



Lyon 1

Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES



**Mémoire présenté
devant l’Institut de Science Financière et d’Assurances
pour l’obtention
du diplôme d’Actuaire de l’Université de Lyon**

le 4 janvier 2011

Par : Marie DOITTEAU

Titre: La réglementation et la modélisation stochastique de l’incapacité.

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l’Institut des Actuaires

Mme Catherine PIGEON

Entreprise :

Macif-Mutualité

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Alexis BIENVENÜE

M. Pierre CORREGE

M. Areski COUSIN

Invité :

Mme Diana DOROBANTU

***Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels*** (après expiration de
l’éventuel délai de confidentialité)

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

Signature du responsable entreprise

M. Nicolas LEBOISNE

Pierre Corrège

M. Stéphane LOISEL

Signature du candidat

Mlle Esterina MASIELLO

Marie Doitteau

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

Résumé

Mots clés : arrêt de travail, incapacité, invalidité en attente, invalidité, stochastique, modèle interne, QIS 5, formule standard, réglementation, table d'expérience, maintien en incapacité, loi de maintien, Kaplan Meier, Whittaker-Henderson, prévoyance, prévoyance collective, prévoyance individuelle.

Un challenge majeur actuel des assureurs est la construction de leur modèle interne dans la perspective de l'entrée en vigueur de la directive cadre solvabilité II au 31 décembre 2012. Le modèle interne d'une entreprise d'assurance a pour vocations : l'analyse et le pilotage stratégique de ses risques et l'évaluation de son besoin en fonds propres. Le modèle simule ainsi les flux futurs (règlements, rendements financiers...) de l'entreprise. Il détermine la distribution de la valeur actuelle de l'insuffisance d'actif net¹, à horizon un an. Puis, il en déduit l'évaluation économique du niveau de fonds propres à détenir aujourd'hui sans risque de ruine dans un an, avec une probabilité de 99,5 %. La construction d'un modèle interne se décompose alors en plusieurs phases, notamment celle du paramétrage sur la base historique des données de l'entreprise.

Ce mémoire a donc deux principaux objectifs :

L'un consiste à mettre l'accent sur les évolutions contractuelles et juridiques spécifiques à la garantie arrêt de travail. L'autre est de présenter, au sein du modèle interne, les premières études prioritaires de calibration du risque incapacité issu de contrats individuels de prévoyance.

Dans un premier temps, ce mémoire exposera, l'environnement juridique et contractuel (le régime de la sécurité sociale, la loi de mensualisation, la loi Evin...). Il détaillera la réglementation comptable française en vigueur (le provisionnement à l'aide des lois du BCAC). Il développera la réglementation prudentielle Solvabilité II en cours d'élaboration et commenterà la directive solvabilité II, la 5^{ème} étude d'impact et le provisionnement économique.

Dans un second temps, ce mémoire s'attachera à la modélisation des sinistres futurs attritionnels incapacité (par rapport à la date d'évaluation du besoin en fonds propres). Macif-Mutualité tiendra compte de son profil de risque en collectant les caractéristiques de ses sinistres historiques. La fréquence passée observée de survenance servira à calibrer le futur. L'aléa statistique autour de la probabilité conditionnelle d'expérience de sortie d'incapacité sera modélisé. On cherchera alors à intégrer les fluctuations futures autour de la valeur centrale fondée sur le processus de sinistralité de l'entreprise.

¹ L'actif net de l'assureur est la différence entre la valeur de marché de ses actifs et la valeur économique de ses passifs. Quant à l'insuffisance d'actif net, elle est l'opposé du signe de la valeur de l'actif net.

Abstract

Keywords : *Disability, stochastic, internal model, QIS 5, standard formula, regulation, experience table, disability table, Kaplan Meier, Whittaker-Henderson.*

One of the major current challenges that insurance companies might choose to face with respect to the Solvency II reform is the development of their own internal model. This challenge is even more considerable if it is considered the fact that the internal models should be ready for the 31 December 2012. An internal model has to allow insurance company to analyse its risks to evaluate its own funds and must also permit the company to take strategic decisions concerning these risks. The internal model simulates future company's flows (future claims, investment yields...) which allow to estimate the company's future net asset value¹ shortfall distribution. The present value of the distribution permits, from an economic perspective, to evaluate the level of own funds the insurer has to possess today to ensure that the probability of not being in ruin in a year is more than 99.5 %. The internal model creation is therefore decomposed into several construction phases, one of which is the parameter estimation. This estimation is done using the company's historic data.

This present report has therefore two main objectives. The first objective is to present some of the parameter estimation studies, done for the internal model, for the disability risk of individual contracts. The second objective is to present the juridical and contractual context that regulates this risk.

From this perspective, we will first present the juridical context concerning the disability contracts (the social security regime, the employers' obligations, the Evin law...), the accounting present French norm for the disability (reserve estimation using the BCAC tables) and at last the prudential Solvency II regulation that is currently in construction. We will comment on the Solvency II directive, the fifth impact study and the reserves economic calculation.

Secondly, we will study the incorporation of future disability claims into the internal model. The internal model is based on the enterprise characteristics, in particular on its risk profile. This implies that the cornerstone to estimate future disability claims are the company's past claims. The company possesses a disability table that represents its own profile. We will incorporate, around this central disability table, a stochastic random element. We will therefore model random fluctuations around the central tendency based on the past claim process of the company.

¹ The Net Asset Value (NAV) is equal to the market value of assets minus the economic value of liabilities. The net asset value shortfall corresponds to the economic value of liabilities minus the value of assets.

Remerciements

Je tiens à formuler mes remerciements à l'ensemble des acteurs qui a contribué à la réalisation de ce mémoire :

Merci à Martin JIMENEZ, consultant vie à Milliman, pour son écoute, ses conseils et explications relatives à mes problématiques rencontrées

Merci à Pierre CORREGE, directeur du département de l'actuariat central à Macif-Mutualité, pour l'encadrement et la relecture du mémoire

Merci à Stéphane LOISEL, maître de conférences au Laboratoire de Science Actuarielle et Financière à l'ISFA, pour son suivi pédagogique

Merci aussi à l'ensemble de mes collègues du département de l'actuariat à Macif-Mutualité pour leur participation à la concrétisation de ce mémoire

Merci aux souscripteurs et gestionnaires de sinistres de Macif-Mutualité pour les renseignements relatifs aux règles de souscription et de gestion

Merci à mon employeur qui m'a permis de mener ces études

Merci aux consultants d'EMB France qui m'ont accompagnée lors de ma participation aux développements informatiques du modèle interne et qui ont fait preuve en outre de savoir-faire, de pédagogie et de disponibilité

Merci aux équipes pédagogiques et administratives de l'ISFA, école d'actuaire qui m'a permis de préparer mon MASTER au cours de ma scolarité

Et merci à ma famille pour la relecture de certains passages de ce mémoire.

Sommaire

INTRODUCTION.....	6
PARTIE I : LE CONTEXTE JURIDIQUE ET CONTRACTUEL.....	9
CHAPITRE 1 : L'ENVIRONNEMENT JURIDIQUE ET CONTRACTUEL EN PRÉVOYANCE	10
Section 1.1 : <i>La prévoyance.....</i>	10
Section 1.2 : <i>La prévoyance individuelle.....</i>	14
Section 1.3 : <i>L'Incapacité Temporaire et l'Incapacité Permanente (ITIP).....</i>	15
CHAPITRE 2 : LA RÉGLEMENTATION COMPTABLE FRANÇAISE EN VIGUEUR POUR LES RISQUES INCAPACITÉ ET INVALIDITÉ	23
Section 2.1 : <i>Les tables de maintien et de passage du BCAC.....</i>	23
Section 2.2 : <i>Le provisionnement d'inventaire du maintien et du passage</i>	24
CHAPITRE 3 : LA RÉGLEMENTATION PRUDENTIELLE SOLVABILITÉ II EN COURS D'ÉLABORATION	29
Section 3.1 : <i>Les objectifs et l'organisation du projet Solvabilité II</i>	29
Section 3.2 : <i>La Directive Solvabilité II</i>	29
Section 3.3 : <i>QIS 5.....</i>	33
Section 3.4 : <i>Le provisionnement économique du maintien et du passage.....</i>	39
PARTIE II : LE CALIBRAGE DU RISQUE ARRET DE TRAVAIL DANS LE MODELE INTERNE	44
CHAPITRE 1 : LA STRUCTURE DU MODÈLE INTERNE	45
Section 1.1 : <i>EMB Igloo Professionnal</i>	45
Section 1.2 : <i>Structure du modèle interne</i>	46
CHAPITRE 2 : LA CONSTRUCTION DES PROFILS ATTRITIONNELS.....	47
Section 2.1 : <i>Méthode de construction</i>	47
Section 2.2 : <i>Méthode actuarielle de ventilation des profils des sinistres en cours</i>	51
CHAPITRE 3 : LA FRÉQUENCE DE SURVENANCE DES SINISTRES ATTRITIONNELS ARRÊT DE TRAVAIL	55
Section 3.1 : <i>Description et méthodologie générale.....</i>	55
Section 3.2 : <i>Les principales étapes du calibrage</i>	56
CHAPITRE 4 : LA MODÉLISATION DE L'ALÉA AUTOUR DES QUOTIENTS DE SORTIE D'INCAPACITÉ D'EXPÉRIENCE.....	59
Section 4.1 : <i>La table d'expérience de maintien en incapacité</i>	59
Section 4.2 : <i>La simulation des $q_{x,a}$.....</i>	60
Section 4.3 : <i>L'intérêt de la modélisation stochastique des $q_{x,a}$.....</i>	61
Section 4.4 : <i>Le calibrage de stoch$q_{x,a}$ par l'estimation BRUTE du coefficient de variation empirique.....</i>	64
Section 4.5 : <i>L'estimation BRUTE du quotient de sortie d'incapacité.....</i>	65
Section 4.6 : <i>Le calibrage de la probabilité de sortie stochastique par le LISSAGE du coefficient de variation empirique brut.....</i>	71
Section 4.7 : <i>Résultats du risque incapacité en sortie d'Igloo</i>	81
CONCLUSION	83

<i>RÉFÉRENCES.....</i>	85
<i>TABLE DES ANNEXES.....</i>	87

Introduction

A l'échelle européenne, les premières obligations sur la marge de solvabilité ont débuté pour l'assurance non-vie par la directive de 1973³ et pour l'assurance vie, par celle de 1979⁴.

Toutefois, les directives solvabilité I de 2002⁵ ont modifié celles de 1973 et 1979. A ce jour, ces directives solvabilité I s'appliquent jusqu'à l'entrée en vigueur de la réforme solvabilité II. Leurs objectifs à l'origine étaient de renforcer la protection des assurés, en particulier en relevant la marge de solvabilité.

En effet, les directives solvabilité I imposent aux sociétés européennes d'assurance de disposer d'un montant minimum de fonds propres : l'exigence de marge de solvabilité. L'exigence vie est, dès lors, calculée à partir d'une formule dépendante des provisions mathématiques comptables et des capitaux sous risque. L'exigence non-vie se réfère aux primes et sinistres payés.

Une révision plus radicale des règles de solvabilité est devenue nécessaire au fil du temps : le projet solvabilité II naît. Le 9 avril 2003 marque la fin des réflexions sur la forme générale à suivre par le système de solvabilité européen. L'approche Lamfalussy est retenue et un système, composé de trois piliers, cohérent avec les règles du secteur bancaire (Bâle 2) est préféré.

Le projet Solvabilité II s'inscrit dans un cadre réglementaire et économique changeant (modélisation de la pandémie, évolution des techniques de gestion des risques, besoin de transparence et de responsabilité). Il met en lumière les insuffisances accrues de Solvabilité I. Il actualise le système de solvabilité européen en intégrant tous les risques effectifs pesant sur l'assureur. La marge de solvabilité est désormais dépendante du niveau de risque de l'entreprise. En conséquence, la réforme Solvabilité II vise : à mieux protéger les intérêts des assurés, à concevoir un cadre prudentiel européen plus adapté aux risques réels des compagnies d'assurance et à améliorer l'harmonisation européenne, internationale et intersectorielle.

Le vote de la directive cadre Solvabilité II par le Parlement Européen le 22 avril 2009 et son adoption le 5 mai 2009 par le Conseil pour les Affaires Économiques et Financières⁶ (ECOFIN) témoignent de l'atteinte du niveau un de la démarche Lamfalussy.

L'application de la directive est alors fixée au 31 décembre 2012. Les entreprises bénéficient ainsi de ce délai pour établir leurs comptes annuels en norme solvabilité II.

Par ailleurs, le 6 juillet 2010, les spécifications de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS 5) de la directive ont été publiées. Elles apportent des réponses techniques et intègrent le niveau deux des mesures techniques d'exécution du processus Lamfalussy. Les compagnies d'assurance sont invitées à répondre à cette étude. Le groupe Macif se mobilise donc jusqu'à la mi-novembre 2010 pour évaluer son bilan économique solvabilité II, son Capital Minimum Requis (MCR) et son Capital de Solvabilité Requis (SCR). Ces évaluations sont réalisées à l'aide de la formule standard calibrée par le CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors).

Il est nécessaire de souligner le rôle majeur du SCR destiné à absorber les pertes imprévues importantes, telles que les événements catastrophiques. Son calcul permet ainsi à l'assureur d'estimer économiquement son niveau de fonds propres à détenir aujourd'hui pour éviter d'être en ruine dans un an avec une probabilité de 99,5 %. Par ailleurs, le MCR définit le niveau de solvabilité à atteindre de manière obligatoire par la compagnie.

³ La directive de 1973 est référencée par le numéro 73-239.

⁴ La directive de 1979 est identifiée par le numéro 79-287.

⁵ Ces directives de 2002 sont référencées par 2002-13 pour l'assurance non-vie et par 2002-12 pour l'assurance vie.

⁶ ECOFIN signifie en anglais "ECONOMIC and FINANCIAL Affairs Council". Il exerce le pouvoir législatif en matière économique et financière, dans certains cas en codécision avec le Parlement Européen.

A l'issue de l'entrée en vigueur de la directive solvabilité II, les sociétés d'assurance pourront déroger à la formule standard dans le calcul du SCR à condition qu'elles obtiennent l'homologation de leur modèle interne par l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP). Le modèle interne d'une compagnie constitue l'ensemble du dispositif relatif à l'analyse et le pilotage stratégique de ses propres risques et à l'évaluation de son besoin en fonds propres. Il simule les flux futurs de l'entreprise, entre autres les règlements, les rendements financiers, etc.

La directive solvabilité II autorise, sous certains prérequis, la modélisation de la dépendance existante au sein et entre les catégories de risque pour tenir compte des effets de diversification. Elle permet d'intégrer les effets appropriés d'atténuation de risque à condition de modéliser le risque de crédit. Par exemple, la souscription de traités de réassurance par la compagnie réduit sa prise de risque mais l'expose au défaut de son réassureur.

Par ailleurs, la directive solvabilité II sous-entend la modélisation, à horizon un an, de l'insuffisance d'actif⁷ net de l'entreprise d'assurance, et plus précisément, la focalisation sur sa queue de distribution. La projection à un an et la mesure *Value at Risk* (VaR) de niveau de confiance 99,5 % sont au cœur du calcul du SCR. Toutefois, l'entreprise d'assurance ou de réassurance peut se référer à un autre horizon temporel ou à une autre mesure de risque à condition de garantir un niveau de protection des assurés équivalent à celui d'un horizon d'un an et d'une VaR à 99,5 %. La calibration des phénomènes graves et catastrophiques est donc indispensable.

La construction d'un modèle interne se décompose en plusieurs phases de la façon suivante : des études sur le choix du modèle, la rédaction du cahier des charges, les développements informatiques, les tests, le paramétrage du modèle sur l'expérience, la réconciliation des résultats, l'étude de la robustesse du modèle, etc.

La structure du modèle interne est née d'échanges et de réflexions partagées entre le groupe Macif et les consultants d'EMB. De plus, lors des développements informatiques sous EMB Igloo Professional with Extremib, l'équipe d'EMB nous a également accompagnés en nous conseillant et orientant.

Succédant aux phases de développements, Macif-Mutualité a débuté la calibration de ses risques issus de ses contrats individuels. Ce paramétrage s'inscrit dans la deuxième partie du mémoire. L'étude est, en outre, spécifiquement consacrée au risque arrêt de travail désigné aussi par le terme « incapacité temporaire de travail ». En effet, suite à une maladie ou un accident, l'assuré peut être contraint d'interrompre partiellement ou totalement son activité professionnelle.

Les premières calibrations prioritaires ont porté sur : l'estimation de l'aléa autour de la table d'expérience de maintien en incapacité, le calibrage de la fréquence future de survenance des arrêts de travail et la construction des profils attritionnels. Ces analyses sont détaillées dans ce mémoire. L'accent est notamment mis sur la modélisation de l'aléa statistique relatif à la probabilité conditionnelle de sortie d'incapacité. Cette volatilité naturelle traduit l'écart entre le quotient de sortie d'expérience et celui observé dans le futur. On cherche à modéliser la variabilité future autour de la valeur centrale fondée sur le processus de sinistralité de l'entreprise. La table d'expérience de maintien en incapacité permet donc à Macif-Mutualité de disposer d'une loi de maintien qui représente mieux sa population assurée que la table réglementaire du Bureau Commun des Assurances Collectives (BCAC). Par ailleurs, d'autres modules restent à calibrer comme les sinistres catastrophiques (grâce à la théorie des valeurs extrêmes) et la dépendance (par le calibrage de copules, de séries temporelles, etc.).

Quant à la première partie de ce mémoire, elle traite des évolutions contractuelles et juridiques spécifiques à la garantie arrêt de travail.

⁷ L'actif net de l'assureur est la différence entre la valeur de marché de ses actifs et la valeur économique de ses passifs. Quant à l'insuffisance d'actif net, elle est l'opposé du signe de la valeur de l'actif net.

L'environnement juridique et contractuel, la réglementation comptable française et la réglementation future prudentielle Solvabilité II sont commentés. Les références aux articles des codes (sécurité sociale et mutualité) sont d'usage quasi systématique pour justifier les règles exposées. Elles permettent à chacun de se tenir informé des évolutions juridiques. Le contexte réglementaire peut évoluer rapidement et le risque arrêt de travail en est dépendant. Effectivement, au cours du dernier trimestre 2010, le mode de calcul des Indemnités Journalières (IJ) par la Sécurité Sociale sera revu et pourra entraîner des IJ à la baisse. Ce projet de décret a été annoncé dans le cadre des mesures de maîtrise des dépenses d'assurance maladie. Par conséquent, si l'entreprise d'assurance s'est engagée à compléter l'émolumennt du salarié en cas d'arrêt de travail, celle-ci devra revoir à la hausse l'indemnité journalière à verser. En effet, les contrats proposés par les assureurs portent au-delà du barème appliqué par la sécurité sociale (prestations en espèces). Pour certains contrats, le souscripteur choisit un montant d'indemnité journalière. Pour d'autres, l'assureur s'engage à combler la différence de revenus entre une fraction du salaire brut éventuellement plafonné et les prestations versées par la sécurité sociale. Si les réformes actuelles du gouvernement, en particulier sur l'âge légal de départ à la retraite, aboutissent, elles engendreront une vraisemblable mise à jour des contrats avec garantie invalidité. Macif-Mutualité pourrait réactualiser certains de ses contrats car, actuellement, elle n'indemnise plus l'invalidité de l'assuré au-delà de ses 60 ans.

En dehors de ces aspects, on peut souligner l'impact des spécificités des garanties figurant dans les conditions générales du produit sur la modélisation des risques. La connaissance et compréhension du contrat sont primordiales pour l'appréhension des risques encourus. C'est pourquoi, la présentation de la garantie indemnité journalière des produits abordés dans l'étude figure dans ce mémoire.

Partie I :

LE CONTEXTE JURIDIQUE ET CONTRACTUEL

Chapitre 1 : L'environnement juridique et contractuel en prévoyance

Section 1.1 : La prévoyance

1.1.1 Les acquis de la Sécurité Sociale

La Sécurité Sociale (SS) couvre quatre risques qui forment ses quatre branches actuelles :

1. La branche maladie (maladie, maternité, invalidité, décès) ;
2. La branche accidents du travail et maladies professionnelles ;
3. La branche vieillesse et veuvage (retraite) ;
4. La branche famille (dont handicap, logement...).

Les lois du 5 avril 1928 et du 30 avril 1930 instituent, pour les salariés titulaires d'un contrat de travail, une assurance pour les risques maladie, maternité, invalidité, vieillesse et décès. Elles ont été adoptées durant la période de mise en place du système d'assurance sociale (1898-1939).

Quant à l'ordonnance du 19 octobre 1945, concernant les risques maladie, maternité, invalidité, vieillesse, décès, elle fait partie intégrante du processus de mise en place de la sécurité sociale (1945-1946).

1.1.2 La prévoyance collective et individuelle

Un système dans lequel un individu souscrit directement un contrat auprès de son assureur constitue la prévoyance individuelle.

En revanche, un régime à l'intérieur duquel une personne morale souscrit des garanties de prévoyance au profit d'un groupe de personnes ayant un lien objectif entre elles (par exemple les salariés d'une entreprise) forme la prévoyance collective. Cette dernière naîtra d'une des quatre modalités suivantes : la convention collective, l'accord collectif, le référendum et la décision unilatérale de l'employeur.

1. La convention collective est un accord conclu entre les organisations patronales et syndicales de salariés. Elle traite de l'ensemble des relations entre employeurs et salariés, des conditions d'emploi et garanties sociales. La convention peut être définie au sein d'une branche professionnelle (par exemple la métallurgie), au niveau national ou régional.
2. L'accord collectif est un accord conclu entre organisations patronales et syndicales des salariés, signé à l'échelle de l'entreprise, avec un ou plusieurs sujets déterminés.
3. Lors d'un référendum au sein de l'entreprise, le vote des salariés détermine le régime de prévoyance mis en place. Ce projet est proposé par l'employeur et mis à disposition, du personnel. Il fait l'objet d'un vote et sera adopté à condition qu'il recueille la majorité simple des suffrages valablement exprimés. Il s'applique à l'ensemble des salariés en cas de consentement.
4. S'agissant de la décision unilatérale de l'employeur, elle s'adresse aux petites entreprises sans consultation au préalable des syndicats et des salariés par le dirigeant. Les salariés présents ont la possibilité d'accepter ou de refuser le régime. Pour les nouveaux salariés absents lors de la constitution, il sera obligatoire.

1.1.3 Les risques en prévoyance

A Macif-Mutualité, la prévoyance individuelle regroupe notamment les risques suivants : le décès (toute cause, pour cause de maladie, pour accident), les obsèques, la dépendance, l'incapacité temporaire, l'invalidité permanente, la santé (consultations, hospitalisation, optique, dentaire), l'emprunteur. Ces derniers seront exposés brièvement ci-dessous :

1.1.3.1 Le décès

De manière générale, les garanties pouvant être proposées en cas de décès de l'assuré sont essentiellement le versement d'un capital aux bénéficiaires, la rente conjoint, la rente éducation, le financement des obsèques. De temps à autre, les contrats distinguent la cause du décès (décès pour cause de maladie, le décès accidentel). Ces garanties servent essentiellement à assurer la sécurité financière des survivants après le décès. Elles seront explicitées dans la suite :

1. Lors d'un versement en capital, l'assureur s'engage à payer le capital souscrit au bénéficiaire du contrat si l'assuré décède avant le terme du contrat.
2. La rente éducation est spécialement conçue pour financer les études des enfants en cas de décès prématuré de l'un des parents. Elle prévoit le versement périodique d'une somme d'argent dont le montant est fixé au contrat. Ainsi, celui qui souhaite s'assurer que son enfant aura les moyens financiers de mener des études supérieures, peut souscrire un contrat de rente éducation temporaire par exemple jusqu'au 25^{ème} anniversaire de son enfant. Cette garantie est donc limitée dans le temps. La rente éducation peut être fixe ou revalorisée chaque année pour tenir compte de l'inflation.
3. En ce qui concerne la rente conjoint, le bénéficiaire perçoit la rente garantie à compter du décès de l'assuré. Le bénéficiaire est en général le conjoint ou une personne proche de l'assuré. Cette rente peut par exemple être servie jusqu'à un âge limite ou bien le décès du bénéficiaire.
4. La garantie obsèques, quant à elle, peut éventuellement proposer la garantie au moment du décès de l'assuré d'une aide à l'organisation des obsèques, d'une prise en charge financière directe des obsèques ou d'un versement en capital aux bénéficiaires. Par ailleurs, le contrat individuel obsèque de Macif-Mutualité prévoit également la participation de l'assuré aux bénéfices de la gestion technique et financière du contrat. En cas de cessation anticipée du contrat, l'assuré peut racheter son contrat.

1.1.3.2 La dépendance

En cas de dépendance, Macif-Mutualité définit contractuellement la dépendance partielle et la dépendance totale :

1. La dépendance partielle est caractérisée par l'impossibilité définitive d'exercer totalement seul, deux des cinq Actes de la Vie Quotidienne (AVQ) sans tenir compte des éventuelles aides techniques déjà prescrites ou utilisées par l'assuré. Est considéré comme impossible à exercer, l'acte non réalisé en sa totalité par l'assuré.

Les AVQ identifiés par Macif-Mutualité sont :

Se coucher et se lever, s'habiller et se déshabiller, boire et manger, se laver et aller aux toilettes, se déplacer dans le logement.

Ils peuvent différer d'une société d'assurance à une autre.

2. Quant à la dépendance totale, elle est définie comme l'impossibilité définitive d'exercer totalement seul, au moins trois des cinq AVQ en tenant compte des éventuelles aides techniques déjà prescrites ou utilisées par l'assuré.

Par ailleurs, on peut noter qu'il existe, actuellement en France, la Caisse nationale de solidarité pour l'autonomie (CNSA) chargée de financer, grâce à des aides publiques, l'accompagnement de la perte d'autonomie des personnes âgées et des personnes handicapées. Elle rassemble alors les moyens de l'État et de l'assurance maladie consacrés à l'autonomie des personnes âgées et des personnes handicapées. Elle contribue financièrement au versement de l'allocation personnalisée d'autonomie (APA) pour les personnes âgées. La grille AGGIR (Autonomie Gérontologie Groupes Iso-Ressources), destinée à mesurer le degré de perte d'autonomie des personnes âgées, détermine alors l'éligibilité à l'APA à domicile et en établissement. La grille comprend 6 groupes de GIR 1 (dépendance lourde) à GIR 6 (dépendance partielle) par niveau décroissant de perte d'autonomie.

Cependant, un projet de réforme, souhaité par le gouvernement, sur la prise en charge de la dépendance est prévu dans les mois à venir. Un groupe de travail oeuvre en effet sur le sujet depuis le début de l'année 2010. On se rappelle le souhait du gouvernement dès 2007 d'assurer la prise en charge de la perte d'autonomie de toutes les personnes quels que soient leur âge et les raisons de leur handicap par la création d'un 5^{ème} risque⁸. Mais, depuis le 2^{ième} semestre 2010, un rapport de la commission des Affaires sociales de l'Assemblée préconise la souscription obligatoire d'une assurance contre la perte d'autonomie dès 50 ans et semble renoncer à créer une cinquième branche de la Sécurité sociale (SS). Tout dernièrement, le GEMA s'est positionné contre la suppression de l'APA et pour une inclusion de l'assurance du risque dépendance dans la complémentaire santé.

1.1.3.3 L'incapacité temporaire

L'assuré, qui par suite de maladie ou d'accident, est contraint d'interrompre totalement ou partiellement son activité professionnelle est dit en état d'incapacité temporaire de travail⁹. On désigne usuellement par « incapacité » l'incapacité temporaire de travail ou arrêt temporaire d'activité. Les contrats proposés par les assureurs peuvent différencier l'origine de l'arrêt de travail (vie privée et vie professionnelle). La SS indemnise l'incapacité temporaire par le versement d'Indemnités Journalières (IJ) en fonction de l'origine.

1.1.3.4 L'invalidité

Une personne est invalide, au sens de la SS, lorsque, suite à une maladie ou un accident non professionnel, elle perd sa capacité de travail ou de gain¹⁰. La victime n'est plus en état de se procurer, par une profession quelconque, les moyens de subsister. L'invalidité est synonyme avec incapacité permanente. Toutefois, la sécurité sociale associe plutôt l'invalidité aux causes maladie ou accident non professionnel et elle désigne l'incapacité permanente consécutive à un accident du travail ou à une maladie professionnelle. La garantie invalidité proposée par les contrats individuels de Macif-Mutualité prévoit le versement d'une rente fonction du taux d'incapacité de l'invalidé. En dessous du taux de 32 %, il ne perçoit rien. Au dessus de 66 %, il touche une rente à taux plein. Entre 33 % et 65 %, le niveau de la rente est directement proportionnel à ce taux.

Par ailleurs, la réforme des retraites lancée par le gouvernement prévoit une modification de l'âge minimal légal de départ en retraite relevé à 62 ans (contre 60 ans actuellement) et le report progressif de l'âge de la retraite à taux plein de 65 ans à 67 ans. Dernièrement, le 15 septembre 2010, les députés

⁸ La Sécurité sociale (SS) couvre actuellement 4 risques que sont la maladie, les accidents du travail et la maladie professionnelle, la famille, la vieillesse.

⁹ Art. L321-1 alinéa 5^o du code de la SS.

¹⁰ Art. L341-1 du code de la SS.

ont voté cette réforme après quelques concessions du gouvernement sur la pénibilité. Si cette réforme est votée par le sénat le 15 octobre alors les assureurs adapteront probablement leur garantie. De plus, l'exigence de durée de cotisation sera de 41 ans en 2012 et 41 ans et demi en 2020.

1.1.4 La loi de Mensualisation

La loi n°78-49 du 19 janvier 1978 relative à la mensualisation a été abrogée le 01/03/08.

Depuis l'abrogation de la loi n°78-49 du 19 janvier 1978 relative à la mensualisation par l'ordonnance¹¹ « Ordonnance 2007-329 du 12 mars 2007 article 12 alinéa 11° », toutes les dispositions issues de la loi relative à la mensualisation ont été codifiées dans le code du travail.

De plus, l'article 3 de la LOI n°2008-596 du 25 juin 2008 portant modernisation du marché du travail a modifié l'article L1226-1 (cf. Annexe 3) du code du travail. Les décrets d'application D1226-1 à D1226-8 du code du travail ont alors précisé les modalités d'application.

En conséquence, l'article 3 de cette loi confère davantage d'obligations à l'employeur en particulier au sujet de l'obligation de maintien de salaire par l'employeur suite à l'incapacité de son salarié causée par accident ou maladie :

1.1.4.1 Conditions du droit à indemnisation de la maladie et de l'accident pour le salarié

- Avoir au moins 1 an d'ancienneté.
- Etre pris en charge par la Sécurité Sociale.
- Justifier de l'absence dans les 48 heures.
- Etre soigné sur le territoire français ou dans un autre pays de la Communauté Economique Européenne.

1.1.4.2 Niveau et durée d'indemnisation

- Pendant 30 jours, le salarié perçoit 90 % de la rémunération brute qu'il aurait perçue s'il avait travaillé.
- Au cours des 30 jours suivants, il reçoit les 2/3 de cette même rémunération.
- Chacune de ces périodes est augmentée de 10 jours par période entière de 5 ans d'ancienneté en plus de la 1^{ère} année d'ancienneté requise. Cette dernière est l'ancienneté au 1^{er} jour de l'absence¹².
- La durée de chaque période ne peut toutefois pas excéder 90 jours.

Remarque :

Ces garanties s'entendent déduction faite des indemnités versées par la SS et éventuellement des régimes de prévoyance complémentaire.

1.1.4.3 Délai de carence

L'indemnisation est obligatoire, pour chaque arrêt qu'à compter du 8^{ième} jour d'absence, sauf en cas d'accident du travail et de maladie professionnelle, où elle court à compter du 1^{er} jour.

¹¹ Le Parlement peut autoriser le gouvernement à prendre, par ordonnance, des mesures qui sont normalement du domaine de la loi. Les ordonnances sont prises en Conseil des ministres après avis du Conseil d'État. Assimilées à des règlements, elles entrent en vigueur quand elles sont signées par le président de la République et quand elles sont publiées. Elles deviennent cependant sans effet si un projet de loi de ratification n'est pas déposé devant le Parlement dans un délai fixé. La procédure des ordonnances est une innovation de la V^{ième} République.

¹² Article D1226-8 du code du travail.

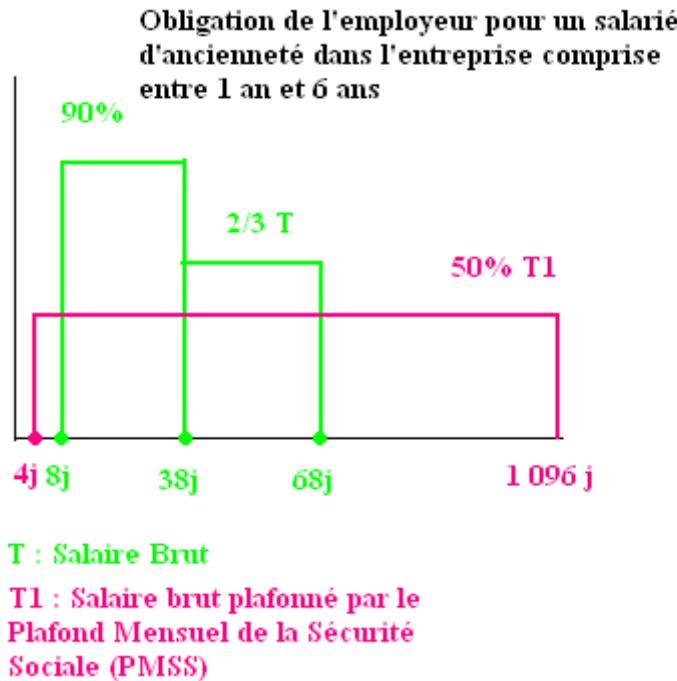


Figure 1 : L'obligation de l'employeur

Section 1.2 : La prévoyance individuelle

1.2.1 La loi Evin

Les articles de la loi Evin n° 89-1009 du 31 décembre 1989 s'appliquant à la prévoyance individuelle sont :

1.2.1.1 Article 1

Les risques couverts par la loi Evin sont le risque décès, incapacité, invalidité, le chômage, les frais médicaux et celui lié à la maternité. Ce sont les compagnies d'assurance, les mutuelles et les institutions de prévoyance qui sont habilitées à les assurer.

1.2.1.2 Article 3

L'assureur, ayant accepté une souscription, doit prendre en charge les suites des états pathologiques survenus antérieurement à la souscription. Il peut refuser de les couvrir sous conditions :

- Les maladies antérieures dont les suites ne sont pas assurées doivent être clairement mentionnées dans le contrat individuel.
- L'organisme doit prouver que la maladie était plus ancienne à la souscription du contrat.

1.2.1.3 Article 6

Dès lors qu'un assureur assure une personne dans un contrat frais médicaux, ce dernier a un caractère viager dès l'adhésion. De plus, l'organisme ne peut augmenter individuellement la cotisation de l'assuré sur la base de son état de santé.

Les garanties incapacité, invalidité, chômage, celle accessoire au décès, deviennent viagères après un délai de 2 ans. L'organisme a toutefois la possibilité de les résilier à la date de départ à la retraite de l'assuré.

1.2.1.4 Article 9

Dans un contrat frais médicaux, la somme des remboursements de la SS et de l'organisme ne peuvent dépasser les frais réels de l'assuré.

Remarques :

- Notons par ailleurs, que les articles 2, 4, 7, 12, 15 et 16 ont toute leur importance en prévoyance collective. L'article 2 impose notamment l'absence d'exclusion et le caractère général et impersonnel du contrat collectif.
- L'article 4 oblige l'organisme à proposer un régime d'accueil santé sans questionnaire médical.
- L'article 7 implique la constitution de provisions mathématiques¹³ et de provisions pour sinistres à payer.

Section 1.3 : L'Incapacité Temporaire et l'Incapacité Permanente (ITIP)

1.3.1 Introduction

L'assuré, qui par suite de maladie ou d'accident, est contraint d'interrompre totalement ou partiellement son activité professionnelle est dit en état d'incapacité temporaire de travail¹⁴. On désigne usuellement par « incapacité » l'incapacité temporaire de travail ou arrêt temporaire d'activité.

Une personne est invalide lorsque, suite à une maladie ou un accident non professionnel, elle perd sa capacité de travail ou de gain¹⁵. La victime n'est plus en état de se procurer, par une profession quelconque, les moyens de subsister. L'invalidité est synonyme avec incapacité permanente. Toutefois, la sécurité sociale associe plutôt l'invalidité aux causes maladie ou accident non professionnel et elle désigne l'incapacité permanente consécutive à un accident du travail ou à une maladie professionnelle.

L'incapacité par accident peut se traduire suivant l'importance du préjudice par une invalidité. De même, en maladie, si l'incapacité temporaire dépasse 3 ans, elle devient une invalidité.

Pendant l'arrêt de travail, la perte de salaire ou de revenus est partiellement compensée par l'octroi d'IJ par la sécurité sociale. Ces prestations sont dites prestations en espèce.

Notons que chaque profession a son régime particulier (les salariés, les artisans, les commerçants, les professions libérales, les non salariés agricoles).

L'incapacité de travail a trois origines possibles : l'accident de travail, l'accident de la vie privée, la maladie.

La cause de l'arrêt n'est donc pas liée directement à l'exercice des fonctions professionnelles par l'assuré. Par ailleurs, rappelons que dans le cas de l'emploi salarié, le code du travail oblige¹⁶ l'employeur à fournir une indemnisation complémentaire à ses employés.

L'incapacité et l'invalidité sont deux notions liées puisqu'un arrêt en incapacité peut devenir définitif. Lorsque l'invalidité est probable, on parle d'invalidité en attente.

¹³ Les provisions touchant les prestations dont les échéances sont postérieures à la date de clôture des comptes sont appelées Provisions Mathématiques (PM). Celles relatives aux échéances antérieures, sont dénommées Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP).

¹⁴ Art. L321-1 alinéa 5° du code de la SS.

¹⁵ Art. L341-1 du code de la SS.

¹⁶ L'article 3 de la LOI n°2008-596 du 25 juin 2008 portant modernisation du marché du travail a modifié l'article L 1226-1 du code du travail.

Les contrats prévus par les assureurs portent donc au-delà de ce qui est prévu par les acquis de la sécurité sociale (prestations en espèce). Le contrat laissera notamment le choix à l'assuré du niveau de franchise lors de sa souscription de la garantie Indemnité Journalière. On recense au moins quatre sortes de franchise :

1. La franchise absolue est un nombre de jours systématiquement déduit de la période d'incapacité et qui ne donnera jamais lieu à indemnisation.
2. Dans le cadre d'une franchise relative, on a les particularités suivantes :
Si la durée de l'arrêt est inférieure à la franchise alors l'assuré ne percevra aucune prestation. En revanche, si elle dépasse le nombre de jours de franchise alors l'assuré sera totalement indemnisé sur toute la période.
3. La franchise est continue lorsqu'elle s'applique à chaque arrêt de travail hors rechute.
4. Au contraire, elle est discontinue lorsqu'elle affecte un nombre de jours cumulés d'arrêts de travail au cours de l'année.

La SS indemnise l'incapacité et l'invalidité en fonction de l'origine. Elle distingue alors ce qui relève de la vie privée et ce qui émane de la vie professionnelle (les accidents du travail ou maladie professionnelle).

1.3.2 Incapacité temporaire au sein du régime général de la Sécurité Sociale

1.3.2.1 *Le référentiel est le régime général des salariés et la vie privée*

Les Indemnités Journalières (IJ) versées par la Sécurité Sociale (SS) pour un arrêt de travail dans le cadre de la vie privée interviennent dès **le 4^{ème} jour**¹⁷. Il s'agit alors d'une **franchise absolue de 3 jours** durant laquelle aucune IJ ne sera versée par la sécurité sociale. Toutefois, en cas d'incapacité liée à une affection de longue durée (cancer...), le délai de carence ne concerne que le 1^{er} arrêt.

Pour bénéficier des prestations, il faut en particulier justifier d'un certain nombre d'heures de travail salarié ou d'un montant minimum de cotisations¹⁸.

L'indemnité journalière est égale à une **fraction du salaire journalier de base plafonné**.

Par exemple, le salaire journalier de base pour les salariés payés au mois est actuellement égal à la somme des salaires bruts mensuels des trois mois travaillés précédent l'arrêt de travail, divisée par 90¹⁹. Cependant, courant le dernier semestre 2010, le mode de calcul des Indemnités Journalières (IJ) par la Sécurité Sociale pourrait être revu. Ce projet de décret pourrait prévoir, pour les salariés payés au mois de diviser par 91,25 la somme des salaires bruts mensuels des 3 mois travaillés précédent la survenance de l'événement. Les règles de plafonnement du salaire journalier de base devraient connaître des modifications.

D'après l'article R323-5 du code de la SS, la fraction du salaire journalier de base est augmentée après une certaine durée d'arrêt de travail. Toutefois, cette particularité pourrait disparaître du code de la SS durant le dernier trimestre 2010.

De plus, elle est également haussée, après une certaine durée d'arrêt de travail, pour les assurés ayant au moins trois enfants à charge selon l'article R323-5 de ce même code.

En septembre 2010, pour un salarié ayant de 0 à 2 enfants, on a :

¹⁷ Art. L323-1 et Art. R323-1 du code de la SS.

¹⁸ Art. R313-3 du code de la SS.

¹⁹ Art. R323-4 du code de la SS.

Durées de versement des indemnités	Fraction du salaire journalier de base
Du 4 ^{ème} jour au 6 ^{ème} mois	50 %
A partir du 7 ^{ème} mois d'arrêt consécutif	51,49 %

En septembre 2010, pour un salarié ayant au moins trois enfants à charge, on a :

Durées de versement des indemnités	Fraction du salaire journalier de base
Du 4 ^{ème} au 30 ^{ème} jour d'arrêt	50 %
Du 2 ^{ème} au 6 ^{ème} mois A compter du 7 ^{ième} mois	66,66 % 68,66 %

En plus des formalités administratives, le bénéficiaire d'indemnités journalières doit respecter les obligations suivantes :

- observer les prescriptions du praticien,
- se soumettre aux contrôles organisés par le service du contrôle médical,
- respecter les heures de sorties autorisées par le praticien,
- s'abstenir de toute activité non autorisée.

En cas d'inobservation volontaire de ces obligations, la caisse peut retenir, à titre de pénalité, tout ou une partie des indemnités journalières dues.

1.3.2.2 Le référentiel est le régime général des salariés et la vie professionnelle

D'après l'article L433-1 du code de la SS, La victime d'un accident de travail ou d'une maladie professionnelle occasionnant un arrêt de travail a droit à des indemnités journalières à partir du lendemain de l'évènement, sans délai de carence, et pendant toute la durée de son incapacité de travail ainsi qu'en cas de rechute ou d'aggravation.

L'indemnité journalière est due pendant toute la période d'incapacité de travail, jusqu'à la guérison complète, la consolidation de la blessure ou le décès.

D'après les articles R433-1 et R433-3, en septembre 2010, le droit à indemnisation au titre de l'incapacité est le suivant :

Durées de versement des indemnités	Fraction du salaire journalier de base
Du 1 ^{er} jour au 28 ^{ème} jour	60 %
A partir du 29 ^{ème} jour	80 %

Toutefois, le salaire journalier de base est plafonné.

Par ailleurs, le calcul de l'indemnité journalière d'incapacité temporaire suite à un accident du travail ou maladie professionnelle sera rectifié au cours du dernier trimestre 2010. Le gain journalier, déterminé selon la périodicité de la paie et la rémunération de référence, devrait être raboté.

1.3.3 L'incapacité permanente et le régime général

1.3.3.1 *Le référentiel est le régime général des salariés et la vie privée*

Un assuré peut rester au maximum trois ans en incapacité. Au bout de ce délai, s'il est toujours dans l'impossibilité absolue d'exercer une activité professionnelle, l'incapacité peut se transformer en invalidité, sur décision de la Sécurité Sociale. L'état d'invalidité²⁰ s'apprécie soit après consolidation de la blessure, soit suite à la stabilisation de son état, soit au moment de la constatation médicale de l'invalidité, lorsqu'elle résulte de l'usure prématurée de l'organisme.

D'après les articles L341-4 et D241-5-1 du Code de la Sécurité Sociale, les invalides sont regroupés en trois catégories suivant la gravité de leur état :

1. Invalidité 1^{ère} catégorie :

Si l'assuré peut exercer une activité rémunérée malgré son invalidité, alors il est placé en invalidité 1^{ère} catégorie.

2. Invalidité 2^{ème} catégorie :

Si suite à un accident ou à une maladie, l'assuré est dans l'impossibilité d'exercer une profession quelconque, alors il est placé en invalidité 2^{ème} catégorie.

3. Invalidité 3^{ème} catégorie :

Si à la suite d'un accident ou d'une maladie, l'assuré est dans l'impossibilité d'exercer une profession quelconque et que son état nécessite l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie courante, alors l'assuré est placé en invalidité 3^{ème} catégorie.

Il est dit que l'assuré ne peut effectuer les actes ordinaires de la vie courante, lorsqu'il ne peut accomplir seul, totalement, habituellement et correctement au moins quatre des actes de la grille nationale (grille nationale annexée au décret n° 97-427 du 28 avril 1997 portant application de certaines dispositions de la loi n° 97-60 du 24 janvier 1997).

²⁰ Art. L.341-3 du code de la SS.

Le montant de la pension d'invalidité dépend notamment de la durée de cotisations, de la base de rémunération moyenne du salarié et de son classement dans l'une des trois catégories exposées ci-dessus.

Actuellement, en septembre 2010, la pension d'invalidité est remplacée par la pension de vieillesse au 1^{er} jour du mois qui suit le 60^{ème} anniversaire²¹ de l'assuré, sauf si ce dernier exerce une activité professionnelle. Dans ce cas, il continue de bénéficier de sa pension d'invalidité jusqu'à ce qu'il demande le versement de sa pension de vieillesse, et au plus tard, jusqu'à ses 65 ans. Toutefois, étant donné la réforme des retraites de 2010, on peut imaginer de prochains changements dans ce domaine.

1.3.3.2 Le référentiel est le régime général des salariés et la vie professionnelle

Toute personne qui reste atteinte d'une incapacité permanente consécutive à un accident du travail ou à une maladie professionnelle peut percevoir :

- soit une indemnité en capital, si son taux d'incapacité permanente est inférieur à 10 %²².
- soit une rente d'incapacité permanente, si son taux est égal ou supérieur à 10 %.

Le taux de l'incapacité²³ permanente est déterminé d'après la nature de l'infirmité, l'état général, l'âge, les facultés physiques et mentales de la victime ainsi que d'après ses aptitudes et sa qualification professionnelle, compte tenu d'un barème indicatif d'invalidité.

Lorsque l'incapacité permanente est égale ou supérieure à 10%, la victime a droit à une rente égale au salaire annuel multiplié par un pourcentage (égal au taux d'incapacité réduit ou augmenté en fonction de la gravité). Le pourcentage équivaut :

- à la moitié du taux d'incapacité permanente (IP) retenu par la Caisse Primaire d'Assurance Maladie (CPAM) lorsque ce taux est inférieur ou égal à 50 %²⁴.
- à une fois et demi le taux d'IP pour la partie supérieure à 50 %.

1.3.4 Dispositions contractuelles des produits Macif-Mutualité

1.3.4.1 Introduction

Les sinistres historiques incapacité ayant permis de réaliser les quelques études de ce mémoire proviennent essentiellement de deux produits de prévoyance vendus par les agences régionales Macif ou par d'autres membres de la SGAM²⁵ Macif.

Une présentation de ces deux contrats individuels²⁶ est donc utile :

En résumé, l'un s'adresse spécifiquement aux salariés et l'autre à la catégorie des indépendants. Chacun de ces produits propose donc systématiquement la garantie IJ en complément de la couverture invalidité. Par conséquent, si l'assuré souscrit celle en cas d'arrêt de travail temporaire alors il devra consentir à celle en cas d'invalidité.

Notons que Macif-Mutualité (MMU) définit l'incapacité temporaire comme l'absence totale et temporaire d'activité professionnelle du fait de l'impossibilité d'exercer la profession déclarée à la mutuelle.

Quant à l'invalidité, il s'agit d'une réduction définitive des capacités physiques ou mentales. Permanente totale ou partielle, elle s'apprécie suivant un taux d'incapacité fixé par le médecin-expert

²¹ Art. R341-22 et Art. R351-2 du code de la SS.

²² Art. R434-1 du code de la SS.

²³ Art. L434-2 du code de la SS.

²⁴ Art. R434-2 du code de la SS.

²⁵ Société de Groupe d'Assurance Mutuelle.

²⁶ Un individu va donc souscrire un contrat auprès de son assureur.

en référence au dernier barème médical publié dans la revue « Le concours médical », abstraction faite de toute incidence professionnelle.

Lors de son adhésion à la couverture en cas d'incapacité temporaire, le souscripteur opte pour un niveau de franchise²⁷ (15 jours, 30 jours, 60 jours, 90 jours...) et un montant de l'indemnité journalière. Par ailleurs, quel que soit le contrat, lors d'une rechute dans les trois mois, aucune nouvelle franchise n'est appliquée. De plus, le produit ciblant les salariés prévoit une indemnisation à hauteur de la moitié de l'IJ lorsque l'assuré reprend partiellement son activité dans le cadre d'un mi-temps thérapeutique. Aussi, l'assuré peut choisir en supplément quelques options. On distingue en particulier le rachat de franchise et les frais professionnels pour les indépendants :

Ainsi, l'option « rachat de franchise » prévoit qu'en cas d'hospitalisation consécutive à une maladie ou à un accident d'une durée supérieure à 3 jours survenant pendant la période de franchise, les indemnités journalières sont versées à compter du 4^{ème} jour d'arrêt de travail temporaire, sous réserve que le dit arrêt de travail temporaire soit d'une durée au moins égale à la franchise.

Quant à l'option frais professionnels²⁸, le montant des indemnités journalières est alors doublé pendant une période maximale de 12 mois.

Par ailleurs, un délai d'attente²⁹ pour le risque incapacité peut être inclus dans les conditions générales du produit.

1.3.4.2 La garantie incapacité au sein du produit Prévoyance Des Indépendants (PDI)

Ce produit est destiné aux professionnels indépendants, à leur conjoint collaborateur et aux dirigeants non salariés³⁰.

Lors de la souscription de la garantie indemnité journalière, l'assuré doit obligatoirement remplir une déclaration de santé. Si nécessaire, un questionnaire médical complémentaire et des bilans médicaux peuvent être demandés lors de l'étude de la demande d'assurance.

Notons que ce contrat prévoit notamment un délai d'attente de 90 jours en cas d'indisponibilité temporaire (incapacité temporaire) ou d'indisponibilité définitive (invalidité) de l'assuré consécutive à une maladie. De plus, un délai d'attente d'un an s'applique en cas de grossesse.

La garantie IJ doit être souscrite en complément de la garantie invalidité. L'indemnité journalière, somme garantie en cas d'arrêt de travail temporaire, est plafonnée à 1/30^{ème} de la rente mensuelle invalidité et limitée au revenu de l'assuré avant l'arrêt de travail (hors prise en compte de l'option "Frais professionnels"). Elles sont versées mensuellement à terme échu à compter du 16^{ème}, 31^{ème}, 61^{ème} ou 91^{ème} jour d'arrêt de travail temporaire selon la franchise choisie.

La garantie couvre l'arrêt de travail temporaire, par suite de maladie ou d'accident, survenant pendant la durée de l'assurance et avant l'échéance principale de l'année suivant le 65^{ème} anniversaire de l'assuré.

En cas de rechute dans les trois mois qui suivent la fin du précédent arrêt pour la même cause, aucune nouvelle franchise n'est appliquée.

²⁷ Période d'arrêt de travail temporaire non indemnisée et restant à la charge de l'assuré.

²⁸ Frais supportés habituellement par l'assuré pour l'exercice de sa profession et qui sont légalement admis comme charge d'exploitation au plan fiscal.

²⁹ Période suivant la prise d'effet du contrat ou l'augmentation de garanties pendant laquelle toute invalidité, arrêt de travail ou décès, ne donnera définitivement lieu à aucune prestation.

³⁰ Les dirigeants non salariés sont les professionnels percevant des ressources et non une rémunération.

Une option "rachat de franchise en cas d'hospitalisation" peut être souscrite pour les franchises 15 et 30 jours. En cas d'hospitalisation consécutive à une maladie ou à un accident d'une durée supérieure à 3 jours survenant pendant la période de franchise, les indemnités journalières sont versées à compter du 4^{ème} jour d'arrêt de travail temporaire, sous réserve que l'arrêt de travail temporaire soit d'une durée au moins égale à la franchise.

Exemples :

1. Un assuré, ayant souscrit une franchise 15 jours et l'option « rachat de franchise », est hospitalisé durant une semaine au cours de ses premiers jours d'arrêt de travail. Il reste au total en arrêt de travail pendant un mois. Il sera donc indemnisé à compter de son 4^{ème} jour d'arrêt de travail.
2. Un assuré, ayant souscrit une franchise 15 jours et l'option « rachat de franchise », est hospitalisé durant une journée au cours de ses premiers jours d'arrêt de travail. Il reste au total en arrêt de travail durant 30 jours. Il sera indemnisé par MMU qu'à compter de son 16^{ème} jour.
3. Un assuré, ayant souscrit une franchise 30 jours et l'option « rachat de franchise », est hospitalisé durant une semaine au cours de ses premiers jours d'arrêt de travail. Il reste au total en arrêt de travail pendant deux semaines. Il ne sera pas indemnisé par Macif-Mutualité.

L'assuré peut opter pour l'option 'Frais professionnels'. Dans ce cas, le montant des indemnités journalières est alors doublé pendant une période maximale de 12 mois.

Le versement des indemnités journalières est interrompu dès la survenance de l'un des évènements suivants :

- l'arrêt de travail temporaire atteint une durée de 3 années
- le contrat arrive à l'échéance principale de l'année suivant le 65^{ème} anniversaire de l'assuré
- ce dernier est apte à reprendre son activité professionnelle
- il est stabilisé³¹
- la garantie invalidité est mise en jeu
- l'assuré décède.

1.3.4.3 Le produit Contrat Prévoyance Individuelle Macif (CPIM)

En septembre 2010, ce contrat a été refondé en le produit « garantie décès ».

Il était destiné aux individus exerçant une activité professionnelle effective et rémunérée.

La garantie en cas d'arrêt de travail temporaire par suite de maladie ou accident devait être souscrite en complément de celle en cas d'invalidité. L'indemnité journalière était plafonnée à 1/30 de la rente mensuelle invalidité et limitée au revenu de l'assuré avant l'arrêt.

Cette garantie couvrait la survenance de l'évènement pendant la durée de l'assurance et avant 65 ans. Les indemnités journalières étaient versées mensuellement à terme échu à compter du 31^{ème}, 61^{ème} ou 91^{ème} jour d'arrêt de travail temporaire selon la franchise choisie.

Lors d'une rechute pour la même cause dans les trois mois qui suivaient la fin du précédent arrêt de travail, aucune nouvelle franchise n'était appliquée.

Si une hospitalisation avait lieu pendant la franchise, les indemnités journalières étaient versées pour la durée de cette hospitalisation, à condition que l'arrêt soit d'une durée au moins égale à la franchise.

Exemples :

³¹ Moment à partir duquel l'état médical de l'assuré n'est plus susceptible de s'améliorer du fait d'une thérapeutique active.

1. Un assuré, ayant souscrit une franchise 15 jours, est hospitalisé durant une semaine au cours de ses premiers jours d'arrêt de travail. Il reste au total en arrêt de travail pendant un mois. Il sera donc indemnisé à compter de son 16^{ème} jour d'arrêt de travail et il percevra également 7 indemnités journalières liées à son hospitalisation d'une durée d'une semaine pendant sa franchise.
2. Un assuré, ayant souscrit une franchise 90 jours, est hospitalisé durant une semaine au cours de ses premiers jours d'arrêt de travail. Il reste au total en arrêt de travail pendant un mois. Il ne percevra donc aucune indemnisation.

Le versement des indemnités journalières était interrompu dès la survenance de l'un des évènements suivants :

- l'arrêt de travail temporaire atteint une durée de 3 années
- l'assuré atteint l'âge de 65 ans
- ce dernier est apte à reprendre votre activité professionnelle
- il est mis en retraite à taux plein
- il est stabilisé
- il décède.

Lorsque l'assuré est salarié et qu'il reprend une activité partielle dans le cadre d'un mi-temps thérapeutique, les indemnités journalières sont maintenues, mais réduites de moitié.

Chapitre 2 : La réglementation comptable française en vigueur pour les risques incapacité et invalidité

Section 2.1 : Les tables de maintien et de passage du BCAC³²

2.1.1 Introduction

L'arrêté du 28 mars 1996 fixe les règles de provisionnement des garanties incapacité et invalidité. Il est présent dans :

- Le code des assurances et référencé par l'article A331-22.
- Le code de la SS et référencé par l'article R731-4.
- Le code de la mutualité et référencé par l'article A212-9 (cf. Annexe 4).

Pour l'évaluation des provisions mathématiques d'inventaire, il définit quatre obligations :

1. Le provisionnement de l'incapacité sous la forme d'une provision incapacité en cours et d'une autre provision invalidité en attente, associée au risque que l'individu en incapacité devienne invalide.
2. Le provisionnement de l'invalidité en cours.
3. L'utilisation d'un taux inférieur à 75 % du Taux Moyen des Emprunts de l'Etat français (TME), majoré par 4,5 %.
4. L'utilisation des trois tables réglementaires de maintien du BCAC (Bureau Commun d'Assurances Collectives) ou bien de tables certifiées par un actuaire indépendant habilité à certifier.

2.1.2 La loi réglementaire de maintien en incapacité du BCAC

Pour la table de maintien en incapacité temporaire du BCAC, l'âge à l'entrée en incapacité est représenté en ligne et le mois d'ancienneté dans l'état en colonne. A chaque ligne et chaque colonne, on connaît les effectifs restants en incapacité au début du mois considéré. Ci-dessous figure un aperçu de la loi.

En jaune, il s'agit des anciennetés variant de 0 à 36 mois.

En gris, on identifie les âges à l'entrée en incapacité variant de 23 ans ou moins à 64 ans (d'après l'annexe 1.2 de l'article A 331-22 du code des assurances).

AGE	Loi de maintien en incapacité										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	10000	2842	1743	1144	838	625	455	339	291	253	215
24	10000	2931	1848	1215	894	657	478	343	291	256	217
25	10000	3080	2001	1345	997	739	536	382	327	289	251
26	10000	3177	2112	1461	1087	812	591	431	372	325	285
27	10000	3251	2180	1540	1156	869	643	476	407	360	320
28	10000	3298	2243	1600	1209	915	688	524	448	400	359
29	10000	3348	2273	1640	1246	956	726	559	476	425	384
30	10000	3386	2275	1659	1264	964	744	583	494	439	396
31	10000	3388	2228	1618	1249	965	756	595	501	449	406
32	10000	3433	2238	1617	1254	975	772	612	522	468	421
33	10000	3466	2235	1627	1260	983	782	628	540	484	431
34	10000	3567	2298	1684	1321	1033	828	684	597	535	477

³² BCAC : Bureau Commun d'Assurances Collectives.

2.1.3 La loi de passage en invalidité du BCAC

Pour la table de passage en invalidité du BCAC, à l'intersection de chaque ligne i et chaque colonne j, on connaît le nombre d'assurés en état d'incapacité reconnus invalides par la SS durant le mois j et entré en incapacité à l'âge i. Ce nombre est donc à rapporter à un effectif à l'origine (à 0 mois d'ancienneté dans l'état incapacité) de 10 000 individus en arrêt de travail.

Les âges à l'entrée en incapacité varient de 20 ans ou moins à 59 ans (d'après l'annexe 1.3 de l'article A 331-22 du code des assurances).

AGE	Proba de passage en invalidité					
	0	1	2	3	4	5
32	1	1	1	0	1	1
33	2	1	1	1	1	1
34	2	1	1	1	1	3
35	2	1	1	0	1	3
36	2	1	1	1	0	3
37	2	1	1	1	1	3
38	1	1	0	1	1	3
39	1	1	0	1	1	3
40	1	2	0	1	1	3
41	1	2	0	0	1	4
42	1	2	0	1	3	3
43	1	4	0	3	2	4
44	1	3	0	3	3	4

2.1.4 La loi de maintien en invalidité du BCAC

Pour la table de maintien en invalidité du BCAC, l'âge à l'entrée en invalidité est représenté en ligne et l'ancienneté annuelle dans l'état invalide en colonne. A chaque ligne (âge fixé) et chaque colonne (année fixée), on distingue les effectifs restants en invalidité au début de l'année considérée.

Les âges varient entre 30 ans ou moins et 59 ans pour les âges à l'entrée en invalidité (d'après l'annexe 1.1 de l'article A 331-22 du code des assurances).

Loi de maintien en invalidité	AGE à l'entrée	0	1	2	3
		10000	9859	9699	9534
	20	10000	9859	9699	9534
	21	10000	9859	9699	9534
	22	10000	9859	9699	9534
	23	10000	9859	9699	9534
	24	10000	9859	9699	9534
	25	10000	9859	9699	9534
	26	10000	9859	9699	9534
	27	10000	9859	9699	9534
	28	10000	9859	9699	9534

Section 2.2 : Le provisionnement d'inventaire du maintien et du passage

Les primes acquises durant l'exercice doivent permettre de payer les sinistres survenus au cours de cet exercice. A tout instant, l'assureur doit disposer de provisions techniques suffisantes pour honorer ses engagements. Ainsi, en cas d'arrêt de la souscription, les sinistres affectant les contrats souscrits jusqu'alors seront indemnisés intégralement y compris les frais de gestion.

2.2.1 Provisionnement en norme comptable française du maintien en incapacité

Dans le modèle interne, les sinistres en cours d'incapacité de travail provisionnés à la clôture d'un exercice (au 31/12/N) sont les sinistres en cours non clôturés par la gestion et indemnisés durant l'exercice. On remarque toutefois, que le provisionnement mathématique des sinistres en cours d'instruction n'est pas suffisant pour tenir compte de l'ensemble des engagements nés des survenances passées (N, N-1, N-2...). L'assureur devra spécialement provisionner les sinistres tardifs³³ appelés aussi IBNR (*Incured But Not Reported*). Il constituera aussi des provisions pour prestations échues et déclarées mais non encore réglées à la clôture de l'exercice comptable.

2.2.1.1 Notations

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table réglementaire du BCAC de maintien en incapacité. Le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin de mois).

Les notations sont les suivantes :

1. L'ancienneté mensuelle a en incapacité est comprise entre 0 et 35.
2. x est l'âge d'entrée en incapacité : $23 \leq x \leq 64$.
3. $l_{x,a}^{\text{incap}}$ est l'effectif réglementaire des assurés en arrêt de travail d'ancienneté a mois et entrés à l'âge x en incapacité.
4. Les flux futurs espérés sont actualisés au taux technique r , en base annuelle.
 r doit être inférieur à 75 % du Taux Moyen des Emprunts (TME) de l'état français pour l'invalidité, l'incapacité et majoré à 4,5 %. Dans la pratique, on a observé des taux d'actualisation de 2,5 %, 2,75 %, 3 %...
Si r est le taux technique en base annuelle alors $v = e^{-r}$ est le facteur d'actualisation annuel en temps continu.
5. RegPM désigne la Provision Mathématique Réglementaire en norme comptable française.
6. IJ indique le montant de l'Indemnité Journalière d'incapacité. L'assureur indemnise chaque jour d'incapacité à compter de l'atteinte de la franchise durant au maximum 3 ans ou 1 096 jours. En moyenne, mensuellement, le nombre indemnisé d' IJ est de 30,5. Elle tient compte des frais de gestion des sinistres.

2.2.1.2 Provision Mathématique en norme française du maintien conditionnel en incapacité

Le modèle interne est en pas annuel. Les flux futurs probables de maintien en incapacité, de maintien en invalidité et d'invalidité en attente sont regroupés au sein d'une même variable. Cette dernière sera actualisée en annuel. La formule ci-dessous est donc simplifiée puisque l'actualisation plus juste devrait avoir lieu en mensuel.

$$\text{RegPM}_a^{\text{Maintien incap}} = \sum_{m=1}^{36-a} 30,5 \times IJ \times e^{-r[\frac{m}{12}]} \frac{l_{x,m+a}^{\text{incap}}}{l_{x,a}^{\text{incap}}}$$

Avec $[x]$ désignant la partie entière par excès ou partie entière supérieure de x .

2.2.1.3 Illustration graphique

³³ Par convention, dans la Mutuelle, on appelle tardifs les sinistres caractérisés par des prestations échues non déclarées et des prestations non échues non déclarées.

**PM du BCAC de Maintien en Incapacité selon l'Age et l'Ancienneté
(Taux Actualisation Annuel : 2,75 % et Arrérage Mensuel de 1€)**

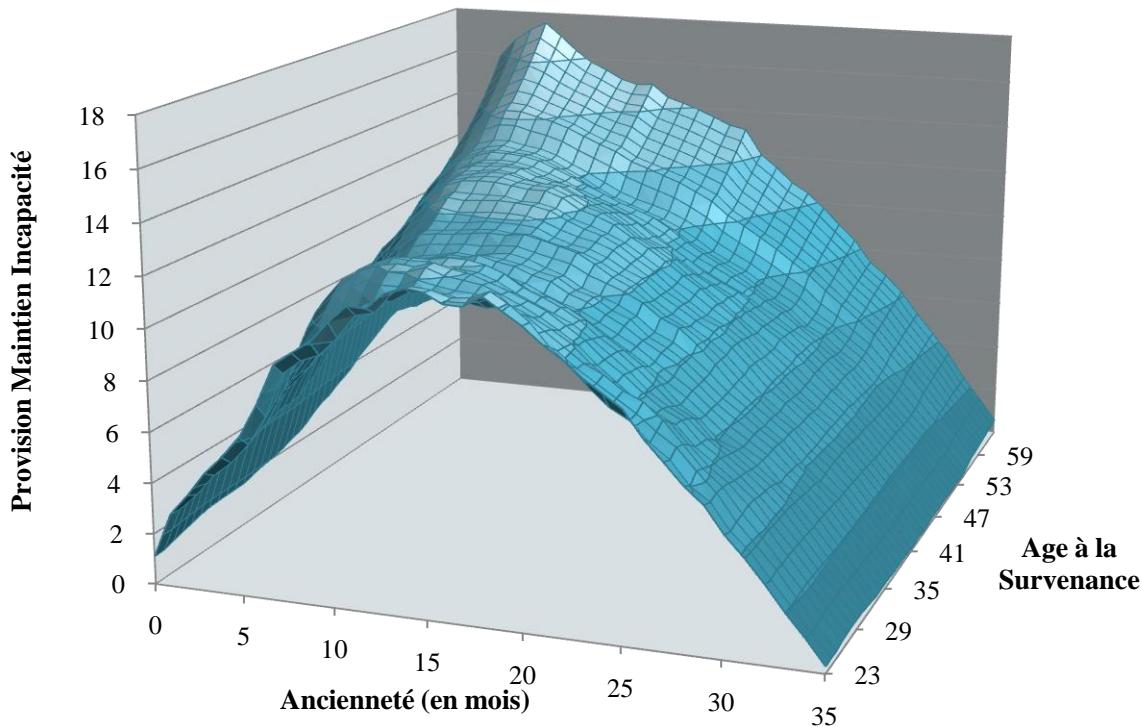


Figure 2 : PM Maintien Incapacité BCAC

La Figure 2 a été construite à l'aide de la fonction VAN sous Excel.

Pour chaque âge à l'entrée en incapacité et chaque ancienneté mensuelle atteinte dans l'état par l'assuré, l'engagement restant de l'assureur vis-à-vis de son assuré est évalué grâce à la loi du BCAC. La formule de calcul de cette Provision Mathématique (PM) est identique à celle figurant au 2.2.1.2 aux exceptions que l'actualisation est mensuelle, en temps discret et l'arrérage mensuel est unitaire. On note i le taux d'intérêt mensuel équivalent au taux technique annuel r .

En adoptant les mêmes notations que précédemment, la PM de la Figure 2 a été calculée comme suit :

$$PM_a^{\text{Maintien incap}} = \sum_{m=1}^{36-a} \left(\frac{1}{1+i} \right)^m \frac{l_{x,m+a}^{\text{incap}}}{l_{x,a}^{\text{incap}}}$$

On observe un provisionnement irrégulier.

2.2.2 Provisionnement réglementaire du maintien en invalidité consolidée

2.2.2.1 Notations

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table réglementaire du BCAC de maintien en invalidité. Le pas du modèle est annuel. On suppose que le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin d'année) et l'actualisation est en continue.

Les notations sont les suivantes :

1. L'ancienneté annuelle k en invalidité est comprise entre 0 et $65 - x'$.
2. x' est l'âge d'entrée en invalidité : $20 \leq x' \leq 64$

3. A^{annuel} représente l'arrérage (=rente) annuel tenant compte des frais de gestion des sinistres.
4. $l_{x',k}^{\text{Inval}}$ est l'effectif réglementaire des invalides consolidés à l'âge x' et d'ancienneté k ans.
5. Les flux futurs espérés sont actualisés au taux technique r en base annuelle.

On suppose que la rente en invalidité est versée jusqu'au 31 décembre du 64^{ième} anniversaire de l'invalidé

2.2.2.2 PM réglementaire du maintien de l'invalidité consolidée avec l'ancienneté annuelle k

$$\text{RegPM}_k^{\text{Maintien inval}} = \sum_{j=k+1}^{65-x'} A^{\text{annuel}} \times e^{-(j-k) \times r} \times \frac{l_{x',j}^{\text{inval}}}{l_{x',k}^{\text{inval}}}$$

2.2.3 Provisionnement réglementaire du passage en invalidité

2.2.3.1 Notations

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table réglementaire du BCAC de passage en invalidité. Le pas du modèle est annuel. On suppose donc que le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin d'année). On opte pour une actualisation en continue.

Les notations sont les suivantes :

1. x' est l'âge d'entrée en invalidité.
2. x est l'âge d'entrée en incapacité.
3. A^{annuel} représente l'arrérage (ie. rente) annuel tenant compte des frais de gestion des sinistres.
4. $l_{x',k}^{\text{Inval}}$ est l'effectif réglementaire des invalides consolidés à l'âge x' et d'ancienneté k ans.
5. $d_{x,a}^{\text{passage}}$ est le nombre de sorties réglementaires d'incapacité pour cause de passage en invalidité durant le $(a+1)^{\text{ième}}$ mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.
6. Les âges aux passages en invalidité sont par hypothèse x , $x+1$ et $x+2$.

D'où

$$q_{x,a}^{\text{Passage}} = \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,a}^{\text{incap}}}$$

$12q_{x,0}^{\text{Passage}}$, $24q_{x,0}^{\text{Passage}}$, $36q_{x,0}^{\text{Passage}}$ sont respectivement la probabilité de passage réglementaire en invalidité au cours de la première année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours de la première et deuxième année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours des trois années d'incapacité.

On suppose que la rente en invalidité est versée jusqu'au 31 décembre du 64^{ième} anniversaire de l'invalidé.

2.2.3.2 PM de passage sans ancienneté

Soit x l'âge à l'entrée en incapacité.

On note :

$$PM_1 = \sum_{j=1}^{65-x} A^{\text{annuel}} \times e^{-j \times r} \times \frac{j l_x^{\text{inval}}}{0 l_x^{\text{inval}}}$$

$$PM_2 = \sum_{j=1}^{65-(x+1)} A^{\text{annuel}} \times e^{-(j+1) \times r} \times \frac{j l_{x+1}^{\text{inval}}}{0 l_{x+1}^{\text{inval}}}$$

$$PM_3 = \sum_{j=1}^{65-(x+2)} A^{\text{annuel}} \times e^{-(j+2) \times r} \times \frac{j l_{x+2}^{\text{inval}}}{0 l_{x+2}^{\text{inval}}}$$

D'où

$$\boxed{RegPM^{\text{passage}} = PM_1 \times {}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}} + PM_2 \times ({}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}} - {}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}}) + PM_3 \times ({}_{36}q_{x,0}^{\text{Passage}} - {}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}})}$$

2.2.4 Remarques

Contrairement au provisionnement économique, le provisionnement réglementaire n'impose pas la prise en compte de l'inflation future espérée liée aux revalorisations contractuelles des prestations futures probables. Le provisionnement en Norme Française s'appuie sur les trois tables réglementaires du BCAC et sur une actualisation à l'aide d'un taux technique.

Chapitre 3 : La réglementation prudentielle Solvabilité II en cours d'élaboration

Section 3.1 : Les objectifs et l'organisation du projet Solvabilité II

Le projet Solvabilité II a pour but de mettre à jour le système de solvabilité européen en intégrant tous les risques réels propres à chaque société d'assurance. La Marge de Solvabilité de l'assureur sera donc dépendante de son niveau de risque (la différence majeur entre solvabilité I et solvabilité II). En conséquence, la réforme solvabilité II cherche à garantir aux assurés la solvabilité de leur assureur dans un an avec une probabilité de 99,5 % et à harmoniser la réglementation du marché Européen de l'Assurance.

Le bilan prudentiel Solvency II s'effectuera en valeur économique.

Ce projet repose sur trois piliers fondamentaux :

1. Le premier se rapporte à l'exigence de fonds propres. Il a pour rôle de mettre des seuils de fonds propres aux organismes assureurs.
En particulier, l'assureur devra évaluer son capital minimum requis³⁴ (MCR) et son capital de solvabilité requis³⁵ (SCR). Le MCR sera un niveau de solvabilité à atteindre impérativement par la compagnie. Quant au calcul du SCR, il permettra d'estimer, dans une vision économique, le niveau de fonds propres que doit détenir l'assureur aujourd'hui pour ne pas risquer d'être en ruine dans un an avec une probabilité de 99,5 %. Son but sera d'absorber les pertes imprévues importantes.
2. Le deuxième met l'accent sur les exigences qualitatives en soulignant l'importance de la bonne gouvernance pour la gestion des risques de l'assureur et pour l'efficacité de la supervision.
3. Le dernier est l'obligation pour les organismes assureurs de publier certaines informations et de les détailler à l'autorité de contrôle.

La Commission européenne pilote ce projet et consulte le Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) pour obtenir des avis techniques.

Section 3.2 : La Directive Solvabilité II

La directive³⁶ Solvabilité II a été votée par le Parlement Européen le 22 avril 2009 et adoptée le 5 mai 2009 par le Conseil pour les Affaires Économiques et Financières³⁷ (ECOFIN).

Le but de cette section est d'énoncer quelques points clés non exhaustifs de cette directive.

Cette dernière fixe notamment les règles suivantes en matière de :

³⁴ MCR signifie en anglais *Minimum Capital Requirement*.

³⁵ SCR signifie en anglais *Solvency Capital Requirement*.

³⁶ Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II).

Cette directive a été transposée en droit français puis publiée au journal officiel du 17 décembre 2009.

³⁷ ECOFIN signifie en anglais *ECONOMIC and FINANCIAL Affairs Council*. Il exerce le pouvoir législatif en matière économique et financière, dans certains cas en codécision avec le Parlement européen.

1. valorisation des actifs et des passifs, provisions techniques, fonds propres, capital de solvabilité requis, minimum de capital requis et règles d'investissement
2. évaluation du capital de solvabilité requis à partir de modèles internes intégraux ou partiels
3. système de gouvernance

3.2.1 La valorisation des actifs et des passifs

3.2.1.1 *Le Best Estimate (BE)*

D'après l'article 77 de la directive solvabilité II, le BE correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. Le calcul du BE est fondé sur des informations actualisées. Il est évalué brut de réassurance. Le paragraphe 2 précise spécialement que la projection des flux de trésorerie doit englober toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.

3.2.1.2 *La marge de risque*

Selon ce même article 77, la marge de risque est le montant qu'un repreneur éventuel du passif d'assurance exigerait au-delà du *Best Estimate*.

La marge de risque doit être déterminée par la méthode du coût du capital. Le coût du capital est le coût que représente l'immobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.

3.2.1.3 *Les provisions techniques*

La valeur des provisions techniques doit correspondre à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque selon l'article 77 alinéa 1. Il s'agit de l'engagement de l'assureur envers l'assuré.

Dans le calcul des provisions techniques, d'après l'article 78 de la directive, l'assureur doit inclure par exemple, l'inflation, les participations discrétionnaires³⁸ que les entreprises d'assurance et de réassurance prévoient de verser dans l'avenir, qu'il s'agisse de paiements garantis ou non contractuellement.

3.2.1.4 *Le MCR*

Le MCR est le montant minimum de fonds propres à détenir absolument par l'entreprise d'assurance. Dans le cas contraire, l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP) procédera au retrait de l'agrément de la société d'assurance.

Dans l'article 129 paragraphe n°4 de la directive, les entreprises d'assurance et de réassurance doivent calculer leur minimum de capital requis au moins une fois par trimestre et notifier le résultat de ce calcul aux autorités de contrôle.

Le MCR est calculé en net de réassurance.

Les spécifications techniques définissent une approche « linéaire » du MCR, avec un plancher et un plafond respectivement de 25 % et 45 % du montant de SCR. On souligne que ce SCR pourra être déterminé avec la formule standard ou avec un modèle interne homologué par l'autorité de contrôle.

³⁸ Un élément de participation discrétionnaire est un droit contractuel de recevoir, en tant que supplément aux prestations garanties, des prestations complémentaires.

Conformément à l'article 129 1. c), la fonction linéaire utilisée pour calculer le minimum de capital requis est la valeur en risque (VaR³⁹) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance concernée, avec un niveau de confiance de 85 % à l'horizon d'un an.

Remarque :

Les définitions de la VaR et la *Tail Value at risk* (TVaR) sont dans l'Annexe 1 .

3.2.1.5 Le SCR

On rappelle que le rôle du SCR est d'absorber les pertes imprévues importantes.

Suivant l'article 101§3 de la directive solvabilité II, le SCR est calibré de manière à garantir la prise en considération de tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée. Il doit couvrir le portefeuille en cours, ainsi que le nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir.

Selon l'article 102, les entreprises d'assurance et de réassurance calculent leur SCR au moins une fois par an et notifient le résultat de ce calcul aux autorités de contrôle (article 102).

Le SCR doit être couvert par des éléments éligibles⁴⁰ subdivisés en Tiers de 1 à 3.

La directive prévoit le calcul du SCR soit à l'aide de la formule standard soit à partir du modèle interne de l'entreprise. Le SCR à l'aide de la formule standard sera abordé dans le § 3.3.6 .

3.2.2 L'évaluation du capital de solvabilité requis à partir de modèles internes intégraux ou partiels

Dans le cadre du calcul de capital de solvabilité requis à l'aide de modèles internes intégraux ou partiels, l'article 120 de la directive institue le test relatif à l'utilisation du modèle⁴¹.

Ainsi, cet acte normatif oblige les entreprises d'assurance et de réassurance à utiliser largement leur modèle interne. Plus précisément, ce dernier doit jouer un rôle important dans leur système de gouvernance (système de gestion des risques, processus décisionnels et processus d'évaluation, d'allocation du capital économique). De plus, la fréquence à laquelle leur SCR est calculé doit être cohérente avec celle à laquelle le modèle est utilisé dans leur système de gestion des risques et leurs processus décisionnels.

Par ailleurs, par son article 121, la directive constraint l'entreprise d'assurance à couvrir dans son modèle interne tous les risques importants auxquels elle est exposée. Il s'agit au minimum :

- du risque de souscription en non-vie
- du risque de souscription en vie
- du risque de souscription en santé
- du risque de marché
- du risque de crédit
- du risque opérationnel.

Le modèle interne devra obtenir l'approbation de l'autorité de contrôle pour qu'il puisse se substituer à la formule standard.

A travers son article 122, la directive précise que le SCR se déduira directement de la distribution de probabilité prévisionnelle⁴² générée par le modèle interne, sur la base de la mesure de la VaR.

³⁹ VaR : *Value at Risk*

⁴⁰ Les éléments éligibles sont des éléments de capital ayant une capacité d'absorption des pertes suffisantes.

⁴¹ Le « test relatif à l'utilisation du modèle » est la traduction en anglais de *use test*.

⁴² D'après la directive, la «distribution de probabilité prévisionnelle» est une fonction mathématique qui affecte à un ensemble exhaustif d'événements futurs mutuellement exclusifs une probabilité de réalisation.

En t=0, le SCR de l'entreprise d'assurance sera la somme de son actif net (cf. *Figure 3*) en t=0⁴³ et de son besoin en fonds propres additionnels en t=0. Ce dernier sera déterminé à partir de la distribution de la valeur actuelle de l'insuffisance d'actifs nets⁴⁴ en t=1⁴⁵. Le modèle interne utilisera les techniques de simulations de Monte Carlo pour estimer cette distribution. Puis, il en déduira le quantile simulé de niveau de confiance 99,5 % c'est-à-dire la VaR de niveau de confiance 99,5 %.

Remarques :

- Pour chaque scénario, si l'insuffisance d'actifs nets en t=1 est négative ou nulle alors l'entreprise d'assurance sera solvable.
- Si le besoin additionnel en fonds propres est positif alors l'assureur devra renforcer ses actifs nets en t=0 pour couvrir son appétence au risque. S'il est négatif, l'assureur détiendra plus d'actifs nets que nécessaire pour honorer ses engagements en t=1 avec une probabilité de 99,5 %.
- Le pas du modèle de Macif-Mutualité est annuel. Par conséquent, il ne tient pas compte de l'insolvabilité temporaire au cours de l'année succédant la date d'évaluation du besoin en fonds propres.

ACTIF	PASSIF
ACTIFS en valeur de marché	ACTIF NET DETTES en valeur économique

Figure 3 : Le Bilan Economique simplifié Solvabilité II

3.2.3 Le système de gouvernance

La directive solvabilité II impose, par son article 45, l'évaluation Interne des Risques et de la Solvabilité (ORSA)⁴⁶.

D'après cet article, cette évaluation doit faire partie intégrante de la stratégie commerciale et doit être retenue dans les décisions stratégiques de l'entreprise. Elle ne sert pas seulement à calculer un montant de capital requis. Elle se situe en fait au-delà de cette détermination du besoin en fonds propres. Les assureurs doivent mettre en place une évaluation de leurs risques en intégrant leur profil de risque, leur appétence au risque et leur stratégie de pilotage face aux risques. L'ORSA est en réalité un pré-requis permettant de répondre aux exigences du *Use Test* incluses dans la directive.

⁴³ L'actif net en t=0 est le stock d'actif net de l'entreprise d'assurance à la date d'évaluation du besoin en fonds propres.

⁴⁴ L'insuffisance d'actif net en t=1 est l'opposé du signe de la valeur de l'actif net en t=1.

⁴⁵ Lorsque t=1, on se situe un an après la date d'évaluation du besoin en fonds propres.

⁴⁶ ORSA signifie *Own Risk and Solvency Assessment*.

Section 3.3 : QIS 5

3.3.1 Introduction

Les spécifications de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS 5) de la directive ont donc été publiées le 6 juillet 2010. Elles apportent des réponses techniques au projet Solvabilité II. Elles s'inscrivent dans le droit-fil des pré-spécifications de mi avril 2010. En effet, au printemps, la commission européenne avait proposé des assouplissements lors de la publication des pré spécifications techniques QIS 5. La commission avait alors opté pour des calibrages de la formule standard à mi chemin entre ceux de QIS4 et l'avis définitif durci de janvier 2010 du Comité Européen des Superviseurs d'Assurance (CEIOPS). Cet avis avait fait l'objet de critiques unanimes des assureurs puisqu'il était susceptible de conduire à des recapitalisations massives liées au durcissement des positions du CEIOPS.

La cinquième étude quantitative d'impact se déroule depuis août 2010. La fin de l'exercice est prévu à octobre 2010 pour les calculs par entité et à novembre 2010 pour l'agrégation des entités au sein de leur Groupe.

Les conclusions du QIS5 seront rendues publiques le 29 avril 2011 avant l'arrêt des calibrages finaux des mesures d'application de la directive. QIS5 devrait être la dernière étude d'impact avant l'entrée en vigueur de solvabilité II.

En août dernier, des Orientations Nationales Complémentaires (ONC) ont été publiées et le CEIOPS a fait paraître un document corrigéant les "coquilles" des spécifications techniques du 6 juillet.

Par ailleurs, Bruxelles a repoussé à 2013 l'entrée en vigueur de solvabilité II. Ainsi, la date d'application de la directive est désormais fixée au 31 décembre 2012. Les entreprises ont donc jusqu'à la fin 2012 pour se préparer à l'établissement de leurs comptes annuels en norme solvabilité II.

Notons que cette réforme pourrait profiter en particulier aux réassureurs. Ce nouveau cadre prudentiel oblige les assureurs à ajuster leurs fonds propres en fonction des risques économiques réellement supportés. En conséquence, les entreprises d'assurance pourraient céder davantage de risques pour ne pas renforcer leurs fonds propres.

Comme pour la directive Solvabilité II, l'objectif de cette section n'est pas le recensement exhaustif du contenu technique de ces spécifications techniques mais simplement une présentation succincte des réponses techniques en lien avec les risques de prévoyance.

3.3.2 Le Best Estimate (BE) des provisions techniques

Suivant la rubrique V2.2 des spécifications techniques QIS5, le best estimate devrait correspondre à la moyenne des cash-flows futurs pondérée par les probabilités de réalisation en tenant compte de la valeur temporelle de l'argent.

Autrement dit,

Selon la même rubrique, il devrait tenir compte de l'incertitude des cash-flows futurs. Ainsi, la meilleure estimation correspondra à l'espérance de la distribution des cash-flows.

Les méthodes aboutissant au calcul du BE peuvent être d'après l'annexe B des spécifications techniques :

- Les méthodes de simulations (Monte Carlo, approche bayésienne, la méthode du bootstrap...)
- Les techniques analytiques (distribution connue, formule fermée...)
- Les techniques déterministes (stress testing, scenario testing...).

Suivant le paragraphe 8 de l'annexe cité ci-dessus, le BE du passif vie ou bien non vie peut être obtenue à partir de techniques analytiques et déterministes.

Selon le TP.2.8 des spécifications, le BE est calculé brut de réassurance. Les flux liés à la réassurance doivent être évalués séparément.

3.3.3 La marge de risque

Suivant le TP5.4, la marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.

La marge de risque doit être calculée en déterminant le coût que représente l'immobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal à 6 % du SCR par an nécessaire pour faire face aux engagements pendant toute leur durée résiduelle.

L'annexe H des spécifications techniques illustre la méthode.

Le CEIOPS propose cinq façons de projeter des SCR dans le futur. Elles sont énumérées dans le TP.5.32.

3.3.4 Les provisions techniques

Suivant le TP.5.2, les Provisions Techniques (PT) sont la somme d'un Best Estimate et d'une marge pour risque.

Les spécifications techniques QIS5 définissent la classification par segment de ligne d'activité (lines of business⁴⁷) des contrats pour le calcul du Best Estimate et de la marge de risque (TP.1.12).

Une différentiation s'opère entre les obligations d'assurance vie et celles d'assurance non vie :

1. Les obligations d'assurance se livrant à des bases techniques d'assurance vie seront considérées comme des obligations d'assurance vie (TP.1.12).
2. En revanche, les obligations d'assurance se livrant à des bases techniques d'assurance non vie seront considérées comme des obligations d'assurance non vie.

Au final, l'obligation d'assurance appartient soit à une obligation vie, soit à une obligation non vie, soit à une obligation santé similaire vie (TP.1.25), soit à une obligation santé similaire non vie (TP.1.27).

⁴⁷ L'abréviation couramment utilisée pour *Line Of business* est LOB.

La définition de l'assurance santé en QIS 5 peut ne pas coïncider avec celle de la norme comptable nationale (TP.1.28).

D'après le *Consultation Paper* (CP) 50, le CEIOPS définit l'assurance santé comme la couverture d'événements affectant l'intégrité physique ou mentale de l'assuré. Les obligations d'assurance santé sont tous les types d'assurance compensant ou remboursant les pertes (eg. pertes de revenu) ou les dépenses médicales, qu'elles soient préventives ou curatives, causées par la maladie, les accidents ou l'invalidité (assurance protection des revenus).

L'annexe C des spécifications QIS 5 précise la définition de l'assurance santé. On apprend notamment que les rentes liées à la protection des revenus (*Annuities related to income protection Insurance*) sont à classifier dans l'obligation santé similaire vie (*Health SLT*).

3.3.5 MCR

D'après le MCR5 du QIS5, l'approche segmentée d'évaluation du MCR est la même que pour le calcul des provisions techniques (V.2.1).

Les formules linéaires de calcul du MCR figurent dans le MCR 1 à 26.

En résumé, on a donc :

$$MCR_{Linéaire} = MCR_{Non\ Vie} + MCR_{Vie}$$

$$MCR_{Combiné} = \min (\max(0,25 \times SCR ; MCR_{Linéaire}), 0,45 \times SCR)$$

$$MCR_{Final} = \max \{MCR_{Combiné} ; AMCR\}$$

D'après le MCR.7, AMCR⁴⁸ est le plancher absolu.

3.3.5.1 Calcul du MCR_{Vie}

Ci-dessous figure le détail du MCR_{Vie} :

$$MCR_{Vie} = \max\{\alpha_{C.1.1}TP_{C.1.1} + \alpha_{C.1.2}TP_{C.1.2} ; WP_{Floor}TP_{C.1.1}\} + \sum_{j \in \{C.2.1 ; C.2.2 ; C.3\}} \alpha_j TP_j + \alpha_{C.4} CAR$$

Où

- CAR : capitaux sous risque nets de réassurance (par exemple, les capitaux décès souscrits).
- TP_{ij} : provisions techniques nettes de réassurance et sans marge de risque.

Avec les calibrations suivantes :

$$WP_{Floor} = 1,6 \%$$

⁴⁸ AMCR : the Absolute Floor of the MCR

Indice	Segment	α_i
Contrats avec Participation aux Bénéfices (PB)		
C.1.1	Provisions Techniques (PT) avec PB garantie	5 %
C.1.2	Provisions Techniques (PT) avec PB futures discrétionnaires	-8,8 %
Contrats en Unités de Compte (UC)		
C.2.1	PT des contrats sans garantie	0,5 %
C.2.2	PT des contrats avec garantie	1,8 %
Contrats sans Participation aux Bénéfices (PB)		
C.3	PT des contrats sans PB	2,9 %
Les capitaux sous risque		
C.4	Les capitaux sous risque	0,1 %

D'après le MCR 24, on appliquera par exemple le coefficient de -8,8 % à nos montants de provisions économiques des rentes conjoint et éducation en cours à la DEBFP. Ces provisions seront affectées au segment intitulé « Contrats avec PB futures discrétionnaires ». En effet, les revalorisations de Macif-Mutualité des rentes éducation et conjoint en cours à la clôture s'assimilent à de la participation future discrétionnaire.

3.3.5.2 Calcul du $MCR_{Non\ Vie}$

$$MCR_{Non\ Vie} = \sum_j \max(\alpha_j TP_j ; \beta_j P_j)$$

Où

- TP_j sont les provisions techniques (n'incluant pas la marge de risque) nettes de réassurance pour chaque branche j.
- P_j sont les primes souscrites des 12 derniers mois nettes de réassurance.

Le provisionnement économique du maintien en incapacité et de l'invalidité en attente des sinistres incapacité en cours à la date d'évaluation du besoin en fonds propres devrait peser dans le calcul du MCR Non-Vie. Il en sera de même pour les primes souscrites en IJ et invalidité.

3.3.6 SCR

Le calcul du SCR selon la formule standard se décompose en les modules de risque schématisés ci-dessous :

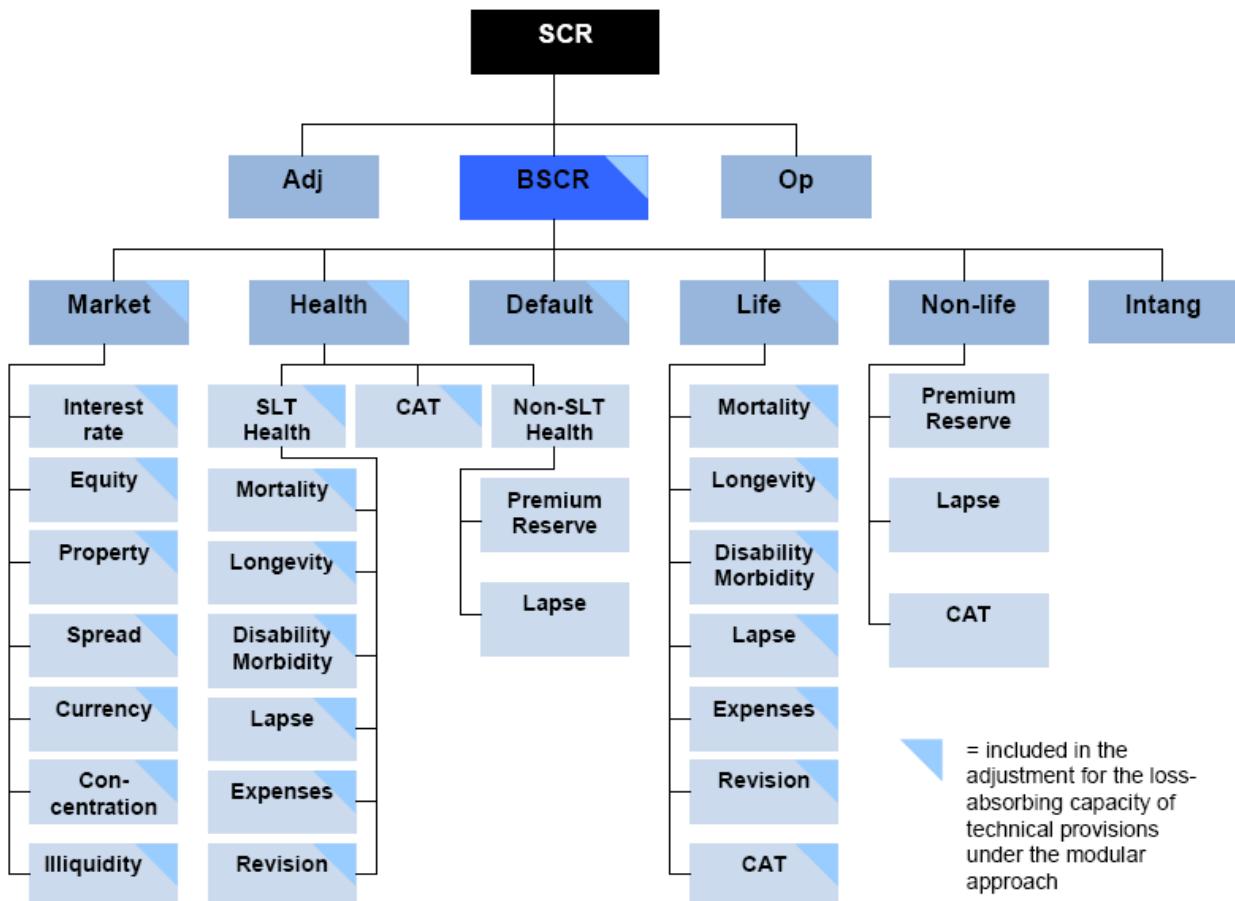


Figure 4 : Les modules de risque lors du calcul du SCR selon la formule standard
(Extrait des spécifications QIS 5)

Le capital de solvabilité requis calculé selon la formule standard se déduit des trois éléments suivants :

1. le capital de solvabilité requis de base (BSCR)
2. l'exigence de capital pour risque opérationnel⁴⁹ (SCR_{op})
3. l'ajustement⁵⁰ visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés (Adj)

On a

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Le capital de solvabilité requis de base se compose de modules de risque individuels qui sont agrégés entre eux grâce à une matrice de corrélation.

Ce capital requis de base comprend les modules de risque suivants :

- le risque de marché : Il est directement lié à la volatilité des valeurs des investissements (Actions, Obligations, Immobilier...).
- le risque de souscription en santé
- le risque de contrepartie : le risque dû à la faillite ou au changement de qualité de crédit d'un émetteur ou d'une contrepartie (réassureurs, intermédiaires...)

⁴⁹ Le risque opérationnel comprend en particulier les risques juridiques.

⁵⁰ L'ajustement reflète la compensation potentielle de pertes non anticipées par une baisse simultanée soit des provisions techniques soit des impôts différés, ou une combinaison des deux. Cet ajustement tient compte de l'effet d'atténuation des risques attaché aux prestations discrétionnaires futures des contrats d'assurance.

- le risque de souscription en vie
- le risque de souscription en non-vie
- le risque des intangibles

On notera que le risque souscription santé est subdivisé en risque santé similaire vie (*SLT Health*), risque santé similaire non vie (*Non-SLT Health*) et les risques catastrophiques (scénario ARENA, scénario concentration et le scénario pandémie).

3.3.6.1 Le risque santé similaire vie (SLT Health)

Au sein du risque santé similaire vie, on trouve les sous risques suivants :

- La mortalité : risque d'augmentation des PT en raison d'une hausse des taux de mortalité.
- La longévité : risque d'augmentation des PT en raison d'une diminution des taux de mortalité.
- L'incapacité / L'invalidité / La dépendance : risque d'augmentation des PT à cause de la détérioration de l'état de santé des assurés.
- Le rachat : Risque notamment lié à la variation des taux de rachat.
- Les frais : Risque causé par la variation des frais de gestion des contrats.
- La révision : Risque engendré par la révision du montant des rentes (par exemple l'invalidité).
- Catastrophe : Risque provoqué par les évènements extrêmes.

En bref, le SCR santé similaire vie est déterminé grâce à l'approche scénario consistant à mettre en place des chocs. Par exemple, le choc incapacité/invalidité consiste à baisser les taux de rétablissement et hausser les taux d'incidence en incapacité. Concernant le choc mortalité, on procède à la hausse permanente des taux de décès.

Pour calculer l'ajustement lié au mécanisme de la PB, on applique les chocs d'une part sans tenir compte des effets d'absorption de la PB et d'autre part en prenant en compte ces effets. Deux approches doivent être testées pour la détermination de l'ajustement :

1. Le scénario équivalent.
2. L'approche modulaire.

3.3.6.2 Le risque santé similaire non vie (Non-SLT Health)

Au sein du risque santé similaire non vie, on trouve les sous risques suivants :

- Le risque de prime et de réserve évalué par l'approche facteur.
- Le risque de rachat lié aux résiliations des contrats évalué par l'approche scénario (chocs).

3.3.6.3 La classification de l'incapacité et l'invalidité

Concernant, l'arrêt de travail, dernièrement les questions réponses (Q&A) de l'ACP ont précisé les éléments suivants :

Pour les contrats annuels, la garantie incapacité/invalidité peut être traitée dans le module « Santé non-SLT⁵¹ » dans la catégorie « income protection » jusqu'à la consolidation de l'invalidité. Après consolidation, le contrat revient à une rente santé assujettie au risque « Santé SLT ». En bref, les rentes consolidées basculent en « Health SLT », où elles sont exposées aux risques de longévité, de frais et de révision. L'incidence⁵² sera prise en compte dans le sous module « Health non SLT », soumise à un risque de prime. Les rentes temporaires d'incapacité ou en attente de consolidation affecteront le risque de réserve non SLT⁵³.

⁵¹ SLT : similaire à des techniques vie

⁵² L'incidence désigne le passage de valide à l'état d'incapacité ou à l'état direct d'invalidité.

⁵³ Non SLT : similaire à des techniques non vie.

Cette préconisation est suivie actuellement par Macif-Mutualité puisque ses contrats individuels avec garantie incapacité et invalidité entrent dans ce cadre (contrats annuels à tacite reconduction). Etant donné le non achèvement pour le moment de l'exercice QIS5, on peut envisager de nouvelles interprétations au-delà du mois de septembre 2010. Les positions de la Mutuelle ne sont pas encore figées. De plus, nous procéderons vraisemblablement à un test de sensibilité. Ce dernier analysera l'impact sur le calcul du SCR « risque de souscription santé » de l'affectation des incapacités en cours et contrats existants dans le sous module de risque « Health non SLT » plutôt que celui « Health SLT ».

3.3.6.4 La classification des diverses garanties

Etant donné la nature des risques de Macif-Mutualité, le positionnement actuel de Macif-Mutualité lors du calcul de la formule standard est le suivant :

- Les risques liés aux garanties rente conjoint, rente éducation, capital versé, obsèques seront pris en compte dans le calcul du SCR risque de souscription vie de la formule standard.
- L'incapacité en cours et l'invalidité en attente seront intégrées dans le calcul du SCR Santé Similaire Non Vie et l'invalidité consolidée en cours dans le SCR Santé Similaire Vie.
- Les risques provenant de la garantie frais de santé seront retenus dans le calcul du SCR Santé Similaire Non Vie.

Section 3.4 : Le provisionnement économique du maintien et du passage

Les primes encaissées durant l'exercice doivent permettre de payer les sinistres survenus au cours de cet exercice. A tout instant, l'assureur doit disposer de provisions techniques suffisantes pour honorer ses engagements. Ainsi, en cas d'arrêt de la souscription, les sinistres affectant les contrats souscrits jusqu'alors seront indemnisés intégralement avec y compris les frais de gestion.

Notons que le provisionnement d'expérience s'appuie sur la table propre estimée à partir du portefeuille historique étudié de l'assureur.

3.4.1 Provisionnement économique du maintien en incapacité des sinistres en cours à la clôture comptable

Dans le modèle interne, les sinistres en cours d'incapacité provisionnés à la clôture d'un exercice (au 31/12/N) sont les sinistres en cours non clôturés par la gestion et indemnisés durant l'exercice. Remarquons toutefois, que le provisionnement mathématique des sinistres en cours d'instruction n'est pas suffisant pour tenir compte de l'ensemble des engagements nés des surveances passées (N, N-1, N-2...). L'assureur devra spécialement provisionner les sinistres tardifs appelés aussi IBNR (Incurred But Not Reported) et constituer des provisions pour prestations échues et déclarées mais non encore réglées à la clôture de l'exercice comptable.

3.4.1.1 Notations

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table d'expérience de maintien en incapacité de Macif-Mutualité. Le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin de mois).

Les notations sont les suivantes :

1. L'ancienneté mensuelle a est comprise entre 0 et 35.
2. x est l'âge d'entrée en incapacité : $23 \leq x \leq 64$
3. $l_{x,a}^{\text{ExpIncap}}$ est l'effectif d'expérience des individus en arrêt de travail d'ancienneté a mois et entrés à l'âge x en incapacité.
4. $P(i', j')$ est le prix d'un zéro coupon à la date i' d'échéance la date j' (de maturité $j' - i'$).

5. ExpPM désigne la Provision Mathématique d'Expérience.
6. IJ est le montant de l'Indemnité Journalière d'incapacité. L'assureur indemnise chaque jour d'incapacité à compter de l'atteinte de la franchise durant au maximum 3 ans ou 1 096 jours. En moyenne, le nombre indemnisé d' IJ mensuellement est de 30,5. Elle tient compte des frais de gestion des sinistres.

3.4.1.2 Provision Mathématique d'expérience de maintien en incapacité avec l'ancienneté mensuelle a dans l'état incapacité.

Le modèle interne est en pas annuel. Les flux futurs probables de maintien en incapacité, de maintien en invalidité et d'invalidité en attente sont regroupés au sein d'une même variable. Cette dernière sera actualisée en annuel. La formule ci-dessous est donc simplifiée puisque l'actualisation plus juste devrait avoir lieu en mensuel

$$\text{ExpPM}_a^{\text{Maintien incap}} = \sum_{m=1}^{36-a} 30,5 \times IJ \times P\left(0 ; \left[\frac{m}{12}\right]\right) \frac{l_{x,m+a}^{\text{ExpIncap}}}{l_{x,a}^{\text{ExpIncap}}}$$

Avec $[x]$ désignant la partie entière par excès ou partie entière supérieure de x .

3.4.1.3 Illustration graphique du provisionnement d'expérience

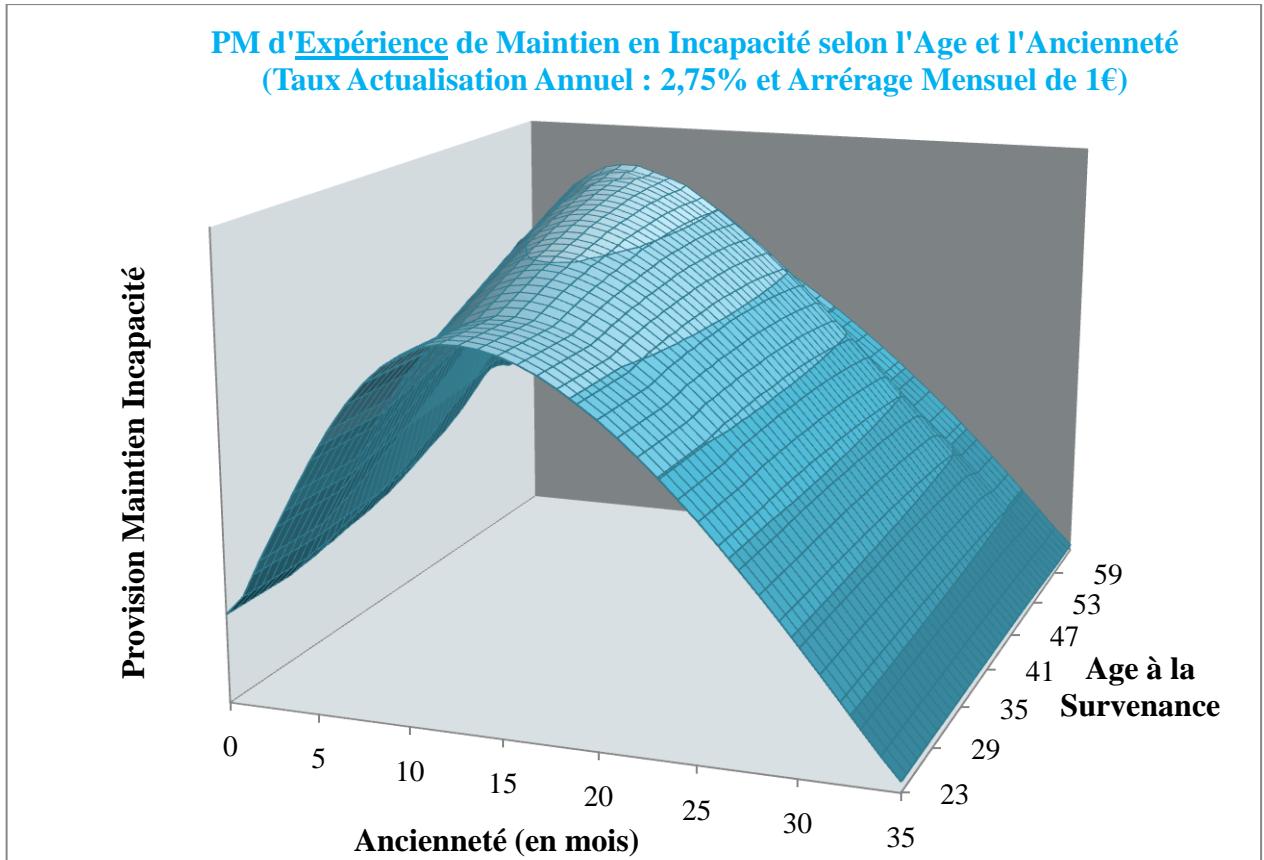


Figure 5 : PM d'Expérience de Maintien en Incapacité

Les calculs donnant lieu à la Figure 5 se sont appuyés sur la fonction VAN d'Excel. Lors de la construction de la table d'expérience de Macif-Mutualité, un lissage sur la fonction d'espérance résiduelle (barème à taux technique nul) avait été privilégié. C'est pourquoi, contrairement

au provisionnement par la loi du BCAC, on constate effectivement la régularité du provisionnement d'expérience.

Pour chaque âge à l'entrée en incapacité et chaque ancienneté mensuelle atteinte dans l'état par l'assuré, l'engagement restant de l'assureur vis-à-vis de son assuré est évalué grâce à la loi d'expérience.

On note i le taux d'actualisation mensuel équivalent au taux technique r annuel.

En adoptant les mêmes notations que précédemment, la PM de la Figure 2 est donc calculée de la manière suivante :

$$PM_a^{\text{Maintien incap}} = \sum_{m=1}^{36-a} \left(\frac{1}{1+i} \right)^m \times \frac{l_{x,m+a}^{\text{ExpIncap}}}{l_{x,a}^{\text{ExpIncap}}}$$

Elle ne correspond pas totalement au provisionnement économique puisque l'actualisation a lieu à l'aide d'un taux technique. Cette différence volontaire avait pour but de permettre une comparaison entre le provisionnement d'inventaire de la Figure 2 en page 25 et le provisionnement d'expérience de la Figure 5 ci-dessus.

3.4.2 Provisionnement économique du maintien de l'invalidité consolidée :

3.4.2.1 Notations

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table d'expérience de maintien en invalidité. Le pas du modèle est annuel. On suppose que le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin d'année) et que l'actualisation est en continue.

Les notations sont les suivantes :

1. L'ancienneté annuelle k en invalidité est comprise entre 0 et $65 - x'$.
2. x' est l'âge d'entrée en invalidité : $20 \leq x' \leq 64$.
3. A^{annuel} représente l'arrérage annuel.
4. $l_{x',k}^{\text{ExpInval}}$ est l'effectif d'expérience des invalides consolidés à l'âge x' et d'ancienneté k ans.
5. $P(i',j')$ est le prix d'un zéro coupon à la date i' d'échéance la date j' (de maturité⁵⁴ $j' - i'$).

On suppose que la rente en invalidité est versée jusqu'au 31 décembre du 64^{ème} anniversaire de l'invalidé

3.4.2.2 PM du maintien de l'invalidité consolidée avec l'ancienneté annuelle k

$$ExpPM^{\text{Maintien inval}} = \sum_{j=k+1}^{65-x'} A^{\text{annuel}} \times P(0 ; j-k) \times \frac{l_{x',j}^{\text{ExpInval}}}{l_{x',k}^{\text{ExpInval}}}$$

3.4.3 Provisionnement économique du passage en invalidité :

3.4.3.1 Notations

⁵⁴ La maturité est le temps séparant la date à laquelle une obligation est émise et la date à laquelle la valeur nominale de cette obligation est remboursée.

Pour effectuer le calcul déterministe de cette provision, on se base sur la table d'expérience de passage en invalidité. Le pas du modèle est annuel. On suppose que le versement des prestations a lieu en fin de période (en fin d'année) et que l'actualisation est en continue.

Les notations sont les suivantes :

1. x' est l'âge d'entrée en invalidité
2. x est l'âge d'entrée en incapacité
3. A^{annuel} représente l'arrérage (=rente) annuel
4. $l_{x',k}^{\text{ExpInval}}$ est l'effectif d'expérience des invalides consolidés à l'âge x' et d'ancienneté k ans.
5. $d_{x,a}^{\text{ExpPassage}}$: Le nombre de sorties d'expérience d'incapacité pour cause de passage en invalidité durant le $(a+1)^{\text{ième}}$ mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.

D'où

$$q_{x,a}^{\text{ExpPassage}} = \frac{d_{x,a}^{\text{ExpPassage}}}{l_{x,a}^{\text{ExpIncap}}}$$

${}_{12}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}}$, ${}_{24}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}}$, ${}_{36}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}}$ sont respectivement la probabilité de passage en invalidité au cours de la première année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours de la première et deuxième année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours des trois années d'incapacité.

On suppose que la rente en invalidité est versée jusqu'au 31 décembre du 64^{ième} anniversaire de l'invalidé.

3.4.3.2 PM de passage sans ancienneté

Soit x l'âge à l'entrée en incapacité.

On note :

$$\begin{aligned} PM_1 &= \sum_{j=1}^{65-x} A^{\text{annuel}} \times P(0,j) \times \frac{j l_x^{\text{ExpInval}}}{0 l_x^{\text{ExpInval}}} \\ PM_2 &= \sum_{j=1}^{65-(x+1)} A^{\text{annuel}} \times P(0,j+1) \times \frac{j l_{x+1}^{\text{ExpInval}}}{0 l_{x+1}^{\text{ExpInval}}} \\ PM_3 &= \sum_{j=1}^{65-(x+2)} A^{\text{annuel}} \times P(0,j+2) \times \frac{j l_{x+2}^{\text{ExpInval}}}{0 l_{x+2}^{\text{ExpInval}}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Exp}^{\text{PM}_x^{\text{passage}}} &= \text{PM}_1 \times {}_{12}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}} \\ &\quad + \text{PM}_2 \times \left({}_{24}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}} - {}_{12}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}} \right) \\ &\quad + \text{PM}_3 \times \left({}_{36}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}} - {}_{24}q_{x,0}^{\text{ExpPassage}} \right) \end{aligned}$$

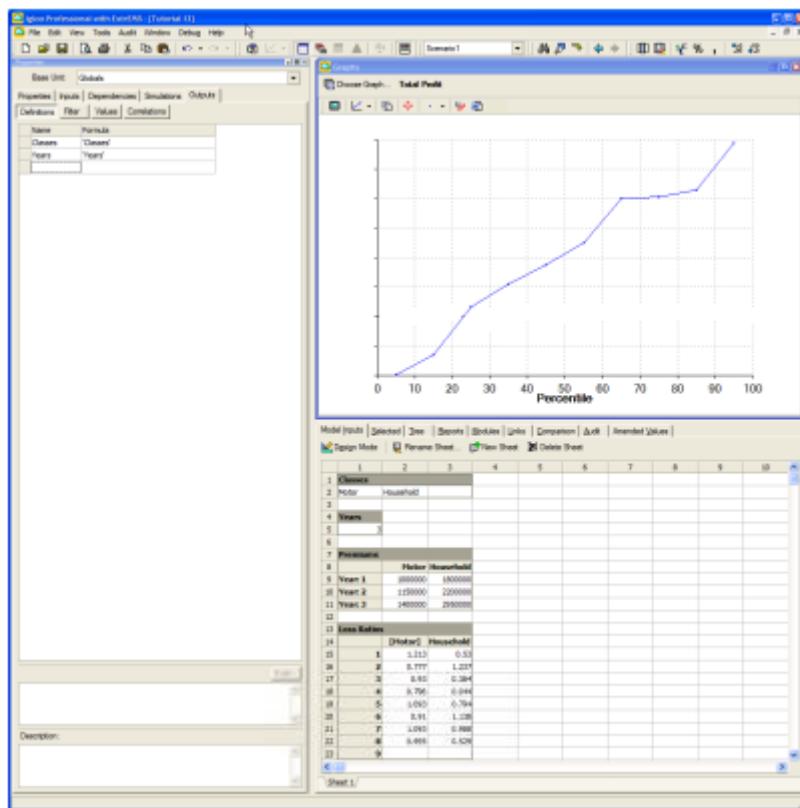
Partie II :

LE CALIBRAGE DU RISQUE ARRET DE TRAVAIL DANS LE MODELE INTERNE

Chapitre 1 : La Structure du Modèle Interne

Section 1.1 : EMB Igloo Professionnal

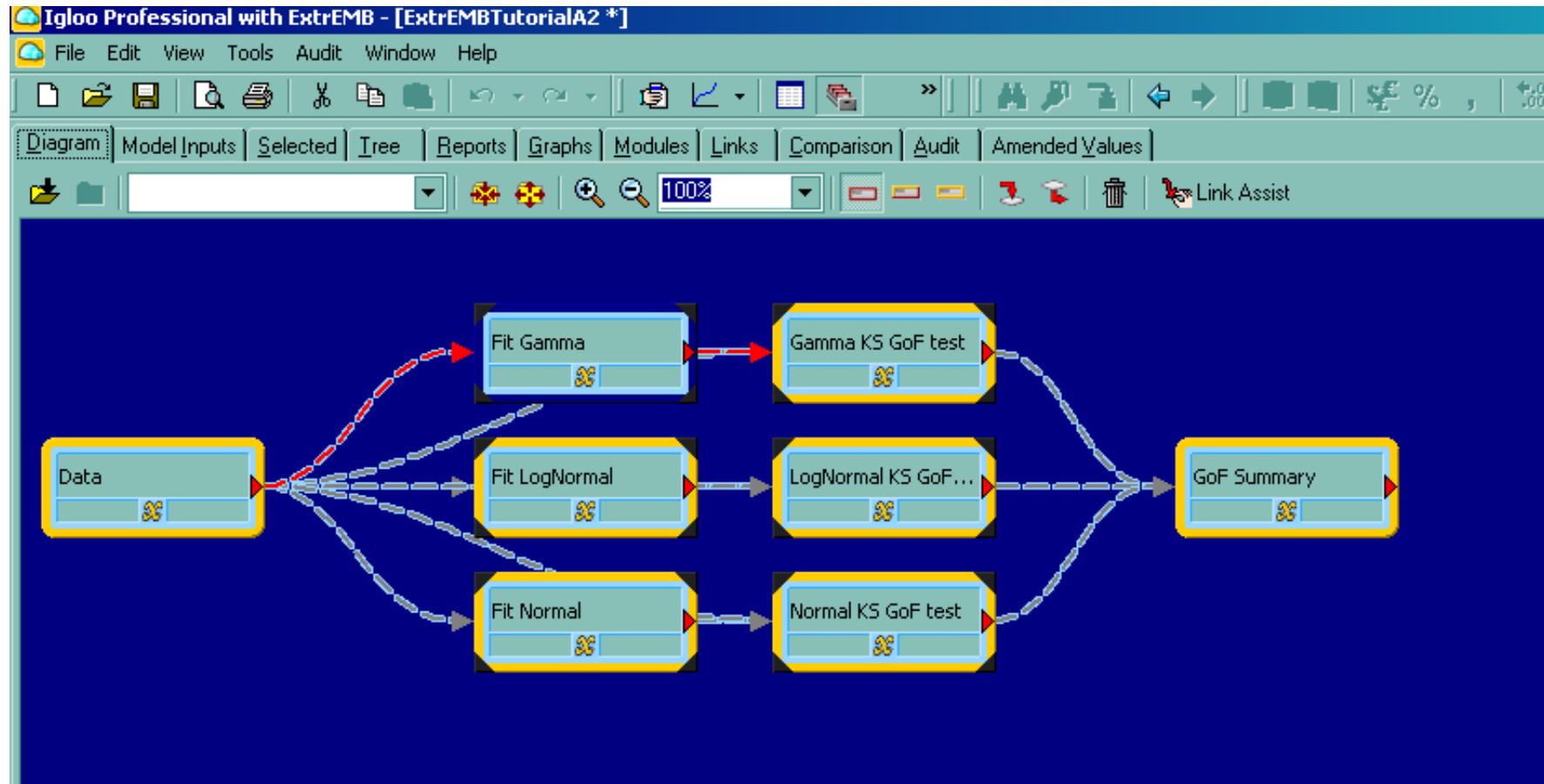
Le modèle interne de Macif-Mutualité a été construit grâce au logiciel EMB Igloo Professionnal. EMB Igloo est notamment utilisé par les assureurs et réassureurs pour évaluer la performance de leurs portefeuilles suivant un ensemble de scénarios, pour répondre à des problématiques telles que la réalisation d'un modèle interne dans le cadre de Solvabilité II, l'étude du capital économique, l'allocation de capital, l'optimisation de programmes de réassurance, la gestion actif-passif... Il crée des structures de dépendance (corrélation linéaire, copule de Gumbel, Franck, Clayton...) entre les marginales et effectue des simulations. Il génère des rapports et des graphiques comme le montre le graphique fictif ci-dessous :



De plus, il existe également des modules pré-construits réalisant certaines études comme un ajustement à une loi, des tests statistiques d'adéquation, des études sur les séries temporelles, des analyses de dépendance, des régressions linéaires, des modèles linéaires généralisés.

Ci-dessous, figure à titre d'exemple, l'organisation possible d'un projet igloo :

Dans ce module, les données ont été saisies dans la brique (ou base unit) nommée ici « data ». Grâce à des modules déjà créés, d'autres briques comme « Fit Gamma », effectuent des ajustements paramétriques aux données et des tests d'adéquation « Gamma KS GoF test ». Les briques peuvent être reliées entre elles. En effet, dans une base unit, des données sont saisies en entrée, des calculs sont effectués par le biais de formules et des résultats sont obtenus. Ces mêmes résultats en sortie d'une brique peuvent être réutilisés en entrée d'une autre brique.



Section 1.2 : Structure du modèle interne

En bref, le modèle interne de Macif-Mutualité modélise en particulier les survenances futures par rapport à la Date d’Evaluation du Besoin en Fonds propres (DEBFP), les sinistres en cours à la DEBFP, les sinistres tardifs de survenance antérieures à la DEBFP, les dépendances entre les risques, les sinistres catastrophiques, la Gestion Actif-Passif (GAP)... Il établit le bilan et compte de résultat comptable en norme française et le bilan et compte de résultat en norme solvabilité II. Il détermine également le besoin en fonds propres de la Mutuelle.

Chapitre 2 : La Construction des profils attritionnels

Section 2.1 : Méthode de construction

2.1.1 Introduction

On classe en attritionnel un sinistre historique si ce dernier n'a jamais mis en jeu le traité non proportionnel de Macif-Mutualité. Dans le cadre de l'étude sur le risque arrêt de travail, un profil attritionnel appartient à l'une des trois natures citées ci-dessous :

1. un sinistre historique « incapacité seule »¹.
2. un sinistre incapacité suivi d'invalidité.
3. une « invalidité directe »².

Remarques :

Tous les sinistres historiques incapacité suivis d'invalidité ne se rattachent pas systématiquement à la catégorie des attritionnels. En effet, ils peuvent être graves. Il en est de même pour les « invalidités directes ».

La base attritionnelle est constituée à partir des sinistres dont **l'année de l'évènement** se situe entre 2005 et 2009.

Quel que soit la nature du sinistre, la **date de l'évènement** est celle du début de l'arrêt de travail. Elle ne doit ni être confondue avec la date de début d'indemnisation ni avec la date de consolidation en invalidité. Dans le cas contraire, si le malentendu concerne la date de consolidation alors le poids des rentes invalidité parmi tous les sinistres sera sur estimé.

A chaque profil attritionnel, nous indiquons l'état à la survenance (incapacité ou invalidité), l'année de passage en invalidité, l'âge moyen, l'âge maximal de versement de la rente invalidité, les arrérages annuels moyens, la ventilation.

Remarque :

Pour améliorer les temps de calculs sous Igloo, le nombre de profils attritionnels doit être limité. En conséquence, les « model points »³ ont été segmentés en tranche d'âge. L'âge d'un profil est alors un âge moyen sur la classe d'âge.

Par ailleurs, on insiste sur le fait que chaque profil doit être renseigné, le cas échéant, de l'année de passage en invalidité. En réalité, un sinistre incapacité peut tomber en invalidité au cours de l'une des trois années maximales d'arrêt de travail.

On ajoute que chaque garantie liée à un produit compte différents profils. Cependant, chacun de ces profils la représente plus ou moins. Le champ ventilation traduit cela.

Par exemple, supposons que l'on recense trois profils dans la garantie IJ du produit CPIM. Alors le profil n°1 peut caractériser 30 %, le profil n°2 50 % et le profil n°3 20 % de la garantie du produit. Les pourcentages 30 %, 50 % et 20 % traduisent la ventilation ou représentativité de chaque profil au cœur de la garantie du produit.

¹ Un sinistre « incapacité seule » est un sinistre ne passant jamais en invalidité.

² Un assuré sinistré n'ayant pas souscrit la garantie Indemnité Journalière (IJ) mais uniquement la garantie invalidité (INV) ne percevra pas d'IJ versée par Macif-Mutualité (MMU) même s'il a eu une incapacité préalable à la consolidation en invalidité. Il touchera seulement une rente invalidité lors de son passage. Ce sinistre est alors désigné par le terme « invalidité directe ».

³ Un « model point » est un profil.

2.1.2 L'arréage annuel du profil

Les arrérages annuels moyens des profils attritionnels historiques sont exprimés en coût as if la Date d'Evaluation du Besoin en Fonds Propres (DEBFP). Par conséquent, lorsque le 31/12/2009 est la DEBFP, les arrérages à la survenance sont revalorisés jusqu'au 31/12/2009. Pourtant, l'évaluation en coût as if pourrait ne pas être systématique.

En effet, les deux cas ci-dessous l'illustrent :

1. Supposons que le sinistre passé soit un assuré en état d'incapacité ayant souscrit préalablement la garantie IJ avec revalorisation automatique de ses prestations et primes. Dans ce cas, il paraît normal d'exprimer son arréage annuel moyen à la survenance en coût as if la date d'évaluation du besoin en fonds propres.

En revanche, imaginons que le sinistre antérieur soit un assuré en état d'incapacité ayant souscrit préalablement la garantie IJ mais sans revalorisation automatique. Dans cet autre cas, on ne devrait pas revaloriser ses prestations. La revalorisation à l'échéance annuelle des prestations et primes dans les mêmes proportions permet de tenir compte de l'évolution du coût de la vie.

2. Néanmoins, il est probable que les affaires nouvelles d'aujourd'hui ne souscrivent pas un montant d'IJ supérieur à celui des affaires nouvelles passées. Pour le moment, cette supposition n'a pas été quantifiée mais pourra vraisemblablement l'être dans le futur.

Par ailleurs, la construction de profils historiques repose sur l'hypothèse que les caractéristiques des sinistres futurs seront homogènes à celles du passé.

Toutefois, les politiques futures de production, de souscription, de marketing et le comportement propre de l'assuré peuvent contredire cette affirmation. On peut alors prévoir de tenir compte de ces aspects.

2.1.3 La segmentation sinistre grave et sinistre attritionnel

2.1.3.1 Définitions et remarques

On classe en attritionnel un sinistre historique si ce dernier n'a jamais mis en jeu le traité non proportionnel de Macif-Mutualité. Pour cela, on calcule sa charge ultime. Elle est alors la somme entre les règlements des IJ liées à l'incapacité et le capital constitutif de la rente invalidité en cas de passage en invalidité.

Le programme de réassurance en 2010 concernant les risques incapacité et invalidité des produits CPIM et PDI se décompose en un traité Quote Part (QP) et un traité excédent de sinistre (XS). Ce programme précise également le plein de souscription. Par conséquent, un sinistre sera répertorié comme grave dès lors que l'ultime base réassurance excèdera ce plein. En fait, la mise en jeu de l'XS interviendra aussitôt que le coût du sinistre dépassera le plein.

Pour illustrer cela, un exemple numérique figure ci-dessous :

2.1.3.1 Exemple de programme de Réassurance

Supposons que :

Taux Cession QP : 50 %
 2 000 000 XS 150 000 (sur rétention)
 Plein de souscription : 300 000€

1. Cas 1 : Si le montant du sinistre est de : 200 000€ alors,

- Le montant cédé vaut 100 000€ ($=200\ 000 \times 0,5$). Le montant du sinistre n'excède pas le plein de souscription de 300 000€.
- Le reste à charge (la rétention) de Macif Mutualité est de 100 000€ ($<150\ 000$ égal à la priorité du traité non proportionnel XS).

2. Cas 2 : Si le montant du sinistre est de : 600 000€ alors,

- Le montant cédé QP vaut 150 000€ ($=300\ 000 \times 0,5$). Le taux de cession est appliqué au plein de souscription car le montant du sinistre dépasse le plein de souscription.
- Le montant cédé XS vaut 300 000 € ($=600\ 000 - 150\ 000$).
- Le reste à charge de Macif Mutualité est la portée de 150 000€.

2.1.4 Le périmètre des profils attritionnels

2.1.4.1 *Les Sinistres En cours d'Instruction (SEI) à la date EBFP*

Un traitement particulier est inévitable pour les Sinistres En Cours d'Instruction (SEI) au 31/12/2009. En effet, le profil attritionnel est caractérisé par l'année de passage en invalidité. Or on ignore la date de passage éventuel en invalidité dans le futur du sinistre en cours au 31/12/09.

On recense alors un ensemble de quatre évolutions possibles d'un sinistre sans ancienneté dans le futur :

1. Le SEI Incapacité restera une « incapacité seule ».
2. Le SEI Incapacité passera en invalidité au cours de sa 1^{ère} Année d'Incapacité.
3. Le SEI Incapacité passera en invalidité au cours de sa 2^{ième} Année d'Incapacité.
4. Le SEI Incapacité passera en invalidité au cours de sa 3^{ième} Année d'Incapacité.

On note le cas courant où le SEI a de l'ancienneté dans l'état incapacité. Son nombre de points de passage doit être réduit.

Par exemple, si le sinistre a 13 mois d'ancienneté dans l'état incapacité au 31/12/2009 alors on ne comptabilise plus que trois évolutions possibles de ce sinistre dans le futur :

1. Le SEI Incapacité restera une « incapacité seule ».
2. Le SEI Incapacité passera en invalidité au cours de sa 2^{ième} Année d'Incapacité.
3. Le SEI Incapacité passera en invalidité au cours de sa 3^{ième} Année d'Incapacité.

On désignera par « fragment » une évolution du SEI.

Par conséquent, chaque SEI au 31/12/09 de poids un a été ventilé en son nombre d'évolutions restantes possibles dans le futur. Chaque « morceau » du SEI est décrit par sa probabilité de réalisation. Cette dernière est évaluée grâce aux tables d'expérience de passage en invalidité et de maintien en incapacité. La réunion des poids des « fragments » d'un même SEI donne 1.

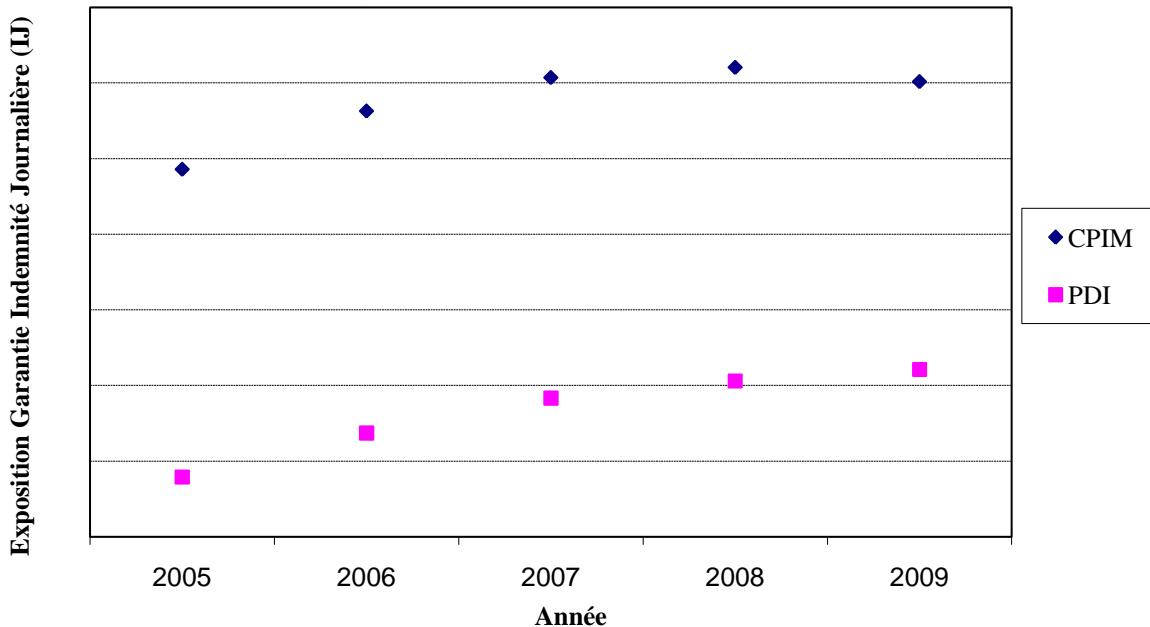
Remarque :

A des fins de simplifications, les SEI au 31/12/2009 ont été affectés à la base des attritionnels et non aux graves. Mais cette méthode demandera à être améliorée dans le futur.

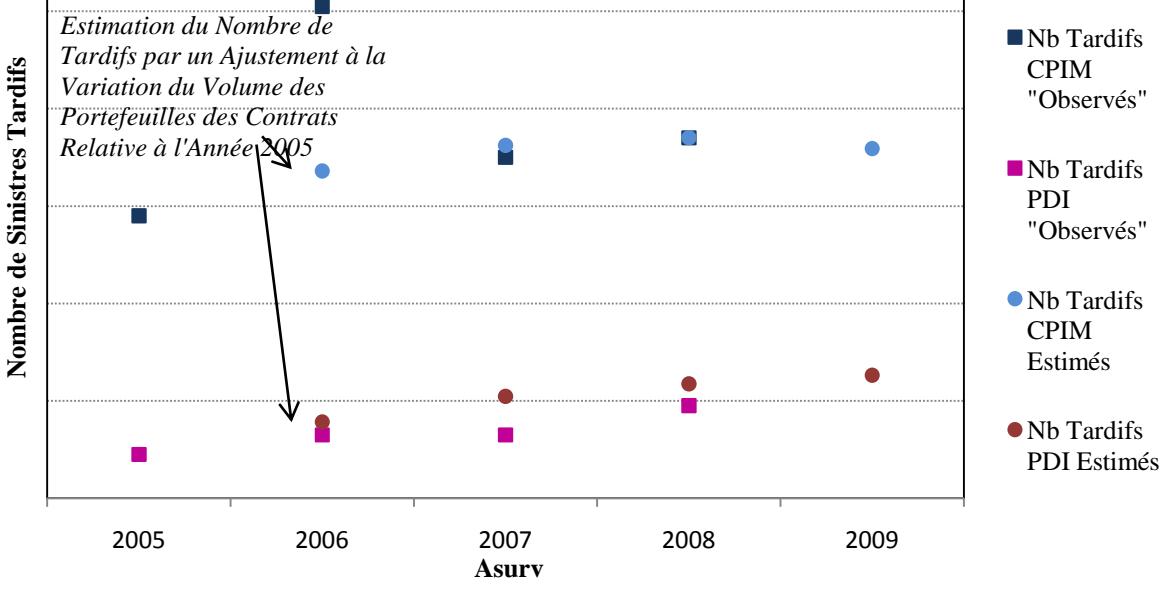
2.1.4.2 *Sinistres Tardifs de survenance 2009*

Un traitement particulier a été nécessaire pour les sinistres tardifs incapacité de survenance 2009. Ci-dessous, on dispose de leur estimation en fonction du produit (PDI et CPIM). On visualise aussi l'évolution de l'exposition au risque arrêt de travail de 2005 à 2009.

Evolution Au Cours du Temps de l'Exposition au Risque Arrêt de Travail des Contrats CPIM et PDI



Nombre de Sinistres Tardifs Incapacité Par Année de Survenance (Asurv)



On identifie les sinistres tardifs de survenance 2008 qu'on assimile à ceux de survenance 2009. On suppose une année glissante. Puisque la variation de l'exposition du risque arrêt de travail CPIM entre 2008 et 2009 est minimale, le poids des sinistres tardifs CPIM de survenance 2008 a été doublé pour intégrer les profils tardifs de 2009 inconnus à la DEBFP.

A des fins de simplifications des traitements, on suit la même procédure pour les sinistres incapacité PDI.

Toutefois, un affinement des méthodes sera envisageable dans le futur.

2.1.5 Conclusions sur la base attritionnelle

La base attritionnelle rend bien compte des éléments suivants :

- La proportion historique des incapacités suivies d'invalidité au sein d'un même produit x garantie.
- Les caractéristiques des sinistres passés arrêt de travail (l'état à la survenance, l'année de passage en invalidité, l'âge moyen, l'âge maximal de versement de la rente invalidité, les arrérages annuels moyens).

La base attritionnelle ne rend pas compte des éléments suivants :

- La proportion de sinistrés ayant abandonné la revalorisation automatique des prestations et des primes.
- Les sinistres ayant activé l'option « frais professionnels » dans le contrat PDI. En effet, en cas de souscription de cette option par l'assuré, le montant des indemnités journalières est alors doublé pendant une période maximale de douze mois.
- Un sinistre invalidité non classé à la DEBFP pourra subir dans le futur une aggravation (par exemple une augmentation de son taux d'incapacité avec un passage de 33 % à 66 %). Or, ce sinistre vu à la DEBFP est classé en attritionnels. Pourtant, dans le futur, il pourrait être répertorié comme sinistre grave et l'arrérage annuel versé pourrait s'aggraver.

Section 2.2 : Méthode actuarielle de ventilation des profils des sinistres en cours

2.2.1 Notations

On définit, à partir de la table de maintien en incapacité, les notations suivantes :

1. x : âge à l'entrée en incapacité
 2. a : l'ancienneté mensuelle dans l'état d'incapacité telle que $(0 \leq a \leq 35)$
 3. $d_{x,a}$: le nombre de sorties d'incapacité durant le $(a+1)^{\text{ième}}$ mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité. Autrement dit, c'est le nombre de sorties d'incapacité entre l'ancienneté a et $a+1$ pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.
 4. $d_{x,a}^{\text{passage}}$: le nombre de sorties d'incapacité pour cause de passage en invalidité durant le $(a+1)^{\text{ième}}$ mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.
 5. $l_{x,a}$: l'effectif des assurés en arrêt de travail d'ancienneté a mois et entrés à l'âge x en incapacité.
 6. $q_{x,a}^{\text{incap}}$: la probabilité de sortie de l'état d'incapacité à l'âge à l'entrée x et d'ancienneté a mois.
- Alors

$$q_{x,a}^{\text{incap}} = \frac{d_{x,a}}{l_{x,a}}$$

D'où

$$q_{x,a}^{\text{incap}} \times l_{x,a} = d_{x,a}$$

7. On note $q_{x,a}^{\text{Passage}}$ la probabilité que l'individu devienne invalide entre l'ancienneté a mois et l'ancienneté $a+1$ mois sachant qu'il est toujours en arrêt de travail après a mois. On peut l'appeler taux conditionnel de passage en invalidité.
- On a :

$$q_{x,a}^{\text{passage}} \times l_{x,a} = d_{x,a}^{\text{passage}}$$

Remarque :

$$d_{x,a} = d_{x,a}^{\text{passage}} + d_{x,a}^{\text{décès}} + d_{x,a}^{\text{rétab}}$$

$d_{x,a}^{\text{passage}}, d_{x,a}^{\text{décès}}, d_{x,a}^{\text{rétab}}$ traduisent respectivement le nombre de sorties d'incapacité entre l'ancienneté a et a+1 pour un assuré entré à l'âge x en incapacité pour les causes respectives : passage en invalidité, décès et rétablissement de l'assuré.

2.2.2 Le passage annuel

Par conséquent, ${}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}}$, ${}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}}$, ${}_{36}q_{x,0}^{\text{Passage}}$ sont respectivement la probabilité de passage en invalidité au cours de la première année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours de la première et deuxième année d'incapacité, la probabilité de passage en invalidité au cours des trois années d'incapacité.

On note :

$${}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=0}^{11} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,0}}$$

$${}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=0}^{23} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,0}}$$

$${}_{36}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=0}^{35} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,0}}$$

On en déduit que la probabilité que l'individu ne tombe jamais en invalidité est :

$$1 - {}_{36}q_{x,0}^{\text{Passage}}$$

La probabilité de passage en invalidité au cours de la 2^{ième} année est :

$${}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}} - {}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=12}^{23} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,0}}$$

Autrement dit :

$${}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}} - {}_{12}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=12}^{23} \frac{q_{x,a}^{\text{passage}} \times l_{x,a}}{l_{x,0}}$$

La probabilité de passage en invalidité au cours de la 3^{ième} année est :

$${}_{36}q_{x,0}^{\text{Passage}} - {}_{24}q_{x,0}^{\text{Passage}} = \sum_{a=24}^{35} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,0}}$$

Remarques :

En pratique, les probabilités de passage sont souvent conditionnées à l'ancienneté atteinte dans l'état d'incapacité du sinistre en cours à la clôture comptable.

Par conséquent, si l'assuré a 13 mois d'ancienneté dans l'état incapacité de travail alors la probabilité qu'il passe au cours de sa 2^{ième} année d'incapacité est :

$${}_{11}q_{x,13}^{\text{Passage}} = \sum_{a=13}^{23} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,13}}$$

Sa probabilité qu'il passe au cours de sa 3^{ième} année d'incapacité sachant son ancienneté de 13 mois est :

$${}_{23}q_{x,13}^{\text{Passage}} - {}_{11}q_{x,13}^{\text{Passage}} = \sum_{a=24}^{35} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,13}}$$

2.2.3 Cas particulier de passage annuel d'ancienneté comprise entre 1 an et 2 ans

Si l'assuré a a' mois d'ancienneté dans l'état d'incapacité avec $12 \leq a' < 24$ alors la probabilité qu'il passe au cours de sa 2^{ième} année d'incapacité est :

$${}_{24-a'}q_{x,a'}^{\text{Passage}} = \sum_{a=a'}^{23} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,a'}}$$

La probabilité qu'il passe au cours de sa 3^{ième} année d'incapacité est :

$${}_{36-a'}q_{x,13}^{\text{Passage}} - {}_{24-a'}q_{x,13}^{\text{Passage}} = \sum_{a=24}^{35} \frac{d_{x,a}^{\text{passage}}}{l_{x,a'}}$$

2.2.4 Exemple pratique

Soit le sinistre incapacité en cours au 31-12-2009 dont les caractéristiques sont les suivantes :

1. L'assuré est entré à l'âge de 25 ans en incapacité.
2. Au 31-12-2009, ce sinistre est toujours en cours et il a atteint 13 mois d'ancienneté dans l'état incapable.

On observe les résultats ci-dessous grâce aux tables de passage en invalidité et de maintien en incapacité du BCAC.

Remarque : A titre d'exemple, on s'appuie sur les tables du BCAC. Dans la réalité, on a procédé à l'aide des tables d'expérience.

Age à l'entrée en incapacité	25 ans
Ancienneté du sinistre en cours au 31-12-2009	13 mois
Effectif incapacité d'ancienneté 13 mois (Table de maintien du BCAC)	172
Nb de passages en 2 ^{ième} année d'incapacité (Table de passage du BCAC)	11
Nb de passages en 3 ^{ième} année d'incapacité (Table de passage du BCAC)	49
Probabilité de passage au cours de la 2 ^{ième} année d'incapacité	6,4 %
Probabilité de passage au cours de la 3 ^{ième} année d'incapacité	28,5 %
Probabilité de rétablissement ou décès	65,1 %

Par conséquent, ce sinistre individuel de poids (ou ventilation 1) se décomposera en 3 sinistres lors de la construction de la base historique de profils attritionnels :

1. Le sinistre d'âge à l'entrée en incapacité 25 ans et d'ancienneté 13 mois passant au cours de sa 2^{ième} année avec un poids de 6,4 %.
2. Le sinistre d'âge à l'entrée en incapacité 25 ans et d'ancienneté 13 mois passant au cours de sa 3^{ième} année avec un poids de 28,5 %.
3. Le sinistre d'âge à l'entrée en incapacité 25 ans et d'ancienneté 13 mois ne passant jamais en invalidité avec un poids de 65,1 %.

Remarques :

La somme attendue des poids de ces trois sinistres est bien égale à 1.

Chaque « fragment » pourra être regroupé avec d'autres sinistres en raison des particularités communes.

Chapitre 3 : La Fréquence de Survenance des Sinistres attritionnels Arrêt de Travail

Cette étude a pour but de calibrer la fréquence future de survenance des sinistres attritionnels (incapacité et invalidité). Pour cela, on observe la fréquence passée dont on tiendra compte dans le futur. Bien entendu, il est possible d'anticiper, par exemple, des règles futures de souscription et gestion (durcissement, stationnarité, assouplissement) pouvant impacter à la hausse ou la baisse l'estimation de la fréquence.

Section 3.1 : Description et méthodologie générale

3.1.1 Description

Par exemple, pour les sinistres attritionnels¹, l'utilisateur doit saisir :

D'une part,

1. La distribution en fréquence des sinistres attritionnels par unité d'exposition acquise (nb de contrats acquis).

L'utilisateur a actuellement le choix entre une loi constante (modélisation déterministe), une loi normale (modélisation stochastique), une loi LogNormale ou poisson.

D'autre part,

2. Les paramètres en fréquence des sinistres attritionnels :

- Le 1^{er} paramètre entré est la moyenne de la fréquence des attritionnels pour une Unité d'Exposition (UE) acquise au risque
- Le 2^{ième} paramètre saisi est l'écart type de la fréquence des attritionnels pour une Unité d'Exposition (UE) acquise au risque

En effet, les surveances futures du modèle interne sont telles que l'on simule un nombre de sinistres attritionnels indemnisés pour chaque année de survenance future postérieure à la date d'évaluation du besoin en fonds propres. On met à contribution des méthodes d'assurance non vie.

3.1.2 La méthodologie choisie

Le premier objectif est donc de déterminer la fréquence observée \hat{f}_i par UE de ces sinistres pour chaque année passée de survenance i ($2005 \leq i \leq 2009$) et d'estimer de manière empirique la fréquence moyenne \bar{f} par UE et l'écart type de l'échantillon $\hat{\sigma}$.

$$\bar{f} = \frac{1}{2009 - 2005 + 1} \sum_{i=2005}^{2009} \hat{f}_i$$

¹ On qualifie d'attritionnel un sinistre non susceptible de faire intervenir les programmes de Réassurance Non proportionnelle de Macif-Mutualité. En revanche, il est répertorié comme grave s'il peut déclencher la mise en jeu des programmes de réassurance Non proportionnelle.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2009 - 2005} \sum_{i=2005}^{2009} (\hat{f}_i - \bar{f})^2$$

Section 3.2 : Les principales étapes du calibrage

3.2.1 Estimation de la fréquence empirique pour chaque année de survenance passée (2005 à 2008)

Cette estimation repose sur deux étapes :

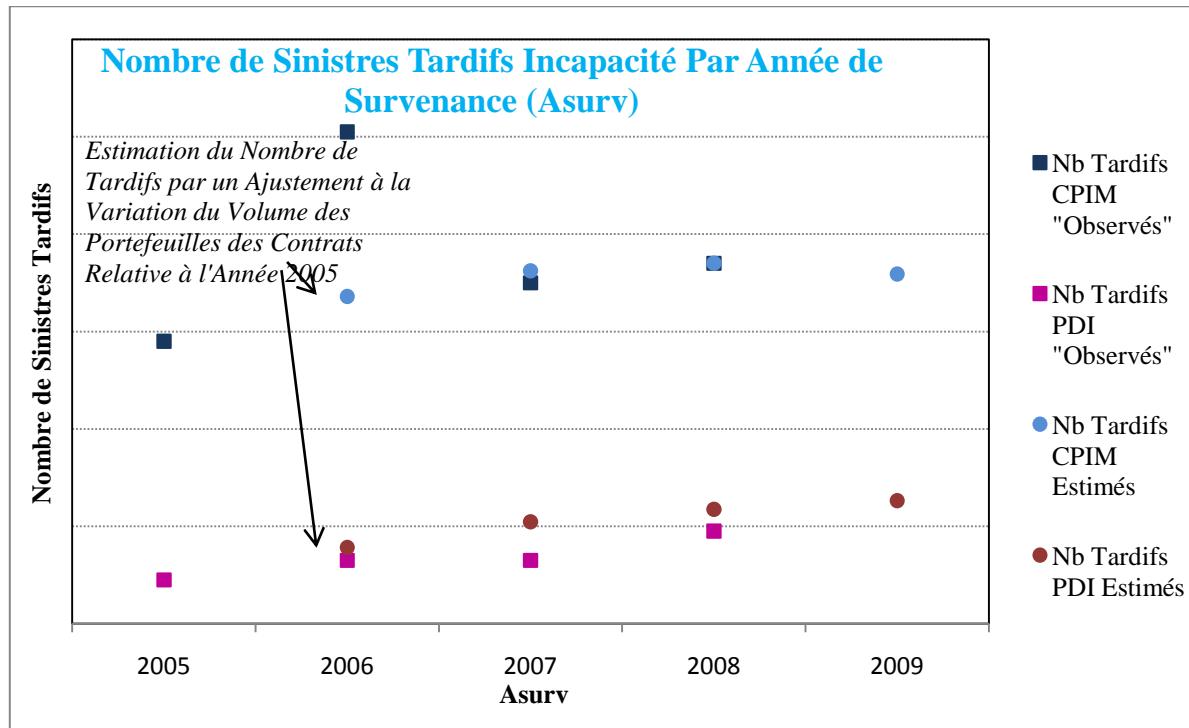
1. Identification du nombre de sinistres indemnisés.
2. Calcul de l'exposition au risque de chaque contrat avec garantie IJ souscrite.

Par exemple :

- Si un assuré souscrit la garantie IJ le 01/01/2005 et qu'il la résilie le 31/10/2006 alors l'exposition de cet assuré en 2005 était de 1. En revanche, elle était de 0,8333 en 2006. En effet, il a été soumis cette année là à la garantie IJ seulement 10 mois sur 12 mois.
- On procède alors de même pour chaque assuré puis on somme les expositions individuelles de 2006 pour en déduire l'exposition totale de cette année là.

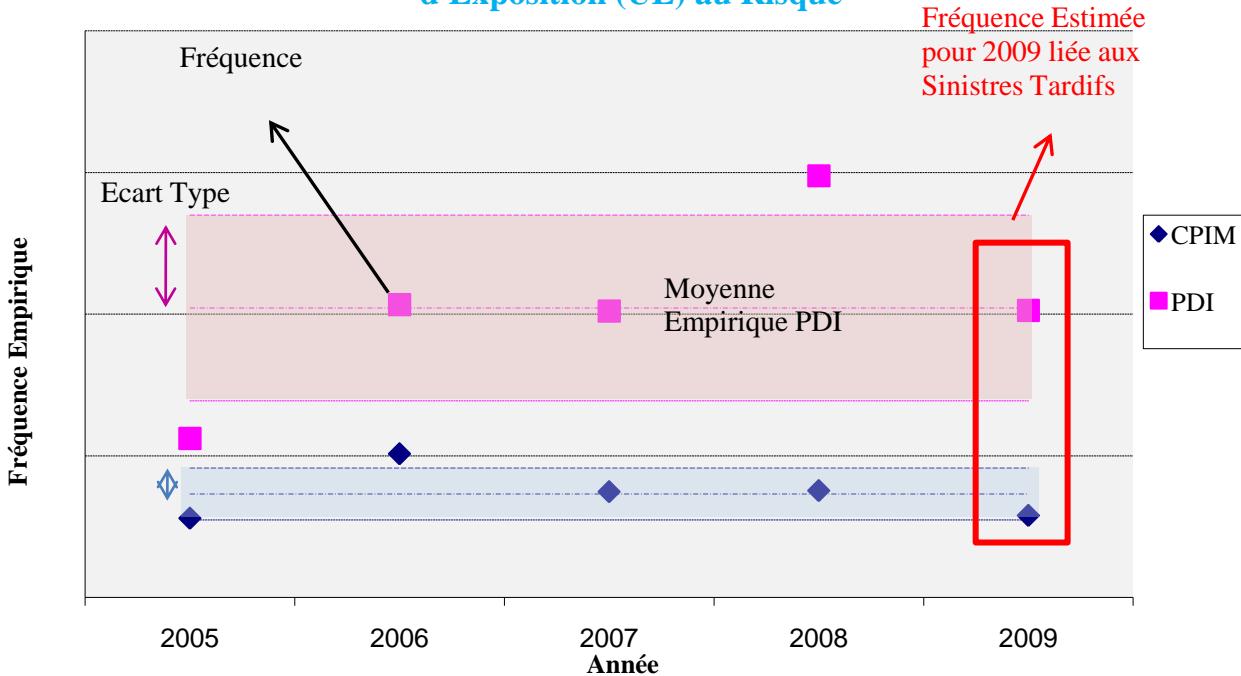
3.2.2 Estimation de la fréquence empirique pour l'année de survenance 2009.

Au 31-12-2009, certains sinistres survenus en 2009 n'ont pas été déclarés à l'assureur. Statistiquement, on constate que la quasi-totalité des déclarations tardives sont déclarées l'année succédant directement l'année de survenance. De plus, l'influence du produit sur les délais de déclaration est perceptible. Effectivement, les assurés indépendants déclareront plus rapidement leur sinistre qu'un assuré salarié. Ces sinistres survenus mais non déclarés l'année de survenance de l'événement sont des tardifs. Lors du calibrage du modèle en fin d'exercice, l'information sur les sinistres de la dernière année observée est incomplète. Toutefois, nous souhaitons en tenir compte. En effet, on ne veut pas rendre négligeable la donnée la plus récente. En conséquence, nous procédons à une estimation du nombre de tardifs de survenance 2009. La méthode choisie consiste à prendre comme référence les tardifs d'une année de survenance passée et d'ajuster leur nombre en fonction de l'exposition au risque (l'exposition des contrats durant l'année civile). Nous optons pour la période d'observation allant de 2005 à 2009. Nous identifions les sinistres tardifs observés à compter de la survenance 2005. L'année de référence qui semble la plus pertinente pour nos deux produits CPIM et PDI est 2005. En effet, celle de 2006 est atypique en termes de déclarations tardives du CPIM. Cette irrégularité sera également détectable sur le niveau observé de la sinistralité. A partir de cet ajustement à l'exposition au risque, nous estimons alors le nombre de sinistres tardifs de survenance 2009. Cette méthode semblait la plus adéquate à la profondeur et qualité de l'historique.



3.2.3 Estimation de la fréquence moyenne et l'écart type empirique à partir de ces cinq années de survenance passée.

Evolution de la Fréquence des Sinistres Arrêt de Travail Par Unité d'Exposition (UE) au Risque



3.2.4 L'évolution des règles de souscription

Lors de la modélisation, on peut souhaiter tenir compte de l'évolution des règles de souscription risquant d'impacter la sinistralité au cours du temps.

3.2.4.1 Le produit CPIM

Pour des raisons de confidentialité, ce paragraphe n'est pas commenté dans cette version.

3.2.4.2 Le produit PDI

Idem.

3.2.5 Méthode de calibration de la distribution

Le modèle interne simule directement un nombre N de sinistres attritionnels indemnisés en fonction de l'exposition au risque e.

Le calibrage de la loi est permis à partir de la méthode des moments connaissant la fréquence moyenne \bar{f} et son écart type empirique $\hat{\sigma}^2$.

$$E\left(\frac{N}{e} \times e\right) = e \times E\left(\frac{N}{e}\right)$$

Par conséquent, une estimation de $E(N)$ est $e \times \bar{f}$.

$$V\left(\frac{N}{e} \times e\right) = e^2 \times V\left(\frac{N}{e}\right)$$

D'où, une estimation de $V(N)$ est $e^2 \times \hat{\sigma}^2$.

On calibre alors la loi de N à partir de l'estimation de son espérance et de sa variance grâce à la méthode des moments.

Remarques :

Simuler un nombre de sinistres attritionnels par une loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$ revient à simuler directement par cette même loi la fréquence de survenance par unité d'exposition. Ce n'est pas le cas pour la loi de Poisson et la loi LogNormale.

si $N \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{N}{e} \sim N\left(\frac{\mu}{e}, \left(\frac{\sigma}{e}\right)^2\right)$

Chapitre 4 : La modélisation de l'aléa autour des quotients de sortie d'incapacité d'expérience.

L'objectif de cette étude est de modéliser l'aléa statistique autour de la probabilité ${}^{exp}\hat{q}_{x,a}$ ¹. d'expérience de sortie d'incapacité conditionnelle à l'ancienneté atteinte a. ${}^{exp}\hat{q}_{x,a}$ sera aussi appelée quotient d'expérience de sortie d'incapacité. La volatilité est en réalité sensé traduire l'écart entre la valeur centrale ${}^{exp}\hat{q}_{x,a}$ et la probabilité future observée ${}^{stoch}q_{x,a}$. On souhaite modéliser le risque non mutualisable.

Tout d'abord, la distribution explicite des ${}^{stoch}q_{x,a}$ développée dans le modèle interne de MMU sera présentée. Le choix de la loi permettant d'ajouter un aléa aux $q_{x,a}$, dont la valeur moyenne ${}^{exp}\hat{q}_{x,a}$ est connue, a été proposé par les consultants d'EMB France.

Ensuite, une méthode de calibration du coefficient de variation en vue de la simulation du quotient de sortie $q_{x,a}$ sera exposée. La démarche consistera d'abord à estimer le maintien en incapacité pour chaque exercice comptable passé (de 2005 à 2008). Puis, nous en déduirons l'estimation empirique brute du coefficient de variation de $q_{x,a}$. Nous procéderons, pour finir, au lissage bidimensionnel de Whittaker-Henderson.

Enfin, quelques résultats en sortie du modèle interne seront commentés.

Par ailleurs, certaines sections de ce chapitre sont aussi dédiées à des remarques sur :

- les choix de modélisation dans le modèle interne
- les améliorations envisageables
- les problématiques rencontrées en raison d'options particulières proposées dans les contrats de prévoyance (cf. Section 4.3 : et §4.5.6).

Grâce à la table stochastique², nous pourrons, par exemple, simuler l'évolution future (maintien ou sortie) de l'état de l'assuré en arrêt de travail à la date d'évaluation du besoin en fonds propres (au 31/12/N). En conséquence, à chaque scénario, les prestations individuelles seront simulées. Ainsi, le maintien ou non de chaque sinistré déterminera les effectifs incapacité provisionnés aux clôtures N+1, N+2... liés aux survenances antérieures à la date d'évaluation du besoin en fonds propres.

Section 4.1 : La table d'expérience de maintien en incapacité

4.1.1 Contexte

En 2008, la table d'expérience de maintien en incapacité de Macif-Mutualité a été construite grâce à l'estimateur de Kaplan Meier et au lissage sur la loi de maintien.

Cette étude s'est basée sur la durée d'observation comprise entre le 01/01/2001 et le 31/12/2007. Elle repose sur les choix suivants :

- l'élargissement de l'intervalle de construction pour un âge x et la définition de la tranche d'âge [-3 ans ; +2 ans].
- le lissage sur la fonction d'espérance résiduelle (barème à taux technique nul).

¹ x traduit l'âge à l'entrée en incapacité.

² La table stochastique est équivalente aux ${}^{stoch}q_{x,a}$.

4.1.2 Notations de la table d'expérience de maintien en incapacité

On définit, à partir de la table d'expérience de maintien en incapacité, les notations suivantes :

1. x : âge à l'entrée en incapacité
2. a : l'ancienneté mensuelle dans l'état incapacité telle que $(0 \leq a \leq 35)$
3. $d_{x,a}$: le nombre de sorties d'incapacité durant le $(a+1)^{\text{ème}}$ mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.
: le nombre de sorties d'incapacité entre l'ancienneté a et $a+1$ pour un assuré entré à l'âge x en incapacité.
4. $N_{x,a}$: l'effectif des individus en état d'incapacité d'ancienneté a mois et entrés à l'âge x dans l'état.
5. $q_{x,a}$: la probabilité de sortie de l'état d'incapacité entre l'ancienneté a et $a+1$ pour un assuré entré à l'âge x et d'ancienneté a mois dans l'état.
: la probabilité conditionnelle de sortie d'incapacité
: le quotient de sortie d'incapacité

Alors

$$q_{x,a} = \frac{d_{x,a}}{N_{x,a}}$$

Remarques :

Une sortie d'incapacité se traduit soit par un rétablissement de l'assuré, soit par un passage en invalidité ou bien soit par un décès. Par conséquent, le quotient de sortie $q_{x,a}$ entre se décompose en une somme de trois probabilités dépendante des causes de sortie :

1. La probabilité que l'individu entré, à l'âge x dans l'état d'incapacité, dans l'état depuis a mois, devienne invalide entre l'ancienneté a et l'ancienneté $(a+1)$.
2. La probabilité que l'individu entré, à l'âge x dans l'état d'incapacité, dans l'état depuis a mois, se rétablisce entre l'ancienneté a et l'ancienneté $(a+1)$.
3. La probabilité que l'individu entré, à l'âge x dans l'état d'incapacité, d'ancienneté a mois, décède entre l'ancienneté a et l'ancienneté $(a+1)$.

Section 4.2 : La simulation des $q_{x,a}$

4.2.1 Notations :

1. $Cov_{x,a} = Cov(q_{x,a}) = \frac{\sigma(q_{x,a})}{E[q_{x,a}]}$
2. $Cov_{x,a}$ est donc le coefficient de variation de la probabilité conditionnelle de sortie d'incapacité.
3. $^{stoch}_1\hat{q}_{x,a}$ est la **probabilité stochastique** de sortie de l'état d'incapacité entre l'ancienneté a et $a+1$ pour un assuré entré à l'âge x et d'ancienneté a mois $(0 \leq a \leq 35)$.

4.2.2 Simulation du $^{stoch}_1\hat{q}_{x,a}$

Dans le modèle interne, la variable $^{stoch}_1\hat{q}_{x,a}$ est actuellement simulée en tenant compte du quotient de sortie déterministe d'expérience $^{exp}_1\hat{q}_{x,a}$. On ajoute un aléa autour de $^{exp}_1\hat{q}_{x,a}$:

$$^{stoch}\hat{q}_{x,a} = MIN \left(1 ; MAX \left(0 ; 1 - (1 - {}^{exp}\hat{q}_{x,a}) \times e^{X - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} \right) \right)$$

Où $X \sim N(0, \hat{\sigma}^2)$

$$\hat{\sigma}^2 = \ln \left(1 + \left[\widehat{CoV(q_{x,a})} \right]^2 \times \left(\frac{{}^{exp}\hat{q}_{x,a}}{1 - {}^{exp}\hat{q}_{x,a}} \right)^2 \right)$$

Et

${}^{exp}\hat{q}_{x,a}$ se déduit des effectifs $N_{x,a}^{exp}$ de la table d'expérience de maintien en incapacité puisque
 $\hat{E}[q_{x,a}] = {}^{exp}\hat{q}_{x,a} = \frac{d_{x,a}^{exp}}{N_{x,a}^{exp}}$.

Actuellement dans le modèle interne, l'utilisateur est invité à saisir le $CoV_{x,a}$.

Ce coefficient dépend alors de l'âge à l'entrée et de l'ancienneté atteinte dans l'état incapacité.

La démonstration concernant la modélisation de ${}^{stoch}_1\hat{q}_{x,a}$ est disponible en Annexe 2. Elle nous a été transmise par les consultants d'EMB France. De plus, ce modèle est proche de l'un des modèles stochastiques de mortalité¹ présenté dans l'ouvrage *Modèles de Durée* coécrit par Frédéric Planchet & Pierre Thérond et publié par Economica.

Section 4.3 : L'intérêt de la modélisation stochastique des $q_{x,a}$

4.3.1 Rappel du contexte

Au sein du modèle interne, les sinistres sont segmentés en sinistres attritionnels, graves et catastrophiques. On qualifie d'attritionnel un sinistre non susceptible de faire intervenir les programmes de réassurance non proportionnelle de Macif-Mutualité. En revanche, il est répertorié comme grave si la mise en jeu du programme de réassurance non proportionnelle est envisageable.

On rappelle qu'au cœur de chaque produit x garantie², les sinistres historiques attritionnels sont regroupés en profils. Chaque profil est caractérisé par sa représentativité dans le produit x garantie.

4.3.2 Exemple

Prenons le cas de la survenance future N+1, c'est-à-dire l'année succédant immédiatement celle de l'évaluation du besoin en fonds propres N :

A chaque profil, le nombre de sinistres initiaux attritionnels indemnisés³ de survenance N+1 est simulé. Nous ne pouvons toutefois pas modéliser le nombre de sinistres réels. Ces derniers ne sont pas systématiquement déclarés à MMU puisqu'ils n'atteignent pas automatiquement la franchise. En effet, dans les conditions générales du produit, l'assuré a l'obligation de déclarer son arrêt de travail dans les 10 jours suivants l'expiration de la franchise. Pourtant, en pratique, seule la prescription biennale est appliquée. De plus, les produits MMU n'offrent pas la possibilité au souscripteur de choisir une franchise nulle.

1 Cf. chapitre 9 « Modèles stochastiques de mortalité » puis section 3 « Un modèle simple de mortalité stochastique » dans l'ouvrage *Modèles de Durée* coécrit par Frédéric Planchet & Pierre Thérond et publié par Economica.

2 Les garanties peuvent être l'incapacité, l'invalidité, le décès...

3 Ce sont tous les sinistres indemnisés par MMU de survenance N+1.

D'après ces particularités, les flux mensuels réels générés par ce profil attritionnel indemnisé peuvent correspondre au produit de la probabilité mensuelle stochastique de maintien en paiement du profil individuel, de l'arrérage moyen individuel simulé et du nombre simulé de sinistres initiaux indemnisés appartenant à ce profil.

Par ailleurs, la PM globale affectée au profil, constituée au 31/12/N+1, liée à la survenance N+1, sera obtenue grâce au produit de la probabilité stochastique annuelle de maintien en paiement de l'incapacité durant un an, du nombre de sinistres individuels initiaux indemnisés, de l'arrérage annuel seul et de la PM individuelle du profil. Cette modélisation repose notamment sur l'hypothèse et la simplification suivante : le pas du modèle est annuel. Même si, en moyenne, les sinistres incapacité surviennent en milieu d'année, il a fallu faire le choix entre une survenance au 01/01/N+1 ou au 31/12/N+1. La décision a été d'affecter toutes les survenances au 01/01/N+1. Cette convention a la conséquence suivante : un sinistre incapacité, survenu l'année N+1 et en cours au 31/12/N+1, aura à cette date un an d'ancienneté dans l'état incapacité. D'où, le nombre de sinistres de survenance N+1 en cours au 31/12/N+1 est simulé en multipliant la probabilité stochastique de maintien annuelle en paiement du sinistre par le nombre simulé de sinistres indemnisés initiaux de survenance N+1.

Notons cependant que les franchises ne sont actuellement pas modélisées.

Dans l'éventualité de la modélisation ultérieure de la franchise du profil, nous devrions intégrer les prochains aspects concernant les flux réels et la PM globale du profil :

1. Les règlements seraient nuls durant la franchise et les suivants tiendraient compte de la probabilité stochastique de maintien mensuelle en paiement du sinistre sachant l'atteinte de la franchise. Ces sinistres indemnisés par MMU ont donc plus de chance de se maintenir que ceux observés dès le 1^{er} jour d'arrêt de travail. De façon pragmatique, la modélisation de la franchise devrait s'accompagner au minimum d'une prise en compte du nombre moyen de jours d'hospitalisation durant la franchise. En effet, l'hospitalisation pendant la franchise peut donner lieu au versement d'indemnités par Macif-Mutualité (dans le cas de l'option « rachat de franchise » du produit PDI et de l'hospitalisation incluse dans le CPIM).
2. Le nombre de sinistres de survenance N+1 en cours au 31/12/N+1 serait simulé en multipliant la probabilité stochastique de maintien annuelle en paiement du sinistre sachant l'atteinte de la franchise par le nombre simulé de sinistres indemnisés initiaux de survenance N+1.

4.3.3 Illustrations graphiques

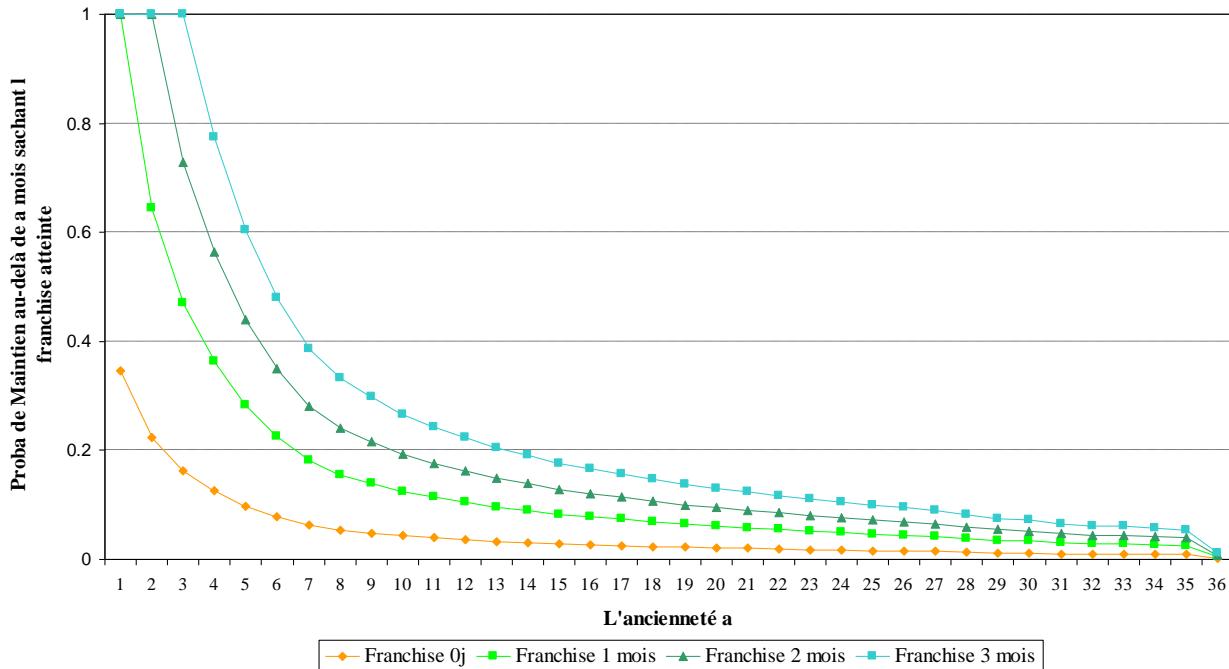
On reprend les mêmes notations que dans la Section 4.1 :

On note $a p_{x,f} = \prod_{i=0}^{a-1} (1 - q_{x,f+i})$.

Elle désigne la probabilité de maintien au-delà de a mois sachant la franchise atteinte f et l'entrée en incapacité à l'âge x.

Les graphiques ci-dessous illustrent l'impact du niveau de franchise sur le maintien en incapacité. Plus la franchise est élevée, plus le maintien dans la durée est probable.

Maintien en incapacité du BCAC des 33 ans



Pour des raisons de confidentialité, l'illustration du maintien en incapacité d'expérience selon la franchise n'est pas présentée dans cette version du mémoire.

On rappelle que les prochaines sections seront consacrées à :

1. La calibration brute du coefficient de variation dont la finalité est la simulation au sein du modèle interne de la probabilité conditionnelle stochastique de sortie d'incapacité. Cette étape sera marquée par l'estimation des quotients de sortie d'incapacité pour chaque année calendaire historique (Section 4.4 : et Section 4.5 :).
2. La calibration par une méthode bidimensionnelle de lissage du $CoV_{x,a}$ (Section 4.6 :).

Section 4.4 : Le calibrage de $^{stoch}\hat{q}_{x,a}$ par l'estimation BRUTE du coefficient de variation empirique

4.4.1 Méthodologie d'estimation brute du CoV :

L'objectif premier a consisté à estimer le Coefficient de Variation (CoV) par le CoV empirique $\widehat{CoV}(q_{x,a})$.

$$\widehat{CoV}(q_{x,a}) = \frac{\widehat{\sigma}(q_{x,a})}{\widehat{E}[q_{x,a}]}$$

Ce coefficient s'exprime donc sous la forme d'un pourcentage.

Il permet d'apprécier la représentativité de la moyenne arithmétique par rapport à l'ensemble des données. Il témoigne de l'homogénéité ou non de la distribution. Par exemple, un CoV inférieur à 15 % traduit une bonne homogénéité de la distribution.

Le paramétrage du CoV a demandé d'estimer l'écart type empirique $\widehat{\sigma}(q_{x,a})$ et la moyenne empirique $\widehat{E}[q_{x,a}]$.

4.4.1.1 Estimation de la moyenne empirique

En réalité, la moyenne empirique¹ se déduit facilement des effectifs $N_{x,a}$ de la table d'expérience de maintien en incapacité puisque $\widehat{E}[q_{x,a}] = \widehat{q}_{x,a} = \frac{d_{x,a}^{exp}}{N_{x,a}^{exp}}$.

Afin d'atténuer l'erreur d'estimation sur chacune des quatre années calendaires passées (2005 à 2008), on opte pour le regroupement des âges à l'entrée en incapacité. L'estimateur $\widehat{CoV}(q_{x,a})$ varie alors selon trois tranches d'âges (les moins de 40 ans, les âges compris entre 40 et 50 et les plus de 50 ans). De plus, il est apparu plus pertinent d'estimer $\widehat{E}[q_{x,a}]$ par $\bar{q}_{x,a}$ où $\bar{q}_{x,a} = \sum_{j=2005}^{2008} j \widehat{q}_{x,a}^j$ est le quotient de sortie d'incapacité estimé sur l'exercice comptable j :

$$\bar{q}_{x,a} = \frac{1}{(2008 + 1) - 2005} \sum_{j=2005}^{2008} j \widehat{q}_{x,a}^j$$

Avec $x \in \{t_{30}; t_{40}; t_{50}\}$
et

- t_{30} : l'ensemble de tous les âges d'entrée en incapacité n'excédant strictement pas 40 ans.
- t_{40} : tous les âges à la survenance n'excédant strictement pas 50 ans mais dépassant 40 ans.
- t_{50} : tous les âges à l'entrée en incapacité excédant 50 ans.

Remarques sur la période d'observation variant de 2005 à 2008 :

Le besoin en fonds propres de la Mutuelle au 31/12/N sera calculé au cours des premiers mois de l'année N+1. L'étude de l'aléa autour des $q_{x,a}$ sera donc mise à jour au début de la nouvelle année civile. Par conséquent, nous n'intégrerons pas l'estimation des $q_{x,a}$ relative à l'exercice N. Un recul d'un an est à respecter. En effet, plusieurs sinistres arrêts de travail survenus au cours de l'année N

¹ La moyenne empirique donne une idée de l'ordre de grandeur des valeurs constituant les données ainsi que la position où semble se concentrer les valeurs observées. Elle caractérise alors la tendance centrale.

d'EBFP seront déclarés tardivement en N+1 et N+2. L'information disponible au début de l'année N+1 sera donc incomplète. Une étude sur les délais de déclaration montre en particulier que la quasi-totalité des sinistres de survenance N finissent d'être déclarés en N+1 :

On remarque que la longueur de ces cadences de déclaration est conforme avec la règle de la prescription biennale appliquée par les gestionnaires de sinistres. Même si les CG de Macif-Mutualité obligent normalement l'assuré à déclarer son arrêt de travail au plus tard dans les 10 jours suivant l'expiration de la période de franchise, en pratique, le délai au-delà duquel toute demande d'indemnisation de l'incapacité n'est plus recevable est de deux ans.

On souligne par ailleurs que le salarié doit adresser son arrêt à la Caisse Primaire d'Assurance Maladie (CPAM) dans les deux jours suivant l'interruption du travail (Décret 2004-1454 du 22 décembre 2004, JO du 30, p. 22309, Article D323-2 et Article R321-2).

4.4.1.2 Estimation de l'écart type empirique

Grâce à l'estimation ${}^j\hat{q}_{x,a}$ obtenue par l'estimateur de Kaplan Meier pour chaque exercice comptable j ($2005 \leq j \leq 2008$), on obtient empiriquement l'écart type¹ $\hat{\sigma}(q_{x,a})$:

$$\hat{\sigma}^2(q_{x,a}) \approx \frac{1}{2008 - 2005} \sum_{j=2005}^{2008} ({}^j\hat{q}_{x,a} - \bar{q}_{x,a})^2$$

Avec

${}^j\hat{q}_{x,a}$ l'estimation du $q_{x,a}$ durant l'année calendaire j.

Section 4.5 : L'estimation BRUTE du quotient de sortie d'incapacité

4.5.1 Définitions :

On appelle donnée incomplète une observation dont l'entrée dans l'état étudié s'est produite avant qu'elle n'apparaisse dans le champ d'observation (donnée tronquée à gauche) ou dont la sortie de l'état étudié s'est produite au-delà du champ d'observation (donnée censurée à droite).

Lors de l'estimation brute du maintien en incapacité à chaque exercice comptable, il est donc primordial de se servir de toutes les données disponibles y compris les données incomplètes.

On expose ci-dessous la censure fixe et la troncature gauche :

4.5.1.1 Censure fixe

Soit un échantillon de durée d'incapacité (X_1, \dots, X_n) , on dit qu'il y a censure C à droite pour cet échantillon si au lieu d'observer directement (X_1, \dots, X_n) , on observe $(T_1, D_1), \dots, (T_n, D_n)$ avec :

$$\begin{aligned} T_i &= \min(X_i, C) \\ D_i &= 1 \text{ si } X_i \leq C \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Remarques :

¹ L'écart type caractérise la dispersion des ${}^{stoch}\hat{q}_{x,a}$. Plus cet écart type sera petit, plus les données seront regroupées autour de la moyenne arithmétique $\bar{q}_{x,a}$.

Si la fin de l'arrêt de travail est postérieure à la date de fin d'observation alors il y a censure droite. En revanche, si la fin de l'incapacité est antérieure à la date de fin d'observation (et postérieure à la date de début d'observation) alors il y a sortie. Dans le cas de la censure droite, il existe une information dont on n'a pas connaissance avec précision seulement qu'elle excède une valeur.

4.5.1.2 Troncature gauche

On dit qu'il y a troncature gauche lorsque l'arrêt de travail n'est pas observable tant qu'il est inférieur à un seuil. Effectivement, un sinistre ne sera pas détectable jusqu'à ce que sa durée atteigne la franchise journalière. On perd alors complètement l'information sur les sinistres de durée inférieure à la franchise. La distribution observée est donc conditionnelle au fait que l'incapacité dépasse la franchise minimale.

La table d'expérience de maintien en incapacité de Macif-Mutualité a été construite à partir de l'estimateur de Kaplan Meier. Il semble donc intéressant de suivre cette méthodologie dans nos calculs des $\hat{q}_{x,a}^j$.

4.5.2 Notations

Notons $A^{j,c}$ l'ensemble des $n_{j,c}$ sinistres arrêt de travail d'âge à la survenance appartenant à la classe c^1 et absolument éligibles à une indemnisation de la part de Macif-Mutualité en raison de journées d'arrêt durant l'exercice comptable j. La durée d'observation de l'année comptable j est 1/01/j au 31/12/j.

4.5.3 Préliminaires

Nous disposons des renseignements suivants sur nos sinistres historiques incapacité indemnisés par Macif-Mutualité :

- La date de début d'arrêt de travail
- La date de fin arrêt de travail
- Le nombre de jours de non paiement
- La franchise
- La date de naissance de l'assuré

Remarques :

- Le sinistre individuel i est observé par MMU durant l'année comptable j sous trois conditions indissociables :
 1. si l'année de survenance du sinistre ne dépasse pas j .
 2. si l'année de fin de l'arrêt de travail est supérieure ou égale à j .
 3. si la franchise est atteinte avant la fin de l'exercice comptable j .
- Lorsqu'une rechute a lieu, le gestionnaire renseigne le nombre de jours s'écoulant entre la date de reprise provisoire du travail et le moment de la rechute (ie. le nombre de jours de non paiement). Cette période ne fera pas l'objet de versement de la part de Macif-Mutualité. Par ailleurs, le gestionnaire met à jour la date finale de l'arrêt de travail pour qu'elle corresponde à la dernière date d'incapacité succédant à la rechute.

¹ $c \in \{t_{30}; t_{40}; t_{50}\}$

4.5.4 L'estimation du maintien en l'ABSENCE DE RECHUTE

En l'absence de rechute¹, le sinistre incapacité i est caractérisé par les trois éléments e_i , z_i , δ_i explicités ci-dessous.

Cette technique reposant sur l'estimateur de Kaplan Meier s'appuie sur celle utilisée par les consultants d'Actuaris lors de la création de la table d'expérience de maintien en incapacité.

Les $n_{j,c}$ sinistres i sont indépendants mais non identiquement distribués.

On rappelle que j désigne l'année de l'exercice comptable, i fait référence au i^{ème} sinistre incapacité individuel et c évoque sa classe d'âge ($c \in \{t_{30}; t_{40}; t_{50}\}$).

$$e_i^{j,c} = \max(\text{date de début d'observation}^2 - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1, \text{date de début d'indemnisation} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1)$$

Autrement dit :

$$e_i^{j,c} = \max(\text{date de début d'observation} ; \text{date de début d'indemnisation}) - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1$$

Ou

$$e_i^{j,c} = \max(\text{date de début d'observation} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1 ; \text{Franchise} + 1)$$

Remarques :

Ainsi, pour l'année comptable j, la date de début d'observation sera le 01/01/j.

La début d'indemnisation est donc l'instant à compter duquel la franchise est consommée c'est-à-dire :

$$e_i^{j,c} \geq \text{Franchise} + 1$$

Exemple :

Si l'arrêt débute le 01/12/j-1 et si la franchise souscrite est de 60 jours alors la 1^{ère} indemnisation interviendra le 30/01/j. Le délai s'écoulant entre le 01/12/j-1 et le 29/01/j est la période de franchise (31 jours en décembre et 29 jours en janvier).

On a :

$$z_i^{j,c} = \min(\text{date de fin d'observation}^3 - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1 ; \text{date de fin d'arrêt de travail} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1)$$

$$\begin{aligned} \delta_i^{j,c} &= 1 \text{ si il y a sortie effective d'arrêt de travail (ie. La durée de l'arrêt est terminée).} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Remarques :

$\delta_i^{j,c} = 0$ implique la censure de l'information.

¹ La rechute se traduit par une interruption de l'arrêt de travail. D'après les conditions générales des contrats Macif Mutualité (MMU) mettant en jeu la garantie indemnité journalière (ie. la garantie arrêt de travail), la période comprise entre la fin du 1^{er} arrêt et la rechute (arrêt lié à la même cause que le 1^{er}) ne peut excéder 3 mois.

Autrement, un nouveau sinistre est réouvert par le gestionnaire de sinistre et une nouvelle franchise s'applique.

² 01/01/j est la date de début d'observation de l'exercice comptable j.

³ 31/12/j est la date de fin d'observation de l'exercice comptable j.

Une sortie effective témoigne soit de la reprise du travail, soit du passage en invalidité, soit du décès ou bien de la fin de la garantie.

Le résultat manuel ci-dessous illustre le calcul des $e_i^{2005,c}$, $z_i^{2005,c}$ et $\delta_i^{2005,c}$ pour six observations spécifiques durant l'année comptable 2005. La colonne ‘Sortie en fin obs’ est identique à la variable $\delta_i^{2005,c}$. Par ailleurs, aucune rechute n'a été constatée pour ces arrêts de travail sur la période allant de la date de début de l'arrêt (d_it deb) à la date de fin de l'arrêt (d_it fin).

d_it deb	d_it fin	Date de Cloture Comptable	Franchise	d_naissance	ei	zi	Censure en fin obs	Sortie en fin obs
01-oct-05	07-nov-05	31-déc-05	15	06-févr-68	16	38	0	1
11-oct-05	07-janv-06	31-déc-05	15	19-nov-76	16	82	1	0
25-déc-05	15-janv-06	31-déc-05	15	20-août-80	Pas d'expo			
23-déc-04	13-févr-05	31-déc-05	30	05-janv-65	31	53	0	1
24-nov-04	24-mai-05	31-déc-05	30	17-janv-76	39	182	0	1
14-janv-04	23-janv-05	31-déc-05	30	16-avr-76	354	376	0	1

L'importation des sinistres historiques et l'élaboration de requêtes paramétrées sous Access, ont permis la détermination des $e_i^{j,c}$, $z_i^{j,c}$ $\delta_i^{j,c}$.

4.5.5 L'estimation du maintien avec RECHUTE

L'estimation du maintien AVEC RECHUTE nécessite que l'on procède à l'approximation suivante :

Comme la base sinistres de la gestion n'indique pas la date de reprise provisoire du travail et celle de la rechute, nous supposons par défaut que la rechute intervient au tout début de l'incapacité.

En réalité, la période renseignée s'écoulant entre le début et la fin de l'arrêt ne correspond pas à la période indemnisée. Les phases liées à la franchise et à la reprise provisoire du travail ne feront pas l'objet de décaissement par la Mutuelle. C'est pourquoi, nous définissons désormais $e_i^{j,c}$ et $z_i^{j,c}$ de la manière suivante :

$$e_i^{j,c} = \max(\text{date de début d'observation} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1 - \text{nombre de jours de non paiement}^1 ; \text{Franchise} + 1)$$

$$\delta_i^{j,c} = 1 \text{ si il y a sortie effective d'arrêt de travail (ie. La durée de l'arrêt est terminée).} \\ 0 \text{ sinon.}$$

$$z_i^{j,c} = \min(\text{date de fin d'observation} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1 ; \text{date de fin d'arrêt de travail} - \text{date de début d'arrêt de travail} + 1) - \text{nombre de jours de non paiement}$$

Suite à l'importation des données ci-dessus sous SAS et à la programmation des opérations illustrées ci-après, on estime à l'aide d'un pas journalier t la fonction de maintien en arrêt de travail $S^{j,c}(t)$ pour chaque tranche d'âge c et exercice comptable j.

Rappelons que $n_{j,c}$ représente l'ensemble des sinistres arrêt de travail d'âge à la survenance appartenant à la classe c^2 et absolument éligibles aux règlements de la part de Macif-Mutualité en raison de journées d'arrêt durant l'exercice comptable j.

¹ Si une rechute intervient alors le nombre de jours de non paiement sera le nombre de jours entre la date de reprise provisoire et celle de la rechute.

² $c \in \{t_{30}; t_{40}; t_{50}\}$

Soit $1 \leq t \leq 1096$

On définit l'exposition en t de la manière suivante :

$$r_i^{j,c}(t) = 1_{e_i^{j,c} \leq t \leq z_i^{j,c}}$$

$$r^{j,c}(t) = \sum_{i=1}^{n_{j,c}} 1_{e_i^{j,c} \leq t \leq z_i^{j,c}} = \sum_{i=1}^{n_{j,c}} r_i^{j,c}(t)$$

On définit les sorties en t comme suit :

$$d_i^{j,c}(t) = 1_{z_i^{j,c} = t} \times 1_{\delta_i^{j,c} = 1}$$

$$d^{j,c}(t) = \sum_{i=1}^{n_{j,c}} 1_{z_i^{j,c} = t} \times 1_{\delta_i^{j,c} = 1} = \sum_{i=1}^{n_{j,c}} d_i^{j,c}(t)$$

L'estimateur de Kaplan Meier du maintien est :

$$S^{j,c}(t) = \prod_{s=1}^t \left(1 - \frac{d^{j,c}(s)}{r^{j,c}(s)} \right)$$

La démarche consiste donc à comptabiliser, pour chaque t, le nombre de sinistres exposés durant le $t^{\text{ième}}$ jour en incapacité pendant la période d'observation. De plus, on identifie le nombre de sinistres sortant de l'état au bout de t jours d'ancienneté en incapacité.

Remarques :

$S^{j,c}(t)$ est l'**estimateur de Kaplan Meier** de la fonction de maintien discrétisée en pas journalier.

Cependant, nous ne retiendrons que les résultats mensuels c'est-à-dire $S^{j,c}(31), S^{j,c}(61), S^{j,c}(92), \dots, S^{j,c}(1096)$.

Pour coder le passage du pas journalier au pas mensuel et ainsi l'alternance entre les mois comptant 31 jours et les mois comptant 30 jours, on peut avoir recours par exemple au modulo entre t et 30,5.

On stocke uniquement les valeurs de $S^{j,c}(t)$ lorsque la valeur entière du reste de la division entre t et 30,5 vaut 0.

Grâce à l'estimation de la loi de maintien, nous en déduisons ${}^j\hat{q}_{c,a}$:

$${}^j\hat{q}_{c,a} = 1 - \frac{S^{j,c}(a+1)}{S^{j,c}(a)}$$

4.5.6 Remarques sur l'estimation des quotients de sortie adaptée aux spécificités de MMU

L'estimation des $q_{x,a}$ a été réalisée à partir de l'ensemble des sinistres incapacités indemnisés (sinistres ayant fait l'objet d'indemnisations au cours de la période du 01/01/2005 jusqu'au 31/12/2008). Il s'agit des sinistres CPIM et PDI indemnisés à compter du 16^{ième} jour, 31^{ième} jour, 61^{ième} jour et 91^{ième} jour et quelques autres cas particuliers liés aux règles de gestion. Lorsque nous estimons leur maintien, nous construisons une table à partir de l'ensemble des sinistres avec des niveaux différents de franchise contractuelle (15, 30, 60, 90 jours). Pour l'instant, la segmentation par niveau de franchise ne semble

pas entièrement adaptée à la taille du portefeuille. Une tel découpage diminuerait la quantité de données à disposition pour chaque estimation et conduirait vraisemblablement à accroître leur instabilité. On estime donc le maintien à compter de l'atteinte de la franchise contractuelle. On remarque, par ailleurs, que cette étude englobe la population des salariés (contrat CPIM) et celle des indépendants (contrat PDI). Comme pour la franchise, la segmentation par catégorie professionnelle ne paraît pas envisageable pour le moment. De plus, actuellement, la table d'expérience de maintien en incapacité de Macif-Mutualité est la même quelles que soient la franchise et la catégorie professionnelle.

Parfois, on constate que les règles de gestion (règles passées et présentes) des sinistres incapacité ne concordent pas complètement à l'étude. Par conséquent, il a été nécessaire de retraitre certaines observations après échanges avec les gestionnaires de sinistres. L'objectif était de se rapprocher d'une base de données en adéquation avec la méthode de construction du maintien calendaire en arrêt de travail. La constitution de cette historique a alors requis les retraitements manuels sur les données suivantes : certaines erreurs de saisie, des franchises en inadéquation avec la modélisation (franchise nulle, franchise 3 jours) dans la base historique. Ci-dessous, figure les trois principales rectifications concernant des franchises inappropriées :

4.5.6.1 Retraitements de la franchise 3 jours

Effectivement, la règle actuelle de gestion consiste à rapporter la franchise contractuelle à 3 jours lors de l'activation de l'option « rachat de franchise en cas d'hospitalisation » dans le produit PDI. Rappelons que, en cas d'hospitalisation d'une durée supérieure à 3 jours, consécutive à une maladie ou un accident, les indemnités journalières sont versées à compter du 4^{ème} jour d'arrêt de travail temporaire, sous réserve que l'arrêt soit d'une durée au moins égale à la franchise contractuelle.

Or, dans ce cas de figure, même si l'indemnisation de l'assuré intervient à compter du 4^{ème} jour (prévu dans le contrat), l'arrêt de travail avec hospitalisation de durée supérieure à 3 jours sera observable seulement s'il atteint le seuil de la franchise contractuelle. Le sinistré ne pourra être détectable qu'à compter de la durée de la franchise contractuelle +1. Avant l'atteinte de ce niveau, lors de l'estimation par la méthode de Kaplan Meier, le sinistre ne sera donc pas exposé. Par conséquent, la franchise à prendre en compte doit être celle liée au contrat (15, 30, 60, 90 jours) et non la franchise saisie à 3 jours par les gestionnaires.

En réalité, nous ne pouvons pas retrouver manuellement la franchise contractuelle de ces sinistres historiques problématiques. Nous leur affectons alors la franchise contractuelle minimale du produit PDI c'est-à-dire 15 jours.

4.5.6.2 Franchise du CPIM avec hospitalisation

Contrairement à PDI, dans le produit CPIM, l'hospitalisation est incluse dans les conditions générales du contrat. Rappelons que, en cas d'hospitalisation pendant la franchise, les indemnités journalières sont versées pour la durée de cette hospitalisation, à condition que l'arrêt de travail temporaire soit d'une durée au moins égale à la franchise.

Or, dans ce cas de figure, même si une indemnisation peut intervenir ponctuellement durant la franchise (pour cause d'hospitalisation), l'arrêt de travail ne sera distinguable que s'il dépasse le seuil de la franchise contractuelle. Le sinistré pourra donc au plus tôt être discernable à compter de la franchise contractuelle +1. Avant l'atteinte de ce niveau, lors de l'estimation par la méthode de Kaplan Meier, le sinistre ne sera pas considéré comme exposé. Par conséquent, la franchise à prendre en compte doit être celle liée au contrat (30, 60, 90 jours). Par chance, nous disposons de cette information exacte dans notre base sinistres grâce au champ franchise saisi.

4.5.6.3 La franchise nulle

Pour des raisons de confidentialité, ce paragraphe n'est pas traité dans cette version.

4.5.7 L'estimateur de Kaplan Meier et ses propriétés

4.5.7.1 Les propriétés de l'estimateur de Kaplan Meier

L'estimateur de Kaplan Meier de la fonction de maintien possède en particulier les trois bonnes propriétés suivantes :

1. Estimateur Convergent
2. Estimateur asymptotiquement gaussien
3. Estimateur de Maximum de Vraisemblance (EMV) généralisé.

Les définitions de ces bonnes propriétés sont disponibles en Annexe 5 .

Remarques :

L'EMV est un estimateur asymptotiquement normal et efficace

Toutefois, l'estimateur de Kaplan Meier de la fonction de maintien est biaisé positivement.

4.5.7.2 Variance de l'estimateur de la fonction de maintien $\hat{S}^{j,c}(t)$

$$\hat{V}(\hat{S}^{j,c}(t)) = \hat{S}^{j,c}(t)^2 \sum_{s=1}^t \frac{d^{j,c}(s)}{r^{j,c}(s)(r^{j,c}(s) - d^{j,c}(s))}$$

La démonstration figure dans l'Annexe 6 . Elle se sert notamment du théorème central limite et de la méthode delta énoncée ci-dessous :

On considère T_n un estimateur de θ et g une fonction de classe C^1 .

Si

$$a_n(T_n - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(\theta)) \text{ avec } a_n \rightarrow \infty$$

Alors

$$a_n(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{L} N(0, g'(\theta)^2 \sigma^2(\theta))$$

Section 4.6 : Le calibrage de la probabilité de sortie stochastique par le LISSAGE du coefficient de variation empirique brut.

Nous disposons des coefficients de variation empirique ($\widehat{CoV}_{x,a}$) bruts et erratiques des quotients de sortie d'incapacité $q_{x,a}$ pour chacune de nos trois tranches d'âge.

Pour des raisons de confidentialité, la représentation de ces CoV bruts n'apparaît pas.

Pour limiter les irrégularités de ce coefficient (liées en partie à l'insuffisance de données lors des estimations sur chacun des exercices comptables), nous procédons alors à un lissage bidimensionnel non paramétrique par la méthode de Whittaker-Henderson (WH).

Ce procédé s'appuie sur celui présenté dans l'ouvrage *Modèles de Durée* coécrit par Frédéric Planchet et Pierre Thérond et publié par Economica.

Le principe de cette méthode en dimension deux est alors de combiner un critère de fidélité et deux critères de régularité (l'un vertical et l'autre horizontal).

On recherche alors les valeurs lissées de notre coefficient qui minimisent la combinaison linéaire de ces conditions.

4.6.1 Le modèle de lissage de Whittaker-Henderson en dimension 2

4.6.1.1 Notations

On note la **différence avant** comme suit :

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

D'où

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} f(x+k)$$

La **différence avant** est un opérateur de différentiation discrète.

Ci-dessous sont exposés les trois critères de WH :

1. De manière générale, le **critère de fidélité** se définit comme suit :

$$F = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \omega_{i,j} (\text{CoV}_{i,j} - \widehat{\text{CoV}}_{i,j})^2$$

Notre matrice de données brutes $\widehat{\text{CoV}}$ se présente en réalité sous la forme d'une matrice $p \times q$ avec p lignes (jouant le rôle de l'ancienneté mensuelle) et q colonnes (interprétant les trois tranches d'âge constituées). Plus précisément, p vaut 36 et q représente les trois tranches d'âge (les moins de 40 ans, entre 40 et 50 ans et les plus de 50 ans).

La matrice des poids Ω est également de dimension $p \times q$.

Le poids de l'observation $\widehat{\text{CoV}}_{i,j}$ noté $\omega_{i,j}$ traduit l'importance que l'on souhaite donner à notre estimation $\widehat{\text{CoV}}_{i,j}$ dans le problème d'optimisation.

On rappelle $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$.

Par exemple, dans le cadre de cette étude, l'estimation du $\widehat{\text{CoV}}_{i,j}$ est pondérée par l'exposition mensuelle $e_{i,j}$. On procure davantage d'importance aux observations les plus exposées pensant que leur estimation est moins soumise aux fluctuations historiques d'échantillonnage¹.

En clair, on configure $\omega_{i,j}$ de la manière suivante :

$$\omega_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{\sum_{i,j} e_{i,j}} \times p \times q$$

Au lieu de choisir :

$$\omega_{i,j} = 1$$

La Figure 6 récapitule le niveau mensuel d'exposition. Il s'agit au fond d'un cumul de l'exposition journalière durant chaque ancienneté mensuelle.

On pose : $\Omega = (\omega_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$

¹ Il s'agit de la volatilité liée à la taille et l'hétérogénéité du portefeuille. Plus le portefeuille sera petit, moins il permettra la mutualisation.

Exposition Mensuelle par Ancienneté de 2005 à 2008

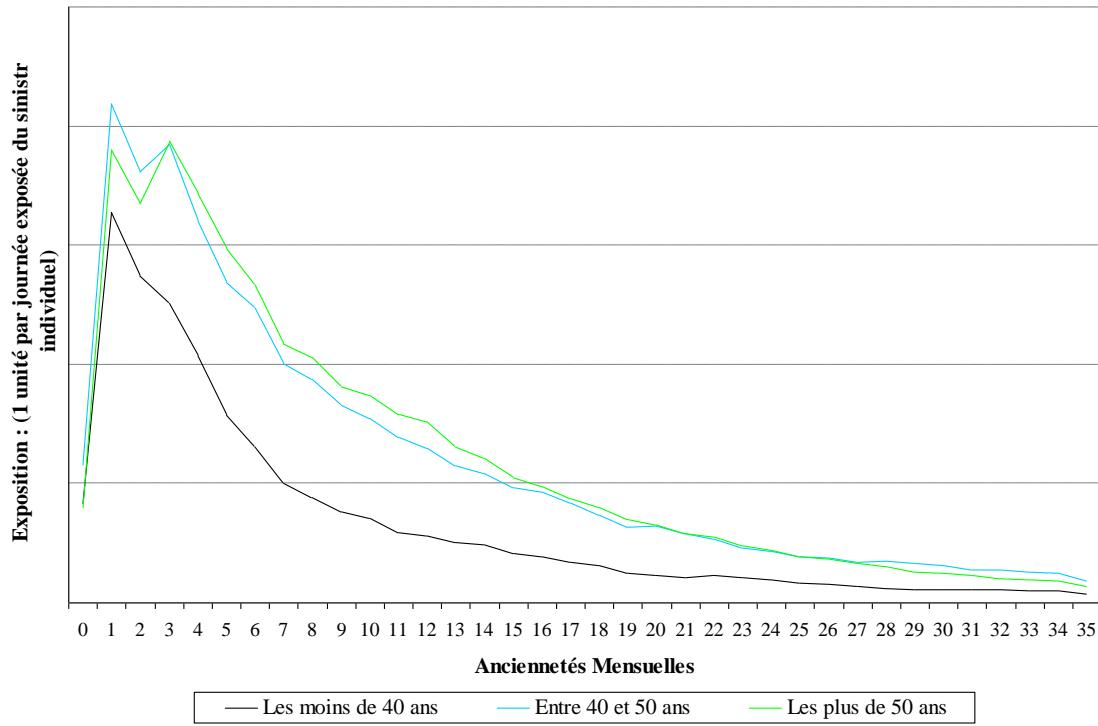


Figure 6 : Exposition Mensuelle par Ancienneté

2. Le critère de régularité verticale S_v s'écrit comme suit :

$$S_v = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p-z} \Delta^z \text{CoV}_{i,j}$$

$$S_v = {}^T(K_v^z u) (K_v^z u)$$

Où z représente l'ordre de la différence avant selon la dimension verticale.

3. Le critère de régularité horizontale S_h s'écrit comme suit :

$$S_h = \sum_{j=1}^{q-y} \sum_{i=1}^p \Delta^y \text{CoV}_{i,j}$$

$$S_h = {}^T(K_h^y u) (K_h^y u)$$

Où y traduit l'ordre de la différence avant selon la dimension horizontale.

4.6.1.2 Le problème d'optimisation

On souhaite alors minimiser :

$$M = F + \alpha S_v + \beta S_h$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \{t_{30}; t_{40}; t_{50}\}$

Remarques :

α et β témoignent de l'ampleur accordée au critère au critère de régularité horizontale et au critère de régularité verticale.

4.6.1.3 La solution matricielle de ce problème d'optimisation

La solution de ce problème d'optimisation est le vecteur suivant :

$$u = (\Omega^* + \alpha^T K_v^z K_v^z + \beta^T K_h^y K_h^y)^{-1} \Omega^* \hat{u}$$

u et \hat{u} sont des vecteurs de dimension pq . Notre matrice de données brutes \widehat{CoV} dimensionnée $p \times q$ est transformée en un vecteur \hat{u} de dimension pq . Successivement, les lignes sont transposées et mises les unes après les autres pour former un vecteur \hat{u} .

Nos valeurs lissées u sont alors disposées sous la forme d'un vecteur. Le lien entre le vecteur \hat{u} et la matrice \widehat{CoV} est :

$$\hat{u}[q(i-1) + j] = \widehat{CoV}_{i,j} \text{ avec } 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q$$

Ω^* est une matrice diagonale de taille $pq \times pq$. Successivement, nos poids sont transposés et mis les uns après les autres pour former la diagonale. La transformation permettant le passage de W à W^* est :

$$\Omega^*(q(i-1) + j, q(j-1) + j) = \omega_{i,j} \text{ avec } 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q.$$

K_v^z est une matrice dont la dimension est $(p-z)q \times pq$. Elle est formée implicitement des coefficients binomiaux d'ordre z.

K_h^y est une matrice dont la dimension est $(q-y)p \times pq$. Elle contient implicitement les coefficients binomiaux d'ordre y.

4.6.2 L'application simplifiée à nos données :

Le lissage de $\widehat{CoV}_{x,a}$ peut être illustré par les données partielles suivantes :

$$\widehat{CoV} = \begin{pmatrix} \widehat{CoV}_{11} & \widehat{CoV}_{12} & \widehat{CoV}_{13} \\ \widehat{CoV}_{21} & \widehat{CoV}_{22} & \widehat{CoV}_{23} \\ \widehat{CoV}_{31} & \widehat{CoV}_{32} & \widehat{CoV}_{33} \\ \widehat{CoV}_{41} & \widehat{CoV}_{42} & \widehat{CoV}_{43} \end{pmatrix}$$

En clair, nos trois colonnes représentent bien nos trois tranches.

Pour être totalement conforme avec nos données, il faudrait simplement que la matrice ci-dessus comporte 36 lignes (relatives aux anciennetés dans l'état incapacité variant de 0 à 35) au lieu de ces 4 lignes.

Dans cet exemple, $p = 4$ et $q = 3$.

Les poids associés à nos estimations sont :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \omega_{43} \end{pmatrix}$$

Les valeurs lissées recherchées sont :

$$CoV = \begin{pmatrix} CoV_{11} & CoV_{12} & CoV_{13} \\ CoV_{21} & CoV_{22} & CoV_{23} \\ CoV_{31} & CoV_{32} & CoV_{33} \\ CoV_{41} & CoV_{42} & CoV_{43} \end{pmatrix}$$

Le **critère de fidélité** se définit comme suit :

$$F = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \omega_{ij} (CoV_{ij} - \widehat{CoV}_{ij})^2$$

En passant à l'expression matricielle, on a :

$$F = {}^T(u - \hat{u})\Omega^*(u - \hat{u})$$

Avec

$$u = \begin{pmatrix} CoV_{11} \\ CoV_{12} \\ CoV_{13} \\ CoV_{21} \\ CoV_{22} \\ CoV_{23} \\ CoV_{31} \\ CoV_{32} \\ CoV_{33} \\ CoV_{41} \\ CoV_{42} \\ CoV_{43} \end{pmatrix} \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \widehat{CoV}_{11} \\ \widehat{CoV}_{12} \\ \widehat{CoV}_{13} \\ \widehat{CoV}_{21} \\ \widehat{CoV}_{22} \\ \widehat{CoV}_{23} \\ \widehat{CoV}_{31} \\ \widehat{CoV}_{32} \\ \widehat{CoV}_{33} \\ \widehat{CoV}_{41} \\ \widehat{CoV}_{42} \\ \widehat{CoV}_{43} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{43} \end{pmatrix}$$

En choisissant $z = 2$, le **critère de régularité verticale S_v** s'écrit comme suit :

$$S_v = (CoV_{1,1} - 2CoV_{2,1} + CoV_{3,1})^2 + (CoV_{2,1} - 2CoV_{3,1} + CoV_{4,1})^2 + (CoV_{1,2} - 2CoV_{2,2} + CoV_{3,2})^2 + (CoV_{2,2} - 2CoV_{3,2} + CoV_{4,2})^2 + (CoV_{1,3} - 2CoV_{2,3} + CoV_{3,3})^2 + (CoV_{2,3} - 2CoV_{3,3} + CoV_{4,3})^2$$

Lorsque $z = 2$, la différence avant d'ordre 2 selon la verticale, $\Delta^2 \text{CoV}$, correspond à une approximation discrète de la dérivée partielle seconde de CoV selon les anciennetés.

On opte pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Parmi nos trois critères (fidélité, régularité verticale, régularité horizontale), on souhaite donner le plus d'importance à la régularité verticale c'est à dire celle liée à nos anciennetés mensuelles en incapacité.

En passant à l'expression matricielle, on a :

$$S_v = {}^T(K_v^2 u) (K_v^2 u)$$

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} \text{CoV}_{11} & \text{CoV}_{12} & \text{CoV}_{13} & \text{CoV}_{21} & \text{CoV}_{22} & \text{CoV}_{23} & \text{CoV}_{31} & \text{CoV}_{32} & \text{CoV}_{33} & \text{CoV}_{41} & \text{CoV}_{42} & \text{CoV}_{43} \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutefois, K_v^2 pourrait s'écrire autrement :

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} \text{CoV}_{11} & \text{CoV}_{12} & \text{CoV}_{13} & \text{CoV}_{21} & \text{CoV}_{22} & \text{CoV}_{23} & \text{CoV}_{31} & \text{CoV}_{32} & \text{CoV}_{33} & \text{CoV}_{41} & \text{CoV}_{42} & \text{CoV}_{43} \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot I_3 & -2 \cdot I_3 & 1 \cdot I_3 & 0 \cdot I_3 \\ 0 \cdot I_3 & 1 \cdot I_3 & -2 \cdot I_3 & 1 \cdot I_3 \end{pmatrix}$$

Mais aussi

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Où $1 \cdot I_3$ forme notamment un bloc de la matrice K_v^2 .

On en déduit que :

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_3$$

Avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et \otimes symbolise le **produit de Kronecker**.

La 1^{ère} matrice du produit de Kronecker est de dimension $(p - z) \times p$. Cette matrice est constituée des coefficients binomiaux d'ordre deux.

La 2^{ième} matrice est de taille $q \times q$.

En réalité, dans la pratique $p = 36$ et $q = 3$, on a donc :

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_3$$

Où $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice $(p-z) \times p$.

En choisissant $y=1$, le **critère de régularité horizontale S_h** s'écrit comme suit :

$$S_h = (CoV_{1,2} - CoV_{1,1})^2 + (CoV_{1,3} - CoV_{1,2})^2 + (CoV_{2,2} - CoV_{2,1})^2 + (CoV_{2,3} - CoV_{2,2})^2 + (CoV_{3,2} - CoV_{3,1})^2 + (CoV_{3,3} - CoV_{3,2})^2 + (CoV_{4,2} - CoV_{4,1})^2 + (CoV_{4,3} - CoV_{4,2})^2$$

Lorsque $y = 1$, la différence avant d'ordre 1 selon l'horizontale, $\Delta^1 CoV$, correspond à une approximation discrète de la dérivée partielle première de CoV selon les tranches d'âge.

De façon matricielle, on a :

$$S_h = {}^T(K_h^1 u) (K_h^1 u)$$

$$K_h^1 = \begin{matrix} \begin{array}{cccccccccccc} CoV_{11} & CoV_{12} & CoV_{13} & CoV_{21} & CoV_{22} & CoV_{23} & CoV_{31} & CoV_{32} & CoV_{33} & CoV_{41} & CoV_{42} & CoV_{43} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \end{matrix}$$

C'est-à-dire

$$K_h^1 = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$K_h^1 = I_4 \otimes \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En réalité, dans la pratique $p = 36$ et $q = 3$, on a donc :

$$K_h^1 = I_{36} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La 1^{ère} matrice du produit de kronecker est de dimensions $p \times p$. Il fournit le plan du pavage.

La 2^{ième} matrice a pour dimension $(q-y) \times q$. Elle constitue la brique. Cette matrice comprend les coefficients binomiaux d'ordre 1.

La commande **kron** sous scilab permet d'effectuer ce produit.

4.6.3 Tests de validation du modèle de WH en dimension deux

4.6.3.1 Le test de changement de signe à chaque j

Ce test s'applique aux deux échantillons du coefficient de variation associés l'un à l'autre par paire :

On a les couples $(\text{CoV}_{i,j}, \widehat{\text{CoV}}_{i,j})$.

Le test de changement de signe est un test non paramétrique pour deux échantillons appariés.

On note le signe de la différence par :

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= \text{CoV}_{i,j} - \widehat{\text{CoV}}_{i,j} \\ D &= (D_{i,j})_{1 \leq i \leq p=36, 1 \leq j \leq q=3} \end{aligned}$$

Pour chaque j , on effectue le test du signe de la différence. Si les anciennetés i sont indépendantes alors la probabilité que $d_{i,j}$ et $d_{i+1,j}$ n'est pas le même signe vaut $\frac{1}{2}$. La plage d'ancienneté comprend p valeurs. Par conséquent, le nombre de changements de signe dans la série des d_i est distribué selon une loi binomiale $(p-1, \frac{1}{2})$.

On pose X_i la variable valant 1 en cas de changement de signe et 0 sinon.

On répète $(p-1)$ fois l'expérience et on compte le nombre n de changements de signe observés ($\sum_{i=1}^{p-1} X_i = n$).

Les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées selon une bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4}$.

D'après le théorème central limite, on en déduit que :

$$\frac{n - (p-1) \times \frac{1}{2}}{\sqrt{(p-1)} \times \sqrt{\frac{1}{4}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Le test de changement de signe repose alors sur la statistique $S = \frac{2n-(p-1)}{\sqrt{(p-1)}}$.

La probabilité critique ou p-value est la probabilité définie par :

- $P(|S| > s)$ si le test est bilatéral¹.
- $P(S > s)$ si le test est unilatéral¹.

¹ Un test bilatéral s'applique quand on cherche une différence entre deux estimations, ou entre une estimation et une valeur donnée sans se préoccuper du signe ou du sens de la différence. Dans ce cas, la zone de rejet de l'hypothèse principale se fait de part et d'autre de la distribution de référence.

L'hypothèse nulle H_0 de ce test est :

A j fixé, les $D_{i,j}$ sont indépendantes identiquement distribuées (iid).

On rejette H_0 lorsque la p-value sera faible.

On souhaite rejeter H_0 si la p-value associée au test bilatéral est inférieure à 5 %.

Quelle est la valeur critique s_{value} à $\alpha = 5\%$ associée au test bilatéral (ie $P(|S| > s_{value}) = 5\%$) ?

On consulte la table usuelle de la loi normale centrée et réduite.

$$\begin{aligned} P(|S| > s_{value}) &= 5\% \\ \frac{P(|S| > s_{value})}{2} &= 1 - P(S < s_{value}) \\ P(S < s_{value}) &= 0,975 \end{aligned}$$

D'où

$$s_{value} = 1,96$$

On programme sous Scilab le lissage du CoV par la méthode de Whittaker-Henderson puis on applique le test du changement de signe au couple ($\text{CoV}_{i,j}, \widehat{\text{CoV}}_{i,j}$). On observe alors les résultats suivants :

```
--> // test changement de signe pour chaque j

--> D = Q-M;

--> Sj=(2*sum(D(1:$-1,:).*D(2:$,:)<0,"r")-(p-1))/sqrt(p-1)
Sj =
1.183216 - 0.1690309 - 0.1690309
```

La valeur observée de la statistique pour chaque classe d'âge « les moins de 40 ans », « entre 40 et 50 ans », « les plus de 50 ans » sont respectivement 1,183216, -0,1690309 et -0,1690309.

Ces valeurs constatées ne dépassent pas 1,96 et ne sont pas inférieures à -1,96 .

Par conséquent, on accepte l'hypothèse nulle.

4.6.3.2 Les résultats du test de changement de signe pour tous les j

Le test de changement de signe s'appuie alors sur la statistique $S = \frac{2n-(3p-1)}{\sqrt{(3p-1)}}$.

On peut observer au maximum (3p-1) changements de signe.

```
--> // test de changement de signe sur l'ensemble des j

--> S=(2*sum(D(1:$-1,:).*D(2:$,:)<0)-(q*p-1))/sqrt(q*p-1)
S =
0.2900209
```

La valeur observée de la statistique est 0,2900209.

¹ Un test unilatéral est utilisé pour savoir si une estimation est supérieure (ou inférieure) à une autre ou à une valeur donnée. La zone de rejet de l'hypothèse principale est située d'un seul côté de la distribution de probabilité de référence.

Elle ne dépasse pas 1,96 et n'est pas plus petite que -1,96.
Par conséquent, on accepte l'hypothèse H_0 .

4.6.4 L'analyse des résultats du lissage

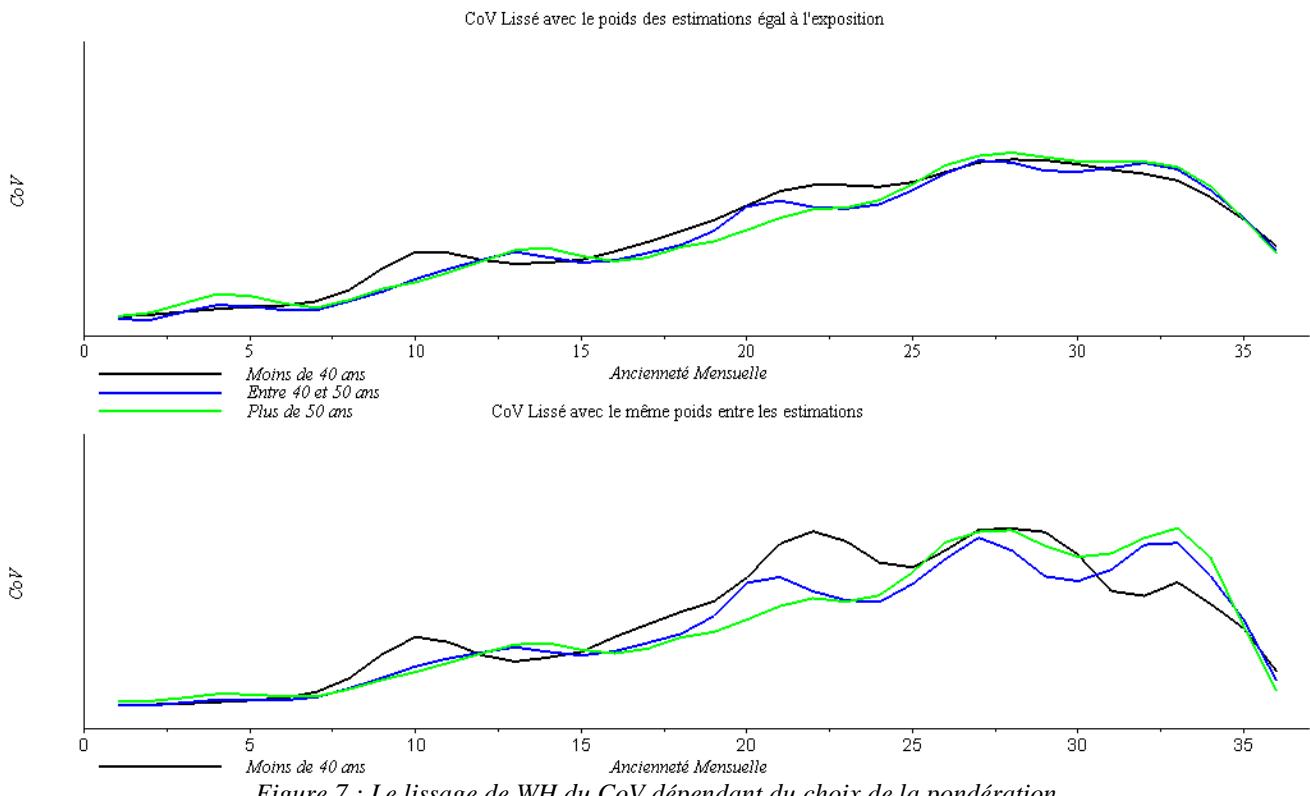


Figure 7 : Le lissage de WH du CoV dépendant du choix de la pondération

La Figure 7 permet la comparaison de deux graphiques :

1. Le graphique du dessus de la Figure 7 montre les résultats du lissage du CoV lorsque les poids du critère de fidélité sont définis comme suit :

$$\omega_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{\sum_{i,j} e_{i,j}} \times p \times q$$

2. Le graphique du dessous de la Figure 7 montre les résultats du lissage du CoV lorsque les poids du critère de fidélité sont définis comme suit :

$$\omega_{i,j} = 1$$

Les notations ont été présentées en 4.6.1.1 .

Au final, au sein de l'étude, la pondération choisie a été :

$$\omega_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{\sum_{i,j} e_{i,j}} \times p \times q$$

En effet, il semble plus pertinent que les estimations avec davantage d'observations influencent ce lissage non paramétrique.

Section 4.7 : Résultats du risque incapacité en sortie d'Igloo

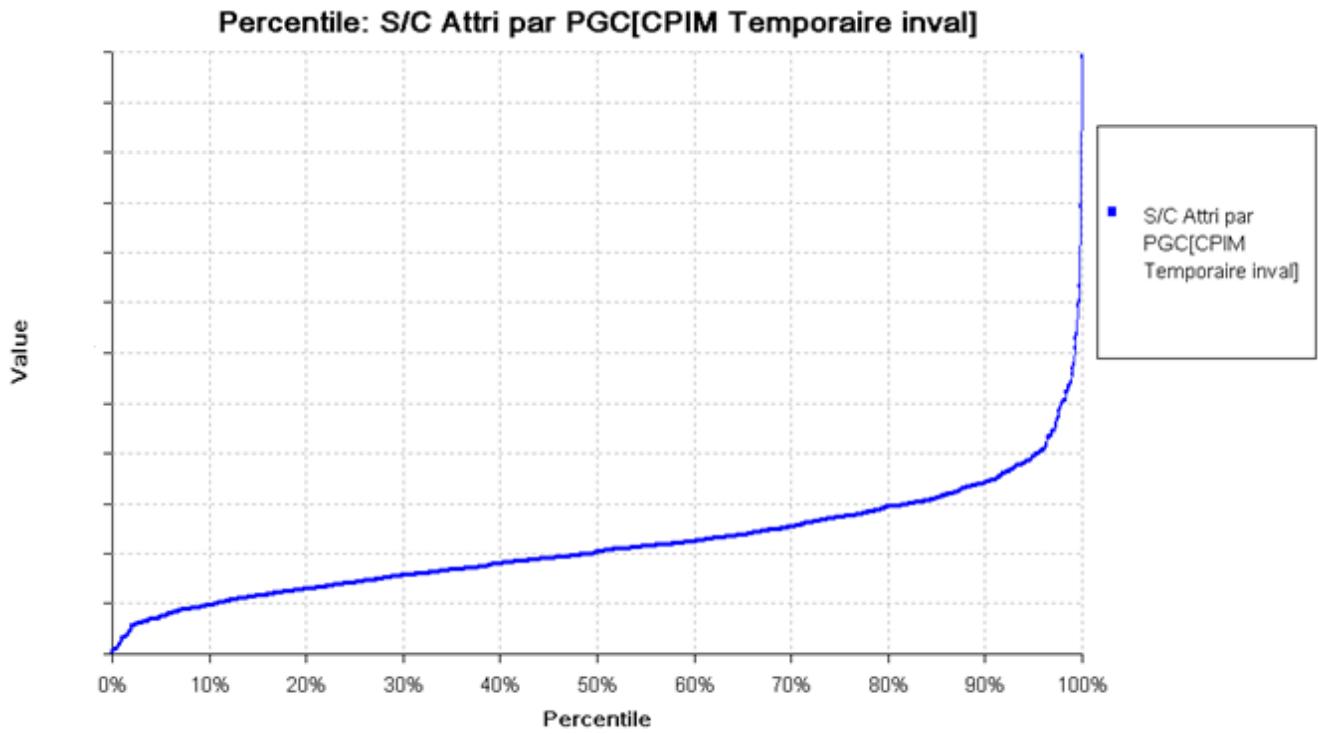


Figure 8 : Centiles¹ empiriques du S/C des attritionnels

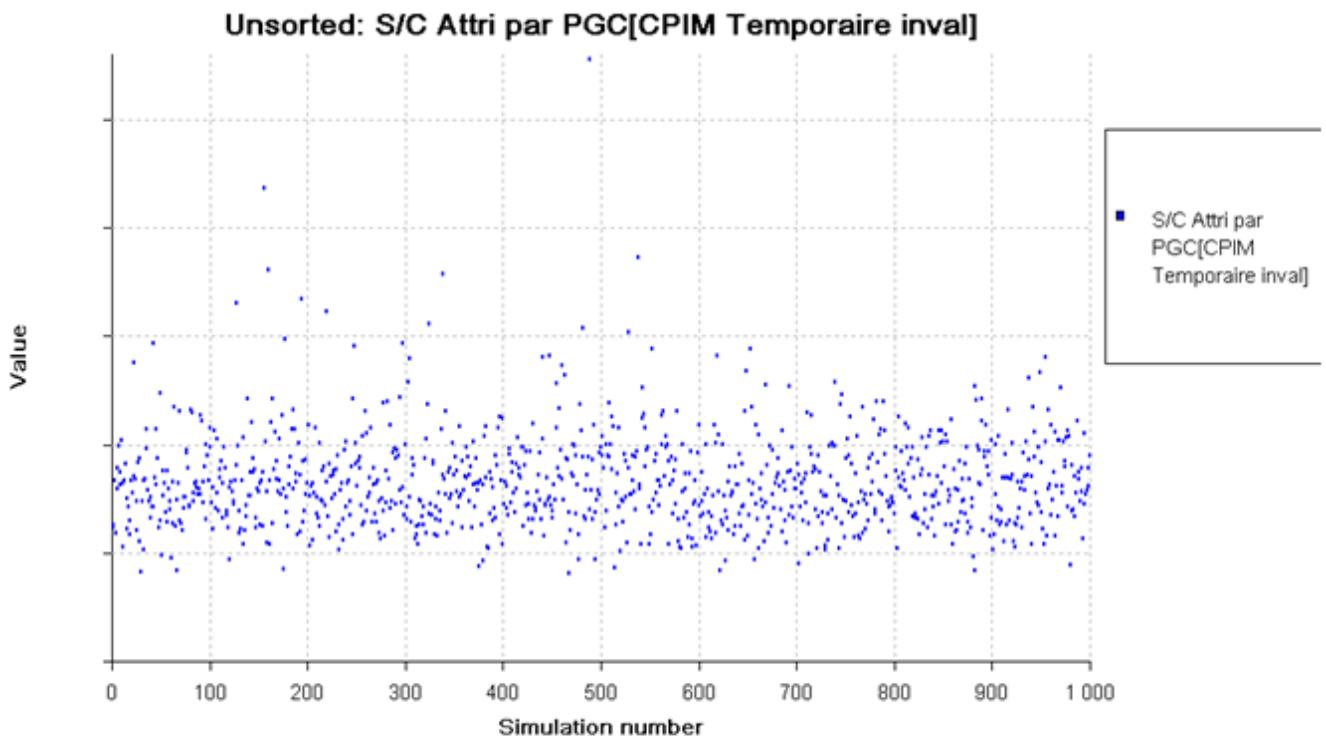


Figure 9 : 1 000 scénarios du S/C attritionnel

¹ Les 100-quantiles sont appelés centiles ou percentiles en anglais.

Le ratio sinistres à primes ou le ratio sinistres sur cotisations sont respectivement appelés S/P et S/C. Les figures Figure 8 et Figure 9 proviennent de la modélisation, sous EMB Igloo, de la survenance future N+1 des sinistres CPIM incapacité. Elles représentent le S/C ultime de l'ensemble des sinistres attritionnels CPIM incapacité bruts de réassurance survenus en N+1 c'est-à-dire durant l'année succédant immédiatement l'année N d'évaluation du besoin en fonds propres. Ce S/C tient à la fois compte de la simulation du nombre de sinistres attritionnels incapacité survenus durant l'année N+1 ventilé par profil de risque et du rythme de sortie d'incapacité ou de passage en invalidité de chacun de ces profils. La charge ultime liée à un profil de risque attritionnel se déduit de la manière suivante : S'il s'agit d'un profil ne tombant jamais en invalidité alors sa charge ultime correspondra à la somme des règlements stochastiques au titre de l'incapacité. En revanche, s'il est question d'un profil passant en invalidité alors sa charge ultime vaudra la somme des règlements liés à son incapacité à laquelle on ajoute le montant du capital constitutif de la rente invalidité.

On imagine que l'on souhaite connaître la VaR de niveau de confiance 99,5 % de notre S/C ultime relatif aux incapacités attritionnelles. Le quantile à 99,5 % sera donc la 995^{ième} plus petite simulation de nos 1 000 réalisations.

On suppose que l'on désire construire un intervalle de confiance de niveau 95 % de notre distribution de S/C. La borne inférieure de notre intervalle correspondra à la valeur de la 25^{ième} plus petite simulation et la borne supérieure sera la valeur de la 975^{ième} plus petite simulation.

Conclusion

Pour conclure, ce mémoire a traité deux sujets : l'un concernait l'environnement juridique et l'autre présentait la modélisation du risque arrêt de travail en lien avec la réforme solvabilité II.

Dans la première partie, on a retenu que le contexte juridique a toute son importance dans le secteur assurantiel. Les besoins des assurés ou adhérents à un régime de prévoyance dépendent en outre de l'environnement juridique. Lors des désengagements de la sécurité sociale en matière de remboursement des frais de santé, d'indemnisation en cas d'arrêt de travail, d'invalidité, l'assuré peut rechercher une couverture complémentaire plus adaptée qui comblerait ces carences.

On a remarqué que l'aspect juridique influence l'activité de la mutuelle et peut créer un potentiel de développement. En effet, lors de la mise en place d'un régime de prévoyance collective – par convention collective, accord collectif, référendum, décision unilatérale de l'employeur - l'entreprise lance parfois un appel d'offre. L'assureur a alors la possibilité de gagner une part de marché en assurant les affiliés de cette société. Cependant, le cadre juridique dont les sources sont le droit communautaire (directives, règlements, avis, décision) et le droit interne, impose des contraintes aux mutuelles telles que : le provisionnement des engagements, la marge de solvabilité et la conformité réglementaire des conditions générales des contrats d'assurance, etc. A propos de l'arrêt de travail, l'assureur tient compte de la prise en charge partielle du versement des indemnités journalières par la sécurité sociale. Au cours du dernier trimestre 2010, le mode de calcul des IJ pourrait même être revu à la baisse dans le cadre des mesures de maîtrise des dépenses d'assurance maladie. Néanmoins, rappelons que, suite à l'incapacité du salarié causée par un accident ou une maladie, l'employeur est astreint à lui maintenir son revenu à un certain niveau et durant une période précise. Cette obligation remonte à la loi de mensualisation du 19 janvier 1978. A compter de cette date, ces règles ont évolué favorablement dans l'intérêt du salarié. Par ailleurs, selon l'arrêté du 28 mars 1996, l'assureur a le devoir de provisionner les garanties incapacité et invalidité. Il s'agit du provisionnement du maintien en incapacité, de l'invalidité en attente et du maintien en invalidité.

On a constaté l'actualité incontournable de la réforme solvabilité II avec le vote de la directive solvabilité II en 2009 et la mobilisation des assureurs jusqu'à la mi-novembre 2010 pour répondre à la 5^{ème} étude quantitative d'impact.

Dans la seconde partie du mémoire, on a présenté la modélisation des sinistres attritionnels incapacité dans le modèle interne de Macif-Mutualité.

On a rappelé les objectifs d'un modèle interne. Après l'application de quelques méthodologies statistiques et actuarielles, les profils des sinistres historiques de la Mutuelle ont été construits, la fréquence future de survenance des sinistres attritionnels arrêt de travail a été estimée et l'aléa autour de la table d'expérience de maintien en incapacité a été modélisé. Toutefois, certaines améliorations ou variantes de ces techniques pourront être envisagées et d'autres calibrations (la modélisation des sinistres CAT, la dépendance entre les risques) seront à réaliser. S'agissant de la construction des profils graves individuels non traités dans ce mémoire, elle se déduit commodément de celle des attritionnels. Mais la profondeur de l'expérience, les caractéristiques des traités de réassurance et des incapacités ne permettent pas de retrouver de manière systématique des profils graves¹ pour chaque garantie composant le produit. En bref, nous ne disposons pas toujours de « model points » graves passés. Pour remédier à ce manque, on pourra envisager de recenser les spécificités des contrats en cours à la date d'évaluation du besoin en fonds propres et d'identifier ceux susceptibles de devenir

¹ Dans le modèle interne, un profil grave est susceptible de déclencher l'exécution d'un traité de réassurance non proportionnel.

graves en cas de sinistre durant l'année de survenance future. D'ailleurs, on imaginera modéliser la fréquence de survenance des sinistres graves par unité d'exposition au risque, par une distribution continue à queue intermédiaire (Weibull, LogNormale) ou lourde (Pareto, LogGamma).

On a retracé, en outre, les principales étapes de l'étude sur la quantification de l'aléa autour de la table d'expérience de maintien en incapacité. Elles ont été décomposées de la façon suivante : l'estimation brute du quotient de sortie d'incapacité, la détermination du coefficient de variation empirique brut et le lissage double de ce coefficient (selon la dimension âge à l'entrée en incapacité et l'ancienneté mensuelle dans l'état incapacité). Notons que nous avons choisi de rassembler nos âges en trois tranches lors de l'application de l'estimateur de Kaplan Meier. Le but était de contourner le manque de données sur une année calendaire. Néanmoins, on a aussi constaté que le nombre d'observations de l'étude variait selon l'ancienneté. Rationnellement, on a relevé une décroissance à compter du 4^{ème} mois d'ancienneté en incapacité. En conséquence, on pourrait envisager une autre démarche consistant à interrompre la segmentation en classes d'âge à compter du 6^{ème} mois d'ancienneté de l'assuré en arrêt de travail. En bref, l'estimation de nos probabilités conditionnelles brutes de sortie d'incapacité serait fonction de la tranche d'âge et de l'ancienneté au cours des six premiers mois d'arrêt. En revanche, elle dépendrait uniquement de l'ancienneté mensuelle à compter du 6^{ème} mois. Le choix de cette borne pourrait se justifier par les pratiques de la sécurité sociale. En réalité, au-delà de six mois d'arrêt de travail, la sécurité sociale classifie l'incapacité comme un arrêt de longue durée. Ainsi, elle recense deux types d'affections : la première de longue durée exonérante et la seconde de longue durée non exonérante. Celle exonérante suite à une maladie nécessitant un suivi, des soins prolongés et des traitements coûteux ouvre droit à la prise en charge à 100 %. Celle non exonérante suite à une affection demandant une interruption de travail ou des soins d'une durée supérieure à six mois, ne prévoit pas le financement à 100 %.

Références

Ouvrages :

1. CHARPENTIER Arthur et DENUIT Michel, *Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque*, Economica.
2. LAITER Jean-Daniel et MOLARD Julien, *Les clés de l'assurance vie*, SEFI.
3. MOLARD Julien (2005), *L'assurance de personnes*, Sefi éditions.
4. PLANCHET Frédéric et THEROND Pierre, *Modèles de Durée Applications actuarielles*, Economica.
5. PLANCHET Frédéric et WINTER Joël (2006), *Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective*, Economica.
6. QUITTARD-PINON François et ROLANDO Thierry (2000), *La gestion du risque de taux d'intérêt*, Economica.
7. SAPORTA Gilbert, *Probabilités analyse des données et Statistique*, Technip.
8. VEYSSEYRE Renée (2006), *Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur*, Dunod.

Mémoires :

1. MM CAMBOURIS Yani & GERMAIN Michel (CEA 2001) : *Une analyse de la mesure d'incertitude d'estimation d'une loi de maintien en incapacité*.
2. Aurélie GAUMET (Isfa 2001) : *Construction de tables d'expérience pour l'entrée et le maintien en incapacité*.
3. Christelle RIEDINGER (ulp) : *Modélisation stochastique des produits de prévoyance*.

Cours :

1. Cours de protection sociale en 2^{ième} année à l'ISFA dispensé par M^{me} MARILLET Séverine.
2. Cours de statistiques en 2^{ième} année à l'ISFA dispensé par M^{me} MAUME-DESCHAMPS Véronique.

Publications internes :

1. *Rapport TARAT - GLOBAL - Lois de provisionnement* rédigé et mis en œuvre par les consultants de Actuaris.
2. *Rapport TARAT TNS - MACIF MUTUALITE - Phase 2* rédigé et mise en œuvre par les consultants de Actuaris.
3. *Formation Solvency II QIS5* animée par les consultants de Milliman.

Sites Internet :

1. Site de la Commission Européenne : http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/index_en.htm
2. Site d'accès au droit français : <http://www.legifrance.gouv.fr/>

3. Site de la Sécurité Sociale : <http://www.ameli.fr/>
4. Portail sécurité sociale : http://www.securite-sociale.fr/comprendre/histo/historique/gdes_dates.htm
5. Site de l'administration française : <http://www.service-public.fr/>

Table des annexes

Annexe 1 : VaR et TVaR	88
Annexe 2 : Démonstration du calibrage de la probabilité de sortie stochastique	89
Annexe 3 : Article L1226-1 du code du travail.....	92
Annexe 4 : Article A212-9 du code de la Mutualité	93
Annexe 5 : Définitions des propriétés éventuelles d'un estimateur	94
Annexe 6 : Démonstration de la variance de l'estimateur de la fonction de maintien $S^{j,x}(t)$	95

Annexe 1 : VaR et TVaR

La référence à cette annexe se situe à la page 30 au 3.2.1.4 4.2.2 du mémoire.

La VaR_α de niveau de confiance α ($\alpha \in [0 ; 1[$) associée à une variable aléatoire X est son quantile d'ordre α . Elle est donc définie de la manière suivante :

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) \text{ avec } F_X \text{ la fonction de répartition de } X.$$

$$\begin{array}{c} \leq \\ \text{La } VaR_\alpha \text{ n'est pas toujours sous additive ie. } VaR_\alpha(X + Y) = VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) \\ \geq \end{array}$$

Par exemple, soient 2 facteurs de risque retenus dans la réforme Solvabilité II :

Soient X le risque de souscription (lié au sous provisionnement, à l'insuffisance de tarification) et Y le risque de crédit (par exemple le défaut des réassureurs) alors :

$$\begin{array}{c} \leq \\ SCR_\alpha(X + Y) = SCR_\alpha(X) + SCR_\alpha(Y) \\ \geq \end{array}$$

La Tail Value-at-Risk ($TVaR_\alpha$) de niveau de confiance α ($\alpha \in [0 ; 1[$) associée à une variable aléatoire X est définie par :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X) du$$

La $TVaR_\alpha$ apparaît alors comme la moyenne des VaR_α de niveau de confiance α .

Contrairement à la VaR_α de niveau de confiance α , la $TVaR_\alpha$ est toujours sous additive :

$$TVaR_\alpha(X + Y) \leq TVaR_\alpha(X) + TVaR_\alpha(Y)$$

Annexe 2 : Démonstration du calibrage de la probabilité de sortie stochastique

La référence à cette annexe se situe à la page 60 au 4.2.2 du mémoire.

2.1 Expression du $^{stoch}q_{x,a}$

On note :

$t p_{x,a}$ la probabilité qu'un individu entré à l'âge x en incapacité, d'ancienneté a mois en incapacité, se maintienne au moins t mois en incapacité.

$\mu_x(a)$ le taux instantané de sortie d'incapacité à l'ancienneté a .

$$\mu_x(a) = \mu_{x,a}$$

On a la relation suivante :

$$t p_{x,a} = e^{-\int_0^t \mu_x(s+a) ds}$$

$$t p_{x,a} = e^{-\int_a^{a+t} \mu_x(s) ds}$$

D'où

$$t q_{x,a} = 1 - e^{-\int_a^{a+t} \mu_x(s) ds}$$

Donc

$$q_{x,a} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_x(s+a) ds}$$

On suppose que le taux instantané de sortie est constant sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On a alors :

$$\forall u \in [0 ; 1] \quad \mu_x(u+a) = \mu_x(a)$$

$$q_{x,a} = 1 - e^{-\mu_x(a) \int_0^1 ds}$$

$$q_{x,a} = 1 - e^{-\mu_{x,a}}$$

$$\mu_{x,a} = \ln \left(\frac{1}{1 - q_{x,a}} \right)$$

$$\mu_{x,a} = \ln \left(\frac{1}{1 - q_{x,a}} \right)$$

On retient alors la modélisation ci-dessous pour le taux instantané de sortie :

$$\mu_{x,a} = \ln \left(\frac{1}{1 - \exp \hat{q}_{x,a}} \right) + \varepsilon'$$

Avec $\varepsilon' \sim N(\frac{1}{2} \sigma^2, \sigma^2)$

Notons que ε' n'est pas centrée en 0 afin que $E(^{stoch}q_{x,a}) = \exp \hat{q}_{x,a}^x$

On remplace la valeur de $\mu_{x,a}$ modélisée ci-dessus dans :

$$q_{x,a} = 1 - e^{-\mu_x(a) \int_0^1 ds}$$

89

D'où

$$\begin{aligned} q_{x,a} &= 1 - e^{-\ln\left(\frac{1}{1-\hat{q}_{x,a}}\right)-\varepsilon'} \\ q_{x,a} &= 1 - (1 - \hat{q}_{x,a})e^{-\varepsilon'} \\ \varepsilon' - \frac{1}{2}\sigma^2 &= \varepsilon \\ q_{x,a} &= 1 - (1 - \hat{q}_{x,a})e^{-(\varepsilon+\frac{1}{2}\sigma^2)} \end{aligned}$$

Avec $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

L'expression du $^{stoch}q_{x,a}$ est la suivante :

$$^{stoch}q_{x,a} = 1 - (1 - \hat{q}_{x,a})e^{-\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma^2}$$

2.2 Estimation de σ^2

Rappel :

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $e^X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

On note $e^X = Y$

D'où

$$\begin{aligned} E(Y) &= e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \\ V(Y) &= (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu+\sigma^2} \end{aligned}$$

On choisit la méthode des moments pour estimer le paramètre de dispersion :

$$E(^{stoch}q_{x,a}) = 1 - (1 - \hat{q}_{x,a})E(e^{-\varepsilon'}) = 1 - (1 - \hat{q}_{x,a}) \times e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2} = \hat{q}_{x,a}$$

$$V(^{stoch}q_{x,a}) = (1 - \hat{q}_{x,a})^2 \times (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\times(-\frac{1}{2})\sigma^2 + \sigma^2} = (1 - \hat{q}_{x,a})^2 \times (e^{\sigma^2} - 1)$$

D'où

$$(e^{\sigma^2} - 1) = \frac{V(q_{x,a})}{(1 - \hat{q}_{x,a})^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \ln \left[1 + \frac{V(\widehat{^{stoch}q_{x,a}})}{(1 - \hat{q}_{x,a})^2} \right]$$

or

$$\begin{aligned} V(^{stoch}q_{x,a}) &= [Cov(^{stoch}q_{x,a})]^2 \times [E(^{stoch}q_{x,a})]^2 \\ V(\widehat{^{stoch}q_{x,a}}) &= [Cov(\widehat{^{stoch}q_{x,a}})]^2 \times [E(\widehat{^{stoch}q_{x,a}})]^2 = [Cov(\widehat{^{stoch}q_{x,a}})]^2 \times \hat{q}_{x,a}^2 \end{aligned}$$

L'estimation par la méthode des moments du paramètre de dispersion de la loi normale est :

$$\hat{\sigma}^2 = \ln \left(1 + \left[\widehat{CoV}(q_{x,a}) \right]^2 \left(\frac{\hat{q}_{x,a}}{(1 - \hat{q}_{x,a})} \right)^2 \right)$$

Annexe 3 : Article L1226-1 du code du travail

La référence à cette annexe se situe à la page 13 au 1.1.4 4.2.2 du mémoire.

Tout salarié ayant une année d'ancienneté dans l'entreprise bénéficie, en cas d'absence au travail justifiée par l'incapacité résultant de maladie ou d'accident constaté par certificat médical et contre-visite s'il y a lieu, d'une indemnité complémentaire à l'allocation journalière prévue à l'article L. 321-1 du code de la sécurité sociale, à condition :

1° D'avoir justifié dans les quarante-huit heures de cette incapacité ;

2° D'être pris en charge par la sécurité sociale ;

3° D'être soigné sur le territoire français ou dans l'un des autres Etats membres de la Communauté européenne ou dans l'un des autres Etats partie à l'accord sur l'Espace économique européen.

Ces dispositions ne s'appliquent pas aux salariés travaillant à domicile, aux salariés saisonniers, aux salariés intermittents et aux salariés temporaires.

Un décret en Conseil d'Etat détermine les formes et conditions de la contre-visite mentionnée au premier alinéa.

Le taux, les délais et les modalités de calcul de l'indemnité complémentaire sont déterminés par voie réglementaire.

Annexe 4 : Article A212-9 du code de la Mutualité

La référence à cette annexe se situe à la page 23 au 2.1.1 du mémoire.

Les provisions techniques des prestations d'incapacité et d'invalidité sont la somme :

1° Des provisions correspondant aux prestations d'incapacité de travail à verser après le 31 décembre de l'exercice, au titre des sinistres en cours à cette date majorées des provisions dites pour rentes en attente relatives aux rentes d'invalidité susceptibles d'intervenir ultérieurement au titre des sinistres d'incapacité en cours au 31 décembre de l'exercice ;

2° Des provisions correspondant aux prestations d'invalidité à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres d'invalidité en cours à cette date ;

Le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité de travail et d'invalidité est effectué à partir des éléments suivants :

1° Les lois de maintien en incapacité de travail et invalidité indiquées en annexe au présent article.

Toutefois, il est possible pour une mutuelle et union d'utiliser une loi de maintien établie par ses soins et certifiée par un actuaire indépendant de cette mutuelle et union, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaires reconnues par l'Autorité de contrôle mentionnée à l'article L. 510-1 du code de la mutualité ;

2° Un taux d'actualisation qui ne peut excéder 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur base semestrielle, sans pouvoir dépasser 4,5 %.

Annexe 5 : Définitions des propriétés éventuelles d'un estimateur

La référence à cette annexe se situe à la page 71 au 4.5.7.1 du mémoire.

1. Estimateur asymptotiquement gaussien :

Si T_n est un estimateur asymptotiquement gaussien de θ alors

$$\sqrt{n} (T_n - \theta) \xrightarrow{\text{loi}} N_p(0_p, \Sigma)$$

Où Σ est la matrice de variance-covariance asymptotique de T_n .

2. Estimateur convergent :

T_n est un estimateur convergent de θ si

$$T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$$

C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|T_n - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par exemple, si T_n est estimateur sans biais de θ ($E(T_n) = \theta$) et que $V(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors T_n est estimateur convergent de θ .

Si T_n est estimateur asymptotiquement sans biais de θ ($E(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$) et que $V(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors T_n est estimateur convergent de θ .

3. Estimateur de Maximum de Vraisemblance (EMV) :

L'Estimateur de Maximum de Vraisemblance est défini par $\widehat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L_n(X_1, \dots, X_n, \theta)$.
 $L_n(X_1, \dots, X_n, \theta)$ est la vraisemblance du modèle de dimension n.

On cherche θ tel que $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L_n(X_1, \dots, X_n, \theta)) = 0$

On vérifie que $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L_n(X_1, \dots, X_n, \widehat{\theta}_n)) < 0$

Annexe 6 : Démonstration de la variance de l'estimateur de la fonction de maintien $\hat{S}^{j,x}(t)$

La référence à cette annexe se situe à la page 71 au 4.5.7.2 du mémoire.

On dispose de r_i sinistres incapacité d'âge à la survenance appartenant à la classe c et d'ancienneté i jours dans l'état incapacité.

Soit la variable P_k telle que :

$$P_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ assuré en incapacité depuis } i \text{ jours appartient à la classe c se maintient.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si P_k suit une loi de Bernoulli d'espérance p_i et de variance $p_i(1 - p_i)$ alors d'après le théorème central limite, on a :

$$\frac{\sum_{k=1}^{r_i} P_k - r_i p_i}{\sqrt{r_i \times p_i(1 - p_i)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

D'où

$$\frac{\sqrt{r_i}(\hat{p}_i - p_i)}{\sqrt{p_i(1 - p_i)}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

Avec $\hat{p}_i = \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} P_k$ l'estimateur de la moyenne de la variable P_j . Donc,

$$\sqrt{r_i}(\hat{p}_i - p_i) \xrightarrow{L} N(0, p_i(1 - p_i))$$

D'après la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{r_i}(\ln(\hat{p}_i) - \ln(p_i)) \xrightarrow{L} N(0, p_i(1 - p_i) \times \frac{1}{p_i^2})$$

Ainsi,

$$V(\sqrt{r_i} \times \ln(\hat{p}_i)) \approx \frac{(1 - p_i)}{p_i}$$

Alors,

$$V(\ln(\hat{p}_i)) \approx \frac{(1 - p_i)}{p_i \times r_i}$$

Enfin,

$$V(\ln(\hat{p}_i)) \approx \frac{\hat{q}_i}{(1 - \hat{q}_i) \times r_i}$$

On en déduit que

$$\hat{V}(\ln(\hat{S}(t))) \approx \sum_{i \leq t} \frac{\hat{q}_i}{(1 - \hat{q}_i) \times r_i}$$

Puisque $\hat{S}(t)$ est un estimateur asymptotiquement gaussien alors on applique la méthode delta.
On en déduit :

$$\hat{V}(\hat{S}(t)) \approx \hat{S}(t)^2 \sum_{i=0}^t \frac{\hat{q}_i}{(1 - \hat{q}_i) \times r_i}$$

En reprenant les mêmes notations que dans le mémoire, on a :

$$\hat{V}(\hat{S}^{j,x}(t)) = \hat{S}^{j,x}(t)^2 \sum_{s=1}^t \frac{d^{j,x}(s)}{r^{j,x}(s)(r^{j,x}(s) - d^{j,x}(s))}$$

Avec :

- j représentant l'année calendaire.
- x qualifiant la tranche d'âge.
- t variant de 0 à 1 096 jours.
- $d^{j,x}(s)$ représentant le nombre de sorties à l'instant s.
- $r^{j,x}(s)$ traduisant l'exposition au jour s.