

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny – 75775 Paris CEDEX 16



MEMOIRE D'ACTUARIAT - Promotion 2008 -

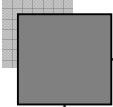
DETERMINATION D'UNE METHODE DE
PROVISIONNEMENT POUR LES CREANCES
DOUTEUSES

Mots clés : Provision pour créances douteuses, Chain Ladder, London Chain, Méthode de De Vylder, Cape Cod, Modèle de Mack, Bootstrap, Modèles GLM, Monte Carlo



Présenté par Claire GUILLAUMIN

Tuteur : M. Ismael HADJI



REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord, je tiens à remercier M. Mohamed AOULAD-HADJ, Directeur Technique et Recherche Produits, pour m'avoir accueilli au sein de sa direction, et m'avoir fait confiance dans la réalisation de ce projet.

J'adresse également mes remerciements à M. Ismael HADJI, mon maître de stage, pour m'avoir accompagné au cours de ces six mois et m'avoir fait partager son expérience. Il m'a aiguillé vers des pistes de réflexion plus larges et m'a donc permis d'approfondir les différentes orientations de mon mémoire.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de la direction technique, et plus particulièrement à Aurélie NICOT pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils. Elle a su porter un regard critique, ouvert et constructif sur mes travaux.

Enfin, je souhaite remercier M. Christian HESS, Responsable de la formation actuariat et Professeur à l'université de Paris-Dauphine et Mme Judith ROUSSEAU d'avoir bien voulu m'apporter leur aide.

Résumé

La problématique de ce mémoire s'inscrit au niveau d'une société de cautionnement, qui intervient sur le marché des particuliers dans le but de garantir des prêts destinés le plus souvent à l'acquisition de biens immobiliers. En cas de défaut de l'emprunteur, la société s'engage à rembourser le prêt à l'établissement financier et ce, contre le paiement d'une prime. Cependant, en cas de sinistre, la caution se trouve alors subrogée dans les droits du créancier, c'est-à-dire que le droit du prêteur d'être remboursé est transmis à la caution qui peut à son tour se faire rembourser par l'emprunteur. La société va donc tenter de recouvrer tout ou partie de la créance. Une provision pour créances douteuses doit être constituée à partir du moment où le recouvrement apparaît incertain, c'est-à-dire lorsque la créance présente un risque probable de non-remboursement. L'enjeu de ce mémoire réside donc dans la détermination d'une méthode statistique de projection des flux de recouvrement. Le montant de recouvrement ultime espéré permet ensuite de définir le montant à constituer des provisions pour créances douteuses.

Cependant, contrairement à une problématique classique de projection de triangles de charges de sinistre, ici le montant de sinistre est connu à l'avance et les montants cumulés de recouvrement projetés ne doivent pas dépasser ce montant. De plus, par mesure de prudence nous avons considéré que la totalité du sinistre ne pouvait pas être récupéré et avons de ce fait déterminé des seuils pour le taux de recouvrement, inférieurs à 100%.

Dans un premier temps, plusieurs méthodes déterministes ont été testées. La méthode de Chain Ladder, largement utilisée dans le milieu professionnel, nous a servie de référence. Les méthodes de Cape Cod, des moindres carrés de De Vylder ainsi que des variantes de la méthode de Chain Ladder ont été retenues. Cependant l'ensemble de ces méthodes ne permettent pas le respect de la contrainte. En effet, la dynamique des taux de recouvrement diffèrent très largement selon les générations. De ce constat est née une nouvelle méthode, dépendant uniquement du taux de recouvrement précédent. Cette méthode par tranche de recouvrement présente en effet l'avantage de catalyser l'évolution de l'espoir de recouvrement et d'appliquer la contrainte, non pas au moment de la projection du triangle, mais directement au niveau des coefficients de passage. Cette technique a ensuite été étendue en tenant compte également du délai de règlement.

Dans un second temps, trois critères de validation ont été mis en place afin de tester la fiabilité des méthodes déterministes. Ils permettent respectivement de tester la fiabilité des projections à court terme (sur une période) et à long terme (sur l'horizon total) ainsi que d'évaluer leur pouvoir prédictif en projetant la diagonale à partir du triangle vu en N-1.

La dimension stochastique paraît alors nécessaire dans le contexte actuel de la réforme Solvency 2. Le modèle de Mack a été étudié, et adapté à la présence de la contrainte sur le taux de recouvrement. L'utilisation des modèles GLM a ensuite permis de donner une dimension stochastique au modèle de Chain Ladder et au modèle des moindres carrés de De Vylder, en

utilisant respectivement une distribution de Poisson et une distribution normale. Nous avons également confronté ces modèles à la loi Gamma. Enfin, nous avons adapté la modélisation GLM afin de modéliser la méthode par tranche. Pour chacun de ces modèles, l'utilisation de la méthode Delta nous a permis de construire un intervalle de confiance autour du montant ultime de recouvrement espéré. De même, plusieurs techniques d'approximation de la distribution, notamment l'approximation Normal Power, ont servi à estimer les quantiles de la distribution de l'espoir de recouvrement. Dans le même but, nous avons également utilisé les techniques de bootstrap sur les résidus de Pearson.

Enfin, en associant à la technique de bootstrap l'emploi des techniques de Monte Carlo nous avons, à partir des triangles de facteurs de développement, déterminé une méthode stochastique permettant de représenter la distribution de l'espoir de recouvrement.

Abstract

This survey takes place in a company of credit suretyship and financial guarantees, which intervenes with private individuals to guarantee real estate loans. If the borrower can't repay his loan, the company makes a commitment to pay off the loan to the financial institution. In this case, the rights of the creditor are subrogated to the company; it means that the right of the lender to be paid off is passed on to the surety company which should in turn be reimbursed by the borrower. The company will therefore seek to recover all or a part of the debt. A reserve for bad debt has to be created where there is a probable risk that the outstanding debt may not be refunded. The goal of this report is to define a statistical method to estimate future recovery flows. The ultimate expected cumulative recovery allows us to define the amount of bad debt reserves.

However, contrary to the classic scenario of loss run-off projection, the ultimate damage cost is known in advance and cumulative repayments will not exceed this amount. Furthermore, as a precaution, we considered that the totality of the debt couldn't be recovered. So, a threshold, lower than 100 %, has been fixed to limit the rate of recovery development.

At first, several deterministic methods were tested. The method of Chain Ladder, widely used in the professional environment, served as reference. The method of Cape Cod, the least squares estimation of De Vylder and variants of the Chain Ladder method were used. However, none of these approaches allowed the threshold to be respected. Indeed, the dynamics of recovery rates differ based on the generations. Consequently, a new method was created, depending only on the previous rate of recovery. This method has the advantage to catalyse the evolution of the expected recovery and allow applying the constraint directly on the development factors. Then, this technique was widened by taking into account the delay of payment.

Secondly, three criteria of validation were set up to test the reliability of the deterministic methods. They allow respectively to test the reliability of the models, both in the short-term and in the long-term, and to test their predictive power.

Finally, the stochastic nature seems necessary in the current context of the reform Solvency 2. The model of Mack was studied and adapted to allow the application of the constraint on the rate of recovery. The use of generalised linear models gives a stochastic dimension to the model of Chain Ladder and to the model of the least squares estimation of De Vylder, by using respectively a Poisson distribution and a normal distribution. We also confronted these models with the Gamma distribution. Finally, we have adapted the GLM to model the method by recovery-bracket. The Delta method allowed us to build a confidence interval for the amount of expected recovery. Also, several techniques, mainly the Normal Power approximation, have been used to estimate percentiles of the expected recovery distribution. Furthermore, with the same purpose, we used bootstrap techniques on unscaled Pearson residual. In addition, using the Monte Carlo method we have also determined, from the development factors triangles, a stochastic method allowing us to represent the distribution of the expected recovery.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	1
RESUME – SUMMARY.....	2
INTRODUCTION	8
<u>Chapitre 1</u> : CADRE GENERAL : L'ASSURANCE DE CREDIT CAUTION	9
I. LE MARCHÉ DU CREDIT-CAUTION	9
1. Principe du cautionnement.....	9
2. Brève présentation de Natixis Garantie	9
3. Description du contexte	10
a. Gestion du contentieux	10
b. Politique de provisionnement	11
c. Quelques chiffres clés	13
II. DEFINITION DE LA PROBLEMATIQUE	14
1. Description du sujet.....	14
2. Une problématique ancrée dans une restructuration des règles de comptabilité.....	14
a. Modification du bilan.....	14
b. Modification du compte de résultat.....	15
3. Une problématique au cœur de la réforme Solvency II.....	17
a. Le projet de réforme Solvency II.....	17
b. Impact sur l'évaluation des provisions techniques	18
4. ...qui s'inscrit aussi au niveau de la réforme Bâle II.....	19
<u>Chapitre 2</u> : ANALYSE DU PORTEFEUILLE ET SEGMENTATION	20
I. DESCRIPTION DES DONNEES.....	20
1. Constitution de la base d'étude	20
2. Notations utilisées et définitions.....	20
3. Analyse descriptive du portefeuille contentieux et segmentation.....	21
a. Analyse du taux de recouvrement	21
b. Etude de la sortie de contentieux.....	23
c. Analyse du solde comptable par type de poste	24
d. Segmentation par type de prêts	25
II. CONTRAINTES A RESPECTER	27

Chapitre 3 : APPROCHE DETERMINISTE DU PROVISIONNEMENT 28

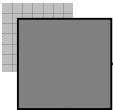
I. LA METHODE DE REFERENCE : CHAIN LADDER.....	28
1. Présentation du modèle.....	28
2. Résultats obtenus.....	29
a. Vérification graphique de l'hypothèse.....	29
b. Application de Chain Ladder au triangle des données.....	29
3. Limites de cette approche.....	30
4. Variantes de cette méthode.....	31
a. Variantes de la méthode de calcul des coefficients de passage.....	31
b. Méthodes de lissage des coefficients de passage.....	32
II. LONDON CHAIN.....	32
1. Présentation du modèle.....	32
2. Application au triangle de passage en perte.....	33
III. CAPE COD	34
1. Présentation du modèle.....	34
2. Résultats obtenus.....	36
3. Limites de cette approche.....	36
IV. METHODE DES MOINDRES CARRES DE DE-VYLDER.....	37
1. Présentation du modèle.....	37
2. Résultats obtenus.....	38
V. CONSTRUCTION D'UNE METHODE « PAR TRANCHES »	39
1. Présentation du modèle.....	39
2. Résultats obtenus.....	40
3. Extensions de la méthode par tranche.....	42

Chapitre 4 : VALIDATION DES MODELES DETERMINISTES 45

I. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE PAR LA PROJECTION DES RECOUVREMENTS A COURT TERME	45
1. Description de la méthode.....	45
2. Résultats.....	46
II. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE DES PROJECTIONS DE RECOUVREMENT A LONG TERME	48
1. Description de la méthode.....	48
2. Résultats.....	48
III. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE PAR LES PROJECTIONS DES TAUX DE RECOUVREMENTS DE L'ANNEE N A PARTIR DE L'ANNEE N-1	50
1. Description de la méthode.....	50
2. Résultats.....	50
IV. SYNTHESE DES PREVISIONS DE L'ESPOIR DE RECOUVREMENT.....	51

Chapitre 5 : APPROCHES STOCHASTIQUES 52

I. MODELE STOCHASTIQUE STANDARD : LE MODELE DE MACK.....	52
1. Présentation du modèle.....	52
2. Erreur quadratique moyenne	54
3. Construction d'un intervalle de confiance : hypothèse d'une distribution log-normale des réserves	56
4. Résultats obtenus	57
5. Test d'indépendance.....	58
II. MODELISATION GLM.....	61
1. Présentation du modèle.....	61
a. Composantes du modèle	61
2. Spécification des modèles testés.....	63
a. La version stochastique du modèle de Chain Ladder	63
b. La version stochastique du modèle de De Vylder.....	64
c. Modélisation par une loi Gamma.....	64
3. Synthèse des résultats	65
a. Estimation des paramètres	65
b. Résidus et validation du modèle	65
c. Projection des triangles et application de la contrainte.....	66
d. Définition des moments de l'espoir de recouvrement	67
e. Risque d'estimation par la méthode Delta.....	68
f. Approximation de la distribution et quantiles.....	70
4. Modélisation de la méthode par tranche.....	73
a. Présentation du modèle	73
b. Paramètres et résidus du modèle	75
c. Espoir de recouvrement.....	76
d. Limites de cette modélisation.....	76
III. APPROCHE NON PARAMETRIQUE : LE BOOTSTRAP.....	77
1. Présentation de la technique de Bootstrapping	77
a. Application du Bootstrap aux résidus de Pearson.....	77
b. Intervalles de confiance des modèles.....	78
IV. SIMULATION PAR MONTE CARLO DES FACTEURS DE DEVELOPPEMENT	80
1. Adéquation des facteurs de développement à une loi log-normale.....	80
2. Simulation du triangle inférieur par Monte Carlo	81
CONCLUSION.....	85
LISTE DES FIGURES	89
LISTE DES TABLEAUX.....	90
ANNEXES.....	92
BIBLIOGRAPHIE.....	99



INTRODUCTION

Le marché de la caution et de la garantie financière appartient à une branche particulière de l'assurance non vie. Le cautionnement est un contrat accessoire au contrat principal conclu entre l'établissement financier et le souscripteur, qui consiste à protéger le créancier contre l'insolvabilité du débiteur. En effet, lors de la souscription d'un prêt, une société de cautionnement s'engage auprès de l'emprunteur, contre le paiement d'une prime, à se substituer à celui-ci en remboursant son prêt à l'établissement financier en cas de défaillance de ce dernier. Cependant en cas de défaut, la caution se trouve alors subrogée dans les droits du créancier, c'est-à-dire que le droit du prêteur d'être remboursé est transmis à la caution qui peut à son tour se faire rembourser par l'emprunteur.

Après le règlement d'un sinistre, la société de cautionnement tente donc de récupérer la totalité du montant du sinistre, c'est ce qu'on appelle le recouvrement. Une provision pour créance douteuse doit être constituée à partir du moment où le recouvrement apparaît incertain (en totalité ou en partie), c'est-à-dire lorsque la créance présente un risque probable de non-recouvrement. La provision pour créance douteuse est donc basée sur la projection de l'espoir de recouvrement et se définit comme la différence entre le solde comptable des créances d'une part, et l'espoir de recouvrement déterminé statistiquement, d'autre part.

L'objectif de ce mémoire consiste à déterminer une méthode de provisionnement des créances douteuses à partir de la projection des flux de recouvrement.

Dans un premier temps, nous présenterons l'activité de cautionnement afin de mettre en évidence les particularités de ce marché et plus spécifiquement, nous détaillerons le mode de fonctionnement de la SACCEF pour mieux saisir l'enjeu de ce mémoire. Cette approche vient s'ancrer dans une nouvelle définition des règles comptables. En effet, la société souhaite réorganiser sa comptabilité selon un modèle assuranciel, où la détermination des prévisions de recours constitue l'un des postes les plus importants.

Une analyse descriptive détaillée du portefeuille contentieux, nous permettra dans un second temps de réduire le champ de l'étude afin d'homogénéiser et d'optimiser les résultats.

Ensuite, nous présenterons différentes méthodes déterministes classiques (Chain Ladder, Cape Cod, Moindres carrés de De Vylder) permettant l'évaluation des provisions pour créances douteuses. Nous testerons également une nouvelle méthode basée sur la détermination de coefficient de passage dépendant du taux de recouvrement déjà atteint.

Enfin, dans le contexte actuel de la mise en place de la nouvelle réforme Solvency 2, la mise en œuvre d'une approche stochastique du provisionnement s'avère essentiel. Dans cette optique, nous confronterons plusieurs approches stochastiques. Nous adapterons notamment la méthode de Mack aux contraintes intrinsèques relatives aux données. Puis nous modéliserons la dynamique des recouvrements via les modèles linéaires généralisés et utiliserons des techniques de Bootstrap afin d'obtenir un intervalle de confiance autour du montant ultime de recouvrement espéré. L'approche GLM sera en outre utilisée afin de modéliser la méthode par tranche de recouvrement. Enfin, l'emploi des simulations par Monte Carlo complètera cette vision.

I. LE MARCHE DU CREDIT-CAUTION

1. Principe du cautionnement

En France, le cautionnement était initialement considéré comme une opération de crédit, réservée aux banques et aux sociétés financières. En 1973 cette activité a été ouverte aux compagnies d'assurance. Les banques de réseau se sont progressivement désengagées des activités de cautionnement qui sont désormais principalement exercées par des sociétés spécialisées. Le crédit-caution fait partie de la branche d'assurance non-vie (Branche 15 : Caution et Branche 16 : Pertes pécuniaires diverses). La caution ou garantie financière est un acte par lequel le garant s'engage à honorer l'exécution ou le respect des termes d'un contrat en cas de défaillance du débiteur (personne cautionnée) vis-à-vis du créancier (bénéficiaire de la caution) comme l'illustre le graphique suivant.

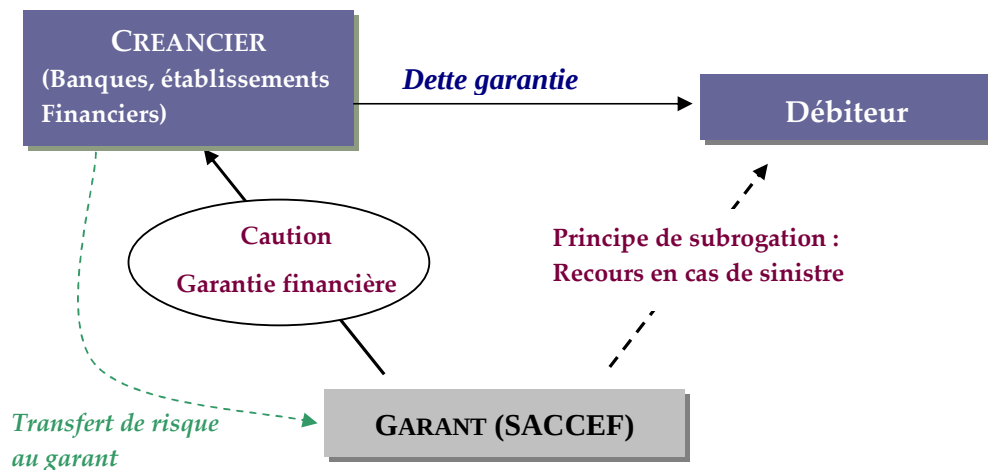


Figure 1. 1 : Mode de fonctionnement du cautionnement

Le principal objectif du cautionnement est donc de fournir aux créanciers la garantie de paiement d'une dette. Cela sécurise les transactions en apportant de la confiance dans le circuit économique.

2. Brève présentation de Natixis Garantie

Les acteurs du marché relèvent de 2 statuts, d'une part les banques et les sociétés de cautions mutuelles et d'autre part les compagnies d'assurances.

Natixis Garanties, filiale du groupe Natixis, est une société commune des groupes Caisse d'Epargne et Banque Populaire. Elle détient trois entités juridiques : la SACCEF, CEGI et SOCAMAB

Assurances. Ces trois structures juridiques ont le statut de compagnie d'assurances. Chacune de ces entités se caractérise par un marché différent, cependant ces entités devraient fusionner prochainement.

- La SACCEF (Société d'Assurance des Crédits des Caisses d'Epargne de France) représente la branche « retail » de Natixis Garanties. Elle intervient essentiellement sur le marché des particuliers sous forme de cautionnement solidaire en garantie des prêts destinés à l'acquisition de biens immobiliers affectés principalement à l'habitation (principale, secondaire ou locative) quelle que soit la forme juridique de l'investissement. Elle permet notamment aux particuliers de s'affranchir des coûts de la prise d'hypothèque ou du privilège de prêteur de deniers.
Elle intervient également dans le cadre d'opérations spécifiques telles que celles liées à la défiscalisation. Une partie de son activité sur ce marché des particuliers concerne les prêts à la consommation. La SACCEF intervient également sur le marché des professionnels sous forme de cautionnement simple généralement limité à une partie du crédit, en complément des garanties classiques, pour des financements d'investissements (besoin en fonds de roulement, croissance externe, transmission...), des reprises ou des créations d'entreprises. Enfin la SACCEF cautionne également en caution simple, des acteurs de l'économie sociale et du logement social qui concernent principalement le secteur sanitaire et médico-social ainsi que l'enseignement privé.
- La CEGI s'est spécialisée dans la caution des professions de l'immobilier et de la construction. Elle constitue donc la branche « corporate » de la société. Depuis la loi Hoguet de 1970, les personnes souhaitant exercer des activités de gestion et de transaction immobilières doivent, parmi d'autres obligations, souscrire une garantie financière. L'offre CEGI s'adresse donc notamment aux constructeurs de maisons individuelles, aux promoteurs immobiliers et aux agents immobiliers. La CEGI s'adresse également aux entreprises du bâtiment soumises aux cautions de marchés, et proposent des cautions pour l'industrie et le commerce au travers des « droits d'accises » sur les vins et alcools et des taxes douanières pour les importateurs.
- SOCAMAB Assurance s'adresse principalement aux administrateurs de biens et aux agents immobiliers, en matière de responsabilité civile professionnelle, de protection juridique et de responsabilité du dirigeant.

3. Description du contexte

La problématique de ce mémoire s'inscrit au niveau de l'entité SACCEF et s'oriente plus spécifiquement vers le marché des particuliers.

a. Gestion du contentieux

Sur ce marché, la SACCEF intervient auprès de l'établissement de crédit en tant que caution solidaire et se place ainsi en concurrent direct de l'hypothèque. Elle fait payer une cotisation correspondant à une prime d'assurance dont la tarification est fonction de l'objet du prêt (acquisition dans le neuf ou l'ancien, rachat de prêt, financement de travaux), de son montant, de sa durée et du taux d'apport personnel.

Si l'emprunteur cautionné par la SACCEF présente plus de trois échéances impayées, l'établissement prêteur prononce la déchéance du terme pour le prêt et peut solliciter la SACCEF pour rembourser la dette de l'emprunteur.

Le dossier entre alors en phase dite de pré-contentieux ou de « sinistres à payer ». Il existe 3 modes de sortie de cette phase :

- le remboursement par l'emprunteur de ses échéances impayées ;
- le refus du dossier prononcé par la SACCEF (par exemple lorsque la déchéance du terme a été prononcée au-delà du 4^{ème} impayé ou lorsque certaines pièces du dossier sont manquantes ou incohérentes) ;
- le remboursement par la SACCEF, à l'établissement de crédit, des 4 premières échéances impayées et du Capital Restant Dû (CRD) à la déchéance du prêt.

Dans le troisième cas de figure, la SACCEF se trouve alors subrogée dans les droits du créancier, c'est-à-dire que le dossier entre alors dans la phase de contentieux pendant laquelle la SACCEF va tenter de recouvrer auprès de l'emprunteur tout ou partie de la somme payée à l'établissement de crédit.

Néanmoins, dès lors qu'un contrat est géré en contentieux, il produit des intérêts de retard calculés chaque année sur la base du CRD et engendre aussi des frais annexes (ou *accessoires*) qui viennent augmenter le montant de la créance. Les remboursements du client s'imputent en priorité sur les intérêts, puis sur le principal (CRD) et enfin sur les accessoires. Si la totalité de la créance n'a pas pu être recouvrée, le montant restant dû est alors passé en perte.

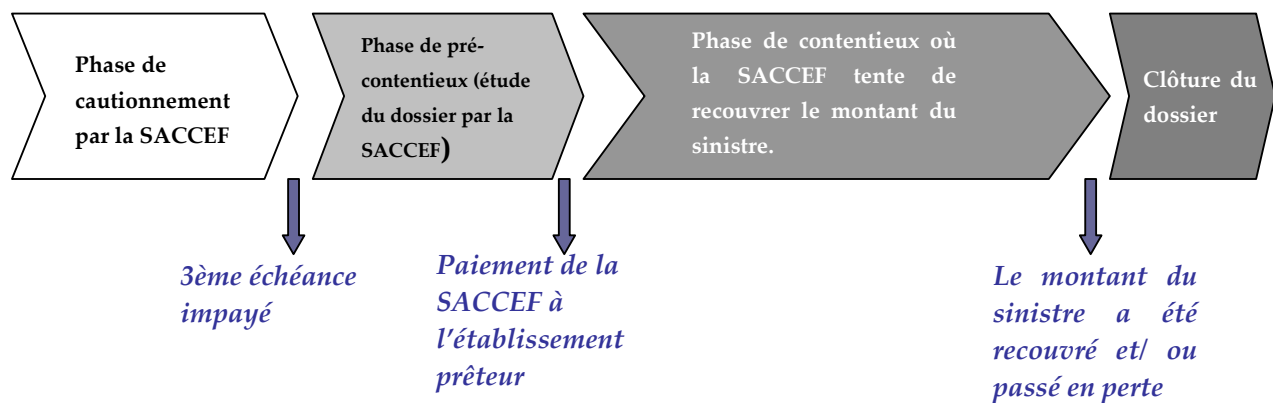


Figure 1. 2 : Déroulement d'un sinistre

b. Politique de provisionnement

- *Provision pour sinistres à payer :*

La provision pour sinistres à payer est calculée à partir de l'étude des dossiers dont la prise en charge est en cours d'analyse, et qui n'ont pas, à la date d'arrêté des comptes, fait l'objet d'un règlement auprès de l'établissement de crédit.

Les taux de provisionnement sont issus d'une analyse statistique des motifs de sortie (régularisation par remboursement des échéances impayées, refus de prise en charge, paiement) et des facteurs influents sur le taux de paiement. Ainsi, pour les dossiers déclarés dans les 3 mois qui précèdent l'arrêté un taux de provisionnement de 85% est appliqué et pour ceux arrivés depuis plus de 3 mois

le taux est de 75%. Cette segmentation traduit le fait que l'augmentation de la durée en phase SAP (« Sinistres à payer ») diminue la probabilité d'indemnisation.

- Provision pour créances douteuses

La provision pour créances douteuses intervient dans la phase de contentieux, une fois que le sinistre a été réglé. Le montant de la provision pour créances douteuses est déterminé comme la différence entre le solde comptable et la valeur des flux de recouvrement attendus. La provision correspond à la constatation comptable de la dépréciation des actifs constitués par les créances à recouvrer.

Jusqu'en 2006, la provision pour créances douteuses était déterminée selon la méthode dossier/dossier.

Suite au règlement, le dossier est pris en charge par un gestionnaire contentieux qui enregistre un espoir de recouvrement, par défaut à zéro. L'espoir de recouvrement dépend du type de garanties dans le dossier, de la solvabilité du débiteur, de l'avancement de la procédure contentieuse, des recouvrements déjà effectués... Cet espoir de recouvrement constitue la base du calcul de la provision à constater comptablement sur le dossier. En effet, la provision pour créances douteuses à une date t est obtenue par différence entre le montant de la créance contentieuse à une date t (le solde comptable) et l'espoir de recouvrement. En comptabilité (normes françaises), le montant total de provision pour créances douteuses est égal à la somme des montants individuels de provision sur chaque dossier géré en contentieux en t .

Cependant, la provision dossier par dossier surestime le montant des pertes réellement attendues. En effet, dans les premiers mois suivant l'arrivée du dossier, le gestionnaire n'inscrit aucun espoir de recouvrement c'est-à-dire qu'il provisionne à 100%.

En 2006 une nouvelle approche concernant l'estimation des espoirs de recouvrement pour créances douteuses a été élaborée. En effet, un rapprochement des méthodes French/IFRS a été réalisé en 2006 modifiant l'estimation des recours.

Une méthode statistique projette pour chaque génération de contentieux les flux attendus de recouvrement et les positionne dans le temps. Afin de reconstituer les flux de recouvrement et les flux de passage en perte attendus, les échéanciers des taux de recouvrements cumulés et des taux de passage en perte cumulés sont constitués par génération d'entrée en contentieux avec une périodicité semestrielle. Cette approche permet d'attribuer un espoir de recouvrement à chaque génération de contentieux, palliant ainsi au manque d'information des rédacteurs à l'ouverture des contrats. Le montant de la provision est égal, pour chaque génération de contentieux, à la différence entre le solde comptable des créances d'une part, et l'espoir de recouvrement déterminé statistiquement, d'autre part. Ce montant provisionné s'ajuste à chaque variation de l'un ou l'autre des deux termes.

Les contrats tombés en contentieux avant 1997 sont provisionnés à 100%. Cette catégorie de contrat, ne produisant en effet que peu de flux de récupération, est exposée à d'importants passages en perte. Leur provisionnement à 100% permet de neutraliser l'impact des passages en perte sur la charge de sinistre.

- Politique de passage en perte

Les dossiers sont passés en pertes lorsque l'espoir de recouvrement est nul, c'est-à-dire lorsque les créances n'ont plus de potentiel de recouvrement ou lorsque les recouvrements ne couvrent pas les intérêts générés. Les passages en pertes sont soumis au système délégataire. En

fonction des montants, les dossiers sont validés par le responsable juridique et contentieux et par le comité des provisions. La Direction Technique étudie systématiquement l'impact des décisions des passages en perte sur la charge de sinistre.

c. Quelques chiffres clés

Le tableau suivant récapitule les chiffres clés, vus à décembre 2007, sur le marché des particuliers :

Chiffre d'affaires (en k€)	108 352
<i>Répartition par type de prêts</i>	
Prêts Conso. & Etudiant	0,4%
Prêts Relais	2,6%
Prêts Immobilier	97,1%
Encours (en M€)	39 835
Sinistralité (en k€)	
Sinistres déclarés	23 454
Sinistres décaissés	14 558
Recouvrements (yc sur créances amorties)	10 675
Variation de PSAP	-2 063
Variation de provision pour créances douteuses	1 527
Recouvrements sur créances amorties	303
Intérêts facturés & Accessoires	1 815
Passage en Pertes	-6 008
Variation Provision FFG	555
Frais recouvrement	-546
Charge de sinistres Brute de Réassurance	-4418
Charge de sinistres Nette de Réassurance	-3200

Tableau 1. 1 : Chiffres clés de la SACCEF pour l'année 2007

Les informations concernant la sinistralité de l'année 2007 sont atypiques. En effet, l'année 2007 a été marquée par une modification de la règle de provisionnement des créances douteuses (passage de la méthode dossier/dossier à une méthode déterministe) qui a conduit à une forte diminution de la provision pour créances douteuses. Par ailleurs, un plus grand nombre de dossiers a été passé en perte. Pour avoir une vision plus fidèle de la répartition de chaque poste dans la charge de sinistre, nous allons présenter les chiffres prévisionnels pour 2008. Ces données illustrent bien le fait que la variation de la provision pour créance douteuse constitue le poste le plus important de la charge de sinistre.

Données prévisionnelles pour 2008

Variation de PSAP	-657
Variation de provision pour créances douteuses	-9 924
Recouvrements sur créances amorties	-
Intérêts facturés & Accessoires	3 738
Passage en Pertes	-1 064
Variation Provision FFG	-815
Frais recouvrement	-
Charge de sinistres Brute de Réassurance	-8 722

Tableau 1. 2 : Charge de sinistre prévisionnelle de la SACCEF pour l'année 2008

II. DEFINITION DE LA PROBLEMATIQUE

1. Description du sujet

Dans sa gestion des risques, l'enjeu pour la SACCEF est double : elle doit d'une part évaluer la probabilité de défaut de ses clients afin de minimiser le nombre d'entrées en contentieux et d'autre part, le cas échéant être capable d'estimer le taux de recouvrement espéré sur une créance contentieuse afin de constituer un montant de provision adéquat. C'est ici l'objectif de ce mémoire, qui est de valider une méthode de calcul des provisions pour créances douteuses.

2. Une problématique ancrée dans une restructuration des règles de comptabilité

La problématique s'inscrit dans une restructuration du mode de comptabilité actuel. En effet, la SACCEF était auparavant une société financière. Son mode de comptabilité a donc été hérité du modèle bancaire. Cependant, dans le cadre de la fusion prochaine de la SACCEF avec les deux autres sociétés d'assurance du groupe, CEGI et SOCAMAB Assurance, il est nécessaire d'harmoniser les règles de présentation comptable.

a. Modification du bilan

Actuellement, la provision pour créances douteuses n'est pas inscrite au passif du bilan, comme le sont les provisions techniques dans le mode de comptabilité assurantiel. La provision pour créances douteuses est inscrite dans le poste « Autres créances », et peut être considérée comme une provision pour dépréciation de l'actif. En effet, elle vient se soustraire au montant de la créance douteuse détenue par la société. C'est donc en réalité l'espoir de recouvrement (créance brute – Provision pour créances douteuses) qui est inscrit à l'actif du bilan.

Le schéma suivant illustre de façon synthétique le bilan de la société :

Bilan synthétique de la SACCEF	
Actif	Passif
- Actif Incorporels	- Capitaux propres
- Placements	- Résultat de l'exercice
	- Provisions techniques - Provisions pour primes non acquises - Provisions pour sinistres à payer - Autres Provisions techniques
	- Provisions pour risques et charges
	- Autres dettes
- Part des cessionnaires et rétrocessionnaires dans les provisions techniques	
- Créances - Créances nées d'opérations d'assurance directe - Créances nées d'opérations de réassurance - Autres créances	
- Autres actifs	
- Compte de régularisation actif	- Compte de régularisation passif

Figure 1. 3 : Bilan synthétique de la SACCEF

Dans la nouvelle comptabilité, il est donc envisagé d'inscrire directement l'espoir de recouvrement comme une provision de recours au passif du bilan.

b. Modification du compte de résultat

L'évolution du mode de comptabilité a également une incidence sur le compte de résultat au niveau de la définition de la charge de sinistre.

La charge de sinistre se définit comme la somme des charges de provision et des charges de règlement.

Cependant, la répartition des postes entrant respectivement dans la charge de règlement et dans la charge de provision ne reflètent pas réellement leur intitulé.

Nous allons expliciter le mode de calcul de la charge de sinistre par un exemple concret, en déroulant au préalable un sinistre particulier. Le tableau suivant récapitule les mouvements qui ont lieu sur le dossier, en indiquant les flux, les soldes et les montants de provisions.

	0	1	2	3	4	5	6
PSAP	60	0	0	0	0	0	0
Païement		120					
Intérêt de retard			10	10		8	
Recouvrement					30		84
Pertes							34
Solde en capital		120	120	120	110	110	0
Solde en intérêt et accessoires			10	20	0	8	0
Solde total		120	130	140	110	118	0
Espoir de recouvrement en capital		96	96	96	86	86	0
Espoir de recouvrement en intérêt et accessoires		0	8	16	0	6	0
Espoir de recouvrement total		96	104	112	86	92	0
Provision pour Créances douteuses		24	26	28	24	26	0

Tableau 1. 3 : Exemple de calcul de la provision pour créances douteuses

La charge de sinistre s'articule de la façon suivante :

brute de réassurance

Charge de sinistre cumulée	60	24	16	8	4	-2	6
<i>dont charge des provisions</i>	60	0	-10	-20	-20	-28	-28
PSAP	60	0	0	0	0	0	0
- Intérêt de retard	0	0	10	20	20	28	28
Provision pour frais de gestion							
<i>dont charge des paiements</i>	0	24	26	28	24	26	34
Provision pour créances douteuses	0	24	26	28	24	26	0
Passage en perte	0	0	0	0	0	0	34
Charge de sinistre non cumulée	60	-36	-8	-8	-4	-6	8

Tableau 1. 4 : Décomposition de la charge de sinistre sur le modèle bancaire

On voit alors que les intérêts de retard sont comptabilisés directement dans la charge de provision et que la provision pour créances douteuses entre quant à elle dans le poste des règlements.

Une réorganisation des postes sur un modèle assurantiel permettrait alors de définir la charge de provision comme la différence entre la provision de dépense et la provision de recours et de définir la charge de paiement comme l'écart entre les paiements effectués et les recouvrements encaissés. Le tableau suivant illustre la modification de la règle de calcul :

	0	1	2	3	4	5	6
Païement	0	120	0	0	0	0	0
Provision de dépense	120	0	0	0	0	0	0
Recours encaissés	0	0	0	0	30	0	84
Prévision de recours	60	96	104	112	86	92	0

Charge de sinistre cumulée	60	24	16	8	4	-2	6
<i>dont charge des provisions</i>	60	-96	-104	-112	-86	-92	0
Provisions de dépense	120	0	0	0	0	0	0
- Prévisions de recours	60	96	104	112	86	92	0
<i>dont charge des paiements</i>	0	120	120	120	90	90	6
Paiements (cumulés)	0	120	120	120	120	120	120
- Recouvrements encaissés (cumulés)	0	0	0	0	30	30	114

Charge de sinistre non cumulée	60	-36	-8	-8	-4	-6	8
---------------------------------------	----	-----	----	----	----	----	---

Tableau 1. 5 : Décomposition de la charge de sinistre sur le modèle assurantiel

Par ailleurs, on peut noter que l'exemple précédent met en relief la particularité du marché de la caution, qui réside dans le fait que les charges de provisions sont négatives, puisque contrairement à l'assurance non vie classique, le paiement du sinistre a lieu en totalité dans les jours suivant sa déclaration. Après le paiement, seuls les flux de recours sont attendus (le passage en perte n'étant pas un flux de décaissement mais un abandon de créance).

3. Une problématique au cœur de la réforme Solvency II...

a. Le projet de réforme Solvency II

Solvabilité II (ou Solvency II) est un projet de réforme européenne de la réglementation prudentielle s'appliquant au secteur de l'assurance. Son objectif est d'encourager les organismes à mieux connaître et évaluer leurs risques notamment en adaptant les exigences réglementaires aux risques que les entreprises encourent dans leur activité. Après Solvabilité I qui prévoyait une marge de solvabilité déterminée en fonction de pourcentages sur les primes et les sinistres, la réglementation des assurances passe à des règles plus complexes intégrant le risque, soit par l'application de formules standards, soit par la prise en compte de modèles internes.

Les exigences sont structurées autour de trois piliers :

- Le premier pilier a pour objectif de définir des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Ces seuils deviendront des seuils réglementaires. Deux niveaux de fonds propres seront définis :
 - le MCR qui représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique ;
 - le SCR qui représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle. C'est le capital nécessaire pour ne pas être en ruine à l'horizon de un an avec une probabilité de 99,5%. Le SCR est déterminé soit via une approche standard, soit par la mise en place d'un modèle interne.

- Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives concernant les procédures de surveillance de la gestion des fonds propres de façon à s'assurer que la compagnie est en mesure de calculer et maîtriser ses risques et de veiller à ce qu'elle soit bien capitalisée.
- Le troisième pilier traite de la publication des informations sur lesquels les deux précédents piliers sont basés et qui permettront au public (actionnaires et analystes) et aux autorités de contrôle de juger si l'analyse effectuée est fidèle à la réalité.

b. Impact sur l'évaluation des provisions techniques

Selon l'approche Solvency 2, le passif du bilan d'une société d'assurance peut se synthétiser comme suit :

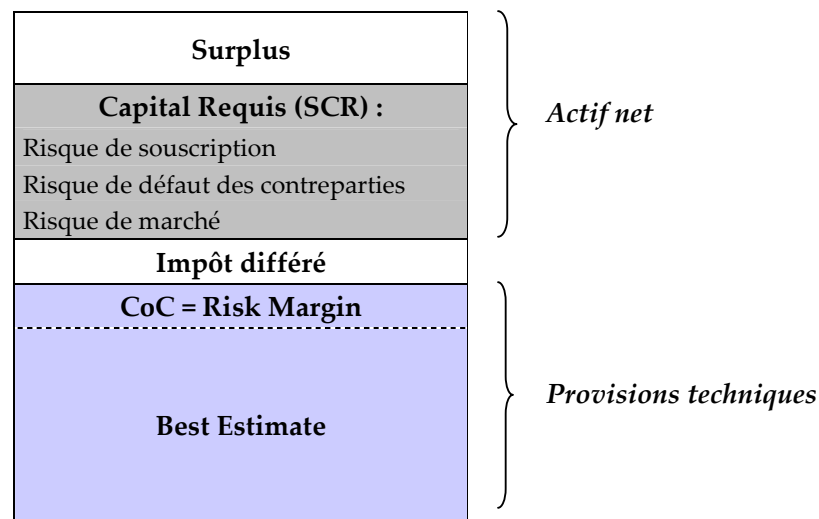


Figure 1. 4 : Représentation schématique du passif d'une compagnie d'assurance

Solvabilité II va introduire un changement dans la détermination des provisions techniques. En effet, la réforme requiert de passer à un environnement méthodologique très encadré et ayant une dimension stochastique. Dans le cadre de ce mémoire, la problématique se situe donc à deux niveaux :

- La mise en place d'une méthode de provisionnement adéquate pour les créances douteuses rentre dans l'évaluation du Best Estimate des provisions techniques. Le « Best Estimate » représente la valeur actuelle probable des engagements futurs liés au run-off des passifs. Le calcul du Best Estimate nécessite l'utilisation d'un modèle de cash flow. L'actualisation s'effectue en utilisant la courbe des taux sans risque. De plus, la dimension stochastique s'avère nécessaire pour la valorisation des provisions techniques par l'introduction de la « Risk Margin » en complément du « Best Estimate ». La « risk Margin » est la quantité complémentaire qui doit être ajoutée au « Best Estimate » pour pouvoir qualifier l'ensemble de « valeur de marché » des provisions. Deux approches ont été considérées pour évaluer cette marge. La première est la méthode CoC (Cost of Capital) qui consiste à déterminer le coût d'immobilisation des fonds propres (au-delà du taux sans risque) en actualisant le « frottement » annuel généré par l'immobilisation du SCR estimé à 6% par an. La seconde méthode était une approche par quantile, cependant le CEIOPS a décidé que seule

l'approche CoC serait retenue sur l'ensemble de la branche non-vie.

- La dimension stochastique peut en outre s'avérer utile au niveau de la détermination de la marge de solvabilité et plus spécifiquement au niveau de l'évaluation du risque de souscription. En effet, le risque de souscription se compose du risque sur les primes et les provisions et du risque de catastrophe. Le risque de provision sert à couvrir deux sources d'incertitudes, d'une part les erreurs d'estimation de la valeur réelle des provisions techniques et d'autre part leurs fluctuations autour de leurs valeurs moyennes. D'après les résultats du QIS4, le risque de souscription non vie représente 43% du SCR. L'appréhension précise de ce risque est donc très importante. Pour déterminer la marge de solvabilité, les sociétés ont deux options, la formule standard ou la construction d'un modèle interne.

4. ...qui s'inscrit aussi au niveau de la réforme Bâle II

S'agissant d'une société d'assurance, la SACCEF n'est pas soumise directement à la nouvelle réglementation issue du comité de Bâle. Toutefois, en tant que garant, elle permet une atténuation du risque de crédit pour les banques qu'elle garantit. Ses partenaires sont donc des sociétés bancaires avec lesquelles elle doit communiquer en matière de LGD (perte en cas de défaut ou Loss Given Default) et de PD (probabilité de défaut).

La perte en cas de défaut mesure la sévérité du défaut, il s'agit d'un indicateur de l'efficacité du recouvrement et du contentieux. Elle correspond au taux de perte constaté en cas de défaillance. Il est donc possible d'établir un parallèle entre la perte en cas de défaut et l'espoir de recouvrement qui nous intéresse. En effet, celui-ci peut-être vu comme le complémentaire de la LGD en ce sens où il représente ce qu'il est possible de recouvrer en cas de défaut.

Cependant le mode de calcul de la perte en cas de défaut requière une méthodologie particulière. Elle se définit comme une perte économique, qui se mesure en prenant en compte tous les coûts directs et indirects liés au recouvrement. Son estimation est basée sur des règles décisionnelles, fondées sur des variables liées aux transactions comme :

- *les caractéristiques de l'emprunteur*
- *les caractéristiques de l'engagement*
- *les caractéristiques spécifiques à chaque banque* (politique interne en matière de recouvrement) ;
- *les facteurs exogènes* (le cycle d'activité)

I. DESCRIPTION DES DONNEES

1. Constitution de la base d'étude

La création des triangles de recouvrement nécessite de pouvoir reconstituer l'ensemble des flux de remboursement et de passage en perte depuis l'origine du sinistre. Les sinistres peuvent remonter à 1971, date de création de la SACCEF. Cependant, les flux de décaissement et d'encaissement nécessaires, ne sont disponibles qu'à partir de 1997. En effet, à cette date, la SACCEF s'est dotée d'un logiciel de gestion des recouvrements, CREDOR, qui permet en particulier de tracer tous les mouvements effectués sur les contrats en contentieux. Au moment de la migration sous CREDOR, seul l'état du stock de contentieux a pu être récupéré, l'ensemble des flux antérieurs, nécessaire à la construction des triangles de liquidation, n'a pu être renseigné.

Les triangles de liquidation utilisés reflètent la dynamique des recouvrements et des passages en perte. La projection des montants de recouvrement et de passage en perte sera faite à partir de données semestrielles. Les projections se feront sur une périodicité de 10 ans au maximum suivant l'année de tombée en contentieux, soit 20 semestres.

Les triangles des montants ainsi que des taux de recouvrement figurent en annexe 1 et 2.

2. Notations utilisées et définitions

Les notations utilisées seront les suivantes :

- i : l'indice des semestres de survénance ($i=0\dots n$).
- j : l'indice des délais de règlement (en semestres) ($j=0\dots n$).
- $C_{i,j}$: le montant de remboursement perçu la $j^{\text{ème}}$ période suivant le semestre de survénance i , on parle de montants incrémentaux.
- $S_{i,j}$: le montant agrégé de recouvrement (resp. $S_{i,j}^{pp}$ pour les montants agrégés de passage en perte) perçu pour des sinistres survenus le semestre i , dans un délai de j périodes.
- $Sin(i)$: le montant des sinistres survenus au cours du semestre i . Ce montant correspond au versement par la SACCEF des 4 mensualités impayées ainsi que du capital restant dû.
- $T_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{Sin(i)}$: le taux de recouvrement (ou de passage en perte) agrégé pour des sinistres survenus le semestre i , au bout de j périodes. Ce taux, considéré sur le poste Capital (ou Principal), ne peut excéder 100%.

- $F_{i,j} = \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$: facteurs de développement (le triangle des facteurs est donné en annexe 3)

Remarque : Les montants incrémentaux et cumulés peuvent être dissociés par postes (Capital, Intérêt ou Accessoires). Par la suite nous ferons la distinction de ces postes en spécifiant (en exposant ou en post fixe) les lettres K, I ou A.

- $Solde_K(i), Solde_I(i), Solde_A(i)$: Montant du solde comptable considéré respectivement sur les postes Capital, Intérêt et Accessoires correspondant au semestre i . Ce montant représente ce qu'il reste à recouvrer du sinistre initial.
- $Solde(i)$: Solde comptable total pour le semestre i .
- R_i^K, R_i^I, R_i^A : L'espoir de recouvrement pour le semestre de survenance i . Ici, $R_i = R_i^K + R_i^I + R_i^A$ ne représente pas directement le montant de provision à constituer, mais le montant que l'on espère recouvrer pour les sinistres survenus en i .
- $R = \sum_{i=0}^n (R_i^K + R_i^I + R_i^A)$: l'espoir de recouvrement total.
- $P_i = Solde(i) - R_i$: Montant de provision pour créances douteuses à constituer pour le semestre i . Le montant correspond à la différence entre ce que l'on espère récupérer et ce qu'il reste à recouvrer. Le montant de provision doit donc couvrir la partie de la créance que l'on estime être perdue.
- $P = \sum_{i=0}^n P_i$: le montant total à provisionner. En réalité, comme nous ne raisonnons que sur les sinistres postérieurs à 1997 et que les sinistres antérieurs sont provisionnés à 100%, le montant total de provision qui sera inscrit dans les comptes sera défini comme :

$$P = \sum_{i=1972}^{1996} (Solde_K(i) + Solde_I(i) + Solde_A(i)) + \sum_{i=1997}^{aujourd'hui} P_i$$

3. Analyse descriptive du portefeuille contentieux et segmentation

La base utilisée est composée d'une part d'un historique de tous les contrats tombés en contentieux depuis 1972 à la date du 31/12/2007, soit de 13 013 contrats, et d'autre part d'une base détaillée contenant l'ensemble des mouvements comptables affectant ces contrats, soit près de 600 000 mouvements.

a. Analyse du taux de recouvrement

L'analyse des taux de recouvrement des dossiers clos permet de rendre compte de la distribution des taux de recouvrement ultime. Le portefeuille contient alors 12 064 dossiers clos, c'est-à-dire dont le solde à la date du 31/12/2007 est nulle. En zoomant sur les dossiers clos postérieurs à 1997, la répartition des taux de recouvrement se révèle avoir un caractère quasiment bimodale :

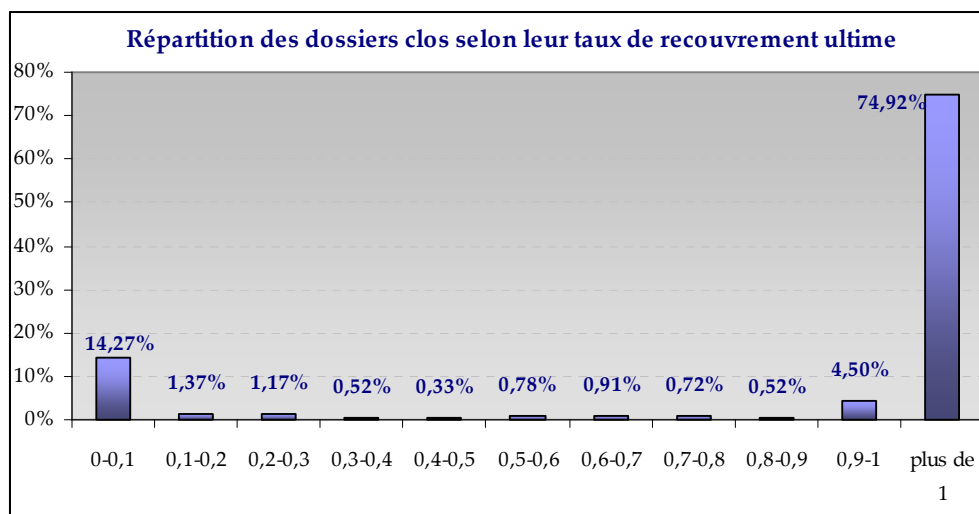


Figure 2. 1 : Répartition des taux de recouvrement ultimes

En effet, plus de 70% des contentieux sont totalement recouvrés (plus de 100%) et parallèlement 14,27% ne le sont quasiment pas (inférieur à 10%). Les taux de recouvrement compris entre 10% et 90% ne représentent que 6% des dossiers contentieux clos.

Plus précisément, la moyenne du taux de recouvrement est de 67,1% tandis que la médiane s'élève à 99,9%.

Le graphe suivant présente l'évolution des taux de recouvrement moyen par année d'entrée en contentieux.

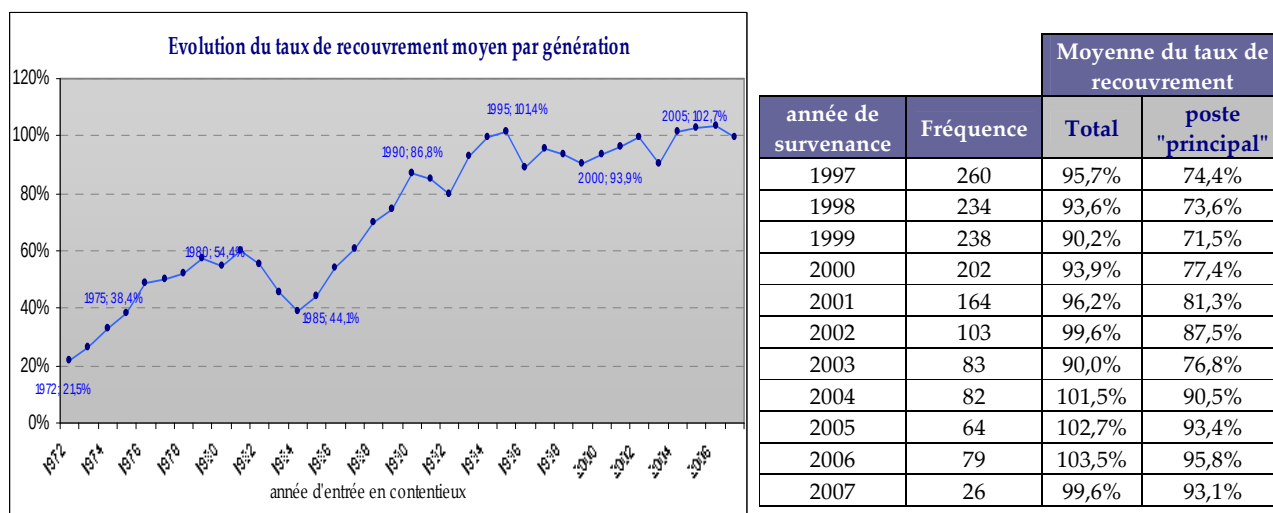


Figure 2. 2 : Evolution du taux de recouvrement moyen par génération

Le taux moyen de recouvrement a très nettement augmenté en fonction de l'année d'entrée en contentieux. Il est depuis 2004 supérieur à 1. Cela signifie que d'une part le capital principal a été remboursé dans sa totalité, mais d'autre part que les intérêts et accessoires ont été également

recouvrés. La colonne « poste principal » précise la part moyenne recouverte uniquement sur le poste capital.

Il est à noter que l'accélération de la moyenne du taux de recouvrement sur les années récentes peut se fonder sur un effet de durée. En effet, les dossiers soldés rapidement sont ceux qui ont été récupérés totalement, suite notamment à la vente d'un bien.

b. Etude de la sortie de contentieux

Le tableau suivant présente le déroulement du nombre de sinistre clos par année de survenance.

Année de survenance	Nbr. de sinistres	Nbr. de sinistres clos	Pct. de sinistres clos	Nombre de dossiers clos au bout de ... ans										
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1997	293	260	88,74%	27	54	39	31	21	17	21	18	12	7	13
1998	271	234	86,35%	29	40	42	26	25	14	23	22	4	9	
1999	278	238	85,61%	22	34	51	32	28	33	15	13	10		
2000	238	202	84,87%	15	49	38	19	48	12	9	12			
2001	202	164	81,19%	24	42	26	31	21	9	11				
2002	135	103	76,30%	24	28	20	17	11	3					
2003	126	83	65,87%	10	28	14	13	18						
2004	116	82	70,69%	19	25	20	18							
2005	149	64	42,95%	17	22	25								
2006	201	79	39,30%	19	60									
2007	195	26	13,33%	26										

Tableau 2. 1 : Triangle du nombre de dossiers clos par année de survenance

Soit en fréquence :

Année de survenance	Nbr. de sinistres	Nombre de dossiers clos au bout de ... ans										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1997	293	9%	28%	41%	52%	59%	65%	72%	78%	82%	84%	89%
1998	271	11%	25%	41%	51%	60%	65%	73%	82%	83%	86%	
1999	278	8%	20%	38%	50%	60%	72%	77%	82%	86%		
2000	238	6%	27%	43%	51%	71%	76%	80%	85%			
2001	202	12%	33%	46%	61%	71%	76%	81%				
2002	135	18%	39%	53%	66%	74%	76%					
2003	126	8%	30%	41%	52%	66%						
2004	116	16%	38%	55%	71%							
2005	149	11%	26%	43%								
2006	201	9%	39%									
2007	195	13%										

Tableau 2. 2 : Triangle de la fréquence cumulée de dossiers clos par année de survenance

On peut noter que plus de la moitié des contrats sont clos au bout de 3 ans. Le fait que pour certains dossiers, la gestion contentieuse excède 10 ans, peut s'expliquer par plusieurs facteurs :

- Une politique de gestion du contentieux souple : En effet, des plans de règlement amiables sont proposés aux clients afin qu'ils puissent réétaler leur dette (généralement pour une durée supérieure à la durée restante du prêt). Des plans à long terme peuvent également être mis en place dans le cadre des mesures de surendettement (exemple : plan Banque de France sur 30 ans)

- Le contexte économique : Dans une période de taux élevés, la créance génère des intérêts importants. Les recouvrements s'imputant en priorité aux intérêts, le solde en capital s'amenuise lentement. Par conséquent, la durée de recouvrement s'allonge. De même, les prix de l'immobilier peuvent influencer sur la durée de recouvrement puisque lorsque les prix de l'immobilier sont bas, le recours à la vente du bien pour le recouvrement de la créance est plus difficile.

c. Analyse du solde comptable par type de poste

Le solde comptable correspond aux montants qui n'ont pas encore été recouvré ou passé en perte. C'est donc le montant de la créance détenue par la SACCEF sur le client.

Concernant les sinistres survenus avant 1997, ils sont provisionnés à 100%, c'est-à-dire que l'on considère qu'aucun recouvrement n'aura lieu sur ces dossiers. Ainsi, les 4 025 220 € correspondant au solde comptable total sont ajoutés au montant de provisions qui sera déduit de l'étude des triangles.

Le périmètre de l'analyse étant réduit aux années postérieures à 1997, et uniquement au poste « Capital », le montant de provision à constituer sera déduit en retirant au 28 025 133 € (30 367 804 – 2 342 672) le montant ultime de recouvrement attendu.

Génération contentieuses	Solde comptable au 31/12/2007 relatif au poste...			
	Capital	Intérêt	Accessoire	Total
1981	14 798	4 453	-	19 251
1982	11 294	18 010	-	29 304
1983	5 609	14 959	-	20 568
1984	21 241	18 254	1 713	41 208
1985	15 279	17 973	-	33 252
1986	51 760	87 149	-	138 909
1987	145 701	172 953	339	318 993
1988	42 132	48 729	457	91 319
1989	410 398	334 774	3 232	748 404
1990	296 123	221 805	3 057	520 985
1991	79 640	55 765	9 513	144 918
1992	287 186	205 539	8 517	501 242
1993	303 820	158 718	4 720	467 258
1994	237 991	104 157	3 272	345 419
1995	221 531	63 902	3 186	288 619
1996	198 171	99 768	17 634	315 573
Sous TOTAL	2 342 672	1 626 906	55 641	4 025 220
1997	219 818	60 080	17 860	297 758
1998	309 153	109 995	28 304	447 452
1999	280 655	82 459	17 203	380 317
2000	360 186	105 204	34 555	499 945
2001	378 556	85 044	32 920	496 520
2002	599 244	94 237	56 005	749 487
2003	777 877	125 747	40 630	944 254
2004	1 348 670	148 795	74 958	1 572 422
2005	4 479 364	358 629	248 288	5 086 281
2006	7 423 237	372 662	442 743	8 238 642
2007	11 848 372	194 177	860 603	12 903 152
TOTAL	30 367 804	3 363 935	1 909 711	35 641 451

Tableau 2. 3 : Solde comptable par poste et par génération de contentieux

d. Segmentation par type de prêts

Le marché des particuliers de la SACCEF couvre plusieurs types de prêts qui se répartissent de la façon suivante :

- les prêts à la consommation (CO)
- les prêts épargne-logement (EL)
- les prêts étudiants (ET)
- les prêts immobiliers (IM)
- les prêts relais (RE)

	fréquence	pourcentage
CO	4793	36,83%
EL	1039	7,98%
ET	795	6,11%
IM	6331	48,65%
RE	55	0,42%

Tableau 2. 4 : Répartition globale des dossiers par type de prêt

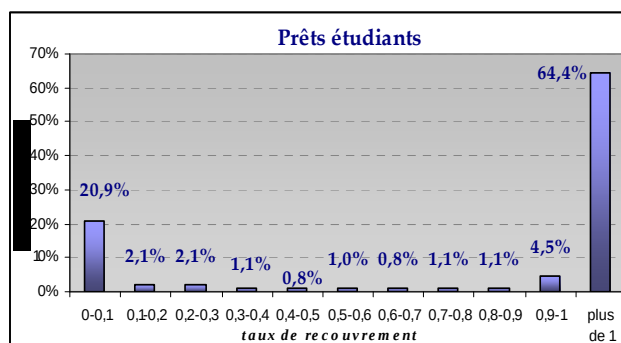
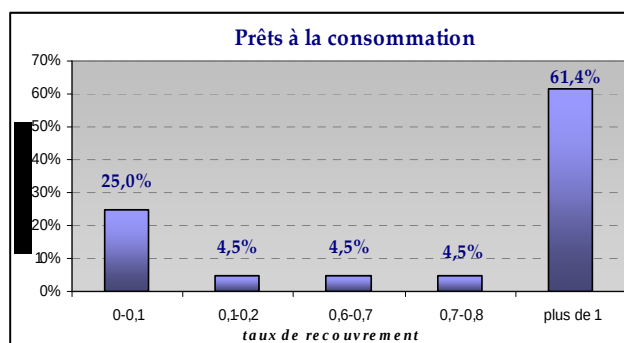
Si l'on réduit l'étude aux contrats tombés en contentieux après le 1^{er} mars 1997, correspondant à 2167 dossiers la répartition devient la suivante :

	fréquence	pourcentage
CO	61	2,81%
EL	247	11,40%
ET	658	30,36%
IM	1147	52,93%
RE	54	2,49%

Tableau 2. 5 : Répartition par type de prêt des dossiers tombés en contentieux après 1997

La SACCEF a effectivement tendance à recentrer depuis quelques années son activité sur le domaine de l'immobilier. Le nombre de caution pour les prêts à la consommation et les prêts étudiant est aujourd'hui quasiment nul.

L'analyse du taux de recouvrement ventilée selon le type de prêt permet de constituer deux groupes : l'un constitué des prêts de type immobilier (Immobilier, Relais et Epargne-Logement), l'autre regroupant les prêts à la consommation et les prêts étudiants.



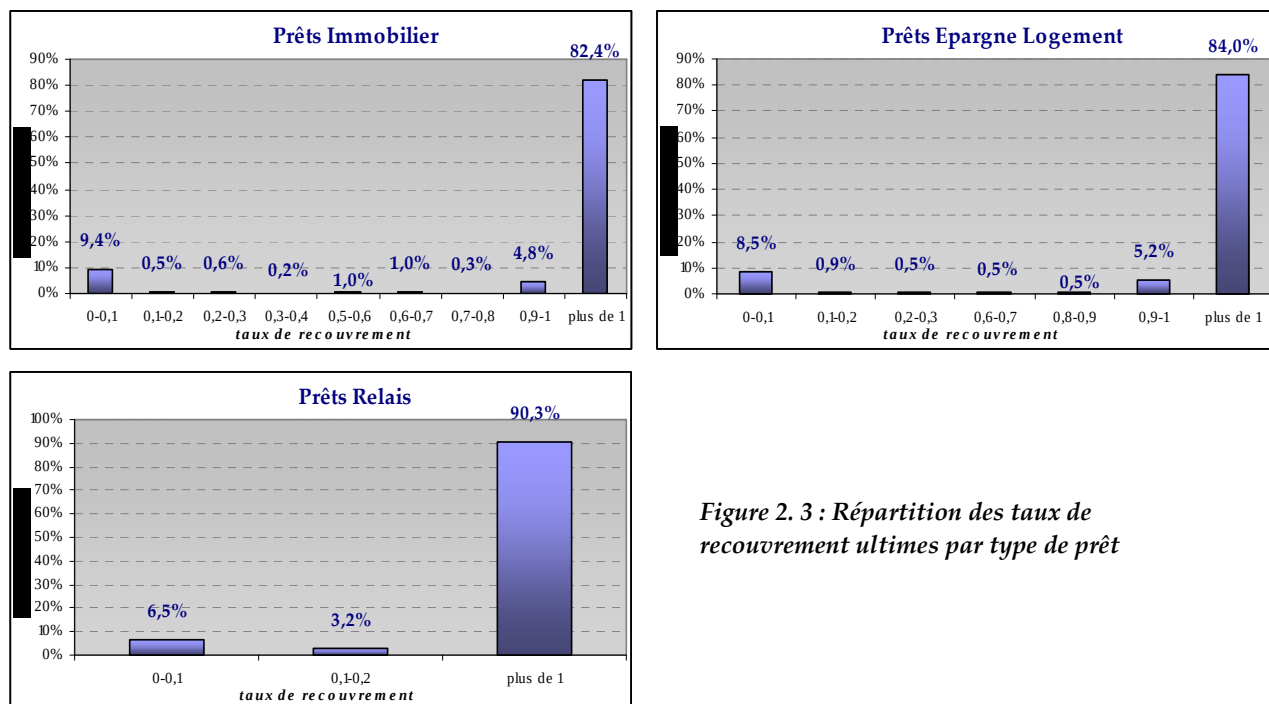


Figure 2.3 : Répartition des taux de recouvrement ultimes par type de prêt

La répartition des taux de recouvrement laisse apparaître deux typologies différentes : pour les prêts liés à l'immobilier, environ 80% des dossiers clos ont été recouvrés totalement, contre 60% de récupération totale pour les prêts de type étudiant ou consommation.

La projection des triangles sera donc segmentée selon ces deux groupes. Cependant, les prêts étudiant et les prêts à la consommation ne présentent pas une volumétrie suffisante pour faire l'objet d'une triangulation. De plus, d'après les gestionnaires contentieux, il existe une forte probabilité pour que ces dossiers soient passés en perte prochainement. Nous considérerons donc que pour ces deux types de prêt, la totalité du solde comptable ne sera pas recouvrée et ils seront ainsi provisionnés à 100%.

Généralités contentieuses	Solde comptable des prêts Consommation et Etudiant			
	Capital	Intérêt	Accessoire	Total
1997	20 820	7 700	1 633	30 152
1998	9 693	1 806	1 706	13 206
1999	14 852	4 307	1 737	20 896
2000	13 215	3 051	4 445	20 711
2001	10 591	3 282	2 069	15 943
2002	6 416	132	807	7 354
2003	139 617	23 438	5 929	168 985
2004	4 981	488	525	5 994
2005	55 806	6 831	2 732	65 368
2006	33 380	1 103	1 749	36 233
2007	33 445	444	2 676	36 565
TOTAL	342 816	52 582	26 008	421 407

Tableau 2.6 : Solde comptable par poste et par génération de contentieux des prêts à la consommation et des prêts étudiant

II. CONTRAINTES A RESPECTER

Comme spécifié plus haut, un contrat qui entre en contentieux produit chaque année des intérêts de retards, et engendre aussi des frais annexes qui s'ajoutent à la créance initiale. L'ensemble des mouvements (débiteurs ou créditeurs) pouvant intervenir sur un contrat contentieux sont donc ventilés autour de 3 postes :

- le poste « principal » qui regroupe les mouvements liés à la dette initiale du client ;
- le poste « intérêt » qui retrace les flux liés aux intérêts de retard accumulés et ceux liés à leur remboursement par le client. Les intérêts de retard sont calculés annuellement sur la base du CRD, à un taux fixé légalement ;
- le poste « accessoire » auquel se rattache toutes les écritures liées à des indemnités couvrant des frais occasionnés

Le montant du sinistre étant définis comme le montant initialement payé par la SACCEF (hors intérêts et accessoires), les taux de recouvrement considérés uniquement sur le poste capital ne peuvent excéder 100%. En d'autres termes, le remboursement de la dette en capital ne peut pas être supérieur au montant initialement payé par la SACCEF. Afin de veiller au respect de cette contrainte, les projections des triangles de recouvrement seront faites à partir des montants issus du poste « principal » et nous appliquerons éventuellement une correction afin que les taux de recouvrement espérés ne dépassent pas 100%.

Cependant, il ne semble pas prudent d'espérer recouvrer la totalité des sinistres. Par mesure de prudence, nous avons donc choisi de contraindre le taux ultime de recouvrement pour chaque semestre de survenance. Ainsi, un seuil de recouvrement a été défini pour chaque génération de contentieux. En notant s_i le seuil correspondant au semestre de survenance i , la contrainte sera appliquée de la façon suivante :

Dès lors que le taux de recouvrement projeté dépasse le seuil fixé, le développement du triangle est suspendu. Le taux de recouvrement précédent est alors conservé comme taux de recouvrement ultime.

Le choix du seuil à appliquer au taux de recouvrement a été déterminé en modélisant le taux de passage en perte via une méthode déterministe. La méthode de projection des montants de passage en perte qui a été utilisée est la méthode de London Chain qui sera explicité par la suite.

I. LA METHODE DE REFERENCE : CHAIN LADDER

1. Présentation du modèle

La méthode de Chain Ladder compte parmi les plus utilisées dans le milieu professionnel, en raison de sa simplicité de compréhension et de mise en œuvre.

Cette méthode est basée sur les facteurs de développement qui sont supposés constants pour tous les semestres d'origine. Graphiquement, cette hypothèse se traduit par l'alignement des points $(S_{i,k}, S_{i,k+1})$ sur une droite affine d'équation $y = ax$.

Le modèle sur lequel repose la méthode de Chain Ladder s'expose de la façon suivante :

Il existe n facteurs de développement $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :

$$S_{i,j} = S_{i,j-1} \cdot \lambda_{j-1} \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

La méthode de Chain Ladder consiste à estimer des coefficients de passage, notés $\hat{\lambda}_j$, entre deux semestres successifs de déroulé par la formule :

Pour $j=0 \dots n-1$:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j}}$$

Le triangle inférieur peut être complété à partir de la formule suivante :

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $j \in \{n-i, \dots, n\}$:

$$\hat{S}_{i,j} = \hat{S}_{i,n-i} \prod_{h=n-i}^{j-1} \hat{\lambda}_h$$

Ou de façon récursive par $\hat{S}_{i,j} = \hat{S}_{i,j-1} \hat{\lambda}_{j-1}$ pour tout $j \in \{n-i+1, \dots, n\}$.

L'espoir de recouvrement pour chaque semestre de survénance est alors déduit en soustrayant au montant de recouvrement probable final le dernier montant connu (montant figurant sur la diagonale).

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= \hat{S}_{i,n} - S_{i,n-i} \\ \hat{R}_0 &= 0 \end{aligned}$$

La provision totale à constituer à l'issue de l'exercice n , est la différence entre le solde total et la somme des provisions relatives à chaque exercice de survenance i .

2. Résultats obtenus

a. Vérification graphique de l'hypothèse

L'hypothèse sous jacente sur la constance des coefficients de développement doit être validée. Cependant, sans la modélisation stochastique, cette validation reste empirique.

Le graphe des $(S_{i,j}, S_{i,j+1})$ permet d'affirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

Les graphiques suivants sont les représentations respectives des $(S_{i,0}, S_{i,1})$ et $(S_{i,1}, S_{i,2})$:

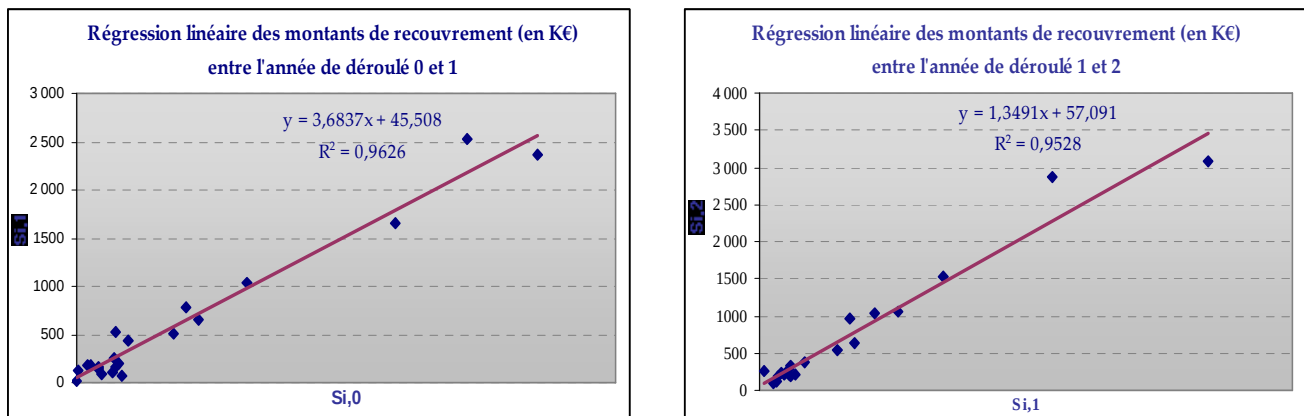


Figure 3.1 : Graphes des $(S_{i,0}; S_{i,1})$ et $(S_{i,1}; S_{i,2})$

Ainsi sur les deux premiers semestres de déroulé, si l'on considère comme négligeable la constante des deux régressions linéaires valant respectivement 45 508 et 57 091, on peut valider l'hypothèse de Chain Ladder.

b. Application de Chain Ladder au triangle des données

Sans la prise en compte de la contrainte sur les taux de récupération, les résultats sont aberrants. En effet, le développement du triangle, jusqu'à l'horizon n , engendre des taux de recouvrement supérieurs d'une part aux seuils fixés et d'autre part à la limite naturelle des 100%. Le taux de recouvrement ultime du premier semestre 2007 atteint même les 140%. Cela conduit à l'estimation d'un espoir de recouvrement de 28 790 310 €, montant supérieur au montant restant à recouvrer. En d'autres termes, la provision pour créances douteuses serait dans ce cas négative. Cet exemple met en exergue la nécessité de la contrainte.

Nous allons donc procéder à un retraitement, en développant le triangle de la façon suivante :

Si le taux de recouvrement projeté $\hat{T}_{i,j} = \frac{\hat{S}_{i,j}}{\text{Sin}(i)}$ dépasse le seuil de $s_i\%$, alors le développement est interrompu et le recouvrement ultime espéré est le montant de recouvrement précédent.

Après application de la contrainte, les résultats obtenus sont les suivants :

Semestres de survenance	Taux de recouvrement ultime	Espoir de recouvrement	Provision pour créances douteuses
1997_1	72,89%	0,00	84 941,00
1997_2	74,35%	1 448,48	112 608,52
1998_1	61,32%	7 892,58	263 694,42
1998_2	85,68%	6 670,00	21 202,00
1999_1	59,81%	10 535,11	133 092,89
1999_2	68,49%	23 244,63	98 930,37
2000_1	72,28%	30 443,26	205 369,74
2000_2	75,27%	35 867,11	75 290,89
2001_1	80,44%	0,00	112 889,00
2001_2	82,29%	107 618,72	147 457,28
2002_1	86,80%	115 461,72	119 968,28
2002_2	88,10%	208 527,24	148 870,76
2003_1	69,78%	110 002,19	225 007,81
2003_2	83,13%	183 842,53	119 406,47
2004_1	83,74%	0,00	363 229,00
2004_2	86,50%	572 188,83	408 271,17
2005_1	85,73%	756 567,62	633 661,38
2005_2	55,77%	1 088 423,32	1 944 905,68
2006_1	84,34%	2 348 558,77	1 036 059,23
2006_2	83,83%	2 866 339,52	1 138 899,48
2007_1	84,34%	3 452 189,53	1 078 300,47
2007_2	79,75%	5 733 402,21	1 551 033,79
		17 659 223,37	10 023 089,63

Tableau 3.1 : Résultats de la méthode de Chain Ladder

3. Limites de cette approche

Outre sa facilité d'utilisation et d'interprétation, la méthode de Chain Ladder présente quelques limites qu'il est nécessaire de mettre en relief :

En premier lieu, on peut noter que cette méthode ne permet pas le respect de la contrainte imposée sur le taux de recouvrement en capital. Pour que les montants issus de cette méthode soient interprétables et exploitables il est nécessaire de procéder à la correction des taux de recouvrement afin que les taux ultimes soient inférieurs aux seuils respectifs fixés.

Cette limite peut en outre être reliée au fait que la méthode de Chain Ladder repose sur un schéma de développement qui est identique pour tous les semestres de survenance, or ce n'est généralement pas le cas en pratique. Cette méthode ne tient donc pas compte d'éventuels « effets diagonale » dus à des modifications de la cadence des règlements, particulièrement présentes dans les branches à déroulement long.

D'autre part, les coefficients relatifs aux semestres de développement les plus avancés sont à relativiser en raison du faible nombre de données sur lesquelles ils reposent. Le dernier coefficient est notamment calculé à partir de deux données seulement. Cependant cet ultime coefficient est nécessaire au calcul du montant de recouvrement final pour tous les semestres de survénance. Des techniques de lissage peuvent être mises en place pour pallier à ce problème et notamment pour estimer les queues de distribution.

Par ailleurs, pour les semestres de survénance les plus récents, l'espoir de recouvrement va être déduit à partir du montant d'encaissement calculée comme un produit de $n-1$ estimations de coefficients de proportionnalité. Cela peut créer un biais qui est d'autant plus important que la branche est à déroulement long.

4. Variantes de cette méthode

a. Variantes de la méthode de calcul des coefficients de passage

A partir du triangle des facteurs de développement $F_{i,j} = \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$, plusieurs variantes ont été testées pour calculer les coefficients de passage :

- La moyenne directe : $\lambda_j^d = Moy_{i=0..n-j-1}(F_{i,j})$
- La médiane des facteurs : $\lambda_j = Mediane_{i=0..n-j-1}(F_{i,j})$. L'usage de la médiane permet notamment de minimiser l'effet d'éventuelles valeurs extrêmes.
- La moyenne pondérée par $i+j+1$ ou par $(i+j+1)^2$: cette pondération attribue un poids plus important (croissant) aux diagonales les plus récentes.
- La moyenne des x derniers semestres : on ne tient compte que des données les plus récentes.
- La moyenne pondérée par le nombre de sinistres
- La moyenne pondérée par le montant des sinistres

L'espoir de recouvrement ultime et les montants de provision relatifs à chacune de ces méthodes sont résumés dans la table suivante :

	Méthodes de calcul des coefficients de passage					
	moyenne	médiane	moyenne pondérée par les montants des sinistres	moyenne pondérée par $(i+j+1)$	moyenne pondérée par $(i+j+1)^2$	moyenne des 7 derniers semestres
Espoir de recouvrement	16 949 146	16 768 862	16 377 226	17 019 042	16 935 044	16 853 122
Provision pour créances douteuses	10 733 167	10 913 451	11 305 087	10 663 271	10 747 269	10 829 191

Tableau 3. 2 : Résultats obtenus à partir des variantes de Chain Ladder

Les écarts entre les coefficients de passage se trouvent principalement sur les premiers semestres de déroulé. Ces écarts font varier principalement le rythme de récupération, cependant la contrainte limite les écarts obtenus sur l'espoir de recouvrement et le montant des provisions.

b. Méthodes de lissage des coefficients de passage

D'autre part, il est possible d'ajuster les coefficients de développement via des méthodes de lissage.

Nous avons testé 4 familles de courbe permettant de modéliser et éventuellement de projeter les facteurs de développement issus de la méthode de Chain Ladder :

- Courbe exponentielle négative : $f(j) = 1 + a \times e^{-b \times j}$; $a \in \mathbb{R}$; $b > 0$
- Courbe de puissance inverse : $f(j) = 1 + a \times (j + c)^{-b}$; $a, c \in \mathbb{R}$; $b > 0$
- Courbe de puissance : $f(j) = a^{b^j}$; $a, b \in \mathbb{R}$
- Courbe de Weibull : $f(j) = \frac{1}{(1 - \exp(-a \times j^b))}$; $a, b \in \mathbb{R}$

Les paramètres des courbes sont estimés par la méthode des moindres carrés.

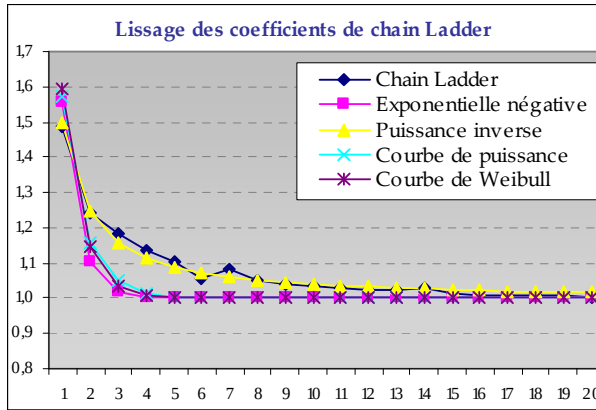


Figure 3. 2 : Paramètres obtenus à partir du lissage des paramètres de Chain Ladder

Seul le lissage par la courbe de puissance inverse peut convenir. Aucune des autres courbes n'a été retenue par la suite. Ce lissage permet d'obtenir un espoir de recouvrement de 18 220 626 €, soit une provision pour créances douteuses de 9 461 687€, légèrement plus faible que celle obtenue avec la méthode de Chain Ladder standard.

II. LONDON CHAIN

1. Présentation du modèle

Cette méthode a été introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves de Lloyds.

Dans la méthode de London Chain, on suppose que la dynamique des $(S_{i,j})$ est de la forme $S_{i,j+1} = \lambda_j \cdot S_{i,j} + \alpha_j$.

Cela signifie que, comme précédemment, cette méthode repose sur l'hypothèse selon laquelle les points $(S_{i,j}, S_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés (pour k fixé), à la différence que la droite n'est plus censée passer par l'origine.

Il s'agit donc d'estimer $2n$ paramètres, à savoir λ_j et α_j pour $j=0 \dots n-1$. Le couple (λ_j, α_j) est estimé par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires, en minimisant la fonction suivante :

$$(\lambda_j, \alpha_j) = \text{Arg min} \left\{ \sum_{i=0}^{n-j-1} (S_{i,j+1} - \alpha_j - \lambda_j S_{i,j})^2 \right\}$$

On obtient alors les estimateurs :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j} \cdot S_{i,j+1} - \bar{S}_j \cdot \bar{S}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j}^2 - \bar{S}_j^2} = \frac{\text{Cov}(\text{colonne}_j, \text{colonne}_{j+1})}{\text{Var}(\text{colonne}_j)}$$

$$\hat{\alpha}_j = \bar{S}_{j+1} - \hat{\lambda}_j \cdot \bar{S}_j$$

Avec : $\bar{S}_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j}$ et $\bar{S}_{j+1} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} S_{i,j+1}$ les moyennes sur n-j valeurs des colonnes j et j+1.

2. Application au triangle de passage en perte

Cette technique a été appliquée au développement du triangle de passage en perte pour la détermination du seuil de recouvrement. En effet, la présence de la constante dans le modèle de London chain s'avère très efficace dans le développement du triangle des passages en perte, étant donné que celui-ci présente des valeurs initiales souvent très faibles. Un coefficient multiplicatif seul ne permettait pas d'amorcer le déroulement du triangle. De plus, à la vue des graphes des $(S_{i,j}^{PP}, S_{i,j+1}^{PP})$ pour les semestres de déroulé 1, 3 et 5, l'emploi de London Chain se justifie.

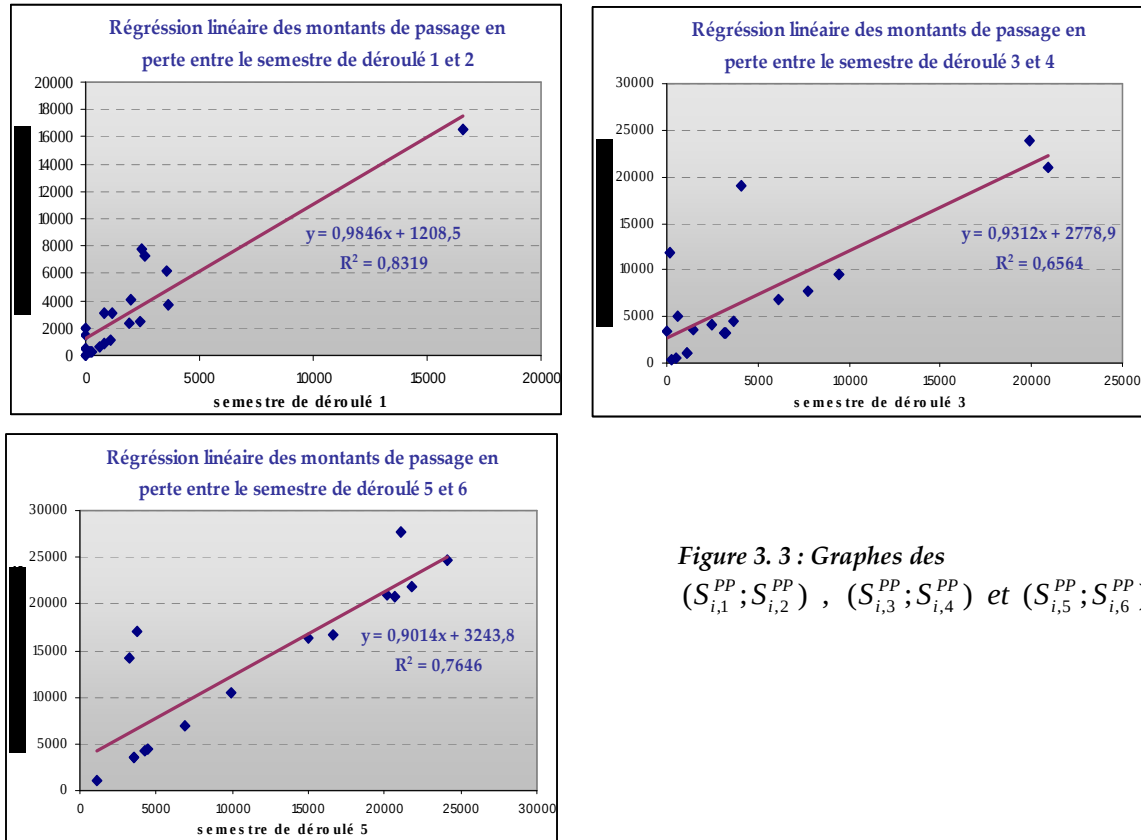


Figure 3.3 : Graphes des $(S_{i,1}^{PP}; S_{i,2}^{PP})$, $(S_{i,3}^{PP}; S_{i,4}^{PP})$ et $(S_{i,5}^{PP}; S_{i,6}^{PP})$

La projection du triangle de passage en perte permet d'obtenir les taux de passage en perte attendus à l'horizon de 10 ans.

Une fois les taux de passage en perte ultime déduits pour chaque semestre de survénance, on peut définir les seuils s_i par 100% - taux de passage en perte ultime. En effet, lors de la clôture d'un dossier, la somme du taux de recouvrement et du taux de passage en perte pour le poste « capital » doit être égale à 100%.

Par ailleurs, on vérifie au préalable que le seuil retenu soit réaliste, en s'assurant que celui-ci ne soit pas inférieur au taux de recouvrement déjà atteint.

Les seuils s_i retenus sont indiqués dans le tableau suivant :

semestres de survénance	taux de passage en perte ultime (a)	taux de recouvrement atteint (b)	Vérification (a) + (b)	seuil retenu
1997_1	18,08%	72,89%	90,97%	81,9%
1997_2	11,41%	74,17%	85,58%	88,6%
1998_1	13,26%	60,64%	73,90%	86,7%
1998_2	10,43%	84,18%	94,61%	89,6%
1999_1	23,19%	58,29%	81,48%	76,8%
1999_2	24,58%	66,30%	90,88%	75,4%
2000_1	10,26%	69,08%	79,34%	89,7%
2000_2	24,35%	71,92%	96,27%	75,7%
2001_1	17,48%	80,44%	97,92%	82,5%
2001_2	13,11%	72,68%	85,79%	86,9%
2002_1	10,00%	74,54%	84,54%	90,0%
2002_2	10,49%	73,08%	83,57%	89,5%
2003_1	13,64%	56,27%	69,91%	86,4%
2003_2	16,21%	64,78%	80,99%	83,8%
2004_1	13,13%	83,74%	96,87%	86,9%
2004_2	13,46%	68,31%	81,77%	86,5%
2005_1	13,32%	68,83%	82,15%	86,7%
2005_2	13,85%	31,12%	44,97%	86,2%
2006_1	14,01%	49,11%	63,12%	86,0%
2006_2	14,15%	43,39%	57,54%	85,8%
2007_1	14,14%	34,24%	48,38%	85,9%
2007_2	14,28%	5,01%	19,29%	85,7%

Tableau 3. 3 : Seuil par semestre de survénance pour le taux de recouvrement ultime

III. CAPE COD

1. Présentation du modèle

La méthode traditionnelle de Cape Cod utilise le loss ratio comme une donnée endogène, laquelle est déterminée à partir du triangle des charges de sinistres. La spécificité de cette méthode tient à l'application d'un unique loss ratio à un groupe d'années homogènes.

Cependant dans notre cas, nous n'utiliserons pas un loss ratio (taux de sinistres à primes) mais le taux de recouvrement (part de recouvrement dans le montant du sinistre).

Pour cela, nous disposons d'une part d'un triangle relatif aux montants cumulés des recouvrements, et d'autre part, pour chaque semestre d'observation d'un indicateur d'exposition au risque E_i représenté par le montant des sinistres. Dans le cas général, cet indicateur de l'exposition au risque peut être le montant de primes, le nombre de sinistres, le nombre de contrats...

Dans un premier temps, il est nécessaire d'appliquer la méthode de Chain Ladder au triangle des montants cumulés. A partir du vecteur des n coefficients de passage $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, on calcule les cadences de règlement (« facteurs de retardement ») pour chaque semestre de déroulé j :

$$L_j = \frac{1}{\lambda_j \times \dots \times \lambda_{n-1}}$$

La formule est alors équivalente au rapport entre les paiements cumulés au $(n-i+1)^{\text{ème}}$ semestre et le montant final probable de recouvrement pour le semestre de survenance i , soit :

$$L_{n-i+1} = \frac{\hat{S}_{i,n-i+1}}{\hat{S}_{i,n}}$$

Or, d'après ce qui précède, le montant ultime de récupération est estimé par la méthode de Chain

Ladder par la formule $\hat{S}_{i,n} = \hat{S}_{i,n-i+1} \times \frac{1}{L_{n-i+1}}$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\hat{S}_{i,n} &= \hat{S}_{i,n-i+1} + (\hat{S}_{i,n} - \hat{S}_{i,n-i+1}) \\ \hat{S}_{i,n} &= \hat{S}_{i,n-i+1} + \hat{S}_{i,n} \times \left(1 - \frac{\hat{S}_{i,n-i+1}}{\hat{S}_{i,n}}\right) \\ \hat{S}_{i,n} &= \hat{S}_{i,n-i+1} + \hat{S}_{i,n} \times (1 - L_{n-i+1})\end{aligned}$$

En posant $\varphi_i E_i = \hat{S}_{i,n}$, on obtient $\hat{S}_{i,n} = \hat{S}_{i,n-i+1} + (1 - L_{n-i+1}) \varphi_i E_i$

où plus précisément $\varphi_i = \frac{\hat{S}_{i,n}}{E_i} = \frac{\hat{S}_{i,n-i+1}}{L_{n-i+1} E_i}$

L'espoir de recouvrement, pour chaque semestre de survenance, est alors défini par la formule suivante :

$$R_i = (1 - L_{n-i+1}) \times \varphi_i E_i$$

La méthode de Cape Cod repose sur le choix d'un sous ensemble $A_i \subset \{0,1,...,n\}$ de semestres de survenance. Le terme φ_i s'exprime en fonction de ce sous ensemble comme :

$$\varphi_i = \frac{\sum_{k \in A_i} S_{i,n-i+1}}{\sum_{k \in A_i} L_{n-i+1} \times E_i}$$

2. Résultats obtenus

Ici, le sous ensemble qui a été considéré est composé des taux des semestres 1997_1 à 2003_2. En effet, les taux qui composent ce sous ensemble présentent d'une part une certaine homogénéité et sont d'autre part « crédibles » car inférieurs à 100%.

Semestres de survenance	(a) Rec. atteint Si,n-i	(b) sin.*cadence	(a)/(b)	Rec. final	Tx de rec. ultime estimé	seuil max.	taux ultime retenu	Espoir de recouvrement	Provision
1997_1	781 192	1 071 714	72,89%	781 192	72,89%	81,9%	72,89%	-	84 941
1997_2	618 916	832 467	74,35%	620 408	74,35%	88,6%	74,35%	1 492	112 565
1998_1	702 593	1 145 748	61,32%	712 446	61,49%	86,7%	61,49%	9 853	261 734
1998_2	375 089	437 774	85,68%	381 049	85,52%	89,6%	85,52%	5 960	21 912
1999_1	405 992	678 849	59,81%	419 478	60,23%	76,8%	60,23%	13 486	130 142
1999_2	705 500	1 030 124	68,49%	731 484	68,74%	75,4%	68,74%	25 984	96 191
2000_1	656 683	908 558	72,28%	688 929	72,47%	89,7%	72,47%	32 246	203 567
2000_2	770 161	997 337	77,22%	826 455	77,18%	75,7%	75,65%	39 977	71 181
2001_1	919 145	1 035 999	88,72%	1 000 821	87,58%	82,5%	82,52%	23 822	89 067
2001_2	813 948	989 172	82,29%	914 074	81,62%	86,9%	81,62%	100 126	154 950
2002_1	701 839	808 574	86,80%	803 676	85,35%	90,0%	85,35%	101 837	133 593
2002_2	1 014 080	1 151 001	88,10%	1 195 277	86,13%	89,5%	86,13%	181 197	176 201
2003_1	457 917	656 213	69,78%	578 599	71,09%	86,4%	71,09%	120 682	214 328
2003_2	648 685	771 614	84,07%	824 617	82,34%	83,8%	82,34%	175 932	127 317
2004_1	1 902 455	1 615 164	117,79%	2 405 152	105,87%	86,9%	86,87%	71 084	292 145
2004_2	2 148 644	2 133 025	100,73%	2 923 695	92,95%	86,5%	86,54%	573 359	407 101
2005_1	3 082 919	2 770 982	111,26%	4 390 363	98,03%	86,7%	86,68%	799 381	590 848
2005_2	1 374 061	2 463 631	55,77%	2 868 062	64,96%	86,2%	64,96%	1 494 001	1 539 328
2006_1	3 273 634	3 129 715	104,60%	5 981 073	89,72%	86,0%	85,99%	2 458 616	926 002
2006_2	3 075 601	2 608 438	117,91%	6 505 106	91,77%	85,8%	85,85%	3 009 321	995 918
2007_1	2 359 093	1 730 463	136,33%	6 309 032	91,57%	85,9%	85,86%	3 556 850	973 640
2007_2	384 426	482 054	79,75%	5 888 426	76,76%	85,7%	76,76%	5 504 000	1 780 436
			76,56%					18 299 204	9 383 109

Tableau 3. 4 : Résultats de la méthode de Cape Cod

3. Limites de cette approche

Etant donné que les coefficients de cadence de règlement sont calculés à partir des coefficients de Chain Ladder, les mêmes limites sur la qualité des estimations peuvent être faites.

Enfin, cette méthode ne permet pas de déterminer l'évolution du recouvrement par projection du triangle, mais seulement d'estimer le montant ultime de recouvrement. La mise en œuvre de la contrainte ne peut donc pas se faire avec la procédure existante. Ainsi, lorsque le taux

de recouvrement ultime estimé dépasse le seuil imposé, on a saturé la contrainte en imposant comme taux ultime le seuil correspondant.

IV. METHODE DES MOINDRES CARRES DE DE-VYLDER

1. Présentation du modèle

La méthode des moindres carrés de De Vylder repose sur une modélisation des montants de recouvrement non cumulés. Elle fait partie de la modélisation factorielle qui permet d'écrire les montants incrémentaux comme le produit de trois facteurs :

- α_i : facteur correspondant aux semestres d'origine $i \in \{0, \dots, n\}$
- β_j : facteur relatif aux délais de règlement $j \in \{0, \dots, n\}$
- γ_{i+j} : facteur représentant l'inflation (s'exprime en fonction du semestre calendaire)

Il est nécessaire d'introduire des contraintes pour que le modèle soit identifiable.

Le modèle des moindres carrés de De Vylder consiste à ne pas tenir compte d'un effet éventuel de l'inflation, c'est-à-dire de poser $\gamma_{i+j}=1$.

Le modèle peut alors s'écrire :

$$C_{i,j} = \alpha_i \times \beta_j \quad 0 \leq i, j \leq n$$

L'ajout de la contrainte $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$ permet une interprétation des paramètres. En effet,

$\sum_{j=0}^n C_{i,j} = \alpha_i \sum_{j=0}^n \beta_j = \alpha_i$ implique que le paramètre α_i peut être interprété comme le montant de recouvrement perçu durant le semestre i . De plus, l'équation $\beta_j = \frac{C_{i,j}}{\alpha_i}$ permet de décrire β_j comme la proportion de ce montant payée au bout de j semestres.

Les paramètres sont initialisés selon la formule suivante :

$$\beta_j^{(0)} = \frac{C_{0,j}}{C_{0,0}} \text{ et } \alpha_i^{(0)} = \frac{\sum_{j=0}^n C_{i,j} \beta_j}{\sum_{j=0}^n \beta_j}$$

Les coefficients $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_j$ sont obtenus en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées $C_{i,j}$ et leur forme théorique $\hat{\alpha}_i \times \hat{\beta}_j$.

La contrainte telle que $\sum_{j=0}^n \tilde{\beta}_j = 1$, permettant l'interprétation des coefficients est obtenue en

normalisant les paramètres, soit $\tilde{\beta}_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\sum_h \hat{\beta}_h}$ et $\tilde{\alpha}_i = \left(\sum_j \hat{\beta}_j \right) \hat{\alpha}_i$

L'espoir de recouvrement est ensuite déduit comme :

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= \sum_{h=n-i+1}^n \hat{C}_{i,h} = \sum_{h=n-i+1}^n \tilde{\alpha}_i \hat{\beta}_h \\ \hat{R} &= \sum_i \hat{R}_i. \end{aligned}$$

2. Résultats obtenus

Les taux cumulés estimés ne respectent pas la contrainte imposée par les seuils. Après correction, l'espoir de recouvrement total atteint quasiment 17 300 000 €.

Taux ultime estimé	taux ultime corrigé	Espoir de recouvrement	Provision pour créances douteuses
72,89%	72,89%	0,00	84 941,00
74,34%	74,34%	1 389,0	112 667,99
61,26%	61,26%	7 201,8	264 385,25
85,63%	85,63%	6 447,7	21 424,33
59,37%	59,37%	7 493,9	136 134,09
67,58%	67,58%	13 643,5	108 531,47
72,21%	72,21%	29 789,0	206 024,03
76,83%	75,65%	39 976,7	71 181,35
91,79%	82,52%	23 822,4	89 066,57
82,29%	82,29%	107 685,3	147 390,72
84,77%	84,77%	96 324,7	139 105,28
90,50%	89,51%	228 059,6	129 338,39
70,21%	70,21%	113 488,0	221 522,04
79,69%	79,69%	149 366,4	153 882,59
117,76%	86,87%	71 084,0	292 144,99
95,54%	86,54%	573 358,7	407 101,33
104,70%	86,68%	799 380,7	590 848,28
53,52%	53,52%	988 983,0	2 044 346,01
96,75%	85,99%	2 458 616,4	926 001,62
115,58%	85,85%	3 009 321,4	995 917,57
122,29%	85,86%	3 556 850,4	973 639,60
70,40%	70,40%	5 016 284,1	2 268 151,89
		17 298 566,60	10 383 746,40

Tableau 3. 5 : Résultats de la méthode des moindres carrés de De Vylder

V. CONSTRUCTION D'UNE METHODE « PAR TRANCHES »

1. Présentation du modèle

L'élaboration de ce modèle repose sur le constat que le rythme de déroulement des recouvrements varie selon les semestres de survenance. Cependant, cette différence de rythme ne semble pas forcément jouer sur le taux de recouvrement ultime. En effet, les méthodes employées jusqu'à maintenant ne tiennent pas compte du taux de recouvrement déjà atteint.

Le graphique suivant représente l'évolution du taux de recours encaissés selon les années de survenance. L'année 1999 illustre le fait que la dynamique de recouvrement a été plus lente au cours des premières années de déroulé, mais que le taux atteint au bout de 8 années semble converger néanmoins vers un taux ultime moyen proche des 70%. De façon symétrique, les années récentes semblent laisser présager une cadence de recouvrement plus rapide, il est toutefois nécessaire de tenir compte du fait que la capacité de récupération restante en est par la même amoindrie.

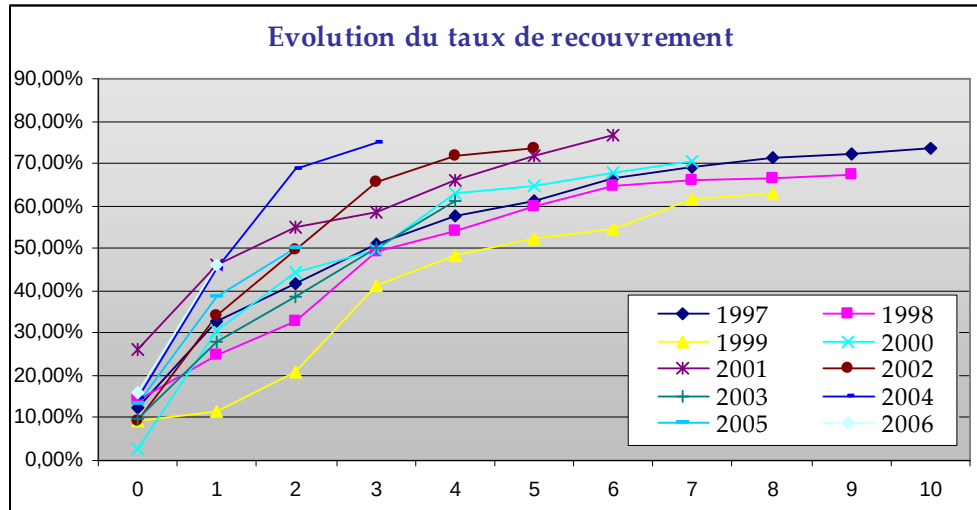


Figure 3.4 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par année de survenance

De ce constat est né une méthode par tranche de taux de récupération, qui consiste à calculer un coefficient qui n'est plus fonction du semestre de déroulé comme dans la méthode classique de Chain Ladder, mais du niveau de recouvrement déjà atteint.

Pour un découpage en k tranches de l'intervalle $[0-100\%]$, le coefficient de passage δ_h couvrant l'intervalle H est donc calculé comme le quotient de la somme des montants $S_{i,j+1}$ et de la somme des $S_{i,j}$ tels que les $T_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{Sin_i}$ appartiennent à l'intervalle H , soit :

$$\delta_h = \frac{\sum_{T_{i,j} \in H} S_{i,j+1}}{\sum_{T_{i,j} \in H} S_{i,j}} \quad \text{pour } h=1 \dots k$$

L'exemple simplifié suivant illustre la méthode de calcul des coefficients. Considérons les triangles de montants et de taux suivants :

	sinistre	a+0	a+1	a+2	a+3	a+4
2004	2000	955	1355	1500	1620	1800
2005	2500	712	1500	1730	1900	
2006	1510	1000	1260	1480		
2007	2500	580	1510			
2008	1950	660				

	sinistre	a+0	a+1	a+2	a+3	a+4
2004	2000	48%	68%	75%	81%	90%
2005	2500	28%	60%	69%	76%	
2006	1510	66%	83%	98%		
2007	2500	23%	60%			
2008	1950	34%				

En appliquant la méthode précédente de calcul des coefficients avec trois tranches, on obtient les résultats suivants :

tranche 1 : 0-50%		tranche 2 : 50-70%		tranche 3 : 70-100%	
955	1355	1000	1260	1260	1480
712	1500	1355	1500	1500	1620
580	1510	1500	1730	1620	1800
		1730	1900		
$\delta_1 = 1,94$		$\delta_2 = 1,14$		$\delta_3 = 1,12$	

Tableau 3. 6 : Exemple simplifié de calcul de coefficients de la méthode par tranche

Une fois les paramètres δ_h estimés, le triangle se déroule ensuite récursivement de la façon suivante :

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} \times \delta_h \text{ avec } T_{i,j-1} \in H \text{ pour tout } i=0 \dots n \text{ et } j=n-i+1 \dots n$$

2. Résultats obtenus

A la vue de nos données, nous avons choisi de créer 8 tranches de 0% à 70% par saut de 10% et la dernière tranche « 70% et plus ».

Le tableau suivant résume les coefficients trouvés, δ_k avec $\{k=1 \dots 8\}$ ainsi que la taille de l'échantillon d'estimation pour chaque tranche.

Tranche de recouvrement	Coefficient	Nbr. de données dans la tranche
0-10%	3,935	23
10-20%	1,497	17
20-30%	1,415	20
30-40%	1,259	21
40-50%	1,142	30
50-60%	1,064	44
60-70%	1,049	44
70-100%	1,015	32

Tableau 3. 7 : Coefficient de passage de la méthode par tranche

Afin de pouvoir conserver une contrainte différente pour chaque semestre de survénance, on appliquera le coefficient de la tranche [70%-100%] au taux $T_{i,j-1}$, uniquement si ce taux appartient en réalité à la tranche $[70\% - s_i/\delta_7]$. S'il excède ce seuil s_i/δ_7 , le coefficient appliqué sera égal à l'unité.

L'espoir de recouvrement déduit de cette méthode est de 19 700 000€, soit par génération :

semestres de survénance	taux ultime	Espoir de recouvrement	Provision C.D.
1997_1	72,89%	0,00	84 941,00
1997_2	75,29%	9 331,7	104 725,26
1998_1	66,72%	70 414,4	201 172,58
1998_2	88,05%	17 230,2	10 641,84
1999_1	71,59%	92 578,7	51 049,28
1999_2	75,16%	94 293,1	27 881,94
2000_1	78,09%	85 663,4	150 149,58
2000_2	75,22%	35 378,8	75 779,21
2001_1	81,65%	13 869,5	99 019,45
2001_2	83,16%	117 398,7	137 677,30
2002_1	86,58%	113 346,9	122 083,13
2002_2	86,16%	181 534,7	175 863,34
2003_1	79,02%	185 147,4	149 862,63
2003_2	82,78%	180 270,4	122 978,55
2004_1	86,29%	57 833,2	305 395,80
2004_2	85,75%	548 642,0	431 817,99
2005_1	86,41%	787 205,2	603 023,83
2005_2	81,49%	2 223 648,6	809 680,43
2006_1	85,13%	2 401 325,9	983 292,10
2006_2	84,68%	2 926 909,3	1 078 329,68
2007_1	85,09%	3 503 294,1	1 027 195,89
2007_2	83,94%	6 054 947,7	1 229 488,33
		19 700 263,85	7 982 049,15

Tableau 3. 8 : Résultats de la méthode par tranche

Cette méthode permet notamment de réduire la volatilité du taux de recouvrement et de contenir son évolution en tenant compte de son niveau déjà atteint.

Ceci se confirme en comparant les graphiques ci-dessous qui opposent le déroulement des taux de recouvrement obtenus à partir de la méthode par tranche à ceux obtenus via la méthode de Chain Ladder standard (sans appliquer la contrainte qui limite le taux de recouvrement).

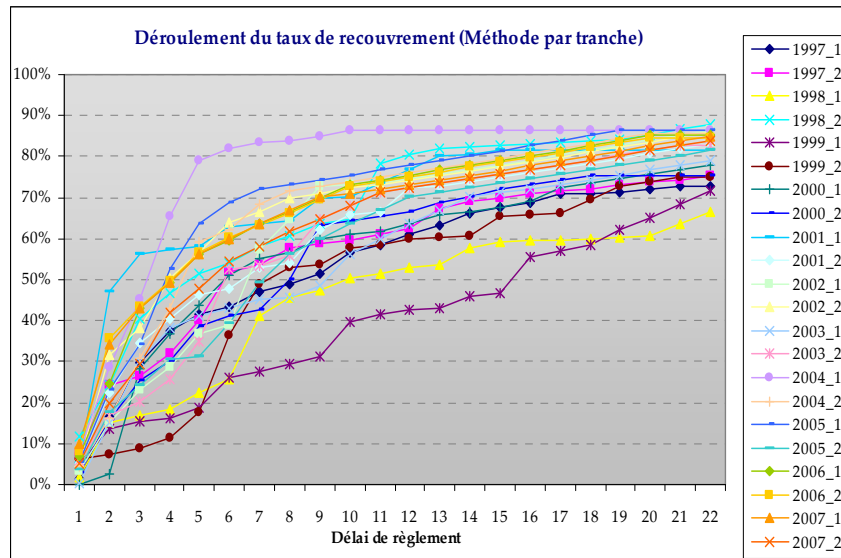


Figure 3.5 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par semestre de survenance déduit de la méthode par tranche

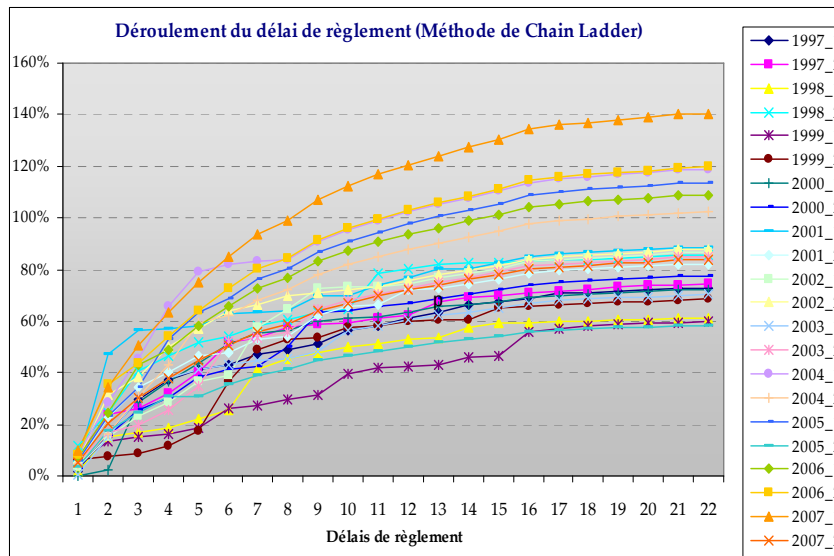


Figure 3.6 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par semestre de survenance déduit de la méthode de Chain Ladder (sans contrainte)

3. Extensions de la méthode par tranche

Cependant, cette modélisation ne tient pas compte de l'influence possible du semestre de survenance et du délai de règlement.

Nous avons choisi d'étendre le modèle à la prise en compte du semestre de déroulé. Ainsi l'évolution du taux de recouvrement $T_{i,j}$ en $j+1$, sera fonction à la fois de la tranche du taux de recouvrement $T_{i,j}$ et du semestre de déroulé j .

Cependant, l'estimation des coefficients en croisant chaque tranche de recouvrement avec chaque semestre de déroulé ne permet pas de garantir un nombre de données suffisant dans chaque

croisement et d'assurer la stabilité des coefficients. Ainsi, nous avons segmenté les délais de règlement en 5 tranches. En notant h la tranche des taux de recouvrement couvrant l'intervalle H et d la classe des semestres de déroulé couvrant l'intervalle D , les coefficients sont donc obtenus par la formule suivante :

$$\delta_{h,d} = \frac{\sum_{T_{i,j} \in H, j \in D} S_{i,j+1}}{\sum_{T_{i,j} \in H, j \in D} S_{i,j}} \quad \text{pour } h=1 \dots k \text{ et } d=0 \dots n$$

Les coefficients obtenus ainsi que le nombre d'observations de chaque tranche sont les suivants :

Coefficients	Semestres de déroulé				
tranche	[0-2]	[3-6]	[7-10]	[11-15]	[16-22]
0-10%	4,01	1,31			
10-20%	1,55	1,38			
20-30%	1,59	1,27	1,07		
30-40%	1,22	1,28	1,15		
40-50%	1,20	1,18	1,08	1,06	
50-60%		1,10	1,07	1,03	1,01
60-70%		1,10	1,04	1,03	1,01
70-100%		1,03	1,01	1,02	1,01

Nbr. de données	Semestres de déroulé				
tranche	[0-2]	[3-6]	[7-10]	[11-15]	[16-22]
0-10%	22	1			
10-20%	10	7			
20-30%	6	12	2		
30-40%	2	17	2		
40-50%	1	14	10	5	
50-60%		12	20	8	5
60-70%		5	14	21	3
70-100%		2	6	11	13

Tableau 3. 9 : Coefficients de passage de la méthode par tranche de recouvrement et par tranche de délai de règlement

De la même manière, pour appliquer la contrainte à chaque génération, on applique le coefficient relatif à la tranche [70 - 100%] si le taux $T_{i,j}$ (j appartenant à la tranche D) appartient en réalité à la tranche [70% - $s_i / \delta_{7,d}$].

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

semestres de survenance	taux ultime	Espoir de recouvrement	Provision C.D.
1997_1	72,89%	0,00	84 941,00
1997_2	74,66%	4 083,3	109 973,73
1998_1	62,34%	19 655,3	251 931,67
1998_2	85,86%	7 472,4	20 399,59
1999_1	60,93%	18 363,5	125 264,48
1999_2	70,53%	44 952,4	77 222,58
2000_1	72,38%	31 379,7	204 433,29
2000_2	75,28%	35 967,8	75 190,23
2001_1	82,01%	17 948,9	94 940,07
2001_2	80,12%	83 352,0	171 724,05
2002_1	83,78%	86 982,2	148 447,79
2002_2	83,74%	147 938,8	209 459,17
2003_1	72,84%	134 908,3	200 101,65
2003_2	80,45%	156 967,4	146 281,60
2004_1	86,64%	65 920,8	297 308,21
2004_2	84,92%	522 472,2	457 987,83

2005_1	86,34%	783 890,9	606 338,14
2005_2	75,91%	1 977 284,5	1 056 044,46
2006_1	84,79%	2 378 660,7	1 005 957,28
2006_2	84,43%	2 908 834,6	1 096 404,41
2007_1	85,05%	3 500 951,5	1 029 538,47
2007_2	82,45%	5 940 565,7	1 343 870,28
		18 868 553,02	8 813 759,98

Tableau 3. 10 : Résultats de la méthode par tranche de recouvrement et par tranche de délai de règlement

Le montant de provision est relativement plus élevé que dans la méthode par tranche de recouvrement. Le fait de tenir compte du semestre de survenance instaure un degré de prudence supplémentaire.

Le choix des méthodes déterministes de provisionnement présentées dans le chapitre précédent est issu de l'analyse des 3 tests de validation suivants. Ces tests permettent de vérifier la fiabilité des projections.

I. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE PAR LA PROJECTION DES RECOUVREMENTS A COURT TERME

1. Description de la méthode

Le calcul de l'erreur moyenne est obtenu à partir du sous-triangle T' des taux de recouvrement $T_{i,j}$ avec $i=0\dots n-1$ et $j=1\dots n$.

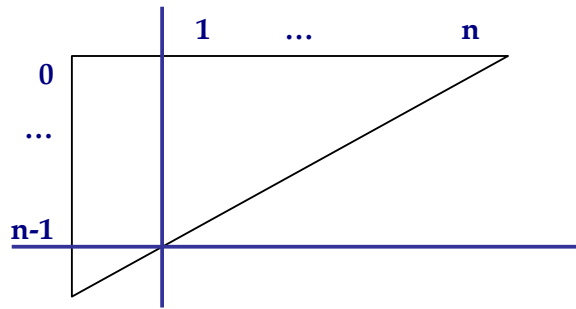


Figure 4. 1 : Représentation du sous-triangle T'

L'objectif est de calculer pour chacune des méthodes l'erreur de prévision du modèle à 1 an.

Les taux estimés $T_{i,j}^*$ sont obtenus en appliquant les coefficients de la méthode testée (λ_{j-1}^*) aux données réelles $T_{i,j-1}$.

Ainsi, les valeurs estimées du triangle T' sont définies¹ par :

$$T_{i,j}^* = \lambda_{j-1}^* T_{i,j-1} \quad \text{pour } i=0\dots n-1 \text{ et } j=1\dots n$$

¹ La formule suivante dépend cependant de la méthode utilisée. La formule exacte des valeurs projetées est donnée dans les paragraphes précédents.

L'erreur moyenne de prévision à un an, notée e^* , est définie comme la moyenne des écarts, en valeur absolue, entre la valeur estimée et la valeur observée sur le sous triangle T' :

$$e^* = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n |T_{i,j}^* - T_{i,j}|$$

Où m représente le nombre d'observations du sous triangle T', soit $m=n(n+1)/2$.

L'erreur moyenne obtenue pour chaque méthode va être comparée à la méthode standard, Chain Ladder. Ainsi, le pourcentage de gain de la méthode *, noté G^* , par rapport à la méthode Chain Ladder va permettre de faire une première sélection des méthodes à conserver.

$$G^* = \frac{e^{CL} - e^*}{e^*}$$

2. Résultats

Pour certaines méthodes il est impossible de calculer l'erreur moyenne. C'est le cas notamment de la méthode Cape Cod pour laquelle seul le taux ultime est connu, et qui ne possède donc pas de coefficients de passage. En outre l'erreur moyenne calculée pour la méthode des Moindres Carrées de De Vylder est difficilement comparable aux autres résultats. En effet, les taux de recouvrement projetés sont issus du produit de 2 coefficients et sont donc indépendants de la valeur précédente. Les erreurs moyennes de court terme et de long terme calculées pour cette méthode sont donc identiques. De plus, elles ont été calculées sur le triangle supérieur complet et non sur le sous triangle T'.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Méthode de validation à Court Terme		
Méthode	Erreur Moyenne	Pourcentage de gain par rapport à la méthode CL
Chain Ladder	0,03251	-
Chain Ladder modifié (médiane)	0,03088	5,29%
Lissage avec la courbe puissance inverse	0,03300	-1,47%
Méthode par tranche (taux)	0,03599	-9,66%
Méthode par tranche (taux*déroulé)	0,02957	9,95%
De Vylder	0,06662	-51,20%

Tableau 4. 1 : Erreur moyenne de court terme

Les graphiques ci-dessous décrivent l'évolution par semestre de survenance des prévisions des taux de recouvrement. On compare donc les taux observés (courbe bleue), les taux projetés par

la méthode de Chain Ladder (courbe verte) et ceux obtenus par la méthode par tranche (taux de recouvrement*déroulé) (courbe orange). Pour ne pas surcharger l'information, seuls les graphiques des premiers semestres des années entre 1997 et 2005 ont été représentés.

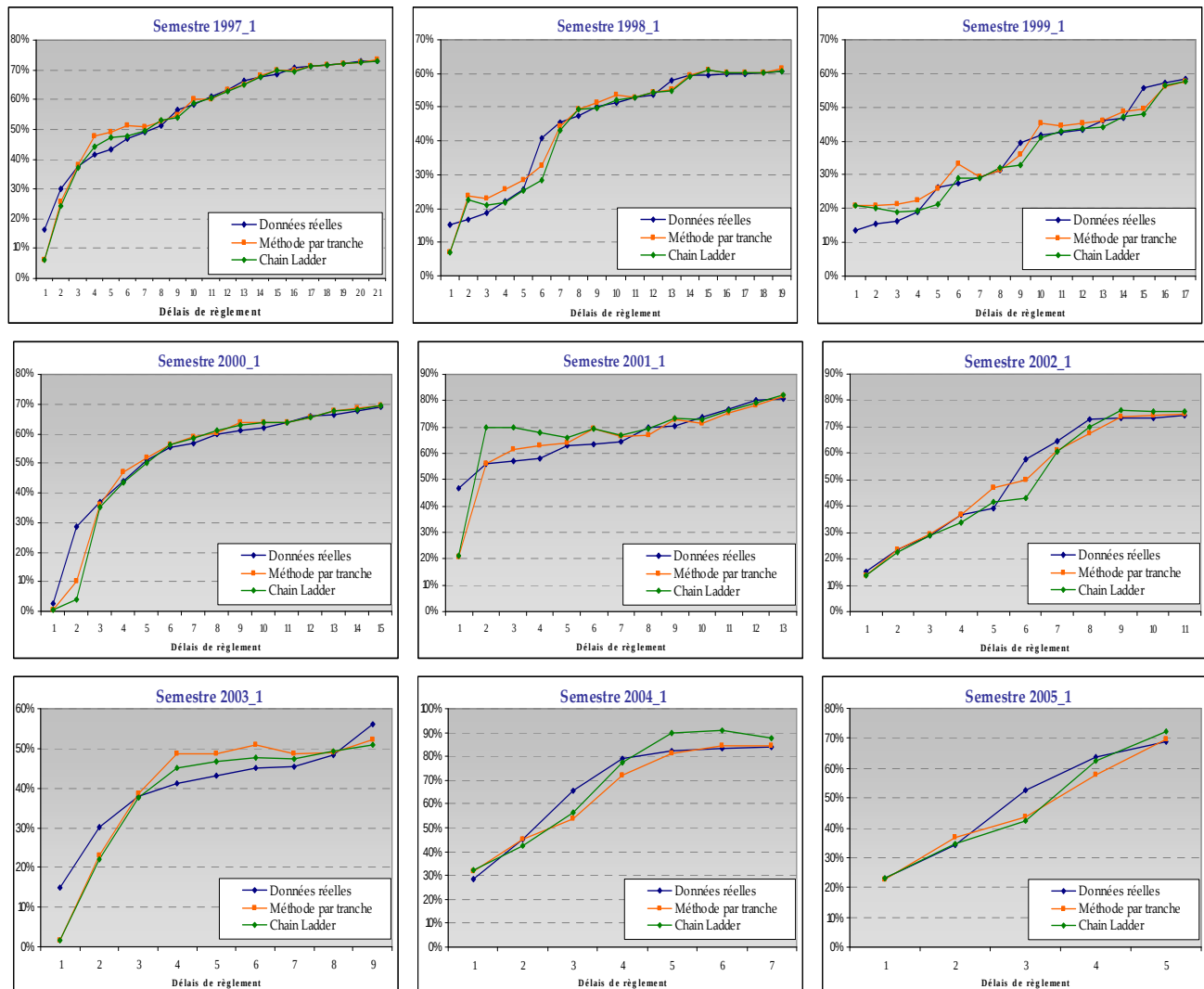


Figure 4. 2 : Ecarts de prévisions de recouvrement à court terme par semestre de surveillance

Ces graphiques illustrent le fait que les résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes sont très proches à court terme.

II. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE DES PROJECTIONS DE RECOUVREMENT A LONG TERME

1. Description de la méthode

L'erreur moyenne de long terme se calcule de la même manière que précédemment, à la différence que les taux estimés sont obtenus en appliquant le coefficient λ_j^* de la méthode * directement à la valeur estimée précédente, soit :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{i,j}^* &= \lambda_{j-1}^* \tilde{T}_{i,j-1}^* \\ \tilde{T}_{i,j}^* &= \lambda_0^* \times \dots \times \lambda_{j-1}^* \times T_{i,0}\end{aligned}\quad \text{pour } i=0\dots n-1 \text{ et } j=1\dots n$$

Les erreurs moyennes vont donc être plus élevées que dans l'approche de court terme car ici les erreurs se cumulent.

2. Résultats

Le calcul de l'erreur moyenne de long terme pour les méthodes de Cape Cod et des moindres carrés de De Vylder présente les mêmes limites que précédemment.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des résultats :

Méthode de validation à Long Terme		
Méthode	Erreur Moyenne	Pourcentage de gain par rapport à la méthode CL
Chain Ladder	0,27632	-
Chain Ladder modifié (Médiane)	0,26664	3,63%
Lissage avec la courbe puissance inverse	0,27355	1,01%
Méthode par tranche (taux)	0,10286	168,65%
Méthode par tranche (taux*déroulé)	0,14086	96,17%
De Vylder	0,06662	314,76%

Tableau 4. 2 : Erreur moyenne de long terme

A long terme, les méthodes semblent montrer toute leur efficacité. L'ensemble des méthodes testées présente une erreur moyenne plus faible que celle obtenue par la méthode de référence. Comme, nous l'avons explicité dans le paragraphe précédent, les résultats de la méthode de De Vylder sont à relativiser, étant donné que la méthode de calcul est différente. Cependant, il est indéniable que cette méthode donne de bons résultats. En dehors de cette approche nous pouvons noter le gain apporté par les méthodes par tranche.

Les graphiques suivants illustrent les écarts de long terme entre les valeurs prédites par la méthode de Chain Ladder et celles issues de la méthode par tranche de recouvrement.

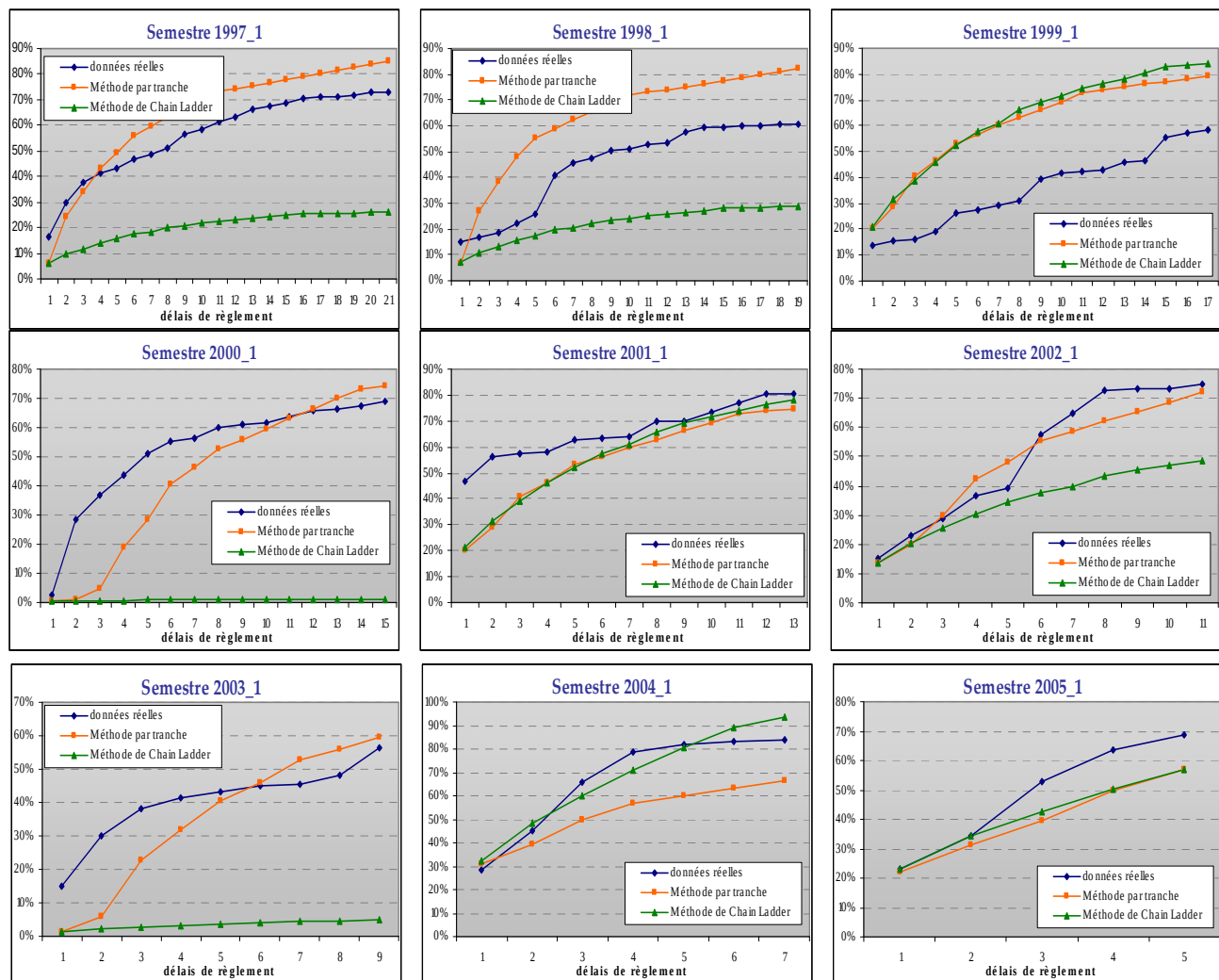


Figure 4.3 : Ecart de prévisions de recouvrement à long terme par semestre de survenance

La méthode par tranche semble surestimer l'évolution du taux de recouvrement, notamment pour les semestres les plus éloignés. Cependant, comparativement à la méthode de chain ladder, la méthode par tranche permet d'encadrer l'évolution des taux de recouvrement issue de valeurs « extrêmes ».

En effet, la projection des triangles supérieurs a permis de mettre en évidence une limite commune à la méthode de chain Ladder et à la méthode par tranche (taux de recouvrement*déroulé). Lorsque le taux initial est très faible, comme c'est le cas pour les semestres 2000_1 et 2003_1, les coefficients ne permettent pas de dérouler le triangle. De manière symétrique, lorsque le taux initial est trop élevé (semestre 1998_2), les valeurs projetées « s'envolent » très rapidement. Le triangle, calculé à partir de la méthode de Chain ladder, figurant en annexe 4 permet d'illustrer ce phénomène. Seule la méthode par tranche de taux de recouvrement permet de palier à cette limite. En effet, tant que le coefficient est trop faible, un fort coefficient est appliqué, de même si le taux de recouvrement initial est très élevé, le facteur qui sera appliqué est automatiquement

plus faible. Cependant, le fait de tenir compte également des semestres de déroulé retire ce caractère modérateur.

III. CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE PAR LES PROJECTIONS DES TAUX DE RECOUVREMENTS DE L'ANNEE N A PARTIR DE L'ANNEE N-1

1. Description de la méthode

Chacune des méthodes est appliquée au triangle de données vu en N-2. Les taux estimés pour les semestres N-1 et N sont ensuite comparés aux données connues issues de la vision en N. Ici nous sommes donc partis du triangle vu au 31/12/2006 et nous avons estimés les taux de recouvrement pour le premier et le second semestre 2007. Nous allons donc comparer ces deux valeurs aux données réelles issues du triangle au 31/12/2007.

L'erreur moyenne de la prévision, définie par $e^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\hat{S}_{i,n-i+1}^* - S_{i,n-i+1}|$, permet de rendre compte de l'efficacité du modèle en terme de prédiction sur un semestre.

2. Résultats

Le tableau suivant contient les erreurs moyennes au premier et au second semestre 2007 obtenues pour chacune des méthodes testées, ainsi que leur pourcentage de gain par rapport à la méthode mise en référence, Chain Ladder.

Méthode	Erreur Moyenne 2007_1	Pct. de gain / Chain Ladder	Erreur Moyenne 2007_2	Pct. de gain / Chain Ladder
Chain Ladder	0,02069		0,03731	
Chain Ladder modifié (Médiane)	0,01479	39,94%	0,03115	19,80%
Méthode par tranche	0,02418	-14,41%	0,03603	3,57%
Méthode par tranche*déroulé	0,01778	16,39%	0,02783	34,08%
De Vylder	0,02048	1,03%	0,03455	8,00%
Courbe de puissance inverse	0,02068	0,04%	0,03670	1,67%

Tableau 4.3 : Erreur moyenne de « la diagonale »

En dehors de la méthode par tranche simple pour l'estimation du premier semestre, les prévisions à un et deux semestres issues de chacune des méthodes sont plus fiables que la méthode de Chain Ladder.

Le graphique suivant représente les taux de recouvrement prédits pour le premier semestre 2007 pour chaque semestre de survenance. Ce graphique met en évidence le fait que les taux de recouvrement prédits par chacune des méthodes sont très proches. Les écarts les plus importants ont lieu sur les semestres les plus récents.

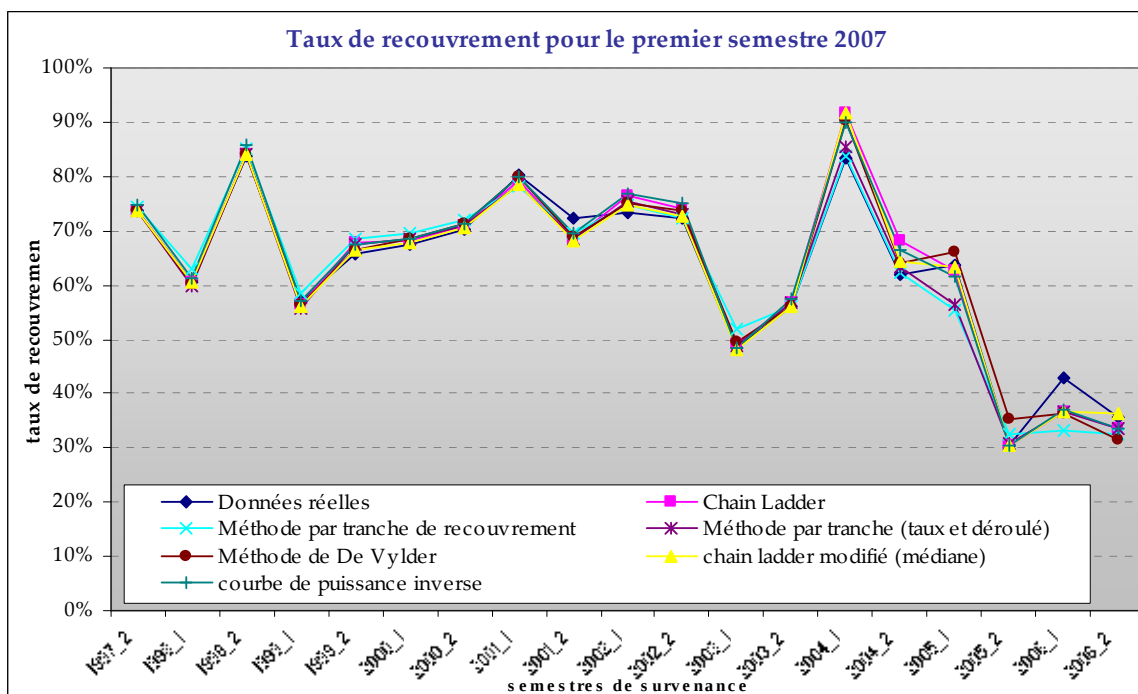


Figure 4. 4 : Ecart entre les prévisions du premier semestre 2007 obtenues par chaque méthode

IV. SYNTHESE DES PREVISIONS DE L'ESPOIR DE RECOUVREMENT

Ainsi, les tests de validation précédents ont permis de retenir les 7 méthodes de provisionnement déterministes.

Le tableau suivant permet de comparer l'espoir de recouvrement estimé par chacune d'entre-elles.

Méthode	Espoir de recouvrement	Provision C.D.
Chain Ladder	17 659 223	10 023 090
Chain Ladder modifié (Médiane)	16 768 862	10 913 451
Lissage par la courbe puissance inverse	18 220 626	9 461 687
Méthode par tranche de recouvrement	19 700 264	7 982 049
Méthode par tranche de recouvrement et de déroulé	18 868 553	8 813 760
De Vylder	17 298 567	10 383 746
Cape Cod	18 299 204	9 383 109

Tableau 4. 4 : Comparaison de l'espoir de recouvrement de chaque méthode

La méthode par tranche donne un montant de provisions pour créances douteuses faible comparativement aux autres méthodes. Cependant, dans une approche prudentielle, il est préférable de retenir une méthode moins optimiste quant à la possibilité de récupération.

L'usage d'une approche stochastique répond à la nécessité de quantifier l'incertitude présente dans les résultats obtenus via les méthodes déterministes. L'analyse de l'incertitude répond notamment aux exigences de Solvency 2 avec la détermination de la Risk margin. Cette marge repose donc sur la construction d'intervalles de confiance autour de l'espoir de recouvrement prédit.

L'approche stochastique suppose que les données utilisées – montant ou taux de recouvrement – puissent être considérées comme des variables aléatoires.

I. MODELE STOCHASTIQUE STANDARD : LE MODELE DE MACK

1. Présentation du modèle

La version stochastique de Chain Ladder a été introduite par T. Mack en 1993². Cette méthode permet notamment une estimation des erreurs commises lors de l'évaluation de l'espoir de recouvrement par la méthode de Chain Ladder standard. Elle repose sur les trois hypothèses suivantes :

- (i) Indépendance des semestres de survénances :
 $(S_{k,0}, \dots, S_{k,n})$ et $(S_{l,0}, \dots, S_{l,n})$ sont indépendants pour tout $k \neq l$
- (ii) L'espérance conditionnelle est sans biais :
 $E(S_{i,j+1} | S_{i,0}, \dots, S_{i,j}) = \lambda_j \cdot S_{i,j}$
- (iii) La variance conditionnelle de $C_{i,j}$ est donnée par :
 $V(S_{i,j+1} | S_{i,0}, \dots, S_{i,j}) = \sigma_j^2 \cdot S_{i,j}$

La première hypothèse signifie que les montants cumulés de recouvrement sont indépendants pour chaque semestre de survénance. Les hypothèses (ii) et (iii) permettent de considérer chaque facteur de développement $\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$ comme une variable aléatoire d'espérance conditionnelle

$$E\left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \middle| S_{i,0}, \dots, S_{i,j}\right) = \lambda_j \text{ et de variance conditionnelle } V\left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \middle| S_{i,j}\right) = \sigma_j^2.$$

² - Distribution-free calculation of standard error of Chain Ladder reserve estimates, T. Mack (1993) – ASTIN Bulletin 23, 213-225

- Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates, T. Mack (1993) – Meeting of the Casualty Actuarial Society, 101-182

- Which stochastic model is underlying the chain ladder method? , T. Mack (1994) – Insurance : Mathematics and Economics 15, 133-138

Sous les deux premières hypothèses, T. Mack (1993) a montré que le montant de recouvrement espéré coïncidait parfaitement avec celui déduit de la méthode standard de Chain Ladder.

Les coefficients de Chain Ladder estimés sous ces mêmes hypothèses sont sans biais et non corrélés :

$$E(\hat{\lambda}_j | B_j) = E \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-j} S_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} S_{i,j}} \middle| B_j \right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} E(S_{i,j+1} | B_j)}{\sum_{i=0}^{n-j} S_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \lambda_j \cdot S_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} S_{i,j}} = \lambda_j$$

où $B_k = \{S_{i,j} / j \leq k, i + j \leq n\}$

Démonstration :

En prenant l'espérance on obtient $E(\hat{\lambda}_j) = E[E(\lambda_j | D)] = \lambda_j$

Pour $j < k$, $E(\hat{\lambda}_j \cdot \hat{\lambda}_k) = E[E(\hat{\lambda}_j \cdot \hat{\lambda}_k | D)] = E[\hat{\lambda}_j E(\hat{\lambda}_k | D)] = E(\hat{\lambda}_j) E(\hat{\lambda}_k)$

Dans le modèle de Mack, le montant ultime de recouvrement serait défini, sous les hypothèses (i) et (ii), par :

$$E(S_{i,n} | D) = S_{i,n-i+1} \times \lambda_{n-i+1} \times \dots \times \lambda_{n-1}$$

Où $D = \{S_{i,j} / i + j < n\}$ représente l'ensemble des données observables.

Cependant, la projection des montants ne permet pas le respect de la contrainte qui garantit que le taux de recouvrement soit inférieur au seuil. L'application de la contrainte nous contraint donc à interrompre le déroulement du triangle dès l'instant où le taux de recouvrement cumulé dépasse le seuil autorisé. De ce fait, le montant ultime de recouvrement espéré ne se trouve pas forcément après un délai de n périodes.

Nous allons donc introduire pour chaque génération un nouvel horizon de projection n_i tel que $n_i = \max\{j : T_{i,j} \leq s_i\}$.

L'ensemble des hypothèses est donc dans notre cas restreint à l'ensemble $i=0 \dots n$ et $j=0 \dots n_i$.

Cette restriction va donc nous contraindre à adapter et à modifier l'ensemble des formules de Mack.

Ainsi le montant de recouvrement ultime espéré, sera défini par :

$$E(S_{i,n_i} | D) = S_{i,n-i+1} \times \lambda_{n-i+1} \times \dots \times \lambda_{n_i-1}$$

Par conséquent, le montant de l'espoir de recouvrement est donc défini par $R_i = S_{i,n_i} - S_{i,n-i}$.

Par extension on peut aussi montrer que $\hat{S}_{i,n_i} = S_{i,n-i} \times \hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{n_i-1}$ est un estimateur sans biais de S_{i,n_i} et que par conséquent $\hat{R}_i$ est un estimateur non biaisé de R_i :

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{ni-1}) &= \lambda_{n-i} \dots \lambda_{ni-1} \\ E(\hat{S}_{i,ni} | D) &= E(S_{i,n-i} \times \hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{ni-1}) = S_{i,n-i} \times E(\hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{ni-1}) = S_{i,ni} \\ E(\hat{R}_i) &= E(\hat{S}_{i,ni} - S_{i,n-i}) = E(\hat{S}_{i,ni}) - S_{i,n-i} = R_i \end{aligned}$$

2. Erreur quadratique moyenne

L'incertitude présente dans la prévision du montant de recouvrement ultime $\hat{S}_{i,ni}$ est mesurée par l'erreur quadratique moyenne ou means square error. L'erreur quadratique moyenne représente la distance moyenne entre l'estimateur et la vraie valeur.

La relation $R_i = S_{i,ni} - S_{i,n-i}$ implique que l'erreur quadratique moyenne de l'espoir de recouvrement pour chaque semestre de survénance, définie par $mse(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 | D]$ est égale à l'erreur d'estimation du montant final des recouvrements survenus ce même semestre.

$$mse(\hat{R}_i) = E[(\hat{S}_{i,ni} - S_{i,n-i}) - (\hat{S}_{i,ni} - S_{i,n-i})^2 | D] = E[(\hat{S}_{i,ni} - S_{i,n-i})^2 | D] = mse(\hat{S}_{i,ni})$$

Il convient donc de calculer, non pas l'erreur de prévision de $\hat{S}_{i,n}$ comme dans le cas développé dans Mack (1993), mais l'erreur quadratique moyenne de $\hat{S}_{i,ni}$.

On définit alors :

$$mse(\hat{S}_{i,ni}) = E[(\hat{S}_{i,ni} - S_{i,ni})^2 | D]$$

Soit en décomposant selon la formule $E(X - a)^2 = V(X) + [E(X) - a]^2$:

$$mse(\hat{S}_{i,ni}) = V(S_{i,ni} | D) + [E(S_{i,ni} | D) - \hat{S}_{i,ni}]^2$$

Le premier terme $V(\hat{S}_{i,ni} | D)$ est égal à :

$$V(\hat{S}_{i,ni} | D) = V(S_{i,ni} | D) = S_{i,n-i} \sum_{k=n-i}^{ni-1} \lambda_{n-i} \dots \lambda_{k-1} \sigma_k^2 \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{ni-1}^2$$

Avec :

$$\begin{aligned} - \hat{S}_{i,j} &= \hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{j-1} \cdot S_{i,n-i} \text{ pour tout } j > n-i \\ - \hat{\sigma}_j^2 &= \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j} S_{i,j} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 \text{ pour } j=0 \dots n-2 \end{aligned}$$

Etant donné qu'une seule observation est disponible pour σ_{n-1}^2 , il est nécessaire d'extrapoler la série

$$\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_{n-2} \text{ en imposant que la condition } \frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2} \text{ soit vérifiée, pour autant que } \hat{\sigma}_{n-3}^2 > \hat{\sigma}_{n-2}^2.$$

Cela revient à prendre $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min \{ \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \} \right\}$.

Sous les hypothèses de Mack, ces estimateurs sont non biaisés.

Démonstration :

En adoptant, les mêmes abréviations que dans l'article de Mack, à savoir : $E_i(X) = E(X|S_{i,0}, \dots, S_{i,n-i})$ et

$V_i(X) = V(X|S_{i,0}, \dots, S_{i,n-i})$ on calcule $V(S_{i,ni}|D) = V_i(S_{i,ni})$:

$$V(S_{i,ni}|D) = E_i[V(S_{i,ni}|S_{i,0}, \dots, S_{i,ni-1})] + V_i[E(S_{i,ni}|S_{i,0}, \dots, S_{i,ni-1})]$$

$$V(S_{i,ni}|D) = E_i(S_{i,ni-1})\sigma_{ni-1}^2 + V_i(S_{i,ni-1})\lambda_{ni-1}^2$$

$$V(S_{i,ni}|D) = E_i(S_{i,ni-2})\lambda_{ni-2}^2\sigma_{ni-1}^2 + E_i(S_{i,ni-2})\sigma_{ni-2}^2\lambda_{ni-1}^2 + V_i(S_{i,ni-2})\lambda_{ni-2}^2\lambda_{ni-1}^2$$

....

$$V(S_{i,ni}|D) = S_{i,n-i} \sum_{k=n-i}^{ni-1} \lambda_{n-i} \dots \lambda_{k-1} \sigma_k^2 \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{ni-1}^2 \quad \text{Car } V_i(S_{i,n-i}) = 0$$

Le second terme $[E(S_{i,ni}|D) - \hat{S}_{i,ni}]^2$ se résout par :

$$[E(S_{i,ni}|D) - \hat{S}_{i,ni}]^2 = S_{i,ni}^2 \sum_{k=n-i}^{ni-1} \hat{\lambda}_{n-i}^2 \dots \hat{\lambda}_{k-1}^2 \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}} \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{ni-1}^2$$

Démonstration :

$$\text{On a } [E(S_{i,ni}|D) - \hat{S}_{i,ni}]^2 = S_{i,n-i}^2 (\lambda_{n-i} \dots \lambda_{ni-1} - \hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{ni-1})^2$$

Le terme $\Lambda = (\lambda_{n-i} \dots \lambda_{ni-1} - \hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{ni-1})$ peut se réécrire sous la forme $\Lambda = F_{n-i} + \dots + F_{ni-1}$ en posant

$$F_k = \hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{k-1} (\lambda_k - \hat{\lambda}_k) \lambda_{k+1} \dots \lambda_{ni-1}.$$

On peut alors, séparer le Λ^2 en deux termes car $\Lambda^2 = \sum_{k=n-i}^{ni-1} F_k^2 + 2 \sum_{j < k} F_j F_k$ et approximer les termes F_k^2 et

$F_j F_k$ par leur espérance conditionnelle.

Or $E(F_j F_k | B_k) = 0$ car on a montré précédemment que $E(\lambda_k - \hat{\lambda}_k | B_k) = 0$

$$\text{Et } E(F_k^2 | B_k) = E[(\hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{k-1} (\lambda_k - \hat{\lambda}_k) \lambda_{k+1} \dots \lambda_{ni-1})^2 | B_k]$$

$$E(F_k^2 | B_k) = \hat{\lambda}_{n-i}^2 \dots \hat{\lambda}_{k-1}^2 E(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2 \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{ni-1}^2$$

$$E(F_k^2 | B_k) = \hat{\lambda}_{n-i}^2 \dots \hat{\lambda}_{k-1}^2 \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}} \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{ni-1}^2$$

$$\text{Car } E(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2 = V(\hat{\lambda}_k | B_k) = V\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}} \middle| B_k\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} V(S_{i,k+1} | B_k)}{\left(\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}\right)^2} = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}}$$

On peut alors remplacer $\Lambda^2 = \left(\sum_{k=n-i}^{ni-1} F_k\right)^2$ par $\sum_{k=n-i}^{ni-1} E(F_k^2 | B_k)$ et l'estimer en remplaçant les paramètres λ_k et σ_k^2 inconnus par leur estimateur sans biais.

Enfin, l'indépendance entre les semestres de survénance, imposée dans l'hypothèse (i), conduit à la relation linéaire de la variance $V(R) = \sum_{i=1}^n V(R_i)$ et permet d'estimer l'erreur quadratique moyenne par :

$$mse(R) = mse\left(\sum_{i=1}^n R_i\right) = \sum_{i=1}^n mse(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} C_{i_1, ni_1-i_1} C_{i_2, ni_2-i_2} F_{i_1} F_{i_2}$$

Où comme précédemment, si $i_1 < i_2$, on remplace $F_{i_1} F_{i_2}$ par $E(F_{i_1} F_{i_2} | B_{i_2})$:

avec

$$E(F_{i_1} F_{i_2} | B_{i_2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_{i_2} - 1 < n - i_1 + 1 \text{ (} \Leftrightarrow \text{ si } F_{i_1} \cap F_{i_2} = \emptyset \text{)} \\ \sum_{k=n-i}^{\min(ni_1, ni_2)-1} \hat{\lambda}_{n-i_2} \dots \hat{\lambda}_{n-i_1-1} \hat{\lambda}_{n-i_1}^2 \dots \hat{\lambda}_{k-1}^2 \frac{\sigma_k^2}{\sum_{n=0}^{n-k} S_{n,k}} \hat{\lambda}_{k+1}^2 \dots \hat{\lambda}_{\min(ni_1, ni_2)-1}^2 \hat{\lambda}_{\min(ni_1, ni_2)}^2 \dots \hat{\lambda}_{\max(ni_1, ni_2)-1}^2 \end{cases}$$

3. Construction d'un intervalle de confiance : hypothèse d'une distribution log-normale des réserves

Afin de définir un intervalle de confiance autour de l'espoir de recouvrement pour chaque semestre de survénance, il est nécessaire de définir l'écart type des R_i . Celui-ci est donné par le calcul du standard error $se(\hat{R}_i) = \sqrt{mse(\hat{R}_i)}$.

Le modèle de Mack ne présuppose pas de distribution pour les montants de recouvrement espérés $\hat{R}_i$, cependant il devient nécessaire de poser une hypothèse paramétrique sur la forme de la distribution des $\hat{R}_i$ pour définir les intervalles de confiance autour de ceux-ci.

Classiquement, on utilise la loi normale de moyenne la valeur estimée $\hat{R}_i$ et d'écart-type $se(\hat{R}_i)$. L'intervalle de confiance à 95% est alors donné par $[\hat{R}_i - 1,96.se(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 1,96.se(\hat{R}_i)]$. Cependant, il est possible de remettre en cause l'utilisation de la loi normale, étant donné la symétrie de sa distribution qui ne semble pas se vérifier en pratique et la possibilité d'obtenir une

borne inférieure négative en dépit du fait que le montant de recouvrement espéré ne peut être négatif.

Dans cette optique, il est préférable de considérer une modélisation log-normale qui présente une distribution asymétrique, positive, avec une skewness strictement positive et des queues de distribution plus épaisses. Nous ferons donc l'hypothèse que la distribution de l'espoir de recouvrement peut être modélisée par une loi log-normale de paramètres μ_i et σ_i^2 .

En égalisant les deux moments aux moments estimés des réserves, on estime les paramètres μ_i et σ_i^2 :

$$\begin{cases} \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right) = \hat{R}_i \\ \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1) = [se(\hat{R}_i)]^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{se(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right) \\ \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \end{cases}$$

L'intervalle de confiance à 95% est alors donné par :

$$\left[\exp(\mu_i - 1,96.\sigma_i^2), \exp(\mu_i + 1,96.\sigma_i^2)\right] = \left[\hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 1,96.\sigma_i^2\right), \hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 1,96.\sigma_i^2\right)\right]$$

4. Résultats obtenus

R(i)	mse(Ri)	se(Ri)/Ri	Intervalle de confiance à 95 %			
			normal		log-normal	
			Borne inf	Borne sup	Borne inf	Borne sup
0	0	-				
1 448	500 261	49%	62	2 835	856	1 979
7 893	1 324 452	15%	5 637	10 148	7 494	8 139
6 670	783 909	13%	4 935	8 405	6 389	6 842
10 535	1 824 643	13%	7 888	13 183	10 121	10 789
23 245	8 666 108	13%	17 475	29 015	22 352	23 791
30 443	24 409 695	16%	20 760	40 127	28 557	31 621
35 867	474 158 450	61%	-6 812	78 546	16 576	56 709
0	0	-	-	-	-	-
107 619	887 365 137	28%	49 233	166 005	89 746	119 866
115 462	897 184 063	26%	56 754	174 170	98 368	126 980
208 527	1 656 102 270	20%	128 765	288 290	190 208	220 223
110 002	1 074 747 407	30%	45 747	174 258	89 226	124 554
183 843	2 437 141 160	27%	87 082	280 603	154 902	203 514
0	0	-	-	-	-	-
572 189	16 506 291 304	22%	320 374	824 003	506 979	614 790
756 568	58 378 355 733	32%	283 000	1 230 135	595 787	871 820
1 088 423	104 848 745 989	30%	453 768	1 723 078	883 477	1 231 885
2 348 559	286 707 558 645	23%	1 299 075	3 398 042	2 073 304	2 528 904
2 866 340	370 787 300 288	21%	1 672 850	4 059 829	2 571 392	3 057 149
3 452 190	1 394 309 883 733	34%	1 137 804	5 766 575	2 629 589	4 057 419
5 733 402	5 310 627 266 038	40%	1 216 622	10 250 183	3 966 563	7 134 616
17 659 223	9 325 830 553 166	17%	11 673 732	23 644 715	16 650 043	18 286 860

Tableau 5. 1 : Erreur quadratique moyenne par la méthode de Mack et intervalle de confiance

L'application de la contrainte revient à ajouter de l'information supplémentaire et de ce fait à diminuer la variance de l'espoir de recouvrement. L'intervalle de confiance à 95%, avec la loi log-normale, est relativement étroit. En effet, l'erreur quadratique moyenne est de 17%, c'est-à-dire que la variance de l'estimation $E(R_i)$ ne représente que 17% du montant total des recouvrements estimé.

Cependant, une des limites de cette approche relève du calcul fastidieux qui résulte de l'adaptation de la contrainte. Le calcul serait alors difficilement programmable pour être exploité dans une démarche régulière.

5. Test d'indépendance

Le modèle de Mack repose sur les trois hypothèses décrites précédemment. Si celles-ci ne sont pas vérifiées, le modèle n'est pas valide. Il est donc nécessaire de tester chacune d'elles.

L'hypothèse (i) d'indépendance des semestres de survenance peut être vérifiée par un test du signe en comparant les facteurs de développement individuels à la médiane par semestre de déroulement. Plus précisément, pour chaque valeur un + est associé si le facteur de développement est supérieur à la valeur médiane et un – dans le cas inverse.

Pour chaque semestre de survenance, on définit :

- n_{i+} : le nombre de + obtenus
- n_{i-} : le nombre de – obtenus
- $Z_i = \min\{n_{i+}, n_{i-}\}$

Sous l'hypothèse d'indépendance, on s'attend à obtenir autant de valeurs supérieures, qu'inférieures à la médiane, c'est-à-dire que la variable n_{i+} devrait suivre une loi binomiale $Bi(n, \frac{1}{2})$, avec $n = n_{i+} + n_{i-}$. Ici, le test portera sur la valeur de Z_i qui devra être proche de l'espérance de la binomiale, à savoir $n/2$. Plus précisément, la statistique de test t portera sur la somme des Z_i , à l'exception des valeurs correspondantes à un nombre d'information $n \leq 1$:

$$t = \frac{\sum_i Z_i - E\left[\sum_i Z_i\right]}{\sqrt{V\left[\sum_i Z_i\right]}}$$

Les moments de la variable Z_i peuvent se déduire du lemme suivant :

Si $X \sim Bi(n, \frac{1}{2})$, alors les deux premiers moments de $Z = \min(X, n-X)$ sont :

$$E(Z) = \frac{n}{2} - C_{n-1}^m \frac{n}{2^n}$$

$$V(Z) = \frac{n(n-1)}{4} - C_{n-1}^m \frac{n(n-1)}{2^n} + E(Z) - E(Z)^2$$

Où m est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Sous l'hypothèse nulle on a $E\left[\sum_i Z_i\right] = \sum_i E(Z_i)$ et $V\left[\sum_i Z_i\right] = \sum_i V(Z_i)$.

Les calculs intermédiaires pour chaque semestre de survénance sont résumés dans le tableau suivant :

ni+	ni-	Zi	ni	Ent(ni/2)	E(Zi)	V(Zi)
11	5	5	16	8	6,4290	1,5318
11	9	9	20	10	8,2380	1,8955
10	9	9	19	9	7,7380	1,6455
3	14	3	17	8	6,8308	1,4637
9	8	8	17	8	6,8308	1,4637
7	9	7	16	8	6,4290	1,5318
8	6	6	14	7	5,5337	1,3499
8	5	5	13	6	5,0337	1,0999
6	7	6	13	6	5,0337	1,0999
6	6	6	12	6	4,6465	1,1680
6	5	5	11	5	4,1465	0,9180
4	6	4	10	5	3,7695	0,9859
5	4	4	9	4	3,2695	0,7359
4	3	3	7	3	2,4063	0,5537
3	4	3	7	3	2,4063	0,5537
4	2	2	6	3	2,0625	0,6211
2	2	2	4	2	1,2500	0,4375
2	2	2	4	2	1,2500	0,4375
1	2	1	3	1	0,7500	0,1875
0	1	0	1	0	0,0000	0,0000
0	1	0	1	0	0,0000	0,0000
					84,0536	19,6806

Tableau 5. 2 : Calculs intermédiaires au test d'indépendance

La statistique T vaut ici 1,34. On peut supposer que la statistique peut être approximée par une loi normale $N(0,1)$. Pour un seuil de 5%, on peut donc conclure que l'hypothèse d'indépendance entre les semestres de survénance est acceptée ($-1,96 \leq t=1,34 \leq 1,96$).

L'hypothèse (ii) se traduit par le fait que pour un semestre de déroulé j fixé, les points $(S_{i,j}, S_{i,j+1})$ doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine et de pente $\hat{\lambda}_j$. Ces graphiques ont été présentés dans le paragraphe relatif à la méthode de Chain Ladder. Nous supposons donc que les constantes issues des régressions linéaires sont négligeables.

Enfin, l'hypothèse (iii) s'interprète graphiquement par le fait que pour un semestre de déroulé j donné, la représentation des points $(C_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$ doit être non structurée. Les $\varepsilon_{i,j}$ représentent les résidus de l'estimation par moindres carrés, soit :

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Les graphiques suivants représentent respectivement les points $(C_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$ pour $j=0, 2, \dots, 10$, soit les données des semestres de déroulé pairs dans un délai de 0 à 10 semestres.

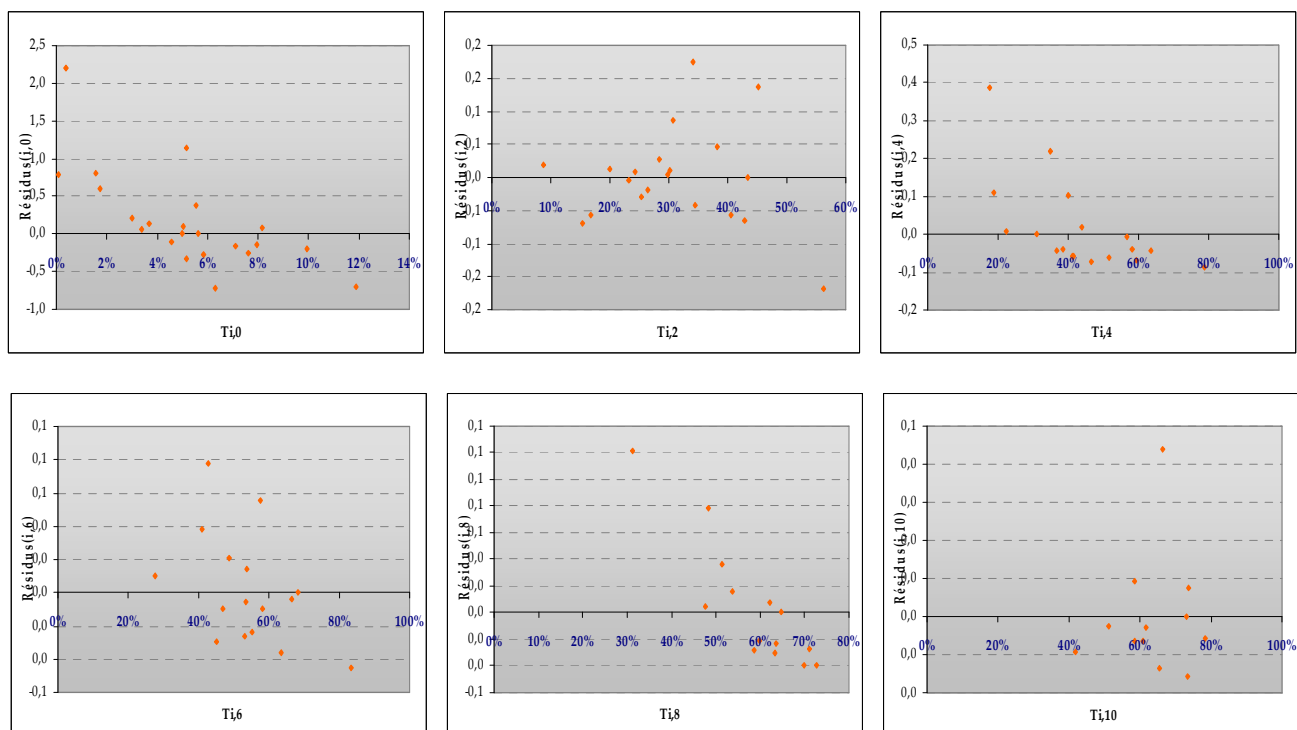


Figure 5.1 : Graphique des $(C_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$

Les graphiques ci-dessus ne permettent pas de remettre en question la validité de l'hypothèse.

Les trois hypothèses du modèle de Mack sont donc validées.

II. MODELISATION GLM

Le modèle linéaire généralisé a été développé initialement en 1972 par Nelder et Wedderburn. Il a été largement repris par la suite par Mc Cullagh et Nelder (1983), Aitkin et Al (1990) et Lindset (1989).

Un modèle linéaire généralisé est une extension du modèle linéaire gaussien car il permet de considérer une loi de probabilité autre que la loi gaussienne et une fonction de lien autre que l'identité.

1. Présentation du modèle

a. Composantes du modèle

Les modèles linéaires généralisés sont caractérisés par trois composantes :

• La composante aléatoire

On suppose que les variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire les montants de recouvrement **non cumulés** $\{C_{i,j} ; i, j = 0, \dots, n\}$, admettent une distribution issue d'une structure exponentielle.

La densité de $C_{i,j}$ s'écrit donc sous la forme :

$$f(c_{ij}, \theta_{ij}, \phi) = \exp \left\{ \frac{c_{ij} \theta_{ij} - b(\theta_{ij})}{\phi} + d(c_{ij}, \phi) \right\}$$

Où

- θ_{ij} est appelé paramètre naturel de la famille exponentielle
- ϕ est appelé paramètre de dispersion. Il est indépendant de i et j . Il est égal à 1 pour les lois à un paramètre (Poisson, Binomiale).
- b et d sont des fonctions régulières spécifiques à la distribution.

On en déduit les relations sur l'espérance μ_{ij} et la variance des montants suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= E(C_{i,j}) = b'(\theta_{ij}) \\ V(C_{i,j}) &= \phi b''(\theta_{ij}) = \phi b''[v'^{-1}(\mu_{ij})] = \phi V(\mu_{ij}) \\ \mu_3(C_{i,j}) &= \phi^2 V(\mu_{i,j}) V'(\mu_{i,j}) \\ \gamma_1(C_{i,j}) &= \frac{\mu_3(C_{i,j})}{[V(C_{i,j})]^{3/2}} = \sqrt{\phi} \frac{V'(\mu_{i,j})}{[V(\mu_{i,j})]^{1/2}} \end{aligned}$$

La fonction V est la fonction variance de la distribution.

Cette fonction peut prendre différentes formes selon la distribution considérée.

- La composante systématique

La composante systématique est une composante déterministe du modèle. La plupart des modèles de provisionnement sont basés sur un prédicteur linéaire η de la forme :

$$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j ; \quad i, j = 0, \dots, n$$
$$\text{Avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0$$

Où

- μ : représente l'inflation, supposée constante. Dans certains modèles ce paramètre est nul.
- α_i : paramètre dépendant du semestre de survénance
- β_j : paramètre relatif au délai de règlement

Pour chaque montant de recouvrement (non cumulé), les variables α_i et β_j sont créées comme des variables dichotomiques valant 1 si le taux de recouvrement est celui respectivement du semestre de survénance i et du délai de règlement j. Le modèle comporte donc 2n+1 variables. Les paramètres α_0 et β_0 correspondant au premier semestre 1997 et au premier semestre de déroulé sont mis en référence.

- La fonction de lien

Il existe une relation fonctionnelle entre les composantes aléatoires et la composante systématique :

$$\eta_{ij} = g(\mu_{ij}) \quad i, j = 0 \dots n$$

Où g est appelé fonction de lien et est supposée monotone et différentiable.

Les fonctions de lien standards sont :

- lien identité : $\eta_{ij} = \mu_{ij}$
- lien logarithmique : $\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij})$ soit $\mu_{ij} = \exp(\eta_{ij})$

Le lien logarithmique présente l'avantage d'introduire une relation multiplicative entre les différents paramètres.

2. Spécification des modèles testés

a. La version stochastique du modèle de Chain Ladder

Renshaw & Verrall (1998) ont montré que le modèle déterministe de Chain Ladder prédit exactement les mêmes montants que le modèle poissonnien (simple ou sur-dispersé) avec une fonction de lien de type logarithmique.

Plus spécifiquement, pour le modèle de poisson simple, on considère que les montants de recouvrement incrémentaux $C_{i,j}$ sont indépendants et suivent une loi de poisson de paramètre $\alpha_i \beta_j$.

$$\text{On aura donc : } \begin{cases} P(X = x) = \exp[(x \ln \lambda - \lambda) + d(x)] \quad x \in N \\ \text{soit } \theta = \ln \lambda ; \phi = 1 ; E(X) = \lambda ; V(\mu) = \mu ; W(\mu) = \mu \end{cases}$$

Une contrainte sur les paramètres β_j est nécessaire afin que le modèle soit identifiable. La contrainte $\beta_0 + \dots + \beta_n = 1$ permet en outre l'interprétation des β_j comme la fraction des recouvrements ayant eu lieu au cours du $j^{\text{ème}}$ semestre et des α_i comme le montant des recouvrements perçu le semestre i .

L'estimation des paramètres est obtenue en maximisant la log-vraisemblance du modèle linéaire généralisé.

$$\begin{aligned} L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \exp(-\alpha_i \beta_j) \frac{(\alpha_i \beta_j)^{C_{i,j}}}{C_{i,j}!} \\ \log L &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n -\alpha_i \beta_j + C_{i,j} \log(\alpha_i \beta_j) - \log(C_{i,j}!) \end{aligned}$$

Le modèle de poisson sur-dispersé permet de s'affranchir de l'hypothèse d'égalité entre l'espérance et la variance induite par le modèle de poisson simple et permet d'introduire un peu de souplesse. Cependant, le paramètre de dispersion ϕ est constant et implique donc que la relation de proportionnalité entre l'espérance et la variance des montants de recouvrement incrémentaux soit la même quels que soient les semestres de développement et les semestres de survénance.

Le modèle de Poisson sur-dispersé $P^{sd}(\lambda, \phi)$ peut s'écrire comme :

$$\begin{cases} X \approx P^{sd}(\lambda, \phi) \text{ ssi } \frac{X}{\phi} \approx P\left(\frac{\lambda}{\phi}\right) \\ E(X) = \lambda ; V(X) = \phi E(X) ; V(\mu) = \mu \end{cases}$$

b. La version stochastique du modèle de De Vylder

L'équivalent stochastique du modèle déterministe des moindres carrés de De Vylder peut être obtenu en considérant une modélisation GLM à partir d'une distribution normale et d'une fonction de lien multiplicative $\mu_{ij} = \alpha_i \beta_j$.

$$\text{Soit pour une loi Normale } N(\mu, \sigma^2): \begin{cases} f(x) = \exp\left[\left(\mu x - \frac{\mu^2}{2}\right) \frac{1}{\sigma^2} + d(x, \sigma^2)\right] & x \in R \\ \text{soit } \theta = \mu ; \phi = \sigma^2 ; E(X) = \mu ; V(\mu) = 1 \end{cases}$$

Les paramètres α_i et β_j sont donc définis comme les estimateurs du maximum de vraisemblance dans le modèle $C_{i,j} \sim N(\alpha_i \beta_j, \sigma^2)$.

Les résultats sont obtenus à partir de la maximisation de la vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C_{i,j} - \alpha_i \beta_j}{\sigma}\right)^2\right] \\ \log L &= -n \ln(\sigma \sqrt{2\pi}) - \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i,j} - \alpha_i \beta_j}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

c. Modélisation par une loi Gamma

Enfin, nous testerons également une modélisation par la loi Gamma.

La spécification de la densité est la suivante :

$$\text{Loi Gamma } G\left(r, \frac{r}{\mu}\right) : \begin{cases} f(x) = \exp\left[\left(-\frac{x}{\mu} - \ln(\mu)\right)r + d(x, r)\right] & x > 0 \\ \text{soit } \theta = -\frac{1}{\mu} ; \phi = \frac{1}{r} ; E(X) = \mu ; V(\mu) = \mu^2 ; W(\mu) = 2\mu^3 \end{cases}$$

La fonction de vraisemblance associée s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\Gamma(1/\phi) C_{i,j}} \left(\frac{C_{i,j}}{\phi \alpha_i \beta_j}\right)^{1/\phi} \exp\left(-\frac{C_{i,j}}{\phi \alpha_i \beta_j}\right) \\ \log L &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\phi} \log\left(\frac{C_{i,j}}{\phi \alpha_i \beta_j}\right) - \frac{C_{i,j}}{\phi \alpha_i \beta_j} - \log(C_{i,j}) - \log(\Gamma(1/\phi)) \end{aligned}$$

3. Synthèse des résultats

a. Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_j$ est obtenue par maximisation de la log-vraisemblance, et plus particulièrement par la résolution numérique (via l'algorithme de Newton Raphson) du système d'équation des dérivées partielles.

Pour chaque modèle, les résultats de l'estimation des paramètres figurent en annexe 5.

b. Résidus et validation du modèle

Le graphe des résidus peut permettre de détecter la présence de valeurs aberrantes. Pour chaque cellule du triangle supérieur (tel que $i+j < n$), 3 types de résidus peuvent être définis :

- les résidus bruts : $r_{i,j} = C_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}$; En pratique ces résidus ne sont pas adaptés.

- Les résidus non standardisés de Pearson : $r_{ij}^{(p)} = \frac{C_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sigma(\hat{\mu}_{ij})}$

- Les résidus de la déviance :

$$r_{ij}^{(d)} = \text{sgn}(C_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}) \sqrt{d_{ij}}$$

$$d_{ij} = 2 \left\{ C_{i,j} (\tilde{\theta}_{ij} - \hat{\theta}_{ij}) - [b(\tilde{\theta}_{ij}) - b(\hat{\theta}_{ij})] \right\}$$
 où $\tilde{\theta}_{ij} = b'^{-1}(C_{i,j})$ et $\hat{\theta}_{ij} = b'^{-1}(\hat{\mu}_{i,j})$

A partir des résidus de déviance, il est possible de déterminer un estimateur convergent de ϕ par

$$\hat{\phi} = \frac{D}{t - p} ; \text{ avec } t \text{ le nombre de données du modèle et } p \text{ le nombre de paramètres de la régression.}$$

Des indicateurs de la qualité d'ajustement du modèle aux données et d'analyse des résidus sont donnés par :

- La statistique du χ^2 de Pearson : $\chi^2 = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j < n}}^n \frac{(C_{i,j} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})}$

- La Déviance : $D = 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j < n}}^n \left\{ C_{i,j} (\tilde{\theta}_{ij} - \hat{\theta}_{ij}) - [b(\tilde{\theta}_{ij}) - b(\hat{\theta}_{ij})] \right\}$

Plus la déviance D est faible, plus l'ajustement par le modèle est bon. Cependant, cet indicateur ne permet pas de comparer plusieurs modélisations entre-elles, sauf dans le cas où la composante aléatoire est identique.

Pour pouvoir comparer les modèles à structure (V, ϕ) différentes, Nelder et Al. (1987) ont introduit la quasi-vraisemblance étendue q^+ . Pour choisir un modèle, il suffit de minimiser la fonction :

$$-2q^+(C, \mu) = \frac{1}{\phi} \sum_{i+j \leq n} d_{i,j} + \sum_{i+j \leq n} \ln[2\pi\phi V(C_{i,j})] .$$

Les graphiques suivants représentent la distribution des résidus de Pearson dans chacune des modélisations.

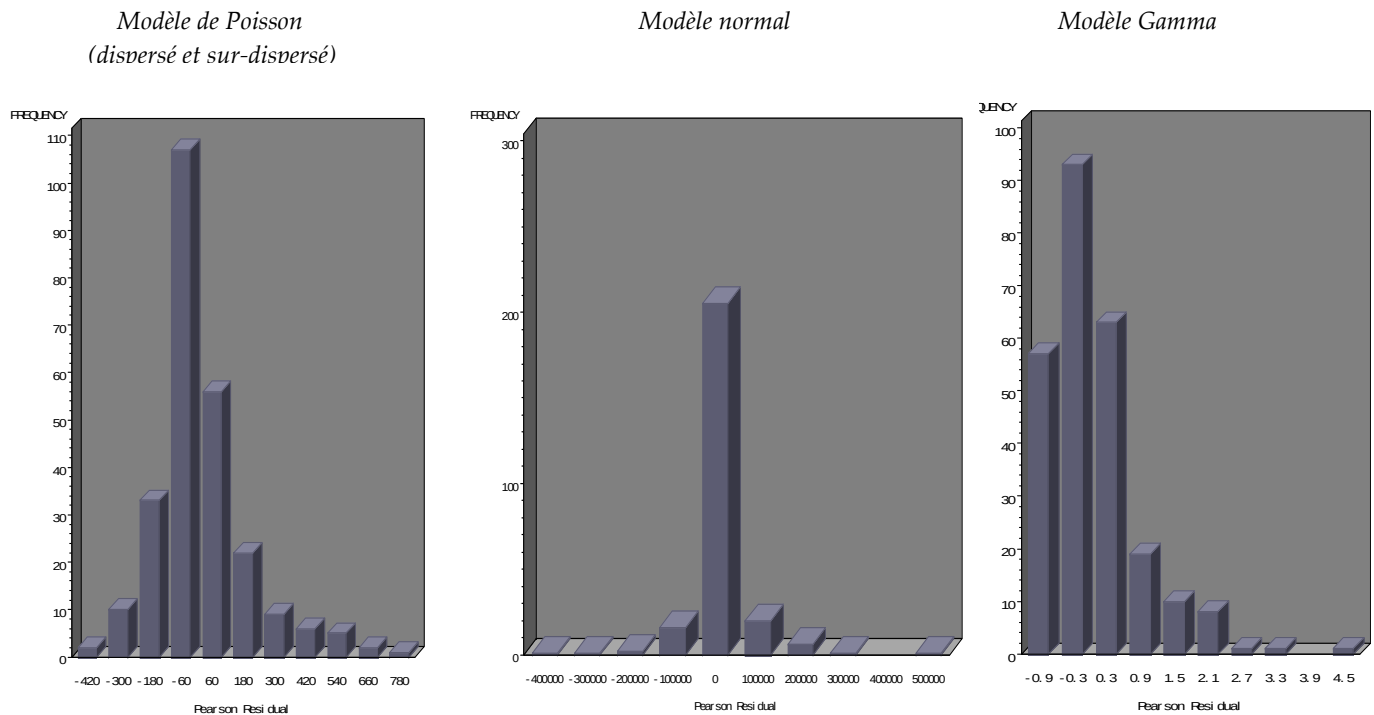


Figure 5. 2 : Distribution des résidus de Pearson

Les résidus du modèle normal présentent une dispersion importante. Cela peut s'interpréter comme le fait qu'un nombre significatif d'observations est mal modélisé par la loi normale. De plus ce modèle présente une déviance très importante. Les résultats issus de cette approche seront donc relativisés.

Le tableau suivant donne la statistique $-2q^+$ obtenue pour chacune d'entre-elles.

statistique $-2q^+$			
<i>Poisson sur dispersé</i>	<i>Poisson simple</i>	<i>Gamma</i>	<i>Normal</i>
8 677	7 448 103	5 885	12 038

Tableau 5. 3 : Valeurs de la statistique $-2q^+$

Les résultats nous indiquent que le modèle de poisson simple ne semble pas adapté à nos données. Nous allons donc l'exclure de nos résultats et nous focaliser sur les distributions normale, gamma et poisson sur-dispersé.

c. Projection des triangles et application de la contrainte

Les montants prédits $\hat{\mu}_{ij}$ sont déduits de la relation $\hat{\mu}_{ij} = g^{-1}(\hat{\eta}_{ij}) = g^{-1}(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$.

La projection des triangles de recouvrement dans chacun des cas, ne permet pas de tenir compte de la contrainte.

Pour respecter la contrainte prudentielle, nous allons arrêter le recouvrement dès lors que le taux de recouvrement ultime dépasse le seuil correspondant. Ainsi pour chaque triangle projeté, les montants incrémentaux de recouvrement seront mis à zéro lorsqu'ils ne permettent pas le respect de la contrainte, soit :

$$\tilde{\mu}_{i,j} = \begin{cases} \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) & \text{si } \frac{1}{\sin(i)} \left[\sum_{j=0}^{n-i} C_{i,j} + \sum_{j=n-i+1}^i \hat{\mu}_{i,j} \right] \leq s_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors les taux de recouvrement ultimes suivants :

Semestres de survénance	Taux de recouvrement ultime		
	Poisson (simple et sur-dispersé)	Normal	Gamma
1997_1	72,9%	72,9%	72,9%
1997_2	74,3%	74,3%	74,3%
1998_1	61,3%	61,3%	61,3%
1998_2	85,7%	85,6%	85,5%
1999_1	59,8%	59,4%	60,4%
1999_2	68,5%	67,6%	68,6%
2000_1	72,3%	72,2%	71,6%
2000_2	75,3%	75,5%	75,1%
2001_1	80,4%	80,4%	81,9%
2001_2	82,3%	82,3%	81,2%
2002_1	86,8%	84,8%	86,2%
2002_2	88,1%	89,3%	84,9%
2003_1	69,8%	70,2%	68,8%
2003_2	83,1%	79,7%	83,4%
2004_1	83,7%	83,7%	83,7%
2004_2	86,5%	85,1%	85,4%
2005_1	85,7%	84,7%	80,9%
2005_2	55,8%	53,5%	56,2%
2006_1	84,3%	85,6%	83,0%
2006_2	83,8%	82,2%	82,9%
2007_1	84,3%	85,5%	77,0%
2007_2	79,7%	70,4%	85,7%

Tableau 5. 4 : Taux de recouvrement ultime des modélisations GLM

d. Définition des moments de l'espoir de recouvrement

Pour connaître les moments de l'espoir de recouvrement permettant ainsi de définir un risque d'estimation et d'estimer les quantiles de la distribution, il est nécessaire d'appréhender les moments des $\hat{\mu}_{ij}$, ou plutôt des $\tilde{\mu}_{ij}$. En effet, on définit les moments de l'espoir de recouvrement

total $R = \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n C_{i,j}$ par :

$$\begin{aligned}
E(R) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n E(C_{i,j}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n \mu_{i,j} \\
V(R) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(C_{i,j}) = \phi \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j}) \\
\gamma_1(R) &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\phi} \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n W(\mu_{i,j})}{\left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j}) \right]^{3/2}} = \sqrt{\phi} \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j}) V'(\mu_{i,j})}{\left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\mu_{i,j}) \right]^{3/2}}
\end{aligned}$$

Dans notre cas, l'estimateur de l'espérance de l'espoir de recouvrement par semestre de survenance s'écrit $\hat{E}(R_i) = \sum_{j>n-i} \tilde{\mu}_{ij}$ et le risque d'estimation défini par la variance de cet estimateur s'estime par :

$$V[\hat{E}(R_i)] = \sum_{j>n-i} \sigma_{as}^2(\tilde{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{j_1>n-i} \sum_{j_2>n-i} Cov_{as}(\tilde{\mu}_{ij_1}, \tilde{\mu}_{ij_2})$$

Cependant, le calcul exact des variances et covariances de $\tilde{\mu}_{ij}$ semble difficile. Il est donc nécessaire de recourir aux moments asymptotiques des $\tilde{\mu}_{ij}$. Deux méthodes de calcul peuvent être employées : la méthode Delta présentée dans le paragraphe suivant et la méthode de Bootstrap sur les résidus de Pearson qui sera explicitée dans le paragraphe relatif au Bootstrap.

e. Risque d'estimation par la méthode Delta

L'application de la méthode Delta est détaillée ci-dessous. Cependant, étant donné la mise à zéro de certaines estimations $\hat{\mu}_{ij}$ pour le respect de la contrainte, il est nécessaire de procéder à quelques modifications afin d'ajuster cette méthode à notre cas.

En notant $\sigma_{as}^2(\hat{\mu})$, $\sigma_{as}^2(\hat{\alpha}_i)$ et $\sigma_{as}^2(\hat{\beta}_j)$ les variances et $Cov_{as}(\hat{\mu})$, $Cov_{as}(\hat{\alpha}_i)$ et $Cov_{as}(\hat{\beta}_j)$ les covariances asymptotiques des paramètres, on peut définir la variance asymptotique de l'estimateur du prédicteur linéaire $\hat{\eta}$ par :

$$\sigma_{as}^2(\hat{\eta}) = \sigma_{as}^2(\hat{\mu}) + \sigma_{as}^2(\hat{\alpha}_i) + \sigma_{as}^2(\hat{\beta}_j) + 2Cov_{as}(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i) + 2Cov_{as}(\hat{\mu}, \hat{\beta}_j) + 2Cov_{as}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$$

Soit de façon équivalente, avec l'écriture matricielle : $\sum_{as}(\hat{\eta}) = J_{\eta} \sum_{as}(\hat{\xi}) J_{\eta}'$ où $\sum_{as}(\hat{\xi})$ désigne la matrice de variance covariance des estimateurs $\hat{\xi} = \{\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i)_{i=0 \dots n}, (\hat{\beta}_j)_{j=0 \dots n}\}$ de dimension $[2(n+1)+1, 2(n+1)+1]$, et J_{η} la matrice jacobienne relative à la transformation $\eta : \xi \rightarrow \eta(\xi) = \eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ de taille $[(n+1)^2, 2(n+1)+1]$ définie par :

$$\frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \mu} = 1, \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}, \frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \beta_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

A cette étape, il est nécessaire de mettre à zéro les lignes pour lesquelles la contrainte a été appliquée c'est-à-dire celles où le $\hat{\eta}_{i,j} = 0$.

On définit ensuite la matrice de variance covariance des $\hat{\mu}_{ij}$, notée $\Sigma_{as}(\hat{\mu})$, à partir de la matrice jacobienne D issue de la relation entre les $\eta_{i,j}$ et les $\mu_{i,j}$. La matrice D, de taille $[(n+1)^2, (n+1)^2]$ est une matrice diagonale dont les valeurs sont $(g^{-1})'(\eta_{i,j})$ soit dans le cas du lien logarithmique directement les valeurs estimées $\hat{\mu}_{i,j}$. Les valeurs de $\hat{\mu}_{i,j}$ qui ont été utilisées sont en réalité celles qui sont obtenues après la mise en place de la contrainte, soit les $\tilde{\mu}_{i,j}$.

On obtient alors : $\Sigma_{as}(\hat{\mu}) = D \Sigma_{as}(\hat{\eta}) D$.

Enfin, la matrice de variance covariance du montant espéré de recouvrement est donnée par $\Sigma_{as}([E(R_i)]) = J_{\mu} \Sigma_{as}(\hat{\mu}) J_{\mu}'$ avec J_{μ} la matrice Jacobienne $[n+1, (n+1)^2]$ de la fonction qui relie les $\hat{\mu}_{i,j}$ à $E(R_i)$, définie par :

$$\frac{\partial E(R_i)}{\partial \mu_{k,l}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 0 & \text{si } k = i, l \leq n-i \\ 1 & \text{si } k = i, l > n-i \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire de modifier la matrice J_{μ} puisque on a bien $E(R_i) = \sum_{j=n-i+1}^n \tilde{\mu}_{i,j}$.

La variance du montant total de recouvrement espéré $E(R)$ est donnée par la relation $\sigma_{as}^2([E(R)]) = J_R \Sigma_{as}([E(R_i)]) J_R'$ où J_R est la matrice ligne $[1, n+1]$ contenant que des 1, correspondant à la matrice jacobienne de l'application reliant les $E(R_i)$ à $E(R)$.

Le risque d'estimation pour chaque semestre de survenance est mesuré par le quotient de l'écart-type de $\hat{E}(R_i)$ et du montant espéré $\hat{E}(R_i)$: $\frac{\sigma_{as}[\hat{E}(R_i)]}{\hat{E}(R_i)}$.

Enfin, le risque d'estimation global est donné par : $\frac{\sigma_{as}[\hat{E}(R)]}{\hat{E}(R)}$.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Semestres de survenance	Modèle de Poisson sur-dispersé		Modèle Gamma		Modèle Normal	
	E(Ri)	se(Ri)/Ri	E(Ri)	se(Ri)/Ri	E(Ri)	se(Ri)/Ri
1997_1	0	-	0	-	0	-
1997_2	1 448	442,1%	1 424	80,4%	1 389	39,3%
1998_1	7 892	165,3%	7 241	50,9%	7 202	1583,9%
1998_2	6 670	124,1%	5 907	39,9%	6 448	1062,9%
1999_1	10 535	97,9%	14 863	34,2%	7 494	779,4%
1999_2	23 244	82,6%	24 184	30,8%	13 643	656,5%
2000_1	30 443	66,9%	24 371	28,4%	29 789	485,8%
2000_2	35 867	51,8%	33 902	30,6%	38 551	247,0%
2001_1	0	-	17 000	35,7%	0	-
2001_2	107 618	37,9%	95 070	26,4%	107 685	220,2%
2002_1	115 461	35,6%	109 753	26,6%	96 324	180,3%
2002_2	208 527	30,6%	164 545	26,6%	225 459	110,2%
2003_1	110 002	35,6%	102 358	27,8%	113 487	137,6%
2003_2	183 842	30,0%	185 999	28,7%	149 366	117,5%
2004_1	0	-	0	-	0	-
2004_2	572 190	20,2%	539 032	32,2%	526 540	35,7%
2005_1	756 568	18,3%	540 300	35,9%	709 624	32,9%
2005_2	1 088 422	20,5%	1 106 053	36,4%	988 981	66,7%
2006_1	2 348 561	14,7%	2 257 496	40,7%	2 432 984	19,8%
2006_2	2 866 340	14,1%	2 801 587	46,5%	2 747 548	12,1%
2007_1	3 452 191	15,0%	2 946 723	56,7%	3 528 573	19,8%
2007_2	5 733 401	32,9%	6 190 020	78,8%	5 016 282	26,1%
TOTAL	17 659 222	13,3%	17 167 827	32,8%	16 747 367	22,1%

Tableau 5. 5 : Espoirs de recouvrement et risques d'estimation des modèles GLM

f. Approximation de la distribution et quantiles

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées afin d'estimer la fonction de répartition de l'espoir de recouvrement total R , notée F_R , et d'estimer les quantiles de cette distribution.

Ces méthodes reposent sur l'estimation des moments de R , qui ont été explicités ci-dessus.

Tout d'abord, la méthode Delta permet de construire un intervalle de confiance asymptotique. Ensuite, nous utiliserons les méthodes de l'approximation Normal power, et l'approximation par la loi gamma translatée qui permettent d'estimer les quantiles de la distribution de l'espoir de recouvrement total.

- *Intervalle de confiance asymptotique*

Sous les conditions habituelles du maximum de vraisemblance, les paramètres estimés $\hat{\xi}$ admettent asymptotiquement une distribution normale $N(\hat{\xi}, \Sigma_{as}(\hat{\xi}))$. La méthode Delta permet alors d'affirmer que $\hat{\eta}$ et $\hat{\mu}$ suivent également une distribution normale respectivement donnée par $N(\hat{\eta}, \Sigma_{as}(\hat{\eta}))$ et $N(\hat{\mu}, \Sigma_{as}(\hat{\mu}))$. Par somme, la distribution de l'espoir de recouvrement total peut également être approximée par une loi normale $N(\hat{E}(R), \sigma^2_{as}[\hat{E}(R)])$.

Etant donnée la normalité asymptotique de l'espoir de recouvrement total, nous pouvons construire un intervalle de confiance à $1-\alpha\%$ autour de $E(R)$:

$$\left[E(R) - q_{1-\alpha} \sigma_{as} [E(R)] , E(R) + q_{1-\alpha} \sigma_{as} [E(R)] \right]$$

Où $q_{1-\alpha}$ désigne le $1-\alpha^{\text{ème}}$ quantile de la loi normale standard.

Pour un seuil de risque à 5% et à 1%, nous obtenons les intervalles asymptotiques suivants :

	Intervalle de confiance asymptotique			
	$\alpha = 5 \%$		$\alpha = 1 \%$	
Modèle de Poisson sur-dispersé	13 807 872	21 510 572	12 212 450	23 105 994
Modèle Gamma	7 916 020	26 419 635	4 083 458	30 252 197
Modèle Normal	10 665 412	22 829 322	8 145 961	25 348 773

Tableau 5. 6 : Intervalle de confiance asymptotique des modèles GLM

L'intervalle de confiance asymptotique de la modélisation Gamma est très étendu. En effet, cette modélisation présente l'erreur quadratique la plus importante.

- Méthode additive

La construction des quantiles de la distribution de R peut reposer sur les propriétés d'additivité des $C_{i,j}$ dans le cas des distributions de poisson (simple et sur-dispersé) et de la distribution normale.

En effet, si on fait l'hypothèse que les $C_{i,j}$ suivent une loi de poisson sur-dispersée $P(\mu_{i,j}, \phi)$, par somme on en déduit que R admet également une distribution poissonnienne $P(\mu_R, \phi)$ où

$\mu_R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n \mu_{i,j}$. Dans ce cas, la distribution de poisson peut être approximée par une loi normale

en procédant à une correction de continuité, soit $P(R \leq r) = \Phi \left[\frac{r - 1/2 - \mu_R}{\sqrt{\phi \mu_R}} \right]$.

Les quantiles peuvent ainsi être estimés par :

$$\hat{q}_{1-\alpha}^A(R) = \hat{\mu}_R - 1/2 + \sqrt{\hat{\phi} \hat{\mu}_R} q_{1-\alpha}$$

- Approximation normale Power

D'après l'approximation Normal Power, la fonction de répartition de l'espoir de recouvrement peut être approché par $F_R(x) \approx \Phi \left[\frac{-3}{\gamma_1} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_1^2} + 1} + \frac{6}{\gamma_1} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On en déduit la formule des $1-\alpha^{\text{ème}}$ percentiles de la distribution $q_{1-\alpha}^{NP} = \mu + \sigma \left[\frac{\gamma_1}{6} q_{1-\alpha}^2 + q_{1-\alpha} - 1 \right]$ soit d'après les valeurs estimées par le maximum de vraisemblance :

$$\hat{q}_{1-\alpha}^{NP} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \left[\frac{\hat{\gamma}_1}{6} q_{1-\alpha}^2 + q_{1-\alpha} - 1 \right]$$

- *Approximation Gamma tradatée*

La distribution de l'espoir de recouvrement peut être approximée par une loi Gamma tradatée de paramètres $\Gamma(v, \beta, x_0)$. Les paramètres sont estimés par la méthode des moments, selon les équations suivantes :

$$E(R) = x_0 + \frac{v}{\beta}, \quad \sigma^2(R) = \frac{v}{\beta^2}, \quad \mu_3(R) = \frac{2v}{\beta^2}$$

Soit
$$v = \frac{4}{\gamma_1^2}, \quad \beta = \frac{2}{\sigma\gamma_1}, \quad x_0 = \mu - \frac{2v}{\beta^2}$$

De plus la loi gamma peut être approximée par une loi du Chi2. :

$$F_R(x) \approx \Gamma(v, \beta(x - x_0)) \approx F_{\chi_{2v}^2}(2\beta(x - x_0))$$

Le quantile à $1-\alpha\%$ est obtenu par identification de $F_R(x) = 1 - \alpha\%$ soit :

$$q_{1-\alpha}^{GT}(R) = x_0 + \frac{1}{2\beta} \chi_{2v}^2(1-\alpha)$$

où $\chi_{2v}^2(1-\alpha)$ représente le $1-\alpha^{\text{ème}}$ quantile de la distribution du Chi2 à $2v$ degrés de liberté.

Cette méthode ne peut être mise en œuvre que dans le cas où la distribution présente un coefficient d'asymétrie éloigné de 0. Ici, nous ne l'appliquerons qu'à la distribution Gamma.

Les résultats de chacune de ces méthodes sont résumés dans le tableau suivant :

Quantiles						
$1-\eta$	0,5	0,25	0,2	0,1	0,05	0,01
$q(1-\eta)$	0,00	- 0,67	- 0,84	- 1,28	- 1,64	- 2,33
$\chi^2((1-\eta))$	49,33	42,94	41,45	37,69	34,76	29,71
Méthode additivité						
Modèle de Poisson sur dispersé	17 659 222	17 125 532	16 993 317	16 645 172	16 357 716	15 818 567
Modèle Gamma	17 167 827	15 548 428	15 147 240	14 090 849	13 218 606	11 582 641
Modèle Normal	16 747 367	16 698 715	16 686 662	16 654 925	16 628 721	16 579 572
Approximation Normal Power						
Modèle de Poisson sur dispersé	16 867 985	16 336 984	16 206 265	15 863 641	15 582 466	15 059 306
Modèle Gamma	14 766 939	13 220 145	12 859 387	11 952 085	11 249 517	10 045 395
Modèle Normal	16 675 238	16 626 586	16 614 533	16 582 796	16 556 592	16 507 443
Approximation Gamma traduit						
Modèle Gamma	16 936 755	15 407 577	15 050 226	14 150 002	13 449 950	12 239 247

Tableau 5. 7 : Percentiles estimés

Dans une approche prudentielle, il peut être intéressant de considérer non pas le résultat brut, mais un quantile de la distribution de l'espoir de recouvrement. Contrairement à la démarche classique pour une charge de sinistre qui consiste à choisir un quantile supérieur à 50%, ici la démarche est inversée. En effet, par précaution il vaut mieux anticiper un espoir de recours plus faible et choisir un quantile de la distribution inférieur à 50%.

Les modèles donnent des résultats très proches. On peut cependant noter que le modèle Gamma admet une plus grande volatilité.

4. Modélisation de la méthode par tranche

a. Présentation du modèle

La modélisation GLM va permettre de donner une dimension stochastique à l'approche par tranche de recouvrement que nous avons présenté précédemment. La possibilité d'introduire des effets croisés dans les modèles GLM va permettre de transcrire l'équation suivante :

$$T_{i,j} = \delta_h \times T_{i,j-1} \text{ ou } T_{i,j-1} \in H$$

Le modèle ne comportera plus $2n+1$ variables, mais seulement k variables représentant le nombre de tranches souhaités. Nous avons donc ici 8 paramètres $\{\delta_1, \dots, \delta_8\}$ à estimer.

Concrètement la base de données doit contenir l'ensemble des taux de recouvrement cumulés $T_{i,j}$ ainsi que le taux précédent $T_{i,j-1}$. Ainsi, le nombre de données est réduit à $n(n+1)/2$ valeurs puisque les données de la première colonne ne possèdent pas de valeurs $T_{i,j-1}$. On crée ensuite les 8 variables dichotomiques valant 1 si le taux de recouvrement $T_{i,j-1}$ associé est compris dans l'intervalle correspondant et 0 sinon.

On cherche donc à estimer $\mu_{i,j} = E(T_{i,j})$. Dans ce cas, on définit la composante systématique comme $\eta_{i,j} = \delta_h \times T_{i,j-1}$. La fonction de lien identité nous permet donc d'écrire $\eta_{i,j} = \mu_{i,j} = E(T_{i,j}) = \hat{\delta}_h \times T_{i,j-1}$. Nous confronterons plusieurs modèles en testant une loi gamma, et

une loi normale. La distribution de poisson n'est pas adaptée à la modélisation du taux de recouvrement car ce modèle nécessite que les données soient sous forme de nombre entier.

Nous testerons également un troisième modèle en faisant l'hypothèse d'une distribution log-normale des facteurs de développement.

Ainsi, le modèle traduira l'équation :

$$\ln\left(\frac{T_{i,j}}{T_{i,j-1}}\right) = \delta_h \text{ ou } T_{i,j-1} \in H, \text{ en postulant que } \ln\left(\frac{T_{i,j}}{T_{i,j-1}}\right) \text{ suit une loi normale.}$$

En considérant l'exponentielle des paramètres estimés $\hat{\delta}_h$ on retrouve :

$$T_{i,j} = \exp(\delta_h) \times T_{i,j-1} \text{ ou } T_{i,j-1} \in H$$

Les équations de vraisemblance correspondantes sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} \text{Modèle Gamma : } L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\Gamma(1/\phi) T_{i,j}} \left(\frac{T_{i,j}}{\phi \delta_k T_{i,j-1}} \right)^{1/\phi} \exp\left(-\frac{T_{i,j}}{\phi \delta_k T_{i,j-1}} \right) \\ \text{Modèle Normal : } L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T_{i,j} - \delta_k T_{i,j-1}}{\sigma} \right)^2 \right] \\ \text{Modèle Normal sur données transformées : } L &= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(T_{i,j}/T_{i,j-1}) - \delta_k n(T_{i,j}/T_{i,j-1})}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

b. Paramètres et résidus du modèle

Les paramètres estimés sont les suivants :

Tranche	Paramètres de régression et risque d'estimation							
	Loi normale		Loi de Poisson		Loi Gamma		Loi Normale sur données transformées	
	Estimate	erreurs standard	Estimate	erreurs standard	Estimate	erreurs standard	exp (Estimate)	erreurs standard
[0-10%]	3,4985	3,4985	4,0477	1,8636	7,4437	0,4813	4,7736	0,0601
[10-20%]	1,4684	1,4684	1,476	0,7412	1,4855	0,1117	1,4448	0,0699
[20-30%]	1,3108	1,3108	1,3145	0,5075	1,3178	0,0914	1,3025	0,0645
[30-40%]	1,2409	1,2409	1,2428	0,411	1,2446	0,0842	1,2359	0,0629
[40-50%]	1,1079	1,1079	1,1079	0,2881	1,108	0,0627	1,1040	0,0526
[50-60%]	1,0523	1,0523	1,0537	0,2052	1,055	0,0488	1,0536	0,0430
[60-70%]	1,0413	1,0413	1,0416	0,1934	1,0419	0,0493	1,0409	0,0440
[70-100%]	1,013	1,013	1,0132	0,2043	1,0133	0,0555	1,0132	0,0510
Φ	0,0026	-	1	-	108,14	-	0,0832	-

Tableau 5. 8 : Paramètres estimés de la version GLM de la méthode par tranche

A l'exception des résultats obtenus dans le modèle avec la distribution Gamma, les paramètres obtenus sont très proches de ceux qui avaient été estimés dans l'approche déterministe.

Les graphiques suivants représentent la distribution des résidus de Pearson issus de ces modélisations :

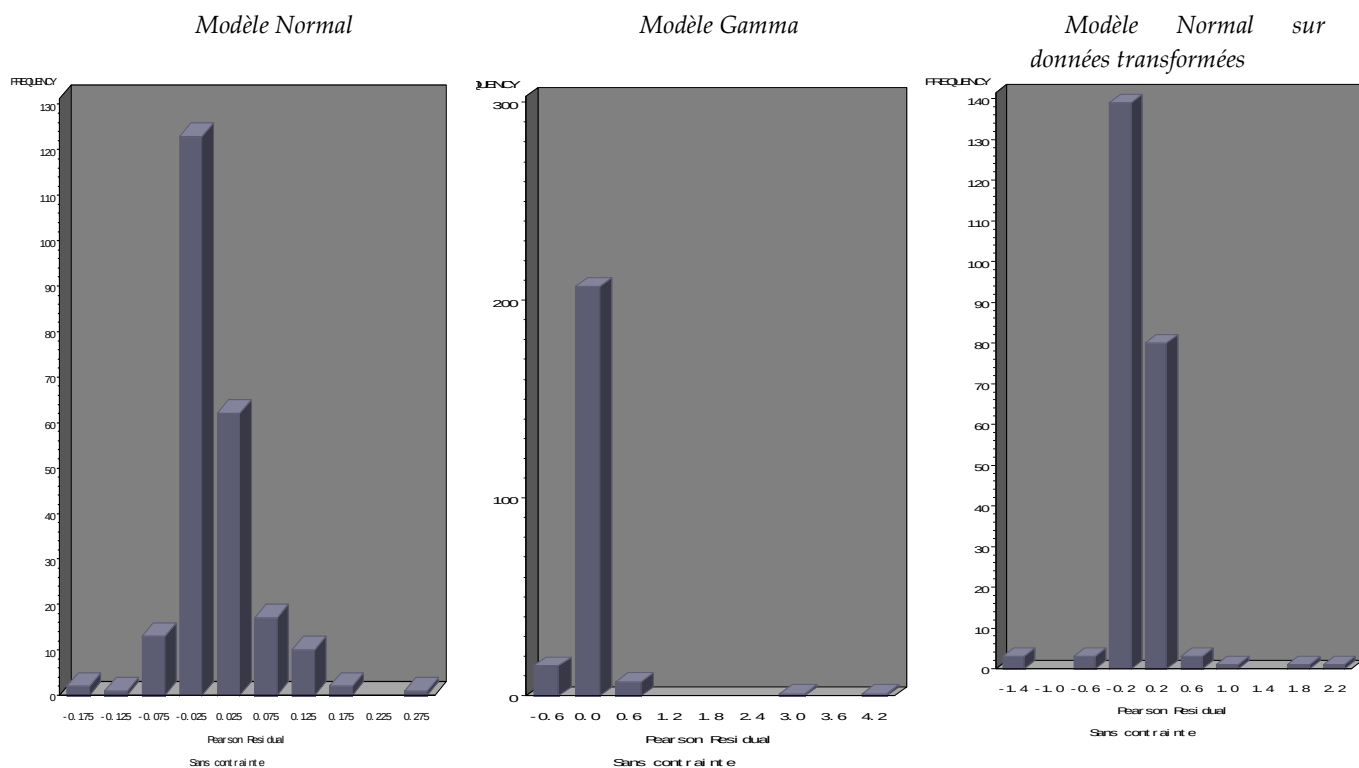


Figure 5. 3 : Distribution des résidus de Pearson

La distribution des résidus de Pearson dans les quatre cas ne permet pas de rejeter une des modélisations. La modélisation Gamma laisse cependant apparaître la présence de quelques valeurs aberrantes.

c. Espoir de recouvrement

La projection des triangles, est faite de façon analogue au développement fait dans la méthode déterministe. Les résultats obtenus figurent dans la table suivante. Les résultats ne diffèrent quasiment pas selon la distribution considérée. Cependant, on peut noter que l'espoir de recouvrement total est légèrement plus faible que dans l'approche déterministe.

Sem. de survenance	Modèle Gamma		Modèle Normal		Modèle Normal sur données modifiées	
	E(Ri)	Taux de rec. ultime	E(Ri)	Taux de rec. ultime	E(Ri)	Taux de rec. ultime
1997_1	0	72,89%	0	72,89%	0	72,89%
1997_2	8 229	75,16%	8 047	75,14%	8 175	75,15%
1998_1	60 073	65,83%	59 302	65,76%	58 627	65,70%
1998_2	15 161	87,59%	14 822	87,51%	15 061	87,56%
1999_1	78 432	69,56%	76 456	69,27%	76 395	69,26%
1999_2	91 277	74,88%	89 779	74,74%	89 560	74,72%
2000_1	74 208	76,88%	72 781	76,73%	73 200	76,78%
2000_2	31 130	74,83%	30 434	74,76%	30 923	74,81%
2001_1	12 221	81,51%	11 951	81,48%	12 141	81,50%
2001_2	102 744	81,85%	100 357	81,64%	102 034	81,79%
2002_1	99 102	85,06%	96 785	84,82%	98 413	84,99%
2002_2	158 578	84,51%	154 848	84,24%	157 469	84,43%
2003_1	174 364	77,69%	168 897	77,02%	170 470	77,21%
2003_2	165 576	81,31%	162 165	80,97%	163 263	81,08%
2004_1	50 926	85,98%	49 795	85,93%	50 590	85,97%
2004_2	544 676	85,63%	532 418	85,24%	538 881	85,44%
2005_1	781 513	86,28%	763 924	85,89%	773 197	86,10%
2005_2	2 106 894	78,84%	2 141 877	79,63%	2 112 945	78,98%
2006_1	2 227 382	82,52%	2 170 316	81,67%	2 166 395	81,61%
2006_2	2 722 927	81,81%	2 650 500	80,78%	2 791 230	82,77%
2007_1	3 332 491	82,61%	3 243 419	81,31%	3 202 762	80,72%
2007_2	5 929 440	82,30%	5 669 375	78,91%	5 842 704	81,17%
E(R)	18 767 344		18 268 246		18 534 434	

Tableau 5. 9 : *Espoir de recouvrement de la version GLM de la méthode par tranche*

d. Limites de cette modélisation

Etant donné que la modélisation repose sur les taux de recouvrement cumulés, l'espoir de recouvrement total se définit comme $R_i = (T_{i,n} - T_{i,n-i}) \times \sin(i)$.

Ainsi, l'espérance $E(R_i) = \sin(i) \cdot E(\hat{T}_{i,n}) - \sin(i) \cdot T_{i,n-i}$ nécessite le calcul de l'espérance du taux ultime $E(\hat{T}_{i,n})$. Cette formule fait appel à une forme récursive d'espérance conditionnelle, puisque ce taux dépend des valeurs des taux atteints précédemment.

Par conséquent, nous n'avons pas réussi à formaliser le calcul théorique des moments de l'espoir de recouvrement. La construction d'intervalle de confiance et l'approximation de la distribution, nous a donc été impossible.

D'autre part, l'approche de bootstrap à partir des résidus de Pearson issus de la modélisation, ne nous permet pas non plus de simuler de nouveaux échantillons. En effet, les résidus sont fonction à la fois des $T_{i,j}$ et des $T_{i,j-1}$. Pour simuler de nouveaux $T_{i,j}$, il faudrait considérer comme figé les taux $T_{i,j-1}$.

III. APPROCHE NON PARAMETRIQUE : LE BOOTSTRAP

1. Présentation de la technique de Bootstrapping

La méthode de Bootstrap a été introduite par Efron en 1979 dans le but d'estimer le biais et la variabilité d'un estimateur dans un contexte non paramétrique. Le principe consiste à simuler un grand nombre d'échantillons de taille N , en tirant aléatoirement avec remise N observations à partir d'un échantillon initial de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ de fonction de répartition commune F . Cette méthode est donc aussi appelée méthode de « rééchantillonnage ».

L'application du Bootstrap repose sur deux hypothèses :

- (i) l'indépendance des observations (d'où le tirage avec remise)
- (ii) L'unicité de la loi de distribution de chaque élément qui compose l'échantillon initial.

Cependant, en théorie l'hypothèse (i) qui impose l'indépendance des recouvrements n'est pas vérifiée. Il est donc nécessaire de normer ces incréments pour que l'hypothèse iid soit satisfaite. Il s'agit donc de rééchantillonner non plus à partir des observations mais des résidus de Pearson calculés à partir de ces observations, comme le préconise England & Verrall (1999).

a. Application du Bootstrap aux résidus de Pearson

Les résidus de Pearson pour la méthode de Chain Ladder peuvent être calculés selon l'algorithme décrit ci-après :

1. Dans un premier temps nous disposons des triangles des montants cumulés, à partir duquel sont calculés les coefficients de passage par la méthode de Chain Ladder Standard.
2. En procédant par Backward-engineering, c'est-à-dire par récursion arrière à partir des valeurs de la diagonale (derniers montants connus), on construit un nouveau triangle, appelé « triangle prédit » en divisant les montants par les coefficients de Chain Ladder trouvés dans l'étape 1.
3. La troisième étape consiste à décumuler les deux triangles obtenus dans les étapes précédentes.

4. Le calcul des résidus de Pearson dans le modèle de Chain Ladder est obtenu à partir des deux triangles décumulés, comme : $r_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \hat{C}_{i,j}}{\sqrt{\hat{C}_{i,j}}}$

Avec $\hat{C}_{i,j}$: le montant non cumulé du triangle prédit
 $C_{i,j}$: le montant non cumulé du triangle initial

En effet, on peut noter que dans le modèle de Poisson qui conduit aux résultats de Chain Ladder, on a $V(\hat{C}_{i,j}) = \hat{C}_{i,j}$.

De façon identique, on utilisera directement les résidus de Pearson qui sont issus de la modélisation GLM.

5. On applique alors la méthode de Bootstrap aux résidus de Pearson. N nouveaux triangles de paiements non cumulés sont simulés en appliquant les formules suivantes :
- $C_{i,j}^* = r_{i,j}^* \times \sqrt{\hat{C}_{i,j}} + \hat{C}_{i,j}$ pour le modèle de Chain Ladder ou de façon équivalente $C_{i,j}^* = r_{i,j}^* \times \sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} + \hat{\mu}_{i,j}$ en utilisant les résidus et les estimations de la modélisation GLM avec la distribution de Poisson.
 - $C_{i,j}^* = r_{i,j}^* \times \hat{\mu}_{i,j} + \hat{\mu}_{i,j}$ pour le modèle Gamma, avec $\hat{\mu}_{i,j}$ les estimations du modèle GLM
6. Pour chaque nouveau triangle simulé, on calcule l'espoir de recouvrement engendré. Les N espoirs de recouvrement permettent alors de déduire certaines caractéristiques de la distribution (moyenne, médiane, variance, VaR, T-VaT, ...). Pour chacun des développements, on veillera au respect de la contrainte.

b. Intervalles de confiance des modèles

A partir des résidus de Pearson des modèles de poisson et gamma on obtient une distribution de l'espoir de recouvrement total, ce qui permet d'obtenir un intervalle de confiance.

	Espoir de recouvrement total (500 itérations)				
	Moyenne	1er centile	99ème centile	5ème centile	95ème centile
Modèle Gamma	14 611 285	7 929 644	20 078 228	9 728 162	18 711 579
Modèle de Poisson	17 043 800	13 637 233	19 617 686	14 808 973	18 990 417

Tableau 5. 10 : Percentiles de l'espoir de recouvrement obtenus par le bootstrap des résidus de Pearson

La moyenne de l'espoir de recouvrement total, obtenue par le bootstrap des résidus de Pearson de la modélisation Gamma, est beaucoup plus faible que celle obtenue précédemment. Cela peut peut-être s'expliquer par le nombre d'itérations relativement faible. Le bootstrap de la méthode

GLM requiert un temps de calcul très important. Néanmoins, les résultats du bootstrap sur les résidus du modèle de poisson sont relativement fidèles à l'étude précédente.

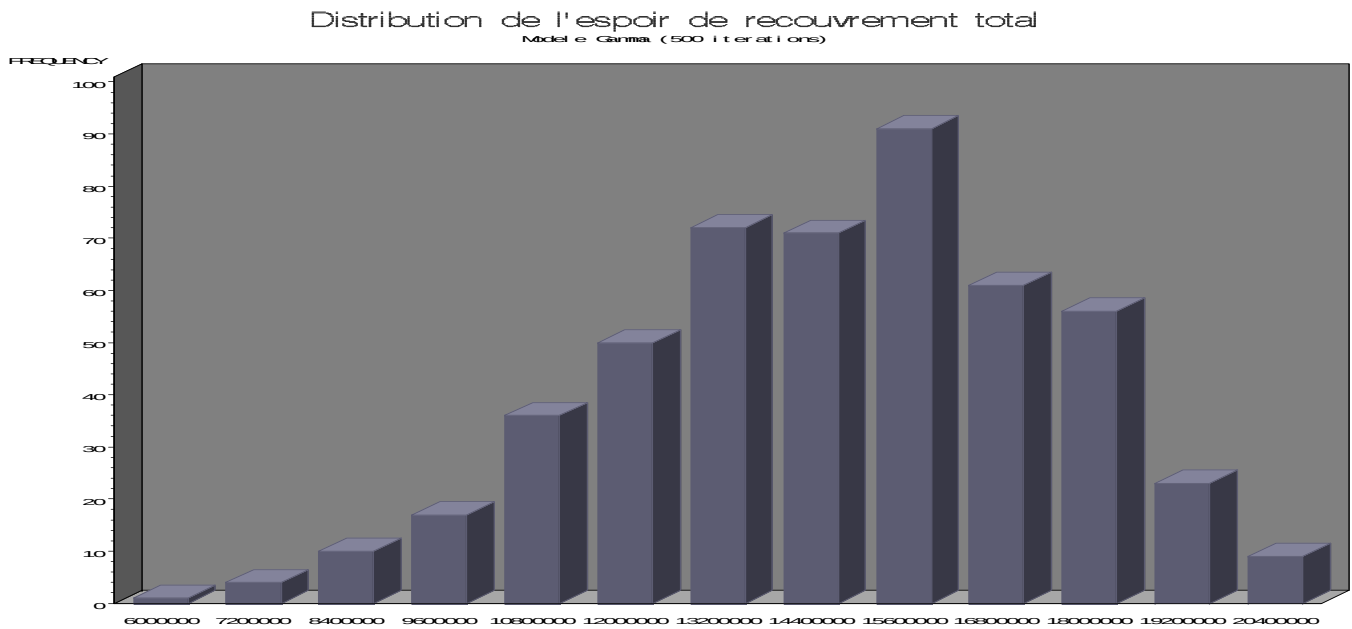


Figure 5.4 : Distribution de l'espoir de recouvrement total, selon la loi Gamma

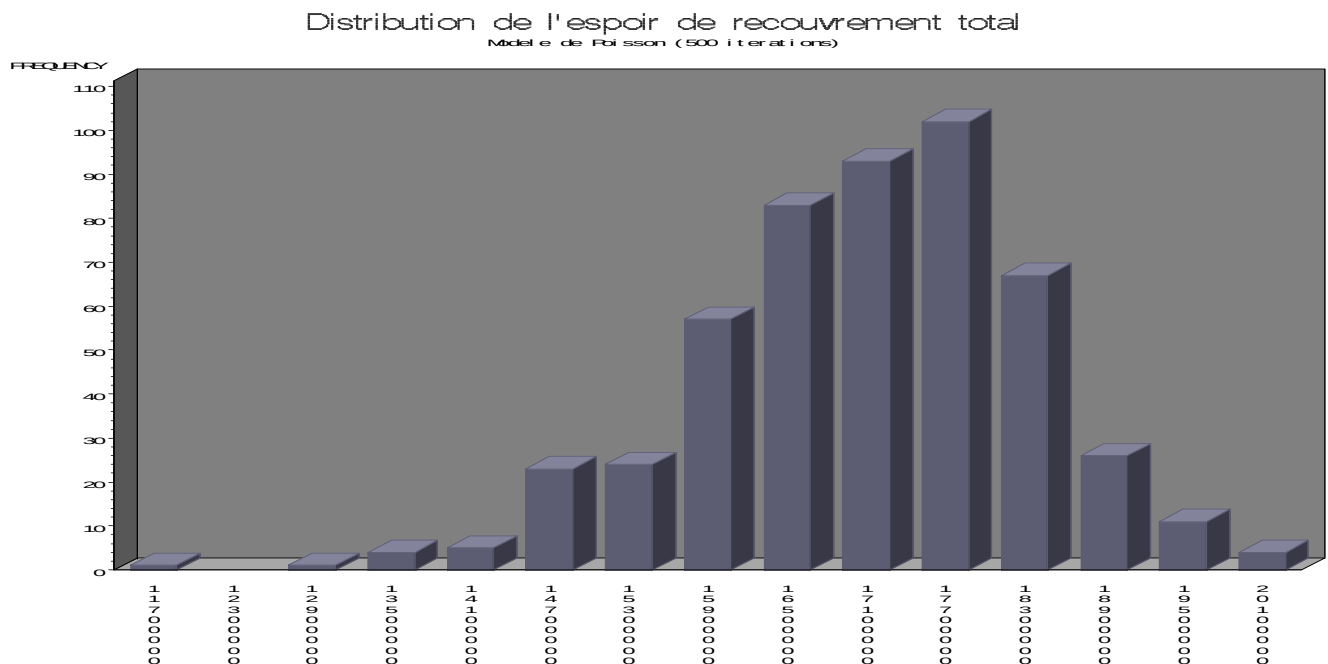


Figure 5.5 : Distribution de l'espoir de recouvrement total, selon la loi de Poisson

Les graphiques suivants révèlent aussi que la distribution de l'espoir de recouvrement issue du modèle Gamma est beaucoup plus étendue. L'espoir de recouvrement du modèle de poisson présente une dispersion plus faible.

On peut en outre obtenir une moyenne pour chaque semestre de survenance de l'espoir de recouvrement, ainsi que du taux de recouvrement ultime. Ces résultats figurent en annexe 6 et 7.

IV. SIMULATION PAR MONTE CARLO DES FACTEURS DE DEVELOPPEMENT

1. Adéquation des facteurs de développement à une loi log-normale

Les facteurs de développement, pour un semestre de déroulé fixé, peuvent pour la plupart être modélisés par une loi log-normale.

Cependant, les Box plot mettent en évidence la présence de valeurs extrêmes.

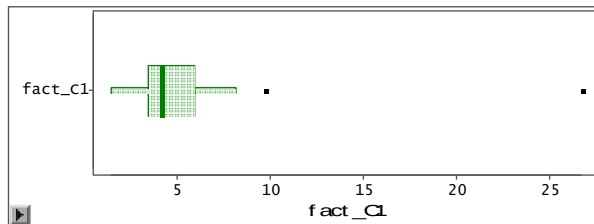
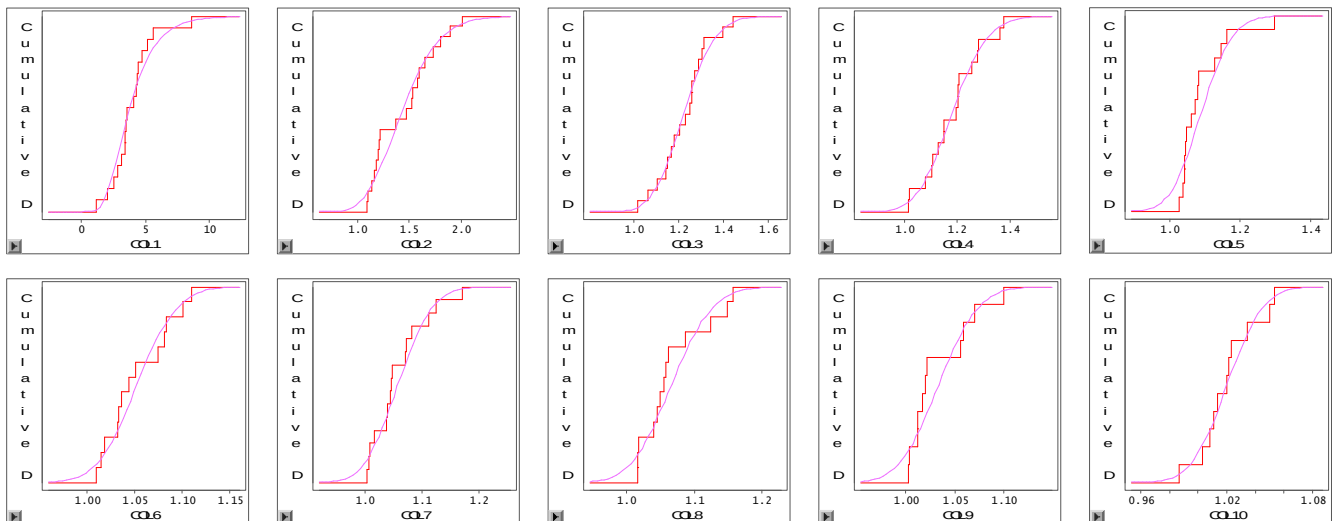


Figure 5. 6 : Box plot des facteurs de développement du premier semestre de déroulé

Ainsi, nous allons éliminer les valeurs aberrantes à partir de la méthode utilisée dans le box plot, soit :

Une valeur est considérée comme étant une valeur extrême si elle est supérieure à $Q3 + 1,5*(Q3-Q1)$.

Une fois ce traitement préalable effectué, l'analyse des fonctions de répartition superposées à celles d'une distribution log-normale, ainsi que des tests de Kolmogorov-Smirnov permet de confirmer la distribution log-normale des facteurs de développement.



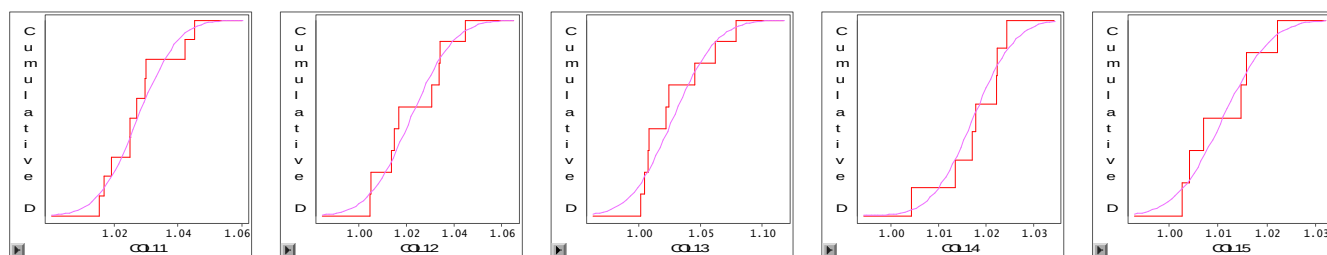


Figure 5. 7 : Adéquation de la fonction de répartition des facteurs de développement par semestre de déroulé à la loi log-normale

semestres de déroulé	Statistique de kolmogorov	Nombre d'observations	Seuil d'acceptation à 95%
1	0,1482	17	0,31796
2	0,2057	19	0,30143
3	0,1051	18	0,30936
4	0,1075	17	0,31796
5	0,2498	14	0,3489
6	0,1505	13	0,36143
7	0,1846	15	0,3376
8	0,2314	13	0,36143
9	0,2828	11	0,39122
10	0,1693	11	0,39122
11	0,2062	10	0,40925
12	0,1957	9	0,43001
13	0,2169	9	0,43001
14	0,0175	7	0,48342
15	0,203	6	0,51926
16	0,3656	6	0,51926
17	0,2627	4	0,62394
18	0,2713	4	0,62394
19	0,2265	3	0,7076
20	0,2602	2	0,84189
21	-	1	-

Tableau 5. 11 : Statistique de Kolmogorov-Smirnov pour chaque semestre de déroulé

Pour chaque semestre de déroulé, la statistique de Kolmogorov est inférieure au seuil d'acceptation à 95% spécifié. Ce seuil dépend du nombre d'observations de l'échantillon. Certains des résultats sont basés sur un nombre très faible d'observation.

Nous considérerons que le test de Kolmogorov-Smirnov est validé pour chaque semestre de déroulé.

2. Simulation du triangle inférieur par Monte Carlo

La méthode utilisée consiste à simuler N fois le triangle inférieur des facteurs de développement en simulant des valeurs suivant une loi log-normale avec comme paramètre la moyenne et la variance observées pour chaque colonne. Cependant, les moyennes et notamment les variances calculées sur la queue du triangle ne reposent que sur un nombre relativement faible de données. Afin de ne pas minimiser la volatilité des facteurs de développement, l'écart-type pour les

8 derniers semestres a été calculé par moyenne mobile à partir de la volatilité observée sur les 4 semestres précédents :

semestres de déroulé	Logarithme des facteurs de développement		
	moyenne	écart-type observé	écart-type utilisé
1	1,3006	0,4378	0,4378
2	0,3528	0,1984	0,1984
3	0,2011	0,0901	0,0901
4	0,1650	0,0894	0,0894
5	0,0871	0,0636	0,0636
6	0,0521	0,0318	0,0318
7	0,0578	0,0445	0,0445
8	0,0656	0,0444	0,0444
9	0,0336	0,0308	0,0308
10	0,0207	0,0194	0,0194
11	0,0274	0,0097	0,0097
12	0,0222	0,0139	0,0139
13	0,0283	0,0270	0,0270
14	0,0175	0,0068	0,0175
15	0,0112	0,0077	0,0170
16	0,0128	0,0114	0,0189
17	0,0043	0,0024	0,0201
18	0,0078	0,0048	0,0184
19	0,0065	0,0027	0,0186
20	0,0085	0,0045	0,0190
21	0,0023	-	0,0190

Tableau 5. 12 : Moments des logarithmes des facteurs de développement

La moyenne a quant à elle été lissée à partir d'une régression non linéaire d'équation : $moy\ obs = \alpha . j^{\beta}$, avec j le semestre de déroulé.

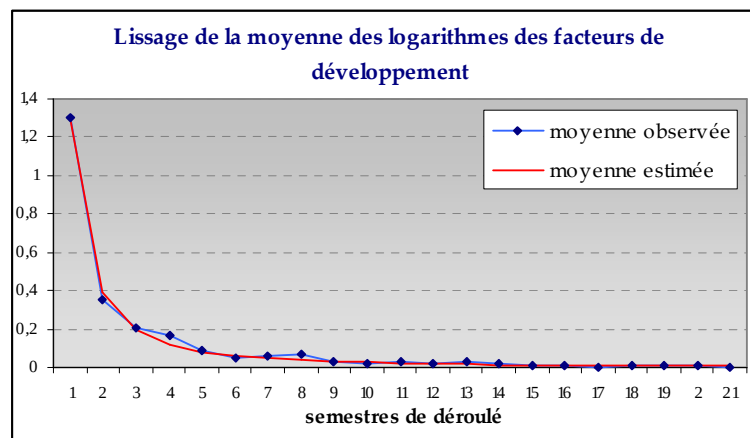


Figure 5. 8 : Lissage de la moyenne des logarithmes des facteurs de développement

En effectuant un bootstrap (1000 itérations) sur cette simulation log-linéaire, on obtient un intervalle de confiance autour du taux ultime de recouvrement, ainsi qu'autour de l'espoir de recouvrement pour chaque semestre de survenance.

TAUX DE RECOUVREMENT ULTIME PAR SEMESTRE DE SURVENANCE

Semestre de survenance	Moyenne	Écart-type	1er centile	99e centile	5e centile	95e centile
1997_2	75,27%	0,76%	74,19%	77,58%	74,26%	76,64%
1998_1	62,51%	0,98%	60,89%	65,24%	61,16%	64,32%
1998_2	87,67%	1,07%	85,26%	89,53%	85,77%	89,33%
1999_1	61,91%	1,31%	59,50%	65,32%	59,97%	64,32%
1999_2	71,63%	1,58%	68,26%	75,05%	69,03%	74,33%
2000_1	76,01%	1,90%	72,27%	81,27%	73,23%	79,46%
2000_2	74,74%	0,73%	72,59%	75,64%	73,38%	75,59%
2001_1	81,77%	0,52%	80,44%	82,50%	80,69%	82,45%
2001_2	84,07%	2,03%	78,39%	86,84%	80,33%	86,69%
2002_1	87,74%	1,83%	82,71%	89,96%	84,07%	89,81%
2002_2	87,55%	1,72%	82,18%	89,50%	83,94%	89,39%
2003_1	70,47%	2,89%	64,41%	77,93%	66,02%	75,45%
2003_2	81,94%	1,69%	76,28%	83,77%	78,49%	83,68%
2004_1	84,44%	1,05%	83,74%	86,83%	83,74%	86,61%
2004_2	85,08%	1,56%	78,90%	86,53%	82,23%	86,47%
2005_1	84,50%	2,22%	76,76%	86,66%	79,73%	86,56%
2005_2	53,23%	4,94%	43,55%	66,36%	45,72%	61,56%
2006_1	83,72%	2,53%	74,43%	85,97%	78,10%	85,88%
2006_2	83,26%	2,93%	71,00%	85,82%	77,37%	85,71%
2007_1	80,74%	6,50%	61,62%	85,82%	67,61%	85,69%
2007_2	62,11%	18,84%	21,72%	85,59%	29,12%	85,32%

Tableau 5. 13 : Percentiles des taux de recouvrement ultimes

ESPOIR DE RECOUVREMENT ULTIME PAR SEMESTRE DE SURVENANCE

Semestre de survenance	Moyenne	Écart-type	1er centile	99e centile	5e centile	95e centile
1997_2	9 136	6 353	139	28 405	734	20 562
1998_1	21 700	11 305	2 840	53 283	6 055	42 597
1998_2	15 547	4 774	4 808	23 813	7 048	22 927
1999_1	25 200	9 110	8 430	48 921	11 693	41 995
1999_2	56 696	16 800	20 830	93 036	29 076	85 381
2000_1	65 971	18 021	30 405	115 900	39 510	98 766
2000_2	30 153	7 799	7 154	39 842	15 604	39 261
2001_1	15 173	5 932	0	23 542	2 942	22 944
2001_2	127 613	22 775	63 951	158 624	85 737	156 958
2002_1	124 313	17 270	76 923	145 254	89 769	143 794
2002_2	200 836	23 926	126 277	227 847	150 694	226 383
2003_1	115 602	23 537	66 311	176 304	79 422	156 103
2003_2	171 866	16 927	115 169	190 213	137 310	189 341
2004_1	15 805	23 770	0	70 055	0	65 215
2004_2	527 548	48 946	333 231	573 154	437 778	571 288
2005_1	701 590	99 310	355 156	798 459	488 093	793 849
2005_2	976 309	218 304	548 652	1 555 880	644 463	1 343 696
2006_1	2 307 404	168 383	1 687 878	2 457 029	1 932 871	2 451 123
2006_2	2 826 216	207 765	1 956 793	3 007 296	2 408 834	2 999 825
2007_1	3 203 774	447 925	1 886 551	3 554 079	2 299 271	3 544 928
2007_2	4 380 247	1 445 394	1 281 467	6 181 566	1 849 616	6 160 961
TOTAL	15 918 699	1 525 131	12 630 156	18 339 632	13 204 287	18 014 476

Tableau 5. 14 : Percentiles de l'espoir de recouvrement

L'espoir de recouvrement déduit de cette approche par simulation des facteurs de développement permet d'estimer un recouvrement à hauteur de 16M€, montant plus faible que pour l'ensemble des méthodes précédentes. Cela peut s'expliquer par le fait que les facteurs de développement extrêmes ont été exclus, ce qui a pour conséquence de diminuer la moyenne réelle des facteurs de développement pour chaque semestre de déroulé.

Nombre d'itérations	Moyenne de l'espoir de recouvrement
100	16 154 727
500	15 921 757
1 000	15 918 699
2 000	15 959 185
5 000	15 957 614

Le tableau suivant montre que l'espoir de recouvrement est stable et converge très rapidement lorsque le nombre d'itération augmente.

Tableau 5. 15 : Convergence de l'espoir de recouvrement

Le graphique suivant représente la distribution de l'espoir de recouvrement total.

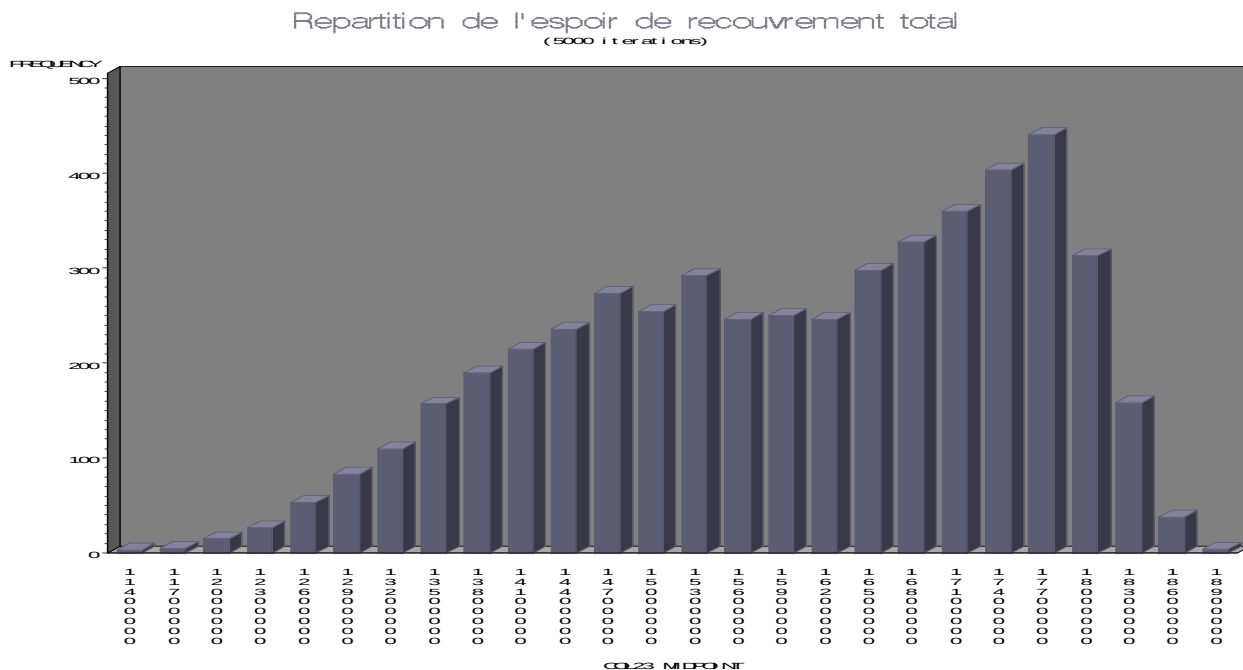
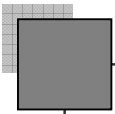


Figure 5. 9 : Distribution de l'espoir de recouvrement total

Cette distribution atypique s'explique par la mise en œuvre de la contrainte qui consiste à bloquer le recouvrement dès lors que le taux de recouvrement dépasse le seuil imposé.



CONCLUSION

Nous avons donc présenté plusieurs méthodes de provisionnement, pouvant s'adapter au marché spécifique de la caution.

L'étude détaillée du portefeuille contentieux a montré une disparité au niveau de la dynamique de recouvrement selon le type de prêt. Afin d'optimiser les techniques de projections, nous avons au préalable homogénéisé les triangles de recouvrement en réduisant l'étude aux prêts immobiliers.

Dans un premier temps, l'application des méthodes déterministes, basées sur les facteurs de développement, ont permis d'apporter une première approche sur l'évolution des recouvrements.

Trois critères de validation ont appuyé notre sélection et ont permis de confronter la pertinence des différents modèles. Les méthodes retenues - chain Ladder, Cape Cod, De Vylder et la méthode par tranche – donnent des résultats similaires. Cependant, les critères de validation ont mis en évidence l'adéquation de la méthode par tranche à l'évolution des recouvrements. En outre, cette méthode présente l'avantage de catalyser l'évolution du recouvrement, en tenant compte du taux déjà atteint.

Cependant, face à la nouvelle réglementation en matière de Solvency 2, il est nécessaire de développer une approche permettant de quantifier le risque présent dans l'estimation de la provision pour créances douteuses. En effet, le développement de l'espoir de recouvrement présente une certaine volatilité qui peut être reliée à l'incertitude de l'évolution du marché immobilier. Dans ce but, différentes approches stochastiques ont été testées.

Le Modèle de Mack a notamment été adapté afin de tenir compte de l'application de la contrainte. L'hypothèse d'une distribution log-normale des recouvrements a permis de construire un intervalle de confiance autour de la provision de recours. Néanmoins, l'application de la contrainte rend difficile le calcul de l'erreur quadratique moyenne et de ce fait la généralisation de cette méthode pour un usage régulier.

L'usage des modèles GLM avec la loi de Poisson sur-dispersée, permettant d'obtenir exactement le même résultat que le modèle de Mack, semble en effet beaucoup plus simple d'utilisation. La modélisation par la loi Gamma paraît être moins fiable et l'espoir de recouvrement estimé beaucoup plus volatile.

La nouvelle méthode par tranche de recouvrement a pu être modélisée, via l'emploi des modélisations GLM. Plusieurs distributions ont été testées, permettant d'aboutir à un espoir de recouvrement souvent légèrement plus élevé que dans les autres approches. Cependant, cette technique n'a pu être développée entièrement, en raison des calculs fastidieux pour l'évaluation des moments. La forme de la distribution, permettant de déduire les quantiles, n'a donc pas pu être approximée.

Enfin, l'utilisation de Monte Carlo permet une approche différente en utilisant les triangles de facteurs de développement. Cette méthode permet d'évaluer un espoir de recouvrement plus faible que dans les approches précédentes.

Cependant, il faut garder à l'esprit que les résultats obtenus pour l'espoir de recouvrement sont fortement corrélés aux seuils choisis. La présence du seuil de recouvrement s'avère néanmoins nécessaire pour que les résultats projetés soient conformes à la réalité du marché.

Dans la continuité de ce travail, l'approche statistique que nous avons menée, devrait être complétée par l'évaluation de l'espoir de recouvrement dossier par dossier. En effet, on a pu s'apercevoir que le taux de recouvrement ultime avait une distribution quasiment binaire. Un modèle individuel pourrait donc être ajouté en modélisant d'une part la durée de recouvrement via un modèle de survie et d'autre par le taux de recouvrement ultime grâce notamment à un modèle de scoring. De plus, il est irréfutable que le recouvrement de chaque dossier est fonction d'un certain nombre de variables observables (caractéristiques de l'emprunteur, montant du sinistre, durée en contentieux...), ainsi que de facteurs macroéconomiques, qui ne peuvent pas être pris en compte dans une démarche globale. La plupart des recouvrements sont, en effet, fortement liés à l'évolution des marchés immobiliers dans le sens où ces recouvrements sont issus de la vente du bien hypothéqué.

- **Administrateur de biens** : professionnel qui effectue des opérations de gestion immobilière dans le cadre d'un mandat. On distingue la gestion d'immeubles en copropriété où le gestionnaire occupe la fonction de syndic, et la gestion de biens immobiliers pour le compte de propriétaires où le gestionnaire s'occupe de la gestion locative (recouvrement des loyers, paiement des charges, entretien, réparations...)
- **Capital restant dû (CRD)** : c'est le capital non remboursé à un instant t. C'est ce capital restant qui sert de base au calcul des intérêts.
- La **caution** ou **garantie financière** : acte par lequel le **garant** s'engage à honorer l'exécution ou le respect des termes d'un contrat en cas de défaillance du **débiteur** (personne cautionnée) vis-à-vis du **créancier** (bénéficiaire de la caution). Il existe 3 types de caution :
 - o La **caution réglementaire** : le législateur promulgue des lois pour protéger les consommateurs, les salariés, les citoyens contre les risques de défaillance de certaines professions.
 - o La **caution fiscale** : l'État a institué une demande de caution pour garantir le paiement de certaines taxes et/ou se prémunir des fraudes.
 - o La **caution contractuelle** : certains secteurs d'activité utilisent la caution pour sécuriser les opérations entre les parties.
- **Caution hypothécaire** (ou caution réelle) : une tierce personne consent une hypothèque sur l'un de ses biens pour garantir l'emprunt.
- **Caution simple** (ou caution en perte finale) : le garant paie en dernier recours, c'est-à-dire si les poursuites du débiteur engagées par le créancier n'ont pas abouti.
- **Caution solidaire** : le garant paie immédiatement les échéances impayées au créancier et se retourne ensuite contre le débiteur.
- **Créance** : droit permettant à une personne (le créancier) d'exiger le paiement d'une somme d'argent auprès d'une autre (le débiteur), en général à la suite d'un prêt, et éventuellement d'en percevoir des intérêts.
- **Droits d'accises** : Les accises sont des impôts indirects frappant la consommation ou l'utilisation de certains produits tels que les boissons alcoolisées, les huiles minérales et les tabacs manufacturés. Ces droits sont codifiés et régis par des directives communautaires et le Code général des impôts.
- **Hypothèque** : sert à garantir le paiement d'une dette contractée sur un bien immobilier. Elle permet au prêteur de faire vendre par voie judiciaire le bien immobilier de son débiteur au cas où celui-ci serait dans l'impossibilité de rembourser les sommes dues.
- **Intérêts de retard** : ils correspondent aux intérêts à verser au prêteur en cas de non paiement des échéances à la date prévue. Ces intérêts sont calculés sur les sommes exigibles (y compris les intérêts d'échéances échues impayées).
- **Prêts relais** : prêt permettant d'acheter un nouveau logement en attendant la revente de l'ancien. Son montant peut représenter jusqu'à 80 % du prix estimé du logement vendu. Sa durée maximum est généralement limitée à 2 ans.

- ***Privilège de Prêteur de Deniers*** : Garantie très comparable à l'hypothèque qui permet au bénéficiaire du privilège, en cas de non remboursement du prêt par le débiteur, de demander le remboursement prioritaire sur les autres créanciers.
- ***Recouvrement de créances*** : Le recouvrement est une activité réglementée consistant à utiliser tous les moyens légaux, amiables et/ou judiciaires, pour obtenir d'un débiteur le paiement de la créance due au créancier.
- ***Subrogation*** : Lorsque la caution a remboursé la dette à la place de l'emprunteur principal, elle est "subrogée dans les droits du prêteur" à concurrence de la somme déboursée. Cela signifie que le droit du prêteur d'être remboursé est transmis à la caution qui peut à son tour se faire rembourser par l'emprunteur.

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1 :

Figure 1. 1 : Mode de fonctionnement du cautionnement	9
Figure 1. 2 : Déroulement d'un sinistre	11
Figure 1. 3 : Bilan synthétique de la SACCEF	15
Figure 1. 4 : Représentation schématique du passif d'une compagnie d'assurance.....	18

Chapitre 2 :

Figure 2. 1 : Répartition des taux de recouvrement ultimes.....	22
Figure 2. 2 : Evolution du taux de recouvrement moyen par génération.....	22
Figure 2. 3 : Répartition des taux de recouvrement ultimes par type de prêt	26

Chapitre 3 :

Figure 3. 1 : Graphes des $(S_{i,0}; S_{i,1})$ et $(S_{i,1}; S_{i,2})$	29
Figure 3. 2 : Paramètres obtenus à partir du lissage des paramètres de Chain Ladder	32
Figure 3. 3 : Graphes des $(S_{i,1}^{PP}; S_{i,2}^{PP})$, $(S_{i,3}^{PP}; S_{i,4}^{PP})$ et $(S_{i,5}^{PP}; S_{i,6}^{PP})$	33
Figure 3. 4 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par année de survénance.....	39
Figure 3. 5 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par semestre de survénance déduit de la méthode par tranche.....	42
Figure 3. 6 : Evolution du taux de recouvrement cumulé par semestre de survénance déduit de la méthode de Chain Ladder (sans contrainte).....	42

Chapitre 4 :

Figure 4. 1 : Représentation du sous-triangle T'	45
Figure 4. 2 : Ecart de prévisions de recouvrement à court terme par semestre de survénance.....	47
Figure 4. 3 : Ecart de prévisions de recouvrement à long terme par semestre de survénance	49
Figure 4. 4 : Ecart entre les prévisions du premier semestre 2007 obtenues par chaque méthode	51

Chapitre 5 :

Figure 5. 1 : Graphique des $(C_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$	60
Figure 5. 2 : Distribution des résidus de Pearson.....	66
Figure 5. 3 : Distribution des résidus de Pearson.....	75
Figure 5. 4 : Distribution de l'espoir de recouvrement total, selon la loi Gamma	79
Figure 5. 5 : Distribution de l'espoir de recouvrement total, selon la loi de Poisson	79
Figure 5. 6 : Box plot des facteurs de développement du premier semestre de déroulé.....	80
Figure 5. 7 : Adéquation de la fonction de répartition des facteurs de développement par semestre de déroulé à la loi log-normale.....	81
Figure 5. 8 : Lissage de la moyenne des logarithmes des facteurs de développement	82
Figure 5. 9 : Distribution de l'espoir de recouvrement total	84

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1 :

Tableau 1. 1 : Chiffres clés de la SACCEF pour l'année 2007	13
Tableau 1. 2 : Charge de sinistre prévisionnelle de la SACCEF pour l'année 2008.....	14
Tableau 1. 3 : Exemple de calcul de la provision pour créances douteuses.....	16
Tableau 1. 4 : Décomposition de la charge de sinistre sur le modèle bancaire.....	16
Tableau 1. 5 : Décomposition de la charge de sinistre sur le modèle assurantiel	17

Chapitre 2 :

Tableau 2. 1 : Triangle du nombre de dossiers clos par année de survenance	23
Tableau 2. 2 : Triangle de la fréquence cumulée de dossiers clos par année de survenance	23
Tableau 2. 3 : Solde comptable par poste et par génération de contentieux.....	24
Tableau 2. 4 : Répartition globale des dossiers par type de prêt	25
Tableau 2. 5 : Répartition par type de prêt des dossiers tombés en contentieux après 1997	25
Tableau 2. 6 : Solde comptable par poste et par génération de contentieux des prêts à la consommation et des prêts étudiant	26

Chapitre 3 :

Tableau 3. 1 : Résultats de la méthode de Chain Ladder.....	30
Tableau 3. 2 : Résultats obtenus à partir des variantes de Chain Ladder.....	31
Tableau 3. 3 : Seuil par semestre de survenance pour le taux de recouvrement ultime	34
Tableau 3. 4 : Résultats de la méthode de Cape Cod	36
Tableau 3. 5 : Résultats de la méthode des moindres carrés de De Vylder	38
Tableau 3. 6 : Exemple simplifié de calcul de coefficients de la méthode par tranche.....	40
Tableau 3. 7 : Coefficient de passage de la méthode par tranche.....	40
Tableau 3. 8 : Résultats de la méthode par tranche.....	41
Tableau 3. 9 : Coefficients de passage de la méthode par tranche de recouvrement.....	43
Tableau 3. 10 : Résultats de la méthode par tranche de recouvrement et par tranche de délai de règlement	44

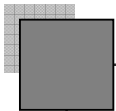
Chapitre 4 :

Tableau 4. 1 : Erreur moyenne de court terme.....	46
Tableau 4. 2 : Erreur moyenne de long terme.....	48
Tableau 4. 3 : Erreur moyenne de « la diagonale »	50
Tableau 4. 4 : Comparaison de l'espoir de recouvrement de chaque méthode.....	51

Chapitre 5 :

Tableau 5. 1 : Erreur quadratique moyenne par la méthode de Mack et intervalle de confiance	57
Tableau 5. 2 : Calculs intermédiaires au test d'indépendance	59
Tableau 5. 3 : Valeurs de la statistique $-2q^*$	66
Tableau 5. 4 : Taux de recouvrement ultime des modélisations GLM	67
Tableau 5. 5 : Espoirs de recouvrement et risques d'estimation des modèles GLM	70

<i>Tableau 5. 6 : Intervalle de confiance asymptotique des modèles GLM.....</i>	<i>71</i>
<i>Tableau 5. 7 : Percentiles estimés.....</i>	<i>73</i>
<i>Tableau 5. 8 : Paramètres estimés de la version GLM de la méthode par tranche.....</i>	<i>75</i>
<i>Tableau 5. 9 : Espoir de recouvrement de la version GLM de la méthode par tranche.....</i>	<i>76</i>
<i>Tableau 5. 10 : Percentiles de l'espoir de recouvrement obtenus par le bootstrap des résidus de Pearson.....</i>	<i>78</i>
<i>Tableau 5. 11 : Statistique de Kolmogorov-Smirnov pour chaque semestre de déroulé</i>	<i>81</i>
<i>Tableau 5. 12 : Moments des logarithmes des facteurs de développement</i>	<i>82</i>
<i>Tableau 5. 13 : Percentiles des taux de recouvrement ultimes</i>	<i>83</i>
<i>Tableau 5. 14 : Percentiles de l'espoir de recouvrement</i>	<i>83</i>
<i>Tableau 5. 15 : Convergence de l'espoir de recouvrement</i>	<i>84</i>



ANNEXES

<i>Annexe 1 : Triangle des montants cumulés de recouvrement</i>	<i>93</i>
<i>Annexe 2 : Triangle des taux cumulés de recouvrement</i>	<i>94</i>
<i>Annexe 3 : Triangle des facteurs de développement</i>	<i>95</i>
<i>Annexe 4 : Projection du triangle supérieur pour la validation à long terme</i>	<i>96</i>
<i>Annexe 5 : Estimations des paramètres des modèles linéaires généralisés et leur risque associé.....</i>	<i>97</i>
<i>Annexe 6 : Résultats du Bootstrap du Modèle de Poisson.....</i>	<i>98</i>
<i>Annexe 7 : Résultats du Bootstrap du Modèle Gamma</i>	<i>98</i>

Annexe 1 : Triangle des montants cumulés de recouvrement

Sem.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1997_1	18 685	182 820	335 784	421 124	473 502	499 780	545 156	576 578	608 815	666 840	690 269	722 815	746 597	782 845	799 803	811 852	835 388	839 636	843 412	849 285	858 757	861 073
1997_2	69 799	217 741	244 449	300 387	376 928	486 740	507 266	545 420	559 924	570 990	586 725	602 241	644 822	659 803	669 263	679 973	685 544	691 117	700 697	706 900	710 689	.
1998_1	29 780	195 091	224 939	251 704	306 606	351 402	541 396	599 518	630 232	671 953	687 342	709 467	721 103	774 898	797 854	806 111	809 148	811 163	818 705	822 165	.	.
1998_2	62 858	126 644	204 518	240 897	271 290	291 409	312 712	328 809	343 985	352 414	415 126	428 289	438 465	441 682	443 624	445 744	448 381	450 562	452 328	.	.	.
1999_1	45 177	117 361	138 917	156 208	180 105	245 378	260 559	281 080	296 600	357 210	377 565	386 847	394 304	414 048	420 658	483 706	495 957	505 478	.	.	.	.
1999_2	79 165	114 673	142 264	187 648	266 463	472 604	609 465	668 535	682 991	727 746	739 917	758 312	763 550	767 672	819 072	824 042	828 761	.	.	.	.	.
2000_1	4 419	35 113	293 613	386 777	465 852	538 198	584 303	613 381	646 312	661 830	656 501	675 711	699 011	707 691	721 022	736 475	.	.	.	.	.	.
2000_2	35 293	192 191	302 848	359 872	458 379	497 545	519 206	606 328	752 521	762 303	779 609	793 540	817 517	834 685	851 868	.	.	.	.	.	.	.
2001_1	68 446	554 070	673 001	691 630	713 462	776 142	784 979	793 024	859 666	864 883	907 588	943 962	984 299	986 356	.	.	.	.	.	.	.	.
2001_2	69 173	287 911	434 544	513 835	605 826	624 279	687 076	700 277	791 315	832 915	839 676	904 961	909 069	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2002_1	35 359	155 329	237 604	290 750	371 656	393 942	568 032	636 647	712 719	715 482	718 005	728 833	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2002_2	81 470	481 614	576 818	747 036	839 011	949 261	984 731	1 032 053	1 050 621	1 068 820	1 080 447	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2003_1	4 836	129 376	259 096	325 264	351 468	368 737	385 598	391 042	415 722	480 918	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2003_2	58 735	173 923	206 165	262 447	356 453	533 870	544 502	570 985	659 998	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2004_1	180 685	649 543	1 030 998	1 490 785	1 796 034	1 878 698	1 907 921	1 916 826	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2004_2	144 335	508 861	968 919	1 361 093	1 873 740	1 959 147	2 158 798	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2005_1	253 604	1 045 943	1 541 918	2 378 796	2 882 612	3 117 584	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2005_2	172 410	788 267	1 079 801	1 360 253	1 384 676	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2006_1	473 763	1 646 271	2 859 579	3 273 634	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2006_2	578 791	2 526 986	3 107 268	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2007_1	684 715	2 359 093	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2007_2	384 426	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Annexe 2 : Triangle des taux cumulés de recouvrement

Sem.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1997_1	1,6%	15,3%	28,1%	35,3%	39,7%	41,9%	45,7%	48,3%	51,0%	55,9%	57,8%	60,6%	62,5%	65,6%	67,0%	68,0%	70,0%	70,3%	70,7%	71,1%	71,9%	72,1%
1997_2	7,0%	21,8%	24,5%	30,1%	37,8%	48,8%	50,9%	54,7%	56,1%	57,3%	58,8%	60,4%	64,7%	66,2%	67,1%	68,2%	68,7%	69,3%	70,3%	70,9%	71,3%	.
1998_1	2,2%	14,7%	16,9%	19,0%	23,1%	26,5%	40,8%	45,2%	47,5%	50,6%	51,8%	53,5%	54,3%	58,4%	60,1%	60,7%	61,0%	61,1%	61,7%	61,9%	.	.
1998_2	11,0%	22,2%	35,9%	42,3%	47,6%	51,2%	54,9%	57,7%	60,4%	61,9%	72,9%	75,2%	77,0%	77,5%	77,9%	78,2%	78,7%	79,1%	79,4%	.	.	.
1999_1	5,3%	13,8%	16,3%	18,3%	21,1%	28,8%	30,6%	33,0%	34,8%	41,9%	44,3%	45,4%	46,3%	48,6%	49,3%	56,7%	58,2%	59,3%	.	.	.	.
1999_2	6,3%	9,1%	11,3%	14,9%	21,2%	37,7%	48,6%	53,3%	54,4%	58,0%	58,9%	60,4%	60,8%	61,2%	65,3%	65,6%	66,0%	.	.	.	.	.
2000_1	0,4%	3,3%	27,7%	36,4%	43,9%	50,7%	55,0%	57,8%	60,9%	62,3%	61,8%	63,7%	65,8%	66,7%	67,9%	69,4%	.	.	.	.	.	.
2000_2	2,9%	16,1%	25,3%	30,1%	38,3%	41,6%	43,4%	50,6%	62,9%	63,7%	65,1%	66,3%	68,3%	69,7%	71,2%	.	.	.	.	.	.	.
2001_1	5,5%	44,8%	54,5%	56,0%	57,7%	62,8%	63,5%	64,2%	69,6%	70,0%	73,4%	76,4%	79,6%	79,8%	.	.	.	.	.	.	.	.
2001_2	5,6%	23,4%	35,4%	41,8%	49,3%	50,8%	55,9%	57,0%	64,4%	67,8%	68,3%	73,6%	74,0%	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2002_1	3,6%	15,9%	24,3%	29,7%	38,0%	40,3%	58,1%	65,1%	72,9%	73,2%	73,5%	74,6%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2002_2	5,6%	32,9%	39,4%	51,0%	57,3%	64,8%	67,2%	70,5%	71,7%	73,0%	73,8%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2003_1	0,6%	14,7%	29,5%	37,0%	40,0%	42,0%	43,9%	44,5%	47,3%	54,8%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2003_2	5,2%	15,5%	18,3%	23,3%	31,7%	47,5%	48,4%	50,8%	58,7%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2004_1	7,9%	28,4%	45,1%	65,2%	78,5%	82,2%	83,4%	83,8%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2004_2	4,6%	16,1%	30,6%	43,0%	59,2%	62,0%	68,3%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2005_1	5,6%	23,2%	34,2%	52,7%	63,9%	69,1%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2005_2	3,8%	17,6%	24,1%	30,4%	30,9%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2006_1	7,1%	24,6%	42,8%	49,0%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2006_2	8,1%	35,3%	43,4%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2007_1	9,9%	34,2%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2007_2	5,0%	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Annexe 3 : Triangle des facteurs de développement

Sem.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1997_1	10,58	1,81	1,25	1,11	1,04	1,08	1,04	1,05	1,10	1,03	1,05	1,03	1,05	1,02	1,01	1,03	1,00	1,00	1,01	1,01	1,00
1997_2	3,16	1,09	1,21	1,26	1,30	1,03	1,07	1,02	1,01	1,02	1,03	1,08	1,03	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	-
1998_1	8,70	1,10	1,10	1,20	1,15	1,60	1,11	1,04	1,06	1,02	1,03	1,01	1,08	1,02	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	-	
1998_2	2,06	1,66	1,15	1,10	1,05	1,08	1,04	1,05	1,02	1,21	1,03	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-		
1999_1	2,62	1,14	1,06	1,15	1,39	1,05	1,07	1,06	1,27	1,05	1,02	1,02	1,06	1,02	1,19	1,02	1,02	-			
1999_2	1,19	1,17	1,31	1,55	2,05	1,34	1,08	1,02	1,07	1,01	1,03	1,01	1,01	1,08	1,01	1,01	-				
2000_1	31,90	11,22	1,29	1,20	1,16	1,08	1,02	1,06	1,02	1,01	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	-					
2000_2	5,24	1,60	1,18	1,28	1,07	1,03	1,17	1,27	1,01	1,02	1,02	1,03	1,02	1,02	-						
2001_1	9,08	1,20	1,02	1,01	1,08	1,01	1,01	1,09	1,00	1,05	1,04	1,05	1,00	-							
2001_2	4,50	1,53	1,17	1,15	1,03	1,11	1,02	1,15	1,06	1,01	1,09	1,01	-								
2002_1	4,45	1,54	1,23	1,28	1,06	1,47	1,13	1,12	1,00	1,00	1,02	-									
2002_2	5,69	1,21	1,32	1,13	1,13	1,04	1,05	1,02	1,02	1,01	-										
2003_1	40,17	2,02	1,26	1,08	1,05	1,04	1,01	1,06	1,16	-											
2003_2	2,92	1,18	1,27	1,36	1,51	1,02	1,05	1,16	-												
2004_1	3,59	1,59	1,45	1,21	1,04	1,02	1,00	-													
2004_2	3,54	1,91	1,40	1,38	1,05	1,10	-														
2005_1	4,12	1,47	1,54	1,21	1,08	-															
2005_2	4,78	1,37	1,26	1,02	-																
2006_1	3,47	1,74	1,14	-																	
2006_2	4,37	1,22	-																		
2007_1	3,45	-																			
2007_2	-																				

Annexe 4 : Projection du triangle supérieur pour la validation à long terme

Sem.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1997_1	1,6%	6,4%	9,5%	11,8%	13,9%	15,8%	17,4%	18,4%	19,9%	20,9%	21,7%	22,4%	23,1%	23,6%	24,2%	24,9%	25,2%	25,4%	25,6%	25,8%	26,0%	26,1%
1997_2	7,6%	31,1%	46,3%	57,5%	68,0%	77,3%	85,3%	89,9%	97,3%	102,2%	106,1%	109,7%	112,8%	115,7%	118,5%	122,0%	123,5%	124,4%	125,4%	126,2%	127,3%	
1998_1	1,7%	7,1%	10,6%	13,2%	15,6%	17,7%	19,5%	20,6%	22,3%	23,4%	24,3%	25,1%	25,8%	26,5%	27,1%	27,9%	28,3%	28,5%	28,7%	28,9%		
1998_2	11,9%	48,5%	72,1%	89,7%	106,0%	120,4%	133,0%	140,1%	151,7%	159,3%	165,4%	171,0%	175,8%	180,3%	184,7%	190,2%	192,5%	193,9%	195,4%			
1999_1	5,2%	21,1%	31,3%	38,9%	46,0%	52,3%	57,7%	60,8%	65,9%	69,1%	71,8%	74,2%	76,3%	78,3%	80,2%	82,6%	83,6%	84,2%				
1999_2	6,3%	25,7%	38,2%	47,5%	56,2%	63,8%	70,5%	74,3%	80,4%	84,4%	87,6%	90,6%	93,2%	95,6%	97,9%	100,8%	102,0%					
2000_1	0,1%	0,3%	0,5%	0,6%	0,7%	0,8%	0,9%	0,9%	1,0%	1,1%	1,1%	1,1%	1,2%	1,2%	1,2%	1,3%						
2000_2	3,0%	12,3%	18,3%	22,8%	26,9%	30,6%	33,8%	35,6%	38,5%	40,5%	42,0%	43,4%	44,7%	45,8%	46,9%							
2001_1	5,2%	21,1%	31,3%	38,9%	46,0%	52,3%	57,7%	60,8%	65,9%	69,1%	71,8%	74,2%	76,3%	78,3%								
2001_2	5,0%	20,5%	30,4%	37,9%	44,7%	50,8%	56,1%	59,2%	64,1%	67,2%	69,8%	72,2%	74,2%									
2002_1	3,4%	13,8%	20,6%	25,6%	30,2%	34,3%	37,9%	39,9%	43,2%	45,4%	47,1%	48,7%										
2002_2	5,5%	22,6%	33,6%	41,7%	49,3%	56,1%	61,9%	65,2%	70,6%	74,1%	77,0%											
2003_1	0,4%	1,5%	2,3%	2,8%	3,3%	3,8%	4,2%	4,4%	4,7%	5,0%												
2003_2	5,8%	23,8%	35,3%	43,9%	51,9%	59,0%	65,1%	68,6%	74,3%													
2004_1	7,9%	32,4%	48,1%	59,9%	70,7%	80,4%	88,7%	93,5%														
2004_2	4,6%	18,6%	27,6%	34,3%	40,6%	46,1%	50,9%															
2005_1	5,6%	23,0%	34,1%	42,4%	50,2%	57,0%																
2005_2	3,7%	15,1%	22,4%	27,8%	32,9%																	
2006_1	7,1%	29,0%	43,1%	53,6%																		
2006_2	8,2%	33,3%	49,5%																			
2007_1	9,9%	40,5%																				
2007_2																						

0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
4,08	1,49	1,24	1,18	1,14	1,10	1,05	1,08	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00

Annexe 5 : *Estimations des paramètres des modèles linéaires généralisés et leur risque associé*

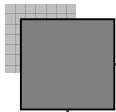
paramètres de régression	Modèle de Poisson			Modèle Normal		Modèle Gamma	
	Estimateur du max de vrais.	Ecart type (poisson simple)	Ecart type (poisson sur- dispersé)	Estimateur du max de vrais.	Ecart type	Estimateur du max de vrais.	Ecart type
<i>Intercept</i>	10,8014	0,0013	0,2442	0		10,7904	
<i>aref=a0</i>	0	0	0	0		0	
<i>a1</i>	-0,2305	0,0017	0,3206	10,64	0,4063	-0,2473	0,2435
<i>a2</i>	-0,0949	0,0016	0,3101	10,6769	0,3929	-0,1521	0,2497
<i>a3</i>	-0,716	0,002	0,3746	10,1112	0,6814	-0,8315	0,2587
<i>a4</i>	-0,6289	0,0019	0,365	9,8933	0,8498	-0,2835	0,2636
<i>a5</i>	-0,0695	0,0016	0,3103	10,2929	0,573	-0,0233	0,2649
<i>a6</i>	-0,1283	0,0017	0,3165	10,6821	0,3891	-0,3169	0,266
<i>a7</i>	0,0569	0,0016	0,304	10,8866	0,3211	0,0211	0,2728
<i>a8</i>	0,2606	0,0015	0,2918	11,466	0,1926	-0,0376	0,2798
<i>a9</i>	0,1653	0,0016	0,3005	11,0914	0,2654	0,0628	0,2844
<i>a10</i>	0,0452	0,0017	0,3121	10,777	0,3597	-0,0001	0,2951
<i>a11</i>	0,4479	0,0015	0,2865	11,4913	0,1889	0,2123	0,2998
<i>a12</i>	-0,3188	0,0019	0,3531	10,6274	0,4178	-0,4348	0,3103
<i>a13</i>	0,0748	0,0017	0,3195	10,7702	0,3654	0,1181	0,3236
<i>a14</i>	1,2312	0,0014	0,2578	12,1791	0,1123	1,0767	0,336
<i>a15</i>	1,4002	0,0013	0,2539	12,211	0,1083	1,3872	0,3508
<i>a16</i>	1,853	0,0013	0,2445	12,6946	0,0848	1,8424	0,3714
<i>a17</i>	1,1481	0,0014	0,2727	12,0815	0,1227	1,0558	0,3986
<i>a18</i>	2,1889	0,0013	0,2448	13,0224	0,0787	2,1633	0,4346
<i>a19</i>	2,3701	0,0013	0,2476	13,2994	0,0734	2,2888	0,4912
<i>a20</i>	2,4869	0,0014	0,2568	13,2974	0,0755	2,513	0,5867
<i>a21</i>	2,0581	0,0021	0,3897	12,8595	0,1876	2,0691	0,808
<i>bref=b0</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>b1</i>	1,0976	0,0007	0,1245	1,052	0,0706	1,1815	0,2391
<i>b2</i>	0,6203	0,0008	0,1417	0,4776	0,0847	0,7461	0,2467
<i>b3</i>	0,4794	0,0008	0,156	0,441	0,0994	0,389	0,2504
<i>b4</i>	0,3426	0,0009	0,1747	0,3495	0,1261	0,2877	0,2545
<i>b5</i>	-0,0347	0,0011	0,2033	-0,3969	0,2391	0,2454	0,2603
<i>b6</i>	-0,0554	0,0012	0,2263	-0,405	0,3277	0,1254	0,2694
<i>b7</i>	-0,6493	0,0017	0,312	-1,2329	0,882	-0,463	0,2709
<i>b8</i>	-0,0536	0,0014	0,2703	-0,1854	0,4407	-0,0303	0,2773
<i>b9</i>	-0,563	0,0018	0,3451	-0,9474	0,94	-0,4191	0,2883
<i>b10</i>	-0,9993	0,0023	0,4302	-1,2684	1,3143	-0,6622	0,2926
<i>b11</i>	-0,7634	0,0022	0,4136	-0,7778	0,9319	-0,7339	0,2972
<i>b12</i>	-0,9421	0,0025	0,4719	-0,9965	1,2045	-0,8634	0,3074
<i>b13</i>	-0,9872	0,0027	0,5147	-1,2654	1,7204	-0,9538	0,3229
<i>b14</i>	-0,9338	0,0029	0,547	-0,9776	1,679	-1,0119	0,3348
<i>b15</i>	-0,9476	0,0032	0,5987	-1,2058	2,3898	-0,9136	0,364
<i>b16</i>	-1,6222	0,0048	0,8993	-1,5072	3,5392	-1,7189	0,3733
<i>b17</i>	-2,2529	0,0073	1,3678	-2,4813	9,8775	-2,2695	0,4004
<i>b18</i>	-2,0838	0,0072	1,3587	-2,1491	7,2755	-2,0633	0,4335
<i>b19</i>	-2,29	0,0087	1,6337	-2,3458	9,2503	-2,2462	0,4896
<i>b20</i>	-1,9688	0,0091	1,7095	-2,0181	7,8758	-1,9946	0,587
<i>b21</i>	-3,2927	0,0235	4,4157	-3,4037	39,5505	-3,2817	0,808

Annexe 6 : Résultats du Bootstrap du Modèle de Poisson

Sem.	Modèle de Poisson			
	Moyenne de l'espoir de recouvrement		Moyenne du taux ultime de recouvrement	
	100 itérations	500 itérations	100 itérations	500 itérations
1997_1				
1997_2	3 660	3 160	78,3%	79,4%
1998_1	15 829	16 002	70,1%	70,2%
1998_2	4 931	5 956	84,3%	85,0%
1999_1	14 083	13 668	68,3%	68,2%
1999_2	26 050	23 835	70,2%	70,2%
2000_1	47 188	47 043	77,1%	78,8%
2000_2	35 536	28 974	71,8%	72,0%
2001_1	45 802	40 669	79,6%	79,5%
2001_2	84 615	89 329	81,7%	81,7%
2002_1	84 278	89 302	84,9%	85,0%
2002_2	152 073	166 727	85,9%	85,5%
2003_1	122 120	122 393	75,5%	75,8%
2003_2	125 482	131 783	79,9%	79,9%
2004_1	102 026	100 438	83,0%	83,7%
2004_2	558 676	512 887	84,6%	84,3%
2005_1	663 196	664 092	83,7%	83,9%
2005_2	1 337 992	1 342 736	61,4%	61,7%
2006_1	2 192 156	2 308 609	83,1%	83,6%
2006_2	2 762 194	2 772 458	82,6%	82,6%
2007_1	3 201 775	3 216 202	80,9%	81,0%
2007_2	5 539 461	5 417 893	77,3%	75,7%

Annexe 7 : Résultats du Bootstrap du Modèle Gamma

Sem.	Modèle Gamma			
	Moyenne de l'espoir de recouvrement		Moyenne du taux ultime de recouvrement	
	100 itérations	500 itérations	100 itérations	500 itérations
1997_1	0	0	-	-
1997_2	1 274	1 122	71,5%	73,1%
1998_1	6 675	7 175	60,9%	59,1%
1998_2	3 986	4 549	76,1%	75,4%
1999_1	5 190	4 502	72,2%	71,6%
1999_2	11 914	14 211	66,5%	67,5%
2000_1	22 319	23 417	61,4%	64,2%
2000_2	22 851	27 202	69,8%	68,3%
2001_1	54 735	55 748	65,6%	66,7%
2001_2	72 938	72 512	73,1%	71,8%
2002_1	79 073	73 427	78,6%	78,3%
2002_2	132 607	141 153	72,0%	68,6%
2003_1	91 576	92 072	65,1%	63,7%
2003_2	111 540	109 267	76,3%	75,7%
2004_1	269 593	285 245	80,4%	80,1%
2004_2	483 984	475 144	79,7%	79,2%
2005_1	810 767	780 136	79,1%	80,2%
2005_2	1 115 191	1 082 919	55,4%	53,9%
2006_1	1 994 849	2 017 964	74,3%	75,8%
2006_2	2 463 269	2 415 530	75,0%	74,7%
2007_1	2 628 992	2 736 149	75,8%	72,7%
2007_2	4 093 891	4 181 559	58,3%	59,6%



BIBLIOGRAPHIE

Articles

- *A comparison of models for the chain ladder method* - Klaus Th. HESS & Klaus D. Schmidt (2002), Insurance : Mathematics and Economics 31
- *A comparison of stochastic models that reproduce chain ladder estimates* – T. Mack & G Venter (1999), Insurance : Mathematics and Economics 26
- *An investigation into stochastic claims reserving models and the chain ladder technique* - R.J. Verrall (1999), Insurance : Mathematics and Economics 26
- *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving* – Peter England & Richard Verrall (1999), Insurance : Mathematics and Economics 25
- *Approche semi-paramétrique du calcul des provisions techniques : Ajustement de surfaces* – Ismael Hadji & Alain MONFORT (2004), Bulletin français d’actuariat Vol6, n°12, p137-151
- *Distribution-free calculation of standard error of Chain Ladder reserve estimates* - T. Mack (1993), ASTIN Bulletin 23
- *Estimation of IBNR Claims by least squares* - DE VYLDER F. (1978), MUSUM, volume 197, p249-254
- *Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates* - T. Mack (1993), Meeting of the Casualty Actuarial Society
- *Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey* - Klaus D. Schmidt, Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006
- *Prediction error in the Chain Ladder method* – M.V. Wüthrich (2008), Insurance: Mathematics and Economics 42
- *Reserves in Lloyd’s and the London Market* - BENJAMIN P.S. & EAGLES L. M. (1986), Journal of the Institute of Actuaries, volume 113, p197-256.
- *Stochastic claims reserving in general insurance* – P.D. England & R.J. Verrall (2002), presented to the institute of Actuaries
- *The Actuary and IBNR, Proceedings of the Casualty Actuarial Society* - BORNHUETTER & FERGUSON (1972), Volume 59, p181-195
- *The mean square error of prediction in the Chain Ladder reserving method (Mack and Murphy revisited)* – BUCHWALDER, BÜHLMANN, MERZ, WÜTHRICH(2006), ASTIN Bulletin 36
- *Which stochastic model is underlying the chain ladder method?* - T. Mack (1994), Insurance : Mathematics and Economics 15

Mémoires

- *Calcul stochastique de provisions techniques d'assurance non-vie* - Christophe Bonnefoy et Bruno Devictor, ENSAE 2007
- *Construction d'un score de recouvrement* – Sébastien Gautrin, Paris Dauphine 2006
- *Solvency II – Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non vie ?* – Clélia Sauvet, ISFA 2006
- *The concept of reserving and reserving methodologies in general insurance* – Elena Pantzopoulou, City University of London, 2003

Ouvrages

- *Evaluation de la provision pour sinistres à payer* - Christian PATRAT, 2003
- *Provisionnement technique en assurance non-vie* – C. PARTRAT, J.M. NESSI, E. LECOEUR, Economica, 2007

Autre

- *Compound Poisson distributions and GLM's tweedie's distribution* – Rob Kaas
- *Delta method and reserving* – C. Partrat, N. Pey, J. Schilling
- *Etude de techniques IBNR modernes* – S. Pitrebois, P. De Longueville, M. Denuit, JF Walhin
- *Evaluation des provisions techniques en assurance non vie* – Séminaire ISUP et ISFA 1995
- *Evaluation stochastique de la provision pour sinistres* – Christian PARTRAT, Conférence scientifique 2004
- *Généralités sur les méthodes de rééchantillonnage : outils et méthodes* – P. Bertail, Journée de formation « Bootstrap et application actuarielles », 2007
- *Provisionnement stochastique : Methodes factorielles* – Christian PARTRAT, Journée de formation « Bootstrap et application actuarielles », 2005