réserve segment 7 | 5 038 994 | 0.02% | [0.00%, 0.04%] |
| Réserve segment 8 | 174 899 | -0.09% | [-0.12%, -0.07%] |
| Réserve segment 9 | 5 443 295 | -0.12% | [-0.14%, -0.10%] |
| <i>BE non-vie - rachat</i> | 6 690 983 774 | 1.94% | [1.92%, 1.96%] |
| <i>SCR non-vie - catastrophe</i> | 4 578 357 | 0.55% | [0.53%, 0.57%] |
| <i>SCR santé - net de PB</i> | 11 239 065 | 0.33% | [0.31%, 0.36%] |
| <i>SCR santé - brut de PB</i> | 11 239 142 | 0.15% | [0.13%, 0.17%] |
| <i>PT vie</i> | 5 629 480 139 | 0.02% | [-0.01%, 0.04%] |
| <i>PT vie - UC</i> | 417 581 735 | -0.44% | [-0.46%, -0.42%] |
| <i>PT non-vie</i> | 684 886 744 | -0.54% | [-0.56%, -0.51%] |
| <i>PA - vie - 12 derniers mois</i> | 769 228 213 | 0.12% | [0.10%, 0.14%] |
| <i>PA - vie - UC - 12 derniers mois</i> | 94 996 434 | -0.14% | [-0.16%, -0.12%] |
| <i>PA - non-vie - 12 derniers mois</i> | 348 287 214 | -0.32% | [-0.35%, -0.30%] |
| <i>PA - vie - 12 mois avant les 12 derniers mois</i> | 679 345 998 | 0.19% | [0.17%, 0.22%] |
| <i>PA - vie - UC - 12 mois avant les 12 derniers mois</i> | 95 394 301 | 0.36% | [0.34%, 0.39%] |

| | | | |
|--|-------------|--------|------------------|
| <i>PA</i> - non-vie - 12 mois avant les 12 derniers mois | 387 770 528 | -0.39% | [-0.42%, -0.37%] |
| Frais UC des 12 derniers mois | 769 228 213 | -0.31% | [-0.33%, -0.29%] |
| Prestations discrétionnaires futures | 246 256 814 | -0.04% | [-0.06%, -0.01%] |
| Impôts différés à l'actif | 103 381 922 | 0.94% | [0.91%, 0.96%] |
| Impôts différés au passif | 136 032 921 | 0.39% | [0.38%, 0.42%] |
| Fonds propres de base | 266 405 451 | -1.02% | [-1.08%, -0.95%] |
| Excédent des actifs par rapport au passif | 411 773 110 | 1.35% | [1.32%, 1.37%] |

TABLE E.3: Indices de Shapley - Ratio de solvabilité - Compagnie mixte