



Mémoire présenté le : 26 mars 2015

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaire**

Par : PHAN NGOC Hung

Titre : Provisionnement stochastique adapté aux spécialités de la réassurance
non-vie

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Signature

Entreprise: PartnerRe

Nom : Simon LAMBERT

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : Simon LAMBERT

Signature :

Invité

Nom :

Signature :

Mme Florence PICARD

Mme Catherine PIGEON

Mme Isabelle PRAUD-LION

M. David VALLEE

Membres présents du jury de l'ISFA

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de do-
cuments actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Signature du candidat

Résumé

Mots-clés: Réassurance non-vie, provisionnement, méthodes déterministes, stochastiques, modèles linéaires généralisés, Bootstrap, distribution de provisions, mesure de risque, test de sensibilité.

Tout au long de l'histoire de la réassurance, il y a eu des événements qui ont incité les directions de sociétés à faire un point sur leur méthodologie de provisionnement. Ainsi, l'attaque terroriste au 11 Septembre 2001 et le tsunami au Japon en Mars 2011 ont fait trembler l'industrie et ont poussé les réassureurs à renforcer leurs bilans, à diversifier davantage leurs portefeuilles et à assurer une meilleure estimation de leurs provisions techniques.

Cette étude a pour objet dans un premier temps de rappeler les techniques de la réassurance. La seconde partie détaille les enjeux du provisionnement, quelques méthodes déterministes souvent rencontrées dans la pratique ainsi que des facteurs qui peuvent influencer le montant des provisions nécessaires. La troisième partie est dédiée à la description d'un modèle stochastique faisant partie des modèles linéaires généralisés (GLMs - *Generalized Linear Models*). Auparavant, ces modèles étaient jugés comme très adaptés à la tarification, mais les études récentes montrent qu'ils sont aussi appropriés pour le provisionnement stochastique. Des applications numériques basées sur un triangle d'exemple sont proposées après chaque méthode/modèle pour éclaircir sa part théorique. Aujourd'hui, ces méthodes sont devenues suffisamment répandues au point que la vérification des hypothèses sous-jacentes aux modèles soit souvent négligée. Dans ce mémoire nous allons donc mettre l'accent sur la validation des hypothèses et présenter la procédure à effectuer.

Que ce soit dans le cadre de la directive Solvabilité 2 ou pour répondre aux nouvelles exigences des autorités, les réassureurs ne peuvent plus se contenter des estimations déterministes des provisions techniques. Après avoir discuté dans l'équipe de provisionnement et réalisé des études sur les modèles/techniques qui sont capables d'être appliqués dans ce cas, nous avons décidé d'utiliser le modèle Paid Mack Bootstrap pour modéliser les distributions des provisions des branches d'activités principales et du portefeuille entier.

Nous présenterons dans la quatrième partie les résultats obtenus suivant une segmentation optimale. La convergence des estimateurs et la pertinence du modèle seront aussi vérifiées.

Abstract

Keywords: Non-life reinsurance, reserving, deterministic, stochastic methods, generalized linear models, Bootstrap, distribution of reserves, measure of risk, sensitivity test.

Many catastrophes have occurred in the world in recent years, both natural and human generated, and these have changed the way we think about risk management and reserving practices. From the terrorist attack of September 11, 2001, to the tsunami in Japan in March 2011, reinsurers throughout the world have been forced to review the methodologies they employ to estimate reserves, strengthen the balance sheet and further diversify international portfolios to reduce the risk of insolvency.

This paper commences by reviewing existing literature and research on reinsurance to provide readers with a solid background to the study. The second chapter takes a closer look at the main objectives of reserving, the actuarial methods that are typically employed and the factors that may have an important impact on the amount of reserve produced by the reserving team. Chapter Three examines some of the stochastic models pertaining to the framework of generalized linear models (GLMs). These models are widely regarded as being the most appropriate for pricing purposes; however, recent studies have indicated that reserving actuaries could also make good use of them. This paper will present a large range of numerical applications to illustrate in detail the theoretical aspects of this field, based on an exemplary triangle. These methods have become so popular that practitioners may ignore the verification of all the underlying assumptions of these models. Many numerical illustrations as to how this can be achieved are presented in this paper to emphasize its important impact on producing an effective estimation.

Whether forced by the new requirements of the Solvency 2 project, or striving to meet the demand of controlling authorities, reinsurers are no longer satisfied with the deterministic reserve estimation. Discussion within the reserving team, coupled with a detailed review of existing models/techniques, the Paid Mack Bootstrap model was chosen to estimate the reserve distributions of some of the main business segments and the portfolio as a whole.

In the final chapter, the triangles of PartnerRe, following an optimal segmentation, are used to produce the required results. The convergence of the estimators as well as the suitability of the model is also verified.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire, pour leur soutien, leur aide et leur présence.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les membres de l'équipe de provisionnement de PartnerRe qui m'ont fait partager leurs connaissances.

Je remercie également mon tuteur académique KAZI-TAMI Nabil, professeur à l'ISFA et responsable du suivi de mon étude, pour ses conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Et enfin je remercie particulièrement Anne EYRAUD-LOISEL, professeur à l'ISFA, pour son aide précieuse, son encouragement et sa disponibilité, car sans cette personne cette étude n'aurait pu voir le jour.

Table des matières

Résumé.....	1
Abstract.....	2
Remerciements.....	3
Table des matières	4
Introduction.....	6
1 PartnerRe et la réassurance	7
1.1 PartnerRe, un réassureur international	7
1.2 Portefeuille d'Asie de PartnerRe	7
1.3 Techniques de la réassurance	8
1.3.1 <i>Formes proportionnelles</i>	11
1.3.2 <i>Formes non proportionnelles</i>	14
2 Provisionnement en pratique	18
2.1 Provisions techniques	18
2.1.1 <i>Provisions pour les sinistres non encore survenus</i>	19
2.1.2 <i>Provisions pour les sinistres survenus</i>	19
2.2 Provisionnement sous Solvabilité 2.....	21
2.2.1 <i>Fonds propres</i>	22
2.2.2 <i>Best estimate</i>	23
2.2.3 <i>Marge de risque</i>	23
2.3 Approche Chain Ladder et quelques modèles déterministes.....	24
2.3.1 <i>Construction des triangles de la liquidation</i>	26
2.3.2 <i>Facteurs de développement</i>	27
2.3.3 <i>Application numérique</i>	31
2.3.4 <i>Limites de l'approche Chain Ladder</i>	32
2.3.5 <i>Méthode de Bornhuetter-Ferguson</i>	33
2.4 Ajustements en pratique	34
2.4.1 <i>Sliding scale</i>	34
2.4.2 <i>Systematic RAD</i>	36
3 Approche stochastique en provisionnement.....	40
3.1 Mesure de risque	40
3.1.1 <i>Valeur à risque</i>	41
3.1.2 <i>TVaR</i>	42
3.2 Modèle de Mack (1993)	43
3.2.1 <i>Principe du modèle</i>	43
3.2.2 <i>Application numérique</i>	46
3.2.3 <i>Test des hypothèses</i>	47
3.3 Modèles linéaires généralisés (GLM).....	53
3.3.1 <i>Principe du modèle</i>	54
3.3.2 <i>Modèle ODP (over-dispersed Poisson)</i>	61
3.3.3 <i>Modèle de Mack (optique GLM)</i>	65
3.4 Bootstrap, une vision non paramétrique	68
3.4.1 <i>Principe de Bootstrap</i>	69
3.4.2 <i>Bootstrap pour le modèle ODP</i>	71
3.4.3 <i>Bootstrap pour le modèle de Mack</i>	76
4 Etude empirique	81
4.1 Spécialités liées à la réassurance	82

4.2	Ajustements pratiques au modèle	83
4.2.1	<i>Simplification de la simulation</i>	83
4.2.2	<i>Traitement des facteurs de développement non adaptés</i>	85
4.2.3	<i>Recentrage de la distribution et autres</i>	87
4.3	Présentation des résultats	89
4.3.1	<i>Distribution de la branche à développement long</i>	90
4.3.2	<i>Distribution de la branche à développement moyen</i>	93
4.3.3	<i>Distribution de la branche à développement court</i>	95
4.3.4	<i>Distribution du portefeuille entier</i>	97
4.3.5	<i>Convergence des estimateurs</i>	102
4.3.6	<i>Pertinence du modèle</i>	112
4.3.7	<i>Test de sensibilité</i>	122
4.3.8	<i>Limites et améliorations futures</i>	125
	Conclusion	126
	Glossaire	128
	Bibliographie	130
	Annexes	132
A.	Codes VBA	132
A.1	<i>Maximisation avec le Solveur</i>	132
A.2	<i>Bootstrap du modèle ODP</i>	132
A.3	<i>Bootstrap du modèle de Mack</i>	135
A.4	<i>Bootstrap simplifié du modèle de Mack</i>	138
B	Triangles de règlements	142
B.1	<i>Branche à développement long</i>	142
B.2	<i>Branche à développement moyen</i>	143
B.3	<i>Branche à développement court</i>	144
C	Test des hypothèses du modèle de Mack	145
C.1	<i>Indépendance des années de souscription</i>	145
C.2	<i>Forme de l'espérance</i>	148
C.3	<i>Forme de la variance</i>	151
C.4	<i>Absence de corrélation entre années de développement</i>	154

Introduction

Ce mémoire porte sur une étude des méthodes de provisionnement dans une société de réassurance qui a un portefeuille diversifié au niveau géographique avec de multiples branches d'activités. La problématique provient de la même nature de la réassurance qui a un cycle inverse. En effet, la société devrait fixer une prime pour un traité donné en prenant en compte partiellement l'historique de sinistralité que la cédante lui a communiqué. Pourtant, sa sinistralité ultime n'est connue qu'après un certain temps, parfois une dizaine d'années pour les branches à développement long. La révision régulière est donc essentielle pour arriver à une bonne provision technique capable de couvrir les charges auxquelles l'entreprise doit faire face vis-à-vis ses assurés.

Parmi les méthodes de provisionnement les plus connues dans la réassurance, on peut nommer Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson et Benktander. Celles-ci constituent une base théorique sur laquelle on peut estimer les montants ultimes de la responsabilité financière que la société a assumés. En pratique, il y a d'autres facteurs qui ont une influence importante sur le montant de réserve que l'entreprise devrait maintenir : la connaissance d'un actuaire dans l'équipe de provisionnement sur le portefeuille en question, l'opinion professionnelle du service de sinistres sur quelques sinistres particuliers qui pourront avoir un impact significatif sur le montant ultime, la connaissance du cycle de marché qui pourrait entraîner une sous-tarification pour quelques années de souscription, des changements imprévus dans les réglementations locales, des découvertes dans le domaine médical, l'approche prudente du réassureur à propos des provisions techniques pour renforcer la stabilité de son bilan et supporter l'évaluation des agences de notation... et tous ces facteurs sont nécessaires pour une bonne estimation des réserves.

Ce mémoire expose des modèles stochastiques d'un point de vue mathématique, et répond aussi aux problématiques liées à ses mises en œuvre en pratique. En effet, seuls ces modèles offrent la possibilité de quantifier la fiabilité des estimations qu'ils donnent. D'ailleurs, depuis quelques années, le service de provisionnement de PartnerRe utilise des distributions des réserves modélisées au niveau du portefeuille global pour le portefeuille d'Asie, en assumant le fait que les profils de risque des portefeuilles local et global soient similaires. Nous cherchons aussi à savoir si cette hypothèse est tenue ou non.

1 PartnerRe et la réassurance

1.1 PartnerRe, un réassureur international

Possédant plusieurs bureaux dans différents endroits du monde, PartnerRe a la capacité de fournir divers produits de réassurance pour les sociétés d'assurance. Cette entreprise est aujourd'hui un partenaire de choix de différentes institutions financières grâce à sa réputation (selon laquelle elle a un bilan solide et une gestion de risques avancée). A la fin de 2013, elle disposait d'un capital de \$7,523 millions de dollars et d'une prime totale de l'année de \$5,397 millions de dollars. Elle a ainsi reçu de bonnes notes des agences de notation, telles que la note A+ de A.M.Best, A1 de Moody's, A+ de Standard & Poors et AA- de Fitch. Depuis longtemps, elle figure dans le classement des 10 premiers réassureurs au niveau mondial.

Fondée il y a 20 ans comme un réassureur de catastrophe après l'ouragan Andrew afin de répondre aux besoins du marché, PartnerRe a connu une croissance rapide grâce à son développement interne et à des acquisitions qui lui ont permis de diversifier son portefeuille. En 2013, malgré la compétition de plus en plus féroce et l'environnement d'un taux d'intérêt bas, elle a continué à marquer un taux de rendement des capitaux (ROE – *Rate on Equity*) de 12.7%.

1.2 Portefeuille d'Asie de PartnerRe

Cette analyse porte sur des traités asiatiques qui se souscrivent à partir du bureau situé à Singapour. Son portefeuille comprend plusieurs branches d'activités et ses affaires s'étendent sur une géographie vaste. La prime annuelle de 2013 a dépassé le seuil de \$180 millions de dollars. Les deux graphiques ci-dessous représentent la répartition du volume de primes entre les marchés et les branches d'activités.

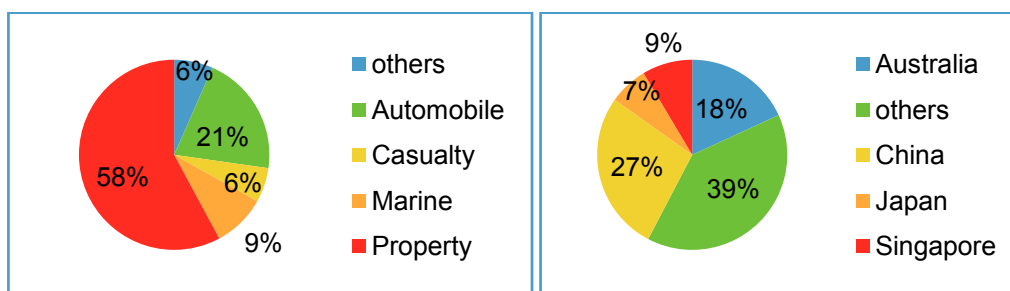


Figure 1.1 – Répartition du portefeuille d'Asie sur les marchés et branches d'activités

On peut constater que la Chine est le plus grand marché de PartnerRe en Asie. Pourtant, la marge de profit est toujours basse à cause de la compétition violente dans ce pays. Le retard de l'information entre les assurés et les réassureurs est important, ce qui contribue à la problématique de l'estimation des provisions techniques. Ce portefeuille se divise en plusieurs branches principales :

Property (dommage aux biens) : cette branche regroupe principalement des contrats d'assurance d'incendie et d'habitation.

Casualty (responsabilité civile) : cette branche regroupe tout ce qui concerne la responsabilité et les accidents personnels.

Automobile : cette branche correspond, comme son nom l'indique, à l'assurance automobile.

1.3 Techniques de la réassurance

Afin de mieux comprendre la réassurance de manière générale, nous allons nous poser plusieurs questions, et tenter d'y répondre :

Qu'est-ce que la réassurance ? Par définition, la réassurance est l'assurance pour les assureurs. Cette simple phrase nous permet de découvrir des caractéristiques essentielles de la réassurance. Premièrement, les principaux clients d'un réassureur sont des sociétés d'assurance, même si un réassureur peut parfois travailler avec d'autres types de clients, comme des gouvernements locaux par exemple. Deuxièmement, faute de contact direct avec le grand public, les réassureurs sont encore assez méconnus. La situation a commencé à changer ces dernières années. Les médias ont fait connaître la contribution des réassureurs à la reconstruction matérielle et financière suscitée par des catastrophes. En outre, les réassureurs ont accordé plus d'importance à leurs relations publiques pour améliorer leur image (souvent peu connue) et attirer les talents des universités. Une des mesures communes est d'offrir des bourses aux jeunes étudiants, ou encore de leur permettre d'effectuer des stages en entreprise pour leur faire comprendre ce secteur d'activité.

A quoi sert la réassurance ? Elle peut apporter de multiples bénéfices aux assureurs directs et à l'économie. Nous allons citer ci-après quelques-uns des impacts les plus importants :

- Réduire la probabilité de faillite des assureurs directs dans des sinistres graves ou des catastrophes humaines et naturelles. Il faut dire qu'aucun programme de réassurance ne peut éliminer complètement la probabilité de faillite, mais s'il est bien choisi et correctement géré, ce dernier pourrait augmenter considérablement la chance de survie dans des situations difficiles.
- Assister les assureurs qui voudraient élargir leurs champs d'activité en souscrivant des risques dans une nouvelle branche d'activité. Par le biais de la réassurance, ces assureurs peuvent limiter la perte potentielle financière et contrôler leurs responsabilités, et ce en prenant le temps de mieux comprendre le nouveau portefeuille.
- Des assureurs, y compris des réassureurs, disposent de fonds propres importants qui servent à couvrir les sinistres majeurs si les provisions établies auparavant ne sont pas suffisantes. La réassurance, ou la rétrocession dans le cas où les réassureurs vont chercher la garantie des autres réassureurs, aide à réduire le capital réservé en apportant aux assurés sinistrés des soulagements financiers. De plus, ce capital libéré poussera en avant la capacité de souscription.

Pourtant, quelques sociétés dans l'industrie n'aiment pas employer cette méthode pour se développer. En effet, les programmes de réassurance (ou rétrocession) ont un coût qui au final affecte le taux de rendement. PartnerRe, par exemple, se limite dans l'usage de la rétrocession en se basant sur une bonne gestion des risques qui a pour buts d'améliorer les intérêts de ses actionnaires, de lisser le compte des résultats et enfin de solidifier le bilan des assurés. La sinistralité est volatile d'une année à l'autre, ce qui place les directions des sociétés en difficultés parce qu'elles cherchent toujours à délivrer un profit stable de leurs investissements. La réassurance a deux effets. D'une part, elle aide à soulager de lourdes pertes si la société est touchée par de multiples sinistres une année en particulier. D'autre part, elle réduit le bénéfice réalisable d'une bonne année, c'est-à-dire une année où il y a peu d'activités de sinistres. En rapportant des provisions additionnelles si nécessaire, la réassurance renforce la sécurité financière et aide les assurés à améliorer la note des agences de notation, ce qui aura un impact positif au niveau de la compétition sur ce marché.

Quelles sont les formes de la réassurance ? Dans la souscription, on a l'habitude de diviser la réassurance en différentes formes en fonction de la sélection des risques à céder, du mode de cession et de la répartition des primes (responsabilité et sinistres).

Au niveau de la sélection des risques, il y a la réassurance facultative où l'assureur direct a le droit de sélectionner des risques particuliers qu'il souhaite céder, puis à son tour, le réassureur décidera s'il souhaite ou non les accepter, après un processus d'évaluation. Cette forme de réassurance est la plus ancienne et date de l'époque d'assurance maritime. Pourtant, de nos jours, son volume d'affaires ne compte qu'une part minoritaire dans le portefeuille des réassureurs. Les risques à prendre concernent souvent des usines de production, et/ou des bâtiments de très grande valeur. Au contraire, la réassurance obligatoire implique la responsabilité de la cédante de céder toutes les polices au sein du traité, et celle du réassureur d'accepter tous ces risques sans espace de négociation. A partir de ce caractère obligatoire, un portefeuille entier de la cédante sera l'objet d'une garantie, c'est la raison pour laquelle cette forme représente toujours la majorité dans le portefeuille global des réassureurs.

Au niveau du mode de cession des risques, il y a la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle. Dans le cas de la réassurance proportionnelle, les deux parties définiront à l'avance dans un contrat un ratio pour répartir la prime originale et la charge finale. Ce ratio peut varier d'un risque à l'autre, ou rester inchangé pour toutes les polices dans le traité. Grâce à ce ratio défini contractuellement, la gestion d'activité est simple et le coût est relativement bas. Il n'y a donc pas besoin de techniques actuarielles sophistiquées pour la tarification. C'est ce qui était le plus souvent utilisé pour les produits primitifs de la réassurance dans l'assurance maritime.

Concernant la réassurance non proportionnelle, ce ratio n'existe pas et la charge finale de la part du réassureur est calculée en fonction du montant des sinistres. En effet, l'assureur direct règle la totalité des sinistres qui sont au-dessous d'un seuil défini dans le contrat (la priorité) et le réassureur n'intervient que si la charge dépasse ce seuil. Cela complique le processus de la tarification du traité, comme le réassureur ne peut pas savoir au moment de la négociation avec la cédante l'éventuelle sinistralité. Les actuaires doivent donc utiliser l'historique des sinistres communiqué par la cédante (tarification en fonction de l'expérience), ou le profil des risques (tarification en fonction de l'exposition).

Une connaissance solide des formes de réassurance est essentielle dans l'analyse de provisionnement. Nous allons donc à présent faire un petit rappel sur les principaux types de souscription.

1.3.1 Formes proportionnelles

1.3.1.1 Quote-part (Quota share)

C'est la forme la plus simple. Un seul ratio est appliqué à toutes les polices dans le contrat, et à partir de ce ratio on répartit la prime et la charge de sinistres. Cela est avantageux dans le sens où c'est plus facile et moins coûteux à gérer. Pourtant, le profil de risques ne change pas après la cession ; la cédante s'expose toujours de la même manière aux petits risques ainsi qu'aux risques de points, et la seule différence est que l'exposition devienne plus limitée. L'opération repose sur une confiance mutuelle entre la cédante et le réassureur car le résultat opérationnel de ce dernier est directement lié au portefeuille de l'assureur direct, et à sa politique de souscription et de gestion des risques.

Si le taux de cession est α et la charge totale de la police X, la charge assumée par le réassureur sera simplement αX .

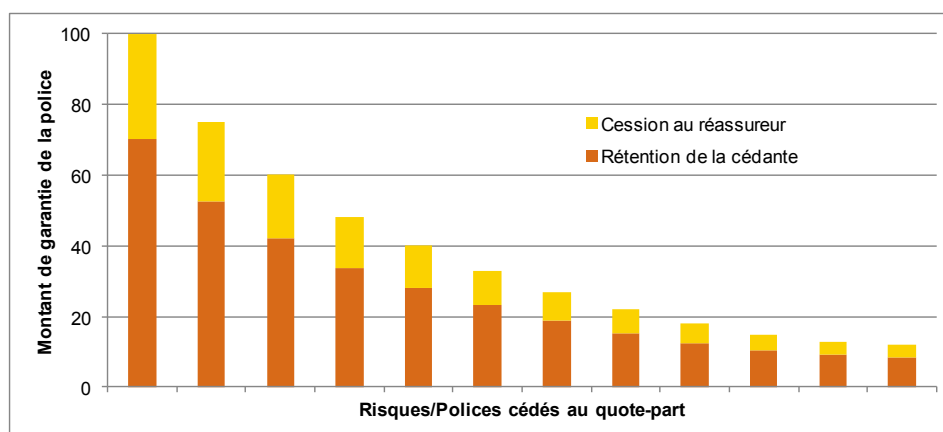


Figure 1.2 – Quote-part 30%

1.3.1.2 Excédent de plein (Surplus)

La quote-part a un inconvénient de taille : la cédante doit céder une partie de la prime originale au réassureur pour toutes les polices au sein du contrat, même pour de petits risques qu'elle serait capable de couvrir seule. Ce fait diminue inutilement le profit potentiel des assu-

reurs dans certains cas. Pour éviter cette faiblesse, l'assureur peut utiliser la couverture d'excédent de plein. Ce type de réassurance dépend du plein de rétention de la cédante, de la capacité du traité et de la somme assurée de chaque police. La capacité du traité s'exprime souvent en nombre de plein de rétention. En notant R la rétention de l'assureur direct, C la capacité mentionnée, S_i la somme assurée de la police i , le taux de cession chez réassureur se calcule de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } S_i \leq R \\ \frac{S_i - R}{S_i} & \text{si } 0 < S_i - R < C \\ \frac{C}{S_i} & \text{si } S_i - R \geq C \end{cases}$$

De cette façon, on peut établir un taux de cession pour chaque risque. La répartition de prime et de responsabilité entre la cédante et le réassureur est proportionnelle à ce ratio.

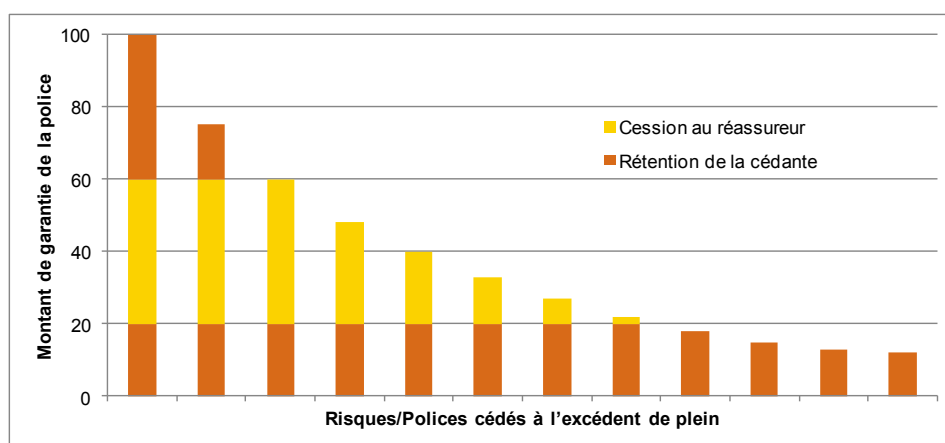


Figure 1.3 – Excédent de plein : 2 pleins de 20

Commission de réassurance : La charge d'exploitation de l'assureur direct est toujours plus élevée que celle du réassureur parce que la cédante doit payer pour chaque police du traité la charge administrative, la commission et le frais de règlement des sinistres. Le réassureur, en revanche, gère toutes ces polices comme un contrat unique, donc sa charge d'exploitation est considérablement réduite. En pratique, le réassureur verse une part de son profit opérationnel à la cédante sous la forme d'une commission de réassurance. Cela a pour but de soulager la charge d'exploitation élevée de la part de l'assureur direct. La somme à donner est souvent définie à l'avance comme un pourcentage fixe du bénéfice réalisable.

Pourtant, dans le cadre de cette étude, on s'intéresse principalement à la commission variable (*sliding scale*), car celle-ci a un impact important sur le calcul de la réserve. En effet, cette

commission est conçue pour protéger les deux parties d'un contrat de réassurance de la volatilité de la sinistralité. Le ratio de charge finale (TR - *Technical Ratio*) d'un traité est la somme du ratio de commission/prime (*commission ratio*) et du ratio de sinistre/prime (LR - *Loss Ratio*). Pour une certaine année de souscription, si le traité est touché par un sinistre grave ou un nombre important de petits sinistres, son TR sera très élevé si le ratio de commission/prime reste inchangé. Dans ce cas on peut définir à l'avance des termes contractuels pour que ce ratio de commission/prime varie dans un intervalle prédéfini.

S'il y a peu d'activités de sinistralité, ce ratio de commission/prime sera ajusté vers le haut. Ici on atteint un double but : le réassureur se protège d'une perte significative résultant d'un TR élevé, et la cédante est encouragée à appliquer une gestion de risques plus rigoureuse pour profiter d'une commission plus grande en diminuant l'éventuelle sinistralité. En pratique, PartnerRe a des difficultés à mettre en œuvre cette notion dans l'outil de provisionnement. Cette problématique sera abordée et discutée en détail dans une prochaine partie de ce mémoire.

Voici un exemple simple de la manière dont cette commission variable fonctionne :

Loss ratio	Commission
LR < 60%	35%
$60\% \leq LR \leq 80\%$	$35\% - (LR - 60\%)$
LR > 80%	15%

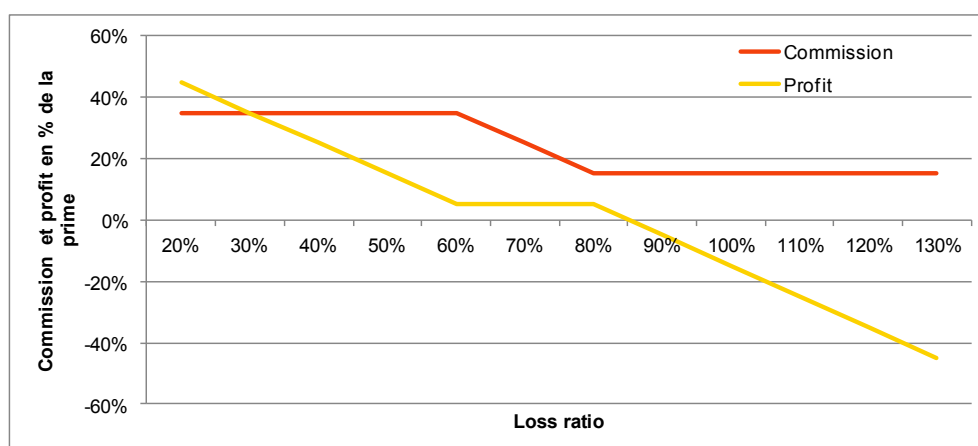


Figure 1.4 - Commission variable

1.3.2 Formes non proportionnelles

1.3.2.1 Excédent de sinistre (Excess of Loss)

Contrairement à la réassurance proportionnelle où la répartition de prime et de charge se repose sur la somme assurée de chaque risque, c'est le montant des sinistres qui compte dans ce type de garantie. En effet, le réassureur s'engage à payer la part d'un sinistre ou d'un ensemble de sinistres attachés à un événement qui dépasse un seuil défini à l'avance dans le contrat (la priorité) et sa charge maximum est limitée par la portée. En contrepartie, il reçoit une prime provisionnelle qui pourra être ajustée à la fin de la période. On note :

Portée XS Priorité

Voici un graphique qui représente la fonction de ce type de réassurance :

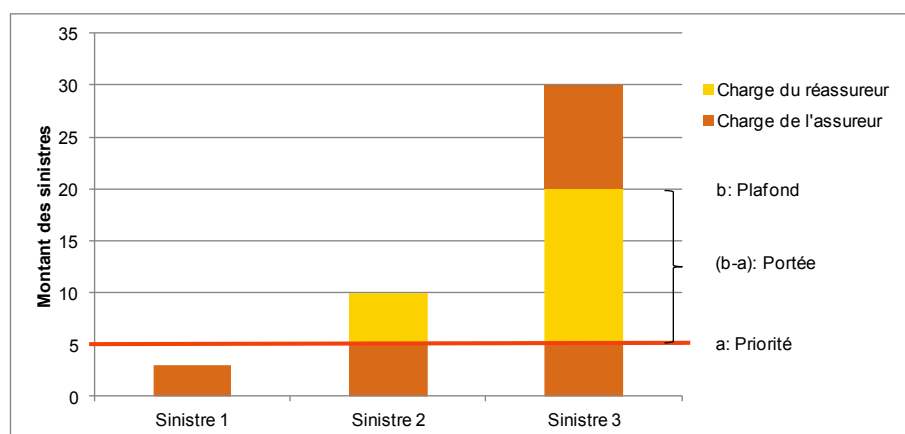


Figure 1.5 – Excédent de sinistre

En notant **a** la priorité, **b** le plafond, **(b-a)** la portée et **X** le montant du sinistre, la charge du réassureur peut s'écrire :

$$(X - a)^+ - (X - b)^+$$

Par le biais de la réassurance non proportionnelle, la cédante arrive à se protéger des risques de points qui pourraient lui causer une perte importante au portefeuille sous-jacent. Dans plusieurs cas, la portée est trop lourde pour qu'un réassureur puisse l'assumer seul, elle sera donc divisée en de multiples tranches (et chaque réassureur s'occupera d'une tranche en particulier). La probabilité d'un certain sinistre touchant la tranche du haut est plus petite que celle d'un sinistre touchant la tranche du bas. C'est pourquoi un réassureur qui a un capital dispo-

nible limité et qui préfère réduire l'exposition de sa garantie choisit habituellement des tranches plus élevées. De par sa nature, la tarification d'un traité de ce type nécessite des travaux actuariels : le réassureur doit calculer la probabilité que sa tranche de responsabilité soit touchée et le montant de l'indemnisation nécessaire.

Dans une branche d'activité telle que la responsabilité civile, l'assureur direct doit donner une garantie illimitée aux assurés. Ceci pose un risque majeur à l'assureur car il ne peut pas savoir à l'avance combien cette garantie lui coûtera au final. Le fait de transférer au réassureur en gardant lui-même uniquement la part inférieure à la priorité peut donc être une bonne solution.

En pratique, ce produit de réassurance se divise en l'excédent de sinistre par risque et par événement. Pour l'excédent de sinistre par risque, la couverture se déclenche quand une police est sinistrée. Si un événement concerne plusieurs polices à la fois, le réassureur doit les traiter séparément. Cela convient donc bien à la protection des risques de grandes tailles (par exemple des bâtiments importants).

Une tempête, à l'inverse, peut causer de petits sinistres pour des maisons dans une région très étendue, et la charge cumulée est alors malgré tout élevée. L'assureur direct peut demander une couverture par événement qui combine tous ces petits sinistres et les considère comme un seul objet. Pour déterminer lesquels de ces sinistres tombent dans la responsabilité du réassureur, on a besoin de mettre en œuvre des clauses de limitation temporelle et géographique.

- Clause de limitation géographique : seules les polices sinistrées dans une zone définie à l'avance de manière contractuelle peuvent être prises en compte dans le calcul de la charge du réassureur.
- Clause de limitation temporelle : seules les polices touchées dans un délai certain seront incluses et agrégées à la perte totale. Généralement, ce délai est convenu de 48h ou 72h et les sinistres se passant en dehors de cet intervalle seront comptés comme étant des événements provenant de la même cause.

D'ailleurs, il existe aussi des clauses particulières qui jouent un rôle important dans la tarification de la réassurance. En d'autres termes, ces clauses ont un impact sur la charge ultime du réassureur.

- Clause de reconstitution de garantie : la portée décrite ci-dessus est une garantie annuelle. Cela signifie que si un sinistre consume complètement la garantie du traité, la cédante ne sera plus couverte pour les autres sinistres à venir. Pour corriger cette situation, on propose une clause de reconstitution qui permet de reconstituer automatiquement la garantie du traité un certain nombre (ou même un nombre illimité) de fois gratuitement, ou en contrepartie d'une prime additionnelle convenue à l'avance.

Cette prime additionnelle se calcule comme un pourcentage de la prime de base, au prorata des capitaux employés (prorata capital) ou au prorata de la période restante à couvrir jusqu'à la fin de la couverture (prorata temporis). La reconstitution pourrait être au double prorata, ce qui implique que la prime additionnelle soit proportionnelle au montant de couverture consommée et au temps restant à couvrir.

- Limite annuelle (AAL - *Annual Aggregate Limit*) : c'est une clause qui place une limite annuelle à la charge ultime du réassureur. Cette clause permet au réassureur de se protéger contre une perte importante et de limiter sa couverture ultime. Si on note S la charge annuelle d'un traité XS à reconstitutions illimitées, la charge annuelle du réassureur avec une clause AAL se définit :

$$\min(AAL, S)$$

- Franchise annuelle (AAD - *Annual Aggregate Deductible*) : c'est une clause qui met un seuil de montant de sinistre à partir duquel le réassureur prendra en charge. La charge du réassureur avec une clause AAD sera :

$$(S - AAD)_+ = \max(S - AAD, 0)$$

Un assureur a tendance à combiner quelques couvertures pour mieux protéger son portefeuille en se servant d'une réassurance proportionnelle dans un premier temps, et en complétant ensuite cela avec un excédent de sinistre. De cette façon, il pourra limiter son engagement à un seuil prédéterminé même si la somme assurée originale est illimitée. Nous allons maintenant présenter un exemple simple pour aider à la compréhension de la combinaison potentielle des produits de réassurance.

Exemple numérique :

Les quatre risques A, B, C, D sont sinistrés par le même événement

Couverture excédent de pleine	Plein de rétention de 40M
	Capacité du traité : 5 pleines = 200M
Couverture excédent de sinistre par risque	15M XS 5M
Couverture excédent de sinistre par événement	30M XS 7M

en millions	Engagement d'origine	Sinistre brut	Couverture réas. prop	Rét. après réas. prop	Couverture par risque	Net après couv. par risque
risque A	90.00	30.00	16.67	13.33	8.33	5.00
risque B	70.00	15.00	6.43	8.57	3.57	5.00
risque C	50.00	7.00	1.40	5.60	0.60	5.00
risque D	30.00	3.00	-	3.00	-	3.00
sinistre total brut		55.00				
couverture réas. prop globale			24.50			
rétention totale après réas. prop				30.50		
couverture par risque globale					12.50	
sinistre net global après couverture par risque						18.00
couverture par événement						11.00
sinistre net pour l'assureur direct après réassurance						7.00

Figure 1.5 – Combinaison des couvertures

1.3.2.2 *Excédent de perte (Stop Loss)*

Ce type de réassurance est peu utilisé et il n'existe que dans certaines branches d'activités spécifiques (tempête ou grêle). L'assureur direct s'approche du réassureur pour cette garantie quand il souhaite se protéger contre une perte d'une branche entière, et en particulier quand il se trouve dans une situation difficile avec un ratio de sinistre/prime très élevé. En effet, la cédante ne met plus d'accent sur la somme assurée ou le montant des sinistres, mais plutôt sur le résultat final d'une année de souscription. Les notions de priorité et de portée restent valables dans ce cas, mais s'exprimeront sous la forme d'un pourcentage du sinistre à prime, ou parfois seront doublement définies sous la forme d'un pourcentage et d'un montant.

Cette garantie donne à la cédante une protection complète. Une fois que celle-ci souffre d'une perte technique, le réassureur intervient et s'occupe du reste. D'une part, l'assureur direct perd l'intérêt d'appliquer une gestion de risques rigoureuse (car il est désormais à l'abri de la fluctuation du résultat). D'autre part, le réassureur s'expose à un risque important au niveau financier. Il doit aussi vérifier si l'assureur a fait une manipulation sur ses dossiers, donc la confiance mutuelle est essentielle. Tout cela fait qu'en pratique ce type de réassurance soit un produit rare.

2 Provisionnement en pratique

2.1 Provisions techniques

Un réassureur fixe une prime à l'avance pour une couverture donnée à un assureur direct, mais il ne sait pas exactement combien lui coûtera la sinistralité au final. Il lui faut donc constituer des provisions pour être capable de respecter les garanties financières vis-à-vis des assurés. L'article R.311-1 du Code des Assurances précise que les provisions techniques doivent être « suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagement vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats ».

Dans le bilan des assureurs directs, la majorité de la réserve est au titre des branches d'activités à développement long, telles que la responsabilité civile et l'accident. Ces risques à leurs tours seront cédés au réassureur pour protéger la sécurité financière de la cédante. De plus, le réassureur souffre d'un retard de l'information comparé à l'assureur direct qui est plus proche de la source des informations de sinistres. Pour ces raisons, le réassureur en général assume un risque plus sérieux et son niveau de provision est parallèlement plus élevé.

Les assureurs et les réassureurs utilisent plusieurs méthodes pour déterminer ces provisions techniques. Les plus communes sont les méthodes Chain Ladder, Bornhuetter Ferguson et Benktander. Pourtant, il y a toujours des erreurs de prévision, quelle que soit la méthode utilisée, parce que les sinistres à venir sont aléatoires. Une autre raison pourrait être le manque de connaissances de l'activité, ou des tendances de sinistres du portefeuille, de l'actuaire qui est en charge d'estimer les provisions.

Les provisions techniques sont donc des fonds mis au passif du bilan pour les sinistres qui ne sont pas encore réglés. Les primes correspondantes reçues financent les actifs du réassureur. Si les provisions constituées sont plus grandes que les primes reçues des assureurs directs, les capitaux propres couvrent alors la différence. L'augmentation des provisions est enregistrée comme la dépense, et la libération des provisions comme le revenu. Ces fonds s'établissent comme la couverture de deux catégories principales de sinistres : les sinistres non encore survenus et les sinistres déjà survenus.

2.1.1 Provisions pour les sinistres non encore survenus

Elles consistent en la provision pour primes non acquises et en la provision pour risques en cours.

- Provision pour primes non acquises : c'est une provision qui sert à constater la part des primes émises et à émettre pour la période comprise entre la date de l'inventaire et l'échéance du contrat pour l'ensemble des contrats en cours. Le calcul de cette provision se fait au prorata temporis pour chaque contrat et chaque catégorie comptable. Cela signifie que si un traité offre une couverture d'un an qui commence au 01/04/N, date à laquelle correspond un versement d'une prime de montant A, les sinistres de l'année N sont couverts par $\frac{3}{4}A$. Au 31/12/N le réassureur devra constituer une provision pour primes non acquises de montant $\frac{1}{4}A$.
- Provision pour risques en cours : elle a pour but de protéger le réassureur contre une éventuelle insuffisance de la tarification. En principe, la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats pour la période comprise entre la date de l'inventaire et l'échéance du contrat pour l'ensemble des contrats en cours se fait couvrir par la provision pour primes non acquises. Pourtant, s'il y a un déficit, la part non couverte sera garantie par la provision pour risques en cours.

2.1.2 Provisions pour les sinistres survenus

Ce sont les provisions pour les sinistres à payer « PSAP » définies par « la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés » (art. R331-6, 4^o). La provision technique se divise en différentes catégories :

- Provision pour les sinistres déclarés (provision dossier-dossier) : celle-ci est estimée par l'assureur direct pour chaque sinistre, puis communiquée au réassureur. En effet, le réassureur n'a pas accès à toutes les informations concernant un sinistre particulier et ne sera donc pas en mesure d'estimer ce montant de manière précise. Cette provision est soumise à une révision potentielle dans la vie d'un sinistre.

- Provision IBNYR (*Incurred But Not Yet Reported*) : celle-ci est destinée à couvrir les sinistres déjà survenus, mais qui ne sont pas encore déclarés à la date de clôture.
- Provision IBNER (*Incurred But Not Enough Reported*) : celle-ci est destinée à couvrir les sinistres déjà survenus et déclarés, mais dont le montant communiqué pourrait être insuffisant.

En pratique, on estime l'IBNR (*Incurred But Not Reported*) qui est en fait la combinaison de ces deux dernières. Cela se calcule au niveau agrégé par différentes méthodes actuarielles.

La graphique ci-dessous représente l'évolution des provisions techniques au cours des années de développement. On trouve que vers l'ultime, l'IBNR tend à 0, ainsi que la provision dossier/dossier. Une fois que tous les règlements ont été réalisés, la courbe de règlements rejoint celle des charges.

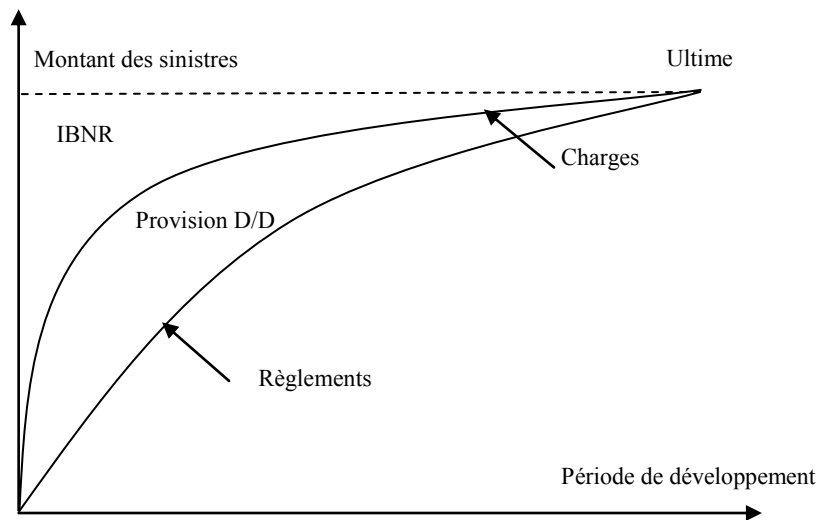


Figure 2.1 – Evolution des réserves au fil du temps

2.2 Provisionnement sous Solvabilité 2

En 2001, la Commission Européenne a donné naissance au projet « Solvabilité 2 » qui a pour but de revoir le dispositif européen actuel de surveillance prudentielle des sociétés d'assurance. Cette directive a été adoptée le 22 avril 2009 par le Parlement Européen et validée par les ministres des Finances de l'UE le 5 mai 2009.

Les objectifs de ce projet sont d'améliorer la protection des assurés à l'aide d'une meilleure compréhension et gestion des risques inhérents à des activités des organismes d'assurance. Les autorités auront ainsi une meilleure capacité à évaluer la solvabilité globale des sociétés d'assurance.

Solvabilité 2 se fonde sur une structure à trois piliers. Le premier pilier est quantitatif, il donne les règles précisant l'évaluation du passif (le niveau des provisions techniques et le niveau des fonds propres) et de l'actif (avec la valeur de marché). Ce pilier aide à créer des outils pour mesurer la suffisance des provisions techniques des différentes compagnies d'assurance. Le deuxième pilier est plutôt qualitatif, il précise les règles de suivi des risques en interne aux sociétés et aux autorités du contrôle. Le troisième concerne la transparence et la communication des informations et des rapports.

Pilier 1 – Exigences Quantitatives	Pilier 2 – Exigences Qualitatives	Pilier 3 – Discipline de marché
• Définition des risques • Evaluation des actifs • Evaluation des provisions techniques • Exigence du Capital de solvabilité (SCR) • Exigence du Capital minimum (MCR) • Modèles internes • Dépendance des risques	• Contrôle interne • Gestion des risques • Corporate governance • Harmonisation du contrôle au niveau européen	• Communication financière aux : autorités de marché, assurés et épargnants, régulateurs... • Transparence et harmonisation des règles comptables et prudentielles

Figure 2.2 – Trois piliers de Solvabilité 2

La provision totale Solvabilité 2 est obtenue par un calcul d'un montant de provisions techniques actualisées « Best estimate », et complétée par une « marge de risque ».

Le bilan comptable dans ce cas peut s'illustrer ainsi :

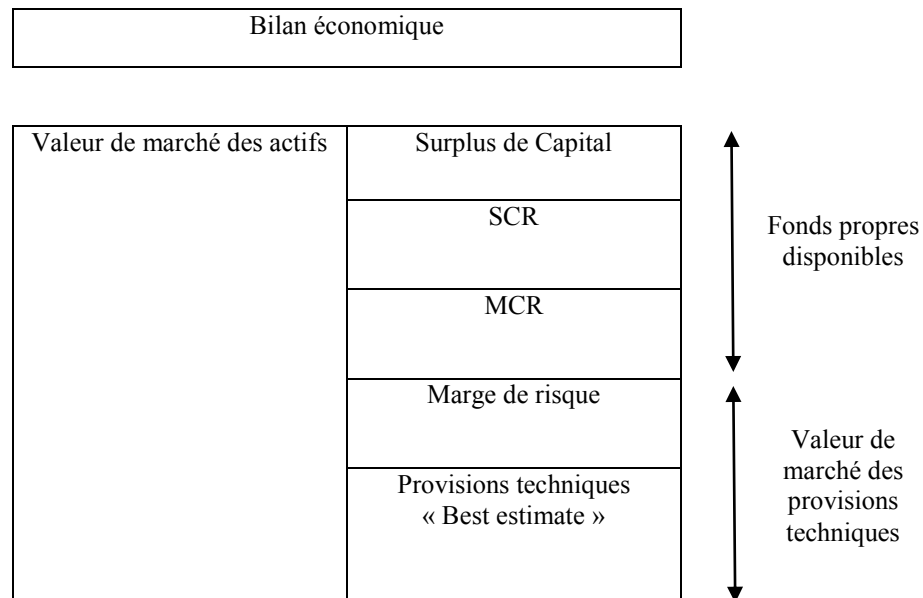


Figure 2.3 – Actifs et passifs du bilan d'une compagnie d'assurance

2.2.1 Fonds propres

On a précisé deux niveaux des fonds propres dans le cadre de Solvabilité 2 : le Capital Minimum Requis (MCR - *Minimum Capital Requirement*) et le Capital de Solvabilité Requis (SCR - *Solvency Capital Requirement*).

- Capital Minimum Requis : c'est le niveau minimum en dessous duquel les autorités appliquent des mesures de contrôle nécessaires (plan de redressement, retrait d'agrément). La société doit détenir au moins ce montant de fond propre pour continuer à exercer des activités en assurance et en réassurance.
- Capital de Solvabilité Requis : il est défini par « *le niveau de capital permettant à une société d'assurance d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de donner au preneurs d'assurance l'assurance raisonnable que les versements seront effectués à leur échéance* » (Commission Européenne - 2003). Il sert à couvrir tous les risques identifiables de la société et permet de réduire la probabilité de ruine à 0.5% à un horizon temporel fixé à un an.

Le SCR est calculé suivant soit une formule standard développée dans le projet de Solvabilité 2, soit un modèle interne à la société qui doit être validé préalablement par les autorités de contrôle. Ce modèle interne est censé mieux refléter le profil de risque du réassureur.

2.2.2 Best estimate

La notion de “Best estimate” est définie dans la façon suivante dans l’article 77 de la directive de Solvabilité 2 : « *La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futures, compte tenu de la valeur temporelle de l’argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates* ».

Il correspond donc en règle générale à la valeur actuelle des flux futurs actualisés aux taux sans risque.

$$BE_{non\ vie} = \text{BE de provision pour sinistres} + \text{BE de provision pour primes}$$

2.2.3 Marge de risque

Les institutions et les individus qui investissent dans un réassureur attendent un rendement de leurs investissements. La marge de risque est considérée comme la rémunération des actionnaires. Son évaluation est faite à l’aide de la méthode « Coût de Capital » (*Cost of Capital*). Cette méthode a été inspirée par le Test Swiss de Solvabilité, qui consiste à calculer le coût d’immobilisation d’un montant des fonds propres pour écouler le « Best estimate ».

Même si le Solvabilité 2 ne précise pas de méthode particulière de calcul, il y a trois méthodes de référence à utiliser sur le marché Européen :

- L’approche proportionnelle : cette méthode consiste à projeter une partie du *Solvency Capital Requirements* (SCR) alloué à la branche d’activité considérée, de le faire diminuer au prorata de la décroissance des provisions techniques au fil du temps. Puis on lui applique un pourcentage qui correspond au coût du capital et à la fin actualise ces flux estimés.

2 Provisionnement en pratique

- La méthode des durations : elle utilise un proxy calculé avec la duration modifiée, par exemple la duration de Macaulay actualisée.
- L'approche par branche : cette méthode utilise des taux donnés dans le cadre du projet Solvabilité 2 pour chaque branche d'activité, qui sont appliqués au « Best estimate » :

Line of business	Risk margin
Medical expenses	8.5%
Income protection	12%
Workers' compensation	10%
Motor, vehicle liability	8%
Motor, other classes	4%
Marine, aviation, transport	7.5%
Fire and other damage	5.5%
General liability	10%
Credit and surety	9.8%
Legal expenses	6%
Assistance	7.5%
Miscellaneous non-life insurance	15%
Health business	17%
Property business	7%
Casualty business	17%
Marine, aviation and transport business	8.5%

Figure 2.3 – Tableau des pourcentages de marge de risque

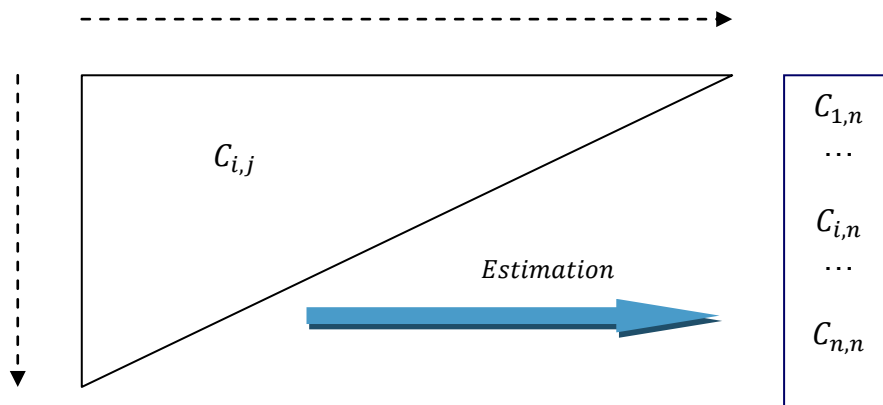
2.3 Approche Chain Ladder et quelques modèles déterministes

Nous allons par la suite plutôt nous intéresser au calcul des montants d'IBNR pour couvrir des sinistres déjà survenus. La réserve est estimée au niveau agrégé par différentes méthodes actuarielles de provisionnement :

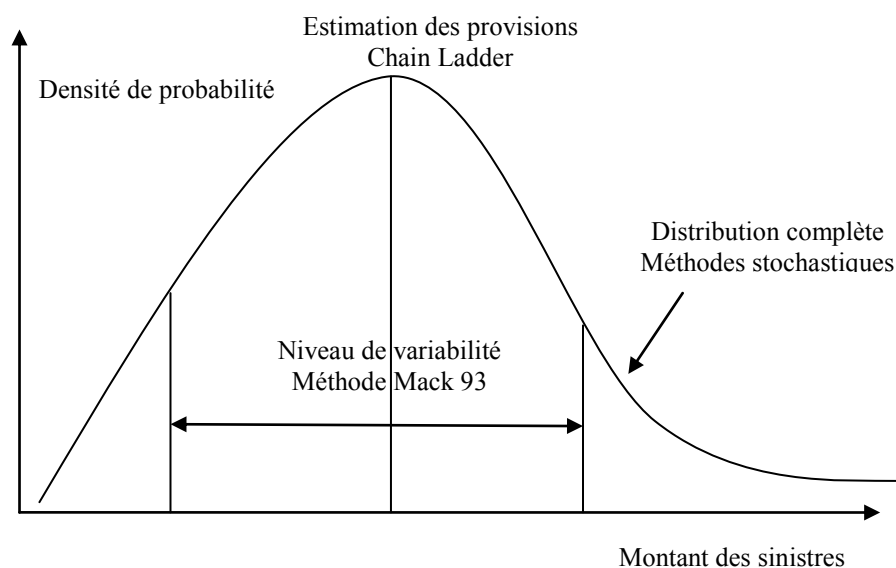
2 Provisionnement en pratique

- Méthodes coût moyen : Charge ultime = nombre ultime de sinistres * coût ultime moyen des sinistres.
- Méthodes basées sur les *loss ratios* (S/P) : Charge ultime = prime ultime * *loss ratio* ultime.
- Méthodes liquidatives : basées sur des facteurs de développement.
- Méthodes Bornhuetter-Ferguson...

Toutes ces méthodes déterministes visent donc à estimer la charge ultime de chaque année d'origine.



Pourtant, des méthodes stochastiques nous permettent d'obtenir une distribution prédictive des sinistres ultimes, y compris la variabilité due au caractère stochastique des provisions et à l'incertitude liée à l'estimation.



2.3.1 Construction des triangles de la liquidation

Pour un réassureur, les données de sinistres communiquées par la cédante seront répertoriées sous forme de triangle de développement. Les colonnes représentent des périodes de développement annuelles de sinistres. Les lignes représentent les années d'origine (année de souscription, année de survenance ou de déclaration des sinistres).

Voici quelques notions qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire :

i : année d'origine des sinistres

j : période de développement des sinistres

$X_{i,j}$: charges ou paiements incrémentaux des sinistres connus à l'année d'origine i et la période de développement j .

$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}$: charges ou paiements cumulés des sinistres connus à l'année d'origine i et la période de développement j .

$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i+1}$: réserve à estimer pour l'année d'origine i .

$R = \sum_{k=1}^n R_k$: réserve totale à estimer pour une branche d'activité entière.

année d'origine i	période de développement j								
	1	2	...	j	...	$n-i+1$	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i+1}$	...	$C_{1,n}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,j}$	...	$C_{2,n-i+1}$	...	$C_{2,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	...	...	...	$C_{i,n-i+1}$			
...	...	...	...	...	...				
$n-j+1$	$C_{n-j+1,1}$	$C_{n-j+1,2}$	...	$C_{n-j+1,j}$					
...	...	...	...						
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$							
n	$C_{n,1}$								

Année calendaire

On peut étudier différents triangles de liquidation :

- de règlements
- de charges (règlements + provisions D/D)
- de primes

- de commissions...

De plus, les diagonales correspondent aux années calendaires.

Après avoir déterminé la partie inférieure à l'aide des méthodes actuarielles $\{\hat{C}_{i,j} \mid i + j > n + 1, i \leq n, j \leq n\}$, on peut calculer :

- La réserve à un an : c'est la différence entre la somme de la première sous-diagonale et la somme de la dernière diagonale de la partie supérieure.
- La réserve à l'ultime : c'est la différence entre la somme de la dernière colonne et la somme de la dernière diagonale de la partie supérieure.

Au sein de PartnerRe, on constitue des triangles en choisissant l'année de souscription (UWY - *UnderWriting Year*) comme l'année d'origine, ce qui est un choix commun chez plusieurs réassureurs. En outre, la période de développement des sinistres était auparavant basée sur l'année de compte cédante, qui est effectivement l'année où la cédante comptabilisait les données dans ses comptes. Pourtant, cette approche a causé quelques problèmes parmi lesquels des triangles instables. A partir de 2013, PartnerRe a décidé d'utiliser l'année de compte du réassureur comme la période de développement.

$$\text{année de développement} = \text{année comptable du réassureur} - \text{année d'origine} + 1$$

Au lieu de modéliser directement les charges ou règlements cumulés futurs, plusieurs méthodes se basent sur les facteurs individuels de développement (*link ratios*), tout cela va être détaillé dans la partie suivante.

2.3.2 Facteurs de développement

Le principe du Chain Ladder consiste à supposer que les sinistres doivent être déclarés et payés au même rythme quelle que soit l'année de souscription ; puis, à partir des facteurs de développement estimés, on complètera la partie inférieure.

Il est préférable d'exclure les sinistres graves des triangles de liquidation pour que le développement du triangle soit plus stable. Chez PartnerRe, les sinistres dépassant un seuil de sévérité prédéterminé (*Headline Losses*) seront traités séparément afin de mieux comprendre leurs développements et leurs impacts sur la rentabilité du portefeuille, mais ils seront toutefois inclus

2 Provisionnement en pratique

dans les triangles. Ceux-ci seront alors déformés dans ce cas, il faut donc faire attention quand on fait le choix des facteurs de développement.

Dans le tableau ci-dessous, les *Headline Losses* sont suivis séparément. On voit que les années 2004 et 2010 ont été gravement touchées par la tempête Songda et le tremblement de terre Tohoku.

Claims - Headline losses							
UWY	Paid Losses PRE - transfer to the ledger	Cedents' Reserves - transfer to the ledger	Change in ACR - transfer to the ledger	UWs Ultimate Losses	UWs Specific IBNR	Reserving Ultimate Losses	Headline Loss Name
2000	303	-384	-	514	595	514	Earthquake Ms 7.9
2004	1,439	0	-	1,439	-	1,439	Typhoon Chaba / Japan
2004	52,069	-673	-	84,851	33,455	84,851	Typhoon Songda / Japan
2004	4,611	-0	-	6,750	2,139	6,750	Typhoon Tokage / Japan
2005	22,567	1,755	-	24,323	-	24,323	Floods in India / India ; Mumbai area
2006	2,490	907	-	3,396	0	3,396	Gujarat Flood 2006 / India
2007	1,000	-	-	1,000	-	1,000	Cyclone Gonu / Oman
2007	301	-0	-	301	-	301	Peru Earthquake Pisco, Ica Region / Peru ; Lima
2007	449	14	-	463	-	463	Winter Storm in China
2007	7,129	0	-	7,129	-0	7,129	Winter Storm in China
2008	1,944	71	-	2,014	-0	2,014	Winter Storm in China
2010	-	6	-	6	-	6	Bangkok Political Event / Thailand; Bangkok
2010	135,401	8,697	999	145,097	0	145,097	Japan Tohoku EQ 9.0Mw/Japan; Offshore Honshu
2010	89,193	-	-	89,193	-	89,193	Japan Tohoku EQ 9.0Mw/Japan; Offshore Honshu

Ils sont toutefois inclus dans le triangle de liquidation de la branche catastrophe de PartnerRe. On remarque que les expériences de sinistres des années 2004 et 2010 ne sont pas très cohérentes avec celles d'autres années.

2004	19,195	95,337	97,972	98,483	98,508	98,463	98,366	98,327	98,250	98,257
2005	8,033	25,519	27,956	25,637	25,520	25,013	25,013	25,763	25,747	
2006	2,050	3,832	4,458	4,422	4,358	4,320	4,252	4,252		
2007	2,708	6,055	11,854	11,457	12,030	12,209	12,268			
2008	3,019	2,210	2,210	2,209	2,209	2,208				
2009	686	436	421	420	413					
2010	1,459	180,091	234,105	234,044						

L'hypothèse centrale est la suivante : les facteurs de développement d'une période à une autre sont indépendants de l'année de souscription, ce qui est traduit ainsi :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in]0, \dots, +\infty[\text{ tels que } \forall i, C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}$$

L'estimateur standard du facteur de développement λ_j est :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j}} \sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} \lambda_{i,j} \end{aligned}$$

Avec

- La pondération $w_{i,j} = C_{i,j}$
- $\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ les facteurs de développement individuels.

On complètera le triangle de liquidation :

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n+1-i} \dots \hat{\lambda}_{j-1}) C_{i,n+1-i}$$

Et la charge ultime sera estimée par :

$$\hat{C}_{i,n} = (\hat{\lambda}_{n+1-i} \dots \hat{\lambda}_{n-1}) C_{i,n+1-i}$$

Pourtant, on devrait faire attention au coefficient du développement à la période n : $\hat{\lambda}_n$. Soit les sinistres sont tous liquidés et stabilisés et donc ne se développent plus, ce $\hat{\lambda}_n$ sera égal à 1. Soit les sinistres ne sont pas encore complètement liquidés et il nous faudra estimer un facteur de queue. Dans ce cas, on pourra utiliser des données plus anciennes comme la base ou se référer au portefeuille similaire du marché. Dans les triangles du PartnerRe, la période de développement n se fixe à 20. Pour la majorité des branches, ce $\hat{\lambda}_n$ sera égal à 1.

La provision à un an pour les sinistres survenus durant l'année i :

$$\hat{R}_i^1 = \hat{C}_{i,n-i+2} - C_{i,n-i+1}$$

La provision totale à un an pour une branche :

$$\hat{R}^1 = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^1$$

La provision à l'ultime pour les sinistres survenus durant l'année i :

$$\hat{R}_i^u = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

Et la provision totale à l'ultime pour une branche :

$$\hat{R}^u = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^u$$

Le triangle est ainsi complété :

année d'origine i	période de développement j									R^1_i	R^u_i
	1	2	...	j	...	n-i+1	...	n-1	n		
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,n-i+1}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$	0	0
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,j}$	...	$C_{2,n-i+1}$	...	$C_{2,n-1}$	$C_{2,n}$	$\hat{C}_{2,n}-C_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}-C_{2,n-1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	...	...	...	$C_{i,n-i+1}$	$\hat{C}_{i,n-i+2}$	...	$\hat{C}_{i,n}$	$\hat{C}_{i,n-1}+2-C_{i,n-i+1}$	$\hat{C}_{i,n}-C_{i,n-i+1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n-j+1	$C_{n-j+1,1}$	$C_{n-j+1,2}$	...	$C_{n-j+1,j}$	$\hat{C}_{n-j+1,j+1}$	...	...	...	$\hat{C}_{n-j+1,n}$	$\hat{C}_{n-j+1,j+1}-C_{n-j+1,j}$	$\hat{C}_{n-j+1,n}-C_{n-j+1,j}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$	$\hat{C}_{n-1,3}$	...	...	...	...	...	$\hat{C}_{n-1,n}$	$\hat{C}_{n-1,3}-C_{n-1,2}$	$\hat{C}_{n-1,n}-C_{n-1,2}$
n	$C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$	...	...	...	...	...	...	$\hat{C}_{n,n}$	$\hat{C}_{n,2}-C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,n}-C_{n,1}$

On peut aussi s'intéresser à la cadence et aux pourcentages de développement pour mieux comprendre la tendance d'un triangle de liquidation :

- Les pourcentages de développement de la charge ultime : $E(X_{i,j}) = \phi_j E(C_{i,n})$
- La cadence de développement de la charge ultime : $E(C_{i,j}) = \gamma_j E(C_{i,n})$
- Les facteurs de développement de la charge ultime : $E(C_{i,j+1}) = \lambda_j E(C_{i,j})$

Il y a des relations entre ces notions :

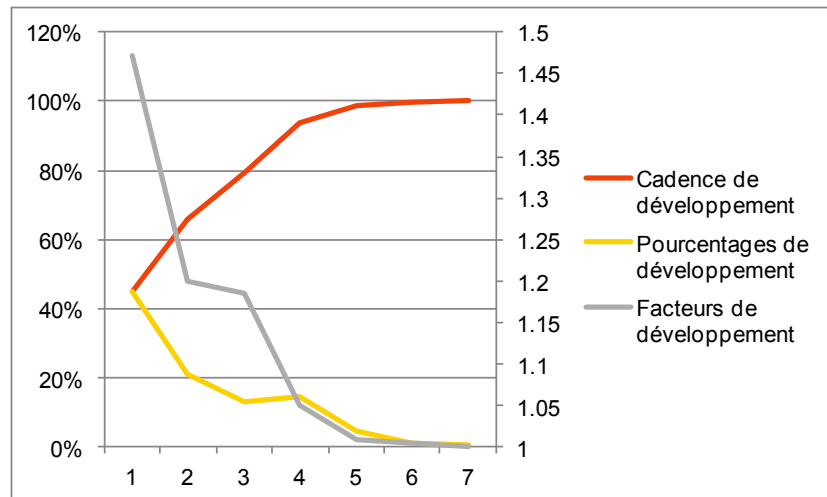
$$\gamma_i = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_j = \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\lambda_{j+1}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}}$$

$$\lambda_j = \frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j} = \frac{\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_j + \phi_{j+1}}{\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_j}$$

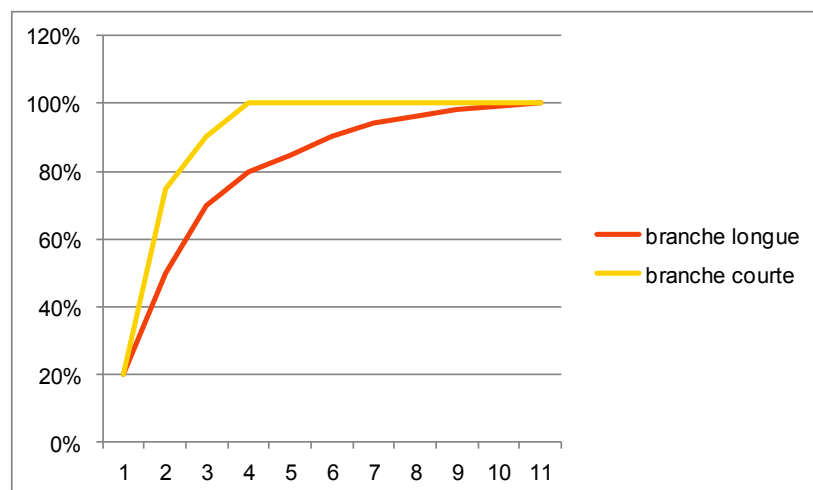
$$\phi_j = \begin{cases} \gamma_1 & \text{si } j = 1 \\ \gamma_j - \gamma_{j-1} & \text{si } j \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}} & \text{si } j = 1 \\ \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\lambda_{j+1}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_{j-1}} \frac{1}{\lambda_j} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

Ces notions peuvent être représentées graphiquement :

2 Provisionnement en pratique



On peut noter aussi que la forme de la cadence de développement de la branche de développement long est différente de celle de développement court :



2.3.3 Application numérique

Des triangles dans les portefeuilles réels ne vérifient pas toujours toutes les hypothèses des méthodes actuarielles de provisionnement. Des traitements spécifiques seraient nécessaires dans certains cas. Pour pouvoir illustrer clairement et simplement le fonctionnement de ces méthodes, il est judicieux de se baser sur un « bon » triangle qui respecte bien les hypothèses sous-jacentes de ces approches. Par conséquent, on emploiera le triangle d'exemple de l'article de Mack « *Mesuring the variability of Chain Ladder reserve estimate* » dans tous les exemples numériques de ce mémoire.

2 Provisionnement en pratique

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466		
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067			
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180				
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852					
2,010	557	4,020	10,946	12,314						
2,011	1,351	6,947	13,112							
2,012	3,133	5,395								
2,013	2,063									

Tableau 2.4 – Triangle cumulé de Mack

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ci,n CL	Ri CL
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834	18,834	0
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	16,858	16,858	154
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466	23,863	24,083	24,083	617
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067	27,967	28,441	28,703	28,703	1,636
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180	27,278	28,185	28,663	28,927	28,927	2,747
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852	17,649	18,389	19,001	19,323	19,501	19,501	3,649
2,010	557	4,020	10,946	12,314	14,428	16,064	16,738	17,294	17,587	17,749	17,749	5,435
2,011	1,351	6,947	13,112	16,664	19,525	21,738	22,650	23,403	23,800	24,019	24,019	10,907
2,012	3,133	5,395	8,759	11,132	13,043	14,521	15,130	15,634	15,898	16,045	16,045	10,650
2,013	2,063	6,188	10,046	12,767	14,959	16,655	17,353	17,931	18,234	18,402	18,402	16,339
Total											213,122	52,135

λ_k	2.999	1.624	1.271	1.172	1.113	1.042	1.033	1.017	1.009	1.000
γ_k	11%	34%	55%	69%	81%	91%	94%	97%	99%	100%

Tableau 2.5 – Triangle complété de l'approche Chain Ladder

2.3.4 Limites de l'approche Chain Ladder

Cette méthode repose sur l'hypothèse centrale qui énonce que le coefficient de la période de développement j est indépendant des années de souscription i . Ceci signifie que le développement des sinistres doit être régulier. Autrement dit, les sinistres devraient être déclarés et payés au même rythme quelle que soit l'année de souscription. Un changement dans la politique de gestion des sinistres qui mène à une accélération ou un ralentissement des remboursements, une évolution dans la composition du portefeuille ou dans la politique de souscription... tout cela pourra poser des difficultés dans l'estimation des provisions techniques.

D'ailleurs, le nombre de paramètres à estimer pose aussi des problèmes. En effet, les facteurs de développement $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont calculés à partir d'un seul triangle de liquidation, ce qui est peut-être une source d'erreurs. Le dernier λ_{n-1} n'est même estimé que par $C_{1,n}$ et $C_{1,n-1}$. Cette problématique devient significative car le modèle Chain Ladder est multiplicatif. Pourtant, ce risque n'est pas quantifié dans ce type d'approche déterministe.

Cette méthode est surtout appropriée à un portefeuille de taille suffisante. Si les données ne sont pas assez nombreuses et fiables, les résultats de l'estimation ne seront pas de bonne qualité.

En pratique, on emploie chez PartnerRe d'autres méthodes pour remédier à cette faiblesse, telles que les méthodes Bornhuetter Ferguson, Benktander et *Expected Loss Ratio*.

On pourrait aussi effectuer un lissage des facteurs de développement pour lisser les instabilités en queue de développement ou pour prolonger le développement quand le triangle est court. Une autre manière de corriger la faiblesse de cette approche consiste à supprimer des données correspondant à une évolution trop atypique ou à effectuer une moyenne sur les dernières années de souscription.

Pourtant, cette méthode est toujours la plus ancienne et la plus utilisée dans le provisionnement. Sa popularité réside dans la simplicité des calculs qui ne nécessitent pas d'outils informatiques sophistiqués ; l'efficacité et la pertinence sont ainsi assez élevées dans la plupart des cas. C'est aussi une méthode de base sur laquelle d'autres méthodes actuarielles se construisent.

2.3.5 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Assez répandue en pratique et souvent utilisée en complément de la méthode Chain Ladder, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est très appropriée dans le provisionnement des années de souscription récentes (où l'incertitude est la plus grande).

Cette méthode combine le montant des sinistres ultimes a priori et la cadence de développement disponible des calculs de l'approche Chain Ladder. Puis on attribue un poids relatif à chacune des deux approches. Plus l'information des sinistres survenus est disponible dans le temps, plus on accorde de poids à la méthode Chain Ladder. Chez PartnerRe, le poids appliqué est proportionnel à la cadence de développement. On peut donc interpréter cette méthode comme une formule de crédibilité entre ultime a priori et ultime Chain Ladder.

En notant U_i la charge ultime a priori de l'année de souscription i , γ_j la cadence de développement, on a :

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{\gamma}_{n-i+1})U_i$$

$$\hat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + (1 - \hat{\gamma}_{n-i+1})U_i = \hat{\gamma}_{n-i+1}\hat{C}_{i,n}^{CL} + (1 - \hat{\gamma}_{n-i+1})U_i$$

Pour estimer la charge ultime a priori, on peut utiliser la méthode des *loss ratios* ou une méthode fréquence – coût moyen. Chez PartnerRe, c’est la méthode des *loss ratios* qui nous donne la charge ultime a priori.

Dans l’exemple suivant, on suppose que les charges ultimes sont de 20.000 pour toutes les années de souscription. Les cadences de développement proviennent des calculs de Chain Ladder.

	C _{i,n+1-i}	γ _{n-i+1}	U _i	C _{i,n} BF	R _i BF
2,004	18,834	100%	20,000	18,834	0
2,005	16,704	99%	20,000	16,887	183
2,006	23,466	97%	20,000	23,979	513
2,007	27,067	94%	20,000	28,207	1,140
2,008	26,180	91%	20,000	28,079	1,899
2,009	15,852	81%	20,000	19,594	3,742
2,010	12,314	69%	20,000	18,439	6,125
2,011	13,112	55%	20,000	22,194	9,082
2,012	5,395	34%	20,000	18,670	13,275
2,013	2,063	11%	20,000	19,821	17,758
Total	160,987		200,000	214,704	53,717

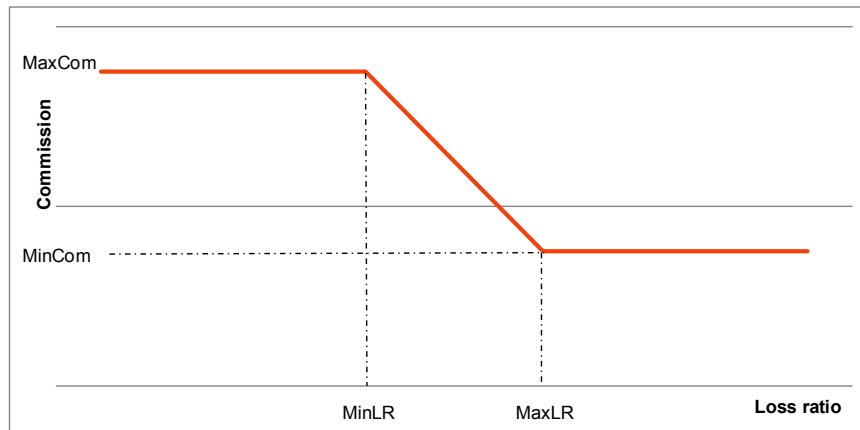
Tableau 2.6 – Provisions estimées par l’approche BF

2.4 Ajustements en pratique

Certains ajustements pourraient être considérés dans le provisionnement en pratique afin d’améliorer la qualité des réserves estimées : le cycle du marché réassurance, la compétition entre des réassureurs qui entraîne la pression sur les primes demandées aux cédantes... La commission variable, *sliding scale*, aurait aussi un impact important sur le ratio combiné à estimer. La politique conservatrice de provisionnement de l’entreprise, en outre, suscite la mise en œuvre des provisions pour le développement défavorable des sinistres (RAD - *Reserve for Adverse Development*).

2.4.1 Sliding scale

Ce sujet a été abordé dans la première partie. Pourtant, une étude plus approfondie sera nécessaire pour examiner son impact sur le provisionnement. Formellement, le calcul est simple. La commission variable est déterminée en fonction des *loss-ratios* (LRs) comme suit :

Figure 2.7 – *Sliding scale* en fonction des LR

Mathématiquement, on a :

<i>Loss ratio</i>	<i>Commission variable</i>
$LR < MinLR$	$MaxCom$
$MinLR \leq LR \leq MaxLR$	$MaxCom - (LR - MinLR) \frac{MaxCom - MinCom}{MaxLR - MinLR}$
$LR > MaxLR$	$MinCom$

Pour des années de souscription où l'expérience des sinistres est favorable, l'actuaire en charge de l'analyse fait réduire le *loss-ratio* progressivement. Dans la base de données chez PartnerRe, on ne peut pas changer les frais d'acquisition. Par conséquent, le ratio combiné TR sera réduit parallèlement.

Pourtant, quelques contrats ont été négociés de façon à ce que les commissions changent en fonction des *loss ratios* constatés. Ce sont des contrats avec *sliding scale*. Si on ne tient pas compte de ce point, le ratio combiné est en fait sous-estimé quand le *loss ratio* baisse et la commission reste inchangée. Inversement, le ratio combiné est surestimé quand le *loss ratio* monte et la commission ne bouge pas. Par exemple, la commission provisoire d'un traité est de 25%. Si l'expérience des sinistres est favorable (LR=50%), le ratio de commission doit être recalculé à 35% d'après une formule fixée contractuellement, et le ratio combiné final est de LR 50% + Com 35% = 85%. Pourtant, comme on ne peut pas changer le taux de commission dans le système informatique de la compagnie, le ratio combiné n'est que LR 50% + Com 25% = 75%.

2 Provisionnement en pratique

Dans le portefeuille d'Asie, l'impact de ce *sliding scale* est significatif dans les branches de l'automobile et des dommages aux biens.

Sum of Prem USD		Sliding scale: yes/ no	
Main Class Of Busin	Underwriting Year	Fixed	Slide
BU P&C CASUALTY	2008	98.44%	1.56%
	2009	98.71%	1.29%
	2010	95.09%	4.91%
	2011	89.58%	10.42%
	2012	99.23%	0.77%
	2013	100.00%	0.00%
BU P&C MOTOR	2008	100.00%	0.00%
	2009	36.00%	64.00%
	2010	28.34%	71.66%
	2011	30.37%	69.63%
	2012	8.16%	91.84%
	2013	18.23%	81.77%
BU P&C PROPERTY	2008	57.17%	42.83%
	2009	42.45%	57.55%
	2010	63.06%	36.94%
	2011	52.48%	47.52%
	2012	41.60%	58.40%
	2013	33.17%	66.83%

Tableau 2.8 – *Sliding scale* du portefeuille d'Asie

Pour remédier à ce problème, un actuaire dans l'équipe d'actuariat de PartnerRe devrait choisir un *loss ratio* plus ou moins élevé que celui qu'il aurait choisi sans l'intervention de *sliding scale*, en fonction de la situation des sinistres constatés. Le ratio combiné estimé reflèterait mieux le coût total pour ces traités. A titre d'illustration, si une branche est gravement sinistrée pour une année de souscription (*loss ratio* de 90% par exemple) et si le pourcentage des contrats avec *sliding scale* de cette branche - année de souscription est significatif, on pourrait intentionnellement baisser ce *loss ratio* à 80% pour tenir compte de l'impact de *sliding scale*, vu qu'on ne peut pas faire varier le ratio de commission dans le système informatique.

Pourtant, dans ce cas c'est le *loss ratio* qui change à la place de la commission. Il faut donc être prudent dans l'interprétation du *loss ratio* de cette branche d'activité.

2.4.2 Systematic RAD

Il s'agit de la réserve systématique pour le développement défavorable des sinistres (RAD - *Reserve for Adverse Development*). Cette réserve est quantifiée de façon logique et transparente, et elle est simple à comprendre et à mettre en place. Elle représente l'évaluation de

risques dans le portefeuille global de PartnerRe et la préférence de la direction sur le conservatisme appliquée aux provisions techniques calculées.

Voici quelques facteurs importants à considérer :

- La différence entre les sinistres encourus estimés et réels.
- Un sinistre majeur inattendu dépassant un seuil de sévérité prédéterminé qui pourrait déformer le résultat d'un trimestre. Dans ce cas, PartnerRe estimera la RAD dédiée exclusivement pour ce sinistre.
- Un mouvement significatif de l'indice de l'inflation. Ceci pourrait impliquer un impact sur le montant final de paiement des sinistres pour des branches à développement long.
- Le cycle de marché : pendant les années où la capacité des réassureurs est débordante, la compétition pour gagner les affaires est plus dure. Le *loss ratio* de tarification pourrait être insuffisant pour couvrir des sinistres futurs, particulièrement dans les branches à développement long.

En notant *Systematic RAD* = sysRAD, $t = 1, \dots, T$ les années de souscription avec T désignant l'année la plus récente, $i = 1, \dots, n$ les branches d'activités à appliquer la sysRAD, on a :

$$\text{sysRAD} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \alpha_i(t) EP_i(t)$$

Avec $\alpha_i(t)$ le facteur à estimer de l'année de souscription t et de la branche d'activité i , et $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1$. $EP_i(t)$ (*Earned premium*) la prime acquise de l'année de souscription t et de la branche d'activité i .

Le tableau de sysRAD précisant $\alpha_i(t)$ de PartnerRe pour le portefeuille global à la fin de 2013 est présenté ci-dessous.

2 Provisionnement en pratique

UY Age	NA Gen Cas	NA Spec Cas	NA Multiline	NA Surety	Global Cas P	Global Cas NP	Global Spec Cas	Global Surety	Global Marine	Global ENG Fac	Global ENG P	Global Auto NP
1	8%	10%	4%	2%	3%	8%	8%	5%	3%	5%	4%	12%
2	8%	10%	4%	2%	3%	8%	8%	5%	3%	5%	4%	12%
3	8%	10%	4%	2%	3%	8%	8%	5%	3%	5%	4%	12%
4	6%	7%	3%	1%	2%	7%	6%	4%	2%	4%	2%	11%
5	4%	5%	2%	1%	1%	7%	5%	3%	1%	3%	1%	9%
6	3%	4%	1%	1%	1%	5%	4%	2%	0%	2%	1%	8%
7	2%	3%	1%	0%	0%	4%	3%	1%	0%	1%	0%	6%
8	0%	2%	0%	0%	0%	2%	2%	0%	0%	0%	0%	4%
9	0%	1%	0%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	2%
10	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 2.9 – Coefficients de sysRAD

La plupart des sysRAD réside dans les branches à développement long. Les branches automobile et responsabilité civile (*Casualty*) contiennent traditionnellement les plus grands pourcentages de sysRAD. Pourtant, dans les années récentes, étant donné l'incertitude croissante dans Crédit et Caution, Marine et Energie Offshore, PartnerRe a commencé à allouer une part significative de sysRAD à ces branches.

Le tableau ci-dessous précise le montant de RAD comptabilisé à la fin de 2013 pour toutes les branches d'activités.

BU/Line	Current Qtr Earned Premium	Total AME	total RAD	% RAD	Total Booked
Global P&C					
Property	116,814	608,350	16,928	5%	625,279
Casualty	18,324	628,702	34,957	11%	663,659
Auto XL	13,231	669,519	41,093	13%	710,612
Auto Prop	66,390	210,505			210,505
Total	214,759	2,117,076	92,977	29%	2,210,053
Global Specialty					
Agriculture	33,924	89,329	500	0%	89,829
Aviation	57,770	368,125	8,757	3%	376,882
Credit & Surety	71,819	387,098	3,539	1%	390,637
Marine	56,357	426,289	36,815	11%	463,103
Specialty Casualty	31,194	858,133	56,293	17%	914,426
Energy Onshore	11,397	116,483			116,483
Engineering	59,673	385,524	12,419	4%	397,943
Special Risks	10,305	51,558	5,129	2%	56,687
Multiline	10,469	13,585			13,585
Fac Energy Offshore	38,486	195,007	32,768	10%	227,775
Fac Energy Onshore	12,264	89,566			89,566
Fac Engineering	6,072	96,841	2,738	1%	99,579
Fac Property	33,440	143,992	15,385	5%	159,377
Total	433,172	3,221,531	174,342	54%	3,395,873
CAT	127,312	610,761	50,000	16%	660,761
Other	73	6,080	4,800	1%	10,880
Total	775,315	5,955,448	322,120		6,277,567

Tableau 2.10 – sysRAD comptabilisés chez PartnerRe

L'équipe de provisionnement mène son étude sur le cycle de marché chaque trimestre. Les souscripteurs sont aussi consultés pour leurs opinions professionnelles. Pour les deux années de souscription les plus récentes, on prend les *loss ratios* de tarification comme les *loss ratios* ultimes de provisionnement car peu d'informations sur les sinistres sont disponibles. Pourtant, si les *loss ratios* de tarification sont jugés insuffisants par l'équipe de provisionnement, on leur ajoute quelques pourcents pour apporter plus de prudence, surtout dans les branches à développement long.

Dans le cadre de ce mémoire, des discussions ont eu lieu avec des actuaires de tarification sur ce sujet. Il est intéressant de noter qu'ils ont effectué eux aussi une étude sur le cycle de marché, puis intégré un complément de réserve quand nécessaire pour se protéger contre la possibilité de sous-tarification. Cela veut dire que l'équipe de provisionnement risque de compter deux fois l'impact du cycle du marché dans le *loss ratio* des années de souscription récentes. Le problème est que l'équipe de tarification évalue le risque du cycle du marché d'une façon qui n'est pas totalement claire vis-à-vis des actuaires de provisionnement. Si le risque du cycle de marché a été évalué dans les calculs de *LR* de tarification, l'actuaire de provisionnement devrait exclure une part de ce risque des coefficients de sysRAD. En d'autres termes, un coefficient allégé de sysRAD pour les années récentes reflèterait mieux la bonne position de ce risque dans le portefeuille.

3 Approche stochastique en provisionnement

La méthode Chain Ladder reste toujours prépondérante dans les calculs des provisions techniques. Elle est simple à mettre en œuvre et ses résultats sont faciles à interpréter. Elle n'est pas non plus restrictive au niveau des données d'entrée. Pourtant, une approche déterministe telle que la méthode Chain Ladder ne traite que la valeur des variables à expliquer (la moyenne des provisions dans ce cadre), et pas ses caractères aléatoires.

Un modèle stochastique suppose que les éléments dans le triangle de liquidation soient des variables aléatoires suivant une loi de probabilité dont les paramètres sont à estimer. Les données d'entrée dans le triangle sont les observations de ces variables. L'approche stochastique est capable de nous donner des informations supplémentaires par rapport aux modèles déterministes, telles que la dispersion, ou même la distribution des provisions. Les principaux modèles stochastiques sont :

- Modèle récursif de Mack
- Modèle Log-Normal
- Modèle Poisson sur-dispersé

Cependant, ces derniers sont souvent plus compliqués, admettent des hypothèses plus fortes et ne s'appliquent pas à tous les types de données. D'ailleurs, comme les estimations Chain Ladder sont considérées comme « *benchmarks* », les méthodes qui les reproduisent sont favorisées par les actuaires de provisionnement.

3.1 Mesure de risque

Un atout des méthodes stochastiques est qu'elles nous permettent d'estimer le montant des provisions avec une marge de risque, et non seulement le montant en « Best estimate ». C'est très important surtout quand nous devons répondre aux exigences réglementaires des autorités locales. Par exemple à Singapour, les autorités demandent à PartnerRe de présenter le montant des provisions techniques au quantile 75%.

3.1.1 Valeur à risque

La valeur à risque (*Value at Risk*), notée par $VaR(X, \alpha)$, correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné. C'est en fait le quantile d'ordre α .

Si F_X la fonction de répartition de X , $F_X(VaR(X, \alpha)) = \alpha$. On a donc $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$ si F_X est une fonction strictement croissante.

D'ailleurs, $F_X(VaR(X, \alpha)) = P(X \leq VaR(X, \alpha)) = \alpha$. Dans le provisionnement, si le montant des provisions techniques est de $VaR(X, \alpha)$, la probabilité que le montant de pertes dépasse le montant provisionné est de $1 - \alpha$.

Cette mesure de risque est toujours invariante par translation, homogène, monotone, mais elle n'est pas sous-additive. Par conséquent, elle ne vérifie pas toutes les propriétés de cohérence.

Si on connaît la vraie loi que les sinistres suivent, on peut calculer la VaR paramétrique par la formule $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$. Si ce n'est pas le cas, on peut estimer la VaR empirique qui se base sur l'historique du risque. Elle correspond en fait au montant de sinistres qui se situe à la α^e position de la sinistralité historique classée en ordre croissant. Dans ce cas, on n'a pas besoin de préciser l'hypothèse sur la loi des sinistres. La VaR empirique est aussi simple et facile à implémenter, ce qui explique qu'elle soit très utilisée en pratique. Pourtant, afin d'arriver à une bonne estimation, de nombreuses observations sont nécessaires, ce qui amène des difficultés dans la réassurance.

Une autre approche consiste à générer un grand nombre de scénarios pour obtenir une distribution simulée des sinistres qui converge vers la vraie distribution inconnue. Puis on peut simplement calculer le quantile nécessaire comme pour la VaR empirique. Similairement, on a besoin de modéliser beaucoup de scénarios pour en avoir une bonne estimation.

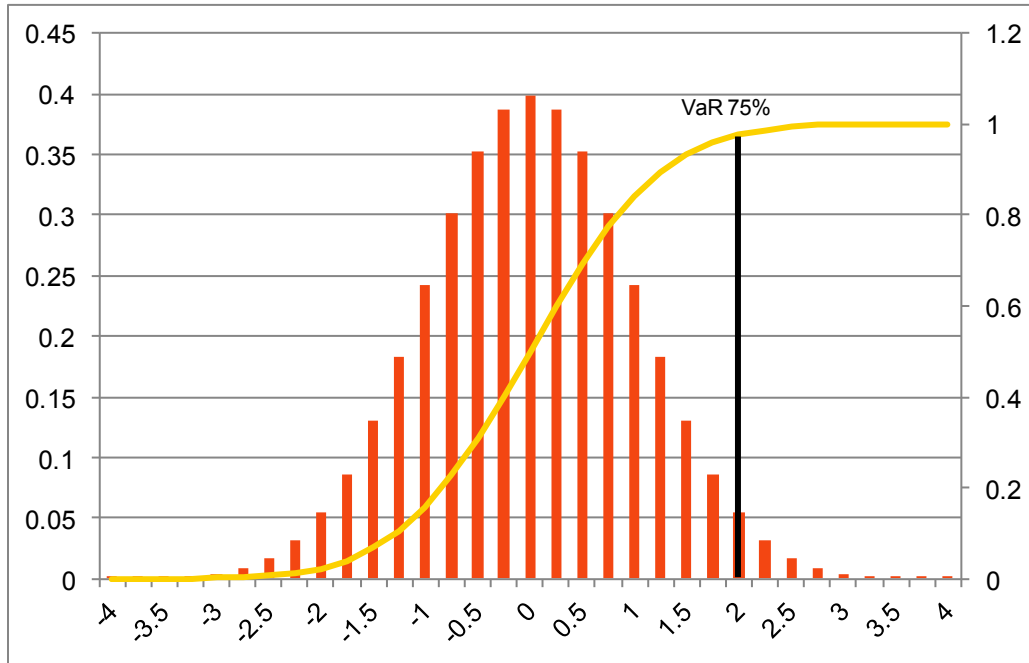


Figure 3.1 – Fonctions de densité et de répartition de la loi Normale

La VaR présente la perte potentielle maximale à un horizon de temps pour un niveau de confiance, mais elle ne donne aucune indication sur les valeurs prises une fois que le seuil est dépassé. C'est pourquoi il est important d'étudier la TVaR.

3.1.2 TVaR

La TVaR (*Tail Value at Risk*) au seuil α d'une distribution X , notée $TVaR(X, \alpha)$, se définit par :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, \delta) d\delta$$

Il y a trois indicateurs de risque qui sont liés à la TVaR :

- La $CTE(X, \alpha)$ (*Conditional Tail Expectation*) représente la perte attendue sachant que le seuil VaR est dépassé :

$$CTE(X, \alpha) = E[X | X > VaR(X, \alpha)]$$

- La $CVaR(X, \alpha)$ (*Conditional VaR*) représente la valeur moyenne des pertes qui excèdent la VaR :

3 Approche stochastique en provisionnement

$$\begin{aligned} CVaR(X, \alpha) &= E[X - VaR(X, \alpha) | X > VaR(X, \alpha)] \\ &= CTE(X, \alpha) - VaR(X, \alpha) \end{aligned}$$

- $ES(X, \alpha)$ (*Expected Shortfall*) est la prime *stop-loss* dont la rétention est fixée à $VaR(X, \alpha)$:

$$ES(X, \alpha) = E[(X - VaR(X, \alpha))_+] \text{ avec } x_+ = \max(x, 0)$$

Si X suit une loi continue, on a $TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1-\alpha} ES(X, \alpha)$

3.2 Modèle de Mack (1993)

Comme discuté dans la partie précédente, la méthode Chain Ladder a des limites. Une des contraintes est la sensibilité des estimations des facteurs de passage, surtout pour les dernières années de développement, car ces estimateurs sont basés sur très peu de données. Ceci implique aussi une haute sensibilité des estimations des réserves.

On s'intéresse aussi naturellement à mesurer la volatilité de l'estimation des réserves proposée par la méthode de Chain Ladder. Dans son article « *Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates* », Thomas Mack a présenté une formule pour calculer l'écart type de ces estimations.

Le modèle de Mack (1993) est une version stochastique non paramétrique du modèle de Chain Ladder. Il ne fait donc aucune hypothèse sur la forme de la distribution des réserves estimées. Ceci a l'avantage de rester très général, mais il ne peut donner aucune information sur les valeurs des quantiles, ce qui est recherché dans le cadre de cette étude. De plus, ce modèle est plus exigeant au niveau des données d'entrée. Il s'applique plutôt à des montants cumulés, de charges ou de paiements.

Comme il ne permet pas de modéliser la distribution des réserves, ce modèle ne peut pas établir d'intervalles de confiance selon différents niveaux de risques.

3.2.1 Principe du modèle

Les hypothèses de ce modèle :

- Des montants cumulés sont indépendants année de souscription par année de souscription, soit : $\forall i \neq j, (C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ et $(C_{j,1}, \dots, C_{j,n})$ sont indépendants.

3 Approche stochastique en provisionnement

- Les estimateurs conditionnels sont sans biais, soit : $E(C_{i,k+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \lambda_k C_{i,k}$
- La variance conditionnelle de $C_{i,k+1}$ est calculée par $V(C_{i,k+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k}$
- Absence de corrélation entre $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ et $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$

La deuxième et la troisième expriment le fait que chaque facteur de développement est une variable aléatoire d'espérance conditionnelle $E(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \lambda_k$ et de variance conditionnelle $V(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}$

Les facteurs de développement de la méthode Chain Ladder sont sans biais car :

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_k) &= E(E(\frac{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \setminus C_{l,k})), l = 1, \dots, n-k \\ &= E(\frac{\sum_{j=1}^{n-k} \lambda_k C_{j,k}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}}) = \lambda_k \end{aligned}$$

La variance est estimée par :

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k} (\frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} - \lambda_k)^2$$

pour $1 \leq k \leq n-2$.

Pourtant, on ne peut pas utiliser cette formule pour estimer $\hat{\sigma}_{n-1}$ avec une seule observation ($n-k-1=0$ dans ce cas). On introduit donc une autre formule comme suivant :

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right)$$

Sous les hypothèses de Mack, ces estimateurs sont sans biais.

La partie inférieure de liquidation est estimée de la même façon que dans la méthode Chain Ladder :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \hat{\lambda}_{j-1} \hat{\lambda}_{j-2} \dots \hat{\lambda}_{n+1-i}$$

Ces estimateurs sont aussi sans biais sous les hypothèses de Mack.

Ensuite, on essaie de calculer la variance de la charge ultime pour chaque année de souscription :

$$\begin{aligned}
 mse(\hat{C}_{i,n}) &= E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | C_{i,k}, i+k \leq n+1) \\
 &= V(C_{i,n} | C_{i,k}, i+k \leq n+1) + (E(C_{i,n} | C_{i,k}, i+k \leq n+1) - \hat{C}_{i,n})^2 \\
 V(C_{i,n} | C_{i,k}) &= V(C_{i,n}) \\
 &= E(V(C_{i,n} | C_{i,n-1})) + V(E(C_{i,n} | C_{i,n-1})) \\
 &= E(\hat{\sigma}_{n-1}^2 C_{i,n-1}) + V(\lambda_{n-1} C_{i,n-1}) \\
 &= \hat{\sigma}_{n-1}^2 E(C_{i,n-1}) + \lambda_{n-1}^2 V(C_{i,n-1}) \\
 &= \hat{\sigma}_{n-1}^2 \lambda_{n-2} E(C_{i,n-2}) + \lambda_{n-1}^2 (\hat{\sigma}_{n-2}^2 E(C_{i,n-2}) + \lambda_{n-2}^2 V(C_{i,n-2})) \\
 &= \dots \\
 &= C_{i,n-i+1} \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \lambda_{n-i+1} \dots \lambda_{k-1} \sigma_k^2 \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{n-1}^2 + V(C_{i,n-i+1}) \dots
 \end{aligned}$$

En remplaçant λ et σ^2 par leurs estimateurs, on aura :

$$\begin{aligned}
 V(C_{i,n} | C_{i,k}, i+k \leq n+1) &= \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \hat{C}_{i,k}} \\
 (E(C_{i,n} | C_{i,k}) - \hat{C}_{i,n})^2 &= C_{i,n-i+1}^2 (\lambda_{n-i+1} \dots \lambda_{n-1} - \hat{\lambda}_{n-i+1} \dots \hat{\lambda}_{n-1})^2 \\
 &= \dots \\
 &= \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$(se(\hat{C}_{i,n}))^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right) = (se(\hat{R}_i))^2$$

On a ainsi une estimation des réserves nécessaires pour l'année de souscription i . L'hypothèse de l'indépendance entre des années de souscription nous donne $V(R) = \sum_{i=2}^n V(R_i)$. Thomas Mack a démontré aussi que :

$$(se(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^n \{(se(R_i))^2 + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{j,n} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}}{\sum_{l=1}^{n-k} \hat{C}_{l,k}}\}$$

3.2.2 Application numérique

On emploie le triangle de Mack (1993) comme la base de données d'un exemple de calcul (tableau 2.4 présenté dans la partie précédente).

Une fois que les facteurs de développement λ_k sont déterminés, il est possible de compléter le triangle. Puis pour chaque année de souscription, le paiement final calculé par la méthode Chain Ladder se trouve dans la colonne $C_{i,n} CL$, sur la ligne correspondante. Les réserves de chaque année $R_i CL$ est la différence entre le paiement final estimé et ce qu'on a déjà payé $C_{i,n-i+1}$. Le besoin de réserve total est donc (tableau 2.5 présenté dans la partie précédente) :

$$R = \sum_{i=1}^n R_i = 52,135$$

Ensuite, on essaie d'estimer la variance des facteurs de développement $\hat{\sigma}_k$ grâce aux facteurs individuels de chaque année de souscription d'après les formules précisées précédemment.

$\lambda_{i,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	1.650	1.319	1.082	1.147	1.195	1.113	1.033	1.003	1.009	
2,005	40.425	1.259	1.977	1.292	1.132	0.993	1.043	1.033		
2,006	2.637	1.543	1.163	1.161	1.186	1.029	1.026			
2,007	2.043	1.364	1.349	1.102	1.113	1.038				
2,008	8.759	1.656	1.400	1.171	1.009					
2,009	4.260	1.816	1.105	1.226						
2,010	7.217	2.723	1.125							
2,011	5.142	1.887								
2,012	1.722									
2,013										

Tableau 3.2 – Facteurs de développement individuels

3 Approche stochastique en provisionnement

$(\lambda_{i,k} - \lambda_k)^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	1.821	0.093	0.036	0.001	0.007	0.005	0.000	0.000	0.000	
2,005	1,400.643	0.133	0.498	0.015	0.000	0.002	0.000	0.000		
2,006	0.131	0.007	0.012	0.000	0.005	0.000	0.000			
2,007	0.914	0.067	0.006	0.005	0.000	0.000				
2,008	33.175	0.001	0.017	0.000	0.011					
2,009	1.589	0.037	0.027	0.003						
2,010	17.790	1.209	0.021							
2,011	4.591	0.070								
2,012	1.632									
2,013										
σk^2	27,883	1,109	691	61.2	119	40.8	1.34	7.88	1.34	

Tableau 3.3 – Variance des facteurs de développement

L'erreur quadratique moyenne et l'écart type sont obtenus d'après les formules précisées précédemment.

$C_{i,k}$	$C_{i,n}$ CL	R_i CL	$se(R_i)$	$se(R_i)^2$	$CV(R_i)$	$CV(C_{i,n})$
2,004	18,834	0				
2,005	16,858	154	206	42,527	134%	1%
2,006	24,083	617	623	388,598	101%	3%
2,007	28,703	1,636	747	558,271	46%	3%
2,008	28,927	2,747	1,469	2,159,304	53%	5%
2,009	19,501	3,649	2,002	4,007,431	55%	10%
2,010	17,749	5,435	2,209	4,880,751	41%	12%
2,011	24,019	10,907	5,358	28,706,763	49%	22%
2,012	16,045	10,650	6,333	40,108,990	59%	39%
2,013	18,402	16,339	24,566	603,502,502	150%	133%
Total	213,122	52,135	26,909	724,094,881	52%	13%

Tableau 3.4 – Variance des réserves

3.2.3 Test des hypothèses

Nous allons présenter la vérification des hypothèses sous-jacentes du modèle de Mack. La qualité des résultats de ce modèle dépend du fait que les données du triangle respectent ces hypothèses. La procédure sera expliquée et appliquée sur le triangle de Mack pour plus de clarté.

3.2.3.1 Indépendance des années de souscription

Dans un premier temps, on va calculer les facteurs de développement individuels observés pour toutes les années de souscription (tableau 3.2 présenté dans la partie précédente).

3 Approche stochastique en provisionnement

Puis on déterminera si ces facteurs observés sont supérieurs, inférieurs ou égaux à leur médiane pour chaque année de développement. Ces positions seront notées S si le facteur est supérieur, I si inférieur et * si égal à la médiane.

I,S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	I	I	I	I	S	S	*	I	*	
2,005	S	I	S	S	*	I	S	S		
2,006	I	I	*	I	S	I	I			
2,007	I	I	S	I	I	S				
2,008	S	S	S	S	I					
2,009	*	S	I	S						
2,010	S	S	I							
2,011	S	S								
2,012	I									
2,013										

Tableau 3.5 – Position des facteurs par rapport à la médiane

On va tester l'existence d'un effet calendaire par la suite. Pour chaque diagonale $A_j = \{\lambda_{j,1}, \lambda_{j-1,2}, \dots, \lambda_{1,j}\}$, on note S_j le nombre de facteurs supérieurs à la médiane de chaque année de développement et I_j le nombre de facteurs inférieurs à la médiane. $Z_j = \min(S_j, I_j)$.

Comme S_j et I_j suivent des lois binomiales, en notant $t = S_j + I_j$ et m la partie entière de $\frac{t-1}{2}$, on a :

$$E(Z_j) = \frac{t}{2} - C_{t-1}^m \frac{t}{2^t}$$

$$V(Z_j) = \frac{t(t-1)}{4} - C_{t-1}^m \frac{t(t-1)}{2^t} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2$$

On teste plutôt $Z = Z_2 + \dots + Z_{n-1}$. S'il n'y a pas d'effet calendaire, les différents Z_j ne sont pas corrélés et donc $E(Z) = \sum E(Z_j)$ et $V(Z) = \sum V(Z_j)$.

En supposant que Z suive approximativement une loi Normale, on rejette donc l'existence d'effet calendaire si :

$$E(Z) - 2\sqrt{V(Z)} \leq Z \leq E(Z) + 2\sqrt{V(Z)}$$

Après ces calculs nécessaires, on peut confirmer qu'on rejette l'hypothèse sur l'existence d'effet calendaire. En effet, $8.886 < Z = 14 < 16.864$. Z se trouve donc dans l'intervalle à 95%.

3 Approche stochastique en provisionnement

Diagonale	lj	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	2	0	0.5	0.25
3	3	0	0	3	1	0.75	0.1875
4	3	1	1	4	1	1.25	0.4375
5	1	3	1	4	1	1.25	0.4375
6	1	3	1	4	1	1.25	0.4375
7	2	4	2	6	2	2.0625	0.6211
8	4	4	4	8	3	2.90625	0.8037
9	4	4	4	8	3	2.90625	0.8037
Total			14			12.875	3.9785

Z	14.000
I 95%	8.886 16.864

Tableau 3.6 - Résultats de test

3.2.3.2 Forme de l'espérance : $E(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \lambda_k C_{i,k}$

Pour vérifier cette hypothèse, on va vérifier la linéarité de $C_{i,k+1}$ par rapport à $C_{i,k}$ pour chaque année de développement. L'hypothèse sera acceptée si ces points sont approximativement alignés sur une droite passant par l'origine. Par la suite, on examinera la régularité des cadences des règlements pour les deuxièmes et troisièmes années de développement.

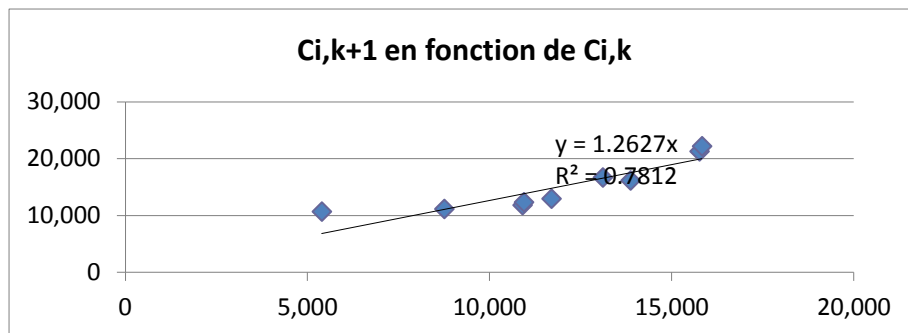


Figure 3.7 – Linéarité de $C_{i,k+1}$ par rapport à $C_{i,k}$ pour $k = 2$

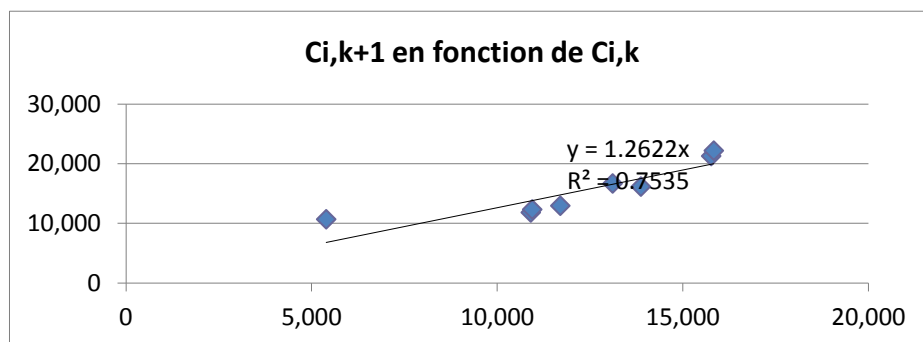


Figure 3.8 – Linéarité de $C_{i,k+1}$ par rapport à $C_{i,k}$ pour $k = 3$

Pour toutes les années de développement, les points sont relativement proches de la droite de régression, donc l'hypothèse est acceptée.

3.2.3.3 Forme de la variance : $V(C_{i,k+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k}$

Une fois que l'hypothèse de la forme de l'espérance est vérifiée, on va tester l'hypothèse de la forme de la variance en vérifiant que les résidus $r_{i,k} = \frac{C_{i,k+1} - \hat{\lambda}_k C_{i,k}}{\sqrt{C_{i,k}}}$ ne présentent pas de tendance spécifique en fonction des $C_{i,k}$. Par la suite, on examinera la relation entre des résidus $r_{i,k}$ et des $C_{i,k}$ pour les deuxièmes et troisièmes années de développement.

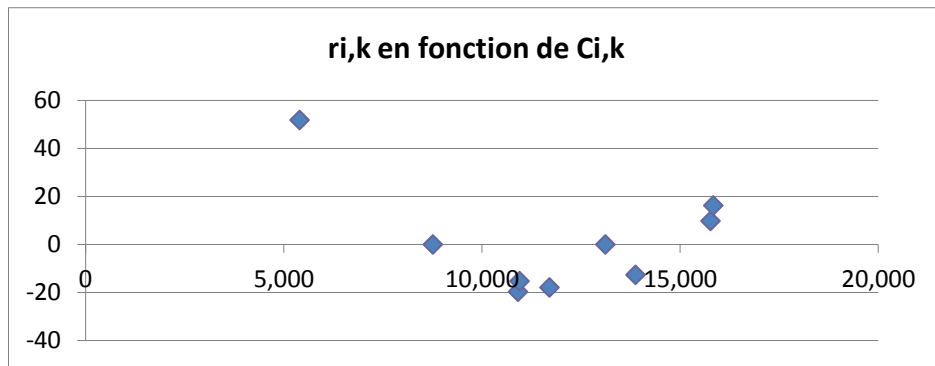


Figure 3.9 – Tendance de $r_{i,k}$ par rapport à $C_{i,k}$ pour $k = 2$

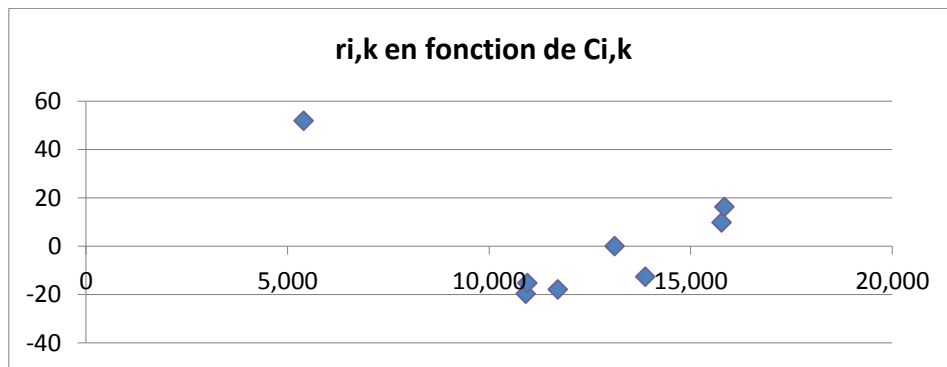


Figure 3.10 – Tendance de $r_{i,k}$ par rapport à $C_{i,k}$ pour $k = 3$

Pour toutes les années de développement, les points ne révèlent pas de structure particulière, donc l'hypothèse est acceptée.

3.2.3.4 Absence de corrélation entre $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ et $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$

D'après Thomas Mack dans « *Mesuring the variability of Chain Ladder reserve estimate* », on devrait aussi vérifier la corrélation entre les facteurs de développement adjacents. Mathématiquement, $E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\right) = \lambda_k$ ne dépend pas de l'information passée $C_{i,1}, \dots, C_{i,k}$ et plus particulièrement de la valeur de $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$.

On pourrait tester l'absence de corrélation par un test de Spearman. Cela consiste à calculer un coefficient de corrélation, non pas entre les valeurs prises par les deux variables mais entre les rangs de ces valeurs. L'interprétation est identique à celle de la corrélation de Pearson. Comme le test de Spearman est un test d'indépendance et qu'on ne veut que tester l'absence de corrélation, le test dans ce cas est approximatif. Thomas Mack a précisé qu'on pouvait utiliser un intervalle à 50% au lieu des 95% habituels pour vérifier si on pouvait accepter l'hypothèse de non corrélation entre les facteurs de développement adjacents.

On commence par le tableau 3.2 des facteurs individuels de chaque année de souscription. Puis on calcule les $r_{i,k}$ qui sont les rangs des $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$:

$r_{i,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004		8	6	6	4	1	1	2		
2,005		1	7	1	1	3	3	1		
2,006		6	4	4	3	2	2			
2,007		7	5	3	5	4				
2,008		2	3	2	2					
2,009		5	2	5						
2,010		3	1							
2,011		4								
2,012										
2,013										

Tableau 3.11 – Rangs des $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$

Similairement, on calcule les $s_{i,k}$ qui sont les rangs des $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$. Le coefficient T_k est estimé par :

$$T_k = 1 - 6 \sum_{i=1}^{I-k} \frac{(s_{i,k} - r_{i,k})^2}{(I-k)^3 - I + k}$$

On a $-1 \leq T_k \leq 1$.

Si les facteurs individuels sont indépendants :

3 Approche stochastique en provisionnement

$$E(T_k) = 0$$

$$Var(T_k) = \frac{1}{I - k - 1}$$

Si T_k s'approche de 0, les facteurs de développement adjacents ne sont pas corrélés. Pourtant, on ne s'intéresse pas aux T_k individuels comme on veut vérifier la corrélation du triangle entier. Par conséquent, on calcule :

$$T = \frac{\sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1) T_k}{\sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{I-2} \frac{2(I - k - 1)}{(I - 2)(I - 3)} T_k$$

Si les facteurs individuels sont indépendants :

$$E(T) = 0$$

$$Var(T) = \frac{2}{(I - 2)(I - 3)}$$

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004		7	7	5	1	1	2	2		
2,005		8	1	1	3	4	1	1		
2,006		5	4	4	2	3	3			
2,007		6	3	6	4	2				
2,008		4	2	3	5					
2,009		3	6	2						
2,010		1	5							
2,011		2								
2,012										
2,013										

Tk	0.1905	-0.3214	0.4286	-0.2000	0.4000	-0.5000	1.0000
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1

T	0.070
150%	-0.127 0.127

Tableau 3.12 - Résultats de test

Avec $T = 0.070$ qui se trouve dans l'intervalle à 50% $(-0.127, 0.127)$, on accepte l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation dans le triangle.

Thomas Mack a défini un modèle non paramétrique, avec des hypothèses sur les deux premiers moments. Il n'est donc pas possible de préciser la distribution entière des réserves. Les mesures de risques telles que VaR, TVaR ne se sont pas estimées dans ce cadre de travail. Pourtant, en pratique, on a souvent besoin d'estimer des quantiles des provisions techniques à l'ultime dans une perspective de solvabilité.

Parfois, on voit que les professionnels dans le domaine du provisionnement ajoutent souvent l'hypothèse que les provisions R_i suivent une loi Normale. Dans ce cas, l'intervalle à 95% de l'estimation de la provision est :

$$I_{95\%} = [\hat{R}_i - 2se(\hat{R}_i); \hat{R}_i + 2se(\hat{R}_i)]$$

Si on suppose que les R_i suivent une loi Log-Normale, on aura :

$$I_{95\%} = [\exp^{\mu_i - 2\sigma_i}; \exp^{\mu_i + 2\sigma_i}]$$

$$\text{Avec } \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

$$\sigma_i^2 = \ln \left(1 + \frac{(se(\hat{R}_i))^2}{\hat{R}_i^2} \right)$$

3.3 Modèles linéaires généralisés (GLM)

Des modèles statistiques ont pour objet de modéliser une variable réponse Y à l'aide des variables explicatives $X_1, \dots, X_k$. Ces variables peuvent être quantitatives ou qualitatives. Les premiers modèles sont proposés par Gauss et Legendre pour leurs études sur l'astronomie. Ils sont définis de la façon suivante :

Soit Y une variable réponse, $X = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur de variables explicatives et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ un vecteur de paramètres. On a :

$$Y = X\beta + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \text{ un terme d'erreur distribué selon une loi Normale } N(0, \sigma^2)$$

Y suit aussi une loi Normale $N(X\beta, \sigma^2)$.

L'hypothèse de normalité nous permet de calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance facilement. Pourtant, cette même propriété ainsi que le caractère linéaire de $E(Y) = X\beta$ réduisent le champ d'application de la modélisation à des données spécifiques.

John Nelder et Robert Wedderburn ont introduit en 1972 les modèles linéaires généralisés qui englobent les modèles classiques ainsi que de nombreux modèles proposés auparavant. Ces modèles sont utilisés pour la première fois pour la tarification des risques en masse dans les années 1980, puis ils sont introduits dans le domaine du provisionnement dans les années 1990. Contrairement à la méthode Chain Ladder, les modèles GLM se basent sur des triangles

cumulatifs ou des triangles incrémentaux. Dans le cadre de ce mémoire, on travaillera avec les triangles cumulatifs de paiements du portefeuille d'Asie de PartnerRe.

3.3.1 Principe du modèle

3.3.1.1 Composante aléatoire

On suppose que les paiements sont indépendants et suivent une loi dans la famille exponentielle.

Une variable aléatoire est dite de type exponentiel si sa fonction de densité s'écrit sous la forme :

$$f(y_i, \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i, \phi) \right\}$$

Avec θ_i est un paramètre réel appelé paramètre canonique ou paramètre de la moyenne

$\phi > 0$ est un paramètre de dispersion indépendant de i et j

$b(\cdot)$ est une fonction suffisamment régulière de classe C^2 et deux fois dérivable (Poisson : $b(\theta_i) = \exp(\theta_i)$, Normale : $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2} \dots$)

$c(\cdot)$ est une fonction ne dépendant pas de θ_i

De nombreuses lois usuelles appartiennent à cette famille : Normale, Poisson, Gamma, Binomiale...

Par dérivation de la vraisemblance de l'expression générale de la fonction densité ci-dessus, on pourrait en déduire l'expression de l'espérance et de la variance de Y en fonction de b et du paramètre de dispersion ϕ :

$$\begin{cases} E(Y) = \mu = b'(\theta) \\ Var(Y) = \phi b''(\theta) = \phi V(\mu) \end{cases}$$

Avec $V = b'' \circ b'^{-1}$ la fonction variance de la loi de distribution.

Un cas important est la loi de Poisson de paramètre λ . La fonction de masse de probabilité s'écrit :

$$f(y) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^y}{y!} = \exp(-\lambda + y \ln(\lambda) - \ln(y!))$$

Si on met :

- $\theta = \ln(\lambda)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = \lambda$
- $c(y, \theta) = -\ln(y!)$

On peut réécrire cette fonction sous la forme :

$$f(y_i, \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i, \phi) \right\}$$

Dans le cas où l'égalité entre l'espérance et la variance n'est pas tenue pour les données à modéliser, on peut introduire la distribution de Poisson sur-dispersée en donnant un facteur de dispersion $\phi > 0$: $X \sim P_{sur-dispersée}(\lambda, \phi)$ si et seulement si $\frac{X}{\phi} \sim P(\frac{\lambda}{\phi})$.

On a aussi :

$$\begin{cases} E(X) = \lambda \\ Var(X) = \phi \lambda = \phi E(X) \end{cases}$$

La variance est donc proportionnelle à l'espérance.

3.3.1.2 Fonction de lien

Comme le nom l'indique, c'est la fonction qui fait le lien entre la moyenne des observations $E(Y) = \mu$ et les variables explicatives.

$$\eta = g(\mu) = X \beta$$

Avec η la composante systématique, X la matrice des variables explicatives et β le vecteur des paramètres.

On a $\mu = E(Y_i) = b'(\theta_i)$ et on peut donc exprimer θ_i en fonction de $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$:

$$\theta_i = (b')^{-1}(E(Y_i)) = T(E(Y_i))$$

$$E(Y_i) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k)$$

Donc $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \theta_i = (T \circ g^{-1})(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k)$

Le paramètre de dispersion ϕ est supposé connu, sinon il est à estimer.

Les paramètres $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ (et éventuellement ϕ) sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

La prédiction de l'observation Y_i est déterminée comme l'estimateur du maximum de vraisemblance $E(Y_i)$:

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \dots + \hat{\beta}_k X_k)$$

On a aussi que $Var(Y_i) = \phi b''(\theta) = \phi b''[(b')^{-1}(\mu)] = \phi V(\mu)$

Cette fonction V est appelée la fonction variance de la distribution, avec $V(\mu) = b''(\theta) = b''[(b')^{-1}(\mu)]$.

Dans la pratique, les fonctions de lien classiques sont :

- Fonction identité $g(\mu) = \mu$
- Fonction logarithme $g(\mu) = \log(\mu)$
- Fonction inverse $g(\mu) = \frac{1}{\mu}$
- Fonction logit $g(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$
- Fonction probit $g(\mu) = \Phi(\mu)$, avec Φ la fonction de répartition de la loi Normale (0,1)

Si la fonction de lien choisie est la fonction identité, c'est le modèle additif. Mais si on utilise la fonction logarithme, c'est le modèle multiplicatif.

Si on définit la fonction g comme $g(\mu) = (b')^{-1}(\mu)$, on obtient $\theta = X\beta$. Cette fonction correspond donc à la fonction T décrite auparavant et est appelée la fonction de lien canonique.

Distribution	Fonction de lien canonique $g(\mu)$	Fonction variance $V(\mu)$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	μ	1
Poisson $P(\mu)$	$\text{Log } \mu$	μ
Gamma $G(\mu, v)$	$\frac{-1}{\mu}$	μ^2
Binomiale Négative	$\text{Log } \frac{k\mu}{1+k\mu}$	$\mu + k\mu^2$

3.3.1.3 Résidus du modèle

Il y a trois types de résidus :

- Les résidus lignes : c'est la différence entre valeur observée et valeur estimée $r_i = y_i - \hat{\mu}_i$

Ces résidus sont une simple transformation linéaire des valeurs observées. C'est la raison pour laquelle ces résidus reflètent toutes les caractéristiques des données.

- Les résidus de Pearson : ce sont les résidus lignes standardisés $r_{pi} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$

On préfère utiliser ce type de résidus si on veut tenir compte de la variabilité des résidus. La moyenne de ces résidus est nulle et si leur variance tend vers 0, leur distribution tend vers une loi Normale.

- Les résidus de la déviance : $r_{Di} = \sqrt{d_i} \text{signe}(y_i - \hat{\mu}_i)$, avec d_i représente la contribution de l'observation i à la déviance D .

La déviance D se définit comme $D = \phi D^*$ avec D^* la déviance normalisée. Si on note b l'estimation du maximum de vraisemblance de β , b_{max} l'estimation des paramètres du modèle saturé, qui est un modèle ayant la même loi de distribution et la même fonction de lien mais avec autant de paramètres que d'observations, la déviance normalisée D^* prend la différence entre les logarithmes de la vraisemblance de ces deux modèles : $D^* = -2[l(b; y) - l(b_{max}; y)]$.

3 Approche stochastique en provisionnement

Distribution	ϕ	Déviance
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	σ^2	$\sum_i (y_i - \mu_i)^2$
Poisson $P(\mu)$	1	$2 \sum_i [y_i \log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) - (y_i - \mu_i)]$
Gamma $G(\mu, \nu)$	$\frac{1}{\nu}$	$2 \sum_i -\log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) + \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i}$
Binomiale Négative	1	$2 \sum_i [y_i \log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) - (y_i + \frac{1}{k}) \log\left(\frac{y_i + \frac{1}{k}}{\mu_i + \frac{1}{k}}\right)]$

3.3.1.4 Adéquation du modèle

Pour déterminer l'adéquation du modèle aux données, on utilise souvent deux statistiques :

- La déviance normalisée décrite ci-dessus. Si le modèle étudié est pertinent, on suppose que D^* suit approximativement une loi de Chi-deux à $n - K$ degrés de liberté.
- La statistique du Chi-deux de Pearson : $\chi^2 = \sum \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{v(\hat{\mu}_i)}$. Similaire au cas de la déviance normalisée, cette statistique suit approximativement une loi de Chi-deux à $n - K$ degrés de liberté si le modèle étudié est pertinent.

3.3.1.5 Estimation des paramètres

Soient $y = (y_1, \dots, y_n)$ les variables réponses indépendantes et les paramètres à estimer $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. L'estimation de ces paramètres se fait grâce à la méthode du maximum de vraisemblance. Ceci concerne un système d'équation qui n'a pas de solution explicite. On a donc besoin d'utiliser des méthodes numériques comme le Solveur sous Excel pour obtenir des approximations.

La vraisemblance du modèle se définit ainsi :

$$L(y, \theta, \phi) = \prod_{i=1}^n f(y_i, \theta_i, \phi)$$

Et sa log-vraisemblance :

3 Approche stochastique en provisionnement

$$l(y, \theta, \phi) = \ln \left\{ \prod_{i=1}^n f(y_i, \theta_i, \phi) \right\} = \sum_{i=1}^n l_i(y_i, \theta_i, \phi)$$

Avec
$$l_i(y_i, \theta_i, \phi) = \ln(f(y_i, \theta_i, \phi)) = \frac{\theta_i y_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i, \phi)$$

On note que $\mu_i = b'(\theta_i)$ et $\eta_i = g(\mu_i) \rightarrow \theta_i = (b'^{-1} \circ g)(x_i \beta)$ en notant x_i la i^e ligne de la matrice X .

Grâce à ces relations, on peut exprimer la log-vraisemblance en fonction des paramètres β du modèle.

Les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$ de $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ sont les solutions du système :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial l_i}{\partial \beta_j}(\hat{\beta}_j) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

On a aussi :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} * \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} * \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} * \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} = \frac{y_i - b'(\theta_i)}{\phi} = \frac{y_i - \mu_i}{\phi} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} \right)^{-1} = \frac{1}{b''(\theta_i)} = \frac{\phi}{V(Y_i)} \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = x_{i,j} \end{cases}$$

On en déduit les équations de Wedderburn:

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_i}{V(Y_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} x_{i,j} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

Comme $V(Y_i) = \phi V(\mu_i)$

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_i}{V(\mu_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} x_{i,j} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

On n'a pas une formule fermée pour obtenir les estimateurs du maximum de vraisemblance comme dans le cas des modèles linéaires. Ces équations de Wedderburn nécessitent l'utilisation de méthodes numériques pour calculer les solutions.

3.3.1.6 *Modèles usuels*

$x_{i,j}$ pourrait suivre une loi Normale avec une fonction lien multiplicative. Dans ce cas on a la méthode de De Vylder. $x_{i,j}$ pourrait aussi être modélisé par une loi Gamma avec une fonction lien multiplicative, ce qui s'appelle la méthode de Mack.

En pratique, le modèle de Poisson sur-dispersé est aussi très utilisé. Un des avantages est que les valeurs prédites par ce modèle à lien multiplicatif coïncident avec celles prédites par la méthode Chain Ladder standard. Pourtant, une de ses hypothèses implicites est que les charges incrémentales doivent toutes être positives.

Cela pose problème, surtout quand on travaille avec des paiements nets de recours ou des charges. En réassurance, il y a souvent des cas où les charges incrémentales sont négatives. Pour quelques branches d'activités, des gestionnaires de sinistre ont tendance à être prudents à l'ouverture du sinistre. D'autres raisons pourraient être dues à l'insuffisance informationnelle au moment de la constitution des provisions préliminaires. Par conséquent, il est tout à fait possible d'observer une baisse des charges cumulées dans des années de développement postérieures.

On va donc présenter plus en détail par la suite le modèle de Poisson sur-dispersé introduit par Renshaw et Verrall en 1998. Comme mentionné précédemment, il partage avec le modèle stochastique de Mack (1993) la caractéristique fondamentale de reproduire les résultats de Chain Ladder. On va examiner aussi le modèle de Mack complet. Ce modèle est similaire à celui de Mack (1993) mais on ajoute en plus l'hypothèse que les paiements cumulés suivent une loi Normale.

Pourtant, ces modèles ne tiennent pas compte des effets calendaires qui pourraient conduire à une mauvaise estimation des paramètres liés aux années de souscription et de développement. On peut aussi sous-estimer les risques sous-jacents. C'est pourquoi on doit toujours vérifier l'existence des effets calendaires dans le triangle, comme ce qui a été fait dans la partie de test des hypothèses du modèle de Mack (1993). Il existe aussi des modèles qui peuvent tenir

compte de ces effets calendaires, comme le modèle développé par Bluck et Venter dans « *Stochastic trend models in casualty and life insurance* ». Pourtant, ce type de modèle n'est pas considéré dans le cadre de ce mémoire.

3.3.2 Modèle ODP (*over-dispersed Poisson*)

Le modèle de Poisson sur-dispersé est appliqué sur un triangle des charges incrémentales $X_{i,j}$ qui suivent une loi de Poisson sur-dispersée avec la moyenne et la variance des observations définies par :

$$E(X_{i,j}) = m_{i,j}$$

$$Var(X_{i,j}) = \phi m_{i,j}$$

La fonction de lien se définit de la façon suivante :

$$\ln(m_{i,j}) = c + \alpha_i + b_j$$

$\ln(m_{i,j}) = \eta_{i,j}$ est la composante systématique, aussi appelée le prédicteur linéaire. Cette structure additive est du type Chain Ladder, car elle a un paramètre pour chaque ligne i et un paramètre pour chaque colonne j .

En tant que modèle linéaire généralisé, on peut avoir des estimations de bonne qualité des paramètres nécessaires en utilisant des logiciels standards comme Excel. Pourtant, ces valeurs des paramètres sont difficiles à interpréter. Dans le cadre de ce modèle, on a $\alpha_1 = b_1 = 0$.

On devrait choisir ce modèle si on sait que les observations suivent une loi de Poisson, mais la variance n'est pas égale à l'espérance. Pourtant, la loi de Poisson sur-dispersée n'est pas une « vraie » distribution en soi. D'ailleurs, le modèle ODP est un modèle non-récuratif. Ses montants futurs sont complètement spécifiés par le modèle.

On pourrait travailler sur la version multiplicative du modèle :

$$m_{i,j} = x_i y_j, \text{ avec } \sum y_j = 1$$

x_i les sinistres ultimes espérés, y_j la proportion de sinistres ultimes de chaque année de développement, ϕ un paramètre supplémentaire à estimer.

3 Approche stochastique en provisionnement

Comme $Var(X_{i,j}) = \phi m_{i,j} = \phi x_i y_j$ dans la forme multiplicative, les y_j doivent être positifs, ce qui est une limite du modèle. Pourtant, quelques sinistres incrémentaux négatifs sont acceptables tant que la somme des incréments sur une année de développement est positive.

3.3.2.1 Estimation des paramètres

On estime les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \phi^{-1} 0.5 [X_{i,j} \ln(m_{i,j}) - m_{i,j}] + \text{constante}$$

Le paramètre ϕ est estimé par :

$$\hat{\phi} = \sum_{i,j} \left(\frac{X_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}} \right)^2 \frac{1}{N - p}$$

$$\hat{\phi}_j = \sum_j \left(\frac{X_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}} \right)^2 \frac{N}{n_j(N - p)}$$

avec N le nombre d'observations, $n_j = n - j$, $p = 2n - 1$ le nombre de paramètres estimés.

3.3.2.2 Application numérique

On emploie de nouveau le triangle cumulatif de Mack pour illustrer comment marche le modèle de Poisson sur-dispersé (tableau 2.4 présenté dans la partie précédente).

Le modèle de Poisson sur-dispersé s'applique sur le triangle incrémental des sinistres :

Xi,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	3,257	2,638	898	1,734	2,642	1,828	599	54	172
2,005	106	4,179	1,111	5,270	3,116	1,817	-103	673	535	
2,006	3,410	5,582	4,881	2,268	2,594	3,479	649	603		
2,007	5,655	5,900	4,211	5,500	2,159	2,658	984			
2,008	1,092	8,473	6,271	6,333	3,786	225				
2,009	1,513	4,932	5,257	1,233	2,917					
2,010	557	3,463	6,926	1,368						
2,011	1,351	5,596	6,165							
2,012	3,133	2,262								
2,013	2,063									

Tableau 3.13 – Triangle incrémental de Mack

Puis on essaie d'estimer les $\hat{m}_{i,j}$. Dans un premier temps, on reconstruit la partie supérieure en utilisant la dernière diagonale et les facteurs de développement empiriques. Ces facteurs sont en fait ceux qui sont calculés dans le tableau 2.5 à partir du triangle cumulé.

3 Approche stochastique en provisionnement

$C^i_{j,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2,111	6,333	10,281	13,067	15,310	17,046	17,760	18,351	18,662	18,834
2,005	1,890	5,668	9,203	11,696	13,703	15,257	15,897	16,426	16,704	
2,006	2,700	8,098	13,147	16,708	19,577	21,797	22,711	23,466		
2,007	3,218	9,651	15,669	19,913	23,332	25,978	27,067			
2,008	3,243	9,726	15,791	20,069	23,514	26,180				
2,009	2,186	6,557	10,646	13,529	15,852					
2,010	1,990	5,968	9,689	12,314						
2,011	2,693	8,076	13,112							
2,012	1,799	5,395								
2,013	2,063									
λ_k	2.999	1.624	1.271	1.172	1.113	1.042	1.033	1.017	1.009	

Tableau 3.14 – Triangle cumulé reconstruit

Les $\widehat{m}_{i,k}$ sont les espérances des incréments estimées du triangle reconstruit dans le tableau 3.14.

$m_{i,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2,111	4,221	3,949	2,785	2,243	1,736	715	591	311	
2,005	1,890	3,778	3,534	2,493	2,008	1,554	640	529	278	
2,006	2,700	5,398	5,049	3,561	2,868	2,220	914	755		
2,007	3,218	6,433	6,018	4,245	3,419	2,646	1,089			
2,008	3,243	6,484	6,065	4,278	3,445	2,666				
2,009	2,186	4,371	4,088	2,884	2,323					
2,010	1,990	3,978	3,721	2,625						
2,011	2,693	5,384	5,036							
2,012	1,799	3,596								
2,013										

Tableau 3.15 – Espérance des $X_{i,j} : m_{i,k}$

On peut maintenant estimer le paramètre ϕ suivant la formule décrite auparavant.

$(X_{i,k} - m_{i,j})^2 / m_{i,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	3,985	220	435	1,279	116	473	1,734	0	212	
2,005	1,684	42	1,662	3,094	612	45	862	39	237	
2,006	187	6	6	470	26	714	77	31		
2,007	1,846	44	542	371	464	0	10			
2,008	1,427	610	7	988	34	2,235				
2,009	207	72	334	945	152					
2,010	1,032	67	2,760	602						
2,011	669	8	253							
2,012	990	495								
2,013										
ϕ	984									
ϕ_k	1,837	266	1,146	1,691	357	1,059	1,025	36	343	36

Tableau 3.16 – Paramètre ϕ

3 Approche stochastique en provisionnement

Ensuite, on calcule la log-vraisemblance pour chaque point dans le triangle et la log-vraisemblance totale. La maximisation de la somme totale est faite en utilisant le Solveur sous Excel. Grâce à cela, on obtient x_i les sinistres ultimes espérés et y_j la proportion de sinistres ultimes de chaque année de développement dans la version multiplicative du modèle.

$$m_{i,j} = x_i y_j, \text{ avec } \sum y_j = 1$$

Log-vrais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		xi ODP
2,004	18.430	11.675	9.097	2.205	5.661	9.135	5.743	1.643	0.000	0.363		18,834
2,005	-0.554	15.577	2.818	19.685	11.025	5.997	-0.664	1.876	1.389			16,858
2,006	12.323	21.640	18.590	7.618	9.040	12.498	1.785	1.647				24,083
2,007	21.580	23.029	15.569	21.196	7.192	9.303	2.944					28,703
2,008	2.839	34.507	24.683	24.742	13.923	-0.453						28,927
2,009	4.803	18.794	20.144	3.527	10.311							19,501
2,010	1.139	12.568	27.054	4.140								17,749
2,011	4.055	21.701	24.154									24,019
2,012	11.022	7.586										16,045
2,013	6.955											18,402
Log-vrais	585.250											
yk ODP	11%	22%	21%	15%	12%	9%	4%	3%	2%	1%		

Tableau 3.17 – Estimations des x_i et y_j

Ces y_j sont en fait les pourcentages de développement. Le produit $x_i y_j$ nous donne des incréments pour la partie inférieure. On présente ci-dessous le triangle cumulatif complet.

Ci,k ODP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	16,858
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466	23,863	24,083
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067	27,967	28,441	28,703
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180	27,278	28,185	28,663	28,927
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852	17,649	18,390	19,001	19,323	19,501
2,010	557	4,020	10,946	12,314	14,428	16,064	16,738	17,294	17,587	17,749
2,011	1,351	6,947	13,112	16,664	19,525	21,738	22,650	23,403	23,800	24,019
2,012	3,133	5,395	8,759	11,132	13,043	14,521	15,130	15,634	15,898	16,045
2,013	2,063	6,188	10,046	12,767	14,959	16,655	17,353	17,931	18,234	18,402

Tableau 3.18 – Triangle complété du modèle ODP

Le modèle ODP nous donne en espérance les mêmes estimations que le Chain Ladder. En fait, Renshaw et Verrall dans « *A stochastic model underlying the Chain Ladder technique* » ont montré que si la somme des incréments de chaque année de développement est positive, le modèle ODP avec paramètre ϕ constant est équivalent à la méthode Chain Ladder.

C'est aussi une des motivations pour l'utilisation de ce modèle en pratique.

3 Approche stochastique en provisionnement

	Ci,n ODP	Ri ODP	Ri CL	Diff
2,004	18,834	0	0	
2,005	16,858	154	154	0%
2,006	24,083	617	617	0%
2,007	28,703	1,636	1,636	0%
2,008	28,927	2,747	2,747	0%
2,009	19,501	3,649	3,649	0%
2,010	17,749	5,435	5,435	0%
2,011	24,019	10,907	10,907	0%
2,012	16,045	10,650	10,650	0%
2,013	18,402	16,339	16,339	0%
Total	213,122	52,135	52,135	0%

Tableau 3.19 – Estimation du modèle ODP contre celles de Chain Ladder

3.3.3 Modèle de Mack (optique GLM)

Dans la partie 3.2, on a examiné le modèle de Mack (1993). Il peut nous donner une première mesure de l'incertitude des estimations : la variance. Maintenant, on va revisiter ce modèle sous l'optique des modèles GLM en ajoutant l'hypothèse que les montants cumulés suivent une loi Normale. A la différence du modèle ODP, le modèle de Mack (optique GLM) est ré-cursif. La spécification du modèle se fait donc conditionnellement à l'information passée.

Cette fois-ci, les observations sont les facteurs individuels de développement $\lambda_{i,j}$. La moyenne et la variance des observations sont définies par :

$$E(\lambda_{i,j} | C_{i,j}) = \lambda_j$$

$$Var(\lambda_{i,j} | C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

Ces facteurs individuels suivent donc une loi Normale :

$$\lambda_{i,j} | C_{i,j} \sim N\left(\lambda_j, \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}\right)$$

La fonction de lien se définit de la façon suivante :

$$\ln(\lambda_j) = \gamma_j$$

3.3.3.1 Estimation des paramètres

On estime les paramètres γ_j par la méthode de maximum de vraisemblance:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} 0.5 \left[\ln \left(\frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2} \right) - \frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2} (\lambda_{i,j} - \exp(\gamma_j))^2 \right]$$

Les facteurs de développement $\hat{\lambda}_j$ sont estimés d'après la fonction de lien $\ln(\lambda_j) = \gamma_j$.

Le paramètre σ_j est estimé par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_i C_{i,j} (\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)^2 \frac{N}{(N-p)}$$

Avec N le nombre d'observations, $n_j = n - j$, $p = n - 1$ le nombre de paramètres estimés.

3.3.3.2 Application numérique

On emploie de nouveau le triangle cumulatif de Mack pour illustrer comment marche le modèle de Mack (tableau 2.4 présenté dans la partie précédente).

Une fois que les facteurs de développement λ_k sont déterminés (tableau 3.2 présenté dans la partie précédente), on peut calculer le paramètre σ_j d'après la formule décrite ci-dessus :

$(\lambda_{i,k} - \lambda_k)^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	1.821	0.093	0.036	0.001	0.007	0.005	0.000	0.000	0.000	
2,005	1,400.643	0.133	0.498	0.015	0.000	0.002	0.000	0.000		
2,006	0.131	0.007	0.012	0.000	0.005	0.000	0.000			
2,007	0.914	0.067	0.006	0.005	0.000	0.000				
2,008	33.175	0.001	0.017	0.000	0.011					
2,009	1.589	0.037	0.027	0.003						
2,010	17.790	1.209	0.021							
2,011	4.591	0.070								
2,012	1.632									
2,013										
σ_k^2	30,982	1,212	741	63.8	119	38.3	1.12	4.93	4.93	4.479
σ_k	176	35	27	8.0	11	6.2	1.06	2.22	2.22	2.116

Tableau 3.20 – Paramètre σ

Ensuite, similairement au modèle ODP, on calcule la log-vraisemblance pour chaque point dans le triangle et la log-vraisemblance totale. La maximisation de la somme totale est faite en utilisant le Solveur sous Excel. Grâce à cela, on obtient γ_j pour chaque année de développement. Les facteurs de développement λ_j sont alors estimés grâce à la fonction de lien :

$$\ln(\lambda_j) = \gamma_j$$

3 Approche stochastique en provisionnement

Log-vrais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-1.058	0.644	1.083	2.554	1.986	1.957	4.843	3.746	4.120	
2,005	-5.235	0.397	-0.821	1.346	2.355	2.525	4.052	3.620		
2,006	-1.111	0.978	1.357	2.752	2.118	3.135	4.478			
2,007	-0.934	0.807	1.464	2.084	2.639	3.256				
2,008	-2.257	1.029	1.353	2.925	1.499					
2,009	-1.548	0.737	1.163	2.362						
2,010	-2.169	-1.404	1.189							
2,011	-1.666	0.673								
2,012	-1.228									
2,013										
Log-vrais	53.794									

γ_k Mack	1.098	0.485	0.240	0.158	0.107	0.041	0.033	0.017	0.009	
λ_k Mack	2.999	1.624	1.271	1.172	1.113	1.042	1.033	1.017	1.009	

Tableau 3.21 – Estimations des γ_j et λ_j

Encore une fois, on peut compléter le triangle en utilisant les facteurs de développement λ_j

Ci,k Mack	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	16,858
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466	23,863	24,083
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067	27,967	28,441	28,703
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180	27,278	28,185	28,663	28,927
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852	17,649	18,389	19,001	19,323	19,501
2,010	557	4,020	10,946	12,314	14,428	16,064	16,738	17,294	17,587	17,749
2,011	1,351	6,947	13,112	16,664	19,525	21,738	22,650	23,403	23,800	24,019
2,012	3,133	5,395	8,759	11,132	13,043	14,521	15,130	15,634	15,898	16,045
2,013	2,063	6,188	10,046	12,767	14,959	16,655	17,353	17,931	18,234	18,402

Tableau 3.22 – Triangle complété de Mack

Similairement au modèle ODP, on voit que le modèle de Mack (optique GLM) nous donne les mêmes estimations que le modèle de Chain Ladder.

	Ci,n Mack	Ri Mack	Ri CL	Diff
2,004	18,834	0	0	
2,005	16,858	154	154	0%
2,006	24,083	617	617	0%
2,007	28,703	1,636	1,636	0%
2,008	28,927	2,747	2,747	0%
2,009	19,501	3,649	3,649	0%
2,010	17,749	5,435	5,435	0%
2,011	24,019	10,907	10,907	0%
2,012	16,045	10,650	10,650	0%
2,013	18,402	16,339	16,339	0%
Total	213,122	52,135	52,135	0%

Tableau 3.23 – Estimations du modèle de Mack contre celles de Chain Ladder

3 Approche stochastique en provisionnement

On voit qu'en espérance les estimations des facteurs de développement λ_j du modèle de Mack sont égales à celles de Chain Ladder. Comme preuve, on a la vraisemblance du modèle :

$$\ln(l(x|\gamma, C, \sigma^2)) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} 0.5 \left(\ln \left(\frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2} \right) - \frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2} (\lambda_{i,j} - \exp(\gamma_j))^2 \right)$$

$$\frac{\partial \ln(l(x|\gamma, C, \sigma^2))}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{C_{i,j}}{\sigma_j^2} (\lambda_{i,j} - \exp(\gamma_j)) \exp(\gamma_j)$$

Pour maximiser la vraisemblance, $\frac{\partial \ln(l(x|\gamma, C, \sigma^2))}{\partial \gamma_j} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \lambda_{i,j} = \exp(\hat{\gamma}_j) \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$$

$$\Leftrightarrow \exp(\hat{\gamma}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \lambda_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} = \hat{\lambda}_j$$

Ce sont les estimateurs des facteurs de développement de Chain Ladder.

3.4 Bootstrap, une vision non paramétrique

En statistiques, les techniques de Bootstrap sont des méthodes d'inférence statistique modernes. Ces techniques ont pour but d'estimer des estimations sur une statistique comme la moyenne, la dispersion, des intervalles de confiance... Cette approche se base sur des simulations, tout comme la méthode de Monte-Carlo ou des méthodes numériques bayésiennes. Pourtant, elle n'a pas besoin d'autres informations supplémentaires que celles disponibles dans l'échantillon.

Le Bootstrap nous permet d'estimer les caractéristiques d'un échantillon. Pour ce qui concerne les échantillons de petite taille, cette méthode est préférée parmi les méthodes stochastiques de provisionnement car elle donne les meilleures estimations. En tant que méthode non paramétrique, elle a des conditions d'application moins strictes que les méthodes d'inférence statistique classiques.

Il s'agit d'une méthode récente non paramétrique introduite par Efron (1978). L'idée générale est un ré-échantillonnage des données. Le mot *Bootstrap* provient de l'expression anglaise

« *to pull oneself up by one's bootstrap* » qui signifie “se soulever en tirant sur les languettes de ses bottes ».

Elle permet d'obtenir d'autres échantillons à partir d'un échantillon observé, ce qui la rend très puissante. On pourrait aussi en déduire différentes mesures de risque comme VaR et TVaR, un intervalle de confiance et l'écart type, en essayant de déterminer une distribution des réserves.

3.4.1 Principe de Bootstrap

La méthode Bootstrap s'applique sur un modèle GLM où la distribution du terme d'erreur peut être log-normal, poisson sur-dispersée ou gamma. Le modèle de Poisson sur-dispersé est préféré parce que d'après Renshaw et Verall en 1988, les réserves estimées par ce modèle seront identiques à celles calculées par la méthode Chain Ladder, comme on l'a montré auparavant dans son application numérique. Ils ont proposé aussi un calcul analytique de l'erreur de prédiction dans le modèle ODP, mais sa formule était complexe. C'est pourquoi ils ont utilisé l'approche Bootstrap qui est plus directe et applicable à tous les modèles. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse aussi au modèle de Mack qui s'applique sur les triangles de paiements cumulés.

Le Bootstrap a trois caractéristiques essentielles :

- Il ne fait aucune hypothèse sur la distribution sous-jacente (non paramétrique).
- Il a recours à des calculs numériques très lourds.
- C'est la méthode préférée à des méthodes paramétriques lorsque celles-ci conduisent à des calculs inextricables.

Il existe dans le cadre d'un modèle GLM deux approches pour que le Bootstrap s'applique : le Bootstrap sur les observations et le Bootstrap sur les résidus. En théorie, les variables aléatoires utilisées par le Bootstrap devraient être indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Comme les observations ne vérifient pas souvent cette propriété (elles sont indépendantes mais non identiquement distribuées), on travaillera plutôt avec les résidus.

Le Bootstrap non paramétrique est basé en fait sur un échantillonnage avec remise de données indépendantes et identiquement distribuées, mais il ne crée pas de données.

La procédure du calcul pour obtenir une distribution par le Bootstrap non paramétrique :

- Préliminaire : On calcule les résidus pour le modèle ODP ou le modèle de Mack d'après les formules décrites ci-dessous dans 3.4.2 et 3.4.3.
- Procédure itérative : On échantillonne les résidus B fois. Plus le nombre d'itérations est important, meilleurs seront les estimations. Pour chaque itération $b = 1, \dots, B$, le processus se fait ainsi :
 - On crée un nouveau triangle de résidus $r_{i,j}^b$ par tirage aléatoire avec remise.
 - On calcule la table des pseudo-montants incrémentaux (ODP) ou des pseudo-facteurs de développement individuels (Mack) en inversant la formule des résidus. Il faut faire attention aux valeurs aberrantes qui peuvent s'expliquer par des résidus de hautes valeurs. Pourtant, on ne peut pas automatiquement les supprimer même si elles semblent aberrantes, car on pourrait accidentellement sous-estimer la variance de la distribution qu'on estime.
 - On ré-estime les paramètres du GLM par maximum de vraisemblance sur ce nouveau triangle.
 - On en déduit les montants incrémentaux futurs (ODP) ou les facteurs de développement individuels futurs (Mack).
 - On simule la *process error* :

$$\hat{X}_{i,j} \sim ODP(\tilde{m}_{i,j}, \phi \tilde{m}_{i,j}) \text{ pour le modèle ODP}$$

Pourtant, la distribution pourrait être très discrète quand ϕ est grand. Par conséquent, dans notre application numérique, on utilisera une loi Gamma de même moyenne et de même variance.

$$\hat{C}_{i,j+1} \sim N(\tilde{\lambda}_j \hat{C}_{i,j}, \hat{\sigma}_j^2 \hat{C}_{i,j}) \text{ par récurrence pour le modèle de Mark}$$

On pourrait aussi utiliser une loi Gamma de même moyenne et de même variance pour éviter des valeurs négatives simulées, surtout quand $\hat{\sigma}_j^2$ est grand.

- On estime les montants cumulés et on en déduit les provisions.

En itérant la procédure B fois, on aura un échantillon de B réalisations des montants des provisions. Puis on pourrait estimer la distribution et les quantiles sans aucune hypothèse de distribution a priori.

3.4.2 Bootstrap pour le modèle ODP

Les incréments $X_{i,j}$ du modèle de Poisson sur-dispersé suivent une loi de paramètre ϕ , de moyenne $E(X_{i,j}) = m_{i,j}$ et de variance $Var(X_{i,j}) = m_{i,j}\phi$.

Le modèle GLM nous permet de déterminer les résidus de Pearson comme décrits auparavant dans 3.3.1.3:

$$r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\phi}_j \hat{m}_{i,j}}}$$

D'après England et Verrall (1999), nous allons faire un ajustement de ces résidus. Cet ajustement nous permet de corriger le biais dans la comparaison des estimations analytiques et Bootstrap de l'erreur de prédiction. Le facteur d'ajustement est $\sqrt{\frac{N}{N-p}}$ avec N le nombre d'observations, $p = 2n - 1$ le nombre de paramètres estimés. Cet ajustement n'a pas beaucoup d'influence sur la moyenne des résidus, comme ces derniers sont en moyenne proches de zéro. C'est leur variance qui est le plus affectée.

On calcule la moyenne des résidus $r_M = \frac{\sum r_{i,j}}{N}$.

Les résidus finaux utilisés pour l'échantillonnage sont les $r'_{i,j} = r_{i,j} - r_M$.

Les résidus de Pearson sont préférés en partie parce qu'ils sont peu consommateurs en temps de calcul.

Tout d'abord, on calcule les résidus ajustés :

3 Approche stochastique en provisionnement

ri,k ODP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2.488	-0.585	-0.822	-1.409	-0.424	0.857	1.641	0.013	-0.574	
2,005	-1.617	0.257	-1.606	2.192	0.975	0.263	-1.157	0.247	0.607	
2,006	0.539	0.099	-0.093	-0.854	-0.202	1.053	-0.345	-0.219		
2,007	1.693	-0.262	-0.918	0.759	-0.849	0.010	-0.126			
2,008	-1.489	0.974	0.104	1.239	0.229	-1.863				
2,009	-0.567	0.334	0.720	-1.211	0.486					
2,010	-1.266	-0.322	2.070	-0.967						
2,011	-1.019	0.114	0.627							
2,012	1.240	-0.877								
2,013										

Tableau 3.24 – Résidus ODP ajustés

Puis on calcule les résidus finaux suivant la formule décrite ci-dessus :

ri,k ODP finaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2.484	-0.588	-0.826	-1.413	-0.427	0.854	1.637	0.010	-0.578	
2,005	-1.621	0.253	-1.610	2.189	0.971	0.260	-1.161	0.244	0.603	
2,006	0.535	0.095	-0.097	-0.858	-0.205	1.050	-0.349	-0.222		
2,007	1.690	-0.266	-0.921	0.756	-0.853	0.006	-0.129			
2,008	-1.492	0.970	0.101	1.235	0.225	-1.867				
2,009	-0.571	0.331	0.717	-1.215	0.483					
2,010	-1.269	-0.325	2.067	-0.970						
2,011	-1.022	0.111	0.624							
2,012	1.236	-0.880								
2,013										

Tableau 3.25 – Résidus ODP finaux

La figure des résidus obtenus montre qu'ils sont centrés autour de l'axe des abscisses et aléatoires.

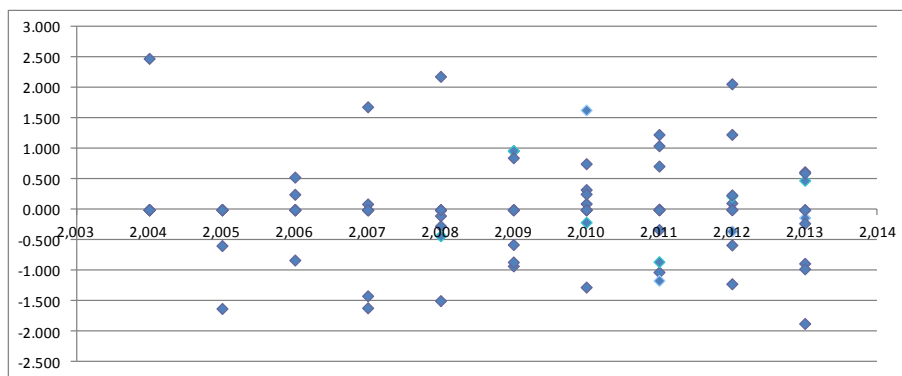


Figure 3.26 – Résidus ODP finaux

Puis on commence la procédure itérative : on échantillonne les résidus B fois. Pour chaque itération $b = 1, \dots, B$, le processus se fait ainsi :

- On crée un nouveau triangle de résidus $r_{i,j}^b$ par tirage aléatoire avec remise.

3 Approche stochastique en provisionnement

ri,k bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	0.244	0.717	-0.578	-0.097	-1.022	-0.826	-1.492	-0.578	-0.325	-0.097
2,005	1.235	-1.215	-1.621	-0.325	-0.129	0.483	-1.215	-0.266	0.624	
2,006	0.095	0.111	0.244	2.189	0.253	0.244	-1.269	-0.349		
2,007	-0.853	0.535	0.535	1.637	0.095	0.971	1.236			
2,008	-0.826	0.253	0.535	1.235	0.095	0.535				
2,009	-1.413	2.189	-0.921	0.970	-0.571					
2,010	-0.826	-0.266	0.717	0.717						
2,011	-0.266	-0.427	-0.571							
2,012	0.006	0.010								
2,013	-0.578									

Tableau 3.27 – Triangle des résidus ODP Bootstrap

- ii. On calcule la table des pseudos-montants incrémentaux en inversant la formule des résidus.

Xi,k bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2,462	5,682	2,810	2,625	724	657	-536	150	131	132
2,005	3,574	1,436	513	1,983	1,826	2,150	-324	337	604	
2,006	2,855	5,653	5,592	7,658	3,294	2,580	-290	455		
2,007	1,701	7,780	7,320	7,590	3,593	4,212	2,369			
2,008	1,768	7,123	7,372	6,811	3,621	3,533				
2,009	114	8,909	2,241	4,518	1,460					
2,010	835	3,453	5,092	3,776						
2,011	2,260	4,400	3,765							
2,012	1,807	3,615								
2,013	1,240									

Tableau 3.28 – Triangle des incréments ODP Bootstrap

- iii. On ré-estime les paramètres du modèle suivant la procédure décrite dans la partie 3.3.2.2.

Log-vrais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	xi ODP
2,004	8.81	8.81	18.52	10.88	2.57	1.55	3.28	3.16	1.17	0.26	10,330
2,005	9.59	5.80	5.40	18.95	9.36	0.69	3.71	-2.41	0.40		25,932
2,006	8.64	17.96	7.49	12.24	-2.33	6.26	3.04	4.37			31,942
2,007	8.99	24.24	34.84	5.24	24.24	17.21	6.77				26,571
2,008	16.99	44.42	21.37	26.08	14.69	10.91					26,874
2,009	2.76	17.38	23.83	17.77	1.45						14,806
2,010	5.89	36.27	0.34	15.73							20,493
2,011	20.55	33.38	8.14								21,265
2,012	9.71	14.00									12,278
2,013	3.86										9,351
Log-vrais	635.223										
yk ODP	13%	29%	22%	11%	8%	10%	3%	3%	0%	1%	

Tableau 3.29 – Estimation des paramètres ODP Bootstrap

- iv. On simule les incréments $\hat{X}_{i,j}$ de la partie inférieure qui suivent une loi Gamma comme expliqué auparavant dans 3.4.1. Puis on remplit la partie inférieure et on calcule la réserve pour chaque itération.

3 Approche stochastique en provisionnement

Ci,k ODP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	16,705
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466	23,269	23,345
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067	27,070	26,967	26,968
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180	26,068	27,394	27,462	27,479
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852	16,233	16,393	16,892	17,047	17,159
2,010	557	4,020	10,946	12,314	14,299	14,490	14,463	15,525	15,566	16,324
2,011	1,351	6,947	13,112	15,086	15,852	16,289	16,286	16,478	16,347	16,350
2,012	3,133	5,395	10,050	12,847	14,401	14,967	14,906	15,734	15,896	16,115
2,013	2,063	4,733	5,867	6,029	6,208	7,025	6,947	6,964	7,096	7,270

Tableau 3.30 – Triangle complété ODP Bootstrap

	Ci,n ODP	Ri ODP
2,004	18,834	0
2,005	16,760	56
2,006	24,497	1,031
2,007	29,951	2,884
2,008	27,022	842
2,009	17,395	1,543
2,010	16,576	4,262
2,011	24,833	11,721
2,012	15,388	9,993
2,013	8,537	6,474
Total	199,793	38,806

Tableau 3.31 – Estimation des réserves ODP Bootstrap

Puis on peut tracer une distribution empirique.

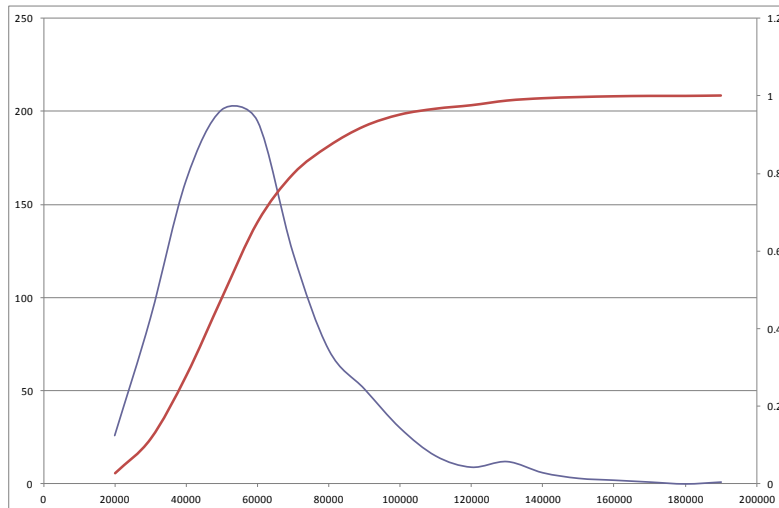


Figure 3.32 – Fonctions de densité et de répartition ODP Bootstrap pour 1000 itérations

Voici quelques statistiques intéressantes:

3 Approche stochastique en provisionnement

Moyenne	59,673
se	24,087
CV	40%
Min	16,925
Max	193,117
Quantile 10%	33,523
Quantile 50%	55,561
Quantile 75%	70,546
Quantile 90%	91,051

La procédure de Bootstrap pour le modèle ODP peut s'exprimer par une figure comme suivant :

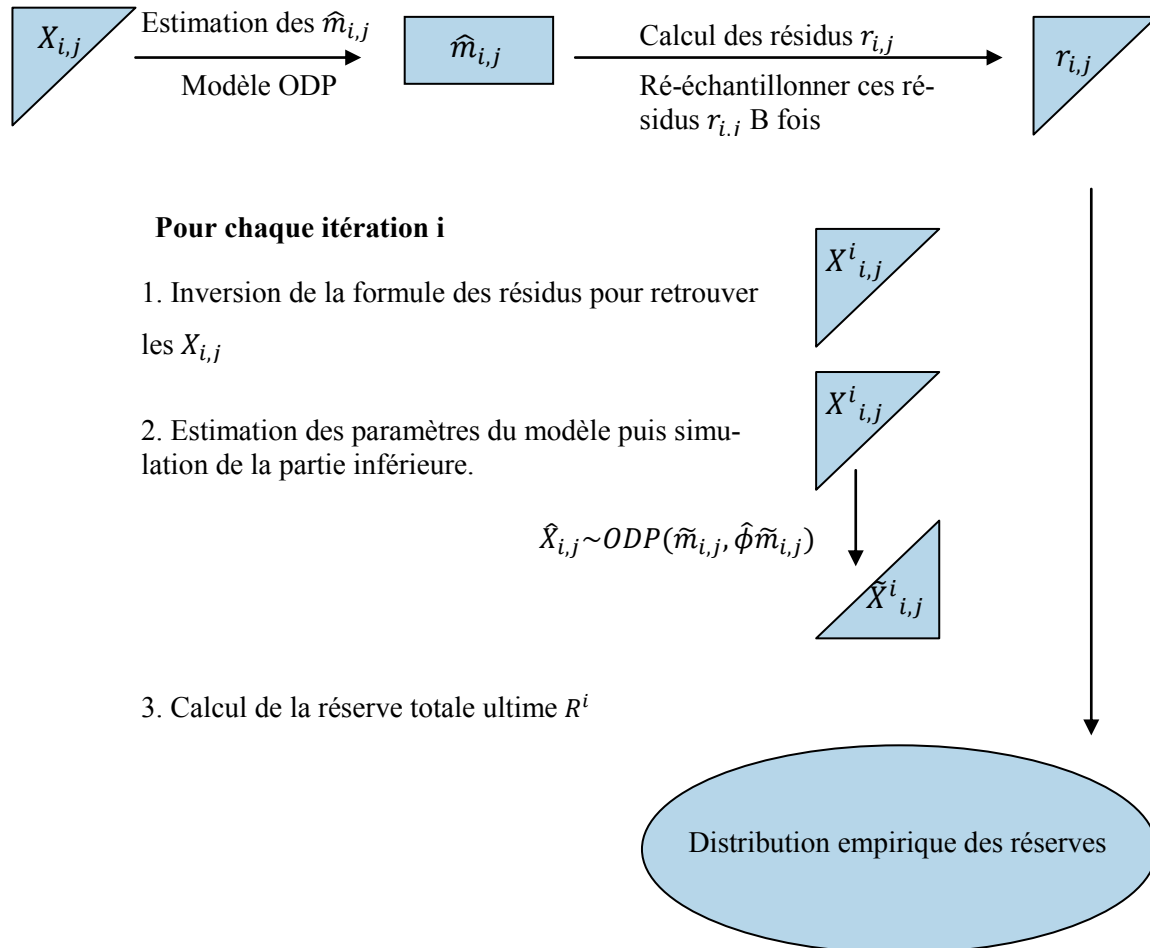


Figure 3.33 – Procédure de ODP Bootstrap

3.4.3 Bootstrap pour le modèle de Mack

Similairement au modèle ODP, dans un premier temps on estime $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\sigma}_j$. Puis on calcule les résidus normalisés.

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

On ajuste les résidus par le facteur $\sqrt{\frac{N}{N-p}}$, avec N le nombre d'observations, $p = 2n - 1$ le nombre de paramètres estimés.

On calcule la moyenne des résidus $r_M = \frac{\sum r_{i,j}}{N}$

Les résidus finaux utilisés pour le ré-échantillonnage sont les $r'_{i,j} = r_{i,j} - r_M$

Tout d'abord, on calcule les résidus ajustés :

ri,k Mack	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-0.607	-0.889	-0.809	-0.377	0.973	1.633	0.000	-0.964		
2,005	2.447	-0.766	2.130	1.742	0.222	-1.096	1.337	1.034		
2,006	-0.134	-0.246	-0.520	-0.195	1.013	-0.343	-1.101			
2,007	-0.457	-0.894	0.402	-1.432	0.001	-0.123				
2,008	1.209	0.101	0.667	-0.019	-1.726					
2,009	0.311	0.495	-0.735	0.857						
2,010	0.632	2.238	-0.627							
2,011	0.500	0.706								
2,012	-0.454									
2,013										

Tableau 3.34 – Résidus de Mack ajustés

Puis on calcule les résidus finaux suivant la formule décrite ci-dessus :

ri,k Mack finaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-0.746	-1.029	-0.948	-0.517	0.834	1.494	-0.140	-1.104		
2,005	2.308	-0.905	1.990	1.602	0.082	-1.235	1.198	0.895		
2,006	-0.274	-0.385	-0.659	-0.335	0.873	-0.482	-1.240			
2,007	-0.596	-1.034	0.263	-1.572	-0.138	-0.262				
2,008	1.069	-0.039	0.527	-0.158	-1.865					
2,009	0.172	0.356	-0.875	0.718						
2,010	0.493	2.099	-0.767							
2,011	0.361	0.567								
2,012	-0.594									
2,013										

Tableau 3.35 – Résidus de Mack finaux

La figure des résidus obtenus montre qu'ils sont centrés autour de l'axe des abscisses et aléatoires.

3 Approche stochastique en provisionnement

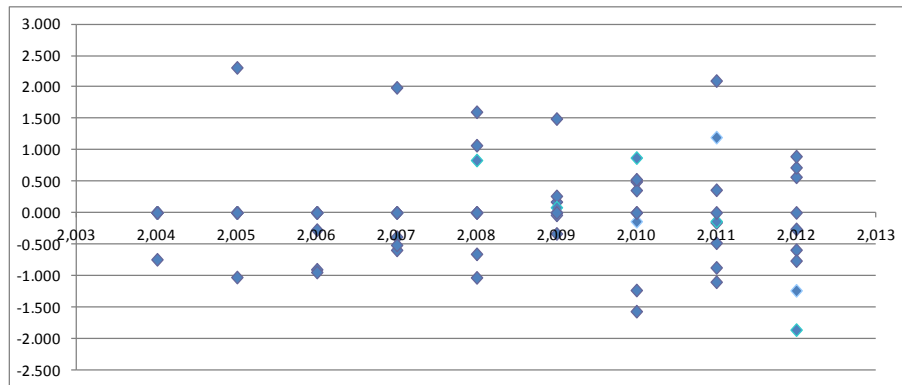


Figure 3.36 – Résidus de Mack finaux

Puis on commence la procédure itérative : on échantillonne les résidus B fois. Pour chaque itération $b = 1, \dots, B$, le processus se fait ainsi :

i. On crée un nouveau triangle de résidus $r_{i,j}^b$ par tirage aléatoire avec remise.

$r_{i,k}$ bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-1.865	0.527	1.069	0.718	0.082	-1.104	0.361	0.527	-1.029	
2,005	1.990	-0.875	-0.875	0.834	-0.140	-0.482	-0.659	2.308		
2,006	0.356	-1.029	-0.140	0.718	0.834	0.361	-0.335			
2,007	0.873	-0.482	-0.039	0.263	-1.034	0.493				
2,008	1.198	0.361	0.082	-0.594	-0.767					
2,009	-1.572	-0.596	1.494	-0.140						
2,010	-0.767	1.602	-1.572							
2,011	-0.594	2.099								
2,012	1.198									
2,013										

Tableau 3.37 – Triangle des résidus Mack Bootstrap

ii. On calcule la table des pseudos-facteurs de développement individuels en inversant la formule des résidus.

$\lambda_{i,k}$ bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-1.638	1.825	1.550	1.224	1.121	0.988	1.036	1.026	0.993	
2,005	37.021	1.158	0.947	1.236	1.100	1.018	1.028	1.057		
2,006	4.072	1.246	1.239	1.217	1.180	1.057	1.031			
2,007	5.043	1.467	1.262	1.186	1.040	1.061				
2,008	9.380	1.752	1.289	1.140	1.061					
2,009	-4.113	1.365	1.647	1.162						
2,010	-2.718	2.503	0.862							
2,011	0.156	2.500								
2,012	6.766									
2,013										

Tableau 3.38 – Triangle des facteurs de développement Mack Bootstrap

iii. On ré-estime les paramètres du modèle suivant la procédure décrite dans la partie précédente 3.3.3.2 et on en déduit les facteurs de développement futurs pour chaque année de développement.

3 Approche stochastique en provisionnement

Log-vrais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-3.903	0.904	-0.050	2.572	2.322	2.278	4.842	4.082	-0.436	
2,005	-4.654	0.116	0.890	2.473	2.240	2.827	4.312	2.824		
2,006	-1.111	0.244	1.320	2.746	2.451	3.157	4.722			
2,007	-0.883	0.874	1.295	2.851	1.473	3.203				
2,008	-2.102	1.021	1.206	2.211	1.864					
2,009	-3.297	0.541	-0.859	2.476						
2,010	-2.470	-0.477	0.876							
2,011	-1.967	-0.972								
2,012	-1.418									
2,013										
Log-vrais	42.614									

γ_k Mack	1.492	0.529	0.108	0.186	0.139	0.047	0.035	0.029	0.041	
λ_k Mack	4.444	1.698	1.114	1.204	1.149	1.048	1.036	1.030	1.042	

Tableau 3.39 – Estimation des paramètres Mack Bootstrap

- iv. On simule les $\hat{C}_{i,j}$ de la partie inférieure qui suivent une loi Normale comme cela a été expliqué auparavant dans 3.4.1. Puis on complète le triangle et on calcule la réserve pour chaque itération.

Ci,k Mack	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2,005	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	17,215
2,006	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466	23,264	23,848
2,007	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067	28,076	29,107	30,618
2,008	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180	28,894	29,775	30,247	30,708
2,009	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852	19,110	21,089	21,913	22,201	22,921
2,010	557	4,020	10,946	12,314	14,810	17,081	18,638	19,318	19,389	20,736
2,011	1,351	6,947	13,112	18,406	21,881	25,527	27,184	28,239	29,110	30,645
2,012	3,133	5,395	14,916	16,697	20,684	25,497	27,308	28,241	29,428	30,434
2,013	2,063	1,292	4,500	4,305	6,178	7,938	8,688	8,963	9,428	9,618

Tableau 3.40 – Triangle complet Mack Bootstrap

	Ci,n Mack	Ri Mack
2,004	18,834	0
2,005	17,215	511
2,006	23,848	382
2,007	30,618	3,551
2,008	30,708	4,528
2,009	22,921	7,069
2,010	20,736	8,422
2,011	30,645	17,533
2,012	30,434	25,039
2,013	9,618	7,555
Total	235,577	74,590

Tableau 3.41 – Estimation des réserves Mack Bootstrap

Puis on peut tracer une distribution empirique :

3 Approche stochastique en provisionnement

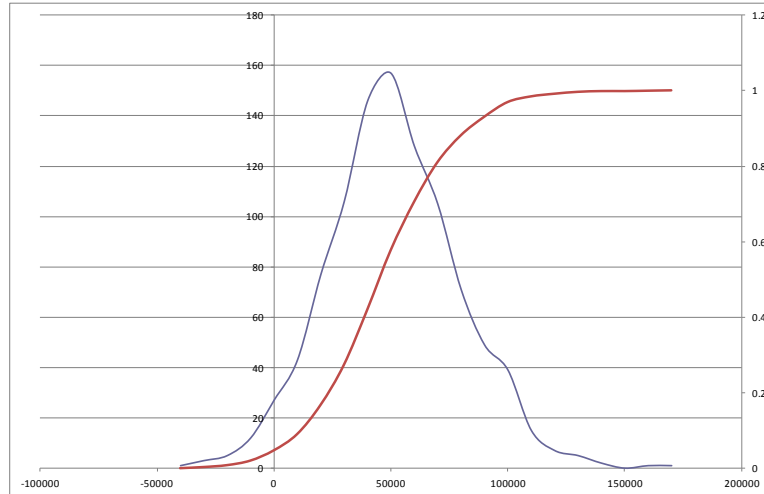


Figure 3.42 – Fonctions de densité et de répartition Mack Bootstrap avec 1000 itérations

Comme on utilise l'hypothèse que les paiements cumulés suivent la loi Normale dans le modèle de Mack, on peut trouver des valeurs négatives qui se sont simulées. Plus σ^2_j est élevé, plus nombreuses sont les valeurs négatives simulées. Pour éviter cette situation, on peut utiliser la loi Gamma de même moyenne et de même variance si nécessaire.

Voici quelques statistiques intéressantes:

Moyenne	51,198
se	28,402
CV	55%
Min	- 40,771
Max	172,280
Quantile 10%	16,360
Quantile 50%	49,861
Quantile 75%	68,997
Quantile 90%	88,079

3 Approche stochastique en provisionnement

La procédure de Bootstrap pour le modèle de Mack peut s'exprimer graphiquement comme suivant :

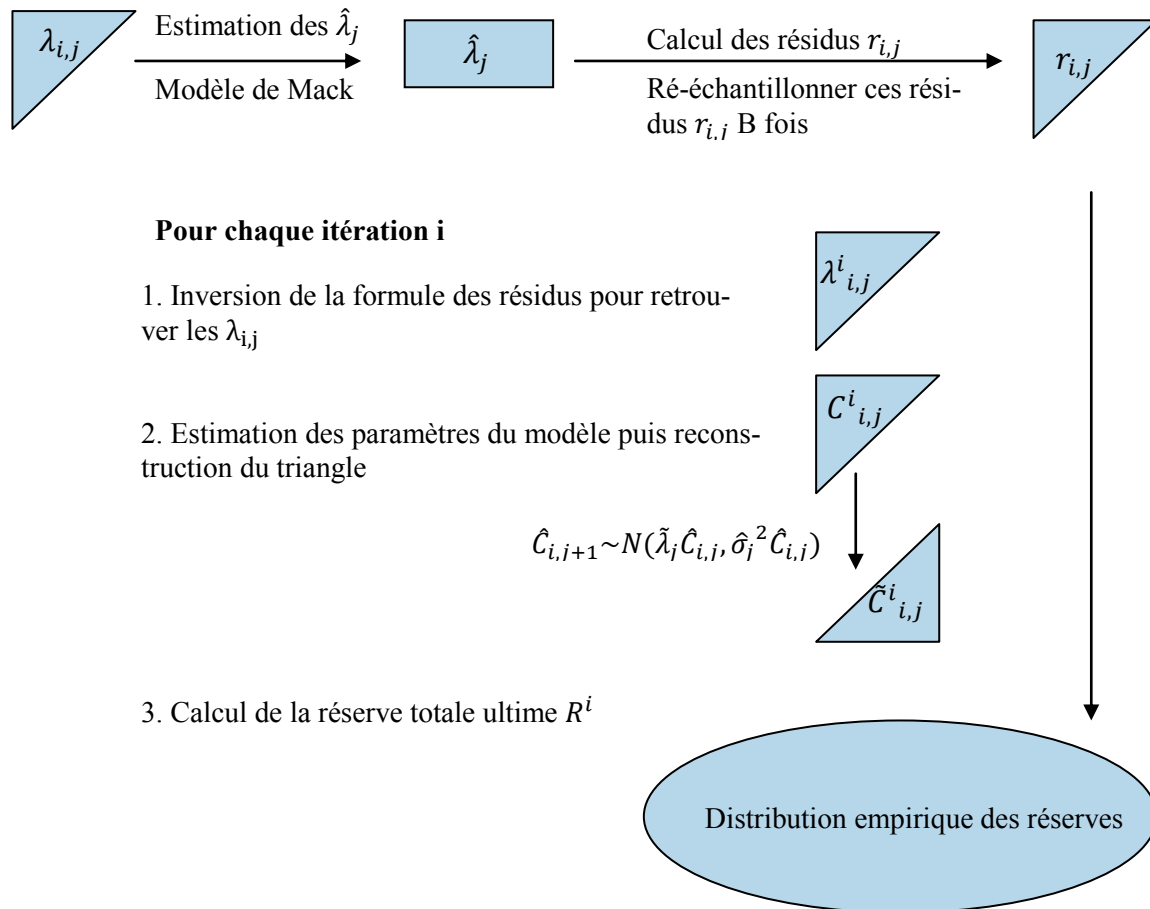


Figure 3.43 – Procédure de Mack Bootstrap

4 Etude empirique

Dans le modèle ODP, comme $V(X_{i,j}) = \phi m_{i,j} = \phi x_i y_j$ dans sa forme multiplicative, les y_j doivent être positifs. Cela signifie que la somme des incréments d'une année de développement ne peut être négative. Pourtant, les triangles de charges des branches d'activités de PartnerRe ne vérifient pas souvent cette propriété, non seulement sur des branches à forts recours ou sur des triangles nets de rétrocession, mais aussi en brut.

D'après la littérature du provisionnement, il existe quelques traitements pour corriger ce problème. On peut par exemple ajouter une « petite » constante au triangle incrémental afin que tous les incréments soient positifs et soustraire cette constante des projections à la fin des simulations. Ou bien on peut aussi faire le passage des montants négatifs en valeur absolue. Pourtant ces ajustements doivent être utilisés avec précaution et validés au cas par cas. C'est principalement pour cette raison que ce modèle ne sera pas choisi pour modéliser des distributions des réserves du portefeuille en question.

Cette étude a pour but d'examiner le risque de provisionnement du portefeuille d'Asie de PartnerRe. Pour de multiples raisons, la charge ultime diffère matériellement des estimations initiales. C'est surtout le cas pour les ultimes des branches à développement long. L'estimation de la charge finale évolue au fil du temps en fonction de la connaissance acquise sur l'exposition de la compagnie, les sinistres encourus et le modèle d'estimation lui-même. D'ailleurs, il est toujours possible qu'un nouveau sinistre émerge même s'il n'y a plus de réserves dédiées pour cette branche. Il y a donc toujours un risque de provisionnement.

On va utiliser par la suite l'approche Mack Bootstrap sur les triangles de paiement cumulés de quelques branches d'activités afin de déterminer ses distributions des réserves. Ce choix est justifié par de multiples raisons :

- Cette méthode est bien documentée dans la littérature actuarielle, donc il sera plus simple de trouver des supports, le savoir-faire ainsi que des exemples numériques, benchmark de résultats.
- Il est déterminant de disposer de données suffisantes pour traiter cette problématique suivant cette approche. Cela ne pose pas de problèmes dans ce cas. De plus, on aura besoin de moins de jugements actuariels.

- Si ces distributions doivent être réexaminées par un cabinet actuariel indépendant, il est fort possible que ce dernier utilise la même méthode.
- C'est la pratique commune de l'industrie d'utiliser les triangles de paiements pour considérer le risque de provisionnement. Dans le futur, on essaiera d'utiliser d'autres méthodes (par exemple l'approche bayésienne Bootstrap) pour compléter ce modèle.

Pourtant, il faut préciser aussi des limites de cette approche. En fait l'application du modèle de Paid Mack Bootstrap est le premier pas pour comprendre l'incertitude existant dans l'historique de sinistralité. En pratique, cette incertitude est compensée partiellement par des facteurs tels que les provisions dossier-dossier, l'IBNR spécifique au cas par cas, les avis professionnels du service d'indemnisation ou de souscription... Ces facteurs malheureusement ne sont pas inclus dans ce modèle. Il serait souhaitable et recommandé d'inclure ces facteurs dans la prochaine version de ce modèle.

On définit aussi ici le coefficient de variation par le rapport entre la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (s.e pour *squared error*), qui est une mesure de l'incertitude de l'estimation de « Best estimate » $\hat{R}$, et l'espérance de ce « Best estimate ».

$$\text{Coefficient de variation (CV)} = \frac{s.e(\hat{R})}{E(\hat{R})}$$

C'est un indicateur de la qualité d'estimation du « Best estimate ». Plus ce coefficient est faible, plus l'amplitude de l'intervalle de confiance des « Best estimate » est étroite et plus la valeur estimée du « Best estimate » est précise.

4.1 Spécialités liées à la réassurance

La réassurance a des spécialités comparée à l'assurance. Ceci entraîne des différences dans le traitement des sinistres et dans la comptabilité. Le profil de risque n'est pas non plus le même que celui d'un assureur. C'est pourquoi la forme de la distribution des sinistres des branches à développement long d'un réassureur a parfois une queue plus épaisse comparée à celle d'un assureur, par exemple. Il nous faut donc bien comprendre ces spécialités afin de pouvoir évaluer proprement l'incertitude d'un portefeuille d'un réassureur.

En fait un réassureur acquiert des informations de la sinistralité par le biais d'un assureur, qui acquiert lui-même ces informations à partir des assurés. Ainsi, le délai de la réception

d'informations est beaucoup plus long que celui de la cédante, ce qui est à l'origine de beaucoup de difficultés. Cela génère aussi des irrégularités supplémentaires dans les triangles de sinistralité en question. Par exemple, dans la plupart des traités proportionnels, les comptes ne sont pas complets lors de la clôture de fin d'année. Cela veut dire que l'information sur la sinistralité n'est pas parvenue complètement de la part de la cédante. Le réassureur devrait estimer les provisions techniques en prenant en compte ce fait. PartnerRe publie deux fois par an les triangles de paiements pour le compte des parties externes, une fois à la fin de l'année et une autre fois à la fin du mois de juin de l'année suivante avec les mêmes triangles (mais mis à jour avec les informations supplémentaires reçues pendant les six mois écoulés entre ces deux dates). Ainsi, plus l'assureur transmet rapidement les informations sur la sinistralité, meilleure sera la qualité des estimations des réserves produites par le service de provisionnement du réassureur.

D'ailleurs, les informations que reçoit un réassureur sont tronquées : la cédante ne fait savoir au réassureur que la sinistralité entrant dans les termes du traité de réassurance concernée. Par exemple, pour les traités proportionnels, le réassureur ne reçoit pas tous les détails des sinistres individuels, mais seulement l'information sur l'ensemble des sinistres. Les dates de la survenance des sinistres individuels sont donc perdues. Pour les traités non proportionnels, seuls les sinistres dépassant un certain seuil sont connus du réassureur. Ce manque d'informations sur la sinistralité peut accroître l'incertitude et générer plus d'irrégularité dans les triangles qui servent à la base de données pour l'estimation des réserves techniques.

Il faut noter que les méthodes déterministes et stochastiques qu'on a abordées auparavant seront appliquées à des montants bruts de rétrocession. Les montants des réserves de la rétrocession ne représentent qu'approximativement 3% des montants des provisions en brut pour le portefeuille global de PartnerRe. Donc on voit bien que l'impact de la rétrocession n'est pas significatif et les distributions des réserves en brut représentent bien celles des réserves après rétrocession.

4.2 Ajustements pratiques au modèle

4.2.1 Simplification de la simulation

La ré-estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance à chaque itération est faite avec le Solveur sous Excel, ce qui malheureusement prend beaucoup de temps,

notamment pour le modèle ODP. C'est la raison pour laquelle on a fait les simulations avec seulement 1000 itérations dans les exemples numériques de Bootstrap. Il faudra par la suite essayer de trouver une autre façon de faire pour optimiser le programme.

Mais pourquoi utilise-t-on le logiciel Excel et le langage VBA pour la simulation et non pas d'autres langages tels que R ou SAS, ou encore Igloo ? La raison est simple. Chez PartnerRe, Excel et VBA restent les outils de travail préférés. L'outil de l'analyse de provisionnement de PartnerRe a été également programmé avec Excel et VBA. D'autres programmes de traitement des données chez PartnerRe ont aussi été réalisés avec des codes VBA pour importer et catégoriser toutes les informations des traités suivant une segmentation actuarielle prévue. A la différence des langages SAS ou R qui ne sont maîtrisés que par quelques membres de l'équipe de provisionnement, le logiciel Excel et le langage VBA sont compréhensibles par tout le monde. Une fois que le programme de simulation sera terminé et sera réutilisé par d'autres actuaires au sein de PartnerRe, on pourra être sûr que ces derniers comprendront les codes sans aucune difficulté.

Pour simplifier les modèles Bootstrap et accroître la vitesse de la simulation, on devra traiter le problème du Solveur. Dans le cas du modèle de Mack, on a vu que les estimations étaient en moyenne équivalentes aux estimations du modèle de Chain Ladder. Au lieu de ré-estimer les paramètres du GLM par la méthode de maximum de vraisemblance sur des pseudo-facteurs de développement individuels provenant du nouveau triangle des résidus $r_{i,j}^b$, et finalement en déduire les facteurs de développement λ_j grâce à la fonction de lien $\ln(\lambda_j) = \gamma_j$, comme l'expliquent les tableaux 3.38 et 3.39, on applique la méthode Chain Ladder au nouveau triangle :

$\lambda_{i,k}$ bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002	4.225	1.655	1.001	1.128	1.214	1.006	1.035	1.007	0.991	
2,003	17.924	1.549	1.092	1.146	1.089	1.028	1.041	1.002		
2,004	2.523	1.832	1.393	1.177	0.988	1.017	1.031			
2,005	5.043	1.572	1.198	1.145	1.025	1.007				
2,006	5.624	1.351	1.241	1.140	1.049					
2,007	12.496	2.087	1.122	1.284						
2,008	1.043	1.479	1.498							
2,009	-1.542	2.124								
2,010	0.153									
2,011										
λ_{k} Mack	3.858	1.698	1.234	1.166	1.060	1.014	1.035	1.005	0.991	

Tableau 4.1 – Simplification de la méthode de simulation pour le modèle de Mack

Puis on simule les $\hat{C}_{i,j}$ de la partie inférieure qui suivent une loi Normale comme expliqué auparavant dans 3.4.1.

4.2.2 Traitement des facteurs de développement non adaptés

Parfois, les triangles sont trop courts. Typiquement, c'est souvent le cas pour les branches de développement long. L'historique n'est pas assez suffisant pour refléter le règlement total des sinistres. Dans ce cas, on effectue un lissage pour prolonger le développement du triangle. Un lissage des facteurs de développement s'utilise aussi pour lisser les instabilités en queue de développement. D'ailleurs, on pourrait supprimer des facteurs de développement individuels de l'estimation qui correspondent à une évolution trop atypique. Il faut être en mesure de pouvoir justifier ces modifications et de ne pas réduire artificiellement la volatilité.

Si on juge qu'il est nécessaire de supprimer quelques facteurs de développement, on peut aussi enlever les résidus concernés lors du ré-échantillonnage par Bootstrap.

$\lambda_{i,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	1.650	1.319	1.082	1.147	1.195	1.113	1.033	1.003	1.009	
2,005	40.425	1.259	1.977	1.292	1.132	0.993	1.043	1.033		
2,006	2.637	1.543	1.163	1.161	1.186	1.029	1.026			
2,007	2.043	1.364	1.349	1.102	1.113	1.038				
2,008	8.759	1.656	1.400	1.171	1.009					
2,009	4.260	1.816	1.105	1.226						
2,010	7.217	2.723	1.125							
2,011	5.142	1.887								
2,012	1.722									
2,013										

Tableau 4.2 – Enlèvement des facteurs atypiques

$r_{i,k}$ Mack finaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-0.983	-1.012	-1.128	-0.500	0.850	1.510	-0.123	-1.000	0.877	
2,005		-0.889		1.619	0.099	-1.219	1.214	0.986		
2,006	-0.232	-0.369	-0.601	-0.318	0.889	-0.466	-1.224			
2,007	-0.728	-1.017	0.963	-1.555	-0.122	-0.246				
2,008	1.920	-0.022	1.405	-0.142	-1.849					
2,009	0.461	0.372	-0.993	0.734						
2,010	0.958	2.115	-0.824							
2,011	0.766	0.583								
2,012	-0.761									
2,013										

Tableau 4.3 – Enlèvement des résidus finaux correspondant aux facteurs atypiques

ri,k bootstrap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	-0.728	0.099	-0.601	1.510	-0.761	0.734	1.619	-0.123	-1.000	
2,005		2.115		-0.889	-1.555	1.214	0.850	0.958		
2,006	-0.728	-0.601	0.889	1.510	-0.983	1.920	-1.128			
2,007	-1.219	-0.142	0.099	-0.122	-0.728	1.214				
2,008	-1.224	0.099	-0.993	-0.122	0.766					
2,009	0.734	-1.000	-1.012	0.583						
2,010	-1.128	-1.555	-1.224							
2,011	0.766	2.115								
2,012	2.115									
2,013										

Tableau 4.4 – Enlèvement des résidus Bootstrap correspondant aux facteurs atypiques

En pratique, on lisse très souvent les facteurs de développement pour ne pas montrer les instabilités des données. Il existe plusieurs méthodes de lissage.

Soit on calcule des λ_j sur des triangles de toutes les années de souscription disponibles, des cinq dernières années, des trois dernières années, puis on sélectionne au cas par cas des λ_j appropriés basés sur ces références. C'est effectivement la méthode intégrée dans l'outil de provisionnement de PartnerRe.

Yearly LDFs

the old years and the last diagonal are systematically excluded from estimators

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W-Ave. all years	3.926	1.746	1.931	2.220	1.302	1.130	1.117	1.063	1.040	1.002
last 5 years	2.661	1.117	1.695	1.897	1.397	1.130	1.117	1.063	1.040	1.002
last 3 years	2.661	1.055	1.507	2.392	1.692	1.046	1.120	1.063	1.040	1.002
PQ selection	4.047	1.864	2.049	2.191	1.305	1.134	1.117	1.076	1.040	1.025
CQ selection	4.047	1.864	2.049	2.191	1.305	1.134	1.117	1.076	1.040	1.025

Tableau 4.5 – Sélection des facteurs de développement appropriés

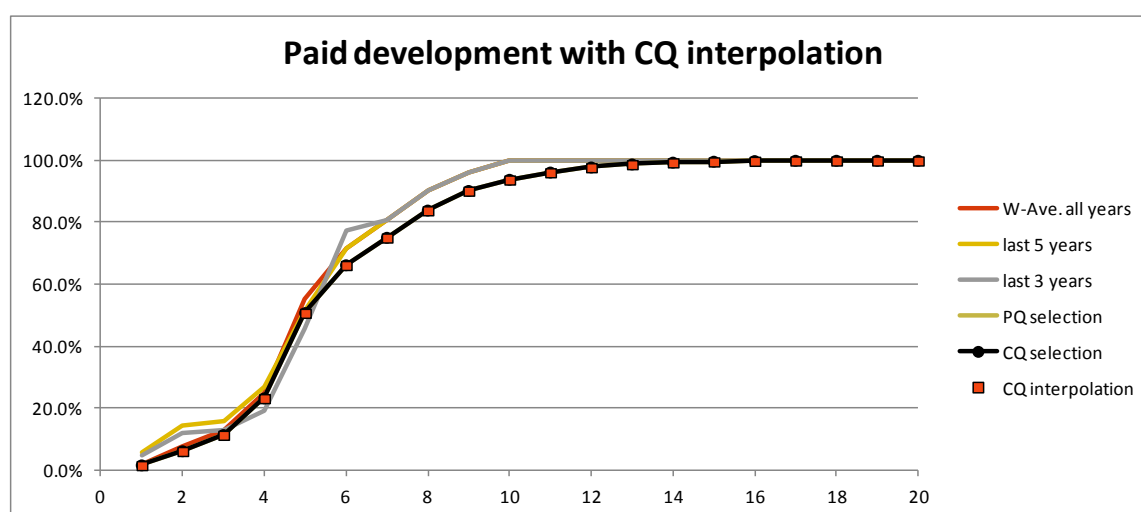


Figure 4.6 – Cadences des développements appropriés

Soit on utilise une méthode paramétrique pour calculer des λ_j lissés (par l'intermédiaire des paramètres a et b ; ses valeurs sont en fonction de $\ln(\lambda_k) - 1$) puis on sélectionne des λ_j finaux.

λ_k	2.817	1.624	1.223	1.172	1.113	1.042	1.033	1.017	1.009	
$\ln(\lambda_k-1)$	0.597	-0.472	-1.502	-1.762	-2.177	-3.172	-3.403	-4.078	-4.687	
a	2.230									
b	-0.619									
λ_k lissés	2.200	1.646	1.348	1.187	1.101	1.054	1.029	1.016	1.008	1.005
λ_k finaux	2.817	1.624	1.223	1.172	1.113	1.042	1.033	1.016	1.008	1.005

Tableau 4.7 – Méthode paramétrique pour sélectionner des facteurs appropriés

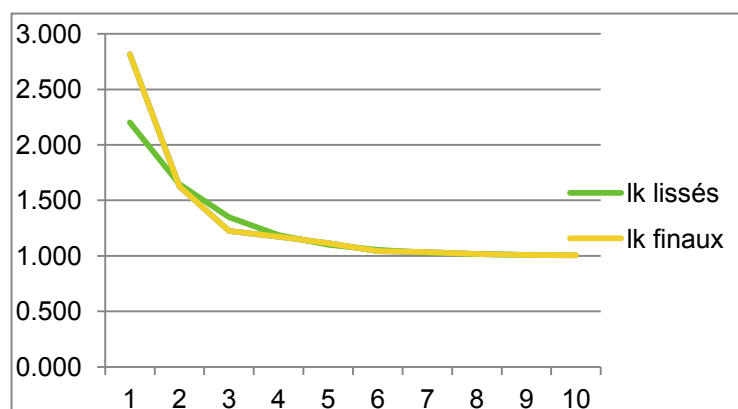


Figure 4.8 - Méthode paramétrique pour sélectionner des facteurs appropriés

4.2.3 Recentrage de la distribution et autres

Les modèles de Mack ou ODP vont donner une distribution centrée en moyenne sur l'estimation de Chain Ladder. En pratique, cette méthode n'est pas la seule qui est utilisée par l'équipe de provisionnement. La procédure pour calculer les provisions techniques est effectivement plus sophistiquée et raffinée. Le montant de réserves réellement comptabilisé pourrait donc être différent de la moyenne estimée par ces méthodes stochastiques. Par conséquent, il faut recentrer la distribution estimée sur le montant réellement calculé par le service de provisionnement.

Il existe plusieurs façons de traiter ce problème. Soit on utilise la méthode additive : $C' = C + R - E(C)$ avec R le montant de provisions réellement estimé par PartnerRe et $E(C)$ la moyenne de l'estimation de Chain Ladder. En fait, on va faire une translation de la distribution ; la variance sera conservée mais le coefficient de variation ne restera pas le même. Soit

on utilise la méthode multiplicative : $C' = \frac{C-E(C)}{E(C)} R + R$. On va alors faire une homothétie de la distribution ; le coefficient de variation sera conservé mais la variance ne restera pas la même.

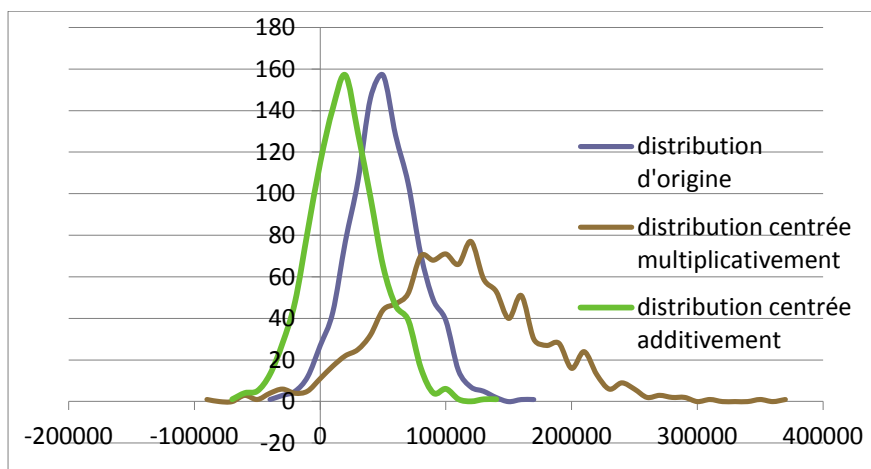


Figure 4.9 – Méthodes additive et multiplicative

La méthode additive est plus adaptée si $R \leq E(C)$, et en revanche, l'approche multiplicative est choisie si $R \geq E(C)$. Le montant de réserves estimé par l'équipe de provisionnement de PartnerRe n'est pas systématiquement supérieur ou inférieur à la moyenne de l'estimation de Chain Ladder. La méthode à utiliser est donc décidée au cas par cas. D'ailleurs, il faut être vigilant car si la différence entre R et $E(C)$ est trop importante, cela signifie que les méthodes utilisées par le service de provisionnement sont trop éloignées de l'approche Chain Ladder, et donc que les modèles de Mack et ODP ne sont plus adaptés.

Dernièrement, la technique de Bootstrap non paramétrique n'est pas très pertinente quand on ne dispose que d'un échantillon de faible taille. Prenons l'exemple d'un réassureur qui vient de s'engager dans une nouvelle branche d'activité, l'historique de la sinistralité de cette branche n'est donc pas assez grand pour utiliser cette technique. Dans ce cas, on peut employer un Bootstrap paramétrique. Au lieu de ré-échantillonner les résidus, on les simule à partir d'une loi (Normale, Log-normale, Gamma... selon les résultats des tests d'adéquation). Le principe est ensuite exactement le même que pour le Bootstrap non paramétrique. Il faut noter aussi que les queues de distribution peuvent être sous-estimées quand on utilise un Bootstrap non paramétrique sur un petit triangle de résidus.

Au lieu de créer un nouveau triangle de résidus Mack Bootstrap $r_{i,j}^b$ par tirage aléatoire avec remise comme ce qui a été présenté dans le tableau 3.37, on pourrait simuler ces résidus à par-

tir de la loi Normale. Après, on peut aussi faire un QQ plot pour vérifier la pertinence de cette hypothèse.

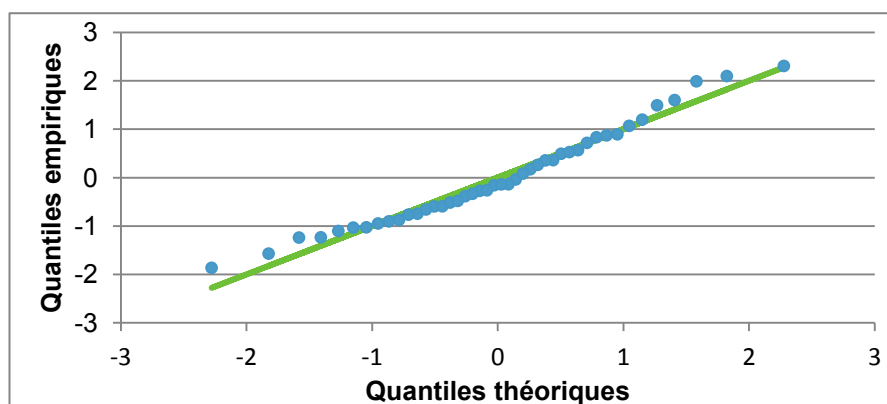


Figure 4.10 – QQ plot résidus

4.3 Présentation des résultats

Nous allons présenter ci-dessous la répartition des réserves en fonction des branches d'activités du portefeuille d'Asie de PartnerRe. Après des discussions au sein de l'équipe de provisionnement, on a décidé de modéliser les distributions des branches à développement court (*Short-tail*, ce qui consiste en *Property*, *Cat* et *Agriculture*), à développement moyen (*Medium-tail*, ce qui consiste en *Marine*, *Energy Onshore*, *Energy Offshore* et *Credit & Surety*), à développement long (*Long-tail*, ce qui consiste en *Casualty*, *Automobile* et *Engineering*) en fonction de la forme de développement de sinistres. Le Japon est un des plus grands marchés pour le *Cat* business, mais ces traités sont souscrits à partir du bureau des Bermudes. Par conséquent, sa part de primes dans le portefeuille d'Asie n'est pas importante.

Cette segmentation est indispensable pour pouvoir mener des études de provisionnement adéquates en utilisant le modèle Paid Mack Bootstrap comme discuté auparavant. Ce modèle repose sur la régularité des triangles, ce qui rend nécessaire une bonne segmentation pour que les provisions soient justes et proches de la réalité. On peut toujours essayer d'estimer, par exemple, la distribution de chaque groupe *Automobile*, *Casualty* ou *Engineering*. Pourtant, dans ce travail, on les regroupe en une distribution à développement long pour que le volume de données soit suffisamment important et que par conséquent les estimations soient meilleures. La règle ici est de trouver le juste milieu, conciliant à la fois la segmentation la plus

précise possible (pour atteindre l'homogénéité) et un volume suffisamment important pour rendre l'estimation fiable.

Il existe divers types de risques dans le portefeuille d'Asie, mais certaines branches n'ont pas assez de données de primes ou de sinistres pour qu'on puisse les étudier à part. Si le montant de primes d'une branche n'est pas significatif, cette branche ne présente pas beaucoup de risques et donc ne vaut pas une étude approfondie concernant l'estimation de sa distribution. Si le triangle de règlements ne comprend pas beaucoup de données, l'application de la méthode Bootstrap sur ce triangle ne donne pas une bonne estimation des réserves. C'est pourquoi on a décidé de regrouper les affaires du portefeuille en question en 3 groupes.

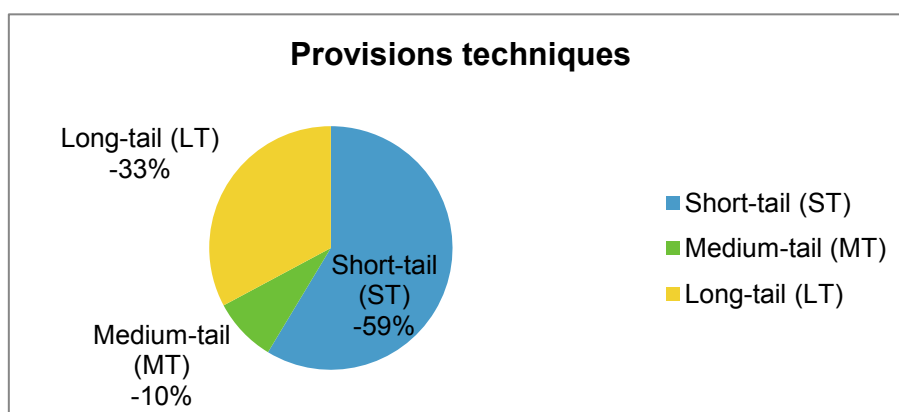


Figure 4.11 – Répartition des réserves du portefeuille d'Asie

Pour chaque triangle de règlements, on présente les dix années de souscription les plus récentes. On pense que ce choix donnera un historique raisonnable pour évaluer le modèle de développement de sinistres au sein du portefeuille en question. Il faut noter aussi que pour quelques sinistres ces développements pourraient dépasser le seuil de 10 ans, mais leurs impacts sur les courbes de distribution estimées ne sont pas très significatifs. Ce choix est aussi pris dans la publication des triangles de règlements et de charges de PartnerRe à la fin de chaque année destinée aux lecteurs externes.

Tous les chiffres présentés ci-dessous sont en US\$ '000.

4.3.1 Distribution de la branche à développement long

La simulation Bootstrap a été effectuée avec des jeux de 10 000 itérations, de manière à aboutir à des résultats suffisamment stables. La distribution reçue a été recentrée avec la méthode

multiplicative expliquée dans 4.2.3. Il faut noter que cette méthode est appropriée si $R \geq E(C)$. Ici le « Best estimate » de cette branche estimée par le service de provisionnement est très proche de la moyenne des réserves estimées par le Bootstrap, ce qui prouve que le modèle Paid Mack Bootstrap est très adapté en modélisant la distribution de cette branche. D’ailleurs, cela implique que les deux méthodes sont pertinentes, mais on va quand même utiliser la méthode multiplicative, et ce pour être cohérent avec le choix du portefeuille entier où la méthode multiplicative est plus adaptée.

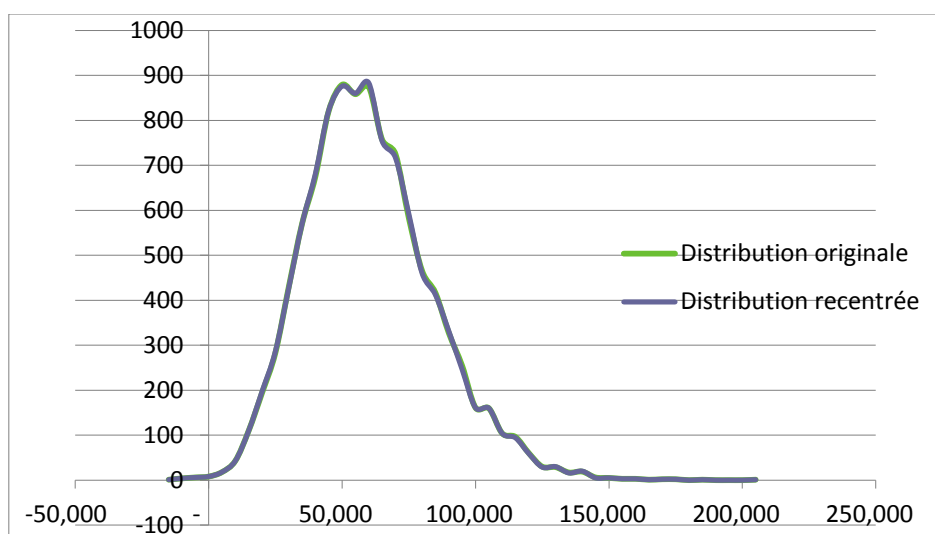


Figure 4.12 – Recentrage de la distribution de la branche « Long-tail »

En pratique, le montant de “booked reserves” calculé à PartnerRe lors de la clôture de comptes de chaque fin d’année comprend d’une part le « Best estimate » (les ibnr estimés à « Best estimate », les suspens, les acr (*additional case reserve*), les ibnr spécifiques pour des sinistres graves quand nécessaire), et d’autre part une marge de risque pour couvrir la volatilité existante (provisionnée par prudence et appelée le « *systematic RAD* », décrite en détail en 2.4.2). Ces montants sont estimés par l’outil interne de provisionnement de PartnerRe.

Le « Best estimate » est en moyenne suffisant pour se couvrir des risques, tandis que le scénario de stress nous donne un montant plus prudent qui permet de nous couvrir dans 90% des cas. On précise aussi le scénario modéré, qui permet de nous couvrir dans 75% des cas, les quantiles 50% et 10%. Ces quantiles sont calculés par la simulation d’après le modèle Paid Mack Bootstrap qui a été discuté précédemment.

On peut observer que le « Best estimate » et le « *booked reserves* » sont compris entre le quantile 50% et le scénario modéré. Le montant provisionné est donc bien estimé et cohérent avec nos estimations.

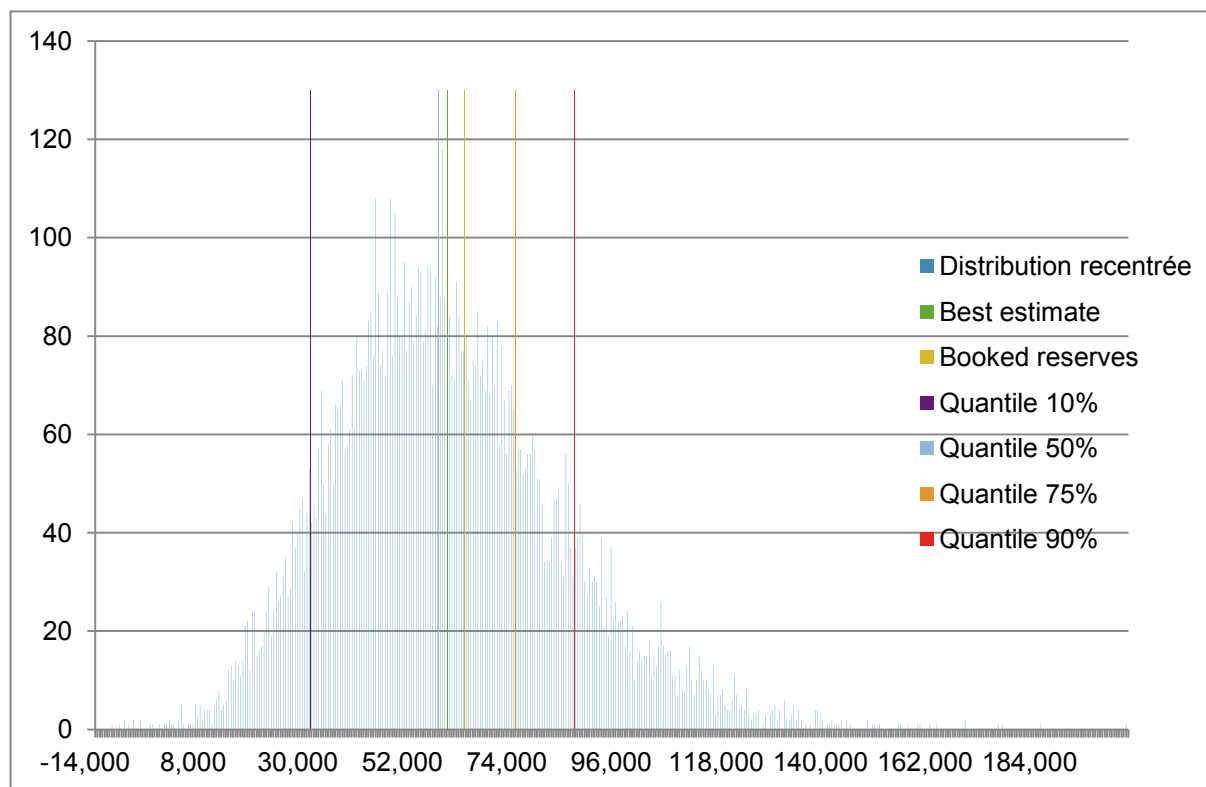


Figure 4.13 – Distribution recentrée et les quantiles de la branche « *Long-tail* »

Il est intéressant de calculer certaines statistiques des distributions originale et recentrée qui nous permettront de prendre conscience du risque induit dans cette branche d'activité. Il est évident que quand on passe de la distribution originale à la distribution recentrée suivant la méthode multiplicative, le coefficient de variation reste inchangé, mais la volatilité diminue légèrement.

Distribution originale		Distribution recentrée	
		Best estimate	60,093
		Quantile à cette valeur	54%
		RAD	3,576
		booked reserves	63,669
		Quantile à cette valeur	60%
Moyenne	60,168	Moyenne	60,093
se	23,987	se	23,957
CV	40%	CV	40%
Min	- 14,218	Min	- 14,200
Max	203,078	Max	202,827
Quantile 10%	31,372	Quantile 10%	31,333
Quantile 50%	58,115	Quantile 50%	58,043
Quantile 75%	74,383	Quantile 75%	74,291
Quantile 90%	91,655	Quantile 90%	91,542

4.3.2 Distribution de la branche à développement moyen

On procède de façon similaire pour la branche à développement moyen. On note ici que le « Best estimate » de cette branche estimée par le service de provisionnement est toujours proche de la moyenne des réserves estimées par le Bootstrap, ce qui prouve que le modèle Paid Mack Bootstrap reste pertinent en modélisant la distribution de cette branche. Le fait que $R < E(C)$ s'explique par plusieurs raisons. Si on regarde l'historique de sinistralité de cette branche, on voit bien qu'il y a eu quelques sinistres graves dans les années anciennes (telles que 2004, 2005...). Les facteurs de développement dans le modèle Paid Mack Bootstrap vont prévoir des provisions plus prudentes pour toutes les années, y compris les années récentes. Pourtant, en réalité, les actuaires de tarification ont estimé les *loss ratios* moins élevés pour les années récentes (telles que 2012, 2013...), en se basant sur le fait que les risques encourus étaient moins volatiles. Puis les actuaires de provisionnement ont repris ces *loss ratios* comme les ratios a priori pour ces années. Le niveau de prudence induit par la méthode Chain Ladder est donc plus élevé que celui porté sur les affaires des années récentes.

Dans ce cas, on utilise la méthode additive pour recentrer la distribution.

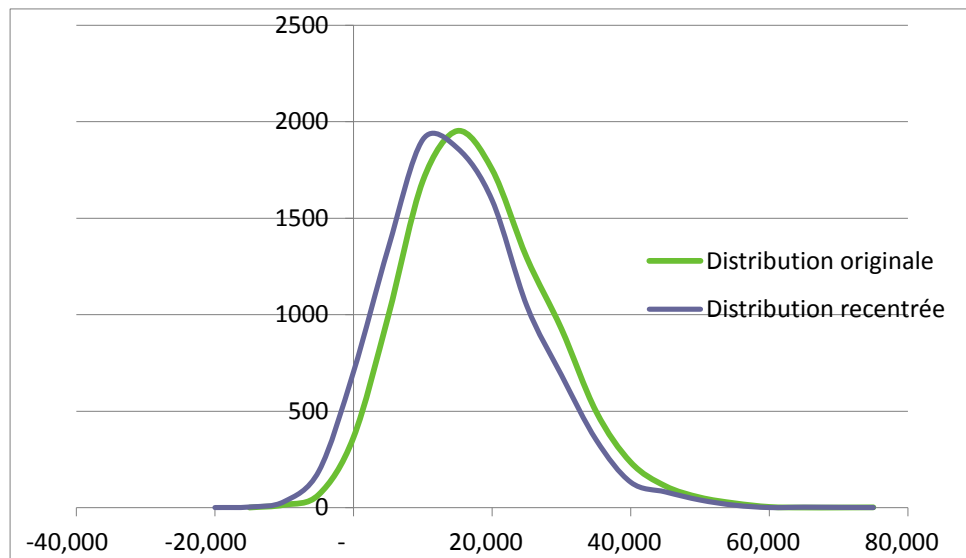


Figure 4.14 – Recentrage de la distribution de la branche « *Medium-tail* »

On peut observer que le « Best estimate » et le « *booked reserves* » sont compris entre le quantile 50% et le scénario modéré. Le montant provisionné est donc bien estimé et cohérent avec nos estimations.

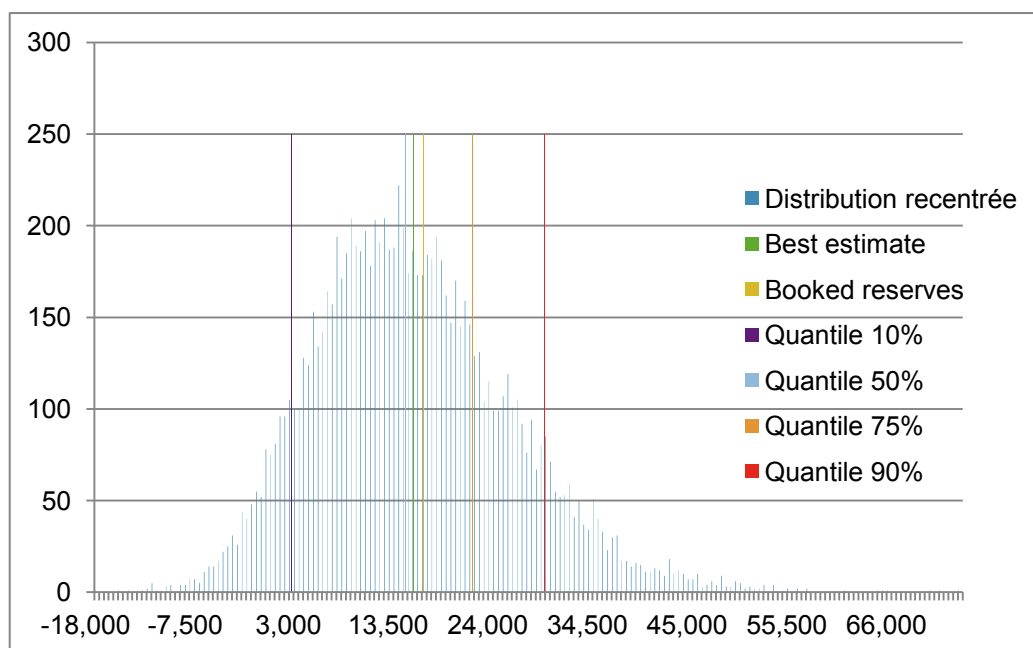


Figure 4.15 – Distribution recentrée et les quantiles de la branche « *Medium-tail* »

Voici quelques statistiques intéressantes. On observe donc que la variance reste inchangée après cette opération mais que le coefficient de variation augmente.

Distribution originale		Distribution recentrée	
		Best estimate	15,541
		Quantile à cette valeur	54%
		RAD	1,047
		booked reserves	16,589
		Quantile à cette valeur	57%
Moyenne	18,261	Moyenne	15,541
se	10,498	se	10,498
CV	57%	CV	68%
Min	-15,496	Min	-18,215
Max	75,551	Max	72,831
Quantile 10%	5,575	Quantile 10%	2,856
Quantile 50%	17,259	Quantile 50%	14,540
Quantile 75%	24,665	Quantile 75%	21,946
Quantile 90%	32,115	Quantile 90%	29,395

4.3.3 Distribution de la branche à développement court

On procède de façon similaire pour la branche à développement court. On note ici que le « Best estimate » de cette branche estimée par le service de provisionnement n'est plus proche de la moyenne des réserves estimées par le Bootstrap. Le fait que $R > E(C)$ s'explique par différentes raisons. Si on regarde l'historique de sinistralité de cette branche, on voit bien qu'il y a eu quelques sinistres graves en 2011 (le tsunami et tremblement de terre au Japon, l'inondation en Thaïlande...). Les facteurs de développement dans le modèle Paid Mack Bootstrap vont prévoir des provisions un peu plus prudentes pour toutes les années, y compris les années récentes. Pourtant, en réalité, les actuaires de tarification ont estimés les *loss ratios* pour les années récentes beaucoup plus élevés que le *loss ratio* moyen pour toutes les années.

Un *loss ratio* de tarification est en moyenne de 70%, et est composé d'un *loss ratio* pour les sinistres attritionnels (environ 25%), le reste est réservé pour couvrir les sinistres graves (*large loss ratio* - LLR et *event loss ratio* - ELR). Dans les années où PartnerRe n'a pas été touché par un sinistre particulièrement grave, les *loss ratios* sont bas, ce qui explique que la majorité du profit vienne de ce groupe des « bonnes » années. Puis les actuaires de provisionnement ont repris ces *loss ratios* de tarification comme les ratios a priori des années récentes. Le niveau de prudence induit par la méthode Chain Ladder est donc beaucoup moins élevé que celui porté sur les affaires des années récentes. En recentrant la distribution, on s'assure que le modèle Paid Mack Bootstrap reste pertinent dans ce cas.

Par conséquent, on utilise la méthode multiplicative pour recentrer la distribution.

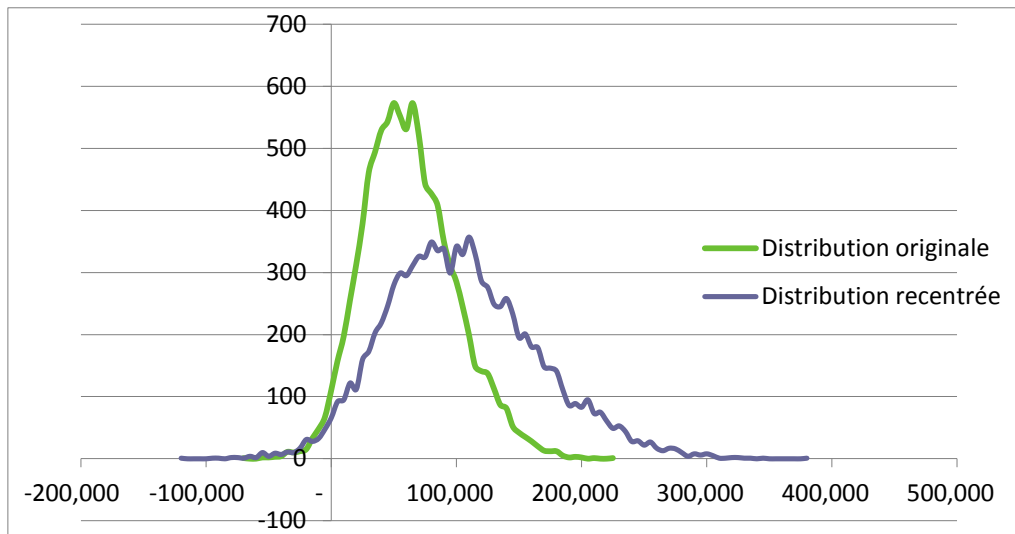


Figure 4.16 – Recentrage de la distribution de la branche « *Short-tail* »

On peut observer que le « Best estimate » et le « *booked reserves* » sont compris entre le quantile 50% et le scénario modéré. Le montant provisionné est donc bien estimé et cohérent avec nos estimations.

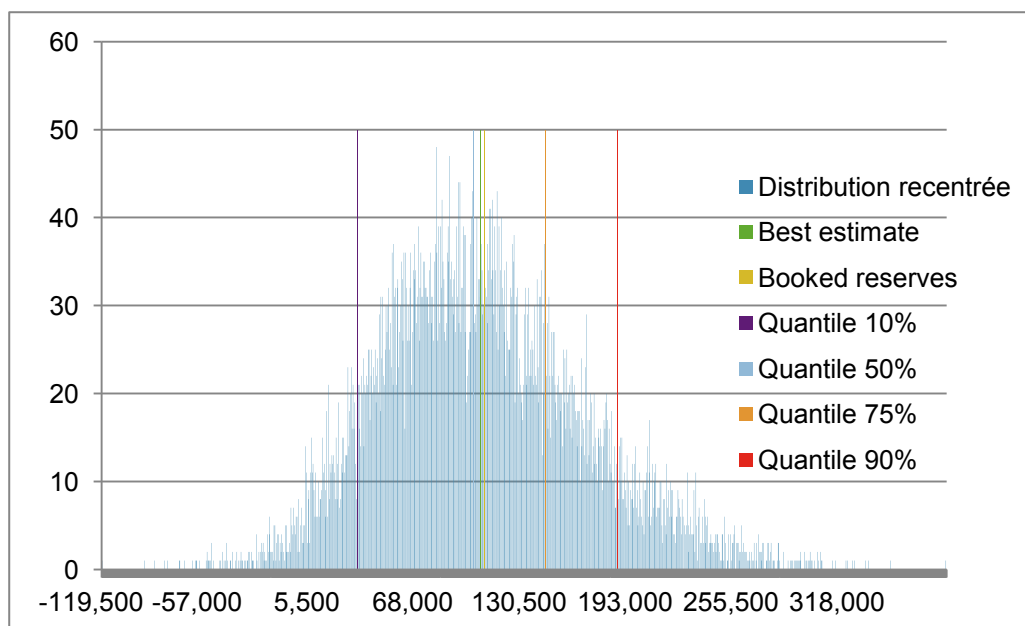


Figure 4.17 – Distribution recentrée et les quantiles de la branche « *Short-tail* »

Voici quelques statistiques intéressantes. On observe donc que la variance augmente après cette opération mais que le coefficient de variation reste inchangé.

Distribution originale		Distribution recentrée	
		Best estimate	103,912
		Quantile à cette valeur	53%
		RAD	2,563
		booked reserves	106,475
		Quantile à cette valeur	55%
Moyenne	62,508	Moyenne	103,912
se	36,340	se	60,410
CV	58%	CV	58%
Min	- 71,910	Min	-119,541
Max	227,293	Max	377,845
Quantile 10%	18,898	Quantile 10%	31,415
Quantile 50%	59,704	Quantile 50%	99,251
Quantile 75%	85,239	Quantile 75%	141,699
Quantile 90%	110,985	Quantile 90%	184,498

4.3.4 Distribution du portefeuille entier

Pour le portefeuille entier, on fait la somme des simulations effectuées pour chaque branche. Le « Best estimate » du portefeuille entier estimé par le service de provisionnement n'est plus proche de la moyenne des réserves estimées par le Bootstrap, sous l'impact de la branche à développement court. On utilise donc la méthode multiplicative pour recentrer la distribution.

Comme discuté dans 3.4.3, l'hypothèse que les paiements cumulés suivent la loi Normale dans le modèle de Mack peut impliquer des valeurs négatives. Plus σ_j^2 est élevé, plus nombreuses sont les valeurs négatives simulées. Dans certaines études sur le provisionnement stochastiques, on préfère la loi Gamma de même moyenne et de même variance pour éviter cette situation. Pourtant, dans la figure ci-dessous, on trouve que la loi Normale est très adaptée aux données du portefeuille en question comme très peu valeurs négatives sont simulées.

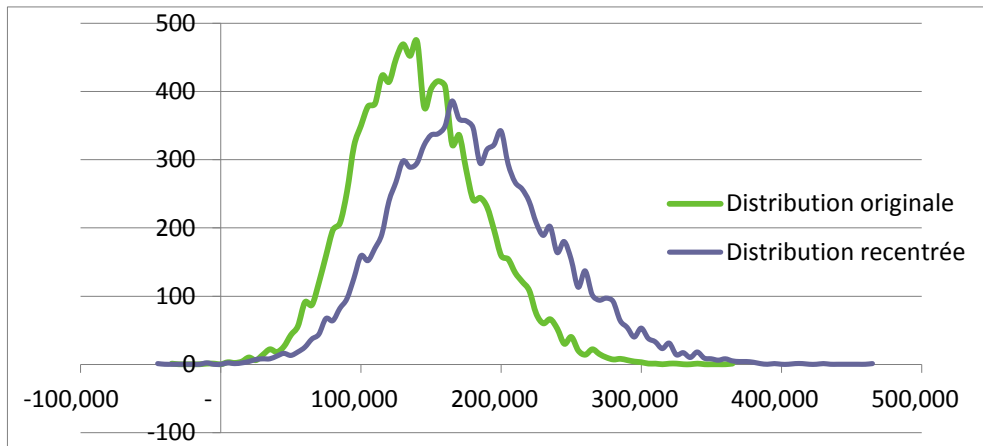


Figure 4.18 – Recentrage de la distribution du portefeuille entier

On peut observer que le « Best estimate » et le « *booked reserves* » sont compris entre le quantile 50% et le scénario modéré. Le montant provisionné est donc bien estimé et cohérent avec nos estimations.

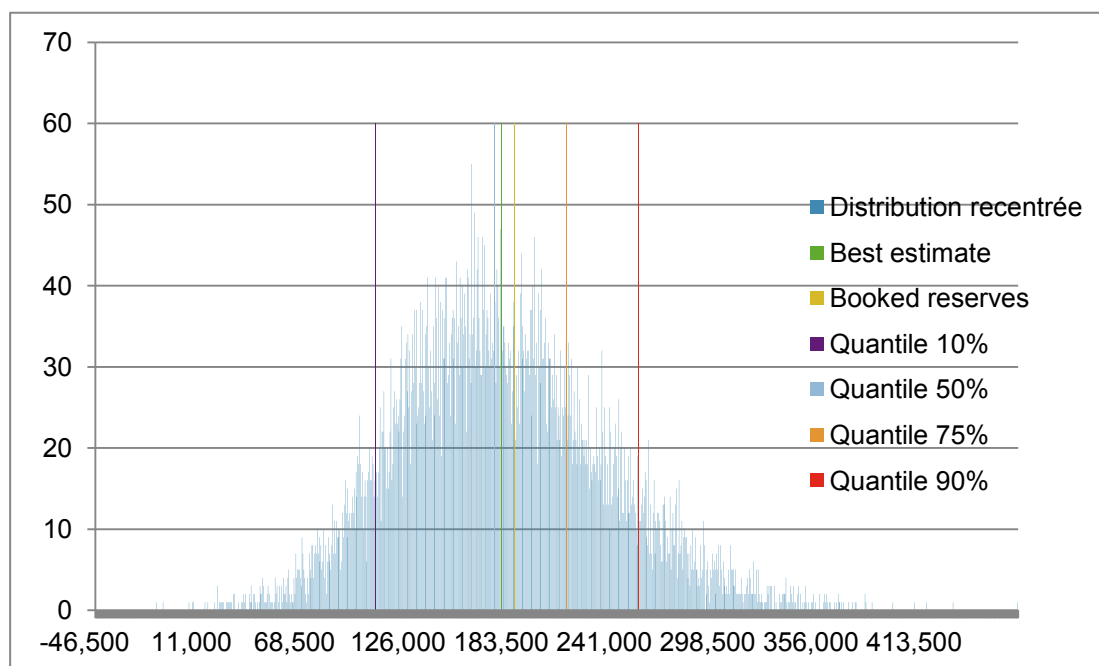


Figure 4.19 – Distribution recentrée et les quantiles du portefeuille entier

Voici quelques statistiques intéressantes. On observe donc que la variance augmente après cette opération mais que le coefficient de variation reste inchangé.

Distribution originale		Distribution recentrée	
		Best estimate	179,546
		Quantile à cette valeur	53%
		RAD	7,186
		booked reserves	186,733
		Quantile à cette valeur	57%
Moyenne	140,937	Moyenne	179,546
se	45,160	se	57,531
CV	32%	CV	32%
Min	- 36,660	Min	- 46,703
Max	366,481	Max	466,879
Quantile 10%	85,732	Quantile 10%	109,218
Quantile 50%	137,861	Quantile 50%	175,628
Quantile 75%	169,497	Quantile 75%	215,931
Quantile 90%	200,755	Quantile 90%	255,752

Le portefeuille d'Asie n'est pas grand. Des sinistres graves (tels que le tremblement de terre Tohoku en 2011 au Japon ou l'inondation en Thaïlande également en 2011) peuvent le rendre assez volatile. Si on regarde les statistiques des branches modélisées ci-dessus, on note bien que les coefficients de variation de chaque branche sont élevés. Pourtant, quand le volume des données augmente, le niveau de variation réduit significativement (CV= 40% pour la branche « *Long-tail* », 68% pour la branche « *Medium-tail* », 58% pour la branche « *Short-tail* », 32% pour le portefeuille entier).

L'équipe de modélisation du groupe PartnerRe a essayé de modéliser des distributions au niveau global avec Igloo, un produit commercial de Towers Watson, et elle a obtenu un coefficient de variation plus bas (environ 8% pour le portefeuille global entier). Avec un volume de primes beaucoup plus important, les catastrophes auront un impact moins significatif que dans le cas du portefeuille d'Asie. Le portefeuille global est donc moins volatile et ses estimations sont plus stables.

Depuis quelques années, l'actuaire en charge de provisionnement à Singapour a pris les distributions modélisées au niveau global pour chaque branche d'activité et les a appliquées au portefeuille d'Asie. En supposant qu'il n'y ait pas de différences significatives entre les profils de risque au niveau global et asiatique, cet actuaire peut utiliser la même distribution pour arriver au montant de réserves nécessaires au quantile 75%, ce qui est requis par les autorités de contrôle à Singapour. Dans la figure 4.20 ci-dessous, on voit la distribution modélisée au niveau global et recentrée au portefeuille d'Asie à fin 2013. Les valeurs simulées sont consi-

dérablement plus rapprochées au point central et donc la distribution est significativement moins volatile que la distribution modélisée dans cette étude.

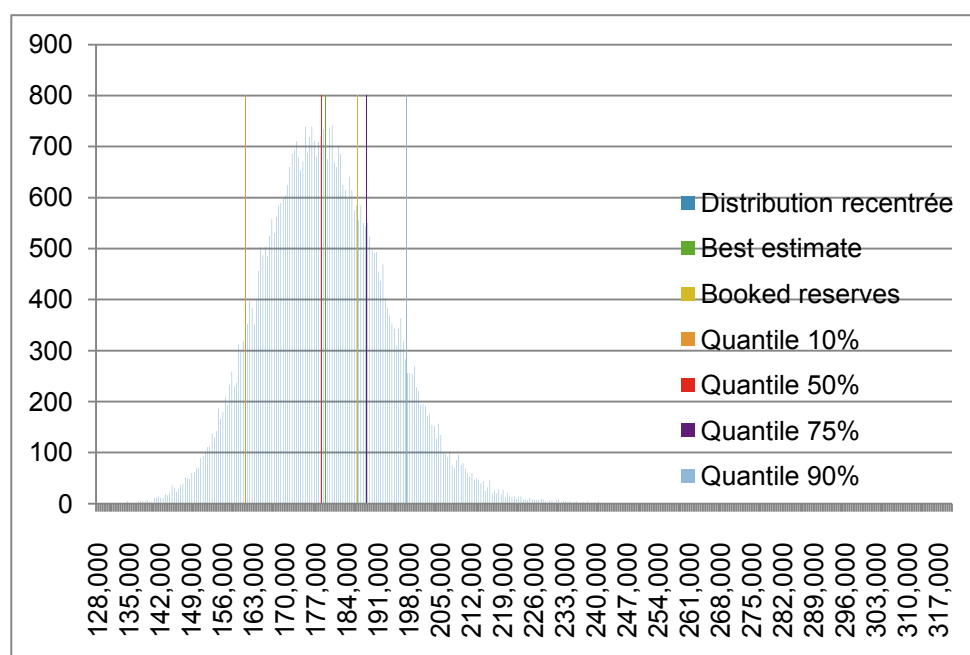


Figure 4.20 – Distribution au niveau global recentrée au niveau d'Asie

Si on regarde le tableau 4.21 ci-dessous, on peut noter quelques différences. Tout d'abord, le montant « *booked reserves* » calculé par le service de provisionnement se trouve au quantile 71% pour la distribution simulée au niveau global, mais seulement au quantile 57% pour la distribution simulée par le modèle Paid Mack Bootstrap au niveau d'Asie. Cela reflète un niveau plus haut de volatilité de la distribution simulée au niveau d'Asie. A la fin de 2013, on a en effet comptabilisé un montant de 188.6 M de réserves au quantile 75% d'après la distribution simulée au niveau global. Pourtant, si on tient compte de la volatilité plus forte due à une taille plus petite du portefeuille asiatique et à sa haute sensibilité aux sinistres graves, le montant à comptabiliser est de 215.9 M.

Il y a d'autres facteurs qui impliquent des différences entre la distribution simulée par l'équipe de modélisation et celle estimée dans cette étude. Même si l'équipe de modélisation a également choisi le modèle Paid Mack Bootstrap, les facteurs tels que les ajustements manuels rapportés aux résidus estimés, la loi des paiements futurs simulés pour la partie inférieure de la projection (la loi de Normale ou Gamma), la méthode Bootstrap paramétrique ou

non paramétrique, la diversification du portefeuille global (...) ont une influence non négligeable sur la différence des résultats entre ces deux distributions.

Le tableau 4.21 ci-dessous nous confirme qu'il est déconseillé d'utiliser la distribution modélisée au niveau global pour l'Asie, ce qu'on a fait jusqu'à maintenant. En effet, l'impact de cette approche n'est pas limité à l'Asie. A cause de contraintes de ressources, PartnerRe a modélisé les distributions des réserves avec des triangles du portefeuille global. Puis toutes les locations (Singapour, Dublin, Miami...) ont appliqué ces mêmes distributions pour leurs propres portefeuilles locaux en supposant que ces profils de risque étaient similaires. L'efficacité de cette approche a été remise en cause et c'est aussi une des principales raisons qui a motivé la naissance de cette étude.

En réalité, le montant de réserves ne serait pas suffisant en cas de catastrophe grave. En 2012, la compagnie a dû injecter du capital au bilan du bureau à Singapour suite à l'impact de l'inondation en Thaïlande et du tremblement de terre au Japon en 2011 pour qu'il puisse rester solvable. Ce fait nous dit que la distribution simulée au niveau global ne reflète pas bien la volatilité du portefeuille asiatique.

Distribution au niveau du Groupe			Distribution au niveau d'Asie	
Best estimate	179,546	-	Best estimate	179,546
Quantile à cette valeur	52%		Quantile à cette valeur	53%
RAD	7,186		RAD	7,186
booked reserves	186,733	-	booked reserves	186,733
Quantile à cette valeur	71%		Quantile à cette valeur	57%
Moyenne	179,547		Moyenne	179,546
se	14,484		se	57,531
CV	8%		CV	32%
Min	134,849		Min	- 46,703
Max	320,151		Max	466,879
Quantile 10%	161,741		Quantile 10%	109,218
Quantile 50%	178,770		Quantile 50%	175,628
Quantile 75%	188,674		Quantile 75%	215,931
Quantile 90%	197,897		Quantile 90%	255,752

Tableau 4.21 – Comparaison des distributions

4.3.5 Convergence des estimateurs

Comme expliqué dans 4.2.1, la ré-estimation des paramètres par maximum de vraisemblance à chaque itération est faite avec le Solveur sous Excel, ce qui malheureusement prend beaucoup de temps. Dans l'étude empirique dans le cadre de ce mémoire, on a simplifié le modèle Bootstrap pour accroître la vitesse de la simulation. On a vu que ses estimations étaient en moyenne équivalentes aux estimations du modèle de Chain Ladder. Au lieu de ré-estimer les paramètres du GLM par la méthode de maximum de vraisemblance sur des pseudo-facteurs de développement individuels provenant du nouveau triangle des résidus $r_{i,j}^b$, et finalement en déduire les facteurs de développement λ_j grâce à la fonction de lien $\ln(\lambda_j) = \gamma_j$, comme l'expliquent les tableaux 3.38 et 3.39, on applique la méthode Chain Ladder au nouveau triangle.

C'est une hypothèse centrale du modèle. Si elle n'est pas tenue, les résultats produits n'auront pas de sens. Il nous faut donc vérifier cette hypothèse prudemment. Ici on va faire les simulations avec 20 000 et 50 000 itérations pour voir si les montants de réserves estimés par le modèle Paid Mack Bootstrap et ceux estimés par la méthode Chain Ladder s'approchent en fonction du nombre d'itérations.

4.3.5.1 Branche à développement long

Simulation avec 10 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	12,586	0	0		0			
2,005	7,602	91	265	292%	83	92	9%	187%
2,006	6,622	154	329	214%	142	298	8%	10%
2,007	3,660	179	235	131%	175	216	3%	9%
2,008	3,902	430	279	65%	423	265	2%	5%
2,009	5,822	1,995	1,172	59%	1,950	1,165	2%	1%
2,010	7,581	2,740	1,829	67%	2,678	1,785	2%	3%
2,011	10,177	4,643	2,897	62%	4,439	2,747	5%	5%
2,012	32,874	20,811	8,268	40%	20,206	7,870	3%	5%
2,013	31,969	29,125	19,953	69%	27,476	18,220	6%	10%
Total	122,794	60,168	23,987	40%	57,572	22,151	5%	8%

Tableau 4.22 – Simulation avec 10 000 itérations

4 Etude empirique

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586
2,005	6,938	7,006	7,422	7,599	7,784	8,232	8,300	7,602
2,006	5,803	5,868	6,396	6,618	6,845	7,416	7,491	6,622
2,007	3,055	3,123	3,500	3,657	3,818	4,210	4,273	3,660
2,008	3,223	3,276	3,711	3,896	4,086	4,567	4,651	3,902
2,009	2,941	3,174	5,030	5,806	6,594	8,642	8,914	5,822
2,010	3,291	3,653	6,299	7,509	8,766	12,090	12,768	7,581
2,011	3,878	4,284	8,108	10,015	12,013	17,642	18,319	10,177
2,012	14,245	16,065	27,025	32,320	38,129	54,330	56,598	32,874
2,013	-15,297	-9,838	18,192	30,601	44,041	84,447	93,130	31,969

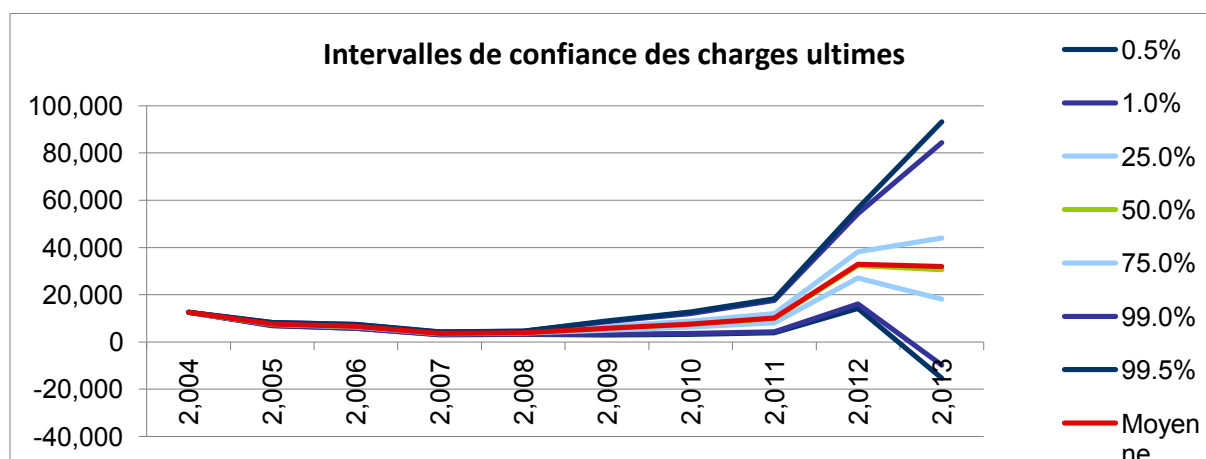


Figure 4.23 – Intervalle de confiance des charges ultimes avec 10 000 itérations

Simulation avec 20 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	12,586	0	0		0			
2,005	7,599	88	265	303%	83	92	5%	187%
2,006	6,618	150	335	224%	142	298	6%	13%
2,007	3,660	179	236	131%	175	216	3%	9%
2,008	3,905	433	280	65%	423	265	2%	6%
2,009	5,814	1,987	1,174	59%	1,950	1,165	2%	1%
2,010	7,590	2,749	1,814	66%	2,678	1,785	3%	2%
2,011	10,094	4,560	2,832	62%	4,439	2,747	3%	3%
2,012	33,016	20,953	8,268	39%	20,206	7,870	4%	5%
2,013	31,609	28,765	19,755	69%	27,476	18,220	5%	8%
Total	122,490	59,864	23,791	40%	57,572	22,151	4%	7%

Tableau 4.24 – Simulation avec 20 000 itérations

4 Etude empirique

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586
2,005	6,932	7,001	7,419	7,596	7,778	8,221	8,286	7,599
2,006	5,776	5,856	6,391	6,618	6,839	7,422	7,512	6,618
2,007	3,064	3,124	3,502	3,658	3,819	4,220	4,287	3,660
2,008	3,213	3,284	3,715	3,899	4,092	4,578	4,658	3,905
2,009	2,893	3,136	5,026	5,794	6,598	8,618	8,908	5,814
2,010	3,293	3,715	6,324	7,519	8,760	12,182	12,675	7,590
2,011	3,705	4,261	8,084	9,930	11,909	17,410	18,188	10,094
2,012	14,415	16,112	27,130	32,514	38,219	54,508	56,957	33,016
2,013	-13,924	-9,575	17,875	30,249	43,828	84,116	90,418	31,609

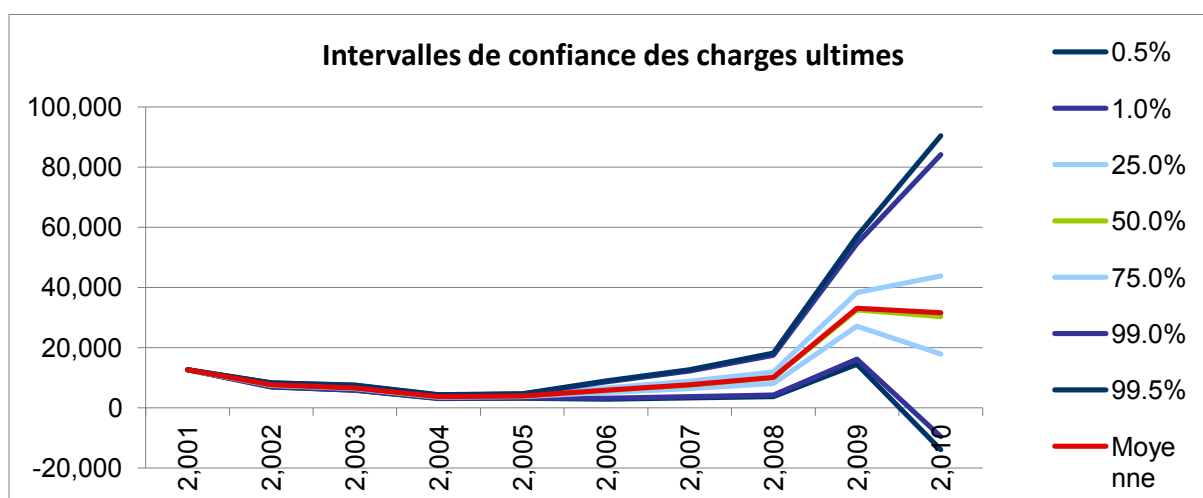


Figure 4.25 – Intervalle de confiance des charges ultimes avec 20 000 itérations

Simulation avec 50 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/	se(Ri) Mack	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	12,586	0	0		0			
2,005	7,600	88	264	299%	83	92	6%	186%
2,006	6,617	149	329	220%	142	298	5%	10%
2,007	3,659	178	234	132%	175	216	2%	9%
2,008	3,904	432	280	65%	423	265	2%	5%
2,009	5,821	1,994	1,170	59%	1,950	1,165	2%	0%
2,010	7,591	2,751	1,814	66%	2,678	1,785	3%	2%
2,011	10,164	4,630	2,830	61%	4,439	2,747	4%	3%
2,012	33,056	20,993	8,243	39%	20,206	7,870	4%	5%
2,013	31,769	28,925	19,903	69%	27,476	18,220	5%	9%
Total	122,766	60,140	23,853	40%	57,572	22,151	4%	8%

Tableau 4.26 – Simulation avec 50 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586	12,586
2,005	6,933	6,995	7,420	7,596	7,775	8,229	8,301	7,600
2,006	5,794	5,878	6,392	6,611	6,838	7,399	7,487	6,617
2,007	3,072	3,128	3,500	3,657	3,816	4,214	4,278	3,659
2,008	3,210	3,277	3,712	3,900	4,091	4,573	4,651	3,904
2,009	2,869	3,149	5,028	5,807	6,598	8,617	8,932	5,821
2,010	3,364	3,717	6,340	7,516	8,770	12,130	12,662	7,591
2,011	3,724	4,285	8,176	10,018	11,981	17,402	18,334	10,164
2,012	14,803	16,224	27,279	32,526	38,274	54,512	57,740	33,056
2,013	-14,902	-9,694	17,916	30,354	44,204	84,125	91,860	31,769

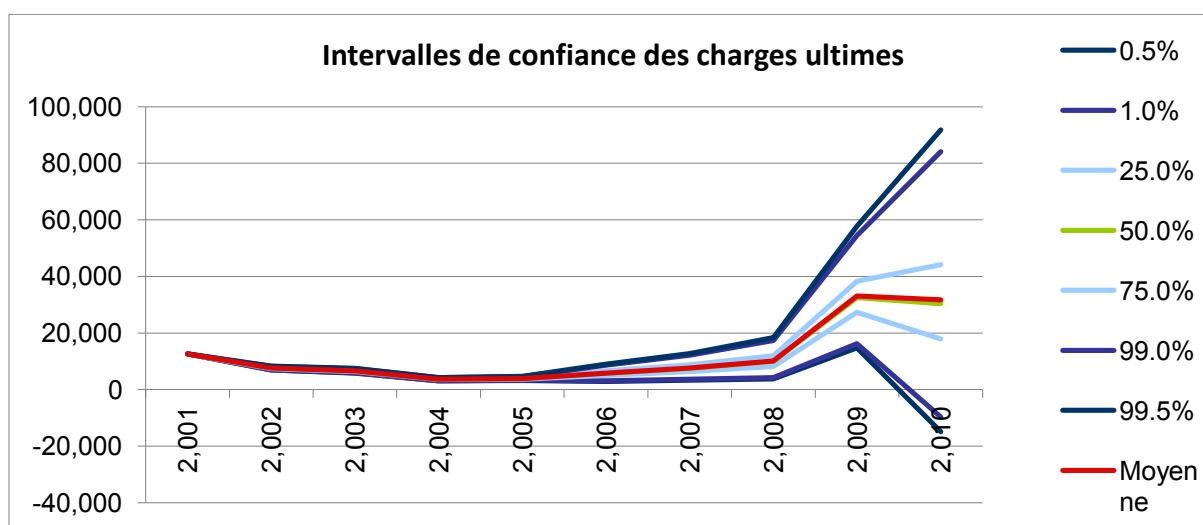


Figure 4.27 – Intervalles de confiance des charges ultimes avec 50 000 itérations

D'après ce qu'on a vu, pour la branche à développement long, les résultats sont stables. Plus le nombre d'itérations est grand, plus les « Ri écart », c'est-à-dire la différence entre les estimations du modèle Paid Mack Bootstrap et celles de la méthode Chain Ladder, sont petits. Autrement dit, on a une preuve que ses estimations sont en moyenne équivalentes aux estimations du modèle de Chain Ladder par la loi des grands nombres.

Par la suite, on va tester cette hypothèse pour les autres branches d'une façon similaire. Ce qu'on verra nous donne la même conclusion.

4.3.5.2 Branche à développement moyen

Simulation avec 10 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	5,675	0	0		0			
2,005	3,861	0	39	11402%	1	19	-62%	108%
2,006	2,416	-15	38	-253%	-15	36	4%	6%
2,007	2,117	-11	37	-325%	-11	35	2%	4%
2,008	1,548	26	38	145%	26	38	-1%	1%
2,009	5,412	835	1,570	188%	858	1,591	-3%	-1%
2,010	5,508	1,135	1,645	145%	1,160	1,641	-2%	0%
2,011	9,221	3,136	2,679	85%	3,305	2,661	-5%	1%
2,012	9,588	5,897	3,313	56%	6,070	3,261	-3%	2%
2,013	7,808	7,257	7,723	106%	7,551	7,364	-4%	5%
Total	53,153	18,261	10,498	57%	18,946	10,337	-4%	2%

Tableau 4.28 – Simulation avec 10 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675
2,005	3,769	3,777	3,834	3,859	3,887	3,953	3,961	3,861
2,006	2,320	2,329	2,389	2,415	2,441	2,507	2,516	2,416
2,007	2,022	2,032	2,092	2,116	2,141	2,204	2,212	2,117
2,008	1,449	1,459	1,522	1,548	1,574	1,635	1,646	1,548
2,009	1,445	1,879	4,337	5,397	6,459	9,200	9,546	5,412
2,010	1,406	1,695	4,395	5,506	6,589	9,365	9,739	5,508
2,011	3,232	3,623	7,327	9,065	10,961	16,096	16,763	9,221
2,012	2,650	3,148	7,205	9,289	11,622	18,479	19,513	9,588
2,013	-11,648	-9,235	2,525	7,159	12,567	28,506	30,495	7,808

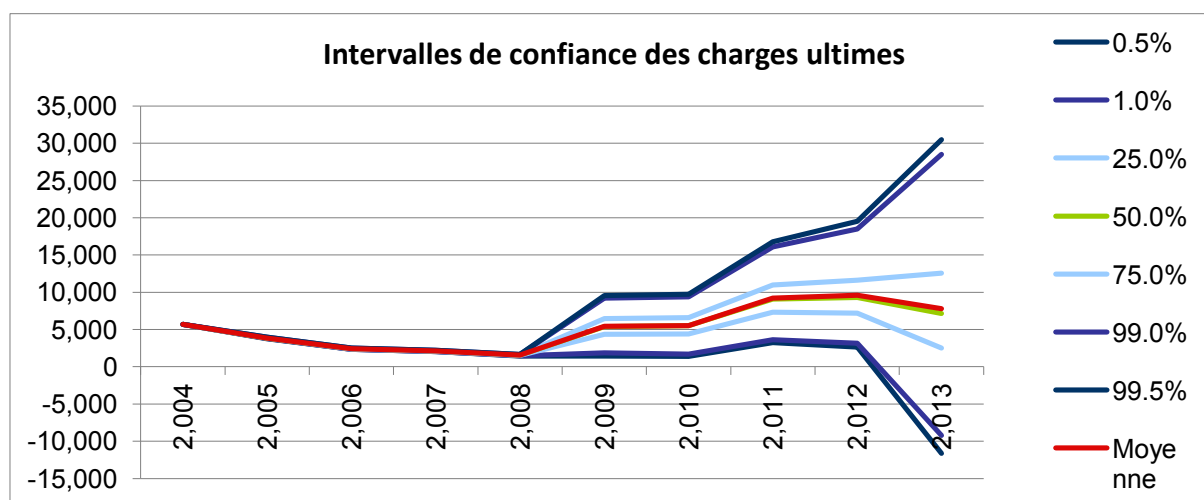


Figure 4.29 – Intervalle de confiance des charges ultimes avec 10 000 itérations

Simulation avec 20 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	5,675	0	0		0			
2,005	3,861	1	38	7107%	1	19	-39%	107%
2,006	2,415	-15	39	-251%	-15	36	6%	7%
2,007	2,116	-12	37	-307%	-11	35	7%	4%
2,008	1,547	25	38	151%	26	38	-4%	2%
2,009	5,414	836	1,591	190%	858	1,591	-2%	0%
2,010	5,488	1,115	1,614	145%	1,160	1,641	-4%	-2%
2,011	9,272	3,188	2,648	83%	3,305	2,661	-4%	-1%
2,012	9,579	5,889	3,293	56%	6,070	3,261	-3%	1%
2,013	7,835	7,284	7,722	106%	7,551	7,364	-4%	5%
Total	53,204	18,311	10,464	57%	18,946	10,337	-3%	1%

Tableau 4.30 – Simulation avec 20 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675
2,005	3,771	3,777	3,834	3,860	3,887	3,952	3,962	3,861
2,006	2,319	2,329	2,389	2,415	2,441	2,508	2,517	2,415
2,007	2,023	2,032	2,091	2,116	2,141	2,204	2,214	2,116
2,008	1,450	1,459	1,521	1,546	1,572	1,638	1,649	1,547
2,009	1,418	1,749	4,345	5,390	6,486	9,121	9,485	5,414
2,010	1,388	1,810	4,400	5,456	6,550	9,358	9,790	5,488
2,011	3,132	3,662	7,412	9,138	10,996	15,947	16,764	9,272
2,012	2,603	3,140	7,235	9,319	11,604	18,439	19,536	9,579
2,013	-11,997	-9,230	2,495	7,237	12,562	28,516	31,292	7,835

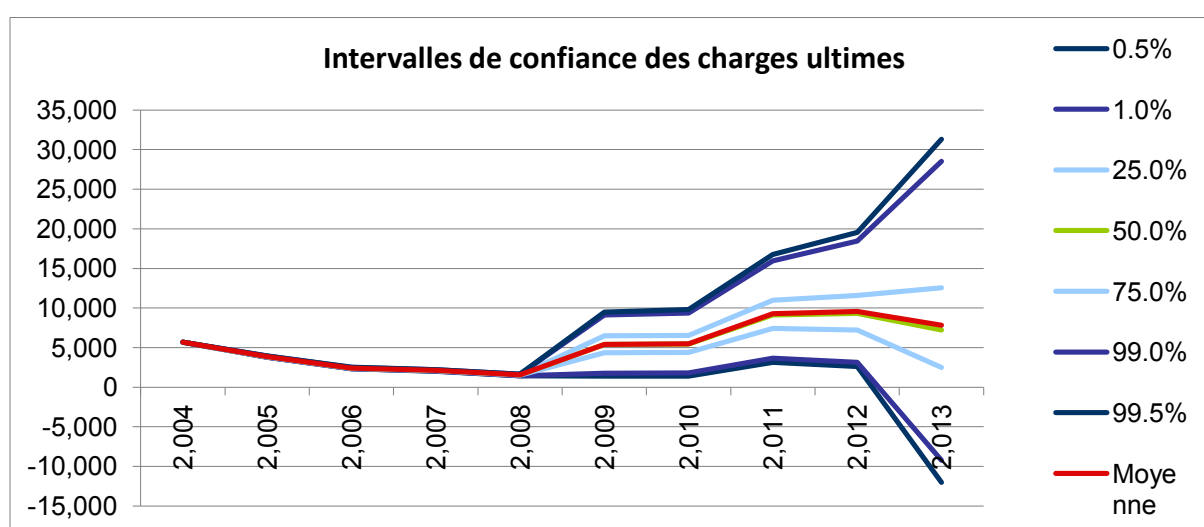


Figure 4.31 – Intervalles de confiance des charges ultimes avec 20 000 itérations

Simulation avec 50 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	5,675	0	0		0			
2,005	3,861	0	39	10785%	1	19	-60%	107%
2,006	2,416	-15	39	-259%	-15	36	3%	7%
2,007	2,116	-12	37	-314%	-11	35	6%	5%
2,008	1,547	26	38	149%	26	38	-3%	1%
2,009	5,392	815	1,585	194%	858	1,591	-5%	0%
2,010	5,488	1,115	1,631	146%	1,160	1,641	-4%	-1%
2,011	9,287	3,202	2,683	84%	3,305	2,661	-3%	1%
2,012	9,588	5,898	3,303	56%	6,070	3,261	-3%	1%
2,013	7,819	7,268	7,751	107%	7,551	7,364	-4%	5%
Total	53,190	18,298	10,591	58%	18,946	10,337	-3%	2%

Tableau 4.32 – Simulation avec 50 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675	5,675
2,005	3,770	3,778	3,834	3,859	3,887	3,953	3,962	3,861
2,006	2,320	2,328	2,389	2,415	2,441	2,509	2,518	2,416
2,007	2,023	2,031	2,091	2,116	2,141	2,203	2,212	2,116
2,008	1,451	1,460	1,521	1,547	1,573	1,637	1,647	1,547
2,009	1,417	1,775	4,318	5,377	6,444	9,130	9,564	5,392
2,010	1,431	1,814	4,364	5,475	6,587	9,340	9,780	5,488
2,011	3,097	3,652	7,415	9,152	11,008	16,130	17,074	9,287
2,012	2,530	3,049	7,225	9,328	11,649	18,388	19,530	9,588
2,013	-11,179	-9,102	2,499	7,160	12,502	28,857	31,791	7,819

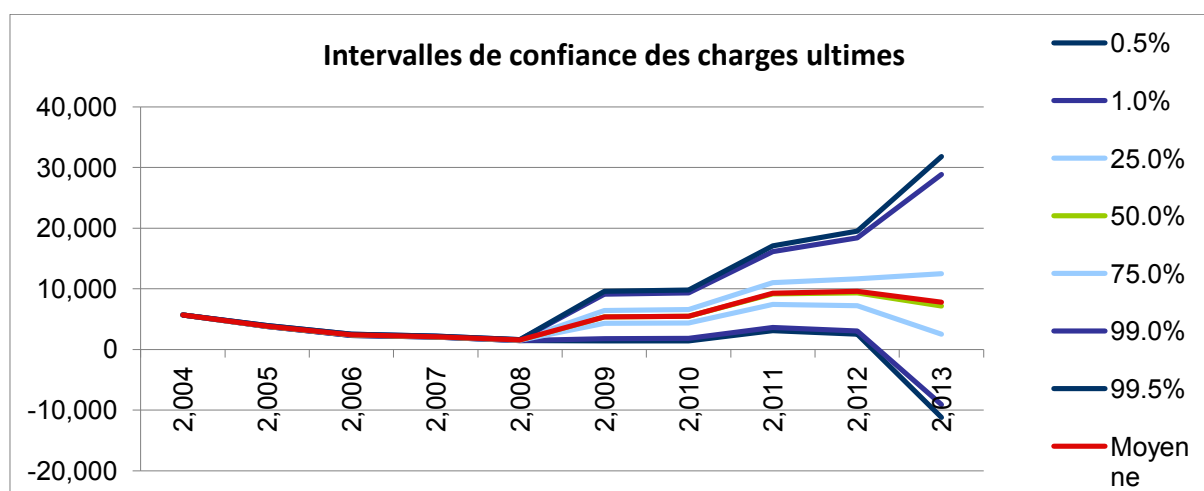


Figure 4.33 – Intervalles de confiance des charges ultimes avec 50 000 itérations

4.3.5.3 Branche à développement court

Simulation avec 10 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	17,021	0	0		0			
2,005	17,161	81	16	19%	81	17	-1%	-5%
2,006	15,706	67	20	30%	67	23	-1%	-13%
2,007	14,489	84	25	30%	85	28	-1%	-11%
2,008	6,006	46	20	43%	46	21	-1%	-7%
2,009	8,600	145	141	97%	148	142	-2%	0%
2,010	37,035	1,389	512	37%	1,413	506	-2%	1%
2,011	58,500	7,906	2,795	35%	8,019	2,667	-1%	5%
2,012	45,753	21,757	16,449	76%	22,262	15,681	-2%	5%
2,013	36,014	31,034	30,616	99%	32,293	29,193	-4%	5%
Total	256,286	62,508	36,340	58%	64,415	34,596	-3%	5%

Tableau 4.34 – Simulation avec 10 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021
2,005	17,125	17,128	17,150	17,160	17,171	17,200	17,205	17,161
2,006	15,658	15,662	15,692	15,706	15,719	15,754	15,759	15,706
2,007	14,426	14,433	14,472	14,489	14,506	14,547	14,554	14,489
2,008	5,955	5,961	5,993	6,006	6,020	6,052	6,057	6,006
2,009	8,230	8,272	8,505	8,600	8,696	8,925	8,954	8,600
2,010	35,780	35,871	36,684	37,033	37,376	38,234	38,338	37,035
2,011	51,598	52,136	56,603	58,473	60,344	65,166	65,852	58,500
2,012	4,789	8,305	34,521	45,646	56,722	84,557	87,657	45,753
2,013	-37,495	-29,934	14,240	33,373	55,075	117,699	126,026	36,014

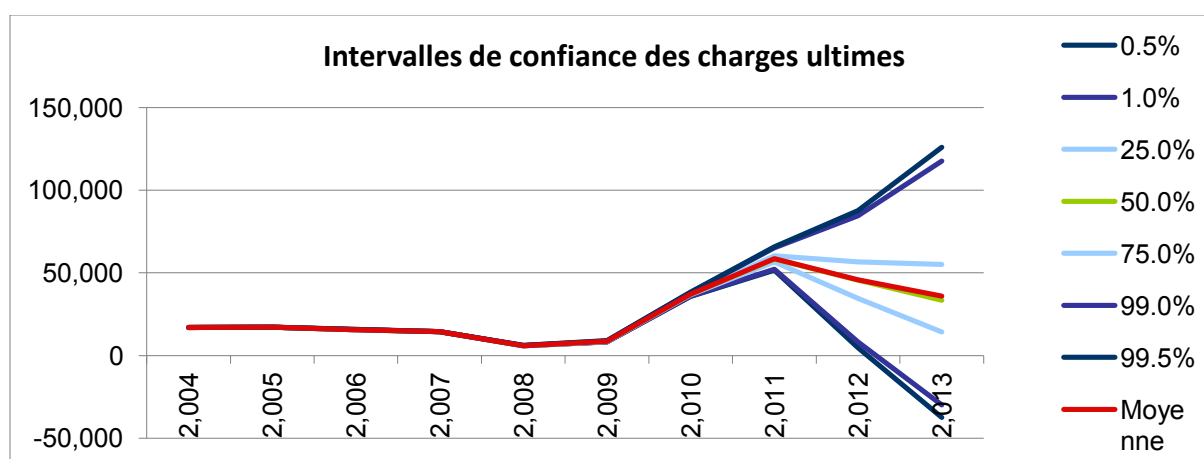


Figure 4.35 – Intervalle de confiance des charges ultimes avec 10 000 itérations

Simulation avec 20 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	17,021	0	0		0			
2,005	17,161	81	16	20%	81	17	0%	-4%
2,006	15,706	67	20	29%	67	23	-1%	-13%
2,007	14,489	84	25	29%	85	28	-1%	-11%
2,008	6,006	46	20	43%	46	21	-1%	-8%
2,009	8,599	144	142	99%	148	142	-3%	0%
2,010	37,037	1,391	512	37%	1,413	506	-2%	1%
2,011	58,488	7,893	2,754	35%	8,019	2,667	-2%	3%
2,012	45,714	21,718	16,451	76%	22,262	15,681	-2%	5%
2,013	36,388	31,408	30,820	98%	32,293	29,193	-3%	6%
Total	256,609	62,832	36,441	58%	64,415	34,596	-2%	5%

Tableau 4.36 – Simulation avec 20 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021
2,005	17,125	17,128	17,150	17,160	17,172	17,201	17,205	17,161
2,006	15,657	15,662	15,693	15,706	15,719	15,753	15,758	15,706
2,007	14,429	14,434	14,472	14,489	14,506	14,549	14,556	14,489
2,008	5,956	5,961	5,993	6,006	6,020	6,053	6,058	6,006
2,009	8,227	8,266	8,504	8,599	8,694	8,932	8,965	8,599
2,010	35,753	35,862	36,688	37,030	37,376	38,275	38,410	37,037
2,011	51,547	52,242	56,625	58,455	60,339	65,019	65,726	58,488
2,012	4,717	8,233	34,492	45,417	56,718	84,800	89,375	45,714
2,013	-37,365	-28,136	14,585	33,981	55,705	118,179	129,270	36,388

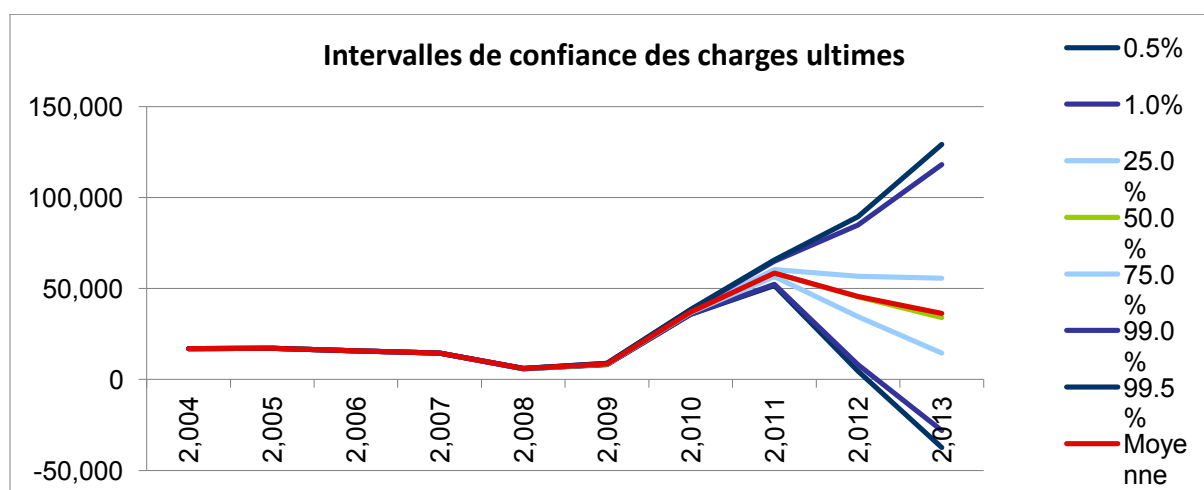


Figure 4.37 – Intervalles de confiance des charges ultimes avec 20 000 itérations

Simulation avec 50 000 itérations

	Ci,n Mack Bootstrap	Ri Mack Bootstrap	se(Ri) Mack Bootstrap	CV(Ri) Mack Bootstrap	Ri Mack 93/CL	se(Ri) Mack 93	Ri écart	se(Ri) écart
2,004	17,021	0	0		0			
2,005	17,161	81	16	19%	81	17	0%	-5%
2,006	15,706	67	20	30%	67	23	0%	-12%
2,007	14,489	84	25	29%	85	28	-1%	-11%
2,008	6,006	46	20	43%	46	21	-1%	-8%
2,009	8,601	146	141	97%	148	142	-1%	0%
2,010	37,037	1,391	510	37%	1,413	506	-2%	1%
2,011	58,477	7,883	2,762	35%	8,019	2,667	-2%	4%
2,012	45,847	21,851	16,350	75%	22,262	15,681	-2%	4%
2,013	36,076	31,097	31,029	100%	32,293	29,193	-4%	6%
Total	256,423	62,645	36,548	58%	64,415	34,596	-3%	6%

Tableau 4.38 – Simulation avec 50 000 itérations

	0.5%	1.0%	25.0%	50.0%	75.0%	99.0%	99.5%	Moyenne
2,004	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021	17,021
2,005	17,125	17,128	17,150	17,160	17,172	17,200	17,204	17,161
2,006	15,658	15,662	15,692	15,706	15,720	15,754	15,759	15,706
2,007	14,427	14,433	14,473	14,489	14,506	14,549	14,555	14,489
2,008	5,956	5,961	5,993	6,006	6,019	6,052	6,057	6,006
2,009	8,238	8,274	8,506	8,600	8,696	8,931	8,966	8,601
2,010	35,743	35,874	36,691	37,031	37,379	38,242	38,374	37,037
2,011	51,517	52,202	56,599	58,453	60,321	65,065	65,873	58,477
2,012	4,343	8,446	34,711	45,698	56,840	84,548	88,579	45,847
2,013	-36,529	-28,971	14,031	33,446	55,287	119,374	130,756	36,076

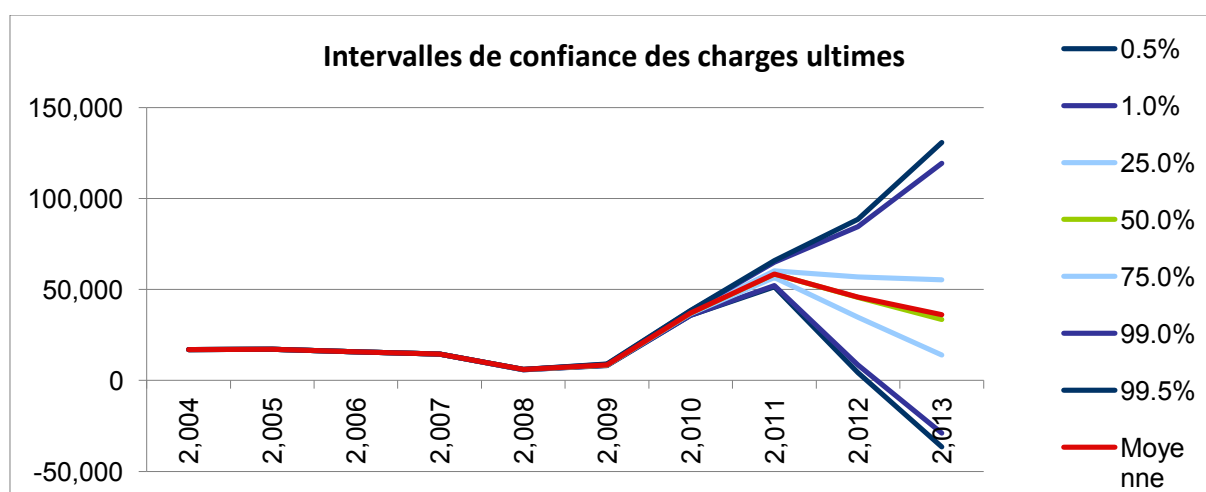


Figure 4.39 – Intervalle de confiance des charges ultimes avec 50 000 itérations

4.3.6 Pertinence du modèle

Ici on applique cette même approche aux triangles de règlements vus à fin 2012 et fin 2011 afin de comparer les résultats et de confirmer la pertinence du modèle. Il faut bien se rappeler qu'on ne fait pas la simulation sur les triangles du portefeuille entier, mais sur les triangles des branches à développement long, moyen et court. Puis on fait la somme de ces résultats pour avoir les montants de réserves simulés pour le portefeuille entier.

Les résultats détaillés de chaque branche ne seront pas présentés dans ce mémoire comme ils n'apportent pas de valeurs ajoutées. Pourtant, on précise et on discute les résultats au niveau du portefeuille entier ainsi que la comparaison avec les distributions modélisées au niveau global.

4.3.6.1 Vision fin 2012

Encore une fois, le « Best estimate » du portefeuille entier estimé par le service de provisionnement n'est pas proche de la moyenne des réserves estimées par le Bootstrap, sous l'impact de la branche à développement court. On utilise donc la méthode multiplicative pour recentrer la distribution.

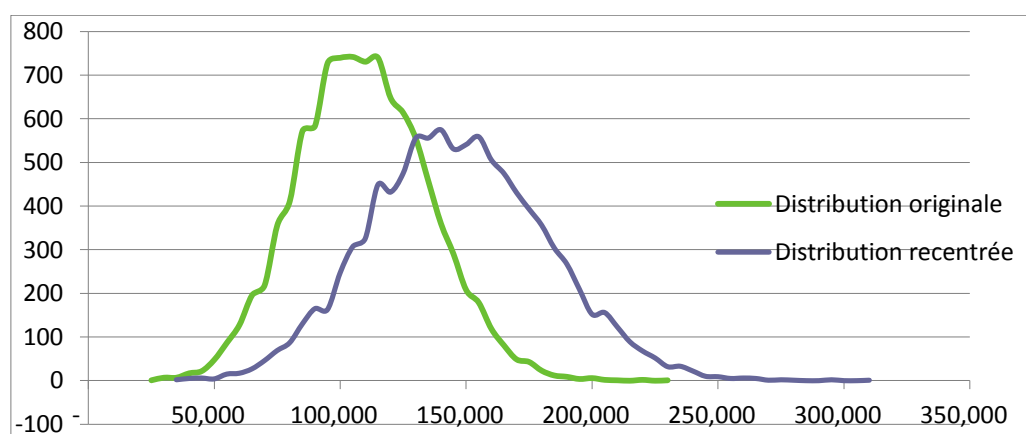


Figure 4.40 – Recentrage de la distribution du portefeuille entier

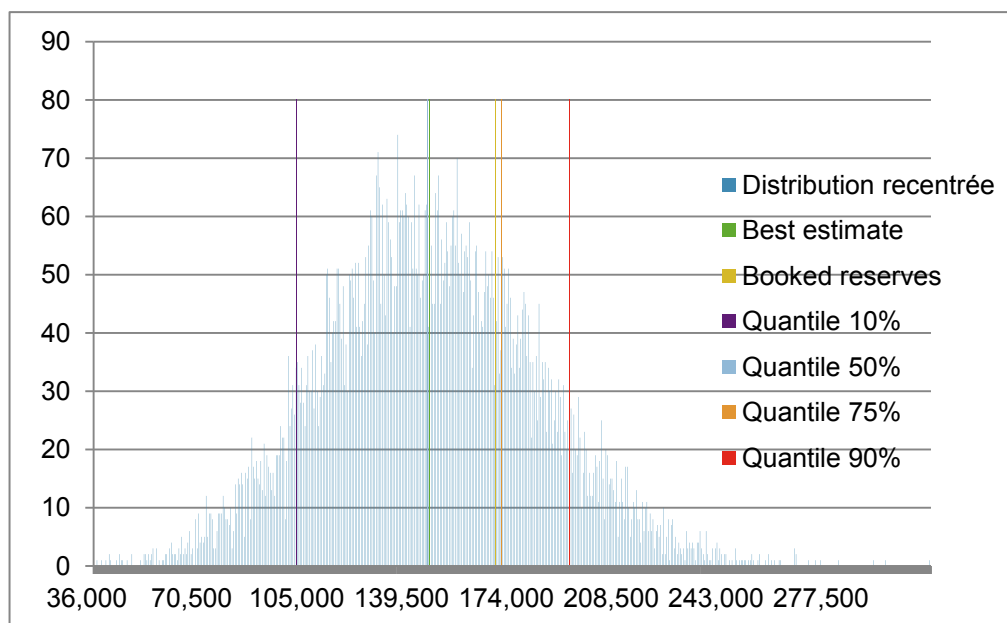


Figure 4.41 – Distribution recentrée et les quantiles du portefeuille entier

Voici quelques statistiques intéressantes :

Distribution originale		Distribution recentrée	
		Best estimate	146,786
		Quantile à cette valeur	51%
		RAD	21,335
		booked reserves	168,121
		Quantile à cette valeur	73%
Moyenne	109,192	Moyenne	146,786
se	26,053	se	35,023
CV	24%	CV	24%
Min	26,633	Min	35,803
Max	231,456	Max	311,144
Quantile 10%	76,467	Quantile 10%	102,794
Quantile 50%	108,341	Quantile 50%	145,643
Quantile 75%	126,751	Quantile 75%	170,391
Quantile 90%	142,895	Quantile 90%	192,093

On trouve que pour la vision fin 2012, le coefficient de variation baisse significativement comparé à celui de la vision fin 2013 (24% contre 32%). Le montant de « *booked reserves* » se trouve aussi au quantile 73%, qui est très proche du quantile 75%. Cela veut dire que le niveau de volatilité se réduit considérablement.

Pourquoi cette situation se passe ? En Mars 2011, le portefeuille d'Asie a été sévèrement touché par le tremblement de terre au Japon. En Juillet de la même année la Thaïlande a connu son inondation. Ces deux sinistres ont causé des dommages très importants pour PartnerRe. Juste après avoir reçu les informations sur ces sinistres, le service de provisionnement a mis des montants de réserves spécifiques pour ces derniers. Pourtant, le paiement s'est fait pendant plusieurs années. Ainsi, si on regarde les triangles de règlements vus à fin 2011, on ne voit pas clairement de traces de ces sinistres, comme la plupart des paiements ont été effectués plus tard. Pour les triangles de règlements à fin 2012, une part de la totalité de paiement est déjà incluse. Vers la fin de 2013, ces sinistres ont déjà été presque complètement payés et leurs impacts ont été inclus dans les triangles.

Par conséquent, les projections basées sur les triangles vus à fin 2011 vont donner un niveau bas de volatilité, ce qui entraîne un coefficient de variation moins important. Quand on estime les distributions de réserves sur les triangles vus à fin 2012, on attend un coefficient de variation plus élevé (ici on a un $CV = 24\%$). Finalement, la modélisation des réserves basée sur les triangles vus à fin 2013, où ces deux sinistres ont été presque totalement payés, devrait nous donner un niveau de volatilité encore plus élevé (un $CV = 32\%$, voir le tableau [4.21](#)).

En 2011 et 2012, le service de provisionnement de PartnerRe a décidé d'utiliser les distributions modélisées au niveau global pour le portefeuille d'Asie, en supposant que les profils de risques soient semblables. On a vu dans le tableau [4.21](#) que la distribution de Groupe donne un coefficient de variation de 8% pour les triangles vus à fin 2013, ce qui veut dire que la distribution de Groupe ne reflète pas bien le haut niveau de volatilité du portefeuille d'Asie, causé par les événements importants ayant eu lieu en 2011. Par la suite, on va voir la distribution de Groupe utilisée à fin 2012, en attendant que son coefficient de variation reste stable, comme ces événements ont un impact beaucoup plus limité sur le portefeuille global.

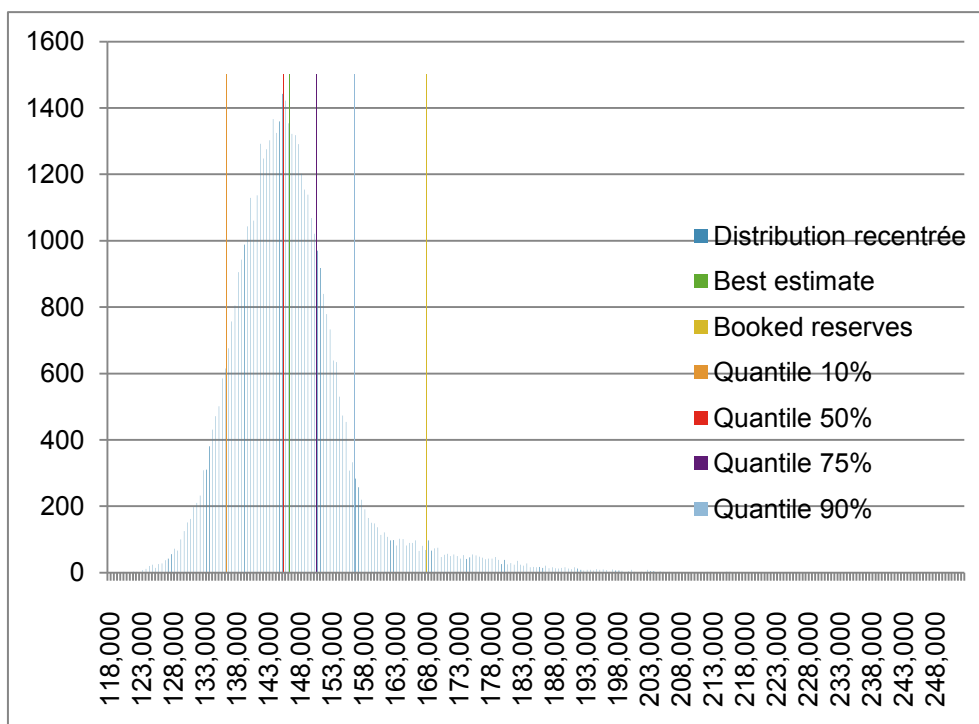


Figure 4.42 – Distribution au niveau global recentrée au niveau d'Asie

Distribution au niveau du Groupe			Distribution au niveau d'Asie	
Best estimate	146,786	-	Best estimate	146,786
Quantile à cette valeur	56%		Quantile à cette valeur	51%
RAD	21,335		RAD	21,335
booked reserves	168,121	-	booked reserves	168,121
Quantile à cette valeur	96%		Quantile à cette valeur	73%
Moyenne	146,786		Moyenne	146,786
se	9,691		se	35,023
CV	7%		CV	24%
Min	121,027		Min	35,803
Max	222,886		Max	311,144
Quantile 10%	136,668		Quantile 10%	102,794
Quantile 50%	145,776		Quantile 50%	145,643
Quantile 75%	150,699		Quantile 75%	170,391
Quantile 90%	156,626		Quantile 90%	192,093

Tableau 4.43 – Comparaison des distributions

Pour confirmer la volatilité moins importante des triangles vus à fin 2012, on peut regarder les intervalles de confiance des charges ultimes. Ils devraient être plus étroits que ceux des triangles vus à fin 2013.

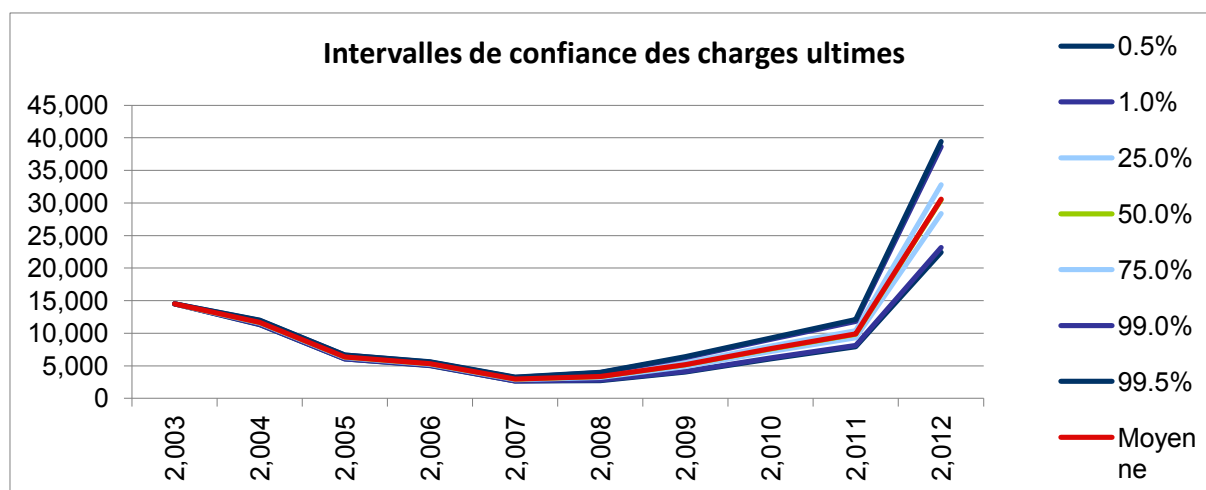


Figure 4.44 – Intervalles de confiance de la branche à développement long

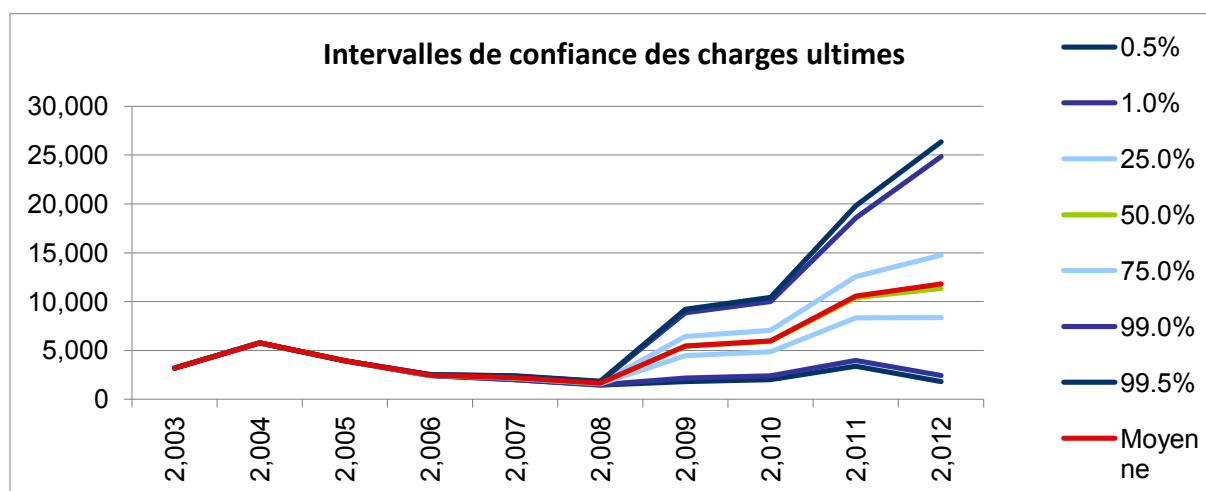


Figure 4.45 – Intervalles de confiance de la branche à développement moyen

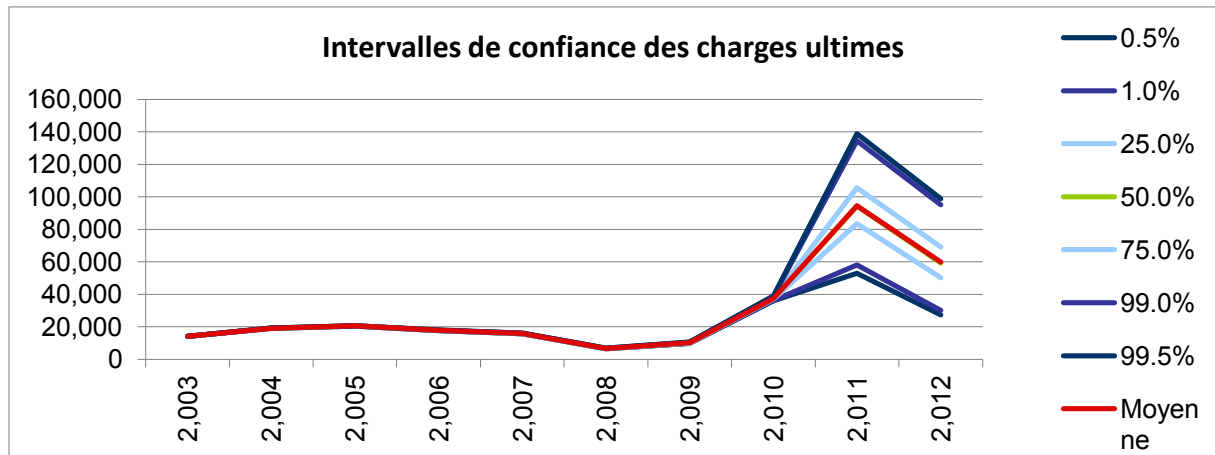


Figure 4.46 – Intervalles de confiance de la branche à développement court

Maintenant, on peut confirmer que les résultats du modèle Paid Mack Bootstrap reflètent bien ce qui s'est passé dans l'historique des sinistres du portefeuille. Le modèle est donc considéré pertinent.

4.3.6.2 Vision fin 2011

On procède de façon similaire pour vérifier que la tendance discutée auparavant soit toujours validée. Cela veut dire que le coefficient de variation de la distribution de Groupe reste stable et que celui de la distribution du portefeuille d'Asie est significativement moins important.

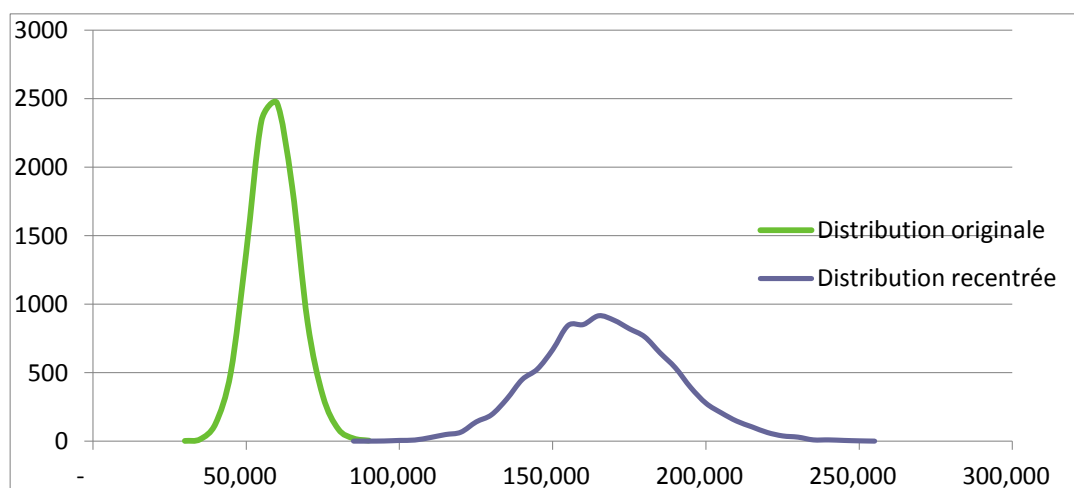


Figure 4.47 – Recentrage de la distribution du portefeuille entier

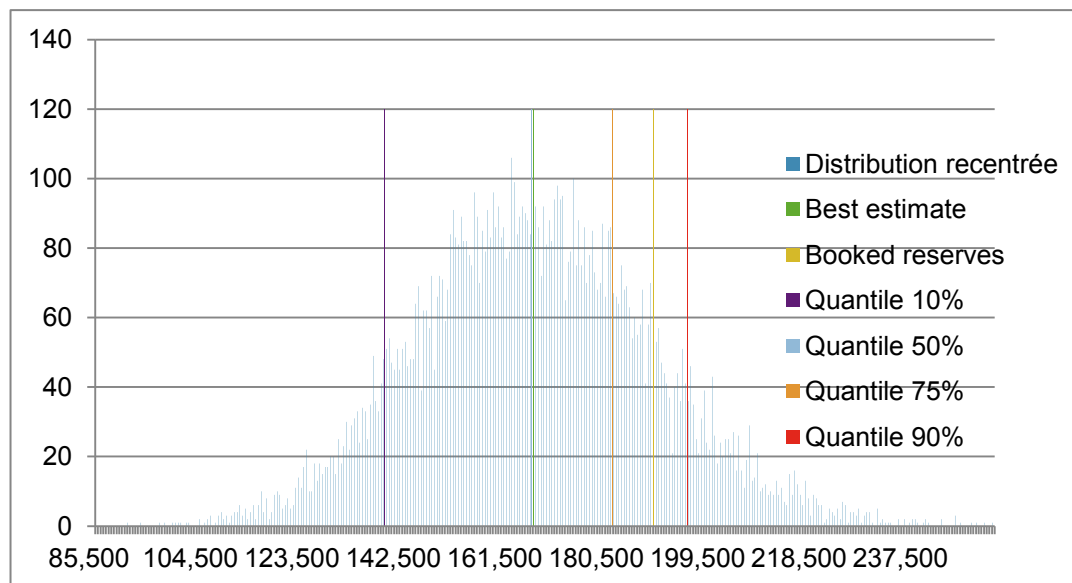


Figure 4.48 – Distribution recentrée et les quantiles du portefeuille entier

Voici quelques statistiques intéressantes :

Distribution originale

Moyenne	58,936
se	7,773
CV	13%
Min	30,038
Max	88,989
Quantile 10%	49,135
Quantile 50%	58,755
Quantile 75%	64,016
Quantile 90%	68,927

Distribution recentrée

Best estimate	167,793
Quantile à cette valeur	51%
 RAD	 22,371
 booked reserves	 190,164
Quantile à cette valeur	85%

Moyenne	167,793
se	22,129
CV	13%
Min	85,521
Max	253,356
Quantile 10%	139,889
Quantile 50%	167,278
Quantile 75%	182,258
Quantile 90%	196,240

On note que le coefficient de variation à fin 2011 est de 13%, ce qui répond à nos attentes.

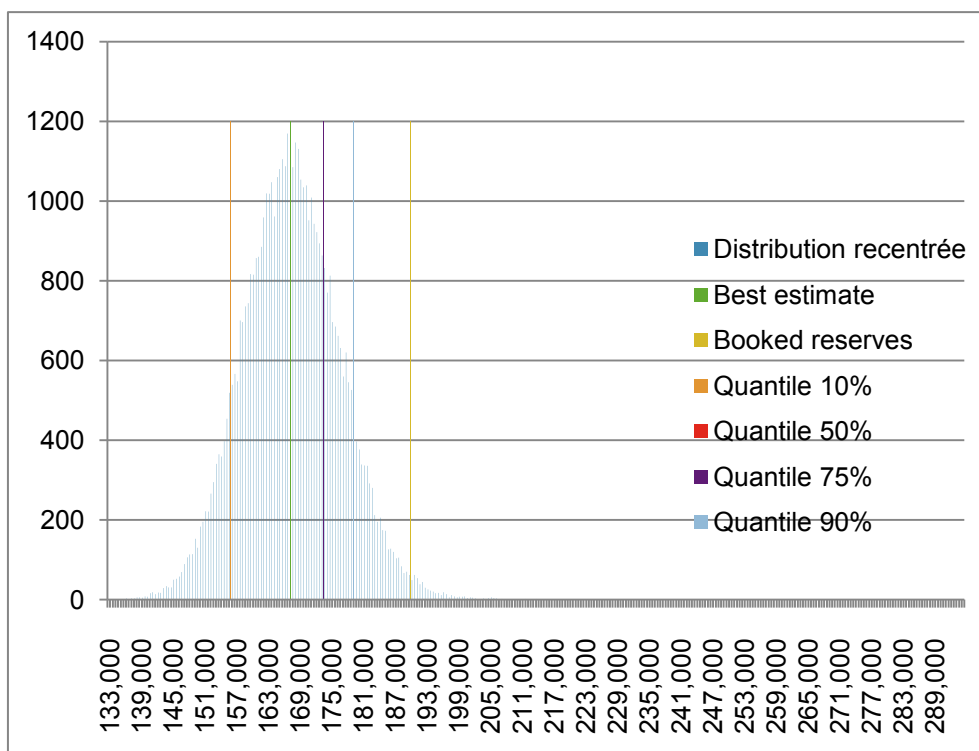


Figure 4.49 – Distribution au niveau global recentrée au niveau d'Asie

Distribution au niveau du Groupe			Distribution au niveau d'Asie	
Best estimate	167,793	-	Best estimate	167,793
Quantile à cette valeur	52%		Quantile à cette valeur	51%
RAD	22,371		RAD	22,371
booked reserves	190,164	-	booked reserves	190,164
Quantile à cette valeur	99%		Quantile à cette valeur	85%
Moyenne	167,793		Moyenne	167,793
se	9,348		se	22,129
CV	6%		CV	13%
Min	136,228		Min	85,521
Max	294,747		Max	253,356
Quantile 10%	156,240		Quantile 10%	139,889
Quantile 50%	167,312		Quantile 50%	167,278
Quantile 75%	173,563		Quantile 75%	182,258
Quantile 90%	179,306		Quantile 90%	196,240

Tableau 4.50 – Comparaison des distributions

Similairement, on veut confirmer la volatilité moins importante des triangles vus à fin 2011, en vérifiant les intervalles de confiance des charges ultimes. Ils devraient être plus étroits que ceux des triangles vus à fin 2013 et fin 2012.

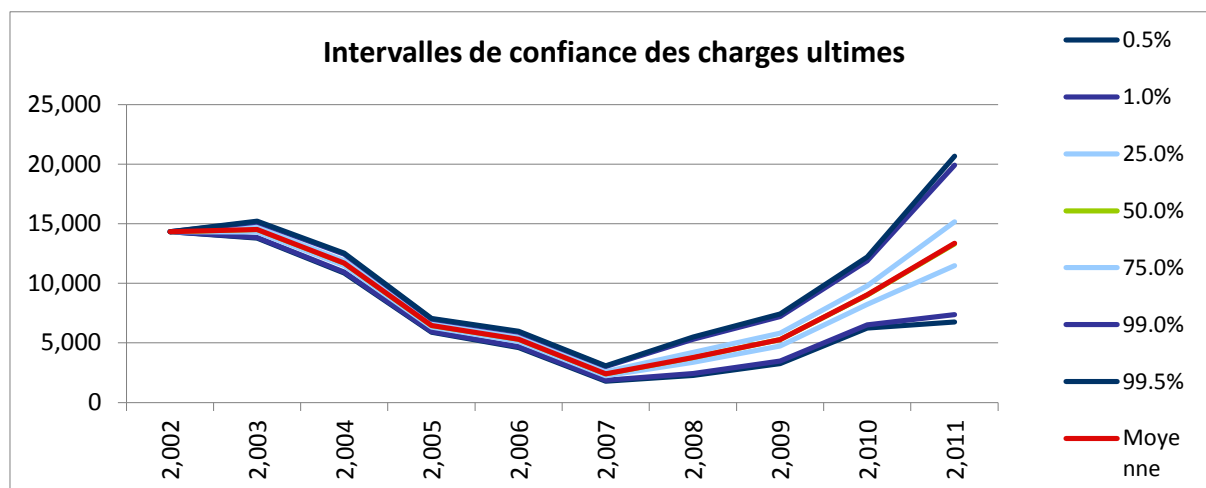


Figure 4.51 – Intervalles de confiance de la branche à développement long

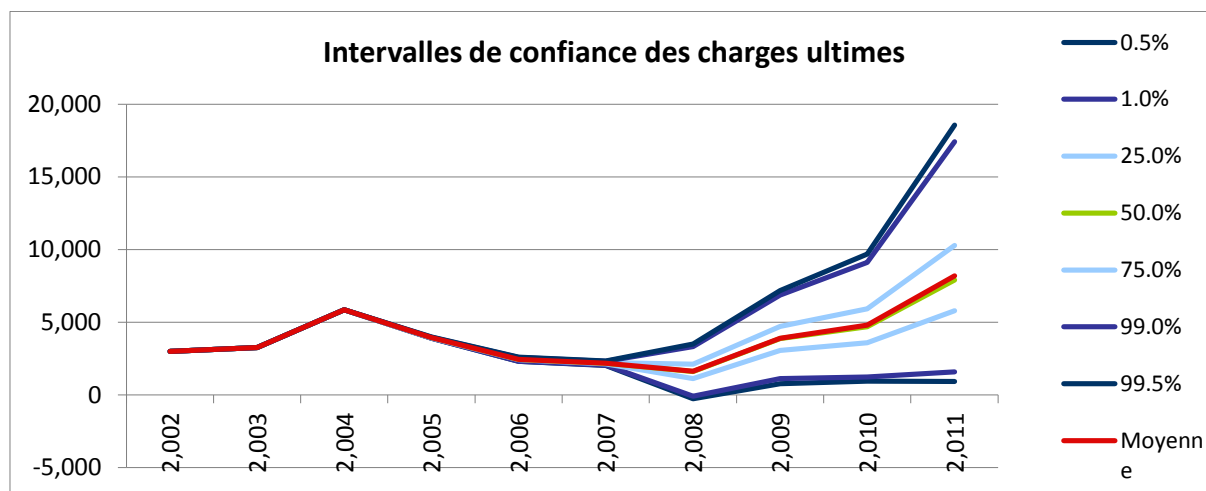


Figure 4.52 – Intervalles de confiance de la branche à développement moyen

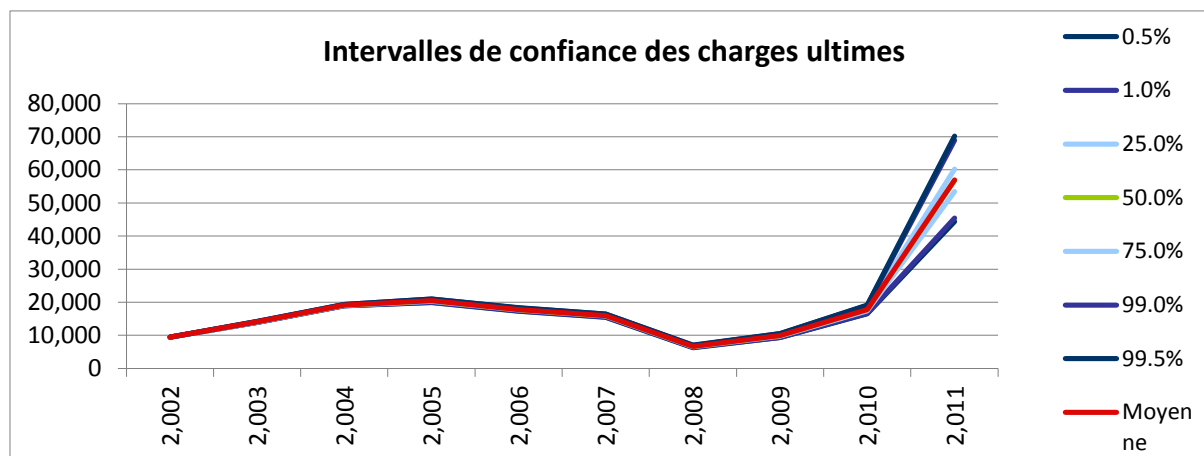


Figure 4.53 – Intervalles de confiance de la branche à développement court

Pour conclure, on trouve que les coefficients de variation des distributions de Groupe sont toujours stables, mais qu'ils baissent légèrement au fil du temps (CV = 8% en 2013, 7% en 2012 et 6% en 2011). Ceci reflète l'impact limité des événements en Asie sur un portefeuille global qui est très grand et diversifié. Pourtant, les coefficients de variation des distributions du portefeuille d'Asie varient considérablement dans le temps (CV = 32% en 2013, 24% en 2012 et 13% en 2011). Ainsi, le portefeuille d'Asie est très sensible aux sinistres graves, tels que le tremblement de terre du Japon et l'inondation qui a eu lieu en Thaïlande.

Pour quantifier l'impact sur les montants des réserves à comptabiliser au quantile 75% suite à la demande des autorités de contrôle à Singapour : d'après les distributions estimées dans le cadre de cette étude, on aurait comptabilisé 216M au lieu de 189M à fin 2013, 170M au lieu de 150M à fin 2012, 182M au lieu de 173M à fin 2011. Il faut bien noter que la différence entre les montants à enregistrer devient plus importante au fil du temps : 19M en 2011, 20M en 2012, 27M en 2013.

Deuxièmement, ces résultats prouvent qu'il est déconseillé d'utiliser les distributions modélisées au niveau global pour le portefeuille d'Asie (ce que le service de provisionnement de ParnerRe a fait ces dernières années), car cela entraîne le risque de sous-estimer la volatilité réelle du portefeuille d'Asie. Le montant de réserve au quantile 75% déterminé suivant la distribution de Groupe ne sera pas suffisant à long terme pour couvrir une perte importante qui pourrait se produire avec la probabilité de 25% pour le portefeuille asiatique.

4.3.7 Test de sensibilité

Il y a plusieurs types de test de sensibilité à faire. On peut tester différents modèles ou différents types de triangles. Quand on effectue le recentrage de la distribution, on peut vérifier que cela n'ait pas d'impact sur l'erreur de prédiction. On peut aussi vérifier si le nombre de simulations est suffisant (*rolling variance*) pour valider la cohérence des résultats d'une année sur l'autre.

Dans le SAO (*Statement of Actuarial Opinion*), l'actuaire en charge du provisionnement à Singapour devrait faire un test de sensibilité pour évaluer l'influence des hypothèses clés dans l'estimation des provisions techniques à la fin de chaque année. Dans le tableau ci-dessous, on fait varier les a priori *loss ratios*, les facteurs de développement et les facteurs de queue en gardant d'autres hypothèses inchangées.

Sensitivity to	Increase (Decrease) in Net Claim Liabilities (SGD\$000)			
	2013		2012	
	\$ change	% change	\$ change	% change
Higher <i>a priori</i> loss ratios by 2 points	1,637	2.39%	1,265	2.22%
Higher loss development factors by 3 months	5,807	8.49%	5,191	9.10%
Higher tail factors by 2%	204	0.30%	379	0.66%
Higher <i>a priori</i> loss ratios by 5 points	4,102	6.00%	3,171	5.56%
Higher loss development factors by 6 months	11,722	17.13%	10,584	18.55%
Higher tail factors by 5%	510	0.75%	936	1.64%
Higher <i>a priori</i> loss ratios by 10 points	8,211	12.00%	6,345	11.12%
Higher loss development factors by 12 months	23,784	34.76%	22,000	38.56%
Higher tail factors by 10%	1,002	1.46%	1,835	3.22%
Lower <i>a priori</i> loss ratios by 2 points	(1,637)	-2.39%	(1,265)	-2.22%
Lower loss development factors by 3 months	(2,896)	-4.23%	(2,625)	-4.60%
Lower tail factors by 2%	(180)	-0.26%	(364)	-0.64%
Lower <i>a priori</i> loss ratios by 5 points	(4,102)	-6.00%	(3,171)	-5.56%
Lower loss development factors by 6 months	(5,778)	-8.45%	(5,209)	-9.13%
Lower tail factors by 5%	(391)	-0.57%	(608)	-1.07%
Lower <i>a priori</i> loss ratios by 10 points	(8,211)	-12.00%	(6,345)	-11.12%
Lower loss development factors by 12 months	(11,402)	-16.66%	(10,212)	-17.90%
Lower tail factors by 10%	(668)	-0.98%	(1,051)	-1.84%

*By using the total impact due to each specific sensitivity factor we are excluding diversification between MCOBs

** Tail factors are defined as aggregate development factors after 10 years from the inception of an underwriting year

Tableau 4.54 – Test de sensibilité du portefeuille entier

4 Etude empirique

Pour ce faire, on reproduit la procédure de l'estimation des provisions au sein de PartnerRe pour chaque branche d'activité. Par exemple, dans le tableau 4.55, on fait augmenter les a priori *loss ratios* pour toutes les années de souscription par 10%. Puis on observe comment on peut faire varier l'estimation des provisions requises par cette branche. Similairement, on recommence cette procédure pour toutes les branches du portefeuille et on fait la somme des changements pour arriver au tableau 4.54.

	10%					
prior quarter à priori	selected à priori	pricing	current MUP	prior Q cedents' reported-to- date	cedents' reported-to- date	pre incurred-to- date & acr's /earned premium
95%	105%	0%	0%		0%	0%
95%	105%	0%	0%		0%	0%
95%	105%	0%	0%		-405%	-405%
95%	105%	0%	0%		367%	367%
58%	68%	50%	67%		128%	128%
83%	93%	56%	47%		34%	34%
99%	109%	93%	68%		78%	78%
65%	75%	68%	80%		67%	67%
60%	70%	52%	40%		38%	38%
55%	65%	48%	57%		63%	63%
54%	64%	50%	61%		55%	55%
54%	64%	49%	60%		51%	51%
62%	72%	55%	77%		80%	80%
69%	79%	59%	69%		74%	74%
66%	76%	61%	54%		49%	49%
69%	79%	65%	78%		78%	79%
515%	525%	69%	451%		455%	455%
91%	101%	64%	83%		82%	83%
62%	72%	62%	38%		38%	40%
59%	69%	59%	36%		22%	30%

Tableau 4.55 – Variation des a priori *loss ratios* par 10%

Dans le tableau 4.56, on accélère les facteurs de développement de 12 mois. Puis on observe comment on peut faire varier l'estimation des provisions requises par cette branche. Similairement, on recommence cette procédure pour toutes les branches du portefeuille et on fait la somme des changements pour arriver au tableau 4.54.

On répète ces étapes pour différentes hypothèses clés et différents niveaux de variation.

LDF Quarterly Adjusted			12		
LDF up to 10	LDF up to 10	LDF up to 10	LDF up to 10	LDF up to 10	LDF up to 10
uplifted paid factor Y-1-to-ultimate	uplifted reported factor Y-1-to-ultimate	BF & benktander weight factor (adjusted for uplift)	uplifted paid factor Y-to-ultimate	uplifted factor Y-to-ultimate	BF & benktander weight factor (adjusted for uplift)
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	100.00%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	99.98%	1.00	1.00	100.00%
1.00	1.00	99.98%	1.00	1.00	99.98%
1.00	1.00	99.96%	1.00	1.00	99.98%
1.00	1.00	99.95%	1.00	1.00	99.96%
1.00	1.00	99.95%	1.00	1.00	99.95%
1.00	1.00	99.95%	1.00	1.00	99.95%
1.00	1.00	99.85%	1.00	1.00	99.95%
1.01	0.99	99.25%	1.00	1.00	99.85%
1.03	0.98	97.73%	1.01	0.99	99.25%
1.15	0.98	97.73%	1.03	0.98	97.73%
3.51	1.47	65.15%	1.15	0.98	97.73%
-15.98	9.75	9.79%	3.51	1.47	65.15%
1000.00	1000.00	0.10%	-15.98	9.75	9.79%
0.00	0.00	0.00%	1000.00	1000.00	0.10%

Tableau 4.56 – Variation des facteurs de développement par 12 mois

Cette analyse de sensibilité donne des informations sur la variabilité potentielle de l'estimation des provisions réalisée par l'actuaire de PartnerRe pour le portefeuille d'Asie. Il faut noter que même si la rétrocession externe s'utilise à très bas niveau à PartnerRe, on a quand même une rétrocession interne de 50% entre PartnerRe Singapour et PartnerRe Europe. Le tableau 4.54 présente la variance en Net de tous types de rétrocession.

Le mouvement de sensibilité d'une année à l'autre reflète des facteurs tels que le changement dans la composition des affaires, dans les hypothèses utilisées ainsi que le choix de méthodes actuarielles par l'actuaire en charge.

Le tableau 4.54 montre la variation sous l'influence de chaque facteur et ne prend pas en compte l'impact de la diversification du portefeuille. Ses résultats se situent donc à droite du quantile 50% de la distribution et montrent un certain niveau de prudence additionnelle.

4.3.8 Limites et améliorations futures

Jusqu'ici, les modèles stochastiques étudiés s'intéressent presque complètement à une vision ultime. On s'attend à ce que le risque en vision ultime soit supérieur au risque en vision d'un an puisque la période de choc est plus longue. La période de choc ici représente la période pendant laquelle le choc est appliqué sur le risque. Cependant, la directive européenne Solvabilité 2 se base sur l'évaluation de la volatilité à un horizon d'un an. Dans le futur, on pourrait essayer de proposer une extension du modèle afin de calculer les estimateurs à une vision à un an.

On devrait aussi examiner dans le futur la dépendance entre les branches d'activités et la diversification des business. Le montant des réserves global nécessaire est souvent moins important que la somme des provisions de chaque branche. Ceci est dû à l'effet de la diversification qui existe. Un sinistre majeur dans une branche ou un marché peut être en tout ou en partie compensé par le bon résultat d'opération dans d'autres branches ou marchés. Il est intéressant de poursuivre ce travail en faisant intervenir la dépendance de queue dans le modèle. Ce développement permettra de refléter des situations où les différentes branches d'activités sont considérées indépendantes dans les cas normaux, mais présentent quand même une forte dépendance pour les sinistres graves.

D'ailleurs, les réserves sont estimées sans l'utilisation du taux d'actualisation, ce qui rend l'estimation plus prudente. Ce problème n'a pas beaucoup d'impact sur les branches à développement court. Cependant, sur les branches à développement long telles que la responsabilité civile, les sinistres pourraient être complètement payés après une période de 10 ans (voire 15 ans). Dans ce cas, la valeur actualisée sera considérablement plus faible. On pourrait utiliser un taux d'actualisation constant un peu faible pour actualiser de manière prudente les sommes à payer dans le futur. Mais l'inconvénient est que comme ce taux est constant, on ne peut pas anticiper les mouvements de taux et on réduit donc indirectement la volatilité des réserves. Mais si on essaie de simuler les diffusions de ce taux, un autre problème se pose : l'inflation. On aura donc besoin d'une étude plus approfondie sur ce sujet.

En Janvier 2015, une présentation de ce travail a été faite pour l'équipe de tarification et la souscription de PartnerRe. Il a été décidé que ces études soient encore développées pour des fins de tarification. Les limites et améliorations éventuelles mentionnées seront abordées, avec la collaboration de l'équipe de provisionnement.

Conclusion

Tout au long de ce mémoire, on a revisité quelques méthodes de provisionnement qu'un réassureur peut utiliser pour calculer le montant des provisions nécessaire et ses caractères de l'incertitude. Les méthodes traditionnelles basées sur les facteurs de développement qui s'utilisent pour traduire le ratio de passage d'une année de développement à une autre sont les plus rencontrées en pratique. D'ailleurs, les simulations de Bootstrap permettent d'obtenir les distributions des réserves de chaque branche d'activité majeure.

Les méthodes déterministes sont adaptées pour calculer une provision de « Best estimate ». Pourtant, elles ne donnent aucune indication sur la distribution sous-jacente. C'est la raison pour laquelle elles ne sont pas appropriées lors qu'il s'agit d'évaluer un risque suivant une règle de prudence explicite.

Les méthodes stochastiques font un bon travail en ce qui concerne la détermination du niveau aléatoire des responsabilités des réassureurs vis-à-vis des assurés. Elles répondent bien aux demandes des autorités sous Solvabilité 2. Les sources d'erreurs de ces modèles peuvent être diverses : environnement juridique et commercial, manque de données, erreur d'estimation des paramètres, inadaptation du modèle aux données retenues... Il est donc très important de vérifier les hypothèses liées à ces modèles avant de les utiliser. L'approche stochastique est en fait une avancée considérable dans le provisionnement, mais elle doit encore évoluer pour pouvoir être mieux utilisée dans la pratique.

On a choisi le modèle Paid Mack Bootstrap pour déterminer les distributions des réserves suivant diverses raisons (comme mentionné avant). Pourtant, le choix du modèle le plus performant à utiliser pour obtenir les meilleures estimations est toujours à l'origine de plusieurs controverses. Il n'y a pas de réponse unique à une telle question, tout dépend du type de données disponibles et des problèmes à traiter.

Les résultats obtenus ont confirmé la prudence des estimations effectuées. Il faut bien noter que le montant des provisions réellement comptabilisées se situe entre le quantile 50% et le scénario modéré. Précisément, il se situe au quantile 57%, et représente donc les réserves à constituer pour couvrir les risques qui ont 57 chances sur 100 de se produire.

De manière plus large, cette étude a permis d'identifier les risques auxquels est exposé PartnerRe sur le marché d'Asie. Cela nous a fait traiter différents types de risques et l'impact des différentes méthodes de provisionnement utilisées. Cette étude a aussi montré l'importance d'effectuer des contrôles et des tests sur la pertinence des modèles à envisager, sans quoi les résultats n'auraient aucun sens. D'autres facteurs se sont révélés essentiels pour la fiabilité des estimations des provisions techniques : la connaissance du business, la disponibilité des données fiables, la gestion de risques...

Les résultats ont aussi montré qu'il était déconseillé d'utiliser les distributions de Groupe pour le portefeuille d'Asie. Quand cette approche a été utilisée pour déterminer le montant des réserves nécessaire au quantile 75% comme demandé par les autorités à Singapour, on a en fait sous-estimé la volatilité du portefeuille d'Asie. Il est donc préférable d'estimer ces distributions en se basant sur les triangles du portefeuille propre d'Asie.

En bref, il y a eu un intérêt toujours croissant pour les modèles stochastiques ces trente dernières années, mais leurs applications restent limitées en pratique. La raison principale pourrait être le manque de besoin car les méthodes déterministes sont plus que suffisantes pour calculer le « Best estimate » des provisions. Pourtant, avec les développements des nouvelles régulations comme la directive Solvabilité 2, ces modèles stochastiques seront de plus en plus utilisés pour répondre à de nouvelles exigences.

Glossaire

Acceptation: opération par laquelle un réassureur accepte de prendre en charge une partie d'un risque déjà souscrit par un assureur.

Actuaire : mathématicien spécialiste de l'application de la statistique et des probabilités aux opérations de finance et d'assurance, visant notamment l'évaluation et la gestion des risques.

Actuariat : technique appliquant les méthodes statistiques et le calcul des probabilités aux opérations financières, aux problèmes d'assurance, de prévoyance et d'amortissement.

Baskettesting : test visant à contrôler la performance, la qualité et la stabilité des modèles dans le temps. Ces tests sont indispensables avant toute validation de modèle statistique interne.

Benchmark : point de référence, un indicateur chiffré de performance dans un domaine donné (qualité, productivité, rapidité, etc.) tiré de l'observation des résultats de l'entreprise qui a réussi le mieux dans ce domaine. Cet indicateur peut servir à définir les objectifs de l'entreprise qui cherche à rivaliser avec elle.

Capacité : montant maximal d'assurance ou de réassurance disponible pour couvrir les risques au niveau d'une entreprise. La capacité d'un assureur est fonction de ses capitaux propres, de son chiffre d'affaires et de ses traités de réassurance.

Cédante : nom donné à une compagnie d'assurance qui cède une partie des risques qu'elle a souscrits à un réassureur.

Événement : agrégation de plusieurs sinistres qui ont une origine aléatoire commune et qui affectent, soit un même assuré au titre de plusieurs polices, soit une pluralité d'assurés.

Excédent de perte annuelle (*Stop Loss*) : couverture de réassurance non proportionnelle ayant pour objectif de limiter la perte de la cédante sur un exercice.

PFGS (Provision pour frais de gestion de sinistres) : provisions techniques constituées pour assumer tous les frais généraux (hors indemnisation des sinistres) qui peuvent survenir durant la période de liquidation du portefeuille.

Prime : somme perçue par l'assureur ou le réassureur en contrepartie de la couverture d'un risque.

Prorata temporis : proportionnel au temps écoulé.

Rapport sinistre à primes (*Loss ratio*) : rapport, parfois noté S/P, du coût total des sinistres de l'exercice au montant des primes acquises.

Ratio combiné (*Combined ratio*) : somme du quotient frais généraux plus commissions encourues sur primes émises et du quotient sinistres encourus sur primes acquises.

Rétrocession : opération par laquelle un réassureur cède lui-même une partie de ses risques à un tiers, appelé rétrocessionnaire, moyennant le paiement d'une prime.

Risque : tout événement interne et/ou externe susceptible d'avoir un impact négatif majeur (financier, humain ou stratégique).

Run-off : arrêt de toute souscription sur un portefeuille de risques, qui entraîne la gestion du déroulement, dans le temps, du stock des provisions techniques jusqu'à leur épuisement complet. En fonction de la branche, l'opération de run-off peut prendre plusieurs dizaines d'années.

Sinistre : événement déclenchant la garantie du contrat.

Solvabilité : mesure de la capacité d'une personne physique ou morale à payer ses dettes sur le court, moyen et long terme.

Traité de réassurance : convention de réassurance selon laquelle l'assureur s'engage à céder au réassureur, qui est tenu d'accepter, tous les risques souscrits par cet assureur dans une catégorie d'affaires déterminée moyennant des conditions techniques et financières fixées par cette convention.

Bibliographie

Mémoires

- [1] C. Bercot. (2005) *Méthode d'amélioration du calcul de provisionnement adaptée aux spécificités de la réassurance non-vie*. Mémoire ISUP.
- [2] D. Malinge. (2013) *Optimisation d'un portefeuille de réassurance non-vie : L'exemple du Property & Casualty*. Mémoire ISFA.
- [3] L. Marfoq. (2011) *Evaluation des provisions techniques en réassurance IARD, dans le cadre de solvabilité 2*. Mémoire Dauphine.
- [4] C. Bonnefoy et B. Devictor. (2007) *Calcul stochastique de provisions techniques d'assurance non-vie*. Mémoire ENSAE.
- [5] J. Chavanne. (2010) *Solvabilité II – Provisionnement stochastique des garanties en cas d'arrêt de travail*. Mémoire ISUP.
- [6] G. Krauth. (2007) *Provisionnement et corrélation entre branches*. Mémoire CNAM
- [7] P. H. Le et G. Virot. (2013) *Méthode d'évaluation stochastique des provisions techniques d'une entreprise d'assurance dommages par une approche ligne à ligne*. Mémoire ENSAE.
- [8] M. Gremillet. (2013) *Provisionnement non-vie : la méthode Réversible Jump Markov Chain Monte Carlo*. Mémoire ISFA.
- [9] Y. Chen. *Détermination des programmes de réassurance optimaux d'une société d'assurance non-vie dans le cadre de Solvabilité II*. Mémoire Dauphine.
- [10] T. Cambarrot. (2009) *Provisionnement non-vie : le modèle de Poisson sur-dispersé*. Mémoire ISFA.
- [11] P. Q. Hung. (2006) *Provisionnement en assurance non-vie*. Mémoire ISFA.
- [12] K. Mandhouj. (2008) *Analyse du risque de provisionnement en assurance IARD et enjeux dans le cadre de futur référentiel Solvabilité II*. Mémoire ISFA.
- [13] P. Julien. (2008) *Evaluation stochastique des provisions mathématiques pour le risque incapacité - invalidité*. Mémoire EURIA.

- [14] S. Jaziri. (2011) *Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an*. Mémoire ISFA.

Ouvrages

- [1] J. Blondeau et C. Partrat. (2003) *La réassurance : Approche technique. Assurance, audit, actuariat*. Economica.
- [2] C. Partrat, J-L. Besson. (2005) *Assurance Non-Vie - Modélisation, Simulation*. Economica.

Articles

- [1] SwissRe. (2003) *Introduction à la réassurance*.
- [2] SwissRe. (1997) *Réassurance proportionnelle et non proportionnelle*.
- [3] T. Mack. (1993) *Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates*.
- [4] T. Mack. (1993) *Distribution-free calculation of the standard error of the Chain Ladder reserve estimate*.
- [5] P. D. England et R. J. Verrall. (2002) *Stochastic claims reserving in general insurance*.
- [6] P. D. England et R. J. Verrall. (1998) *A stochastic model underlying the Chain Ladder technique*
- [7] Caritat recherche & formation. (2013) *Provisionnement stochastique en assurance non-vie*.

Cours

- [1] M. V. Wuthrich et M. Merz. (2006) *Stochastic claims reserving methods in non-life insurance*.
- [2] A. Charpentier (2011) *Assurance non-vie : tarification & provisionnement*
- [3] K. D. Schmidt. (2003) *Modèles et méthodes de réservation*.

Documentation en ligne

www.partnerre.com

Annexes

A. Codes VBA

A.1 Maximisation avec le Solveur

```

Sub MaxVrais()
,

    ActiveSheet.Unprotect

    SolverOk SetCell:="$B$62", MaxMinVal:=1, ValueOf:=0, ByChange:="$B$64:$J$64"

    SolverSolve (True)

    ActiveSheet.Protect DrawingObjects:=False, Contents:=True, Scenarios:= _
        False
End Sub

```

A.2 Bootstrap du modèle ODP

```

Sub Bootstrap_ODP()
,

    Application.ScreenUpdating = False
    Application.Calculation = xlManual
    SolverOptions StepThru:=False
    Sheets("ODP - Bootstrap").Unprotect

    Dim tab_resampling() As Variant
    Dim tab_process() As Variant
    Dim tab_reserves() As Double
    sim = Sheets("ODP - Bootstrap").Range("b98").Value
    nb = Sheets("ODP").Range("b2").Value
    n = Sheets("ODP").Range("b1").Value
    ReDim tab_reserves(n + 1, sim)

```

'Suppression des valeurs dans la zone de résultats

Sheets("ODP - Bootstrap").Range("a105").Select

Sheets("ODP - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select

Sheets("ODP - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select

Selection.ClearContents

'Suppression de l'ancien ré-échantillonnage et nouveau ré-échantillonnage

Sheets("Bootstrap").Cells.Clear

*Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).FormulaR1C1
= "TRUNC(RAND()*" & nb - 3 & "+1)"*

Calculate

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Copy

*Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).PasteSpecial
Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _*

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_resampling = Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Value

'Suppression des aléas pour la process error et nouveaux aléas

Sheets("Process").Cells.Clear

*Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - n - 1)).FormulaR1C1
= "=RAND()"*

Calculate

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - n - 1)).Copy

*Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - n - 1)).PasteSpecial
Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _*

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_process = Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - n - 1)).Value

For i = 1 To sim

'Copie des valeurs du ré-échantillonnage

For j = 1 To nb

Sheets("ODP - Bootstrap").Range("aa2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_resampling(i, j)

If j < nb - n + 1 Then Sheets("ODP - Bootstrap").Range("ac2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_process(i, j)

Next j

Calculate

'Valeurs initiales pour le maximum de vraisemblance

Range("B69:K69").FormulaR1C1 = _

"=IF(R[-13]C=1,1/PRODUCT(R[-15]C:R[-15]C10),IF(R[-13]C<>n,MAX(1/PRODUCT(R[-15]C:R[-15]C10)-SUM(RC[-1]:RC2),0.01%),MAX(1-SUM(RC[-1]:RC2),0.01%)))"

Range("M57:M66").FormulaR1C1 = _

*"=max(OFFSET(R[-14]C[-2],0,R57C[-12]-RC[-12])*IF(R57C[-12]=RC[-12],1,PRODUCT(R54C[-3]:OFFSET(R54C[-3],0,R58C[-12]-RC[-12])),1)"*

Calculate

'Application du solveur pour le maximum de vraisemblance

SolverOk SetCell:="\$B\$67", MaxMinVal:=1, ValueOf:=0, ByChange:= _

"\$B\$69:\$K\$69,\$M\$57:\$M\$66"

SolverSolve (True)

'Simulation de la process error

Calculate

'Copie des résultats

Range("a105").Offset(i - 1, 0).Value = i

For j = 1 To n + 1

tab_reserves(j, i) = Range("c84").Offset(j - 1, 0).Value

Range("B105").Offset(i - 1, j - 1).Value = tab_reserves(j, i)

Next j

Next i

Range("aa2:aa" & nb - 1).FormulaR1C1 = "=TRUNC(RAND()(Nb-3)+1)"*

Range("ac2:ac" & nb - n - 1).FormulaR1C1 = "=RAND()"

Application.Calculation = xlAutomatic

Application.ScreenUpdating = True

Sheets("ODP - Bootstrap").Protect DrawingObjects:=False, Contents:=True, Scenarios:= _

False

End Sub

A.3 Bootstrap du modèle de Mack

Sub Bootstrap_Mack()

,

Application.ScreenUpdating = False

Application.Calculation = xlManual

SolverOptions StepThru:=False

Sheets("Mack - Bootstrap").Unprotect

Dim tab_resampling() As Variant

Dim tab_process() As Variant

Dim tab_reserves() As Double

sim = Sheets("Mack - Bootstrap").Range("b85").Value

nb = Sheets("Mack").Range("b2").Value

n = Sheets("Mack").Range("b1").Value

ReDim tab_reserves(n + 1, sim)

'Suppression des valeurs dans la zone de résultats

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("a92").Select

Sheets("Mack - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select

Sheets("Mack - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select

Selection.ClearContents

'Suppression de l'ancien ré-échantillonnage et nouveau ré-échantillonnage

Sheets("Bootstrap").Cells.Clear

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).FormulaR1C1 = "=TRUNC(RAND()" & nb - 2 & "+1)"*

Calculate

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Copy

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_resampling = Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Value

'Suppression des aléas pour la process error et nouveaux aléas

Sheets("Process").Cells.Clear

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).FormulaR1C1 = "=RAND()"

Calculate

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Copy

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_process = Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Value

For i = 1 To sim

'Copie des valeurs du ré-échantillonnage

For j = 1 To nb

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("aa2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_resampling(i, j)

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("ac2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_process(i, j)

Next j

Calculate

'Valeurs initiales pour le maximum de vraisemblance

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("B55:J55").FormulaR1C1 = _

"=IF(SUMPRODUCT(R[-24]C:R[-15]C,R[-53]C:R[-44]C)<0,1,LN(SUMPRODUCT(R[-24]C:R[-15]C,R[-53]C:R[-44]C)/SUM(R[-53]C:OFFSET(R[-53]C,n-R[-54]C[1],0))))"

Calculate

'Application du solveur pour le maximum de vraisemblance

SolverOk SetCell:="\$B\$53", MaxMinVal:=1, ValueOf:=0, ByChange:="\$B\$55:\$J\$55"

SolverSolve (True)

'Simulation de la process error

Calculate

'Copie des résultats

Range("a92").Offset(i - 1, 0).Value = i

For j = 1 To n + 1

tab_reserves(j, i) = Range("c71").Offset(j - 1, 0).Value

Range("B92").Offset(i - 1, j - 1).Value = tab_reserves(j, i)

Next j

Next i

Range("aa2:aa" & 2 + nb - 1).FormulaR1C1 = "=TRUNC(RAND()(Nb-2)+1)"*

Range("ac2:ac" & 2 + nb - 1).FormulaR1C1 = "=RAND()"

Application.Calculation = xlAutomatic

Application.ScreenUpdating = True

Sheets("Mack - Bootstrap").Protect DrawingObjects:=False, Contents:=True, Scenarios:= _

False

End Sub

A.4 Bootstrap simplifié du modèle de Mack

Sub Bootstrap_Mack()

,

Application.ScreenUpdating = False

Application.Calculation = xlManual

Sheets("Mack - Bootstrap").Unprotect

Dim tab_resampling() As Variant

Dim tab_process() As Variant

Dim tab_reserves() As Double

Dim sim As Integer

Dim nb As Integer

Dim n As Integer

Dim i As Integer

Dim j As Integer

sim = Sheets("Mack - Bootstrap").Range("b71").Value

nb = Sheets("Mack").Range("b2").Value

n = Sheets("Mack").Range("b1").Value

ReDim tab_reserves(n + 1, sim)

'Suppression des valeurs dans la zone de résultats

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("a78").Select

Sheets("Mack - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select

Sheets("Mack - Bootstrap").Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select

Selection.ClearContents

'Suppression de l'ancien ré-échantillonnage et nouveau ré-échantillonnage

Sheets("Bootstrap").Cells.Clear

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).FormulaR1C1 = "=TRUNC(RAND()" & nb - 2 & "+1)"*

Calculate

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Copy

Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_resampling = Range(Sheets("Bootstrap").Range("A1"), Sheets("Bootstrap").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Value

'Suppression des aléas pour la process error et nouveaux aléas

Sheets("Process").Cells.Clear

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).FormulaR1C1 = "=RAND()"

Calculate

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Copy

Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _

:=False, Transpose:=False

Application.CutCopyMode = False

tab_process = Range(Sheets("Process").Range("A1"), Sheets("Process").Range("A1").Offset(sim - 1, nb - 1)).Value

For i = 1 To sim

'Copie des valeurs du ré-échantillonnage

For j = 1 To nb

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("aa2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_resampling(i, j)

Sheets("Mack - Bootstrap").Range("ac2").Offset(j - 1, 0).Value = tab_process(i, j)

Next j

Calculate

'Copie des résultats

Range("a78").Offset(i - 1, 0).Value = i

For j = 1 To n + 1

tab_reserves(j, i) = Range("c57").Offset(j - 1, 0).Value

Range("B78").Offset(i - 1, j - 1).Value = tab_reserves(j, i)

Next j

Next i

Range("aa2:aa" & 2 + nb - 1).FormulaR1C1 = "=TRUNC(RAND()(Nb-2)+1)"*

Range("ac2:ac" & 2 + nb - 1).FormulaR1C1 = "=RAND()"

Sheets("Mack - Bootstrap").Protect DrawingObjects:=False, Contents:=True, Scenarios:= _

False

Sheets("Résultats").Select

Range("B2:B11").FormulaR1C1 = _

"=RC[1]+OFFSET('Mack - Bootstrap'!R[43]C[9],0,R2C[-1]-RC[-1])"

Range("B12").FormulaR1C1 = "=SUM(R[-10]C:R[-1]C)"

Range("C2:C12").FormulaR1C1 = _

"=AVERAGE(OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,0,RC[7]):OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,'Mack - Bootstrap'!R71C2-1,RC[7]))"

Range("D2:D12").FormulaR1C1 = _

"=STDEV(OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,0,RC[6]):OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,'Mack - Bootstrap'!R71C2-1,RC[6]))"

Range("E3:E12").FormulaR1C1 = "=RC[-1]/RC[-2]"

Range("H3:I12").FormulaR1C1 = "=RC[-5]/RC[-2]-1"

Range("L2:r11").FormulaR1C1 = _

```
"=PERCENTILE(OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,0,RC10):OFFSET('Mack - Bootstrap'!R78C2,'Mack - Bootstrap'!R71C2-1,RC10),R1C)+RC2-RC3"
```

```
Range("S2:s11").FormulaR1C1 = "=RC[-17]"
```

```
Calculate
```

```
Range("B2:E12").Select
```

```
Selection.Copy
```

```
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
```

```
:=False, Transpose:=False
```

```
Range("H2:I12").Select
```

```
Selection.Copy
```

```
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
```

```
:=False, Transpose:=False
```

```
Range("L2:S11").Select
```

```
Selection.Copy
```

```
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
```

```
:=False, Transpose:=False
```

```
Application.Calculation = xlAutomatic
```

```
Application.ScreenUpdating = True
```

```
End Sub
```

B Triangles de règlements

Cette partie présente les triangles de règlements utilisés dans le chapitre 4 « Etude empirique ». Pour chaque branche, on présente les triangles vus à fin 2013, 2012 et 2011.

B.1 Branche à développement long

2013

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	957	4,388	6,203	7,928	9,409	10,916	11,691	12,109	12,448	12,586
2,005	1,250	2,597	3,900	5,086	5,264	7,244	7,488	7,639	7,512	
2,006	758	1,955	2,803	4,166	3,913	5,785	6,331	6,468		
2,007	752	2,381	2,907	2,427	1,703	3,193	3,481			
2,008	1,306	1,006	3,147	2,599	2,463	3,472				
2,009	113	2,204	3,061	3,625	3,827					
2,010	644	3,387	4,413	4,840						
2,011	239	3,617	5,534							
2,012	2,411	12,063								
2,013	2,844									

2012

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003	3,680	8,284	9,752	10,895	12,334	13,290	14,003	14,306	14,423	14,497
2,004	2,573	5,531	6,788	7,956	9,831	10,747	11,037	11,358	11,616	
2,005	1,447	3,260	4,078	4,531	5,393	5,928	6,076	6,241		
2,006	1,008	2,215	2,830	3,383	4,083	4,808	5,097			
2,007	1,382	1,753	2,090	2,353	2,677	2,714				
2,008	802	2,215	2,458	2,650	2,838					
2,009	1,396	2,787	3,270	3,738						
2,010	1,928	3,995	4,834							
2,011	2,211	5,230								
2,012	7,575									

2011

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002	3,029	8,857	10,233	10,913	11,780	12,352	13,320	13,781	14,282	14,323
2,003	3,673	8,308	9,779	10,917	12,349	13,294	13,999	14,303	14,466	
2,004	2,571	5,571	6,834	8,001	9,866	10,777	11,069	11,387		
2,005	1,445	3,244	4,059	4,509	5,366	5,903	6,124			
2,006	1,002	2,203	2,815	3,366	4,068	4,767				
2,007	1,374	1,752	2,088	2,352	2,002					
2,008	818	2,277	2,533	2,762						
2,009	1,389	2,820	3,444							
2,010	2,123	4,946								
2,011	3,172									

B.2 Branche à développement moyen

2013

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	160	2,908	4,934	5,399	5,541	5,631	5,719	5,739	5,674	5,675
2,005	170	534	988	1,551	1,872	3,777	3,855	3,856	3,861	
2,006	324	1,407	1,866	2,071	2,218	2,348	2,442	2,431		
2,007	16	546	1,576	1,827	2,008	2,074	2,128			
2,008	170	980	1,271	1,290	1,514	1,522				
2,009	484	1,143	2,761	4,499	4,577					
2,010	76	2,005	3,831	4,373						
2,011	750	4,080	6,085							
2,012	959	3,690								
2,013	551									

2012

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003	938	2,180	3,034	3,185	3,195	3,178	3,235	3,206	3,208	3,207
2,004	1,934	4,970	5,450	5,647	5,757	5,835	5,781	5,788	5,791	
2,005	361	964	1,391	1,911	3,801	3,793	3,931	3,947		
2,006	587	1,702	2,044	2,247	2,383	2,388	2,484			
2,007	200	1,197	1,829	2,009	2,096	2,161				
2,008	750	1,246	1,355	1,395	1,614					
2,009	688	1,547	3,600	4,658						
2,010	565	3,330	4,535							
2,011	1,995	5,956								
2,012	2,338									

2011

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002	587	1,992	2,615	2,836	2,938	2,985	2,987	2,981	2,982	2,985
2,003	935	2,173	3,024	3,172	3,182	3,165	3,222	3,244	3,246	
2,004	1,926	4,956	5,431	5,627	5,736	5,813	5,826	5,844		
2,005	361	959	1,381	1,896	3,783	3,774	3,915			
2,006	588	1,696	2,033	2,234	2,369	2,405				
2,007	201	1,193	1,821	2,000	2,124					
2,008	750	1,244	1,353	1,402						
2,009	690	1,545	3,127							
2,010	570	2,942								
2,011	1,766									

B.3 Branche à développement court

2013

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004	2,497	9,862	15,633	16,387	16,803	16,906	16,926	16,959	16,941	17,021
2,005	7,019	11,633	16,361	16,844	17,031	17,058	17,070	17,078	17,080	
2,006	3,450	9,151	14,281	15,014	15,121	15,572	15,601	15,639		
2,007	3,826	8,113	12,104	13,886	14,295	14,350	14,405			
2,008	3,622	4,114	5,111	5,795	5,928	5,961				
2,009	1,042	4,440	6,943	8,050	8,455					
2,010	711	7,691	29,738	35,646						
2,011	4,347	35,600	50,594							
2,012	3,001	23,996								
2,013	4,980									

2012

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003	8,456	11,843	13,638	13,946	14,037	14,075	14,055	14,102	14,101	14,101
2,004	10,894	16,257	18,091	18,782	19,025	19,085	19,097	19,104	19,127	
2,005	11,163	17,718	19,812	20,248	20,355	20,394	20,468	20,590		
2,006	8,591	15,251	16,705	17,195	17,583	17,748	17,764			
2,007	8,998	13,177	15,205	15,736	15,839	15,863				
2,008	4,375	5,389	6,089	6,381	6,627					
2,009	5,216	8,021	9,222	9,946						
2,010	7,159	16,999	35,469							
2,011	40,799	70,174								
2,012	27,058									

2011

Ci,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002	5,295	7,430	8,434	8,861	9,075	9,148	9,182	9,379	9,426	9,426
2,003	8,438	11,810	13,602	13,909	13,999	14,038	14,019	14,065	14,063	
2,004	10,838	16,228	18,064	18,752	18,994	19,053	19,081	19,092		
2,005	11,096	17,625	19,699	20,130	20,236	20,275	20,295			
2,006	8,575	15,216	16,652	17,140	17,533	17,664				
2,007	8,971	13,130	15,143	15,671	15,761					
2,008	4,380	5,396	6,095	6,476						
2,009	5,213	8,026	9,380							
2,010	7,488	14,857								
2,011	30,374									

C Test des hypothèses du modèle de Mack

Cette partie présente des tests des hypothèses sur les triangles de règlements utilisés dans le chapitre 4 « Etude empirique ». Pour chaque branche, on teste les triangles vus à fin 2013, 2012 et 2011. Le résultat est que la quatrième hypothèse « absence de corrélation entre années de développement » n'est pas tenue dans la plupart des triangles.

C.1 Indépendance des années de souscription

C.1.1 Branche à développement long

2013

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	2	0	0	2	0	0.5	0.25
3	1	2	1	3	1	0.75	0.1875
4	1	3	1	4	1	1.25	0.4375
5	3	2	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	4	2	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	4	3	3	7	3	2.40625	0.5537
8	3	4	3	7	3	2.40625	0.5537
9	2	4	2	6	2	2.0625	0.6211
Total			14			13	3.5957

Z	14.000	✓
I95%	9.208	16.792

2012

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	2	0	0	2	0	0.5	0.25
3	1	2	1	3	1	0.75	0.1875
4	1	2	1	3	1	0.75	0.1875
5	3	2	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	1	4	1	5	2	1.5625	0.37109375
7	4	2	2	6	2	2.0625	0.6211
8	6	2	2	8	3	2.90625	0.8037
9	2	5	2	7	3	2.40625	0.5537
Total			11			12.5	3.3457

Z	11.000	✓
I95%	8.842	16.158

2011

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	2	0	0.5	0.25
3	3	0	0	3	1	0.75	0.1875
4	1	1	1	2	0	0.5	0.25
5	3	2	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	3	3	3	6	2	2.0625	0.62109375
7	1	5	1	6	2	2.0625	0.6211
8	4	4	4	8	3	2.90625	0.8037
9	4	3	3	7	3	2.40625	0.5537
Total			15			12.75	3.6582

Z	15.000	✓
I95%	8.925	16.575

C.1.2 Branche à développement moyen

2013

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	2	0	0	2	0	0.5	0.25
3	2	1	1	3	1	0.75	0.1875
4	2	2	2	4	1	1.25	0.4375
5	2	3	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	4	2	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	2	5	2	7	3	2.40625	0.5537
8	1	4	1	5	2	1.5625	0.3711
9	5	2	2	7	3	2.40625	0.5537
Total			12			12.5	3.3457

Z	12.000	✓
I95%	8.842	16.158

2012

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	2	0	0.5	0.25
3	2	0	0	2	0	0.5	0.25
4	2	2	2	4	1	1.25	0.4375
5	3	2	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	2	4	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	5	1	1	6	2	2.0625	0.6211
8	3	3	3	6	2	2.0625	0.6211
9	1	7	1	8	3	2.90625	0.8037
Total			12			12.90625	3.9756

Z	12.000	✓
I95%	8.918	16.894

2011

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	2	0	0	2	0	0.5	0.25
3	1	1	1	2	0	0.5	0.25
4	3	0	0	3	1	0.75	0.1875
5	2	3	2	5	2	1.5625	0.37109375
6	4	2	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	2	4	2	6	2	2.0625	0.6211
8	5	3	3	8	3	2.90625	0.8037
9	1	6	1	7	3	2.40625	0.5537
Total			11			12.75	3.6582

Z	11.000	✓
I95%	8.925	16.575

C.1.3 Branche à développement court

2013

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	2	0	0.5	0.25
3	3	0	0	3	1	0.75	0.1875
4	2	2	2	4	1	1.25	0.4375
5	4	1	1	5	2	1.5625	0.37109375
6	4	2	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	1	4	1	5	2	1.5625	0.3711
8	4	4	4	8	3	2.90625	0.8037
9	1	6	1	7	3	2.40625	0.5537
Total			12			13	3.5957

Z	12.000	✓
I95%	9.208	16.792

2012

Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	2	0	0.5	0.25
3	2	1	1	3	1	0.75	0.1875
4	2	2	2	4	1	1.25	0.4375
5	3	1	1	4	1	1.25	0.4375
6	4	2	2	6	2	2.0625	0.62109375
7	3	1	1	4	1	1.25	0.4375
8	3	5	3	8	3	2.90625	0.8037
9	1	7	1	8	3	2.90625	0.8037
Total			12			12.875	3.9785

Z	12.000	✓
I95%	8.886	16.864

2011

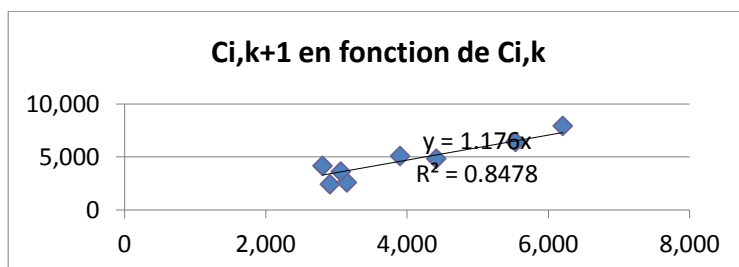
Diagonale	Ij	Sj	Zj	t	m	E(Zj)	V(Zj)
2	1	1	1	1	2	0	0.5 0.25
3	0	2	0	2	2	0	0.5 0.25
4	2	2	2	2	4	1	1.25 0.4375
5	2	3	2	2	5	2	1.5625 0.37109375
6	4	2	2	2	6	2	2.0625 0.62109375
7	4	2	2	2	6	2	2.0625 0.6211
8	2	4	2	2	6	2	2.0625 0.6211
9	4	4	4	4	8	3	2.90625 0.8037
Total			15				12.90625 3.9756

Z	15.000	✓
I95%	8.918	16.894

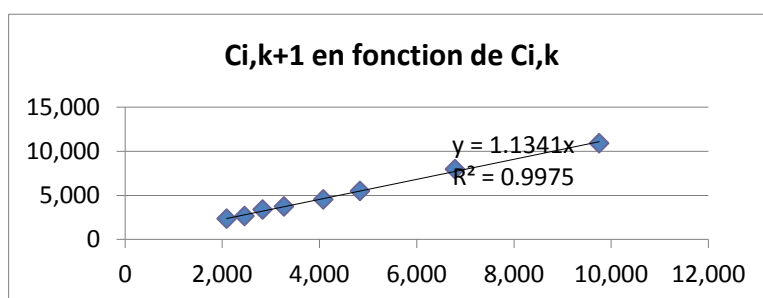
C.2 Forme de l'espérance

C.2.1 Branche à développement long

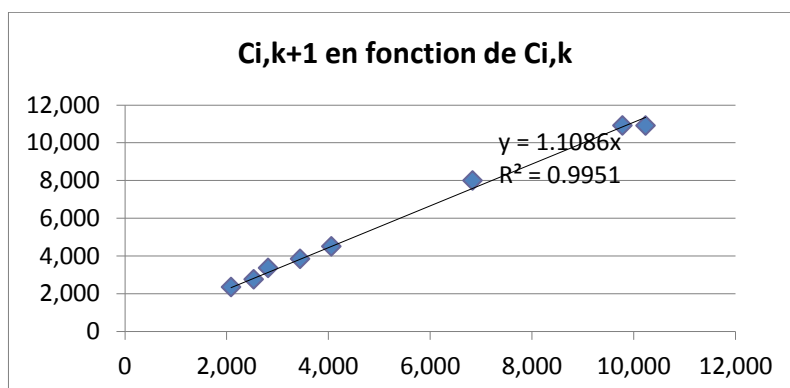
2013



2012

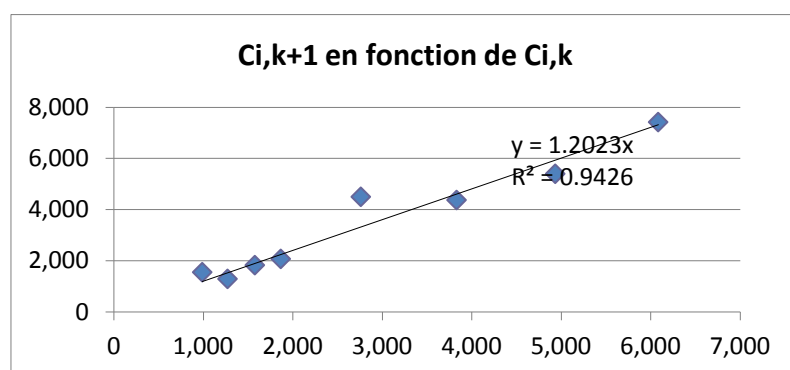


2011

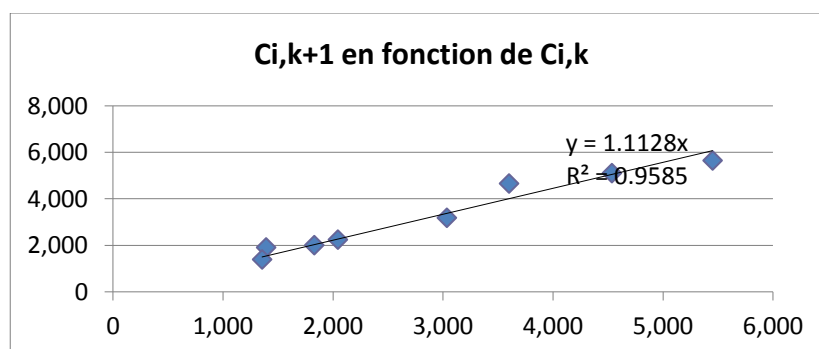


C.2.2 Branche à développement moyen

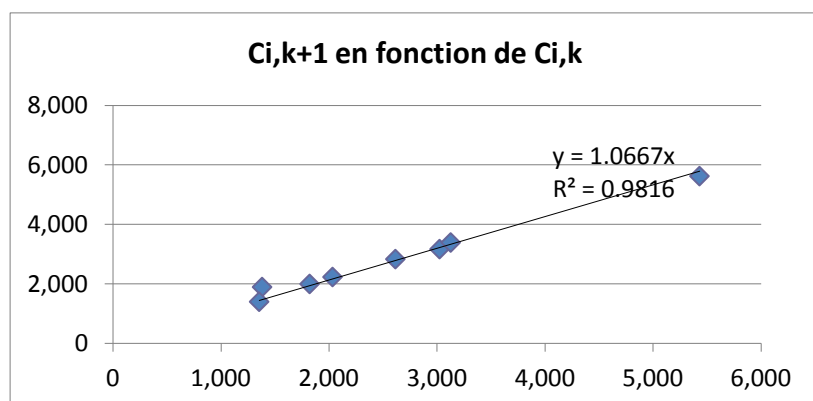
2013



2012

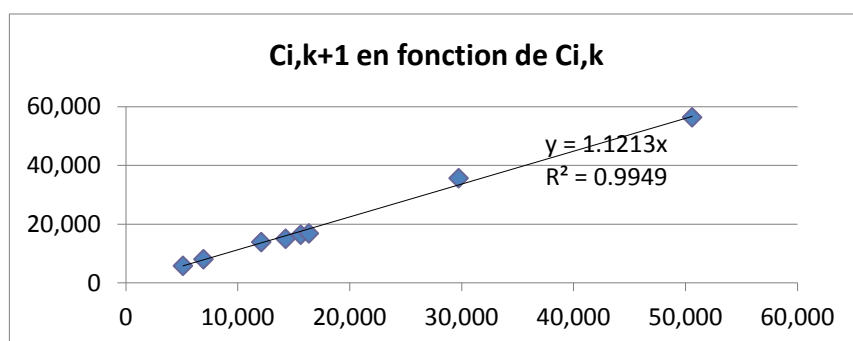


2011

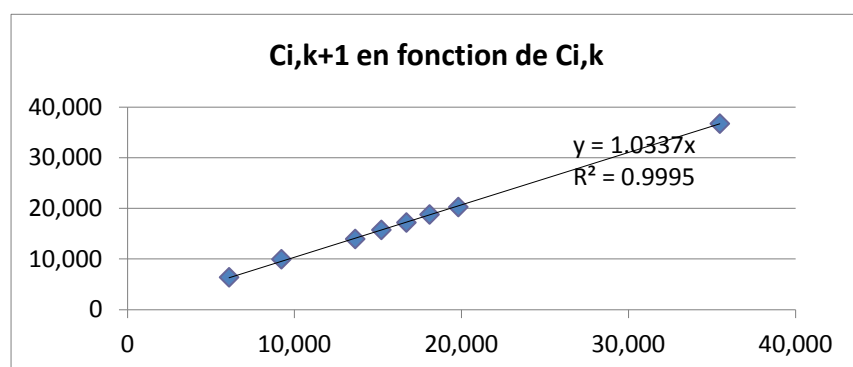


C.2.3 Branche à développement court

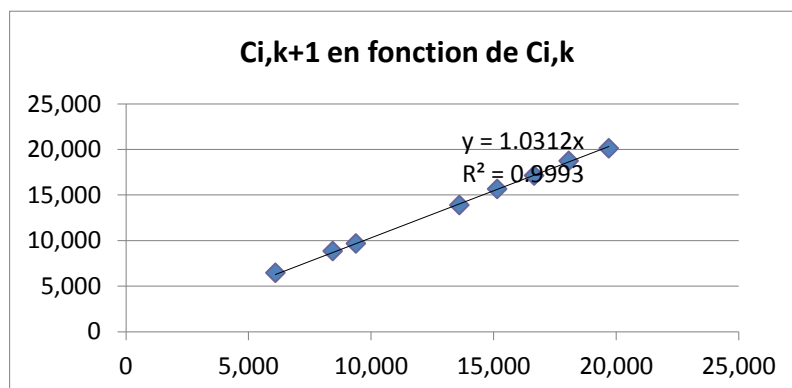
2013



2012



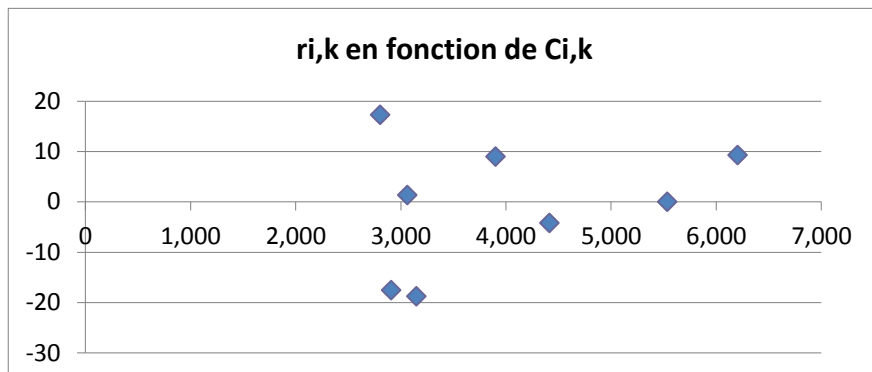
2011



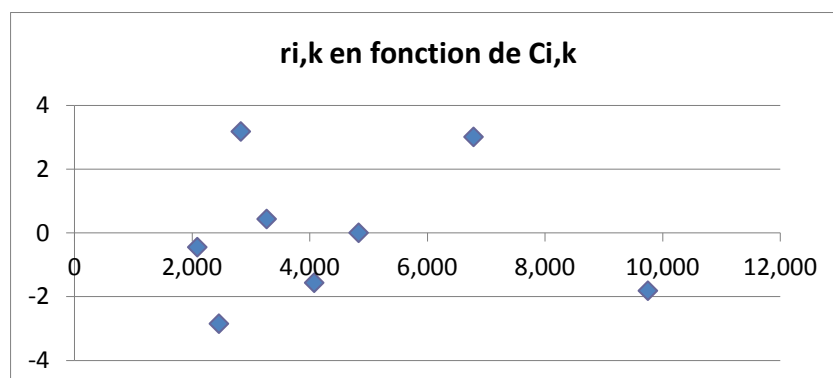
C.3 Forme de la variance

C.3.1 Branche à développement long

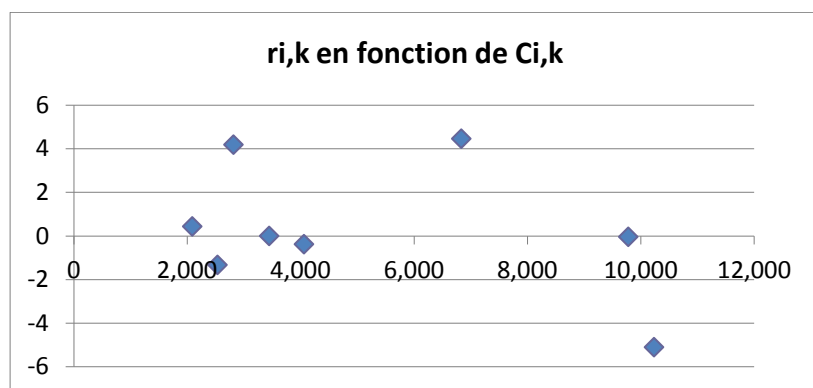
2013



2012

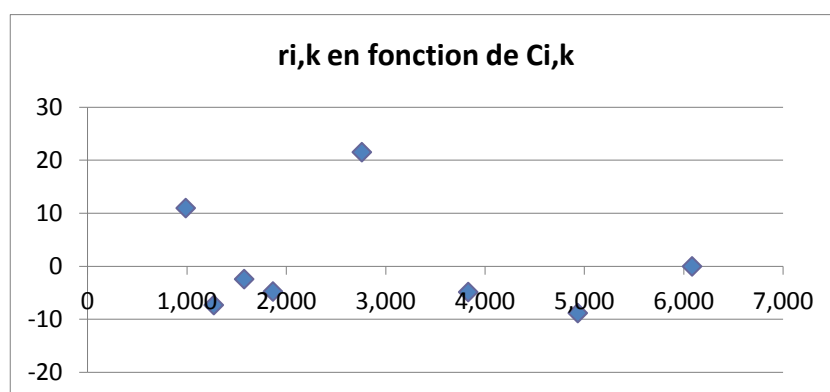


2011

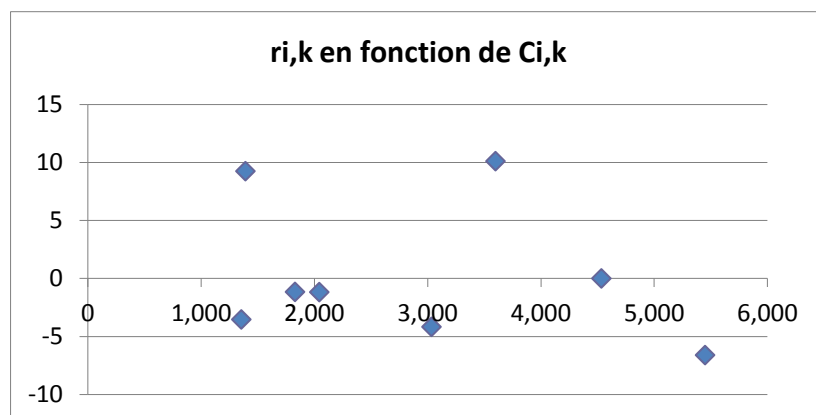


C.3.2 Branche à développement moyen

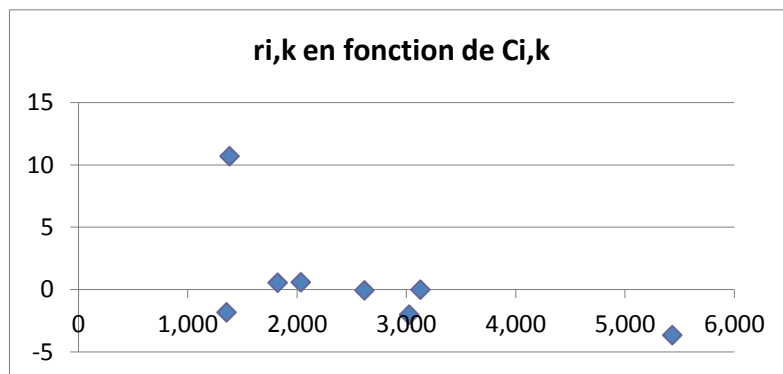
2013



2012

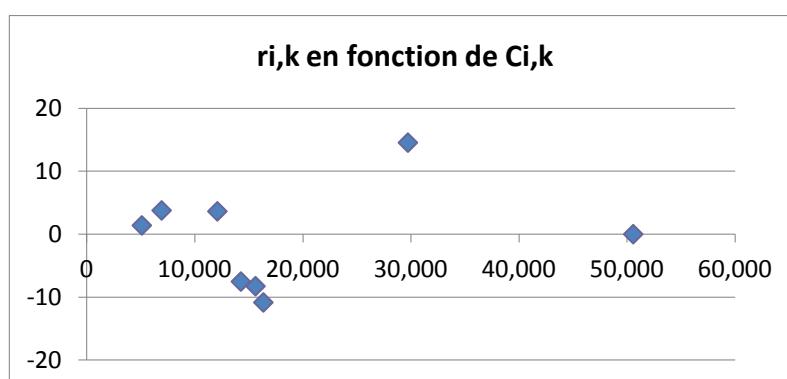


2011

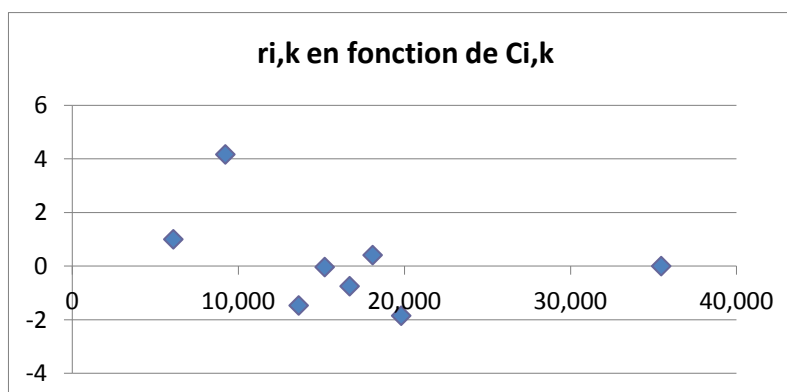


C.3.3 Branche à développement court

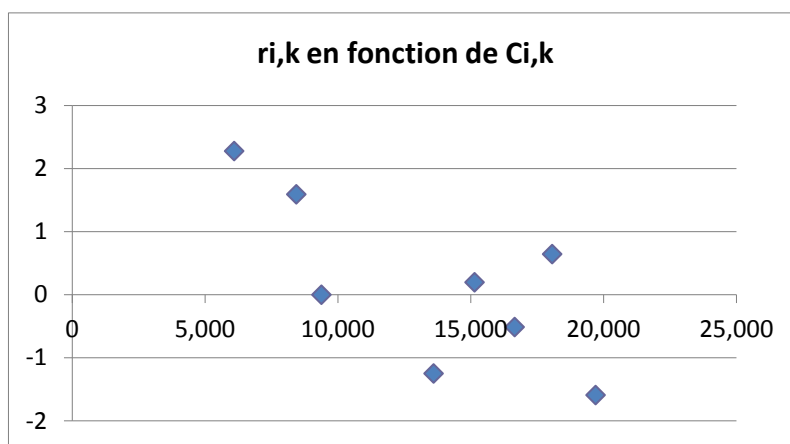
2013



2012



2011



C.4 Absence de corrélation entre années de développement

C.4.1 Branche à développement long

2013

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004		5	4	4	5	1	2	2		
2,005		2	6	5	4	2	1	1		
2,006		3	5	6	2	3	3			
2,007		4	1	2	1	4				
2,008		1	7	1	3					
2,009		8	3	3						
2,010		6	2							
2,011		7								
2,012										
2,013										

Tk	-0.4286	0.2143	0.1429	-1.0000	0.6000	0.5000	1.0000
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1

T	-0.043	✓
150%	-0.127	0.127

2012

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003		6	3	3	1	1	3	1		
2,004		4	5	5	5	2	2	2		
2,005		7	6	2	3	3	1			
2,006		5	7	6	4	4				
2,007		1	4	4	2					
2,008		8	1	1						
2,009		2	2							
2,010		3								
2,011										
2,012										

Tk	0.0000	0.5357	0.7714	0.6000	0.2000	-0.5000	1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.360	
150%	-0.127	0.127

2011

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002		8	2	1	1	1	3	2		
2,003		6	3	3	2	2	2	1		
2,004		3	5	5	5	3	1			
2,005		5	6	2	3	4				
2,006		4	7	6	4					
2,007		1	4	4						
2,008		7	1							
2,009		2								
2,010										
2,011										

Tk	-0.5238	0.7500	0.5429	0.7000	-0.8000	0.5000	1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.212	
150%	-0.127	0.127

C.4.2 Branche à développement moyen

2013

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004		6	3	2	1	1	1	2		
2,005		2	4	5	5	4	2	1		
2,006		3	2	3	2	3	3			
2,007		8	7	4	3	2				
2,008		5	1	1	4					
2,009		1	6	6						
2,010		7	5							
2,011		4								
2,012										
2,013										

Tk	0.1905	0.7857	-0.2000	0.3000	0.4000	-1.0000	-1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.159	
150%	-0.127	0.127

2012

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003		3	4	3	1	1	2	1		
2,004		4	2	2	2	4	1	2		
2,005		5	5	6	5	2	3			
2,006		6	3	5	4	3				
2,007		8	6	4	3					
2,008		1	1	1						
2,009		2	7							
2,010		7								
2,011										
2,012										

Tk	0.2381	0.7500	0.3714	0.1000	-0.2000	0.5000	1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.351	
150%	-0.127	0.127

2011

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002		7	4	3	3	4	1	1		
2,003		3	5	2	1	1	3	2		
2,004		4	2	1	2	3	2			
2,005		5	6	6	5	2				
2,006		6	3	5	4					
2,007		8	7	4						
2,008		1	1							
2,009		2								
2,010										
2,011										

Tk	0.2381	0.6429	0.8857	0.3000	-0.8000	1.0000	1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.420	
150%	-0.127	0.127

C.4.3 Branche à développement court

2013

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,004		5	6	2	4	3	2	2		
2,005		2	2	1	2	1	1			
2,006		4	4	3	1	4	3			
2,007		3	3	5	5	2				
2,008		1	1	4	3					
2,009		6	5	6						
2,010		8	7							
2,011		7								
2,012										
2,013										

Tk	0.7381	0.4286	0.7143	-0.3000	0.4000	1.0000	-1.0000			
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1			

T	0.440	
150%	-0.127	0.127

2012

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,003		2	6	2	2	2	1	2		
2,004		4	2	5	4	3	2	1		
2,005		6	3	1	1	1	3			
2,006		7	1	3	5	4				
2,007		3	7	4	3					
2,008		1	4	6						
2,009		5	5							
2,010		8								
2,011										
2,012										

Tk	-0.0714	0.1071	0.8286	0.7000	-0.2000	0.5000	-1.0000
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1

T	0.232
150%	-0.127 0.127

2011

si,k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,002		3	5	6	5	4	3	2		
2,003		2	6	2	2	2	1	1		
2,004		5	2	5	3	3	2			
2,005		7	3	1	1	1				
2,006		8	1	3	4					
2,007		4	7	4						
2,008		1	4							
2,009		6								
2,010										
2,011										

Tk	-0.3810	0.0714	0.7143	1.0000	0.8000	0.5000	1.0000
I-k-1	7	6	5	4	3	2	1

T	0.348
150%	-0.127 0.127