Mémoire présenté devant

l'UFR de Mathématique et d'Informatique

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 30 septembre 2015

Par : Inès BURR

Titre: Impact d'un dispositif de réassurance non-proportionnelle sur le risque de réserve

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires signature

.....

Membres du jury de l'Unistra :

Invités :

Entreprise :

Nom : Prim'Act

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Jean-Christophe DUCROS, Frédéric PLANCHET

Signature :

Invité : Jean-Christophe DUCROS

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat

Résumé

Les récentes crises financières qui ont touché le monde assurantiel, ont mis à mal la stabilité et la solvabilité de certaines compagnies. En réponse à ces évènements, la Commission européenne a modifié l'ensemble des règlementations en vigueur pour donner naissance à la nouvelle Directive, **Solvabilité 2**. Elle résulte ainsi de la volonté d'améliorer la protection des assurés, en obligeant les sociétés à détenir un certain niveau de fonds propres, également connu sous le nom de SCR[1] (**capital de solvabilité requis**).

Dans ce nouveau contexte, la **réassurance non-proportionnelle** fait l'objet d'une attention accrue, puisqu'elle est désormais prise en compte dans les spécifications techniques de calcul de la **formule standard**. La Commission européenne laisse également la faculté aux compagnies d'affiner cette prise en compte en utilisant des paramètres qui leurs sont propres (les **USP**).

Ainsi, en estimant l'impact de ce type de dispositif sur le **SCR de réserve et de contrepartie**, les entreprises d'assurance non-vie sont capables d'évaluer leur bénéfice de réassurance. La réflexion de l'arbitrage est donc intensifiée, puisqu'à l'**arbitrage** du niveau de cession et de coût s'ajoute la question du niveau de gain en capital. Ce nouveau cadre règlementaire donne ainsi la possibilité aux cédantes **d'optimiser leur structure de réassurance** et de juger du prix d'acceptation d'un contrat. La réassurance non-proportionnelle n'apparaît donc plus comme un simple moyen de transfert de risques, mais également comme un outil efficace de gestion et d'optimisation du capital.

Ce mémoire a pour objectif de développer un modèle interne partiel, adaptable aux sociétés d'assurance non-vie disposant d'une réassurance non-proportionnelle et de proposer des solutions de réassurance optimisant le gain en capital et les objectifs stratégiques de l'entreprise.

Mots clés :

Réassurance non-proportionnelle, Solvabilité 2, formule standard, *Undertaking Specific parameters* (USP), Capital de Solvabilité Requis (SCR), risque de réserve, risque de contrepartie, arbitrage et optimisation de réassurance.

[1] *Solvency Capital Requirement*.

Abstract

The latest financial crisis, which affected the actuarial sector, jeopardised the stability and solvability of some companies. As a response to these events, the European Commission changed all the applicable regulations to create a new directive, **Solvency 2**. It was created to improve the insured parties' protection while forcing the firms to hold a certain level of equity, also known as the **Solvency Capital Requirement**.

In this new situation, **non-proportional reinsurance** is subject to more and more attention, as it is now taken into account in the technical specifications of the calculations for the **standard formula**. The European Commission also allows the companies to improve this inclusion by using their own parameters (**USP**).

By estimating the impact of this measures on the Solvency Capital Requirement for reserve and counterparty, non-life insurance companies are able to estimate the benefits of reinsurance. The arbitrage question is thus central, as the **arbitrage** of both sale price and cost, the question of how much capital will be gained is now crucial. This way, the new regulatory framework allows the ceding companies to estimate their profits, **to optimise their reinsurance structure** and to consider the contract's acceptance price. Non-proportional reinsurance is not just a mean to transfer risk anymore, but it is a useful tool to manage and optimise capital.

This report's objective is to develop a partial internal model, adaptable to non-life insurance companies equipped with non-proportional reinsurance. It also aims to offer reinsurance solutions that optimise capital gain and company's strategic objectives.

Key words :

Non-proportional reinsurance, Solvency II, standard formula, Undertaking Specific Parameters (USP), Solvency Capital Requirement (SCR), reserve risk, counterparty risk, arbitrage and optimizing reinsurance strategies.

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier mon référent d'entreprise, Monsieur Jean-Christophe DUCROS, consultant en actuariat chez Prim'Act, pour son suivi, ses conseils avisés et son soutien tout au long de la réalisation de mon mémoire. Je le remercie également pour son encadrement et le partage de son expérience professionnelle au cours des diverses missions que j'ai eu l'occasion de réaliser au sein de Prim'Act.

Par ailleurs, je tiens à exprimer ma grande gratitude à Monsieur Frédéric PLANCHET, associé chez Prim'Act, pour sa disponibilité, son expertise et ses corrections régulières tout au long de l'élaboration de ce mémoire. À cela s'ajoute des remerciements pour ses précieux conseils et ses nombreuses références en la matière.

Mes remerciements s'adressent également à mon référent universitaire, Monsieur Jean BERARD, pour sa disponibilité, son suivi continu et ses multiples conseils, ainsi qu'aux équipes pédagogiques du Diplôme Universitaire des actuaires de Strasbourg.

En dernier lieu, j'adresse des remerciements particuliers à toute l'équipe Prim'Act, ainsi qu'à leurs dirigeants pour le partage de leurs connaissances tout au long de ce stage et pour leur accueil chaleureux.

Sommaire

Résumé 3

Abstract 4

Remerciements 5

Sommaire 6

Introduction générale 9

PARTIE I : La réassurance : présentation et cadre règlementaire 11

Chapitre 1 : Présentation de l'activité de réassurance 12

I. Introduction à la réassurance 12

1. Définitions et caractéristiques 12

2. Les différents modes de réassurance 13

II. Les différents types de réassurance 14

1. La réassurance proportionnelle 14

2. La réassurance non-proportionnelle 15

III. Les captives de réassurance 16

1. Définitions et caractéristiques 16

2. Les compagnies captives dans le monde 17

Chapitre 2 : Les exigences quantitatives de solvabilité 18

I. Passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2 18

II. Du bilan comptable au bilan économique 19

1. Valorisation des actifs et des passifs 19

2. Provisions techniques 19

3. Fonds propres 20

III. Le principe du Capital de Solvabilité Requis 21

1. Le Capital de Solvabilité Requis 21

2. La probabilité de défaut sous Solvabilité 2 21

3. Calcul du SCR global par la formule standard : 22

4. Le Minimum de Capital Requis 23

Chapitre 3 : Le risque de réserve et de contrepartie 24

I. Le risque de souscription non-vie (SCRnl) 24

II. Le risque de réserve (SCRnl prem res) 24

III. Le risque de contrepartie (SCRdef) 25

1. La variance de la distribution des pertes V : 26

2. La perte en cas de défaut (LGD) : 27

PARTIE II : Modélisation statique 28

Chapitre 4 : Impact de la réassurance non-proportionnelle sur le risque de réserve 29

I. *Undertaking Specific Parameters* (*USP*) 29
1. *Les deux méthodes applicables au le risque de réserve 30*
2. *Les contraintes imposées par l'EIOPA 30*
3. *Les avantages procurés par l'utilisation d'USP 30*

II. La réassurance non-proportionnelle dans le modèle 31
1. *Les principes 31*
2. *Les notations 31*

III. Les hypothèses et les notations du modèle 32
1. *Les variables aléatoires de base 32*
2. *Les variables aléatoires composées 32*

IV. La détermination du besoin en capital 33
1. *Sans traité de réassurance 33*
2. *Avec traité de réassurance 35*

Chapitre 5 : Détermination des termes du modèle « interne-partiel » 37

I. Cas n° 1 : sinistralité asymptotiquement gaussienne 37
1. *Détermination de la loi de* R *37*
2. *Calcul de l'espérance et de la variance de* R *39*

II. Cas n° 2 : sinistralité log-normale 40
1. *Calculs préliminaires 40*
2. *Calculs de l'espérance et de la variance de C 41*

Chapitre 6 : Impact de la réassurance non-proportionnelle sur le bilan prudentiel 48

I. Bilan prudentiel : principes de bases 48

II. Bilan prudentiel et réassurance 49
1. *Les fonds propres 49*
2. *Best Estimate et probabilité de défaut 49*
3. *Marge pour risque 50*

Chapitre 7 : Présentation du portefeuille 52

I. Présentation de la captive de réassurance 52
1. *Les risques couverts 52*
2. *La notation du rétrocessionnaire 53*

II. La structure de rétrocession 53
1. *Ligne d'affaires : Dommage 53*
2. *Ligne d'affaires : Transport 53*
3. *Ligne d'affaires : Responsabilité Civile 53*

III. Analyse des données 53
1. *La sinistralité globale 54*
2. *La sinistralité par ligne d'affaires 56*

Chapitre 8 : Applications numériques 60

I. *Best Estimate* : approche statique 60
1. *Best Estimate brut 60*
2. *Best Estimate net de rétrocession 60*
3. *Best Estimate cédé 62*

II. Impact sur le besoin en capital et optimum de rétrocession 62
1. *Ligne d'affaires « Dommage »* 63
2. *Ligne d'affaires « Transport »* 66
3. *Ligne d'affaire « Responsabilité civile »* 67
4. *Impact sur le SCR de contrepartie* 69
5. *Impact sur le BSCR* 70

III. Impact sur le bilan prudentiel 73
1. *Les résultats de la captive de réassurance* 74
2. *Cas particuliers* 76

IV. Stratégies de rétrocession 78
1. *Arbitrages et stratégies* 78
2. *Pilotage des stratégies de rétrocession* 79

PARTIE III : Extension à un cadre dynamique 81

Chapitre 9 : Projection du bilan 82

I. Dynamique du bilan 82
1. *Les cadences d'écoulement des provisions* 83
2. *Mise en place de la récurrence* 83

II. Mise en application 84

Chapitre 10 : Aléa sur les provisions 86

I. Impact de l'aléa sur les indicateurs de solvabilité 86
1. *Étude du Best Estimate* 86
2. *Étude du coefficient de variation* 87
3. *Étude des différents SCR* 88
4. *Étude du besoin en capital* 89

II. Impact de l'aléa sur les postes du bilan 90

Conclusion 91

Bibliographie 93

Abréviations 95

Annexes 96

I. Distributions théoriques considérées 96
II. Démonstration de l'équation simplifiée de la marge pour risque 97
III. Test de Shapiro-Wilk 98
IV. Surface des *Best Estimate* par *LoB* 99
V. Surfaces zoomées 100
VI. Surface du SCR de contrepartie avec une note de B 102
VII. Matrice de corrélation du BSCR 103
VIII. Méthode de provisionnement : Chain-Ladder 103
IX. Gain en capital en fonction du nombre de sinistres 104

Introduction générale

Depuis quelques années, plusieurs crises financières ont frappé le monde de l'assurance et ont mis en péril la stabilité et la solvabilité de certaines compagnies. Elles ont ainsi poussé les autorités de régulations à prendre des décisions pour améliorer les réglementations en vigueur. C'est dans cette optique prudentielle que la nouvelle réforme « Solvabilité 2 » a vu le jour (*Cf.* Journal officiel de l'Union Européenne [2015]). Cette directive repose sur la philosophie suivante : définir un ensemble de principes encourageant les assureurs à s'engager dans une gestion des risques prudente et exiger de ces derniers, qu'ils soient suffisamment couverts en capital dans l'année à venir par le biais du Capital de Solvabilité Requis (SCR, *Solvency Capital Requirement*).

À moins de quatre mois de l'entrée en vigueur de Solvabilité 2[2], l'anticipation correcte des besoins en fonds propres et la mise en place des enjeux majeurs de cette réforme sont acquises pour un grand nombre d'entreprises. Cet objectif règlementaire étant atteint, les compagnies d'assurance cherchent maintenant à l'optimiser. Dans ce contexte, la réassurance, et plus précisément la réassurance non-proportionnelle, prend une toute nouvelle dimension.

Dans la pratique courante actuelle, la réassurance vise essentiellement à réduire la volatilité des sinistres et à rendre plus homogène la communauté de risques conservés par la cédante. Elle a également la capacité de réduire le besoin en capital. Cependant, cet avantage est limité à la réassurance proportionnelle et à hauteur, uniquement, de 50% des primes et de 15% des réserves (*Cf.* MARET G. [2015]).

Avec l'instauration de Solvabilité 2, une dimension supplémentaire est accordée à la réassurance non-proportionnelle et à son impact sur le niveau de fonds propres règlementaires, puisque les cédantes peuvent désormais comptabiliser intégralement ce transfert de risque (*Cf.* CABRIGNAC O. [2013]). Les spécifications techniques de calcul sont explicitées dans la nouvelle Directive. Afin de quantifier au mieux cet impact de réassurance, les compagnies ont également la possibilité de mettre en place des modèles intégralement ou partiellement (via les *Undertaking Specific Parameters*) internes.

La réassurance non-proportionnelle joue désormais un rôle significatif et devient un outil puissant de contrôle et de gestion du capital. L'étude de son impact sur les indicateurs de solvabilité et sur le bilan prudentiel permet aux entreprises d'assurance non-vie d'évaluer les gains liés à la mise en place d'un tel dispositif. À cela s'ajoute la question de l'arbitrage (Cf. SAUNIER M. [2014]). Auparavant, il était essentiellement effectué entre le niveau de cession du risque et le coût de celle-ci. Désormais, cette réflexion est intensifiée par l'introduction d'un nouveau facteur de décision : le gain en capital.

Solvabilité 2 donne ainsi la possibilité aux cédantes d'évaluer leur bénéfice, d'optimiser leur structure de réassurance et de juger du prix d'acceptation d'un contrat. Ces nouveaux objectifs et leurs mises en œuvre constituent ainsi le fil rouge de ce mémoire.

[2] L'entrée en vigueur de Solvabilité 2 est prévue pour le 1er janvier 2016.

Les risques et les contrats de réassurance étant très variables d'une compagnie d'assurance à une autre, ce mémoire a pour objectif de développer un modèle interne partiel, adaptable aux compagnies assurant des risques non-vie. À partir du nouveau contexte règlementaire européen, nous déterminerons les caractéristiques des traités de réassurance en excédent de sinistres optimisant le besoin en capital, ainsi que les stratégies de réassurance à adopter du point de vue de la cédante.

Ainsi, dans une première partie, nous présenterons l'activité de réassurance (*Cf.* BOULLIUNG F. [2014-2015]) ainsi que celle des captives, puisqu'elles feront l'objet de notre application pratique. Nous développerons ensuite le cadre règlementaire, dans lequel s'inscrit cette étude. À l'aube d'un changement majeur de règlementation, quelques rappels sur le passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2 seront également mentionnés. Puis, nous préciserons les principes de base de cette nouvelle réforme ainsi que les moyens de calculer le Capital de Solvabilité Requis pour les modules de risques de réserve et de contrepartie (*Cf.* Journal officiel de l'Union Européenne [2015]).

Une deuxième partie sera consacrée à la détermination du modèle, en présence et en l'absence de réassurance non-proportionnelle, et à son application pratique. Pour ce faire, nous développerons les moyens de calcul du coefficient de variation (*Undertaking Specific Parameters*) dans une hypothèse de sinistralité gaussienne et log-normale (Cf. PARTRAT C., BESSON J-L. [2005] et MECHAHOUGUI K. [2011]). La mise en application de cette partie théorique nous permettra ainsi d'analyser l'impact de la réassurance non-proportionnelle sur les SCR et sur le bilan prudentiel d'une captive de réassurance. Elle mettra alors en évidence la variation optimale du coût du capital en fonction des caractéristiques du contrat, ainsi que la stratégie de rétrocession à adopter par la cédante.

Enfin, une dernière partie consistera à élargir notre modèle à une approche dynamique, afin de s'approcher au mieux de la réalité actuarielle. En effet, la dimension temps est essentielle, puisqu'en réalité, les compagnies cédantes règlent les sinistres sur plusieurs exercices. De plus, dans cette approche, la mise en place d'un aléa sur le nombre de sinistres nous permettra de définir une marge d'erreur relative à notre modèle statique.

Partie I :

La réassurance : présentation et cadre règlementaire

Chapitre 1

Présentation de l'activité de réassurance

I. Introduction à la réassurance

D'un point de vue historique, la réassurance moderne apparaît en Allemagne vers la fin du XIXe siècle, au moment de la révolution industrielle. Ce n'est qu'au début des années 1980, que la réassurance devient une activité professionnelle à part entière, puisqu'elle est désormais prise en charge par des compagnies spécialisées, et non plus, par des assurances.

1. Définitions et caractéristiques

Selon l'APREF (Association des Professionnels de la Réassurance En France), la réassurance pourrait se définir de façon simpliste comme « l'assurance des assureurs ». En réalité, il s'agit d'un contrat par lequel une ou plusieurs sociétés spécialisées (les réassureurs ou les cessionnaires) prennent en charge partiellement ou totalement des risques souscrits par un assureur (la cédante) auprès de ses assurés. Par cette opération, le réassureur s'engage à rembourser à l'assureur une partie des sommes versées au titre des sinistres, en cas de réalisation du risque. En contrepartie, il perçoit une portion des primes versées par les assurés. Ainsi, les sociétés d'assurance se protègent contre les risques qui dépassent leur propre capacité et qui pourraient déstabiliser leur bilan et les entraîner ainsi vers l'insolvabilité. De la même façon, les réassureurs peuvent à leur tour se décharger d'une partie de leurs risques, auprès d'un ou plusieurs réassureurs, alors appelés rétrocessionnaires.

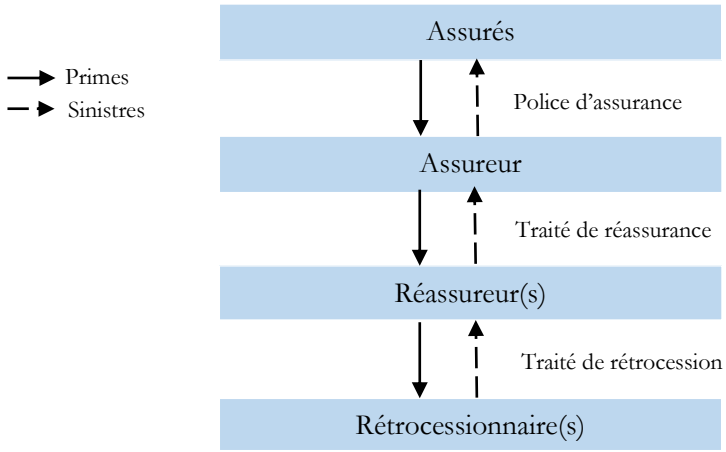

FIGURE 1 : Présentation schématique du principe de réassurance

a. La réassurance dans le monde

L'assurance mondiale représentait en 2012 un chiffre d'affaires de 3 500 milliards d'euros, selon l'APREF. Sur ce montant total, la part cédée représentait environ 180 milliards d'euros. À la différence de l'assurance, la réassurance est une activité essentiellement non-vie. En effet, cette branche représente à elle seule 72 % des primes cédées aux réassureurs.

b. Un marché nécessairement international

Le principe de mutualisation est au cœur de l'activité d'assurance et de réassurance. Il s'avère cependant beaucoup plus large pour un réassureur, car il opère dans le monde entier. À cette diversité géographique s'ajoute une diversité technique, liée à sa capacité à traiter des risques à la fois vie et non-vie. Cette position particulière permet ainsi aux réassureurs de porter certains risques que ne peuvent porter les assureurs.

2. Les différents modes de réassurance

Il existe trois principaux modes de réassurance : la réassurance facultative, obligatoire et facultative-obligatoire, connue sous le nom de FACOB.

a. La réassurance facultative

Il s'agit de la forme de réassurance la plus simple et la plus ancienne. Elle a la particularité de laisser le choix à l'assureur de céder, ou non, du risque au réassureur, et à ce dernier, d'accepter ou non ce transfert de risque. Elle est principalement utilisée pour couvrir de grands risques, dont les sommes assurées dépassent largement la capacité de souscription de la compagnie (ex : risques industriels) et/ou des risques exclus des traités de réassurance (ex : tremblements de terre).

b. La réassurance obligatoire

Elle établit des obligations réciproques, c'est-à-dire une obligation de céder tous les risques du portefeuille concerné pour l'assureur, et une obligation de les accepter pour le réassureur. Elle est couramment utilisée pour réassurer une communauté de risques (ex : ensemble d'un portefeuille de polices automobile). Dans ce contexte, le traité de réassurance se négocie en amont (généralement pour le 1er janvier de chaque année).

c. La réassurance facultative-obligatoire

En réassurance FACOB, l'assureur a la latitude de décider de l'opportunité de réassurer un risque et ce, dans des proportions acceptables. Le réassureur, quant à lui, n'a pas le choix et s'engage à accepter toutes les affaires que la cédante lui attribuera sous réserve que l'engagement ne dépasse pas un montant maximum fixé au départ.

II. Les différents types de réassurance

La rédaction de ce chapitre repose sur le cours d'introduction aux principes de réassurance de F. BOULLIUNG, intervenant à l'Université de Strasbourg et sur l'ouvrage intitulé « *La Réassurance, Approche technique* » (*Cf.* PARTRAT C. et BLONDEAU J. [2003]).
Les dispositifs de réassurance se classent en deux grandes catégories : la réassurance proportionnelle et non-proportionnelle.

1. La réassurance proportionnelle

Dans ce type de réassurance, la proportion des primes cédées au réassureur est égale à la proportion de charges assumées par celui-ci. La gestion des contrats et des sinistres étant totalement effectuée par la cédante, le réassureur lui verse en contrepartie une commission de réassurance, en pourcentage des primes cédées.

a. Traité en quote-part

Il s'agit de la forme de réassurance la plus simple. Le réassureur prend en charge une proportion identique des risques du portefeuille de l'assureur et reçoit en contrepartie la même proportion de primes.

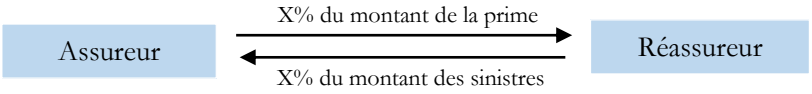

FIGURE 2 : Présentation schématique du principe de quote-part

b. Traité en excédent de plein

Avec cette forme de traité, l'assureur conserve, pour chaque risque, un montant appelé « plein de rétention ». Par conséquent, le réassureur n'intervient que si la somme à assurer dépasse ce montant et dans la limite de la capacité définie. La somme maximale alors garantie par l'assureur à ses assurés est appelée le « plein de souscription ». Ce montant est variable, puisque le niveau de rétention et de cession l'est aussi en fonction des risques.

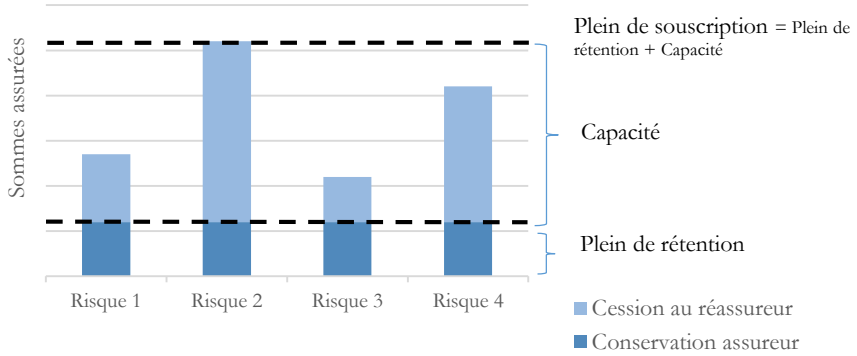

FIGURE 3 : Présentation schématique du principe d'excédent de plein

2. La réassurance non-proportionnelle

Contrairement à la réassurance proportionnelle, le réassureur d'un tel dispositif perçoit une prime unique annuelle et verse à la cédante un montant qui ne dépend pas uniquement de la survenance ou non du sinistre, puisque deux autres paramètres entrent en jeu : la priorité (F) et la portée (P). Le premier définit le seuil à partir duquel le réassureur commence à payer le sinistre et le second représente l'engagement maximum par sinistre du réassureur. Puisqu'il intervient dans la limite de la portée définie par le traité, le réassureur d'un tel dispositif a un rôle restreint au risque.

La structure de réassurance peut changer de priorité ou de portée, le but étant toujours de répondre aux besoins spécifiques de chaque cédante, sachant que :

- Une priorité (et une portée) basse(s) indique(nt) que la cédante souhaite couvrir la partie dite « travaillante » de son portefeuille. En d'autres termes, elle se couvre principalement contre l'augmentation de fréquence, ce qui lui permet de maîtriser son résultat.
- Une priorité élevée indique que la cédante se protège essentiellement contre les risques rares et coûteux, afin de protéger son résultat.

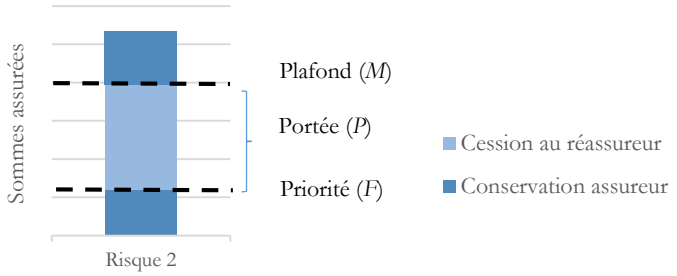

FIGURE 4 : Présentation schématique de la réassurance non-proportionnelle

a. *Excédent de sinistres*

Les traités en excédent de sinistres, couramment notés <*Portée*>*XS*<*Priorité*>, peuvent être décomposés en deux grandes catégories, selon la nature de l'événement défini dans le traité : *XS* par risque ou *XS* par événement.

Dans un traité en *XS* par risque, le réassureur s'engage à payer, dans une période déterminée, un montant inférieur ou égal à la portée, à chaque fois qu'une police est sinistrée par un montant supérieur à la priorité.
Les traités en *XS* par événement n'interviennent qu'après les éventuelles réassurances proportionnelles ou *XS* par risque. Le réassureur s'engage alors à payer un événement faisant intervenir plusieurs polices sinistrées du fait d'une même cause, limité dans l'espace et dans le temps.

C'est dans le cadre particulier des traités en excédent de sinistres que sera développée la problématique de ce mémoire. Des précisions concernant ce dispositif de réassurance seront apportées dans les chapitres suivants.

b. Excédent de pertes

L'excédent de pertes, ou *Stop-Loss,* intervient lorsque l'assureur cherche à se prémunir contre les mauvais résultats (c'est-à-dire, les ratios S/P[3] élevé), non plus en s'attaquant aux montants des sinistres, mais aux résultats eux-mêmes. Le réassureur s'engage alors à protéger, à hauteur d'un certain montant, les résultats dépassant le ratio S/P cible au-delà duquel l'assureur est obligatoirement en perte.

III. Les captives de réassurance

L'application pratique de cette étude se base sur les résultats d'une captive de réassurance subordonnée à un groupe, qui n'est pas actif dans le domaine de l'assurance. Elle a ainsi pour objectif d'assurer les risques de sa maison mère et de ses filiales.

1. Définitions et caractéristiques

Une captive de réassurance est un assureur privé, appartenant généralement à un grand groupe, et qui a pour principale activité de réassurer une partie des risques de sa maison mère. En effet, en contrepartie d'une prime versée par l'assureur direct (ou assureur fronteur), la captive de réassurance réassure une partie des risques du groupe. La captive agit donc en tant que réassureur de l'assureur direct et peut, à son tour, rétrocéder une partie des risques assumés sur le marché de la réassurance (via un rétrocessionnaire).

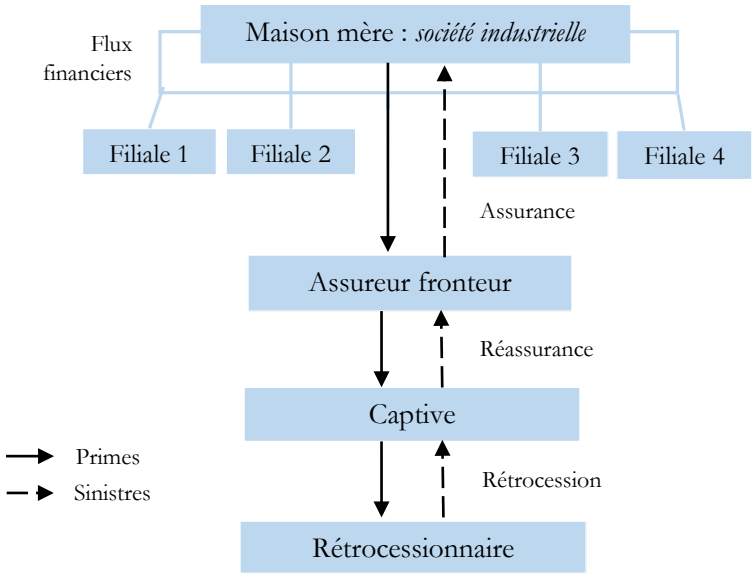

FIGURE 5 : Présentation schématique d'une captive de réassurance

[3] S/P : ratio de sinistres à primes calculé par l'assureur, afin de vérifier la rentabilité d'une police d'assurance. Celle-ci est considérée comme rentable, lorsque le ratio est inférieur à 100%.

2. Les compagnies captives dans le monde

A l'heure actuelle, environ 4400 captives sont actives à travers le monde. Un tier d'entre elles sont établies aux Bermudes pour des raisons fiscales. En Europe, les principaux lieux d'implantation sont Dublin et le Luxembourg.

La constitution d'une captive présente au moins deux avantages pour le groupe qui la crée : le premier est de diminuer la charge globale des frais d'assurance. Le second est de profiter de la souplesse fiscale et réglementaire de certaines domiciliations, permettant de constituer des provisions pour sinistres en franchise d'impôt.

Chapitre 2

Les exigences quantitatives de solvabilité

Les compagnies d'assurance se différencient des autres entreprises par l'incertitude de leurs résultats due aux aléas de la sinistralité et à l'inversion de leur cycle de production. L'assureur s'étant engagé à verser une indemnité en cas de survenance d'un sinistre au cours d'une période, il lui est nécessaire de détenir un niveau de fonds propres suffisant pour faire face à ses obligations. De ce fait, les sociétés d'assurance sont soumises à des directives particulières (*Cf.* Journal Officiel de l'Union Européenne [2009] et [2015]).

I. Passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2

Afin de contrôler la capacité des entreprises d'assurance à faire face à leurs engagements, des règlementations européennes sont mises en place depuis les années 1970. En 2002, elles sont remplacées et mises à jour par la réglementation actuelle : Solvabilité 1. Cette réforme impose à l'ensemble des sociétés d'assurance de constituer un capital, appelé marge de solvabilité. Elle permet ainsi de faire face aux aléas de l'activité et induit une meilleure protection de l'assuré. Cependant, du fait des exigences relativement limitées et des insuffisances de cette réforme, l'Union Européenne a voté la mise en place d'une nouvelle directive, dénommée Solvabilité 2, au 1er janvier 2016.

Inspirée des réformes du secteur bancaire, Solvabilité 2 s'appuie sur trois piliers complémentaires : les exigences quantitatives **(pilier 1)**, les exigences qualitatives et les activités de contrôle **(pilier 2)**, ainsi que les exigences en matière d'informations prudentielles et de publication **(pilier 3)**. L'objectif de cette nouvelle réglementation est de corriger les insuffisances de Solvabilité 1 et d'améliorer ainsi la protection des assurés. Pour ce faire, elle tient compte de l'ensemble des risques économiques auxquels sont exposées les entreprises d'assurance.
Le principal changement apparaît dans le calcul du capital règlementaire. Afin d'honorer les engagements des compagnies d'assurance vis-à-vis de leurs clients, cette nouvelle réforme impose deux niveaux de capital : le Capital de Solvabilité Requis (SCR, en anglais *Solvency Capital Requirement*) et le Minimum de Capital Requis (MCR, en anglais *Minimum Capital Requirement*).

Afin de faciliter la mise en place de Solvabilité 2 et de mesurer son impact économique, la directive européenne a fait l'objet de plusieurs études d'impact (QIS, *Quantitative Impact Studies* et LTGA pour les branches longues, *Long Term Guarentee Assessment*). Ces études ont été lancées par la Commission Européenne et réalisées en pratique par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Autorithy*). Depuis la parution du Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission, complétant la Directive 2009/138/CE, les compagnies d'assurance effectuent régulièrement des mises en œuvre opérationnelles, afin de s'entraîner à l'entrée en vigueur de Solvabilité 2, prévue pour le 1er janvier 2016 (*Cf.* ACPR).

II. Du bilan comptable au bilan économique

Solvabilité 2 vise notamment à adapter le niveau d'exigence minimale de fonds propres aux risques réels auxquels les organismes assureurs sont exposés. C'est pourquoi, le bilan évolue d'une vision comptable à une vision économique, comme le reflète le schéma ci-dessous.

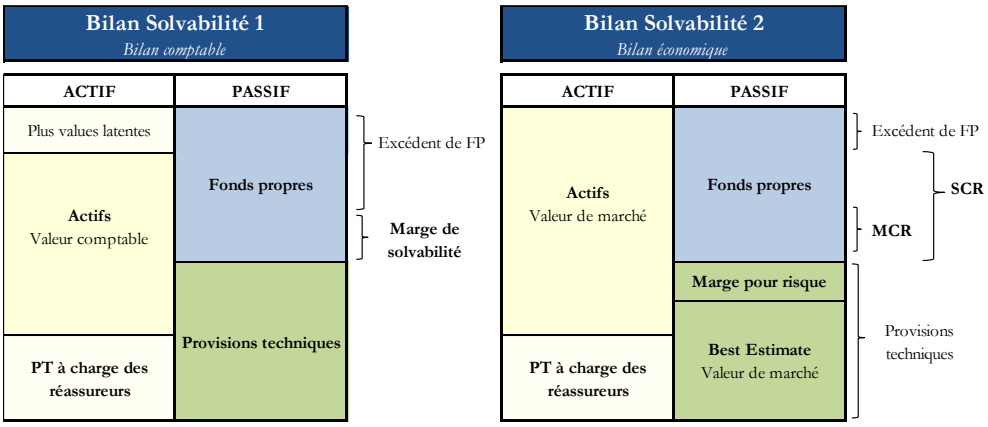

FIGURE 6 : Évolution du bilan entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2

1. Valorisation des actifs et des passifs

L'article 75 de la Directive 2009/138/CE impose d'estimer les actifs et les passifs en utilisant une approche économique et cohérente avec les données de marché (appelée également l'estimation en valeur de marché).

2. Provisions techniques

Les provisions techniques (PT) sont également évaluées de façon cohérente avec le marché, conformément à l'article 75 de la Directive 2009/138/CE. Elles sont plus précisément calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs (*BE*, en anglais *Best Estimate*) et d'une marge pour risque (*RM*, en anglais *Risk Margin*).

$$PT = BE + RM$$

a. Best Estimate

L'article 77 de la Directive 2009/138/CE retient comme définition : « La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent […], estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents ».

Cette estimation s'effectue à partir d'un triangle de liquidation[4] (cumulé ou décumulé selon les cas). Il s'agit de prévoir la partie inférieure du triangle, qui est inconnue. Pour ce faire, plusieurs

[4] Triangle de liquidation : mode de représentation de la liquidation des sinistres utile à leur traitement comptable et à l'application de méthodes actuarielles pour l'estimation des IBNR ou des coûts ultimes de sinistres par exercice de survenance. (*Source* : FFSA-GEMA)

méthodes existent, comme par exemple, celle de Chain-Ladder, de Bornhuetter-Ferguson, ou encore de London-Chain,… .Puis, il faut ensuite agréger et actualiser les résultats en diagonale, représentant les montants payés par arrêté comptable. L'addition de toutes ces valeurs permet alors d'obtenir le *Best Estimate*, comme l'indique la figure ci-dessous.

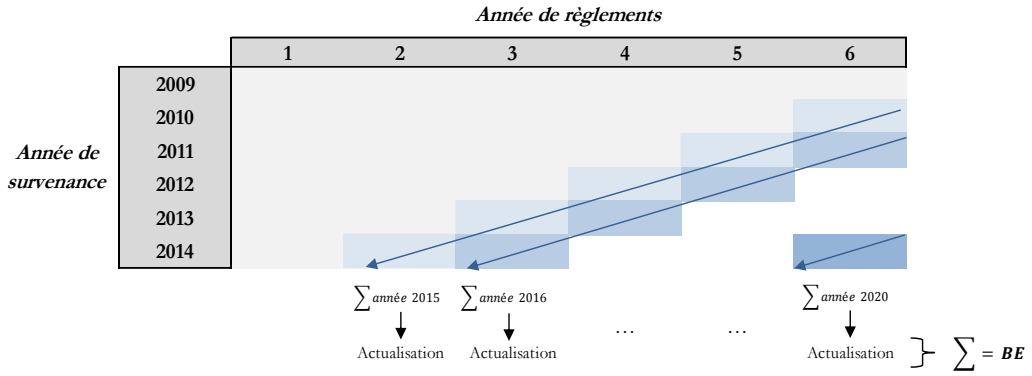

FIGURE 7 : Calcul du *Best Estimate* à partir d'un triangle de cash-flow

L'actualisation des paiements est effectuée en se basant sur les courbes des taux communiquées par l'EIOPA : courbes des taux SWAP[5].

b. Marge pour risque

La marge pour risque ou Risk Margin (RM) s'ajoute au *Best Estimate* et permet ainsi d'intégrer une marge de prudence supplémentaire dans le calcul des provisions techniques (Cf. Article 77-3 de la Directive 2009/138/CE). Elle s'interprète comme le montant de provisions complémentaires calculé de façon à ce que le montant total de provisions inscrit au bilan corresponde à celui qu'exigerait une entité de référence pour honorer les engagements à la charge de l'assureur.

3. Fonds propres

Les fonds propres représentent les ressources à la disposition de la compagnie. Sous Solvabilité 2, les fonds propres économiques sont composés de fonds propres de base et de fonds propres auxiliaires. Les premiers sont égaux à la différence entre les actifs et les passifs (où les passifs représentent uniquement les provisions techniques). Les seconds sont des éléments de fonds propres qui peuvent être appelés dans le but d'absorber des pertes.

[5] http://archive.eiopa.europa.eu/

III. Le principe du Capital de Solvabilité Requis

Le pilier 1 de Solvabilité 2 constitue la partie centrale de cette réforme. Il introduit les notions de niveau de Capital de Solvabilité Requis (SCR, *Solvency Capital Requirement*) et de Minimum de Capital Requis (MCR, *Minimum Capital Requirement*), permettant d'estimer les besoins de solvabilité.

1. Le Capital de Solvabilité Requis

a. *Définition*

Le SCR représente une exigence de capital. En d'autres termes, il correspond au capital économique dont a besoin une compagnie d'assurance (ou de réassurance) pour limiter la probabilité de faire défaut à un an à 0.5%, c'est-à-dire en moyenne à une seule occurrence tous les 200 ans. Le SCR est basé sur le profil de risque de l'organisme. Il est ainsi le seul indicateur à prendre en compte les risques réels auxquels sont exposées les sociétés d'assurances. Ce besoin en capital peut être calculé de plusieurs façons : à partir de la formule standard, d'un modèle interne (global ou partiel), ou d'une combinaison de ces deux méthodes.

b. *Formule standard versus modèle interne*

La formule standard est la méthode par défaut et est imposée par la Directive à l'ensemble des compagnies d'assurance. Même si une société choisit un modèle interne pour évaluer son SCR, elle devra comparer ses résultats avec ceux obtenus par l'application de la formule standard. Ce type de démarche repose sur des hypothèses et des méthodes fixées par la Directive. Elle présente l'avantage de la simplicité et d'un traitement harmonisé pour toutes les sociétés. Néanmoins, elle ne permet pas de refléter les risques propres à l'organisme et peut conduire à des décisions inadéquates.

De ce fait, la Directive permet également aux organismes d'utiliser deux autres méthodes d'évaluation de leur SCR : le modèle interne partiel (par exemple, via les *Undertaking Specific Parameters,* dont des explications plus détaillées seront effectuées par la suite) ou le modèle interne total. Ces modèles présentent l'avantage certain de tenir compte des risques inhérents à l'activité. Cependant, il nécessite l'approbation préalable des Autorités de Contrôle et suppose un coût non-négligeable.

2. La probabilité de défaut sous Solvabilité 2

De manière générale, le défaut est défini comme la situation, où l'actif disponible ne permet plus de faire face aux passifs exigibles. La condition de solvabilité est alors :

$$Fonds\ propres = Actifs - Passifs > 0$$

Sous Solvabilité 2, la condition de solvabilité est plus restrictive, puisque toutes les sociétés d'assurance devront posséder un montant de fonds propres au moins égal à leur SCR. Avec cette nouvelle réforme, la condition de solvabilité devient :

$$Fonds\ propres = Actifs - Passifs > SCR$$

Cette exigence en fonds propres, plus importante que pour une entreprise classique, est liée d'une part, à la nature même de l'activité d'assurance, risquée et aléatoire, et d'autre part, au souhait du régulateur d'éviter la faillite d'une compagnie d'assurance, afin, *in fine*, de préserver l'intégrité des assurés.

De nombreux risques peuvent avoir un impact sur la solvabilité de la compagnie d'assurance, comme par exemple : une mauvaise gestion du risque de souscription, de l'actif, du programme de réassurance, des provisions, une défaillance du personnel et/ou des systèmes. Le SCR permet donc d'absorber les pertes imprévues et significatives liées à de tels risques. La Directive Solvabilité 2 propose ainsi une mesure précise de ces différents risques, afin d'obtenir une probabilité de défaut très faible (0.5%) sur un horizon fixé (un an).

3. Calcul du SCR global par la formule standard :

Sous Solvabilité 2, le calcul du SCR se définit de la façon suivante (*Cf.* ACPR) :

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} - Adj$$

Où,

$BSCR$: (*Basic Solvency Capital Requirement*) représente le SCR de base ;

SCR_{Op} : représente le chargement en capital lié au risque opérationnel ;

Adj : représente les ajustements, liés à la réduction des pertes futures par le biais des impôts différés ou par la participation aux bénéfices futurs à distribuer aux assurés.

Le SCR est calculé selon une approche modulaire, comme l'indique le schéma ci-dessous.

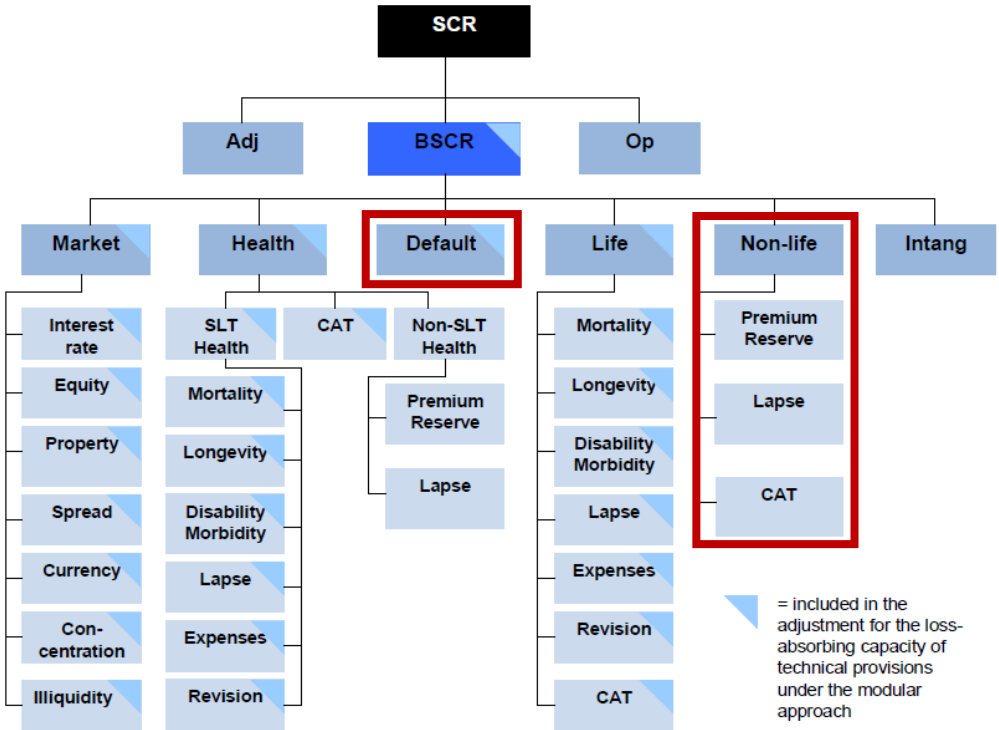

FIGURE 8 : Cartographie modulaire des risques dans Solvabilité 2 (*Source* : ACPR)

Comme indiqué sur le schéma ci-dessus, le BSCR tient compte d'une multitude de risques auxquelles doit faire face une compagnie d'assurance dans son exploitation courante. Il est composé des six modules de risque suivants : le risque de souscription vie, non-vie, santé, le risque de marché, le risque de contrepartie et le risque d'actifs intangibles. Seul le risque opérationnel ne fait pas partie du BSCR.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons essentiellement à deux modules de risques : le risque de souscription non-vie (plus particulièrement, le risque de réserve) et le risque de contrepartie, indiqués par les encadrés rouges sur la figure ci-dessus.
Pour tenir compte de la faible probabilité de réalisation simultanée de tous ces modules, la formule standard introduit des corrélations entre ces facteurs de risques et permet à la compagnie d'assurance de constater des bénéfices de diversification.

Le BSCR se calcule alors de la façon suivante, afin d'agréger l'ensemble de ses risques (*Cf.* Journal Officiel de l'Union Européenne [2015], article 87) :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} * SCR_i * SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

Où,

- SCR_i : représente le SCR du module de risque *i* ;
- $Corr_{ij}$: représente le coefficient de la matrice de corrélation entre les modules de risques *i* et *j* ;
- $SCR_{int.}$: représente l'exigence de capital pour les risques liés aux immobilisations incorporelles (ce SCR est supposé nul dans cette étude).

Afin de refléter au mieux la réalité économique et de tenir compte de la possibilité pour la compagnie d'assurance de réaliser un résultat négatif sur un exercice comptable, deux derniers ajustements sont effectués pour obtenir le SCR final :

- **L'impôt différé :** imputation de la perte au résultat fiscal, ce qui conduit dans le futur à payer moins d'impôt.
- **La participation aux bénéfices :** transfert d'une partie de la perte aux assurés, ce qui conduit à verser moins de participations aux bénéfices que ce qui était prévu initialement.

4. Le Minimum de Capital Requis

Encore connu sous le nom de MCR (*Minimum Capital Requirement*), le minimum de capital requis est la deuxième exigence de capital définie dans la Directive Solvabilité 2. Il s'agit du niveau minimal de fonds propres que l'entreprise doit détenir en permanence, sous peine d'une sanction immédiate de l'autorité de contrôle. Le MCR n'étant pas étudié dans ce mémoire, aucun détail de calcul ne sera effectué.

Chapitre 3

Le risque de réserve et de contrepartie

Ce mémoire se focalise sur l'impact de la réassurance non-proportionnelle sur deux modules de risque : le risque de souscription non-vie, et plus particulièrement le risque de réserve ainsi que le risque de contrepartie. De ce fait, ce chapitre a pour objectif de détailler les caractéristiques et les calculs de ces modules.

I. Le risque de souscription non-vie (SCR_{nl})

Le risque de souscription non-vie regroupe l'ensemble des risques pris par un assureur lors de la distribution de contrats d'assurance non-vie. Il est composé de trois sous-modules : le risque de primes et de réserve, le risque de rachat et le risque de catastrophe.

- **Le risque de primes et de réserve :**
  - **Le risque de réserve :** correspond au risque de sous-provisionnement. Il réside ainsi dans la sous-évaluation des engagements pris envers les assurés.
  - **Le risque de primes :** (supposé nul dans cette étude) correspond au risque de sous-tarification. Il représente le risque que le coût des sinistres soit supérieur à celui prévu initialement.

- **Le risque de rachat :** (supposé nul dans cette étude) concerne essentiellement les contrats pluriannuels. En assurance non-vie, il s'agit majoritairement de contrats annuels. Le risque de résiliation est donc très faible.

- **Le risque de catastrophe :** (supposé nul dans cette étude) prend en compte les évènements extrêmes, qui ne surviennent que très rarement et qui n'ont pas été pris en compte dans le risque de primes et de réserve.

II. Le risque de réserve ($SCR_{nl\ prem\ res}$)

Ce calcul est défini dans l'article 115 du règlement délégué 2015/35/CE, comme étant :

$$SCR_{nl\ prem\ res} = 3.\sigma_{nl}.V_{nl}$$

Où,

σ_{nl} : représente le coefficient de variation du risque de primes et de réserve ;

V_{nl} : représente la mesure de volume pour le risque de primes et de réserve en non-vie.

Les valeurs du coefficient de variation σ_{nl} sont précisées dans l'annexe II du règlement délégué (UE) 2015/35 pour l'ensemble des segments de l'assurance non-vie. Cependant, dans ce mémoire, nous nous y intéresserons en présence ainsi qu'en l'absence de réassurance. Pour modéliser cet impact, nous calculerons des *USP* (*Undertaking Specific Parameters*) sous des hypothèses de sinistralité gaussienne et log-normale (*Cf.* Partie II).

V_{nl} est défini dans l'article 116 de la Directive 2015/35/CE, comme étant la somme des mesures de volume pour le risque de primes et de réserve de l'ensemble des lignes d'affaires d'assurance non-vie (détaillé en annexe II de la Directive).

Pour une *Line of Business* (LoB) quelconque, le volume se calcule comme suit :

$$V_{LoB} = \left(V_{(prem,LoB)} + V_{(res,LoB)}\right).(0{,}75 + 0{,}25.DIV_{LoB})$$

Où,

$V_{(prem,LoB)}$: représente la mesure de volume pour le risque de primes de la LoB ;

$V_{(res,LoB)}$: représente la mesure de volume pour le risque de réserve de la LoB ;

DIV_{LoB} : représente le facteur de diversification géographique de la LoB.

Par souci de simplification, on supposera que $V_{(prem,LoB)}$ et DIV_{LoB} sont des données exogènes, dont les valeurs sont les suivantes :

$$V_{(prem,LoB)} = 0$$
$$DIV_{LoB} = 100\%$$

On obtient alors :

$$V_{nl} = \left(V_{(res,LoB_1)}, \dots, V_{(res,LoB_n)}\right)$$

Sachant que $V_{(res,LoB)} = BE_{(net\ de\ réassurance,LoB)}$

III. Le risque de contrepartie (SCR_{def})

Ce module représente le risque qu'une contrepartie n'honore pas ses engagements dans les conditions initialement prévues. En d'autres termes, il reflète les pertes possibles résultant d'un défaut ou d'une baisse de la notation des contreparties, au cours des douze prochains mois. La Directive sépare les expositions au risque de contrepartie en deux catégories appelées expositions de type 1 et expositions de type 2. Le risque de défaut lié aux contrats de réassurance est une exposition de type 1.

Pour respecter le cadre de notre étude, nous nous intéresserons donc uniquement aux expositions de type 1. Nous limiterons également ce risque de défaut à une seule contrepartie, ce qui simplifiera les calculs présents dans le règlement délégué 2015/35.

Le capital règlementaire requis pour ce module est calculé comme suit (*Cf.* Journal officiel de l'Union Européenne [2015], article 200) :

$$SCR_{def,1} = \begin{cases} 3 . \sqrt{V} & \Leftrightarrow & \sqrt{V} \leq 7\,\% . LGD \\ 5 . \sqrt{V} & \Leftrightarrow & 7\,\% . LGD < \sqrt{V} \leq 20\,\% . LGD \\ LGD & \Leftrightarrow & \sqrt{V} > 20\,\% . LGD \end{cases}$$

Où,

$\sigma = \sqrt{V}$: représente l'écart-type de la distribution des pertes des expositions de type 1 ;
V : représente la variance de la distribution des pertes des expositions de type 1 ;
LGD : représente la perte en cas de défaut pour une exposition de type 1.

1. La variance de la distribution des pertes V :

Calculer la variance de la distribution des pertes des expositions de type 1 pour une seule contrepartie revient à considérer que cette distribution suit une loi de Bernoulli[6] avec une probabilité de faire défaut de PD. On a donc par définition :

$$V = PD . (1 - PD) . LGD^2$$

Où,

LGD : représente la perte en cas de défaut pour une exposition de type 1, dont le calcul est développé ci-dessous.

La probabilité de défaut (PD) dépend de la notation attribuée par les agences en charge de les publier. Le tableau suivant est issu de l'article 199 du règlement délégué (UE) 2015/35.

Échelon de qualité de crédit	0	1	2	3	4	5	6
Notation	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC ou moins
Probabilité de défaut PD_i	0,002%	0,01%	0,05%	0,24%	1,20%	4,20%	4,20%

TABLEAU 1 : Probabilité de défaut en fonction de la notation

[6] Détail en annexe I.

2. La perte en cas de défaut (LGD) :

Selon l'article 192 du règlement délégué 2015/35, la perte en cas de défaut sur un contrat de réassurance se calcule de la façon suivante :

$$LGD = Max\,[\,50\%\,.\,(RE_{coverables} + 50\%.\,RM_{re}) - F.\,Collateral\;\;;\;\;0\,]$$

Où,

$RE_{coverables}$	: représente la meilleure estimation des montants recouvrables découlant du contrat de réassurance. En d'autres termes, elle représente le $BE_{cédé}$;
RM_{re}	: représente l'effet d'atténuation du risque résultant du contrat de réassurance ;
$Collateral$	: représente la valeur pondérée des sûretés concernant le contrat de réassurance ;
F	: représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté.

Pour des raisons de simplification du processus de calcul, nous supposerons lors de l'étude que les paramètres suivants sont nuls :

$$\begin{cases} RM_{re} = 0 \\ Collateral = 0 \end{cases}$$

La perte en cas de défaut n'est alors rien d'autre que :

$$LGD = Max\,[\,50\%\,.\,BE_{cédé}\;\;;\;\;0\,]$$

Partie II :

Modélisation statique

Chapitre 4

Impact de la réassurance non-proportionnelle sur le risque de réserve

L'objectif de cette approche statique est de développer un modèle permettant de déterminer le coefficient de variation et le besoin en capital, en présence ainsi qu'en l'absence de réassurance non-proportionnelle. Il s'agit ainsi d'observer l'impact de celle-ci en fonction de ses caractéristiques.

Ce premier chapitre définit l'ensemble des concepts et des notations utilisées par la suite dans le modèle.

I. *Undertaking Specific Parameters* (*USP*)

Dans le cadre de la formule standard, la méthode de calcul du capital règlementaire pour le risque de réserve est relativement simple. Elle s'inspire en effet d'un modèle log-normal et se calcule à partir d'un coefficient de variation (σ). Rappelons que ce SCR s'exprime alors sous la forme suivante[7] (*Cf.* Article 115 du règlement délégué 2015/35/CE) :

$$SCR_{nl\ prem\ res} = 3.\sigma_{nl}.V_{nl}$$

L'annexe II du règlement délégué 2015/35 (*Cf.* Journal Officiel de l'Union Européenne [2015]) propose, pour chaque ligne d'affaires, des valeurs de coefficient de variation (σ_{nl}). Ces facteurs de volatilités sont calculés sur un panel de sociétés membres de l'EEA (*European Economic Area*), et reflètent ainsi une moyenne de marché.

Pour ce risque, l'EIOPA laisse toutefois la possibilité aux compagnies d'assurance de remplacer, dans la formule standard, le paramètre σ par un paramètre qui leur est propre (*Undertaking Specific Parameters*). Cela permet à la compagnie d'assurance d'avoir une représentation plus appropriée à son profil de risques sous-jacents (*Cf.* EIOPA [2015]).

Dans notre approche, cela consiste alors à déterminer les coefficients de variation spécifiques à l'entité, pour chacune des lignes d'affaires.

[7] σ_{nl} représente le coefficient de variation et V_{nl} le volume de Best Estimate.

1. Les deux méthodes applicables au le risque de réserve

Le calibrage du facteur de volatilité pour le volume de provision peut être réalisé selon deux méthodes (Cf. MAXWELL C. [2013]) :

- **La méthode log-normale :** elle consiste en la spécification d'un modèle paramétrique. (Cf. Annexe XVII – *Méthode du risque de réserve n°1* - Journal Officiel de l'Union Européenne [2015]).

- **La méthode des triangles :** cette méthode, également connue sous le nom de modèle de Merz-Wüthrich, consiste en l'évaluation du *Best Estimate* par la méthode de Chain-Ladder/Mack (Cf. Annexe XVII – *Méthode du risque de réserve n°2* - Journal Officiel de l'Union Européenne [2015]).

Dans le cadre de cette étude, nous développons un modèle reposant sur la méthode log-normale.

2. Les contraintes imposées par l'EIOPA

L'utilisation d'une méthode de calibrage spécifique nécessite un certain nombre de contraintes, qui ont été définies par l'EIOPA (Cf. Annexe XVII, Journal Officiel de l'Union Européenne [2015]) :

- La qualité des données selon les critères « Solvabilité 2 », c'est-à-dire, l'exhaustivité, la précision et la pertinence ;
- L'homogénéité des données ;
- La profondeur de l'historique, les données doivent, au minimum, être disponibles sur cinq exercices consécutifs ;
- La justification de la méthode employée (justifier le fait que la méthode retenue est la plus adaptée) ;
- L'approbation préalable des Autorités de Contrôle, pour être qualifié de modèle « interne partiel ».

Malgré l'ensemble de ces contraintes, l'EIOPA encourage les compagnies d'assurance à utiliser un modèle avec l'USP.

3. Les avantages procurés par l'utilisation d'USP

Dans le cadre du risque de primes et de réserve, les USP proposent une alternative à la formule standard et au modèle interne. Cette possibilité reste moins complexe et moins coûteuse à mettre en œuvre qu'un modèle interne, et permet de prendre en compte partiellement les spécificités de la compagnie.

Ainsi, les entreprises d'assurance présentent une meilleure estimation du risque encouru et obtiennent un calibrage de leurs besoins en fonds propres mieux ajusté à la réalité de leurs risques, sans cependant, remettre en cause les hypothèses du modèle standard. Ceci permet, *in fine,* d'optimiser le processus de gestion des risques de la compagnie.

II. La réassurance non-proportionnelle dans le modèle

Le type de couverture le plus courant en réassurance non-proportionnelle est l'excédent de sinistres, également appelé *XS* par risque. Cette couverture a pour objectif de couvrir la cédante, pour chaque risque, au-delà d'un certain montant, appelé priorité, et dans une certaine limite, appelée portée. Le modèle développé dans ce mémoire propose donc une analyse des impacts de la mise en place d'un tel dispositif sur les indicateurs de solvabilité.

1. Les principes

Dans ce modèle, la cédante souscrit un traité *XS* par risque, couramment noté $F\ XS\ P$. Lors de l'approche statique, nous supposerons que les paramètres du traité de réassurance n'évoluent pas au cours du temps. En d'autres termes, nous ferons l'hypothèse d'une portée (P) et d'une priorité (F) constantes. Il existe alors trois types de sinistres pouvant affecter la cédante et donc, ce type de traité de réassurance.

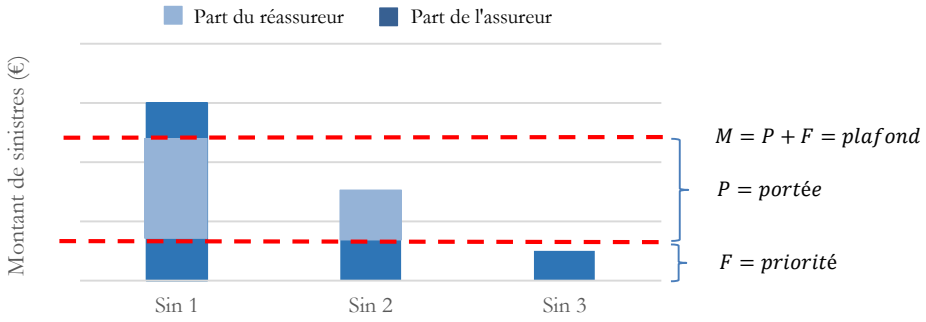

FIGURE 9 : Montants des sinistres affectant la réassurance non-proportionnelle

L'implication de la cédante dans le remboursement du sinistre est variable, puisqu'elle dépend du montant du sinistre et des paramètres du traité :

- Sinistre 1 : le sinistre traverse le plafond de réassurance. L'assureur prend à sa charge la priorité et le montant dépassant le plafond. Ainsi, il assure un montant de sinistres de $(X_i - P)$.
- Sinistre 2 : le sinistre dépasse le montant de la priorité sans traverser le plafond, l'assureur prend donc à sa charge la priorité (F).
- Sinistre 3 : le sinistre ne traverse pas la priorité, l'assureur doit payer la totalité du sinistre (X_i).

2. Les notations

Comme indiqué précédemment, dans cette approche, les paramètres du traité sont considérés constants au fil du temps.

- F : (constante) représente la priorité, c'est-à-dire le montant à partir duquel le réassureur est engagé à couvrir la cédante. C'est en quelque sorte une franchise pour l'assureur ;

- P : (constante) représente la portée, c'est-à-dire le montant maximum pour lequel le réassureur est engagé, lorsque le sinistre a dépassé la priorité ;

- $M = F + P$: (constante) représente le plafond de réassurance, au-delà duquel l'assureur est à nouveau en charge des sinistres.

III. Les hypothèses et les notations du modèle

Les notations suivantes sont reprises du mémoire de K. MECHAHOUGUI [2011], qui analyse l'intégration des contraintes de capital en réassurance non-proportionnelle, dans un contexte vie.

1. Les variables aléatoires de base

X_i : (variable aléatoire) représente le montant du $i^{ème}$ sinistre au premier euro ;

$$\forall i \epsilon \boldsymbol{N}(\Omega),$$

$$X_i \sim Loi(X) \;\; i.i.d$$

$$X_i \geq 0$$

N : (variable aléatoire) représente la fréquence des sinistres[8] ;

$$N \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$o\grave{u} \;\; \mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$$

Tels que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et N soient indépendantes.

Ce type de processus poissonnien est particulièrement utilisé en réassurance, afin de modéliser des évènements rares dont l'espérance et la variance sont proches. C'est également la loi la plus répandue et la plus simple à estimer, puisque λ représente le nombre de sinistres moyen par année.

2. Les variables aléatoires composées

S : représente la charge brute de sinistres, c'est-à-dire le montant total des sinistres avant réassurance.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (1.1)$$

Cette modélisation a pour principal conséquence de ne pas tenir compte de chaque risque du portefeuille de façon isolée. Nous considérons ainsi le comportement global du portefeuille comme homogène au cours du temps et cohérent avec les lois de fréquences et de coûts choisies.

[8] Détail des distributions théoriques considérées en annexe I.

C : représente la partie du sinistre cédée au réassureur.

$$C_i = Max[Min(X_i - F, P), 0] \qquad (1.2)$$

De ce fait, avec X_i $i.i.d$, on a :

$$C_i \sim Loi(CR) \quad i.i.d$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

$R = S - C$: représente la charge nette de réassurance.
D'une autre manière, elle est donnée par la formule suivante :

$$R = \sum_{i=1}^{N} (X_i - Max[Min(X_i - F, P), 0]) \qquad (1.3)$$

IV. La détermination du besoin en capital

Dans le cadre du risque de réserve, le SCR est calculé à partir de coefficients de variation, dont la pondération est effectuée par le volume de *Best Estimate*.

Ces facteurs de volatilités, notés σ_{nl} dans la Directive, ou CV dans cette étude, représentent les rapports entre la volatilité et l'espérance ou, en d'autres termes, les volatilités pour une unité de *Best Estimate*. Ils sont généralement exprimés en pourcentage.

1. Sans traité de réassurance

Lorsque l'assureur ne souscrit pas de traité de réassurance non-proportionnelle, il doit faire face à une charge (brute) de sinistres de la forme suivante : $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

a. Le coefficient de variation

Le coefficient de variation appliqué dans ce cas est de la forme suivante :

$$\sigma_{nl} = \left(CV_{(S,LoB_1)}, \dots, CV_{(S,LoB_n)}\right) = \left(\frac{\sigma(S)_{LoB_1}}{\mathbb{E}(S)_{LoB_1}}, \dots, \frac{\sigma(S)_{LoB_n}}{\mathbb{E}(S)_{LoB_n}}\right)$$

Où,

$\sigma(S)$: représente la volatilité de la charge brute ;
$\mathbb{E}(S)$: représente le *Best Estimate* de la charge brute.

Ces deux termes sont alors déterminés de la façon suivante :

- **Calcul de l'espérance de S :**

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N\right)\right]$$

$$\forall n \in N(\Omega), \qquad \varphi(n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,|N = n\right) = n\,.\,\mathbb{E}\left(X\,|N = n\right)$$

$$\varphi(N) = N\,.\,\mathbb{E}\left(X\,|N\right)$$

D'où

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[\,N\,.\,\mathbb{E}\left(X\,|N\right)]$$

Or X et N sont indépendantes et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[\,N\,.\,\mathbb{E}\,(X)\,]$$

$$\mathbb{E}(S) = \lambda\,.\,\mathbb{E}(X) \qquad (1.4)$$

- **Calcul de la variance de S :**

$$Var(S) = \mathbb{E}[Var(S|N)] + Var[\,\mathbb{E}(S|N)]$$

De la même manière que précédemment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \psi(n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,|N = n\right) = n\,.\,Var\left(X\,|N = n\right)$$
$$\psi(N) = N\,.\,Var\left(X\,|N\right)$$

$$Var(S) = \mathbb{E}[N\,.\,Var\left(X\,|N\right)] + Var[\,N\,.\,\mathbb{E}\left(X\,|N\right)]$$

Or $X \perp N$,

$$Var(S) = \mathbb{E}[N\,.\,Var(X)] + Var[\,N\,.\,\mathbb{E}\,(X)]$$
$$\Leftrightarrow Var(S) = \mathbb{E}(N)\,.\,Var(X) + Var(N)\,.\,[\mathbb{E}\,(X)]^2$$

Sachant que $\begin{cases} N \sim \mathcal{P}(\lambda) \\ Var(X) = \mathbb{E}\,(X^2) - [\mathbb{E}\,(X)]^2 \end{cases}$

$$Var(S) = \lambda\,.\,(\,Var(X) + [\mathbb{E}\,(X)]^2\,) = \lambda\,.\,\mathbb{E}\,(X^2) \qquad (1.5)$$

b. *La pondération par le Best Estimate*

La mesure de volume pour le risque de réserve permet ensuite de pondérer cette volatilité par ligne d'affaires, en fonction de l'importance des provisions en portefeuille. Elle est ainsi de la forme suivante :

$$V_{nl} = \left(V_{LoB_1}, \dots, V_{LoB_n}\right) = \left(BE_{LoB_1}, \dots, BE_{LoB_n}\right)$$

Où,

BE : représente le *Best estimate* brut, soit $\mathbb{E}(S)$ dans le modèle.

c. *Le SCR de réserve*

Suite aux différents calculs ci-dessus, on obtient alors la valeur du SCR pour le risque de réserve qui est égal à :

$$SCR_{nl\ res,Brut} = 3.\sum_{LoB} \frac{\sigma(S)_{LoB}}{\mathbb{E}(S)_{LoB}}.BE_{LoB} \qquad (1.6)$$

2. Avec traité de réassurance

Lorsque l'assureur met en place un traité de réassurance non-proportionnelle de paramètres F, pour la priorité et P, pour la portée, il conserve alors une charge (nette) de sinistres égale à : $R = \sum_{i=1}^{N}(X_i - Max[Min(X_i - F, P), 0])$.

a. *Le coefficient de variation*

Le coefficient de variation appliqué à la formule standard devient :

$$\sigma_{nl} = \left(CV_{(R,LoB_1)}(F,P), \dots, CV_{(R,LoB_n)}(F,P)\right) = \left(\frac{\sigma(R)_{LoB_1}}{\mathbb{E}(R)_{LoB_1}}, \dots, \frac{\sigma(R)_{LoB_n}}{\mathbb{E}(R)_{LoB_n}}\right)$$

Où,

$\sigma(R)$: représente la volatilité de la charge nette ;

$\mathbb{E}(R)$: représente le *Best Estimate* de la charge nette.

De manière générale, il s'agit donc de déterminer l'ensemble des termes suivants (*Cf.* chapitre suivant) :

$$CV_R(F,P) = \frac{\sqrt{Var(S) + Var(C) - 2.cov(S,C)}}{\mathbb{E}(S) - \mathbb{E}(C)} \qquad (1.7)$$

Où,

$Var(S)$: représente la variance de la charge brute ;
$Var(C)$: représente la variance de la charge cédée au réassureur ;
$cov(S,C)$: représente la covariance de la charge brute et de la charge cédée ;
$\mathbb{E}(S)$: représente le *Best Estimate* de la charge brute ;
$\mathbb{E}(C)$: représente le *Best Estimate* de la charge cédée.

La valeur de ce coefficient ne dépend plus uniquement de la distribution de R, mais également de la portée et de la priorité définies dans le contrat de réassurance. Cette dépendance permettra ainsi de modéliser l'optimisation du coût du capital en fonction du contrat.

L'une des principales difficultés de cette approche est d'évaluer la loi de R, puisqu'il s'agit d'une somme de variables aléatoires.

b. *La pondération par le Best Estimate*

Dans ce contexte, la mesure de volume pour le risque de réserve est réduite, puisqu'une partie des provisions *Best Estimate* est cédée au réassureur. Elle devient alors égale à :

$$V_{nl} = \left(V_{(res,LoB_1)}, \dots, V_{(res,LoB_n)}\right) = \left(BE_{(net\ de\ réass.,LoB_1)}, \dots, BE_{(net\ de\ réass.,LoB_n)}\right)$$

Où,

BE : représente le *Best estimate* net, soit $\mathbb{E}(R)$ dans le modèle.

c. *Le SCR de réserve*

On obtient ainsi le calcul du SCR du risque de réserve, dans le cas où l'assureur souscrit un dispositif de réassurance :

$$SCR_{nl\ res,Net} = 3.\sum_{Lob} \frac{\sigma(R)_{LoB}}{\mathbb{E}(R)_{LoB}} . BE_{Net\ de\ réassurance,LoB} \quad (1.8)$$

Chapitre 5

Détermination des termes du modèle « interne-partiel »

Ce chapitre a pour objectif de détailler le calcul de l'ensemble des termes du modèle « interne-partiel », selon des hypothèses de sinistralité normale et log-normale.

I. Cas n° 1 : sinistralité asymptotiquement gaussienne

On suppose dans un premier temps que la sinistralité du portefeuille, dont les valeurs sont positives, suit une loi asymptotiquement gaussienne. Cette hypothèse n'est raisonnable, que si les paramètres de ladite gaussienne assure une probabilité suffisamment faible de valeurs négatives de la variable, pour pouvoir être négligées.

Soit

$$\forall i \epsilon \boldsymbol{N}(\Omega), \qquad X_i \sim Loi(X), i.i.d \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{où } \mathbb{E}(X) = \mu \quad et \quad Var(X) = \sigma^2$$

Soit la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, résultant de la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. D'après le Théorème Central Limite (TCL), la variable aléatoire :

$$Z = \frac{S_n - n.\mu}{\sigma.\sqrt{n}}$$

suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, si n est grand.

En d'autres termes, pour $n \to \infty$:

$$S_n \sim \mathcal{N}(n.\mu\,, n.\sigma^2)$$

1. Détermination de la loi de R

On considère la variable aléatoire R, telle que :

$$R = \mathrm{S} - Max[\, Min(\,\mathrm{S} - F\,, P\,), 0\,]$$

Où,

F et P sont des constantes et $M = F + P$;
S est une variable aléatoire de loi F_S (lorsque le nombre de sinistres est assez grand, S est approximativement gaussienne d'après le TCL).

On note $\varphi(x) = x - Max[\, Min(\, x - F\, , P\,), 0\,]$ (Cf. *Rapport de mission interne*), qui est de la forme :

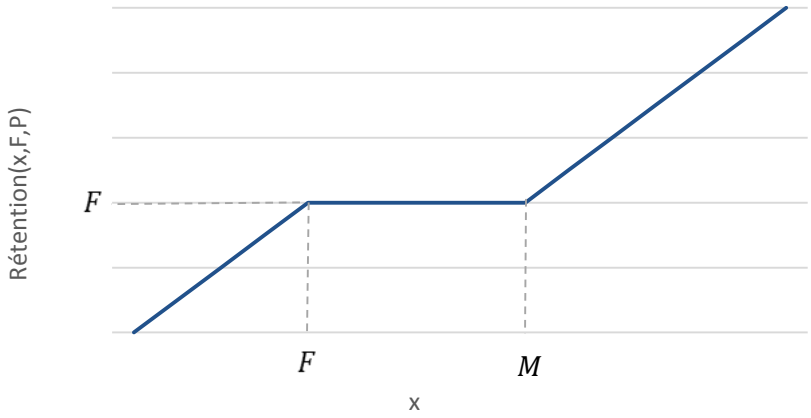

FIGURE 10 : Fonction de rétention

À partir du graphique ci-dessus, on établit que :

$$\begin{cases} \varphi(x) = x \iff x < F \\ \varphi(x) = F \iff F \leq x \leq M \\ \varphi(x) = x - P \iff x > M \end{cases}$$

L'expression de la fonction de répartition de R en découle, avec $R = \varphi(S)$:
Pour $x < F$,

$$F_R(x) = \mathbb{P}(\varphi(S) \leq x) = \mathbb{P}(S \leq x) = F_S(x)$$

Pour $x \geq F$[9],

$$F_R(x) = \mathbb{P}(\varphi(S) \leq x) = \mathbb{P}(S - P \leq x) = F_S(x + P)$$

On obtient alors :

$$F_R(x) = \begin{cases} F_S(x) & \text{si } x < F \\ F_S(x + P) & \text{si } x \geq F \end{cases} \qquad (2.1)$$

En utilisant l'approximation gaussienne de la loi de S, on a $F_S(x) = F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{x - \mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}\right)$.
Ainsi, la loi de R est connue, on peut désormais déterminer son espérance et sa variance.

[9] Pour $F \leq x \leq M$, $\mathbb{P}(\varphi(S) = F) = F_R(M) - F_R(F) = 0$.

2. Calcul de l'espérance et de la variance de *R*

a. Calcul de l'espérance de R :

$$\int_0^\infty \bar{F}_R(x)\,dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(R > x)\,dx = \int_0^\infty \mathbb{E}(\,\mathbb{I}_{\{R>x\}}\,)\,dx$$

Où $\bar{F}_R$ représente la fonction de survie de la variable aléatoire R

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_0^\infty \mathbb{E}(\,\mathbb{I}_{\{R>x\}}\,)\,dx = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{R>x\}}\,dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^R dx\right] = \mathbb{E}(R)$$

D'où,

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty \bar{F}_R(x)\,dx = \begin{cases} \int_0^\infty \bar{F}_S(x)\,dx & \Leftrightarrow \quad x < F \\ \int_0^\infty \bar{F}_S(x+P)\,dx & \Leftrightarrow \quad x \geq F \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^F \bar{F}_S(x).\,dx \quad + \int_F^\infty \bar{F}_S(x+P).\,dx \qquad (2.2)$$

b. Calcul de la variance de R :

$$Var(R) = \mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2$$

À partir d'une variable aléatoire positive R, on cherche à prouver :

$$\mathbb{E}[R^2] = \int_0^\infty 2.x.\bar{F}_R(x).\,dx$$

Le développement de cette démonstration repose sur le cours de J.BERARD, professeur à l'Université de Strasbourg.

Les deux membres de cette égalité ont un sens, car tout est positif. Les deux expressions ont soit la même valeur finie, soit valent toutes les deux l'infini.

$\forall\, x \geq 0$, on a :

$$x^2 = \int_0^x 2.u.\,du$$

Si bien que l'on a :

$$\mathbb{E}(R^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^R 2.u.\,du\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} 2.u.\,\mathbb{I}_{\{R>u\}}.\,du\right)$$

Par le théorème de Fubini (toujours valable pour des fonctions positives), on a ainsi :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} 2.u.\mathbb{I}_{\{R>u\}}.du\right) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(2.u.\mathbb{I}_{\{R>u\}}\right).du = \int_0^{+\infty} 2.u.\mathbb{P}(R>u).du$$

On obtient alors le résultat escompté, dont la forme est la suivante :

$$\mathbb{E}[R^2] = 2.\int_0^{\infty} x.\bar{F}_R(x).dx = \begin{cases} 2.\int_0^{\infty} x.\bar{F}_S(x).dx & \Leftrightarrow x < F \\ 2.\int_0^{\infty} (x+P).\bar{F}_S(x+P).dx & \Leftrightarrow x \geq F \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[R^2] = 2.\int_0^{F} x.\bar{F}_S(x).dx + 2.\int_F^{\infty} (x+P).\bar{F}_S(x+P).dx \qquad (2.3)$$

À partir des équations (2.2) et (2.3), on obtient :

$$Var(R) = \mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2$$

II. Cas n° 2 : sinistralité log-normale

On suppose maintenant que la sinistralité du portefeuille suit une loi log-normale, comme le suggère le régulateur (Cf. EIOPA [2014]).

Soit

$$X_i \sim Loi(X), i.i.d \quad \text{où } X \sim Log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\forall i \epsilon \boldsymbol{N}(\Omega), \qquad X_i \geq 0$$

$$\text{où } \mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \text{ et } Var(X) = \left(e^{\sigma^2}-1\right).e^{2.\mu+\sigma^2}$$

1. Calculs préliminaires

Avant d'effectuer le calcul de l'espérance et de la variance de C, des calculs préliminaires sont effectués, afin d'améliorer la lecture des parties suivantes. La méthode de calcul est issue de l'ouvrage *« Assurance non-vie, Modélisation, Simulation »* (*Cf.* C. PARTRAT et JL. BESSON [2005]). Ces calculs sont effectués pour des bornes allant de F (la priorité) à l'infini. De façon semblable, il sera possible de les effectuer pour des bornes allant de M à l'infini.

$\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\int_F^{+\infty} x^k . f(x) . dx = \int_F^{+\infty} x^k . \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma.x} . e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} . dx$$

$$\Leftrightarrow \int_F^{+\infty} x^k . f(x) . dx = \int_F^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma.x} . e^{-\frac{1}{2.\sigma^2}.\left[(\ln(x)-\mu)^2 - k.\sigma^2.\ln(x)\right]} . dx$$

$$\Leftrightarrow \int_F^{+\infty} x^k . f(x) . dx = e^{k.\mu+\frac{k^2.\sigma^2}{2}} . \int_F^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma.x} . e^{-\frac{1}{2}.\left[\frac{\ln(x)-(\mu+k.\sigma^2)}{\sigma}\right]^2} . dx$$

$$\Leftrightarrow \int_F^{+\infty} x^k . f(x) . dx = e^{k.\mu+\frac{k^2.\sigma^2}{2}} . \left[1 - F_{log\mathcal{N}(\mu+k.\sigma^2,\sigma^2)}(F)\right]$$

Or, on a :

$$X \sim log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$\Leftrightarrow \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On obtient alors :

$$\int_F^{+\infty} x^k . f(x) . dx = e^{k.\mu+\frac{k^2.\sigma^2}{2}} . \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F) - (\mu + k.\sigma^2)}{\sigma}\right) \quad (3.1)$$

2. Calculs de l'espérance et de la variance de C

a. Calcul de l'espérance de C :

On commence par calculer l'espérance de C_i :

$$\mathbb{E}(C_i) = \mathbb{E}\left[(X_i - F) . \mathbb{1}_{\{X_i > F\}} - (X_i - M) . \mathbb{1}_{\{X_i > M\}} \right]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(C_i) = \mathbb{E}\left[(X_i - F) . \mathbb{1}_{\{X_i > F\}} \right] - \mathbb{E}\left[(X_i - M) . \mathbb{1}_{\{X_i > M\}} \right]$$

Sachant que $C_i \sim Loi(CR)$ et H la fonction de répartition de X,

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(CR) = \int_F^{+\infty} (x - F) . dH(x) - \int_M^{+\infty} (x - M) . dH(x)$$

$$\int_F^{+\infty} (x - F) . dH(x) = \int_F^{+\infty} x . f(x) . dx - F . \int_F^{+\infty} f(x) . dx$$

À partir du calcul de (3.1), on obtient alors :

$$\int_F^{+\infty} (x-F).dH(x) = \; e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) - F.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-\mu}{\sigma}\right)$$

Et de la même manière :

$$\int_M^{+\infty} (x-M).dH(x) = \; e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) - M.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-\mu}{\sigma}\right)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(CR) = \; e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.&\left[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right] \\ &- F.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-\mu}{\sigma}\right) + \; M.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-\mu}{\sigma}\right) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

De la même manière que pour le calcul de l'espérance de S et sachant que $C_i \sim Loi(CR)$, on obtient l'espérance de C.

$$\mathbb{E}(C) = \lambda\,.\,\mathbb{E}(CR) \qquad (3.3)$$

b. Calcul de la variance de C :

On obtient de la même façon que l'équation (1.5) :

Sachant que $C_i \sim Loi(CR)$,

$$Var(C) = \; \lambda\,.\,\mathbb{E}(CR^2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(CR^2) &= \mathbb{E}\left[\left[(X_i-F)\,.\;\mathbb{I}_{\{X_i>F\}} - (X_i-M)\,.\,\mathbb{I}_{\{X_i>M\}}\right]^2\right] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(CR^2) &= \; \mathbb{E}\left[\,(X_i-F)^2.\;\mathbb{I}_{\{X_i>F\}}\right] - 2.\mathbb{E}\left[\,(X_i-F)\,.(X_i-M).\;\mathbb{I}_{\{X_i>M\}}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\,(X_i-M)^2.\;\mathbb{I}_{\{X_i>M\}}\right]\end{aligned}$$

Soit $H \sim Log\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$,

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \mathbb{E}(CR^2) = \; &\int_F^{+\infty} (x-F)^2.dH(x) - 2.\int_M^{+\infty} (x-F).(x-M).dH(x) \\ &+ \int_M^{+\infty} (x-M)^2.dH(x)\end{aligned}$$

Soit,

$$\int_F^{+\infty} (x-F)^2.dH(x) = \int_F^{+\infty} x^2.f(x).dx - 2.F.\int_F^{+\infty} x.f(x).dx + F^2.\int_F^{+\infty} f(x).dx$$

À partir des résultats du calcul préliminaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_F^{+\infty} (x-F)^2.dH(x) &= e^{2.\mu+\frac{2^2.\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ &- 2.F.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) + F^2.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_M^{+\infty} (x-M)^2.dH(x) &= e^{2.\mu+\frac{2^2.\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ &- 2.M.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) + M^2.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Puis, on calcule :

$$\begin{aligned}\int_M^{+\infty} (x-F).(x-M).dH(x) &= \int_M^{+\infty} x^2.f(x).dx - (M+F).\int_M^{+\infty} x.f(x).dx + F.M.\int_M^{+\infty} f(x).dx\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_M^{+\infty} (x-F).(x-M).dH(x) &= e^{2.\mu+\frac{2^2.\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ &- (M+F).e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ &+ F.M.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\mathbb{E}(CR^2) = e^{2.(\mu+\sigma^2)}.\left[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right)-\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\right] + 2.F.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\left[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right] + F^2.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-\mu}{\sigma}\right) + (M^2-2.F.M).\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-\mu}{\sigma}\right) \quad (3.4)$$

Avec,

$$Var(C) = \lambda.\mathbb{E}(CR^2) \quad (3.5)$$

c. *Calcul de la covariance de S et C :*

$$cov(S,C) = \mathbb{E}(SC) - \mathbb{E}(S).\mathbb{E}(C) \quad (3.6)$$

On calcule dans un premier temps $\mathbb{E}(SC)$.

$$\mathbb{E}(SC) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i . \sum_{j=1}^{N} C_j\right)$$

$$\mathbb{E}(SC) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i . C_i\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j\right) \quad (3.7)$$

À partir de la démonstration aboutissant à l'équation (1.4), on calcule la première somme de l'équation (3.7) :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i . C_i\right) = \mathbb{E}(N).\mathbb{E}(X.CR) = \lambda.\mathbb{E}(Y)$$

Avec,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X.CR) = \mathbb{E}(X.Max[Min(X-F,P),0])$$

Il existe alors trois cas possibles :

$$\begin{aligned} &\text{Cas 1 :} \quad X_i < F \quad &\Rightarrow \quad Y = 0 \\ &\text{Cas 2 :} \quad F \leq X_i \leq M \quad &\Rightarrow \quad Y = X.(X - F) \\ &\text{Cas 3 :} \quad X_i > M \quad &\Rightarrow \quad Y = X.P \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} Y &= X.(X - F).\ \mathbb{I}_{\{F \leq X \leq M\}} + X.P.\mathbb{I}_{\{X > M\}} \\ \Longrightarrow \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left[X.(X - F).\ \mathbb{I}_{\{F \leq X \leq M\}}\right] + P.\mathbb{E}\left[X.\ \mathbb{I}_{\{X > M\}}\right] \end{aligned}$$

Soit $H \sim Log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(Y) = \int_F^M x.(x - F).dH(x) + P.\int_M^{+\infty} x.dH(x)$$

On calcule d'abord la première intégrale :

$$\begin{aligned} &\int_F^M x.(x - F).dH(x) = \int_F^M x^2.f(x).dx - F.\int_F^M x.f(x).dx \\ \Rightarrow &\int_F^M x.(x - F).dH(x) \\ &= e^{2.(\mu + \sigma^2)}.\left[F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M) - (\mu + 2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\right. \\ &\left. - F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F) - (\mu + 2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\right] \\ &- F.e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.\left[F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)\right. \\ &\left. - F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

On calcule ensuite la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} &\int_M^{+\infty} x.dH(x) = \int_M^{+\infty} x.f(x).dx \\ \Rightarrow &\int_M^{+\infty} x.dH(x) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,.\, C_i\right) = \lambda.\left[e^{2.(\mu+\sigma^2)}.\left[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\right.\right.$$
$$\left. - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]$$
$$- F.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\left[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right.$$
$$\left. - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]$$
$$\left. + P.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]$$

On calcule ensuite la seconde somme de l'équation (3.7) :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j \,\middle|\, X_i\right)\right]$$

Par indépendance des C_j et du fait que les X_i sont $\sigma(X_i)$-mesurables :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,.\, \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j\right)\right]$$

En appliquant la même méthode de calcul que l'équation (1.3), on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} C_j\right) = \mathbb{E}(N).\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(N-1).\mathbb{E}(CR) = (\lambda^2-\lambda).\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(CR)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(SC) = \lambda.\Bigg[e^{2.(\mu+\sigma^2)}.\Bigg[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+2.\sigma^2)}{\sigma}\right)\Bigg] \\ - F.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\Bigg[\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(F)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right) \\ - \bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\Bigg] \\ + P.e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.\bar{F}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\ln(M)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\Bigg] + (\lambda^2 \\ - \lambda).\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(CR) \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Chapitre 6

Impact de la réassurance non-proportionnelle sur le bilan prudentiel

I. Bilan prudentiel : principes de bases

Le bilan « Solvabilité 2 », encore connu sous le nom de bilan prudentiel ou bilan économique, est au cœur du nouveau dispositif règlementaire. Son évaluation en valeur de marché permet d'apprécier la situation financière d'une société d'assurance à un instant précis et d'évaluer ainsi sa solvabilité. L'introduction d'un dispositif de réassurance va non seulement impacter le SCR, mais également l'ensemble des autres postes du bilan (*Cf.* KAMEGA A. [2014]).

Lorsqu'aucun traité de réassurance ne lui est appliqué, le bilan est de la forme suivante :

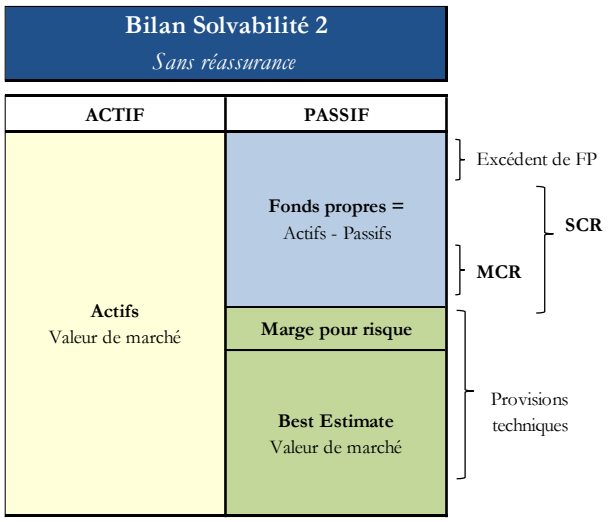

FIGURE 11 : Bilan économique brut de réassurance

Les principales caractéristiques de ce bilan sont les suivantes :

- Les actifs sont valorisés à leur valeur de marché à la date de clôture du bilan ;
- Afin que la construction du bilan soit cohérente, le principe de valorisation en valeur de marché est étendu aux provisions techniques (représentant une partie du passif), dont la valeur est issue de la somme du *Best Estimate* et de la marge pour risque ;
- Le *BE* est estimé de la façon la plus exacte possible, en utilisant des hypothèses probabilistes réalistes sur les facteurs de risque, et en les actualisant avec la courbe de taux sans risque pertinente à la date d'évaluation ;
- Les fonds propres, dont la valeur est issue de la différence des actifs et des passifs, représentent la richesse de l'entreprise.

II. Bilan prudentiel et réassurance

L'introduction d'un dispositif de réassurance non-proportionnelle ne modifie pas les caractéristiques principales du bilan, mais affecte les valeurs de plusieurs postes.

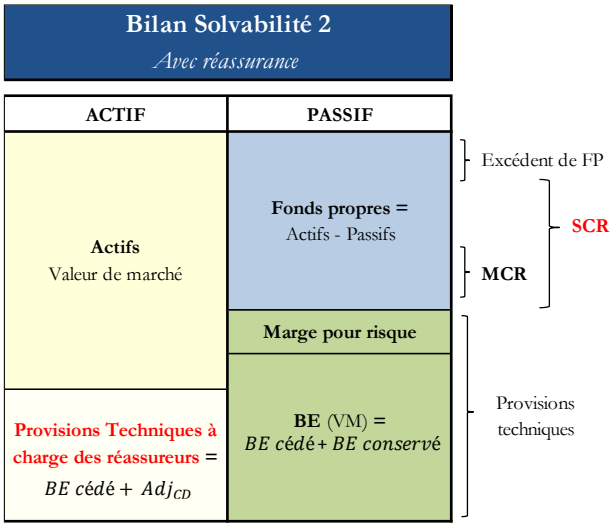

FIGURE 12 : Bilan économique net de réassurance

1. Les fonds propres

La mise en place d'un mécanisme de réassurance permet à l'assureur de limiter l'exposition de ses fonds propres et d'éviter au maximum le défaut.

Comme l'indique les calculs des chapitres précédents, le besoin en capital requis pour le risque de réserve fait intervenir directement la réassurance non-proportionnelle, puisqu'il dépend du *BE* net et d'un coefficient de variation évoluant selon les caractéristiques de réassurance. Le SCR de souscription non-vie est donc impacté, et un SCR spécifique est ajouté pour rendre compte du défaut du réassureur.

De plus, une partie des fonds propres est consommée par l'ajustement effectué au niveau des provisions techniques à charge du réassureur.

2. *Best Estimate* et probabilité de défaut

Dans le bilan prudentiel, les provisions *Best Estimate* sont calculées brutes de réassurance. Le BE apparaît donc comme le somme du BE conservé par l'assureur et du BE cédé au réassureur :

$$BE = BE_{brut} = BE_{conservé} + BE_{cédé}$$

En contrepartie de cela, une augmentation de l'actif du bilan, correspondant à l'actif de réassurance, est constaté. Cette créance, calculée de manière *Best Estimate*, est alors égale à la somme du *BE* cédé et d'un ajustement, dont l'objectif est de tenir compte des pertes possibles liées à un défaut de la contrepartie.

Cet ajustement est basé sur une estimation de la probabilité de défaut et de la perte moyenne qui en résulterait (*Cf.* Journal Officiel de l'Union Européenne [2015]). En ce sens, plus la notation de la contrepartie sera bonne, plus l'ajustement pour défaut de contrepartie sera faible.

Selon l'article 61 du règlement délégué (UE) 2015/35, le calcul simplifié de cet ajustement pour défaut de la contrepartie est de la forme :

$$Adj_{CD} = -Max\left((1-\mathrm{RR}).\frac{PD}{1-PD}.Dur.BE_{cédé}\,;0\right)$$

Où,

PD : représente la probabilité de défaut de la contrepartie au cours des 12 prochains mois ;

$BE_{cédé}$: représente les montants recouvrables au titre des contrats de réassurance passés avec la contrepartie, relevant de ce groupe de risques homogènes ;

RR : représente un taux de recouvrement (où $RR = 0.5$)

Dur : représente la duration des montants recouvrables au titre des contrats de réassurance passés avec la contrepartie, relevant de ce groupe de risques homogènes ;

En d'autres termes, la duration est le temps d'attente moyen pour atteindre la valeur de provision finale, pondérée par leur valeur actualisée. Cette idée est traduite par la formule suivante :

$$Dur = \frac{\sum_t t.\delta_t.\alpha_t}{\sum_t \delta_t.\alpha_t}$$

Avec,

δ_t : représentant le coefficient d'actualisation en date *t* ;

α_t : représentant la cadence de règlement des sinistres en date *t*.

3. Marge pour risque

La marge pour risque représente un niveau de sécurité pour les provisions techniques, permettant à l'assureur d'honorer ses engagements. Elle est calculée à partir du coût du capital nécessaire, dans le cas où les évaluations du *BE* et de la *RM* sont effectuées de façon séparées.

L'article 77-5 de la Directive 2009/138/CE précise que : « Lorsqu'elles procèdent à une évaluation séparée de la meilleure estimation et de la marge de risque, les entreprises d'assurance et de réassurance calculent cette dernière en déterminant le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles, égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci » .

L'article 37 de la directive 2015/35 développe le calcul de la marge pour risque du portefeuille global des engagements d'assurance et de réassurance, comme suit :

$$RM = CoC \,.\, \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Où,

CoC : représente le taux de coût du capital, fixé à 6% ;
SCR_t : représente le Capital de Solvabilité Requis pour l'année t ;
r_{t+1} : représente le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance t+1 années.

La définition de la marge pour risque étant complexe, son évaluation pratique requiert des simplifications (*Cf.* article 58 du règlement délégué (UE) 2015/35). La simplification[10] la plus répandue étant la suivante :

$$En\ t = 0, \qquad RM_0 = CoC\ .\ k\ .Dur_0\ .BEL_0$$

Elle repose sur l'hypothèse de proportionnalité entre le BE et le SCR à chaque date, soit :

$$SCR_t = k\ .BEL_t$$

Où,

CoC : représente le taux de coût du capital, fixé à 6% ;
Dur : représente la duration de l'engagement ;
BEL : représente la meilleure estimation ;
k : représente le coefficient de proportionnalité entre le SCR et le BEL, tel que $k = \frac{SCR}{BEL}$;

On obtient ainsi comme équation simplifiée :

$$RM_0 = CoC\ .Dur_0\ .SCR$$

La valeur de la marge pour risque dépendant du SCR de souscription non-vie et du SCR de contrepartie, elle est donc impactée par le dispositif de réassurance non-proportionnelle.

[10] Démonstration de l'équation simplifiée en annexe II.

Chapitre 7

Présentation du portefeuille

I. Présentation de la captive de réassurance

Pour l'application pratique de cette étude, nous nous intéressons aux risques d'un groupe, qui est actif dans le domaine de l'industrie. L'étude est menée plus précisément sur sa captive de réassurance, dans laquelle est logé l'essentiel de ses grands risques. Comme la plupart des multinationales, ce groupe a créé sa propre captive, afin de globaliser et de centraliser sa politique de réassurance. Étant implantée dans un grand nombre de pays, elle lui permet également de respecter les différentes réglementations applicables dans chacun des pays où le groupe opère. À ces avantages s'ajoutent une meilleure maîtrise des variations tarifaires sur le marché de la réassurance.

Afin d'observer l'impact d'un dispositif de rétrocession non-proportionnelle, l'étude est effectuée à l'aide des données de la captive de réassurance et de son plan de rétrocession. Nous supposons, afin de simplifier le processus de mise en œuvre, que la lecture des données est identique aux mécanismes assureurs/réassureurs. En d'autres termes, les sinistres ne sont pas supposés tronqués par le processus d'assurance précédent.

1. Les risques couverts

Les principaux risques auxquels ce groupe industriel doit faire face, sont les suivants :

- Feux ;
- Construction ;
- Multirisques ;
- Responsabilité Civile d'exploitation, pollution, après dommages ;
- Marine, Aérien ;
- Transport.

La correspondance entre les six branches de risques ci-dessus et la classification « Solvabilité 2 » est la suivante :

LoB	***LoB* Solvabilité 2(*)**	**Branches de risques**
Dommage	Incendie et autres dommages (*LoB* n°4)	Incendie, construction et multirisques
Transport	Maritime, aérien et transport (*LoB* n°3)	Marine, aérien et transport
RC	RC générale (*LoB* n°5)	RC d'exploitation, après dommages, pollution

(*) Les numéros de LoB proviennent de l'annexe II du règlement délégué (UE) 2015/35

TABLEAU 2 : Présentation des risques par lignes d'affaires

2. La notation du rétrocessionnaire

Selon Reuters, le rétrocessionnaire de cette captive présente « une très forte souplesse financière et une très forte capitalisation ». Sur Bloomberg, cette position se traduit par une notation sur le long terme de : AA- (selon Moody's, Standard & Poor's et Fitch)[11].

II. La structure de rétrocession

De la même manière qu'un traité de réassurance, le contrat de rétrocession permet une diminution de la volatilité des risques. Par cette opération, le rétrocessionnaire se couvre d'une dérive de la sinistralité et s'assure d'honorer ses engagements vis-à-vis de son client, la captive de réassurance.

Le programme de cette captive est complexe et fait intervenir plusieurs types de rétrocession. Afin d'observer l'impact de la rétrocession non-proportionnelle sur les indicateurs de solvabilité, nous nous focalisons sur les traités en excédent de sinistres pour chacune des lignes d'affaires, dont les caractéristiques sont détaillées ci-dessous.

1. Ligne d'affaires : Dommage

Portée = 50 M€ *XS* Priorité = 75 M€

2. Ligne d'affaires : Transport

Portée = 50 M€ *XS* Priorité = 75 M€

3. Ligne d'affaires : Responsabilité Civile

Portée = 100 M€ *XS* Priorité = 30 M€

Les priorités élevées des différents contrats indiquent la volonté de la captive de réassurance de se protéger contre des sinistres rares et très coûteux.

III. Analyse des données

Les données servant de base pour cette étude, ont été transmises par le client. Elles présentent les sinistres bruts de la captive. Une étude de ces dernières permet par la suite d'estimer les paramètres utiles pour le calcul des indicateurs de solvabilité.

Le portefeuille de sinistres s'étend de l'année 2003 à 2014, soit sur une période de 12 ans. Il est composé de plusieurs risques industriels (incendie, construction, transport, …), dont la répartition est effectuée sur trois lignes d'affaires (*LoB*). Le détail de ces trois *LoB* est présenté dans la partie précédente.

[11] Notation au 31/12/2014.

1. La sinistralité globale

a. Analyse descriptive

Une première étude consiste à observer le portefeuille dans son ensemble. Ces sinistres sont répartis comme suit :

Écart-type	14 310 465 €

Nb total de sinistres	848
Nb moyen de sinistres par année	70,3

Min	1er quartile	Médiane	Moyenne	3ème quartile	Max
11 €	14 477 €	103 460 €	2 334 670 €	666 045 €	287 251 200 €

TABLEAU 3 : Répartition de la sinistralité de la captive

L'écart-type élevé indique que les valeurs des sinistres sont très hétérogènes et peu regroupées autour de la moyenne. De plus, une comparaison de la moyenne et de la médiane indique une asymétrie de la distribution des coûts globaux des sinistres.

Ces premiers résultats nous indiquent que le modèle reposant sur l'hypothèse d'une sinistralité asymptotiquement gaussienne n'est pas adaptée aux types de sinistres présent dans le portefeuille de la captive.

Lorsqu'une très forte asymétrie de la distribution est constatée, celle-ci est régularisée en traçant l'histogramme des logarithmes des coûts. On obtient alors la distribution suivante :

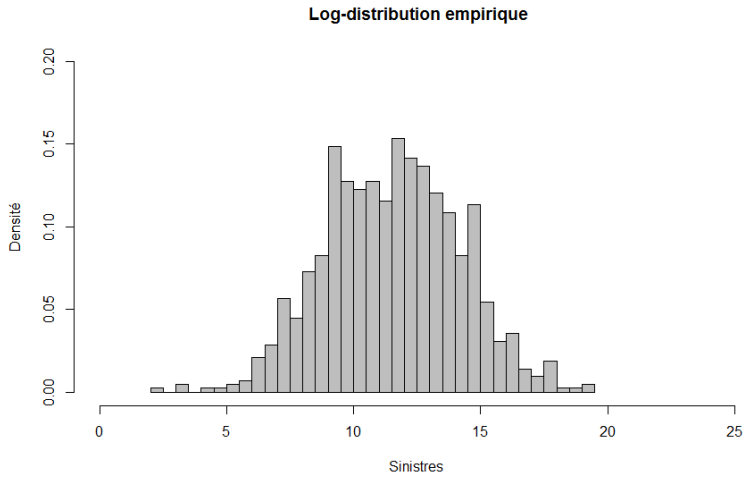

FIGURE 13 : Log-distribution empirique des sinistres

Cette distribution de sinistres nous indique des risques très différents des risques standards (ceux observés sur le panel de sociétés membres de l'*EEA,* à partir duquel est calculé le coefficient de variation de la formule standard). En effet, cette captive de réassurance semble présenter, non seulement, des risques très hétérogènes, mais pouvant également être très

coûteux. L'utilisation d'une méthode différente de la formule standard est alors amplement justifiée.

En effet, la captive a tout intérêt à déterminer de manière exacte les risques inhérents à son activité afin d'éviter une évaluation inadéquate de son besoin en capital, et ainsi, de minimiser son risque de défaut.

b. Validation de l'approximation log-normale

Préalablement à la mise en œuvre de cette étude, nous devons valider le postulat selon lequel le caractère log-normal des différents risques conduit à un risque global suivant une log-normale. Cette hypothèse est retenue dans le modèle du chapitre 5, afin d'obtenir une expression analytique du SCR.

La comparaison de la distribution log-normale théorique (obtenue par maximum de vraisemblance) avec la log-distribution empirique conduit aux résultats graphiques suivants :

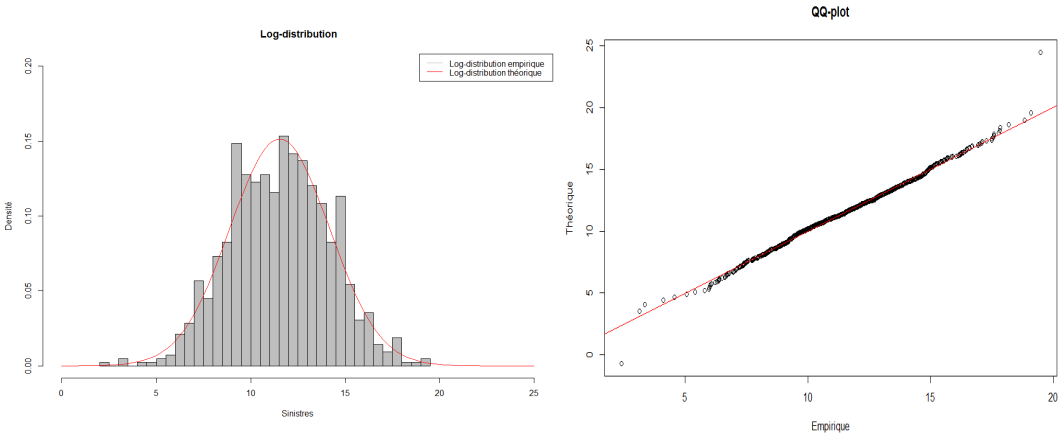

FIGURE 14 : Comparaison de la log-distribution empirique et théorique

L'adéquation semble graphiquement correcte. Les points alignés au niveau du *QQ-plot* indiquent que les distributions empiriques et théoriques sont similaires. Seules les extrémités semblent s'éloigner de l'hypothèse log-normale.

De plus, le test de Shapiro-Wilk[12], utilisé généralement pour l'adéquation à une loi normale de $ln(X)$ (où X représente les sinistres), conduit à une p-valeur de 28,73 %. Pour un risque $\alpha = 5\ \%$, l'approximation log-normale est donc acceptable.

[12] Détail du test de normalité en annexe III.

2. La sinistralité par ligne d'affaires

a. Analyse descriptive

Une seconde étude consiste à observer le portefeuille pour chacune des lignes d'affaires. Les sinistres ont alors les caractéristiques suivantes :

	Dommage	Transport	RC
Coût moyen (en €)	4 348 776	349 707	408 464
Volatilité	20 127 336	1 444 466	1 037 626
Nb total de sinistres	419	299	130
Nb moyen de sinistres par année	34,9	24,9	10,8

TABLEAU 4 : Caractéristiques des sinistres pour chaque ligne d'affaires

b. Validation de l'approximation log-normale

Afin d'illustrer cette partie, prenons l'exemple de la ligne d'affaires « Dommage ». De la même manière que précédemment, la comparaison de la distribution log-normale théorique (obtenue par maximum de vraisemblance) avec la log-distribution empirique conduit aux résultats graphiques suivants.

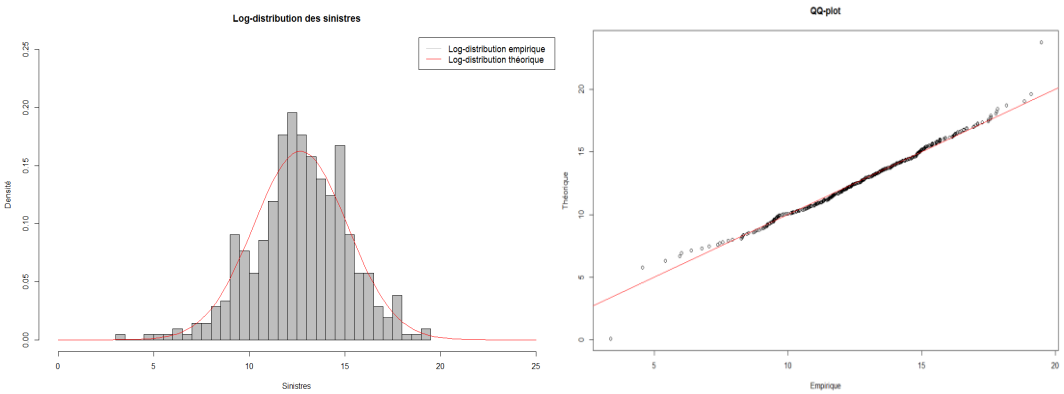

FIGURE 15 : Comparaison de la log-distribution empirique et théorique (« Dommage »)

D'un point de vue graphique, l'adéquation semble correcte. Mis à part aux niveaux des extrémités, les points du *QQ-plot* sont alignés, ce qui indique une similitude des distributions.

Le test de Shapiro-Wilk conduit à une p-valeur de 4,96 %. Pour un risque $\alpha = 5\ \%$, elle ne se situe pas dans la borne de validation. Cependant, pour cette étude, nous considérons que l'approximation log-normale est acceptable, en admettant un risque de première espèce[13] plus faible.

[13] C'est le risque de rejeter l'hypothèse nulle (H0 : l'approximation log-normale est acceptable) alors que celle-ci est vraie. En baissant le taux α, nous réduisons ce risque et augmentons le risque de fausse acceptation de H0.

À partir du maximum de vraisemblance, l'estimation des paramètres mu et sigma est alors la suivante :

$$\begin{cases} \mu = 12{,}686 \\ \sigma = 2{,}461 \end{cases}$$

En calculant le coefficient de variation associé à ces paramètres, on obtient alors :

$$CV_s = \sqrt{\frac{1 + {CV_X}^2}{\lambda}} = 214\ \%$$

Où,

$CV_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)}$: représente le coefficient de variation de la charge X ;

Rappelons que dans le cas de la sinistralité log-normale, l'espérance et la variance sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right).e^{2.\mu + \sigma^2} \end{cases}$$

Le résultat précédent se révélant très élevé, il s'agit alors de le comparer avec le coefficient de variation empirique, qui représente « l'estimateur naturel » de ce coefficient. On obtient ainsi :

$$CV_s = \sqrt{\frac{1 + {CV_X}^2}{\lambda}} = 80\ \%$$

Où,

$CV_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)} = \frac{V}{M}$: représente le coefficient de variation de la charge X ;

La confrontation de ces deux résultats nous conforte ainsi dans l'idée qu'un facteur de volatilité de plus de 200 % ne semble pas adéquat aux risques en portefeuille. En effet, il est presque trois fois plus élevé que le coefficient de variation empirique.

Le paramètre d'intérêt du modèle étant le facteur de volatilité, il est problématique d'observer une telle déviation de ce facteur. Nous avons donc fait le choix d'estimer les paramètres de la loi log-normale sous-jacente à partir de l'estimateur empirique du coefficient de variation ci-dessus.

c. Ajustement des paramètres

L'estimation des paramètres à partir des données brutes est alors effectuée de la façon suivante.

Dans le cas d'une sinistralité log-normale, l'espérance et la variance sont déterminées par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ Var(X) = \left(e^{\sigma^2}-1\right).e^{2.\mu+\sigma^2} \end{cases}$$

On peut ainsi réécrire le coefficient de variation de X de la façon suivante :

$$CV_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\sqrt{\left(e^{\sigma^2}-1\right).e^{2.\mu+\sigma^2}}}{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}$$

Par simplification des termes, on obtient :

$$CV_X = \sqrt{\left(e^{\sigma^2}-1\right)}$$

Il s'agit ensuite de résoudre le système d'équation à deux inconnues suivant, afin d'obtenir les valeurs des deux paramètres μ et σ^2:

$$\begin{cases} M = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ CV_X = \sqrt{\left(e^{\sigma^2}-1\right)} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \sigma^2 = ln(1+{CV_X}^2) \\ \mu = ln(M) - \frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

Une fois l'ajustement des paramètres effectué, on obtient la nouvelle courbe théorique (*Cf.* courbe bleue) suivante :

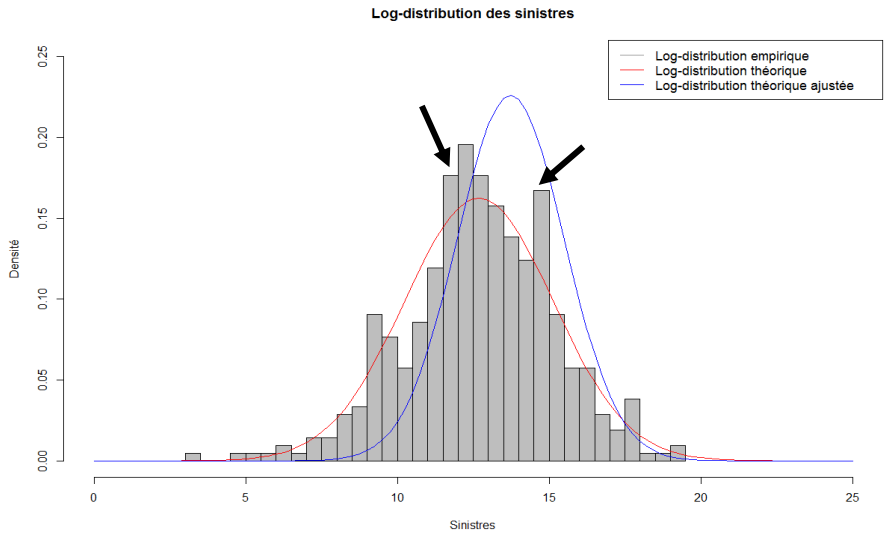

FIGURE 16 : Log-distribution théorique (ajustée) des sinistres

La partie sensible pour le calcul du coefficient de variation se situe sur la partie droite de l'histogramme (ce qui correspond aux gros sinistres). Ainsi, la courbe ajustée permet de capturer la masse significative non-prise en compte par la courbe rouge (cette masse est observable pour des sinistres de charge 15) et de rendre la queue moins épaisse pour les sinistres de montants supérieurs à 20.

À ce stade de l'étude, l'ajustement de la loi log-normale par le maximum de vraisemblance semble poser problème, puisque l'on obtient une mauvaise estimation du coefficient de variation. Pour remédier à ce problème, un ajustement des paramètres est effectué à partir du coefficient de variation empirique. Ce processus d'estimation des paramètres fournit ainsi des valeurs plus cohérentes, dans un contexte où la loi log-normale n'est qu'une approximation simplifiée de la distribution théorique sous-jacente.

L'examen de l'histogramme empirique suggère, en effet, que la distribution théorique présente deux ou trois modes (*Cf.* flèche noire) et que l'utilisation d'une distribution uni-modale empêche donc de prendre en compte une hétérogénéité des coûts de sinistres.

Dans ce contexte, une procédure d'estimation utilisant la valeur empirique du coefficient de variation apparaît ainsi plus robuste : la présence d'une exponentielle dans la relation entre le coefficient de variation de la loi log-normale et la volatilité de la loi normale sous-jacente conduit à amplifier les erreurs d'estimation de σ dans le calcul de CV, ce que la procédure proposée ici évite de faire.

d. Arbitrage entre rigueur statique et actuariat

La mise en place de ce modèle, dont les paramètres ont été ajustés pour obtenir une représentation correcte du paramètre d'intérêt, soulève alors la réflexion de l'arbitrage entre la rigueur statistique et la cohérence actuarielle, auquel doit faire face un actuaire dans l'exercice de ses fonctions. En effet, ce dernier est amené à faire des choix entre le pragmatisme de la modélisation et l'adéquation des paramètres retenue avec la réalité actuarielle.

Chapitre 8

Applications numériques

Dans le contexte particulier de cette captive de réassurance, il s'agit de mettre en application l'approche statique (avec l'hypothèse de log-normalité des sinistres), afin d'obtenir les valeurs de chacun des indicateurs de solvabilité en fonction des caractéristiques de rétrocession non-proportionnelle. L'obtention de ces résultats, intégralement issus du modèle, permet ainsi d'évaluer les gains de la mise en place d'un tel dispositif, puis d'apprécier les stratégies et les arbitrages possibles dans ce contexte.

I. *Best Estimate* : approche statique

Les différents *Best Estimate* sont alors de la forme suivante.

1. *Best Estimate* brut

Le *Best Estimate* brut est une constante, qui ne dépend d'aucun paramètre de rétrocession et qui est définit par :

$$BE_{brut} = BE_{net} + BE_{cédé}$$

Dans le modèle, il est alors déterminé de la façon suivante :

$$BE_{brut} = \sum_{LoB} \mathbb{E}(S)_{LoB} = 164{,}98\ M€$$

Où,

S représente la charge brute de la captive de réassurance ;

2. *Best Estimate* net de rétrocession

Lorsque la captive de réassurance cède son risque au rétrocessionnaire, le *BE* net est alors exprimé comme suit :

$$BE_{net} = \sum_{LoB} \mathbb{E}(R)_{LoB}$$

Où,

R représente la charge nette de la captive, dont la formule est rappelée ci-dessous :

$$R = \sum_i X_i - Max[Min(X_i - F, P), 0]$$

L'obtention du *Best Estimate* net dépend donc des caractéristiques du traité de rétrocession, comme l'indique le graphique 3D suivant.

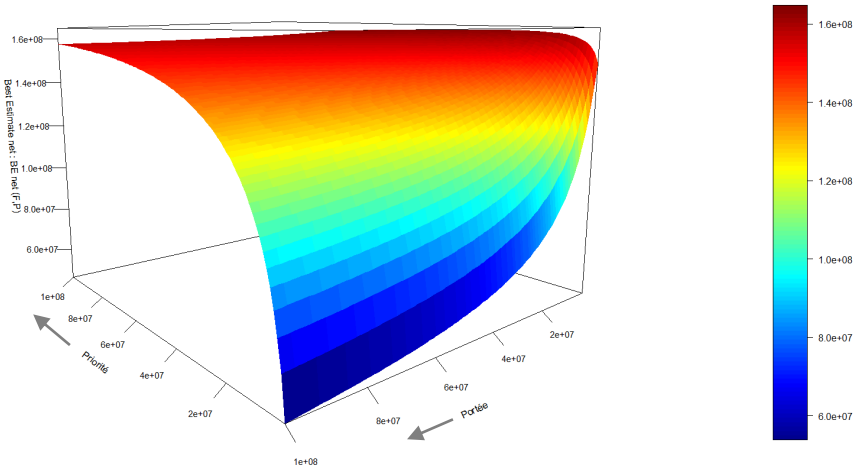

FIGURE 17 : Représentation du *BE* net en fonction de *F* et *P*

Ce *BE* est alors d'autant plus faible que la portée est grande et la priorité petite. En d'autres termes, la captive de réassurance cède d'autant plus qu'elle est couverte par le rétrocessionnaire.

L'observation de l'allure de la courbe pour différents niveaux de priorité indique également que le *BE* net décroît d'autant plus fortement que la priorité est faible.

En effet, lorsque la captive souscrit un traité proposant une faible priorité, ce traité a pour objectif de couvrir la partie dite « travaillante » du portefeuille. L'ensemble de la portée est alors régulièrement cédé au rétrocessionnaire. De ce fait, lorsque la portée augmente, le risque cédé augmente également et diminue ainsi d'autant plus le BE net.

Au contraire, lorsque la priorité est élevée, la captive cherche à se couvrir des risques rares et coûteux, ce qui explique que le risque est moins souvent cédé. Ainsi, même si la portée est augmentée, le risque cédé reste faible et le BE net ne diminue que très faiblement.

Ces remarques sont valables pour chacune des lignes d'affaires[14].

[14] Cf. Détail en annexe IV.

3. *Best Estimate* cédé

Dans le modèle, la définition du *BE* cédé est la suivante :

$$BE_{cédé} = \sum_{LoB} \mathbb{E}(C)_{LoB}$$

Où,

C représente la part cédée au rétrocessionnaire, dont la formule est rappelée ci-dessous :

$$C = \sum_{i} Max[Min(X_i - F, P), 0]$$

De ce fait, le *Best Estimate* cédé dépend également des caractéristiques de rétrocession. La surface est alors de la forme suivante.

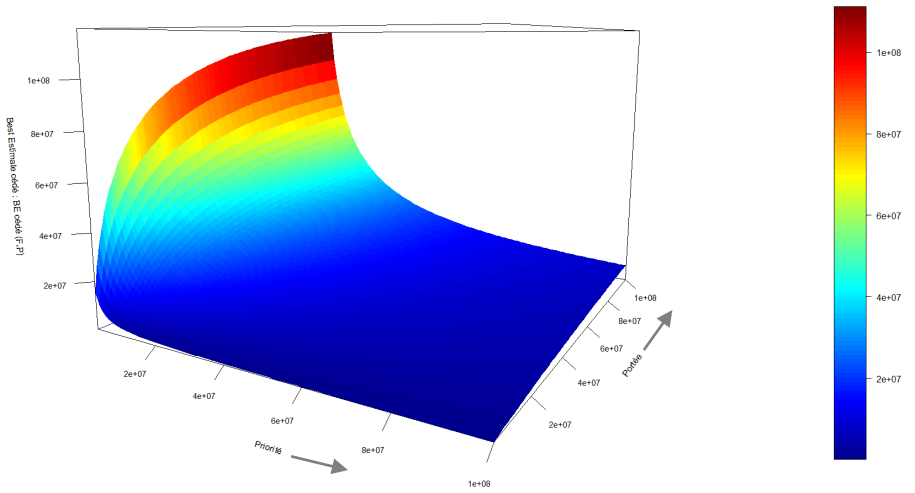

FIGURE 18 : Représentation graphique du *BE* cédé en fonction de *F* et *P*

Le *BE* brut étant constant et égal à la somme du *BE* cédé et du *BE* net, cela implique une relation négative entre ces deux termes. En ce sens, si le *BE* net diminue lorsque la portée augmente et la priorité diminue, alors inversement, le *BE* cédé augmente pour ces mêmes caractéristiques de rétrocession. Ainsi, l'observation d'une allure de courbe inversée par rapport à celle du *BE* net est cohérente.

De cette manière, le *BE* cédé est alors d'autant plus élevé, que la captive de réassurance cède ses risques (autrement dit, lorsque la priorité est faible et la portée grande).

II. Impact sur le besoin en capital et optimum de rétrocession

Dans une hypothèse de log-normalité des sinistres, les indicateurs de solvabilité (USP et SCR) sont impactés par la présence, ou non, d'un traité de rétrocession non-proportionnelle. Il s'agit dans cette partie, d'observer ces variations en fonction des valeurs prises par la portée et la priorité, et ce, pour chacune des lignes d'affaires.

1. Ligne d'affaires « Dommage »

L'étude est dans un premier temps menée sur l'ensemble des sinistres « Dommage », dont les calculs des paramètres initiaux sont détaillés dans le chapitre précédent.

a. Impact sur le coefficient de variation

Dans le cas où la cédante ne souscrit pas de contrat de rétrocession, elle doit alors faire face à une charge de sinistres de S et son coefficient de variation (CV) est de l'ordre de :

$$CV_S = 80{,}13\ \%$$

L'obtention d'un tel niveau de coefficient de variation s'explique principalement par le type de risques présents dans le portefeuille de la captive. En effet, elle présente des risques pouvant varier d'une dizaine de milliers à une centaine de millions d'euros, comme l'indique les histogrammes du chapitre précédent.

Dans le cas où la cédante a souscrit un traité de rétrocession, elle doit alors faire face à une charge de sinistres équivalente à R. Son coefficient de variation dépendra des caractéristiques du traité. En d'autres termes, il dépendra de la priorité (F) et de la portée (P), dont les variations sont présentées dans le graphique ci-dessous.

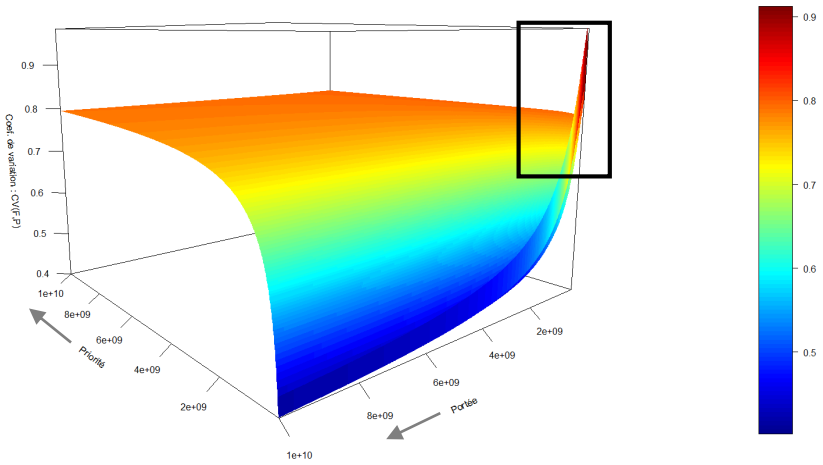

FIGURE 19 : Représentation de l'USP net « Dommage » en fonction de F et P

Ainsi, lorsque la priorité s'avère élevée, la cédante conserve la totalité de la volatilité de ses sinistres, ce qui équivaut au cas où la cédante n'aurait pas souscrit de traité de rétrocession.

En d'autres termes, elle obtient un coefficient de variation de l'ordre de :

$$CV_R(F,P) = CV_S = 80{,}13\ \%$$

A contrario, pour un niveau de priorité très faible (*Cf.* encadré noir), l'augmentation du coefficient de variation au-delà du niveau atteint pour la charge brute (80,13 %) s'explique par

la perte de stabilité liée aux petits sinistres. En effet, dans ce cas, malgré l'application d'une portée, la volatilité ne diminue que très faiblement, contrairement à la moyenne des coûts.

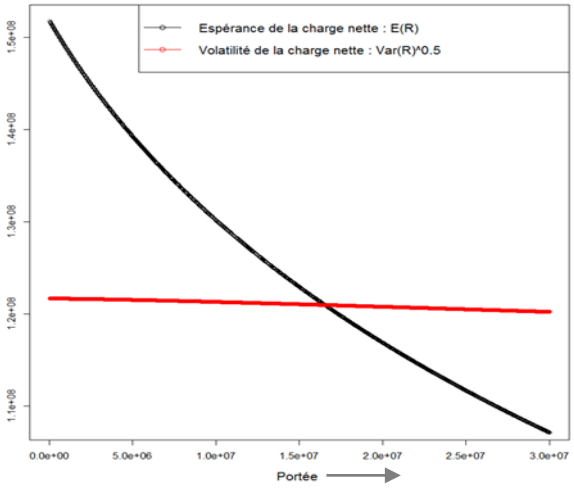

FIGURE 20 : Explication graphique de l'augmentation de l'USP pour une priorité faible

De manière générale, la surface précédente (*Cf.* Figure 19) semble indiquer que le coefficient de variation décroît d'autant plus que la priorité est petite et la portée grande. Cependant, cette surface est obtenue pour des caractéristiques de rétrocession très élevées. De plus, une convexité semble se former pour des montants de priorité plus faibles.

Afin d'observer cette convexité, zoomons (*Cf.* encadré noir de la figure 19) et pivotons cette surface. On obtient ainsi la figure suivante :

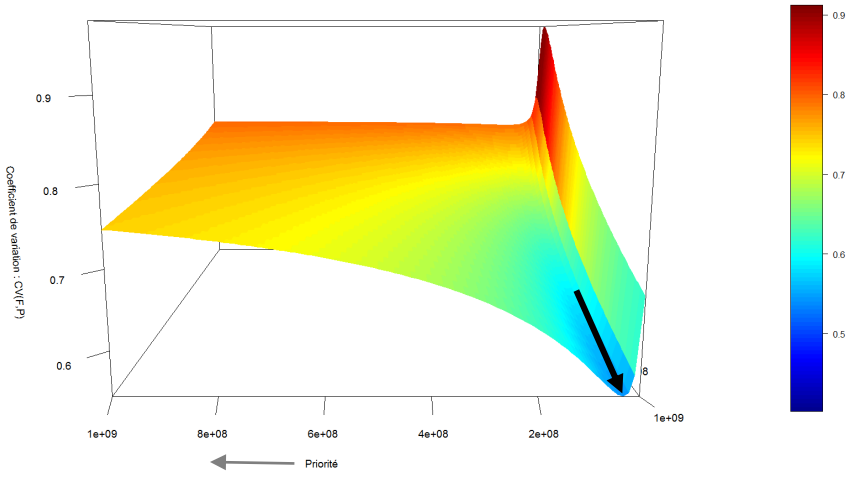

FIGURE 21 : Zoom n°1 de la surface USP net « Dommage »

À partir de cette nouvelle surface, il est possible d'observer un optimum au niveau de la convexité de la courbe (*Cf.* flèche noire). Le gain de volatilité sera alors d'autant plus grand que la portée est grande et que la priorité s'approche de l'optimum.

En zoomant d'avantage sur la surface précédente[15], nous constatons que l'optimum du coefficient de variation est obtenu pour une priorité de l'ordre de 80 M€. Avec les caractéristiques de rétrocession de son contrat (50 M€ *XS* 75 M€)[16], la captive se situe alors dans la convexité de la courbe. Son coefficient de variation est de l'ordre de :

$$CV_R(F,P) = 76{,}72\ \%$$

b. Impact sur le SCR de réserve

L'objectif de ce mémoire est de montrer comment optimiser le gain en capital par le biais de la rétrocession. Pour ce faire, nous allons maintenant étudier les variations du SCR de réserve en fonction des caractéristiques du traité et observer un optimum.

Rappelons que le SCR de réserve pour la branche « Dommage » est calculé comme suit (*Cf.* Journal officiel de l'Union Européenne [2015]) :

$$SCR_{Dom.} = 3 * CV_{R,Dom.} * BE_{net,Dom.}$$

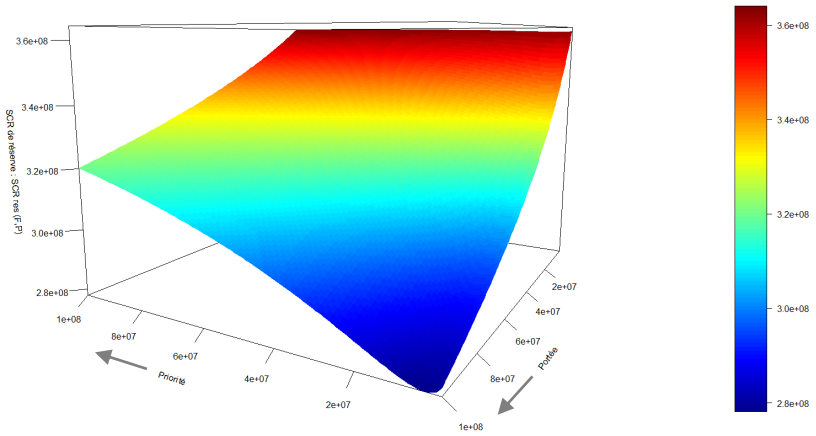

FIGURE 22 : Représentation du SCR de réserve en fonction de F et P (« Dommage »)

En zoomant d'avantage sur la convexité de la surface[17], l'optimum est observé pour une valeur de priorité de l'ordre de 5 M€. L'obtention d'un optimum de gain en SCR plus petit que l'optimum de gain en volatilité (5 M€ contre 80 M€) s'explique par la définition du SCR et l'allure de la courbe du *Best Estimate* net. En effet, lorsque la priorité est faible, la forte diminution du *BE* net inhibe l'augmentation du coefficient de variation.

Ainsi, si la captive souhaite augmenter d'avantage son gain en capital pour le risque de réserve, elle a intérêt à diminuer sa priorité dans la limite des 5 M€ et d'augmenter au maximum sa portée. Cependant, cette démarche doit être arbitrée par la captive, puisqu'elle payera le contrat d'autant plus cher, que la rétrocession sera forte.

[15] Cf. annexe V-1.
[16] Pour rappel, la lecture s'effectue ainsi : <*Portée*> *XS* <*Priorité*>.
[17] Cf. annexe V-2.

2. Ligne d'affaires « Transport »

a. Impact sur le coefficient de variation

De la même manière que précédemment, étudions l'impact d'un dispositif de rétrocession non-proportionnelle sur l'*USP* de la ligne d'affaires « Transport ». Les risques n'étant pas les mêmes et surtout, n'étant pas du même ordre de grandeur que la *LoB* « Dommage », les résultats sont modifiés, mais l'idée générale demeure.

Lorsque la captive de réassurance n'adopte pas de traité de rétrocession, le coefficient de variation est de l'ordre de :

$$CV_S = 82{,}95\ \%$$

Si elle met en place un contrat de rétrocession non-proportionnelle, l'USP semble alors d'autant plus bas que la priorité est faible et que la portée est grande. Cependant une convexité est observable pour un niveau de priorité plus faible, comme l'indique la figure ci-dessous.

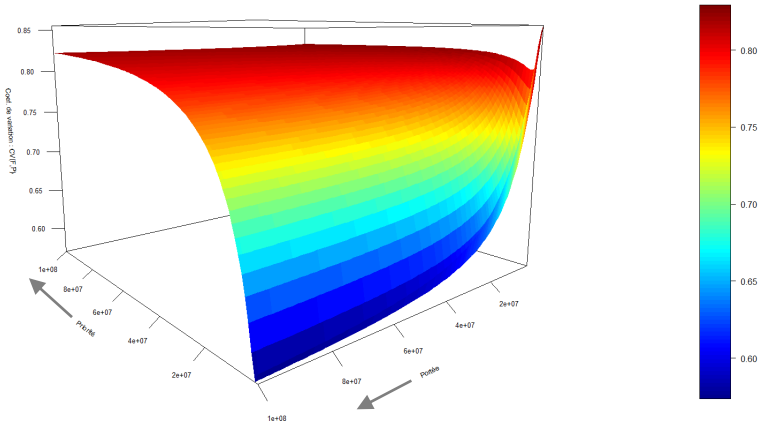

FIGURE 23 : Représentation de l'USP net en fonction de *F* et *P* (« Transport »)

Pour un traité identique à celui mis en place par la captive de réassurance : 50 M€ *XS* 75 M€, le coefficient de variation est de l'ordre de :

$$CV_R(F,P) = 82{,}00\ \%$$

Le gain de volatilité de la captive est très faible. Compte tenu du résultat obtenu, la cédante aurait intérêt à diminuer sa priorité, afin améliorer son gain de volatilité.

Cependant, il s'agit pour cette dernière d'effectuer une analyse de la convexité de la surface, afin de déterminer l'optimum de volatilité. Il est alors obtenu pour une valeur de priorité de l'ordre de 2M€[18].

[18] Cf. Annexe V-1.

b. Impact sur le SCR de réserve

De la même manière que précédemment, on observe les variations du SCR de réserve en fonction de la portée et de la priorité.

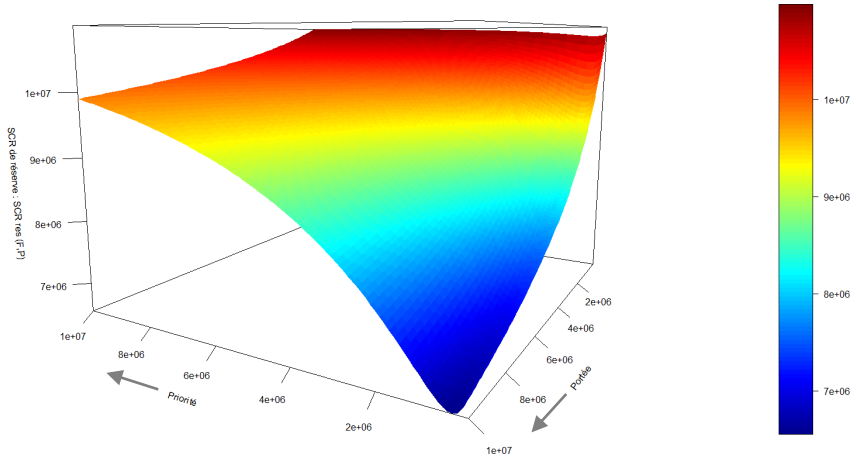

FIGURE 24 : Représentation du SCR de réserve en fonction de *F* et *P* (« Transport »)

La présence d'une convexité au niveau de la surface est à nouveau observable. En effectuant un zoom[19], nous constatons que l'optimum de SCR est obtenu pour une priorité de l'ordre de 0,4 M€.

Cependant, la diminution du niveau de priorité et/ou l'augmentation de la portée, à des fins d'optimisation, augmente le coût de rétrocession. Il s'agit donc pour la captive d'arbitrer entre ce surplus de coût et le gain engendré par la souscription du traité.

3. Ligne d'affaire « Responsabilité civile »

Pour finir, l'étude est menée pour des sinistres de type « Responsabilité Civile » (RC).

a. Impact sur le coefficient de variation

Lorsque la captive ne signe pas de traité de rétrocession, le coefficient de variation est de l'ordre de :

$$CV_S = 85{,}14\ \%$$

Lors de l'intégration d'un traité, les variations restent graphiquement identiques aux lignes d'affaires précédentes. En effet, l'USP semble d'autant plus faible que la priorité est petite et la portée grande.

[19] Cf. Annexe V-2

On obtient ainsi la surface suivante :

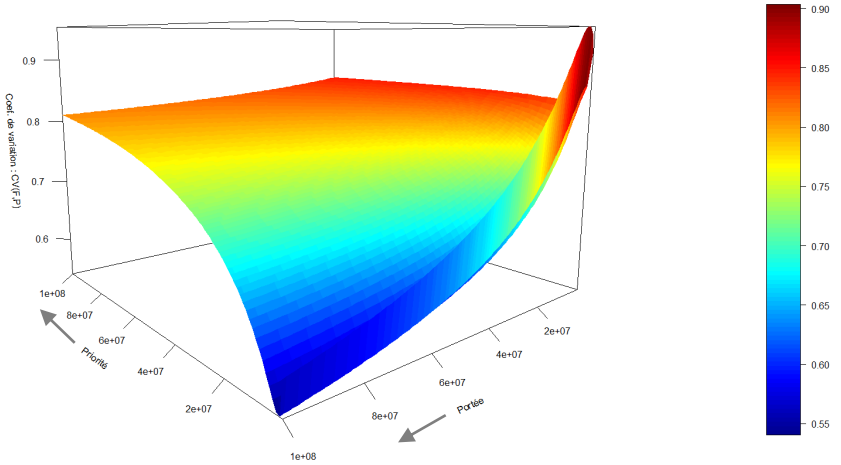

FIGURE 25 : Représentation de l'USP net en fonction de *F* et *P* (« RC »)

Pour un traité identique à celui mis en place par la captive de réassurance : 100 M€ *XS* 30 M€, le coefficient de variation est de l'ordre de :

$$CV_R(F,P) = 72{,}62\ \%$$

Le zoom[20] de la convexité observable sur la surface précédente nous indique l'existence d'un optimum, qui est atteint pour une priorité de l'ordre de 5 M€.

b. Impact sur le SCR de réserve

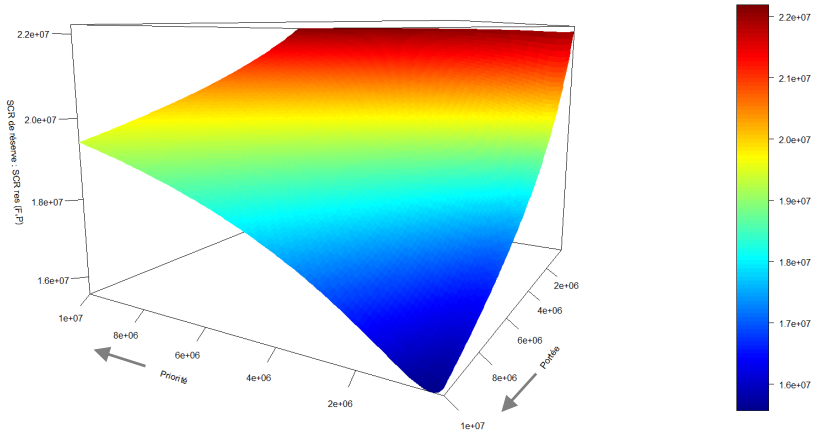

FIGURE 26 : Représentation du SCR de réserve en fonction de F et P (« RC »)

Au vu des résultats graphiques, le gain de SCR est d'autant plus grand que la portée est grande et la priorité faible, dans la limite de l'optimum. Celui-ci est obtenu pour une priorité de l'ordre de 0,4 M€[21].

[20] Cf. Annexe V-1.

[21] Cf. Annexe V-2.

4. Impact sur le SCR de contrepartie

En l'absence de rétrocession, le SCR de contrepartie est nul, puisque la question de défaut de celle-ci ne se pose pas.

Au contraire, lorsqu'un rétrocessionnaire entre en jeu, ce SCR apparaît. Il s'avère d'autant plus élevé que la note du rétrocessionnaire est basse. Afin d'optimiser au maximum son besoin en capital au titre du risque de contrepartie, la cédante a donc intérêt à choisir un rétrocessionnaire dont la santé financière est saine (ce qui induira une bonne notation), afin de minimiser au maximum son besoin en capital mobilisable au titre du risque de contrepartie.

En pratique, le rétrocessionnaire fournit généralement une garantie à la cédante, nommée *Collateral*. Il prend la forme d'un dépôt d'espèces ou d'actifs financiers. En général, ceux sont les rétrocessionnaires les moins bien notés, qui fournissent les garanties les plus élevées, réduisant ainsi le risque de contrepartie du client en cas de défaut du rétrocessionnaire. Cette pratique atténue donc l'effet de la notation sur le SCR de contrepartie et limite l'importance du *rating* dans la tarification.

Dans notre cas d'étude, la contrepartie dispose d'une excellente notation : AA-. Elle n'a donc pas d'intérêt à fournir de garanties supplémentaires à la cédante. Cela justifie donc notre hypothèse du chapitre 3, visant à mettre le *Collateral* à zéro.

Rappelons que dans cette étude, seules les expositions de type 1 sont prises en compte. Le calcul du SCR de contrepartie s'effectue alors en plusieurs étapes et dépend des caractéristiques de rétrocession (puisqu'il dépend du *BE* cédé : *Cf.* article 192 et 200 du règlement délégué (UE) 2015/35).

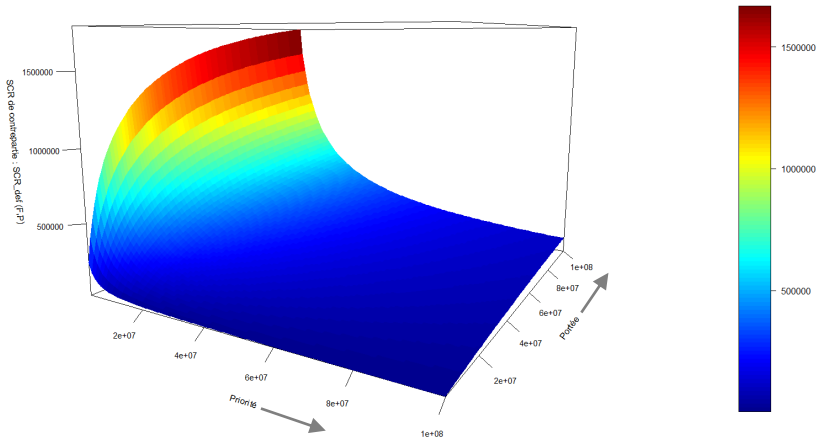

FIGURE 27 : SCR de contrepartie en fonction de *F* et *P*

L'allure de la courbe est alors similaire à celle du *BE* cédé, seuls les ordres de grandeur des montants changent. Ainsi, plus la priorité est faible et la portée grande, plus le SCR de contrepartie est important. En d'autres termes, il est d'autant plus élevé que la cédante cède son risque.

Si la notation du rétrocessionnaire venait à se dégrader de AA à B, et qu'aucune garantie (de type *Collateral*) n'était mise en place, la cédante verrait son SCR de défaut augmenter considérablement. En effet, ce SCR pourrait alors atteindre des montants de l'ordre de 50 M€ (contre 1,5 M€ pour une notation AA). L'allure de la courbe[22] resterait cependant identique à la précédente.

5. Impact sur le BSCR

Afin de simplifier et de maximiser les effets du traité de rétrocession non-proportionnelle, plusieurs hypothèses sont effectuées pour le calcul du BSCR.

Dans un premier temps, les SCR de catastrophe (SCR_{Cat}) et de rachat (SCR_{Lapse}) sont fixés à zéro pour le calcul du besoin en capital de souscription non-vie. Cette simplification permet ainsi d'accentuer l'impact d'un traité de rétrocession sur le SCR de réserve. En effet, si d'autres SCR étaient ajoutés à ce besoin en capital, le gain serait alors atténué par l'effet de diversification.

Comme nous avons pu l'observer précédemment, un gain de SCR est obtenu pour le risque de réserve, et ce, d'autant plus que la priorité est basse (dans la limite de l'optimum) et la portée élevée. Cependant, ce gain est légèrement atténué par deux effets :

- L'intégration d'une contrepartie et la possibilité qu'elle fasse défaut (SCR_{def}) ;
- L'effet de diversification entre les risques de souscription non-vie et de défaut.

Notons également que dans cette étude, le calcul du SCR global est simplifié, puisque l'impact du risque opérationnel et de l'ajustement pour participation au bénéfice ou impôt différé n'est pas pris en compte. Nous supposons donc ici que :

$$SCR_{global} = BSCR + SCR_{Op} - Adj = BSCR \qquad (3.3)$$

a. Les résultats de la captive de réassurance

Ainsi, lorsque la captive de réassurance met en place un traité de rétrocession non-proportionnelle pour chacune des lignes d'affaires, comme présenté dans le chapitre précédent, elle économise près de 9 % de son besoin en capital réglementaire, soit 35,6 M€.

[22] Graphique en annexe VI.

En M€ *Note : AA*		Avant rétrocession	Après rétrocession	Gain	Variation
SCR_{global} (*)		398 299 299	362 719 033	35 580 266	8,93%
SCR_{def}		-	109 079	-	-
SCR_{nl}		398 299 299	362 664 481	35 634 818	8,95%
	$SCR_{nlpremres}$	398 299 299	362 664 481	35 634 818	8,95%
	SCR_{Cat}	-	-	-	-
	SCR_{lapse}	-	-	-	-

(*) la matrice de corrélation, utilisée pour le calcul du BSCR, est explicitée en annexe

TABLEAU 5 : Impact de la rétrocession sur le besoin en capital (note : AA)

L'obtention de ces résultats permet à la cédante de mettre en place une stratégie de rétrocession, puisqu'elle est maintenant capable d'évaluer le niveau de primes maximales de rétrocession, qui lui est économiquement favorable. En effet, au-delà du seuil de 35,6 M€ de primes, la cédante n'a aucun intérêt à souscrire le traité, puisque le coût de celui-ci sera plus élevé que le gain en capital obtenu.

Dans le cadre de cette étude, la captive de réassurance ne cède que la partie haute de ses sinistres (ce qui se traduit par une priorité élevée). De cette manière, elle se protège contre les risques rares et coûteux. Cette tranche n'est pas souvent atteinte, ce qui explique le gain limité de SCR.

b. Cas particulier n° 1 : diminution de la notation du rétrocessionnaire

Dans le cas où la notation du rétrocessionnaire venait à être fortement diminuée par les agences de notation (passage de AA à B), et qu'aucun mécanisme de *Collateral* n'était mis en place, le gain en capital réglementaire serait diminué d'environ 1,8 M€[23].

En M€ *Note : B*		Avant rétrocession	Après rétrocession	Gain	Variation
SCR_{global} (*)		398 299 299	364 496 154	33 803 145	8,49%
SCR_{def}		-	3 636 140	-	-
SCR_{nl}		398 299 299	362 664 481	35 634 818	8,95%
	$SCR_{nlpremres}$	398 299 299	362 664 481	35 634 818	8,95%
	SCR_{Cat}	-	-	-	-
	SCR_{lapse}	-	-	-	-

(*) la matrice de corrélation, utilisée pour le calcul du BSCR, est explicitée en annexe

TABLEAU 6 : Impact de la rétrocession sur le besoin en capital (note : B)

La proportion de risque cédé étant faible dans ce cas d'étude, l'impact de la notation du rétrocessionnaire est alors discutable. Cependant, si elle cède une quantité de risque plus importante, la notation de la contrepartie peut alors avoir des conséquences non-négligeables (*Cf.* cas particulier n°3).

[23] Résultat obtenu en effectuant la différence entre le gain de capital précédent (35,6 M€) et les 33,8 M€ obtenu dans cet exemple.

c. *Cas particulier n° 2 : Mise en place d'un traité de rétrocession plus optimal*

Prenons maintenant l'exemple de traités optimisant l'impact de la rétrocession sur le gain en capital. Pour ce faire, nous utilisons les optimums déterminés précédemment.

Soient des contrats de la forme :

- **Dommage** : 100 M€ *XS* 5 M€ (augmentation de la portée et diminution de la priorité)
- **Transport** : 100 M€ *XS* 0,4 M€ (augmentation de la portée et diminution de la priorité)
- **RC** : 100 M€ *XS* 0,4 M€ (diminution de la priorité)

Il est important de noter qu'une telle modification de traité entraîne une augmentation très importante des coûts de rétrocession. En effet, la diminution de la priorité amène le rétrocessionnaire à couvrir la partie dite « travaillante » du portefeuille. De cette manière, il est amené à couvrir la quasi-totalité des sinistres, dans la limite de la portée (c'est-à-dire dans la limite de 100 M€). De plus, l'augmentation de la portée pour les lignes d'affaires « Dommage » et « Transport » suppose que l'action du rétrocessionnaire est d'autant plus grande.

Nous observons alors le gain en capital suivant :

En M€ ***Note : AA***		**Avant rétrocession**	**Après rétrocession**	**Gain**	**Variation**
SCR_{global} (*)		398 299 299	292 281 917	106 017 382	26,62%
SCR_{def}		-	1 259 336	-	-
SCR_{nl}		398 299 299	291 650 214	106 649 085	26,78%
	$SCR_{nlpremres}$	398 299 299	291 650 214	106 649 085	26,78%
	SCR_{Cat}	-	-	-	-
	SCR_{lapse}	-	-	-	-

(*) la matrice de corrélation, utilisée pour le calcul du BSCR, est explicitée en annexe

TABLEAU 7 : Impact de la rétrocession modifiée sur le besoin en capital (note : AA)

Dans ce cas particulier, le gain en capital est presque triplé comparativement aux traités de rétrocession actuellement mis en place par la captive de réassurance. Dans ce contexte, la cédante peut évaluer le niveau prime maximale de rétrocession qui lui est économiquement favorable a 106,0 M€.

Il s'agit donc pour la captive d'effectuer non seulement un arbitrage entre le coût de rétrocession et son gain en capital, mais également de s'assurer qu'un tel dispositif est réalisable et disponible sur le marché.

d. *Cas particulier n°3 : dégradation de la notation du rétrocessionnaire*

Pour cet exemple, nous reprenons les caractéristiques de rétrocession du cas particulier n°2. Et de la même manière que le cas particulier n°1, nous considérons que la notation du rétrocessionnaire est diminuée par les agences de notation (de AA à B) et qu'aucun *Collateral* n'est proposé en compensation.

Nous observons alors les résultats suivants :

En M€ Note : B		Avant rétrocession	Après rétrocession	Gain	Variation
SCR_{global} (*)		398 299 299	314 746 941	83 552 358	21,0%
SCR_{def}		-	41 979 981	-	-
SCR_{nl}		398 299 299	291 650 214	106 649 085	26,8%
	$SCR_{nlpremres}$	398 299 299	291 650 214	106 649 085	26,8%
	SCR_{Cat}	-	-	-	-
	SCR_{lapse}	-	-	-	-

(*) la matrice de corrélation, utilisée pour le calcul du BSCR, est explicitée en annexe

TABLEAU 8 : Impact de la rétrocession modifiée sur le besoin en capital (note : B)

Dans ce cas particulier, l'impact de la notation du rétrocessionnaire n'est plus négligeable, puisqu'il s'élève à 42,0 M€. De plus, la cédante perd environs 22,5 M€[24] de gain en capital. Cet écart souligne l'importance pour la cédante de choisir un rétrocessionnaire présentant une bonne situation financière ou un *Collateral* suffisamment grand pour compenser cette perte.

III. Impact sur le bilan prudentiel

L'introduction d'un dispositif de rétrocession influence non seulement l'indicateur principal de solvabilité (SCR), mais également l'ensemble des postes du bilan prudentiel. Les objectifs et les stratégies étant variables d'une compagnie à une autre, l'analyse de l'ensemble des impacts permet ainsi de cibler au mieux les contrats de rétrocession optimisant leurs gains et leurs objectifs stratégiques.

Les bilans avec et sans rétrocession sont alors de la forme suivante :

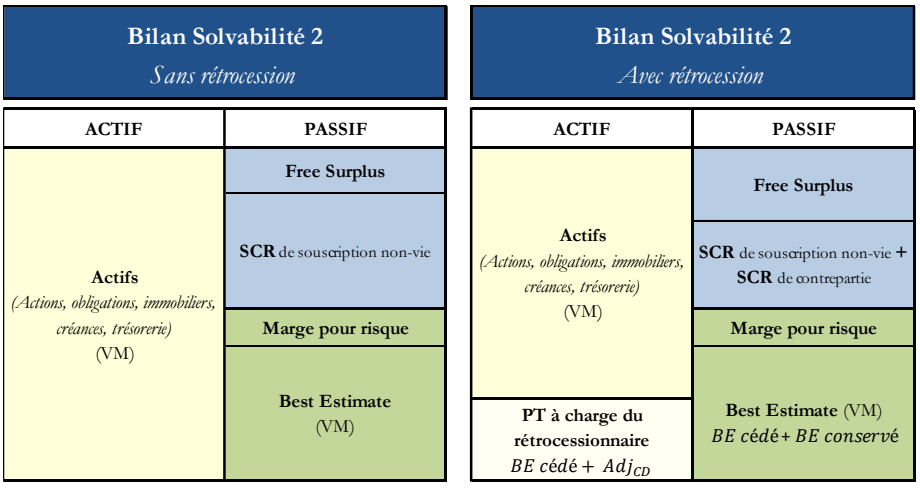

FIGURE 28 : Impact de la rétrocession sur le bilan Solvabilité 2

[24] Résultat obtenu en effectuant la différence entre le gain de capital précédent (106,0 M€) et les 83,6 M€ obtenu dans cet exemple.

Sans modélisation numérique, nous constatons que l'introduction d'une contrepartie, engendrée par le traité de rétrocession, a un impact sur le bilan. En effet, nous observons à l'actif, une provision technique à charge du rétrocessionnaire, et au passif, la présence d'un SCR de contrepartie venant modifier le niveau de capital nécessaire.

L'unique poste n'étant pas modifié est le *Best Estimate*. En effet, l'article 77-2 de la Directive 2009/138/CE (*Cf.* Journal officiel de l'Union Européenne [2009]) souligne que la meilleure estimation est toujours « évaluée brute, sans déduction des créances découlant des contrats de réassurance ou de rétrocession ».

1. Les résultats de la captive de réassurance

Pour mettre en œuvre l'application numérique, reprenons l'exemple de la captive de réassurance couvrant des risques de type « Dommage », « Transport » et « Responsabilité Civile ». Afin d'observer les impacts sur son bilan, nous utiliserons les caractéristiques de rétrocession indiquées au chapitre précédent et rappelées ci-dessous :

- Notation du rétrocessionnaire : AA- ;
- Choses : 50 M€ *XS* 75 M€ ;
- Transport : 50 M€ *XS* 75 M€ ;
- RC : 100 M€ *XS* 30 M€.

a. Analyse du Best Estimate

Comme indiqué précédemment, le niveau global du *Best Estimate* (brut) reste inchangé suite à l'instauration d'un dispositif de rétrocession. Cependant, le détail du calcul est modifié, puisqu'une partie des provisions est transférée au rétrocessionnaire. Celle-ci est ensuite ajustée par le potentiel défaut de la contrepartie.

BE et PT à charge du rétrocessionnaire		
En M€ ***Note : AA***	Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET
BE cédé	0 M€	7,272 M€
BE conservé (*)	164,983 M€	157,711 M€
Adj_{CD}	0 M€	-0,002 M€
PT à charge du rétrocessionnaire	**0 M€**	**7,270 M€**
BE réellement cédé	0 M€	7,270 M€
BE réellement conservé	164,983 M€	157,713 M€
Best Estimate	164,983 M€	164,983 M€

(*) représente le *BE* net.

TABLEAU 9 : Impact de la rétrocession sur le *BE* et sur la créance du rétrocessionnaire

Dans ce contexte, la notation élevée du rétrocessionnaire assure une cession effective quasi-complète du *BE* cédé, puisque le montant de l'ajustement en découlant est très faible. En effet, la provision technique à charge du rétrocessionnaire (*BE* réellement cédé) est de 7,270 M€, contre 7,272 M€ sans ajustement de contrepartie.

b. *Analyse de la marge pour risque*

Marge pour risque		
En M€ ***Note : AA***	Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET
CoC	6%	6%
Duration	5,60	5,60
SCR	398,30 M€	362,72 M€
Marge pour risques	**133,83 M€**	**121,88 M€**

TABLEAU 10 : Impact de la rétrocession sur la marge pour risque

Le transfert d'une partie des risques à un rétrocessionnaire permet à la cédante de diminuer sa marge de prudence. Cet impact, dont l'origine est la dépendance de la marge pour risque au besoin de capital, aura pour conséquence une augmentation des ressources de l'entreprise.

c. *Analyse des fonds propres et du ratio de solvabilité*

Dans le cadre de cette étude, le niveau d'actifs avant rétrocession est une donnée exogène, dont le montant est fixé à 1 700,0 M€. Au moment où la cédante met en place le traité, deux événements se produisent :

- Une partie des actifs est vendue sur les marchés, afin de régler la prime de rétrocession ;
- Un nouvel actif apparaît : la provision technique en charge du rétrocessionnaire.

Ainsi l'actif après rétrocession correspond à :

$$Actif_{après\ réass.} = Actif_{avant\ réass.} + PT_{rétrocessionnaire} - Niveau\ de\ primes\ de\ rétrocession$$

Prenons pour cet exemple, un niveau de primes de rétrocession de 15 M€. Une explication plus détaillée des stratégies de pilotage de ce niveau de prime sera développée dans la partie suivante.

Fonds propres et Ratio de Solvabilité			
En M€ ***Note : AA***		Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET
Actifs (Donnée exogène)		1 700,00 M€	1 692,27 M€
	PT à charge du rétrocessionnaire	0 M€	7,27 M€
	Prime de rétroœs.	0 M€	-15,00 M€
Passifs (PT)		298,82 M€	286,86 M€
SCR		398,30 M€	362,72 M€
Fonds Propres = Actifs - Passifs		**1 401,18 M€**	**1 405,41 M€**
Free Surplus = FP - SCR		**1 002,88 M€**	**1 042,69 M€**
Ratio de Solvabilité		**352%**	**387%**

TABLEAU 11 : Impact de la rétrocession sur les FP et sur le ratio de solvabilité

À partir des calculs effectués précédemment, nous déduisons ainsi le niveau de fonds propres de la captive de réassurance, calculé par différence entre les actifs et les passifs. Une fois le niveau de capital déterminé, le montant de capital excédentaire (*Free Surplus*) en découle. Il correspond, en effet, à la différence entre le montant des fonds propres et le montant du SCR.

d. Le bilan prudentiel

La mise en place d'un dispositif de rétrocession de ce type implique donc, au niveau du bilan, les évolutions suivantes :

- Une **diminution des passifs**, liée à la diminution de la marge pour risque ;
- Une **augmentation du *Free Surplus***, liée à la diminution du besoin en capital ;
- Une **légère augmentation des fonds propres**, atténuée par l'ajustement de la provision technique à charge du rétrocessionnaire ;

Le bilan prudentiel est alors modifié comme suit lors de l'introduction d'un dispositif de rétrocession :

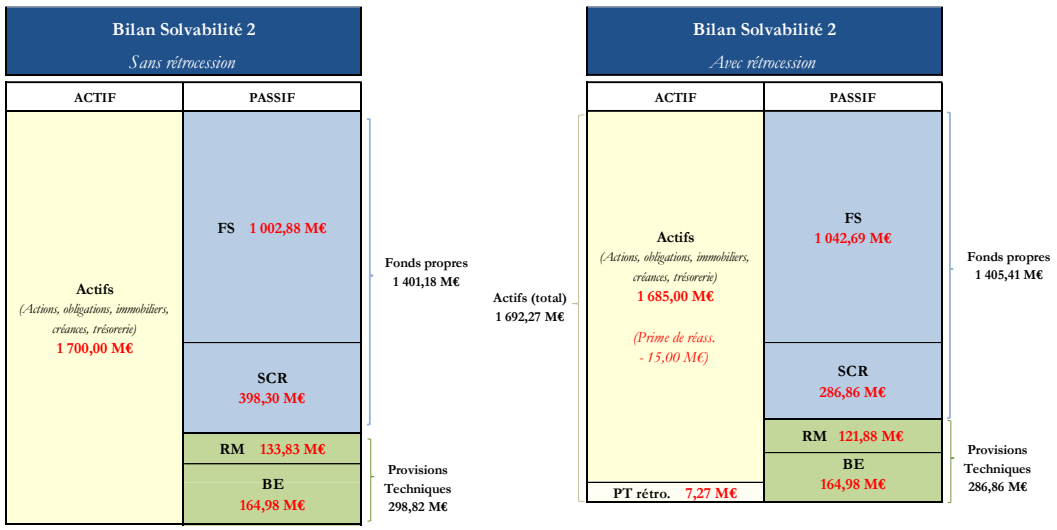

FIGURE 29 : Bilan prudentiel avant et après rétrocession non-proportionnelle

2. Cas particuliers

Reprenons, pour cet exemple, les cas particuliers n°2 et n°3 de la section précédente et observons les impacts de la rétrocession sur les postes du bilan. Les deux cas étudiés sont alors les suivants :

- La captive optimise son traité (*Cf.* cas particulier n°2). Rappelons que les caractéristiques de rétrocession sont les suivantes :
  - Notation : AA- ;
  - Choses : 100 M€ *XS* 5 M€ ;
  - Transport : 100 M€ *XS* 0,4 M€ ;
  - RC : 100 M€ *XS* 0,4 M€.

- La notation du rétrocessionnaire est abaissée de AA à B, dans le cadre du traité « optimal » précédent (*Cf.* cas particulier n°3).

a. *Analyse du Best Estimate*

BE et PT à charge du rétrocessionnaire			
En M€	Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET **(cas part. n°2)**	Après rétrocession NET **(cas part. n°3)**
BE cédé	0 M€	83,96 M€	83,96 M€
BE conservé (*)	164,98 M€	81,02 M€	81,02 M€
Adj_{CD}	**0 M€**	**-0,02 M€**	**-10,31 M€**
PT à charge du rétrocessionnaire	**0 M€**	**83,94 M€**	**73,65 M€**
BE réellement cédé	0 M€	83,94 M€	73,65 M€
BE réellement conservé	164,98 M€	81,05 M€	91,33 M€
Best Estimate	164,98 M€	164,98 M€	164,98 M€

(*) représente le *BE* net.

TABLEAU 12 : Impact de la rétrocession sur le *BE* et sur la créance du rétrocessionnaire (*Cf.* cas part. n°2 et 3)

L'optimisation du traité de rétrocession entraîne une cession de risques beaucoup plus importante. En effet, le BE cédé de cet exemple est plus de dix fois supérieur au BE cédé obtenu avec les conditions de rétrocession actuelle de la captive (passage de 7 M€ à 83 M€).

Concernant l'ajustement pour défaut de contrepartie, il reste proportionnellement très faible, lorsque la notation du rétrocessionnaire est bonne. Cependant, si cette dernière venait à être dégradée, cet ajustement ne serait plus négligeable (puisqu'il représenterait 12 % du *BE* cédé). Ceci souligne ainsi l'importance pour la captive de choisir un rétrocessionnaire possédant une bonne stabilité financière, et ce, d'autant plus qu'elle cède son risque.

b. *Analyse de la marge pour risque*

Marge pour risque			
En M€	Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET **(cas part. n°2)**	Après rétrocession NET **(cas part. n°3)**
CoC	6%	6%	6%
Duration	5,60	5,60	5,60
SCR	398,30 M€	292,28 M€	314,75 M€
Marge pour risques	**133,83 M€**	**98,21 M€**	**105,76 M€**

TABLEAU 13 : Impact de la rétrocession sur la marge pour risque (*Cf.* cas part. n°2 et n°3)

L'optimisation du traité de rétrocession diminue fortement le niveau de SCR, et ce, d'autant plus que la notation du rétrocessionnaire est bonne. Par conséquent, le niveau de marge pour risque, dont l'obtention découle du SCR, est alors également diminué.

c. *Analyse des fonds propres et du ratio de solvabilité*

Fonds propres et Ratio de Solvabilité				
En M€		Avant rétrocession BRUT	Après rétrocession NET **(cas part. n°2)**	Après rétrocession NET **(cas part. n°3)**
Actifs (Donnée exogène)		1 700,00 M€	1 700,00 M€	1700,00 M€
	PT à charge du rétrocessionnaire	0 M€	83,94 M€	73,65 M€
	Prime de rétroces.	0 M€	-83,94 M€	-73,65 M€
Passifs (PT)		298,82 M€	263,19 M€	270,74 M€
SCR		398,30 M€	292,28 M€	314,75 M€
Fonds Propres = Actifs - Passifs		1 401,18 M€	1 436,81 M€	1429,26 M€
Free Surplus = FP - SCR		1 002,88 M€	1 144,52 M€	1114,51 M€
Ratio de Solvabilité		**352%**	**492%**	**454%**

TABLEAU 14 : Impact de la rétrocession sur les FP et sur le ratio de solvabilité (*Cf.* cas part. n°2 et n°3)

La diminution du besoin en capital a également un impact conséquent sur le ratio de solvabilité de la compagnie. En effet, celui-ci est augmenté de plus de 100 %, même dans le cas où la notation du rétrocessionnaire est de B.

De ce fait, si la captive a pour objectif stratégique d'augmenter son ratio de solvabilité, elle a intérêt à optimiser sa rétrocession, en diminuant la priorité (dans la limite de l'optimum) et en augmentant sa portée. Dans ce contexte, le choix d'un rétrocessionnaire présentant une bonne situation financière est amplement conseillé, au risque de voir le niveau de *BE* cédé fortement diminué par l'ajustement.

IV. Stratégies de rétrocession

1. Arbitrages et stratégies

En transférant une partie du risque au rétrocessionnaire, la cédante diminue sa volatilité de sinistres, et ce, d'autant plus que la couverture est grande. Cependant, ce transfert n'est possible qu'à la condition qu'elle verse une prime en contrepartie des risques supportés par le rétrocessionnaire. La part du résultat cédée est alors d'autant plus élevée que la couverture est grande. La cédante se voit ainsi contrainte à arbitrer entre le niveau de cession du risque et le coût de celle-ci. L'actualité règlementaire des entreprises d'assurance et de réassurance non-vie intensifie cette réflexion d'arbitrage, puisqu'elle introduit un nouvel outil de décision : le niveau de capital.

Dans le cadre de la nouvelle réforme Solvabilité 2, le calcul du SCR est effectué à la fois brut et net de rétrocession. Les cédantes sont ainsi capables d'évaluer, via la formule standard et les USP, un gain en capital lié à l'introduction d'un tel dispositif.
En effet, comme nous avons pu l'observer précédemment, le gain maximal de SCR est identifiable au niveau de la convexité de la courbe. L'optimum, dont les coordonnées dépendent des caractéristiques des risques et de la notation de la rétrocession, est alors obtenu pour un niveau de priorité (non nul) bien précis et une portée infinie. De façon plus générale,

le gain est d'autant plus grand que la priorité est faible (dans la limite de l'optimum) et la portée importante. En d'autres termes, il est d'autant plus grand que la cédante transfert son risque au rétrocessionnaire.

Lors de sa conférence du 24 juillet 2015 au sein de PartnerRe, G. MARET souligne qu'au-delà des arbitrages auxquels la cédante doit faire face, s'ajoute un ensemble de décisions relatives aux objectifs et aux stratégies visés par son conseil d'administration. De ce fait, il est intéressant d'observer non seulement l'impact de la rétrocession sur l'ensemble du bilan, mais également les fluctuations de son ratio de solvabilité.

Ainsi, l'observation du ratio de solvabilité en fonction de la portée et de la priorité indique une contribution directe du dispositif de rétrocession à l'amélioration de la marge de solvabilité. De plus, l'étude de l'ajustement du *BE* cédé indique que celui-ci est d'autant plus grand que le risque cédé est élevé et que la notation est mauvaise. Ceci souligne donc l'importance pour la cédante d'avoir un rétrocessionnaire possédant une bonne notation, et ce, d'autant plus que la couverture est grande.

2. Pilotage des stratégies de rétrocession

Suite aux différents arbitrages et analyses précédents, la cédante connaît maintenant le niveau de risque qu'elle souhaite céder et le type de rétrocessionnaires avec lequel elle va traiter. Grâce aux différents calculs effectués dans les chapitres précédents, elle est également capable de connaître la fourchette de prix, qui est justifiable de la part du rétrocessionnaire et qui lui est économiquement favorable. Ainsi, pour contenter les deux parties, cette fourchette de prix se situe entre les deux bornes suivantes:

- **Borne inférieure :** qui est égale aux provisions techniques à la charge du rétrocessionnaire. Il vise ainsi à couvrir au minimum son niveau de provisions, via cette prime ;
- **Borne supérieure :** qui est égale au gain de SCR. Grâce à la nouvelle réforme Solvabilité 2, la cédante est capable de donner le seuil maximum, au-delà duquel le contrat ne lui est plus favorable.

De cette manière, en raisonnant en termes de coût en capital sous « Solvabilité 2 », la fourchette de prix, pour laquelle le traité est acceptable, est la suivante :

$$PT_{\text{à charge du rétrocessionnaire}} < Niveau\ de\ primes\ de\ rétrocession < Gain\ de\ SCR$$

En observant les variations du ratio de solvabilité dans la fourchette de prix de rétrocession (définie précédemment), la cédante a la possibilité de connaître le niveau de primes de rétrocession associé à son niveau de ratio. Elle est ainsi capable de répondre aux attentes particulières de son conseil d'administration.

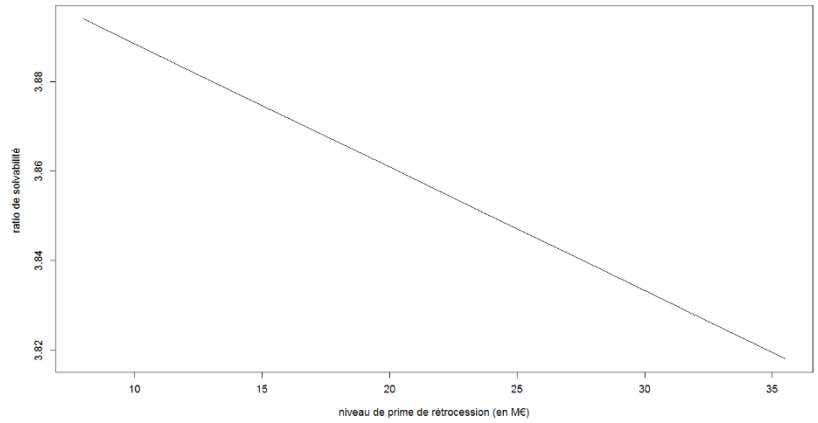

FIGURE 30 : Ratio de solvabilité en fonction du niveau de primes de rétrocession

L'ensemble de ces nouveaux aspects permet ainsi à la cédante d'évaluer les contrats économiquement favorables, d'estimer les prix de rétrocession dont une négociation est souhaitable et de choisir le contrat le plus adapté à ses besoins et ses objectifs stratégiques. Une fois la stratégie de rétrocession déterminée, la cédante doit alors choisir son contrat de rétrocession en fonction des contrats possibles et disponibles sur le marché.

Partie III :

Extension à un cadre dynamique

Chapitre 9

Projection du bilan

L'approche statique précédente a permis de déterminer les montants des différents postes du bilan et d'analyser les impacts de la rétrocession non-proportionnelle sur les différents indicateurs de solvabilité. Cependant, le modèle mis en place propose une vision légèrement biaisée de la réalité, puisqu'il ne tient, en effet, pas compte de la dimension temporelle et ne prend, par conséquent, pas en compte l'écoulement des sinistres dans le temps.

Ainsi, dans cette approche dynamique, nous tentons, à l'aide de relations de récurrence et de simulations, de rendre notre modèle plus en adéquation avec la réalité actuarielle, en considérant l'écoulement des postes du bilan dans le temps, ainsi qu'en appliquant des aléas aux *Best Estimate* déterminés précédemment.

I. Dynamique du bilan

À partir du modèle de l'approche statique, nous avons estimé l'ensemble des postes du bilan à une date *t*. Le bilan prudentiel est alors de la forme suivante :

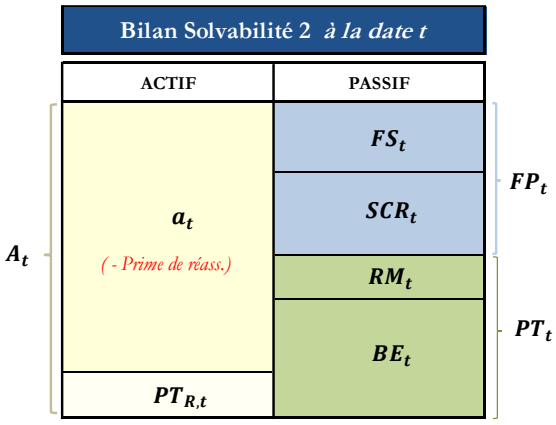

FIGURE 31 : Bilan prudentiel à la date *t*

La projection des différents agrégats du bilan, sur l'horizon de projection des flux, permet ainsi à la cédante d'évaluer son bilan à chaque date.

En pratique, le contrat de rétrocession est conclu sur un portefeuille fermé. De ce fait, nous nous plaçons en situation de « *run-off* », en considérant l'arrêt de toute souscription d'affaires nouvelles sur le portefeuille de risques.

La prise en compte de productions nouvelles supposerait alors la souscription d'avenants, entraînant des primes de rétrocession complémentaires. Ce cas n'est cependant pas traité dans cette approche dynamique.

1. Les cadences d'écoulement des provisions

Avant de commencer le processus de récurrence, il convient de déterminer à partir du triangle de règlement de la cédante, les cadences d'écoulement des provisions (Cad_t). Il s'agit alors d'estimer la partie inférieure du triangle à partir de la méthode classique de provisionnement : Chain-Ladder[25].

Le vecteur des cadences d'écoulement des provisions est alors calculé de la façon suivante :

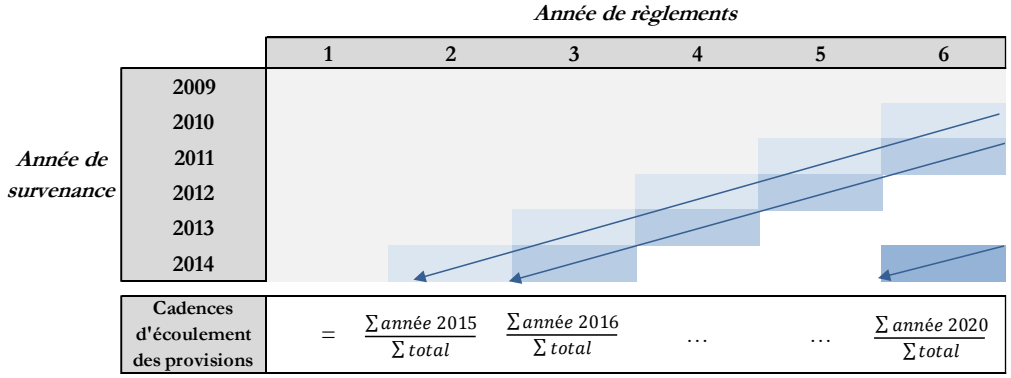

FIGURE 32 : Calcul des cadences d'écoulement des provisions

Ces cadences représentent ainsi le rythme de paiements de la charge des sinistres. Elles sont généralement exprimées en pourcentage.

2. Mise en place de la récurrence

En utilisant les cadences d'écoulement déterminées ci-dessus, et en appliquant les récurrences suivantes, nous déterminons les montants des postes du bilan pour chacune des années de projection.

Dans un contexte de « *run-off* », le stock de provisions est déroulé dans le temps jusqu'à leurs épuisements complets. En d'autres termes, les différentes récurrences suivantes sont itérées jusqu'à ce que $BE_t = 0$.

$$A_{t+1} = A_t * (1 + r_{t+1}) - Cad_{t+1} * BE_t$$

Où,

A_{t+1} : représente l'actif à la date t+1 ;
r_{t+1} : représente le taux de rendement de l'actif en t+1 ;
Cad_{t+1} : (en %) représente la cadence d'écoulement des provisions en t+1 ;
BE_t : représente le *Best Estimate* en t.

[25] Détail de la méthode Chain-Ladder en annexe VIII.

$$BE_{t+1} = BE_t - Cad_{t+1} * BE_t$$

Où,

BE_{t+1} : représente le Best Estimate en t+1 ;
Cad_{t+1} : (en %) représente la cadence d'écoulement des provisions en t+1.

$$RM_{t+1} = RM_t * \frac{BE_{t+1}}{BE_t}$$

Où,

RM_{t+1} : représente la marge pour risque en t+1 ;
BE_{t+1} : représente le *Best Estimate* en t+1.

$$FP_{t+1} = A_{t+1} - (BE_{t+1} + RM_{t+1})$$

Où,

FP_{t+1} : représente les fonds propres à la date t+1 ;
A_{t+1} : représente l'actif à la date t+1 ;
BE_{t+1} : représente le *Best Estimate* en t+1 ;
RM_{t+1} : représente la marge pour risque en t+1.

La détermination du SCR aux différentes dates repose sur une hypothèse déjà utilisée lors de la démonstration du calcul simplifié de la marge pour risque[26]. Cette hypothèse est la suivante : le besoin en capital est proportionnel au volume d'engagement.

$$SCR_{t+1} = k * BE_{t+1}$$

Où,

SCR_{t+1} : représente le besoin en capital à la date t+1 ;
BE_{t+1} : représente le *Best Estimate* en t+1 ;
k : (constante) représente le facteur de proportionnalité.

Le facteur de proportionnalité est alors déterminé à partir du bilan initial : $k = \frac{SCR_0}{BE_0}$.

II. Mise en application

À partir du bilan initial de la captive de réassurance, dont les montants sont issus du modèle de l'approche statique, il s'agit d'effectuer les différentes récurrences précédentes sur les douze années d'écoulement des provisions.

Au vue des taux de rendement actuels (proche de zéro), nous simplifions l'étude en supposant que ces derniers sont nuls.

[26] *Cf.* annexe II.

Les projections numériques du bilan sont alors les suivantes :

Facteur de proportionnalité	2,199

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6	t = 7	t = 8	t = 9	t = 10	t = 11	t = 12
Cadence d'écoulement des provisions		18,02%	12,62%	12,27%	11,99%	11,41%	6,91%	6,61%	6,05%	5,54%	3,46%	2,84%	2,27%
Écoulement des provisions en €		29,7 M€	20,8 M€	20,2 M€	19,8 M€	18,8 M€	11,4 M€	10,9 M€	10,0 M€	9,1 M€	5,7 M€	4,7 M€	3,7 M€
Actif	**1692,3 M€**	1662,5 M€	1641,7 M€	1621,5 M€	1601,7 M€	1582,9 M€	1571,5 M€	1560,5 M€	1550,6 M€	1541,4 M€	1535,7 M€	1531,0 M€	1527,3 M€
Best Estimate	**165,0 M€**	135,3 M€	114,4 M€	94,2 M€	74,4 M€	55,6 M€	44,2 M€	33,3 M€	23,3 M€	14,1 M€	8,4 M€	3,7 M€	0 M€
Marge pour risque	**121,9 M€**	99,9 M€	84,5 M€	69,6 M€	55,0 M€	41,1 M€	32,6 M€	24,6 M€	17,2 M€	10,4 M€	6,2 M€	2,8 M€	0 M€
Fonds propres	**1405,4 M€**	1427,4 M€	1442,8 M€	1457,7 M€	1472,3 M€	1486,2 M€	1494,7 M€	1502,7 M€	1510,1 M€	1516,8 M€	1521,1 M€	1524,5 M€	1527,3 M€
Capital de Solvabilité Requis	**362,7 M€**	297,4 M€	251,6 M€	207,1 M€	163,6 M€	122,2 M€	97,1 M€	73,1 M€	51,2 M€	31,1 M€	18,5 M€	8,2 M€	0 M€

TABLEAU 15 : Projection du bilan sur 12 ans

Le besoin en capital étant proportionnel au *Best Estimate*, l'écoulement de ce dernier entraîne un écoulement proportionnel et similaire du SCR. De la même manière, la marge pour risque s'écoule jusqu'à atteindre zéro, puisqu'elle dépend intégralement du SCR.

En parallèle, l'actif est diminué de la cadence d'écoulement à chaque pas de temps *t*. En pratique, cette diminution est légèrement atténuée par le taux de rendement de l'actif.

La décroissance plus fortes des provisions techniques par rapport à l'actif (observable sur le graphique ci-dessous) entraîne une légère augmentation des fonds propres. En effet, ces derniers sont exprimés comme la différence des actifs et des provisions techniques.
À l'horizon de projection, le montant de provisions techniques étant nul, les fonds propres atteignent le niveau d'actif. On retrouve ainsi l'équilibre : $Actif = Passif$ (où le passif est égal aux fonds propres)

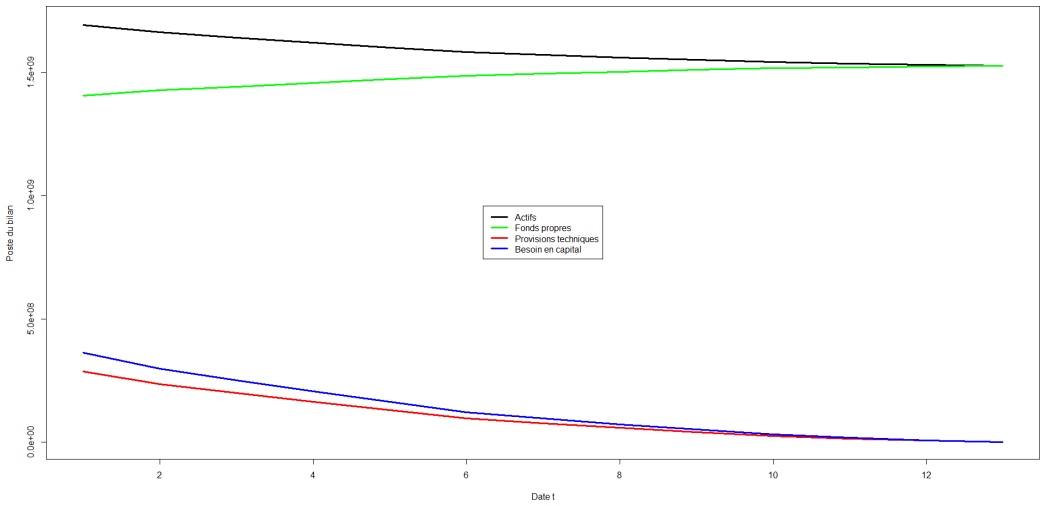

FIGURE 33 : Observation graphique de la projection du bilan

Chapitre 10

Aléa sur les provisions

Lors de l'approche statique, le *Best Estimate* a été obtenu comme la moyenne d'un modèle collectif avec un nombre N de sinistres (donnés par une loi de Poisson) et une charge X_i (donnée par une loi log-normale). Afin d'évaluer la marge d'erreur potentielle du modèle précédent, un aléa est ajouté aux provisions statiques. Pour ce faire, nous simulons des réalisations de *Best Estimate* en faisant varier le nombre de sinistres, puis, nous effectuons une projection du bilan sur chacun des tirages réalisés.

I. Impact de l'aléa sur les indicateurs de solvabilité

L'aléa du nombre de sinistres entraîne différents impacts sur les indicateurs de solvabilité. La simulation de 10 000 scénarii, nous permet ainsi d'évaluer, d'une part, la tendance générale de chacun des indicateurs en fonction du nombre de sinistres, et, d'autre part, la marge d'erreur possible des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Le nombre moyen de sinistres de la captive de réassurance, pour l'ensemble des lignes d'affaires en portefeuille, est de l'ordre de 71. La simulation de cette variable par une loi de poisson entraîne une variation du nombre de sinistres entre 40 et 100. Les combinaisons de nombres moyens de sinistres par ligne d'affaires étant multiples, une marge d'erreur est alors observée pour chacun des montants. Ces deux aspects réunis forment alors un nuage de points, que nous observerons par la suite.

1. Étude du *Best Estimate*

Par définition, le *Best Estimate* représente le montant que la captive doit accumuler, afin de garantir à tout moment, le règlement intégral de ses engagements. Ainsi, plus le nombre de sinistres augmentent, plus son engagement est grand.

Cette tendance est alors observable pour chacun des *Best Estimate* (brut, net et cédé), comme l'indique le graphique ci-dessous.

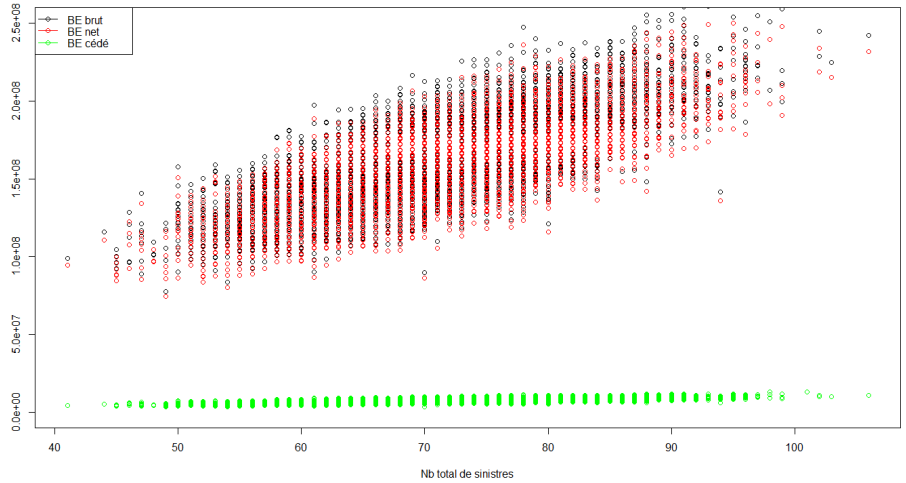

FIGURE 34 : Représentation du *BE* en fonction de l'aléa sur le nombre de sinistres

Les *Best Estimate* brut et net présentent une tendance similaire, aussi bien au niveau de leurs évolutions, qu'au niveau de leurs montants. Ceci explique alors l'aplatissement du *BE* cédé. Une légère augmentation de celui-ci est tout même observable sur le graphique ci-dessous.

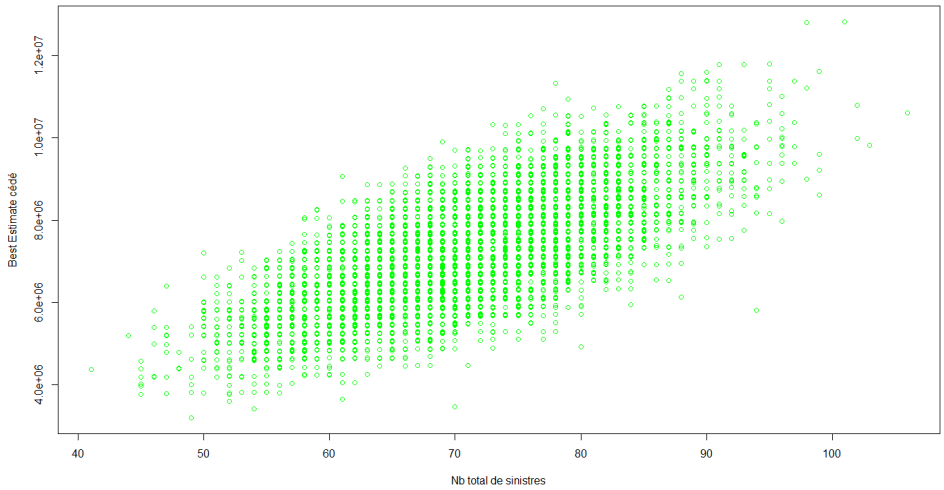

FIGURE 35 : Zoom sur le BE cédé

2. Étude du coefficient de variation

A contrario, le coefficient de variation est d'autant plus faible que le nombre de sinistres augmentent.

Afin d'expliquer ce phénomène, nous observons l'évolution de la moyenne et de la volatilité en fonction du nombre de sinistres. Pour ce faire, nous nous intéressons à la ligne d'affaires « Dommage ». Toutefois, les remarques suivantes sont également valables pour l'ensemble des lignes d'affaires.

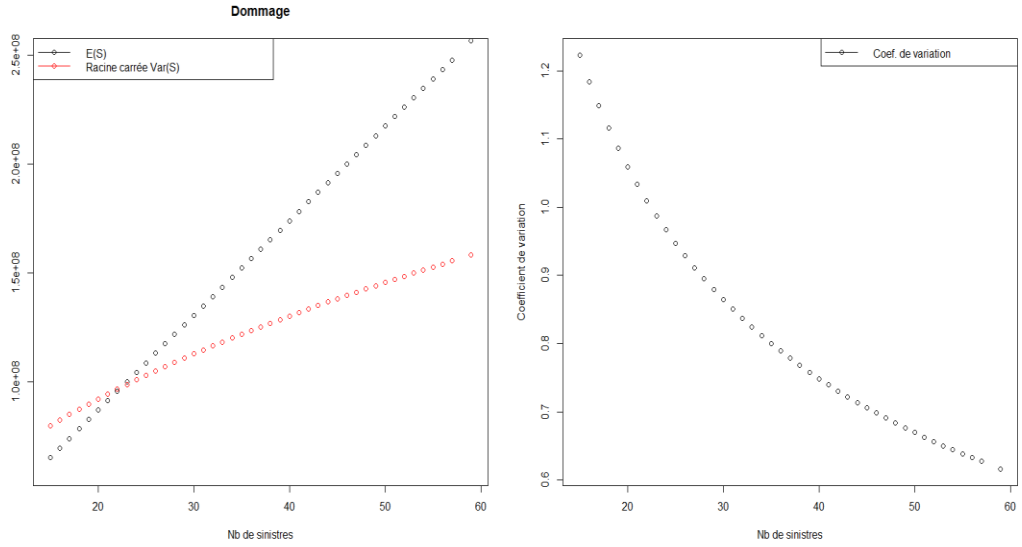

FIGURE 36 : Évolution du coefficient de variation en fonction du nombre de sinistres

Le graphique de gauche indique une augmentation plus lente de la volatilité des sinistres que celle de la charge moyenne. En effet, l'augmentation du nombre de sinistres atténue la progression de l'hétérogénéité présente dans le portefeuille. Ceci explique donc l'allure décroissante du coefficient de variation en fonction du nombre de sinistres (*Cf.* graphique de droite).

3. Étude des différents SCR

Par définition, le SCR dépend du *Best Estimate* et du coefficient de variation. De ce fait, la forte augmentation de l'engagement de la captive avec le nombre de sinistres explique l'allure des courbes de SCR ci-dessous. En effet, cet accroissement inhibe la diminution de volatilité observée lors de l'augmentation du nombre de sinistres.

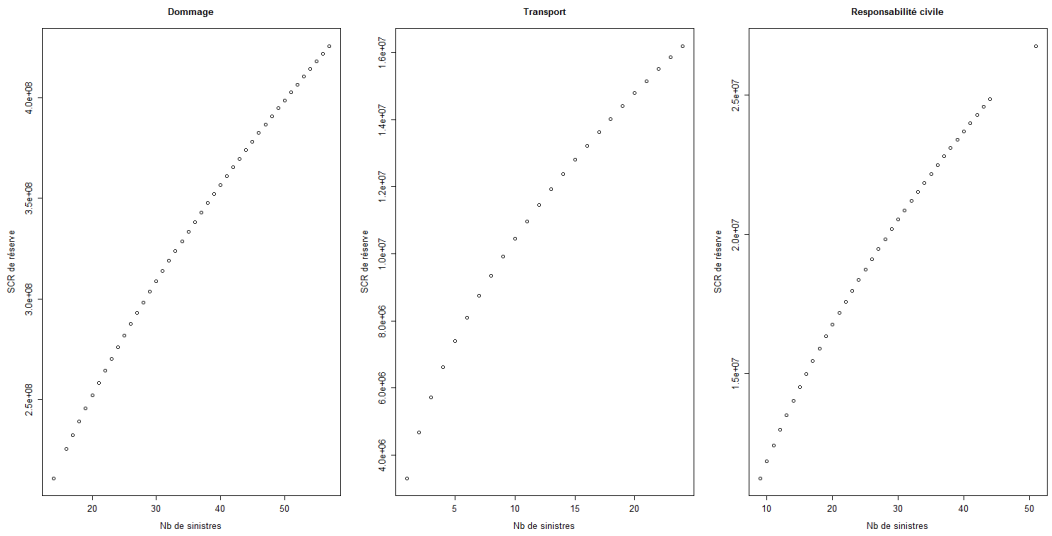

FIGURE 37 : Représentation du SCR de réserve en fonction du nombre de sinistres

4. Étude du besoin en capital

De manière générale, en observant le besoin en capital avec et sans rétrocession, celui-ci augmente d'autant plus que le nombre de sinistres est grand.

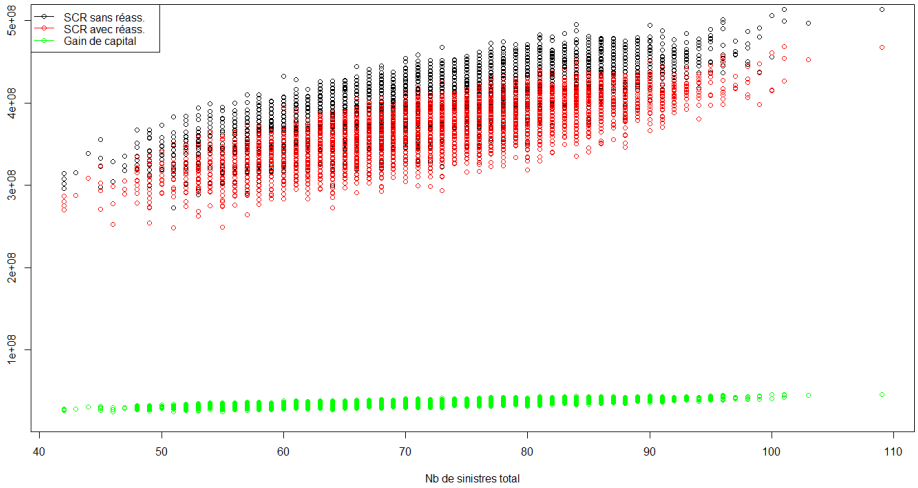

FIGURE 38 : Représentation du SCR global en fonction du nombre de sinistres

Le SCR avec rétrocession présente une augmentation légèrement moins forte que le SCR sans rétrocession. Ceci explique alors la faible évolution du gain en capital et son évolution aplatie sur la figure précédente. En zoomant d'avantage[27], nous constatons que le gain en capital est croissant en fonction du nombre de sinistres.

Cependant, cette augmentation est proportionnelle à l'augmentation du besoin en capital requis. En effet, le nuage de point, représentant la proportion de gain en capital en fonction du nombre de sinistres, a une allure relativement plane (aucune tendance n'est observable), comme l'indique le graphique ci-dessous.

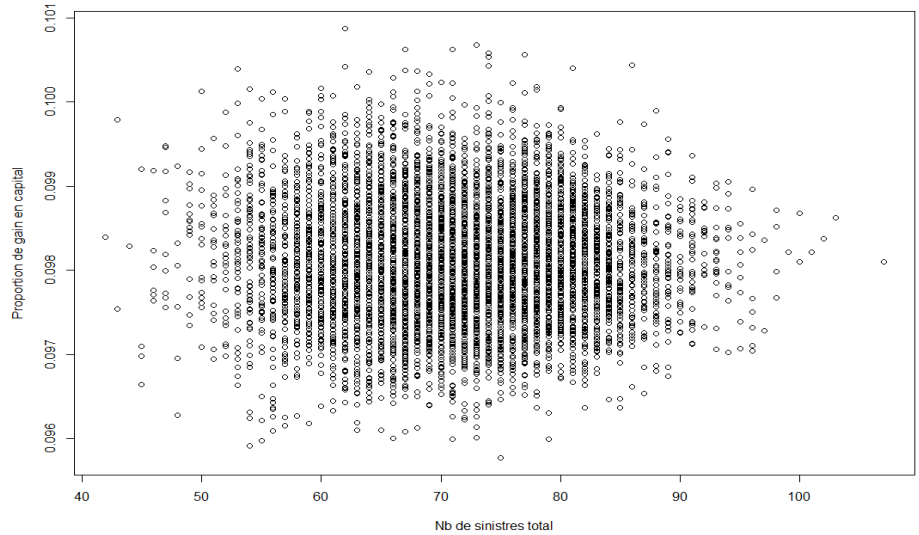

FIGURE 39 : Représentation de la proportion de gain en fonction du nombre de sinistres

De ce fait, la captive n'a aucun intérêt à voir son nombre de sinistres augmenter.

[27] Cf. Annexe VIII.

II. Impact de l'aléa sur les postes du bilan

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'évolution des postes du bilan dans le temps, dont les montants étaient issus de l'approche statique. Il s'agit maintenant d'appliquer l'aléa précédent sur le *Best Estimate*, afin de définir une marge d'erreur du modèle statique, et ce, pour chacun des poste du bilan.

Afin d'observer ce phénomène, nous étudions tout d'abord un graphique issu d'un nombre limité de simulations (n = 10). Les points gris représentent le référentiel de base, c'est-à-dire, l'évolution obtenue à partir du modèle sans aléa. Les courbes les encadrant représentent alors la marge d'erreur associée à notre modèle.

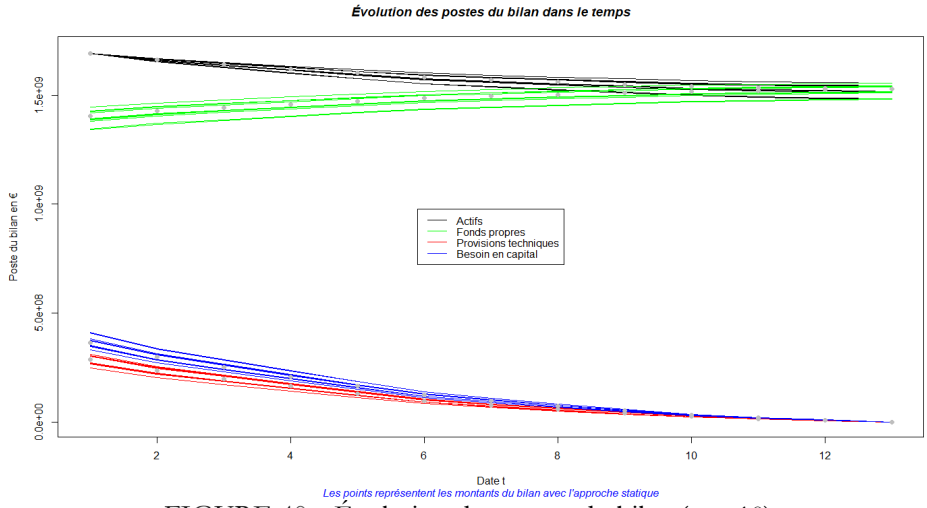

FIGURE 40 : Évolution des postes du bilan (n = 10)

Afin d'évaluer au mieux cette marge d'erreur, il convient d'augmenter le nombre de simulations (n = 10 000). Nous obtenons ainsi le graphique suivant.

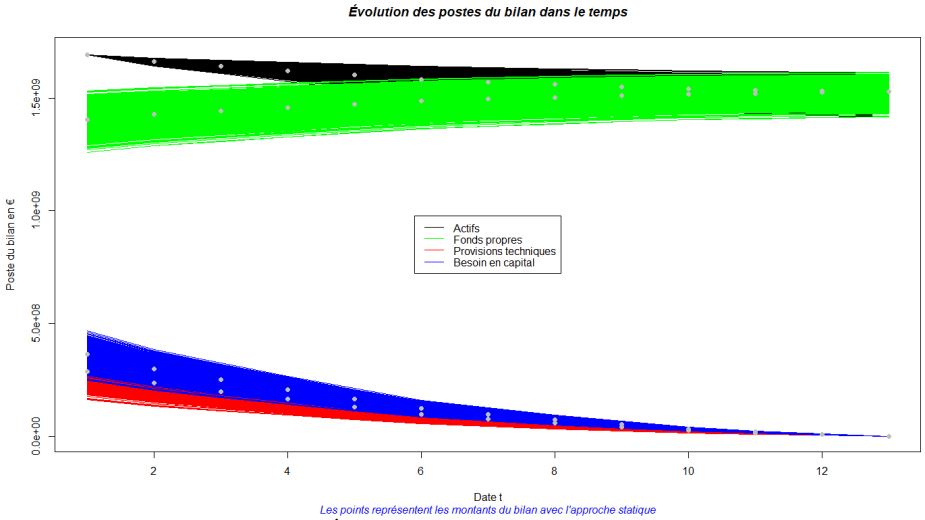

FIGURE 41 : Évolution des postes du bilan (n = 10 000)

Ces résultats soulignent alors l'importance d'une bonne détermination du nombre de sinistres moyens. En effet, les variations liées à une mauvaise estimation ne sont pas négligeables, puisqu'elles sont de l'ordre d'une centaine de millions d'euros.

Conclusion

À moins de quatre mois de l'entrée en vigueur de « Solvabilité 2 », la mise en œuvre des « Grands Principes » de cette réforme est acquise pour un grand nombre de compagnies d'assurance. La cible purement règlementaire étant atteinte, les nouveaux objectifs sont désormais orientés vers l'optimisation des indicateurs de solvabilité. Dans ce contexte, les dispositifs de rétrocession deviennent des outils clés. De ce fait, les compagnies doivent être capables de mesurer précisément leur besoin en capital, en tenant compte des spécificités des risques en portefeuille et des traités de rétrocession qui leurs sont propres. Ainsi, ce mémoire propose une approche statique, basée sur la formule standard et les *USP,* afin de rendre compte des impacts de la rétrocession non-proportionnelle (*XS* par sinistres) sur les indicateurs de solvabilité.

Après avoir défini le cadre et développé l'ensemble des formules nécessaires à ce modèle « interne partiel », l'application pratique est menée sur une captive de réassurance. Les premiers résultats, issus de cette application, indiquent alors une contribution directe de la rétrocession non-proportionnelle, à l'amélioration de la volatilité des sinistres (diminution de 13 %) et au gain en capital (diminution de 9 %).

Un examen plus approfondi des impacts d'un tel dispositif sur les indicateurs de solvabilité montre alors qu'il est possible, pour la cédante, d'optimiser ses gains en volatilité et en capital. En effet, en choisissant des caractéristiques de rétrocession bien précises, cette dernière a la possibilité de réduire la volatilité de ses sinistres et/ou d'optimiser son niveau de capital règlementaire requis.

Dans le cas particulier de notre captive de réassurance, nous avons montré que l'optimum du gain en capital est obtenu pour une portée très grande (tendant vers l'infini) et pour une priorité relativement faible (de l'ordre de 5 M€), dont le montant est défini précisément pour chacune des lignes d'affaires. Cet optimum est cependant différent de celui observé pour le gain de volatilité. En effet, la forte diminution du *Best Estimate* net (présent dans la formule du SCR) inhibe les fluctuations opposées du coefficient de variation (observable pour de faibles montants de priorité).

L'étude de l'ensemble des postes du bilan nous a ensuite permis de compléter notre recherche de traité « optimal ». En effet, l'observation du ratio de solvabilité en fonction de la portée et de la priorité indique une contribution directe du dispositif de rétrocession dans l'amélioration de la marge de solvabilité. D'autre part, l'étude de l'ajustement du *BE* cédé, indiquant que celui-ci est d'autant plus grand que le risque cédé est élevé et que la notation du rétrocessionnaire est faible, souligne l'importance pour la cédante de choisir un rétrocessionnaire dont la santé financière est saine, et ce, d'autant plus que la couverture du risque est grande.

Ainsi, la cédante est désormais capable de définir les caractéristiques de rétrocession qui lui sont optimales et peut ainsi choisir le traité de rétrocession répondant au mieux à ses besoins et à ses objectifs stratégiques (diminution de la volatilité des sinistres, optimisation maximale du gain en capital, objectif d'un ratio de solvabilité de X %, …). Toutefois, le transfert de ses

risques à une contrepartie n'est pas gratuit. Celui-ci engendre des coûts dont les montants sont d'autant plus élevés que la couverture du risque est importante. La question de l'arbitrage entre le niveau de cession du risque, le coût de cette cession et le gain en capital généré est alors primordiale pour la cédante.

Une fois les caractéristiques de rétrocession déterminées, la cédante a la faculté d'encadrer son niveau de primes de rétrocession. En effet, l'évaluation précise du gain en capital associé à la mise en place d'un tel dispositif permet de déterminer le niveau de primes maximales, au-delà duquel les contrats ne lui sont plus économiquement favorables. De même, la mesure précise de la provision technique à charge du rétrocessionnaire permet alors de connaître le niveau minimal de primes souhaité par celui-ci lors d'un transfert de risques. En effet, le rétrocessionnaire cherche à couvrir au minimum sa provision technique par le biais de la prime.

Ainsi, ce travail a permis à la captive, non seulement, de connaître le traité de rétrocession non-proportionnelle qui lui est optimal (du point de vue du coût en capital sous « Solvabilité 2 »), mais également de piloter sa stratégie de rétrocession. L'approfondissement du modèle par une approche dynamique a permis, dans un second temps, de tenir compte de la dimension temps et des aléas possibles sur le nombre de sinistres.

À ce stade de l'étude, nous pouvons dire que l'hypothèse de sinistralité log-normale, imposée par les textes règlementaires de « Solvabilité 2 », semble discutable dans le cas de notre captive. En effet, l'ajustement de cette loi par maximum de vraisemblance pose problème, puisqu'il conduit à une mauvaise estimation du coefficient de variation (trois fois plus élevé que le CV empirique). De ce fait, dans ce mémoire, nous avons effectué un ajustement des paramètres à partir du coefficient de variation empirique. L'utilisation d'une telle méthode soulève alors la réflexion de l'arbitrage entre rigueur statistique et cohérence actuarielle, auquel doit faire face un actuaire dans l'exercice de ses fonctions. L'amélioration possible du modèle pourrait alors faire intervenir une distribution à deux ou trois modes. D'un point de vue « Solvabilité 2 », cela supposerait alors de passer d'un modèle partiellement interne à un modèle qui l'est intégralement.

Lors de sa conférence au sein de PartnerRe, G.MARET a démontré que des combinaisons de différents modes de rétrocession peuvent améliorer sensiblement les gains observés lors de notre étude, et ainsi, répondre plus précisément aux objectifs stratégiques ciblés par les dirigeants. La recherche du mode de rétrocession complémentaire optimale pourrait alors devenir le nouvel objectif de la captive.

La prise en compte de la rétrocession dans le cadre de la réforme « Solvabilité 2 » ouvre les portes à l'optimisation, à la stratégie et au pilotage de la rétrocession. Ces nouveaux aspects pourraient alors entraîner, dans les prochaines années, un bouleversement sans précédent du monde de la rétrocession.

Bibliographie

Ouvrages et publications :

- **CABRIGNAC O.** [2013], *Une nouvelle perception du risque, un nouvel enjeu pour la réassurance*. Ressource actuarielle.
- **DEPOMMIER G., KAZI-TANI N., PLANCHET F.** [2015], *Solutions de couverture des risques de passif d'un contrat de prévoyance*. Rapport de mission Prim'Act.
- **EIOPA** [2014], *Les hypothèses sous-jacentes à la formule standard pour le calcul du capital de solvabilité requis,* EIOPA-14-322.
- **EIOPA** [2015], *Orientations sur les paramètres propres à l'entreprise*, EIOPA-BoS-14/178FR.
- **JEMINET J.** [2012], *Optimisation de la réassurance non-proportionnelle en arrêt de travail.* Mémoire de fin d'étude EURIA.
- **Journal officiel de l'Union Européenne** [2009], *Directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009.*
- **Journal officiel de l'Union Européenne** [2014], *Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.*
- **NATOURI K.** [2008], *La réassurance attend le choc de Solvabilité 2*. L'Argus de l'assurance n°7093.
- **MARCEAU E.** [2013], *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat, Modèle sur une période*. Springer.
- **MARET G.** [2015], *Capital ou risque, pourquoi choisir ?*. PartnerReviews.
- **MAXWELL C.** [2013], *Formule standard Solvabilité 2 : Intégrer des paramètres spécifiques à l'entité.* Miscellanées Actuarielles.
- **MECHAHOUGUI K.** [2011], *Intégration des contraintes de capital en réassurance non-proportionnelle vie.* Mémoire de fin d'étude ISFA.
- **PARTRAT C., BESSON J-L.** [2005], *Assurance non-vie, Modélisation, Simulation.* Economica.
- **PARTRAT C., BLONDEAU J.** [2003], *La Réassurance, Approche technique.* Economica.
- **PERRIN M.** [2012], *Calibration des Undertaking Specific Parameters et leurs impacts sur les fonds propres.* Mémoire de fin d'étude EURIA.

- **PLANCHET F.** [2012], *Assurance de biens et de responsabilité, Enjeux actuariel,* Version 1.3.
- **PLANCHET F., GUIBERT Q., JUILLARD M.** [2010], *Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes*. Bulletin Français d'Actuariat, vol. 10, n°20, p. 5-34.
- **PLANCHET F., LEROY G., JUILLARD M.** [2012], *Modèle standard, quelle utilisation des paramètres spécifiques à l'entité ?*. La Tribune de l'assurance, n°168.
- **ROYSTON J.P** [1982], *The W Test for Normality*. Applied Statistics. Vol.31, 176-180.
- **SAUNIER M.** [2014], *Decisional optimality in life reinsurance modeling*. Bulletin français d'actuariat. Vol.14, n°28, p. 131-163.

Cours universitaires :

- **BERARD J.** [2015] : *Démonstration.* Professeur à l'Université de Strasbourg.
- **BOULLIUNG F.** [2014-2015] : *Les grands principes de la réassurance*. Professeur à l'université de Strasbourg.
- **EISELE K-T.** [2014-2015] : *Introduction aux méthodes d'IBNR*. Professeur à l'université de Strasbourg.
- **KAMEGA A.** [2014] : *Introduction à Solvabilité 2, Applications de mesure des risques.* Professeur à l'EURIA.

Conférence :

- **MARET G., HIMEUR M., COLLET-HIRTH O.,** [2015], *La réassurance : un rôle clé dans la mise en œuvre de l'ORSA.* Équipe France Vie de PartnerRe.

Sites internet :

- http://www.apref.org/
- http://www.ffsa.fr/
- https://acpr.banque-france.fr/
- http://uk.reuters.com/
- http://archive.eiopa.europa.eu/

Abréviations

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution ;
APREF : Association des Professionnels de la Réassurance En France ;
BE : Meilleure estimation des flux futurs passifs (*Best Estimate ou Best Estimate Liabilities, BEL*) ;
BSCR : Capital requis de base (*Basic Solvency Capital Requirement*) ;
CV : Coefficient de variation ;
DIV : Facteur de diversification ;
EEA : Union européenne économique (*European Economic Area*) ;
EIOPA : Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) ;
F : Priorité ;
FACOB : Réassurance facultative-obligatoire ;
FP : Fonds Propres ;
IBNR : Provisions pour sinistres tardifs (*Incurred But Not Reported*) ;
LGD : Perte en cas de défaut (*Loss-Given Default*) ;
LoB : Ligne d'affaires (*Line of Business*)
LTGA : Étude d'impact pour les branches longues (Long Term Guarantee assessment) ;
M : Plafond ;
MCR : Minimum de capital requis (*Minimum Capital Requirement*) ;
P : Portée ;
PD : Probabilité de défaut ;
PT : Provisions Techniques ;
QIS : Étude d'impact quantitative (*Quantitative Impact Study*) ;
RC : Responsabilité civile ;
RM : Marge pour risque (*Risk Margin*) ;
S2 : Solvabilité 2 ;
SCR : Capital de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement*) ;
S/P : Ratio sinistres sur primes (*Loss Ratio*) ;
SST : Test de solvabilité suisse (*Swiss Solvency Test*) ;
TCL : Théorème Central Limite ;
USP : Paramètres spécifiques à l'entreprise (*Undertaking Specific Parameters*) ;
XS : Excédent de sinistres ;

Annexes

I. Distributions théoriques considérées

Les notations suivantes sont reprises de l'ouvrage « *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat, modèle sur une période* » de E. Marceau.

1. Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

La variable aléatoire X, qui suit une loi de poisson de paramètre λ, a les caractéristiques suivantes :

- Notation : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- Paramètre : $\lambda > 0$
- La fonction de masse de probabilité : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k . e^{-\lambda}}{k!}$
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- Variance : $Var(X) = \lambda$

2. Loi normale

La variable aléatoire X, qui suit une loi normale de paramètre μ et σ^2, a les caractéristiques suivantes :

- Notation : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$ et $\sigma^2 > 0$
- La fonction de densité : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$
- La fonction de répartition : notée $F_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (forme non explicite)
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = \mu$
- Variance : $Var(X) = \sigma^2$

3. Loi log-normale

La variable aléatoire X, qui suit une loi log-normale de paramètre μ et σ^2, a les caractéristiques suivantes :

- Notation : $X \sim Log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$ et $\sigma^2 > 0$
- La fonction de densité : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{x.\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$
- La fonction de répartition : notée $F_X\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ (forme non explicite)
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

- Moment d'ordre k : $\mathbb{E}(X^k) = e^{k.\mu + k^2.\frac{\sigma^2}{2}}$
- Variance : $Var(X) = e^{2.\mu+\sigma^2}.(e^{\sigma^2} - 1)$

4. Loi de Bernoulli

- Notation : $X \sim \mathcal{B}ern(p) \sim \mathcal{B}in(1,p)$
- Paramètre : $p \in (0,1)$
- La fonction de masse de probabilité : $\forall k \in \{0,1\},\ \mathbb{P}(X = k) = p^k.(1-p)^k$
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = p$
- Variance : $Var(X) = p.(1-p)$

II. Démonstration de l'équation simplifiée de la marge pour risque

Cette démonstration est issue de la publication « *Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personne* » (*Cf.* F. PLANCHET et *al.* [2010]). Pour rappel, l'équation simplifiée de la marge pour risque est de la forme suivante :

$$En\ t = 0,\ RM_0 = CoC\ .\ k\ .Dur_0\ .BEL$$

Où,

CoC	: représente le taux de coût du capital, fixé à 6% ;
Dur	: représente la duration de l'engagement ;
BEL	: représente la meilleure estimation ;
k	: représente le coefficient de proportionnalité entre le SCR et le BEL, tel que $k = \frac{SCR}{BEL}$;

Elle repose sur l'hypothèse de proportionnalité entre le BE et le SCR à chaque date :

$$SCR_t = k\ .BEL_t$$

En repartant de l'équation de base de la marge pour risque (en temps continu), on a :

$$RM_0 = CoC\ .\sum_t \mathbb{E}(SCR_t)\ .e^{-r.t}$$

En remplaçant le SCR par : $SCR_t = k\ .BEL_t$, on obtient :

$$RM_0 = CoC\ .k.\sum_t \mathbb{E}(BEL_t)\ .e^{-r.t}$$

Or, par définition on a :

$$BEL_t = \sum_{u \geq t} \mathbb{E}(F_u).e^{-r.(u-t)}$$

On obtient ainsi :

$$RM_0 = CoC.k.\sum_t \mathbb{E}\left[\sum_{u\geq t} \mathbb{E}(F_u).e^{-r.(u-t)}\right].e^{-r.t}$$

$$\Leftrightarrow \quad RM_0 = CoC.k.\sum_t \sum_{u\geq t} \mathbb{E}(F_u).e^{-r.u}$$

$$\Leftrightarrow \quad RM_0 = CoC.k.\sum_{u\geq 0} \sum_{t\leq u} \mathbb{E}(F_u).e^{-r.u}$$

$$\Leftrightarrow \quad RM_0 = CoC.k.\sum_{u\geq 0} u.\mathbb{E}(F_u).e^{-r.u}$$

Or,

$$D_0 = \frac{\sum_{u\geq 0} u.\ \mathbb{E}(F_u).\ e^{-r.u}}{\sum_{u\geq 0}\ \mathbb{E}(F_u).\ e^{-r.u}} = \frac{\sum_{u\geq 0} u.\ \mathbb{E}(F_u).\ e^{-r.u}}{BEL_0}$$

D'où,

$$RM_0 = CoC.k.D_0.BEL_0$$

III. Test de Shapiro-Wilk

Le test de normalité Shapiro-Wilk (1965) est fondé sur la corrélation entre les statistiques d'ordre et leurs espérances mathématiques sous hypothèse gaussienne. Elle est basée sur la statistique *W*, défini comme suit :

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Où,

$\bar{x}$: représente la moyenne de l'échantillon

a_i : est une constante donnée par ;

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T.V^{-1}}{(m^T.V^{-1}.V^{-1}.m)^{\frac{1}{2}}}$$

Avec,

$m = (m_1, \dots, m_n)^T$: représentant les espérances des statistiques d'ordre d'un échantillon de variables suivant une loi normale ;

V : représentant la matrice de variance-covariance de ces statistiques d'ordre.

Dans l'article « *The W Test for Normality* » (*Cf.* ROYSTON J.P [1982]) étend cette statistique, afin qu'elle soit applicable à des tailles d'échantillons plus grandes. Via la simulation de Monte Carlo, il montre que la transformation $y = (1 - W)^{\lambda}$ donne une variable de distribution approximativement normale. Cette transformation rend alors adéquate la théorie à un échantillon, dont la taille peut varier entre 7 et 2000.

IV. Surface des *Best Estimate* par *LoB*

Pour chacune des lignes d'affaires, le *BE* est d'autant plus faible que la portée est grande et la priorité petite.

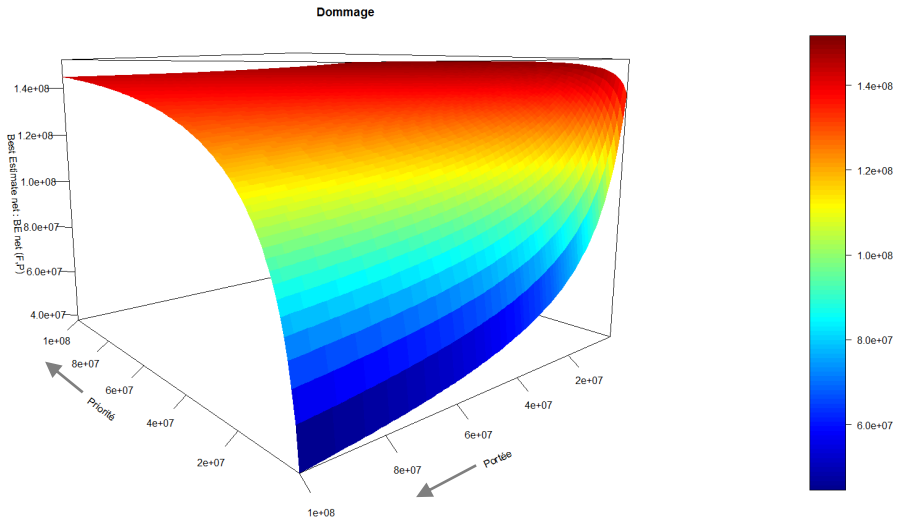

FIGURE 42 : Évolution du *BE* net « Dommage » en fonction de *F* et *P*

Dans le cas de la sinistralité « Dommage », l'impact de la rétrocession peut engendrer une diminution du *Best Estimate* allant jusqu'à une centaine de millions d'euros.

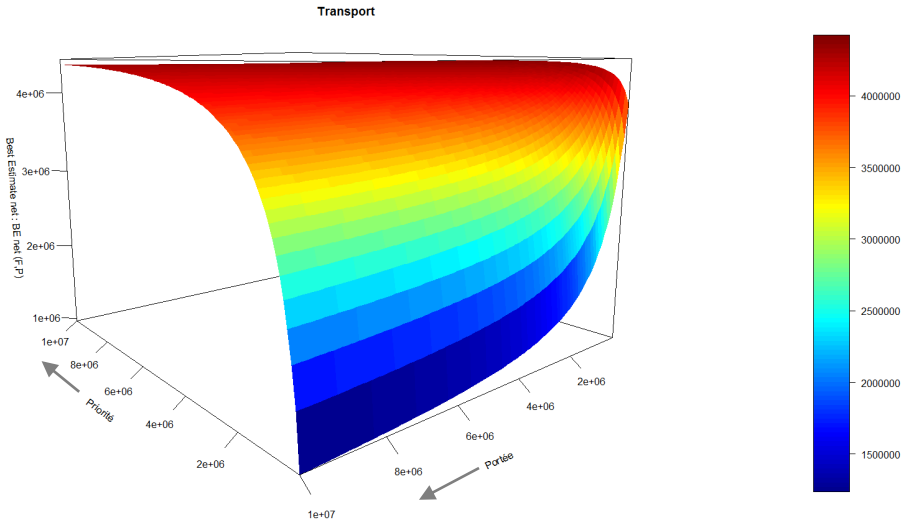

FIGURE 43 : Évolution du *BE* net « Transport » en fonction de *F* et *P*

Dans le contexte de la sinistralité « Transport », la diminution du *BE* net varie sur de plus faibles montants, puisque cette ligne d'affaires ne présente pas de sinistres aussi conséquents que « Dommage ».

Les mêmes commentaires sont alors observables pour la ligne d'affaires « Responsabilité Civile ».

V. Surfaces zoomées

1. Les coefficients de variation

Les surfaces zoomées des coefficients de variation permettent ainsi d'observer graphiquement l'optimum pour chacune des lignes d'affaires

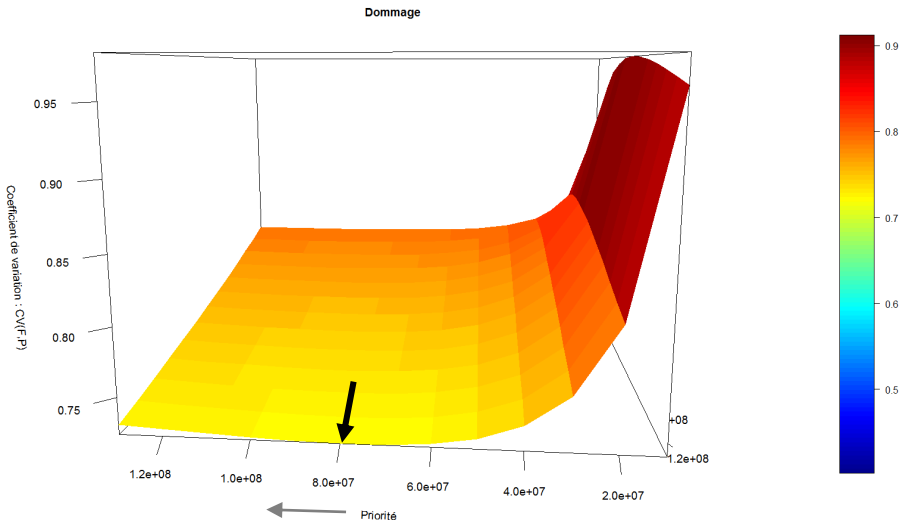

FIGURE 44 : Optimum de volatilité des sinistres « Dommage »

L'optimum du coefficient de variation est de l'ordre de 80 M€ pour la ligne d'affaires « Dommage ».

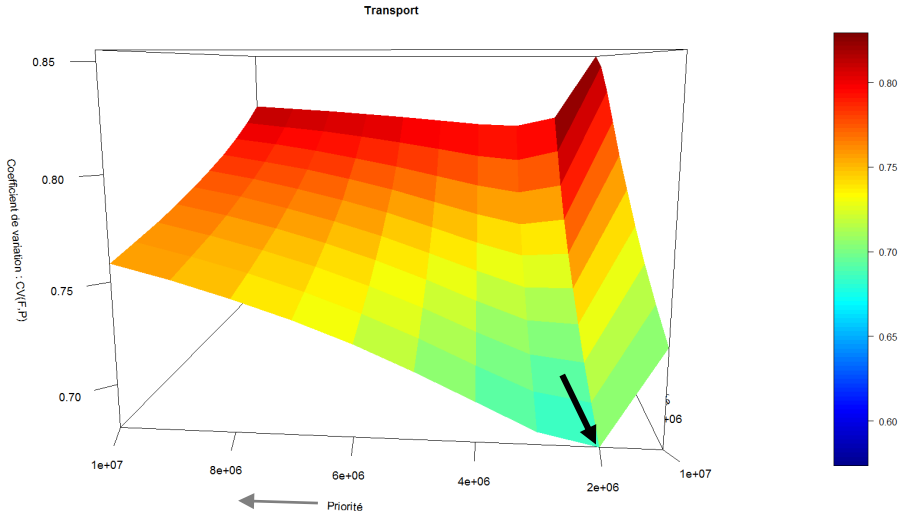

FIGURE 45 : Optimum de volatilité des sinistres « Transport »

Pour la ligne d'affaires « Transport », l'optimum est admis pour une priorité de 2 M€.

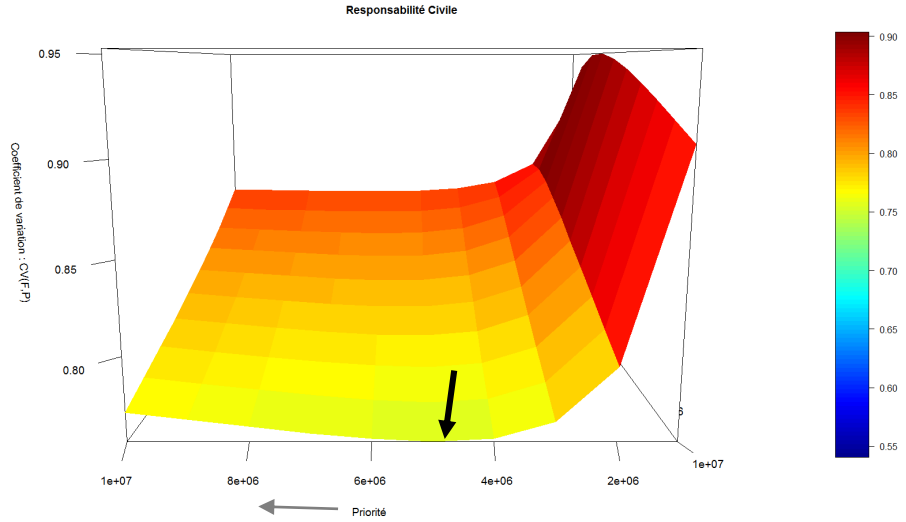

FIGURE 46 : Optimum de volatilité des sinistres « RC »

Dans le contexte de la « Responsabilité Civile », il est observé lorsque la priorité est de l'ordre de 5 M€.

2. Le SCR de réserve

Les surfaces zoomées des SCR de réserve permettent ainsi d'observer graphiquement l'optimum pour chacune des lignes d'affaires

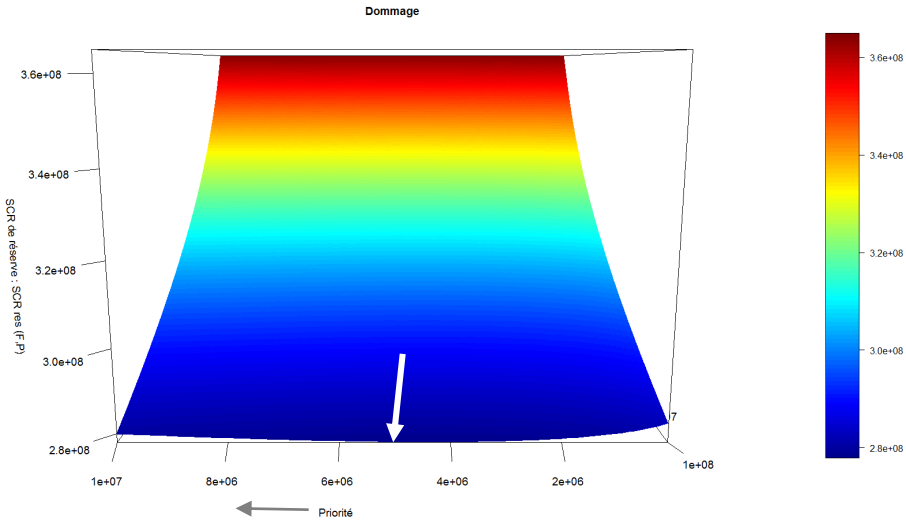

FIGURE 47 : Optimum de gain en capital « Dommage »

Pour la ligne d'affaires « Dommage », l'optimum est admis pour une priorité de 5 M€.

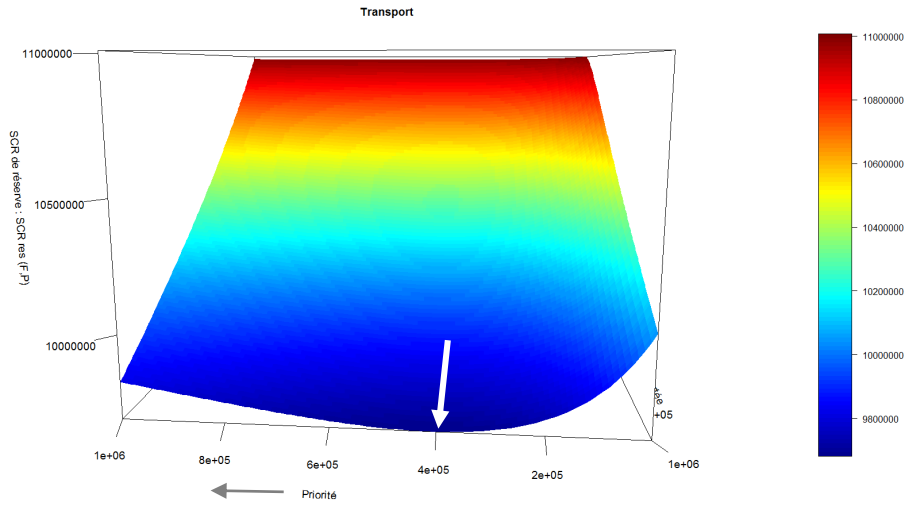

FIGURE 48 : Optimum du gain en capital « Transport »

L'optimum de la *LoB* « Transport » est observable pour une priorité de 0,4 M€. De la même manière, l'optimum de la *LoB* « Responsabilité Civile » est atteint pour un niveau de priorité identique.

VI. Surface du SCR de contrepartie avec une note de B

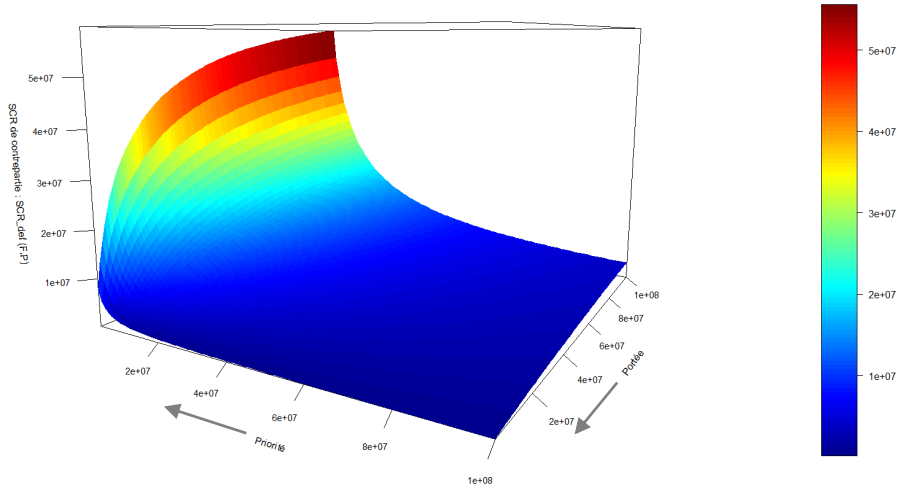

FIGURE 49 : SCR de contrepartie en fonction de *F* et *P* (Note : B)

L'allure graphique est identique à celle d'une contrepartie notée AA, seul l'ordre de grandeur du SCR est modifié.

VII. Matrice de corrélation du BSCR

La matrice de corrélation, utilisée pour le calcul du BSCR, est issue de l'annexe IV, point 1 de la Directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009. Sa forme simplifiée pour les risques présentés dans cette étude est de la forme :

	Matrice de corrélation	
	défaut	non-vie
défaut	1	0,5
non-vie	0,5	1

TABLEAU 16 : Matrice de corrélation pour les risques non-vie et de défaut

VIII. Méthode de provisionnement : Chain-Ladder

La méthode de Chain-Ladder est une méthode standard, couramment utilisée sur les marchés depuis les années 30, du fait de sa simplicité. Cette méthode est applicable à toute sorte de triangles (triangle de charges, de paiement,…). Au cours de cette étude, nous nous contenterons de l'appliquer à des triangles de paiements cumulés.

Elle nécessite cependant l'hypothèse forte suivante :
(H1) : $\forall j = 0, \dots, n,$ les facteurs de développement $f_{i,j}$ sont indépendants de l'année de survenance i.
Le principe de base de cette méthode repose sur l'utilisation de facteurs de développement (également appelés coefficients de passage). En effet, elle consiste à supposer que les $C_{i,j}$ sont liés par un modèle de la forme :
$\forall i \in [0,n], \forall j \in [0,n-1],$

$$C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j}$$

En d'autres termes, on suppose qu'il existe une relation de proportionnalité entre les montants cumulés d'une année de règlement à la suivante et que cette proportionnalité est identique pour toutes les années de survenance.

L'estimation des facteurs de développement est alors donnée par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

À partir de cette estimation, il est alors possible de compléter le triangle inférieur, en considérant :
$\forall i + j \geq n + 1,$

$$\hat{C}_{i,j} = \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k * C_{i,n-i}$$

Ainsi, le montant de provisions à constituer pour l'année de survenance i est obtenu par différence entre les montants ultimes estimés et les derniers montants connus (correspondant à la dernière diagonale).
$\forall i \in [1, n]$,

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$
$$\Leftrightarrow \hat{R}_i = \left(\prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k - 1 \right) * C_{i,n-i}$$

La somme des montants de provisions de chaque année de survenance $\hat{R}_i$ permet alors de calculer le montant total des provisions $\hat{R}$.

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i$$

Par convention, on note : $\hat{R}_0 = 0$.

Afin d'observer la vitesse de règlements des sinistres au cours du temps, il est également intéressant de calculer les cadences de règlements à partir des facteurs de développement, en calculant :

$$cadence_j = \frac{1}{\prod_{k=j}^{n-1} f_j}$$

IX. Gain en capital en fonction du nombre de sinistres

Le gain en capital présente une allure croissante en fonction du nombre de sinistres, ce qui s'explique par l'allure des SCR avec et sans rétrocession.

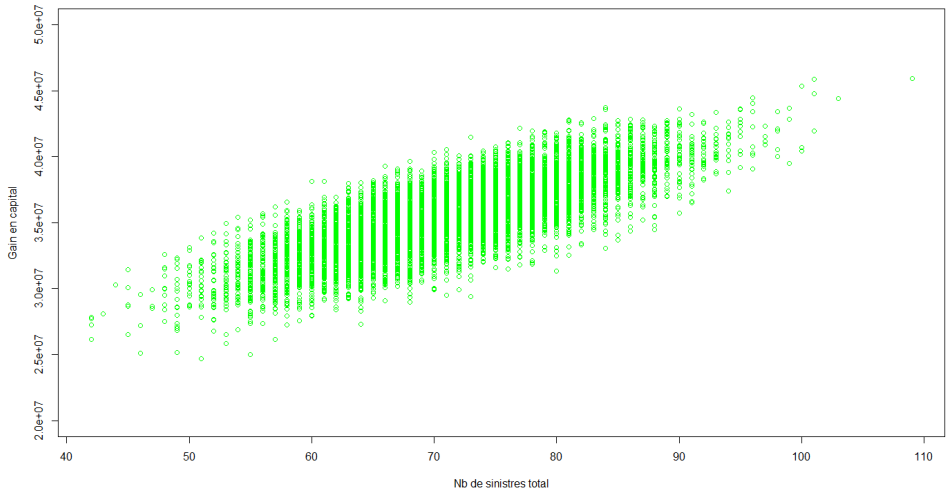

FIGURE 50 : Gain en capital en fonction du nombre de sinistres