



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon
le 22 mars 2013

Par : Jean-Christophe DUCROS

Titre: Construction d'une table de mortalité prospective pour des contrats de
retraite en points

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. Frédéric PLANCHET

M. Pierre THEROND

Entreprise :

Groupama Gan Vie

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI

M. Alexis BIENVENÜE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Laurent VIBERT

Invité :

M. Laurent VIBERT

Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe de Groupama Gan Vie qui m'a accompagné pendant ce mémoire.

Mes plus grands remerciements vont à Laurent VIBERT, Directeur de la Comptabilité, de la Cohérence des Flux et Directeur Normes et Méthodes, à l'origine de ce mémoire. Je le remercie particulièrement pour son soutien pédagogique et pour le temps qu'il a pu me consacrer dans le travail de réflexion de ce mémoire.

J'adresse un sincère remerciement à Frédéric PLANCHET pour son soutien technique et les nombreux éclairages qu'il a su m'apporter en sa qualité d'expert.

Je remercie également Laurence CRETY-LESAGE et Samantha TRUONG pour leur gentillesse et leur accompagnement.

RESUME

Ce mémoire a pour but de construire une table de mortalité prospective en s'appuyant sur la population de 2 produits de l'entité Groupama Gan Vie : le produit REPMA et le produit Agri Retraite Points. Ces 2 produits ont pour caractéristiques communes d'être des contrats de retraite régis par l'article L.441 du Code des Assurances.

Après un premier travail de contrôle des données, la méthode de Kaplan-Meier a été employée pour déterminer les taux bruts. Des modèles de lissage des données avec projection ont ensuite été utilisés, il s'agit des modèles de Lee-Carter, Bongaarts et Brass.

Le risque d'estimation est ensuite mesuré par simulations. Les taux bruts sont rééchantillonnés sur la base des tables construites. Un ajustement par la méthode de Brass permet d'obtenir de nouvelles surfaces de mortalité prospectives. L'échantillon des provisions calculées a une distribution normale, ce qui permet de spécifier la loi de la provision.

Mots clés : Tables prospectives, Lee-Carter, Bongaarts, Brass, L441, risque d'estimation.

ABSTRACT

The objective of this paper is to build a prospective life table relying on the population of two products of the entity *Groupama Gan Vie: REPMA* and *Agri Retraite Points*. Those 2 products are both pension insurance contracts regulated by the article L.441 of the *Code des Assurances*.

First, after a data checking, the Kaplan-Meier method has been used to determine the gross rates. Then, smoothing data models with projection have been used: they are Lee-Carter, Bongaarts and Brass models.

Then, the estimation risk is measured by simulations. The gross rates are re-sampled on the basis of the tables build. An adjustment made with the Brass method allows to obtain new prospective mortalities surfaces. Thanks to the normal distribution of the calculated reserves sample, the reserve law can be specified.

Keywords : Prospectives tables, Lee-Carter, Bongaarts, Brass, L441, estimation risk.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	6
1. PRESENTATION DES PRODUITS	8
1.1. PRESENTATION DES REGIMES L.441	8
1.2. PRESENTATION DES PRODUITS REPMA ET AGRI RETRAITE POINTS	15
2. CONTEXTE REGLEMENTAIRE DES TABLES DE MORTALITE	22
2.1. DESCRIPTION DES TABLES DE MORTALITE.....	22
2.2. EVOLUTION DES TABLES DE MORTALITE DANS LE CODE DES ASSURANCES.....	23
2.3. TABLES DE MORTALITE DANS LA DIRECTIVE SOLVABILITE 2	25
3. ANALYSE DES DONNEES	26
3.1. TRAITEMENT DES DONNEES	26
3.2. COHERENCE DES RESULTATS OBTENUS	29
3.3. ANALYSE DES RETARDS DE DECLARATION DES DECES	34
3.4. ANALYSE DU PORTEFEUILLE	38
4. CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITE	43
4.1. CALCUL DES QUOTIENTS DE MORTALITE BRUTS	43
4.2. MODELE LEE-CARTER	49
4.3. MODELE LOGISTIQUE DECALE	60
4.4. MODELE DE BRASS	65
4.5. COMPARAISON DES MODELES ENDOGENES ET DU MODELE EXOGENE POUR LA POPULATION DES HOMMES.....	79
4.6. FERMETURE DES TABLES	80
5. COMPARAISON DES TABLES CONSTRUITES ET DES TABLES REGLEMENTAIRES	85
5.1. ANALYSE OBJECTIVE HORS CONTEXTE DU PORTEFEUILLE	85
5.2. ANALYSE DES TABLES DANS LE PORTEFEUILLE	86
6. MESURE DE L'ERREUR D'ESTIMATION	93
6.1. PROCEDE.....	93
6.2. MESURE DE L'ERREUR SUR LES PROVISIONS	94
6.3. INFLUENCE DE LA TAILLE DU PORTEFEUILLE SUR L'ECART TYPE	97
CONCLUSION	102
BIBLIOGRAPHIE	104
ANNEXE 1 : COEFFICIENTS REPMA ET AGRI RETRAITE POINTS	105
ANNEXE 2 : QUOTIENTS DE MORTALITE BRUTS	108
ANNEXE 3 : ESPERANCE DE VIE ET MONTANT D'UNE RENTE	111

INTRODUCTION

Les contrats de retraite régis par l'article L.441 du Code des Assurances font l'objet d'une provision spécifique : la provision technique spéciale. Cette provision est gérée de manière collective pour un contrat donné et doit être suffisante pour couvrir les engagements évalués sur la base de 60 % du TME. Dans le cas contraire, les compagnies d'assurance sont amenées à puiser dans leurs fonds propres afin de constituer la provision technique spéciale complémentaire.

Afin de maîtriser ce risque sur les produits Agri Retraite Points et REPMA, Groupama Gan Vie a souhaité, au vu des données disponibles, construire une table de mortalité prospective sur cette population spécifique composée d'agriculteurs. Cette catégorie socioprofessionnelle a la particularité d'avoir une mortalité inférieure, selon les statistiques de l'Insee, à la population générale.

Tableau 1 : Espérance de vie à 60 ans* par sexe et catégorie socioprofessionnelle

	Homme		Femme	
	1976-1984	2000-2008	1976-1984	2000-2008
Cadres	19,2	24,0	24,1	27,8
Professions intermédiaires	18,3	22,3	23,1	27,4
Agriculteurs	18,3	22,3	22,2	26,2
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	18,6	22,2	22,7	27,1
Employés	17,0	21,0	22,6	26,4
Ouvriers	15,9	19,6	21,6	25,5
Inactifs non retraités	12,3	16,0	21,8	25,2
Ensemble	17,1	21,1	22,2	26,1

Source : Insee¹, Échantillon démographique permanent.

* : Selon les tables du moment

Le tableau précédent indique que les agriculteurs hommes ayant 60 ans ont une espérance de vie qui, en moyenne, est supérieure d'un an à la population générale. Ce constat pourrait laisser penser que les tables qui vont être construites auront une mortalité inférieure à la TGH pour la population des hommes et une mortalité similaire à la TGF pour la population des femmes. Néanmoins, les tables réglementaires générationnelles sexuées ont été construites à partir de portefeuilles de rentiers de compagnies d'assurance, la population sous risque n'est donc peut-être pas représentative de la population générale.

La nécessité de tables générationnelles vient de l'augmentation de l'espérance de vie des individus. Par exemple, dans le tableau précédent l'espérance de vie à 60 ans de la population générale a augmenté de 4 ans en 24 ans. Ces tables permettent de prendre en compte la dérive temporelle de la mortalité.

Les tables de mortalité prospectives peuvent être construites par deux types de modèles : les modèles endogènes ou les modèles exogènes. Les modèles endogènes capturent la dérive temporelle historique de la population étudiée et la projettent dans le temps. L'inconvénient de ce type de modèle est qu'il est très vulnérable aux erreurs d'échantillonnage. Les modèles

¹ http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=espvie60ansparcs

exogènes, quant à eux, s'appuient sur la dérive d'un plus grand groupe et l'adaptent au portefeuille. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils reposent sur la tendance d'un groupe autre que la population étudiée.

Les données constituent un paramètre important lors d'une étude de mortalité. Par exemple, l'estimation des taux bruts par la méthode de Kaplan-Meier nécessite d'avoir toutes les dates de censures et de troncatures. Après avoir vérifié la disponibilité des variables, un contrôle de qualité des données est nécessaire afin de vérifier leur exhaustivité et leur fiabilité.

Une des difficultés dans l'application des modèles réside dans la suffisance ou non des données. Comme il a été dit précédemment, les modèles endogènes projettent la tendance historique. Cela induit que cette tendance ne soit pas entachée par le risque d'estimation, et que l'historique des données disponibles soit suffisamment long pour définir une tendance fiable. Les modèles exogènes ont un plus faible besoin en données car la tendance est déjà définie dans la table de référence.

Ce mémoire va donc s'attacher à présenter les caractéristiques des contrats étudiés et à analyser leurs similarités. Une étude sur l'évolution des tables de mortalité dans la réglementation va ensuite être menée. Une fois la pertinence des données vérifiée, divers modèles prospectifs vont être mis en œuvre puis comparés. Après avoir analysé l'impact de ces nouvelles tables sur les provisions, des simulations seront effectuées pour déterminer la loi de la provision et ainsi mesurer le risque d'estimation.

1. PRESENTATION DES PRODUITS

Les produits d'assurances étudiés dans ce mémoire sont des contrats régis par la « Branche 26 » des assurances qui est définie d'après l'article R.321-1 par : « Prévoyance collective. Toute opération à caractère collectif définie à la section I du chapitre Ier du titre IV du livre IV ». Cet article se rapporte au chapitre 441 du Code des Assurances.

Dans cette partie, il sera étudié dans un premier temps la spécificité des régimes L.441. Une seconde partie se focalisera sur les garanties des contrats sur lesquels porte l'étude.

1.1. PRESENTATION DES REGIMES L.441

Les régimes L.441 sont des régimes de capitalisation collective dans lesquels les assurés acquièrent des unités de rentes : ce sont des régimes collectifs à points. Ces régimes, initialement gérés en répartition, ont peu à peu été modifiés depuis leur création en 1959 pour aboutir à un fonctionnement par capitalisation.

Dans une première partie, il sera analysé les distinctions entre régime par capitalisation et régime par répartition. Une seconde partie aura pour objet de présenter le contexte historique de la mise en place des régimes L.441 et leur évolution. Et enfin, il sera analysé leur fonctionnement.

1.1.1. REGIMES PAR CAPITALISATION ET PAR REPARTITION

Une différence importante entre les régimes par capitalisation et les régimes par répartition réside dans le provisionnement. En effet, dans le premier les provisions doivent être supérieures aux engagements du régime alors que dans le second, elles peuvent être inférieures.

➤ Régime par capitalisation

Dans un régime par capitalisation, les provisions doivent être au moins égales aux engagements du régime. Ce régime se décompose en deux étapes : dans un premier temps, il y a accumulation d'un capital et dans un second temps, il y a consommation de ce capital.

L'avantage de ce type de régime est qu'il est indépendant du nombre de cotisants et de rentiers, chacun a la contrepartie de ce qu'il a versé. La constitution d'une provision offre le droit à une possibilité de rachat du contrat.

En revanche, un tel régime nécessite une phase de cotisation et ne permet pas la mise en place d'une reconnaissance rétroactive de droits. Il est très sensible aux évolutions des marchés financiers, ce qui a eu pour conséquence sa remise en cause lors de la crise financière de 1929.

➤ Régime par répartition

Dans un régime par répartition, il y a une redistribution des ressources aux allocataires du régime, ce qui entraîne une faible nécessité de provisions.

L'avantage de ce régime est de pouvoir mutualiser le risque entre les cotisants et les rentiers, c'est-à-dire qu'une diminution du nombre de cotisants entraînera une hausse des cotisations et une baisse des arrérages, et dans le cas contraire bénéficiera aux deux groupes. Mais cette solidarité n'est que l'expression de sa vulnérabilité à la taille de chaque groupe. Ce type de

régime ne peut fonctionner qu'en groupe ouvert, l'adhésion des membres doit donc être obligatoire. De fait, il ne peut y avoir de rachat.

1.1.2. HISTORIQUE ET MISE EN PLACE DES REGIMES L.441

En France, au début du XXe siècle, les systèmes de retraite étaient gérés en capitalisation. Ce système a montré toutes ses faiblesses lors des poussées inflationnistes de 1910 et 1914, surenchéries par la crise de Wall Street le 5 octobre 1929. Le système par répartition a alors été mis en avant et a été mis en place pour la première fois en France en 1941, à l'occasion de la création de l'Allocation aux Vieux Travailleurs Salariés.

Au lendemain de la Seconde Guerre Mondiale, le choix d'un système de retraite fondé sur la répartition s'imposa à l'occasion de la création du régime de base de la Sécurité Sociale pour les salariés de l'industrie et du commerce.

On assista ensuite à l'apparition de régimes autonomes pour les agriculteurs (MSA), les artisans (CANCAVA), les commerçants (ORGANIC), les professions libérales (CNAVPL) et les avocats, ainsi que du régime complémentaire pour les cadres (AGIRC). D'autres régimes de retraite complémentaires facultatifs furent également créés, mais le caractère facultatif de l'adhésion couplé à leur gestion par répartition les voua à l'échec.

La fin des années 50 vit une tentative partielle d'unification des régimes complémentaires des salariés non-cadres (UNIRS) et ce n'est qu'au début des années 60, alors que certains des régimes hors UNIRS faisaient déjà face à des problèmes d'équilibre financier, que fut rendue obligatoire l'affiliation des salariés non-cadres à l'un des régimes de retraite et que ces derniers furent fédérés au sein de l'ARRCO, structure de compensation financière. Ce dispositif fut étendu à l'ensemble des salariés, y compris les salariés agricoles, en 1972.

Les nombreux régimes de retraite complémentaire facultatifs qui se développèrent, notamment en direction des professions libérales, adoptèrent des formes juridiques variées. Certains étaient gérés par une simple association loi 1901. Cette structure permettait aux assureurs de s'introduire dans la gestion de ces régimes, alors que la législation ne prévoyait pour ceux-ci que la possibilité d'effectuer des opérations en capitalisation pure.

L'ordonnance du 7 janvier 1959 chercha à mettre de l'ordre dans ces régimes qui effectuaient des opérations de prévoyance collective « qui ne sont pas couvert[e]s, intégralement et à tout moment, par des réserves mathématiques » (article 1). Elle énuméra limitativement les organismes autorisés à les effectuer :

- pour les salariés (article 2, avantages résultant d'une convention collective ou du contrat de travail), seules les institutions relevant de l'article 4 du Code de la Sécurité Sociale, des articles 1050 et 1052 du Code Rural ou les institutions relevant du Code de la Mutualité pouvaient verser des prestations, s'ajoutant aux prestations des organismes de Sécurité Sociale ou de la Mutualité Sociale Agricole,
- dans les autres cas, ces opérations ne pouvaient être pratiquées que par des institutions relevant du Code de la Mutualité ou de l'article 1052 du Code Rural, par la CNAV (Caisse Nationale d'Assurance sur la Vie, devenue la Caisse Nationale de Prévoyance) ou par des sociétés d'assurances (article 3). La création du régime REPMA en 1964 relève de ce cadre.

L'ordonnance renvoya à un règlement d'administration publique pour fixer les règles techniques et les modalités de contrôle.

Les parutions de l'ordonnance et des avant-projets de règlement d'administration publique suscitèrent une vive émotion dans les milieux syndicaux. Les caisses de retraite des cadres se sentaient particulièrement visées par la mise en place d'un système de contrôle les obligeant éventuellement à constituer des réserves qui diminueraient les prestations versées.

Pour répondre à ces inquiétudes, le Ministère du Travail annonça en 1960 que le règlement d'administration publique n'avait pas pour vocation de remettre en cause le régime des cadres ni l'UNIRS, qui s'étaient déjà fixé des règles techniques. C'est dans ce contexte que l'accord précité créant l'ARRCO fut adopté en 1961.

L'élaboration du décret portant règlement d'administration publique prit cinq ans et celui-ci parut le 4 juin 1964. Le projet de réglementer les institutions L 4 et la mutualité (article 2 de l'ordonnance) fut abandonné. Le décret, complété par un arrêté du 20 août 1964, imposa une capitalisation partielle (de 20 % des engagements pour les opérations individuelles et de 10 % pour les opérations collectives) et interdit l'attribution de points gratuits (pour compenser les années de carrière avant la création du régime). Le décret reconnaissait implicitement qu'un régime facultatif ne pouvait fonctionner en répartition, tout en n'imposant qu'une capitalisation très partielle.

Le décret était extrêmement complexe et un deuxième décret, qui parut le 8 mars 1968, simplifia les modalités techniques et porta le taux de capitalisation à 50 % des engagements (d'où le nom de régimes en "semi-répartition" ou en "semi-capitalisation"). Ce texte et l'arrêté correspondant ont été codifiés dans les chapitres R 441 et A 441 du Code des Assurances et l'ordonnance de 1959 en L 441. C'est sous ce chapitre 441, auquel ces régimes doivent leur nom, qu'a évolué par la suite la législation.

La loi du 4 janvier 1994, qui avait pour but de transposer la directive européenne du 10 novembre 1992, a abrogé les stipulations du Code des Assurances permettant l'absence de couverture intégrale des engagements.

Le décret du 12 avril 1995, complété par les arrêtés du 9 mai 1995 et du 4 mai 1999, a appliqué partiellement ce passage à une logique de capitalisation. Tout en portant le taux de couverture minimum à 100 %, il a maintenu le principe de conversion des régimes en difficulté, ce qui revient à une capitalisation collective et non à une capitalisation individuelle, et a même conservé la possibilité de baisser la valeur de service du point, ce qui est propre à la répartition.

La loi a également supprimé les dispositions qui limitaient auparavant la souscription de ces contrats au bénéfice des seuls non salariés, autorisant ainsi la création par les assureurs de régimes L.441 à destination de salariés dans le cadre d'une convention collective ou du contrat de travail.

Le décret du 14 juin 2004 a modifié certains points. Il prend désormais en compte la réassurance dans le montant minimum de marge de solvabilité exigible. Le taux de couverture plancher de 100 % est conservé, le décret supprime cependant l'obligation de convertir le régime en rentes individuelles en cas de sous couverture.

On voit l'apparition de la PTS complémentaire qui doit être constituée lorsque $PMT > PTS$ et peut revenir à l'assureur lorsque il y a un retour à l'état normal.

La PTS doit être dorénavant capitalisée à taux nul contrairement à un taux de 3,5 % précédemment.

Désormais, il est impossible de baisser la valeur de service du point.

L'arrêté du 1^{er} août 2006 a révisé la valeur de la provision mathématique théorique. En effet, celle-ci devra dorénavant être calculée avec les nouvelles tables par génération mises en place en 2007. Les entreprises ont jusqu'à 15 ans pour modifier cette provision.

Le décret du 31 octobre 2006 instaure une faculté de transfert des droits en cours de constitution. Ce décret détermine également la valeur de transfert minimale.

L'arrêté du 23 avril 2007 concerne les conventions libellées en monnaie étrangère. Il stipule que la valeur de service et la valeur d'acquisition des points doivent être libellées dans cette même monnaie.

L'Ordonnance du 30 janvier 2009 portant sur la commercialisation des produits d'assurance sur la vie et sur des opérations de prévoyance collective et d'assurance modifie de nombreux articles. Elle permet de préciser les dispositions du droit du contrat applicables à l'ensemble des contrats d'assurance sur la vie qui s'appliquent aux contrats de retraite « en points » facultatifs et non souscrits dans le cadre de l'entreprise. Le Code des Assurances distingue la notion d'opération collective relevant du titre IV du livre IV du Code des Assurances de la notion plus générale d'assurance vie de groupe relevant du livre Ier. A l'avenir, tous les produits d'assurance facultatifs, commercialisés sous la forme d'une relation directe entre, d'une part, l'entreprise d'assurance ou l'association diffusant un contrat d'assurance sur la vie et, d'autre part, l'assuré ou l'épargnant, seront soumis aux mêmes règles de commercialisation. Cet article contribue ainsi à rendre plus homogènes les règles applicables aux contrats d'assurance sur la vie. La réglementation impose désormais une clause de rachat obligatoire mais qui doit répondre à plusieurs conditions.

1.1.3. REGLEMENTATION DES REGIMES L.441

Les régimes L.441 ont un fonctionnement spécifique. Ce sont des régimes dont la capitalisation est gérée de façon collective en points. Les spécificités de tels régimes sont les suivantes :

➤ Mise en place

Ce type de contrat peut être mis en place par décision unilatérale de l'employeur, par voie référendaire ou par accord collectif.

Ils peuvent être proposés par les compagnies d'assurance régies par le Code des Assurances, les mutuelles relevant du Code de la Mutualité et les institutions de prévoyance qui dépendent du Code de la Sécurité Sociale. Selon l'article L.441-2, l'adhésion à ce régime peut être facultative ou obligatoire.

➤ Caractère collectif du contrat

On retrouve le caractère collectif de ces contrats à différents niveaux.

Bien que l'ordonnance du 30 janvier 2009 supprime le seuil minimal de membres dans une association (articles L.144-1 et L.144-2), elles devront toutefois conformément à l'article R.441-15 disposer d'un nombre minimal de 1000 membres pour pouvoir souscrire à une

convention relevant des articles 441 du Code des Assurances. Le seuil des 1000 membres doit être atteint maximum 3 ans après la mise en place de la convention.

Cette contrainte est due au fait que ces régimes ont un fonctionnement qui nécessite une population élargie, comme nous le verrons par la suite.

La redistribution des bénéfices se fait généralement par revalorisation de la valeur de service (définie plus loin), et à travers le taux d'intérêt technique. Ces revalorisations sont donc communes à tous les adhérents. Chaque adhérent possède cependant un compte individuel où figurent les cotisations versées et les points de retraite acquis (R.441-8).

➤ **Fonctionnement général des régimes L.441**

Ce régime de retraite se décompose en deux phases. Durant la première, les adhérents seront en phase de cotisation. Durant la seconde, ils seront généralement titulaires d'une rente.

Pour commencer, l'adhérent se constitue donc un capital d'unités de rentes. Pour déterminer le nombre d'unités acquises par l'adhérent selon l'article R.441-17, il suffit de faire le quotient entre la valeur nette de la cotisation et la valeur d'acquisition du point. Cette valeur d'acquisition peut dépendre de l'âge du bénéficiaire. En effet, le coefficient appliqué peut être considéré comme un coefficient d'anti-sélection car si un adhérent souscrit un contrat à 50 ans, potentiellement son espérance de vie sera supérieure à un adhérent qui a souscrit le même contrat à 20 ans, s'il n'est pas déjà décédé. Un coefficient égal à 1 pour tout âge correspond à un contrat collectif avec une très forte solidarité entre les adhérents.

Durant cette phase d'acquisition, les assurés acquièrent ainsi des droits, qui seront capitalisés puis resservis plus tard.

A partir d'un certain âge et sous certaines conditions, chaque adhérent titulaire de son capital points percevra une rente viagère (ou un capital si le nombre de points acquis est insuffisant). Conformément à l'article R.441-18, la valeur de la prestation périodique servie par l'assureur au bénéficiaire est égal au produit du nombre de points acquis par la valeur de service de cette unité de rente.

Ces prestations seront majorées ou minorées (par un coefficient appliqué aux points), en cas d'anticipation ou de report du versement des prestations par rapport à l'âge contractuel de la perception de ces prestations, mais également en cas de réversion.

Depuis 2004, l'article R.441-19 interdit de baisser la valeur de service du point, ce qui signifie que pour un portefeuille composé majoritairement de rentiers, il est nécessaire de bien maîtriser ses risques.

En revanche il est possible d'augmenter la valeur d'acquisition du point. Avant 2004, selon l'article R.441-20, le quotient de la valeur de service (pour une rente prenant effet à 65 ans) par la valeur d'acquisition (i.e. le rendement du régime) devait être au moins être égal à 0,05, mais d'un autre côté, il était possible de baisser la valeur de service du point dans la mesure de l'article R.441-23 abrogé en 2004.

Un nombre minimal de 2 années de cotisations peut être exigé pour obtenir le droit de disposer de son nombre de points. Il peut alors y avoir réduction ou déchéance des droits acquis.

➤ Engagements du régime

Ce type de régimes à gestion collective diffère dans leur gestion de contrats plus classiques. En effet, les provisions sont évaluées de façon collective, mais il doit tout de même y avoir une comparaison avec une gestion individuelle. L'article R.441-7 impose 4 types de provisions nécessaires à la gestion du régime : la provision technique spéciale, la provision technique spéciale complémentaire, la provision pour risque d'exigibilité et la provision de gestion. Nous allons maintenant présenter plus en détail ces provisions ainsi que d'autres indicateurs nécessaires à la gestion du régime.

• Provision Technique Spéciale (PTS)

Il existe une provision technique, appelée la PTS qui est particulière aux régimes L.441. Cette provision correspond à la somme des cotisations passées capitalisées, nette des prestations versées. Le calcul de la PTS se fait de la façon suivante :

$$PTS_n = PTS_{n-1} + (1 - g) * Cotisations_n - Prestations_n + PB_n$$

Où n désigne la date d'exercice, PB la participation aux bénéfices et g le taux de chargement sur les cotisations.

Au moins 85 % des produits financiers « de la quote-part de la provision technique spéciale et de la provision technique complémentaire dans les provisions techniques et, le cas échéant, de la reprise sur la provision pour risque d'exigibilité » doivent lui être affectés (A.441-2).

Le décret du 14 juin 2004 a supprimé l'obligation de capitaliser la PTS à 3,5 % minimum.

• Provision Mathématique Théorique (PMT)

La PTS doit nécessairement couvrir une seconde provision : la PMT. Elle correspond à la valeur actuelle probable de l'engagement du régime (R.441-21).

Cette provision se calcule de manière individuelle, elle correspond à l'ensemble des engagements pour chaque assuré en considérant qu'ils perçoivent une rente viagère immédiate ou différée ayant pour valeur la valeur de service actuelle du point.

Il est important de noter que c'est la PTS, et non la PMT, qui figure au passif du bilan de l'assureur. Toutefois, la PMT sert de référence au calcul de la marge de solvabilité sous Solvabilité II.

La PMT selon l'article A.441-4 se calcule en fonction des tables par génération TGH-05 et TGF-05.

Depuis le décret du 14 juin 2004, le taux d'intérêt technique utilisé pour le calcul des provisions mathématiques est de 75 % du TME les huit premières années puis 60 % du TME ensuite (avec un TME lissé sur 2 ans au lieu de 6 mois auparavant), sans pouvoir dépasser 3,5 % et descendre en dessous de 1,5 % (A.441-4).

• Taux de couverture

Le rapport entre la PTS et la PTM s'appelle le taux de couverture, il doit nécessairement être supérieur à 1 sinon cela signifierait que les engagements futurs actualisés du portefeuille sont inférieurs à sa valeur actuelle.

Ce rapport était jusqu'en 1994 limité à 50 %, c'est pourquoi les régimes L.441 était à l'époque considérés comme des régimes en semi-capitalisation ou semi-répartition.

- **Provision Technique Spéciale Complémentaire (PTSC)**

Au cas où la PTS ne serait pas supérieure à la PMT (R.441-21), la compagnie devra constituer une Provision Technique Spéciale Complémentaire (PTSC) (R.441-7, 2°) par prélèvement sur les fonds propres (R.441-7-1). Mais si la compagnie arrive à rectifier le taux de couverture, elle pourra réincorporer cette provision dans ses fonds propres.

- **Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE)**

Cette provision est définie dans l'article R.331-3 du Code des Assurances. C'est une provision destinée à faire face aux engagements dans le cas d'une moins value de l'ensemble des actifs.

- **Provision Globale de Gestion (PGG)**

La Provision Globale de Gestion (PGG) a été ajoutée par le Conseil National de la Comptabilité (CNC). Cette provision permet de faire face à la situation dans laquelle les charges de gestion futures n'ont pas été assez provisionnées par ailleurs. (R.441-7, 4° et R.331-3)

➤ **Autres points de la réglementation**

- **Transférabilité**

Le décret d'Août 2003 autorise le transfert de contrats de retraite en points. En effet, pour certains contrats, l'adhérent aura la possibilité de transférer ses droits déjà acquis vers un autre contrat. C'est le cas du produit Agri Retraite Points, mais pas du REPMA car ce dernier n'est pas lié à la cessation d'activité professionnelle.

Le décret du 31 octobre 2006 rend obligatoire la présence d'une clause de transférabilité dans la notice de chaque contrat.

- **Rachat**

Depuis l'ordonnance du 30 janvier 2009, il est possible d'inclure une faculté de rachat dans les contrats, mais l'assuré pourra faire valoir sa faculté de rachat uniquement dans des conditions extrêmes définies dans l'article L.132-23 à savoir :

- Expiration des droits de l'assuré aux allocations chômage suite à un licenciement.
- Cessation d'activité non salariée de l'assuré à la suite d'un jugement de liquidation judiciaire.
- Invalidité de l'assuré correspondant au classement dans les 2^e ou 3^e catégories.

➤ **Gestion de l'actif**

Les produits L.441 doivent être représentés par un actif cantonné, tel qu'il est précisé aux articles L.441-8 et R.441-12.

➤ **Clôture des régimes**

Comme nous l'avons vu au précédemment, le nombre de participants minimum est fixé à 1000. Ce point est rédigé dans la réglementation de la façon suivante :

Article R.441-15 : « Le nombre de participants à une convention ne peut être inférieur à 1 000. »

Le mot « participants » n'est pas ici clairement défini et peut être interprété de différentes manières. Il est dit à l'article R.441-8 que « par participant, il faut entendre toute personne versant des cotisations ou pour le compte de laquelle il en est versé. »

En supposant que participant signifie cotisant, il est clair que devoir clôturer un régime parce qu'il possède moins de 1000 cotisants est contraire à l'esprit de ces produits (retraite collective en point basée sur la mutualisation). En effet, un tel régime peut posséder encore de nombreux rentiers, ou de nombreux adhérents ne versant plus de cotisations mais pas en âge d'être rentiers. C'est le cas du REPMA. Il n'est pas envisageable de clôturer un contrat dont le principe est, en utilisant la mutualisation, de garantir une rente (garantie de long terme), parce qu'il n'y a plus qu'un certain nombre de cotisants. De plus, une forte présence de rentiers laisse présager de nombreux engagements, soit une PMT élevée, mais également une PTS élevée, ce qui peut signifier que le régime n'est pas en « fin de vie ».

Nous interpréterons donc le mot participant comme un regroupement des cotisants et des rentiers. Cette interprétation va être importante dans l'objectif de pilotage des régimes jusqu'à leur clôture.

1.2. PRESENTATION DES PRODUITS REPMA ET AGRI RETRAITE POINTS

Les produits REPMA et Agri Retraite Points sont 2 produits commercialisés par Groupama Gan Vie, de mêmes caractéristiques.

1.2.1. REPMA

Le REPMA, Régime Interprofessionnel de la Mutualité Agricole, a été créé en 1965 par la Caisse Nationale de la Prévoyance (CNP) et la Fédération Nationale des Associations Agricoles pour le Développement de l'Assurance Vie (FNAADAV).

Il est aujourd'hui coassuré par Groupama Gan Vie à 70 % et la CNP à 30 %. La gestion technique est assurée par Groupama Gan Vie.

C'est un régime collectif de retraite à adhésion principalement individuelle permettant la constitution d'une rente à vie par acquisition de points de retraite.

➤ Condition d'adhésion

Pour pouvoir souscrire à ce contrat, l'assuré doit être âgé au minimum de 18 ans et au maximum de 65 ans. L'adhésion à ce contrat ouvre le droit à la liquidation à 65 ans. Néanmoins, la liquidation de la retraite peut être anticipée à partir de 55 ans avec un coefficient de minoration ou reportée jusqu'à l'âge de 75 ans avec un coefficient de majoration.

➤ **Garanties du produit REPMA**



➤ Versements

L'adhérent choisit entre 12 classes de cotisations annuelles, définies par le tableau suivant :

Tableau 2 : Classes de cotisations du produit REPMA

PAR AN	CLASSES	PAR TRIMESTRE
24 points par an	CLASSE 1	
48 points par an	CLASSE 2	
72 points par an	CLASSE 3	
96 points par an	CLASSE 4	24 points par trimestre
120 points par an	CLASSE 5	30 points par trimestre
144 points par an	CLASSE 6	36 points par trimestre
168 points par an	CLASSE 7	42 points par trimestre
192 points par an	CLASSE 8	48 points par trimestre
320 points par an	CLASSE 9	80 points par trimestre
480 points par an	CLASSE 10	120 points par trimestre
640 points par an	CLASSE 11	160 points par trimestre
800 points par an	CLASSE 12	200 points par trimestre

Comme l'indique le tableau, les cotisations peuvent être trimestrielles si l'adhérent appartient à une classe supérieure ou égale à la classe 4.

Il est possible de changer de classe de cotisation :

- Pour une diminution, il y aura alors application d'un nouveau coefficient suivant l'âge atteint au moment du changement de classe.
- Pour une augmentation, il y aura application d'un nouveau coefficient, seulement sur la fraction correspondant à l'augmentation, suivant l'âge atteint au moment du changement de classe.

Il est également possible de racheter des points, au titre des années d'activité antérieures, avec application d'un coefficient suivant l'âge atteint au moment du rachat.

Il est possible de suspendre les versements, sans pénalité si trois annuités ont déjà été versées, ou avec 5 % de pénalité si seulement 2 ont été versées, ou 10 % si une seule annuité a déjà été versée.

Le nombre de points acquis par un assuré est ensuite majoré, ou minoré, selon son âge de souscription au contrat pour tenir compte du phénomène d'anti-sélection. Ces coefficients sont présentés en annexe 1.

Ces coefficients s'interprètent de la façon suivante : on considère 2 assurés d'une même classe ayant le même âge, le premier ayant souscrit son contrat à l'âge de 20 ans et le second à l'âge de 40 ans. Pour une même cotisation, le premier recevra chaque année 20 % de points en plus que le second.

Les valeurs de services et d'acquisitions pour l'année 2011 du point REPMA sont respectivement 1,293€ et 16,36€.

➤ Anticipation-Report-Réversion

En cas d'anticipation ou de report de la rente, un certain coefficient est appliqué sur le nombre de points acquis par l'assuré. En cas d'anticipation, il est nécessaire de diminuer le nombre de points car la rente est susceptible d'être versée plus longtemps, en revanche dans le cas d'une prorogation le nombre de points est augmenté. Ces coefficients sont repris en annexe 1.

Dans le cas d'une rente viagère avec réversion, l'engagement de l'assureur est supérieur à celui d'une rente viagère individuelle. En effet, les quotients de mortalité sont calculés sur 2 têtes et sont plus faibles. Il est donc nécessaire de diminuer l'engagement de l'assureur en diminuant le nombre de points acquis par l'assuré. L'âge étant un facteur d'influence sur la mortalité, les coefficients unisexes présents en annexe 1 sont appliqués.

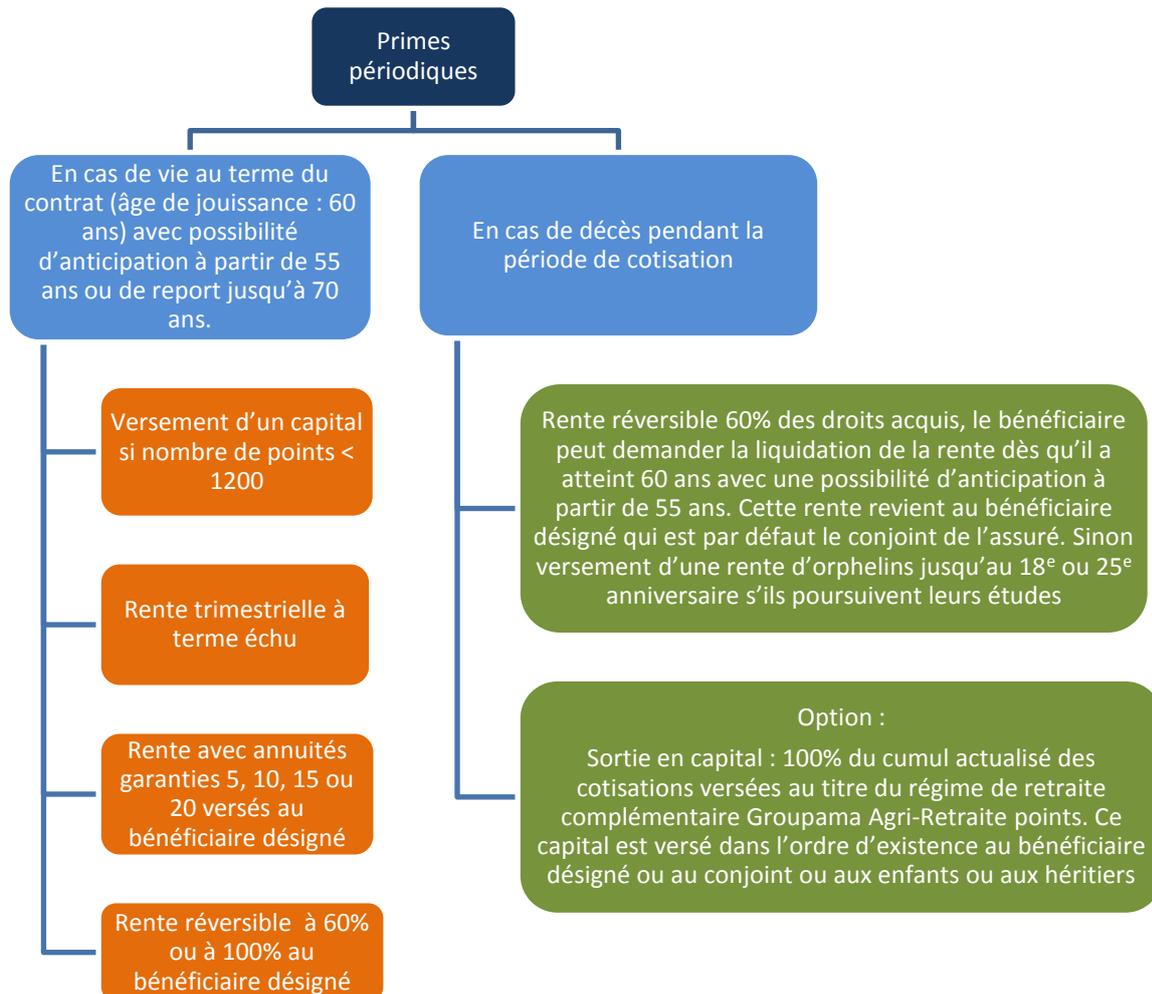
1.2.2. AGRI RETRAITE POINTS

Le contrat Agri Retraite Points est un contrat d'assurance vie de groupe en points, à adhésion facultative, souscrit auprès de Groupama Gan Vie par l'Association A.D.A.R.C.A. Ce contrat fonctionne dans le cadre des dispositions des articles L.144 du Code des Assurances. Cette liquidation sera effectuée sous réserve de cessation définitive d'activité et de liquidation de la retraite de base agricole.

➤ Condition d'adhésion

Pour pouvoir souscrire à ce contrat, l'assuré doit être âgé au minimum de 18 ans et au maximum de 64 ans. L'adhésion à ce contrat ouvre le droit à la liquidation à 60 ans. Néanmoins, la liquidation de la retraite peut être anticipée à partir de 55 ans avec un coefficient de minoration ou reportée jusqu'à l'âge de 70 ans avec un coefficient de majoration.

➤ Garanties du produit Agri Retraite Points



➤ Versements

L'adhérent choisit entre 15 classes de cotisations annuelles, définies par le tableau suivant :

Tableau 3 : Classes de cotisations du produit Agri Retraite Points

CLASSES	PAR AN	PAR TRIMESTRE
CLASSE 1	47 POINTS	EXCLU
CLASSE 2	94 POINTS	EXCLU
CLASSE 3	141 POINTS	EXCLU
CLASSE 4	188 POINTS	47 POINTS
CLASSE 5	236 POINTS	59 POINTS
CLASSE 6	284 POINTS	71 POINTS
CLASSE 7	328 POINTS	82 POINTS
CLASSE 8	376 POINTS	94 POINTS
CLASSE 9	424 POINTS	106 POINTS
CLASSE 10	468 POINTS	117 POINTS
CLASSE 11	564 POINTS	141 POINTS
CLASSE 12	704 POINTS	176 POINTS
CLASSE 13	944 POINTS	236 POINTS
CLASSE 14	1176 POINTS	294 POINTS
CLASSE 15	1608 POINTS	402 POINTS

Conformément au tableau, les cotisations peuvent être trimestrielles si l'adhérent appartient à une classe supérieure ou égale à la classe 4.

L'assuré a la possibilité de changer de classe à condition de choisir une classe supérieure à celle d'adhésion.

Les versements complémentaires sont autorisés sous les conditions suivantes :

- le minimum du versement est de 100 € ;
- le maximum du versement correspond à la somme annuelle des cotisations périodiques et des versements complémentaires, celle-ci ne doit pas dépasser 15 fois le montant de la cotisation à l'adhésion.

Il est également possible de racheter des points. Le seuil maximal est fixé à quatre années antérieures à l'adhésion. Le montant doit être égal à la somme des cotisations périodiques et versements complémentaires de l'année.

De même que pour le REPMA, des coefficients d'anti-sélection sont appliqués, ils sont présentés en annexe 1.

Pour l'année 2011, les valeurs d'acquisition et de service du point Agri Retraite Points sont les suivantes :

Tableau 4 : Valeur d'acquisition et de service du point Agri Retraite Points

	Option DC	Sans option DC
Valeur d'acquisition	4,983	4,614
Valeur de service	0,26659	0,26659

➤ **Anticipation-Report-Réversion**

En cas d'anticipation ou de report de la rente, un certain coefficient est appliqué sur le nombre de points acquis par l'assuré. En cas d'anticipation, il est nécessaire de diminuer le nombre de points car la rente est susceptible d'être versée plus longtemps, en revanche dans le cas d'une prorogation le nombre de points est augmenté. Ces coefficients sont repris en annexe 1.

Dans le cas d'une rente viagère avec réversion, l'engagement de l'assureur est supérieur à celui d'une rente viagère individuelle. En effet, les quotients de mortalité sont calculés sur 2 têtes et sont plus faibles. Il est donc nécessaire de diminuer l'engagement de l'assureur en diminuant le nombre de points acquis par l'assuré. L'âge étant un facteur d'influence sur la mortalité, les coefficients unisexes présents en annexe 1 sont appliqués.

2. CONTEXTE REGLEMENTAIRE DES TABLES DE MORTALITE

Dans le cas d'une rente viagère, l'assureur doit verser au bénéficiaire un certain montant avec une périodicité définie, et ceci jusqu'à son décès. Il y a donc 2 dates clés qui doivent être prises en compte par l'assureur :

- la date de liquidation de la rente ;
- la date de décès du bénéficiaire.

Afin de pouvoir évaluer l'engagement total de l'assureur, il est nécessaire d'avoir une bonne estimation de la durée de vie potentielle de l'individu. Un coût moyen de cette rente viagère doit être calculé à l'aide de tables de mortalité.

Une description des tables de mortalité s'impose et fera l'objet d'une première partie. Ensuite, il sera analysé l'évolution des tables de mortalité dans le Code des Assurances. Et enfin, il sera vu la place des tables d'expériences dans la directive Solvabilité II.

2.1. DESCRIPTION DES TABLES DE MORTALITE

Les tables de mortalité réglementaires recensent le nombre d'individus survivant à un certain âge avec un effectif de 100 000 personnes à un âge de départ. Il y a 2 types de tables de mortalité :

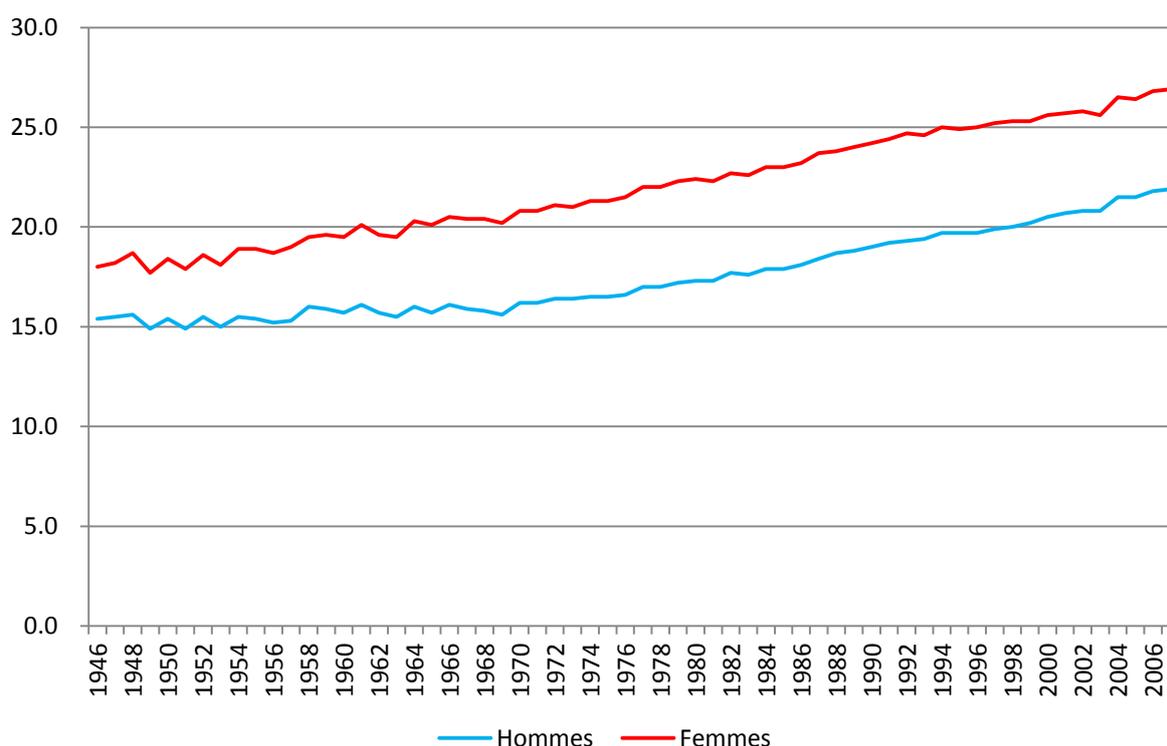
- Les tables de mortalité transversales ou tables statiques : elles sont élaborées en faisant une étude sur 4 à 5 années. Elles se présentent généralement sous forme d'un vecteur dont les composantes dépendent de l'âge de l'assuré. Le problème d'une telle table, pour la tarification des rentes, est qu'elle ne prend pas en compte l'évolution de l'espérance de vie.
- Les tables de mortalité prospectives ou longitudinales : elles se présentent sous une forme matricielle avec comme composantes l'année de naissance et l'âge de la personne. Elles permettent d'avoir une vision propre à chaque génération et offrent une projection des taux de mortalité dans le futur.

Chaque année, l'ensemble des individus gagne en espérance de vie. On peut trouver plusieurs causes à cette évolution. Une des premières est l'hygiène : à la fin du XIXe siècle, par exemple, il n'était pas communément admis qu'il était nécessaire de se laver les mains avant un accouchement, ce qui avait pour conséquence de transmettre des bactéries aux nouveau-nés ou à la mère et, dans certains cas, cela entraînait le décès. Aujourd'hui, il est communément admis que l'hygiène est indispensable pour éviter la transmission des maladies comme la grippe, par exemple, et ainsi préserver la survie des individus. Bien évidemment, l'évolution de la médecine en est un point clé. Au début du XXe siècle, la majorité des décès était attribuée aux maladies infectieuses. Avec l'amélioration de la prise en charge des patients et la généralisation de la prise de médicaments, cette mortalité a considérablement chuté. Désormais, les principales causes de décès sont les cancers et les maladies cardiovasculaires. Les mentalités également sont sources d'évolution de l'espérance de vie. De nos jours, une forte prévention est faite sur les facteurs à risques, ainsi on voit les mentalités changer sur les comportements par rapport au tabac, à l'alcool, aux matières grasses, au sel, au sucre... ce qui va tendre à faire chuter la mortalité. Néanmoins, il y a de nouveaux facteurs de risque qui apparaissent et dont on ne sait pas encore si ils sont néfastes comme les téléphones portables ou encore la pollution industrielle, par exemple.

Il est impossible de prévoir l'influence de tous ces facteurs. Néanmoins, certains modèles permettent de dégager une tendance historique assez stable et de projeter cette tendance dans le futur.

Dans le cadre d'une rente viagère, il est intéressant d'observer l'évolution de l'espérance de vie à 60 ans car il est possible d'obtenir une espérance de vie à la naissance croissante et une espérance de vie à 60 ans décroissante. Cela correspondrait à une amélioration de la mortalité dans les bas âges et au contraire à une dégradation de la mortalité dans les âges plus élevés.

Le graphique suivant reprend l'évolution de l'espérance de vie à 60 ans entre 1946 et 2007 pour la population française :



Source : Insee², estimations de population et statistiques de l'état civil.
* : Selon les tables du moment.

Figure 1 : Espérance de vie* en France à 60 ans

Il y a une forte différence entre l'espérance de vie des hommes et celle des femmes. En moyenne, les femmes vivent 5 ans de plus que les hommes. En revanche, si on compare l'évolution de l'espérance de vie depuis de 1970 entre ces 2 populations, elle est assez similaire : les 2 courbes restent à peu près parallèles.

2.2. EVOLUTION DES TABLES DE MORTALITE DANS LE CODE DES ASSURANCES

Il est aujourd'hui difficile, compte tenu du niveau des marchés obligataires et actions, de compenser des pertes techniques par des produits financiers. Le risque de sous

²http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg_id=0&ref_id=bilan-demo&page=donnees-detaillees/bilan-demo/pop_age3d.htm

provisionnement, dû à une mauvaise évaluation de la mortalité d'un portefeuille, peut donc s'avérer particulièrement pénalisant.

Il est donc nécessaire pour les actuaires de maîtriser au mieux ce risque de mortalité que l'on pourrait également appeler risque de survie.

C'est pourquoi la réglementation concernant l'utilisation de tables de mortalités est en constante évolution. Néanmoins, ce n'est qu'en 1993 que l'on observe une réelle révolution dans leur utilisation.

L'article A.335-1 du Code des Assurances fixe ce cadre réglementaire. Il a été modifié au cours du temps par une suite d'arrêtés pour tenir compte de l'évolution de la mortalité et des techniques actuarielles. Il fixe également les taux à utiliser en fonction des contrats considérés.

Voici les évolutions de cet article au cours des 40 dernières années :

- En 1974, l'article stipule que les nouvelles tables à adopter sont la PM 60/64 pour les assurances en cas de décès et la PF 60/64 pour les assurances en cas de vie.
- En 1984, les tables sont revues et cet article précise que les nouvelles tables à adopter sont la TD 73/77 pour les contrats en cas de décès et la TV 73/77 pour les contrats en cas de vie. Il est également mentionné que la référence à une table d'expérience est exclue, seules les tables généralistes sont autorisées tant pour le calcul des primes que pour celui des provisions.
- En 1993, le nouvel arrêté indique le caractère obsolète des tables précédentes et rend obligatoire l'utilisation des nouvelles tables vie et décès TV 88/90 et TD 88/90. De plus, il contraste avec les précédents arrêtés en spécifiant que désormais les entreprises d'assurance peuvent utiliser leurs propres tables, à condition d'être certifiées par un actuaire indépendant et d'être plus prudentes que les tables réglementaires. Et enfin, l'évolution des techniques a permis l'élaboration de la table prospective TPG 93, qui doit être utilisée dans la tarification et le provisionnement des rentes viagères. Néanmoins, de part la difficulté d'utilisation des tables prospectives, il est possible d'utiliser la TPRV 93 pour les rentes viagères avec un décalage d'âge.
- En 2005, on commence à voir apparaître la différenciation par sexe avec notamment la parution des tables TH 00-02 et TF 00-02 comportant un décalage d'âge. Ces tables s'appliquent pour tous les contrats hormis les rentes viagères. Dorénavant, les tables d'expérience doivent être basées sur des données d'expérience de l'entreprise ou des données équivalentes.
- En 2006, on voit apparaître les tables par génération sexuées avec les TGH 05 et TGF 05 qui viennent se substituer à la TPG 93 pour les rentes viagères.

Désormais, la justice européenne exige, dans un souci d'égalité, la même tarification pour les hommes et les femmes. Cette nouvelle exigence n'est pas en contradiction avec le précédent article. En effet, il offre la possibilité à l'assureur d'utiliser une table unique parmi les tables réglementaires, à condition que celle-ci corresponde au tarif le plus prudent. Bien que la directive impose une contrainte sur le tarif, le calcul de la provision pourra toujours tenir compte de la différence de mortalité entre les deux sexes.

2.3. TABLES DE MORTALITE DANS LA DIRECTIVE SOLVABILITE 2

Dans le cadre de Solvabilité 2, il est désormais nécessaire d'évaluer les provisions de façon *Best Estimate*. Cette vision des provisions nécessite d'être le plus proche de la réalité, ce qui sur un portefeuille de rentes implique d'évaluer la mortalité propre du portefeuille et de fait de construire une table d'expérience. En revanche, aucune certification n'est demandée.

Le risque systématique que peut représenter le risque d'estimation est ici capturé par la marge pour risque. Néanmoins, dans un souci de maîtrise du risque, il est préférable de veiller à conserver une certaine prudence dans la construction des tables.

3. ANALYSE DES DONNEES

L'objectif de cette partie est de déterminer quelles sont les données exploitables pour notre étude de mortalité. Pour commencer, il sera expliqué comment ont été recueillies les données. Puis une analyse des extractions sera effectuée dans le but de déterminer si les données sont fiables et exhaustives. Ensuite, une étude portera sur la validité du nombre de décès par une analyse du retard dans la déclaration des décès. Et enfin, une dernière partie permettra de fixer les âges et les années utilisables pour l'étude de mortalité.

3.1. TRAITEMENT DES DONNEES

Dans cette partie, il va être expliqué comment ont été recueillies les données et comment celle-ci ont été purifiées. Les bases de données disponibles sont les bases de flux de l'infocentre Vie2000 et une base de données archivées.

3.1.1. TRAITEMENT DES DONNEES

Dans la base infocentre Vie2000, on dispose de la vision au 31/12 des années 2002 à 2010. On va reconstituer notre portefeuille d'assurés par année à partir des primes perçues et des prestations versées. On sera donc amené à utiliser 2 bases que l'on appellera la base cotisants et la base rentiers.

Avant de commencer, il est important de connaître le fonctionnement des bases. Si une prime est versée jusqu'en 2003 par exemple, on observera ce contrat jusqu'à fin 2004 dans la base cotisants. Ensuite, le contrat réapparaît dans la base rentiers lorsque l'assuré perçoit une prestation. En général, quelque soit l'année considérée le contrat reste enregistré dans la base rentiers. Néanmoins, il peut arriver que certaines données soient archivées.

La base prestation de l'année 2003 n'était pas disponible, elle n'a donc pas été utilisée. Ce n'est pas gênant car on peut la reconstituer à partir de la base 2004.

Après avoir extrait toutes les informations disponibles dans la base Vie2000, on obtient plusieurs lignes pour un même contrat. On va donc chercher à supprimer les doublons et à synthétiser ces données en une seule ligne de contrat.

A ce stade, notre table comptabilise 1 887 531 lignes.

Notre base obtenue se présente de la façon suivante :

Tableau 5 : Base de donnée

IDCONT	DT_ORIGI	DT_RENTE	DT_RESIL	TYPE_PERS	annee_obs	CDSEXE	DT_NAIS	DT_DECES	NOTITUL
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2010	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2010	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2009	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2009	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2008	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2008	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2007	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2007	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2006	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2006	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998		01/04/2005	1	2006	M	30/03/1945		
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2005	F	28/10/1945		2
0014285RY000042	01/01/1998	01/04/2005		2	2005	M	30/03/1945		1
0014285RY000042	01/01/1998		01/04/2005	1	2005	M	30/03/1945		
0014285RY000042	01/01/1998			1	2004	M	30/03/1945		
0014285RY000042	01/01/1998			1	2003	M	30/03/1945		
0014285RY000042	01/01/1998			1	2002	M	30/03/1945		

Les significations des variables dans le tableau sont les suivantes :

- *IDCONT* signifie l'identifiant du contrat ;
- *DT_ORIGI* signifie la date d'effet ;
- *DT_RENTE* signifie la date de liquidation de la rente ;
- *DT_RESIL* signifie la date de résiliation ou la date de clôture de la rente ;
- *TYPE_PERS* indique si la donnée a été prélevée dans la base cotisants dans ce cas sa valeur est 1 sinon, si elle a été prélevée dans la base rentiers alors sa valeur est 2 ;
- *annee_obs* indique l'année d'extraction de l'information dans la base Vie2000 ;
- *CDSEXE* indique le sexe de la personne concernée ;
- *DT_NAIS* est la date de naissance de l'assuré ;
- *NOTITUL* indique le numéro du titulaire de la rente, à la valeur 1 on associe le titulaire de la rente et à la valeur 2 on associe le titulaire de la rente de réversion.

Afin de pouvoir retracer la fiabilité des données, les différentes étapes, qui ont permis de supprimer les doublons, sont détaillées ci-après.

3.1.2. NETTOYAGE DE LA BASE VIE2000

1^{ère} étape : Suppression des informations sur la réversion.

Les lignes correspondant au détail des bénéficiaires inscrits pour une rente de réversion ont été supprimées. Bien qu'il pourrait sembler légitime de les conserver dans notre étude de mortalité, nous considérons qu'il est préférable de les supprimer car il peut arriver qu'un couple d'assurés souscrive chacun un contrat et mette son conjoint en bénéficiaire de la rente de réversion, ce qui risque de former des doublons.

Dans cette étape, on ne perd pas l'information quant à la date de clôture car pour qu'elle existe, il faut que les 2 titulaires soient décédés (dans le cas d'un choix avec réversion).

Il ne nous reste plus que 1 721 117 lignes.

2^{ème} étape : Choix de l'année maximale et du type de personne maximal.

Le fait de récolter les données sur plusieurs années crée obligatoirement des doublons. Cette étape est tout de même obligatoire car un cotisant décédé en 2004 par exemple disparaîtra de la base cotisants à partir de 2006. De plus, si aucune prestation n'a été versée, il ne sera pas visible dans la base cotisants ou rentiers en 2010. Nous conserverons donc la dernière année dans laquelle apparaît l'assuré.

Au cours d'une même année, si l'assuré est passé du statut de cotisant à rentier, il apparaîtra 2 fois dans notre base, nous sélectionnerons donc l'information venant de la base rentiers car elle reprend toutes les informations venant de la base cotisants.

A l'issue de cette étape, on obtient une table composée de 198 587 observations.

3^{ème} étape : Elimination des erreurs.

A ce stade, il devrait y avoir une ligne par contrat mais ce n'est pas le cas. Cela vient d'erreurs dans la base qui attribuent plusieurs dates d'effet ou plusieurs dates de résiliations. Un exemple est donné dans le tableau suivant :

Tableau 6 : Erreur présente dans la base de données

IDCONT	DT_ORIGI	DT_RENTE	DT_RESIL	TYPE_PERS	annee_obs	CDSEXE	DT_NAIS	DT_DECES	NOTITUL
0000048RP700091	01/07/1983	01/01/1996	07/03/1996	2	2010	F	25/12/1930		1
0000048RP700091	01/07/1983	01/01/1996		2	2010	F	25/12/1930		1

Après vérification, sur ce cas précis la personne continue de percevoir des prestations ce qui signifie que le contrat n'a pas été résilié.

Dans un souci de prudence, on va conserver la date d'effet la plus antérieure et la date de résiliation la plus récente si elle existe. Ceci devrait avoir pour conséquence de baisser les taux de décès.

Après ce traitement, notre table comporte désormais 191 892 lignes.

Il n'y a donc plus de doublons, notre base est nettoyée.

3.1.3. AJOUT DES DONNEES ARCHIVEES

Comme nous l'avons dit précédemment, la base Vie2000 est incomplète car certaines données ont été archivées.

Les données archivées envoyées ont été ajoutées à la base précédemment traitée. Certaines formaient des doublons avec nos données précédentes et avaient des dates d'effet ou de résiliation différentes de celles de notre base. Nous avons choisi de conserver les données issues de la base infocentre Vie2000.

On obtient un total de 194 594 lignes.

Quelques unes des données transmises n'ont pas de date de résiliation, on les supprime. Après analyse, il s'avère que certaines d'entre elles ont des dates de décès, mais elles sont antérieures à 1990.

La table finalement utilisée pour l'étude de mortalité a 194 506 observations.

3.2. COHERENCE DES RESULTATS OBTENUS

Pour vérifier leur cohérence, les données vont être comparées avec des chiffres officiels. Par chiffres officiels, nous entendons les chiffres publiés par les actuaires dans les rapports annuels.

3.2.1. ANALYSE DES CHIFFRES DU REPMA

Afin de comparer au mieux les résultats, 2 approches vont être adoptées :

- une vision au 31/12 telle que l'avaient les actuaires lorsqu'ils ont publiés les chiffres officiels, c'est-à-dire que l'on ne considérera que les années 2002 à 2010. Elle nous permettra de valider les résultats de ces années.
- une vision à posteriori, c'est-à-dire qu'en se plaçant au 31/12/2010, nous avons connaissance de retards de gestion ou des déclarations tardives. On vérifiera donc si les écarts restent cohérents avec nos années précédemment validées.

En ce qui concerne le produit REPMA, il faut séparer la comparaison entre les cotisants et les rentiers. En effet, pour une partie du REPMA, le REPMA C, les cotisants ne sont pas gérés dans notre base. Le nombre de cotisants pour le REPMA C n'est disponible que depuis 2002.

Les tableaux suivants présentent le nombre d'assurés du produit REPMA. Les chiffres présentés pour les cotisants sont hors REPMA C.

Tableau 7 : REPMA – Effectifs des rentiers

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
2 002	35 978	35 974	4	0,01 %
2 003		36 535		
2 004	36 927	36 921	6	0,02 %
2 005	37 335	37 330	5	0,01 %
2 006	37 403	37 395	8	0,02 %
2 007	37 493	37 489	4	0,01 %
2 008	37 399	37 396	3	0,01 %
2 009	37 312	37 307	5	0,01 %
2 010	37 263	37 258	5	0,01 %

Tableau 8 : REPMA – Effectifs des cotisants (hors REPMA C)

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
2 002	29 120	29 124	-4	-0,01 %
2 003	27 224	27 222	2	0,01 %
2 004	25 413	25 419	-6	-0,02 %
2 005	23 681	23 694	-13	-0,05 %
2 006	22 143	22 153	-10	-0,05 %
2 007	20 582	20 591	-9	-0,04 %
2 008	19 008	19 014	-6	-0,03 %
2 009	17 555	17 565	-10	-0,06 %
2 010	16 152	16 158	-6	-0,04 %

A la vue de ces deux tableaux, on peut affirmer que nos données sont cohérentes. Les seules variations enregistrées, du nombre de cotisants et de rentiers, se compensent.

Les tableaux suivants présentent les effectifs avec une vision à postériori, c'est-à-dire en tenant compte de toute les années disponibles jusqu'en 2010. Contrairement au tableau précédent, les chiffres officiels incluent la population du REPMA C.

Tableau 9 : REPMA – Effectifs des rentiers à postériori

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
1 978	3 027	3 362	-335	-11,07 %
1 979	3 547	3 838	-291	-8,20 %
1 980	3 954	4 199	-245	-6,20 %
1 981	4 296	4 466	-170	-3,96 %
1 982	4 707	4 833	-126	-2,68 %
1 983	5 214	5 304	-90	-1,73 %
1 984	5 869	5 849	20	0,34 %
1 985	6 888	6 804	84	1,22 %
1 986	8 109	8 149	-40	-0,49 %
1 987	9 635	9 689	-54	-0,56 %
1 988	11 301	11 382	-81	-0,72 %
1 989	13 035	13 123	-88	-0,68 %
1 990	15 236	15 287	-51	-0,33 %
1 991	17 386	17 483	-97	-0,56 %
1 992	19 705	19 764	-59	-0,30 %
1 993	22 368	22 402	-34	-0,15 %
1 994	24 550	24 582	-32	-0,13 %
1 995	26 546	26 574	-28	-0,11 %
1 996	28 435	28 480	-45	-0,16 %
1 997	30 259	30 313	-54	-0,18 %
1 998	31 726	31 827	-101	-0,32 %
1 999	33 108	33 170	-62	-0,19 %
2 000	34 283	34 429	-146	-0,43 %
2 001	35 107	35 263	-156	-0,44 %
2 002	35 827	35 974	-147	-0,41 %
2 003	36 339	36 535	-196	-0,54 %
2 004	36 750	36 921	-171	-0,47 %
2 005	37 140	37 330	-190	-0,51 %
2 006	37 163	37 395	-232	-0,62 %
2 007	37 243	37 489	-246	-0,66 %
2 008	37 198	37 396	-198	-0,53 %
2 009	37 135	37 307	-172	-0,46 %
2 010	37 263	37 258	5	0,01 %

Ici, il n'y a pas de grosse variation de l'écart d'une année sur l'autre mis à part avant 1985. On justifie ces écarts par des retards de gestion.

Tableau 10 : REPMA – Effectifs des cotisants à postériori

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
1 978	38 832	40 741	-1 909	-4,92 %
1 979	41 911	44 078	-2 167	-5,17 %
1 980	45 461	47 274	-1 813	-3,99 %
1 981	50 571	52 541	-1 970	-3,90 %
1 982	56 220	58 902	-2 682	-4,77 %
1 983	60 304	64 120	-3 816	-6,33 %
1 984	65 027	69 244	-4 217	-6,48 %
1 985	69 621	74 478	-4 857	-6,98 %
1 986	71 750	76 759	-5 009	-6,98 %
1 987	71 275	76 222	-4 947	-6,94 %
1 988	69 481	74 373	-4 892	-7,04 %
1 989	67 611	72 117	-4 506	-6,66 %
1 990	64 589	69 062	-4 473	-6,93 %
1 991	61 488	65 603	-4 115	-6,69 %
1 992	58 132	62 040	-3 908	-6,72 %
1 993	54 257	57 994	-3 737	-6,89 %
1 994	50 779	54 651	-3 872	-7,63 %
1 995	47 666	51 442	-3 776	-7,92 %
1 996	44 414	48 063	-3 649	-8,22 %
1 997	41 329	44 584	-3 255	-7,88 %
1 998	38 551	41 600	-3 049	-7,91 %
1 999	35 733	37 309	-1 576	-4,41 %
2 000	33 227	34 714	-1 487	-4,48 %
2 001	31 148	32 568	-1 420	-4,56 %
2 002	29 070	31 638	-2 568	-8,83 %
2 003	27 212	29 760	-2 548	-9,36 %
2 004	25 426	27 917	-2 491	-9,80 %
2 005	23 689	26 150	-2 461	-10,39 %
2 006	22 168	24 581	-2 413	-10,89 %
2 007	20 627	22 970	-2 343	-11,36 %
2 008	19 073	21 368	-2 295	-12,03 %
2 009	17 604	19 876	-2 272	-12,91 %
2 010	16 252	18 424	-2 172	-13,36 %

Ici, étant donné que l'on ne dispose pas des données du REPMA C, on ne peut vraiment juger de la pertinence de nos données. On peut toutefois noter une anomalie entre 1999 et 2001. Il n'y a pas de continuité avec les années précédentes ou postérieures. En 1999, il y a eu une tentative de rapatriement des données du REPMA C dans nos bases. Mais cette idée a été abandonnée par la suite.

3.2.2. ANALYSE DES CHIFFRES DE L'AGRI RETRAITE POINTS

On analyse également les chiffres exercice par exercice avec une vision au 31/12 de la base.

Tableau 11 : Agri Retraite Points – Effectifs des rentiers

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
2 002	5 638	5 596	42	0,74 %
2 003		6 478		
2 004	7 539	7 477	62	0,82 %
2 005	8 521	8 469	52	0,61 %
2 006	9 818	9 763	55	0,56 %
2 007	11 541	11 506	35	0,30 %
2 008	13 325	13 294	31	0,23 %
2 009	15 013	14 976	37	0,25 %
2 010	16 469	16 441	28	0,17 %

Tableau 12 : Agri Retraite Points – Effectifs des cotisants

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
2 002	90 716	90 592	124	0,14 %
2 003	89 806	89 686	120	0,13 %
2 004	88 272	88 153	119	0,13 %
2 005	86 815	86 714	101	0,12 %
2 006	84 638	84 535	103	0,12 %
2 007	81 990	81 879	111	0,14 %
2 008	79 227	79 121	106	0,13 %
2 009	76 556	76 450	106	0,14 %
2 010	74 234	74 134	100	0,13 %

On peut également affirmer que nos données sont cohérentes. Contrairement au REPMA, ici il n'y a pas de compensation entre le nombre de cotisants et de rentiers. Mais on justifie cet écart par le fait que le contrat Agri Retraite Points est toujours ouvert à la vente. Etant donné que les chiffres officiels ne sont pas calculés au 31/12, on a tout de même une vision postérieure ce qui explique ces écarts.

Le tableau suivant présente la vision du portefeuille en tenant compte de l'ensemble des informations données chaque année.

Tableau 13 : Agri Retraite Points – Effectifs des rentiers à postériori

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
1 998	2 539	2 517	22	0,87 %
1 999	3 440	3 301	139	4,04 %
2 000	4 160	4 053	107	2,57 %
2 001	4 880	4 784	96	1,97 %
2 002	5 685	5 596	89	1,57 %
2 003	6 567	6 478	89	1,36 %
2 004	7 565	7 477	88	1,16 %
2 005	8 562	8 469	93	1,09 %
2 006	9 879	9 763	116	1,17 %
2 007	11 613	11 506	107	0,92 %
2 008	13 403	13 294	109	0,81 %
2 009	15 072	14 976	96	0,64 %
2 010	16 469	16 441	28	0,17 %

Tableau 14 : Agri Retraite Points – Effectifs des cotisants à postériori

Exercice	Base	Officiels	Différence	Différence %
1 998	87 062	91 919	-4 857	-5,58 %
1 999	89 114	90 937	-1 823	-2,05 %
2 000	89 654	90 743	-1 089	-1,21 %
2 001	90 453	90 915	-462	-0,51 %
2 002	90 300	90 592	-292	-0,32 %
2 003	89 638	89 686	-48	-0,05 %
2 004	88 631	88 153	478	0,54 %
2 005	87 606	86 714	892	1,02 %
2 006	85 754	84 535	1 219	1,42 %
2 007	83 427	81 879	1 548	1,86 %
2 008	81 012	79 121	1 891	2,33 %
2 009	78 611	76 450	2 161	2,75 %
2 010	76 674	74 134	2 540	3,31 %

Concernant les rentiers, on peut affirmer que les chiffres sont cohérents. En effet, en moyenne, il y a 800 assurés par an qui passent du statut de cotisant à rentier. Sous ce constat, la différence entre les chiffres officiels et nos données n'est pas aberrante.

En revanche, concernant les cotisants, l'écart est beaucoup plus marqué.

Pour les années postérieures à 2002, il se justifie car nous comptabilisons comme cotisants, les contrats non résiliés pour lesquels il n'y a pas eu de prestation. Cela peut arriver par exemple lorsqu'un assuré décède, mais que son bénéficiaire est trop jeune pour pouvoir percevoir une prestation. Il doit attendre d'avoir atteint l'âge de 60 ans ou, selon le contrat souscrit, il peut percevoir le capital constitutif de la rente. Dans les contrats REPMA, le conjoint doit avoir atteint les 55 ans si c'est une femme, et les 60 ans si c'est un homme, pour pouvoir justifier sa rente de réversion. Il peut également percevoir sa rente de réversion sous forme de capital, si le nombre de points acquis ne dépasse pas un certain seuil.

La moyenne d'âge des assurés du REPMA explique cette absence d'écart.

Pour les années antérieures à 2002, étant donné que le produit Agri Retraite Points a été repris par défaut par Groupama Vie, il y a eu de nombreux transferts vers d'autres assureurs. Il nous

est impossible d'avoir connaissance de ces transferts, ceci induira très certainement un biais. Néanmoins, cet écart restera faible du fait de la prise en compte des assurés à partir d'un certain âge.

3.3. ANALYSE DES RETARDS DE DECLARATION DES DECES

En assurance vie comme en assurance non vie, il y a toujours des retards de déclaration des décès ou des sinistres. Par conséquent, les années les plus récentes de notre étude risquent d'être fortement biaisées. Il est donc nécessaire de déterminer quelles sont les années à écarter de notre étude pour manque de fiabilité des données.

En assurance non vie, il existe différentes méthodes comme la méthode de Chain Ladder Standard pour évaluer le montant des provisions pour sinistres à payer. Nous allons utiliser certains outils de cette méthode en faisant une analogie entre le montant des sinistres et le nombre de décès pour nous aider dans notre choix.

3.3.1. METHODE DE CHAIN LADDER STANDARD

La méthode de Chain Ladder se base sur le fait que si l'on possède n années d'historique, on a alors la connaissance des sinistres déclarés en i pour l'année i et des sinistres déclarés en n pour l'année i . A partir de l'année i , on a donc une vision de $n-i+1$ années. Avec ces données, on construit ce qu'on appelle un triangle des sinistres cumulés.

Tableau 15 : Chain Ladder – Triangle de sinistres

Année d'origine	Développement				
	0	1	...	n-1	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,n-1}$	
...		
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$			
n	$X_{n,0}$				

$X_{i,k}$ représente le montant cumulé des sinistres de l'année i avec une vision à posteriori de k années.

La méthode de Chain Ladder sert à compléter les données manquantes dans le tableau à l'aide des données historiques.

On note $C_{i,j}$ le coefficient de développement tel que $X_{i,j+1} = C_{i,j} X_{i,j}$.

Sous hypothèse d'indépendance des facteurs de développement avec l'année d'origine, on

cherche à obtenir des estimateurs \hat{C}_j dépendants uniquement de l'année de développement.

Les estimateurs suivants sont sans biais et non corrélés :

$$\hat{C}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{i,j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{i,j}}$$

Autrement dit, \hat{C}_j est la moyenne pondérée des coefficients $C_{i,j}$. On pourrait également le calculer par une moyenne classique ou par la moyenne géométrique.

Dans la méthode de Chain Ladder, ces coefficients servent ensuite à déterminer le montant des provisions attendues pour les prochaines années. Dans notre étude, nous n'essaierons pas d'estimer le nombre de décès attendus. Nous effectuerons cette analogie uniquement dans le but de justifier notre estimateur.

3.3.2. ESTIMATION DE L'INFORMATION DISPONIBLE EN FONCTION DE L'ANNEE CONSIDEREE

Pour pouvoir calculer l'information disponible, nous allons utiliser nos données de fin d'exercice de 2004 à 2010 sur une plage d'années allant de 1990 à 2010 pour avoir une vision sur 20 ans. Nos données seront utilisées en cumulées c'est-à-dire que pour l'année 2006 par exemple, nous prendrons en compte toutes les années antérieures afin d'obtenir toute l'information disponible.

Le tableau suivant présente le nombre de décès chez les cotisants pour le produit Agri Retraite Points.

Tableau 16 : Agri Retraite Points – Analyse du retard de déclaration des décès

Année	Différé												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1998							51	55	56	57	60	62	66
1999						142	143	143	143	145	145	145	
2000					117	118	119	119	119	119	120		
2001				138	139	139	139	141	143	144			
2002			134	135	136	136	137	137	139				
2003		149	157	158	161	162	164	165					
2004	61	78	79	80	81	81	82						
2005	62	98	103	110	112	114							
2006	41	65	69	72	73								
2007	49	77	83	86									
2008	40	67	73										
2009	57	82											
2010	38												
Coeff dev	1,51	1,06	1,03	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,06	
Information	53,3%	80,4%	84,9%	87,1%	88,2%	88,7%	89,3%	90,2%	90,9%	91,7%	92,6%	93,9%	100,0%

D'après ce tableau, 3 ans après l'exercice on ne connaît que 87 % des décès déclarés au bout de 12 ans. On remarque qu'une grande partie de cette erreur est due à la dernière année qui se base sur une seule observation. Il est possible que celle-ci soit aberrante, on ne prendra en compte qu'un différé de 11 années.

Le graphique suivant présente les résultats obtenus sur l'ensemble de notre portefeuille :

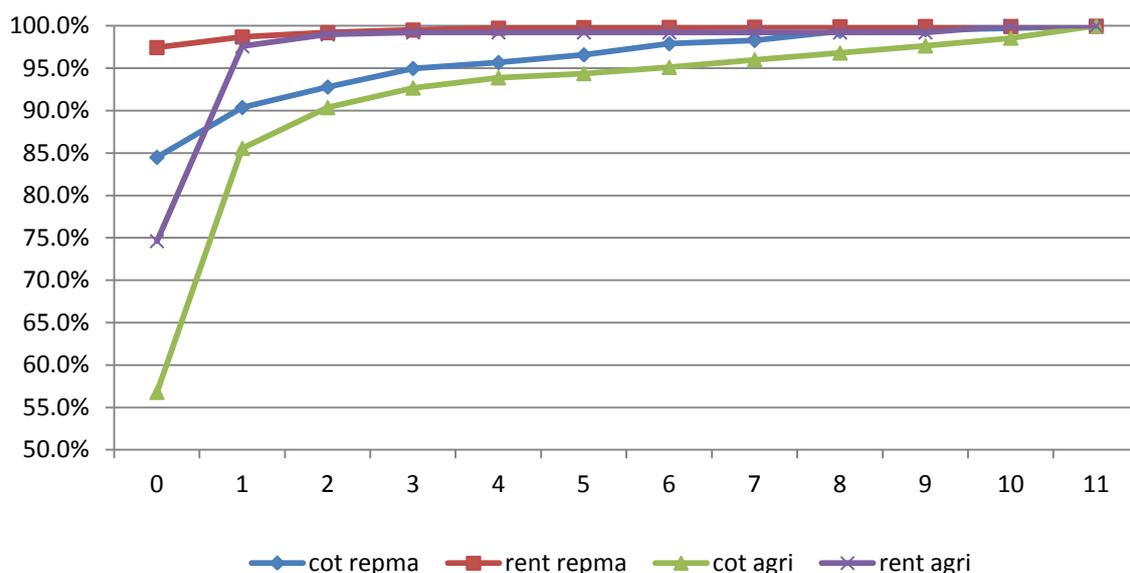


Figure 2 : Connaissance des décès en fonction de l'année de différé

En comparant les données du REPMA et de l'Agri Retraite Points, on constate qu'il semble raisonnable de penser que l'écart entre la 11^{ème} et la 12^{ème} année est dû à une erreur d'échantillonnage.

Ce graphique indique que le nombre de décès chez les rentiers converge rapidement. Une année après la fin de l'exercice, on connaît environ 98 % des décès et 2 années après la fin de l'exercice, on en connaît environ 99 %. Si on ne se fiait qu'à ces données, on pourrait utiliser notre historique jusqu'en 2009.

En revanche, en ce qui concerne les cotisants, il faut 4 à 5 années pour pouvoir atteindre 95 % de l'information que l'on aurait au bout de 11 ans.

Le graphique suivant présente le pourcentage de l'information actuelle par rapport à l'information connue 20 ans après la fin de l'exercice :

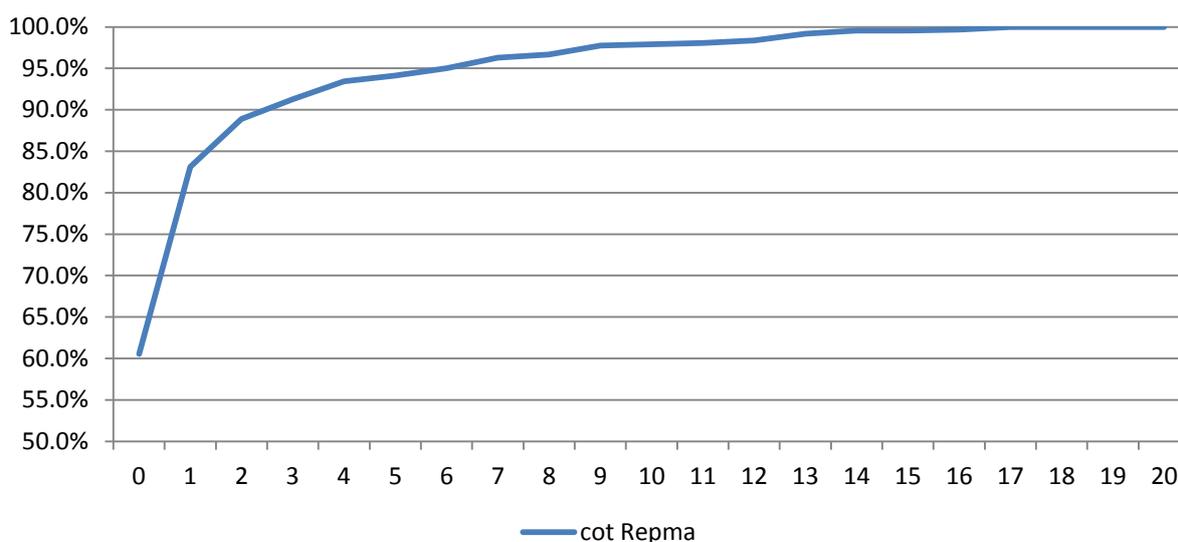


Figure 3 : Cotisants REPMA – Connaissance des décès en fonction de l'année de différé

En se fiant aux chiffres du REPMA, on remarque qu'au bout de 11 ans, on connaît 98 % de l'information totale pour les cotisants. Cela signifie que 5 ans après on ne connaîtrait que 92 % des décès voire 90 % si l'on veut être prudent dans nos estimations.

On peut alors se demander si le fait de considérer uniquement les assurés au-delà d'un certain âge peut améliorer ces résultats.

On fait donc la comparaison avec les plus de 50 ans, les plus de 55 ans et les plus de 60 ans.

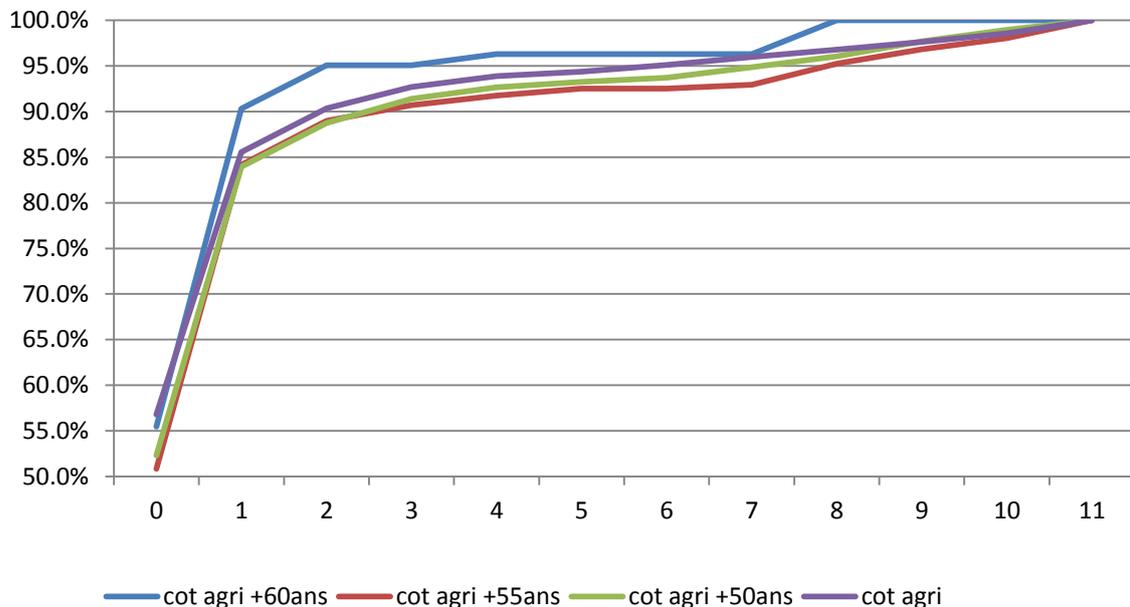


Figure 4 : Cotisants Agri Retraite Point – Connaissance des décès en fonction de l'âge considéré

Considérer uniquement les personnes ayant atteint un certain âge devient donc intéressant à partir de 60 ans, on remarque néanmoins que nos taux obtenus dépendent très fortement de l'échantillonnage.

En revanche, pour les données des cotisants des contrats REPMA, le gain d'information est moins net.

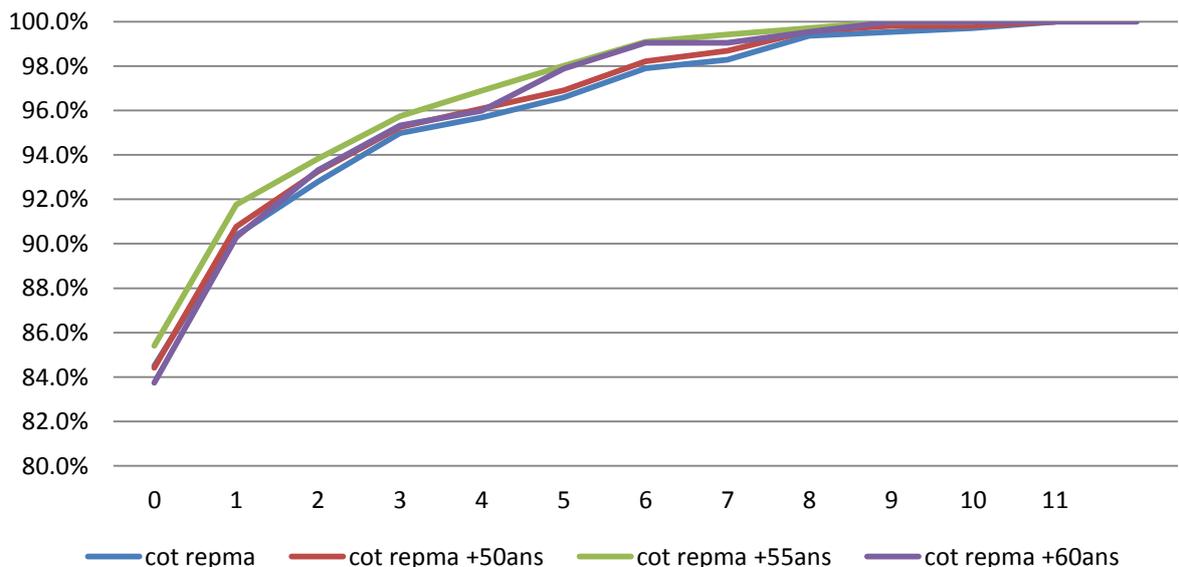


Figure 5 : Cotisants REPMA – Connaissance des décès en fonction de l'âge considéré

On est donc confrontés aux choix suivants :

- Dans le premier cas, on ne restreint pas notre population et on utilise l'historique jusqu'en 2005. En effet, réduire davantage notre historique rendrait les projections impossibles. Cette étude introduirait un biais prudent car étant donné qu'on a moins connaissance des décès les plus récents, notre gain d'espérance de vie serait plus conséquent tout en restant mesuré.
- Dans le second cas, on ne se fie qu'aux assurés de plus de 60 ans. La proportion de rentiers étant plus importante, on aura donc une information plus fiable et un historique plus long donc des projections plus réalistes. Se pose alors le risque de modèle car le nombre de cotisants par rapport au nombre de rentiers n'est pas négligeable. En 1990, le nombre de décès chez les cotisants représentait environ 40 % du nombre de décès total, en 2009 ils ne représentent plus que 10 à 15 %.

Nous retiendrons le second choix car il est préférable de modéliser la population qui porte le plus grand risque, c'est-à-dire les rentiers. De plus, comme il a été vu précédemment, il se peut qu'il y ait un léger biais entre 1998 et 2002 suite à l'intégration du portefeuille des contrats Agri Retraite Points (essentiellement constitué de cotisants) et à la tentative de rapatriement des données des cotisants des contrats REPMA C.

Nous retiendrons donc comme intervalle d'âge les plus de 60 ans. Etant donné que l'âge standard de liquidation des contrats Agri Retraite Points est de 65 ans, nous aurons certainement quelques données de décès manquantes dues à un conjoint trop jeune. Néanmoins, nous choisissons de négliger ce biais dans le nombre de décès, d'autant plus qu'il est assez prudent, et nous choisirons comme date limite l'année 2008.

3.4. ANALYSE DU PORTEFEUILLE

Dans cette partie, il va être présenté l'exposition et les décès des assurés. Il va être également jugé de la pertinence de conserver certains âges ou certaines années en fonction du nombre de décès disponibles.

3.4.1. EXPOSITION ET DECES

L'exposition présentée ci-dessous est une exposition approximative. Pour chaque âge, elle a été déterminée par la moyenne entre le nombre d'assurés présents à un âge donné en début d'année et en fin d'année.

Pour être plus rigoureux, il aurait fallu sommer le nombre d'assurés à un certain âge pour chaque jour de l'année et diviser par le nombre de jour de cette année.

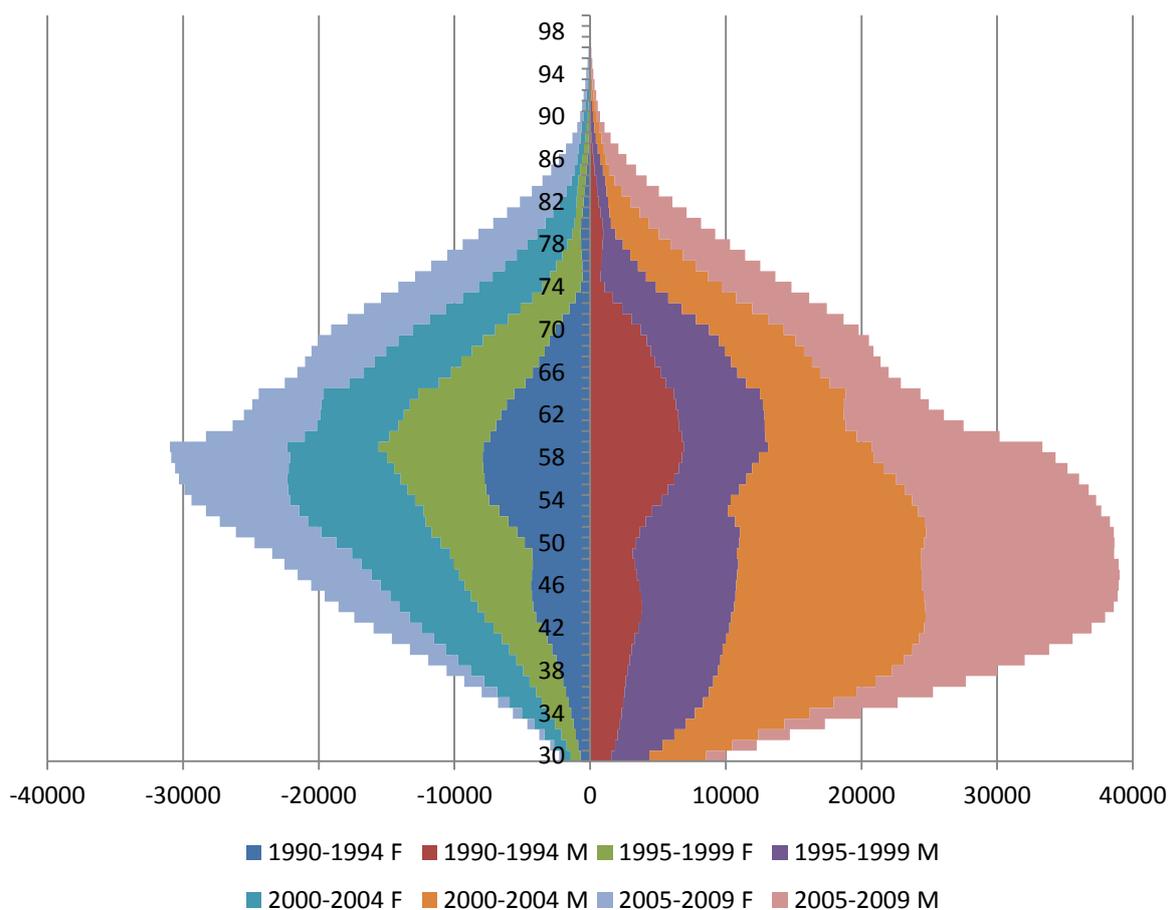


Figure 6 : Répartition de l'exposition par sexe et par âge

Dans le graphique ci-dessus, la partie gauche représente la population féminine et la partie droite la population masculine.

Pour les assurés de moins de 60 ans, on constate une prépondérance pour les personnes de sexe masculin, surtout pour les générations les plus récentes. En revanche, pour les plus de 60 ans la population semble assez bien répartie entre les hommes et les femmes.

Etant donné cette équirépartition, une table unisexe pourrait être envisagée. Mais il reste tout de même préférable de segmenter l'étude par sexe. En effet, d'après le graphique suivant, en proportion il y a beaucoup plus de décès chez les hommes, ce qui signifie que la population pour les âges élevés va se féminiser. La table unisexe se baserait sur des quotients de mortalité à forte influence masculine pour modéliser une population qui sera plus proche de l'autre sexe. Cette hypothèse étant peu prudente, nous opterons pour la segmentation homme/femme dans notre étude, même si cette segmentation induit une plus grande erreur d'échantillonnage. Ce graphique nous conforte également dans le choix de notre âge minimal. En effet, on enregistre un grand nombre de décès pour les plus de 60 ans. Il est donc important de bien calibrer notre mortalité sur cette population.

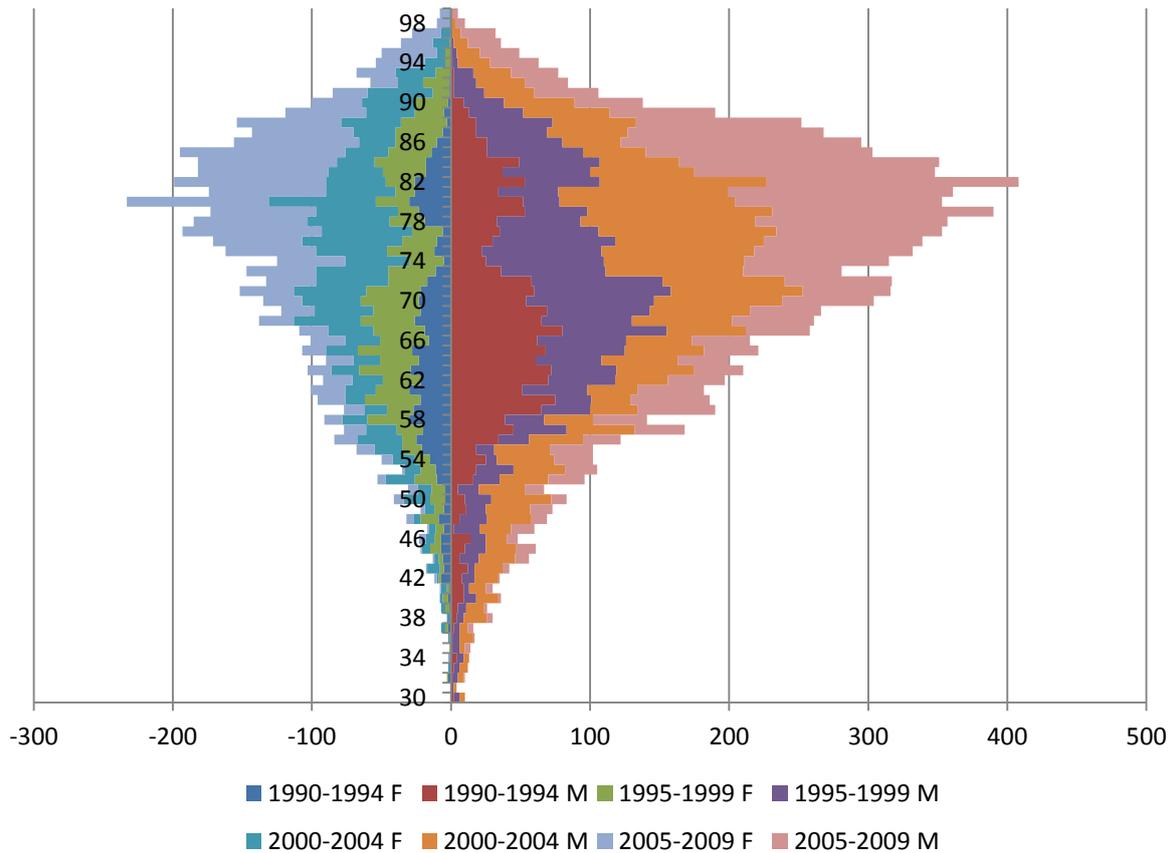


Figure 7 : Répartition des décès par sexe et par âge

3.4.2. DETERMINATION DE L'INTERVALLE D'ETUDE

L'âge minimal de l'étude à 60 ans. Pour fixer un âge limite, nous allons utiliser la condition d'application du test du Khi2. On rappelle la formule du test du Khi2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

La condition pour pouvoir mettre en œuvre ce test est $np_i \geq 5$ pour au moins 80 % des valeurs.³

On va fixer comme âge ultime, l'âge en deçà duquel le nombre de décès est inférieur à 5.

³Voir <http://www4.gu.edu.au:8080/adt-root/uploads/approved/adt-QGU20031006.143823/public/03Chapter2.pdf>

Le tableau suivant présente le nombre de décès de la population masculine.

Tableau 17 : Nombre de décès chez les hommes

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
60	20	11	17	16	11	5	4	6	3	8	8	4	4	8	4	6	9	12	9
61	5	9	10	12	15	13	10	5	10	9	10	10	5	6	5	9	1	9	12
62	15	15	8	15	17	15	7	8	10	8	4	13	10	5	6	5	10	2	8
63	14	15	17	14	12	8	8	9	9	13	13	7	9	17	10	7	6	9	9
64	15	12	9	7	18	5	15	9	11	7	19	17	6	9	4	2	8	8	10
65	18	11	13	14	12	10	14	15	11	7	6	17	9	12	13	6	8	9	9
66	9	7	18	12	16	13	13	15	11	12	12	8	8	9	10	13	9	5	12
67	13	19	11	20	17	22	12	13	11	17	9	14	11	11	12	15	10	11	16
68	13	11	10	16	15	14	7	11	21	12	13	7	25	12	15	12	7	13	12
69	9	17	12	15	16	10	17	16	14	17	16	9	16	11	20	15	17	12	14
70	8	8	13	9	16	14	17	15	23	23	22	20	13	18	19	20	9	10	13
71	6	10	16	14	14	15	16	25	18	24	15	22	20	23	15	15	18	15	15
72	4	6	17	18	13	14	23	22	16	19	17	23	15	22	11	13	20	13	10
73	5	4	6	7	14	18	12	12	19	14	12	26	21	24	16	23	25	22	19
74	4	3	4	7	7	13	22	16	17	17	25	18	16	20	22	28	26	20	16
75	7	5	2	4	4	10	17	21	18	20	20	31	22	15	22	26	17	21	30
76	9	8	4	4	5	4	16	16	25	27	26	16	17	25	23	31	26	17	21
77	11	6	6	6	6	2	4	15	27	23	22	24	31	30	21	28	33	29	22
78	8	10	6	7	2	4	6	7	20	23	24	26	32	22	22	36	36	37	29
79	8	12	9	15	9	5	5	5	6	24	21	25	21	38	28	22	37	25	28
80	9	12	8	11	12	5	2	6	5	8	12	26	24	29	35	36	26	36	34
81	7	5	5	7	10	9	14	3	8	9	16	25	23	27	31	28	39	39	36
82	6	10	10	13	14	20	15	12	6	1	5	10	24	43	38	35	36	29	30
83	8	2	12	7	8	17	9	7	21	9	4	6	8	28	29	34	38	34	46
84	8	4	9	13	15	16	9	13	9	11	6	10	11	9	21	17	47	18	37
85	4	4	7	3	8	13	12	11	14	19	11	4	5	10	15	31	35	35	30
86	4	5	7	4	6	9	9	9	14	13	12	10	3	5	12	15	24	28	28
87	2	2	7	2	5	9	8	8	9	17	16	18	8	7	9	8	11	27	34
88	3	6	3	3	3	13	8	14	9	11	10	15	18	12	5	2	10	10	24
89	1	1	1	6	4	5	4	9	10	11	11	10	16	19	6	6	3	5	11
90	2	1	1	2	3	2	9	3	10	5	11	10	8	11	11	14	4	8	8
91	0	0	0	1	1	1	4	7	4	6	7	9	5	8	7	10	9	3	5
92	0	1	0	1	0	2	4	2	3	5	3	9	11	6	6	7	15	6	4
93	1	1	0	0	0	1	0	1	3	9	4	6	5	9	3	4	8	7	11
94			0	1	0	0	0	0	1	3	4	4	3	5	7	4	6	9	4
95					0	0	1	0	0	3	2	2	5	4	4	1	5	4	7

L'âge limite est fixé à 85 ans car le ratio de 80 % n'est plus respecté. Il a tout de même été pris en compte car s'arrêter sur un âge pour lequel le nombre de décès est important peut présenter un certain risque dans le cadre d'une construction d'une table de mortalité pour des rentes viagères.

En observant les décès, on remarque que les années les plus anciennes auront des données plus fiables concernant les moins de 65 ans et les données les plus récentes seront plus à même d'évaluer la mortalité sur la population âgée de plus de 70 ans.

Les nombres de décès dans la population féminine sont les suivants :

Tableau 18 : Nombre de décès chez les femmes

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
60	5	4	3	8	2	4	6	8	10	12	6	2	2	2	2	4	4	4	7
61	7	5	6	4	8	6	2	4	6	6	7	4	2	7	2	3	4	5	9
62	7	3	4	4	4	8	5	6	3	5	8	7	5	2	0	1	3	1	3
63	5	5	6	6	7	9	6	9	9	4	1	6	9	3	1	5	4	4	2
64	2	6	6	5	4	6	4	5	11	2	1	3	1	8	6	3	5	2	2
65	7	2	3	7	9	7	10	8	7	7	3	6	3	7	4	5	3	6	6
66	4	4	3	2	3	8	3	8	7	9	4	4	3	9	5	4	4	5	5
67	2	3	2	6	6	8	6	8	9	6	5	10	4	10	3	6	6	6	3
68	7	4	5	6	4	10	4	8	9	8	11	10	7	7	13	6	6	5	4
69	4	5	3	4	6	7	8	2	11	6	7	12	11	7	5	2	7	6	5
70	3	7	6	3	4	7	6	10	8	11	11	8	10	6	7	9	7	8	7
71	0	5	5	5	7	2	11	6	14	6	12	10	10	13	7	4	8	10	9
72	0	1	5	3	8	5	6	7	4	6	6	10	13	15	8	14	11	8	10
73	0	2	0	3	6	9	5	7	7	6	13	17	1	13	8	6	19	5	12
74	2	0	1	0	2	4	10	2	2	7	8	13	5	15	5	9	13	15	15
75	4	4	0	3	1	5	3	7	9	10	9	11	13	10	8	13	13	13	13
76	4	2	2	1	1	3	4	2	10	6	5	9	23	15	20	16	20	18	24
77	2	3	0	0	1	2	0	6	10	4	16	13	10	8	18	16	15	11	27
78	3	2	9	4	1	3	3	4	2	13	8	9	14	16	12	12	15	12	22
79	4	3	5	5	6	3	3	4	3	2	8	9	13	20	9	18	27	14	24
80	3	9	7	5	6	5	1	5	4	9	5	15	19	13	25	12	16	19	15
81	5	4	6	3	8	4	2	1	4	3	5	8	13	13	11	17	15	21	31
82	6	2	2	7	9	9	5	2	2	3	6	2	9	12	14	17	12	21	22
83	3	2	3	5	5	4	7	8	7	5	5	2	2	10	20	17	23	18	21
84	3	2	1	5	7	5	12	7	9	4	5	0	7	5	10	17	14	27	30
85	1	1	2	7	3	6	5	5	8	7	10	4	4	6	7	12	22	15	21
86	1	2	2	1	4	5	6	8	6	5	7	2	5	5	7	3	15	16	23
87	2	0	1	1	2	3	8	6	6	11	5	7	8	6	4	4	3	12	24
88	1	0	0	1	1	9	4	4	9	7	6	8	14	12	3	5	3	6	24
89	1	0	0	1	3	5	1	2	4	9	5	2	10	9	9	3	3	6	8
90	0	0	0	1	1	0	2	9	8	5	8	10	8	7	5	6	5	4	4
91		0	1	0	0	0	0	6	4	2	2	10	9	8	18	5	6	2	1
92			0	0	1	3	3	5	7	1	1	5	3	4	5	8	7	5	3
93				0	0	0	2	2	3	4	7	1	11	4	6	11	6	9	5
94					0	0	0	0	1	3	0	1	6	3	5	5	11	8	9
95						0	0	1	1	2	0	2	0	3	1	3	2	5	6

Bien évidemment, comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus, la modélisation de la mortalité féminine souffre de leur faible mortalité, l'erreur d'échantillonnage est donc plus importante. Ces conditions imposent de restreindre l'intervalle d'étude à la plage [1997,2008] car le nombre de décès est trop faible. On pourrait également suggérer de restreindre davantage l'intervalle, mais le faible nombre de décès entre 60 et 70 ans dans les années les plus récentes conduirait à restreindre davantage la plage d'âges.

Nous fixons l'âge maximal à 88 ans.

4. CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITE

Dans cette partie, une table de mortalité va être construite pour chaque sexe. Après avoir ajusté les taux bruts, le modèle de Lee-Carter et le modèle de Bongaarts vont être appliqués sur la population des hommes, la population des femmes souffrant d'un nombre trop faible de décès. Puis, le modèle de Brass va être appliqué sur nos 2 populations. Il sera ensuite utilisé différents tests statistiques pour comparer les tables construites sur la population des hommes. Et enfin, nous effectuerons une fermeture de table pour les âges où les données n'étaient pas disponibles.

4.1. CALCUL DES QUOTIENTS DE MORTALITE BRUTS

Dans une étude sur la mortalité d'un groupe, la première étape consiste à estimer les quotients de mortalité bruts. L'étude en temps continu étant difficilement réalisable, on va être amenés à discrétiser le temps et avoir ainsi des années et âges entiers.

Il existe différents modèles permettant de calculer les quotients de mortalité, certains étant paramétriques et d'autres non.

4.1.1. DESCRIPTION

Parmi les nombreux estimateurs qui existent, l'estimateur le plus simple est l'estimateur binomial. En effet, il stipule qu'étant donné un nombre d_{xt} de décès pour un âge x sur l'année t et un nombre n_{xt} de têtes présentes, on peut estimer les quotients de mortalité par la formule suivante :

$$q_{xt} = \frac{d_{xt}}{n_{xt}}$$

Du fait de sa simplicité, cet estimateur n'est pas applicable dans des situations réelles car il ne tient pas compte de la possibilité de troncatures à gauche ou de censures à droite.

➤ Calcul de l'estimateur

Un des estimateurs le plus couramment utilisé dans les modèles non paramétriques censurés est l'estimateur de Kaplan-Meier car il possède de bonnes propriétés. Il est à noter toutefois que cet estimateur a tendance à sous-estimer la fonction de survie et par conséquent à surestimer la probabilité de décès ce qui a un effet négatif lors de l'estimation de quotients de mortalité dans le cadre de l'estimation de rentes viagères.

Pour le mettre en œuvre, il est nécessaire d'avoir les informations suivantes concernant l'assuré :

- la date de naissance ;
- la date d'entrée dans le portefeuille ;
- la date de sortie du portefeuille, si elle existe ;
- le statut au moment de la sortie du portefeuille, c'est-à-dire s'il s'agit d'une censure ou d'un décès.

Cet estimateur consiste à calculer la probabilité de survie sur une unité de temps en utilisant l'estimateur binomial et à utiliser la formule des probabilités composées.

Formule des probabilités composées :

Soient A_1, \dots, A_n , n évènements tels que $P(\cap_i A_i) \neq 0$. On a alors :

$$P(\cap_i A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_{n-1})$$

En prenant $N = \text{nombre de jours dans une année}$ et $A_i = T > x + \frac{i}{N} | T > x$, on a :

$$A_N \subset A_{N-1} \subset \dots \subset A_1$$

Et donc :

$$P(A_j | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1}) = P(A_j | A_{j-1})$$

$$P(A_j | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1}) = P\left(T > \left(x + \frac{j-1}{N}\right) + \frac{1}{N} \mid T > \left(x + \frac{j-1}{N}\right)\right)$$

En notant $p_{j,x,t} = P\left(T_t > \left(x + \frac{j-1}{N}\right) + \frac{1}{N} \mid T_t > \left(x + \frac{j-1}{N}\right)\right)$ c'est-à-dire la probabilité de survie au jour j sachant qu'on a déjà vécu x années et $j-1$ jours pour l'année t , avec les mêmes notations pour $n_{i,x,t}$ et $d_{i,x,t}$, on obtient l'estimateur q_x^{KM} de Kaplan-Meier :

$$q_{x,t}^{KM} = 1 - \prod_{i=1}^N p_{i,x,t}$$

Avec $p_{i,x,t}$ évalué par l'estimateur binomial :

$$p_{i,x,t} = \frac{n_{i,x,t} - d_{i,x,t}}{n_{i,x,t}}$$

La valeur de $n_{i,x,t}$ peut quelquefois être difficile à calculer car il y a 3 éléments qui peuvent influencer sur cette valeur. En effet, en général à un âge et un nombre de jours donnés, on enregistre des décès, des troncatures et des censures. La convention indique que l'estimateur doit être calculé avec le nombre d'assurés présents à la sortie du jour précédent, c'est-à-dire que l'on ne prend pas en compte les censures ou les troncatures intervenues le jour de la date de décès. Si on note $c_{i,x,t}$ les censures à la date $x+i$ et $tr_{i,x,t}$ les troncatures, on a :

$$n_{i,x,t} = n_{i-1,x,t} + tr_{i-1,x,t} - c_{i-1,x,t} - d_{i-1,x,t}$$

➤ Variance de l'estimateur

Le calcul de la variance de cet estimateur nécessite plusieurs étapes de calcul et notamment l'utilisation de la méthode delta. On obtient finalement un estimateur de la variance de l'estimateur de Kaplan-Meier appelé estimateur de Greenwood.

$$Var(p_{x,t}^{KM}) = (p_{x,t}^{KM})^2 \sum_{i=1}^N \frac{d_{i,x,t}}{n_{i,x,t}(n_{i,x,t} - d_{i,x,t})}$$

➤ **Intervalle de confiance de l'estimateur**

La normalité asymptotique de l'estimateur de Kaplan-Meier permet de déterminer un intervalle de confiance. On obtient donc, en choisissant le quantile à 99,5 %, l'intervalle suivant pour les quotients de mortalité estimés :

$$I = \left[\max \left(0, 1 - p_{x,t}^{KM} \left(1 + 1,96 \sum_{i=1}^N \frac{d_{i,x,t}}{n_{i,x,t}(n_{i,x,t} - d_{i,x,t})} \right) \right), \min \left(1, 1 - p_{x,t}^{KM} \left(1 - 1,96 \sum_{i=1}^N \frac{d_{i,x,t}}{n_{i,x,t}(n_{i,x,t} - d_{i,x,t})} \right) \right) \right]$$

➤ **Exemple**

Pour expliciter le calcul de cet estimateur, on va reprendre l'exemple dans Planchet et Thérond [2006] en le modifiant légèrement pour que des âges de décès, troncature et censure coïncident.

On va chercher à calculer q_{80}^{KM} pour la période du 01/01/1990 au 01/01/1992.

Tableau 19 : Estimateur de Kaplan-Meier – Exemple (1/2)

Numéro Assuré	Naissance	Entrée	Sortie	Etat	Age début observation	Age fin observation
1	01/03/1910	03/12/1988	01/01/1992	Vivant	79,84	81,84
2	01/05/1909	03/12/1988	01/02/1990	Décédé	80,67	80,76
3	01/02/1910	03/06/1990	01/01/1992	Vivant	79,92	81,91
4	01/05/1910	03/08/1988	01/03/1991	Censuré	79,67	80,83
5	01/03/1905	03/12/1980	01/01/1992	Vivant	84,84	86,84
6	01/04/1911	01/06/1991	01/01/1992	Vivant	78,75	80,75
7	01/04/1910	03/01/1980	01/10/1990	Décédé	79,75	80,50
8	01/01/1910	03/12/1981	01/01/1992	Vivant	80,00	82,00
9	29/07/1910	01/05/1991	01/01/1992	Décédé	80,76	81,43
10	28/08/1909	01/03/1987	01/06/1990	Vivant	80,35	80,76

Tableau 20 : Estimateur de Kaplan-Meier – Exemple (2/2)

Age	Nature	Exposition	Individus	p_{80}^{KM}
80,00	E	6	1, 3, 4, 6, 7, 8	100 %
80,35	E	7	1, 3, 4, 6, 7, 8, 10	100 %
80,50	D	6	1, 3, 4, 6, 8, 10	86 %
80,67	E	7	1, 2, 3, 4, 6, 8, 10	86 %
80,75	C	6	1, 2, 3, 4, 8, 10	86 %
80,76	D	5	1, 3, 4, 8, 10	71 %
80,76	E, C	5	1, 3, 4, 8, 9	71 %
80,83	C	4	1, 3, 8, 9	71 %
81,00				71 %

On en déduit $q_{80}^{KM} = 29 \%$.

Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, lorsqu'il y a plusieurs évènements qui interviennent pour un même âge, on traite d'abord les décès pour ne pas se tromper quant à l'exposition.

4.1.2. APPLICATION A NOTRE PORTEFEUILLE

Nous allons maintenant présenter les différents quotients estimés sur chaque année ainsi que leur intervalle de confiance.

Les quotients de mortalité de la population masculine obtenus sont les suivants :

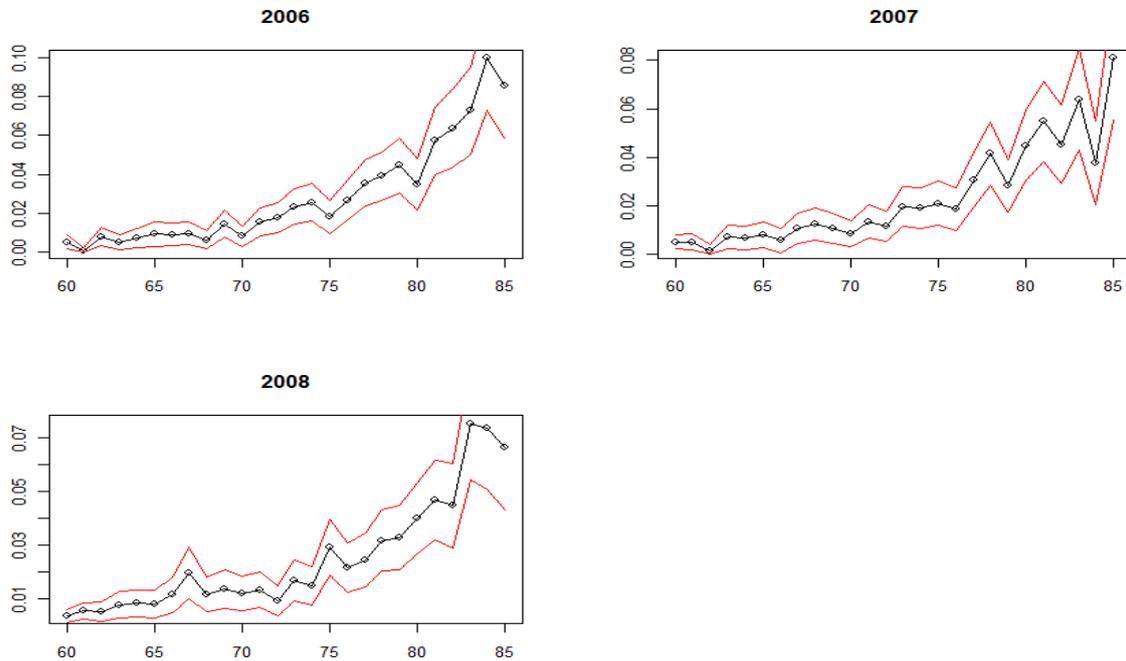


Figure 8 : Estimateur de Kaplan-Meier avec intervalle de confiance pour les hommes

Les années 1990 à 2005 sont présentés en annexe 2.

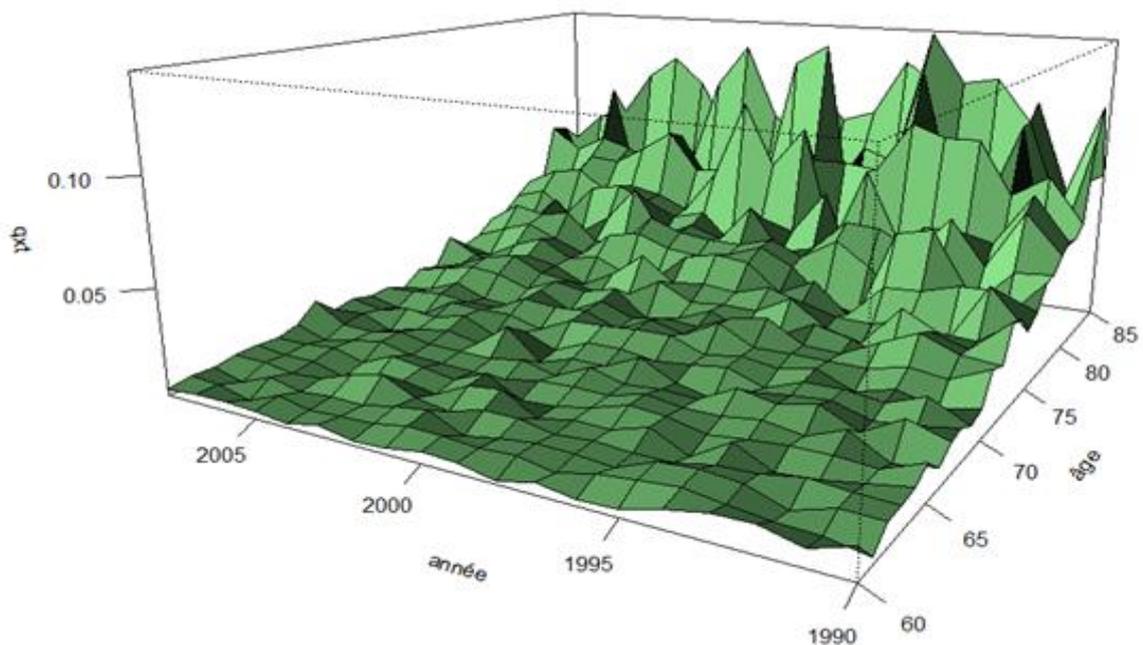


Figure 9 : Quotients de mortalité bruts pour les hommes

Les quotients de la population féminine sont les suivants :

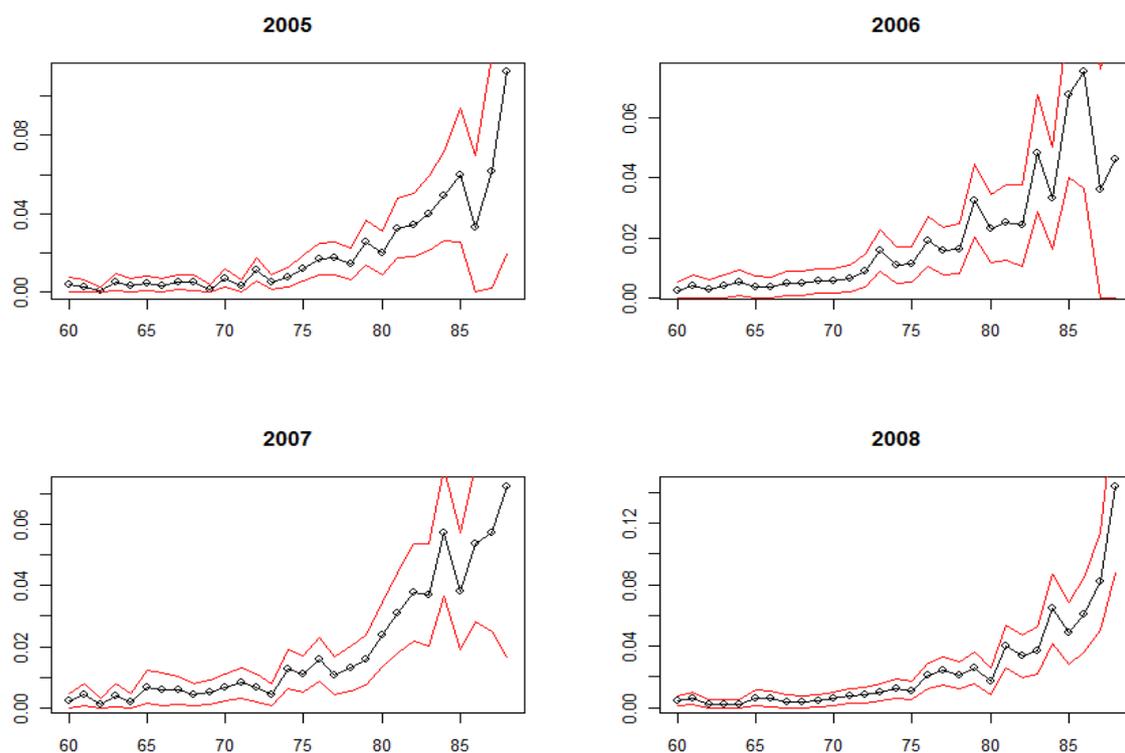


Figure 10 : Estimateur de Kaplan-Meier avec intervalle de confiance pour les femmes

Les années 1997 à 2004 sont présentés en annexe 2.

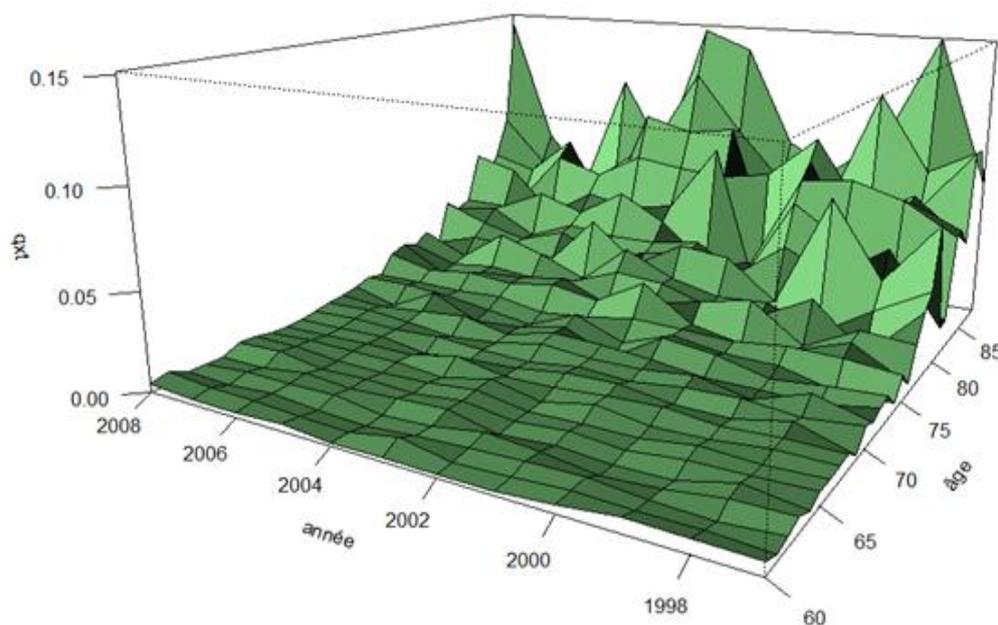


Figure 11 : Quotients de mortalité bruts pour les femmes

Nous allons maintenant vérifier la compatibilité de nos données initiales avec nos données estimées en comparant le nombre de décès réels et le nombre de décès attendus par le modèle

de Kaplan-Meier. Le premier graphique représente les décès survenus dans la population masculine et le second, les décès survenus dans la population féminine.

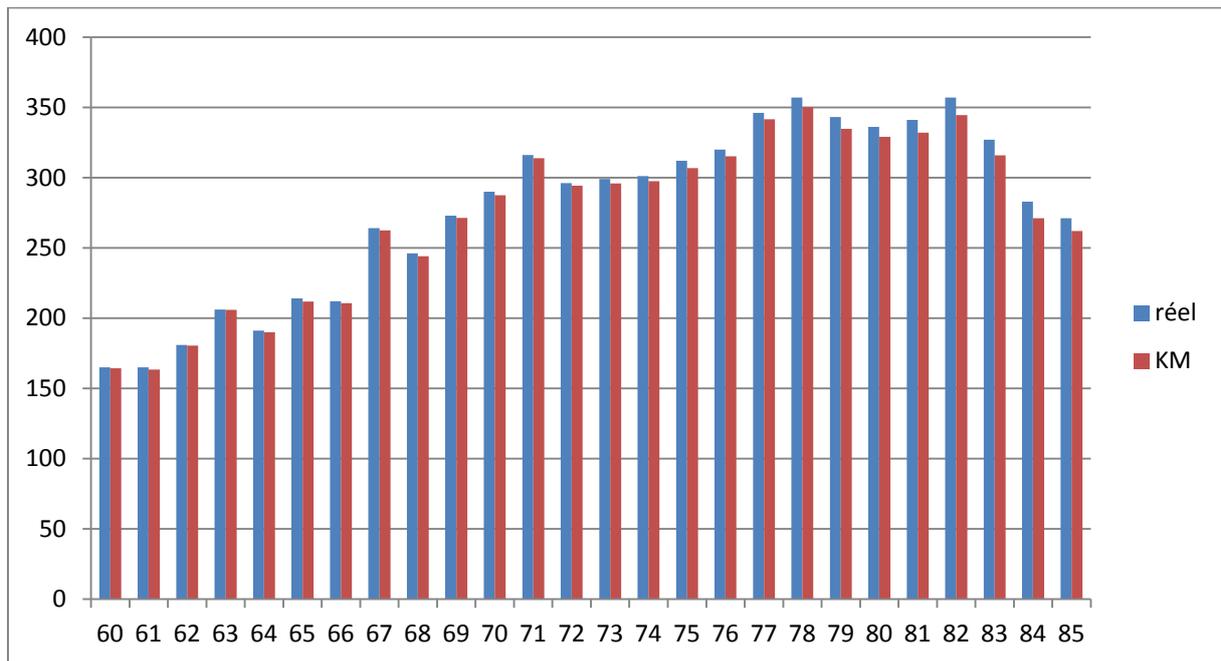


Figure 12 : Comparaison des décès du portefeuille et des décès obtenus avec l'estimateur de Kaplan-Meier pour les hommes

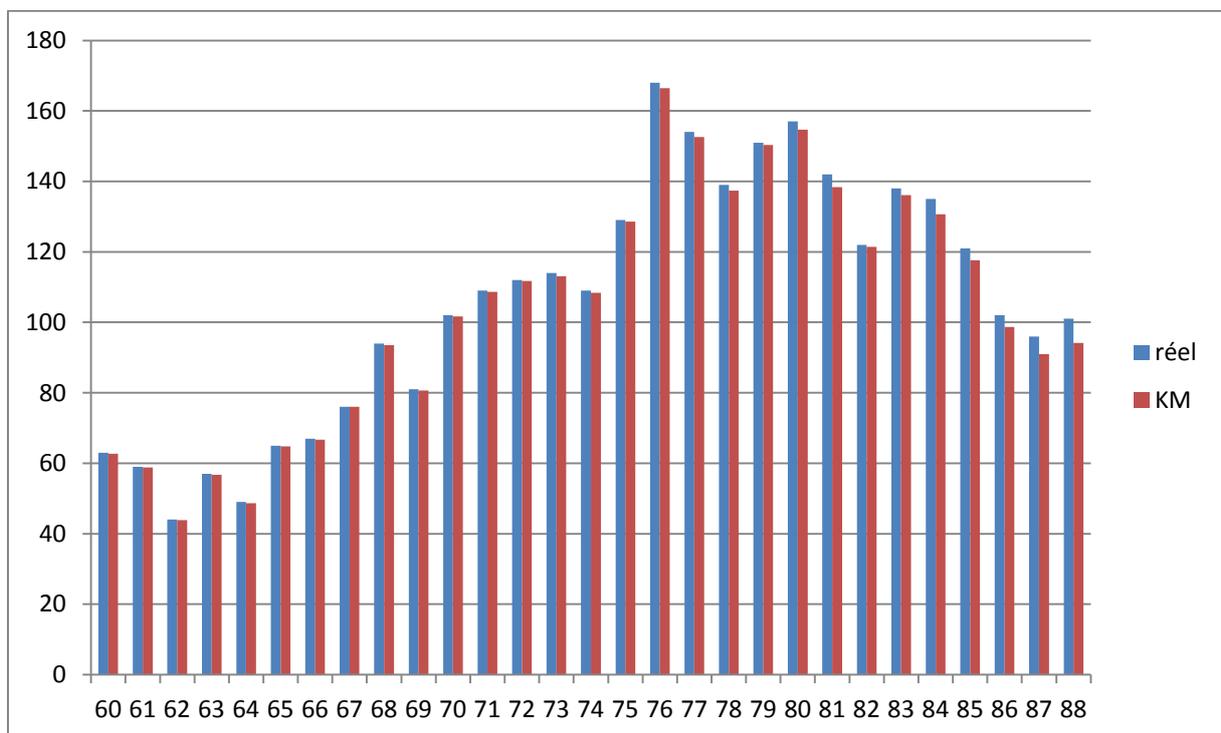


Figure 13 : Comparaison des décès du portefeuille et des décès obtenus avec l'estimateur de Kaplan-Meier pour les femmes

Contrairement à ce que l'on s'attendait, que ce soit dans la population masculine ou la population féminine, l'estimateur de Kaplan-Meier sous-estime le nombre de décès, en

particulier pour les âges élevés. Néanmoins, le biais sur l'estimation du nombre de décès est préférable dans ce sens car il correspond à une estimation prudente des quotients de mortalité.

4.2. MODELE LEE-CARTER

Le modèle de Lee-Carter⁴ est généralement utilisé sur des données à l'échelle d'un pays. Nous allons tout de même l'utiliser pour voir comment il réagit sur un échantillon plus réduit.

4.2.1. LE MODELE

En 1825, Gompertz observe une évolution exponentielle des taux instantanés de mortalité. Il propose donc le modèle suivant :

$$\ln \mu_x = ax + b$$

En généralisant ce modèle et en rajoutant la variable temporelle, il vient :

$$\ln \mu_{xt} = f(x, t)$$

Dans leur modèle, Lee et Carter considèrent qu'il existe une tendance générale de l'évolution de la mortalité en fonction de l'âge qui est indépendante du temps. Le modèle devient donc :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + g(x, t)$$

Et enfin, ils décident d'exprimer $g(x, t)$ en considérant qu'il y a indépendance entre la composante temps et la composante âge :

$$g(x, t) = \beta_x k_t$$

k_t s'interprète comme l'évolution de la mortalité sur toute la population indépendamment de l'âge et β_x la sensibilité à cette évolution en fonction de l'âge considéré.

Le modèle de Lee et Carter s'écrit donc :

$$\boxed{\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt}}$$

Où les erreurs ε_{xt} sont des variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées.

Avant d'estimer les paramètres, il est nécessaire de fixer des contraintes car les transformations suivantes permettent d'obtenir plusieurs solutions :

⁴ Voir LEE et CARTER [1992]

$$\begin{aligned}(\alpha_x, \beta_x, k_t) &\mapsto \left(\alpha_x, \lambda \beta_x, \frac{k_t}{\lambda} \right) \\(\alpha_x, \beta_x, k_t) &\mapsto (\alpha_x - \lambda \beta_x, \beta_x, k_t + \lambda)\end{aligned}$$

Pour que ces paramètres soient uniques, on impose en général :

$$\sum_x \beta_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_t k_t = 0$$

Afin d'estimer ces paramètres, on va chercher à minimiser la variance des erreurs. Cela revient à estimer les paramètres par la méthode des moindres carrés.

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{k}) = \arg \min \sum_{x,t} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x k_t)^2$$

On peut minimiser la fonction ci-dessus par 2 méthodes, la première faisant référence à l'analyse en composantes principales et la seconde utilisant une méthode itérative.

➤ Estimation des paramètres en composantes principales

On va dans un premier temps utiliser l'équation de la dérivée partielle pour trouver les α_x . Ensuite, pour les 2 autres paramètres, on effectuera une analyse en composantes principales. Et enfin, on réestimera les coefficients k_t pour qu'ils reflètent mieux nos données.

Etape 1 : Estimation des α_x

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \left(\sum_{y,t} \left(\ln \mu_{yt} - \alpha_y - \beta_y k_t \right)^2 \right) = -2 \sum_t \left(\ln \mu_{xt} - \alpha_x - \beta_x k_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_t \alpha_x = \sum_t \ln \mu_{xt} - \beta_x \sum_t k_t$$

$$\Leftrightarrow \alpha_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt} \Leftrightarrow \alpha_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt}$$

Ici, on remarque que le choix de $\sum_t k_t = 0$ n'est pas anodin. En effet, cette condition conduit à exprimer α_x comme la moyenne arithmétique sur le temps du logarithme des μ_{xt} .

On aurait pu retrouver ce résultat par le raisonnement suivant :

$$\frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt} - \alpha_x = \beta_x \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t k_t + \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \varepsilon_{xt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt} - \alpha_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \varepsilon_{xt}$$

Par le théorème central limite, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{t_{\max} - t_{\min} + 1}} \sum_t \varepsilon_{xt} \xrightarrow{t_{\max} - t_{\min} \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2)$$

On en déduit donc que α_x s'interprète comme la moyenne temporelle des $\ln \mu_{xt}$.

On obtient également un intervalle de confiance à 95 % donné par :

$$\left[\frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt} - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{t_{\max} - t_{\min} + 1} ; \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \ln \mu_{xt} + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \right]$$

Où $\hat{\sigma} = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min} + t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{x,t} \hat{\varepsilon}_{xt}$

On justifie l'intervalle de confiance par le lemme de Slutsky.

Etape 2 : Estimation des β_x et k_t

On pose $z_{xt} = \ln(\mu_{xt}) - \alpha_x$, le problème revient donc à minimiser $\sum_{x,t} (z_{xt} - \beta_x k_t)^2$.

On note β le vecteur des β_x , k le vecteur des k_t et Z la matrice des z_{xt} .

On va donc chercher deux vecteurs β et k tels que $Z - \beta k' \approx 0$, ainsi on va minimiser globalement chaque $z_{xt} - \beta_x k_t$, ce qui résoudra notre problème.

On va utiliser le fait que les matrices ZZ' et $Z'Z$ sont diagonalisables avec des valeurs propres réelles et positives.

On note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ les valeurs propres de $Z'Z$ associées aux vecteurs normés u_1, u_2, \dots

On a donc $Z'Z u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow (ZZ')(Z u_i) = \lambda_i (Z u_i)$

On en déduit que ZZ' a les mêmes valeurs propres que $Z'Z$ associées aux vecteurs propres

normés $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i \Rightarrow Z u_i u_i' = \sqrt{\lambda_i} v_i u_i'$ et donc $Z = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} v_i u_i'$.

En considérant que $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont négligeables devant λ_1 , on obtient $Z \approx \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1'$.

D'où $\beta k' = \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1'$.

Ce qui nous donne $\beta = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}}$ et $k = \sqrt{\lambda_1} \sum_j v_{1j} u_{1j}$. Le rapport $\frac{\lambda_1}{\sum_i \lambda_i}$ nous donne l'information

conservée par notre approximation, c'est-à-dire la part de variance qui n'est pas due à l'erreur.

On vérifie bien nos conditions imposées avec $\sum_x \beta_x = 1$ et $\sum_t k_t = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_j v_{1j} \right) \sum_l u_{1l} = 0$ car

$$\sum_t z_{xt} = 0 = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_j v_{1j} \right) v_{1n} \sum_l u_{1l} \quad \forall x \text{ avec } n \text{ correspondant à la composante d'âge } x.$$

Etape 3 : Réajustement des k_t

On note respectivement d_{xt} et e_{xt} le nombre de décès et l'exposition des assurés d'âge x au cours de l'année t .

On sait que $\mu_{xt} = \frac{d_{xt}}{e_{xt}}$. On peut donc réajuster les k_t en imposant la condition :

$$\sum_x d_{xt} = \sum_x e_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t)$$

Afin de résoudre ce problème, on utilise l'algorithme itératif de Newton-Raphson.

Ainsi, \hat{k}_t reflète bien la mortalité de chaque année. Néanmoins, ce nouvel estimateur ne respecte plus les conditions choisies, il est donc nécessaire de faire une transformation sur nos estimateurs.

On pose donc :

$$\hat{k}'_t = \hat{k}_t - \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \hat{k}_t$$

$$\hat{\alpha}'_x = \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t \hat{k}_t$$

➤ Estimation des paramètres par une méthode itérative : algorithme de Newton-Raphson

Il est également possible de passer par la méthode de Newton-Raphson pour estimer tous les paramètres.

Par cette méthode, en notant i l'indice de l'itération, on a :

$$\hat{\alpha}_x^{(i+1)} = \hat{\alpha}_x^{(i)} + \frac{\sum_t (\ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x^{(i)} - \hat{\beta}_x^{(i)} k_t^{(i)})}{t_{\max} - t_{\min} + 1}$$

$$\hat{k}_t^{(i+1)} = \hat{k}_t^{(i)} + \frac{\sum_x \hat{\beta}_x^{(i)} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x^{(i+1)} - \hat{\beta}_x^{(i)} k_t^{(i)})}{\sum_x (\hat{\beta}_x^{(i)})^2}$$

$$\hat{\beta}_x^{(i+1)} = \hat{\beta}_x^{(i)} + \frac{\sum_x \hat{k}_t^{(i+1)} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x^{(i+1)} - \hat{\beta}_x^{(i)} k_t^{(i+1)})}{\sum_t (\hat{k}_t^{(i+1)})^2}$$

A ce stade, il est nécessaire de réajuster nos estimateurs afin qu'ils respectent les contraintes imposées par notre modèle.

En posant $\bar{\beta} = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min} + 1} \sum_x \beta_x$ et $\bar{k} = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_t k_t$, on obtient :

$$\hat{\alpha}'_x = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{k}$$

$$\hat{\beta}'_x = \frac{\hat{\beta}_x}{\bar{\beta}}$$

$$\hat{k}'_t = (\hat{k}_t - \bar{k}) \bar{\beta}$$

On peut ensuite réajuster les k_t de la même façon que dans la méthode précédente.

4.2.2. AJUSTEMENT DU MODELE AUX DONNEES

La méthode décrite précédemment va être mise en œuvre sur la base des taux bruts construits avec la méthode de Kaplan-Meier pour la population des hommes.

➤ Estimation des paramètres

Le taux d'inertie, en ajustant les paramètres de Lee-Carter par la méthode en composantes principales, est de 0,24. Ce ratio est obtenu en effectuant le produit de la valeur propre la plus élevée de la matrice par la somme des valeurs propres. Cette méthode est donc trop imprécise, il est donc nécessaire d'avoir recours à un algorithme de type Newton-Raphson.

Après estimation à l'aide de cette méthode, nous obtenons les paramètres suivants :

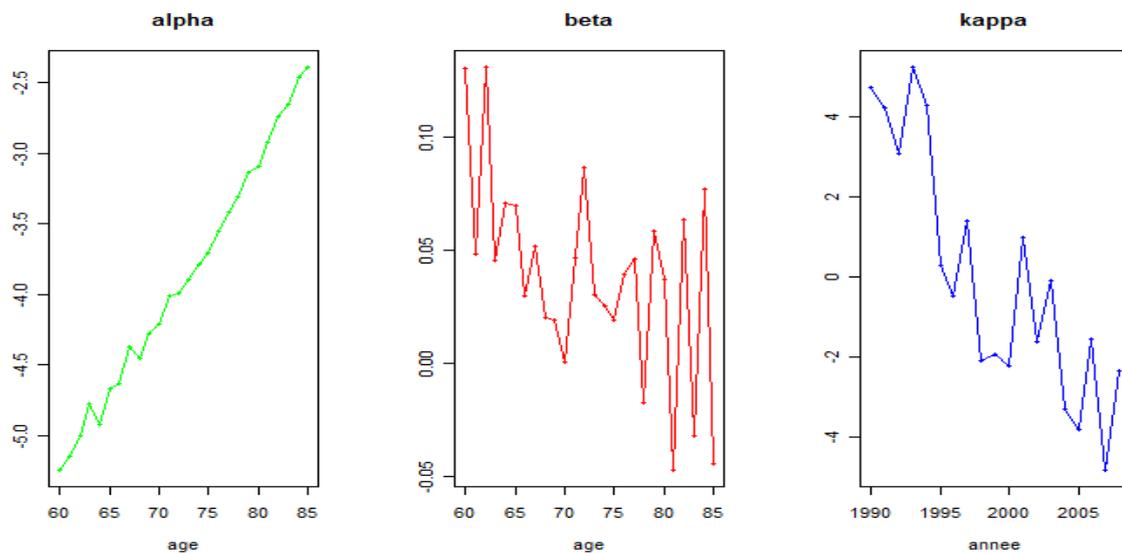


Figure 14 : Coefficients ajustés par le modèle de Lee-Carter

On remarque une grande instabilité dans la série *beta*. Le modèle ajusté est le suivant :

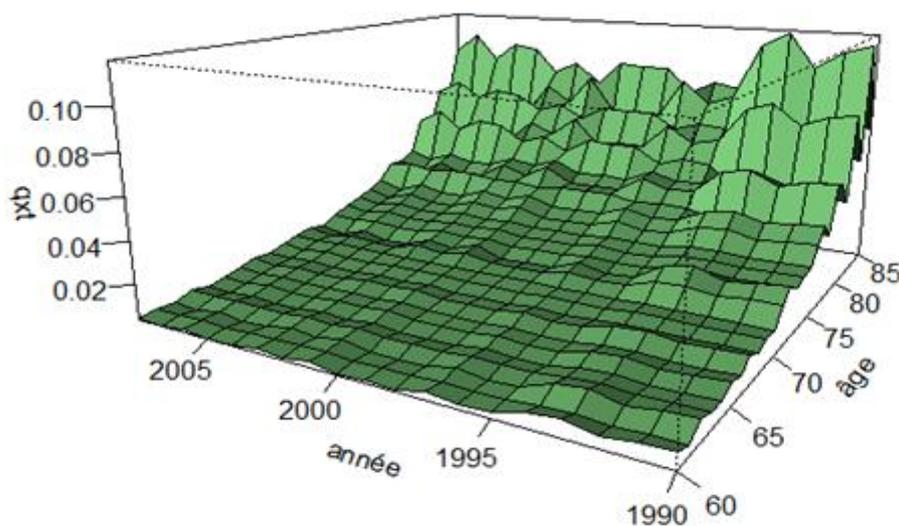


Figure 15 : Taux instantanés ajustés par le modèle de Lee-Carter

En l'état actuel, la surparamétrisation du modèle de Lee-Carter rend la capacité prédictive du modèle complètement nulle. En effet, si l'on projette le coefficient $kappa$ par simple régression linéaire, on obtiendra une surface de la forme suivante :

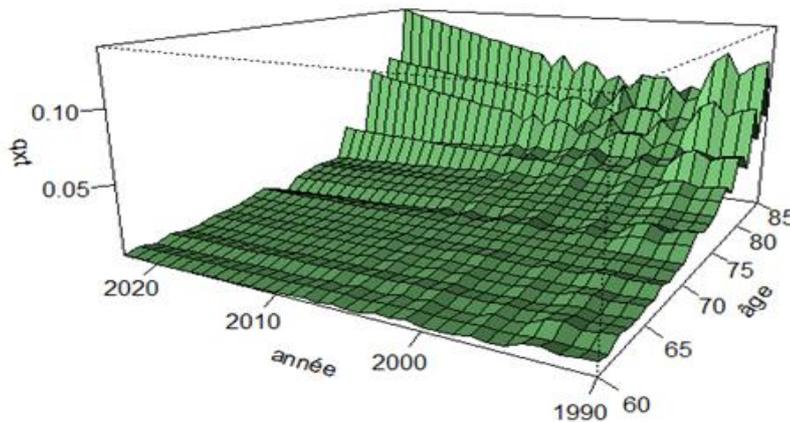


Figure 16 : Quotients de mortalité projetés

Sur des prédictions à 15 ans, l'hétérogénéité du facteur $beta$ induit une trop grande variation du comportement d'un âge à l'autre face à l'évolution de la durée de vie humaine. D'autant plus que le paramètre peut être alternativement positif et négatif.

➤ **Lissage de la série $beta$**

Il est donc nécessaire de lisser ce paramètre afin de rendre sa capacité prédictive au modèle. On va chercher à modéliser la série $beta$ par un ajustement polynômial. La forme qui convient le mieux est un polynôme de degré 2 selon le critère AIC et la contrainte $\beta_x \geq 0 \forall x$. On obtient donc l'ajustement suivant :

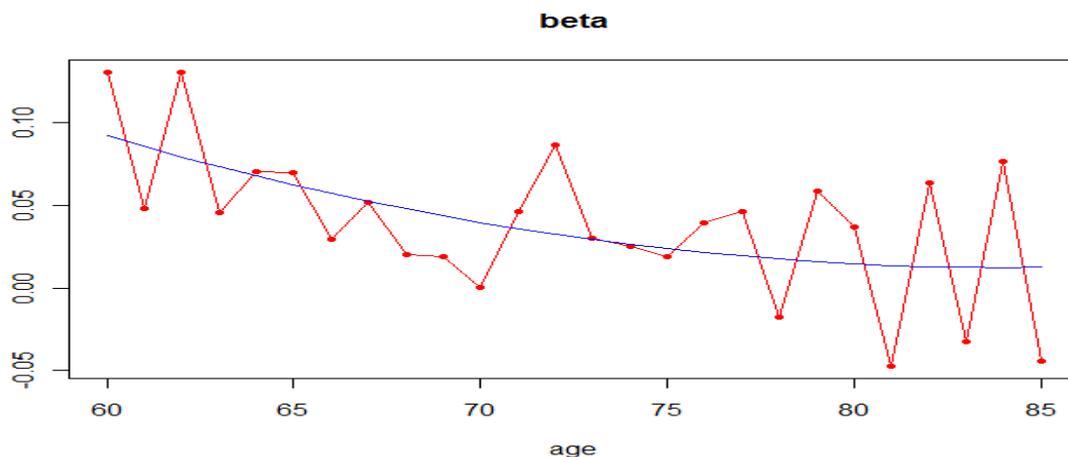


Figure 17 : Lissage de la série $beta$

➤ **Modélisation de la série $kappa$**

Lors de la modélisation d'une série temporelle, la méthodologie de Box et Jenkins est couramment utilisée. Cette méthode permet de modéliser les séries temporelles univariées au moyen d'un processus ARMA. Cette méthodologie rigoureuse se décompose en plusieurs étapes.

Etape 1 : Rendre la série stationnaire

Une série est considérée comme stationnaire si son espérance et sa variance ne dépendent pas du temps. Pour obtenir ce résultat, il est nécessaire de différencier la série afin d'éliminer sa tendance et/ou sa saisonnalité, et d'effectuer une transformation sur la série dans le but de stabiliser la variance.

Dans notre étude, nous avons une série avec tendance mais qui ne présente pas de saisonnalité et dont la variance est stable dans le temps.

Après avoir différencié la série une première fois, on utilise le test de KPSS qui suppose que la série est stationnaire. Nous obtenons une p-value supérieure à 0,1, on n'écarte donc pas l'hypothèse de stationnarité. En complément à ce test, on effectue tout de même le test de Dickey-Fuller Augmenté, qui avec une p-value de 0,1112 ne rejette pas l'hypothèse de non stationnarité. Nous n'en tiendrons pas rigueur et nous supposons que la série est stationnaire. Une série stationnaire à l'ordre 1 s'interprète par un ARIMA(.,1,.).

Etape 2 : Modélisation de la série

Il est admis que tout processus stationnaire peut être modélisé par des modèles AR(p), MA(q) ou ARMA(p,q). Pour déterminer l'ordre p et q, on utilise le graphique des auto-corrélations qui nous renseigne sur l'ordre de q et le graphique des auto-corrélations partielles qui nous renseigne sur l'ordre de p.

Les diagrammes d'auto-corrélation (ACF) et d'auto-corrélation partielle (PACF) des résidus sont les suivants :

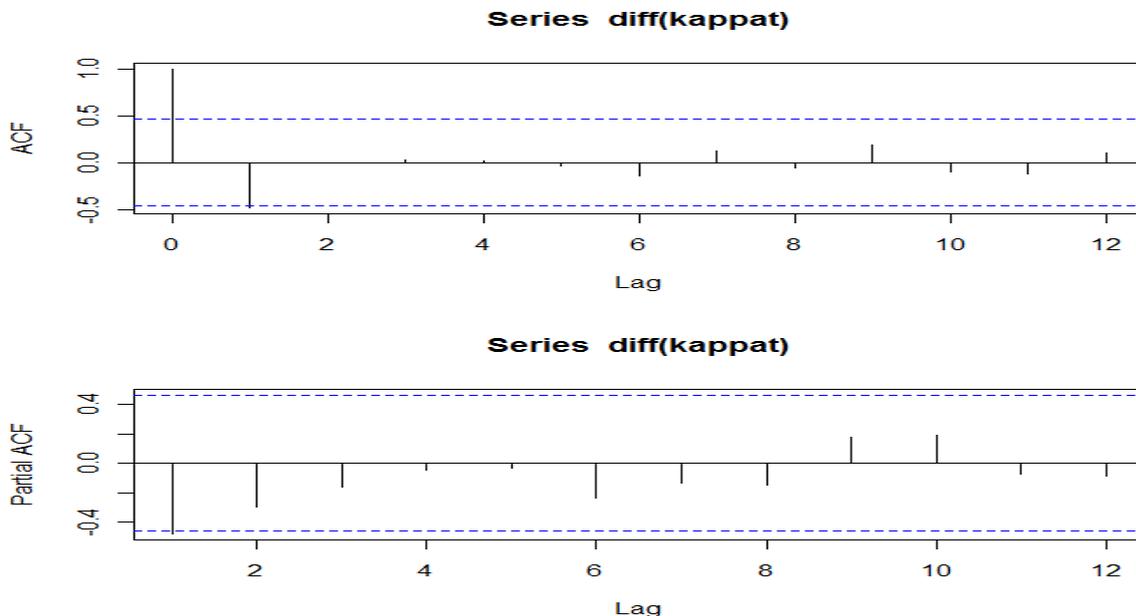


Figure 18 : Diagrammes ACF et PACF de la série kappa

A la vue de ces auto-corrélogrammes, on peut supposer que le modèle est un ARIMA(1,1,1), un ARIMA(1,1,0) ou un ARIMA(0,1,1). Ce résultat vient de l'analyse suivante :

- le diagramme ACF sort de l'intervalle de confiance à l'ordre 1 (l'ordre 0 est normal), ce constat suggère un MA(1) (ARIMA(.,.,1)) ;

- le diagramme PACF sort de l'intervalle de confiance à l'ordre 1, ce constat suggère un AR(1) (ARIMA(1, . , .)).

En considérant le critère AIC, nous sélectionnons le modèle ARIMA(0,1,1).

Etape 3 : Estimation du modèle

Dans cette étape, une fois que l'on a déterminé l'ordre des processus AR(p) et MA(q), il ne reste qu'à estimer les coefficients du modèle.

Nous estimons tout simplement les paramètres à l'aide de la fonction ARIMA de R.

Etape 4 : Projection de la série

La projection de la série par la fonction *forecast* sous R nous donne les résultats suivants :

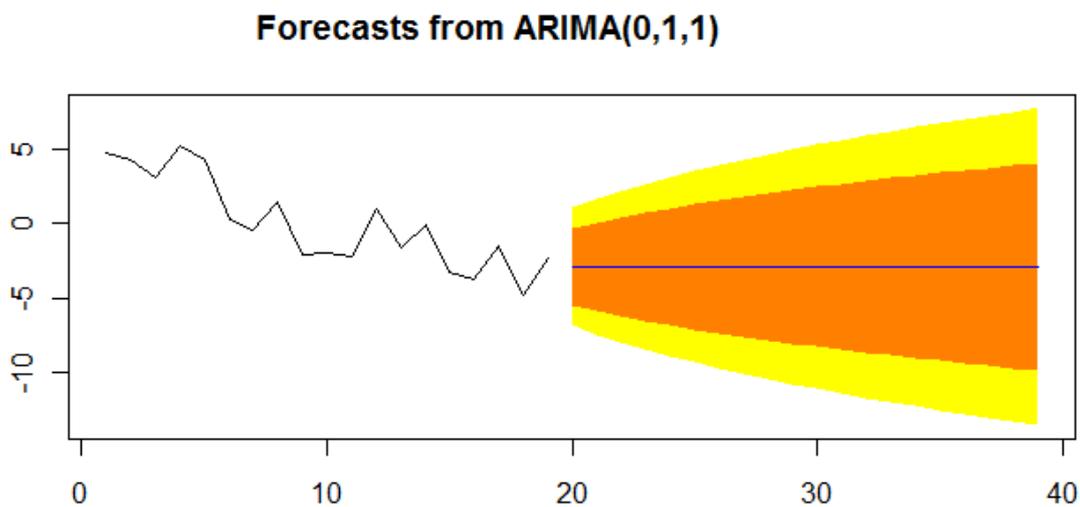


Figure 19 : Projections de la série kappa selon un ARIMA(0,1,1)

Le modèle semble mal ajusté. En effet, les projections ne prennent pas en compte la tendance. Pour être fiable, cette méthodologie doit s'appuyer sur au moins une cinquantaine de données, or ici, nous n'en n'avons qu'une vingtaine.

Pour remédier à ce problème, nous allons forcer le modèle et inclure une tendance linéaire dans le modèle ARIMA. Notre nouveau modèle s'écrit :

$$k_t = at + b + \varepsilon_t$$

Le test KPSS et le test ADF indiquent qu'on ne peut écarter les hypothèses de stationnarité et de non-stationnarité. Nous allons toutefois considérer que la série est stationnaire.

Analysons maintenant la structure de corrélation des résidus.

Comme on peut le voir sur les diagrammes suivants, les résidus ne semblent pas présenter de corrélation. Le modèle semble donc bien ajusté.

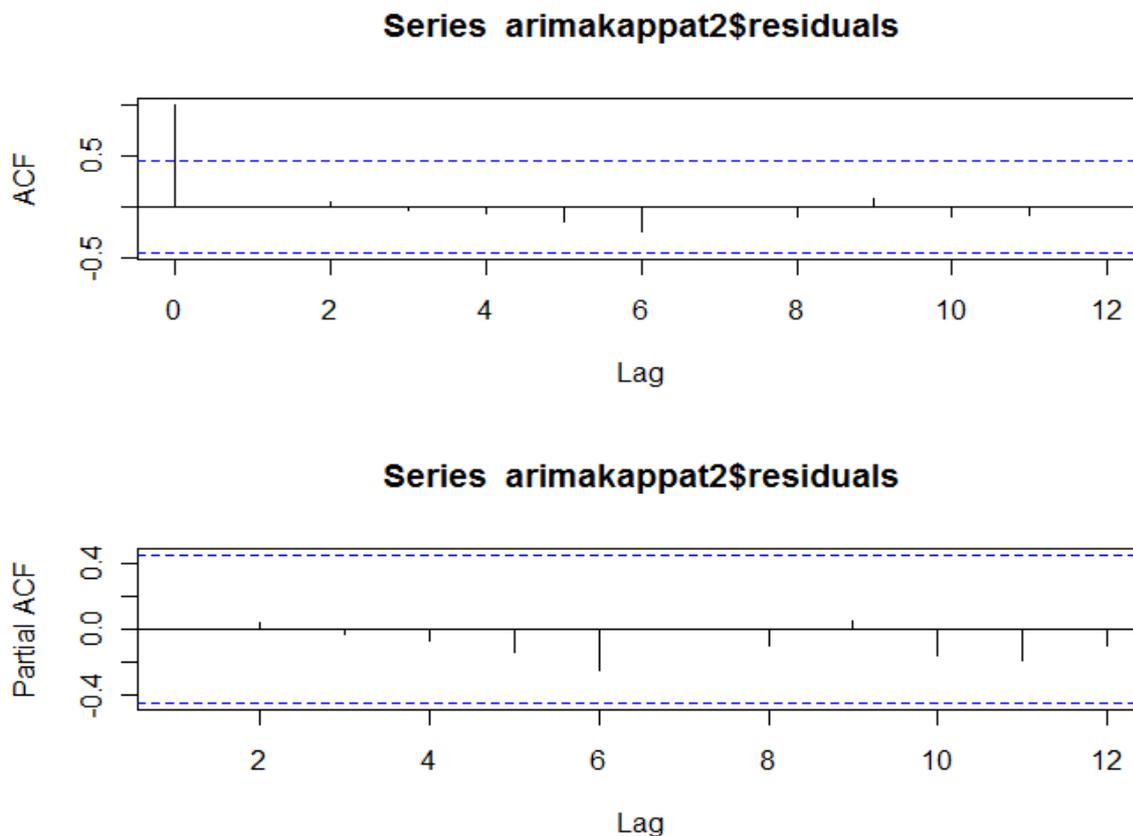


Figure 20 : ACF et PACF des résidus de la série kappa avec tendance linéaire

Le graphique suivant présente les projections de la série *kappa* avec ce nouvel ajustement :

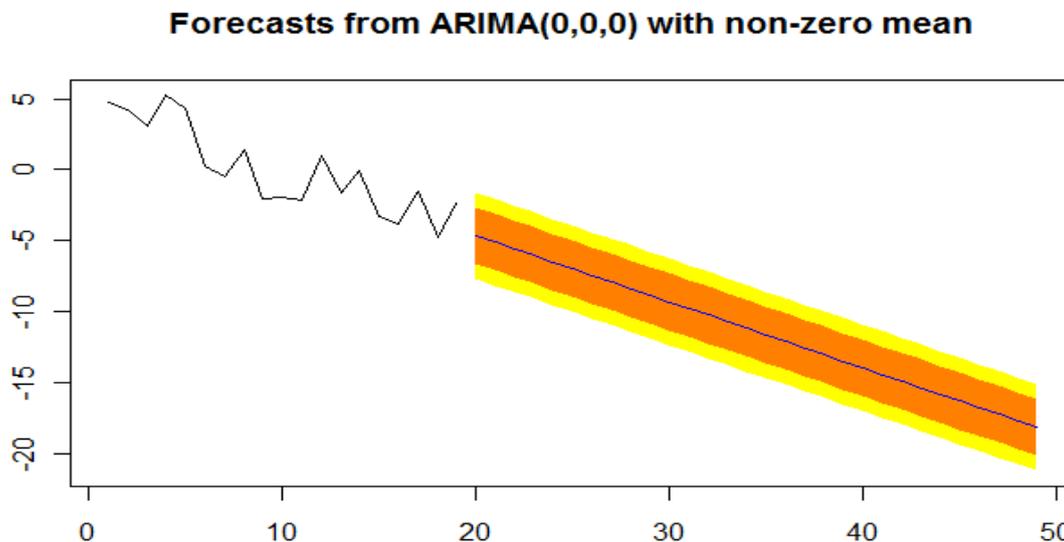


Figure 21 : Projections de la série kappa avec tendance linéaire

La forme de l'intervalle de confiance provient du modèle ajusté. Il est composé d'une tendance linéaire et d'un bruit blanc gaussien dont la variance est constante au cours du temps.

Sur la base du lissage de la série *beta* et des projections de la série *kappa*, la surface de mortalité projetée jusqu'en 2030 est la suivante :

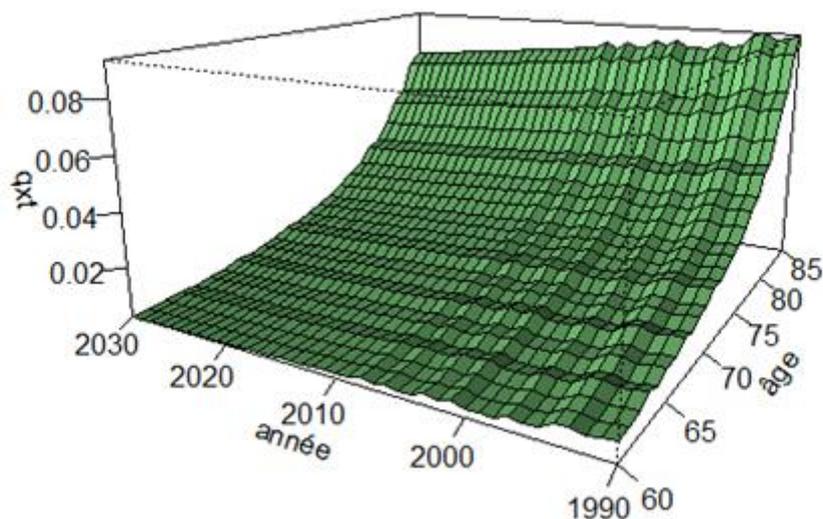


Figure 22 : Quotients de mortalité projetés après lissage des coefficients

4.2.3. AJUSTEMENT PARAMETRIQUE

Etant donnée la modélisation de la série *beta* par un polynôme de degré 2, la modélisation de la série *alpha* par une droite et la tendance linéaire de la série *alpha*, on peut modéliser le logarithme des taux bruts par un polynôme de degré 2 en x et 1 en t .

$$\ln\mu_{xt} = a_1x^2t + a_2xt + a_3t + b_1x^2 + b_2x + b_3$$

Cette méthode avait été employée par LELIER V⁵. lors de l'utilisation du modèle de Lee-Carter dans le cadre de petits échantillons. Voyons l'effet de cet ajustement sur les paramètres de Lee-Carter comparés aux précédents. Les courbes en gris présentent les précédents ajustements effectués. Le coefficient *beta* nous indique que notre nouvel ajustement a pour conséquence une plus faible sensibilité de la mortalité aux âges faibles et une plus forte aux âges élevés. En revanche, le nouvel ajustement de la série *kappa* affiche une baisse de la mortalité plus conséquente.

⁵[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/IA/sitebfa.nsf/0/F996B9C58C812708C1257396004BB743/\\$FILE/PLANCHET_LELIEUR.pdf?OpenElement](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/IA/sitebfa.nsf/0/F996B9C58C812708C1257396004BB743/$FILE/PLANCHET_LELIEUR.pdf?OpenElement)

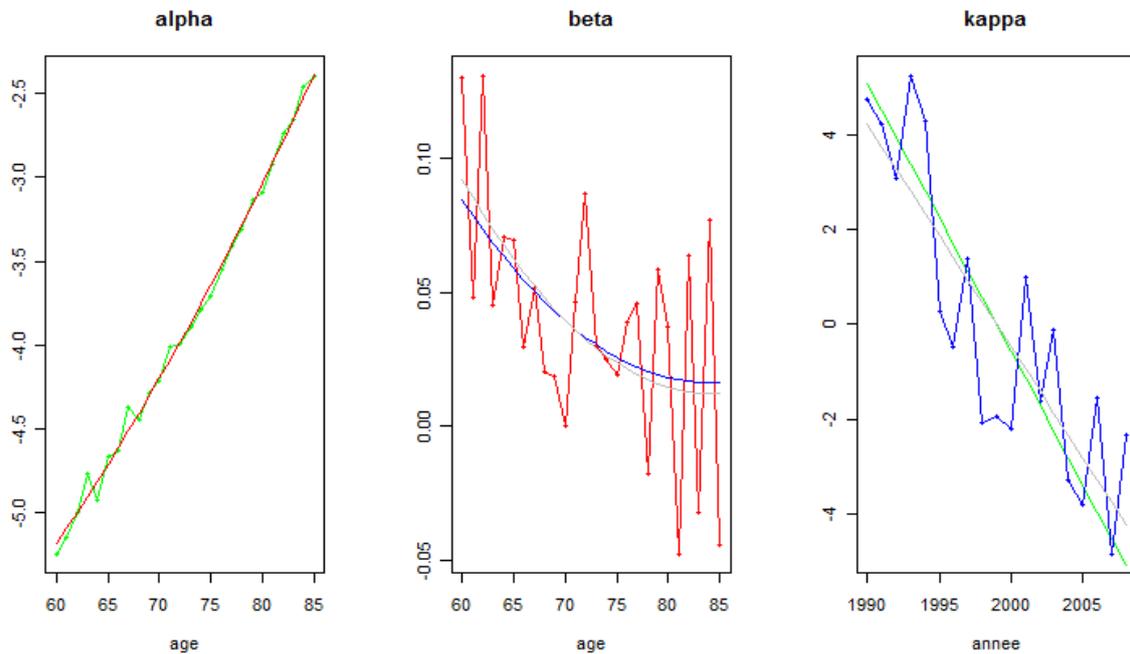


Figure 23 : Comparaison des coefficients du modèle de Lee-Carter et de l'ajustement paramétrique

Pour savoir quel ajustement est le plus prudent, nous allons comparer nos 2 courbes sur un graphique. La courbe bleue représente les projections pour l'année 2010, la courbe rouge celles pour 2020 et la courbe verte celles pour 2030. On remarque que la courbe paramétrique ajustée a toujours une valeur inférieure à celle ajustée directement avec le modèle de Lee-Carter, mis à part pour l'âge de 64 ans.

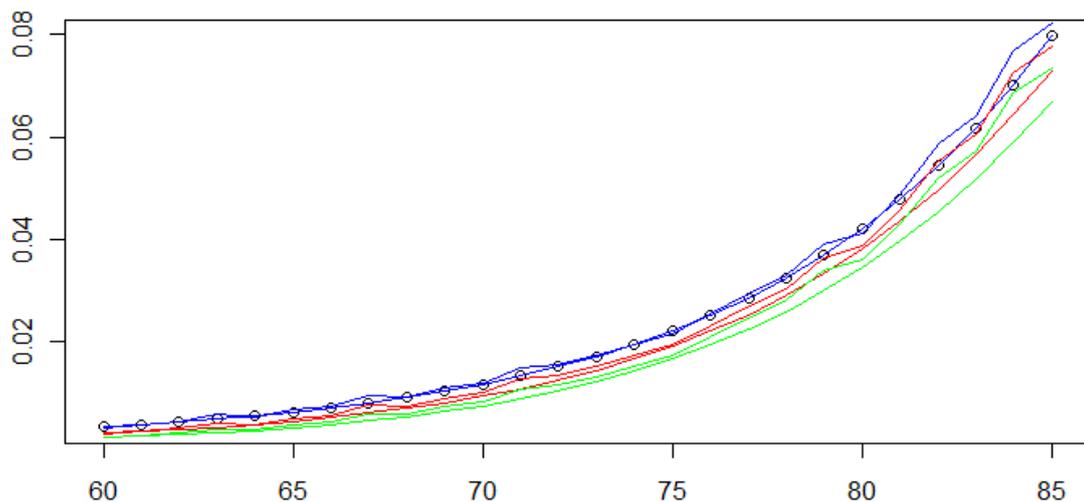


Figure 24 : Quotients de mortalité pour les années 2010, 2020 et 2030

4.3. MODELE LOGISTIQUE DECALE

Nous allons maintenant mettre en œuvre un second modèle, appelé le modèle logistique décalé, qui s'avère être un ajustement de Thatcher avec des coefficients variant avec le temps. Il a été introduit par John Bongaarts en 2004 lors de l'étude de plusieurs populations à l'échelle d'un pays.

4.3.1. DESCRIPTION DU MODELE

➤ Modèle

Modèle de Thatcher :

$$\mu(x) = \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha \exp(\beta x)} + \gamma$$

L'avantage du modèle de Thatcher par rapport au modèle de Makeham est qu'il ne surestime pas les décès pour les âges élevés. En effet, le terme au dénominateur impose que lorsque x devient grand, le quotient tend vers 1 alors que dans le modèle de Makeham, le taux croît exponentiellement avec x .

Dans son étude, John Bongaarts étudie les variations de (α, β, γ) au cours du temps et observe que le paramètre β est constant sur chaque population.

Son modèle s'écrit donc :

$$\mu(x, t) = \frac{\alpha(t) \exp(\beta x)}{1 + \alpha(t) \exp(\beta x)} + \gamma(t)$$

L'avantage de ce modèle par rapport au modèle de Lee-Carter est qu'il suppose une forme prédéfinie à la courbe sur chaque année, un peu à l'image du modèle de Brass qui utilise comme forme de courbe celle d'une référence externe. De plus, dans le modèle de Lee-Carter, l'évolution de la mortalité est contrainte à une seule composante alors qu'ici, le modèle est plus libre dans la dimension temporelle. En effet, le terme $\alpha(t)$ marque l'évolution de la mortalité liée à l'amélioration des conditions de vie qui dépend de l'âge et le paramètre $\gamma(t)$ marque l'évolution de la mortalité indépendante de l'âge, c'est-à-dire la mortalité causée par les accidents ou les épidémies par exemple. Néanmoins, on peut s'attendre pour de faibles échantillons à ce que cette liberté soit pénalisante car elle ne permet pas de définir de façon nette la tendance des 2 courbes.

Il est toutefois bon de noter que ce modèle s'appelle le modèle logistique décalé car le premier terme que l'on note μ_1 peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mu_1(x, t) = \frac{\alpha(t_0) \exp(\beta(x - S(t)))}{1 + \alpha(t_0) \exp(\beta(x - S(t)))}$$

Avec :

$$S(t) = \frac{-\log(\alpha(t)/\alpha(t_0))}{\beta}$$

On en déduit donc :

$$\mu_1(x, t) = \mu_1(x - S(t), t_0)$$

Autrement dit, faire varier le paramètre $\alpha(t)$ peut s'interpréter comme un décalage d'âges dans la courbe de mortalité.

Initialement, le modèle logistique ou modèle de Perks s'écrit :

$$\mu_x = \frac{A + B \exp(\mu x)}{1 + C \exp(\mu x)} = A + \frac{B - AC}{C} \frac{C \exp(\mu x)}{1 + C \exp(\mu x)}$$

Ainsi, le modèle de Thatcher est un cas particulier du modèle de Perks. C'est pour cela que Bongaarts propose une variante à sa méthode et propose d'introduire une constante λ devant le terme de mortalité dépendant de l'âge. Ce paramètre est utile dans le cas où la mortalité dans les grands âges ne correspondrait pas à la mortalité ajustée. Il suggère également d'effectuer juste un décalage d'âge plutôt que de projeter les courbes.

➤ Estimation des paramètres

Pour estimer les paramètres, on peut utiliser la méthode des moindres carrés simples ou la méthode des moindres carrés pondérés avec une pondération de type critère du Khi2 :

$$\min_{\alpha, \beta, \gamma} \left(\sum_x \frac{n_x}{q_x(1 - q_x)} (q_x - q_x^{Thatcher})^2 \right)$$

Par cette méthode, la projection des taux dans le futur s'effectue en 4 étapes :

1. Estimer les 3 (ou 4) paramètres sur chaque année.
2. Fixer le β (et le λ) par sa moyenne et estimer à nouveau les deux autres paramètres.
3. Dégager une tendance et extrapoler ces deux paramètres.
4. Calculer les taux futurs, avec un modèle ARIMA par exemple.

4.3.2. AJUSTEMENT AUX DONNEES

Dans cette partie, le modèle logistique décalé va être mis en œuvre sur les taux bruts ajustés avec le modèle de Kaplan-Meier. L'ajustement des paramètres va être effectué par la méthode des moindres carrés pondérés avec une pondération du Khi2.

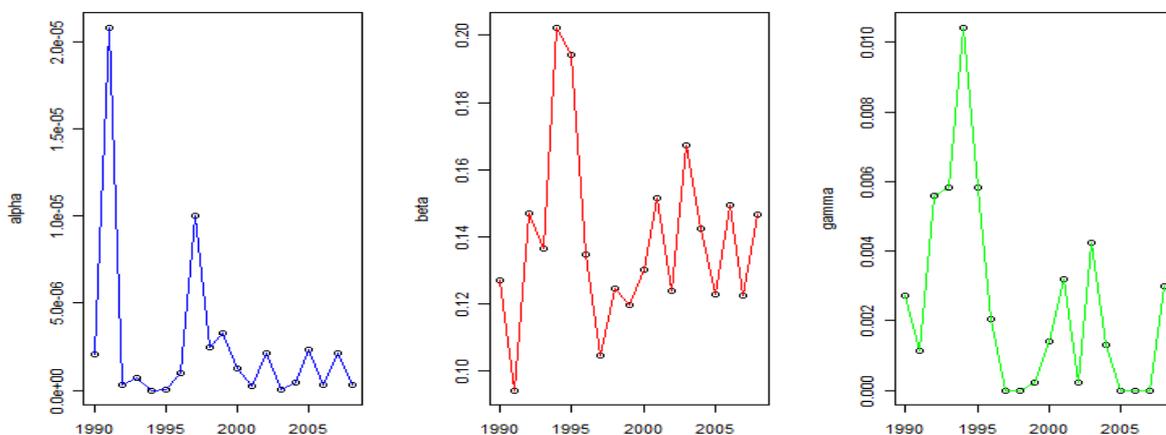


Figure 25 : Coefficients du modèle de Bongaarts

La première étape consiste à fixer la valeur du paramètre β . Il faut ensuite réajuster ces paramètres. Le résultat de ces 2 étapes est le suivant :

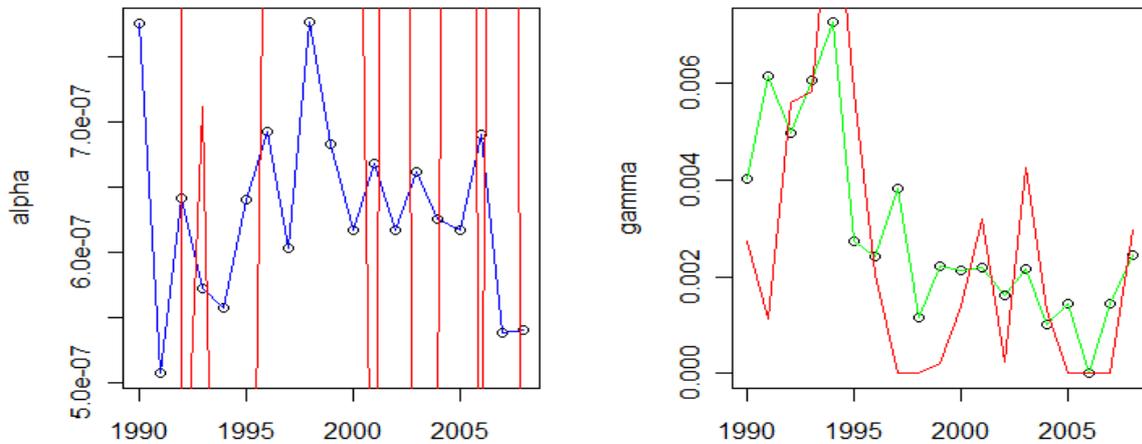


Figure 26 : Séries alpha et gamma avec beta constante

Les courbes en rouge représentent les paramètres ajustés à l'étape précédente. On remarque que le fait de fixer la valeur du paramètre β stabilise l'ajustement du paramètre α et rend la tendance plus nette du paramètre γ .

A ce stade, les courbes obtenues doivent faire l'objet de projections. Mais comme nous pouvions le craindre, introduire 2 paramètres temporels dans un modèle rend toute projection impossible car il n'y a pas de tendance nette.

On voit toutefois se dessiner une tendance exponentielle pour la série γ .

Le graphique suivant présente le logarithme de cette série :

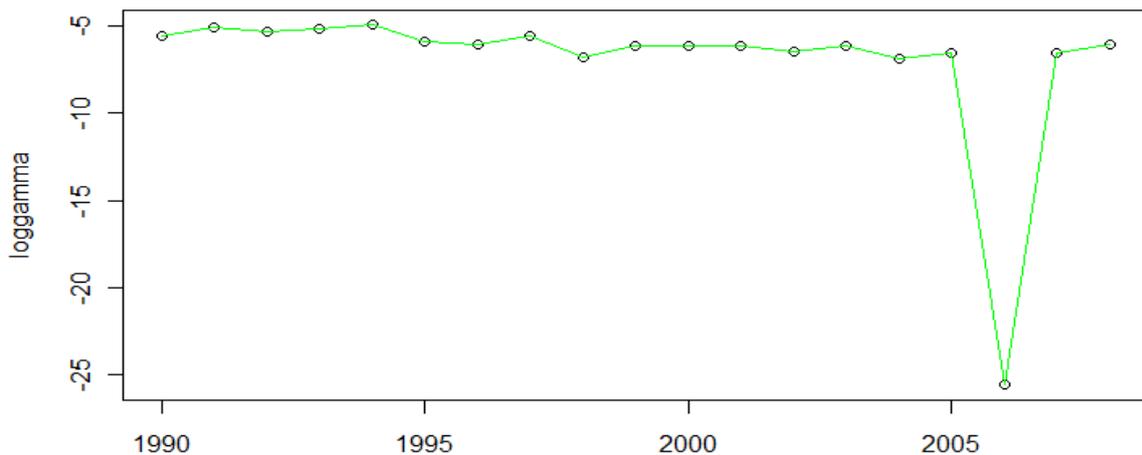


Figure 27 : Logarithme de la série gamma

La tendance linéaire de cette courbe est assez nette. Néanmoins, il y a un point aberrant en 2006, ce point ne sera pas pris en compte lors de l'ajustement de la tendance.

Le premier graphique présente l'ajustement linéaire sur le logarithme de la série *gamma*, et le second affiche l'ajustement final obtenu sur la série.

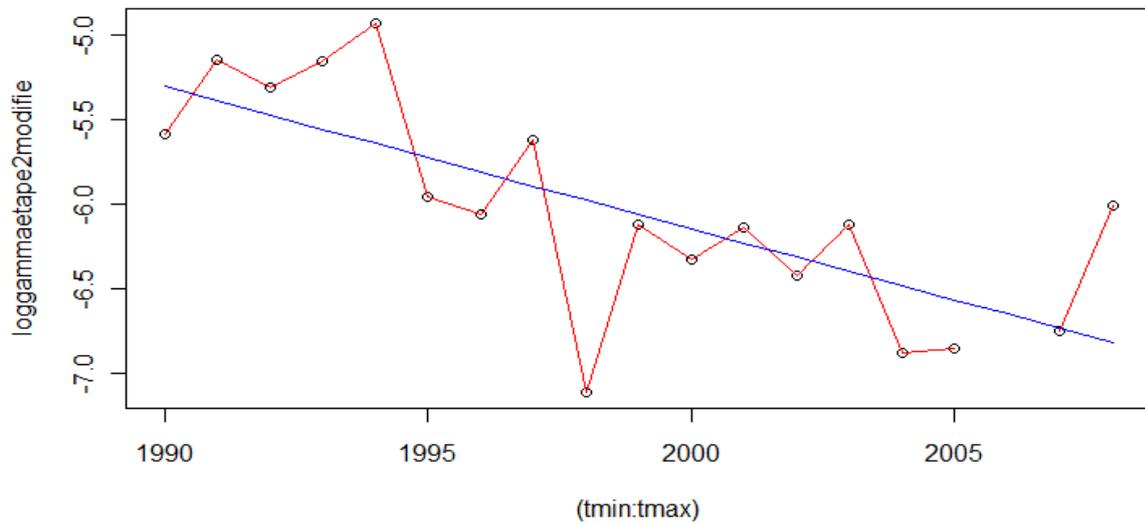


Figure 28 : Régression linéaire sur le logarithme de la série *gamma*

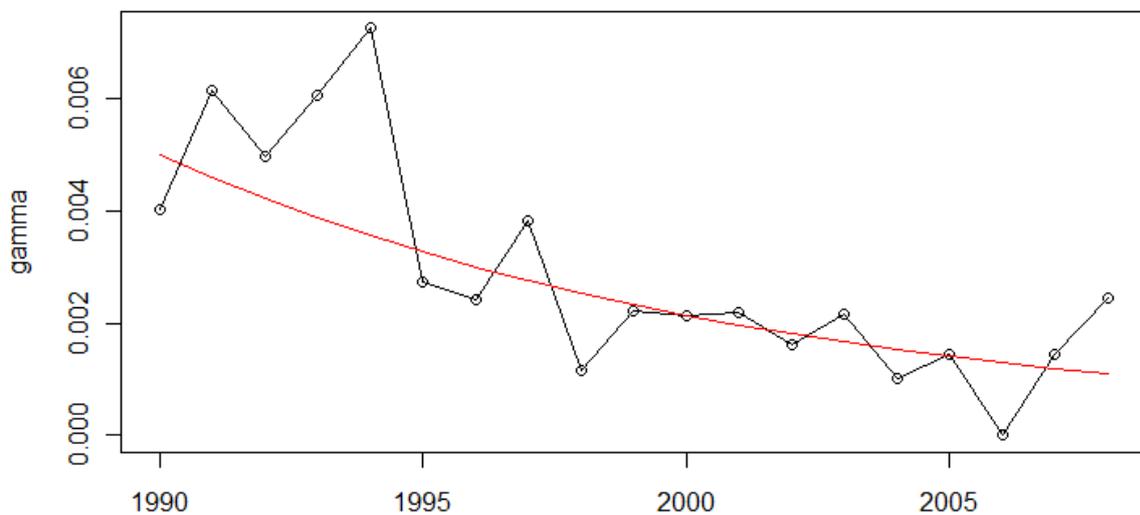


Figure 29 : Ajustement de la série *gamma*

L'incertitude autour du paramètre *gamma* supprimée, le paramètre *alpha* va être réestimé. La modélisation du paramètre *alpha* par le modèle ARIMA suggère que le logarithme de la série a une tendance linéaire entourée d'un bruit blanc. Il sera fait le choix d'un ajustement exponentiel pour éviter les valeurs négatives :

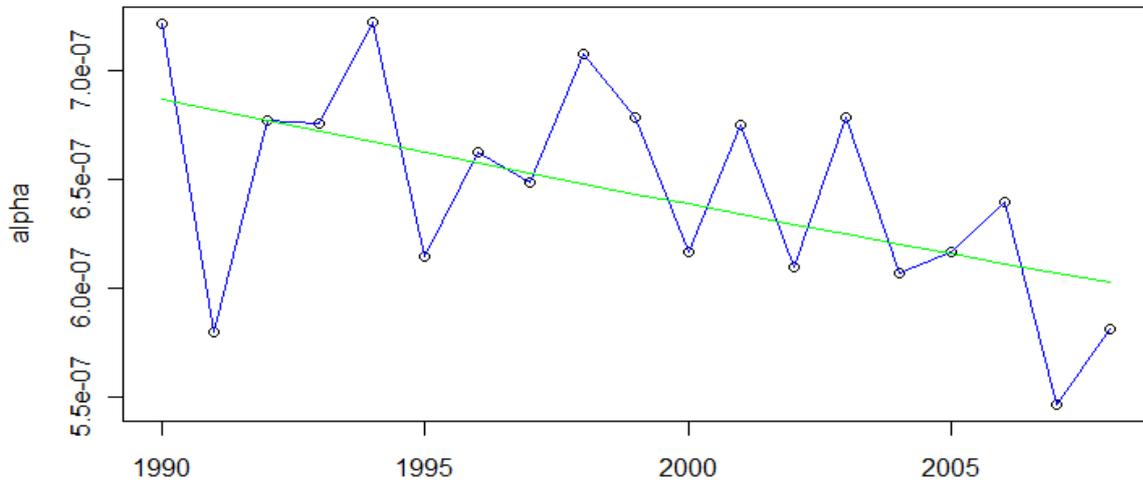


Figure 30 : Ajustement de la série alpha

4.3.3. AJUSTEMENT PARAMETRIQUE

Avec l'ajustement des séries *alpha* et *gamma* par des courbes exponentielles, nous obtenons finalement une surface décrite par l'équation suivante :

$$q_{xt} = 1 - \exp(-\exp(g_1 t + g_2)) \left(\frac{1 + \exp(a_1 t + a_2 + b(x + 1))}{1 + \exp(a_1 t + a_2 + bx)} \right)^{-\frac{1}{b}}$$

La surface obtenue en ajustant directement les 5 paramètres est la suivante :

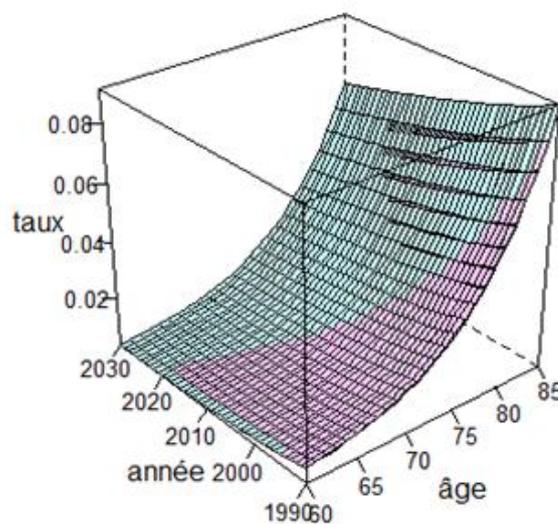


Figure 31 : Comparaison de l'ajustement de Bongarts et de l'ajustement paramétrique

La surface en rose est l'ajustement de Bongaarts avec lissage des paramètres et la surface en bleue est l'ajustement paramétrique.

La courbe ajustée directement sur le modèle de Thatcher est plus prudente sur les âges faibles dans les années les plus récentes. A partir d'un certain horizon, la courbe devient moins prudente pour tout âge.

4.4. MODELE DE BRASS

Le modèle de Brass est plus couramment appelé modèle à référence externe.

Sa mise en œuvre nécessite de s'appuyer sur des tables connues. A cet effet, il sera utilisé les tables TGH et TGF et les tables INED 1889-1997.

4.4.1. DESCRIPTION DU MODELE

Les tables de faible échantillonnage possèdent une faible capacité prospective. Les variations de la mortalité que l'on peut observer sur une telle table peuvent être dues à des erreurs d'échantillonnage, il y a donc un problème de fiabilité dans les projections.

Le modèle de Brass propose de s'appuyer sur l'évolution de la mortalité d'un plus grand groupe et de déformer cette table pour être en adéquation avec les données. La difficulté d'un tel modèle est de trouver une table de référence qui corresponde à la mortalité du groupe étudié.

Le modèle s'écrit :

$$\text{logit}(q_{xt}) = a \text{logit}(q_{xt}^{\text{réf}}) + b$$

On peut appliquer quelques variantes à ce modèle en rajoutant une deuxième table à l'ajustement, par exemple :

$$\text{logit}(q_{xt}) = a_1 \text{logit}(q_{xt}^{\text{réf},1}) + a_2 \text{logit}(q_{xt}^{\text{réf},2}) + b$$

Il est également possible d'effectuer des ajustements locaux en déterminant les paramètres âge par âge :

$$\text{logit}(q_{xt}) = a_x \text{logit}(q_{xt}^{\text{réf}}) + b_x$$

4.4.2. TABLE DE MORTALITE MASCULINE

Il va être effectué 3 ajustements sur la table brute. Les données de la population masculine vont être ajustées à la TGH, à la table INED 1889-1997 masculine et à une combinaison de ces 2 tables. L'estimation des paramètres est effectuée avec la méthode des moindres carrés pondérés avec une pondération de type Khi2. La TGH étant limitée à 1996, les données antérieures à cette date ne seront pas prises en compte pour cet ajustement.

➤ **Modèle simple**

Le graphique suivant présente les données brutes et la surface obtenue en appliquant le modèle de Brass avec en référence externe la table INED pour la population masculine.

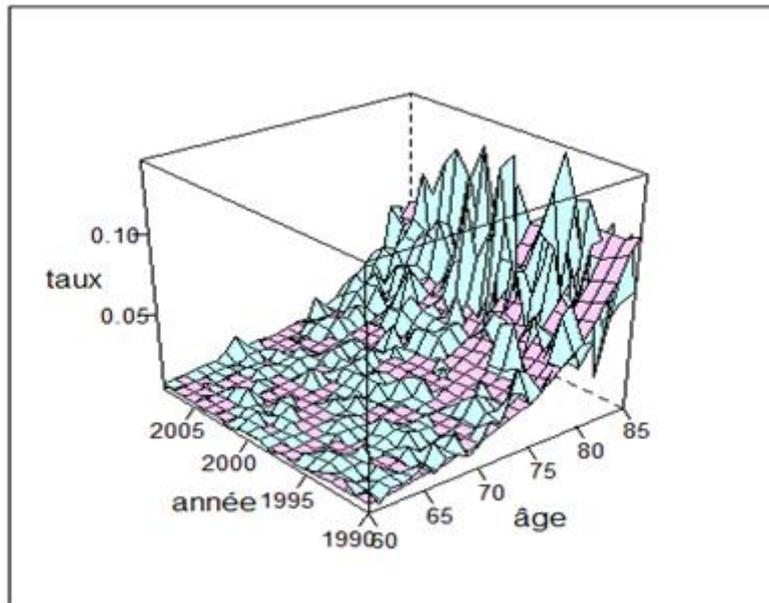


Figure 32 : Taux bruts et ajustement à la table INED

Le graphique suivant présente les données brutes et la surface obtenue en appliquant le modèle de Brass avec en référence externe la table TGH.

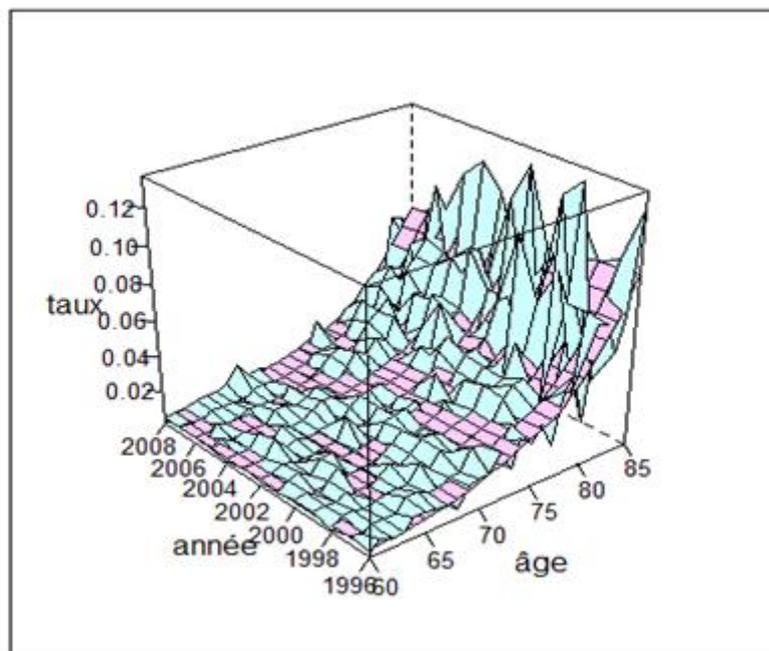


Figure 33 : Taux bruts et ajustement à la TGH

Le graphique suivant présente l'ajustement effectué avec les 2 tables.

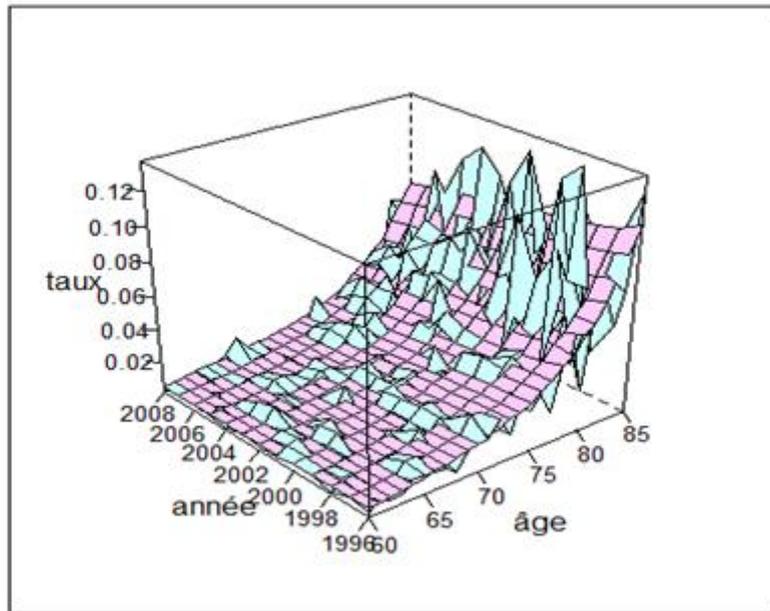


Figure 34 : Taux bruts et ajustement aux tables INED et TGH

Une première critique que l'on peut effectuer à la vue de ces premiers graphiques vient de l'ajustement avec la combinaison des 2 tables qui semble surestimer les quotients de mortalité. La surface obtenue, avec en référence externe la TGH, semble également surestimer la mortalité entre 70 et 75 ans.

Le graphique suivant présente la situation des quotients de mortalité en 2010 et en 2030. Les courbes en rouge et orange représentent l'ajustement effectué avec la TGH, les courbes bleue et verte l'ajustement effectué avec la table INED et les courbes rose et grise l'ajustement effectué avec les 2 tables.

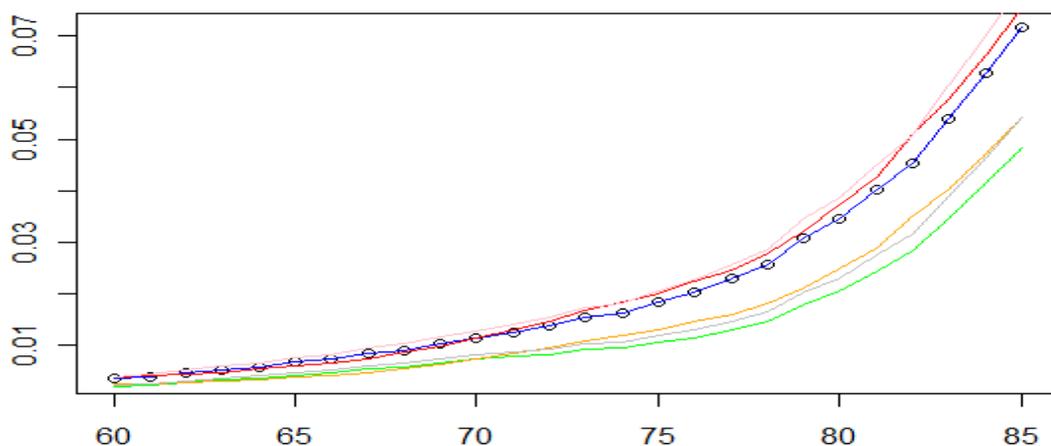


Figure 35 : Quotients de mortalité en 2010 et 2030 sur les 3 ajustements

Pour les âges inférieurs à 70 ans, il semblerait que l'ajustement effectué avec la TGH est légèrement plus prudent que celui effectué avec la table INED. Cette tendance s'inverse pour

les âges supérieurs. Pour fixer la table d'ajustement, il est nécessaire de comparer les tests du Khi2 année par année pour chaque courbe afin de voir si les ajustements sont en adéquation avec les données. L'ajustement alliant les 2 tables s'avère être le moins prudent à tout âge en 2010 et devient ensuite plus prudent que l'ajustement avec la TGH.

Analysons maintenant les ajustements avec la statistique du Khi2. Les statistiques par année obtenus sur le jeu de tables construites sont les suivants :

Tableau 21 : Brass – Statistique du Khi2 par année

Année	TGH	INED	Mix
1990		27,32	
1991		28,34	
1992		27,32	
1993		37,1	
1994		32,53	
1995		40,56	
1996	23,5	22,06	22,12
1997	22,11	19,48	20,23
1998	30,08	28,46	23,34
1999	28,95	26,87	20,91
2000	41,14	39,75	37,09
2001	43,63	40,97	30,87
2002	32	29,48	28,79
2003	43,62	43,82	30,43
2004	28,46	25,98	23,22
2005	36,53	42,21	31,86
2006	34,53	42,18	25,68
2007	27,25	28,02	27,58
2008	35,19	30,21	22,76

Globalement, la table mix est la plus proche des données. Sur les 13 années, la valeur de la statistique est 9 fois inférieure à celle des autres tables et elle n'obtient jamais la meilleure statistique. Mais cette table manque de prudence, elle ne peut être utilisée. Quant aux autres tables, globalement la table ajustée sur la table INED obtient 9 fois sur 13 une meilleure statistique. En revanche, sur les 6 années les plus récentes, c'est l'ajustement à la TGH qui est le meilleur. Bien que l'ajustement sur la table INED soit de meilleure qualité, il semblerait qu'un écart se creuse entre cet ajustement et les données. Il est donc nécessaire de se tourner vers un autre modèle

➤ **Modèle à ajustement local**

L'idée va être ici d'estimer les coefficients du modèle de Brass sur chaque âge ou sur une plage d'âges contigus. Par cette méthode, 2 nouveaux ajustements vont être effectués, un sur la TGH et l'autre sur la table INED.

Le graphique suivant présente les résultats obtenus avec un ajustement sur 1, 3, 5 et 7 classes d'âges sur la table par génération.

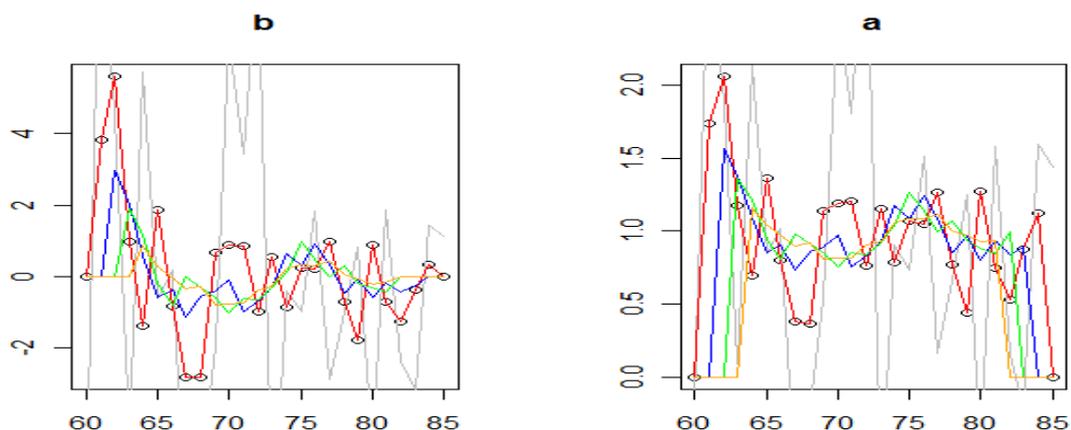


Figure 36 : Coefficients de Brass pour un ajustement local sur la TGH

Au cours de la construction des tables TGH et TGF⁶, cette méthode avait été également employée. La conclusion était qu'il existe une très forte colinéarité entre les coefficients a et b . Le modèle retenu par l'auteur est qu'il existe une relation linéaire entre ces paramètres. Nous choisissons d'ignorer cette approche et de conserver nos paramètres en l'état.

Les paramètres retenus sont les paramètres estimés sur une plage d'âge de 9 ans car la courbe (en orange) présente une certaine stabilité. Ensuite pour les âges extrêmes, on utilise les ajustements réalisés sur 7 ans, 5 ans et 3 ans.

Après avoir comparé de nouveau avec un test du Khi2, on remarque une légère amélioration de l'adéquation des données.

Le même processus va être appliqué avec la table INED mais en prenant en compte uniquement les années postérieures à 1996 (contrairement à l'ajustement effectué avec le modèle simple).

Les paramètres obtenus sont les suivants :

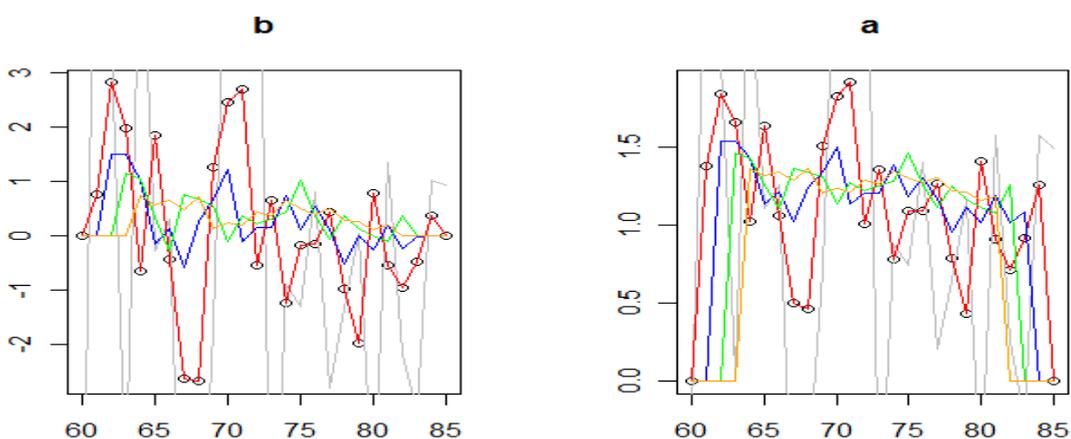


Figure 37 : Coefficients de Brass pour un ajustement local sur la table INED

⁶[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/762C8E624EE98A5EC12577C100566D11/\\$FILE/1291-04.pdf?OpenElement](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/762C8E624EE98A5EC12577C100566D11/$FILE/1291-04.pdf?OpenElement)

Nous allons maintenant effectuer un ajustement de notre table initiale sur ces 2 tables de la même façon que dans l'ajustement simple. On obtient une bonne réaction au critère du Khi2 comme on peut le voir dans le tableau suivant.

Tableau 22 : Brass local – Statistique du Khi2 par année

Année	TGH	CNED	Mix
1996	20,76	21,61	21,92
1997	19,44	19,35	19,68
1998	26,25	25,15	23,53
1999	25,41	23,68	21,62
2000	38,53	39,29	37,73
2001	38,52	37,44	31,44
2002	29,1	27,82	28,62
2003	39,51	38,15	31,59
2004	23,62	23,22	23,38
2005	32,78	36,18	30,98
2006	30,63	32,46	25,68
2007	27,2	26,09	26,99
2008	29,11	25,9	22,07

On remarque une bonne adéquation des données, en particulier pour la table Mix. Mais comme nous pouvons le voir sur le graphique suivant, cette nouvelle table, à l'image de la table construite par la première méthode semble peu prudente et surestime les quotients de mortalité.

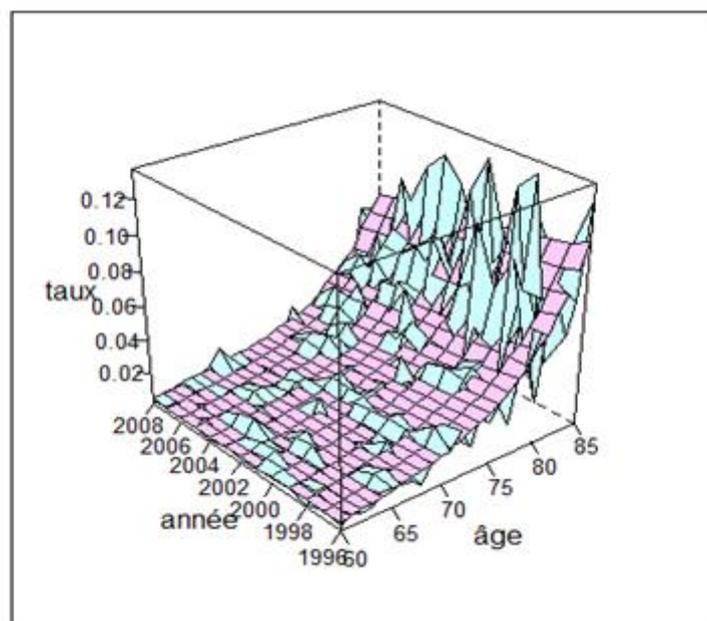


Figure 38 : Taux bruts et ajustement local aux tables INED et TGH

Nous avons construit 3 nouvelles tables, nous allons comparer les projections sur l'année 2010 et 2030. La courbe verte représente l'ajustement effectué avec la TGH, la rouge celle

avec la table INED, la bleu l'ajustement avec en référence externe ces 2 tables et la violette la table TGH.

Voici les courbes obtenues à horizon 2010 :

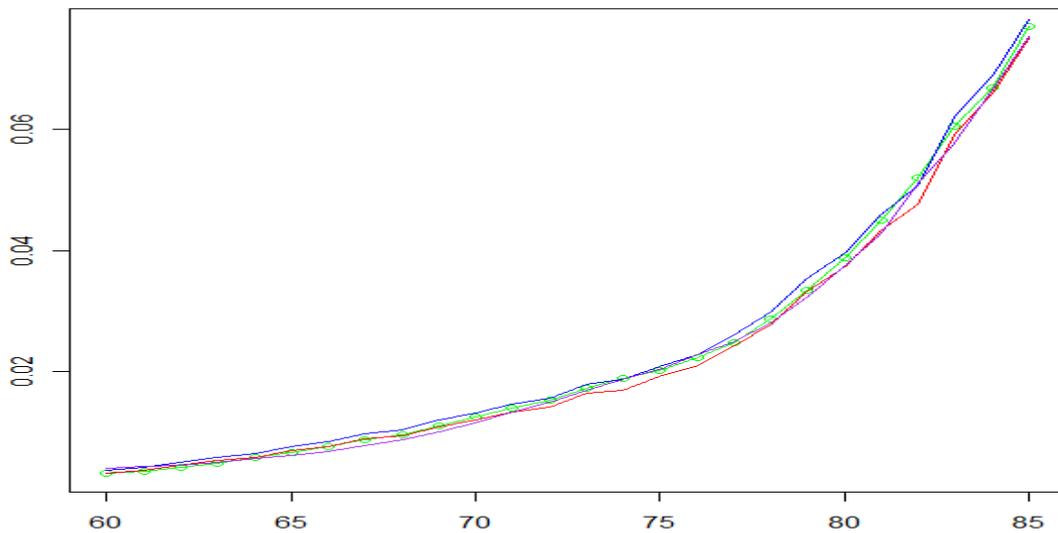


Figure 39 : Quotients de mortalité des ajustements et de la TGH en 2010

On remarque que l'ajustement local a permis en partie de déformer nos courbes de référence. L'ajustement effectué avec la TGH et la courbe INED semblent désormais ne plus s'entrecroiser et avoir une forme similaire. Ce graphique indique que quelque soit la courbe considérée, nous obtenons une mortalité supérieure à celle de la TGH pour les années allant de 63 à 71 ans.

Les courbes obtenues pour l'année 2030 sont les suivantes :

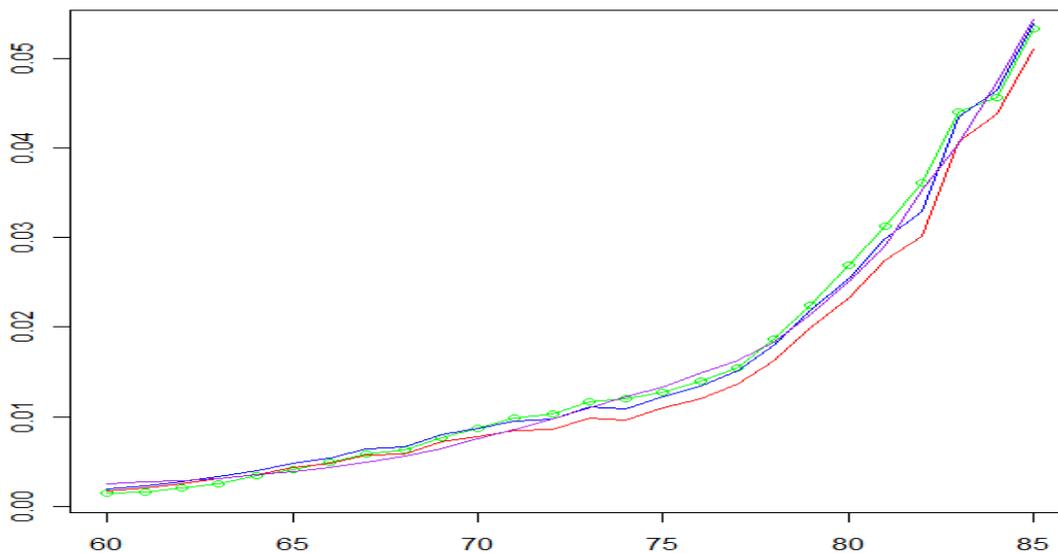


Figure 40 : Quotients de mortalité des ajustements et de la TGH en 2030

Avec ces nouveaux ajustements, nous obtenons le même scénario que précédemment. L'ajustement effectué sur la courbe TGH (en vert) semble avoir un gain d'espérance de vie plus conséquent pour les âges de moins de 67 ans par rapport à la table INED. En revanche, l'ajustement effectué avec la TGH conduit à des quotients de mortalité moins prudents en-deçà de cet âge. Il aurait donc été intéressant d'utiliser la table Mix car elle permet de confronter ces 2 visions différentes, mais la similarité entre ces 2 tables conduit à une instabilité dans les résultats.

Différents tests statistiques vont être calculés pour permettre d'évaluer les différentes tables. La colonne résidu représente la somme des résidus du modèle, la colonne Khi2 représente la valeur de la statistique du Khi2, la colonne fidélité représente la valeur de la fidélité du modèle et la colonne décès représente le nombre de décès enregistré entre les valeurs initiales et les valeurs ajustées. Initialement, nous avons 5498 décès.

Tableau 23 : Brass local – Comparaison des tables

	Résidus	Khi2	Fidélité	Décès
TGH	0,36	381	2,0426	207
INED	0,37	376	2,0582	221
Mix	-0,17	345	2,0641	-162

Ce tableau confirme l'observation graphique, la table Mix surestime le nombre de décès et, malgré les bonnes propriétés de cette table, elle est inutilisable pour le provisionnement de rentes viagères. Le choix va donc se porter entre l'ajustement avec la TGH et l'ajustement avec la table INED. Si on se fie à tous nos critères mis à part celui du Khi2, on devrait donc être amenés à choisir l'ajustement avec la table TGH. Néanmoins, nous choisirons une autre option.

➤ Ajustement final

Etant donné la différence de comportement dans les projections entre les deux tables, il est nécessaire de prendre en compte les 2 visions de ces tables dans un même modèle.

Avant de continuer, un lissage par moyenne mobile sur une plage de 3 âges va être effectué sur chacune de nos courbes. La vision en 2030 des courbes est la suivante :

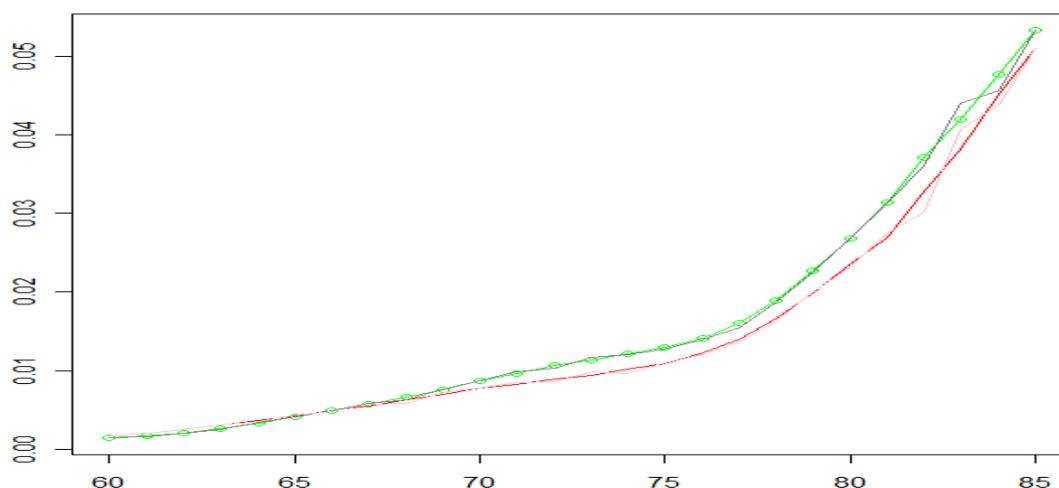


Figure 41 : Ajustements lissés aux tables INED et TGH en 2030

L'idée va être de considérer un modèle avec 2 populations mélangées. Nous nous confrontons donc à 2 populations différentes dont la mortalité n'évolue pas de la même manière. Le graphique suivant présente les 2 tables construites pour les années 1996, 2000, 2010 et 2020. En vert, on retrouve l'ajustement effectué avec la TGH et en rouge l'ajustement effectué avec la table INED.

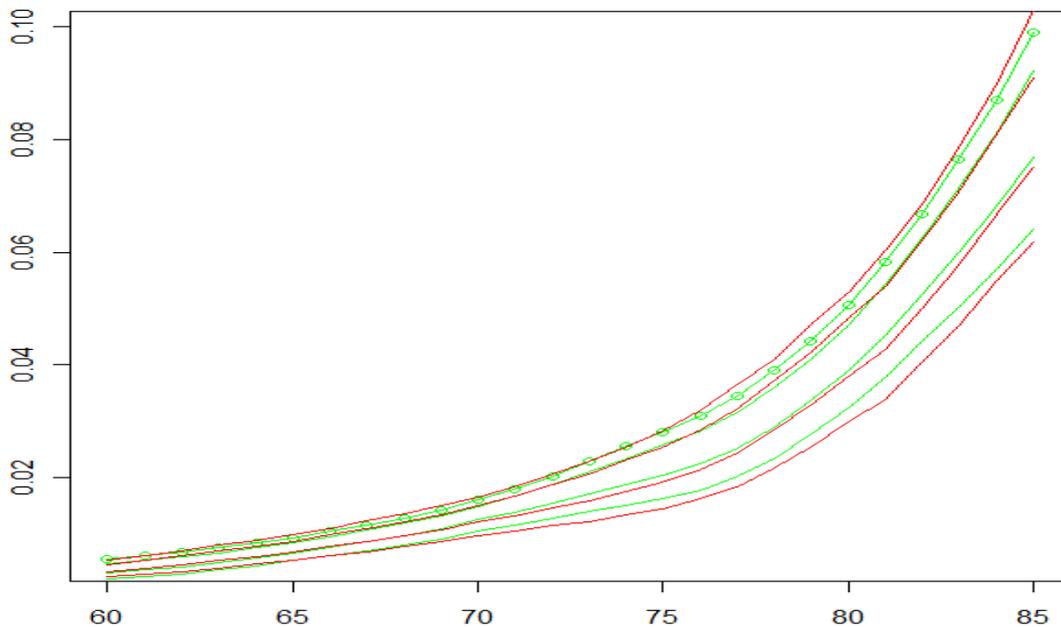


Figure 42 : Ajustements à la table INED et TGH en 1996, 2000, 2010 et 2020

Pour l'année 1996, l'ajustement est plus prudent avec la table par génération. Puis en 2000, ces courbes tendent à se confondre. Ensuite, on les voit évoluer de manière totalement différente pour les années 2010 et 2020, il y a une baisse de la mortalité bien plus conséquente avec la table INED pour les personnes âgées de plus de 70 ans.

Suite à l'échec de la construction de la table Mix, plutôt que de se tourner vers un modèle avec plusieurs paramètres, il va être considéré un modèle avec des populations mélangées.

En effet, on ne sait pas de quelle façon va évoluer la mortalité d'un assuré, cela dépend s'il appartient à la population décrite par l'ajustement effectué avec la TGH ou à la population décrite par l'ajustement effectué avec la table INED.

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient la formule suivante :

$$E[q_{xt}] = a * q_{xt}^{TGH} + (1 - a) * q_{xt}^{INED}$$

Où q_{xt} est la probabilité pour un individu de décéder à l'âge x au cours de l'année t , q_{xt}^{TGH} est la probabilité de décès conditionnellement au fait que son gain d'espérance de vie soit similaire à celui de la table TGH, q_{xt}^{INED} est la probabilité de décès conditionnellement au fait que son gain d'espérance de vie soit similaire à celui de la table INED, et a peut s'interpréter comme la probabilité pour l'individu d'appartenir au premier groupe et donc $1-a$ est sa probabilité d'appartenir à l'autre groupe.

Pour déterminer ce coefficient, il va être utilisé les espérances de vie à 5 ans de notre modèle. Pour déterminer le paramètre a , le critère quadratique traditionnel va être utilisé :

$$\sum_{x,t} (e_{xt,ajusté}^5 - e_{xt,brut}^5)^2$$

Cet ajustement nous conduit à un paramètre a de l'ordre de 95 %. Autrement dit, l'ajustement effectué avec la TGH est le mieux adapté à nos données.

Le graphique suivant montre l'espérance de vie résiduelle à 5 ans moyenne sur les années 1996 à 2008 pour chaque âge. La courbe en noire représente les données brutes et la courbe en rouge les données ajustées.

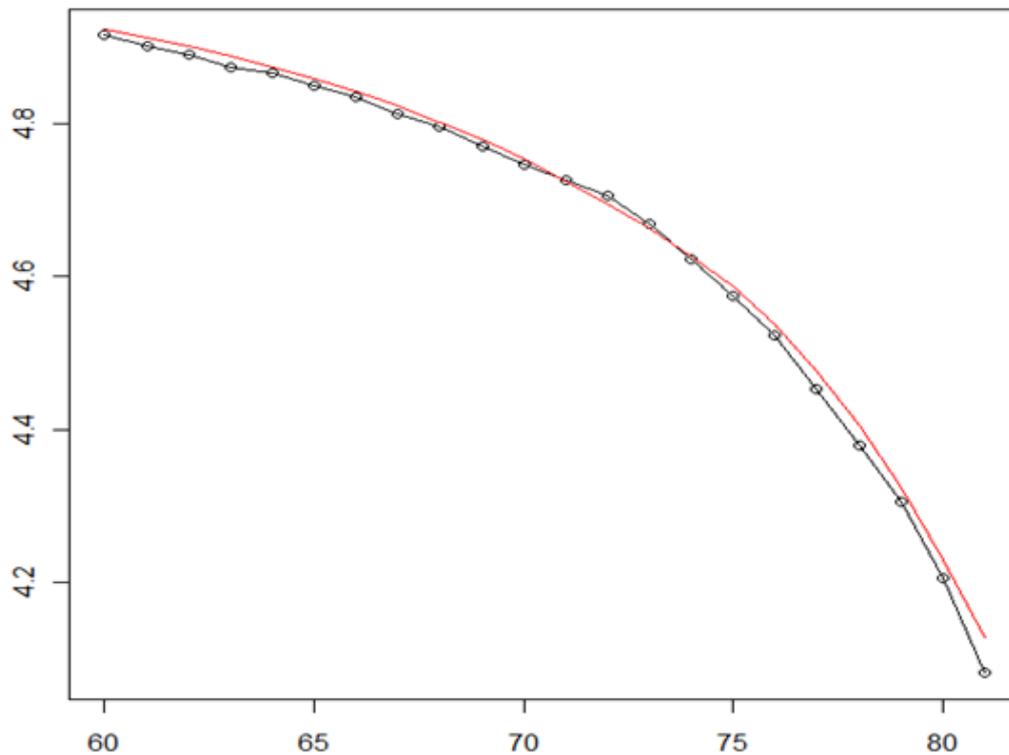


Figure 43 : Espérance de vie toutes années confondues

Globalement, la table construite est plus prudente que les données brutes, mis à part entre 71 et 73 ans. Pour les âges les plus élevés, la différence devient beaucoup plus importante. En effet, à 81 ans on a un écart moyen entre les espérances de vie résiduelles de 0,05. Cela signifie que sur 5 ans, pour une rente annuelle de 1€, le modèle indique qu'une personne âgée de 81 ans devrait percevoir en moyenne 4,13€ alors que réellement, elle a perçu 4,08€. Néanmoins, cet écart n'est pas significatif, l'ajustement par âges semble donc correct.

Le graphique suivant présente cette fois-ci la moyenne des espérances de vie sur les données annuelles, afin d'observer une éventuelle mauvaise estimation de l'évolution de la mortalité :

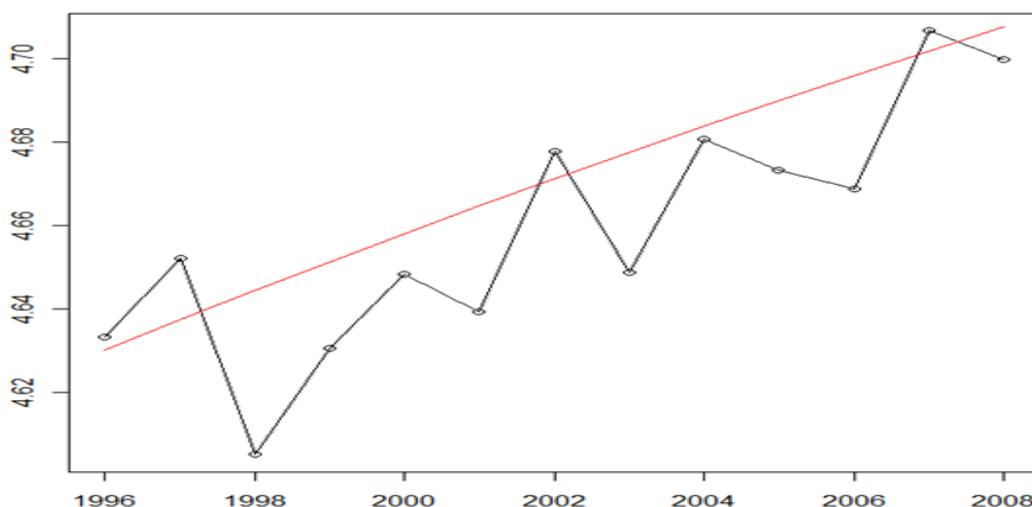


Figure 44 : Espérance de vie tous âges confondus

Ici, cette valeur peut s'interpréter de la façon suivante : si on choisit quelqu'un au hasard dans chaque année de notre étude, en moyenne combien cette personne va-t-elle coûter ?

La table construite semble être prudente par rapport aux données brutes. On note toutefois quelques années dont l'évaluation aurait été sous-estimée. Néanmoins, la prudence globale de la table est validée.

4.4.3. TABLE DE MORTALITE FEMININE

Pour construire la table de mortalité féminine, 2 ajustements vont être mis en œuvre : un ajustement par moindres carrés pondérés sur la table INED féminine et un sur la TGF. Les ajustements obtenus sont les suivants :

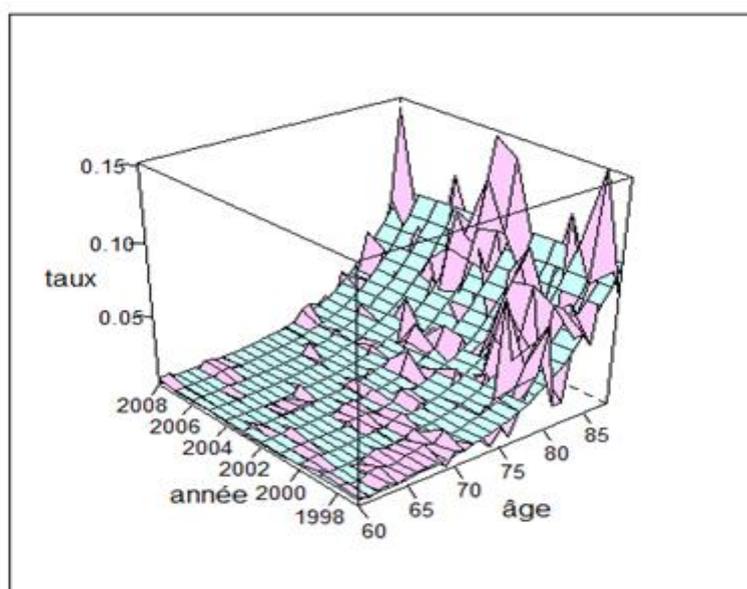


Figure 45 : Taux bruts et ajustement à la TGF par moindres carrés pondérés

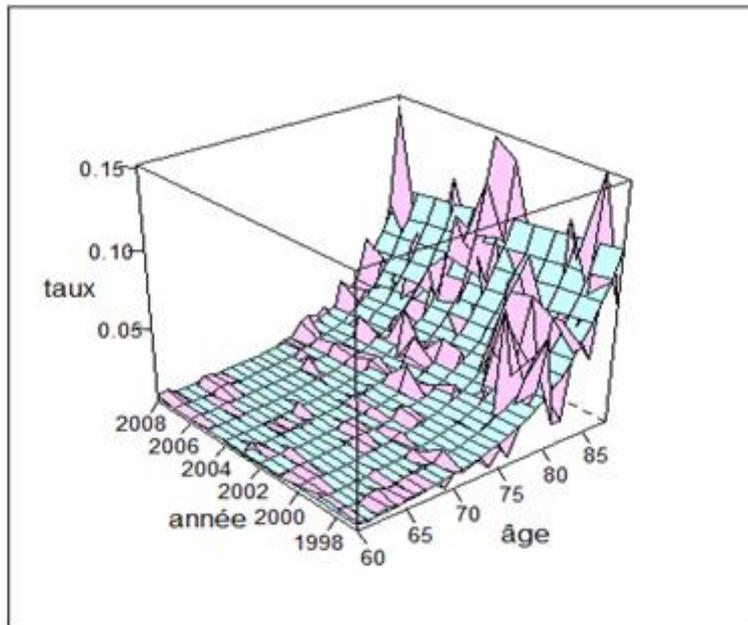


Figure 46 : Taux bruts et ajustement à la table INED féminine par moindres carrés pondérés

L'ajustement par moindres carrés pondérés est de mauvaise qualité et ceci quelque soit la table considérée. En effet, dans cet ajustement, les quotients de mortalité sont surestimés. On va donc se tourner vers le modèle plus classique des moindres carrés non pondérés.

Les surfaces obtenues sont les suivantes :

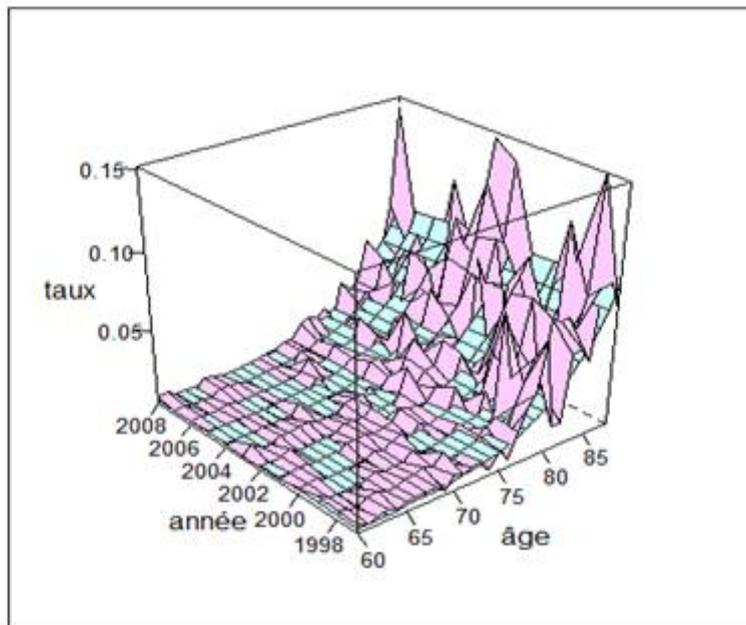


Figure 47 : Taux bruts et ajustement à la TGF par moindres carrés simples

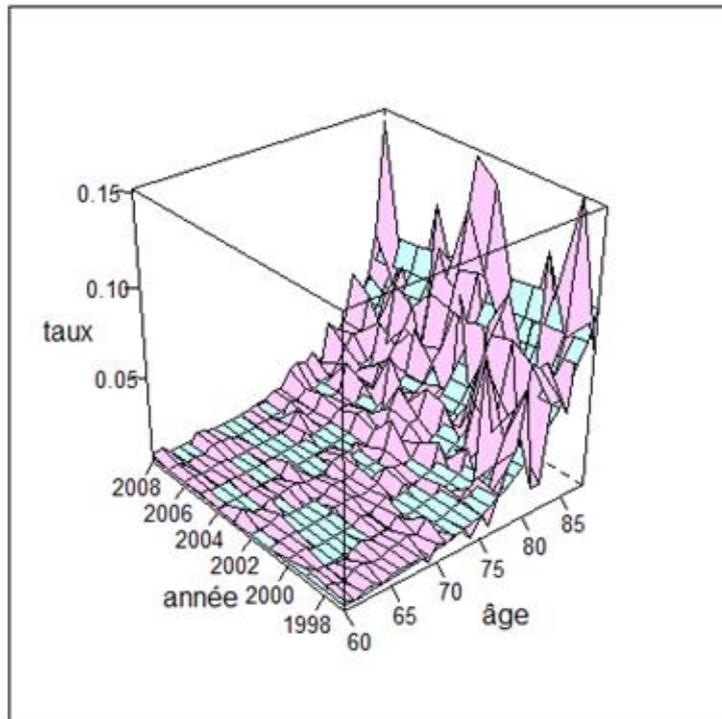


Figure 48 : Taux bruts et ajustement à la table INED féminine par moindres carrés simples

Par la méthode des moindres carrés simples, les surfaces de mortalité obtenues semblent plus prudentes.

Les courbes suivantes présentent les quotients de mortalité obtenus avec l'ajustement par rapport à la TGF (en bleu et vert) et la table INED féminine (en rouge et orange) pour les années 2010 et 2030.

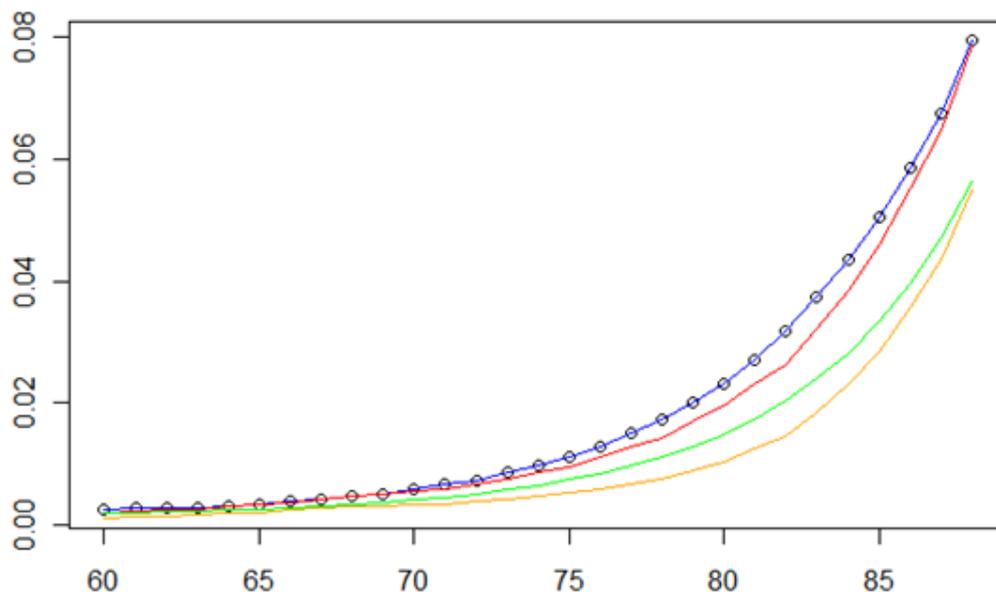


Figure 49 : Quotients de mortalité obtenus pour les années 2010 et 2030

La table construite avec la table INED est globalement plus prudente que celle construite avec la TGF et a un gain d'espérance de vie supérieur jusqu'à 88 ans. Ici, contrairement à la construction de la table masculine où il a été nécessaire d'effectuer une déformation des tables

initiales pour qu'elles correspondent aux données, les 2 ajustements semblent comparables car les courbes ne s'entrecroisent pas.

Il faut maintenant vérifier la prudence de ces tables par rapport aux données. Le graphique suivant présente l'espérance de vie résiduelle moyenne à 5 ans par âge estimée sur l'ensemble des années. Les surfaces de mortalité construites sont très proches de la courbe empirique pour les âges de 60 à 75 ans mais restent tout de même prudentes. Pour les âges ultérieurs, la différence entre les données empiriques et les modèles ajustés est bien plus nette. En effet, on remarque une prudence globale. Pour un euro de rente annuelle sur 5 ans, les ajustements prévoient pour un assuré de 88 ans un coût moyen supérieur de 2,5 % au coût réel de l'assuré.

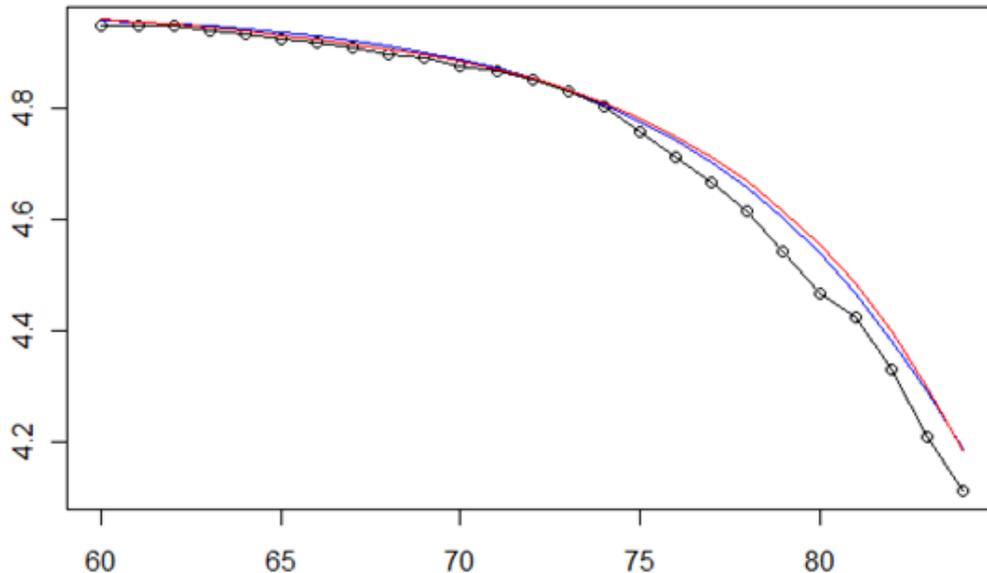


Figure 50 : Espérance de vie toutes années confondues

La courbe suivante présente le coût moyen sur 5 ans d'un assuré quelque soit son âge.

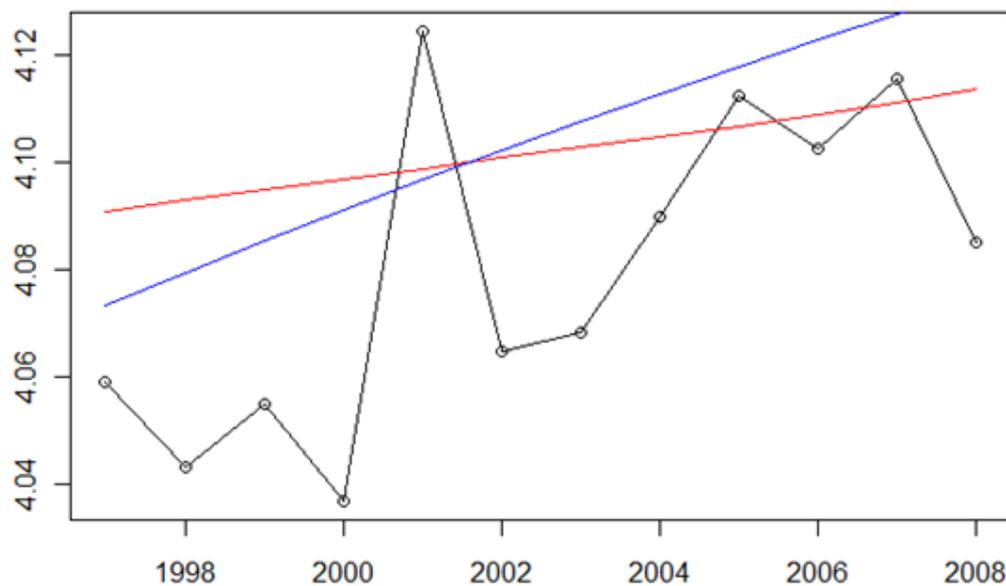


Figure 51 : Espérance de vie tous âges confondues

Globalement, les 2 ajustements sont prudents car le coût par assuré est supérieur à celui des données brutes pour la majorité des années. En revanche, on remarque une forte différence dans la tendance des courbes. Comme nous avons pu le constater sur les quotients de mortalité, la table INED affiche un gain d'espérance de vie supérieur à celui de la TGF. Il se pourrait même que l'ajustement par rapport à la TGF perde toute sa prudence car la tendance empirique de l'augmentation du coût moyen quelque soit l'âge de l'assuré semble évoluer plus rapidement que la TGF. Le graphique suivant reprend le graphique précédent avec une régression linéaire sur les données empiriques :

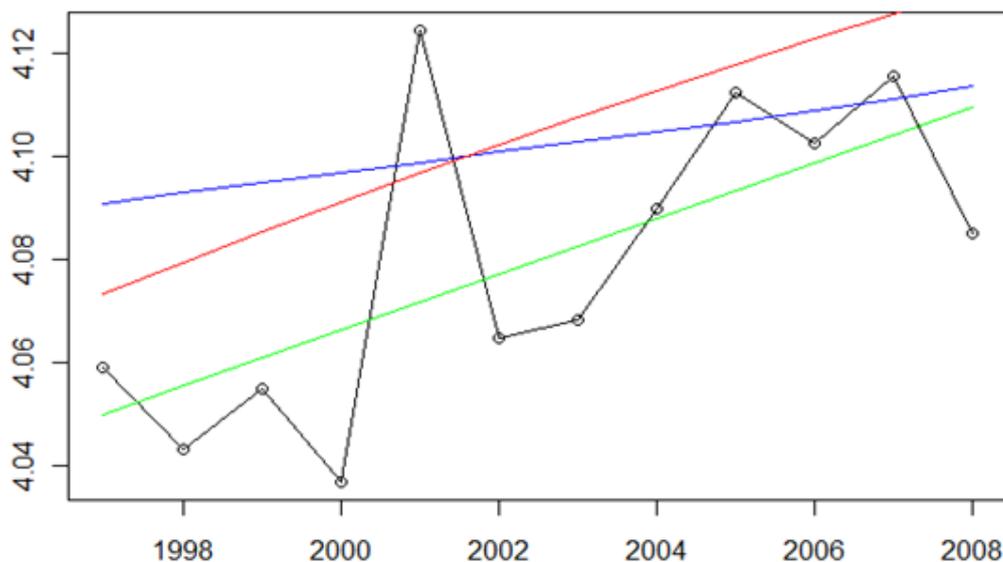


Figure 52 : Espérance de vie toutes années confondues

Il semblerait qu'à partir de 2010, la tendance de notre population devrait dépasser celle de la TGF. En revanche, la tendance de la table INED semble assez similaire à celle des données brutes, elle devrait donc conserver toute sa prudence.

4.5. COMPARAISON DES MODELES ENDOGENES ET DU MODELE EXOGENE POUR LA POPULATION DES HOMMES

Nous allons maintenant comparer nos modèles entre eux.
Voici les indicateurs précédemment utilisés :

Tableau 24 : Comparaison des modèles

Modèle	Résidus	Khi2	Fidélité	Décès
LC1	-0,26	393	2,1581	-375
LC2	0,43	376	2,0543	150
Logistique1	0,78	426	2,1146	385
Logistique2	0,86	425	2,1328	403
RefExt	0,14	357	2,0338	62

Selon la quasi-totalité des critères et des tables, les ajustements effectués avec des modèles endogènes sont de moins bonne qualité que les modèles exogènes. On pourrait tenter de justifier ce phénomène par le fait que les modèles endogènes ont été ajustés sur une période

allant de 1990 à 2008 alors que le modèle exogène a été ajusté sur les années 1996 à 2008. Ces statistiques vont être comparées avec l'ajustement simple (non local) effectué sur la table INED. Les valeurs des statistiques sont respectivement 0,81, 419, 2,1304, 443. Bien qu'un exemple ne soit pas totalement représentatif, l'ajustement paramétrique, dont la forme a été déterminée avec le modèle de Lee-Carter, semble être de bonne qualité. Néanmoins, par précaution, il va être fait le choix d'utiliser le modèle à référence externe parce qu'il possède les meilleures statistiques.

4.6. FERMETURE DES TABLES

Lors de la construction d'une table de mortalité d'expérience, il existe une multitude de modèles pour ajuster les données. Mais il existe des plages d'âges pour lesquelles les données sont indisponibles ou non exploitables. La fermeture porte ici sur le modèle retenu : le modèle de Brass. Dans notre cas, il va être nécessaire de fermer la table sur les âges élevés et pour les âges de moins de 60 ans.

4.6.1. FERMETURE AUX AGES FAIBLES

➤ Table des hommes

Pour fermer la table construite aux âges faibles, nous allons utiliser une référence externe. Pour la plage d'âges de 60 à 85 ans, nous avons effectué une pondération entre 2 tables construites. Nous allons donc reprendre cette pondération.

Pour fermer la table aux bas âges, nous allons effectuer un ajustement sur la plage 60-70 ans, pour éviter l'influence des âges les plus élevés, et utiliser ce coefficient pour les âges inférieurs. La courbe suivante représente le résultat de cet ajustement pour les années 2010 et 2030 pour les âges allant de 40 à 65 ans. La courbe en orange et rouge est la TGH et celle en bleu et violet, notre table ajustée.

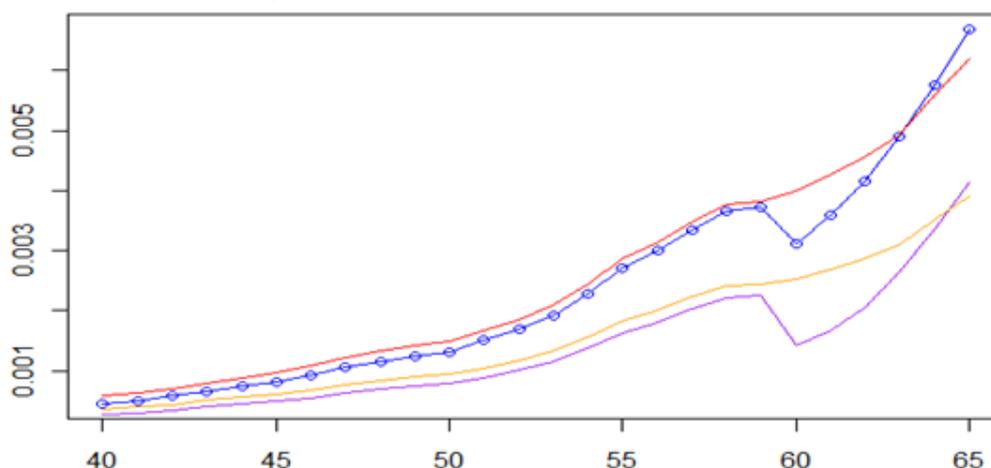


Figure 53 : Ajustement à la table pondérée pour les âges faibles

A la vue de ce graphique, on en conclut que notre ajustement est de mauvaise qualité. Cela est dû à la légère bosse que présente la TGH avant l'âge de 60 ans qui est visiblement accentuée avec la déformation effectuée avec le lissage relationnel. Notre coefficient de pondération entre la table TGH et la table INED favorisait à 95% la TGH, nous allons effectuer le même ajustement mais cette fois-ci uniquement avec la table INED.

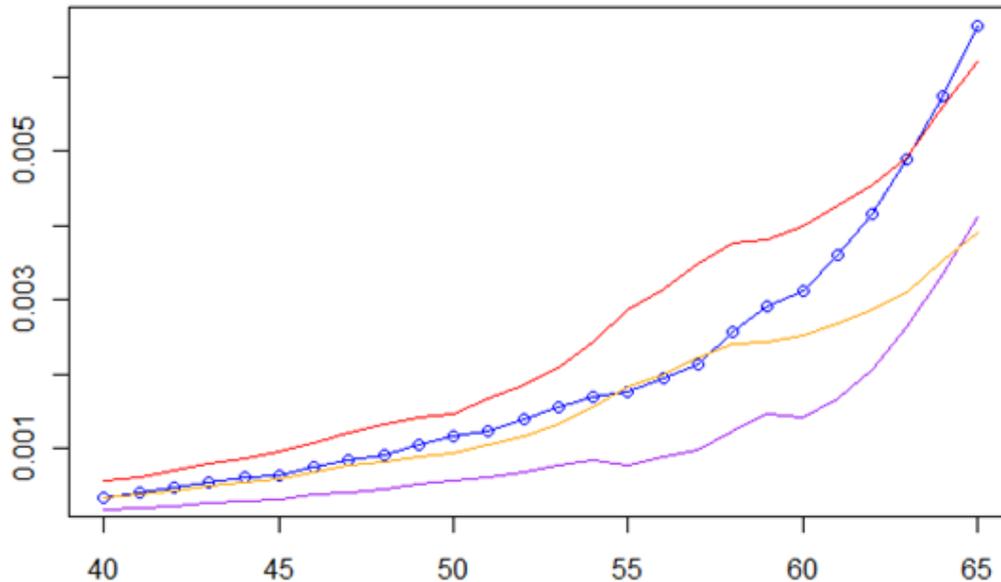


Figure 54 : Ajustement à la table INED pour les âges faibles

On remarque ici que l'ajustement est de bien meilleure qualité car il offre une continuité entre la plage d'âge des moins de 60 ans et des plus de 60 ans. Néanmoins, cet ajustement s'avère être bien plus prudent que la TGH.

Le graphique suivant présente les quotients de mortalité ajustés et les données brutes.

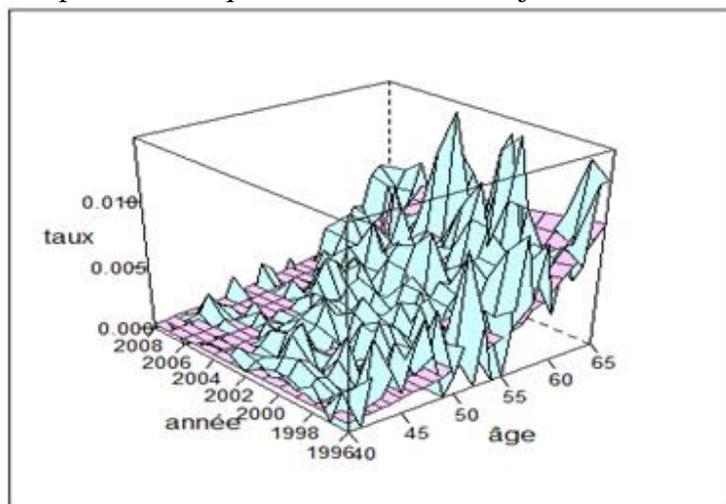


Figure 55 : Quotients de mortalité bruts et quotients de mortalité ajustés

Globalement, les taux ajustés sont en-dessous des taux observés mis à part pour les années suivant 2002-2003, où la surface empirique passe en-dessous de la surface modélisée. On attribue cette chute de la mortalité pour les années les plus récentes aux retards dans la déclaration des décès. Mais il se pourrait très bien qu'une partie de cette baisse observée soit due à une cause extérieure. Par exemple, il est possible que les récentes crises financières survenues depuis le début des années 2000 aient intensifié le phénomène d'anti-sélection. Cet ajustement sera conservé par prudence.

➤ **Table des femmes**

Le paramètre ajusté sur la plage 60-88 ans sera également utilisé pour fermer la table sur âges antérieurs. Une comparaison entre table construite sur la population des hommes et celle

construite sur la population des femmes montre qu'en dessous d'un certain âge, les quotients de mortalité des femmes deviennent supérieurs à ceux des hommes. Le choix a été fait de conserver les quotients de mortalité de la population des hommes lorsqu'ils devenaient inférieurs.

Le graphique suivant illustre ce phénomène :

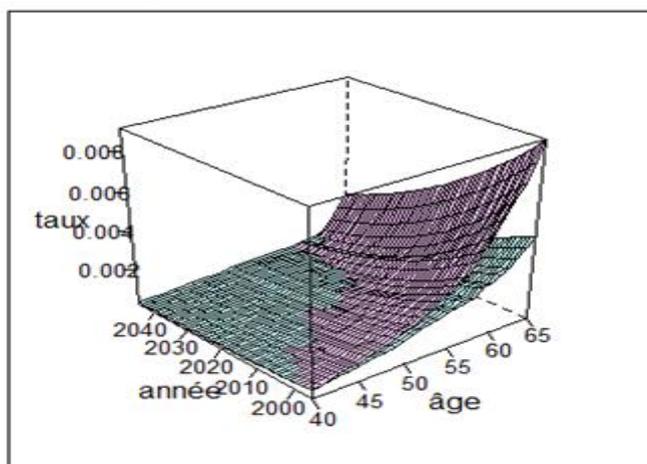


Figure 56 : Fermeture aux âges faibles pour la table des hommes et des femmes

La cause provient de la prudence avec laquelle la table des hommes a été construite. La valeur de la table masculine a donc été affectée à la table féminine lorsque le quotient se trouve être inférieure.

Nous allons maintenant vérifier l'ajustement sur les âges allant de 40 à 65 pour vérifier si notre table ajustée ne sous-estime pas la mortalité réelle.

Le graphique suivant présente la moyenne des quotients de 40 à 65 ans des données empiriques et ajustées sur les années allant de 1997 à 2002.

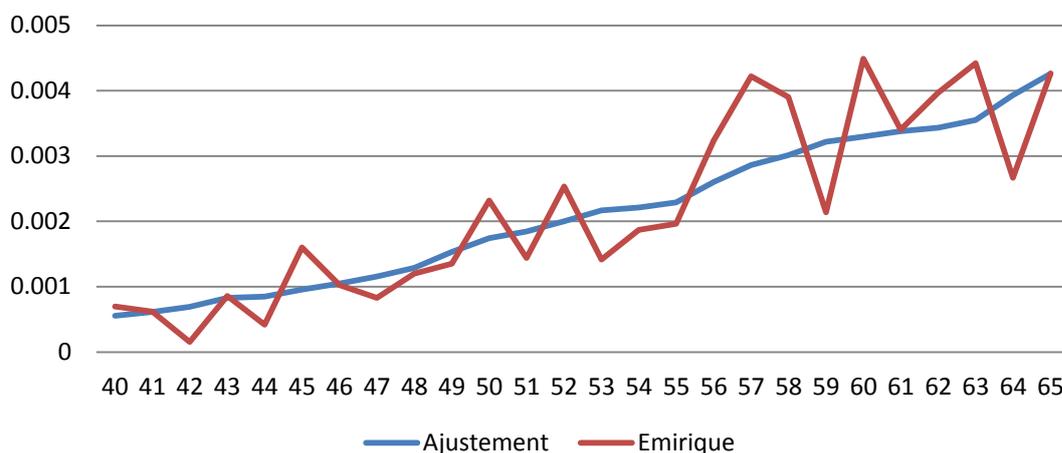


Figure 57 : Comparaison des données ajustées et empiriques

Il y a une très forte proximité entre notre courbe ajustée et les données empiriques. En effet, les courbes s'entrecroisent assez régulièrement. Nous considérerons cet ajustement comme bon car la faible mortalité des femmes et le peu de points acquis devrait avoir une faible conséquence sur les provisions.

4.6.2. FERMETURE AUX AGES ELEVES

La méthode choisie pour fermer les tables est la méthode de Denuit & Goderniaux. Elle permet de fermer une table à un âge ultime.

➤ **Modèle**

Le modèle proposé par Denuit & Goderniaux est un modèle assez simple, il suppose que le logarithme des quotients de mortalité puisse être modélisé par un polynôme de degré 2. Il s'écrit :

$$\ln(\widehat{q}_x) = ax^2 + bx + c + \varepsilon_x$$

Avec $\varepsilon_x \sim N(0, \sigma^2)$.

Cette méthode est relativement facile à mettre en œuvre et permet de fixer aisément un âge ultime car il est possible d'imposer des contraintes sur les paramètres. Lorsque l'on souhaite imposer un âge ultime que l'on notera x_{max} , il est nécessaire de vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} q_{x_{max}} &= 1 \\ q'_{x_{max}} &= 0 \end{aligned}$$

C'est 2 conditions imposent que x_{max} soit une racine du polynôme et de sa dérivée.

On note x_{lien} , l'âge pour lequel le raccord est fait entre ce modèle et la table à fermer. Le modèle s'écrit finalement :

$$\ln(\widehat{q}_x) = \ln(q_{x_{lien}}) \left(\frac{x_{max} - x}{x_{max} - x_{lien}} \right)^2 + \varepsilon_x$$

Il est possible également d'employer une méthode avec un ajustement sur les données pour déterminer le coefficient devant le terme quadratique, mais nous choisirons la méthode avec l'âge de raccord prédéfini.

➤ **Table des hommes**

Etant donné que l'âge le plus élevé jamais atteint par une personne est 122 ans, il paraît raisonnable de fixer l'âge ultime à 120 ans.

Il est possible de fermer la table de 2 façons, la première consiste à raisonner sur les années calendaires et la seconde sur les années par générations. Bien que la méthode par année calendaire soit plus prudente que la méthode par génération, nous choisirons la seconde méthode. Ce choix vient du fait que si on considère que le plus jeune assuré a 20 ans, cette méthode nécessite d'avoir des projections jusqu'en 2112 qui seront très certainement peu fiables. Quant à la seconde méthode, si l'on souhaite connaître l'espérance de vie de quelqu'un qui a 20 ans aujourd'hui, il est nécessaire de ne projeter que 65 ans donc jusqu'en 2077.

Afin de vérifier le caractère prudent de cette modélisation, nous allons faire la moyenne des quotients enregistrés pour les âges de 80 à 96 ans sur les données empiriques et sur la table construite pour les années de 1996 à 2008. Le graphique suivant présente les 2 courbes obtenues :

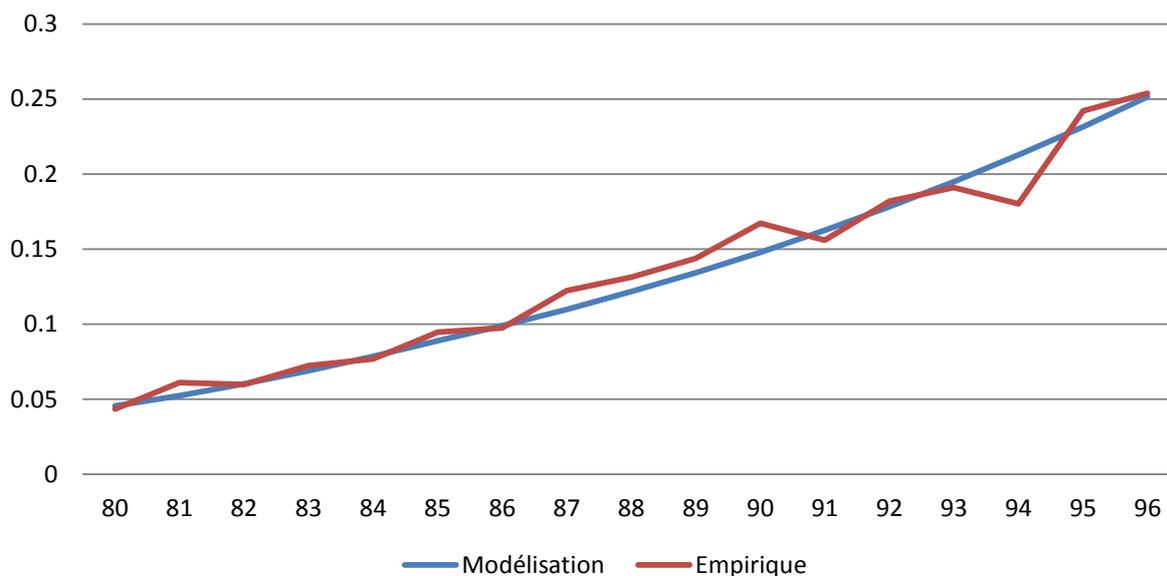


Figure 58 : Données empiriques et modélisation aux âges élevés pour les hommes

La moyenne enregistrée pour les données brutes, sur les différents âges, semble cohérent avec la table construite. On considèrera donc que cet ajustement conforme à la réalité.

➤ **Table des femmes**

Le graphique suivant présente la moyenne des quotients mais cette fois-ci sur les âges allant de 80 à 96 ans sur les années 1997 à 2008.

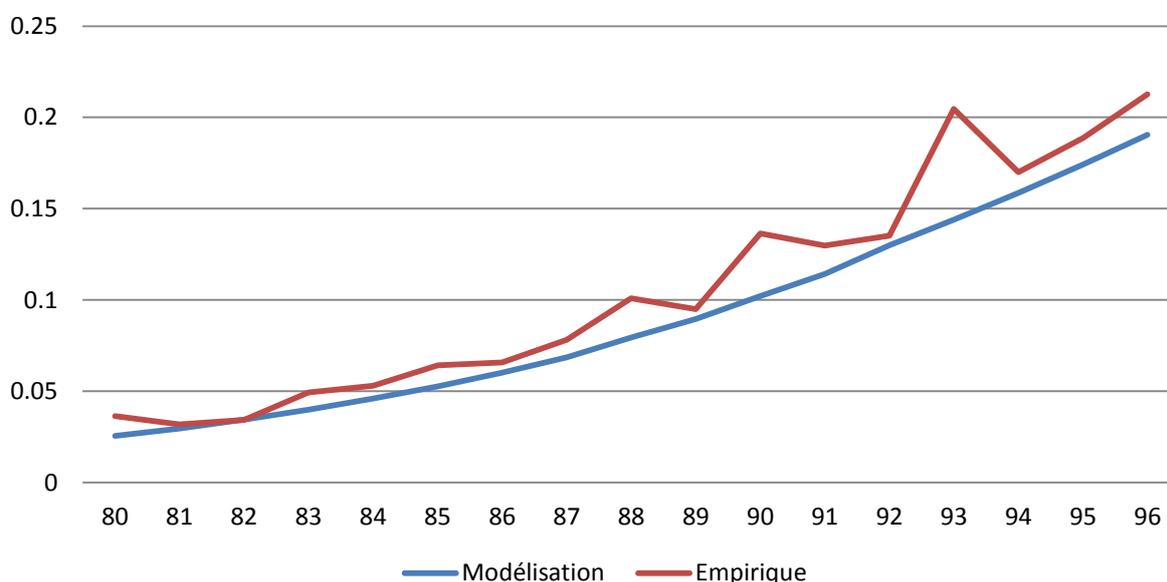


Figure 59 : Données empiriques et modélisation aux âges élevés pour les femmes

La modélisation est très proche de la courbe empirique. Elle conserve tout de même toute sa prudence car les quotients modélisés restent inférieurs aux quotients bruts. Contrairement aux âges faibles, une estimation douteuse de la mortalité pour les âges élevés a un fort impact sur les provisions car il y a ici une forte mortalité et il s'agit également de rente en cours de service, dont tous les points ont été acquis.

5. COMPARAISON DES TABLES CONSTRUITES ET DES TABLES REGLEMENTAIRES

Il est nécessaire de comparer les tables construites avec les tables réglementaires pour mesurer l'impact sur les provisions. Dans une première partie, la comparaison portera sur des critères objectifs, et dans une deuxième partie les écarts seront analysés dans le portefeuille. On notera L441H, la table construite sur la population des hommes et L441F, la table construite sur la population des femmes.

5.1. ANALYSE OBJECTIVE HORS CONTEXTE DU PORTEFEUILLE

Ici, il va être observé la différence notable sur les espérances de vie pour l'année 2011. Ensuite, la comparaison portera sur la valeur d'une rente viagère entrant en vigueur à 60 ans avec un taux d'actualisation de 2 %.

La courbe suivante présente les espérances de vie observées pour l'année 2011 sur la TGH, la TGF, la L441H et la L441F.

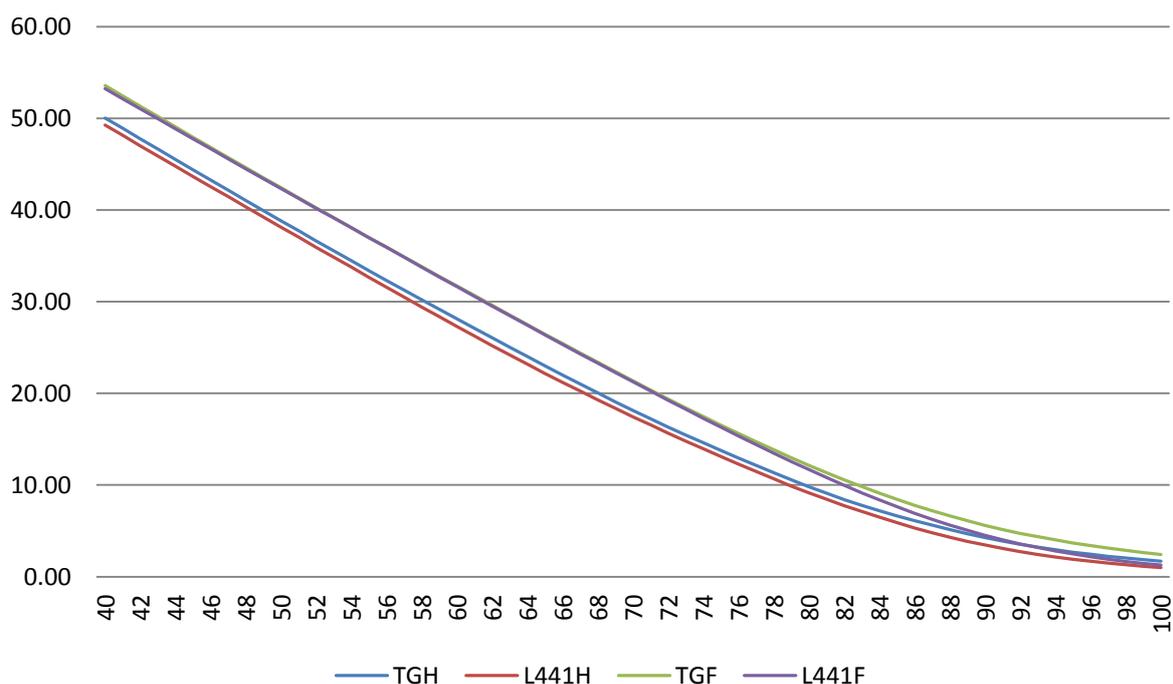


Figure 60 : Espérance de vie en 2011

L'espérance de vie de la table L441H est inférieure à celle de la TGH pour tout âge. La table L441F est, quant à elle, légèrement moins prudente que la TGF mais reste très proche de celle-ci jusqu'à 80 ans. Au-delà de cet âge, une forte différence est constatée. Cet écart provient de la méthode de fermeture de la table pour les âges élevés.

Voyons maintenant l'effet sur une rente viagère d'un montant de 1€ annuel prenant effet à l'âge de 60 ans actualisée avec un taux de 2 %.

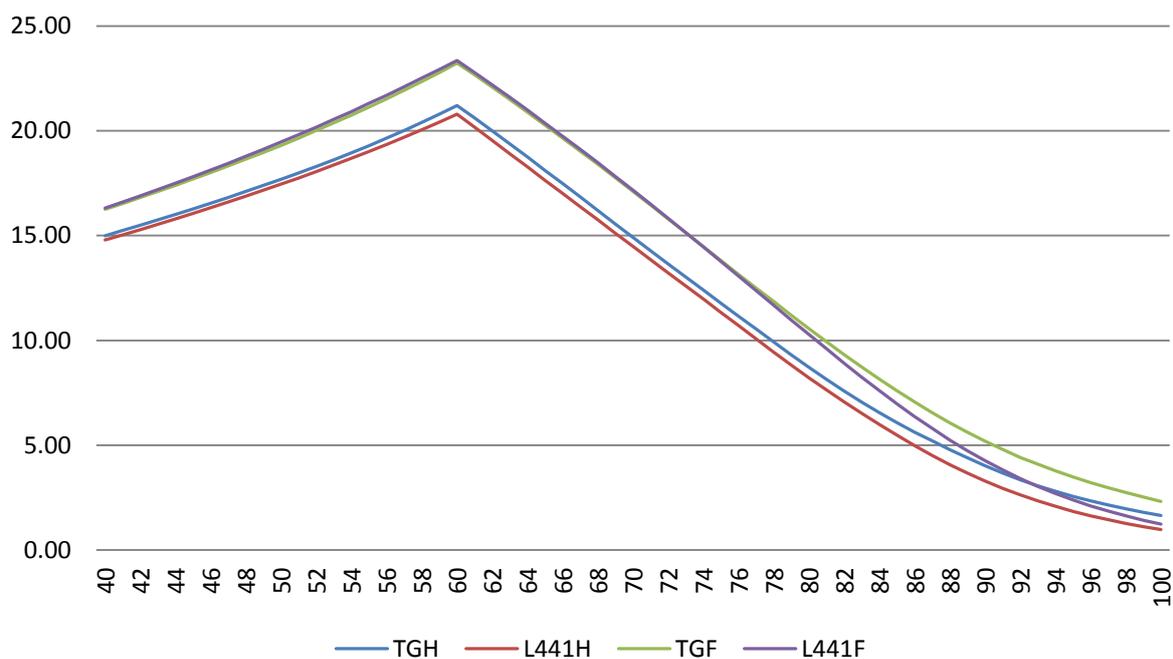


Figure 61 : Montant actualisé d'une rente prenant effet à l'âge de 60 ans en 2011

En ce qui concerne les rentes unitaires, l'écart entre la TGH et la L441H, à l'image des espérances de vie, reste assez stable avec une légère augmentation à l'âge de 85 ans.

En ce qui concerne la TGF et la L441F, contrairement à l'espérance de vie, le coût de la rente unitaire est supérieur pour la L441F jusqu'à l'âge de 73 ans et devient nettement inférieur ensuite.

Tous ces résultats sont présentés en annexe 3.

Les écarts observés pour les âges élevés viennent de la différence dans le choix du modèle de fermeture. La méthode choisie est moins prudente que celle des tables par génération. Néanmoins, l'analyse de l'ajustement par rapport aux données empiriques indique une prudence dans la construction de la table.

5.2. ANALYSE DES TABLES DANS LE PORTEFEUILLE

Ici, dans une première partie, les données du portefeuille vont être analysées. Cela servira à comprendre l'impact de l'utilisation des tables construites par rapport aux tables réglementaires, ce qui fera l'objet d'une deuxième partie.

5.2.1. ANALYSE DETAILLEE DU PORTEFEUILLE

Dans cette partie, il va être présenté des statistiques descriptives sur les cotisants et les rentiers des produits Agri Retraite Points et REPMA au 31/12/2010. Il sera successivement abordé le nombre d'individus par âge, le nombre de points par âge, le nombre moyen de points par individus par âge. Ensuite, une comparaison sera établie entre les résultats pour les contrats Agri Retraite Points et REPMA en utilisant la valeur de service du point.

➤ Nombres d'assurés par âge

Au 31/12/2010, il y a 74 134 cotisants pour le contrat Agri Retraite Points, dont 54 926 hommes et 19 208 femmes. L'âge moyen des cotisants est de 49,6 ans pour les hommes et de 52,2 pour les femmes.

Ce contrat possède également 16 446 rentiers, dont 10 900 hommes et 5 546 femmes. L'âge moyen des rentiers est de 67,1 an pour les hommes et 68,1 pour les femmes.

L'âge moyen du portefeuille est de 52,5 ans pour les hommes et 55,8 pour les femmes.

Le graphique suivant présente la répartition des assurés par âge, par sexe et selon leur statut :

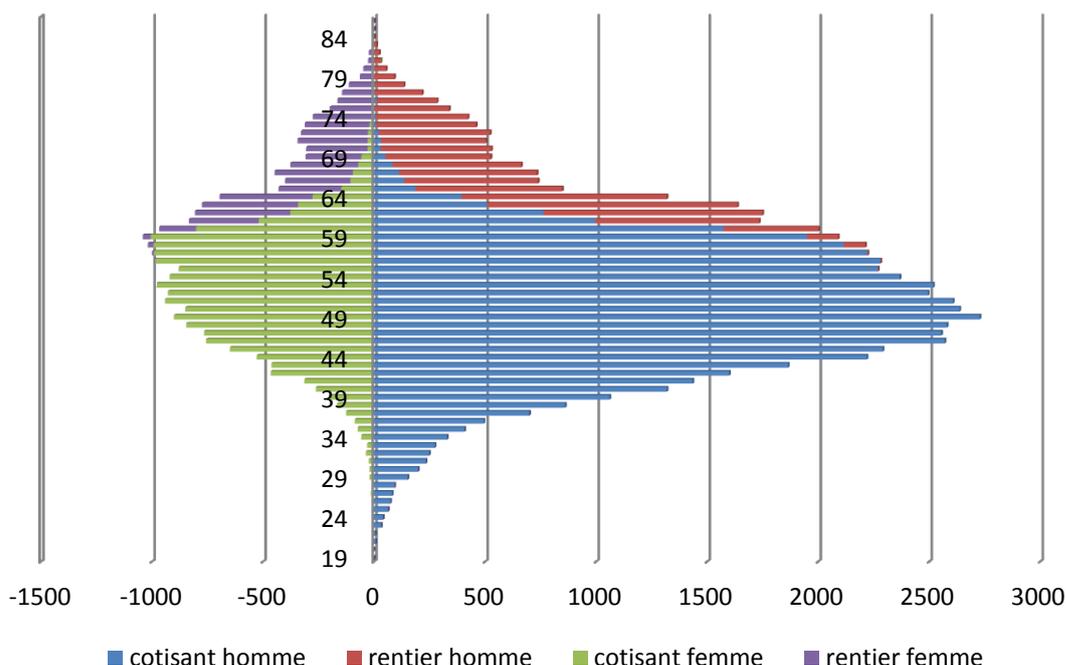


Figure 62 : Nombre d'assurés Agri Retraite Points

Le contrat Agri Retraite Points est assez récent. De nombreux assurés n'ont pas encore atteint l'âge de la retraite. Le portefeuille est composé de 72,5 % d'hommes et les femmes se retrouvent minoritaires à 27,5 %. Mais la faible mortalité des femmes tend à gommer ces écarts, en effet elles représentent 34 % des rentiers alors que les hommes ne sont plus que 66 %.

Le portefeuille du produit REPMA est composé de 18 424 cotisants, dont 10 044 hommes et 8 380 femmes, et de 37 258 rentiers, dont 15 779 hommes et 21 479 femmes.

L'âge moyen des cotisants hommes est de 57,6 ans et celui des cotisants femmes est de 58,6. Pour les rentiers, l'âge moyen pour les hommes s'élève à 77,4 ans et celui des femmes s'élève à 77,2 ans. L'âge moyen du portefeuille est de 69,7 ans pour les hommes et 72 ans pour les femmes. Ce portefeuille a un âge plus élevé que celui du produit Agri Retraite Points car ils ont été mis à la vente avec une trentaine d'années d'écart.

Le graphique suivant reprend le nombre d'assurés du produit REPMA en fonction de leur âge, leur sexe et leur statut :

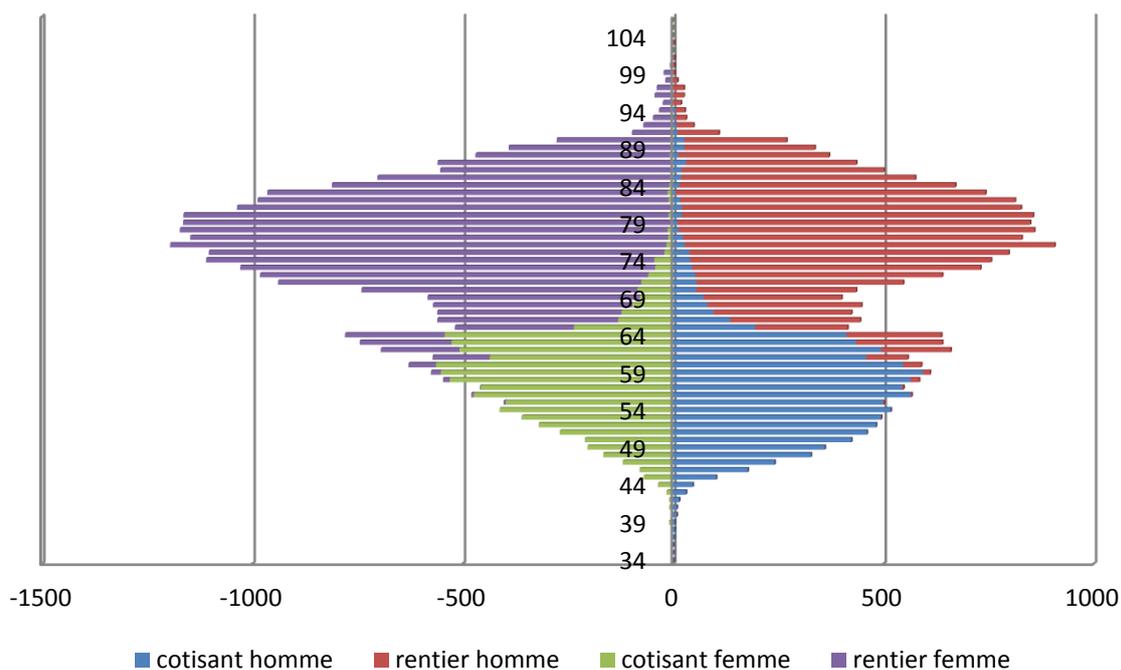


Figure 63 : Nombre d'assurés REPMA

On remarque ici qu'au niveau des rentiers, il y a nettement plus de femmes que d'hommes. En effet elles représentent 58 % des rentiers et 54 % de la population totale du REPMA.

Le graphique suivant présente la population globale Agri Retraite Points + REPMA :

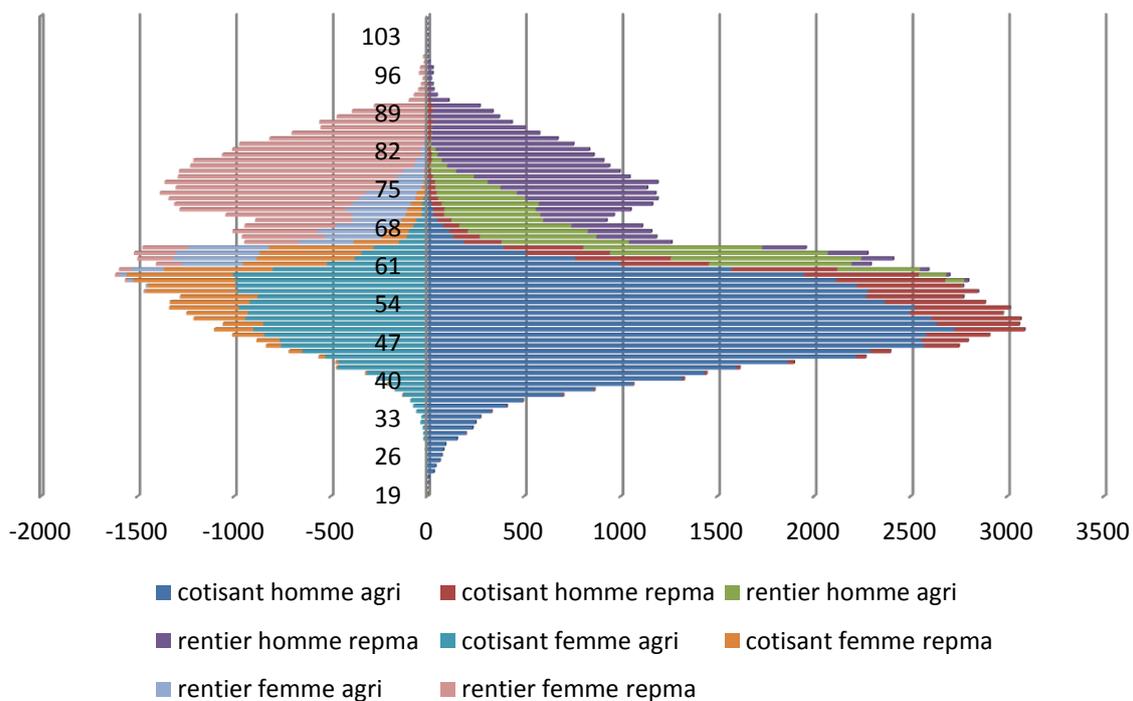


Figure 64 : Assurés REPMA et Agri Retraite Points

Il y a une nette différence entre les portefeuilles des produits Agri Retraite Points et REPMA. En effet, les assurés du REPMA sont surtout présents dans la population des rentiers. Les assurés de l'Agri Retraite Points constituent, en revanche, la plus grande majorité des cotisants. Le nombre de cotisants du produit Agri Retraite Points correspond aujourd'hui au nombre de cotisants du produit REPMA en 1988. Etant donné la répartition de la population féminine sur les classes d'âge, il est peu probable que le portefeuille du produit Agri Retraite Points ait, dans le futur, les mêmes proportions homme/femme que le portefeuille REPMA aujourd'hui. Du fait du faible nombre de femmes dans le portefeuille, il deviendra difficile dans le futur de construire une table d'expérience sur la population féminine. En revanche, on peut s'attendre à une amélioration des statistiques sur la population masculine car à priori, le nombre de cotisants masculins est plus élevé que dans le passé.

➤ **Nombre de points par âge**

Pour le calcul des provisions, le paramètre le plus important n'est pas le nombre d'assurés par âge mais le nombre de points par âge. Nous allons donc ici nous concentrer sur les points détenus par les assurés en fonction de leur âge. L'âge moyen du portefeuille sera ensuite recalculé en utilisant la pondération du nombre de points. Les points des cotisants sont évalués en prenant en compte le coefficient de report.

Le graphique suivant présente le nombre de points par âge pour le produit Agri Retraite Points :

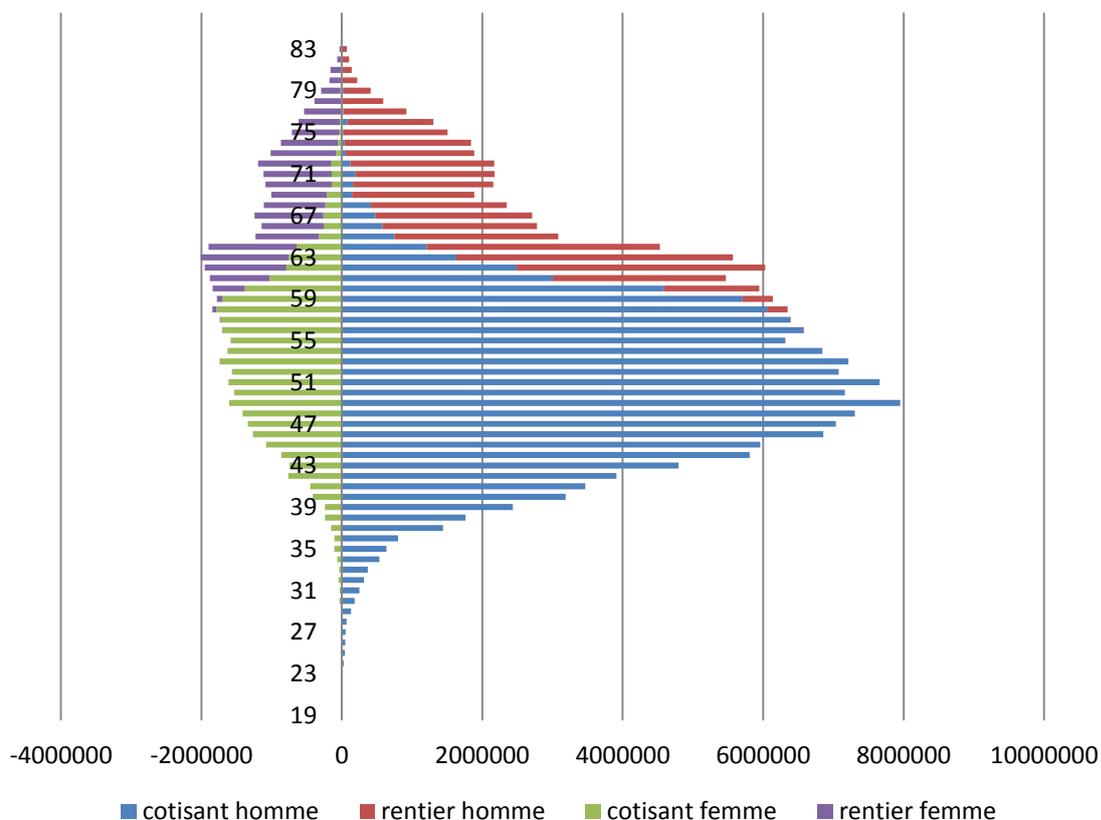


Figure 65 : Nombre de points par âge Agri Retraite Points

On remarque ici que le graphique du nombre de points affiche un autre visage que celui du nombre d'assurés. Le nombre de points par assurés est plus important pour les rentiers car ce sont des points acquis alors que les cotisants sont en cours d'acquisition.

On ressent cet effet lors du calcul de l'âge moyen sur le portefeuille. Avec la pondération du nombre de points, on obtient un âge moyen de 54,3 ans pour les hommes et 58,3 ans pour les femmes, soit une différence de respectivement 2 ans et 3 ans par rapport à l'âge moyen calculé sur le nombre d'assurés.

Le graphique suivant présente le nombre de points par âge pour le produit REPMA :

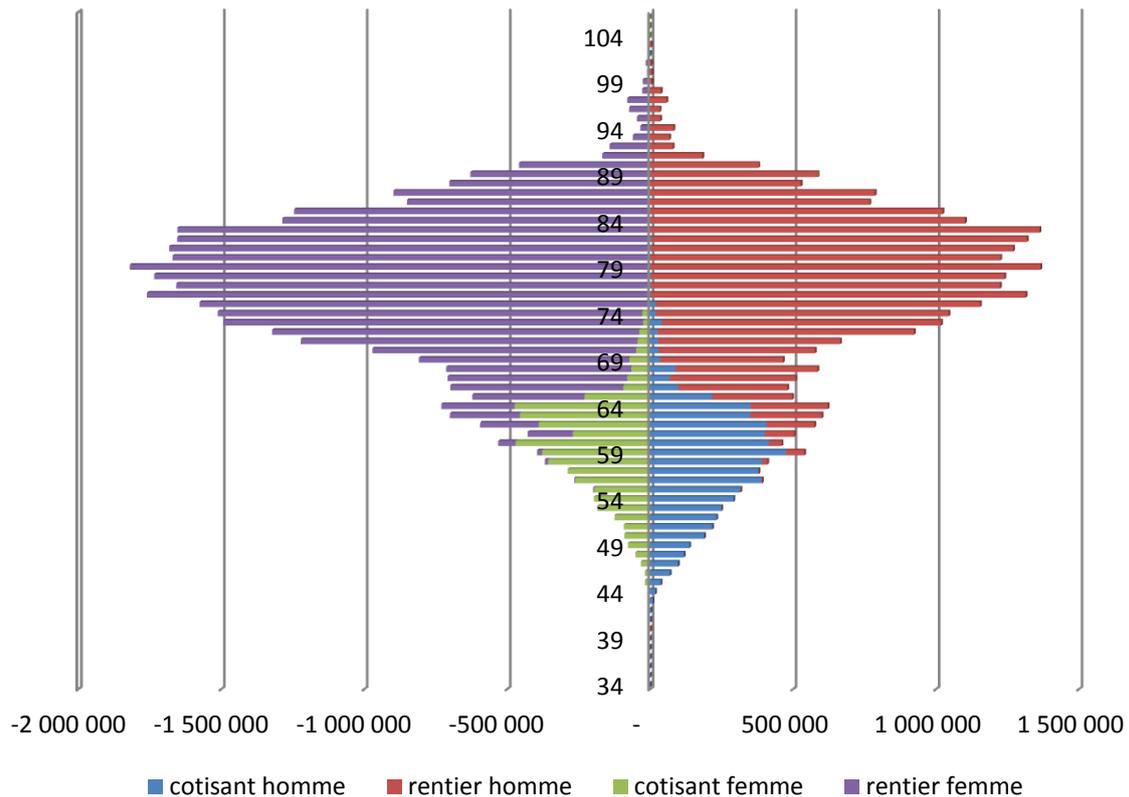


Figure 66 : Nombre de points par âge REPMA

A l'image d'Agri Retraite Points, la répartition par âge du nombre de points minimise l'impact des cotisants dans le portefeuille. On obtient ici un âge moyen de 74,1 ans pour les hommes et 75,3 pour les femmes, ce qui vieillit notre portefeuille de 5 ans pour les hommes et 3 ans pour les femmes. L'utilisation d'une table d'expérience pour ce portefeuille est d'autant plus justifiée que l'âge moyen se situe dans la plage d'âges sur laquelle la table a été construite. Ce résultat reste plus contestable pour le produit Agri Retraite Points car l'âge moyen se situe dans un âge pour lequel les données n'étaient pas exploitables, il y aura donc certainement un biais plus important entre la mortalité constatée et la mortalité modélisée. Néanmoins, la prudence avec laquelle les tables ont été construites permet de contrôler ce biais.

5.2.2. IMPACT SUR LES PROVISIONS

Dans cette partie, il va être établi une comparaison entre les provisions mathématiques des produits Agri Retraite Points et REPMA évaluées par les tables règlementaires et par les tables d'expérience.

Les provisions ont été calculées avec les taux en vigueur, définis dans l'article A.441-4 du Code des Assurances, qui correspondent en 2010 à 2,58 % pour les 8 premières années et 2,06 % pour les années suivantes.

Tableau 25 : Comparaison des provisions mathématiques au 31/12/2010

Population	TGH	L441 H	TGF	L441 F	Total TG	Total L441
REPMA Cotisants	141,66 M€	137,93 M€	128,61 M€	129,04 M€	270,27 M€	266,97 M€
REPMA Rentiers	338,71 M€	324,36 M€	489,02 M€	477,98 M€	827,73 M€	802,34 M€
Agri Retraite Points cotisants	679,26 M€	666,83 M€	174,43 M€	175,12 M€	853,68 M€	841,96 M€
Agri Retraite Points rentiers	194,95 M€	191,06 M€	79,33 M€	79,18 M€	274,28 M€	270,24 M€
Total REPMA	480,37 M€	462,29 M€	617,63 M€	607,03 M€	1 098,00 M€	1 069,31 M€
Total Agri Retraite Points	874,21 M€	857,89 M€	253,76 M€	254,30 M€	1 127,97 M€	1 112,20 M€
Total Cotisants	820,91 M€	804,76 M€	303,04 M€	304,17 M€	1 123,95 M€	1 108,93 M€
Total Rentiers	533,67 M€	515,42 M€	568,35 M€	557,16 M€	1 102,02 M€	1 072,58 M€
Total	1 354,58 M€	1 320,18 M€	871,39 M€	861,33 M€	2 225,96 M€	2 181,51 M€

Au global, l'utilisation des tables d'expérience donne une provision mathématique inférieure à celles des tables règlementaires. Voyons plus précisément les écarts relatifs.

Tableau 26 : Ecart TG et L441

Population	Hommes	Femmes	Total
REPMA Cotisants	2,63 %	-0,34 %	1,22 %
REPMA Rentiers	4,24 %	2,26 %	3,07 %
Agri Retraite Points cotisants	1,83 %	-0,40 %	1,37 %
Agri Retraite Points rentiers	2,00 %	0,19 %	1,47 %
Total REPMA	3,76 %	1,72 %	2,61 %
Total Agri Retraite Points	1,87 %	-0,22 %	1,40 %
Total Cotisants	1,97 %	-0,37 %	1,34 %
Total Rentiers	3,42 %	1,97 %	2,67 %
Total	2,54 %	1,15 %	2,00 %

L'écart le plus fort est constaté pour la population des rentiers du produit REPMA. Il est principalement dû à la méthode de fermeture qui, comme il a été vu précédemment, conduit à des taux de mortalité supérieurs à ceux donnés dans les tables règlementaires. Globalement pour les rentiers, l'utilisation des tables d'expériences minorent les provisions mathématiques. En revanche, pour les cotisants, le bilan est plus contrasté. En ce qui concerne les hommes, les provisions calculées avec la table règlementaire sont systématiquement supérieures à celles

calculées avec la table d'expérience. Pour les femmes, la provision calculé avec la table règlementaire est supérieure pour le produit REPMA et inférieure pour le produit Agri Retraite Points.

6. MESURE DE L'ERREUR D'ESTIMATION

Les quotients de mortalité estimés ne reflètent pas avec exactitude la mortalité de la population. Il existe un certain aléa du au risque d'estimation. Pour illustrer ce problème de manière simple, si la probabilité de décès est de 0,4 et que l'on observe seulement 2 individus, les seules valeurs estimées possibles sont 0, 0,5 ou 1. Il est possible de déterminer un intervalle de confiance à partir de l'erreur estimée qui dépend des réalisations et des effectifs sous risque. On cherchera dans cette partie à déterminer la distribution des provisions techniques et notamment la variance. Cette variance permettra de prendre en compte le risque porté par le calcul de la provision sur la base des tables d'expérience construites.

6.1. PROCEDE

Pour évaluer le risque d'estimation portant sur la provision estimée, il va être mis en œuvre un modèle assez simple.

1^{ère} étape : Simulation des taux bruts

Pour commencer, il va être simulé des aléas sur la table construite en considérant que le nombre de décès par âge et par sexe est la somme de n_{xt} variables de Bernoulli indépendantes de paramètre q_{xt} où n_{xt} est la valeur arrondie de l'exposition au risque pour un âge et une année donnée.

Pour chaque âge et chaque année, des réalisations de Bernoulli de paramètre q_{xt} sur un échantillon de taille n_{xt} vont être simulées.

(X_1, \dots, X_n) désigne le vecteur des réalisations avec $X_i = 1$ si l'individu i est décédé à l'âge x au cours de l'année t et $X_i = 0$ dans le cas contraire.

On en déduit donc un estimateur de q_{xt} :

$$\widehat{q}_{xt} = \frac{1}{n_{xt}} \sum_{i=1}^{n_{xt}} X_i$$

On obtient donc une nouvelle surface de mortalité avec cette fois-ci des erreurs d'estimation. En effet, on a :

$$\widehat{q}_{xt} \sim N \left(q_{xt}, \frac{1}{n_{xt}} q_{xt} (1 - q_{xt}) \right)$$

Autrement dit :

$$\widehat{q}_{xt} = q_{xt} + \varepsilon_{xt}$$

Où $\widehat{\varepsilon}_{xt} \sim N \left(0, \frac{1}{n_{xt}} q_{xt} (1 - q_{xt}) \right)$

Ces simulations sont effectuées à l'aide du logiciel R en utilisant la commande rbinom.

2^{ème} étape : Ajustement au modèle de Braas

Nous allons ici mettre en œuvre le modèle de Braas de façon assez simple en positionnant les tables simulées par rapport aux tables construites. Le modèle s'écrit :

$$\text{logit}(\widehat{q}_{xt}) = a \text{logit}(q_{xt}) + b + \varepsilon_{xt}$$

Des premiers ajustements ont été effectués par les moindres carrés simples en utilisant la fonction glm du logiciel R mais suite à un mauvais comportement de cette fonction, l'ajustement a été effectué par les moindres carrés avec une pondération de type Khi2 en utilisant la fonction constrOptim.

3^{ème} étape : Calcul des provisions

Une fois les coefficients a et b calculés, les provisions mathématiques vont être calculées à l'aide de fichiers Excel, conçus par les actuaires de Groupama Gan Vie, servant à calculer les provisions mathématiques.

6.2. MESURE DE L'ERREUR SUR LES PROVISIONS

➤ Ajustement avec la fonction glm

Intuitivement, les simulations doivent conduire à une distribution normale de la provision mathématique centrée sur la provision obtenue avec les tables de base des simulations.

Il a été effectué 10 000 simulations des tables pour obtenir ces résultats.

Le tableau suivant présente les provisions moyennes obtenues sur les simulations et les provisions calculées avec les tables d'expérience.

Tableau 27 : GLM – Provision mathématique moyenne

		Moyenne	Table	Ecart
Cotisant Agri Retraite Points	Hommes	672,89 M€	666,83 M€	0,90 %
	Femmes	178,24 M€	175,12 M€	1,75 %
Rentier Agri Retraite Points	Hommes	192,10 M€	191,06 M€	0,54 %
	Femmes	80,82 M€	79,18 M€	2,03 %
Cotisant REPMA	Hommes	139,39 M€	137,93 M€	1,05 %
	Femmes	131,73 M€	129,04 M€	2,04 %
Rentier REPMA	Hommes	329,02 M€	324,36 M€	1,42 %
	Femmes	490,45 M€	477,98 M€	2,54 %

On obtient un écart systématiquement positif entre la moyenne des simulations et la valeur de la provision donnée par les tables d'expérience.

Nous allons maintenant analyser la distribution des provisions obtenues pour les produits Agri Retraite Points et REPMA. La courbe en bleue représente la distribution de la provision mathématique simulée, celle en rouge est une loi normale centrée en la moyenne de

l'échantillon et de variance égale à la variance de l'échantillon. La droite en noire représente la provision calculée par les tables d'expérience.

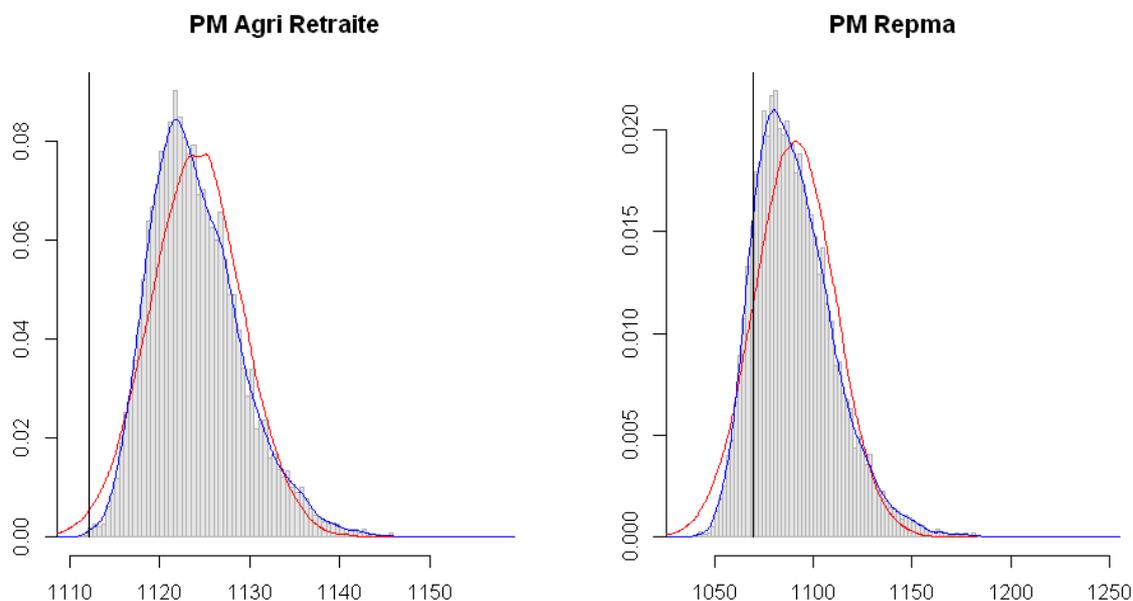


Figure 67 : Distribution de la provision mathématique avec la fonction glm

L'analyse de la distribution conduit à la conclusion suivante : la quasi-totalité des simulations surestime la valeur de la provision. La fonction *glm* estime les paramètres (a,b) par maximum de vraisemblance avec une fonction de lien log. On obtient donc un facteur $\exp(\sigma^2/2)$ qui génère un biais dans l'espérance.

➤ **Ajustement avec la fonction constrOptim**

Le tableau de comparaison de la moyenne des provisions simulées avec la provision des tables d'expérience est le suivant :

Tableau 28 : constrOptim – Provision mathématique moyenne

		Moyenne	Table	Ecart
Cotisant Agri Retraite Points	Hommes	666 820 098	666 833 488	-0,002 %
	Femmes	175 130 984	175 122 596	0,005 %
Rentier Agri Retraite Points	Hommes	191 068 265	191 061 039	0,004 %
	Femmes	79 192 027	79 182 229	0,012 %
Cotisant REPMA	Hommes	137 926 257	137 931 389	-0,004 %
	Femmes	129 053 734	129 043 309	0,008 %
Rentier REPMA	Hommes	324 338 802	324 356 060	-0,005 %
	Femmes	478 112 988	477 982 338	0,027 %

L'ajustement effectué avec la fonction *constrOptim* est de meilleure qualité, il permet de restituer la moyenne.

Voyons maintenant si la distribution de la provision peut s'apparenter à une loi normale :

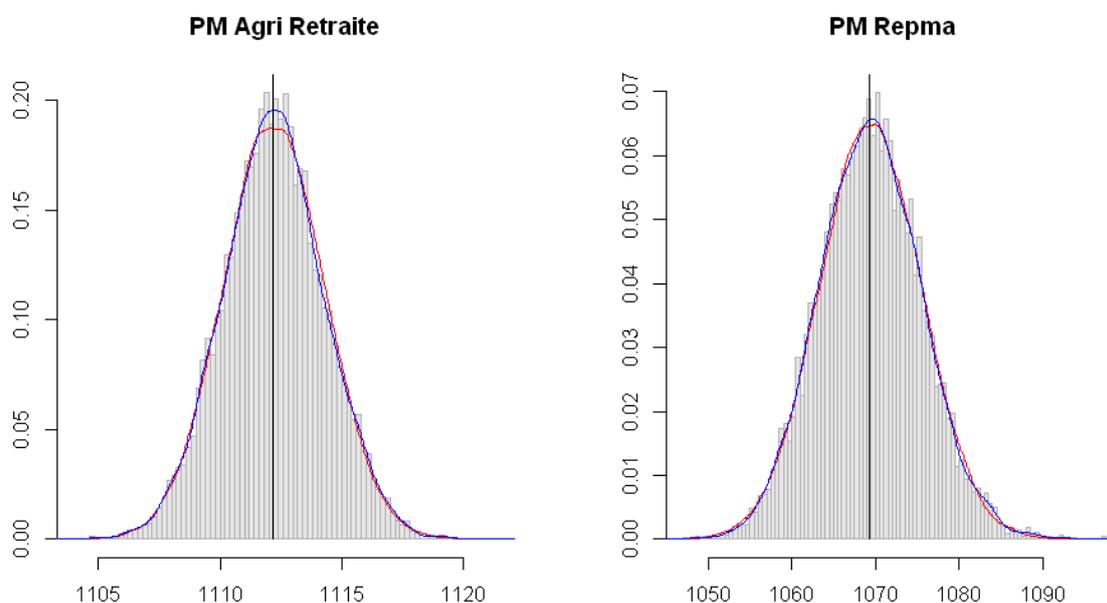


Figure 68 : Distribution de la provision mathématique avec la fonction constrOptim

A la vue de ces graphiques, l'hypothèse de normalité de la distribution des provisions semble acceptable. A partir de cet échantillon, il va être calculé l'écart type de la provision. Ainsi, il va être possible de déterminer l'intervalle de confiance de la provision calculée avec les tables d'expérience.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Tableau 29 : Mesure du risque d'estimation sur la provision

	Agri Retraite Points	REPMA
PM TG	1 127 966 125	1 097 996 919
PM L441	1 112 199 352	1 069 313 096
Ecart type	2 085 196	6 121 201
Borne inférieure	1 108 112 368	1 057 315 542
Borne supérieure	1 116 286 336	1 081 310 650

L'intervalle de confiance est obtenu en considérant un seuil de 95 %. Les provisions calculées par les tables règlementaires ne sont pas incluses dans cet intervalle de confiance. On mesure une erreur sur la provision mathématique, liée à l'estimation, de 0,37 % pour le produit Agri Retraite Points et 1,12 % pour le produit REPMA.

6.3. INFLUENCE DE LA TAILLE DU PORTEFEUILLE SUR L'ECART TYPE

Pour rappel, il a été vu dans la partie précédente que l'hypothèse $PM \sim N(PM_0, \sigma)$ (où PM_0 est la valeur de la provision mathématique calculée avec les tables de base des simulations et σ est l'écart type approximé à l'aide des simulations) est valable en utilisant le modèle de Brass pour lisser et projeter les taux bruts.

L'idée de cette partie va être d'étudier l'influence de la taille de la population sur σ .

La méthodologie employée est identique à celle de la partie précédente. Toutefois, par souci de temps de simulation, les échantillons ne sont composés que de 2000 simulations chacun. Les simulations portent ici sur une population de taille différente à celle de notre portefeuille. Néanmoins, la distribution des assurés pour chaque âge et chaque année reste la même. Un simple coefficient de proportionnalité a été appliqué sur le nombre d'assurés. Les différents coefficients testés sont les suivants : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2, 5, 10.

Les graphiques des distributions obtenues sont les suivants (les PM n'ont pas été modifiées pour tenir compte du nombre d'assurés) :

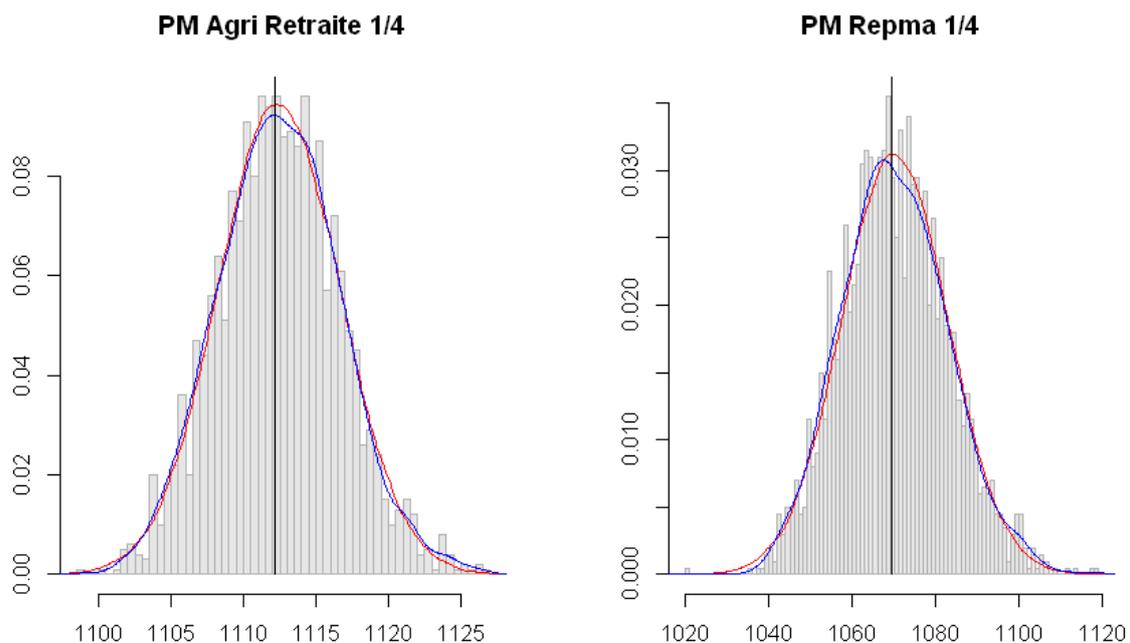


Figure 69 : Distribution de la provision mathématique pour C=0,25

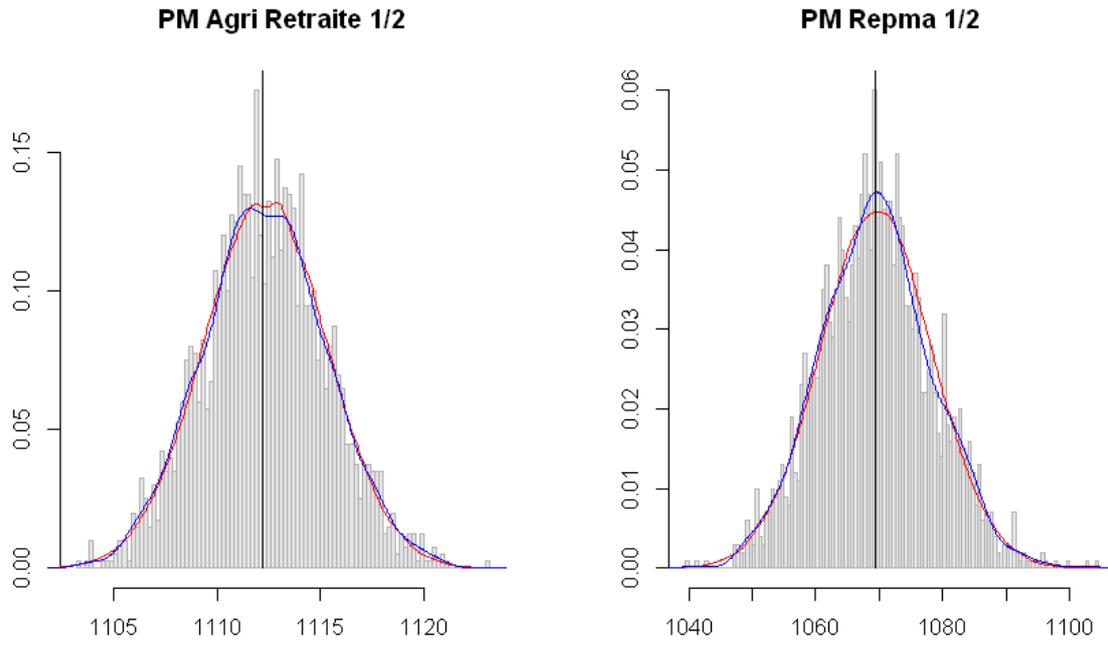


Figure 70 : Distribution de la provision mathématique pour C=0,5

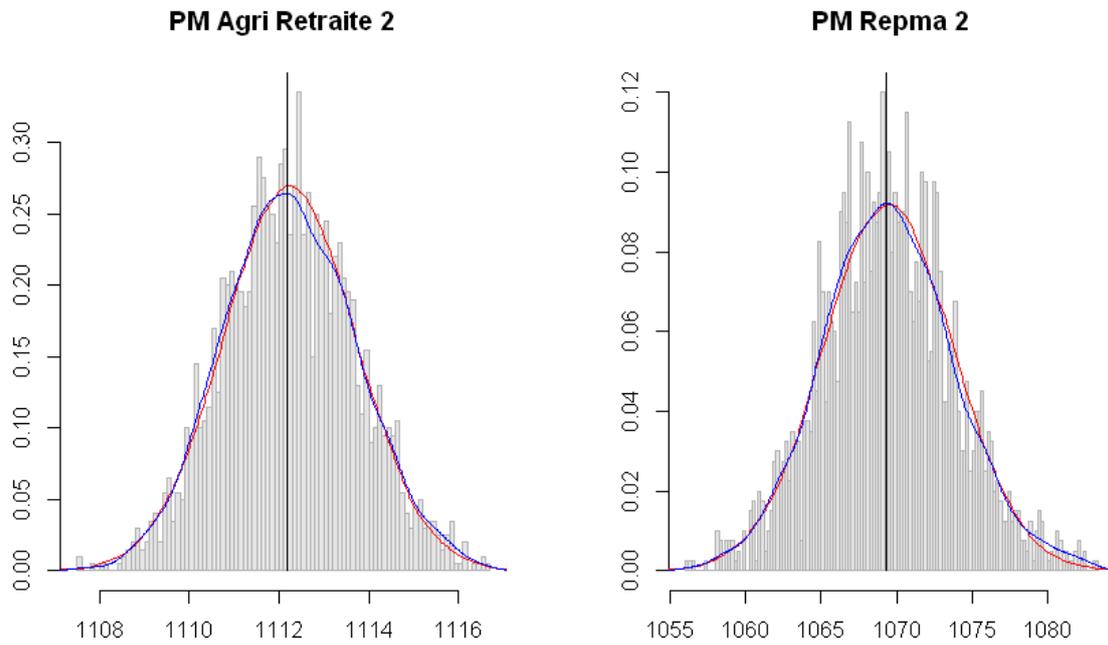


Figure 71 : Distribution de la provision mathématique pour C=2

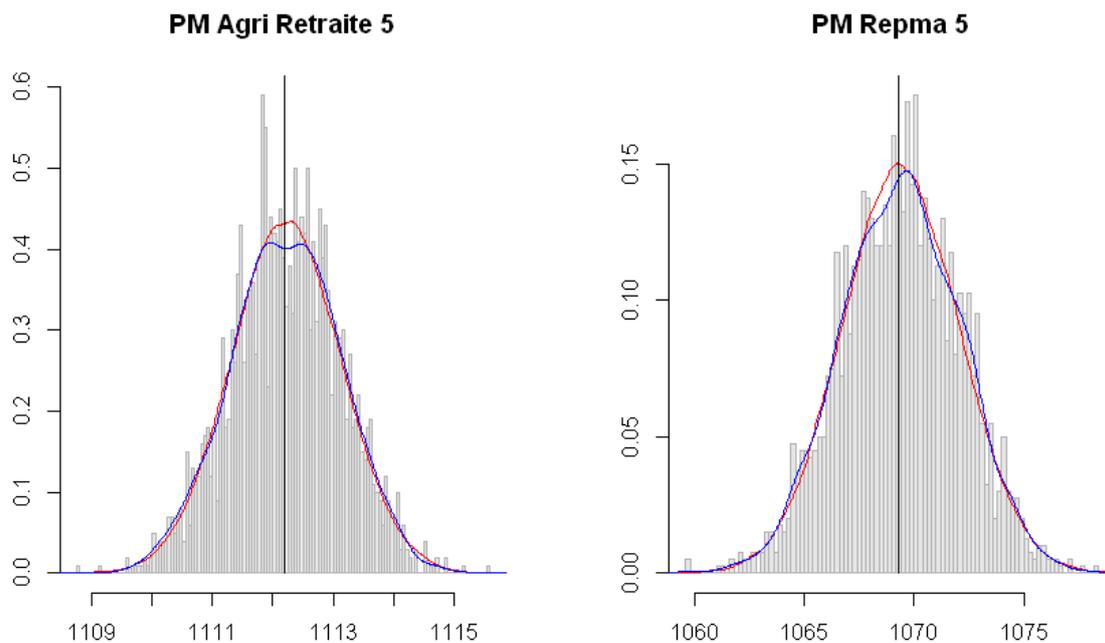


Figure 72 : Distribution de la provision mathématique pour C=5

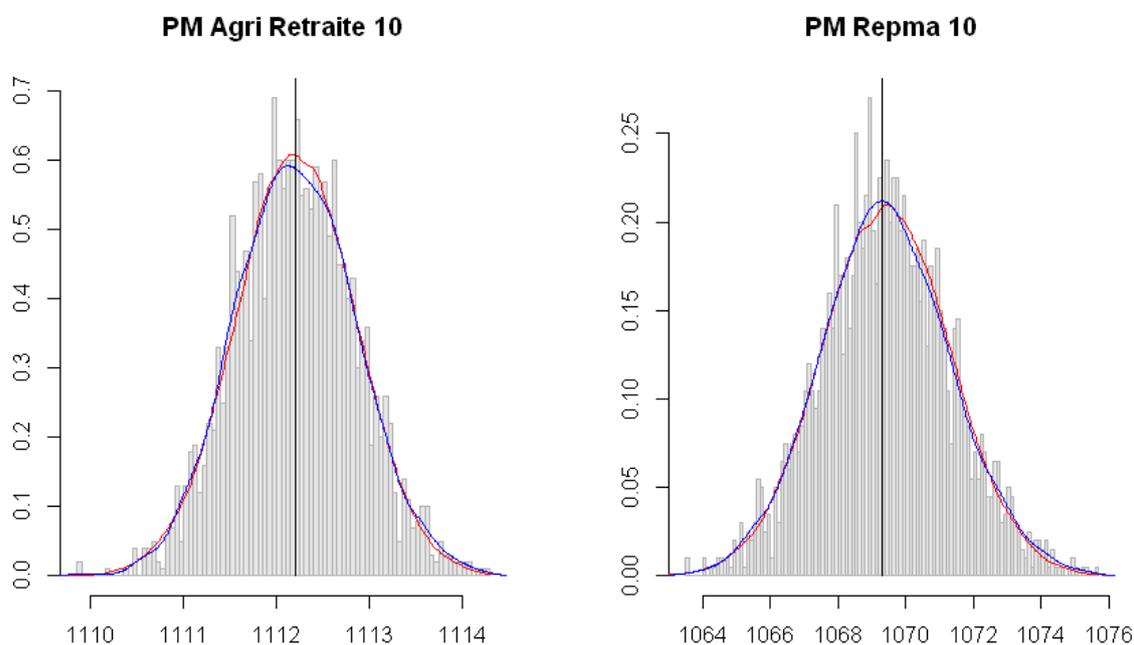


Figure 73 : Distribution de la provision mathématique pour C=10

Au vu des différents graphiques et dans ce cas précis, l'hypothèse de normalité de la distribution des provisions semble toujours valable quelque soit le nombre d'assurés. Grâce à ces distributions, il va être possible de calculer l'écart type pour chaque taille de population.

Avant de calculer l'écart type pour chaque échantillon, le montant des provisions va être modifié pour tenir compte des variations d'effectif. Pour cela, nous allons faire l'hypothèse suivante :

$$PM(C) = PM(1) \times C$$

Le tableau du ratio écart-type/provision est le suivant :

Tableau 30 : Ratio Ecart type/Provision en fonction de la taille de l'échantillon		
Coefficient	Agri Retraite Points	REPMA
0,25	0,0038	0,0119
0,5	0,0027	0,0083
1	0,0019	0,0057
2	0,0013	0,0041
5	0,0008	0,0025
10	0,0006	0,0018

En notant C le coefficient appliqué, l'étude graphique indique que l'on peut modéliser σ par la formule suivante :

$$\sigma^2 = a \times C$$

Où a est un coefficient constant dépendant de tous les paramètres du portefeuille.

Pour établir cette formule, nous nous sommes basés sur le graphique suivant :

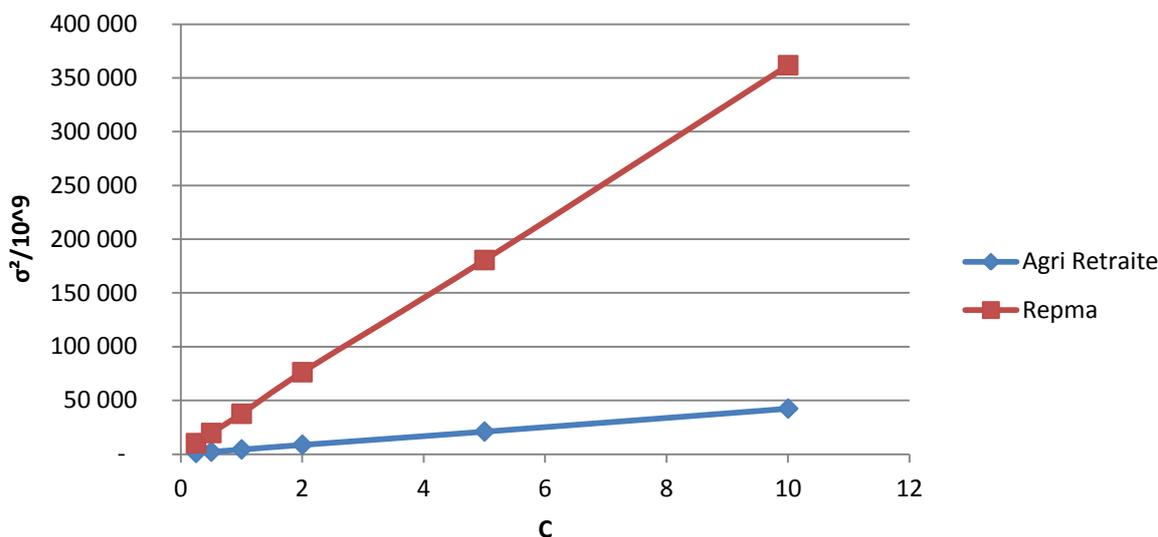


Figure 74 : Influence de la taille de l'échantillon sur l'écart type

Ce résultat est plus visible en prenant les logarithmes :

Influence de la taille de l'échantillon sur l'écart type

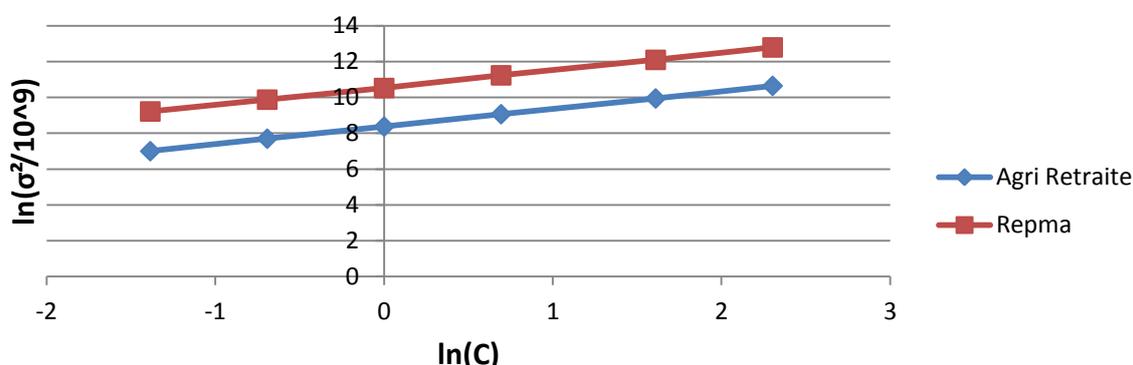


Figure 75 : Influence de la taille de l'échantillon sur l'écart type

Les coefficients obtenus pour la population de l'Agri Retraite Points et du REPMA sont les suivants :

Tableau 31 : Valeur du coefficient en fonction du produit

	a
Agri Retraite Points	4226.10 ⁹
REPMA	36230.10 ⁹

Les résultats obtenus sur les provisions semblent assez logiques car la population du contrat Agri Retraite Points étant constituée principalement de cotisants, une partie de l'erreur sur la mortalité est absorbée par l'actualisation des flux. En revanche, la supériorité des rentiers dans la population du produit REPMA induit une plus grande sensibilité aux variations de la mortalité car il s'agit de rentes en cours de service.

Ce coefficient va permettre de répondre à la question : combien faut-il d'assurés dans le portefeuille pour que le biais de la provision mathématique lié à l'erreur d'estimation soit limité à 2 % de sa valeur avec une certitude de 95 % ?

La provision du produit REPMA étant plus sensible à la variation des effectifs, le calcul sera mené sur ce produit.

On cherche C tel que $\frac{1,96\sigma(C)}{PM(C)} \leq 2 \%$, on obtient :

$$C = a \left(\frac{1,96}{PM(1) \times 2 \%} \right)^2$$

Par application numérique, on obtient $C=0,3$. C'est-à-dire que si l'on avait environ 3 fois moins d'assurés, la construction d'une table de mortalité par le modèle de Brass induirait une erreur d'estimation sur la provision mathématique du produit REPMA de maximum 2 % avec une probabilité de 95 %. Ce constat ne tient pas compte de la compatibilité de la table en référence externe avec la population étudiée, ni de l'erreur liée au modèle appliqué.

CONCLUSION

La proximité des contrats Agri Retraite Points et REPMA, et de la population sous-jacente, a permis de construire des tables de mortalité sexuées sur le regroupement de ces 2 populations.

La garantie de réversion de la rente prend effet lorsque l'âge du bénéficiaire dépasse un certain seuil. Cette clause entraîne des retards dans la déclaration des décès pour les cotisants. Ce retard dans la connaissance des décès n'a pas permis de prendre en compte les années les plus récentes dans l'étude de mortalité. Un compromis visant à minimiser le nombre de cotisants dans la population d'étude et à maximiser l'information disponible dans les décès nous a amené à limiter l'étude à l'année 2008 et à considérer uniquement les assurés de plus de 60 ans.

L'insuffisance des données pour les âges élevés, mise en œuvre par la validité du test Khi2, a imposé de limiter la prise en compte des données à 85 ans pour les hommes et à 88 ans pour les femmes. Par la même méthode, l'historique disponible a été limité à 1990 pour les hommes et 1997 pour les femmes.

La disponibilité des variables pour chaque assuré dans les bases de données a permis de mettre en œuvre la méthode de Kaplan-Meier pour l'ajustement des taux bruts. Le nombre de décès obtenus avec cet estimateur est inférieur au nombre de décès réels. De fait, l'ajustement s'avère être prudent.

Les modèles de Lee-Carter et Bongaarts ont été mis en œuvre uniquement sur la population des hommes car la population des femmes était trop faible pour appliquer les modèles.

L'hétérogénéité des paramètres obtenus par le modèle de Lee-Carter a conduit à modéliser les coefficients *beta* par un polynôme de degré 2. Le processus ARIMA a ensuite été employé afin de modéliser la série temporelle *kappa*. Mais la faiblesse d'historique n'a pas permis de définir un processus avec tendance. Il a été nécessaire de forcer cette tendance, ce qui a eu pour conséquence d'ajuster la série par un processus linéaire entouré d'un bruit blanc selon le critère AIC. De plus, la linéarité de la série *alpha* a permis de déterminer une forme paramétrique à la surface de mortalité et d'effectuer un nouvel ajustement.

Le modèle de Bongaarts a été plus difficile à ajuster à notre jeu de données. La modélisation de la série temporelle par 2 coefficients n'a pas permis de dégager de tendance nette. Toutefois, une tentative de paramétrisation de la série a été mise en œuvre mais celle-ci s'est avérée de moins bonne qualité que l'ajustement de Lee-Carter paramétrique.

Le modèle de Brass a ensuite été employé sur la population des hommes et des femmes avec en référence externe les tables TGH et TGF et les tables INED 1889-1997. De part l'absence d'historique pour les tables règlementaires avant 1996, la plage d'étude des hommes a été limitée à 1996-2008.

Pour la table des hommes, les ajustements avec les tables INED et TGH n'étant pas comparables, du fait de la forme de base des tables, il a été fait le choix d'ajuster des coefficients pour le modèle de Brass âge par âge. Les 2 ajustements ont ensuite été pondérés pour ne former qu'une seule table.

Divers tests statistiques ont été menés afin de comparer les ajustements par le modèle de Lee-Carter, Bongaarts et Brass. Le modèle finalement retenu, selon ces critères, est le modèle de

Brass. Mais il est à noter que la surface paramétrique déterminée par le modèle de Lee-Carter répondait bien aux différents tests.

La table des femmes a, quant à elle, été déterminée avec un unique coefficient. Le choix, entre l'ajustement avec la TGH ou la table INED des femmes, a été effectué en analysant la dérive de la mortalité. La TGF sous-estimait la tendance de notre portefeuille, le choix s'est donc porté sur l'ajustement avec la table INED.

La fermeture des tables aux âges élevés a été réalisée par la méthode de Denuit & Goderniaux car elle permet de donner un âge ultime cohérent avec la durée de vie humaine. Une comparaison, par moyenne des quotients de mortalité sur chaque année, entre le résultat de cette méthode et les données brutes indique que l'ajustement effectué est conforme aux données observées.

Pour la fermeture aux âges faibles de la table des hommes, un coefficient de Brass a été déterminé sur la plage 60-70 ans par rapport à la table INED et appliqué aux âges inférieurs. Il en résulte une forte prudence des taux construits par rapport aux taux bruts mais l'impact sur les provisions devrait être faible car il y a peu de décès dans ces âges et il s'agit de rentes différées.

Pour la fermeture aux âges faibles des femmes, le coefficient de la table INED estimé précédemment a été conservé. En comparant la mortalité des hommes et celle des femmes pour ces âges, il s'est avéré que la mortalité des femmes pour les âges faibles devenait supérieure à celle des hommes. Il a donc été fait le choix de prendre le minimum entre ces 2 valeurs.

Globalement, les tables règlementaires sont plus prudentes que les tables construites. Ce constat a pour principale cause une plus forte mortalité pour les âges élevés dans les tables construites. L'utilisation des tables d'expérience fait baisser la provision du produit Agri Retraite Points de 1,4 % et celle du produit REPMA de 2,6 %.

On a eu recours à des simulations afin de mesurer le risque d'estimation sur les provisions calculées. A partir du nombre d'assurés par âge et des tables construites, des simulations de lois de Bernoulli ont été effectuées. Les taux bruts obtenus ont ensuite été ajustés par le modèle de Brass avec en référence externe les tables construites. Le calcul des provisions sur chacune des simulations a permis de mettre en avant la distribution normale de la loi des provisions et ainsi d'estimer son écart type. Sur la base de l'intervalle de confiance, l'erreur d'estimation a finalement été mesurée par la formule suivante :

$$erreur = \frac{1,96\sigma}{PM}$$

L'erreur sur la provision du produit Agri Retraite Points, par cette méthode, est de 0,37 % et celle du produit REPMA de 1,12 %. L'erreur sur la provision du produit REPMA est plus importante car la population de ce produit est plus âgée, il s'agit principalement de rentes en cours de service contrairement au produit Agri Retraite Points.

Par la même méthode, il a été étudié l'influence de la taille de la population sur l'écart type de la provision. Il a été appliqué un coefficient C sur le nombre d'assurés et sur la provision mathématique. L'étude graphique a montré que l'écart type était simplement proportionnel à ce coefficient.

BIBLIOGRAPHIE

BONGAARTS J. [2004] *Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods*, Population Council, n°194.

CHASSELOUP DE CHATILLON P. ET DUREU S. [1998]. *Quel avenir pour les régimes L.441 fermés ? Etude du REPMA*, Mémoire CEA, Paris.

DELWARDE A. [2004]. *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*, Mémoire UCL, Belgique.

DELWARDE, A., & DENUIT, M. [2005]. *Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives*, Paris : Economica.

DENUIT M., QUASHIE A. [2005] *Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges*, Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

GIRARD J. [2008] *Étude de mortalité sur deux régimes L.441. Impact sur des projections long terme et adaptation de la règle de pilotage des revalorisations*. Mémoire ISUP, Paris.

HASS S. [2006]. *Méthodologie d'évaluation économique des traités proportionnels en réassurance vie. Application au swap de mortalité*, Mémoire ISFA.

KAMEGA A., PLANCHET F. [2010]. *Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience*, Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 ISFA, WINTER & Associates.

LELIEUR V. [2005] « *Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations* », ISFA, Mémoire d'actuariat.

PETAUTON P. [1996]. *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Paris : DUNOD.

PLANCHET F. [2006] *Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation*, Publication de l'Institut des Actuaire.

PLANCHET F., THEROND P. [2006] *Modèles de Durée - Applications actuarielles*, Paris : Economica.

ANNEXE 1 : COEFFICIENTS REPMA ET AGRI RETRAITE POINTS

➤ REPMA

Coefficients d'anticipation ou de report de rente :

Age	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
Coefficient	0,61	0,63	0,66	0,69	0,72	0,76	0,80	0,84	0,89	0,94
Age	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Coefficient	1,04	1,10	1,15	1,20	1,25	1,31	1,37	1,44	1,50	1,58

Coefficients à appliquer au nombre de points acquis selon l'âge d'adhésion (ou de rachat) :

Age	Coefficient	Age	Coefficient	Age	Coefficient	Age	Coefficient
21	1,19	26	1,14	31	1,09	36	1,04
22	1,18	27	1,13	32	1,08	37	1,03
23	1,17	28	1,12	33	1,07	38	1,02
24	1,16	29	1,11	34	1,06	39	1,01
25	1,15	30	1,10	35	1,05	40 à 50	1,00
Age	Coefficient	Age	Coefficient	Age	Coefficient		
51	0,98	56	0,88	61	0,78		
52	0,96	57	0,86	62	0,76		
53	0,94	58	0,84	63	0,74		
54	0,92	59	0,82	64	0,72		
55	0,90	60	0,80	65	0,70		

Coefficient de réversion en fonction de l'écart d'âge avec le bénéficiaire de la réversion :

Le titulaire de la rente est plus âgé que le bénéficiaire de la réversion.				Le titulaire de la rente est moins âgé que le bénéficiaire de la réversion.			
Différence d'âge		Coef.	Différence d'âge		Coef.	Différence de réduct.	
0- 3 ans		0,85	38-42 ans		0,43	0-3 ans	0,85
4- 7 ans		0,79	43-47 ans		0,40	4-7 ans	0,90
8-12 ans		0,73	48-52 ans		0,38	8 ans	0,94
13-17 ans		0,69	53-57 ans		0,35	et plus	
18-22 ans		0,62	58-62 ans		0,33		
23-27 ans		0,56	63-67 ans		0,31		
28-32 ans		0,51	68 ans		0,30		
33-37 ans		0,47	et plus				

➤ Agri Retraite Points

Coefficients d'anticipation ou de report de rente :

Age	55	56	57	58	59	60
Coefficient	0,77	0,81	0,85	0,90	0,95	1,00

AGE	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Coefficient	1,055	1,115	1,175	1,250	1,325	1,405	1,495	1,595	1,705	1,825

COEFFICIENTS « OPTION RENTE INDIVIDUELLE AVEC ANNUITES GARANTIES »

Durée des annuités garanties	5	10	15	20
Coefficient	0,98	0,96	0,93	0,90

COEFFICIENTS « REVERSION A LA LIQUIDATION »

		60%	100%
L'adhérent est plus âgé que le bénéficiaire de la réversion	0 à 3 ans	0,90	0,85
	4 à 7 ans	0,86	0,80
	8 à 12 ans	0,82	0,75
	13 à 17 ans	0,78	0,70
	18 à 22 ans	0,74	0,65
	23 à 29 ans	0,70	0,60
	30 à 39 ans	0,62	0,50
	40 à 49 ans	0,52	0,40
L'adhérent est moins âgé que le bénéficiaire de la réversion	50 et plus	0,40	0,30
	0 à 3 ans	0,90	0,85
	4 à 7 ans	0,94	0,90
	8 et plus	0,97	0,95

Coefficients à appliquer à la réversion en cas de décès avant liquidation :

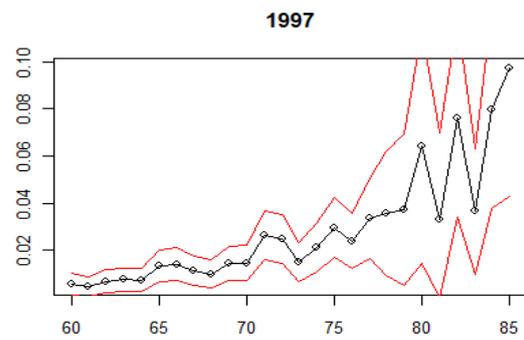
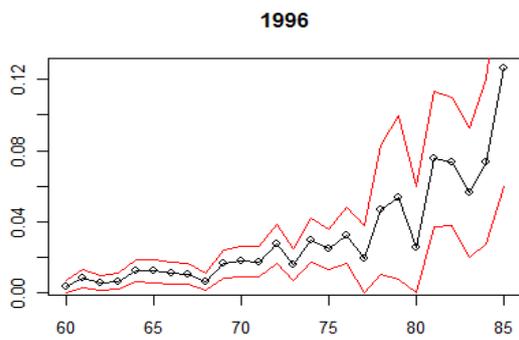
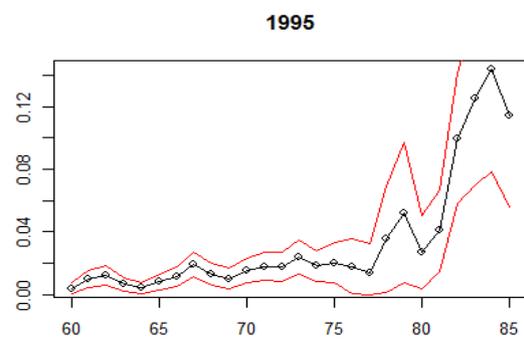
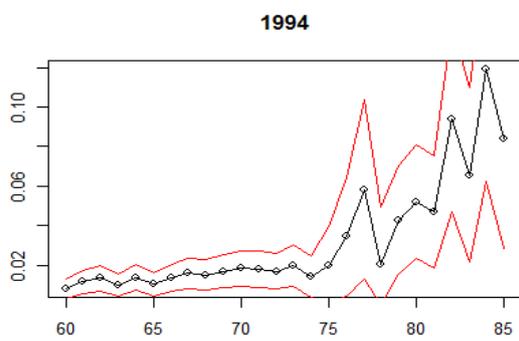
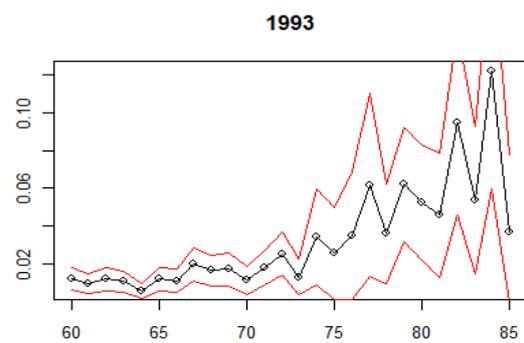
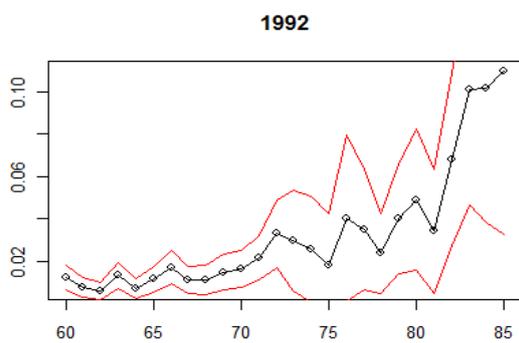
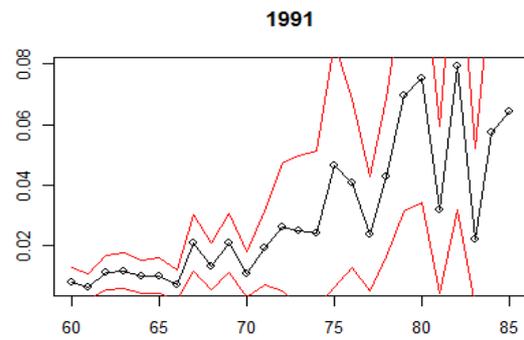
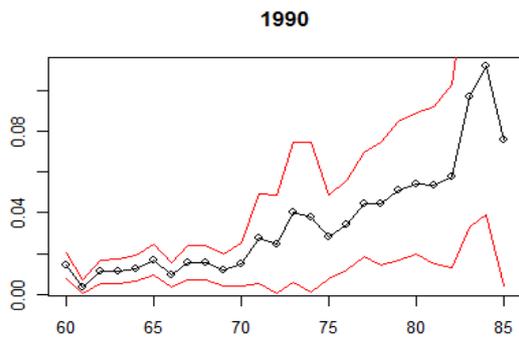
Age du réversataire à la liquidation	55	56	57	58	59	60
Coefficient	0,77	0,81	0,85	0,90	0,95	1,00

Coefficients à appliquer au nombre de points acquis selon l'âge au moment du versement (ou de rachat) :

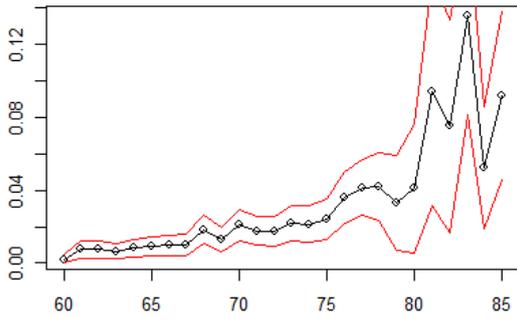
Age	avant 25 ans	de 25 à 29 ans	de 30 à 34 ans	de 35 à 39 ans	de 40 à 44 ans	de 45 à 49 ans	de 50 à 54 ans	de 55 à 59 ans	à partir de 60 ans
Coefficient d'âge	1,95	1,7	1,5	1,3	1,15	1	0,88	0,77	0,7
Classe d'appel	Nombre de points obtenus en fonction de l'âge au moment du versement								
1	91,65	79,90	70,50	61,10	54,05	47,00	41,36	36,19	32,90
2	183,30	159,80	141,00	122,20	108,10	94,00	82,72	72,38	65,80
3	274,95	239,70	211,50	183,30	162,15	141,00	124,08	108,57	98,70
4	366,60	319,60	282,00	244,40	216,20	188,00	165,44	144,76	131,60
5	460,20	401,20	354,00	306,80	271,40	236,00	207,68	181,72	165,20
6	553,80	482,80	426,00	369,20	326,60	284,00	249,92	218,68	198,80
7	639,60	557,60	492,00	426,40	377,20	328,00	288,64	252,56	229,60
8	733,20	639,20	564,00	488,80	432,40	376,00	330,88	289,52	263,20
9	826,80	720,80	636,00	551,20	487,60	424,00	373,12	326,48	296,80
10	912,60	795,60	702,00	608,40	538,20	468,00	411,84	360,36	327,60
11	1 099,80	958,80	846,00	733,20	648,60	564,00	496,32	434,28	394,80
12	1 372,80	1 196,80	1 056,00	915,20	809,60	704,00	619,52	542,08	492,80
13	1 840,80	1 604,80	1 416,00	1 227,20	1 085,60	944,00	830,72	726,88	660,80
14	2 293,20	1 999,20	1 764,00	1 528,80	1 352,40	1 176,00	1 034,88	905,52	823,20
15	3 135,60	2 733,60	2 412,00	2 090,40	1 849,20	1 608,00	1 415,04	1 238,16	1 125,60

ANNEXE 2 : QUOTIENTS DE MORTALITE BRUTS

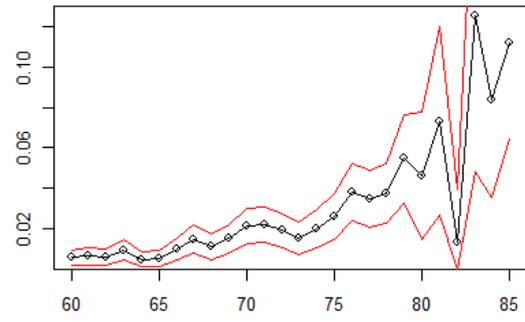
➤ Quotients de mortalité des hommes



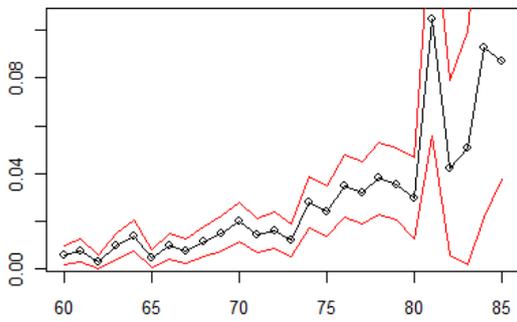
1998



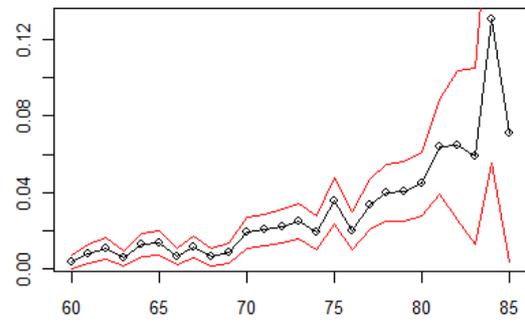
1999



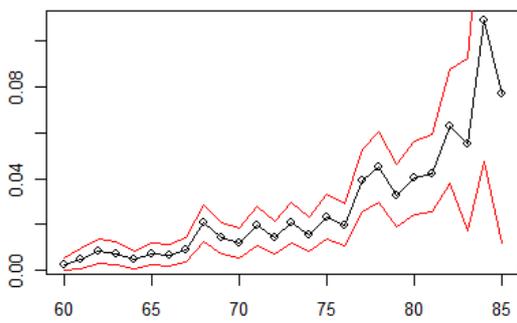
2000



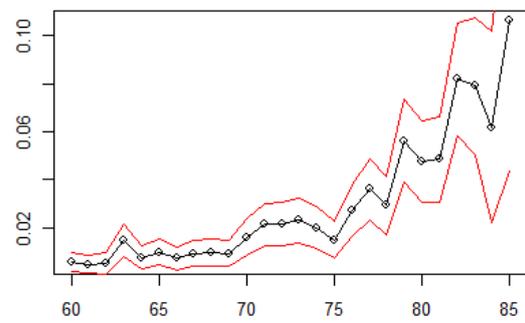
2001



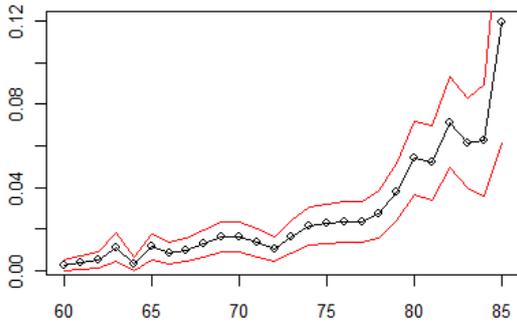
2002



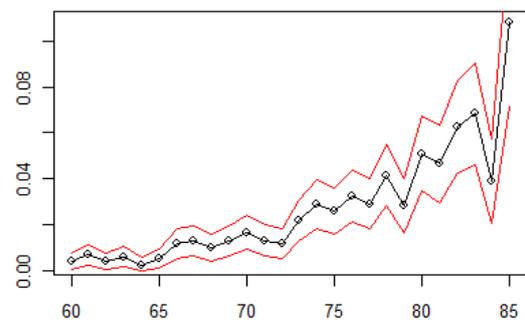
2003



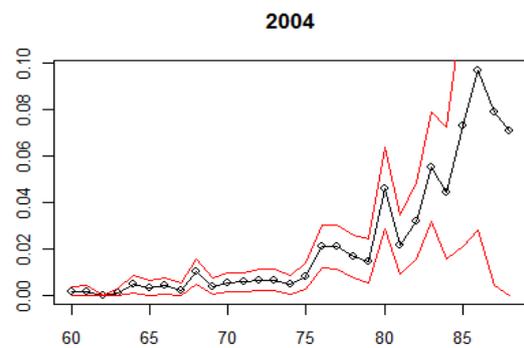
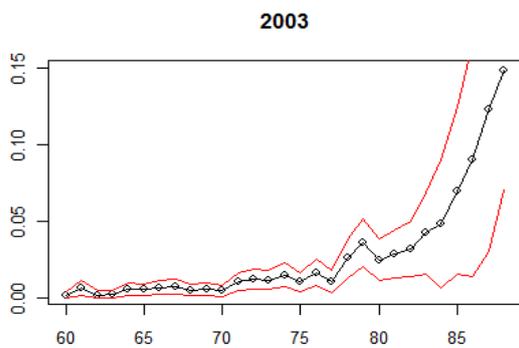
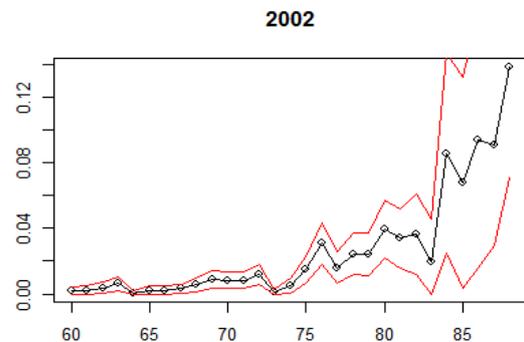
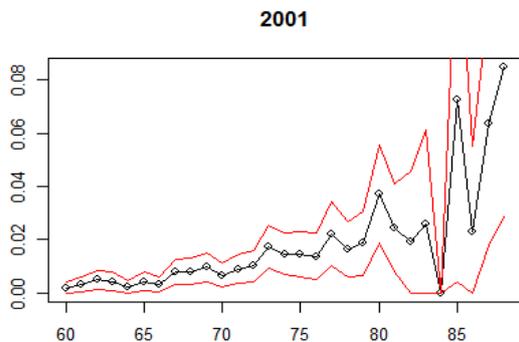
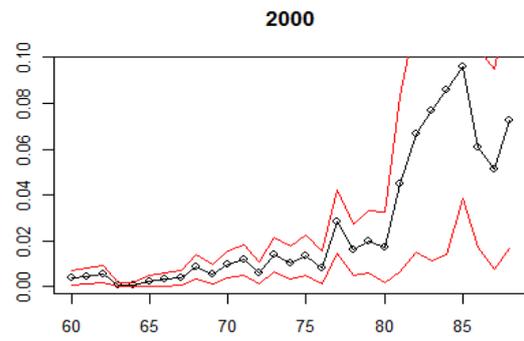
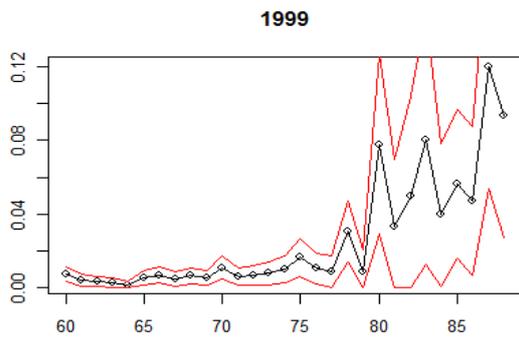
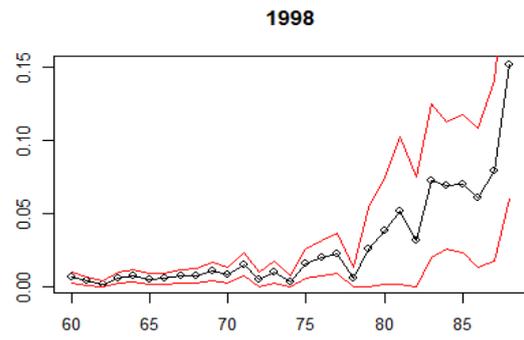
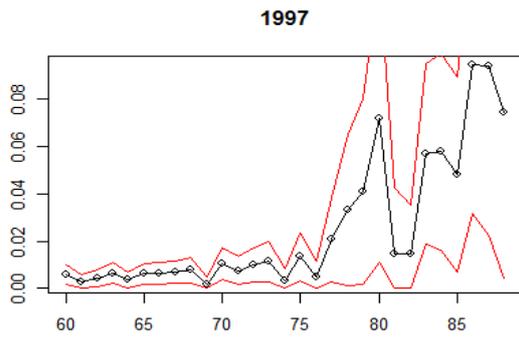
2004



2005



➤ **Quotients de mortalité des femmes**



ANNEXE 3 : ESPERANCE DE VIE ET MONTANT D'UNE RENTE

2011	Espérance de vie				Valeur actualisée d'une rente servie à partir de 60 ans			
	âge	TGH	L441H	TGF	L441F	TGH	L441H	TGF
40	50,03	49,25	53,56	53,23	14,99	14,79	16,26	16,31
41	48,90	48,13	52,43	52,13	15,24	15,03	16,53	16,60
42	47,76	47,01	51,31	51,03	15,49	15,28	16,82	16,89
43	46,63	45,89	50,18	49,94	15,75	15,54	17,10	17,19
44	45,51	44,78	49,06	48,85	16,01	15,80	17,40	17,50
45	44,38	43,66	47,95	47,76	16,27	16,06	17,70	17,81
46	43,26	42,55	46,83	46,67	16,54	16,33	18,00	18,12
47	42,15	41,44	45,72	45,58	16,82	16,60	18,32	18,45
48	41,04	40,33	44,61	44,50	17,10	16,88	18,64	18,78
49	39,93	39,23	43,51	43,42	17,39	17,16	18,97	19,12
50	38,82	38,12	42,42	42,34	17,69	17,45	19,30	19,46
51	37,72	37,03	41,33	41,26	17,99	17,75	19,65	19,81
52	36,62	35,93	40,24	40,19	18,30	18,05	20,01	20,17
53	35,53	34,83	39,16	39,11	18,62	18,36	20,37	20,54
54	34,44	33,75	38,09	38,04	18,95	18,68	20,75	20,92
55	33,37	32,66	37,01	36,97	19,29	19,01	21,13	21,30
56	32,31	31,58	35,94	35,91	19,65	19,34	21,52	21,69
57	31,25	30,49	34,87	34,84	20,02	19,69	21,93	22,09
58	30,21	29,42	33,82	33,77	20,40	20,04	22,35	22,50
59	29,17	28,35	32,76	32,70	20,80	20,41	22,78	22,92
60	28,12	27,30	31,71	31,64	21,20	20,79	23,22	23,35
61	27,09	26,25	30,66	30,57	20,60	20,17	22,66	22,78
62	26,05	25,21	29,61	29,52	19,99	19,54	22,08	22,19
63	25,03	24,18	28,55	28,46	19,37	18,91	21,49	21,59
64	24,00	23,17	27,50	27,41	18,75	18,27	20,88	20,98
65	23,00	22,17	26,46	26,37	18,12	17,64	20,27	20,37
66	22,00	21,19	25,43	25,33	17,48	17,01	19,65	19,74
67	21,01	20,23	24,40	24,30	16,84	16,38	19,03	19,11
68	20,03	19,29	23,37	23,28	16,20	15,75	18,39	18,47
69	19,08	18,36	22,36	22,26	15,55	15,11	17,75	17,83
70	18,14	17,44	21,36	21,25	14,91	14,48	17,11	17,17
71	17,22	16,55	20,37	20,24	14,28	13,85	16,45	16,50
72	16,32	15,67	19,39	19,24	13,64	13,22	15,80	15,83
73	15,45	14,80	18,42	18,25	13,02	12,60	15,14	15,14
74	14,59	13,95	17,47	17,27	12,40	11,97	14,47	14,45
75	13,76	13,11	16,53	16,30	11,78	11,34	13,81	13,76
76	12,93	12,28	15,61	15,34	11,16	10,70	13,15	13,07
77	12,12	11,46	14,71	14,40	10,54	10,07	12,50	12,37
78	11,33	10,66	13,84	13,48	9,92	9,44	11,85	11,67

79	10,55	9,89	12,98	12,56	9,31	8,82	11,20	10,97
80	9,81	9,15	12,15	11,68	8,72	8,22	10,56	10,28
81	9,10	8,44	11,34	10,81	8,14	7,63	9,94	9,59
82	8,42	7,76	10,57	9,97	7,58	7,07	9,32	8,92
83	7,79	7,11	9,82	9,15	7,06	6,52	8,73	8,25
84	7,19	6,49	9,11	8,37	6,56	5,99	8,15	7,60
85	6,63	5,90	8,44	7,63	6,08	5,48	7,60	6,97
86	6,10	5,33	7,80	6,92	5,63	4,98	7,07	6,37
87	5,61	4,80	7,19	6,26	5,20	4,51	6,56	5,80
88	5,14	4,31	6,62	5,63	4,79	4,07	6,07	5,25
89	4,69	3,86	6,10	5,05	4,40	3,67	5,62	4,74
90	4,27	3,45	5,60	4,52	4,02	3,29	5,19	4,26
91	3,89	3,08	5,15	4,03	3,68	2,95	4,80	3,82
92	3,54	2,74	4,73	3,58	3,36	2,64	4,43	3,41
93	3,21	2,43	4,36	3,18	3,06	2,35	4,09	3,04
94	2,93	2,16	4,01	2,81	2,80	2,09	3,78	2,70
95	2,67	1,91	3,69	2,47	2,56	1,85	3,49	2,39
96	2,44	1,68	3,39	2,18	2,35	1,64	3,22	2,11
97	2,23	1,48	3,12	1,91	2,15	1,45	2,97	1,86
98	2,03	1,30	2,86	1,67	1,97	1,27	2,74	1,63
99	1,85	1,14	2,63	1,45	1,80	1,12	2,53	1,42
100	1,69	0,99	2,41	1,26	1,64	0,98	2,32	1,24

2015	Espérance de vie				Valeur actualisée d'une rente servie à partir de 60 ans			
	âge	TGH	L441H	TGF	L441F	TGH	L441H	TGF
40	50,68	49,78	54,19	53,70	15,24	15,00	16,48	16,49
41	49,54	48,67	53,06	52,60	15,49	15,25	16,76	16,78
42	48,41	47,55	51,93	51,50	15,74	15,51	17,05	17,08
43	47,28	46,44	50,81	50,41	16,01	15,77	17,34	17,38
44	46,15	45,32	49,69	49,31	16,27	16,03	17,64	17,69
45	45,03	44,21	48,58	48,22	16,54	16,30	17,95	18,00
46	43,91	43,10	47,46	47,14	16,82	16,58	18,26	18,32
47	42,79	42,00	46,35	46,05	17,10	16,86	18,58	18,65
48	41,68	40,89	45,24	44,97	17,39	17,14	18,90	18,99
49	40,57	39,79	44,14	43,89	17,69	17,43	19,24	19,33
50	39,46	38,68	43,04	42,81	17,99	17,73	19,58	19,68
51	38,36	37,59	41,96	41,73	18,30	18,03	19,93	20,04
52	37,26	36,49	40,87	40,66	18,61	18,34	20,29	20,40
53	36,16	35,39	39,79	39,59	18,94	18,66	20,66	20,78
54	35,07	34,30	38,71	38,52	19,27	18,98	21,04	21,16
55	33,99	33,22	37,63	37,45	19,62	19,32	21,43	21,55
56	32,93	32,13	36,55	36,39	19,98	19,66	21,83	21,95
57	31,87	31,05	35,48	35,32	20,36	20,00	22,24	22,35
58	30,82	29,97	34,42	34,25	20,74	20,36	22,66	22,77
59	29,77	28,90	33,36	33,18	21,14	20,73	23,10	23,19
60	28,72	27,84	32,30	32,12	21,55	21,12	23,54	23,63

61	27,68	26,78	31,25	31,06	20,96	20,50	22,98	23,06
62	26,64	25,73	30,19	30,00	20,35	19,87	22,41	22,48
63	25,60	24,69	29,14	28,95	19,73	19,24	21,82	21,88
64	24,57	23,67	28,08	27,90	19,11	18,60	21,22	21,28
65	23,56	22,67	27,03	26,85	18,48	17,97	20,61	20,67
66	22,55	21,68	25,99	25,81	17,84	17,34	20,00	20,05
67	21,55	20,71	24,95	24,78	17,20	16,71	19,37	19,42
68	20,57	19,76	23,92	23,76	16,56	16,07	18,74	18,79
69	19,60	18,82	22,90	22,74	15,91	15,44	18,10	18,15
70	18,65	17,90	21,89	21,73	15,27	14,81	17,45	17,49
71	17,72	16,99	20,89	20,72	14,63	14,18	16,80	16,83
72	16,81	16,10	19,90	19,71	13,99	13,55	16,14	16,16
73	15,92	15,23	18,92	18,71	13,36	12,92	15,48	15,48
74	15,05	14,36	17,95	17,72	12,74	12,28	14,82	14,79
75	14,20	13,51	17,00	16,75	12,11	11,64	14,15	14,09
76	13,36	12,66	16,07	15,78	11,48	11,00	13,49	13,39
77	12,53	11,83	15,16	14,82	10,86	10,36	12,82	12,69
78	11,72	11,01	14,26	13,89	10,23	9,72	12,17	11,99
79	10,93	10,22	13,39	12,96	9,61	9,09	11,51	11,28
80	10,17	9,46	12,54	12,06	9,00	8,48	10,87	10,58
81	9,44	8,74	11,72	11,17	8,42	7,88	10,23	9,89
82	8,74	8,04	10,92	10,31	7,85	7,31	9,60	9,20
83	8,09	7,38	10,16	9,47	7,31	6,75	9,00	8,51
84	7,47	6,74	9,42	8,67	6,79	6,21	8,41	7,85
85	6,89	6,13	8,73	7,90	6,30	5,68	7,84	7,21
86	6,34	5,54	8,06	7,18	5,84	5,16	7,29	6,59
87	5,83	4,99	7,44	6,49	5,40	4,68	6,76	6,00
88	5,34	4,49	6,85	5,84	4,97	4,23	6,26	5,44
89	4,88	4,02	6,30	5,25	4,56	3,81	5,79	4,91
90	4,44	3,60	5,79	4,69	4,17	3,42	5,35	4,42
91	4,05	3,21	5,32	4,19	3,82	3,07	4,95	3,97
92	3,68	2,85	4,89	3,72	3,49	2,74	4,57	3,54
93	3,34	2,53	4,50	3,30	3,18	2,44	4,22	3,16
94	3,05	2,24	4,14	2,92	2,91	2,17	3,90	2,80
95	2,78	1,98	3,81	2,57	2,66	1,93	3,60	2,48
96	2,54	1,75	3,50	2,26	2,44	1,70	3,33	2,19
97	2,32	1,54	3,22	1,98	2,24	1,50	3,07	1,93
98	2,12	1,35	2,96	1,73	2,05	1,32	2,83	1,69
99	1,93	1,18	2,72	1,51	1,87	1,16	2,61	1,48
100	1,76	1,03	2,49	1,31	1,71	1,01	2,40	1,29