



Lyon 1



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 4 juillet 2013

Par : Eric Maniable

Titre: Provisionnement Responsabilité Civile Médicale

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

Entreprise :

PREDICA

Membres du jury I.S.F.A.

Directeur de mémoire en entreprise :

- Mme Flavia BARSOTTI
- M. Alexis BIENVENÛE
- M. Areski COUSIN
- Mme Diana DOROBANTU
- Mme Anne EYRAUD-LOISEL
- M. Nicolas LEBOISNE
- M. Stéphane LOISEL
- Mlle Esterina MASIELLO
- Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
- M. Frédéric PLANCHET
- Mme Béatrice REY-FOURNIER
- M. Pierre RIBEREAU
- M. Christian-Yann ROBERT
- M. Didier RULLIERE
- M. Pierre THEROND

Marion de la Rivière

Invité :

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Abstract

Keywords: *Medical Liability, claim reserving, subsequent claims, line by line method, chain ladder, London Chain, Mack, Munich chain ladder, Bootstrap, state process, Markov dynamics, censured model theory, nonparametric estimation, estimator of Kaplan Meier, exceeded function, Likelihood, Log-normal, Weibull*

The Risk of Medical Professional Liability (health providers) is characterized by the duration of settling claims, which can be counted in decades. This risk knows in France a strong legal developments and legislation over the past 20 years, especially in the early 2000s, with the crisis related to the quasi in-insurability for obstetricians.

Since 2003, the insurer covers claims based on their date of claim by the victims, not the date of occurrence (as it is the case for all other insurance products). Given the length of treatment of these branches, and any changes in the behavior of victims, it follows that a challenge to price risk and provisioning.

MÉDICALE DE FRANCE is one of the few insurers in the market, but leader for private health providers. MÉDICALE DE FRANCE has developed a method based on Mack with triangles of charges, with an estimate of the tail of the distribution factors and smoothing coefficients.

The main objectives of this thesis are:

- To wondering about the various claim reserving (PSAP IBNR IBNER, subsequent claims) and construction of triangles
- To qualify the method of MÉDICALE DE FRANCE in a Best Estimate perspective, a key step in the Solvency II
- To draw a picture of various conventional methods and place the results of MÉDICALE DE FRANCE
- To propose called "lines by lines" methods, where the claim reserving of each folder is projected individually. It should better take into account the phenomena and a reduction in the dispersion

LEGISLATIVE IMPACT ON TECHNICAL ELEMENTS

The jurisprudential development has culminated in 2001 with the decision Perruche (recognition of the right to a child born with a disability to obtain redress for failure diagnosis during pregnancy). In 2002, the fault is clearly extended by Kouchner law to lack of information given to the patient. It is an obligation for all health professionals to ensure, because the fault is no longer systematically sought (the doctor's responsibility is not engaged, but the injury is compensable) and the practitioner cannot face alone the financial consequences of injury.

In order to balance the accounts of insurers by linking claims and premiums collected, and thus attempting to exclude from the annual expense incurred but not yet reported to the insurer, the 2002 law called "About" abolished the system of 'basic event' (or occurrence) to replace by one of the "basic claim." Contracts are then supposed to cover only those risks that

are subject to an initial complaint by the victim during the period of validity of the contract, and not for the entire duration of the responsibility (10 years after consolidation). In practice, it is created a distribution mechanism, whose is almost unique in private insurance contracts.

It also creates two notions of claims: "recovery of the past" (disaster occurred before the signing of the contract) and subsequent claims (claimed after the cessation of activity of the insured).

So these legislative changes affecting the reclassification of losses in the triangles to build for estimating these reserves, which causes significant changes: information (contained in) triangles, identifying the behavior of the load, stability of the model over time, impact of claim delays. All things being equal, it is easy to illustrate the model base on claim date underestimates the ultimate cost of claims due to the loss of information on the claim period. However, this underestimation is reduced over time as information increases.

METHOD OF MÉDICALE DE FRANCE

MÉDICALE DE FRANCE, major insurance on Medical Professional Liability risk, is particularly sensitive to changes in the risk of medical liability, and provides no hospital.

Actuary Service implemented an evaluation of a statistical claim reserving (IBNER) methodology, breaking the claim portfolio into three sub-populations of claims, according to the state of the contract and the date of claim:

	State contrat	Claim Date	Base connecting	Legal nature	Claim reserving
1	Closed until 01/01/03	On any date	Occurrence	Occurrence	IBNER IBNR
2	Renewed or purchased after 01/01/03	Before the reform	Réclamation		IBNER IBNR
3		After the reform			Claim

The methodology is the same for each sub-population. It involves:

- Applying the method of Mack, by determining the transfer coefficients by weighted arithmetic mean (as usual) and geometric mean
- Adjusting the coefficients to an exponential function, then extrapolate and smooth with the laws specified the previous three semesters. The statistical claim reserving is calculated as 53% of current records claim reserving.

This raised the question of whether this model meets the challenges posed by the data, the legal framework, ... and how they preserve the character Best Estimate of the evaluation. This is in particular:

- **management of inflation:** the model is based on triangles of load, it is difficult to apply a restatement of inflation. Moreover, it is often difficult to make a choice on the index, or indices, to use. The forecast of future inflation over a long period, is at least as sensitive as the estimate of past inflation. And by construction, the ultimate load incorporates a complex composition of the historical inflation indices.

- the **choice of half-yearly basis**: the choice of a half-yearly basis is unusual, especially in the context of a long risk. However, it reduces the risk of over-parameterization, and on these data, it reduces the overall uncertainty of the model based claim against the annual. Similarly, the model is more sensitive to outliers present on the triangle of loads when the basis is annual.
- the **method of estimating gross coefficients**: introduce the geometric mean is used to better reflect the information of the old year, which otherwise would be "crushed" by the recent years of losses. By measuring the elasticity, we show that the raw coefficients by geometric mean are sensitive to low loads. But it can be shown that the estimate of the gross coefficients by the geometric mean underestimates the "true" value of these coefficients.
- the **estimation method of tail-factor**: MÉDICALE DE FRANCE declared the following steps: selection of raw coefficients of which is adjusted to an exponential law, adding a margin of safety and extrapolation. It can be shown that retain only some coefficients does not lead to significant loss of information. Regarding the choice of the exponential model, it is statistically significant and other laws tested did not show a better fit.

Overall, all of the choices of model seem to preserve:

- The accuracy of the estimate (Best Estimate for Solvency 2), with proper setup and testing hypotheses Mack
- The research of trend, minimizing the variability of the results around the average risk of an inventory to another

ACTUARIAL CONVENTIONAL METHODS

Used almost systematically in Property & Casualty (like method of MÉDICALE DE FRANCE), these methods are essential, but not necessarily appropriate, even if the evaluation is realistic.

It has been implemented recursive deterministic method (Chain Ladder, London Chain, Case Projected Estimate), leading to lower results than MÉDICALE DE FRANCE applied to triangles of loads, but slightly higher for triangles cumulative regulations. However, the assumptions of these models are rarely checked, and they have consistency problems: relationship between link-ratios triangles loads and cumulative regulations, dispersion coefficients,

Factorial deterministic stumble on the estimate of the parameter related to calendar years (and thus inflation).

Recursive stochastic methods (Mack, Munich chain ladder) face the same problems of application than deterministic methods: checking model assumptions, sensitivity to atypical and earnings volatility, lack of convergence between the assessments made on the triangles of loads and triangles of cumulative regulations.

METHODS "LINE BY LINE"

To implement the "line by line" methods , it usually requires modeling the behavior of claims:

- Indicator of claim (it is assumed that without claim, managers don't regulate): an approach by a survival time, right-censored, estimated by Kaplan Meier
- Processing time of a claim: an approach by a survival time, right-censored, estimated by Kaplan Meier
- Sign of the regulations taking three states indicating "positive" in 50.3% of cases, "none" with a probability of 49.3% and "negative" for 0.4% of annual regulations
- Amount of regulations using a standard analysis techniques (passing function, QQ-Plot), positive regulations are modeled by log-normal (one by year of development) and negative regulation by a Weibull.

This approach allows to treat the individual information of each claim file instead of treating aggregate information (such as in triangles). It has the advantage not to be constrained distortion due to the management of dates vs claim occurrence. Moreover, these methods are usually much fewer assumptions about the data.

Three methods were applied:

- **Censored Model:** modeled on duration models, where the estimated function of the ultimate amount of a claim is built according to the duration model approach to censorship. Simple to implement, this approach does not flatten the breaking difficulty born with the About Law (according to final regulations significantly different before and after 2003). In addition, the estimate of the claim reserving required is very sensitive to the tail. Which failed to find a parametric function well suited to the accumulated regulations.
- **Model with Markov dynamics of regulations:** This method is similar in spirit to the central hypothesis of Chain Ladder, Mack, ... It is a dynamic process of claim files. This model is built on two supposedly independent variables: the processing time of the claim and a conditional distribution of regulations (conditioned by past regulations). However, the high irregularity in the regulations leads to a small number of estimated coefficients, high dispersion around the mean and poor estimation of distribution tails. Same applied to the cumulative regulations, fit to a log-normal function is not of good quality. The estimated claim reserving are more realistic, but still too far from the more conventional methods.

BASIC MODELING

Every behavior is modeled, and then, once the estimated law, each individual settlement is simulated. A large number of simulations are done to determine the average supplies, distribution, ...

This last model is very simple to implement, and use essentially computational approach. This approach can seem heavy and simplistic, but seems to give good results in data from MÉDICALE DE FRANCE. In addition, it would make an assessment of the loss burden ceded to reinsurers.

CONCLUSION

Triangulation methods generally confirm the results of the method MÉDICALE DE FRANCE, but without satisfying important prerequisites (hypothesis testing, consistency of certain indicators, convergence assessments).

The "lines by lines" methods are inadequate to accommodate such a particular risk (duration of treatment, legal and legislative history, ...).

The "model point" method seems more robust, and solves many problems: VaR, distribution of supplies, evaluation of reinsurance ...

Résumé

Mots clés : *Responsabilité Civile Médicale, provision, méthode ligne à ligne, Chain ladder, London Chain, Mack, Munich Chain ladder, Bootstrap, Processus d'états, dynamique markovienne, Modèle à censure, Estimation non paramétrique, Estimateur de Kaplan Meier, Fonction de dépassement, Vraisemblance, Log-normale, Weibull*

Le risque Responsabilité Civile professionnelle Médicale (des professionnels de santé) est caractérisé par la durée de règlement des sinistres, qui peut se compter en dizaines d'années. Ce risque a connu en France une forte évolution juridique, puis législative sur les 20 dernières années, et en particulier au début des années 2000, avec la crise liée à la quasi in-assurabilité des obstétriciens.

Depuis 2003, l'assureur couvre les sinistres en fonction de leur date de réclamation par les victimes, et non plus de leur date de survenance (comme c'est le cas pour tous les autres produits d'assurance).

Compte tenu de la longueur de traitement de ces branches, et des éventuelles modifications de comportements des victimes, il s'ensuit un défi pour tarifier ce risque et le provisionner.

Médicale de France MÉDICALE DE FRANCE est un des rares acteurs sur ce marché, leader sur les professionnels privés, hors établissements. MÉDICALE DE FRANCE MÉDICALE DE FRANCE a développé une méthode basée sur Mack sur les triangles de charges, avec une estimation des facteurs de queue de distribution et un lissage des coefficients.

Ce mémoire a pour principaux objectifs de :

- S'interroger sur les différentes provisions (PSAP, IBNR, IBNER, Subséquentes) et la construction des triangles
- Qualifier la méthode de MÉDICALE DE FRANCE MÉDICALE DE FRANCE dans une perspective Best Estimate, incontournable dans la démarche Solvabilité II
- Tracer un panorama des différentes méthodes classiques et de situer les résultats de MÉDICALE DE FRANCE MÉDICALE DE FRANCE
- Proposer des méthodes dites « lignes à lignes », où la provision de chaque dossier en cours est projetée individuellement, ce qui devrait permettre une meilleure prise en compte des phénomènes et une réduction de la dispersion

IMPACT LÉGISLATIF SUR LES ÉLÉMENTS TECHNIQUES

L'évolution jurisprudentielle a culminé en 2001 avec l'arrêt Perruche (reconnaissance du droit à un enfant né handicapé d'obtenir réparation suite à défaut de diagnostic durant la grossesse). En 2002, la faute est clairement étendue par la loi Kouchner au défaut d'information donnée au patient. Il est alors faite obligation à tous les professionnels de santé de s'assurer, du fait que la faute n'est plus systématiquement recherchée (la responsabilité du médecin n'est pas engagée, mais le préjudice est indemnisable) et que le praticien ne saurait faire face seul aux conséquences financières des préjudices.

En vue d'équilibrer les comptes des assureurs en mettant en rapport les sinistres et les primes collectées, et donc en tentant d'exclure de la charge annuelle les sinistres survenus mais non encore connus de l'assureur, la loi de 2002 dite About a supprimé le système de la « **base fait générateur** » (ou survenance) pour lui substituer celui de la « **base réclamation** ». Les contrats sont alors censés ne couvrir que les risques qui font l'objet d'une première réclamation par la victime pendant la période de validité du contrat, et non pendant la durée complète de la responsabilité (10 années, après consolidation). En pratique, il s'est ainsi créé un **mécanisme par répartition**, quasiment unique dans le fonctionnement des contrats d'assurance privée.

Ceci crée également deux notions de sinistres : « **reprise du passé** » (sinistre survenu avant la souscription du contrat) et les **sinistres subséquents** (réclamés après la cessation d'activité de l'assuré).

Ces changements législatifs ont donc une incidence sur le reclassement des sinistres dans les triangles à construire pour estimer ces provisions, qui entraîne des modifications importantes : information (*contenue dans*) des triangles, identification du comportement de la charge, stabilité du modèle dans le temps, impact des délais de réclamation (et/ou déclaration). Toute chose égale par ailleurs, il est aisé d'illustrer que le modèle en base réclamation sous-estime la charge ultime des sinistres à cause de la perte d'information sur le délai de réclamation. Cependant cette sous-estimation se réduit dans le temps dans la mesure où l'historique de l'information complète augmente, relativement à l'information manquante des triangles.

MÉTHODE DE MÉDICALE DE FRANCE

MÉDICALE DE FRANCE, acteur majeur de l'assurance du praticien libéral sur l'ensemble des risques professionnels et privés, est particulièrement attentive aux évolutions du risque de responsabilité civile médicale, et n'assure pas les établissements hospitaliers ni les cliniques.

La Direction de l'actuariat a mis en œuvre une méthodologie d'évaluation d'une provision statistique (IBNER), en décomposant le portefeuille sinistre en trois sous-populations de sinistres, en fonction de l'état du contrat et de la date de réclamation :

	État du contrat	Date de réclamation	Base de rattachement	Nature juridique	Provisions
1	Clos avant le 01/01/03	À toute date	Survenance	Survenance	IBNER IBNR
2	Renouvelé ou souscrit après le 01/01/03	Avant la réforme	Réclamation		IBNER IBNR
3		Après la réforme		Réclamation	IBNER

La méthode appliquée est identique à chaque sous-population. Elle consiste à :

- appliquer la méthode de Mack, en déterminant les coefficients de passage par moyenne arithmétique pondérée (comme il est d'usage) et par moyenne géométrique
- ajuster les coefficients par une fonction exponentielle, puis extrapoler et lisser avec les lois spécifiées les 3 semestres précédents

La provision statistique ainsi calculée représente 53% des provisions dossiers actuelles.

Il se posait la question de savoir si cette modélisation est adaptée aux données, au cadre légal, ... et en quoi ils préservent le caractère Best Estimate de l'évaluation. Il s'agit en particulier :

- de la **gestion de l'inflation** : le modèle reposant sur les triangles de charges, il est délicat d'appliquer un retraitement de l'inflation. Par ailleurs, il est souvent difficile d'effectuer un choix sur l'indice, ou les indices (liés à la composition des chefs de préjudices), d'inflation à utiliser. La prévision d'une inflation future, sur une longue période, est au moins aussi délicate que l'estimation de l'inflation passée. Et par construction, la charge ultime intègre une composition complexe de l'historique des indices d'inflation.
- du **choix du pas semestriel** : le choix d'un pas semestriel est inhabituel, surtout dans le cadre d'un risque long. Toutefois, il diminue le risque de sur-paramétrage, et sur les données de MÉDICALE DE FRANCE, il réduit l'incertitude globale du modèle en base réclamation par rapport au pas annuel. De même, le modèle est plus sensible aux valeurs atypiques présentes sur le triangle des charges lorsque le pas utilisé est le pas annuel.
- de la **méthode d'estimation des coefficients bruts** : introduire la moyenne géométrique permet de mieux tenir compte de l'information des années anciennes, qui sinon seraient « écrasées » par les années récentes de sinistres. En mesurant l'élasticité, on montre que les coefficients bruts par moyenne géométrique sont sensibles aux charges faibles. Mais il peut être démontré que l'estimation des coefficients bruts par la moyenne géométrique sous-estime la « vraie » valeur de ces coefficients.
- de la **méthode d'estimation du tail-factor** : MÉDICALE DE FRANCE a retenu la démarche suivante : sélection des coefficients bruts sur lesquels est ajustée une loi exponentielle, ajout d'une marge de sécurité et extrapolation. Il peut être montré que le fait de retenir seulement certains coefficients n'induit pas de perte significative d'information. Concernant le choix du modèle exponentiel, il est statistiquement significatif et d'autres lois testées ne présentent pas un meilleur ajustement.

Au global, l'ensemble des choix de modèle semble pouvoir préserver :

- La justesse de l'estimation (Best Estimate dans le cadre de Solvabilité 2), moyennant un paramétrage adéquat et une vérification des hypothèses de Mack
- La recherche de tendance de fonds, minimisant la variabilité des résultats autour de la moyenne du risque d'un inventaire à l'autre

MÉTHODES ACTUARIELLES CLASSIQUES

Utilisées presque systématiquement en IARD (à l'instar de la méthode de MÉDICALE DE FRANCE), ces méthodes sont incontournables, mais pas nécessairement appropriées, même si l'évaluation semble réaliste.

Il a ainsi été mis en œuvre des méthodes déterministes récursives (Chain Ladder, London Chain, Projected Case Estimate), qui conduisent à des résultats inférieurs à celle de MÉDICALE DE FRANCE appliquées aux triangles de charges, mais légèrement supérieurs pour les triangles de règlements cumulés. Cependant, les hypothèses de ces modèles sont rarement vérifiées, et elles présentent des problèmes de cohérence : lien entre les link-ratios des triangles de charges et de règlements cumulés, dispersion des coefficients.

Les méthodes déterministes factorielles butent sur l'estimation du paramètre lié aux années calendaires (et donc à l'inflation).

Les méthodes stochastiques récursives (Mack, Munich chain ladder) rencontrent les mêmes problèmes d'application que les méthodes déterministes : vérification des hypothèses des modèles, sensibilité aux atypiques et volatilité des résultats, absence de convergence entre les évaluations faites sur les triangles de charges et les triangles de règlements cumulés.

MÉTHODES « LIGNE À LIGNE »

Pour mettre en œuvre des méthodes « ligne à ligne », il faut généralement modéliser les comportements des sinistres :

- Indicateur de réclamation (il est supposé que sans réclamation les gestionnaires ne font pas de règlements) : approche d'une durée de survie, censurée à droite, estimée par Kaplan Meier
- Durée de traitement d'un sinistre : approche d'une durée de survie, censurée à droite, estimée par Kaplan Meier
- Signe des règlements : indicatrice prenant 3 états : « positif » dans 50,3% des cas, « nul » avec une probabilité de 49,3% et « négatif » pour 0,4% des règlements annuels
- Montant des règlements : en utilisant des techniques d'analyse usuelles (fonction de dépassement, QQ-Plot), les règlements positifs sont modélisés par des Log-normale (autant que d'années de développement) et les règlements négatifs par une Weibull.

Cette approche permet de traiter les informations individuelles de chaque dossier sinistre au lieu de traiter des informations agrégées (tel que dans les triangles). Elle a l'avantage de ne pas subir la contrainte de distorsion due à la gestion des dates de réclamation vs survenance. De plus ces méthodes font généralement beaucoup moins d'hypothèses sur les données.

Trois méthodes ont été appliquées :

- **Modèle censuré** : approche calquée sur les modèles de durée, où la fonction estimative du montant ultime d'un sinistre est construite suivant les modèles de durée à censure. Simple à mettre en œuvre, cette approche n'aplanit pas la difficulté liée à la rupture née au moment de la loi About (fonction de règlements ultimes significativement différente avant et après 2003). De plus, l'estimation de la provision à constituer est très sensible à la queue de distribution. Ce qui n'a pas permis de trouver une fonction paramétrique bien adaptée à des montants de règlements cumulés.
- **Modèle à dynamique markovienne des règlements** : cette méthode se rapproche dans l'esprit de l'hypothèse centrale de Chain Ladder, Mack, ... à savoir qu'il existe une dynamique de traitement des dossiers sinistres. Ce modèle est bâti sur deux variables supposées indépendantes : la durée de traitement du sinistre et une distribution conditionnelle des règlements (conditionnée par les règlements passés). Cependant, la forte irrégularité dans les règlements entraîne un faible nombre de coefficients estimés, une forte dispersion autour des moyennes et une mauvaise estimation des queues de distribution. Même appliqué aux règlements cumulés, l'ajustement à une fonction Log-normale n'est pas de bonne qualité. Les provisions estimées sont plus réalistes, mais encore trop éloignée des méthodes plus classiques.

MÉTHODE INDIVIDUELLE

Dans cette méthode, élémentaire, le chaque comportement est modélisé, puis, une fois les lois estimées, chaque règlement individuel est simulé. Un grand nombre de simulations permet de déterminer la moyenne des provisions, leur distribution,...

Ce dernier modèle est très simple à mettre en œuvre, et recourt à une démarche essentiellement calculatoire. Cette démarche peut sembler a priori lourde et simpliste, mais semble donner de bons résultats dans le cadre des données de MÉDICALE DE FRANCE. De plus, elle permettrait de faire une évaluation de la charge de sinistre cédée aux réassureurs, le traité étant en excédent.

CONCLUSION

Les méthodes par triangulation confortent globalement les résultats de la méthode de MÉDICALE DE FRANCE, sans cependant satisfaire des préalables importants (vérification des hypothèses, cohérence de certains indicateurs, convergence des évaluations).

Les méthodes « lignes à lignes » sont insatisfaisantes pour s'adapter à un risque si particulier (durée de traitement, historique juridique et législatif,...).

La méthode individuelles semble la plus robuste, et permet de résoudre de nombreuses problématiques : VaR, règlements à 1 an, distribution des provisions, évaluation du traité de réassurance,...

Sommaire

1	Introduction	16
2	Le contexte	17
2.1	Notion de responsabilité médicale et assurabilité	17
2.1.1	Cadre français.....	17
2.1.2	Cadre juridique et assurantiel en Europe.....	21
2.2	Le marché français de l'assurance responsabilité civile médicale	22
2.3	Le produit de MÉDICALE DE FRANCE	22
2.3.1	Position sur le marché	22
2.3.2	Risques couverts.....	23
2.4	Incidence des changements législatif sur les provisions	23
3	Données de MÉDICALE DE FRANCE	25
3.1	Gestion des sinistres	25
3.1.1	Forfaits d'ouverture.....	25
3.1.2	Sinistres graves.....	26
3.2	La sinistralité	27
3.2.1	Analyse descriptive	27
3.2.2	Repris du passé et subséquentes.....	33
3.2.3	Sinistres graves.....	35
3.3	Estimation de comportements individuels	35
3.3.1	Réclamation.....	35
3.3.2	Durée de traitement	37
3.3.3	Règlements.....	38
4	Modèle de MÉDICALE DE FRANCE	42
4.1	Modèle de provisionnement de MÉDICALE DE FRANCE	42
4.1.1	Construction des triangles de charges	43
4.1.2	Estimation des coefficients bruts de passage de charge	44
4.1.3	Extrapolation et lissage des lois	44
4.1.4	Calcul de la charge ultime	46
4.1.5	Provisions pour subséquentes.....	47
4.1.6	Résultats	47
4.2	Discussion des choix de méthode	48
4.2.1	Inflation.....	49
4.2.2	Choix du pas.....	49
4.2.3	Estimation des coefficients bruts.....	51
4.2.4	Construction de la loi et tail-factor.....	54
4.2.5	Traitement des sinistres graves.....	58
4.3	Conclusion sur le modèle de MÉDICALE DE FRANCE	62
5	Provisionnement par triangulation	64
5.1	Construction des triangles	64
5.1.1	Illustration du changement de base d'étude	64
5.1.2	Proposition de construction des triangles	66
5.2	Modèles déterministes	68
5.2.1	Méthode Chain Ladder – London Chain	68

5.2.2	Méthode Projected Case Estimate	73
5.2.3	Modèles factoriels	75
5.3	Méthodes stochastiques récursives	76
5.3.1	Modèle de Mack	76
5.3.2	Modèle Munich Chain Ladder	81
5.4	Synthèse	83
6	Méthodes ligne à ligne	85
6.1	Modèle « censuré »	85
6.1.1	Hypothèse du modèle	85
6.1.2	Vraisemblance	85
6.1.3	Estimation non paramétrique	87
6.1.4	Estimation paramétrique	90
6.1.5	Approche alternative	95
6.2	Modèle à dynamique markovienne des règlements	96
6.2.1	Présentation théorique	96
6.2.2	Processus d'États	97
6.2.3	Processus de règlements	97
6.2.4	Résultats	99
6.3	Modèle à dynamique markovienne des règlements cumulés	101
6.3.1	Processus de règlements cumulés	101
6.3.2	Résultats	102
6.4	Synthèse	104
7	Modèle individuel	106
7.1	Présentation théorique	106
7.1.1	Variables	106
7.1.2	Projection - trajectoires	107
7.2	Résultats	108
7.2.1	Back testing	108
7.3	Conclusion	109
8	Conclusion	110
9	Annexe	112
9.1	Analyse des sinistres	112
9.1.1	Dates de clôtures	112
9.1.2	Charges par durée de traitement	113
9.1.3	Lois des règlements	115
9.2	Étude du modèle de MÉDICALE DE FRANCE	116
9.2.1	Construction de la loi	116
9.2.2	Loi d'ajustement	116
9.3	Provisionnement	117
9.3.1	Illustration du changement de base d'étude	117
9.3.1	Méthode Chain Ladder – London Chain	118
9.3.2	Modèle de Mack	120
9.3.3	Modèle Munich Chain Ladder	126
9.4	Méthodes ligne à ligne	127
9.4.1	Modèle censuré	127
9.4.2	Modèle de provisionnement individuel	129
9.5	Outils	130
9.5.1	Estimateur de Kaplan Meier pour les fonctions de survie	130
9.5.2	Fonction de dépassement moyen	131
9.5.3	QQPlot	131
9.5.4	Vraisemblance	131

10	<i>Bibliographie</i>	134
10.1	Textes légaux	134
10.2	Documents techniques	134
10.3	Autres documents.....	135
11	<i>Notations</i>	136
11.1	Notations pour le modèle de MÉDICALE DE FRANCE.....	136
11.2	Autres notations	136
12	<i>Table des illustrations</i>	137

1 Introduction

Comme toutes les branches de responsabilité civile, la Responsabilité Civile professionnelle Médicale (des professionnels de santé) est caractérisée par la durée de règlement des sinistres, qui peut se compter en dizaines d'années.

Ce risque a connu en France une forte évolution juridique, puis législative sur les 20 dernières années, et en particulier au début des années 2000, avec la crise liée à la quasi in-assurabilité des obstétriciens. Les modifications législatives posent un problème technique particulier à l'actuaire en changeant les conditions de prise en charge par l'assureur, et les règles de prescriptions. Depuis 2003, l'assureur couvre les sinistres en fonction de leur date de réclamation par les victimes, et non plus de leur date de survenance (comme c'est le cas pour tous les autres produits d'assurance). Compte tenu de la longueur de traitement de ces branches, et des éventuelles modifications de comportements des victimes, il s'ensuit un défi pour tarifier ce risque et le provisionner. En particulier, l'assureur n'est plus tenu de constituer des provisions IBNR.

MÉDICALE DE FRANCE est un des rares acteurs sur ce marché, mais leader sur les professionnels privés, hors établissements. MÉDICALE DE FRANCE a développé une méthode basée sur Mack sur les triangles de charges, avec une estimation des facteurs de queue de distribution et un lissage des coefficients.

Ce mémoire a pour objectifs de :

- S'interroger sur les différentes provisions (PSAP, IBNR, IBNER, Subséquentes) calculées par les méthodes classiques de provisionnement et la construction des triangles
- Qualifier la méthode de MÉDICALE DE FRANCE dans une perspective Best Estimate, incontournable dans la démarche Solvabilité II
- Tracer un panorama des différentes méthodes classiques et de situer les résultats de MÉDICALE DE FRANCE
- Proposer des méthodes dites « lignes à lignes », où la provision de chaque dossier en cours est projetée individuellement, ce qui devrait permettre une meilleure prise en compte des phénomènes et une réduction de la dispersion

Les méthodes de provisionnement en IARD sont très nombreuses, donnant des résultats pas forcément convergents. Une grande partie de ces méthodes reposent sur les triangles par années (de survenance, de réclamation), ce qui pose un problème non trivial de modélisation : perte d'information, provision modélisée,...

Les autres méthodes reposent sur une approche « ligne à ligne », qui s'exonère plus facilement de cette problématique de date.

Une rapide revue des principales méthodes de provisionnement permettra de situer les résultats de la méthode de MÉDICALE DE FRANCE et d'évaluer l'applicabilité de ces modèles (validation des hypothèses, cohérence avec les spécificités des données).

2 Le contexte

Le professionnel de santé agit directement ou indirectement sur l'humain. Sa responsabilité professionnelle est donc questionnée à chaque fois que le patient n'est pas guéri ou subit un préjudice. Mais il ne peut être tenu responsable de toutes les conséquences de ses actes, en dehors de toute faute.

En particulier, le résultat médical conserve un aléa. Le professionnel de santé a l'obligation de mettre en œuvre tous les moyens nécessaires, au regard des connaissances de la science, pour tenter de guérir ou soulager la douleur du patient. Mais il n'a pas une obligation de résultat. Et pour que sa responsabilité soit engagée, il faut qu'il ait failli à son obligation de moyen.

Le législateur et le juge ont tenté d'apporter des réponses à la diversité de situations prenant en compte les responsabilités avec ou sans fautes, les préjudices subis, les évolutions sociales, l'assurabilité du risque,...

2.1 Notion de responsabilité médicale et assurabilité

2.1.1 Cadre français

La notion de responsabilité est généralement définie par le cumul d'une faute, d'un préjudice causé au patient et du lien de causalité entre la faute et le préjudice¹.

L'arrêt Mercier, de la Cour de Cassation en 1936 a élargi la faute à une violation non intentionnelle de l'obligation d'apporter des soins au mieux des connaissances acquises :

« Il se forme entre le médecin et son client un véritable contrat comportant pour le praticien, l'engagement sinon, bien évidemment, de guérir le malade, du moins de lui donner des soins consciencieux, attentifs, et réserve faite de circonstances exceptionnelles, conformes aux données acquises de la science ; que la violation, même involontaire, de cette obligation contractuelle, est sanctionnée par une responsabilité de même nature, également contractuelle. »

Les années 90 ont vu quelques affaires médicales qui ont conduit à de profondes évolutions de la jurisprudence et de la réflexion sur la pratique des professionnels de santé : sang contaminé, maladie de maladie de Creutzfeld-Jacob, clinique du sport,... L'évolution jurisprudentielle a culminé en 2001 avec l'arrêt Perruche, relatif à la reconnaissance du droit à un enfant né handicapé d'obtenir réparation du préjudice lié au défaut de diagnostic durant la grossesse.²

Combinés à une augmentation des indemnisations consenties, à l'élargissement de la mise en cause de la responsabilité du praticien (devoir d'information, droit à l'innovation

¹ Articles 1382 et 1383 du Code Civil jusqu'au début du XXème siècle.

² La loi Kouchner en médecine générale : le dossier d'abord ? Serge Bismuth et al, Septembre/Octobre 2006 n°79 - 112, La Revue Exercer

médicale,...) et également aux conséquences des événements de 2001 sur le secteur des assurances, ces facteurs ont conduit à la loi, dite loi Kouchner, n°2002-303 du 4 mars 2002 relative aux droits des malades et à la qualité du système de santé.

La faute est clairement étendue par la loi au défaut d'information donnée au patient, aussi bien pour des risques normalement prévisibles mais également pour ceux rares mais graves voire exceptionnels³, la charge de la preuve incombant désormais au praticien. La faute médicale recouvre désormais une faute de diagnostic, un défaut d'information, une faute dans le choix de la mise en œuvre du traitement ou encore un manquement aux données acquises de la science ou des règles de l'art.

Cette extension de la notion de faute s'est étendue également au domaine de l'organisation du service : un défaut de surveillance ou un défaut de présence ou de compétence médicale, ou d'insuffisance des moyens fournis par la clinique ou l'hôpital⁴.

Désormais, mêmes la faute légère, la présomption de faute ou la présomption de causalité permettent assez souvent d'obtenir une réparation au civil. Ce qui revient presque à considérer que même en l'absence de faute, la victime pourra être indemnisée du fait des risques inhérents à la thérapie.

Par la loi de 2002-303 du 4 mars 2002,

« Les professionnels de santé exerçant à titre libéral, les établissements de santé, services de santé et organismes (...), exerçant des activités de prévention, de diagnostic ou de soins ainsi que les producteurs, exploitants et fournisseurs de produits de santé, à l'état de produits finis (...) sont tenus de souscrire une assurance destinée à les garantir pour leur responsabilité civile ou administrative susceptible d'être engagée en raison de dommages subis par des tiers et résultant d'atteintes à la personne, survenant dans le cadre de cette activité de prévention, de diagnostic ou de soins. »⁵

Cette obligation est nécessaire du fait que la faute n'est plus systématiquement recherchée (la responsabilité du médecin n'est pas engagée, mais le préjudice est indemnisable) et que le praticien ne saurait faire face seul aux conséquences financières des préjudices.

Et sans ralentir la croissance du coût des indemnisations, la conséquence directe de cette loi est :

- l'accroissement des incidences de préjudices indemnisables,
- une problématique forte de coûts différés du fait de la prescription (même si elle a été ramenée par la loi Kouchner à 10 ans)

Les assureurs ont continué à répercuter des primes de plus en plus élevées, essentiellement pour des professions à risques, tels que les obstétriciens. Quand ces mêmes compagnies refusaient également toute nouvelle souscription de ces professions à risque. Au cours du premier trimestre de 2002 nombre de praticiens ne trouvaient plus à s'assurer.

³ Arrêt Bianchi, 9 avril 1993, Conseil d'État : « Même si aucune faute ne peut être relevée... lorsqu'un acte médical nécessaire au diagnostic ou au traitement du malade présente un risque dont l'existence est connue mais dont la réalisation est exceptionnelle, et dont aucune raison ne permet de penser que le patient y soit particulièrement exposé, la responsabilité du service public hospitalier est engagée si l'exécution de cet acte est la cause directe de dommages sans rapport comme avec l'évolution prévisible de cet état, et présentant un caractère d'extrême gravité. »

⁴ Cas d'intervention tardive de l'interne ou de l'anesthésiste imputable à un fonctionnement défectueux du standard téléphonique (CAA, Nancy, 13/3/1997, CHR de Brest)

⁵ Art. L. 1142-2

Devant limiter la hausse des coûts, la loi permettait cependant peu de régulation :

- Prescription décennale : le délai de la prescription civile applicable aux professionnels de santé exerçant à titre libéral a été réduit de trente à dix ans. Mais le point de départ de cette prescription est la consolidation du dommage, avec comme minimum la majorité de l'enfant s'il est la victime. Dans les faits, la prescription n'a quasiment pas été réduite.
- Prise en charge de l'aléa thérapeutique : il est prévu par la loi que l'aléa thérapeutique est pris en charge par la solidarité nationale, dès lors que l'incapacité partielle permanente (IPP) est supérieure à 24%. Mais la grande majorité des victimes ont un taux inférieur, et doivent alors se retourner vers les assureurs.

En vue d'équilibrer les comptes des assureurs en mettant en rapport les sinistres et les primes collectées, et donc en tentant d'exclure de la charge annuelle les sinistres survenus mais non encore connus de l'assureur, la loi dite About⁶ a supprimé le système de la « **base fait générateur** » (ou survenance) pour lui substituer celui de la « **base réclamation** ». Les contrats sont alors censés ne couvrir que les risques qui font l'objet d'une première réclamation par la victime pendant la période de validité du contrat, et non pendant la durée complète de la responsabilité (10 années, après consolidation).

« Article 4

Art. L. 251-2. - Constitue un sinistre (...) tout dommage (...) causés à des tiers, engageant la responsabilité de l'assuré, résultant d'un fait générateur (...), imputable aux activités de l'assuré garanties par le contrat, et ayant donné lieu à une ou plusieurs réclamations.

(...)

Tout contrat d'assurance (...) garantit l'assuré contre les conséquences pécuniaires des sinistres pour lesquels la première réclamation est formée pendant la période de validité du contrat, quelle que soit la date des autres éléments constitutifs du sinistre, dès lors que le fait générateur est survenu dans le cadre des activités de l'assuré garanties au moment de la première réclamation.

Article 5

L'article L. 251-2 du code des assurances s'applique aux contrats conclus ou renouvelés à compter de la date de publication de la présente loi. »⁷

En pratique, il s'est ainsi créé un **mécanisme par répartition**, quasiment unique dans le fonctionnement des contrats d'assurance privée : les primes ne sont censées couvrir que les sinistres réclamés pendant le même exercice, quelle que soit l'année de survenance.

Mécanisme d'ailleurs renforcé par le fait que la loi stipule que seul l'assureur en vigueur au moment de la première réclamation est appelé en couverture du sinistre. Il se crée ainsi un principe de « **reprise du passé** », pour autant qu'il ne soit pas connu de l'assuré (ce qui n'est pas systématiquement démontrable) et au moins inconnu des assureurs précédents.

⁶ Loi n° 2002-1577 du 30 décembre 2002 relative à la responsabilité civile médicale

⁷ Loi n° 2002-1577 du 30 décembre 2002 relative à la responsabilité civile médicale

« Article 5

(...)

Le contrat ne garantit pas les sinistres dont le fait générateur était connu de l'assuré à la date de la souscription.

Lorsqu'un même sinistre est susceptible de mettre en jeu la garantie apportée par plusieurs contrats successifs, il est couvert en priorité par le contrat en vigueur au moment de la première réclamation, sans qu'il soit fait application des dispositions des troisième et quatrième alinéas de l'article L. 121-4. »⁸

Dernière notion introduite par la loi About, les **sinistres subséquents**, notion plus proche de l'assurance classique où la garantie peut être appelée par rapport à la date du fait générateur, nécessitant de l'assureur la constitution d'IBNR.

« Article 5

Sans préjudice de l'application des clauses contractuelles stipulant une période de garantie plus longue, tout contrat d'assurance de responsabilité civile (...), conclu antérieurement à cette date, garantit les sinistres dont la première réclamation est formulée postérieurement à cette date et moins de cinq ans après l'expiration ou la résiliation de tout ou partie des garanties, si ces sinistres sont imputables aux activités garanties à la date d'expiration ou de résiliation et s'ils résultent d'un fait générateur survenu pendant la période de validité du contrat.

Le contrat d'assurance garantit également les sinistres dont la première réclamation est formulée pendant un délai fixé par le contrat, à partir de la date d'expiration ou de résiliation de tout ou partie des garanties, si ces sinistres sont imputables aux activités garanties à cette date, et s'ils résultent d'un fait générateur survenu pendant la période de validité du contrat. Ce délai ne peut être inférieur à cinq ans.

Le dernier contrat conclu, avant sa cessation d'activité professionnelle ou son décès, par un professionnel de santé (...) exerçant à titre libéral, garantit également les sinistres pour lesquels la première réclamation est formulée pendant un délai fixé par le contrat, à partir de la date de résiliation ou d'expiration de tout ou partie des garanties, dès lors que le fait générateur est survenu pendant la période de validité du contrat ou antérieurement à cette période dans le cadre des activités de l'assuré garanties au moment de la première réclamation. Ce délai ne peut être inférieur à dix ans. Cette garantie ne couvre pas les sinistres dont la première réclamation est postérieure à une éventuelle reprise d'activité. Le contrat ne peut prévoir pour cette garantie un plafond inférieur à celui de l'année précédant la fin du contrat. »⁹

En pratique, à chaque résiliation, l'assureur doit provisionner les éventuels sinistres réclamés pendant :

- 5 ans en cas de résiliation pour changement d'assureur, pour autant que le sinistre soit théoriquement connu de l'assuré mais pas nécessairement déclaré
- 10 ans en cas de résiliation pour cessation d'activité (décès, retraite, changement de secteur d'activité)

⁸ Ibid.

⁹ Loi n° 2002-1577 du 30 décembre 2002 relative à la responsabilité civile médicale

La loi de mars 2002 a également créé un Office national d'indemnisation des accidents médicaux (ONIAM), chargé du fonctionnement des commissions régionales de conciliation et d'indemnisation des accidents médicaux (CRICA) ainsi que de l'indemnisation des victimes d'accidents médicaux sans faute (article L. 1142-22 du même code). Cet office se substitue également à l'assureur lorsque l'indemnisation amiable dépasse le plafond contractuel.

Mais il subsistait des « trous de garanties », lors des procédures contentieuses :

- au-delà du plafond du contrat d'assurance, hors les spécialités à risques pour lesquelles l'ONIAM intervient
- en cas d'extinction de la garantie (prescription décennale), hors les spécialités à risques pour lesquels l'ONIAM intervient.

Par ailleurs le plafond légal de 3 M€ par sinistre pouvait sembler insuffisant pour certains dommages. Suite au rapport JOHANET, commandité par le gouvernement, il a été institué¹⁰ un Fonds de Garantie des dommages consécutifs à des actes de prévention, de diagnostic ou de soins dispensés par des professionnels de santé. Les indemnisations supérieures à 8 M€, hors prescriptions légales, seront alors prises en charge par ce fonds. Le fonds est financé par une contribution forfaitaire à charge des professionnels de santé, perçue par les organismes d'assurances.

2.1.2 Cadre juridique et assurantiel en Europe

Avec l'objectif de préservation de la paix sociale, la réparation juridique tente de s'appuyer sur des critères objectifs : les risques et/ou la faute.

L'Europe avait commencé à harmoniser ces principes en 1975 par la résolution 75-7 du Conseil de l'Europe qui énonce 19 principes dans lesquels il n'est pas évoqué la notion de faute. Ce texte n'est pas contraignant.

En matière de responsabilité civile médicale, cette approche divise en Europe les pays en deux catégories. Schématiquement, les pays scandinaves ont choisi le principe de la responsabilité objective pour risque. La plupart des autres distingue la responsabilité en fonction du critère de faute médicale.

Ainsi que décrit précédemment, la France a choisi un système mixte.

Autre texte européen important sur la responsabilité du praticien est la Convention d'Oviedo, qui énonce les grands principes visant à assurer la protection des droits de l'homme et de la dignité de l'être humain à l'égard des applications de la médecine et de la biologie, signé en 1997, ratifié par la France en 2011 et qui est entré en vigueur en France au 1^{er} janvier 2012. Ce texte prévoit notamment :

- Le malade reçoit préalablement une information adéquate quant au but et à la nature de l'intervention ainsi qu'à ses conséquences et à ses risques
- Une intervention dans le domaine de la santé ne peut être effectuée qu'après que la personne concernée y ait donné son consentement libre et éclairé

¹⁰ Loi n° 2011-1977 du 28 décembre 2011 de finances pour 2012, notamment son article 146. Décret n° 2012-548 du 23 avril 2012

2.2 Le marché français de l'assurance responsabilité civile médicale

Suite aux réformes des lois Kouchner et About de 2002, au désengagement de certains acteurs, le marché de l'assurance de responsabilité civile des professions médicales s'est apaisé. Les médecins trouvent à s'assurer sans difficulté soit auprès des assureurs spécialisés (Sham, Macsf-Sou Médical, La Médicale) ou auprès d'assureurs généralistes (Axa, MMA, Pasteur Mutualité,...) sans oublier MIC qui intervient en LPS, comme le démontre le très faible nombre de saisine du Bureau Central de Tarification auquel tout médecin ne trouvant pas à s'assurer peut s'adresser.

Selon l'Autorité de contrôle prudentiel (1), les primes RCM émises représentent environ 500 M€, répartis entre une quinzaine d'acteurs sur le marché. Toutefois, les deux premiers opérateurs représentent 68 % des primes pour la gynécologie obstétrique, 78 % pour l'anesthésie réanimation et 83 % pour la chirurgie.

Pour les disciplines à risques, plus 60% des professionnels libéraux sont assurés par un seul opérateur. Le marché reste sensible au nombre d'opérateurs présents, le retrait d'un des 3 principaux opérateurs pourrait créer une situation critique, analogue à celle vécue en 2002.

De même, le nombre réduit d'établissements et de professionnels assurés limite la mutualisation du risque (à l'inverse de l'assurance responsabilité civile en automobile, couvrant également des dommages corporels, mais reposant sur une large mutualisation du risque).

2.3 Le produit de MÉDICALE DE FRANCE

2.3.1 Position sur le marché

MÉDICALE DE FRANCE, acteur majeur de l'assurance du praticien libéral sur l'ensemble des risques professionnels et privés, est particulièrement attentive aux évolutions du risque de responsabilité civile médicale, et n'assure aucun établissement hospitalier.

Elle développe depuis deux décennies une politique très sélective de souscription dans ce domaine particulier tournée essentiellement d'une part, vers les médecins généralistes et les spécialistes de « premier niveau », et d'autre part vers les paramédicaux qui présentent globalement une sinistralité maîtrisée où les sinistres de pointe sont exceptionnels.

La cible des spécialistes exclut de la souscription les gynécologues obstétriciens avec pratique des accouchements et de la chirurgie et reste très restrictive sur les chirurgiens pour lesquels seuls quelques risques bien maîtrisés comme l'urologie bénéficient d'une approche sélective ; il en est de même des anesthésistes dont les règles de prévention ont considérablement fait diminuer les risques d'accident depuis plusieurs années.

2.3.2 Risques couverts

Par le contrat de Responsabilité Civile Médicale (RCM), MÉDICALE DE FRANCE de France garantit les assurés et leurs ayants droit contre les conséquences pécuniaires de la Responsabilité civile professionnelle qu'il peut encourir en raison de dommages causés à autrui dans le cadre de l'exercice légal de sa profession, ainsi qu'à l'occasion de stages de perfectionnement qu'il est amené à suivre.

La garantie peut être étendue aux salariés, préposés et assistants, légalement autorisés dans l'exercice de leurs fonctions. Le bénévolat est également garanti lors d'actes de prévention, de diagnostic ou de soins de médecine générale :

- dans le cadre de soins prodigués à titre gracieux,
- dans des circonstances exceptionnelles en dehors du champ de son activité et en l'absence de prise en charge par la solidarité nationale.

La RCM garantit aussi :

- la recherche biomédicale pour un assuré en tant qu'investigateur dans le cadre d'un protocole validé par le Comité consultatif de protection des personnes dans la recherche biomédicale.
- l'enseignement lors de formations qu'il est amené à dispenser et relatives à la pratique de son art.

La RCM garantit jusqu'à 11 400 000 € par année d'assurance, avec deux limites :

- 8 000 000 €¹¹ pour la réparation des dommages corporels de même nature réclamée par une seule et même partie lésée ;
- 300 000 € par sinistre¹², pour les dommages matériels et immatériels consécutifs.

2.4 Incidence des changements législatif sur les provisions

Le mécanisme classique de l'assurance consiste à bâtir la tarification de manière à faire face aux sinistres qui surviennent pendant la période de couverture :

- aux sinistres survenus pendant la période de couverture (quelle que soit la date de déclaration ou réclamation du sinistre)
- aux frais de commercialisation, gestion,...
- à la rémunération des fonds propres

Ceci impliquait les provisionnements suivants :

- Provision dossier pour les sinistres déclarés et/ou réclamés
- IBNER pour les sinistres déclarés et/ou réclamés
- IBNR pour les sinistres survenus, non encore déclaré ni réclamé

Les méthodes classiques de triangulation des charges, règlements et provisions pouvaient s'appliquer.

¹¹ Avant la Loi n° 2011-1977 du 28 décembre 2011 la limite était de 7,6 M€. La loi a eu peu de conséquences pour MÉDICALE DE FRANCE.

¹² Pour les vétérinaires, dans le cadre de soins prodigués aux chevaux, cette garantie est accordée avec une limite d'engagement maximal de 20 000 euros par animal, les animaux étant juridiquement considérés comme des biens matériels.

Suite à la loi About, la prime doit désormais couvrir uniquement les sinistres réclamés pendant la période de couverture ou pendant quelques années après la résiliation du contrat :

- Les sinistres réclamés au cours de la période de couverture (sauf ceux issus de la reprise d'un contrat à la concurrence, si le sinistre était connu)
- Les sinistres subséquents (avec les conditions de forclusions), assimilable à des IBNR
- Les frais de commercialisation, gestion,...
- La rémunération des fonds propres

Stricto sensu, l'assureur doit constituer les provisions suivantes en fonction de la nature de sa connaissance des sinistres pendant la période de couverture du contrat et de l'état du lien contractuel, et non plus de la date de survenance :

Contrat	Sinistre déclaré	Sinistre réclamé	Provision avant 2003	Provision après 2003	Provision Médicale de France
Contrat résilié avant 2003	Non	Non	IBNR	Subséquentes	
	Oui	Non	Dossier + IBNER		
	Oui	Oui			
Contrat souscrit ou renouvelé après 2003	Non	Non	IBNR	Non, sauf subséquentes pour contrat résilié	
	Oui	Non	Dossier + IBNER	Non, sauf subséquentes pour contrat résilié	Dossier + IBNER
	Oui	Oui		Dossier + IBNER	

Médicale de France adopte ainsi une position prudente par rapport aux dossiers déclarés non encore réclamés.

3 Données de MÉDICALE DE FRANCE

Pour des raisons de confidentialité, le nombre et les montants des sinistres de MÉDICALE DE FRANCE ont été légèrement modifiés. Ces modifications ne sont pas de nature à remettre en cause les conclusions du présent mémoire.

Ces données ont été extraites lors de l'inventaire 2011.

3.1 Gestion des sinistres

Les gestionnaires sinistres de MÉDICALE DE FRANCE fixe les provisions dossiers d'une part en fonction des premières informations disponibles et d'une grille forfaitaire, puis en fonction des informations précises relative au sinistre.

Le service de l'actuariat, sur la base de l'historique des sinistres (forfait d'ouverture, règlements nets de recours, réévaluations,...) évalue une provision statistique (IBNR et/ou IBNER) qui est décrite en « 4.1 Modèle de provisionnement de ».

3.1.1 Forfaits d'ouverture

La grille des provisions forfaitaires d'ouvertures distingue 5 catégories de forfaits selon la profession de l'assuré. Les sinistres sont portés à la connaissance de l'assureur suivant quatre modalités : assignation, CRCI¹³, réclamation directe, déclaration. En fonction des informations disponibles, les gestionnaires appliquent la procédure suivante :

- *déclaration par l'assuré, sans réclamation* : ouverture à 1€
- *réclamation immédiatement quantifiable (généralement sinistre matériel)* : ouverture au montant estimé des dommages
- *réclamation sans élément immédiatement quantifiable, mais a priori non grave* : ouverture suivant la grille forfaitaire (et donc en fonction de la profession de l'assuré)
- *réclamation a priori grave* : évaluation hors forfait au cas par cas.

La répartition des montants d'ouverture depuis 2010 observée :

- | | |
|------------------------------|-----|
| - 1 € : | 16% |
| - Hors Grille : | 16% |
| - Forfaits selon la Grille : | 68% |

¹³ Commissions Régionales de Conciliation et d'Indemnisation des accidents médicaux des affections iatrogènes et des infections nosocomiales (CRCI), créées par décret du 3 mai 2002.

En pratique, de nombreux dossiers déclarés mais non réclamés sont ouverts à des montants supérieurs à 1€. Le coût final des dossiers est généralement inférieur à la provision d'ouverture :

- Sur l'ensemble des dossiers sinistres, 71% des sinistres clos ont une charge finale inférieure à la provision d'ouverture. Pour les dossiers ouverts suivant la grille, ce taux s'établit à 84%. Au global la grille paraît être une estimation plutôt prudente.
- En excluant les dossiers sans suite (39% des dossiers clos), seuls 27% des dossiers ont été clos avec une charge supérieure à la provision issue de la grille.

3.1.2 Sinistres graves

Les gestionnaires sinistres distinguent 3 catégories de sinistres selon la charge :

- Charge inférieure à 200 000 €
- Charge comprise entre 200 000 et 1 million €
- Charge supérieure à 1 M€

Les sinistres de plus de 1 M€ correspondent généralement à des cas d'« erreur » médicale entraînant le décès de la victime, ou à une suite de décision de justice. Les sinistres graves requièrent très souvent une assistance à tierce personne, dont le coût représente environ 60% de la charge totale de ses sinistres.

À l'ouverture, selon les informations disponibles les sinistres présumés importants ont une provision d'ouverture forfaitaire de 57 500€. Les critères principaux pour cette classification sont la profession de l'assuré et le caractère du dommage (suivi de grossesse...). La moitié de ces dossiers sont clos avec une charge inférieure au forfait d'ouverture.

Un Comité d'Évaluation composé des gestionnaires, du médecin conseil et de l'avocat, étudie les sinistres dont la charge est supérieure à 50 000€.

La « hantise » des gestionnaires est que les règlements dépassent les montants provisionnés, chaque sinistre et donc « bien provisionné » selon l'information disponible. Il n'a pas été émis d'avis chiffré sur le sur/sous-provisionnement des sinistres graves, cependant il est accepté qu'il est plus facile de réévaluer les sinistres à la hausse qu'à la baisse (*i.e. biais au sur-provisionnement plus probable par le service gestionnaire et ce pour toutes les catégories de sinistres*), pour avoir des variations de la charge plus « cohérentes » : pas de réévaluations successives à la hausse puis à la baisse.

3.2 La sinistralité

Le fichier présente une particularité d'information : les règlements ne sont renseignés que depuis 1985. Cela résulte probablement d'un changement d'environnement informatique au cours duquel l'historique n'a pas été complètement repris. Le biais qui peut se présenter est que seuls les sinistres ayant connue un traitement lent ou une déclaration très tardive ont été conservés.

Dans une perspective d'étude de provisionnement, il sera considéré que l'information est complète, d'autant que les ouvertures de provisions sont intégralement connues.

3.2.1 Analyse descriptive

La base sinistre étudiée comporte 53 532 dossiers pour 210,0 M€ de règlements cumulés (nets de recours, ceux-ci représentant moins de 4% des règlements), 168,0 M€ de provisions (celles constituées par les gestionnaires), soit une charge de 378,1 M€ à fin 2011.

	Clos	Ouverts	Total
Nombre de dossiers	44 905	8 624	53 529
Règlements cumulés	144,8 M€	63,5 M€	210,0 M€
Provisions	0,0 M€	168,0 M€	168,0 M€
Charge	144,8 M€	233,3 M€	378,1 M€

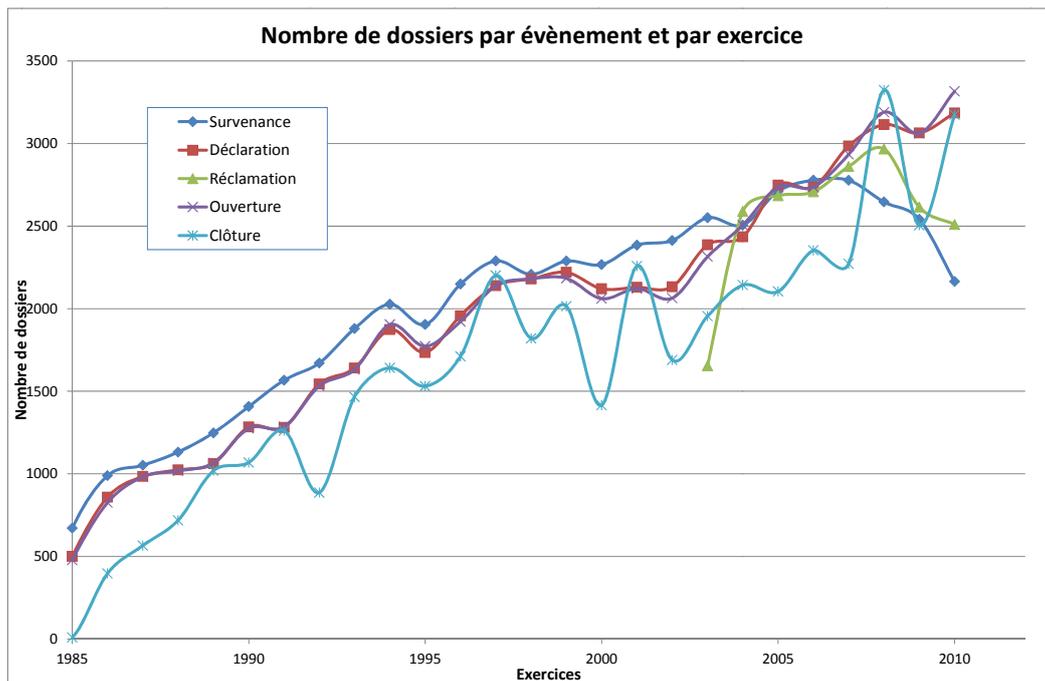
Dates de traitement

L'étude du comportement des dates clés des sinistres porte sur 26 années. Les dates prises en comptes sont de 4 natures :

- La survenance : il s'agit de la date (parfois estimée) de la survenance du sinistre
- La déclaration : c'est à ce moment que le praticien déclare le sinistre. Il peut arriver que la déclaration soit postérieure à la saisie de la compagnie par la victime
- La réclamation : c'est la manifestation par la victime de sa demande de réparation. Dans le cadre de la loi About, il s'agit de la date la plus importante puisqu'elle motive la prise en charge
- La clôture des dossiers

Les déclarations et ouvertures de dossiers sont relativement corrélées. Les survenances, semblent suivre une même tendance, mais avec un décalage dans le temps (délai pour l'assureur de connaître l'existence du sinistre), ce qui s'illustre particulièrement sur les 4 dernières exercices, avec une sous-estimation probables des survenances.

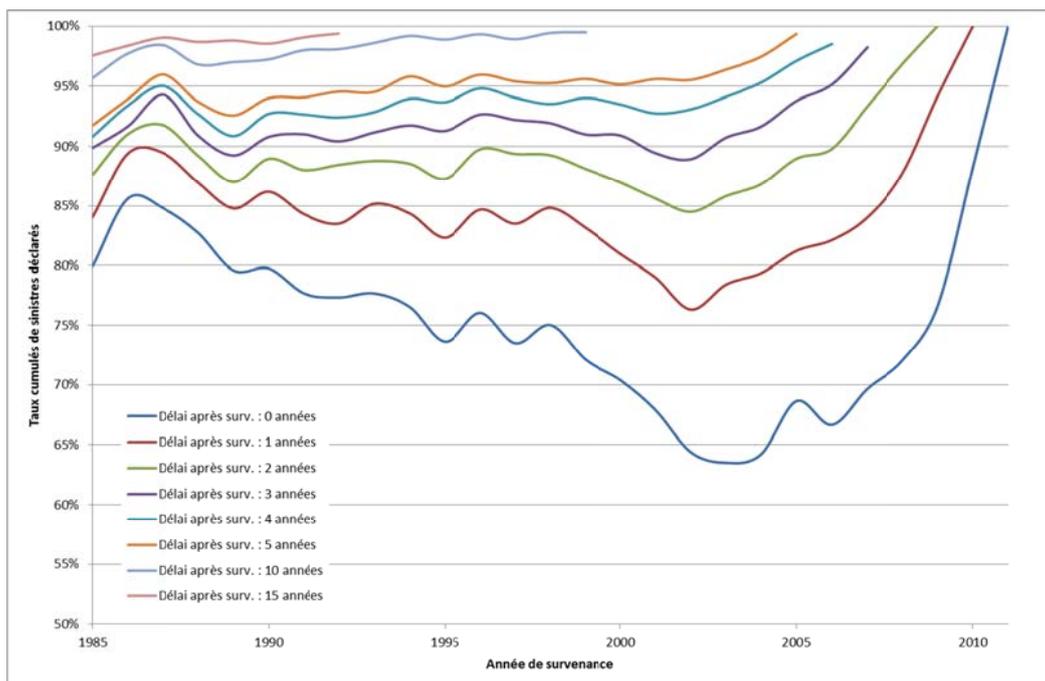
Figure 1 - Répartition des sinistres par évènement et par exercice



La déclaration

Les délais de déclaration ont sensiblement évolué dans le temps, les déclarations lors des 2 premières années suivant la survenance ayant sensiblement diminuées. Ce n'est qu'au terme de 4 années après la survenance que les taux de déclarations sont les mêmes quelle que soit la date de survenance.

Figure 2 - Taux de déclaration des sinistres par année de survenance



La modélisation de la loi de déclaration des sinistres, est donc perturbée par une dérive dans le temps dont il n'est pas possible à ce stade d'évaluer l'évolution future (poursuite de la dérive, stabilisation ?).

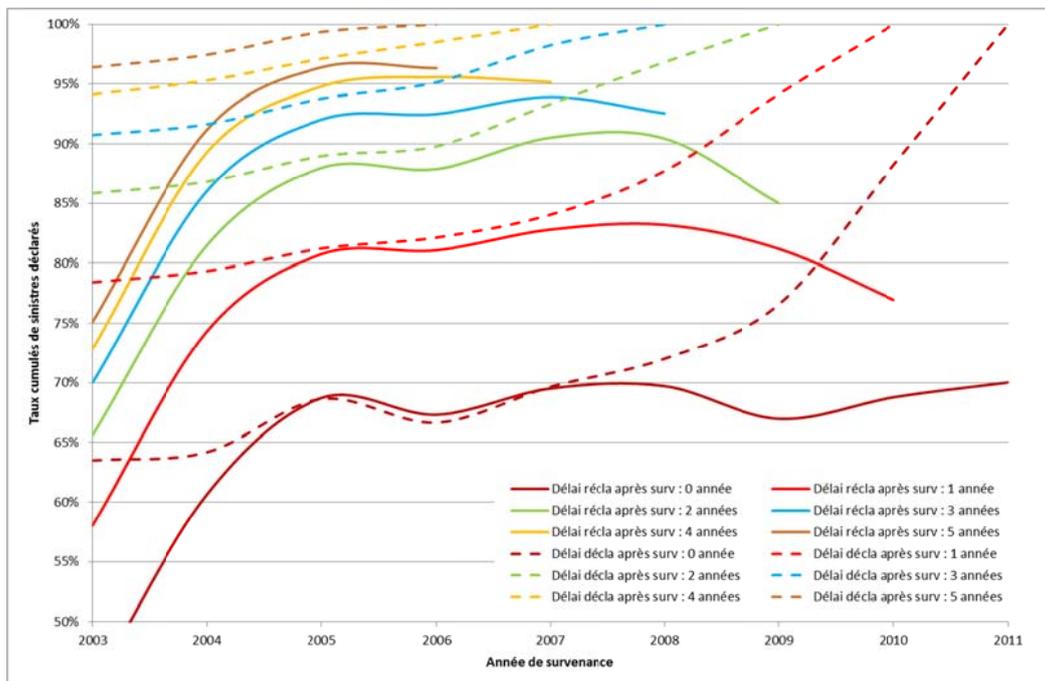
Il semble qu'une « cassure » se dessine pour les déclarations de deuxième année et suivante, à partir de l'instauration de la loi About (2003). Mais le recul n'est pas suffisant.

Toutefois, au terme de 8 années après la survenance, plus de 95% des sinistres sont connus. 2003 pourrait ainsi servir de référence pour la modélisation du comportement des déclarations de sinistres.

La réclamation

Avant 2003, la date de réclamation n'était pas renseignée. Depuis 2003, 88% des sinistres déclarés par les praticiens ont été réclamés par les victimes.

Figure 3 - Taux de réclamation des sinistres par année de survenance



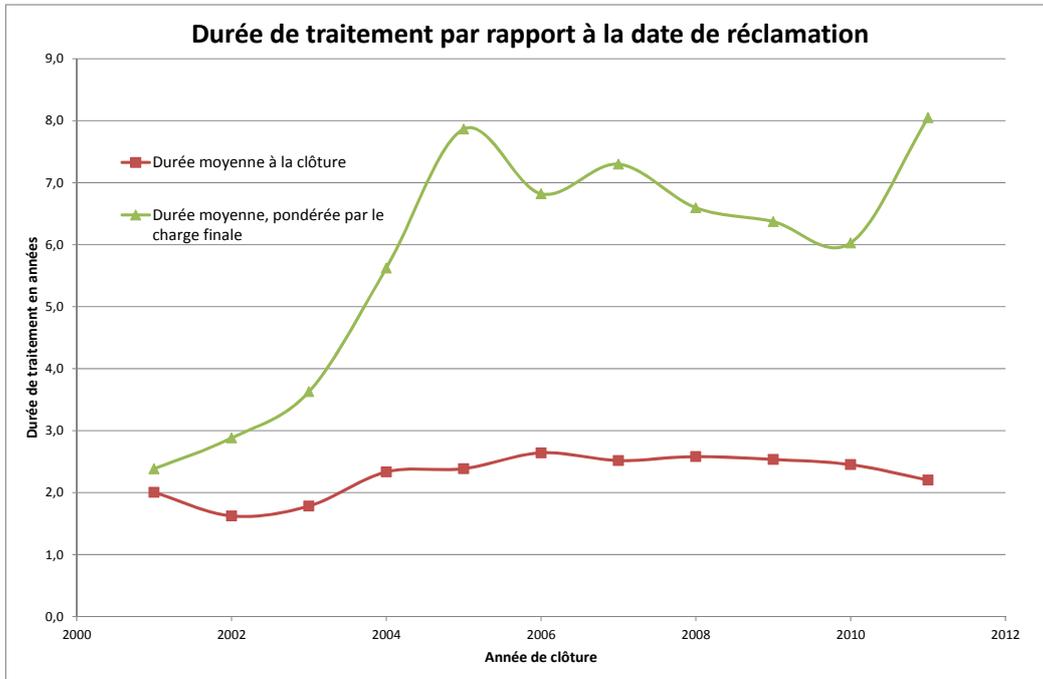
Parmi les dossiers réclamés, 29% l'ont été dans les 3 mois précédant la déclaration par le praticien, 57% au cours du même mois, et 4% dans les 3 mois suivant la déclaration. Le délai séparant la déclaration et la réclamation a peu varié dans le temps.

Cependant, il existe de nombreux dossiers ouverts après 2003, et clos, dont la date de réclamation n'a jamais été renseignée (675 dossiers, soit près de 3% des dossiers). Il semble qu'il ne s'agisse que de dommages matériels.

La clôture

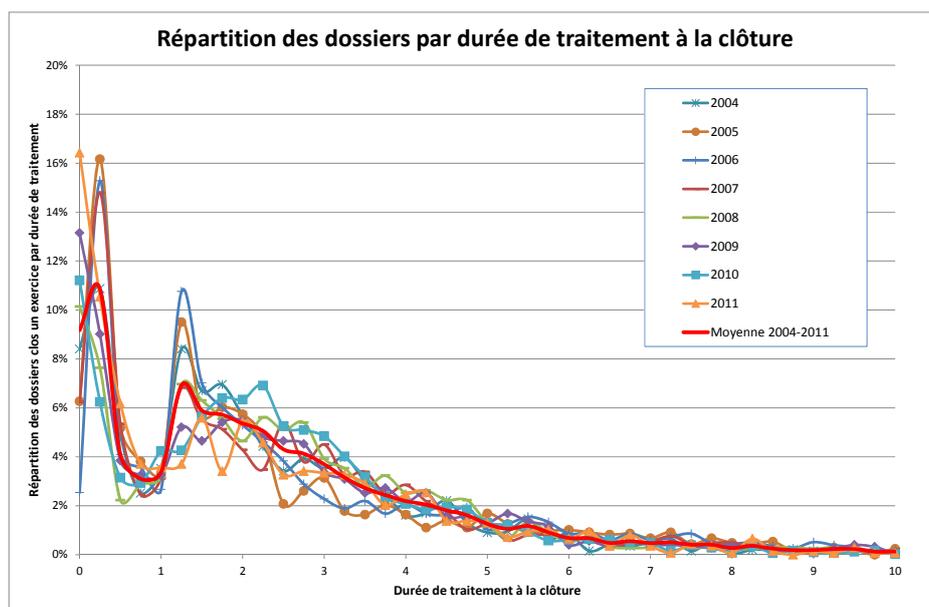
La durée de traitement des dossiers est relativement constante dans le temps, que ce soit en la rapportant à la date de survenance du sinistre¹⁴ qu'à la date de réclamation (depuis 2003). La pondération par la charge finale montre bien que la durée de traitement est d'autant plus longue que la charge finale est élevée.

Figure 4 - Durée de traitement des sinistres



La durée de traitement des dossiers a un comportement assez régulier, malgré une forte dispersion sur certaines durées (1^{er} semestre après la réclamation, 2^{ème} et 3^{ème} années).

Figure 5 - Répartition par durée de traitement



¹⁴ Cf. graphique en annexe 9.1.1 Dates de clôtures

La répartition est quasi identique lorsqu'on regarde les répartitions des durées par rapport à la date de survenance (cf. annexe 9.1.1 Dates de clôtures).

Étude des coûts

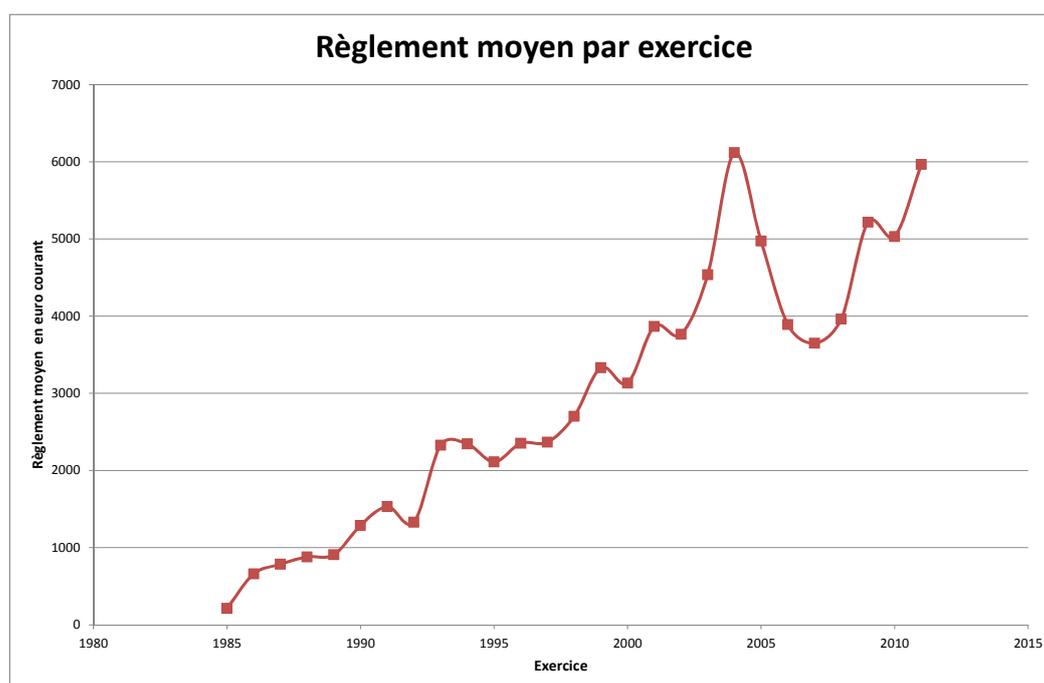
Recours

Les recours représentent moins de 4% de la charge finale. Il ne sera considéré que les règlements nets de recours.

Règlements

Les règlements moyens n'ont cessé d'augmenter jusqu'à la réforme législative. Après la décroissance durant les 4 années suivant la loi About, les règlements moyens sont repartis à la hausse. Il est difficile à ce stade de savoir s'il s'agit d'un « rattrapage » des années 2003-2006 ou une reprise de la hausse continue d'avant 2003.

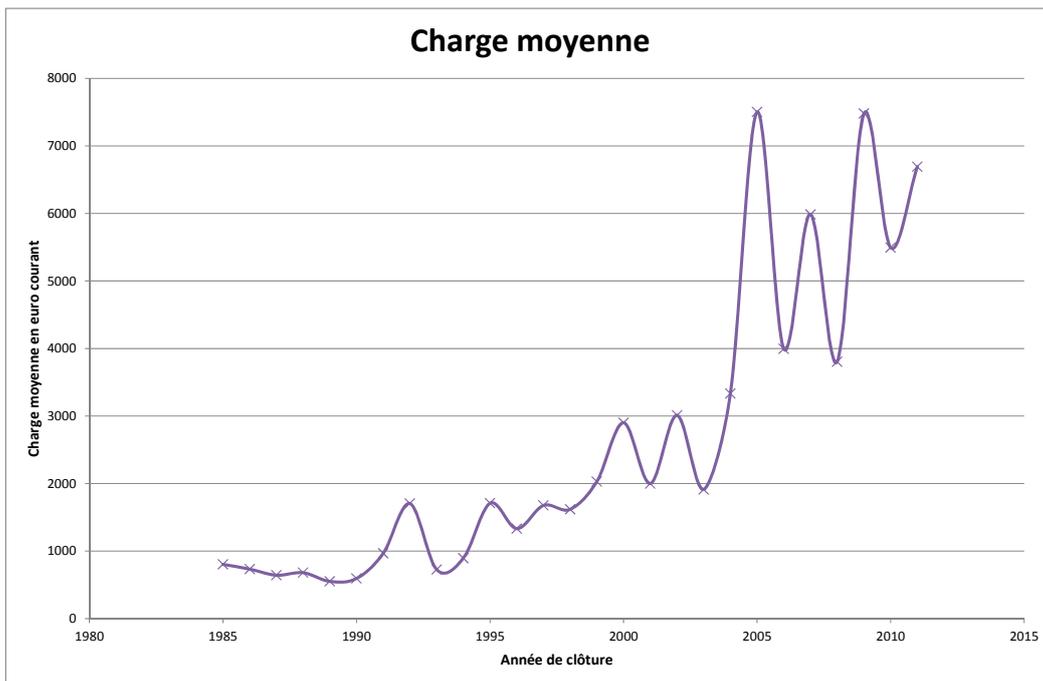
Figure 6 – Moyenne des règlements par exercice



Charges finales

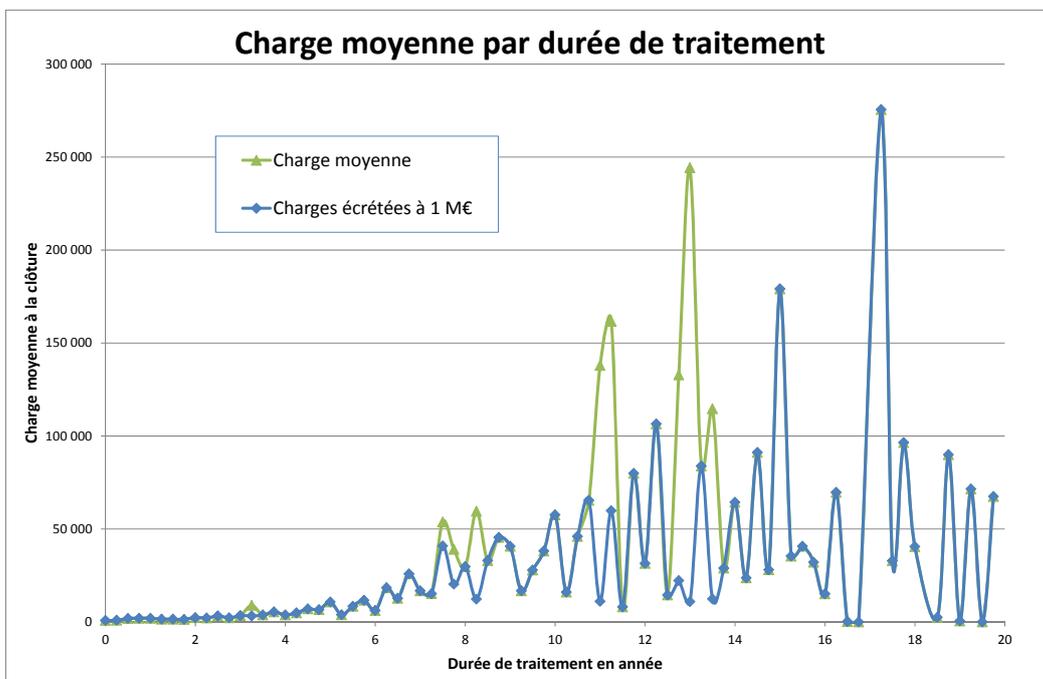
La charge moyenne finale a plus que doublé durant ces dernières années, évolution forte même en corrigeant de l'inflation, essentiellement depuis 2003. Sur l'ensemble du portefeuille, le coût moyen est de 7 062 € (y compris les dossiers en cours). De 2003 à 2011, la charge moyenne à la clôture est de 5 080 €.

Figure 7 - Montant moyen à la clôture par exercice



Aucune tendance ne se dessine sur les 10 dernières années. En se concentrant sur ces 9 dernières années (2003 à 2011), la charge moyenne apparaît bien croissante en fonction de la durée de traitement des dossiers. Corrigée des sinistres importants (plus de 1 million d'euros), la croissance est plus régulière, malgré le faible nombre de dossiers pour les durées supérieures à 9 ans.

Figure 8 - Montant à la clôture par durée de traitement

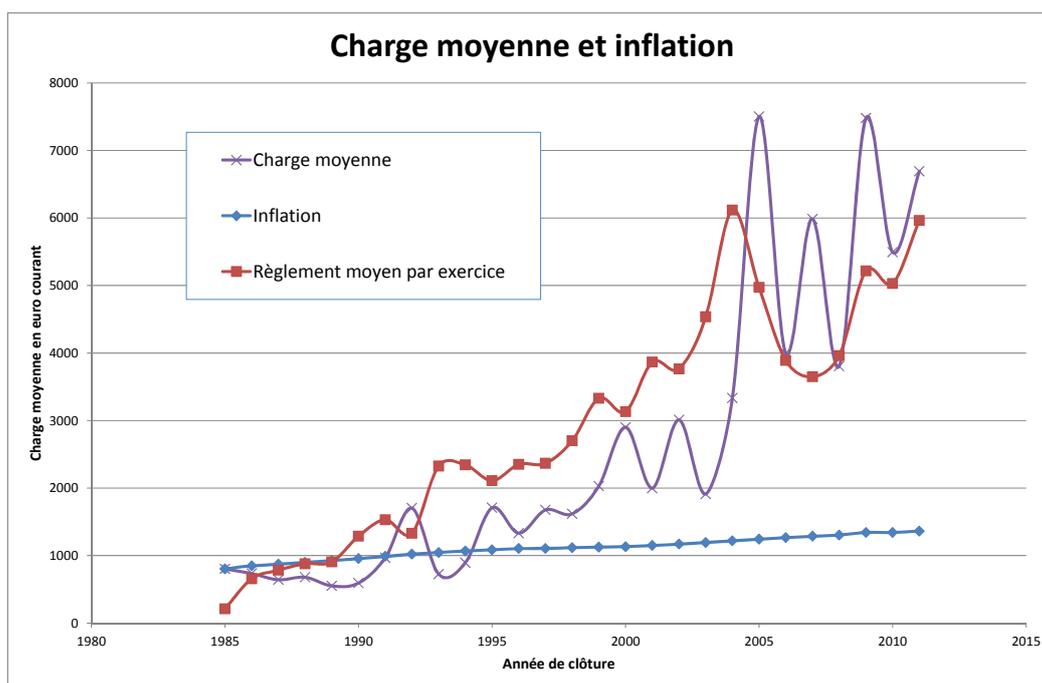


Cependant, en décomposant les sinistres réglés en moins d'une année, en 1 à 3 ans, en 4 à 5 ans, ou en plus de 5 années, une analyse plus détaillée montre des lois assez différenciées (cf. annexe 9.1.2 Charges par durée de traitement).

Identification d'une inflation

En projetant l'inflation comparativement à l'évolution des charges définitives moyennes, et des règlements moyens, il apparaît que l'évolution de la branche RCM est complètement déconnectée de l'inflation en France. Le coût moyen (ainsi que les règlements annuels) a été multiplié par plus de 8 en 26 ans, alors que l'inflation cumulée sur la même période s'établit à 170 %.

Figure 9 - Évolution de la charge et Inflation



Aucun élément ne permet d'isoler ce qui relève d'une inflation (évolution du coût des matériaux, des coûts des soins de santé, de l'évolution des salaires,...) ou de nouveaux chefs de préjudices, d'une inflation judiciaire,...

Par défaut, les données ne seront pas déflatées (cf. également 4.2.1 Inflation).

3.2.2 Repris du passé et subséquentes

Compte tenu de la loi About, la date de réclamation étant prépondérante sur la date de survenance pour ce qui concerne la prise en charge par l'assureur, 2 types de sinistres sont à identifier plus spécifiquement afin de suivre leur poids dans la rentabilité du produit : les sinistres survenus avant la souscription du contrat mais pris en charge, « repris du passé » ; les sinistres réclamés après clôture du contrat, « subséquentes » (dans des conditions légalement spécifiées, cf. 2.1.1 Cadre français).

Repris du passé

Le taux de dossiers sinistres réclamés après la souscription d'un nouveau contrat, et survenus avant est relativement stable dans le temps, avec une moyenne de 0,9% des contrats souscrits.

Exercice	Souscription	Nombre de sinistres repris du passé	Taux de repris du passé	Ancienneté moyenne du sinistre à la souscription	Charge moyenne
2003	15 241	81	0,53%	2,1	6 536
2004	16 723	183	1,09%	2,0	10 941
2005	18 296	178	0,97%	2,3	24 009
2006	16 435	162	0,99%	3,0	16 329
2007	17 050	146	0,86%	2,4	17 465
2008	17 123	191	1,12%	2,5	7 680
2009	19 536	154	0,79%	2,3	7 851
2010	19 224	168	0,87%	2,0	8 018
2011	20 360	157	0,77%	2,1	7 193
	159 988	1 420	0,89%	2,3	12 079

Le coût moyen des sinistres issus de la reprise du passé sont 2 fois plus élevés que le coût moyen de l'ensemble des sinistres.

Subséquentes

Le nombre de sinistres réclamés à la suite de la résiliation d'un contrat (changement d'assureur, cessation d'activité, retraite ou décès) est stable depuis 2003, avec une moyenne sur 8 ans de 0,5% des contrats résiliés, et représentant un environ de 2% de sinistres réclamés.

Coût moyen et délai de réclamation

Il est à noter que dans les 3 années consécutives à la résiliation, plus de 80% des réclamations sont effectuées.

Année de réclamation	Année de clôture du contrat									Nombre de réclamations	Taux de subsq. Sur l'ensemble des sinistres réclamés
	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011		
2003	15	0	0	0	0	0	0	0	0	1654	0,9%
2004	25	20	0	0	0	0	0	0	0	2589	1,7%
2005	13	19	30	0	0	0	0	0	0	2684	2,3%
2006	7	6	16	25	0	0	0	0	0	2708	2,0%
2007	4	4	4	18	11	0	0	0	0	2861	1,4%
2008	0	0	7	12	24	20	0	0	0	2967	2,1%
2009	2	4	0	2	9	29	37	0	0	2615	3,2%
2010	0	0	1	0	3	8	17	17	0	2510	1,8%
2011	1	0	0	0	1	2	7	8	10	1411	2,1%
	67	53	58	57	48	59	61	25	10		2,0%
Charge moyenne	7 818	6 455	13 123	3 336	113 273	6 267	5 463	6 150	7 223		
Charge moyenne hors sinistres graves	5 290	6 455	6 200	3 336	7 570	6 267	5 463	6 150	7 223		
Résiliations	6 867	6 485	6 844	6 805	15 143	16 667	14 425	9 870	3 325		
Taux de subséquentes	1,0%	0,8%	0,8%	0,8%	0,3%	0,4%	0,4%	0,3%	0,3%		

Le coût moyen des subséquents semble plus important que le coût moyen de l'ensemble des sinistres, mais compte tenu du faible nombre de dossiers et de 3 sinistres graves (plus de 150 000 €) il est difficile de conclure.

3.2.3 Sinistres graves

Sur 421 dossiers qui ont eu une charge supérieure à 150 000 euros, 296 sinistres sont encore graves (+ 150 000 € de charge, que le sinistre soit clos ou en cours). Comme indiqué précédemment, les gestionnaires ont une tendance à sur-provisionner les dossiers. Ils représentent moins de 1% des dossiers mais plus de la moitié de la charge depuis l'origine.

Parmi les 8 624 dossiers en cours de traitement, les 190 dossiers graves représentent 2% des dossiers, 77% de la charge dossier et 70% des provisions dossiers.

3.3 Estimation de comportements individuels

Certains comportements, qui seront utilisés au titre 7 Modèle individuel, sont étudiés afin de pouvoir modéliser ou reproduire de manière probable le comportement.

3.3.1 Réclamation

L'objectif est de pouvoir déterminer la probabilité qu'un sinistres soit en réclamé (et donc qu'il y ait des règlements) l'année j, sachant qu'il était en non réclamé l'année k, $j > k$.

Estimation

La durée de réclamation du dossier sinistre est dite censurée à droite, celui-ci pouvant n'avoir pas subi l'évènement de réclamation à l'inventaire. La censure est aléatoire.

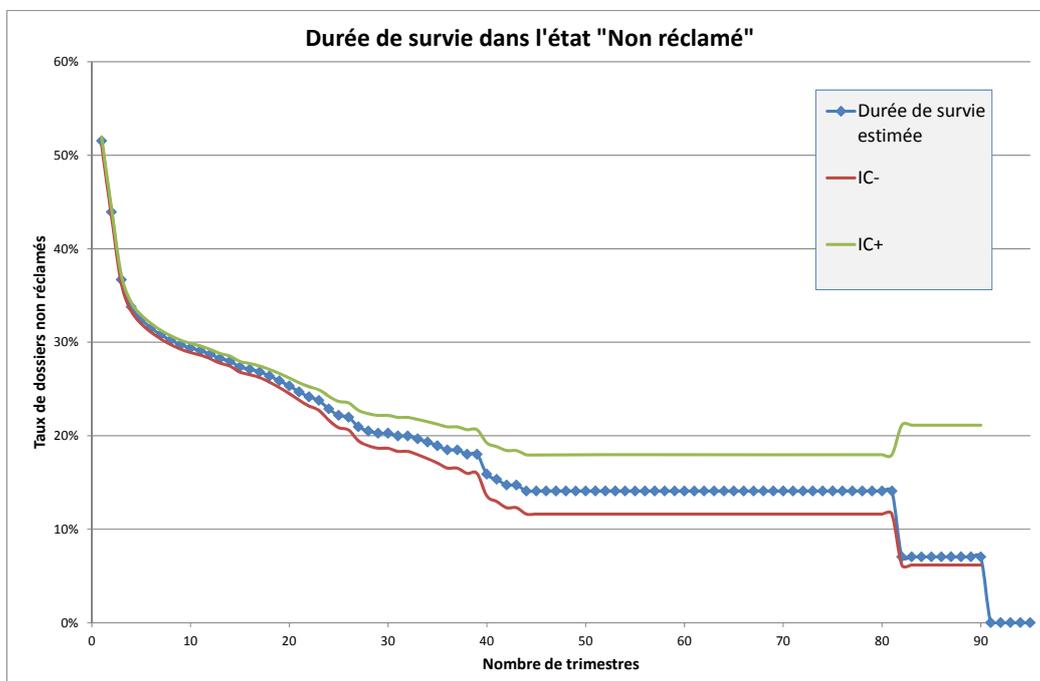
Certains dossiers connaissent des règlements sans que la date de réclamation soit renseignée. Il s'agit des dossiers matériels. La date de réclamation sera ainsi celle renseignée ou la date du premier règlement.

Notons I_u l'ensemble des sinistres en cours non réclamés u années après leur ouverture, et rcl_u le nombre de réclamation au cours de l'année u . On applique les résultats décrit en annexe (cf. 9.5.1 Estimateur de Kaplan Meier pour les fonctions de survie).

$$\hat{S}^{Recla}(j) = \prod_{u=1}^j \frac{\text{card}(I_u) - rcl_u}{\text{card}(I_u)}$$

Résultats

Le nombre de réclamations la première année étant particulièrement important (plus de 70% des dossiers), l'analyse a été faite par trimestre. Le faible nombre de dossiers non réclamés après une dizaine d'années de développement influe fortement sur la qualité de l'estimateur (l'intervalle de confiance de Rothman croissant fortement).



3.3.2 Durée de traitement

L'objectif est de pouvoir déterminer la probabilité qu'un sinistres soit en cours l'année j , sachant qu'il était en cours l'année k , $j > k$.

Estimation

La durée de survie du dossier sinistre est dite censurée à droite, celui-ci pouvant n'avoir pas subit l'évènement de clôture à l'inventaire. La censure est réputée aléatoire (malgré la procédure de révision d'inventaire effectuée chaque année par les gestionnaires).

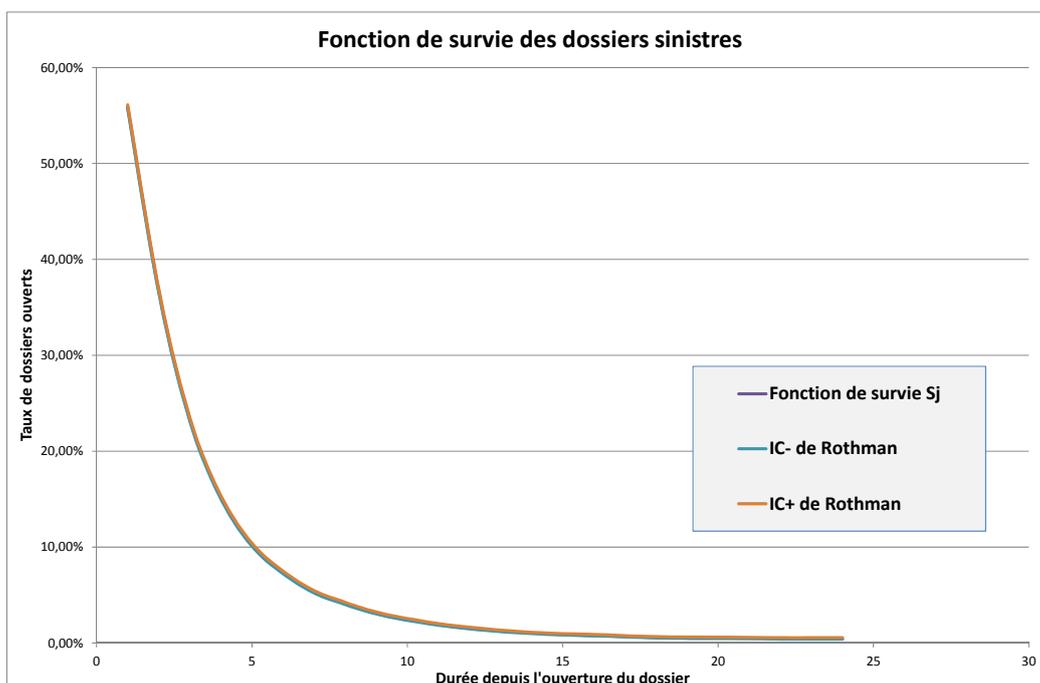
Notons I_u l'ensemble des sinistres en cours u années après leur ouverture, qu'il y ait eu un règlement l'année u ou non. Cela revient à établir le triangle des sinistres en cours (par année d'ouverture et par année de développement) et à sommer chaque colonne. En notant cl_u le nombre de clôture au terme de u années de développement, on applique les résultats décrit en annexe (cf. 9.5.1 Estimateur de Kaplan Meier pour les fonctions de survie).

$$\hat{S}(j) = \prod_{u=1}^j \frac{\text{card}(I_u) - cl_u}{\text{card}(I_u)}$$

Résultats

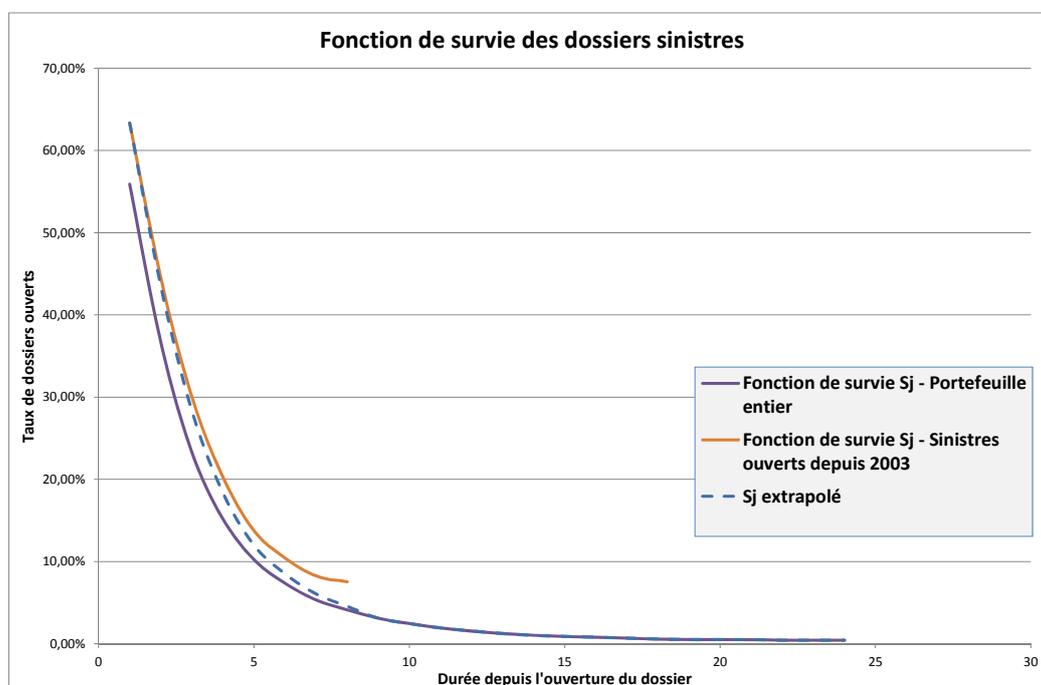
Le rythme de clôture est très élevé les premières années (75% les 3 premières années, 90% les 5 premières années).

Figure 10 - Fonction de survie des sinistres - Portefeuille entier



Le rythme de traitement des dossiers s'est sensiblement ralenti depuis 2003, probablement du fait de l'attente des gestionnaires d'une réclamation par les victimes.

Figure 11 - Comparaison des durées de survie Portefeuille entier / vs dossiers depuis 2003



Il est construit une fonction de survie (courbe en pointillé), extrapolée de ces deux fonctions de survie, afin de :

- Tenir compte du comportement le plus récent
- Minimiser le rythme des clôtures, et donc conserver de la prudence dans les provisions

3.3.3 Règlements

Il s'agit de modéliser le montant annuel d'un sinistre, fonction uniquement de l'année de développement depuis l'ouverture. Il ne s'agit que des dossiers réclamés, suivant la convention décrite au 3.3.1 Réclamation.

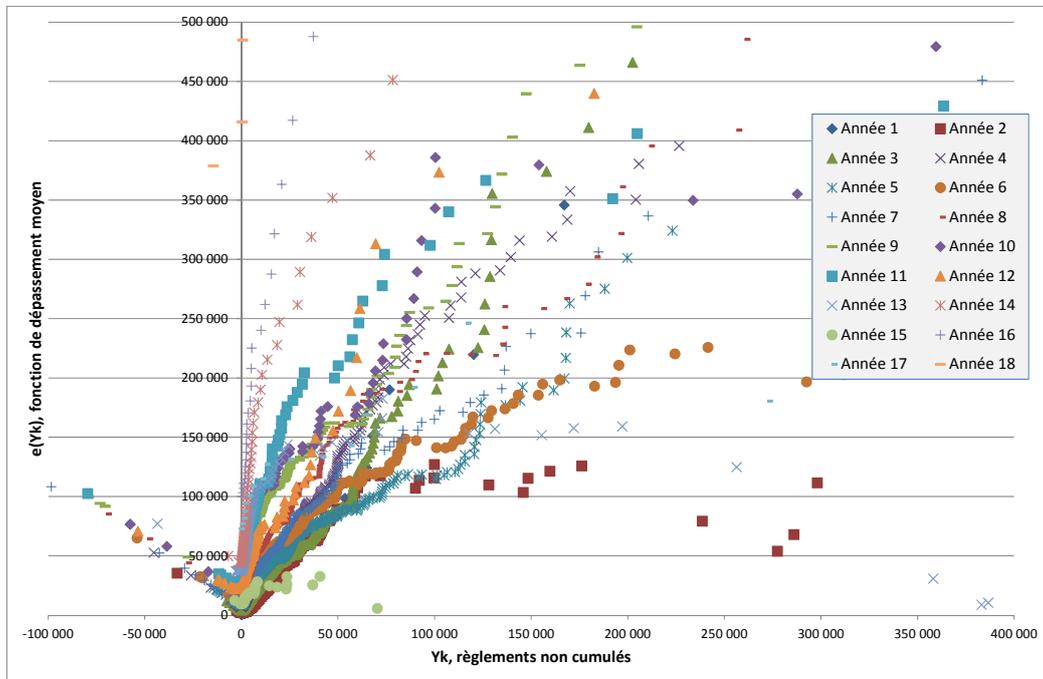
Signe des règlements

La première analyse faite sur les règlements est que près de la moitié des sinistres en cours de traitement n'ont aucun règlement dans l'exercice, et il existe un faible nombre de recours (réels ou représentant une annulation comptable). Ce qui se répartit en 0,4% des règlements négatifs, 49,3% nuls et 50,3% positifs. Cette répartition n'est pas constante (ni par année de survenance, ni par année de développement,...).

Fonction de dépassement moyen

En traçant le graphique de la fonction de dépassement moyen¹⁵ pour toutes les années de développement, la forme indiquerait une Weibull ($\alpha < 1$), une Log-normale ou une Pareto.

Figure 12 - Fonction de dépassement des règlements



Graphes QQ-Plot

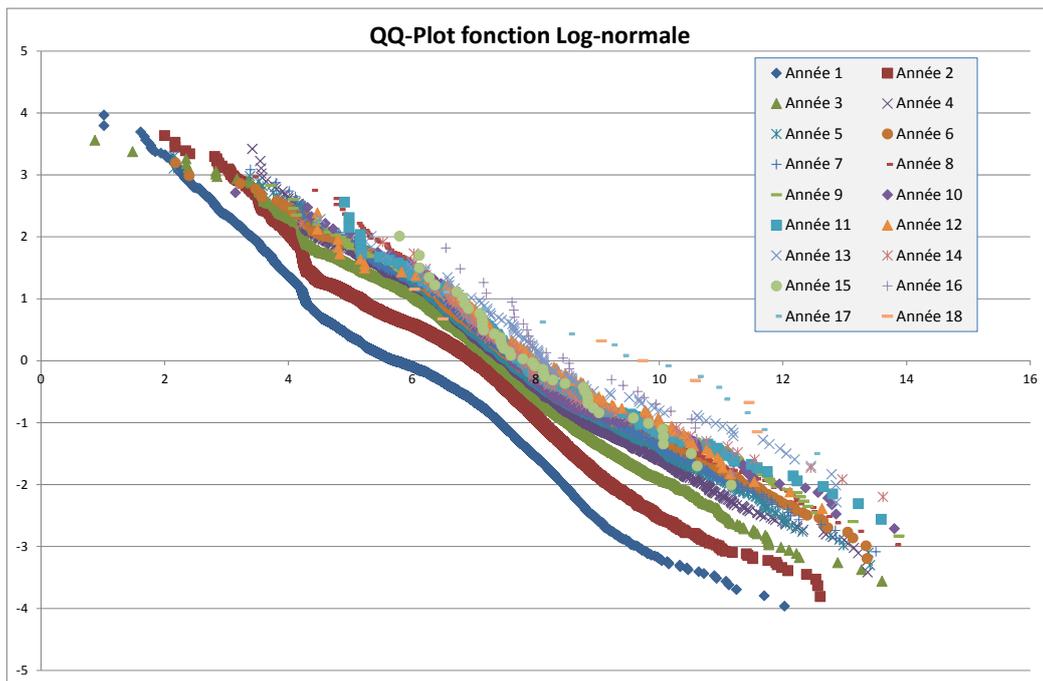
En traçant les graphiques de quantiles¹⁶, il semble que la fonction Log-normale¹⁷ s'adapte le mieux aux règlements positifs, quelle que soit l'année de développement.

¹⁵ Cf. 9.5.2 Fonction de dépassement moyen

¹⁶ Cf. 9.5.3 QQPlot

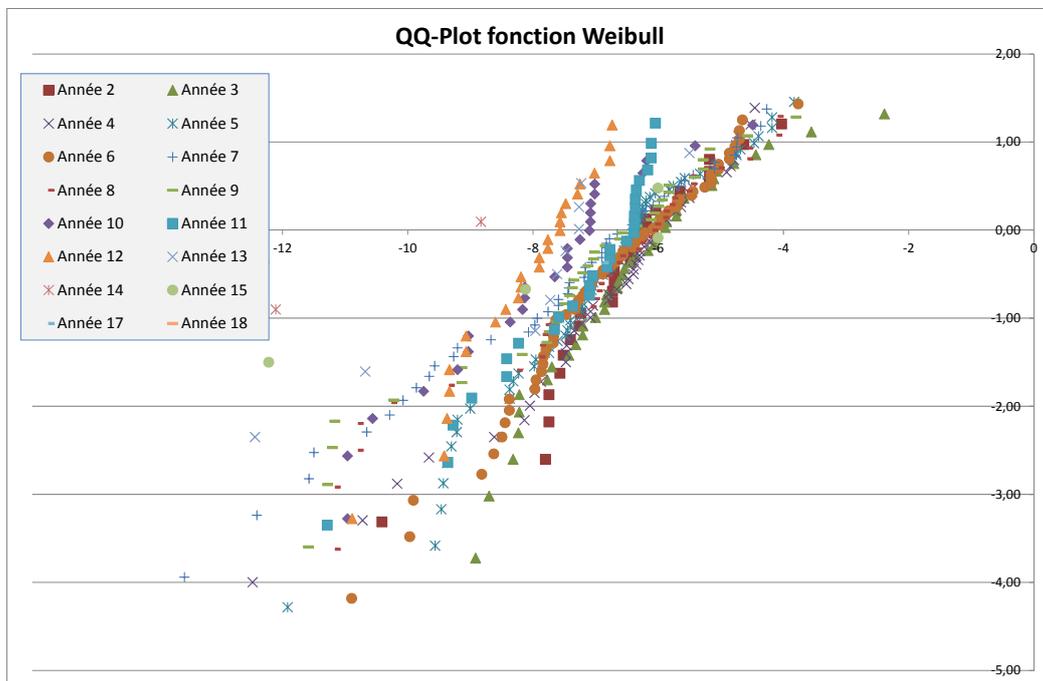
¹⁷ Pour les autres fonctions, voir en annexe

Figure 13 - QQ-Plot fonction Log-normale - règlements positifs



Pour les règlements négatifs, la fonction Weibull semble plus appropriée.

Figure 14 - QQ-Plot fonction Weibull - règlements négatifs



Résultats

Les paramètres des fonctions ont été estimés par maximum de vraisemblance¹⁸ :

- pour chaque année de développement pour les règlements positifs de la 1^{ère} à la 16^{ème} année de développement
- cumulativement pour les années supérieures à la 17^{ème} pour les règlements positifs (proximité des QQ-Plot et faible nombre de données)
- cumulativement pour les règlements négatifs (faible nombre de données)

Règlements positifs – Log-normale		
Année de développement	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1	5,828	1,439
2	6,766	1,416
3	7,320	1,380
4	7,598	1,413
5	7,728	1,504
6	7,854	1,599
7	7,832	1,537
8	8,098	1,591
9	8,152	1,791
10	7,946	1,645
11	8,239	1,810
12	8,295	1,741
13	8,801	1,979
14	8,366	1,918
15	8,184	1,369
16	8,864	1,588
17 à 24	9,319	2,068

La moyenne estimée $\hat{\mu}$ est globalement croissante avec la durée de traitement des dossiers, ce qui rejoint l'observation faite sur les montants moyens.

Règlements négatifs – Weibull		
Année de développement	\hat{k}	$\hat{\lambda}$
Toutes	0,489	2 821,2

¹⁸ Pour la description des vraisemblances d'une Log-normale et d'une Weibull, cf. 9.5.4 Vraisemblance.

4 Modèle de MÉDICALE DE FRANCE

Le service de l'actuariat, sur la base de l'historique des sinistres (forfait d'ouverture, règlements nets de recours, réévaluations,...) a mis en œuvre une méthodologie d'évaluation d'une provision statistique (IBNR et/ou IBNER). L'objet de ce chapitre est de décrire ce modèle et de discuter certains points, essentiellement dans une perspective Best Estimate.

4.1 Modèle de provisionnement de MÉDICALE DE FRANCE

Depuis la loi About de Décembre 2002, les sinistres sont traités sur la base de la date de réclamation, mais enregistré dès lors qu'ils sont connus (donc éventuellement déclarés mais pas encore réclamée). Ainsi les contrats de la branche RCP peuvent être répartis en 2 groupes :

- La base survenance relative aux contrats clôturés avant la réforme (pour un autre motif que le changement d'assureur) et pour lesquels des sinistres ont été réclamés avant et après l'entrée en vigueur de la réforme,
- La base réclamation relative aux contrats renouvelés ou souscrits après la réforme ou aux contrats clôturés avant la réforme lorsque le motif est un changement d'assureur.

Le portefeuille RCP de MÉDICALE DE FRANCE de France a été décomposé en trois sous-populations de sinistres, en fonction de l'état du contrat et de la date de réclamation :

	État du contrat	Date de réclamation	Base de rattachement	Nature juridique	Provisions
1	Clos avant le 01/01/03	À toute date	Survenance	Survenance	IBNER IBNR
2	Renouvelé ou souscrit après le 01/01/03	Avant la réforme	Réclamation		Réclamation
3		Après la réforme			

Par la suite, les populations n sont numérotées 1, 2 et 3 ci-dessus.

La méthode développée est identique suivant les populations. 2 lois de cadence de charge sont estimées, en fonction de la nature juridique des sinistres. Les triangles de données sont constitués des charges actuelles (règlements nets de recours et provisions constituées par les gestionnaires), classés par semestre de rattachement et de développement.

Les sinistres repris du passé (survenu avant la souscription, inconnu du professionnel de santé et réclamé après la souscription) et les subséquents réclamés ne sont pas particulièrement identifiés.

4.1.1 Construction des triangles de charges

En base Réclamation, les flux (règlement, recours, provision) sont rattachés au semestre de réclamation (si la date est renseignée) ou de déclaration (déclaration par l'assuré, systématiquement connue). Le semestre de développement débute en fonction de la date reconstituée de réclamation. Les éventuels flux antérieurs sont cumulés en montant d'ouverture.

En base Survenance, les flux sont rattachés au semestre de survenance du sinistre.

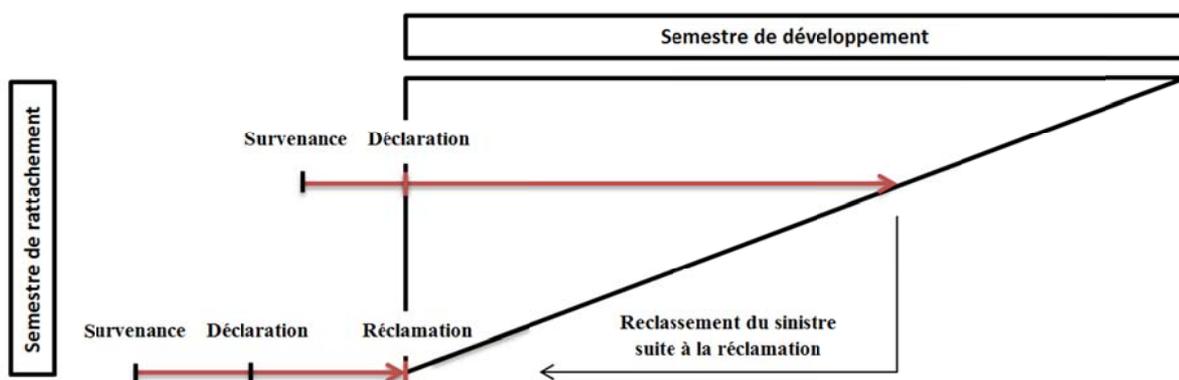
Compte tenu des informations présentes (et absentes) dans le Système d'information, un paramètre de début d'historique est introduit. En pratique, l'historique est incomplet avant 1985 (dû probablement à une reprise informatique) : les sinistres clos avant la reprise ne sont pas présents, et les mouvements (règlements, recours, modification de provisions) n'ont pas été repris, les cumuls étant exacts à partir de 1986 pour les sinistres en cours à cette date.

Deux lois de cadence de charge sont estimées : en base réclamation (calculée sur l'ensemble des sinistres connus, populations 1, 2 et 3) et en base survenance (calculée uniquement sur les sinistres en base de rattachement survenance, population 1).

La loi de cadence de charge en base Réclamation ne sera appliquée qu'aux sinistres en base de rattachement Réclamation (sous population 2 et 3). Les charges ultimes des sinistres de la population 2 seront reclassées en fonction des dates de survenance (reclassement comptable qui ne modifie pas les valeurs calculées).

Par ailleurs en cas de déclaration antérieure à la réclamation, le sinistre est dans un premier temps intégré dans le triangle à sa date de déclaration (montant de la charge correspondant à une provision d'ouverture forfaitaire). Lors de la réclamation le sinistre est réaffecté à cette nouvelle date (sur la dernière cellule en bas à gauche du triangle).

Figure 15 - Triangle en base Réclamation



Ce mécanisme n'est pas neutre dans l'évaluation des provisions. Dans le portefeuille étudié, 11% des sinistres sur les 10 dernières années n'ont pas été réclamés, et leur charge actuelle représente 12% de l'ensemble des sinistres déclarés sur ces 10 années.

La réaffectation du même sinistre sur une ligne de charge postérieure crée des distorsions sur les coefficients de passage et donc sur la charge ultime estimée.

4.1.2 Estimation des coefficients bruts de passage de charge

Le coefficient de passage de la charge d'une période à l'autre de développement, par période de rattachement est le rapport entre les charges de sinistres. La dernière diagonale du triangle, généralement incomplète du fait du traitement en fast-close des inventaires, n'est pas prise en compte pour l'évaluation des coefficients.

$$CoefPasChg_{j,n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } ou \begin{cases} p = 1 \\ ChgSin_{j,n,p-1} = 0 \end{cases} \\ \frac{ChgSin_{j,n,p}}{ChgSin_{j,n,p-1}} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

La moyenne géométrique de ces coefficients, pour une période de développement donné, s'établit comme :

$$MoyGeom_{n,p} = \left(\prod_{j=1}^{N-p} CoefPasChg_{j,n,p} \right)^{\frac{1}{NbCoef}}$$

Où $NbCoef$ est le nombre de $CoefPasChg_{j,n,s}$ non nuls.

Il est également calculé la moyenne arithmétique qui permet de tenir compte du poids de chaque semestre de sinistre.

$$MoyArith_{n,p} = \frac{\sum_{j=1}^{N-p} ChgSin_{j,n,p}}{\sum_{j=1}^{N-p} ChgSin_{j,n,p-1}}$$

Le coefficient de passage brut $\lambda_{n,p,brute}$ est calculé pour chaque période de développement comme la moyenne pondérée de la moyenne géométrique et de la moyenne arithmétique.

$$\lambda_{n,p,brute} = \frac{1}{2} (MoyArith_{n,p} + MoyGeom_{n,p})$$

4.1.3 Extrapolation et lissage des lois

La méthode pour extrapoler et lisser la loi de liquidation de la charge comporte 4 étapes :

- Adéquation à un modèle exponentiel
- Calcul de l'intervalle de confiance du modèle
- Loi extrapolée (moyenne sur 4 périodes)
- Détermination de la loi par lissage (sur 2 années)

Modèle exponentiel

Seules les périodes p^* pour lesquels $\lambda_{n,p,brute} > \beta_n$ sont retenus dans le modèle de régression linéaire (hypothèse conservatrice). Parmi les N_{per} premiers coefficients, tous ne satisfont pas la condition : $\lambda_{n,p,brute} > \beta_n$. Il sera noté N_p ($\leq N_{Per}$) le nombre d'observations qui remplissent cette condition.

Une méthode classique d'évaluation d'un « *tail factor* » est le modèle exponentiel :

$$\lambda_{n,p,brute} = \beta_n + c \times p^a$$

Soit, en passant au logarithme :

$$y = \ln(\lambda_{n,p,brute} - \beta_n) = ax + b = a \ln(p) + \ln(c)$$

Les paramètres a et b sont estimés suivant la méthode des moindres carrés sur les N_p premières périodes.

Intervalle de confiance du coefficient de passage

En faisant l'hypothèse que les résidus du modèle sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées normales centrées et de variance inconnue σ^2 , alors on peut démontrer que la réalisation $y^* = \ln(\lambda_{n,p}^* - \beta)$ a un intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ donné par :

$$\left[a \ln(p^*) + b - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \left((NP-1) \text{Var}(\ln(p^*)) + (\ln(p^*) - \bar{p}^*)^2 \right)}{NP \times \text{Var}(\ln(p^*))}}; a \ln(p^*) + b + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \left((NP-1) \text{Var}(\ln(p^*)) + (\ln(p^*) - \bar{p}^*)^2 \right)}{NP \times \text{Var}(\ln(p^*))}} \right]$$

Où :

- $t_{\alpha/2}$ est tel que $\text{Pr ob} \left[|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$, et T une loi de Student (N-2)
- $\hat{\sigma}^2$ est la variance pour la variable estimée $\ln(\lambda_{n,p}^* - \beta)$
- $\text{Var}(\ln(p^*))$ est la variance observée des périodes retenues
- \bar{p}^* est la moyenne observée des périodes retenues

Loi extrapolée

Les résultats des étapes précédentes ont été enregistrés lors des 3 précédents inventaires semestriels. La loi extrapolée $\lambda_{n,p,extrapolé}$ est la moyenne de la borne supérieure de l'intervalle de confiance des 4 derniers résultats, tous calculés au même seuil de confiance.

Coefficients de passage

Les coefficients de passage retenus sont :

$$\lambda_{n,p,lissé} = \begin{cases} p \leq NPer \dots \lambda_{n,p,brute} \\ NPer < p < NS + NPer \dots \left(\lambda_{n,p,extrapolé} \right)^{p-NPer} \times \left(\lambda_{n,p,brute} \right)^{NS-p+NPer} \sqrt[NS]{\dots} \\ p \geq NS + NPer \dots \lambda_{n,p,extrapolé} \end{cases}$$

Ce qui revient à retenir les coefficients bruts sur les NPer semestres, une pondération géométrique des coefficients bruts et extrapolés (plus on s'éloigne dans le développement du triangle, moins il y a de données pour calculer les coefficients bruts, et plus les coefficients extrapolés prennent un poids prépondérants), puis après NS + NPer semestres, seuls les coefficients lissés sont retenus.

4.1.4 Calcul de la charge ultime

La charge ultime est calculée en appliquant aux charges dossiers les lois de cadence de charge précédemment estimées :

- Sous population 1 : loi de cadence en base Survenance
- Sous populations 2 et 3 : loi de cadence en base Réclamation

Pour le calcul de la charge projetée, pour chaque période p de développement, deux méthodes sont utilisées pour la charge actuelle :

1. Pour les comptes sociaux, l'approche la plus prudente : valeur maximale entre la charge connue au moment de l'extraction et l'estimation qui peut en être faite à partir de la charge de la période précédente.
2. Pour le calcul du Best Estimate, la méthode est basée sur l'estimation faite à partir de la charge connue à la période précédente.

$$Chg \ Pr \ oj_{j,n,p} = \begin{cases} p + j = dern. \ pér. \ obs + 1 \dots \left(\begin{matrix} m = 1 \dots \max(Chg \ Sin_{j,n,p}; Chg \ Pr \ oj_{j,n,p-1} \times \lambda_{n,p,lissé}) \\ m = 2 \dots Chg \ Sin_{j,n,p} \end{matrix} \right) \\ p + j > dern. \ pér. \ obs + 1 \dots Chg \ Pr \ oj_{j,n,p-1} \times \lambda_{n,p,lissé} \end{cases}$$

La charge ultime par période de rattachement est la charge ultime projetée $Chg_Ult_{n,p} = Chg \ Pr \ oj_{n,p,ultime}$

4.1.5 Provisions pour subséquentes

L'estimation des IBNR pour subséquentes est réalisée sur la base d'une estimation du nombre de dossiers sinistres susceptibles d'être réclamés, et du montant moyen ultime d'un sinistre.

Pour estimer le nombre de dossiers suite à une résiliation de contrat, il doit théoriquement être envisagé deux situations : suite d'une cessation définitive d'activité (décès, retraite,...) ; suite à un changement d'assureur ou une cessation temporaire d'activité avec reprise et souscription auprès d'un autre assureur. En effet les durées de prises en compte des réclamations sont différentes.

Le calcul du nombre de réclamations est calculé en fonction de la cadence de réclamation par année j ($CadRécl_j$ ¹⁹), appliquée au nombre de résiliations de la période i .

$$S_{i,j} = Résiliations_i \times CadRécl_j$$

La provision pour risques subséquents s'évalue à partir des estimations du nombres de réclamations probables et du montant moyen du coût de sinistre :

$$Pr ovSub_{i,j} = S_{i,j} \times CM^{subsq}$$

La provision à constituer pour les sinistres subséquents à l'année T est donc :

$$Pr ovSub_T = \sum_{i+j=T} Pr ovSub_{i,j}$$

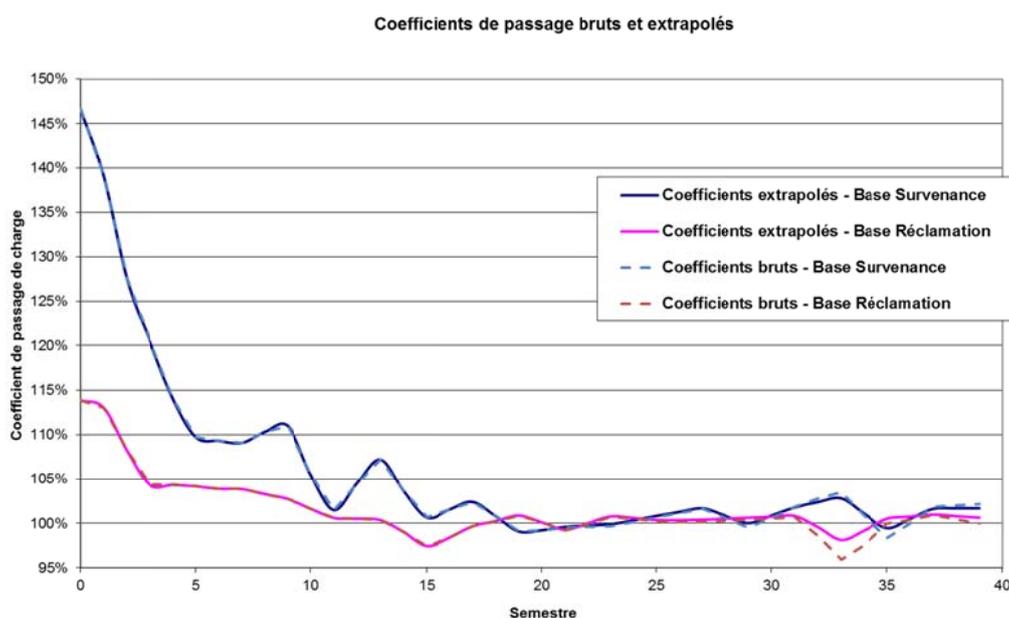
4.1.6 Résultats

Les coefficients de passage sont très élevés pour les développements récents, du fait principalement de la prise en compte des tardifs. Cependant, la Base Survenance n'étant plus « alimentée » depuis 2003, seuls les coefficients après le 16^{ème} semestre sont retenus pour l'évaluation de la charge ultime.

La loi extrapolée donne des coefficients finaux proches des coefficients bruts, même pour des semestres de développement lointains.

¹⁹ Cadence de réclamation : pourcentage de réclamations faites par année suite à la résiliation du contrat.

Figure 16 - Coefficients de passage (brut et extrapolés) - Méthode MÉDICALE DE FRANCE



Les charges et provisions qui en résultent s'élèvent à :

	Charges	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survenance - 1	161,3	211,7	50,4
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4
TOTAL	378,1	467,8	89,8

La provision statistique représente 53% des provisions dossiers actuelles (168,0 M€).

4.2 Discussion des choix de méthode

L'objet est de discuter des choix de modélisation faits, qui ne sont pas toujours classiques ; de voir en quoi ils répondent aux problématiques posées par les données, par le cadre légal, ... et en quoi ils préservent le caractère Best Estimate de l'évaluation, dans une approche Solvabilité 2, ou de la prudence pour les comptes sociaux (inclusion d'une marge de risque). Il s'agit en particulier :

- de la gestion de l'inflation
- du choix du pas semestriel
- de la méthode d'estimation des coefficients bruts
- de la méthode d'estimation du tail-factor
- du traitement des sinistres graves

4.2.1 Inflation

Classiquement, dans le cadre des modèles de type Mack, le traitement de l'inflation dans les triangles peut s'effectuer sur les triangles de règlements non cumulés par :

- Une déflation des diagonales des triangles de manière à obtenir des montants en euros constants
- L'application de la méthode, permettant d'évaluer les règlements futurs (en euros constants)
- Le calcul des montants « inflatés », par diagonale, sur la base d'une hypothèse de taux d'inflation future

Cependant le modèle de MÉDICALE DE FRANCE utilise les triangles de charges et non de règlements. Il est dès lors beaucoup plus délicat d'appliquer un retraitement de l'inflation, la charge étant la somme de règlements passés, et de l'évaluation actuelle (ou de la dernière évaluation historique) de la provision dossier. En l'occurrence, les gestionnaires ne font pas d'anticipation explicite d'une inflation future dans l'évaluation des provisions dossiers. Le retraitement de l'inflation pose alors de réelles difficultés théoriques et pratiques.

Quelques problématiques ou éclairages :

- Il est souvent difficile d'effectuer un choix sur l'indice, ou les indices, d'inflation à utiliser. Le coût des sinistres en RCM représente des dépenses d'expertise, des honoraires d'avocat, des frais médicaux, des évaluations de pertes matérielles, des préjudices économiques, moraux, esthétique, de carrière,... et indemnisation déterminée par voie judiciaire. Autant d'éléments ayant leur propre évolution.
- La prévision d'une inflation future, sur une longue période, est au moins aussi délicate que l'estimation de l'inflation passée.
- Dans le calcul des lois de cadence de charge, les coefficients de passage d'un semestre à l'autre incorporent l'historique de l'inflation passée sur autant de semestres qu'étudiés (on calcule des ratios sur des sommes de colonnes). Chaque coefficient incorpore donc deux effets : passage d'un semestre à l'autre en termes d'évolution de la charge, et inflation sur tous les semestres passés. En théorie, le premier coefficient « contient » l'historique des 79 derniers indices semestriels d'inflation (si notre triangle comprend 80 lignes), le second coefficient « contient » l'historique de 78 indices,... Le calcul de la charge ultime est réalisé en multipliant l'ensemble des coefficients de passage jusqu'à l'ultime.

La charge ultime intègre donc une composition complexe de l'historique des indices d'inflation.

4.2.2 Choix du pas

Le choix d'un pas semestriel est inhabituel, surtout dans le cadre d'un risque long. Il double le nombre de paramètres à estimer, mais à méthode constante il n'induit pas de risque de surparamétrage²⁰. Le risque pourrait alors être un accroissement de la dispersion autour de la

²⁰ Le nombre de paramètres est proportionnel au nombre de périodes n . Le nombre de données est proportionnel au carré de ce nombre de périodes. Multiplier par 2 le nombre de données et de paramètres, diviser par deux le ratio « paramètres à estimer / données ».

vraie valeur à estimer et d'une plus grande volatilité de la valeur Best Estimate d'un inventaire à l'autre.

Compte tenu de la modélisation retenue par MÉDICALE DE FRANCE, le choix du pas semestriel est justifié par :

- Les coefficients bruts sont calculés avec un nombre plus élevé d'observations
- La qualité de l'ajustement à la loi exponentielle est améliorée du fait du plus grand nombre de points :
 - le double de coefficient sur un même historique par rapport à un pas annuel
 - potentiellement plus de coefficient supérieur à β
 - augmentation du nombre de degrés de liberté pour l'intervalle de confiance

Reste à observer sur les données de MÉDICALE DE FRANCE l'impact sur la qualité de l'estimation de la loi extrapolée.

Charge Ultime et niveau de confiance

En calculant la charge ultime respectivement par la loi extrapolée, puis par la borne supérieure ou inférieure (IC+ ou IC-) de l'intervalle confiance, à différents niveaux :

	Base Réclamation					
	Niveau de confiance : 20%			Niveau de confiance : 80%		
	IC-	IC+	Loi Extrapolée	IC-	IC+	Loi Extrapolée
Pas Annuel	104%	97%	100%	175%	90%	100%
Pas Semestriel	102%	99%	100%	120%	96%	100%

	Base Survenance					
	Niveau de confiance : 20%			Niveau de confiance : 80%		
	IC-	IC+	Loi Extrapolée	IC-	IC+	Loi Extrapolée
Pas Annuel	104%	96%	100%	133%	86%	100%
Pas Semestriel	107%	95%	100%	164%	82%	100%

En base réclamation l'incertitude globale du modèle est plus importante lorsqu'on utilise le pas annuel. Cependant en base survenance l'incertitude globale est inférieure lorsque le pas annuel est utilisé.

Sensibilité aux atypiques

La sensibilité du modèle aux données atypiques selon le pas de cadence utilisé a été testée en modifiant de manière arbitraire une charge semestrielle $C_{i,j}$: la charge du deuxième semestre de l'année de rattachement 2002 (4^{ème} semestre de développement) a été doublée, puis divisée par 2 (charge atypique élevée et faible respectivement).

Il est présenté dans les tableaux suivants le ratio charge ultime sur charge actuelle dans chacun des scénarios :

Base Réclamation					
Pas Annuel	Sans Atypique	Introduction atypique C _{i,j} (1+100%)	Variation	Introduction atypique C _{i,j} (1-50%)	Variation
Pas Annuel	111,74%	110,59%	1,15%	112,51%	-0,77%
Pas Semestriel	103,78%	103,73%	0,05%	103,60%	0,18%

Base Survenance					
CU en pourcentage de la charge actuelle	Sans Atypique	Introduction atypique C _{i,j} (1+100%)	Variation	Introduction atypique C _{i,j} (1-50%)	Variation
Pas Annuel	150,86%	149,59%	1,27%	152,14%	-1,28%
Pas Semestriel	147,80%	147,62%	0,17%	148,11%	-0,32%

Le modèle est plus sensible aux valeurs atypiques présentes sur le triangle des charges lorsque le pas utilisé est le pas annuel.

Un second test (sur une donnée avec un développement lointain et une ancienneté élevée de survenance), conduit aux mêmes conclusions de sensibilité plus importante en pas annuel. Charge semestrielle choisie : deuxième semestre de l'année de rattachement 1987 et semestre de développement 33.

Base Réclamation					
Pas Annuel	Sans Atypique	Introduction atypique C _{i,j} (1+100%)	Variation	Introduction atypique C _{i,j} (1-50%)	Variation
Pas Annuel	111,74%	111,64%	0,10%	111,85%	-0,11%
Pas Semestriel	103,78%	103,75%	0,03%	103,81%	-0,03%

Base Survenance					
CU en pourcentage de la charge actuelle	Sans Atypique	Introduction atypique C _{i,j} (1+100%)	Variation	Introduction atypique C _{i,j} (1-50%)	Variation
Pas Annuel	150,86%	150,25%	0,61%	151,34%	-0,48%
Pas Semestriel	147,80%	147,65%	0,14%	147,90%	-0,10%

Conclusion

Les différents tests menés sur l'impact de la longueur du pas (semestriel ou annuel) en base Survenance et en base Réclamation démontre une forte variabilité aux données. Et la variabilité à une charge atypique est plus importante pour le pas annuel. On ne peut donc rejeter le pas semestriel.

En particulier, les résultats en pas semestriel sur la base Réclamation indiquent une moindre variabilité, une charge ultime inférieure, une incertitude moins élevée sur les coefficients. Chaque inventaire donnant plus de poids à la base Réclamation, il semble légitime de conserver le pas semestriel, mais de mener régulièrement des tests pour vérifier les hypothèses du modèle

4.2.3 Estimation des coefficients bruts

Les coefficients bruts sont estimés par la moyenne d'une moyenne géométrique et d'une moyenne arithmétique pondérée.

En notant les coefficients bruts obtenus par moyenne arithmétique ($\lambda_j^{A,brute}$) et par moyenne géométrique ($\lambda_j^{G,brute}$) sont définis comme suit²¹ :

$$\lambda_j^{A,brute} = \frac{\sum_{i=1}^{N-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{N-j} C_{i,j}}$$

$$\lambda_j^{G,brute} = \left(\prod_{i=1}^{N-j} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \right)^{\frac{1}{N-j}}$$

Mack a proposé un modèle non paramétrique stochastique de Chain-Ladder, dont les estimateurs des coefficients de cadence de charges sont calculés par la moyenne arithmétique pondérée. Dans le modèle de Mack, il est fait 2 hypothèses :

- indépendance des années de rattachement (indépendance ligne par ligne des charges)
(H1) $(C_{i,j})_{j=1,\dots,N}$ et $(C_{i',j})_{j=1,\dots,N}$ sont indépendantes pour $i \neq i'$
- lien à la dernière observation $C_{i,j}$ de l'espérance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé.
(H2) $E[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,N}] = \lambda_j C_{i,j}$

Propriétés stochastiques des coefficients bruts

En suivant les spécifications du modèle, MACK (1993) a démontré²² que les estimateurs des coefficients de développement par moyenne arithmétique pondérée $\lambda_j^{A,brute}$ sont sans biais, sous les hypothèses (H1) et (H2).

Dès lors il s'agit de vérifier ce résultat, sous les mêmes hypothèses, pour la moyenne géométrique comme estimateur des coefficients de développement. D'après (H2) et en utilisant l'inégalité de Jensen²³ :

$$E \left[\left(\prod_{i=1}^{N-j} C_{i,j+1} \right)^{\frac{1}{N-j}} \middle| H_j \right] \leq \left(\prod_{i=1}^{N-j} E[C_{i,j+1} | H_j] \right)^{\frac{1}{N-j}} \quad \forall j \leq N$$

Or

$$E \left[\hat{\lambda}_j^{G,brute} \middle| H_j \right] = \frac{E \left[\prod_{i=1}^{N-j} C_{i,j+1}^{\frac{1}{N-j}} \middle| H_j \right]}{\prod_{i=1}^{N-j} C_{i,j}^{\frac{1}{N-j}}}$$

²¹ Cf. 11.1 Notations pour le modèle de

²² Cf. p 361 [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005

²³ La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{N-j}}$ étant concave pour $x > 0$ et $\forall j < N$.

Ceci implique d'après (H1) :

$$E[\hat{\lambda}_j^{G,brute} | H_j] \leq \frac{\left(\prod_{i=1}^{N-j} E[C_{i,j+1} | H_j] \right)^{\frac{1}{N-j}}}{\left(\prod_{i=1}^{N-j} C_{i,j} \right)^{\frac{1}{N-j}}} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{N-j} \lambda_j C_{i,j} \right)^{\frac{1}{N-j}}}{\left(\prod_{i=1}^{N-j} C_{i,j} \right)^{\frac{1}{N-j}}} = \lambda_j$$

En prenant l'espérance, on obtient que :

$$E[\hat{\lambda}_j^{G,brute}] = E[E[\hat{\lambda}_j^{G,brute} | H_j]] \leq \lambda_j$$

Sous les hypothèses (H1) et (H2), les estimateurs des coefficients $\lambda_j^{G,brute}$ sont conditionnellement biaisés, et sous-estiment potentiellement la vraie valeur de λ_j .

Variations marginales et élasticité

Pourquoi avoir retenu la moyenne géométrique pour estimer les coefficients ? La durée de règlement définitif des dossiers sinistres peut dépasser sensiblement 20 ans. Or le montant de la charge des sinistres antérieurs à 1991 ne représente que 20% de la charge actuelle. La moyenne géométrique permet alors de donner un poids équivalent à toutes les années de rattachement.

Pour mesurer la sensibilité des coefficients bruts aux variations de la charge, il est observé la variation marginale pour un semestre de développement j donné, suite à une variation de la charge. Sous les hypothèses du modèle de Mack :

$$\frac{\partial \lambda_j^{A,brute}}{\partial C_{i,j+1}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-j} C_{i,j}} = c > 0 \quad \forall i \quad (1)$$

La variation $\lambda_j^{A,brute}$ par l'augmentation de 1€ de la charge $C_{i,j+1}$ est une constante c ($0 \leq c \leq 1$), pour toutes les périodes i de rattachement (i.e. toutes les lignes i ont le même poids).

$$\frac{\partial^2 \lambda_j^{A,brute}}{\partial C_{i,j+1}^2} = 0 \quad \forall i \quad (2)$$

L'augmentation marginale de $\lambda_j^{A,brute}$ suite à une variation donnée de la charge $C_{i,j+1}$, est toujours constante quel que soit l'ordre de grandeur de $C_{i,j+1}$. Le coefficient brut par moyenne arithmétique est insensible à l'ordre de grandeur de $C_{i,j+1}$.

Sous les mêmes hypothèses d'indépendance, les réponses des coefficients $\lambda_j^{G,brute}$ suite à une variation de la charge sont sensiblement différentes.

$$\frac{\partial \lambda_j^{g,brute}}{\partial C_{i,j+1}} = \frac{1}{N-j} \underbrace{\prod_{i' \neq i} \left(\frac{C_{i',j+1}}{C_{i',j}} \right)^{\frac{1}{N-j}} \left(\frac{1}{C_{i,j}} \right)^{\frac{1}{N-j}}}_{k} (C_{i,j+1})^{(1/N-j)-1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_j^{G,brute}}{\partial C_{i,j+1}^2} = k \left(\frac{1}{N-j} - 1 \right) (C_{i,j+1})^{(1/N-j)-2} \leq 0 \quad \forall j \leq N \quad (4)$$

A la différence de $\lambda_j^{A,brute}$, l'augmentation marginale de $\lambda_j^{G,brute}$ est décroissante avec le volume de $C_{i,j+1}$. La variation de la moyenne géométrique sera plus importante pour les $C_{i,j+1}$ « petits ». Ceci implique directement que les coefficients bruts par moyenne géométrique sont sensibles aux charges faibles, mais contenant une information.

Conclusion

Malgré l'intérêt que peut présenter la moyenne géométrique (en particulier, tenir compte de l'information des années anciennes, qui sinon seraient « écrasée » par les années récentes de sinistres), il a été démontré, que l'estimation des coefficients bruts par la moyenne géométrique sous-estime la « vraie » valeur de ces coefficients, qui se reportera par une sous-estimation des provisions de sinistres.

4.2.4 Construction de la loi et tail-factor

L'essentiel de la problématique de la construction de la loi de liquidation de la charge est d'avoir la meilleure appréciation du risque (en particulier sur la queue de distribution pour ce risque long), tout en cherchant la tendance de fonds.

La recherche d'un tail-factor, surtout pour des risques longs, est un exercice sensible : l'effet multiplicatif des coefficients peut conduire à une forte volatilité des résultats. Il s'agit de répondre à quelques questions :

- quels coefficients sont représentatifs du comportement moyen des sinistres ?
- sur quels critères peut-on exclure ou corriger des coefficients qui pourraient être jugés atypiques ?
- l'ajustement d'une loi permettant de calculer le tail-factor peut-il conduire à une évaluation de la charge ultime inférieure à la charge actuelle ?

Classiquement, les réponses conduisent à privilégier une analyse de l'ensemble des données et des coefficients bruts, et à porter des éventuelles exclusions ou corrections des coefficients après concertation avec les gestionnaires indemnisation.

Pour y répondre, sans exclure la phase d'analyse avec les gestionnaires, MÉDICALE DE FRANCE a privilégié une méthode plus « automatisée » dont les étapes sont :

- sélection des coefficients bruts sur lesquels est ajustée une loi exponentielle
- choix de la loi exponentielle
- ajout d'une marge de sécurité et extrapolation

Sélection des coefficients bruts

Les coefficients bruts retenus pour ajuster une loi doivent :

- contenir suffisamment d'information : ils sont estimés avec un nombre minimum de semestres d'observations (en pratique au moins 30 à 40 semestres)
- ne pas être inférieurs à un certain seuil de sélection β , supérieur à 1

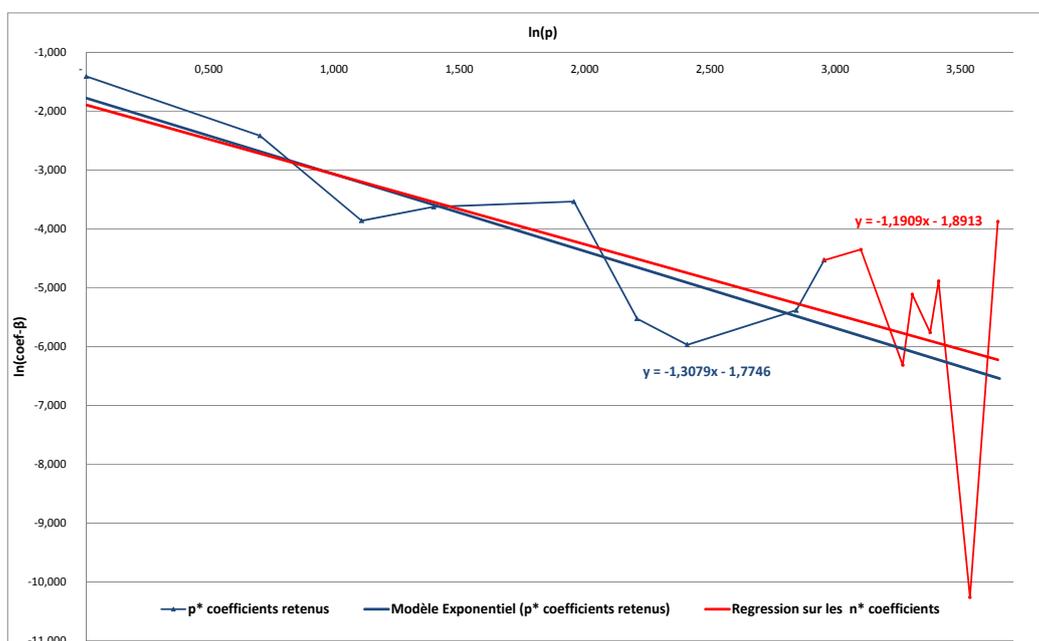
Par conséquent, seuls les coefficients sur le début du développement peuvent être retenus, et que le tail-factor augmentera avec le seuil de sélection β . Mais :

- les coefficients des premiers semestres de développement peuvent-ils « prédire » le comportement des coefficients de développement lointain et donc la charge ultime ?
- comment apprécier si cette méthode ne conduit pas à une surestimation structurelle du provisionnement ?

Seuls les résultats en base réclamation seront présentés ici. Pour l'illustration sur la base survenance, voir l'annexe 9.2.1.

Le graphe ci-dessous présente l'ajustement réalisé uniquement sur les premiers coefficients bruts (méthode de MÉDICALE DE FRANCE) – en bleu, et l'ajustement réalisé sur tous les coefficients – en rouge.

Figure 17 - Test sur l'ajustement des coefficients de passage



Le test statistique de Chow est appliqué pour vérifier l'existence d'un changement structurel entre les p^* premiers coefficients retenus et les derniers coefficients non retenus dans le modèle exponentiel. Ceci correspond à tester l'hypothèse que les paramètres des deux sous échantillons sont identiques. Le tableau suivant présente les résultats du test pour les deux bases d'études²⁴ :

²⁴ Sous l'hypothèse nulle la statistique de Chow doit suivre une loi de Fischer : $F(df1, df2)$

	Base Survenance	Base Réclamation
Statistique	11,23	0,16
df1	2	2
df2	38	12
p-valeur	0,015%	85,450%

En base Survenance l'hypothèse nulle est rejetée au niveau de confiance 95%, ce qui confirme que la régression sur l'ensemble de la période est différente de la régression sur les deux sous-échantillons : il y a un changement structurel entre les coefficients retenus dans le modèle et les coefficients hors ajustement.

En base Réclamation l'hypothèse nulle ne peut être rejetée au niveau de confiance 95% : les paramètres des deux sous échantillons sont statistiquement égaux.

L'impact du seuil de sélection β est indéniable sur l'évaluation de la charge ultime. Choisir un seuil à 100% ou 100,75% fait croître la charge ultime de quasiment 100%, avec une sensibilité non linéaire. La charge ultime est presque insensible aux variations de β lorsque $\beta \in (50\%, 90\%)$. Cependant la charge ultime est très sensible pour des variations de β entre 90% et 100,75%.

Mais le seul test probant sur le niveau d'estimation de la charge ultime est le dégagement de bonis ou de malis constatés lors des clôtures des sinistres et des inventaires. Sur les 4 dernières années, il semblerait que, malgré un seuil de sélection β de 100,75%, la charge ultime est prudente, mais pas surestimée (rapporté à la provision statistique qui représente 40% des provisions comptabilisées).

	Déc 2008	Déc 2009	Déc 2010	Déc 2011
Ratio de Boni/Mali ²⁵ sur Provision à l'ouverture	-1,40%	-3,73%	-0,93%	-0,03%

Loi d'ajustement

MÉDICALE DE FRANCE a fait le choix de la loi exponentielle pour estimer le tail factor. En quoi ce choix est légitime et justifié ? Pour répondre à cette question, il a d'abord été étudié la qualité de l'ajustement aux coefficients bruts.

	Base Survenance	Base Réclamation
<i>R² ajusté</i>	73%	72%
MSE	0,31	0,62
	Significance (p-value)	
F-test	0,0%	0,2%
Constante	23,9%	1,4%
ln(p)	0,0%	0,2%

Dans les deux bases le modèle exponentiel est statistiquement significatif au niveau de confiance 95% et la part de la variance expliquée est supérieure à 70%. Les paramètres estimés sont statistiquement significatifs au niveau 95% (sauf la constante en base survenance).

²⁵ Boni Mali, hors résultats sur année d'ouverture. Un ratio négatif correspond à un boni.

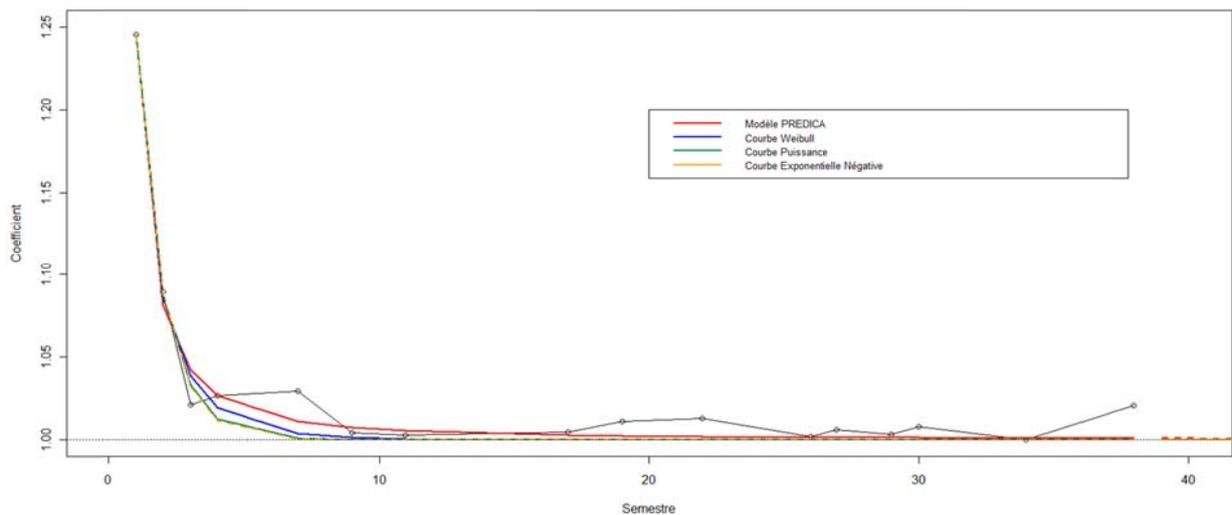
La loi exponentielle étant un bon ajustement, d'autres lois usuelles pour ce type d'ajustement auraient pu être testées :

- Exponentielle Négative : $\lambda^{ExpN} = \beta + a \exp(-c p)$ $a \in \mathbb{R}, c > 0$
- Puissance : $\lambda^{Puis} = \beta + a c^p$ $a, c \in \mathbb{R}$
- Weibull : $\lambda^{Wei} = \frac{1}{1 - \exp(-a p^c)} - \beta$ $a, c \in \mathbb{R}$

Les paramètres des courbes sont estimés par la méthode des moindres carrés, en utilisant les p^* premiers coefficients, ainsi que l'ensemble des coefficients bruts supérieurs au seuil de sélection. Tous les estimateurs obtenus sont statistiquement significatifs.

Seuls les résultats en base réclamation sont présentés (cf. annexe pour les résultats sur la base survie, 9.2.2). Graphiquement le modèle exponentiel semble le plus approprié pour l'ajustement des coefficients bruts supérieurs au seuil de sélection.

Figure 18 - Ajustement des coefficients par une loi paramétrique



Pour comparer les ajustements, les valeurs de l'Akaike Information Criterion (AIC) et des Erreurs Résiduelles Standard (RSS) sont calculées, confirmant la meilleure qualité d'ajustement pour le modèle exponentiel.

	Base Réclamation			
	AIC		RSS	
	Ajustement sur p^*	Ajustement sur l'ensemble des coefficients	Ajustement sur p^*	Ajustement sur l'ensemble des coefficients
PREDICA	-50,89	-96,49	0,0009	0,0015
Exponentiel Négatif	-47,85	-92,13	0,0013	0,0020
Puissance	-47,96	-92,25	0,0013	0,0020
Weibull	-48,90	-93,32	0,0012	0,0019

Marge de sécurité

La marge de sécurité est intégrée par deux mécanismes : le seuil de sélection β (s'il est supérieur à 100%) et l'intervalle de confiance des résidus de l'ajustement au modèle exponentiel.

Dans l'approche Best Estimate, cette marge est réduite en ramenant le seuil à 100% et en prenant comme niveau de confiance pour l'intervalle $\alpha=0$.

La Charge Ultime estimée est très sensible aux variations du niveau de confiance α . En base réclamation elle est en moyenne multipliée par 2 lorsque le niveau de confiance passe de 50% à 97.5% (multipliée par 3 en base survenance).

Conclusion

Le choix du seuil de sécurité β a un impact très important sur la qualité de l'ajustement (il peut exclure près d'un tiers des coefficients) et surtout sur le montant de la charge ultime. L'acceptation ou le rejet d'un niveau pour ce seuil de sécurité, même dans une approche Best Estimate, ne peut relever d'une déduction logique ou scientifique, mais plutôt d'une appréciation « à dire d'expert ».

Concernant le choix du modèle exponentiel :

- Il est statistiquement significatif
- En base réclamation, l'ajustement aux coefficients de cadence de charge pour des développements lointains ne présente statistiquement pas de cassure avec l'ajustement réalisés sur les coefficients de développement proches. L'ajustement sur les coefficients de semestres de développement récents peut être maintenu pour l'ensemble des coefficients bruts
- D'autres lois testées (Courbe Exponentielle Négative, Courbe de Puissance, Courbe de Weibull) ne présentent pas un meilleur ajustement que la loi Exponentielle.

Le choix de la taille de l'intervalle de confiance peut apporter une marge de sécurité importante dans l'évaluation de la charge ultime (jusqu'à 20% de charge supplémentaire pour α à 50%, par rapport à la charge ultime sans intervalle de confiance).

4.2.5 Traitement des sinistres graves

Le principal questionnement émis est que la méthode ne distingue pas les sinistres non-graves et graves. En particulier, les gestionnaires estiment que les sinistres graves (plus de 150 000 € de charge) sont évalués avec justesse et donc la provision dossier ne nécessite pas d'être complétée par une provision statistique.

Pour tester ce point de vue, en conservant la méthode de MÉDICALE DE FRANCE, il est proposé de :

- projeter à l'ultime les sinistres non graves, avec la méthode utilisée par MÉDICALE DE FRANCE

- estimer le nombre de sinistres non graves qui sont statistiquement susceptibles de devenir graves, et de les valoriser au coût moyen des sinistres graves
- ajouter la charge des sinistres graves, sans retraitement particulier

L'estimation du passage au grave sera réalisée par des méthodes déterministes simplifiées. Les estimations suivantes sont réalisées en base 100 correspondant à la charge dossiers (i.e. celle renseignée par les gestionnaires).

Calcul de la charge ultime des sinistres non graves

Sur la base de la méthode de MÉDICALE DE FRANCE, les charges des sinistres non graves sont projetées à l'ultime.

	Seuil			
	Aucun	150 000 €	500 000 €	1 000 000 €
Charge des dossiers inférieurs au seuil (1)	100,0	51,9	67,4	75,3
Charge des dossiers supérieurs au seuil (2)	0,0	48,1	32,6	24,7
IBNER (3)	24,0	-4,4	1,7	4,8
Charge ultime des sinistres inférieurs au seuil = (1) + (3)	124,0	47,5	69,0	80,2

Il est noté que les lois de cadence obtenues avec les triangles de charge excluant les sinistres graves, sont sensiblement différentes de celles obtenues lorsque ceux-ci sont pris en compte. En particulier du fait que la charge ultime peut être inférieure à la charge dossier.

Provisionnement du passage en Grave

Ayant exclus les sinistres graves des triangles permettant la projection à l'ultime, le passage en grave n'est plus modélisé. Il est proposé une méthode simplifiée pour estimer le passage en grave et l'intensité (modèle « *Fréquence x Exposition x Coût moyen* »).

Fréquence de passage en grave

La fréquence de passage en grave, f_t , est calculée sur chaque exercice sur la base des sinistres ouverts sur la période. En pratique, il est considéré les sinistres ouverts à la fin de chaque année (sinistres susceptibles de devenir des sinistres graves), et le nombre de passages en sinistres graves est calculé entre l'année t-1 et t (noté N_t) tel que :

$$N_t = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1 & \text{si } C_{t-1}^i < \text{Seuil et } C_t^i \geq \text{Seuil} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$f_t = \frac{N_t}{E_t}$$

Où :

C_t^i charge du sinistre i en t
 E_t nombre de sinistres ouverts en t, inférieurs au seuil

Pour estimer le nombre de passage en sinistre graves il sera utilisé une fréquence moyenne sur T années²⁶ :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t$$

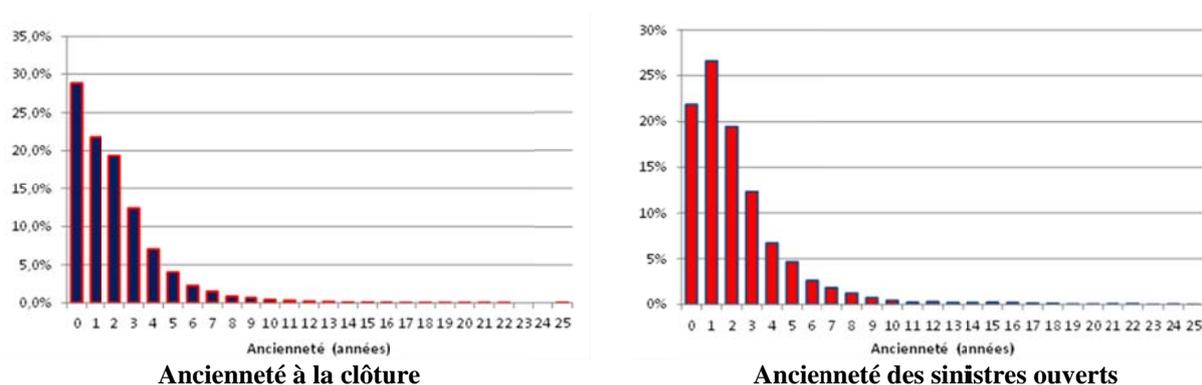
Exposition

La fréquence calculée s'appliquera au stock de sinistres ouverts. Aucun nouveau sinistre n'est projeté, ce qui est rendu possible dans le cadre de la loi About, mais le stock de sinistres sera « vieilli », jusqu'à clôture de tous les dossiers.

La cadence des clôtures des sinistres est estimée en fonction de :

- La cadence historique de clôture des dossiers par année d'ancienneté
- L'ancienneté de chaque dossier à la date d'inventaire.

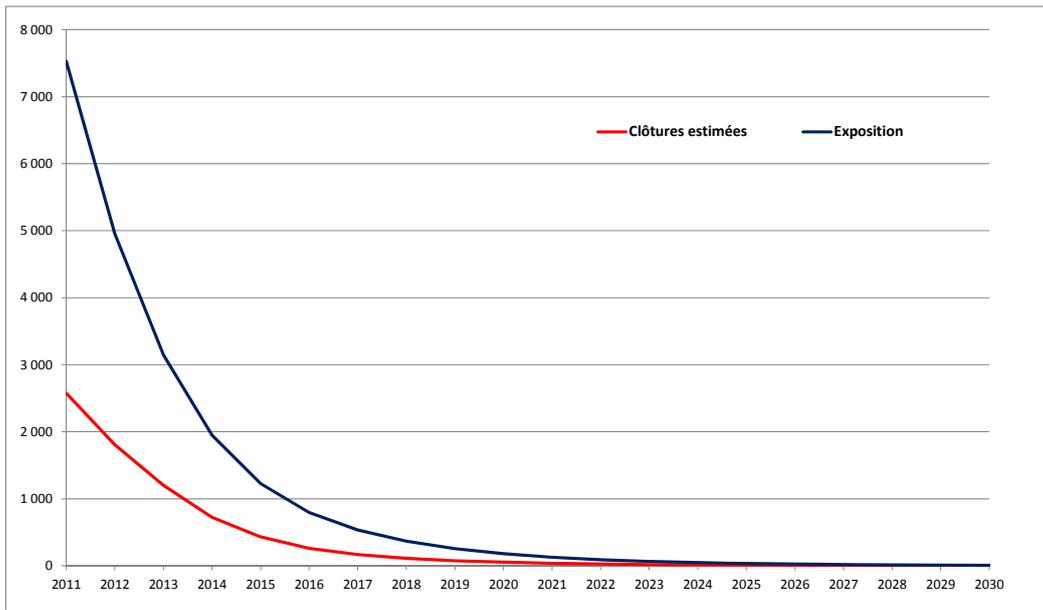
Figure 19 - Cadence de clôture des sinistres



Le graphique suivant présente l'estimation des expositions et clôtures futures, par application des ratios ci-dessus au portefeuille :

²⁶ Il est utilisé ici la fréquence moyenne observé depuis 2003. Cependant la fréquence moyenne est assez stable selon le choix de la première année d'observation.

Figure 20 - Expositions et clôtures futures



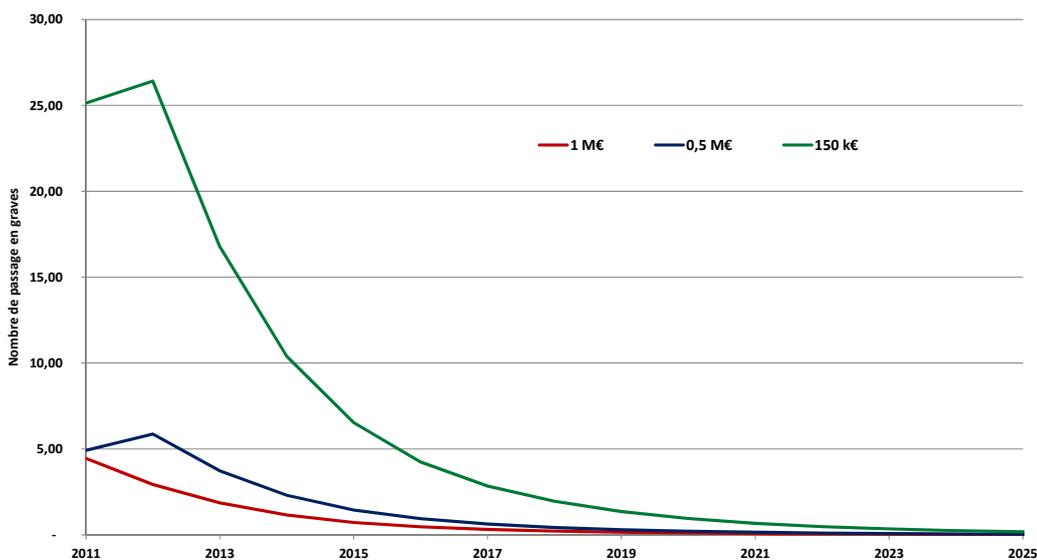
Estimation des expositions et clôtures futures

Provision pour passage en grave

Finalement l'estimation du nombre de sinistres qui passeront en sinistre graves en année t ($\geq T$) est donnée par :

$$S_t = \begin{cases} \bar{f} \times E_T - \text{Passages en graves observés en } T & \text{pour } t = T \\ \bar{f} \times E_t & \text{pour } t > T \end{cases}$$

Figure 21 - Estimation du nombre passages en grave



La provisions de passage en grave est déduite de cette estimation de nombre de sinistre et du « surcoût » que représente un dossier grave : coût moyen des dossiers graves, CM^{grave} évalué

par une simple moyenne des dossiers clos ou non, diminué de la charge ultime moyenne, $CM_{ultime}^{non\ grave}$, de ce sinistre s'il était resté non-grave.

$$Provision_{passage\ en\ grave} = (CM^{grave} - CM_{ultime}^{non\ grave}) \times \sum_{t=T}^{\infty} S_t$$

Rapporté à la base 100 de la charge dossier actuelle, la provision pour passage en grave s'élèverait à :

- Seuil à 150 000 € 9,8
- Seuil à 500 000 € 6,6
- Seuil à 1 000 000 € 6,7

Provisions globales

La charge ultime globale cumule la charge ultime des sinistres non graves, majorée de la provision pour passage en grave et de la charge dossiers des sinistres graves.

	Seuil			
	Aucun	150 000 €	500 000 €	1 000 000 €
Charge des dossiers inférieurs au seuil	100,0	51,9	67,4	75,3
IBNER	24,0	-4,4	1,7	4,8
Provision passage en grave		9,8	6,6	6,7
Charge dossiers supérieurs au seuil		48,1	32,6	24,7
Charge ultime globale	124,0	105,4	108,3	111,5

Lors du traitement des sinistres graves, la Charge Ultime obtenue est 10% à 15% inférieure que lorsqu'il n'y a pas de retraitement. Cet écart est d'autant plus important que le seuil de passage en grave est faible.

Conclusion

Cette méthodologie n'est pas satisfaisante, ajoute une forte variabilité des résultats et est complexe à mettre en œuvre. D'autres méthodes (Schnieper par exemple) pourraient être abordées.

4.3 Conclusion sur le modèle de MÉDICALE DE FRANCE

Au global, l'ensemble des choix de modèle semble pouvoir préserver :

- La justesse de l'estimation (Best Estimate dans le cadre de Solvabilité 2), moyennant un paramétrage adéquat et une vérification des hypothèses de Mack
- La recherche de tendance de fonds, minimisant la variabilité des résultats autour de la moyenne du risque d'un inventaire à l'autre

Il est cependant à noter (cf. 5.3.1 Modèle de Mack) que les hypothèses du modèle ne sont pas systématiquement vérifiées. Une actualisation périodique de l'analyse de la méthode devrait être mise en œuvre.

5 Provisionnement par triangulation

L'objet de ce chapitre est d'explorer quelques méthodes classiques de provisionnement, compte tenu de la problématique spécifique au traitement des sinistres dans le contexte législatif de la loi About et de la prudence que doit privilégier l'assureur. Tous les résultats donnés par la suite sont exprimés en millions d'euros.

Les méthodes statistiques font généralement l'hypothèse que certaines caractéristiques des branches ou de la société restent constantes dans le temps (délai de traitement, règles de gestion,...). Toutes les méthodes sont sensibles à l'hypothèse selon laquelle les exercices de survenance anciens, qui servent de référence, sont exactement connus : une erreur dans la charge de sinistre d'un exercice ancien est démultipliée par les méthodes statistiques.

5.1 Construction des triangles

Les méthodes reposant sur les triangles (de charges, de règlements cumulés ou non,...) utilisent les données à partir de la date de survenance du sinistre, incluant ainsi les informations sur les délais de déclaration/réclamation, puis de gestion du sinistre par l'assureur jusqu'à la clôture du dossier.

Les changements législatifs de ces dernières années ont modifié les événements à provisionner²⁷, et ont donc une incidence sur les triangles à construire pour estimer ces provisions.

Le reclassement des sinistres en fonction de la date de survenance ou de la date de réclamation, entraîne des modifications plus ou moins importantes sur des aspects fondamentaux de la modélisation classique des sinistres en assurance non-vie :

- information (*contenue dans*) des triangles
- identification du comportement de la charge
- stabilité du modèle dans le temps
- impact des délais de réclamation (et/ou déclaration)

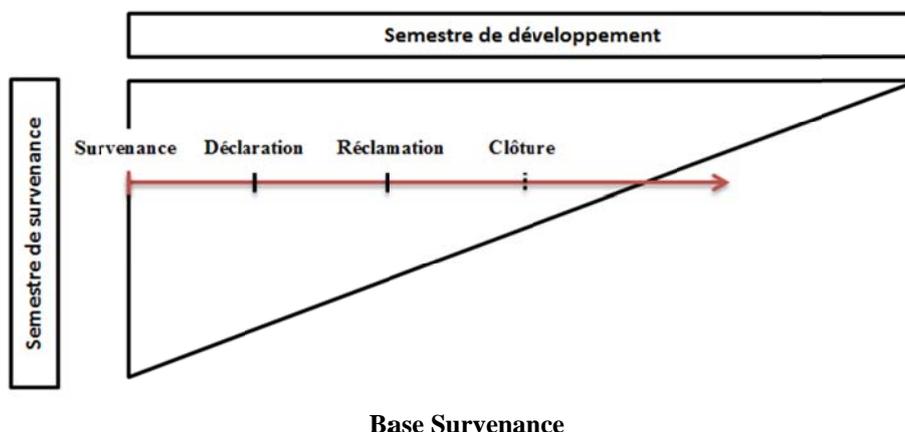
L'impact du changement de la base d'étude provoque des effets non triviaux sur le calcul des provisions et donc potentiellement dans leur estimation.

5.1.1 Illustration du changement de base d'étude

Traditionnellement les triangles de charge sont présentés en base survenance (ou « fait générateur »). Dans cette configuration chaque sinistre est intégré (au moment de sa déclaration) dans le triangle selon la date de survenance, et l'évolution de la charge est déterminée à chaque période de développement à partir de cette date.

²⁷ Cf. 2.4 Incidence des changements législatif sur les provisions

Figure 22 - Problématique des triangles et des dates



Pour peu que l'on ait un historique assez long, l'estimation de la charge ultime, sur des triangles de charge ou de règlements, par les coefficients de développement (Chain-Ladder, Mack...) permet de modéliser aussi bien les sinistres connus (déclarés ou réclamés) que les sinistres tardifs (survenus mais non connus de l'assureur - IBNR).

En base réclamation le sinistre est intégré dans le triangle selon la date de réclamation (cf. schéma en 4.1.1 Construction des triangles de charges), ce qui implique une perte d'information concernant le délai entre la survenance et la réclamation du sinistre.

Pour illustrer les conséquences du changement législatif, il est évalué la charge ultime de sinistres selon le modèle Chain-Ladder. L'illustration comporte des sinistres dont la charge et le nombre évolue sur 3 années :

	0	1	2	3	4
Nombre de sinistres connus	120 survenus	100 déclarés	Les 100 premiers sinistres réclamés ; 20 déclarations tardives	Réclamations pour les 20 sinistres tardifs	
Charge dossier	0 €	1 €	2 € pour les sinistres déjà connus 1 € pour les sinistres tardifs	Sinistres clos à 3 € 2 € pour les sinistres tardifs	Tous les sinistres clos à 3 €

Il est fait le choix, comme c'est le cas à MÉDICALE DE FRANCE, que le sinistre est enregistré dès sa déclaration si celle-ci intervient avant la réclamation. Ce choix n'est pas commun à tous les acteurs du marché.

Cet exemple simple est construit de façon à ce que la charge ultime soit « connue » à partir de la troisième période de développement. Les triangles de charges sont constitués et complétés suivant Chain-Ladder. Les charges dossiers sont les mêmes, mais les charges ultimes très différentes (cf. 9.3.1 Illustration du changement de base d'étude).

	Triangle en base Survenance					Triangle en base Réclamation				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Provision dossier	100	320	660	1020	1380	100	320	660	1020	1380
IBNR		20	60	120	120		0	0	0	0
Provision statistique		100	300	300	300		0	180	180	180
Charge ultime		440	1020	1440	1800		320	840	1200	1560
							73%	82%	83%	87%
							76%	88%	91%	93%

Le modèle en base réclamation sous-estime la charge ultime des sinistres à cause de la perte d'information sur le délai de réclamation. Cependant cette sous-estimation se réduit dans le temps dans la mesure où l'historique de l'information complète augmente, relativement à l'information manquante des triangles.

Même en excluant l'évaluation des IBNR, les charges ultimes restent différentes. Autrement dit, l'information manquante dans les triangles en base réclamation, et les changements d'affectation par exercice des dossiers sinistres, ne permettent pas d'estimer correctement la charge ultime.

Le même exercice a été mené en enregistrant les dossiers en fonction de leur année de survenance (les triangles ne changent pas au cours du temps), mais uniquement à partir du moment où le sinistres est effectivement réclamé. Dans ce cas, la charge dossiers est sous-estimée, mais la provision statistique à constituer plus importante et la charge ultime est la même.

	Triangle en base Survenance					Triangle en base Réclamation				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Provision dossier	100	320	660	1020	1380	0	200	540	900	1260
IBNR		20	60	120	120		0	0	0	0
Provision statistique		100	300	300	300		200	480	540	540
Charge ultime		440	1020	1440	1800		400	1020	1440	1800
							91%	100%	100%	100%

Compte tenu de l'esprit de la loi (seuls les sinistres subséquents doivent être anticipés, la prime de chaque exercice ne devant permettre de couvrir que les sinistres réclamés sur la même période), le problème de cette méthode est que les IBNR sont alors également évalués.

5.1.2 Proposition de construction des triangles

En pratique, et dans le cadre des choix de MÉDICALE DE FRANCE en matière de prise en compte des informations disponibles sur les sinistres (provisionnement des sinistres déclarés mais non réclamés), il est proposé la construction suivantes des triangles en fonction de l'état du contrat et des informations connues sur les sinistres.

Il est retenu deux approches pour utiliser les sinistres :

- L'information passées qu'ils contiennent, et donc la possibilité qu'un même sinistre intervienne dans plusieurs méthodes pour construire une loi de cadencement
- La projection unique d'un sinistre, suivant sa date de rattachement

Statut du contrat	Sinistre déclaré	Sinistre réclamé	Provision	Base	Identification des sinistres	Nombre de dossiers	Commentaires
Clos avant le 01/01/2003	Non	Non	IBNR	En date survenance	S.O.	0	Provision statistique
	Déclaré ou réclamé, à toute date		Dossier + IBNER		1	24 918	
Renouvelé ou souscrit après le 01/01/2003	Non	Non	S.O.	S.O.	S.O.	0	Non provisionné
	Oui	Non	Dossier	Provision dossier	2	4 123	Assimilé à des IBNR, à provisionner ? ²⁸
		Oui avant le 01/01/2003	Dossier + IBNER	En date survenance	1	2 742	
Oui après le 01/01/2003	Dossier + IBNER	En date réclamation	3	21 746	Historique trop court. Utiliser tout le portefeuille		
Clos après le 01/01/2003	Non	Non	Subsq.	S.O.	S.O.	0	Provision pour subséquentes

Il sera ainsi constitué 5 triangles suivants 3 bases :

1. Base survenance en utilisant les sinistres identifiés 1
2. Base déclaration en utilisant tous les sinistres pour modéliser le comportement, qui sera appliqué uniquement aux sinistres identifiés 2
3. Base réclamation en utilisant tous les sinistres pour modéliser le comportement, qui sera appliqué uniquement aux sinistres identifiés 3

Le portefeuille se répartit alors ainsi, avec pour rappel, les provisions statistiques calculées par la méthode de Médicale de France.

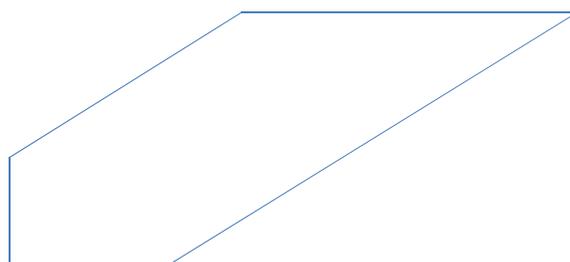
	Règlements	Provisions	Charges
Survenance - 1	123,4	37,9	161,3
Déclaration - 2	21,1	28,6	49,7
Réclamation - 3	65,5	101,5	167,0
Total	210,0	168,0	378,1

Il est à noter que les triangles sont incomplets, et présentent des formes en parallélogramme, voir parallélogramme incomplet. Ainsi les dossiers en Base survenance présente la forme suivante.

²⁸ Ces dossiers sinistres concernent 3 types de sinistres :

- Dossiers qui ne seront jamais réclamés, et seront un jour clos sans suite
- Dossiers qui sont traités (sinistres matériels), sans qu'une réclamation ne soit faite
- Dossiers qui seront un jour réclamés.

Figure 23 - Forme générale des triangles de données de MÉDICALE DE FRANCE



Il est à noter également que les triangles en base réclamation, qui ont une forme triangulaire complète, n'ont que 9 années d'information, ce qui est nettement insuffisant compte tenu de la durée de nombre de dossiers²⁹. C'est la raison pour laquelle les méthodes seront construites dans un premier temps sur des triangles plus étendus pour déterminer les lois ou coefficients, puis appliquées uniquement aux données concernées par la réforme législative.

5.2 Modèles déterministes

Sur la base des triangles construits ci-avant, les méthodes classiques de provisionnement sont appliquées, essentiellement avec pour objectif de servir de références chiffrées par rapport aux autres modèles (stochastiques,...). Les modèles sont dits déterministes dans le sens où ils ne permettent pas de déterminer l'erreur de prédiction des règlements futurs.

5.2.1 Méthode Chain Ladder – London Chain

Ces méthodes déterministes font l'hypothèse que le développement des charges de sinistres (ou des règlements cumulés) dépend uniquement du délai écoulé depuis l'origine du traitement du dossier. Dans le cadre de la RCM, l'origine du traitement du dossier, qui correspond à la réclamation par la victime, peut être liée à un phénomène exogène (reportage, enquête, décision administrative). Il est probable que dans le cas de sinistres liés à ce phénomène extérieur le comportement des gestionnaires soit induit et que les délais soient impactés.

MM. Denuit et Charpentier notait³⁰ que ces méthodes sont inadéquates pour des triangles de charges du fait :

- de la non-modélisation des sinistres survenus non déclarés
- de l'utilisation de montant forfaitaire à l'ouverture.

Dans le cas des données de MÉDICALE DE FRANCE, on peut relever, du fait de la longueur de l'historique et de la spécificité législative, que :

- en base Survenance les sinistres déclarés tardivement sont intégrés dans l'historique des triangles de charges (idem dans les triangles de règlements), et que la permanence de la méthodologie de provisionnement forfaitaire permet de négliger l'impact, la charge à la clôture étant connue pour de très nombreux sinistres

²⁹ Cf. 3.2.1 Analyse descriptive

³⁰ [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005

- en base Déclaration et Réclamation, seule l'inadéquation du fait des ouvertures forfaitaires pourrait être maintenue.

Hypothèse de linéarité des développements

Les méthodes de Chain Ladder et London Chain ont pour hypothèse implicite que le schéma de développement est identique pour toutes les années de rattachement. Autrement dit, la charge (respectivement les règlements cumulés) peut se déduire de la charge au développement précédent par une fonction affine : $\forall i \ C_{i,j+1} = \lambda_j \times C_{i,j} + a_j$ ³¹.

En effectuant une régression linéaire des $C_{i,j+1}$ sur les $C_{i,j}$, les coefficients λ_j et a_j ont été calculés pour chaque année de développement pour toutes les bases (ce qui n'est que l'application de la méthode London Chain).

Ceci permet de conclure que :

- les coefficients de corrélation pour les triangles de charges sont systématiquement supérieurs à 0,95 (0,90 pour les triangles de règlements). Les régressions sont donc de bonnes qualités, ce qui justifie d'utiliser les méthodes Chain Ladder
- les a_j sont presque systématiquement différents de 0, la méthode London Chain devrait donc fournir de meilleurs résultats. Les a_j étant très différents les uns des autres, la méthode London Pivot, proposée par E. Straub, ne sera pas appliquée.

Inflation

Les méthodes de Chain Ladder et London Chain ne font pas d'hypothèse particulière d'inflation, ni d'actualisation des flux futurs. Cet aspect a été traité de manière générale pour les sinistres de ce portefeuille (cf. 4.2.1 Inflation).

Méthode Chain Ladder

A priori, cette méthode peut aussi bien être appliquée à partir de triangles de charges³² ou de triangles de règlements cumulés. Quel est le lien entre les deux approches (triangles de charge et triangles de règlements cumulés³³) ? En notant $\hat{\lambda}_j$ les link ratios pour les triangles de charge et $\hat{\gamma}_j$ ceux des triangles de règlements :

$$\hat{C}_{i,j+1} = \hat{\lambda}_j \times C_{i,j} = \hat{R}_{i,j+1} + \hat{P}_{i,j+1} \quad \text{et} \quad \hat{R}_{i,j+1} = \hat{\gamma}_j \times R_{i,j}$$

³¹ Pour la méthode Chain Ladder, $\forall j \ a_j = 0$.

³² En supposant que les méthodes de provisionnement sont constantes.

³³ Ce questionnement sera repris, d'une manière un peu différente, au chapitre 5.3.2 Modèle Munich Chain Ladder

À l'ultime (noté N), la charge est égale aux règlements cumulés et la provision dossier est nulle : $\hat{C}_{i,N} = \hat{R}_{i,N}$ pour chaque année i de rattachement

$$\hat{C}_{i,N} = \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\lambda}_k \times C_{i,N-i} \quad \text{et} \quad \hat{R}_{i,N} = \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\gamma}_k \times R_{i,N-i}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R_{i,N-i}}{C_{i,N-i}} = \frac{\prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\lambda}_k}{\prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\gamma}_k}$$

Si les provisions sont bien estimées, les $\hat{\lambda}_k$ doivent être proches de 1, et les $\hat{\gamma}_k$ sensiblement supérieurs à 1, décroissants³⁴. Les ratios des coefficients ($\prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\lambda}_k / \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\gamma}_k$) devraient être très inférieurs à 1 pour les années récentes de rattachement et tendre vers 1 pour les années anciennes de rattachement, ce qui revient bien à dire que les règlements cumulés sont faibles par rapport à la charge pour les années récentes de rattachement, puis tendent à égaler la charge.

Évaluation

Les évaluations à partir des triangles de charges et des triangles de règlements cumulés donnent des résultats relativement proches de la méthode de MÉDICALE DE FRANCE.

	Charges	LA MEDICALE		Chain Ladder sur Charges		Chain Ladder sur Rglmts	
		Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survenance - 1	161,3	211,7	50,4	195,9	34,6	231,2	69,8
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0	60,9	11,1	38,2	-11,6
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4	186,2	19,2	199,1	32,1
TOTAL	378,1	467,8	89,8	443,0	64,9	468,4	90,4

Il est toutefois à noter que certains coefficients présentent de fortes irrégularités³⁵, généralement sur un sinistre de faible montant, mais ancien, ou un sinistre grave. Ces coefficients ont été corrigées « à dire d'expert » comme c'est l'usage. Sans correction en base Survenance, les charges ultimes auraient été de 316 M€ (resp. 447 M€ pour chain Ladder sur les règlements cumulés). Ce qui aurait conduit à des IBNER représentant 50% de la charge actuelle (resp. 80%).

Ce point justifie pleinement la recherche d'un lissage³⁶ par extrapolation d'une fonction ajustée sur les facteurs de développement.

³⁴ Généralement l'essentiel des sinistres sont réglés durant les premières années de développement.

³⁵ Cf. 9.3.1 Méthode Chain Ladder – London Chain

³⁶ Cf. [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica, 2007

Régularité des développements

La méthode Chain Ladder fait l'hypothèse que tous les développements sont identiques, quelle que soit l'année de rattachement. Il est alors souhaitable d'observer la répartition autour du coefficient estimé de l'ensemble des coefficients de développement de chaque année de rattachement.

Deux constats :

- la moyenne des coefficients de chaque année est parfois très différente du coefficient global, du fait du poids différents dans les deux méthodes de calculs
- l'écart type des coefficients est souvent important, ce qui démontre une grande hétérogénéité, écart type qui devrait diminuer avec l'ancienneté des sinistres.

Coefficients, moyenne et écarts type sur les triangles de charge

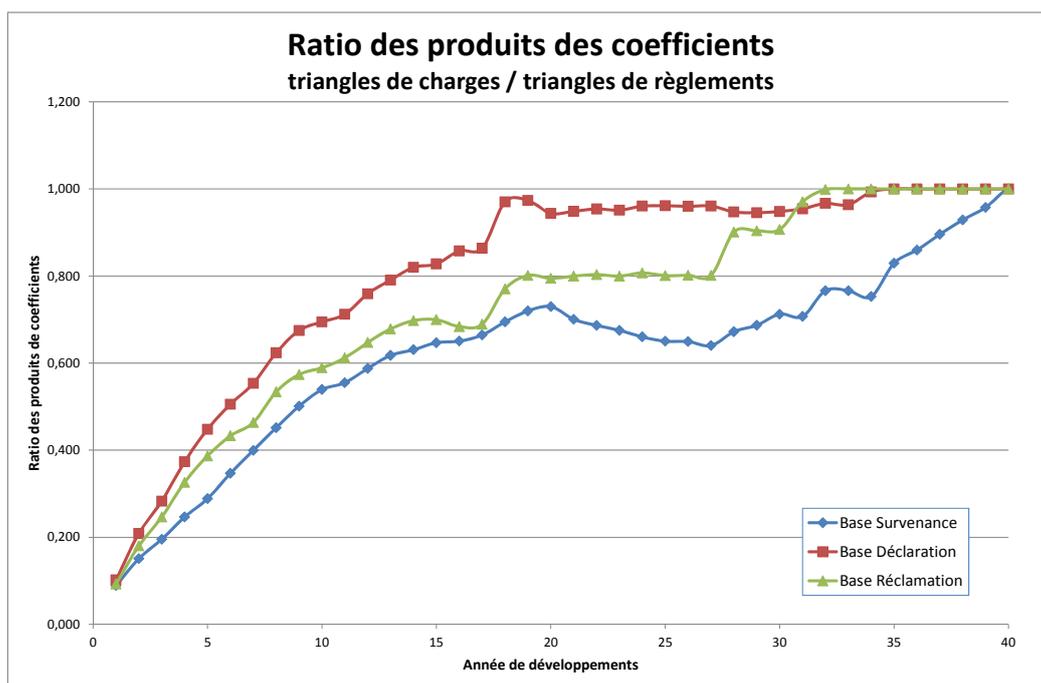
	Année de développement	1	2	3	4	5	10	20
Base survenance	Coefficient estimé	1,57	1,23	1,15	1,11	1,08	1,04	1,05
	Moyenne des coefficients annuels	1,54	1,20	1,20	1,24	1,16	1,10	1,36
	Écart type des coefficients	0,30	0,17	0,37	0,51	0,37	0,26	1,08
Base déclaration	Coefficient estimé	1,17	1,09	1,05	1,02	1,07	1,04	1,00
	Moyenne des coefficients annuels	1,18	1,10	1,00	1,22	1,12	1,23	1,00
	Écart type des coefficients	0,13	0,15	0,15	0,81	0,38	1,03	0,01
Base réclamation	Coefficient estimé	1,25	1,10	1,03	1,03	1,06	1,04	1,00
	Moyenne des coefficients annuels	1,23	1,11	1,00	1,23	1,12	1,26	1,00
	Écart type des coefficients	0,15	0,17	0,15	0,81	0,38	1,09	0,01

La forte volatilité sur certaines colonnes indique qu'il est nécessaire d'analyser les triangles de coefficients de passage pour déterminer les causes de certaines valeurs extrêmes, ou des structures non aléatoires.

Comparaison des coefficients entre les évaluations

Les ratios des produits de coefficients ($\prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\lambda}_k / \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\gamma}_k$) se comportent globalement comme la théorie, mais en base Survenance il semble que les provisions (et donc les charges) anticipaient mal les règlements futurs.

Figure 24 - Ratio des coefficients (charges / règlements)

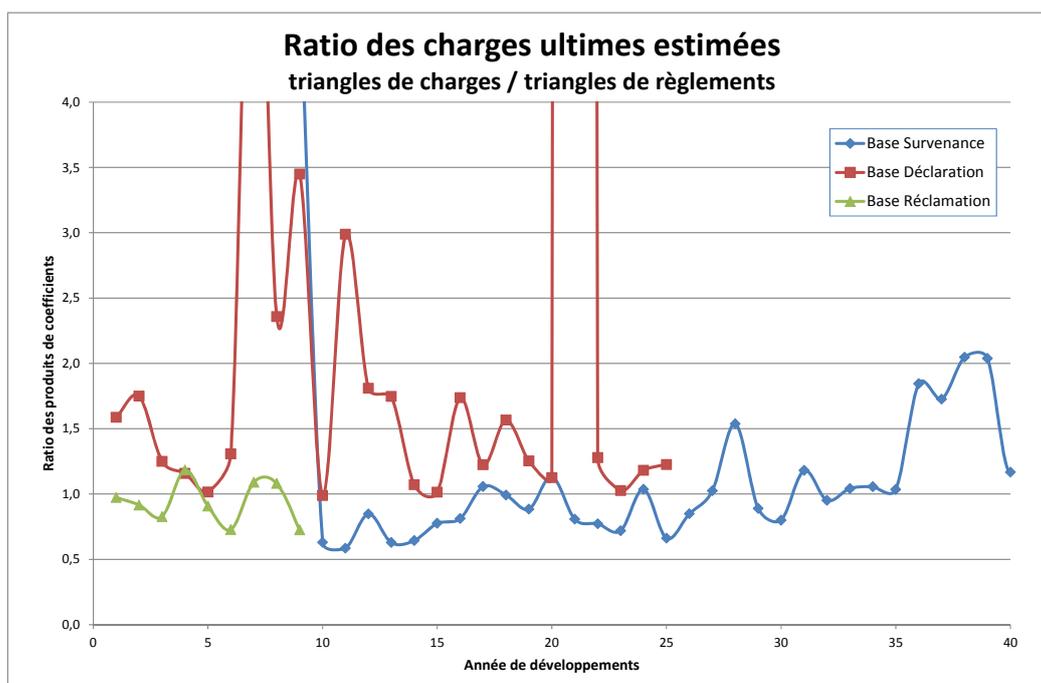


Si l'hypothèse que les règlements cumulés et les charges (ou les provisions) ont des développements relativement comparables, le ratio

$$\frac{C_{i,N-i} \times \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\lambda}_k}{R_{i,N-i} \times \prod_{k=N-i}^{N-1} \hat{\gamma}_k}$$

devrait être proche de 1.

Figure 25 - Ratio des charges ultimes estimées



En base Survenance et Réclamation, ce ratio est souvent proche de 1. En base Déclaration, l'estimation de charge ultime est largement supérieure à partir des triangles de charges par

rapport à celles issues des triangles de règlements cumulés. Ce qui donne à penser que les provisions sont très élevées compte tenu des règlements déjà effectués. Cette particularité de gestion induit une mauvaise qualité des estimations et une divergence entre les 2 approches.

Méthode London Chain

Compte tenu des régressions effectuées sur les charges (cf. hypothèse de linéarité des développements dans la méthode Chain Ladder), il a été montré que cette méthode devrait donner de meilleures estimations.

Le risque théorique de sur-paramétrage est écarté dans le cas de MÉDICALE DE FRANCE, le ratio « paramètres estimés / données disponibles » étant de l'ordre de 20% (80 paramètres pour au moins 700 données).

Évaluation

Tout comme la méthode Chain Ladder, cette méthode est très sensible à des variations relatives importantes sur des développements lointains, mais pas forcément en montant.

	Charges	LA MEDICALE		London Chain sur Charges		London Chain sur Règlements	
		Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survenance - 1	161,3	211,7	50,4	186,2	24,9	221,2	59,9
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0	64,2	14,5	41,1	-8,6
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4	190,9	23,9	202,6	35,6
TOTAL	378,1	467,8	89,8	441,3	63,3	465,0	86,9

L'impact est surtout visible sur la base Survenance, pour laquelle il a fallu effectuer quelques correctifs de coefficients sur le triangle de règlements cumulés.

5.2.2 Méthode Projected Case Estimate

La méthode Projected Case Estimate est généralement commentée comme plus robuste que la méthode Chain Ladder, du fait de l'utilisation distincte de l'information sur l'historique des règlements et des provisions (y compris les ouvertures pour sinistres tardifs).

Si on ajoutait l'hypothèse que les règlements $Y_{i,j+1}$ et les évolutions de provisions dossiers $(P_{i,j+1} - P_{i,j})$ suivent des développements identiques, cette méthode revient exactement à la méthode Chain Ladder³⁷. Comme constaté sur la base déclaration (cf. 5.2.1 Méthode Chain Ladder – London Chain), cette hypothèse n'est pas vérifiée sur le portefeuille de MÉDICALE DE FRANCE. D'autant que tout portefeuille sinistre long fait l'objet de réévaluation de provisions dossiers.

³⁷ p 353-355 [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005

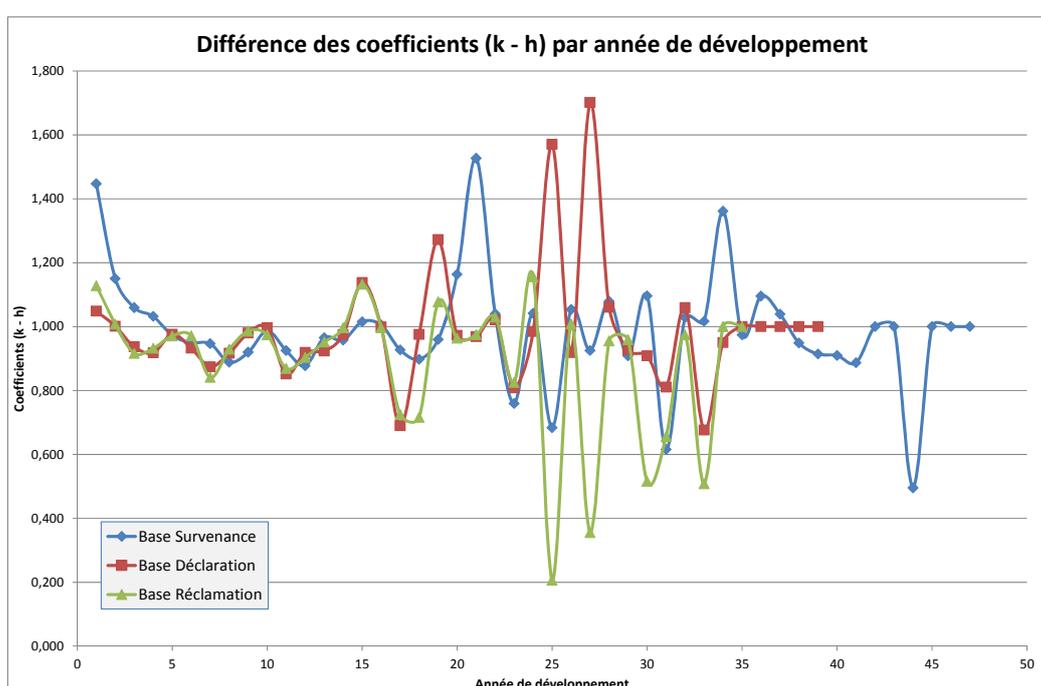
Cette méthode se base sur deux estimations des règlements et provisions à la période suivante, pour tout i :

$$P_{i,j+1} = k_{j+1} \times P_{i,j} - Y_{i,j+1} = (k_{j+1} - h_{j+1}) \times P_{i,j}$$

$$Y_{i,j+1} = h_{j+1} \times P_{i,j}$$

L'estimation³⁸ des coefficients de développement k_{j+1} et h_{j+1} , puis l'extrapolation des triangles s'effectue simplement et par calcul simultané des triangles de règlements et de provisions. L'évolution des provisions (estimée par la différence des coefficients $[k_{j+1} - h_{j+1}]$) n'est pas du tout régulière, comme le montre le graphe ci-dessous, spécialement en bases Déclaration et Réclamation.

Figure 26 - Différence des coefficients (Méthode Projected Case Estimare)



La provision statistique à constituer est proche de celle obtenue par MÉDICALE DE FRANCE, mais très sensibles à la queue du portefeuille. Un lissage pourrait également être envisagé dans cette méthode.

	Charges	LA MEDICALE		Projected Case Estimate	
		Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survenance - 1	161,3	211,7	50,4	194,2	32,9
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0	93,0	43,3
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4	189,0	22,0
TOTAL	378,1	467,8	89,8	476,2	98,2

³⁸ p 352 ibid

5.2.3 Modèles factoriels

Cette méthode propose une modélisation des règlements non cumulés $Y_{i,j+1} = r_i \times p_j \times \lambda_{i+j}$ avec des paramètres suivant 3 « directions » du triangle : par année de rattachement, par année de développement et par année calendaire. En soit, l'estimation de ces facteurs est généralement rendue possible en ajoutant des contraintes.

Méthode de séparation de De Vylder

La méthode proposée par De Vylder³⁹ repose sur une contrainte forte que l'inflation est constante : $\lambda = \lambda_{i+j}$. Ce qui s'applique mal au portefeuille RCM (cf. 3.2.1 Analyse descriptive). Par ailleurs cette méthode est sensible aux valeurs initiales pour la résolution numérique, qui de plus n'est pas nécessairement unique.

Méthode de séparation de Taylor

La méthode proposée par Verbeek-Taylor⁴⁰ (1977) permet de modéliser les règlements sur la base de 2 facteurs, dont l'un se déduit de la somme des règlements calendaires (les diagonales de règlements), et est censé intégrer l'inflation : $Y_{i,j+1} = p_j \times \lambda_{i+j}$. En l'occurrence, il intègre les phénomènes endogènes qui influent sur la modification des coûts : inflation, croissance du portefeuille,...

$$\hat{\lambda}_n = d_n \text{ et } \hat{\lambda}_k = \frac{d_k}{1 - \sum_{j=k+1}^n p_j}$$

$$\hat{p}_k = \frac{v_k}{\sum_{j=k}^n \lambda_j}$$

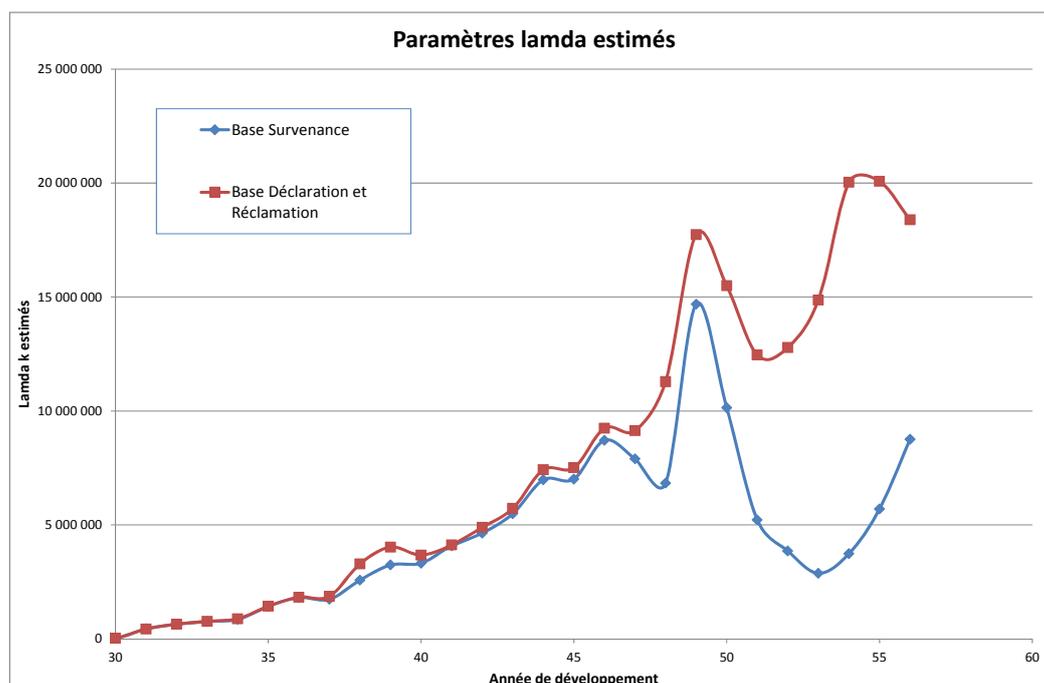
Avec les sommes de diagonales $d_k = \sum_{j=1}^k Y_{j,k-j}$ et les sommes des colonnes $v_k = \sum_{j=1}^{n-k} Y_{j,k}$ des triangles observés.

L'estimation des paramètres $\hat{\lambda}_k$ montre des profils croissant régulièrement jusqu'en 2003, puis un changement brutal intervient, probablement suite à la loi About. La méthode prévoit de pouvoir extrapoler les $\hat{\lambda}_k$ (régression linéaire, log-linéaire,...) afin d'estimer les règlements futurs, et donc la charge ultime.

³⁹ P 66 [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica, 2007

⁴⁰ p 356 [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005

Figure 27 - Paramètres lambda (Modèles factoriels)



Dans le cas de la branche RCM de MÉDICALE DE FRANCE, cette méthode ne peut pas être appliquée pour le moment, en attendant une stabilisation des tendances.

5.3 Méthodes stochastiques récursives

Ces méthodes sont essentiellement basées sur la méthode Chain Ladder. De ce fait, elles ne devraient pas amener à des estimations très différentes, mais permettront de mesurer la qualité des prévisions.

5.3.1 Modèle de Mack

Le modèle non paramétrique proposé par Mack, qui apporte une mesure de l'erreur de prévision au modèle Chain Ladder, nécessite que les données vérifient certaines hypothèses. Sur la base des triangles de charges (il suffit de substituer C par R dans les développements ci-dessous pour appliquer la méthode aux triangles de règlements cumulés) :

1. Les lignes sont indépendantes : $\forall i \neq i' \ (C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ indépendant de $(C_{i',j})_{j=1,\dots,n}$
2. L'espérance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j}$
3. La variance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$

Classiquement, cette méthode s'applique aux règlements cumulés $R_{i,j}$. Mais l'analyse faite avec la méthode Chain Ladder⁴¹ a montré que l'appliquer sur les charges donnait des résultats plus cohérents.

H1 : hypothèse d'indépendance

Une méthode rapide pour tester l'indépendance des lignes est de tracer les points $(C_{i,j}, C_{i+t,j})$, ceux-ci ne devant pas présenter de structure particulière. On constate que les règlements cumulés sont sensiblement alignés, et les charges le semblent aussi, même si c'est moins net (voir *annexe 9.3.2* Modèle de Mack).

Pour déterminer plus précisément l'éventuelle dépendance entre les lignes des triangles, il est utilisé le test de Pearson. Les coefficients de corrélation de Pearson (ρ)⁴² sont calculés pour toutes les lignes de charges (combinaisons $C_{i,j}$ et $C_{i+t,j}$), et respectivement les lignes de règlements cumulés. En effectuant un test d'indépendance paramétrique sur les coefficients (test Bravais-Pearson sur ρ : $H_0 : \rho = 0$ (indépendance), $H_1 : \rho \neq 0$), sous H_0 la statistique

$T = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}}$ suit une loi de Student à $n-2$ degrés de liberté. Au niveau de confiance 5%,

l'hypothèse nulle (indépendance entre $C_{i,j}$ et $C_{i+t,j}$) est refusée pour 50% à 66% des coefficients ρ .

H2 : Hypothèse Relation Conditionnelle

Une approche graphique rapide, représentant les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$, permet de confirmer la relation conditionnelle sur les triangles de charges aussi bien que pour les triangles de règlements, pour toutes les bases (cf. *annexe 9.3.2* Modèle de Mack).

Mack a proposé un test statistique pour vérifier l'hypothèse de relation conditionnelle. Ce qui revient à démontrer que les facteurs de développement $\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et $\lambda_{i,j-1} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ sont non corrélés⁴³. Pitrebois⁴⁴ a présenté un test d'indépendance (Test de Spearman) des coefficients de développement successifs dans le triangle entier. Le tableau suivant présente les résultats

⁴¹ 5.2.1 Méthode Chain Ladder – London Chain

$$\rho_{i,i+t} = \frac{\sum_{j=1}^N (C_{i,j} - \bar{C}_i) \cdot (C_{i+t,j} - \bar{C}_{i+t})}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (C_{i,j} - \bar{C}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^N (C_{i+t,j} - \bar{C}_{i+t})^2}}$$

⁴³ Pour une présentation de la preuve voir [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005

⁴⁴ [15] PITREBOIS S., Étude de techniques IBNR modernes, Mémoire Université Catholique de Louvain, 1999

du test, sur les triangles de charge et de règlements cumulés, pour les 3 bases d'étude à un niveau de confiance de 50%.

Base	Triangle	T	IC ⁻⁴⁵	IC+
Survenance	Charge	-0,6025	-0,0191	0,0191
	Règlements	-0,8188	-0,0191	0,0191
Déclaration	Charge	0,0812	-0,0240	0,0240
	Règlements	0,1772	-0,0240	0,0240
Réclamation	Charge	0,1053	-0,0240	0,0240
	Règlements	0,1623	-0,0240	0,0240

En base survenance, il semble exister une forte corrélation entre les coefficients de développements successifs. En bases déclaration et réclamation, même si les valeurs de T ne sont pas très élevées, le test rejette la non corrélation.

Cette hypothèse n'est donc pas vérifiée. Ce qui veut dire que l'espérance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé ne peut se déduire de la seule dernière observation.

H3 : caractère aléatoire des résidus

La représentation des résidus normés $D_{i,j} = (C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}) / \sqrt{C_{i,j}}$ en fonction des charges $C_{i,j}$, ne montre, pour aucune base, de configuration particulière (voir *annexe 9.3.2* Modèle de Mack). En revanche, la répartition des résidus calculés sur les triangles de règlements cumulés semble présenter une régression linéaire.

Erreur de prévision

Mack a calculé une estimation de l'erreur de prévision⁴⁶ du montant total de provisions statistique (IBNR, IBNER) par l'écart quadratique moyen conditionnel $MSEP(\hat{C}_i) = E[(C_{i,N} - \hat{C}_{i,N})^2]$, sous réserve de la validité des 3 hypothèses formulées. Ce qui peut s'écrire :

$$MSEP(\hat{C}_i) = \hat{C}_{i,N}^2 \sum_{j=N-i+1}^{N-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\lambda_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{N-j} C_{h,j}} \right)$$

D'où on déduit pour la provision globale :

⁴⁵ Du fait de la forme en parallélogramme des triangles, le nombre de lignes dont il a été tenu compte pour les tests n'est pas identique pour tous les triangles.

⁴⁶ p 362 [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005. Ou pp 117-122 [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica, 2007.

$$MSEP(\hat{C}) = \sum_{i=2}^N \left[MSEP(\hat{C}_i) + \hat{C}_{i,N} \left(\sum_{k=i+1}^N \hat{C}_{k,N} \right) \sum_{j=N-i+1}^{N-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\lambda_j^2 \sum_{h=1}^{N-j} C_{h,j}} \right]$$

L'erreur standard, relative, permet de mesurer l'erreur en pourcentage de la provision :

$$\frac{sep(\hat{C})}{\hat{C}} = \frac{\sqrt{MSEP(\hat{C})}}{\hat{C}}$$

Résultats

Les résultats sont identiques à ceux calculés par Chain Ladder.

	LA MEDICALE			Méthode Mack sur les triangles de charges		Méthode Mack sur les triangles de règlements	
	Charges	Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survénance - 1	161,3	211,7	50,4	195,9	34,6	231,2	69,8
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0	60,9	11,1	38,2	-11,6
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4	186,2	19,2	199,1	32,1
TOTAL	378,1	467,8	89,8	443,0	64,9	468,4	90,4

Cette méthode permet de déterminer l'écart quadratique moyen de la prédiction. Il en est déduit les erreurs estimées standard relatives, qui sont élevées (surtout sur les charges).

	Méthode Mack sur les triangles de charges			Méthode Mack sur les triangles de règlements		
	Survénance	Déclaration	Réclamation	Survénance	Déclaration	Réclamation
Charge Ultime (R)	195,9	60,9	186,2	231,2	38,2	199,1
MSEP(R)	5,66E+09	1,30E+08	4,37E+08	4,91E+09	5,48E+07	4,71E+08
sep(R)/R	217%	102%	109%	65%	43%	16%

Non seulement les hypothèses du modèle ne sont pas toutes vérifiées, mais la dispersion des valeurs estimées indique une mauvaise qualité de l'estimation globale. L'inclusion d'un tail-factor et d'un lissage des coefficients de queue permettrait, comme dans la méthode développée par MÉDICALE DE FRANCE, d'obtenir des charges ultimes moins volatiles.

Back testing

En reprenant la première année de chaque triangle (de charge ou de règlements cumulés), et en construisant des triangles estimés à partir des coefficients de passage, les montants constatés sur le portefeuille de MEDICALE DE FRANCE sont supérieurs aux montants reconstitués⁴⁷. Cependant, entre 1990 et 2003, l'écart était significativement dans l'autre sens.

⁴⁷ Cf. annexe 9.3.2 Modèle de Mack

Les coefficients projettent les fortes variations que ce risque a connu sur les 30 dernières années.

La qualité de cette estimation peut être mesurée par la racine de la moyenne des erreurs quadratiques, normalisée :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,N-i+1}} (C_{i,j} - \bar{C}_{i,j})^2}{N(N+1)}}}{\frac{2}{N(N+1)} \sum_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,N-i+1}} C_{i,j}}$$

Ce ratio s'élève à 93% pour les triangles de charges, et 142% pour les triangles de règlements cumulés. Ce qui indique une mauvaise estimation du portefeuille par back testing.

Les résultats sont les mêmes si cette approche est appliquée aux éléments en cours à partir de 2003. Soit une sous-estimation des montants réels d'environ 10% sur les 8 dernières années.

Distribution des provisions par Bootstrap

Une méthode simple à mettre en œuvre pour estimer la distribution des provisions IBNER calculées par la méthode de Mack est le Bootstrap⁴⁸, appliqué aux résidus normés du modèle :

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j} - E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})}{\sqrt{V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})}} = \frac{C_{i,j} - \hat{\lambda}_j \bar{C}_{i,j-1}}{\sqrt{\sigma_j^2 C_{i,j}}}$$

En pratique, $C_{i,j}$ sera la charge constatée des données de MÉDICALE DE FRANCE et $\hat{\lambda}_j \bar{C}_{i,j-1}$ est calculé à partir des $\hat{\lambda}_j$ estimés précédemment par la méthode de Mack, la dernière diagonale $C_{i,n-i+1}$ et le calcul « à rebours » $\bar{C}_{i,j-1} = \frac{1}{\hat{\lambda}_j} C_{i,j}$.

Les résidus $r_{i,j}$ sont ré-échantillonnés, pour obtenir un nouveau triangle de résidus $r_{i,j}^{\otimes}$ et reconstruire un triangle de charges $C_{i,j}^{\otimes} = r_{i,j}^{\otimes} \sqrt{\sigma_j^2 \bar{C}_{i,j}} + \hat{\lambda}_j \bar{C}_{i,j-1}$. A partir de chaque triangle de charges reconstruit, et suivant la méthode de Mack utilisée précédemment, de nouveaux coefficients $\hat{\lambda}_j^{\otimes}$ sont estimés et la charge totale est recalculée à partir de la dernière diagonale $C_{i,n-i+1}$ des données initiales⁴⁹.

⁴⁸ Cf. [9] EFRON B. et TIBSHIRANI R.J., An introduction to the bootstrap, Chapman & Hall, 1993

⁴⁹ Cf. problématique d'application des coefficients (triangles pour estimer les coefficients, triangles par date) : 5.1.2 Proposition de construction des triangles

Pour chaque base de triangle, 5 000 échantillons ont été générés, pour lesquels ont été estimés la moyenne, la médiane, l'écart-type et la VaR à 99,5% de la charge statistique (i.e. les IBNER). Pour la provision globale⁵⁰ (i.e. en projetant le portefeuille jusqu'à l'ultime) :

	IBNER - Bootstrap sur triangles de charges				IBNER - Bootstrap sur triangles de règlements			
	Survenance	Déclaration	Réclamation	Portefeuille	Survenance	Déclaration	Réclamation	Portefeuille
Simulations bootstrap (5 000 échantillons pour chaque base)								
Moyenne	47,7	7,5	1,0	27,1	-97,3	-15,4	13,9	-2,7
médiane	42,7	7,5	16,8	22,8	-112,1	-15,5	13,9	9,7
ecart type	36,6	2,0	180,9	105,4	72,7	2,6	12,1	45,9
Var 99,5%	180,0	13,0	160,0	160,0	245,0	-7,0	46,0	50,0
Rappel résultats Mack								
IBNER Mack	34,6	11,1	19,2	64,9	69,8	-11,6	32,1	90,4
sep(R)/R	217%	102%	109%		65%	43%	16%	
VaR (IBNER Mack)	42%	97%	55%	84%	98%	90%	93%	100%

Les résultats de ces simulations sont très contrastés. Sur les triangles de charges, les simulations (moyenne et médiane) sont inférieures aux résultats de la méthode de Mack, mais relativement proches. En revanche, sur les règlements, les résultats sont très éloignés. Les résultats de Mack sont hors de l'écart-type des simulations, ce qui se vérifie en cherchant la probabilité que la provision soit inférieure aux IBNER calculés par la méthode de Mack, généralement supérieure à 90%.

Pour l'estimation des règlements à un an, les conclusions sont identiques.

	Règlements à 1 an - Bootstrap sur triangles de charges				Règlements à 1 an - Bootstrap sur triangles de règlements			
	Survenance	Déclaration	Réclamation	Portefeuille	Survenance	Déclaration	Réclamation	Portefeuille
Moyenne	2,7	0,9	9,7	7,6	-24,1	1,0	13,1	3,5
médiane	2,7	0,9	9,3	8,5	-25,4	0,9	13,1	12,5
ecart type	2,0	0,5	3,5	4,6	8,1	0,4	1,0	15,7
Var 99,5%	9,0	3,0	30,0	29,0	8,0	2,5	17,0	17,0
Prov (approche Mack)	2,2	1,3	7,6	11,1	3,5	1,9	12,4	17,8
VaR (Rglmt à 1 an Mack)				86%	99%	97%	21%	100%

5.3.2 Modèle Munich Chain Ladder

Comme il a été vu dans l'application de la méthode Chain Ladder, les quantités « règlements cumulés » et « charges » ont des développements qui ne sont pas convergents, et au final les évaluations de provisions statistiques peuvent en être sensiblement impactées⁵¹.

Présentation théorique

La méthode Munich Chain Ladder introduit la corrélation entre les facteurs de développement de chaque triangle $\lambda_{i,j}^{(C)} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$, $\lambda_{i,j}^{(R)} = \frac{R_{i,j+1}}{R_{i,j}}$ et les ratios $Q_{i,j} = (R/C)_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{C_{i,j}}$ et

⁵⁰ Pour le portefeuille (cumul des 3 bases), les simulations Bootstrap ont été cumulées en proportion de la part de provision de chaque base dans la provision totale calculée par Mack.

⁵¹ Écart relatif de provisions globales (provisions dossiers et IBNER) de 11%.

$(C/R)_{i,j} = Q_{i,j}^{-1}$ ⁵². L'idée étant de retrouver la corrélation entre, par exemple, un $\lambda_{i,j}^{(C)}$ élevé, un $\lambda_{i,j}^{(R)}$ faible et $Q_{i,j}^{-1}$ faible suivi de $Q_{i+1,j+1}^{-1}$ élevé.

Les hypothèses du modèle sont reprises de celles de Mack, en remplaçant la première (indépendance des lignes du triangle), par l'indépendance des couples « règlements cumulés / charges » :

1. Les vecteurs sont indépendants : $\forall i \neq i' \quad (R_{i,j}, C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ indépendant de $(R_{i',j}, C_{i',j})_{j=1,\dots,n}$

2. L'espérance conditionnelle de $R_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $E\left(\frac{R_{i,j+1}}{R_{i,j}} \middle| R_{i,1}, \dots, R_{i,j}\right) = \lambda_j^{(R)}$

L'espérance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \middle| C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = \lambda_j^{(C)}$

3. La variance conditionnelle de $R_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $V(R_{i,j+1} | R_{i,1}, \dots, R_{i,j}) = \sigma_j^{(R)2} R_{i,j}$, ce qui peut s'écrire $V\left(\frac{R_{i,j+1}}{R_{i,j}} \middle| R_{i,1}, \dots, R_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^{(R)2}}{R_{i,j}}$

La variance conditionnelle de $C_{i,j+1}$ sachant le passé peut se déduire de la dernière observation, moyennant un coefficient de passage $V\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \middle| C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^{(C)2}}{C_{i,j}}$

La méthode ajoute une hypothèse de corrélation linéaire entre les résidus des estimations des facteurs de développement, et les ratios $Q_{i,j}$ et $Q_{i,j}^{-1}$.

4. Pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$, il existe un paramètre réel $\kappa^{(R)}$, indépendant de j , tel que conditionnellement $E\left[\text{Rés}\left(\frac{R_{i,j+1}}{R_{i,j}} \middle| R_i(j)\right) / B_i(j)\right] = \kappa^{(R)} \text{Rés}(Q_{i,j}^{-1} | R_i(j))$

Et il existe un paramètre réel $\kappa^{(C)}$, indépendant de j , tel que conditionnellement $E\left[\text{Rés}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \middle| C_i(j)\right) / B_i(j)\right] = \kappa^{(C)} \text{Rés}(Q_{i,j} | C_i(j))$

⁵² Avec les notations du présent mémoire, et non celles usuelles dans la littérature relative à la méthode Munich Chain Ladder cf. 11 Notations et DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005 ou [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica, 2007

Résultats

En suivant la démarche présentée par Partrat et al⁵³, on obtient les résultats suivants.

	Charges	LA MEDICALE		Sur les triangles de charges		Sur les triangles de règlements	
		Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER	Charge ultime	IBNR / IBNER
Survenance - 1	161,3	211,7	50,4	183,8	22,5	144,9	-16,4
Déclaration - 2	49,7	53,7	4,0	51,8	2,1	34,5	-15,3
Réclamation - 3	167,0	202,4	35,4	316,9	149,9	271,2	104,2
TOTAL	378,1	467,8	89,8	552,5	174,4	450,7	72,6

Avec comme coefficients de corrélation ($\kappa^{(R)}$ et $\kappa^{(C)}$) entre les résidus des estimations des facteurs de développement, et les résidus sur les estimations des ratios $Q_{i,j}$ et $Q_{i,j}^{-1}$:

	Sur les triangles de charges	Sur les triangles de règlements
Survenance - 1	-0,0003	0,0088
Déclaration - 2	0,0036	0,0227
Réclamation - 3	-0,0072	0,0153

Mais graphiquement⁵⁴, il ne se dégage pas de corrélation évidente.

Cette méthode est réputée améliorer la convergence entre les évaluations de charges ultimes sur triangles de charges et triangles de règlements cumulés. Dans le cas des données de MÉDICALE DE FRANCE, il est observé une divergence nette des évaluations.

5.4 Synthèse

Les résultats sont perturbés par l'irrégularité de la branche (2 périodes : jusqu'à 2003 ; à partir de 2003). En particulier, dans le cas de la RCM, la jurisprudence et le changement législatif ont eu une importance toute particulière, même si le portefeuille de MÉDICALE DE FRANCE était relativement prémuni du fait du peu de professions à risque couvertes.

La loi About oblige à gérer de nombreux triangles, et la perturbation introduite ne permet pas d'appliquer certaines méthodes comme les modèles factoriels. Les méthodes récursives (Chain Ladder, Mack,...) sont toutes confrontées aux mêmes problèmes d'application sur les données de MÉDICALE DE FRANCE :

- Hypothèses des modèles rarement vérifiées (indépendance des lignes des triangles)
- Faible convergence entre les évaluations faites sur les triangles de charges et les triangles de règlements cumulés

⁵³ Pp 136-151 [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica, 2007

⁵⁴ Cf. annexe 9.3.3Modèle Munich Chain Ladder

	Sur triangles de charges	Sur triangles de règlements
Méthode de LA MEDICALE	89,8	
Chain Ladder / Mack	64,9	90,4
London Chain	63,3	86,9
Projected case estimate	98,2	
Munich CL	174,4	72,6
Bootstrap sur Mack*	22,8	9,7

* médiane

De plus, la distribution des résultats par Bootstrap indique que les résultats des méthodes Mack,... sont aux marges de la distribution. Et une application en back-testing surestime les charges et les règlements jusqu'en 2000, puis sous-estime sur les 10 dernières années.

6 Méthodes ligne à ligne

Cette approche permet de traiter les informations individuelles de chaque dossier sinistre au lieu de traiter des informations agrégées (tel que dans les triangles). L'objectif est d'estimer la loi du coût d'un sinistre et de déduire du portefeuille le montant de la provision pour sinistre à payer.

Elle a l'avantage de ne pas subir la contrainte de distorsion due à la gestion des dates de réclamation vs survenance. De plus ces méthodes font généralement beaucoup moins d'hypothèses sur les données.

6.1 Modèle « censuré »

Cette approche, calquée sur les modèles de durée, consiste à considérer qu'une variable (le cumul des règlements) est censurée à la date d'inventaire et qu'il est possible de rechercher les lois sous-jacentes. Elle a été décrite dans le mémoire de Noémie Rose⁵⁵. Ce modèle sera appelé « censuré » du fait que les fonctions sont bâties par analogie aux modèles de durée avec censure.

Il est à noter que cette méthode ne permet que d'évaluer le coût ultime de chaque sinistre connu, mais elle ne permet pas d'évaluer les coûts de sinistres non encore connus. Elle n'est donc pas équivalente, dans ses résultats, aux méthodes classiques par triangulation. En revanche, ce modèle répond bien aux besoins définis par la loi About.

6.1.1 Hypothèse du modèle

On notera le coût du sinistre X , qui est une variable aléatoire positive ou nulle, et absolument continue. Alors sa loi de probabilité peut être déclinée par l'une des fonctions équivalentes classiques : fonction de survie, fonction de répartition, densité de probabilité, ...

La description théorique du modèle sera faite sur les règlements cumulés R_k , pour le $k^{\text{ème}}$ dossier sinistre. Par la suite, aussi bien pour les aspects théoriques que calculatoires, les R_k sont considérés classés par ordre croissant.

6.1.2 Vraisemblance

Dans le cas d'une censure à droite, de type aléatoire et dite non informative, comme c'est le cas lors d'un inventaire, la variable étudiée prend comme valeur pour chaque sinistre

⁵⁵ [17] ROSE N., Provisionnement en assurance non-vie : Utilisation de modèles paramétriques censurés, Mémoire d'actuariat ISUP, 2009

$T_k = \min(X_k, R_k) = X_k \wedge R_k$, X_k correspond alors au coût définitif. Il est introduit un indicateur de la censure D_k , qui vaut :

- si le dossier est clos ($T_k = X_k, D_k = 1$)
- si le dossier est en cours ($T_k = R_k \leq X_k, D_k = 0$)

En considérant que les variables X et R sont indépendantes, en notant respectivement comme densité f_X et f_R , et pour survie S_X et S_R , la contribution à la vraisemblance de chaque dossier sinistre k est alors :

$$L_k = P(T_k \in [r_k, r_k + dr], D_k = 0 | \theta)^{D_k} \times P(T_k \in [r_k, r_k + dr], D_k = 1 | \theta)^{1-D_k}$$

$$L_k = P(X_k \in [r_k, r_k + dr], R_k \geq X_k | \theta)^{D_k} \times P(R_k \in [r_k, r_k + dr], R_k < X_k | \theta)^{1-D_k}$$

$$L_k = f_X(r_k | \theta)^{D_k} S_R(r_k | \theta)^{D_k} \times f_R(r_k | \theta)^{1-D_k} S_X(r_k | \theta)^{1-D_k}$$

La loi de censure n'étant pas informative⁵⁶, elle ne dépend pas du paramètre θ . La vraisemblance L_k peut alors s'écrire :

$$L_k = const \times f_X(r_k | \theta)^{D_k} \times S_X(r_k | \theta)^{1-D_k}$$

La vraisemblance correspond bien à la probabilité que le coût final du sinistre ait atteint le montant r_k , pour un sinistre clos, ou pour un sinistre en cours, que le coût définitif soit compris dans un petit intervalle après le montant r_k déjà atteint.

La vraisemblance de l'ensemble du portefeuille, les dossiers étant supposés indépendants, est le produit des vraisemblances.

$$L = const \times \prod_{k=1}^N f_X(r_k | \theta)^{D_k} \times S_X(r_k | \theta)^{1-D_k}$$

En passant au logarithme

$$\ln L = \sum_{k=1}^N \ln(S_\theta(r_k)) + \sum_{k=1}^N D_k \ln(h_\theta(r_k))$$

⁵⁶ En pratique, la censure correspond à l'inventaire. Or les compagnies procèdent chaque année à des travaux de réévaluations de provisions avant inventaire (ce qui a nécessairement une incidence sur les charges) et les règlements des derniers mois sont effectués mais non comptabilisés dans l'exercice. Sur certains exercices, il pourrait se créer des biais « de gestion » sur certaines années.

6.1.3 Estimation non paramétrique

Cette première approche non paramétrique permet de ne pas faire d'hypothèse a priori sur la loi de survie.

Présentation théorique

Par application de l'estimateur de Kaplan-Meier⁵⁷, la fonction de survie des règlements cumulés peut s'écrire :

$$\hat{S}_X(R_k) = \prod_{u=1}^k \left(1 - \frac{B_u}{A_u}\right)$$

En pratique, $A_u = P(X > R_{u-1})$ sera estimé par le nombre de dossiers (en cours ou clos) dont le coût à l'inventaire est supérieur ou égal à R_u , et $B_u = P(X \in]R_{u-1}; R_u])$ par le nombre de dossier clos à un coût égal à R_u .

Implicitement, cet estimateur fait l'hypothèse que R_u est une variable croissante. En pratique, ce n'est pas vérifié pour tous les sinistres compte tenu des éventuels recours.

Une estimation empirique de la provision, sachant les règlements cumulés à l'inventaire R_k , peut alors s'écrire :

$$E(X_k - R_k | X_k > R_k) = \sum_{u=k+1}^N \frac{\hat{S}_X(R_u)}{\hat{S}_X(R_k)} (R_u - R_{u-1})$$

La provision globale, par indépendance des dossiers sinistres s'écrit :

$$Provision = \sum_{k=1}^N E(X_k - R_k | X_k > R_k)$$

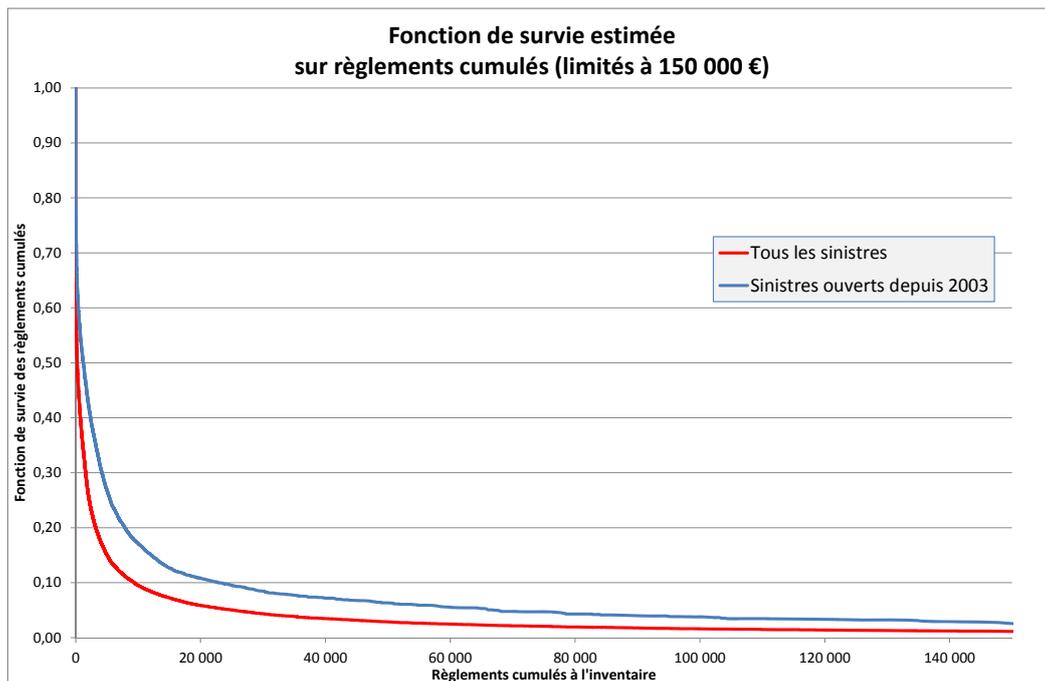
Résultats

La fonction de survie estimée $\hat{S}_X(r)$ présente une forme très classique⁵⁸. Cependant, les sinistres ouverts après la réforme législative (à partir de 2003, quelle que soit les dates de survenance, de déclaration ou de réclamation) présentent une fonction de survie sensiblement différente, en particulier pour l'épaisseur de la queue de survie.

⁵⁷ Cf. 9.5.1 Estimateur de Kaplan Meier pour les fonctions de survie

⁵⁸ Pour l'ensemble des graphiques des fonctions de survies estimées, cf. annexe 9.4.1 Modèle censuré.

Figure 28 - Fonction de survie



L'estimation de la provision à constituer est très sensible à la queue de distribution. Appliquée à la fonction de survie estimée jusqu'au montant maximum de règlement cumulé, la provision estimée (IBNER) s'établit à plus de 300 M€, contre 90 M€ pour l'évaluation selon le modèle de MÉDICALE DE FRANCE.

Il a ainsi été calculé une provision sur 2 sous-populations telle que, pour $v < N$, $R_v < R_N$:

$$E(X_k - R_k | X_k > R_k) = \begin{cases} k \leq v, & \sum_{u=k+1}^v \frac{\hat{S}_X(R_u)}{\hat{S}_X(R_k)} (R_u - R_{u-1}) \\ k > v, & \sum_{u=k+1}^N \frac{\hat{S}_X(R_u)}{\hat{S}_X(R_k)} (R_u - R_{u-1}) \end{cases}$$

Ce qui revient à tronquer l'espérance conditionnelle des règlements cumulés faibles à l'inventaire. Et donc à considérer 2 populations de sinistres, non-graves et graves. Pour compléter cette approche, il faudrait estimer la probabilité qu'un sinistre change de gravité.

R_v	$R_{\max} = 4,1$ M€	0,5 M€	0,15 M€	0,03 M€	0,02 M€	1 096 €
IBNR sin. non graves	308,9 M€	92,2 M€	17,4 M€	-48,1 M€	-52,3 M€	-23,6 M€
IBNR sin. Grave	0,0 M€	-0,5 M€	10,4 M€	47,4 M€	62,7 M€	236,3 M€
IBNR Total	308,9 M€	91,7 M€	27,8 M€	-0,7 M€	10,4 M€	212,7 M€

La provision globale est très sensible au curseur de « découpage » du portefeuille de sinistres. La justification de la valeur du curseur serait un point à documenter.

Back testing

En reconstituant le portefeuille tel qu'il était en 2003, la méthode est appliquée à ce portefeuille. Les charges projetées sont comparées à celles définitivement connues en 2011, soit à 4 512 dossiers sinistres. Il est ainsi projeté en 2003 une charge ultime de 245 M€ (160 M€ d'IBNER), contre 66 M€ constatés 8 années plus tard, soit une surestimation de 261%.

La racine des erreurs quadratiques, normalisée, montre une très mauvaise qualité de l'estimation par back testing du portefeuille :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1, \dots, N} (CU_i - \bar{CU}_i)^2}{N}}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1, \dots, N} CU_i} = 800 \%$$

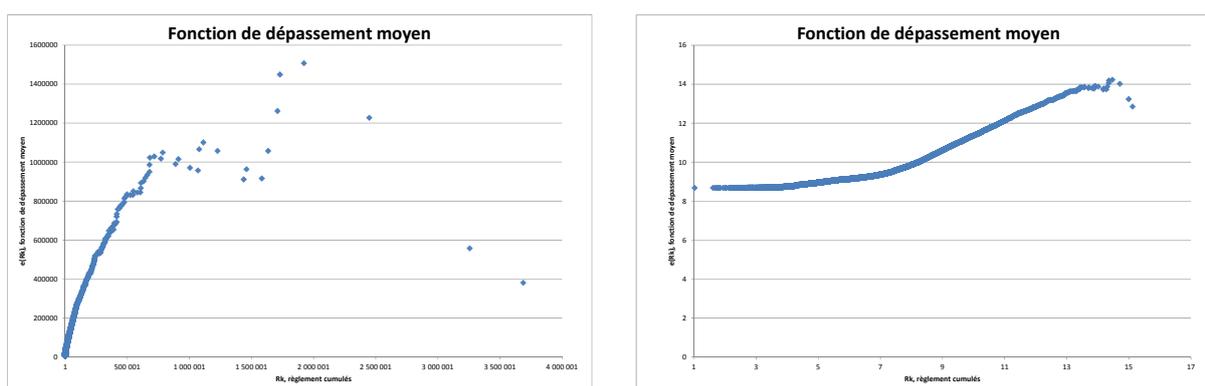
Lois paramétriques

À la lecture du graphique, la queue de distribution semble assez épaisse. Plusieurs outils permettent d'étudier les données et d'orienter vers un choix de loi paramétriques dont il restera à estimer les paramètres.

Fonction de dépassement moyen

Un outil simple à mettre en œuvre est la fonction de dépassement moyen⁵⁹. En traçant le graphique de la fonction de dépassement moyen, la forme indiquerait une Weibull ($\alpha < 1$) ou une Log-normale.

Figure 29 - Fonctions de dépassement moyen – modèle censuré



En particulier, si on trace, avec les mêmes données le graphique $\{\ln(R_k), \ln(\hat{e}(R_k))\}$. Il apparaît 2 « droites » qui pourraient indiquer que les données peuvent être modélisées par des fonctions différentes par morceaux (paramètres différents suivant la valeur de R_k , en l'occurrence suivant le point pivot $\ln(R_k) \cong 7; R_k = 1\,096 \text{ €}$). En pratique, il sera proposé⁶⁰

⁵⁹ Cf. 9.5.2 Fonction de dépassement moyen

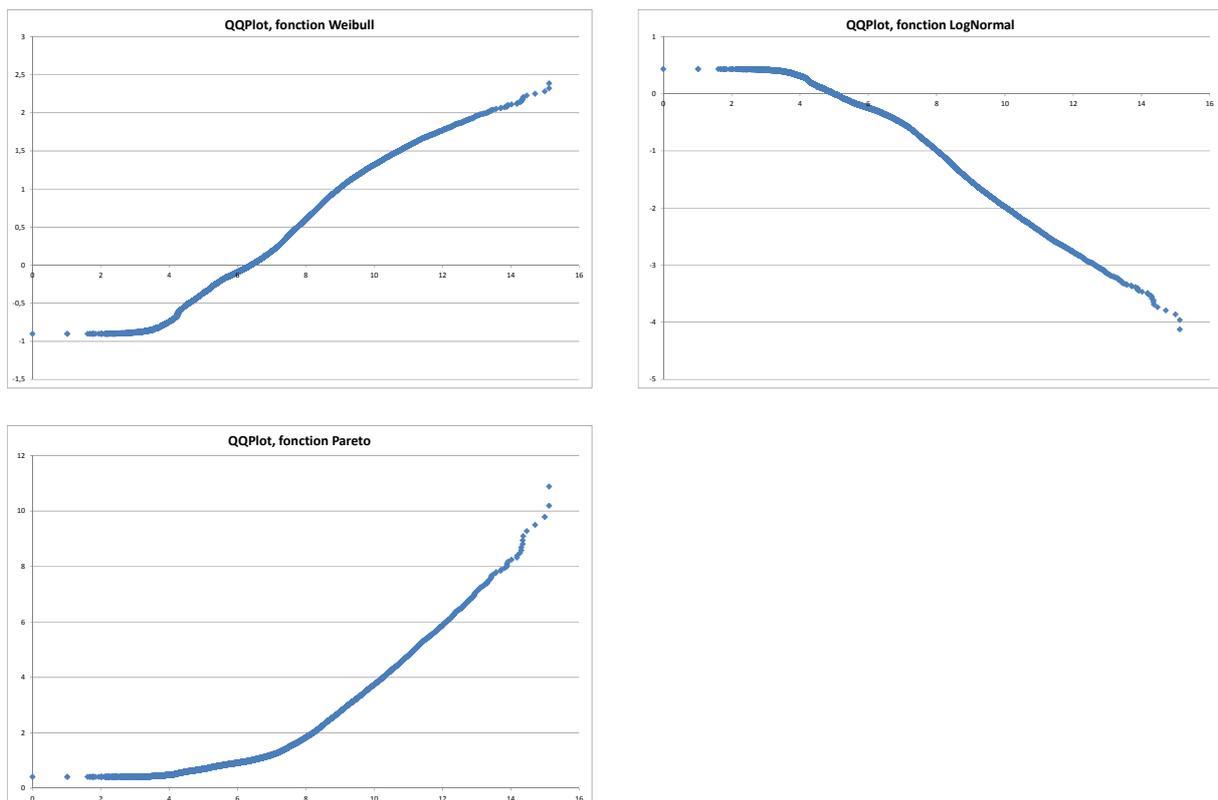
⁶⁰ Cf. 6.1.5 Approche alternative

d'estimer les provisions par l'approche non paramétrique en-dessous de ce seuil, et par l'approche paramétrique au-delà, celle-ci permettant de mieux appréhender les queues de distribution.

QQPlot

En traçant les graphiques de quantiles⁶¹, la queue de distribution des données de MÉDICALE DE FRANCE est plus épaisse que celle modélisée par la fonction Weibull (courbure vers le bas à gauche, et légèrement en haut à droite).

Figure 30 – QQPlot – modèle censuré



La loi Lognormale et Pareto présentent une courbure très nette à gauche (pour les faibles valeurs de R_k), mais une bonne linéarité à partir de $\ln(R_k) \cong 7; R_k = 1\,096 \text{ €}$.

6.1.4 Estimation paramétrique

À partir de l'analyse faite sur les données, il est recherché les paramètres de lois pouvant modéliser au mieux le comportement des sinistres, puis d'estimer les provisions.

⁶¹ Cf. 9.5.3 QQPlot

Lois classiques, présentation théorique

Comme vu lors de l'estimation non paramétrique, seuls les estimateurs et résultats théoriques des lois Pareto et Log-normale sont présentés ici. Pour plus de détail, se reporter au mémoire de Noémie Rose⁶²

Pareto

Un des grands intérêts de la loi de Pareto, c'est que la loi conditionnelle au dépassement d'un seuil est une Pareto dont seul change un paramètre. Ainsi une Pareto (m, α) , conditionnelle à $X > u \geq m$, est une Pareto (u, α) .

Les paramètres (m, α) sont estimés par les valeurs du portefeuille $(R_k; D_k)_{k=1, \dots, N}$:

- $\hat{m} = \min(R_k \neq 0; k = 1 \dots N)$

- $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^N D_k}{\sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{R_k}{\hat{m}}\right)}$

La fonction de survie est : $S_{\hat{m}, \hat{\alpha}}(x) = \left(\frac{x}{\hat{m}}\right)^{-\hat{\alpha}}$

La provision à constituer pour chaque sinistre k, c'est-à-dire l'espérance conditionnelle au montant de règlements cumulés à l'inventaire R_k : $E(X_k - R_k | X_k > R_k) = \frac{R_k}{\alpha - 1}$, si $\alpha > 1$. Si $\alpha < 1$, l'espérance n'est pas finie.

La provision globale à constituer est la somme des espérances pour chaque sinistre.

Log-normale

L'analyse sur les estimations non paramétrique conduit à envisager la loi Log-Normale. Elle a l'avantage d'être positive. Si le logarithme de la variable X (coût ultime d'un sinistre) suit une loi normale $N(m; \sigma)$, la fonction de survie⁶³ s'écrit :

$$S_{m, \sigma}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right)$$

Et la fonction de hasard⁶⁴ : $h_{m, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma x} \frac{\varphi\left(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right)}$

⁶² ROSE N., Provisionnement en assurance non-vie : Utilisation de modèles paramétriques censurés, Mémoire d'actuariat ISUP, 2009

⁶³ $\Phi(t)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

La fonction de hasard admet un maximum pour l'égalité suivante :

$$\frac{\varphi\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)} = \sigma + \frac{\ln(x)-m}{\sigma}$$

Reprenant l'expression générale de la log-vraisemblance, et en notant $u_k = \frac{\ln(R_k)-m}{\sigma}$:

$$\ln L(R|X, m, \sigma) = \sum_{k=1}^N \left[\ln(1-\Phi(u_k)) + D_k \ln\left(\frac{\varphi(u_k)}{1-\Phi(u_k)}\right) - D_k \ln(\sigma) - D_k (u_k \sigma + m) \right]$$

$$\ln L(R|X, m, \sigma) = \sum_{k=1}^N [(1-D_k) \ln(1-\Phi(u_k)) + D_k \ln(\varphi(u_k)) - D_k \ln(\sigma) - D_k (u_k \sigma + m)]$$

En dérivant et en utilisant $\varphi'(u_k) = u_k \varphi(u_k)$:

$$\frac{\partial \ln L(R|X, m, \sigma)}{\partial m} = \sum_{k=1}^N \left[(1-D_k) \frac{\varphi(u_k)}{1-\Phi(u_k)} - D_k u_k \right]$$

$$\frac{\partial \ln L(R|X, m, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^N \left[(1-D_k) \frac{u_k \varphi(u_k)}{1-\Phi(u_k)} - D_k u_k^2 - 1 \right]$$

Par optimisation, il sera estimé des valeurs de $(m; \sigma)$.

La fonction de survie conditionnelle au montant de règlements cumulés à l'inventaire R_k s'écrit :

$$S_{m,\sigma}(x - R_k | x > R_k) = S_{m,\sigma,R_k}(x) = \frac{S_{m,\sigma}(x + R_k)}{S_{m,\sigma}(R_k)}$$

Dont on déduit la provision individuelle de chaque sinistre k :

$$E_{m,\sigma}(X - R_k | X > R_k) = E_{m,\sigma,R_k}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{\ln(x + R_k) - m}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}\right)} dx$$

En posant $u = x + R_k$; $du = dx$

⁶⁴ $\varphi(t)$ est la densité de la loi normale centrée réduite

$$E_{m,\sigma,R_k}(X) = \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}\right)} \int_{R_k}^{+\infty} 1 - \Phi\left(\frac{\ln(u) - m}{\sigma}\right) du$$

En posant $v = \frac{\ln(u) - m}{\sigma}$; $dv = \frac{1}{\sigma u} du$

$$E_{m,\sigma,R_k}(X) = \frac{\sigma \times e^m}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}\right)} \int_{\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}}^{+\infty} (1 - \Phi(v)) e^{\sigma v} dv$$

La provision globale à constituer est la somme des espérances pour chaque sinistre.

Résultats

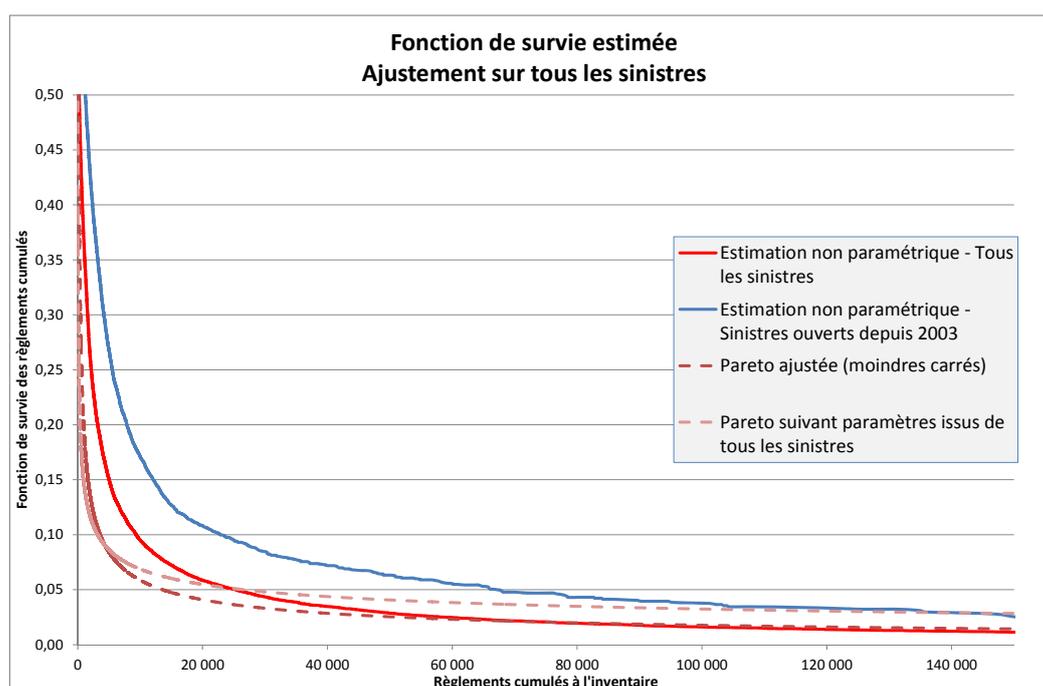
Loi de Pareto

Les paramètres (m, α) sont estimés de 2 manières : suivant les formules décrites ci-avant, et ajusté par moindre carrés avec la courbe de survie non paramétrique.

	\hat{m}	$\hat{\alpha}$
Calculés sur tous les sinistres	2,77	0,3268
Calculés sur les sinistres ouverts depuis 2003	8,36	0,2303
Ajusté sur tous les sinistres	43,18	0,5212
Ajusté sur les sinistres ouverts depuis 2003	40,86	0,3402

Le paramètre α est systématiquement estimé à une valeur inférieure à 1, ce qui ne permet pas de calculer de provision. Graphiquement, les lois de Pareto s'ajustent mal aux données de MÉDICALE DE FRANCE.

Figure 31 – fonctions de survie estimées : Pareto et non paramétrique



Loi Log-normale

En annulant les dérivées de la log-vraisemblance sur les données, on obtient comme valeurs de $(m; \sigma)$:

	\hat{m}	$\hat{\sigma}$	IBNER
Sur tout le portefeuille	5,9056	2,0663	190,2 M€
Sur les sinistres ouverts depuis 2003	2,0335	5,7694	$+\infty$

Les fonctions de survies obtenues⁶⁵ sont sensiblement inférieures à celles obtenues par estimation non paramétrique. Les provisions IBNER estimées sont très élevées du fait d'une inadéquation du modèle sur les faibles montants de règlements, et une surcompensation sur les grandes valeurs.

En effectuant un ajustement par moindres carrés avec la courbe de survie non paramétrique.

	\hat{m}	$\hat{\sigma}$	IBNER
Sur tout le portefeuille	5,5839	2,9612	789,0 M€
Sur les sinistres ouverts depuis 2003	6,7693	2,8958	1 369,6M€

Cette approche, est moins bonne sur le plan théorique, et conduit à des IBNER extravagants, essentiellement du fait de l'absence de maîtrise de la queue de distribution.

⁶⁵ Cf. annexe 9.4.1 Modèle censuré

Back testing

En reconstituant le portefeuille tel qu'il était en 2003, la méthode avec la loi log-normale est appliquée à ce portefeuille. Les charges projetées sont comparées à celles définitivement connues en 2011, soit à 4 512 dossiers sinistres. Il est ainsi projeté en 2003 une charge ultime de 159 M€ (74 M€ d'IBNER), contre 66 M€ constatés 8 années plus tard, soit une surestimation de 66%.

La racine des erreurs quadratiques, normalisée, montre une très mauvaise qualité de l'estimation par back testing du portefeuille :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1, \dots, N} (CU_i - \bar{CU})^2}{N}}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1, \dots, N} CU_i} = 2,025 \%$$

6.1.5 Approche alternative

Sur la base de l'étude graphique réalisée à partir des estimations non-paramétriques, il a été émis l'idée que les fonctions paramétriques pouvaient mieux modéliser le comportement pour les grandes valeurs de règlements, mais que l'approche non-paramétrique pouvait être conservée pour les règlements faibles à l'inventaire.

Les paramètres $(m; \sigma)$ de la Log-normale sont réajustés sur les sinistres dont R_k est supérieur à 1096 €. À partir de ces nouveaux paramètres, les provisions sont estimées de la manière suivante :

- Si le règlement cumulé à l'inventaire R_k est inférieur à 1096 €

$$E(X_k - R_k | X_k > R_k) = \sum_{u=k+1}^N \frac{\hat{S}_X(R_u)}{\hat{S}_X(R_k)} (R_u - R_{u-1})$$

- Si le règlement cumulé à l'inventaire R_k est supérieur à 1096 €

$$E_{m, \sigma, R_k}(X) = \frac{\sigma e^m}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}\right)} \int_{\frac{\ln(R_k) - m}{\sigma}}^{+\infty} (1 - \Phi(v)) e^{\sigma v} dv$$

	\hat{m}	$\hat{\sigma}$	IBNER
maximum de la log-vraisemblance sur les données	7,7871	1,2389	1 099,2 M€
ajustement par moindres carrés avec la courbe de survie non paramétrique	6,0568	2,3952	271,7 M€

La log-vraisemblance possède plusieurs maxima locaux, qui rendent la recherche d'une solution optimale hasardeuse, fonction des paramètres initiaux au programme d'optimisation.

6.2 Modèle à dynamique markovienne des règlements

Cette méthode a été largement inspirée du mémoire de Dinh et Chau⁶⁶. Elle présente l'avantage de ne pas rechercher une fonction commune à tous les sinistres et modélisant le comportement des faibles montants et des valeurs extrêmes. De plus, la modélisation repose sur les règlements annuels et non cumulés, il est attendu une meilleure adéquation au comportement du portefeuille.

6.2.1 Présentation théorique

Le sinistre Σ_k est caractérisé par une durée probable de traitement et des montants annuels de règlements. Il s'agit alors de suivre le vecteur $\Sigma_k = (Y_{k,i}, T_{k,i})_{i=1, \dots, n}$ où $Y_{k,i}$ sont les réalisations des processus de règlements annuels $Y_{.,i}$, $T_{k,i}$ le processus d'états (sinistre ouvert ou clos).

Processus d'états

Le processus d'états est comparable à celui retenu pour construire les tables de mortalité : l'individu est vivant (le sinistres est en cours), il a une probabilité de décéder dans l'année (le sinistre a une probabilité d'être clôturé). Une fois décédé (clos), le changement d'état n'est plus possible. La probabilité d'être vivant à la naissance (d'être ouvert) est égale à 1.

Plus simple à utiliser, on introduit la variable $D_{k,j_k} = \sum_{j=1}^{j_k} T_{k,j}$, qui représente la durée de traitement du sinistre :

- définitive si le sinistre est clos, auquel cas $D_{k,j_k} = D_{k,j_{clos}} = \sum_{j=1}^{j_k} T_{k,j} = \sum_{j=1}^{j_{clos}} T_{k,j}$, et donc $j = 1, \dots, j_{clos} T_{k,j} = 1; j > j_{clos} T_{k,j} = 0$
- censurée si $T_{k,j_k} = 1, D_{k,j_k} = j_k$

Processus de règlements

Le modèle développé par Dinh et Chau consiste à faire l'hypothèse que les règlements possèdent une certaine dynamique sous-jacente. Il serait alors possible d'estimer une distribution conditionnelle des règlements telle que :

$$f(Y_{j,i}, Y_{j,i+1}) \underline{d}f(Y_{j,i'}, Y_{j,i'+1}) \text{ pour tout } i \text{ et } i'$$

⁶⁶ [8] DINH N. A. et CHAU G., Mesures de provision cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie, Mémoire ENSAE, 2012. Mémoire basé sur les articles de Hertig J., A statistical approach to IBNR reserves in marine reinsurance, ASTIN Bulletin, 1985, et de Jong P., Forecasting runoff triangles, North American Actuarial Journal, 2006

Ces fonctions⁶⁷ ne dépendent donc que de j, l'année de développement. Dinh et Chau ont proposé comme distribution conditionnelle pour tout k et tout j :

$$U_{k,j} = \log \frac{Y_{k,j+1}}{Y_{k,j}} \stackrel{d}{=} N(\mu_j, \sigma_j^2)$$

6.2.2 Processus d'États

Tel que décrit dans le modèle, il a été estimé la « loi » de la durée de traitement des dossiers au titre 3.3.2 Durée de traitement.

6.2.3 Processus de règlements

Dinh et Chau⁶⁸ ont proposé comme estimateur de la moyenne :

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{k \in I_{j+1}} U_{k,j}}{\text{card}(I_{j+1})}, \text{ ce qui peut également s'écrire } e^{\hat{\mu}_j} = \left(\prod_{k \in I_{j+1}} \frac{Y_{k,j+1}}{Y_{k,j}} \right)^{\frac{1}{\text{card}(I_{j+1})}}$$

Ce qui n'est autre que la moyenne géométrique des coefficients de passage. Or, il a été vu⁶⁹ que, sous les hypothèses de Mack (indépendance et relation conditionnelle), ces estimateurs sont conditionnellement biaisés, et sous-estiment potentiellement la vraie valeur de e^{μ_j} .

L'estimateur proposé pour l'écart-type est :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{k \in I_{j+1}} (U_{k,j} - \hat{\mu}_j)^2}{\text{card}(I_{j+1}) - 1}$$

Il est aisé de démontrer les mêmes problèmes de biais. De plus, ces coefficients sont sensibles aux montants faibles⁷⁰, mais contenant une information, ce qui est souvent le cas pour les queues de distributions.

Par ailleurs, dans le cadre des données de MÉDICALE DE FRANCE, la construction des $U_{k,j}$ est contrariée du fait qu'en moyenne moins de la moitié des sinistres en cours connaisse un règlement dans l'exercice.

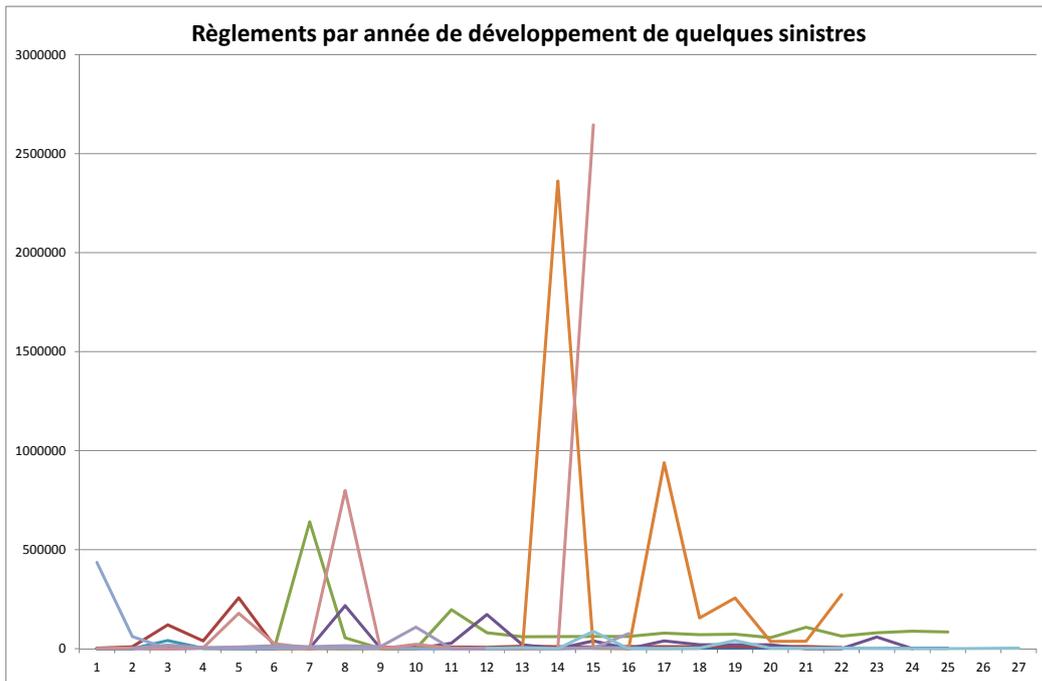
⁶⁷ « \underline{d} » signifie de distribution de même forme (mais pas de mêmes paramètres)

⁶⁸ [8] DINH N. A. et CHAU G., Mesures de provision cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie, Mémoire ENSAE, 2012

⁶⁹ Cf. 4.2.3 Estimation des coefficients bruts

⁷⁰ Cf. 4.2.3 Estimation des coefficients bruts

Figure 32 - Règlements par année de développement de quelques sinistres

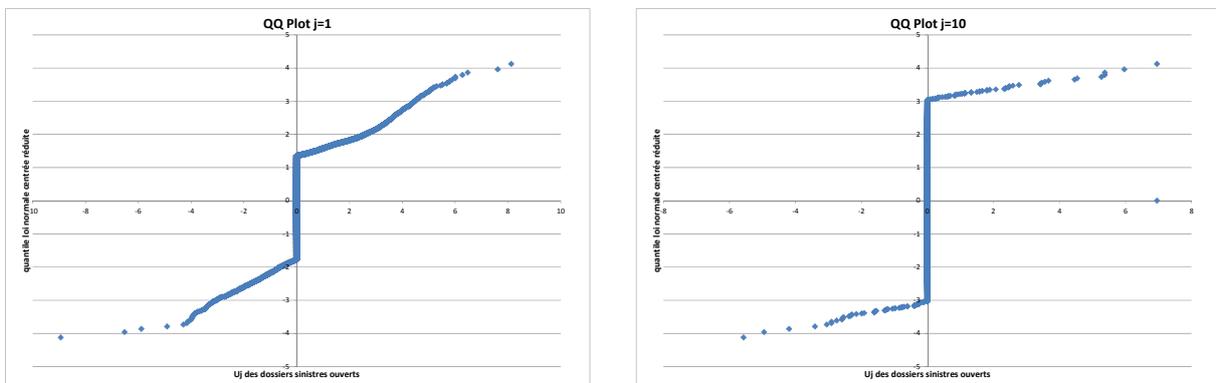


Quelle que soit l'année de développement, près des trois-quarts des $U_{k,j}$ ne peuvent être calculés.

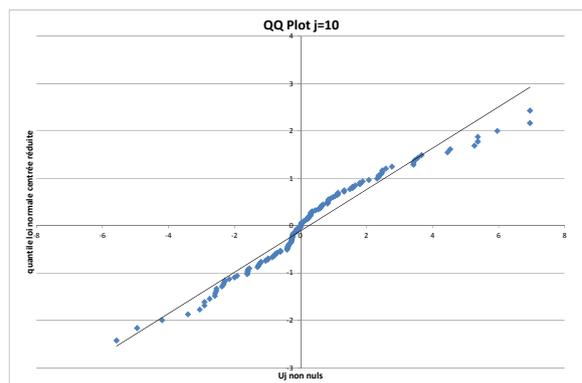
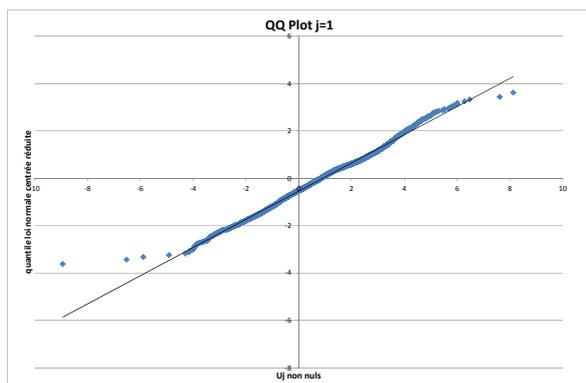
$$U_{k,j} = \begin{cases} \log \frac{Y_{k,j+1}}{Y_{k,j}}, & \text{si } Y_{k,j} \neq 0 \text{ et } Y_{k,j+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui diminue d'autant l'estimateur de la moyenne et biaise l'estimateur de l'écart-type. Ce qui transparaît bien sur les graphes QQ-Plot.

Figure 33 - Ajustement QQ-Plot sur les processus de règlements



L'hypothèse de normalité des $U_{k,j}$ devrait être remise en cause. En ne conservant que les U_j non nuls, la normalité pourrait être acceptée (même si en année 10, l'adéquation n'est pas bonne), mais il subsiste un problème d'adéquation sur les queues de distributions.



6.2.4 Résultats

L'estimation des règlements futurs peut se faire de proche en proche, à partir du règlement du sinistre k de l'année d'inventaire (année j_k développement de ce sinistre à partir de l'ouverture) :

$$\hat{E}(Y_{k,j+1} | passé) = Y_{k,j} \times \exp\left(\hat{\mu}_j + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{2}\right), \forall j_k \leq j$$

Ces montants sont par la suite probabilisés, pour les sinistres en cours, suivant le processus d'états estimé :

$$\hat{Y}_{k,j+1} = \frac{\hat{S}(j)}{\hat{S}(j_k)} \hat{E}(Y_{k,j+1} | passé)$$

L'estimation des règlements à un an s'établit à 23,2 M€ (contre 17,8 M€ avec Mack calculé sur les triangles de règlements cumulés), avec un écart type de 3,9 M€.

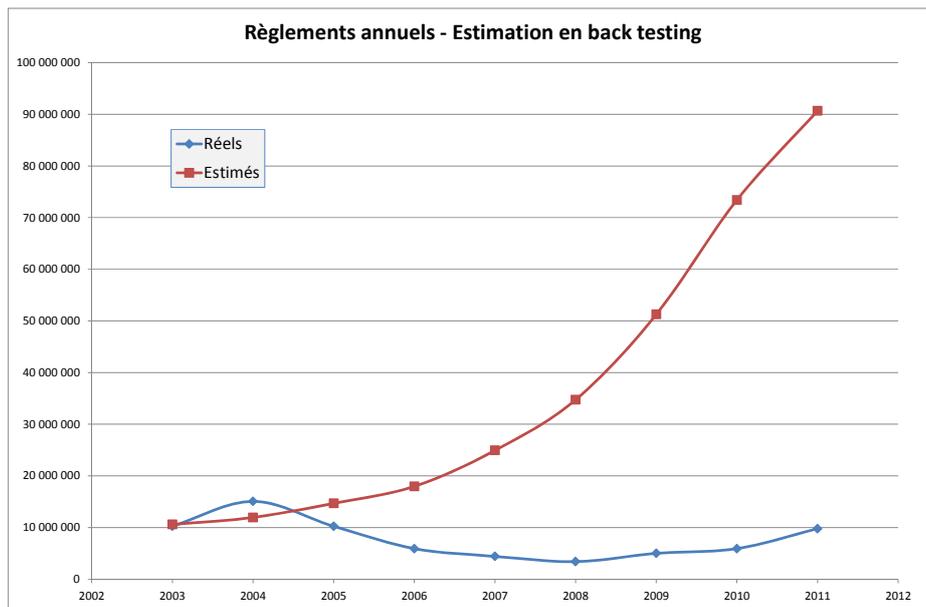
En vertu du théorème central limite, avec condition de Lyapovov, cette estimation des règlements à un an, somme de variables Log-normales indépendantes de paramètre positif et de cardinal fini, suit approximativement une loi normale. La VaR à 99,5% s'établirait alors à 33,4 M€.

La provision globale s'élève à 2 170 M€ (258 M€ avec Mack calculé sur les triangles de règlements cumulés). Cette dérive importante dans l'estimation est due à la mauvaise modélisation des règlements extrêmes par cette méthode, ce qui se traduit par des écart-types estimés très importants.

Back testing

En reconstituant le portefeuille tel qu'il était en 2003, la méthode est appliquée à ce portefeuille. Les règlements projetés sont comparés à ceux connus. Si l'estimation est relativement proche les 3 premières années de projection, elle s'écarte considérablement et exponentiellement à partir de la 4^{ème} année.

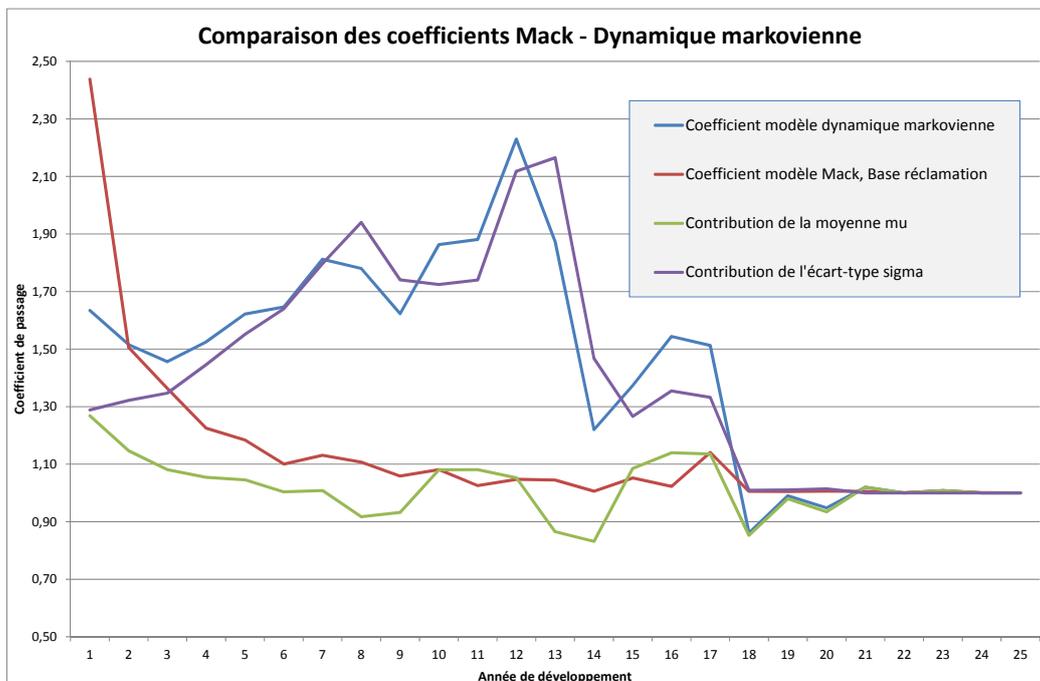
Figure 34 - Règlements annuels estimés par le modèle à dynamique markovienne - back testing



Analyse des coefficients du processus de règlement

La contribution des moyennes estimées dans le calcul des règlements futurs est proche de celle calculée par Mack. C'est bien la contribution des écart-types qui explique l'estimation exponentielle des montants de règlements futurs.

Figure 35 - Coefficient modèle Mack et Dynamique Markovienne



Sans rejeter l'approche, il est proposé par la suite de construire un modèle analogue, mais sur la base des règlements cumulés, qui devraient présenter certains avantages :

- Plus grande régularité
- Pas ou peu de montants nuls ou négatifs
- Propriétés analogues à celles décrites sur les règlements non cumulés
- Parallélisme avec le modèle de Mack, appliqué aux triangles de règlements cumulés

6.3 Modèle à dynamique markovienne des règlements cumulés

L'idée est de reprendre la modélisation proposée par Dinh et Chau⁷¹, mais en l'appliquant aux règlements cumulés. Le sinistre Σ_k est alors caractérisé par une durée probable de traitement et des règlements cumulés annuellement. Il s'agit alors de suivre le vecteur $\Sigma_k = (R_{k,i}, T_{k,i})_{i=1,\dots,n}$ où $R_{k,i} = \sum_{u=1}^i Y_{k,u}$ sont les réalisations des processus de règlements cumulés annuels, $T_{k,i}$ le processus d'états (sinistre ouvert ou clos) déjà décrit en 6.2.1 Présentation théorique.

6.3.1 Processus de règlements cumulés

Il est supposé que le processus de règlements cumulés vérifie les hypothèses suivantes :

1. Les processus de règlements cumulés $R_{k,\cdot} = (R_{k,1}, \dots, R_{k,n})$, $k \in I$ sont indépendants
2. Pour tout $j \geq 1$, il existe des paramètres μ_j et σ_j , positifs, tels que

$$V_{k,j} = \log \frac{R_{k,j+1}}{R_{k,j}} \stackrel{d}{=} N(\mu_j, \sigma_j^2) \text{ pour tout } k \in I$$

3. Pour tout $k \in I$ donné, pour tout $j \geq 1$, les $V_{k,j}$ sont indépendants

L'espérance des règlements cumulés futurs, suivant le même raisonnement que développé par Dinh et Chau, peut s'écrire :

$$\hat{E}(R_{k,j+1} | \text{passé}) = R_{k,j} \times \exp\left(\hat{\mu}_j + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{2}\right), \forall j_k \leq j$$

Avec comme estimateurs des moyennes et écart-types μ_j et σ_j

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{k \in I_{j+1}} U_{k,j}}{\text{card}(I_{j+1})}$$

⁷¹ [8] DINH N. A. et CHAU G., Mesures de provision cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie, Mémoire ENSAE, 2012

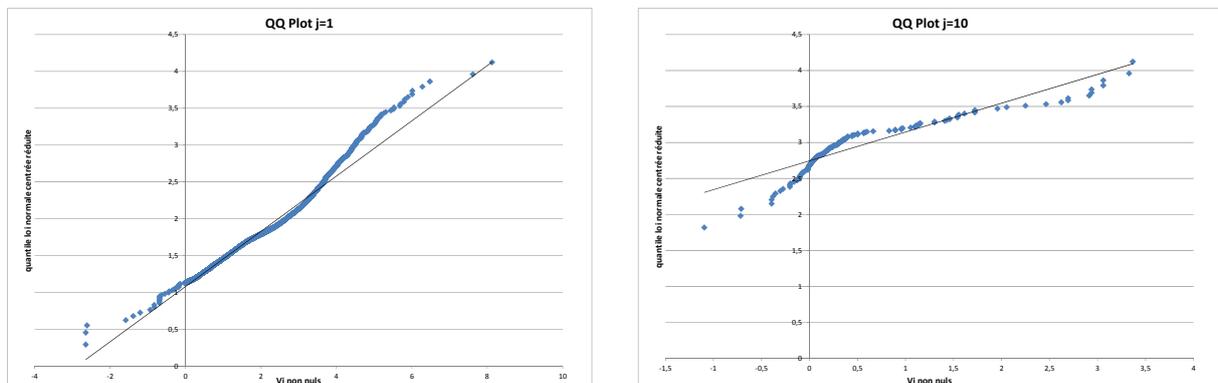
$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{k \in I_{j+1}} (U_{k,j} - \hat{\mu}_j)^2}{\text{card}(I_{j+1}) - 1}$$

$\hat{\mu}_j$ et $\hat{\sigma}_j^2$ présentent les mêmes problèmes de biais que décrits pour le modèle sur les règlements non cumulés⁷².

La problématique de nullité ou de la positivité des règlements ne se pose quasiment plus ici, du fait du cumul. Les rares cas où il faut « forcer » la valeur de $V_{k,j}$ sont ceux où il n'y a aucun règlements les premières années de traitement du sinistres.

L'hypothèse de normalité des $V_{k,j}$ n'est pas parfaitement vérifiée, mais l'ajustement sera accepté en l'état (graphes dont sont exclus les $V_{k,j}$ nuls).

Figure 36 - Ajustement QQ-Plot sur les processus de règlements cumulés

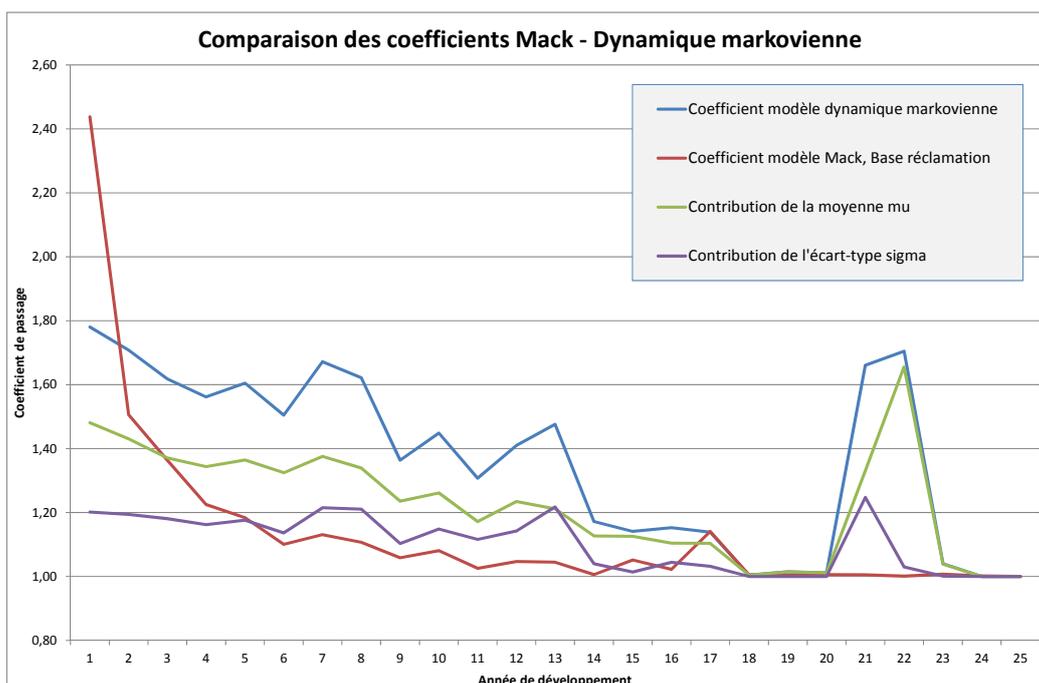


6.3.2 Résultats

Les moyennes et écart-types estimés permettent de calculer des coefficients de passage plus proche de ceux calculés par Mack, mais tout de même bien supérieurs.

⁷² Cf. 6.2.3 Processus de règlements

Figure 37 - Coefficient modèle Mack et Dynamique Markovienne sur règlements cumulés



L'estimation des règlements à un an s'établit à 25,5 M€ (contre 17,8 M€ avec Mack calculé sur les triangles de règlements cumulés, et 23,2 pour le modèle à dynamique markovienne sur les règlements non cumulés), avec un écart type moins important de 2,9 M€. La VaR à 99,5% s'établirait alors à 32,9 M€.

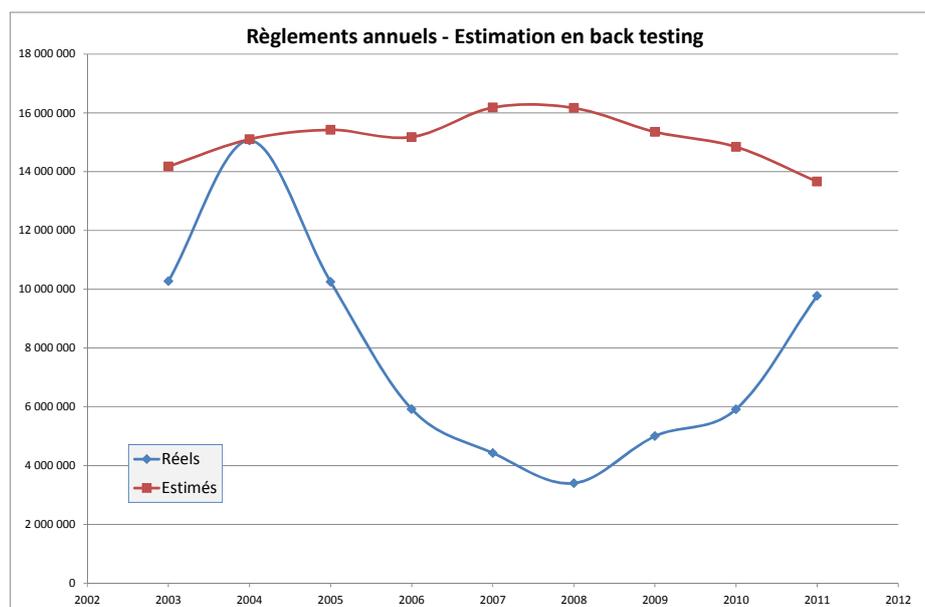
La provision globale s'élève à 484 M€, soit presque le double de celle calculée avec Mack (258 M€ calculé sur les triangles de règlements cumulés). Cette méthode permet une appréciation bien meilleure de la provision globale et une estimation facile à mettre en œuvre de l'estimation des règlements à un an et de la VaR.

En toute rigueur, il faudrait néanmoins tester les hypothèses 1 et 3 du modèle (indépendance des processus de règlements cumulés et des coefficients).

Back testing

En reconstituant le portefeuille tel qu'il était en 2003, la méthode est appliquée à ce portefeuille. Les règlements projetés sont comparées à celles connues. La méthode surestime les règlements sur l'ensemble de la période 2003-2011.

Figure 38 - Règlements annuels – back testing sur modèle markovien sur règlements cumulés



6.4 Synthèse

Les approches conduites sur les données individuelles (i.e. sans construction de triangles agrégés) sont supposées fournir une modélisation plus précise des comportements des sinistres.

Dans un premier temps, il a été étudié un modèle dit « censuré » pour lequel la fonction estimative du montant ultime d'un sinistre est construite suivant les modèles de durée à censure. Simple à mettre en œuvre, cette méthode n'aplanit pas la difficulté liée à la rupture née au moment de la loi About (fonction de règlements ultimes significativement différente avant et après 2003). De plus, l'estimation de la provision à constituer est très sensible à la queue de distribution. Ce qui n'a pas permis de trouver une fonction paramétrique bien adaptée à des montants de règlements cumulés.

Il a ensuite été étudié un modèle à dynamique markovienne des règlements (qui dans l'esprit se rapproche de l'hypothèse centrale de Chain Ladder, Mack,... sur une dynamique de traitement des dossiers sinistres). Ce modèle est bâti sur deux variables supposées indépendantes : la durée de traitement du sinistre et une distribution conditionnelle des règlements (conditionnée par les règlements passés). La durée de traitement est approchée statistiquement, mais sa distribution n'est pas estimée. Seule la moyenne des estimations est utilisée. Pour les règlements, la moyenne et l'écart type sont utilisés pour estimer la provision, la Value at Risk,... Cependant, la forte irrégularité dans les règlements (plus de la moitié d'entre eux sont nuls) entraîne un faible nombre de coefficients estimés, une forte dispersion autour des moyennes,... En testant la méthode sur le passé, la mauvaise prédiction se confirme également.

Il a été proposé par la suite de construire un modèle analogue, mais sur la base des règlements cumulés : plus grande régularité, peu de montants nuls. L'ajustement à une fonction log-normale n'est pas de bonne qualité. Les provisions estimées sont plus réalistes, mais encore

trop éloignée des méthodes plus classiques. Appliqué au passé, la prédiction est meilleure qu'avec les autres méthodes, sans pour autant être acceptable.

Les IBNER déterminés par les méthodes par triangulation, et méthodes « ligne à ligne » divergent très fortement.

	Sur triangles de charges	Sur triangles de règlements
Méthode de LA MEDICALE	89,8	
Chain Ladder / Mack	64,9	90,4
Modèle censuré, estimation non paramétrique	309,0	
Modèle censuré, loi Log-normale	190,2	
Modèle à dyn. markov. sur règlements	2002,0	
Modèle à dyn. markov. sur règlements cumulés	316,0	

7 Modèle individuel

Il a été vu au titre précédent que les modélisations proposées présentaient des difficultés structurelles par rapport aux données :

- Modèle à censure : difficulté à modéliser la queue de distribution
- Modèle à dynamique markovienne des règlements : les coefficients de passage ne permettent pas de modéliser un mélange de lois (où près de la moitié des règlements sont nuls), difficulté à modéliser la queue de distribution

Il est proposé dans ce chapitre de modéliser chaque comportement, pour chaque année de développement. Puis, une fois les lois estimées, de simuler chaque règlement individuel.

7.1 Présentation théorique

Sur la base de l'analyse des phénomènes individuels des règlements non cumulés, il est proposé de modéliser les règlements futurs des sinistres ouverts, sachant leur état à l'inventaire.

7.1.1 Variables

Réclamation

Si le dossier est déjà réclamé : $D_{i|j}^{Récla} = 1$; $i > j$

Sinon, $D_{i|j}^{Récla} = \frac{\hat{S}^{Récla}(j) - \hat{S}^{Récla}(i)}{\hat{S}^{Récla}(j)}$; $i > j$ la probabilité estimée de réclamation⁷³

Signe du règlement

Le signe $D_{i_k}^{signe}$ du règlement n'est pas conditionné par le passé. Il fera l'objet d'un tirage aléatoire à chaque période à partir des probabilités estimées en 3.3.3 Règlements.

Valeur du règlement

En fonction du « signe », il sera fait un tirage aléatoire dans une des fonctions estimées (Log-normale si le règlement est positif, Weibull s'il est négatif) au titre 3.3.3 Règlements.

Survie du dossier

Les montants sont probabilisés, suivant le processus d'états $\hat{S}(j)$ estimé en 3.3.2 Durée de traitement.

⁷³ Cf. 3.3.1 Réclamation

7.1.2 Projection - trajectoires

Il sera noté I l'ensemble des sinistres en cours de traitement à l'inventaire. En fonction de l'information initiale sur l'état de réclamation du dossier en cours, le règlement Y_{k,i_k} de l'année de développement i_k est déterminé par le produit de 3 variables aléatoires.

$$\begin{cases} D_{j_k}^{Récla} = 0 & Y_{k,i_k} = D_{i_k|j_k}^{Récla} \times D_{i_k}^{signe} \times X_{i_k|signe} \\ D_{j_k}^{Récla} = 1 & Y_{k,i_k} = D_{i_k}^{signe} \times X_{i_k|signe} \end{cases}$$

La variable aléatoire Y_i , règlement global probable pour la $i^{\text{ème}}$ année de projection (i.e. fonction de la survie d'un dossier de par son ancienneté depuis son ouverture), est la somme des règlements individuels déterminés période par période, les sinistres étant indépendants. Pour la $1^{\text{ère}}$ année, cette somme représente l'estimation des règlements à 1 an.

$$Y_i = \sum_{k \in I} \left(Y_{k,j_k+i} \times \frac{\hat{S}(j_k+i)}{\hat{S}(j_k)} \right)$$

À la différence du modèle proposé par Dinh et Chau⁷⁴, il n'est pas posé comme condition que les provisions doivent être positives. Si la provision globale venait à être négative, elle ne serait pas comptabilisée par l'assureur, mais ceci donnerait une indication sur les recours probables.

La variable aléatoire P_{k,j_k} , somme des règlements futurs d'un sinistre (et donc la provision à constituer pour ce dossier) s'établit à :

$$P_{k,j_k} = \sum_{i_k=j_k+1}^{\infty} \left(Y_{k,i_k} \times \frac{\hat{S}(i_k)}{\hat{S}(j_k)} \right)$$

La somme de ces provisions individuelles, indépendantes, constitue la provision globale.

$$P = \sum_{k \in I} P_{k,j_k} = \sum_{k \in I} \sum_{i_k=j_k+1}^{\infty} \left(Y_{k,i_k} \times \frac{\hat{S}(i_k)}{\hat{S}(j_k)} \right)$$

Par l'hypothèse d'indépendance et équi-distribution des variables élémentaires (état du sinistre, signe du règlement, valeur du règlement), l'espérance des variables provisions est égale à la somme des espérances des variables.

⁷⁴ [8] DINH N. A. et CHAU G., Mesures de provision cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie, Mémoire ENSAE, 2012

7.2 Résultats

Le modèle présenté est développé pour les 8 624 dossiers en cours. Puis il a été effectué 20 000 tirages pour chacun de ces dossiers sur 25 années de projection.

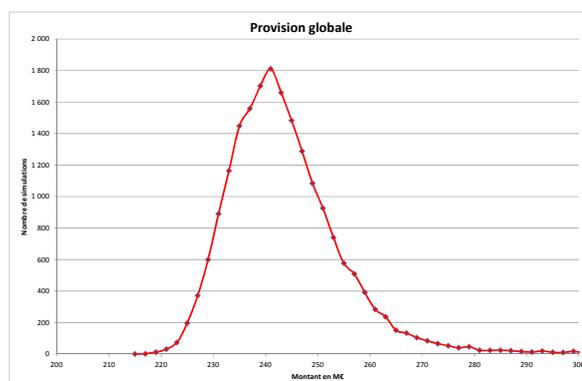
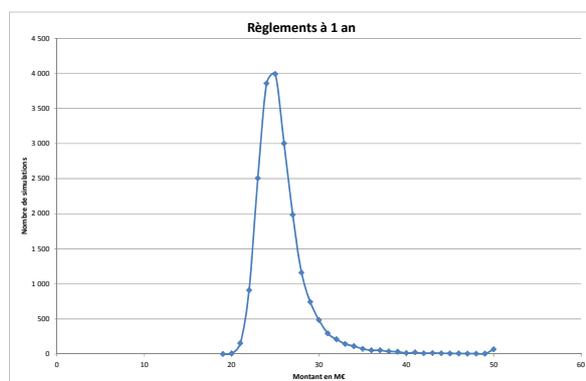
Les provisions ainsi simulées s'établissent à :

	Règlements à 1 an	Provision globale	IBNER
Moyenne	25,4	243,2	75,1
Médiane	24,6	241,2	73,1
Ecart type	4,5	13,1	
Var 99,5%	44,0	299,0	131,0
Min	19,6	216,0	47,9
Max	199,1	1 984,2	1 816,2

En M€

Ces montants de sinistres sont relativement proches de ceux estimés par la méthode de Mack : 65 M€ d'IBNER (méthode appliquée aux charges) à 90 M€ (appliquée aux règlements cumulés). Mais avec de bien meilleurs résultats en terme de simulation.

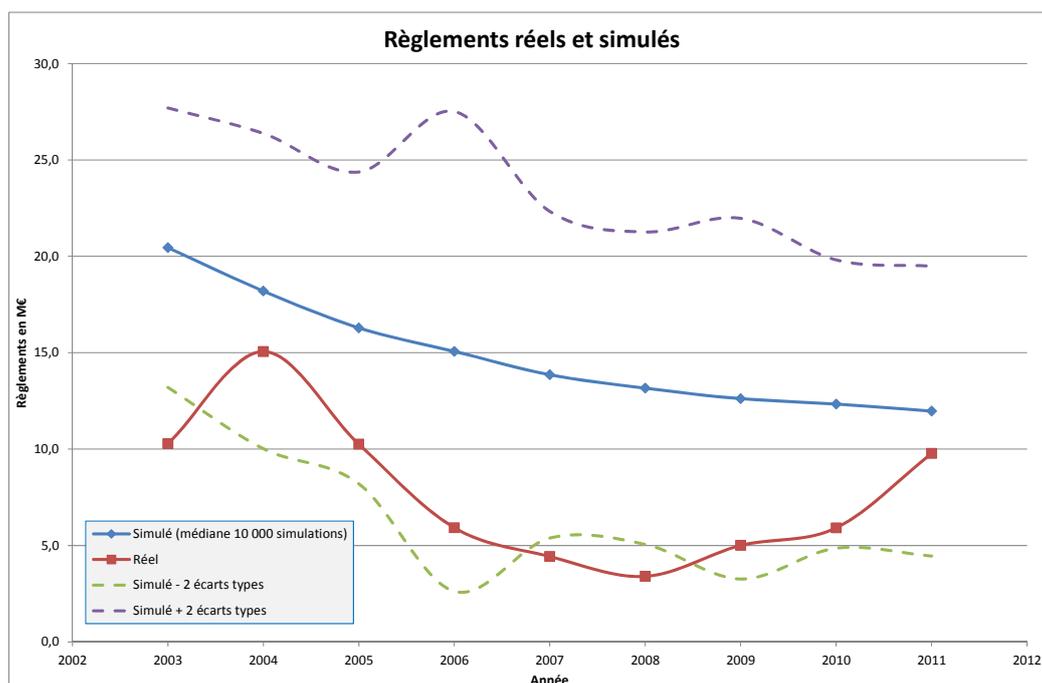
La répartition des provisions simulées sont cohérentes avec les lois des comportements retenues.



7.2.1 Back testing

En reconstituant le portefeuille tel qu'il était en fin 2002, la méthode est appliquée à ce portefeuille. Les règlements projetés sont comparés à ceux connus. Les montants constatés sur les 9 dernières années sont relativement proches, et généralement à moins de 2 écarts types de la moyenne des simulations.

Figure 39 - Simulation par back testing sur le modèle individuel



7.3 Conclusion

Le modèle proposé cherche à s'exonérer de certaines hypothèses :

- Dynamique de règlement
- Problématique liée aux dates de traitement (survenance, déclaration, réclamation) en ne retenant que celle ayant une incidence sur le traitement du dossier
- Uniformité de la loi des règlements en fonction de la durée de traitement
- Positivité des provisions

Il permet par ailleurs de mieux modéliser certains comportements propres à ce portefeuille :

- Faible cadence de règlements (qui conduit à constater de nombreuses années sans règlement)
- Existence régulière de montants extrêmes

De plus, ce modèle est très simple à mettre en œuvre, et recourt à une démarche essentiellement calculatoire. Cette démarche peut sembler a priori lourde et simpliste, mais semble donner de bons résultats dans le cadre des données de MÉDICALE DE France. Même en l'appliquant au passé. De plus, elle permettrait de faire une évaluation de la charge de sinistre cédée aux réassureurs, le traité étant en excédent.

8 Conclusion

Le premier objectif de ce mémoire était de qualifier la méthode construite par MÉDICALE DE FRANCE dans une perspective Best estimate. Cette méthode repose sur le modèle de Mack, appliqué aux triangles de charges, avec une estimation d'un tail factor sur les coefficients de passage.

Cette méthode a été construite dans un contexte législatif particulier qui conduit à ne pas constituer, comme dans les autres branches ou risques, de provisions IBNR, mais plutôt pour subséquentes, ... En effet, seule la date de réclamation du sinistre est retenue (également pour la tarification) comme élément constitutif de la garantie et non plus la date de survenance.

Globalement, il a été montré que le caractère Best estimate ne pouvait pas être rejeté, et que cette méthode permet d'obtenir une valorisation cohérente des provisions, stable dans le temps, indépendante de variations de coefficients qui nécessiterait des corrections à dire d'expert, et minimisant la variabilité des résultats autour de la moyenne du risque d'un inventaire à l'autre. Ceci, même si les hypothèses du modèle ne sont pas systématiquement vérifiées (indépendance des lignes, ...).

Différentes méthodes classiques d'évaluation sur les triangles ont été mises en œuvre sur les données de MÉDICALE DE FRANCE (Chain ladder, London chain, Projected Case Estimate, modèles factoriels, Mack, Munich Chain ladder). Toutes ces méthodes ont présenté des problèmes d'application (hypothèses non vérifiées, modèle non adapté aux données, faible convergence entre les évaluations faites sur les triangles de charges et les triangles de règlements cumulés, ...). Même si les valeurs obtenues sont proches de celles calculées par MÉDICALE DE FRANCE, il est difficile de statuer sur la qualité de ces approches.

Il était ensuite proposé d'étudier des méthodes dites « lignes à lignes », où la provision de chaque dossier en cours est projetée individuellement et devrait permettre une meilleure prise en compte des phénomènes et une réduction de la dispersion. Que ce soit le modèle dit « censuré », ou le modèle à dynamique markovienne des règlements, ils n'ont pas permis de s'adapter correctement aux données du fait :

- De la rupture née au moment de la loi About
- De l'épaisseur des queues de distribution
- De la forte irrégularité dans les règlements

Le modèle individuel proposé cherche à s'exonérer de certaines hypothèses :

- Dynamique de règlement
- Problématique liée aux dates de traitement (survenance, déclaration, réclamation) en ne retenant que celle ayant une incidence sur le traitement du dossier
- Uniformité de la loi des règlements en fonction de la durée de traitement
- Positivité des provisions

Il consiste en une modélisation de type « model point », simple à mettre en œuvre et recourant à une démarche essentiellement calculatoire. Cette dernière méthode fournit une valorisation des provisions proches des méthodes classiques (Chain ladder, Mack) et de celle de MÉDICALE DE FRANCE, mais permet également d'évaluer les règlements à 1 an, la VaR, ...

Cependant un aspect essentiel de ce risque n'a pas été complètement analysé, ni modélisé, il s'agit de la dérive des coûts moyens de règlements. Une étude, s'inspirant du mémoire de JAZIRI S.⁷⁵, pourrait permettre d'affiner l'estimation des provisions.

D'autres mémoires, dès que la confidentialité sera levée, pourrait permettre d'explorer d'autres méthodes :

- ENNADIFI I.⁷⁶ étudie des méthodes actuarielles permettant de tirer parti des données sinistre par sinistre, ainsi que des variables qualitatives disponibles. Ce mémoire propose trois modèles différents de régression.
- WINTERHOLER T.⁷⁷ cherche à identifier les dossiers présentant un potentiel d'aggravation important par rapport à leur charge dossier/dossier à un instant donné : corrélation entre la charge dossier/dossier et différentes variables qualitatives ou quantitatives.

Un autre élément important dans l'économie de ce produit est l'impact de la réassurance et du fonds de garantie instauré en 2012 (pour les sinistres de plus de 11 M€).

⁷⁵ [11] JAZIRI S., Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire ISFA, 2011

⁷⁶ ENNADIFI I., Provisionnement d'un portefeuille de RC médicale anglais (MDU), Mémoire ISUP, 2011

⁷⁷ WINTERHOLER T., Responsabilité civile médicale : Enjeux actuels sur le provisionnement des sinistres Modélisation des trajectoires individuelles, Mémoire CEA, 2012

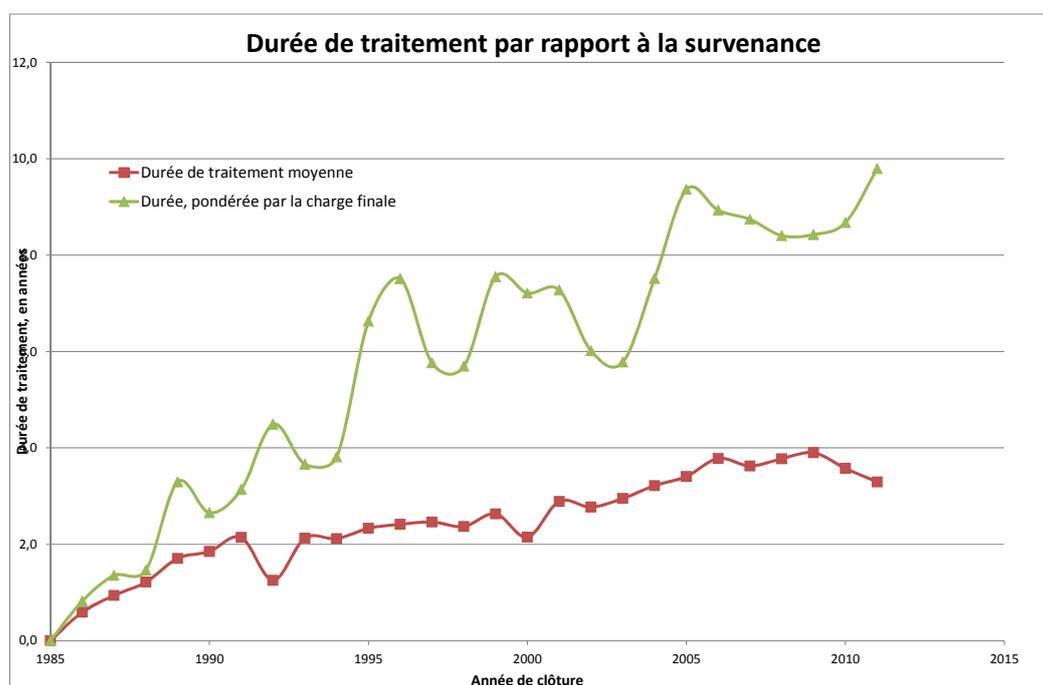
9 Annexe

9.1 Analyse des sinistres

9.1.1 Dates de clôtures

La durée de traitement des dossiers, observée lors de la clôture, est légèrement croissante.

Figure 40 - Durée de traitement par année de survenance



9.1.2 Charges par durée de traitement

Les graphiques ci-après sont construits sur les années de clôtures de 2003 à 2011 inclus.

Figure 41 - Répartition des charges, durée de traitement inférieure à 1 an

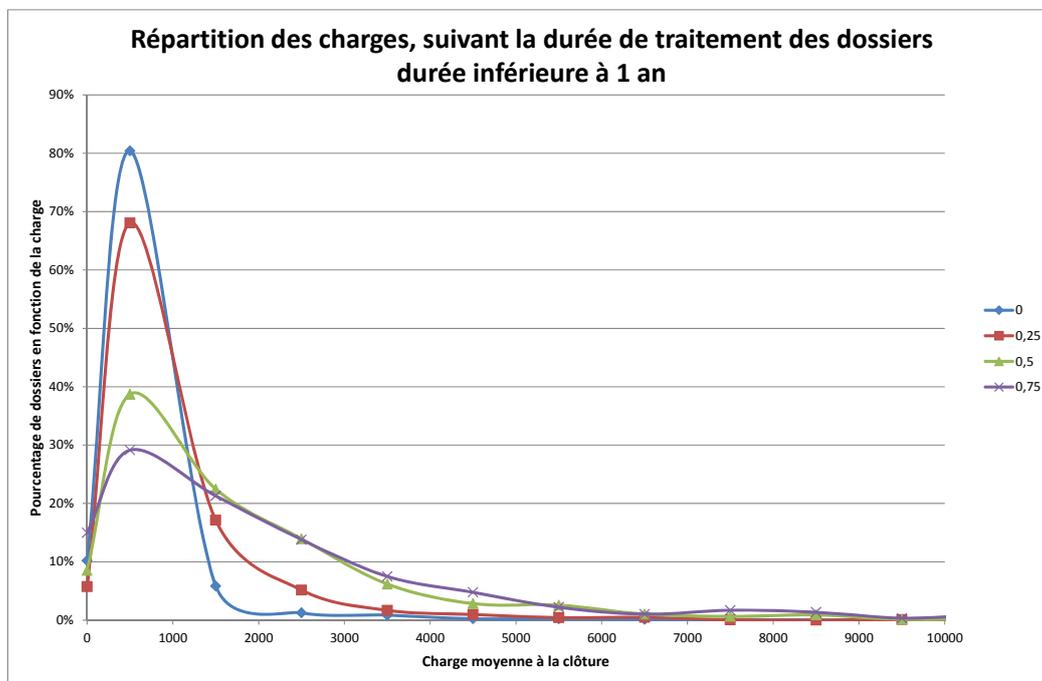


Figure 42 - Répartition des charges, durée de traitement entre 1 et 3 ans

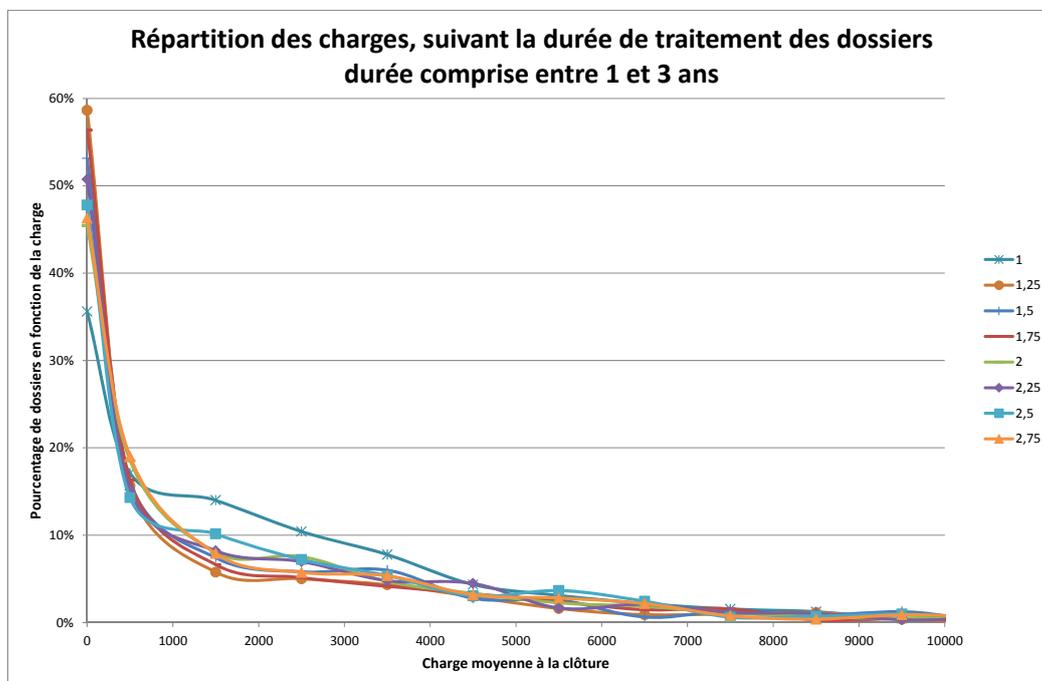


Figure 43 - Répartition des charges, durée de traitement entre 3 et 5 ans

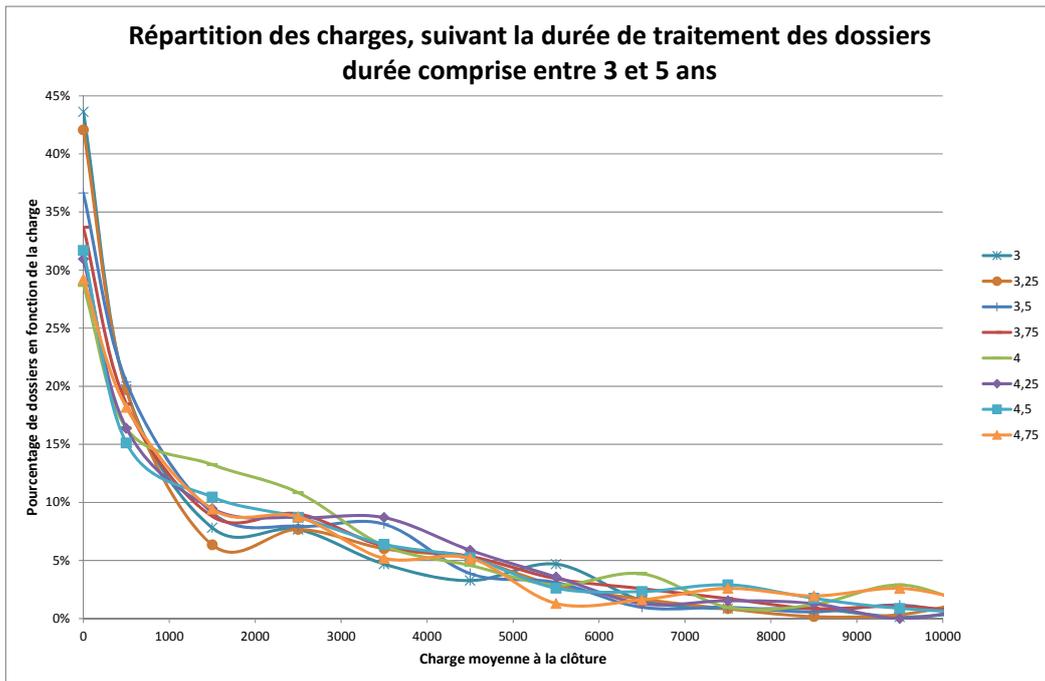
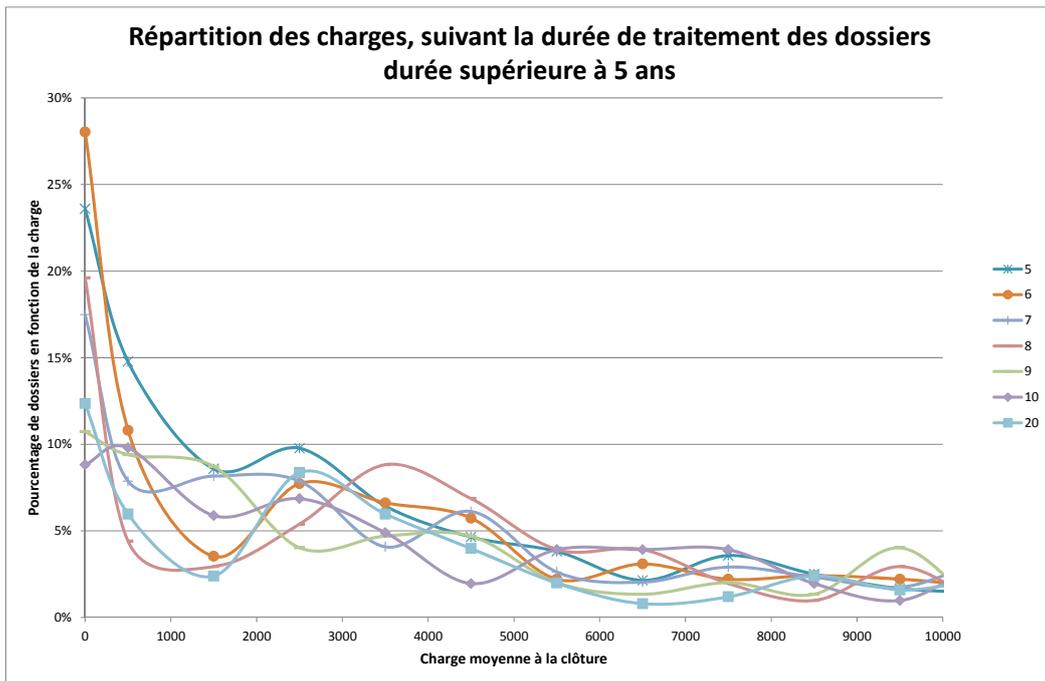
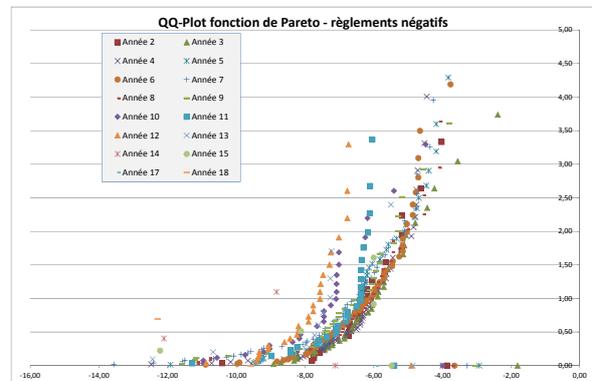
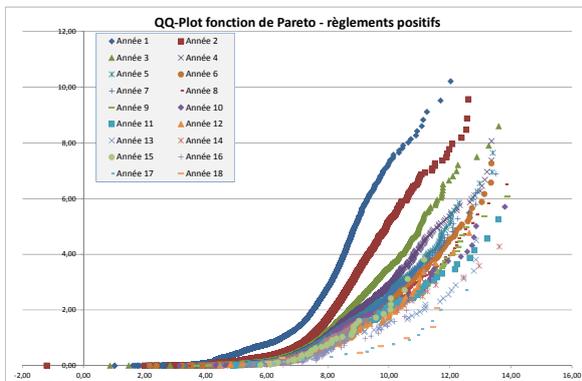
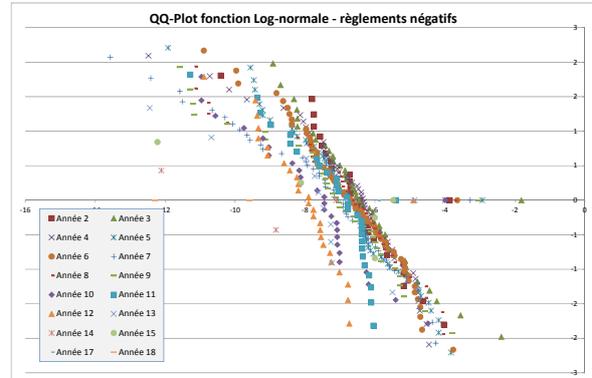
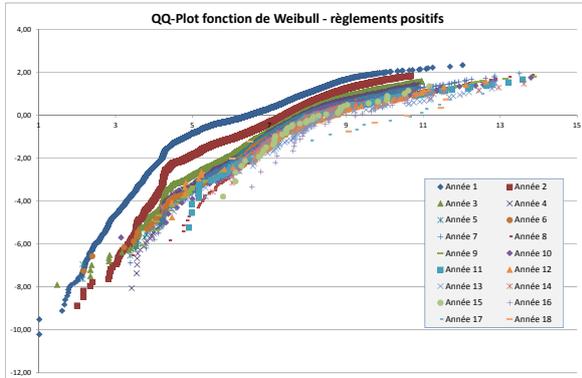


Figure 44 - Répartition des charges, durée de traitement supérieure à 5 ans



9.1.3 Lois des règlements

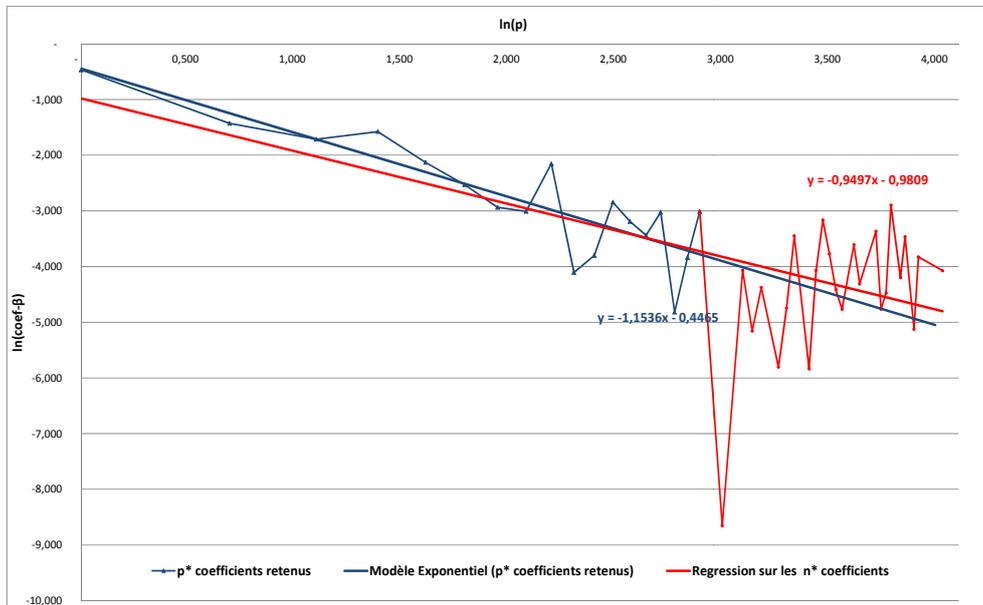
Les graphes de quantiles ont été construits pour plusieurs lois a priori identifiées par la fonction de dépassement.



9.2 Étude du modèle de MÉDICALE DE FRANCE

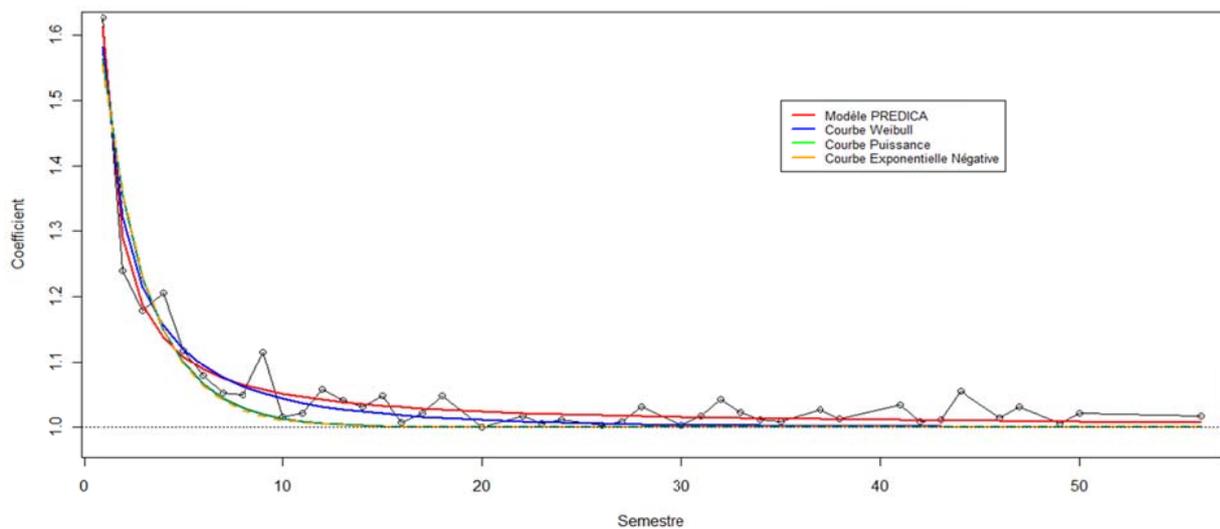
9.2.1 Construction de la loi

Figure 45 - Résultat de la régression pour la base Survenance



9.2.2 Loi d'ajustement

Figure 46 - Résultats des ajustements avec d'autres lois que la loi exponentielle sur la base survenance



Les valeurs de l'Akaike Information Criterion (AIC) et des Erreurs Résiduelles Standard (RSS) pour ces ajustements.

	Base Survenance			
	AIC		RSS	
	Ajustement sur p*	Ajustement sur l'ensemble des coefficients	Ajustement sur p*	Ajustement sur l'ensemble des coefficients
PREDICA	-70,12	-193,41	0,02	0,02
Exponentiel Négatif	-49,91	-150,69	0,05	0,06
Puissance	-51,58	-153,80	0,04	0,05
Weibull	-64,28	-177,35	0,02	0,03

9.3 Provisionnement

9.3.1 Illustration du changement de base d'étude

En enregistrant les sinistres dès leur déclaration, même en base réclamation, sur 5 exercices.

	Base Survenance					Base Réclamation					
	1					1					
	1	100				1	100				
Provision dossier		320					320				
IBNR		20					0				
Provision statistique		100					0				
Charge ultime		440					320				
	1	2				1	2				
	1	100	220			1	0	0			
	2	100	100	220		2	320	320			
Provision dossier		320					320				
IBNR		20					0				
Provision statistique		100					0				
Charge ultime		440					320				
	1	2	3			1	2	3			
	1	100	220	340		1	0	0	0		
	2	100	220	340	360	2	200	300	300		
	3	100	220	340	360	3	360	540	540		
Provision dossier		660					660				
IBNR		60					0				
Provision statistique		300					180				
Charge ultime		1020					840				
	1	2	3	4		1	2	3	4		
	1	100	220	340	360	1	0	0	0	0	
	2	100	220	340	360	2	200	300	300	300	
	3	100	220	340	360	3	240	360	360	360	
	4	100	220	340	360	4	360	540	540	540	
Provision dossier		1020					1020				
IBNR		120					0				
Provision statistique		300					180				
Charge ultime		1440					1200				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
	1	100	220	340	360	360	1	0	0	0	0
	2	100	220	340	360	360	2	200	300	300	300
	3	100	220	340	360	360	3	240	360	360	360
	4	100	220	340	360	360	4	240	360	360	360
	5	100	220	340	360	360	5	360	540	540	540
Provision dossier		1380						1380			
IBNR		120						0			
Provision statistique		300						180			
Charge ultime		1800						1560			

En enregistrant désormais les sinistres en base réclamation uniquement à partir de leur réclamation par les victimes.

Base Survenance

	1
1	100

	1	2
1	100	220
2	100	220

Provision dossier	320
IBNR	20
Provision statistique	100
Charge ultime	440

	1	2	3
1	100	220	340
2	100	220	340
3	100	220	340

Provision dossier	660
IBNR	60
Provision statistique	300
Charge ultime	1020

	1	2	3	4
1	100	220	340	360
2	100	220	340	360
3	100	220	340	360
4	100	220	340	360

Provision dossier	1020
IBNR	120
Provision statistique	300
Charge ultime	1440

	1	2	3	4	5
1	100	220	340	360	360
2	100	220	340	360	360
3	100	220	340	360	360
4	100	220	340	360	360
5	100	220	340	360	360

Provision dossier	1380
IBNR	120
Provision statistique	300
Charge ultime	1800

Base Réclamation

	1
1	0

	1	2
1	0	200
2	0	200

Provision dossier	200
Provision statistique	200
Charge ultime	400

	1	2	3
1	0	200	340
2	0	200	340
3	0	200	340

Provision dossier	540
Provision statistique	480
Charge ultime	1020

	1	2	3	4
1	0	200	340	360
2	0	200	340	360
3	0	200	340	360
4	0	200	340	360

Provision dossier	900
Provision statistique	540
Charge ultime	1440

	1	2	3	4	5
1	0	200	340	360	360
2	0	200	340	360	360
3	0	200	340	360	360
4	0	200	340	360	360
5	0	200	340	360	360

Provision dossier	1260
Provision statistique	540
Charge ultime	1800

9.3.1 Méthode Chain Ladder – London Chain

Correction des coefficients irréguliers

Les coefficients font l'objet d'un examen « manuel » afin de corriger d'éventuelles variations importantes, généralement sur des sinistres anciens, et qui sont de nature à perturber notablement l'évaluation des IBNER. Ainsi, en base Survenance :

Figure 47 - Correction automatisée des coefficients – Base Survenance

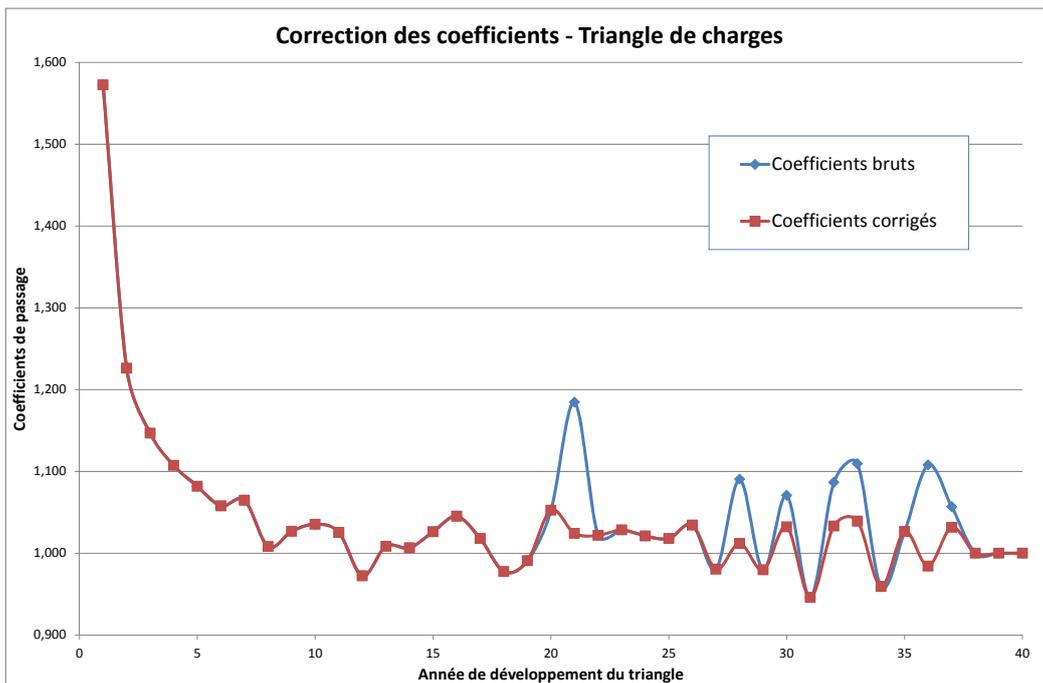
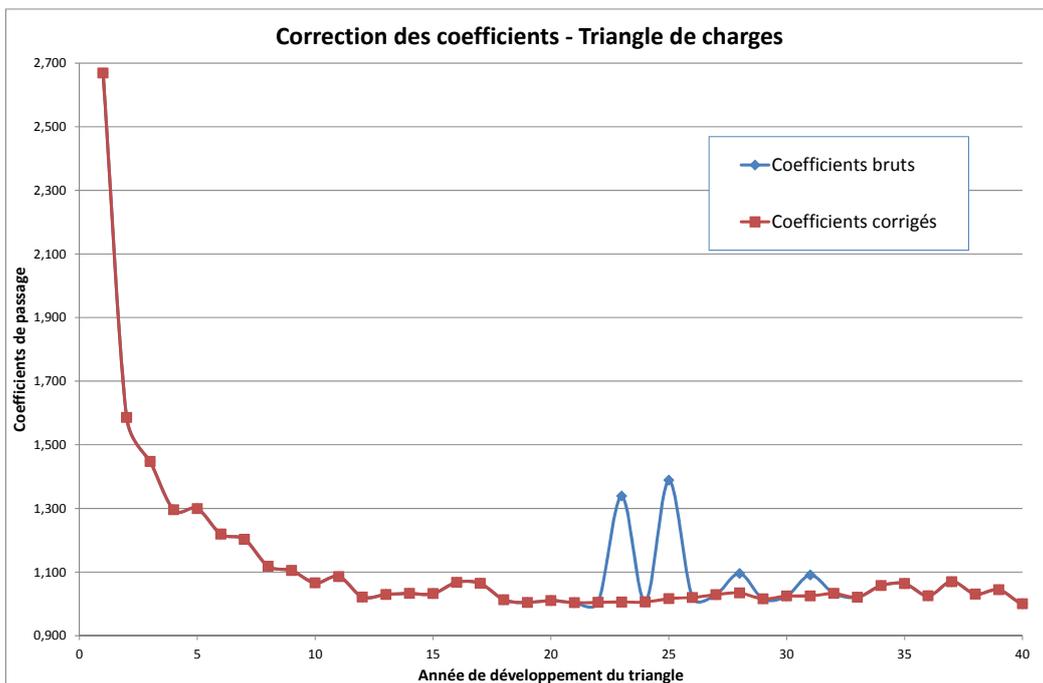


Figure 48 - Correction automatisée des coefficients – Base Réclamation



9.3.2 Modèle de Mack

H1 : hypothèse d'indépendance

Représentations graphiques de quelques lignes de points $(C_{i,j}, C_{i+t,j})$ pour les triangles de charges et de règlements cumulés, pour les 3 bases.

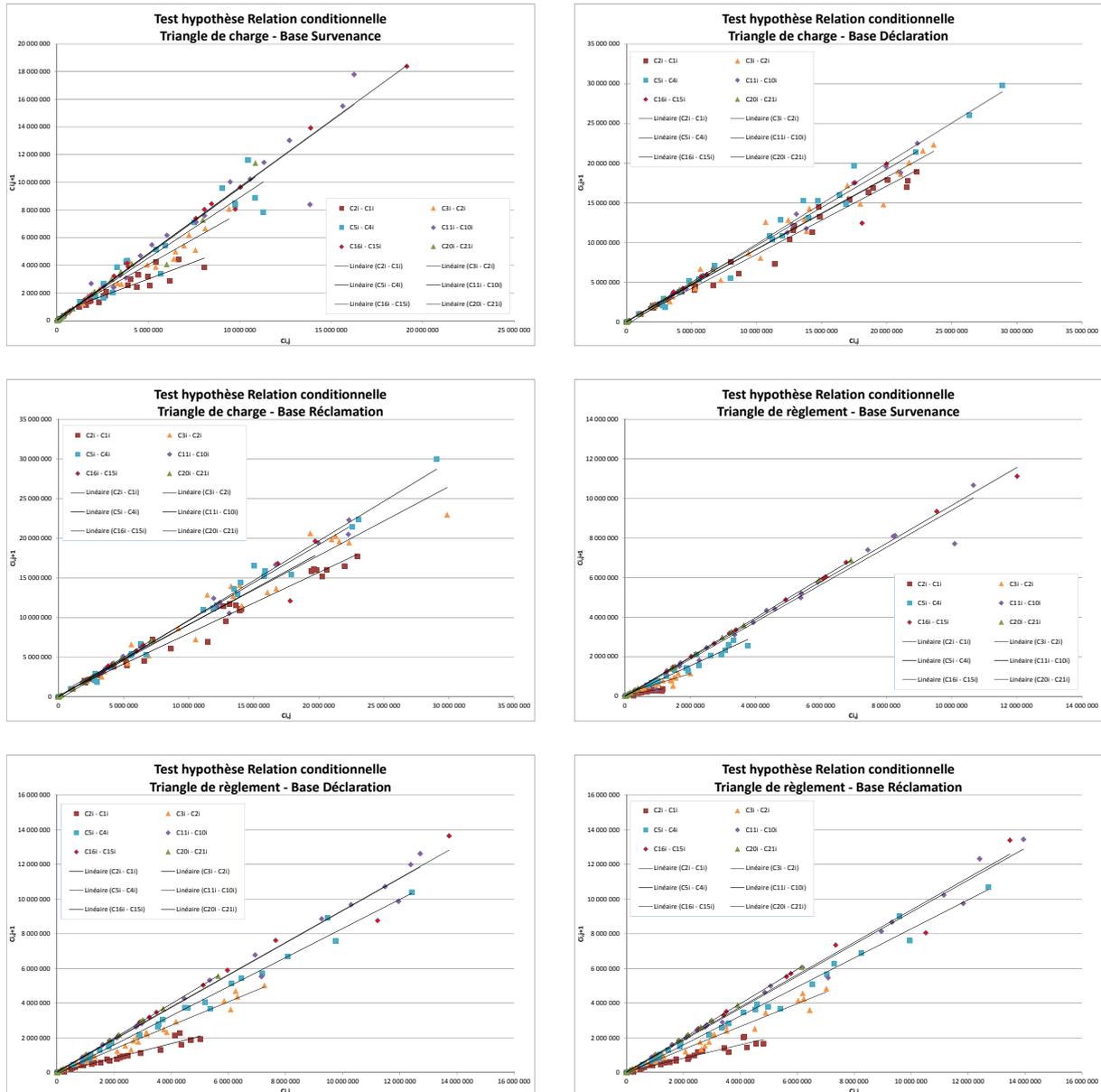
Figure 49 - Test d'indépendance des lignes - Modèle de Mack



H2 : Hypothèse Relation Conditionnelle

Représentations graphiques de quelques colonnes de points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$, confirmant la relation conditionnelle.

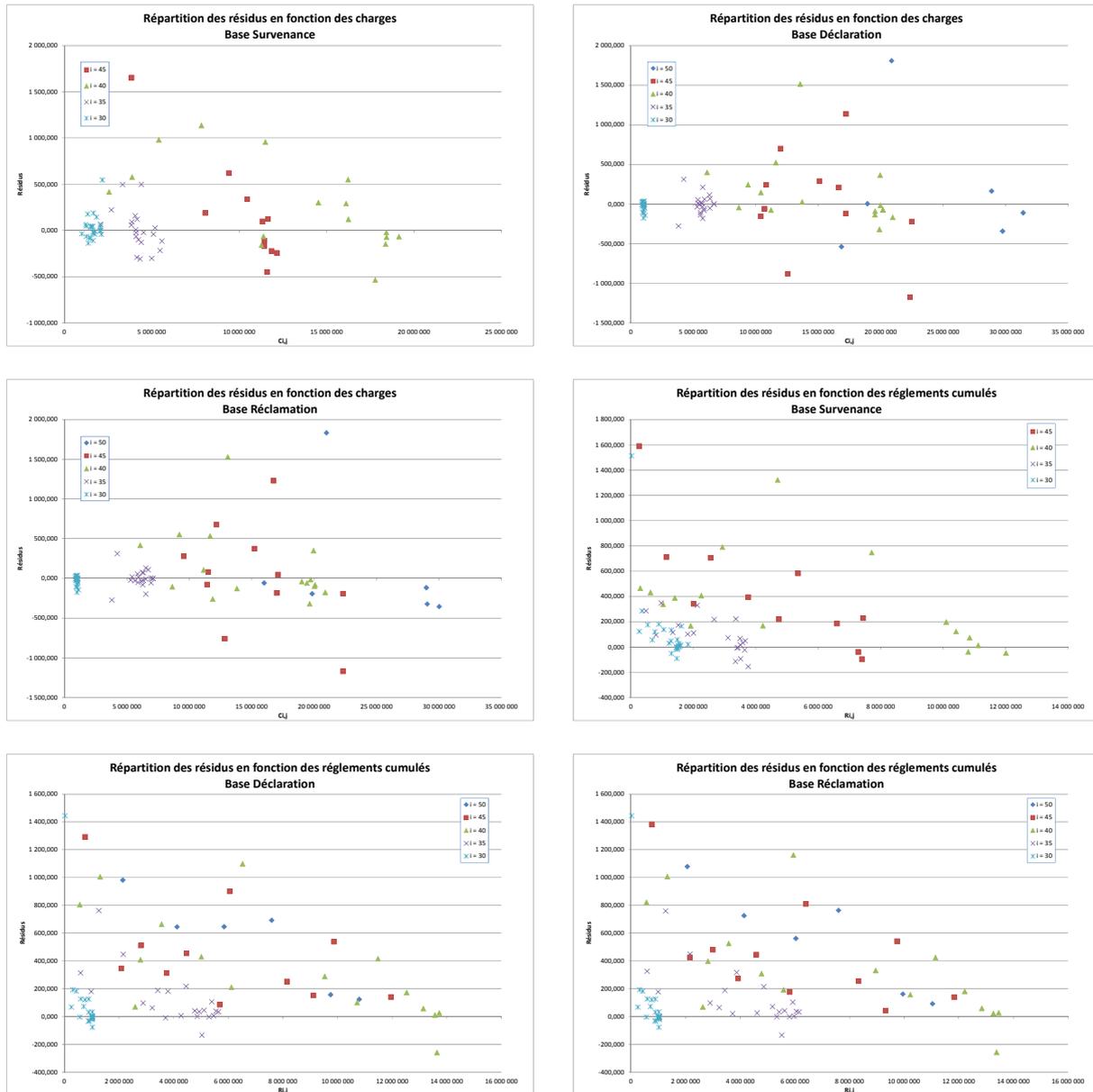
Figure 50 - Test de relation conditionnelle - Modèle de Mack



H3 : Caractère aléatoire des résidus

La représentation des résidus normés $D_{i,j} = (C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}) / \sqrt{C_{i,j}}$ en fonction des charges $C_{i,j}$, montre sur les triangles de règlements cumulés une configuration légèrement linéaire.

Figure 51 - Test caractère aléatoire des résidus - Modèle de Mack



Back-testing

Figure 52 - Ecart entre charges reconstituées et constatées

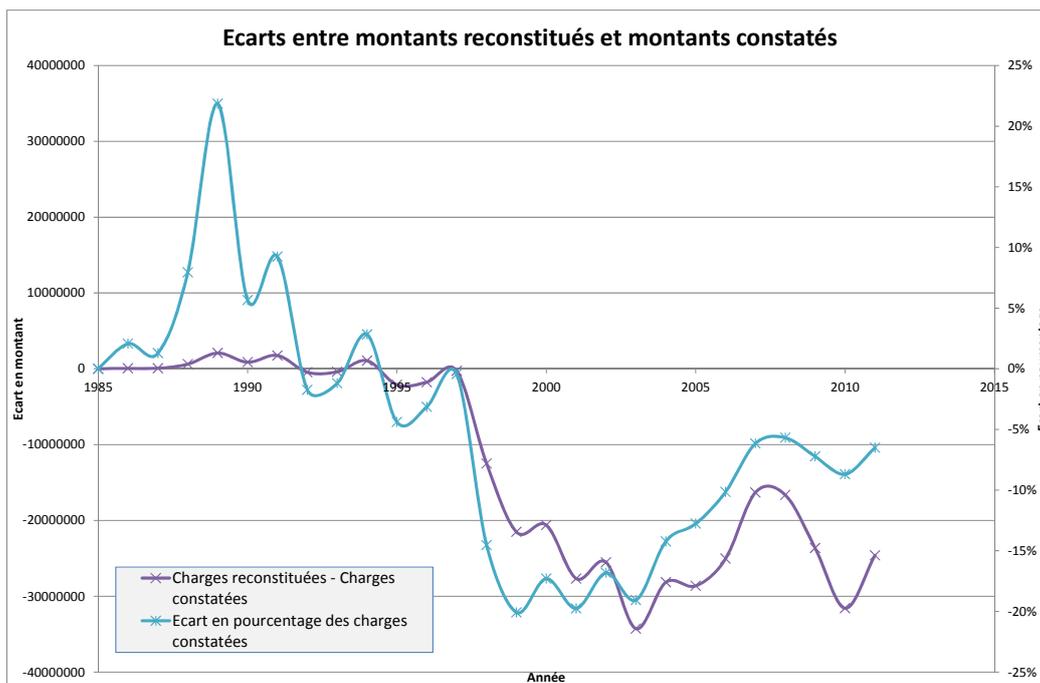
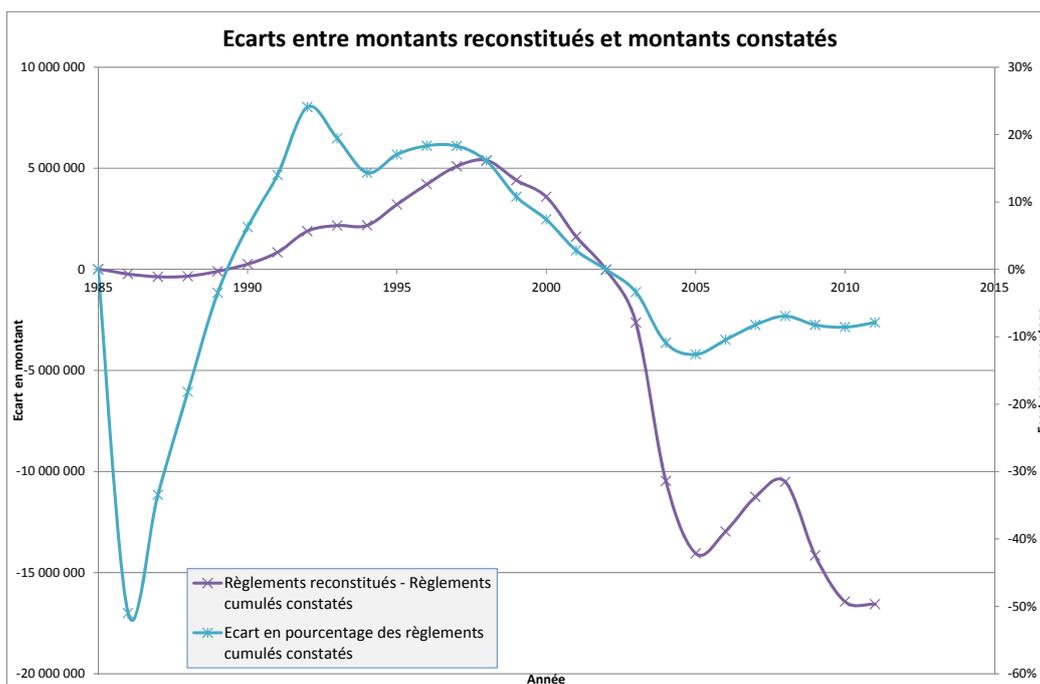


Figure 53 - Ecart entre Règlements cumulés reconstitués et constatés



Distribution par Bootstrap

Les graphes présentés ci-après sont la répartition des 5 000 simulations des provisions statistiques (IBNER) au-delà de la charge actuelle.

Sur les triangles de charges

Figure 54 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur les triangles de charges

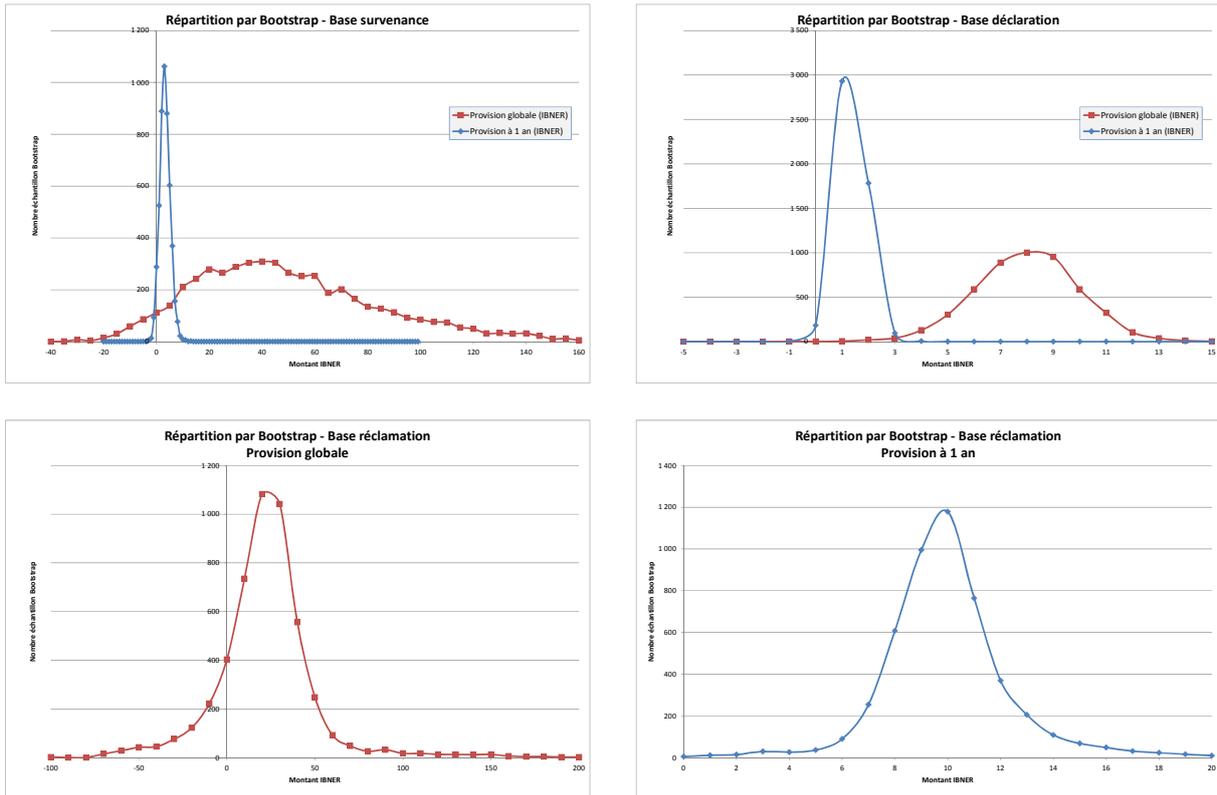
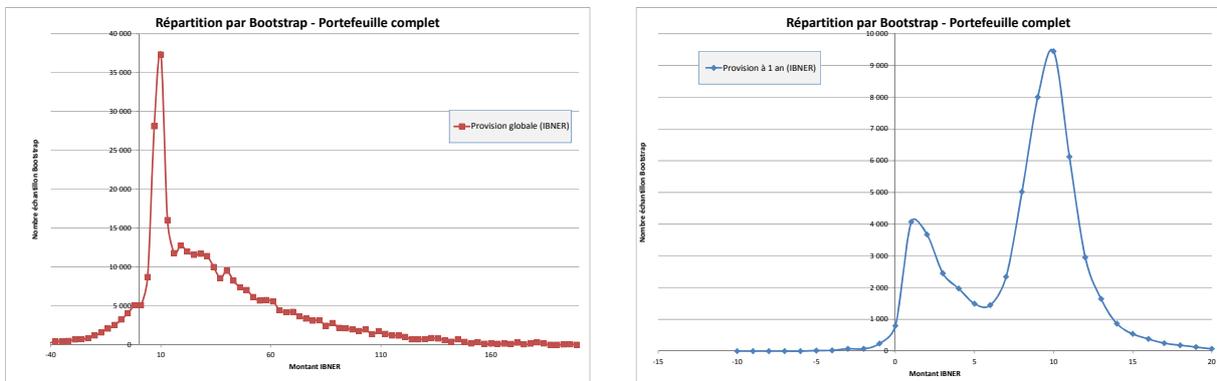


Figure 55 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur le portefeuille – triangles de charges



Sur les triangles de règlements cumulés

Figure 56 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur les triangles de règlements

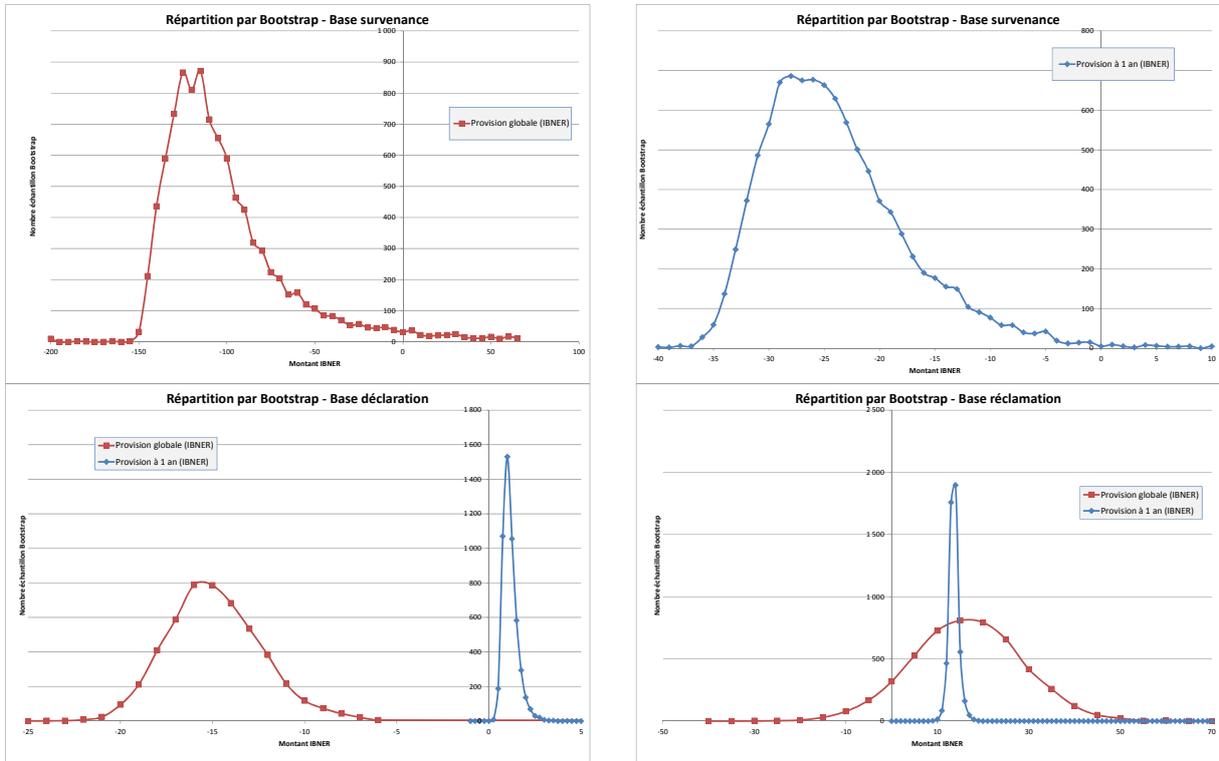
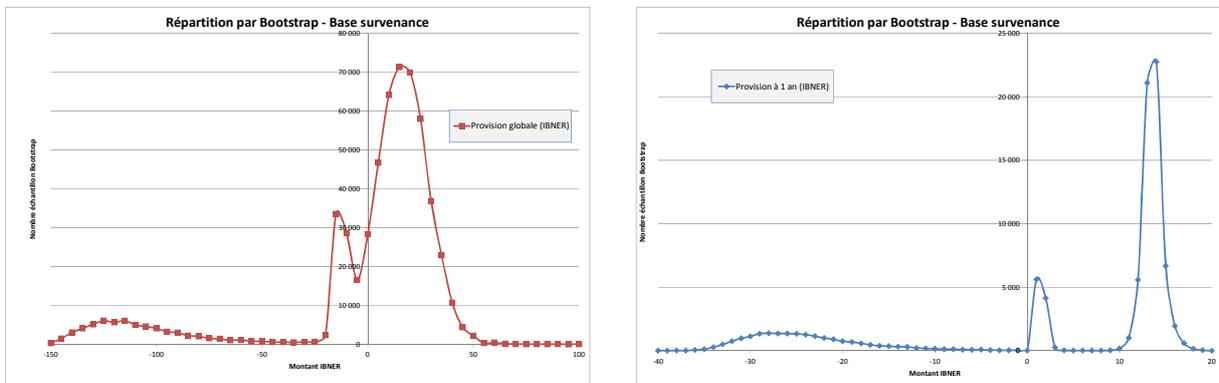
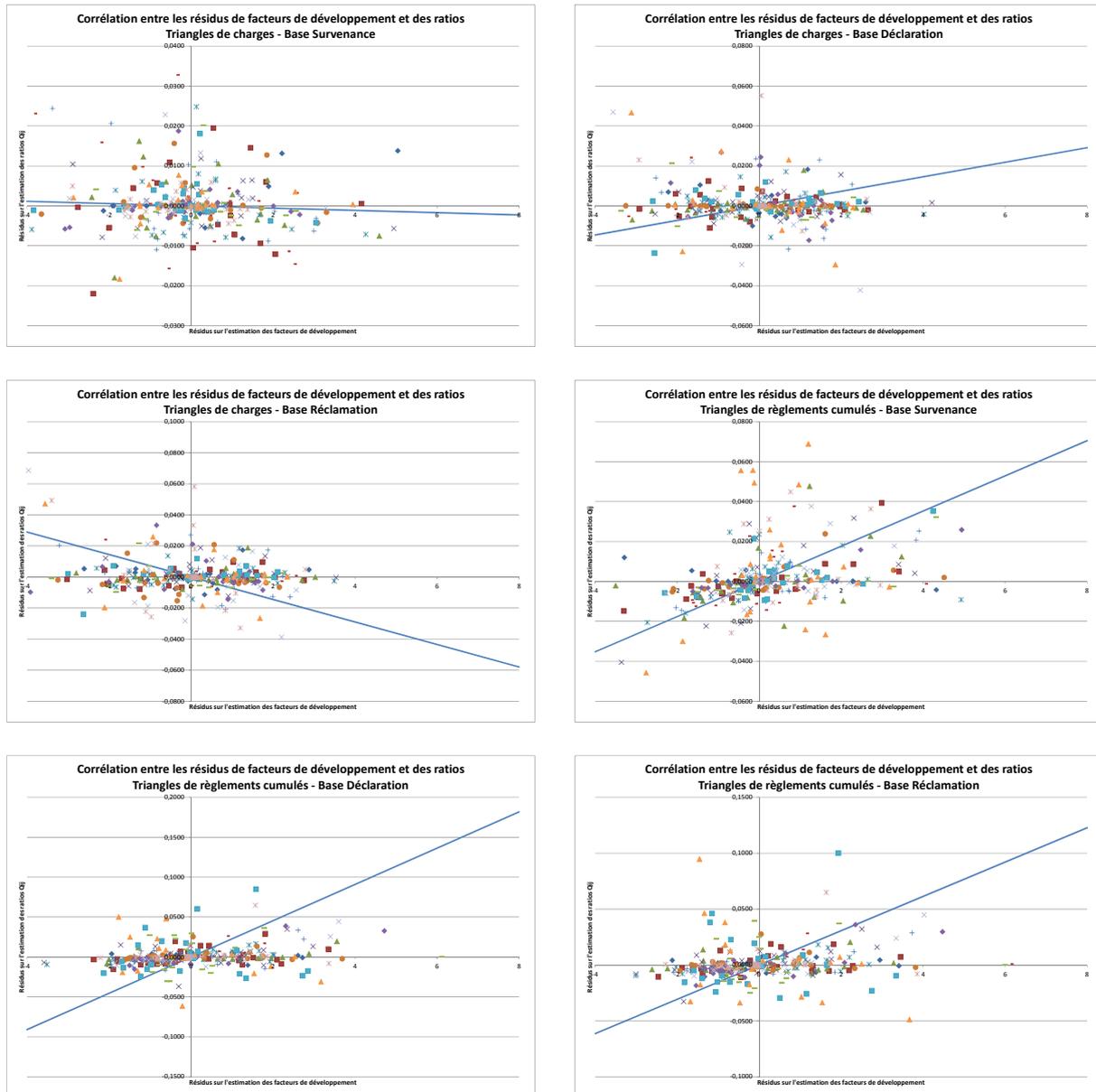


Figure 57 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur le portefeuille- triangles de règlements



9.3.3 Modèle Munich Chain Ladder

Figure 58 - Corrélation entre les résidus des facteurs de développement et des ratios

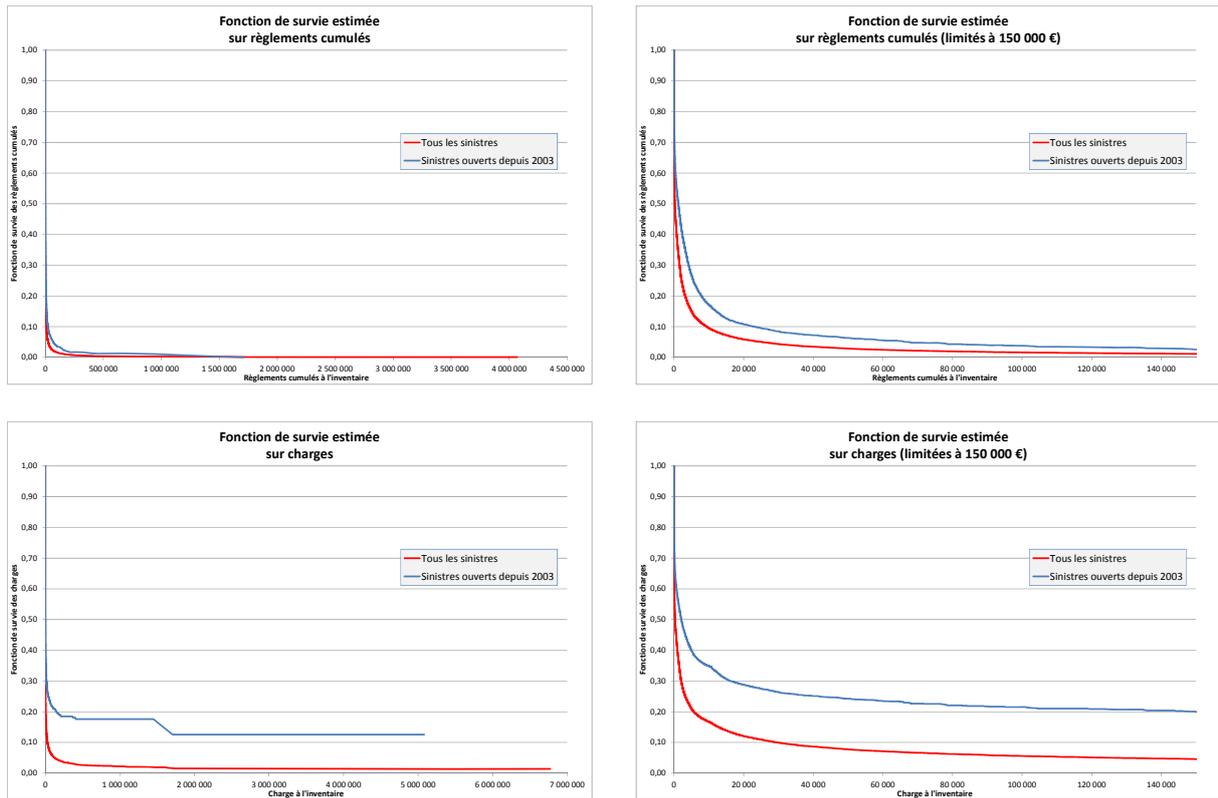


9.4 Méthodes ligne à ligne

9.4.1 Modèle censuré

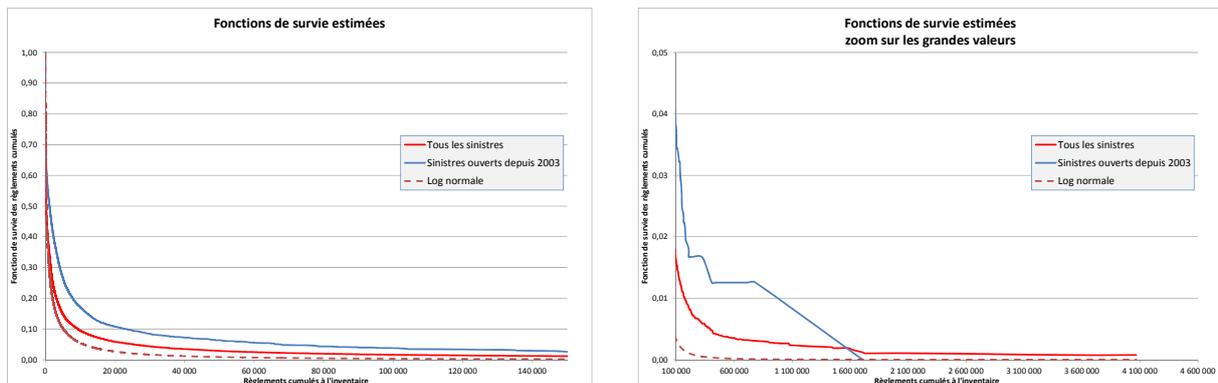
Estimation non paramétrique

Figure 59 – Fonction de survie - Estimation non paramétrique



Loi log-normale

Figure 60 - Fonction de survie - loi log-normale



Approche alternative

Figure 61 - Fonction de survie estimée sur tous les sinistres de plus de 1 096€- maximisation du log-vraisemblance

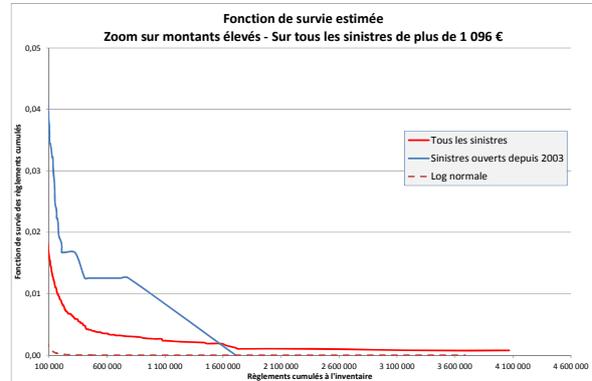
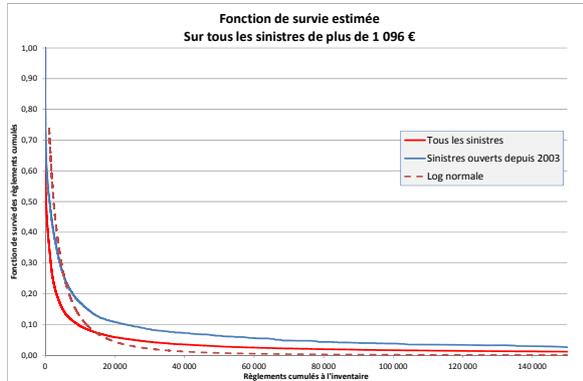
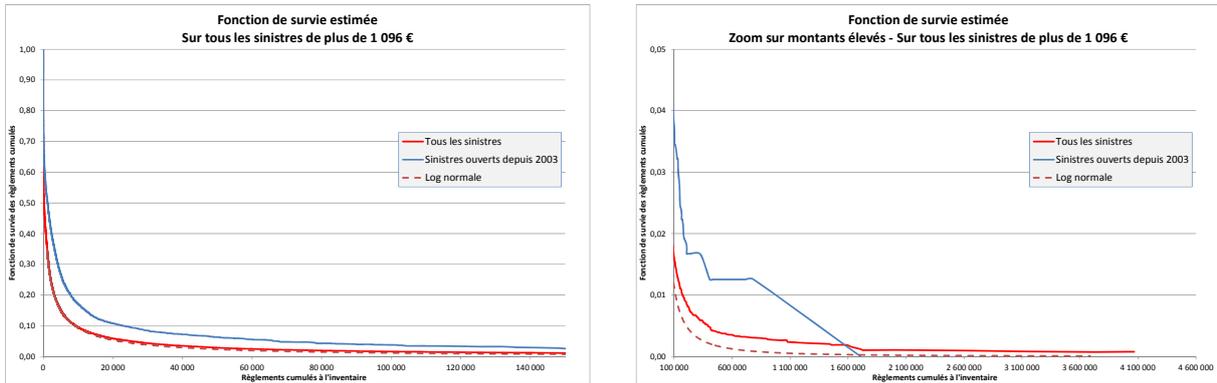


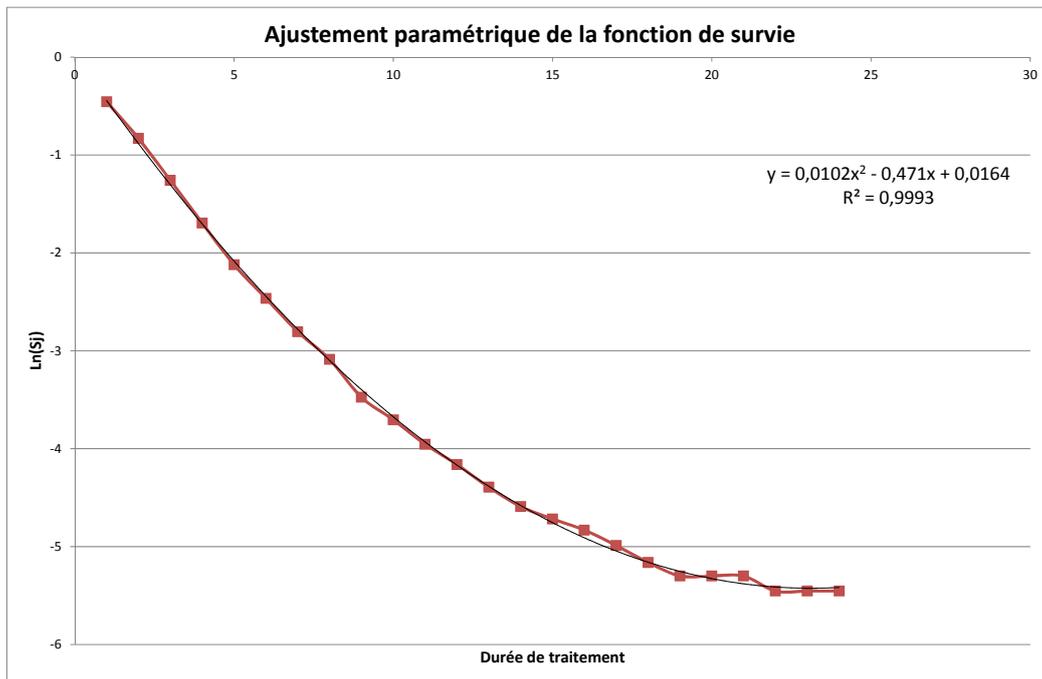
Figure 62 - Fonction de survie estimée sur tous les sinistres de plus de 1 096€- moindre carrés sur estimation non paramétrique



9.4.2 Modèle de provisionnement individuel

Processus d'États

Figure 63 - ajustement paramétrique de la fonction de survie du processus d'États



9.5 Outils

9.5.1 Estimateur de Kaplan Meier pour les fonctions de survie

L'estimateur le plus classique de la loi de survie est celui de Kaplan-Meier, qui découle du raisonnement, fait par analogie avec la durée de vie, qu'atteindre le montant de sinistre r , c'est avoir atteint un montant légèrement inférieur et clôturer le dossier au montant r . Ce qui permet d'écrire la fonction de survie S_x , avec les montants $r'' \leq r' \leq r$.

$$S_x(r) = P(X > r) = P(X > r, X > r') = P(X > r | X > r') \times P(X > r')$$

$$S_x(r) = P(X > r | X > r') \times P(X > r' | X > r'') \times P(X > r'')$$

En considérant tous les montants à l'inventaire R_k , rangés par ordre croissant, et $R_0 = 0$, la fonction de survie peut s'écrire comme :

$$S_x(R_j) = \prod_{u=1}^k P(X > R_u | X > R_{u-1})$$

avec

$$P(X > R_u | X > R_{u-1}) = 1 - P(X \leq R_u | X > R_{u-1}) = 1 - \frac{P(X \in]R_{u-1}; R_u])}{P(X > R_{u-1})}$$

$\hat{S}_x(r)$ est une fonction en escalier, décroissante, continue à droite.

Dans le cas classique de la survie d'un processus âgé (par exemple survie d'une population vivante), en notant I_j les individus vivants l'année j , l'estimateur de Kaplan-Meier permet d'estimer la fonction de survie S par :

$$\hat{S}(j) = \prod_{u=1}^j \frac{\text{card}(I_u) - dc_u}{\text{card}(I_u)}$$

Avec dc_u le nombre de décès au cours de l'année u de développement. La formule de Greenwood permet d'obtenir une estimation de la variance :

$$\text{Var}(\hat{S}(j)) = \hat{S}(j)^2 \sum_{u=1}^j \frac{dc_u}{\text{card}(I_u)(\text{card}(I_u) - dc_u)}$$

L'intervalle de confiance proposé par Rothman⁷⁸

⁷⁸ Il est préféré à celui proposé par Kaplan-Meier, qui est symétrique et peut conduire à un intervalle de confiance dont les bornes peuvent dépasser 0 ou 1.

$$IC = \left[\frac{K}{K + \left(\frac{z_{\alpha}}{2}\right)^2} \left(\hat{S}(j) + \frac{\left(\frac{z_{\alpha}}{2}\right)^2}{K} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{S}(j)) + \frac{\left(\frac{z_{\alpha}}{2}\right)^2}{4K^2}} \right) \right]; K = \frac{\hat{S}(j)(1 - \hat{S}(j))}{\text{Var}(\hat{S}(j))}$$

9.5.2 Fonction de dépassement moyen

La fonction de dépassement moyen s'estime empiriquement pour tout montant R_k par :

$$\hat{e}(R_k) = \frac{\sum_{u \in \Delta(R_k)} (R_u - R_k)}{\text{card} \Delta(R_k)}, \text{ où } \Delta(R_k) = \{i = 1, \dots, N; R_i > R_k\}$$

Ensuite, il est tracé le graphique de la fonction de dépassement moyen ($R_k, \hat{e}(R_k)$), dont la forme permet souvent d'indiquer la fonction paramétrique suivie par la variable étudiée.

9.5.3 QQPlot

Autre outil simple à mettre en œuvre, les graphiques des quantiles :

- Pareto $\left\{ \ln(R_k); -\ln\left(1 - \frac{k}{N}\right) \right\}$
- Lognormal $\left\{ \ln(R_k); \Phi^{-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right) \right\}$
- Weibull $\left\{ \ln(R_k); \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right) \right\}$

9.5.4 Vraisemblance

Loi normale

La densité de probabilité d'une loi normale $N(\mu, \sigma)$ est donné par :

$$P_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Pour un échantillon $\{Y_1, \dots, Y_N\}$, la vraisemblance s'écrit :

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Y_k - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{N}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (Y_k - \mu)^2}$$

Et en passant au logarithme :

$$\ln[L(\mu, \sigma)] = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln(\sigma) - \frac{N}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (Y_k - \mu)^2$$

La dérivée par μ s'annule en $\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k$, et celle par σ s'annule pour

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - \mu)^2$. Or l'espérance de l'estimateur de la moyenne $E(\hat{\mu}) = \mu$, et cet

estimateur est bien sans biais. Ce qui n'est pas le cas pour l'estimateur de l'écart-type

$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{N-1}{N} \sigma^2$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement non

biaisé (le biais diminue lorsque N croit). Pour « corriger » le biais, il faut prendre comme

estimateur : $\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (Y_k - \mu)^2$

Loi Weibull

La densité de probabilité d'une loi de Weibull à 2 paramètres (k, λ) peut s'écrire⁷⁹ :

$$P_{k,\theta}(x) = \frac{k}{\theta} x^{k-1} e^{-\left(\frac{x^k}{\theta}\right)}$$

Pour un échantillon $\{Y_1, \dots, Y_N\}$, la vraisemblance s'écrit :

$$L(k, \theta) = \prod_{j=1}^N \frac{k}{\theta} Y_j^{k-1} e^{-\left(\frac{Y_j^k}{\theta}\right)} = \left(\frac{k}{\theta}\right)^N \exp\left(-\sum_{j=1}^N \frac{Y_j^k}{\theta}\right) \prod_{j=1}^N Y_j^{k-1}$$

Et en passant au logarithme :

$$\ln[L(k, \theta)] = N \ln\left(\frac{k}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^N Y_j^k + (k-1) \sum_{j=1}^N \ln(Y_j)$$

La dérivée par θ :

$$\frac{\partial \ln[L(k, \theta)]}{\partial \theta} = -\frac{N}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{j=1}^N Y_j^k$$

⁷⁹ Par rapport à l'écriture classique, on fait un changement de paramètre $\theta = \lambda^k$

Qui s'annule pour $\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j^k$

La dérivée par k s'écrit :

$$\frac{\partial \ln[L(k, \theta)]}{\partial k} = \frac{N}{k} - \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^N Y_j^k \ln(Y_j) + \sum_{j=1}^N \ln(Y_j)$$

Qui s'annule pour $\frac{\sum_{j=1}^N Y_j^{\hat{k}} \ln(Y_j)}{\sum_{j=1}^N Y_j^{\hat{k}}} - \frac{1}{\hat{k}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln(Y_j)$

10 Bibliographie

10.1 Textes légaux

- [1] LOI n°2002-303 du 4 mars 2002 relative aux droits des malades et à la qualité du système de santé
- [2] LOI n° 2002-1577 du 30 décembre 2002 relative à la responsabilité civile médicale
- [3] Convention d'Oviedo, du 4 avril 1997, pour la protection des Droits de l'Homme et de la dignité de l'être humain à l'égard des applications de la biologie et de la médecine : Convention sur les Droits de l'Homme et la biomédecine
- [4] LOI n° 2011-1977 du 28 décembre 2011 de finances pour 2012, article 146

10.2 Documents techniques

- [5] BENETEAU G., Modèle de provisionnement sur données détaillées en Assurance non vie, Mémoire ENSAE, 2004
- [6] DENUIT M. et CHARPENTIER A., Mathématiques de l'assurance non-vie, Economica, 2005
- [7] DENUIT M., MARECHAL X., CLOSON J.P. Étude relative aux coûts potentiels liés à une éventuelle modification des règles du droit de la responsabilité médicale. Phase II : Développement d'un modèle actuariel et premières estimations. Bruxelles : Centre Fédéral d'Expertise des Soins de Santé (KCE) ; Juillet 2005. KCE Reports vol. 16B.
- [8] DINH N. A. et CHAU G., Mesures de provision cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie, Mémoire ENSAE, 2012
- [9] EFRON B. et TIBSHIRANI R.J., An introduction to the bootstrap, Chapman & Hall, 1993
- [10] JACQMIN C., Estimation de la super inflation dans les grands sinistres RC Auto, Rapport de stage Université Catholique de Louvain, 2006
- [11] JAZIRI S., Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire ISFA, 2011
- [12] KAPLAN E. L. et MEIER P., Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, Journal of the American Statistical Association, 1958

- [13] PARTRAT C. et al, Provisionnement technique en assurance non-vie, *Economica*, 2007
- [14] PLANCHET F. et THEROND P., Modèles de durée, *Economica*, 2006
- [15] PITREBOIS S., Étude de techniques IBNR modernes, Mémoire Université Catholique de Louvain, 1999
- [16] RENSHAW A. E., VERRAL R. J., A stochastic model underlying the chain-ladder technique, 1998
- [17] ROSE N., Provisionnement en assurance non-vie : Utilisation de modèles paramétriques censurés, Mémoire d'actuariat ISUP, 2009
- [18] SCHNIEPER, Separating true IBNR and IBNER claims. *ASTIN BULLETIN*, Vol. 21, No 1, 1991
- [19] TAYLOR G., McGUIRE G. et GREENFIELD A., Loss Reserving: Past, Present and Future, *ASTIN Colloquium*, Berlin, 2003
- [20] THABAULT N., La Responsabilité Civile professionnelle des médecins libéraux, Mémoire d'actuariat CNAM, 2002
- [21] ZEHNWIRTH B., The chain ladder technique – a stochastic model, *Claims Reserving Manual*, 1997

10.3 Autres documents

- [22] BISMUTH S. et al, « La loi Kouchner en médecine générale : le dossier d'abord ? », *La Revue Exercer*, Septembre/Octobre 2006 n°79 - 112,
- [23] GARREC R. Rapport d'information au Sénat sur la jurisprudence « Perruche », 2001
- [24] Livre Blanc de l'Assurance Responsabilité Civile, FFSA, 12 septembre 2000
- [25] Rapport IGAS, L'assurance en Responsabilité Civile Médicale, RM 2007-027P, février 2007
- [26] Rapport « Perruche » au Sénat, 20 décembre 2001
- [27] Rapport aux Ministres sur l'assurance responsabilité civile des professionnels de santé, 24 février 2011, M. Johanet

11 Notations

11.1 Notations pour le modèle de MÉDICALE DE FRANCE

Les formules sont identiques pour les différentes bases de sinistres. Les notations utilisées sont :

- j semestre de rattachement
 - p semestre de développement
 - n population de sinistre (1, 2 ou 3)
 - DebHistor début de l'historique des données
 - RèglCumNetRec règlements cumulés, nets de recours
 - ProvDos provision dossiers, constituée par les gestionnaire
 - ChgSin charge du sinistre
- $ChgSin_{j,n,p} = RèglCumNetRec_{j,n,p} + ProvDos_{j,n,p}$. Cette
- équation fonctionne aussi bien pour les sinistres en cours que clos.

11.2 Autres notations

Dans l'ensemble du document, sont désignés par :

- RCM Responsabilité Civile Médicale
- i année de rattachement (survenance, déclaration ou réclamation)
- j année de développement
- $Y_{i,j}$ règlement de sinistres rattachés à l'année i, payés la j^{ème} année après l'année de rattachement
- $R_{i,j}$ règlements cumulés de sinistres rattachés à l'année i, payés jusqu'à la j^{ème} année après l'année de rattachement, $R_{i,j} = \sum_{k=1}^j Y_{i,k}$
- $P_{i,j}$ provision des sinistres rattachés à l'année i, après j années de développement
- $C_{i,j}$ charge cumulée, $C_{i,j} = R_{i,j} + P_{i,j}$
- N dernier semestre observé
- $CU_{i,N} = \hat{C}_{i,N}$ charge ultime $CU_{i,N} = \hat{R}_{i,N}$
- $PS_{i,N-i+1}$ provisions statistiques rattachés à l'année i, après j années de développement $PS_{i,N-i+1} = CU_{i,N} - C_{i,N-i+1}$
- $PS_N = \sum_{i=1}^N PS_{i,N-i+1}$ provisions statistiques pour l'ensemble du portefeuille

12 Table des illustrations

Figure 1 - Répartition des sinistres par évènement et par exercice.....	28
Figure 2 - Taux de déclaration des sinistres par année de survenance.....	28
Figure 3 - Taux de réclamation des sinistres par année de survenance.....	29
Figure 4 - Durée de traitement des sinistres.....	30
Figure 5 - Répartition par durée de traitement.....	30
Figure 6 – Moyenne des règlements par exercice.....	31
Figure 7 - Montant moyen à la clôture par exercice.....	32
Figure 8 - Montant à la clôture par durée de traitement.....	32
Figure 9 - Évolution de la charge et Inflation.....	33
Figure 10 - Fonction de survie des sinistres - Portefeuille entier.....	37
Figure 11 - Comparaison des durées de survie Portefeuille entier / vs dossiers depuis 2003..	38
Figure 12 - Fonction de dépassement des règlements.....	39
Figure 13 - QQ-Plot fonction Log-normale - règlements positifs.....	40
Figure 14 - QQ-Plot fonction Weibull - règlements négatifs.....	40
Figure 15 - Triangle en base Réclamation.....	43
Figure 16 - Coefficients de passage (brut et extrapolés) - Méthode MÉDICALE DE FRANCE.....	48
Figure 17 - Test sur l'ajustement des coefficients de passage.....	55
Figure 18 - Ajustement des coefficients par une loi paramétrique.....	57
Figure 19 - Cadence de clôture des sinistres.....	60
Figure 20 - Expositions et clôtures futures.....	61
Figure 21 - Estimation du nombre passages en grave.....	61
Figure 22 - Problématique des triangles et des dates.....	65
Figure 23 - Forme générale des triangles de données de MÉDICALE DE FRANCE.....	68
Figure 24 - Ratio des coefficients (charges / règlements).....	72
Figure 25 - Ratio des charges ultimes estimées.....	72
Figure 26 - Différence des coefficients (Méthode Projected Case Estimare).....	74
Figure 27 - Paramètres lambda (Modèles factoriels).....	76
Figure 28 - Fonction de survie.....	88
Figure 29 - Fonctions de dépassement moyen – modèle censuré.....	89
Figure 30 – QQPlot – modèle censuré.....	90
Figure 31 – fonctions de survie estimées : Pareto et non paramétrique.....	94
Figure 32 - Règlements par année de développement de quelques sinistres.....	98
Figure 33 - Ajustement QQ-Plot sur les processus de règlements.....	98
Figure 34 - Règlements annuels estimés par le modèle à dynamique markovienne - back testing.....	100
Figure 35 - Coefficient modèle Mack et Dynamique Markovienne.....	100
Figure 36 - Ajustement QQ-Plot sur les processus de règlements cumulés.....	102
Figure 37 - Coefficient modèle Mack et Dynamique Markovienne sur règlements cumulés.....	103
Figure 38 - Règlements annuels – back testing sur modèle markovien sur règlements cumulés.....	104
Figure 39 - Simulation par back testing sur le modèle individuel.....	109
Figure 40 - Durée de traitement par année de survenance.....	112
Figure 41 - Répartition des charges, durée de traitement inférieure à 1 an.....	113
Figure 42 - Répartition des charges, durée de traitement entre 1 et 3 ans.....	113
Figure 43 - Répartition des charges, durée de traitement entre 3 et 5 ans.....	114
Figure 44 - Répartition des charges, durée de traitement supérieure à 5 ans.....	114
Figure 45 - Résultat de la régression pour la base Survenance.....	116

Figure 46 - Résultats des ajustements avec d'autres lois que la loi exponentielle sur la base survenance.....	116
Figure 47 - Correction automatisée des coefficients – Base Survenance	119
Figure 48 - Correction automatisée des coefficients – Base Réclamation.....	119
Figure 49 - Test d'indépendance des lignes - Modèle de Mack	120
Figure 50 - Test de relation conditionnelle - Modèle de Mack.....	121
Figure 51 - Test caractère aléatoire des résidus - Modèle de Mack.....	122
Figure 52 - Ecart entre charges reconstituées et constatées	122
Figure 53 - Ecart entre Règlements cumulés reconstitués et constatés.....	123
Figure 54 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur les triangles de charges.....	124
Figure 55 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur le portefeuille – triangles de charges	124
Figure 56 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur les triangles de règlements	125
Figure 57 - Distribution Bootstrap modèle de Mack sur le portefeuille- triangles de règlements	125
Figure 58 - Corrélation entre les résidus des facteurs de développement et des ratios.....	126
Figure 59 – Fonction de survie - Estimation non paramétrique	127
Figure 60 - Fonction de survie - loi log-normale	127
Figure 61 - Fonction de survie estimée sur tous les sinistres de plus de 1 096€ - maximisation du log-vraisemblance	128
Figure 62 - Fonction de survie estimée sur tous les sinistres de plus de 1 096€ - moindre carrés sur estimation non paramétrique.....	129
Figure 63 - ajustement paramétrique de la fonction de survie du processus d'États.....	129