Université Pierre et Marie Curie

ISUP

PROMOTION 2004

Mémoire présenté devant

l'Institut de Statistique
de l'Université Pierre et Marie Curie

Pour l'obtention du

Diplôme de Statisticien
Mention Actuariat

Assurance ☒ *Finance* ☐

Par M. David PARIS

Sujet :

ALLOCATION STRATEGIQUE D'ACTIFS LIEE AUX CONTRAINTES IMPOSEES PAR LA LOI FILLON DANS LE CAS D'UN PERP MULTISUPPORTS

Responsable du stage : M. Michaël DONIO

Lieu du stage : Cabinet JWA – Actuaires

Invité(s) :

CONFIDENTIEL ☒

RESUME

Dans le cadre de la réforme des retraites, la loi Fillon a créé un nouveau produit de retraite supplémentaire : le PERP, doté en particulier d'avantages fiscaux incitant les Français à souscrire à ces plans.

Le PERP multisupports possède plusieurs caractéristiques techniques que nous décrirons, et en particulier impose une contrainte de sécurisation de l'épargne. Il s'agit d'une répartition de l'épargne entre les supports risqués et à capital garanti déterminée.

Si cette répartition est indispensable pour des raisons aisément compréhensibles de sécurité à l'approche de la retraite, la question de la rentabilité de l'opération pour l'assuré se pose. L'assuré peut en effet, dans les limites des contraintes réglementaires, investir le montant de son compte de retraite sur différents supports proposés. Il conviendra donc d'optimiser le compromis rendement-risque du placement, en prenant en compte les contraintes, réglementaires ou de bon sens, spécifiques au PERP.

Le but de cette étude est de déterminer une grille de répartition de l'épargne, fonction de l'échéance du départ à la retraite, et de la prudence d'investissement de l'assuré, afin de satisfaire au mieux les attentes de ce dernier. Celle-ci précisera en particulier le montant à investir sur les fonds à capital garanti, et le rendement espéré des fonds risqués préconisé. Les fonds pris en compte seront des supports utilisés dans le cadre du placement des cotisations d'un PERP, ou dans le cadre général de l'épargne.

Après avoir présenté les caractéristiques du PERP, et en particulier les contraintes qu'un tel produit, ou un produit de retraite en général, impose sur la répartition de l'épargne, nous formaliserons de manière mathématique le problème cherché.

L'étude des supports nous amènera à simuler ou calculer l'évolution des valeurs de ces actifs. Nous expliciterons les hypothèses retenues, qui ont conduit à retenir certains modèles. Ces hypothèses seront déterminées à partir des contraintes du produit, mais aussi en fonction des caractéristiques des supports utilisés.

Nous estimerons alors par des méthodes statistiques les différents paramètres nécessaires.

Ensuite, disposant d'un modèle calibré, nous pourrons commencer la recherche d'un résultat. Cette étape se composera de deux parties. Dans un premier temps, à partir des propriétés mathématiques du modèle cherché, nous calculerons les résultats théoriques que fournissent les formules « fermées ». Ensuite, et afin de pouvoir faire jouer des hypothèses supplémentaires, nous confirmerons ou affinerons les résultats trouvés par la simulation des évolutions des valeurs des supports, et l'estimation des probabilités cherchées.

ABSTRACT

In the context of the pension reform, the Fillon law has created a new product of supplementary retirement saving : the PERP “Plan d’Epargne de Retraite Populaire” (individual retirement savings plan), which is in particular endowed with some fiscal advantages to incite French people to subscribe to these plans.

The PERP has many technical characteristics which will be described in this report and in particular lays down to secure the savings. This is a sharing out between riskee supports and secured determined saving.

If this repartition is essential for security reasons at the approach of the retirement term, the question of profitability is still an issue for the subscriber. In the limit of some regulations constraints, the subscriber can invest the amount of his pension fund on different supports. The compromise between the output return and the risks will then have to be optimised, taking into account the regulation or the good sense constraints that are specific to the PERP

The objective of this study is to determine a distribution scale of the saving, based on the term of the retirement and the cautiousness of the subscriber in order to better satisfied him . This scale especially specify the amount which has to be invested on guarantee assets funds and the expected output return of the recommended risk funds. The funds that are taken into account are supports used in the case of PERP input or in the general case of savings .

After a presentation of the main characteristics of the PERP, and especially of the constraints of such a product (or a pension product in general), we set up this issue on a mathematical way.

The study of the supports leads to simulate or to calculate the evolution of those assets. We explain the assumptions that lead to keep some of the models. Those hypothesis are determined based on the product constraints , as well as the characteristics of the used supports.

Then we estimate the different necessary parameters through statistical methods.

Then, based on a calibrated model, we start the search for a result. This step is divided in two parts. In a first step, based on the mathematical properties of the model , we calculate the theoretical results that are given by the mathematical formulas. Then, in order to introduce additional hypothesis, we confirm or precise the first results, through the simulation of the evolution of the support values and the estimation of the searched probabilities.

Remerciements

Je remercie Joël Winter de m’avoir accueilli dans son cabinet, et de m’avoir ainsi donné les moyens de réaliser cette étude.

Ma reconnaissance s’adresse également à Michaël Donio qui, par sa collaboration et ses conseils, m’a permis de mener à bien les travaux qu’il m’avait confiés.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Frédéric Planchet qui, grâce à sa connaissance du sujet, a su m’orienter efficacement dans mes réflexions.

Je remercie encore Pierre Therond et Julien Jacquemin pour leur disponibilité et la pertinence des conseils qu’ils m’ont souvent donnés durant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie enfin tous ceux, au sein du cabinet JWA-Actuaires, qui d’une manière ou d’une autre, ont participé à la réalisation de ce rapport.

TABLE DES MATIERES

1. Le PERP et la répartition de l'épargne

1.1 Le PERP

1.1.1 Origine et réglementation du PERP

Le PERP (Plan d'Epargne Populaire), considéré comme une version française de fonds de pension, a été créé dans le but d'inciter la population à cotiser dans l'épargne retraite supplémentaire. Il s'agit d'une des mesures prises pour compenser la baisse programmée des prestations fournies par les régimes obligatoires fonctionnant par répartition.

Il a été créé par la loi Fillon (loi n° 2003-775 du 21 août 2003 : loi portant réforme des retraites). Son titre V : « *Dispositions relatives à l'épargne retraite et aux institutions de retraite supplémentaire* » définit le cadre réglementaire du produit. La parution du décret d'application, le 22 avril 2004 (numéro 2004-342 du 21 avril 2004 relatif au plan d'épargne retraite populaire), a permis la commercialisation de ce nouveau type de contrats de retraite.

Il fait partie des trois produits créés par cette loi. Il s'agit du seul produit conçu dans le cadre privé et individuel, alors que dans le cadre professionnel, la loi encadre le PERE (Plan d'Epargne Retraite d'Entreprise), et le PERCO (Plan d'Epargne Retraite Collectif), régimes à cotisations définies.

Le but de ces produits est précisé par l'article 107 de la loi précitée : « *En complément des régimes de retraite obligatoires par répartition, toute personne a accès, à titre privé ou dans le cadre de son activité professionnelle, à un ou plusieurs produits d'épargne réservés à la retraite, dans des conditions de sécurité financière et d'égalité devant l'impôt* ».

1.1.2 Descriptif du produit

Descriptif général

Le plan est alimenté par les versements de cotisations des assurés. Ces dernières bénéficient de déductions fiscales. En revanche, l'épargne est indisponible jusqu'au départ à la retraite, sauf en cas de force majeure, où le rachat est alors autorisé. Lors du versement de rentes d'un régime de retraite obligatoire, le PERP atteint alors sa phase de restitution, sous la forme exclusive de rentes viagères. Celles-ci peuvent être réversibles à un ou plusieurs bénéficiaires désignés, et prévoir des options, comme des annuités garanties.

Pendant la phase d'accumulation, il peut être versé une rente viagère à un bénéficiaire ou une rente d'éducation à des enfants mineurs en cas de décès, et, le cas échéant, une rente d'invalidité au bénéfice exclusif du participant.

Les rentes obtenues par un PERP sont imposées au titre des rentes acquises à titre gratuit.

Incitations fiscales

Les cotisations versées sur un PERP sont déductibles de l'impôt sur le revenu dans la limite de

$$Max(10\% \times PASS ; 10\% \times RAPL)$$

où PASS = Plafond Annuel de la Sécurité Sociale (29 712 € en 2004).
RAPL = Revenu d'Activité Professionnel Limité à 8 PASS.

Durant la phase d'accumulation, l'épargne gérée dans le PERP n'est pas isolée fiscalement. Elle est donc imposée dans le cadre général de l'assurance vie. Toutefois, elle n'est pas prise en compte pour le calcul de l'ISF. A partir de la conversion en rente, l'ISF est dû sur la valeur de l'épargne acquise, sauf si le plan a été alimenté régulièrement pendant 15 ans, ou s'il s'agit d'un contrat ouvert avant le 1er janvier 2006.

Les rentes versées au titre d'un PERP sont imposées dans le cadre des rentes acquises à titre gratuit.

Opérations proposées

Le PERP peut être constitué sous l'une des trois formes suivantes :

- L'épargne convertie en rente : ce type d'opérations distingue la période d'accumulation de l'épargne, de celle de versement des revenus acquis. La conversion en rente s'effectue à la fin de la première période, en fonction du montant du capital constitutif acquis au terme de la première période. L'épargne peut être capitalisée sous forme d'unités de compte, de provision techniques de diversification, ou de provisions mathématiques.

- La rente viagère différée : chaque versement permet d'acquérir un droit de rente liquidable au départ à la retraite.

- L'unité de rente : les cotisations sont converties en unités de rente (ou points). La gestion de la phase d'épargne et de la phase de service est globalisée. Ce système est inspiré des régimes obligatoires en points.

Les supports en euros

Les supports en euros peuvent être constitués selon deux formes différentes :

- L'euro classique, qui est la forme classique des contrats en euro d'assurance vie.

- L'euro diversifié, qui n'est représenté que par la provision mathématique (PM), la provision pour frais d'acquisition reportés (PFAR), et la provision technique de diversification (PTD). Cette dernière permet de lisser les variations des valeurs des actifs du plan. La répartition entre la PM et la PTD est définie contractuellement, ou est automatique, en fonction du contrat choisi. L'objet de la PTD est de favoriser l'investissement en actions.

Gestion de l’épargne

Le PERP impose une règle de gestion qui consiste à sécuriser progressivement l’épargne acquise. Ce point précis étant la contrainte principale de ce mémoire, elle fait l’objet d’une description précise au paragraphe 1.1.3.

Transfert

Si le rachat ou les avances sont interdits, le transfert vers un autre PERP est en revanche autorisé.

Des pénalités de transfert peuvent être prévus par le contrat :

- frais de transfert,
- indemnité de transfert : inférieure à 5% de sa valeur, et nulle si l’adhésion date de plus de 10 ans,
- une réduction pour participations aux moins values lors du transfert. Celle-ci est plafonnée à 15% des PM ou des droits en unités de rente.

1.1.3 La contrainte sur l’actif du PERP

Origine de la contrainte

Dans le but de sécuriser l’épargne des participants, une règle de gestion est imposée dans la réglementation sur le PERP. Il s’agit d’une orientation progressive des investissements des UC vers les capitaux garantis (supports en euro) par l’organisme assureur.

En effet, s’agissant d’un contrat de retraite, une épargne investie principalement en UC à l’approche du départ à la retraite court le risque de voir considérablement réduit le capital constitutif de la rente viagère future.

Toutefois, les UC ayant une espérance de rendement supérieure à celle de l’euro, il peut être intéressant d’y placer une part non négligeable de l’encours s’il reste une période assez longue avant le départ à la retraite. En effet, en cas de baisse importante de la valeur des UC, l’assuré étant actif pour une durée encore importante, il disposera de suffisamment de temps pour prendre des mesures adéquates lui permettant de reconstituer un capital.

Description réglementaire de la contrainte

Ces considérations ont donc amené le législateur à réglementer la mesure suivante de sécurisation de l’épargne. Les textes régissant cette contrainte du PERP sont reportés ci-dessous.

Décret n° 2004-342 du 21 avril 2004 relatif au plan d'épargne retraite populaire
NOR: ECOT0491205D

Article 50

Pour les plans consistant en la constitution d'une épargne convertie en rente et pour chaque participant dont les droits n'ont pas été liquidés, le rapport entre, d'une part, la valeur des capitaux garantis par l'organisme d'assurance gestionnaire du plan à la date de liquidation prévue des droits acquis par le participant et, d'autre part, la somme de cette même valeur, de la provision mathématique des droits du participant exprimés en unités de compte, déduction faite, le cas échéant, de la valeur des capitaux garantis par l'organisme d'assurance gestionnaire du plan au titre d'une ou plusieurs unités de compte, et, pour les plans relevant du 3° de l'article 47, de la valeur des parts de provision technique de diversification inscrites au compte du participant, ne peut être inférieur à un ratio fixé par arrêté conjoint des ministres chargés de l'économie, de la sécurité sociale et de la mutualité. Le contrat prévoit, le cas échéant, les conditions dans lesquelles les parts de provision technique de diversification ou d'unités de compte du participant sont d'office converties en provisions techniques relatives à des engagements de capital exprimé en euros afin de vérifier ce ratio.

Toutefois, le plan peut prévoir la possibilité pour le participant de ne pas respecter ce ratio à condition que ce dernier en fasse par écrit la demande expresse dans des conditions déterminées par arrêté conjoint des ministres chargés de l'économie, de la sécurité sociale et de la mutualité.

Arrêté du 22 avril 2004 relatif au plan d'épargne retraite populaire
NOR: ECOT0491206A

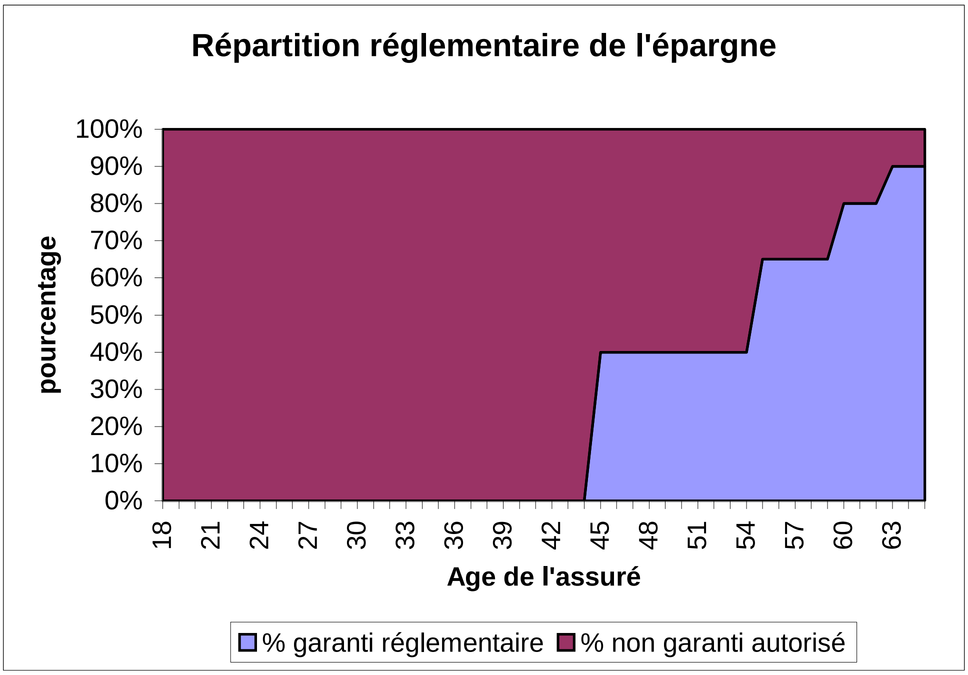
Article 8

Pour chaque participant d'un plan d'épargne retraite populaire, le rapport mentionné à l'article 50 du décret du 21 avril 2004 susvisé dépend de la durée séparant la date d'arrêté des comptes annuels du plan de la date de liquidation des droits du participant telle que prévue dans les dispositions du plan lors de l'adhésion du participant et prennent les valeurs suivantes :

Echéance du départ à la retraite	***Ratio de l'épargne investie en capitaux garantis***
Moins de 2 ans	*90 %*
Entre 2 et 5 ans	*80 %*
Entre 5 et 10 ans	*65 %*
Entre 10 et 20 ans	*40 %*

Commentaires sur la contrainte

La fraction minimum de capital garanti dans l 'épargne, indiquée dans le tableau ci-dessus, est représentée dans le graphique ci-dessous. Dans ce graphique, on suppose un départ à la retraite à 65 ans.



On constate que la contrainte n'est pas trop dure, et autorise encore une forte proportion d'investissement en UC. En effet, les gestions évolutives proposées par les assureurs vie dans d'autres contrats de retraite classiques comportent des grilles de répartition de l'épargne plus sécurisantes.

De plus, cette contrainte est réglementairement souple : il est prévu que l'investisseur puisse y déroger à condition d'en faire la demande précise. Afin d'éviter tout abus des entreprises d'assurances, l'assuré doit alors faire une demande écrite mentionnant qu'il est conscient des risques encourus.

1.1.4 Commercialisation

Premiers contrats commercialisés

Les premiers contrats proposés comportent en première approche peu de différences entre les différents organismes.

Les gestions, comme dans les contrats d'assurance vie, peuvent être ajustées par horizon, profilées suivant un niveau de risque donné, ou libre selon les souhaits de l'adhérent.

Les rentes sont assorties de plusieurs options : réversion à 60% ou 100%, annuités garanties.

Les assureurs ne prélèvent toutefois pas tous les mêmes frais. D'autres différences apparaissent aussi dans le profil de gestion conseillé : certains proposent un large spectre de supports (jusqu'à une cinquantaine), alors que d'autres, privilégiant la simplicité et la sécurité, n'en proposent que quelques-uns. Certains ont aussi opté pour les supports en points.

Premières souscriptions

Les assureurs ont proposé des offres de PERP dès janvier 2004, sous forme de promesses de souscriptions, en l'attente de la parution des décrets d'application. Ces offres ont recueilli une bonne perception des souscripteurs, et les premières commercialisations, lancées dès avril 2004, ont été très nombreuses : plus de 250 000 PERP ont été souscrits en deux mois. Le versement initial est en moyenne de 155 euros, et de 44 euros pour les versements suivants.

Les souscripteurs n'ont pas de profil particulièrement typé : ils sont composés à peu près également d'hommes et de femmes, qui proviennent uniformément de milieux urbains, ruraux, ou mixtes. Ils sont assez jeunes : 70% des souscripteurs ont moins de 45 ans, et l'âge moyen est d'environ 38 ans.

Le lancement de ce produit a donc impacté l'ensemble de la population française.

Concurrence avec l'assurance vie

La création de ce nouveau produit a posé le problème de la concurrence avec les offres classiques de l'assurance vie. Si dans certains cas, le PERP fait face à d'autres produits performants (contrats Madelin pour les TNS,…), la forte communication effectuée par les médias et les sociétés d'assurance a favorisé la production. A l'approche de la fin de sa première année de commercialisation , le PERP semble donc ne pas avoir été supplanté par l'assurance vie.

De plus, il a touché un nouveau public : un grand nombre des souscripteurs ne détiennent pas de contrat d'assurance vie.

Enfin, les distributeurs ont souvent proposé de coupler la souscription d'un PERP à celle d'un contrat d'assurance vie, en mettant en avant les avantages de chaque produit.

1.2 Répartition de l’épargne

1.2.1 Supports et diversification

L’une des principales différence entre les offres de PERP des organismes assureurs réside dans les supports proposés. Si ceux-ci constituent un argument commercial évident, les gestions proposées sont non moins déterminantes. En effet, elles permettent de tirer profit des supports, tout en préservant la sécurité de l’épargne retraite.

La sécurité maximale est obtenue par le fonds à capital garanti. En effet, celui-ci permet à l’assuré de conserver l’intégralité de ses cotisations (aux frais près). Toutefois, son rendement espéré est plus faible que celui des fonds risqués. Il est donc conseillé à l’assuré de diversifier son épargne, en investissant dans des fonds risqués (fonds en unités de compte).

La première diversification apparaît donc comme une répartition entre le fonds garanti, et les fonds diversifiés. Dans une seconde étape, l’investisseur choisira sur quelles unités de compte il placera son épargne. Celles-ci se distinguent généralement par le niveau de risque que l’assuré est prêt à assumer. On se situe dans un schéma de Markowitz : plus le rendement espéré est élevé, plus le risque du placement est important. Les FCP et SICAV généralement proposés par les assureurs se distinguent d’ailleurs généralement par des profils « dynamiques », « équilibrés », ou « prudents ».

L’objectif principal de l’investisseur, comme pour toute gestion, reste bien sûr de maximiser le rendement du placement, tout en respectant les objectifs de prudence qu’il s’est fixé.

1.2.2 Facteurs influents sur les risques supportés par l’assuré

Les principaux facteurs influant sur le risque que l’assuré est prêt à prendre sont les suivants :

- *Durée du placement*

D’une manière générale, un placement long peut être plus risqué qu’un placement court. D’un point de vue heuristique, un placement risqué, mais de rendement espéré élevé, obtiendra un rendement supérieur à celui d’un placement plus sûr au terme d’une longue période. On considère en effet que s’il est plus risqué, il est susceptible de subir de fortes baisses, ce qui le rend dangereux sur une courte durée. Mais sur le long terme, le rendement fort espéré permettra de supplanter ces éventuelles chutes.

On privilégiera donc un investissement d’autant plus risqué que l’horizon de placement est éloigné.

- *Aversion au risque de l'investisseur*

Le choix d'investissement dépendra aussi du niveau de prudence souhaité par l'assuré. En effet, indépendamment de toute considération économique ou financière, l'aversion au risque de chaque assuré lui est propre, et diffère beaucoup entre plusieurs individus.

Les assurés choisiront donc des placements d'autant plus prudents qu'ils sont averses au risque.

1.2.3 Gestions proposées

Si, dans une démarche commerciale, les assureurs autorisent souvent dans leurs contrats les gestions « libres », qui permettent à l'assuré de répartir son épargne entre les différents supports suivant n'importe quel profil, ils proposent aussi toujours des conventions de gestion, qui permettent de répartir les cotisations automatiquement suivant un profil donné. Ce dernier est souvent évolutif au cours du contrat : d'abord fortement constitué d'actions, il devient progressivement quasi-intégralement composé de fonds en euros.

Ce genre de répartition répond aux deux exigences de risques décrits dans le paragraphe précédent : au début du contrat, l'investisseur dispose d'une durée longue d'épargne. Il peut donc posséder une forte part d'actifs risqués, dont il espère un rendement supérieur. Avec l'ancienneté du contrat, l'échéance de la retraite approche. L'assuré ne peut alors plus se permettre d'investir dans des placements trop risqués : il pourrait ne pas avoir le temps de profiter d'une remontée des cours après une chute trop importante. Par ailleurs, il peut aussi devenir plus prudent, ne disposant plus de temps supplémentaire pour augmenter son épargne. Par exemple, le départ à la retraite proche peut l'empêcher d'augmenter ses cotisations par un surcroît d'activité.

La contrainte réglementaire de sécurisation de l'épargne du PERP s'inscrit d'ailleurs dans ce type de grille de répartition. Il s'agit d'une sécurité minimum, et cette étude propose, tout en restant dans le cadre de cette contrainte, de déterminer les profils d'investissements de ce type optimisant les rendements de l'épargne, tout en conservant les objectifs de prudence des assurés.

1.3 Plan du déroulement de l'étude statistique

L'étude menée se décomposera suivant les étapes décrites ci-dessous :

- **Formalisation mathématique du problème**

Cette section définira la formalisation sur le plan mathématique à la base de notre étude. Elle formalisera les contraintes que l'on cherchera à résoudre.

- **Actifs : supports utilisés et modélisations envisagées**

Ce paragraphe décrira les supports servant de placement à l'épargne. Ceux-ci se décomposent en UC et en support en euros. Après une description statistique grossière, nous étudieront les méthodes adéquates pour estimer correctement les paramètres découlant des données disponibles.

- **Modélisation des actifs en UC**

- **Modélisation des actifs garantis**

- **Etude de cas particuliers : approche simplifiée**

Sur la base des modèles construits, nous déterminons de premiers résultats à l'aide de formules fermées. L'étude de quelques cas particuliers permet de dégager le comportement général du modèle. Nous choisirons donc de simplifier les modèles, et les résultats ne seront qu'approximatifs.

- **Simulations**

Afin d'obtenir les grilles d'allocations exactes par rapport à nos modèles, nous effectuerons des simulations, qui prennent la forme de tirages aléatoires. Les résultats trouvés dans le paragraphe précédent permettront de disposer de valeurs initiales afin de réduire le temps de calcul.

Les études menées dans ce paragraphe fourniront les grilles définitives.

2. Formalisation mathématique du problème

2.1 Approche retenue

L'assuré peut investir entre des actifs risqués, ou à capital garanti. La performance d'un actif risqué ne sera donc pas jugée par rapport au cumul des cotisations versées, mais par rapport à l'épargne qui aurait été acquise si l'investissement avait été effectué à 100% sur le support en euros.

Par ailleurs, en investissant sur des supports en unités de compte, l'assuré accepte un risque. Ce risque est modélisé par une proportion des bénéfices du fonds en euros que l'assuré s'autorise à risquer de perdre.

L'approche retenue vise à modéliser le risque pris selon la perte de bénéfices par rapport au fonds en euros, et non de manière globale au niveau des espérances de rendements. Cela traduit une volonté de prudence : il est préférable, dans un produit de retraite, de privilégier la sécurité de l'épargne à l'espérance de rendement.

2.2 Probabilité cherchée

La contrainte que l'on cherche à formaliser est la suivante : la différence entre les valeurs du fonds diversifié et du fonds en euros au terme du placement, si elle est négative, ne doit pas être inférieure à un pourcentage « a » des intérêts obtenus par le fonds en euros sur cette période.

Mathématiquement, le problème consiste à trouver k et s tels que

$$\boxed{P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) \geq -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T0}\right)\right] \geq p}$$

en notant :

k	Pourcentage de l'épargne investie en actif risqué,
s	Variance de l'actif risqué,
$P(k,s)_t$	Valeur du portefeuille composé à k% d'actif risqué et à (1-k%) de fonds en euros à l'instant t,
a	Prudence de l'assuré,
p	Probabilité minimale,
T_0	Date initiale du placement,
T	Horizon du placement.

2.3 Interprétation de la formule

Interprétation

En notant A l'événement $\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T_0}\right)$, la probabilité cherchée est $P(A) > p$.

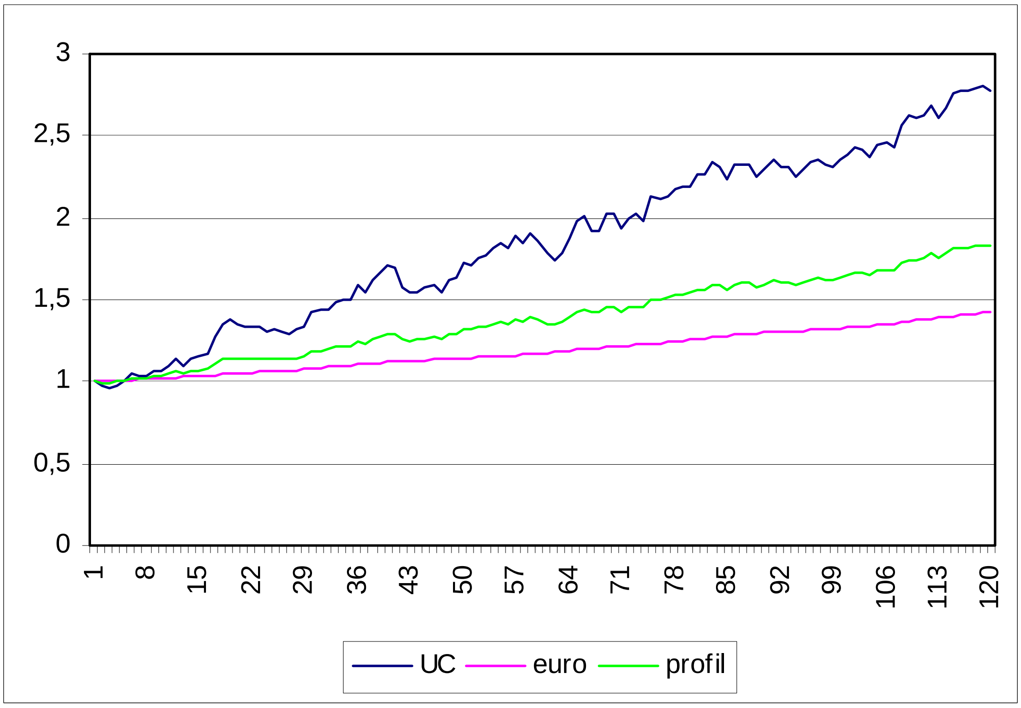
$a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T_0}\right)$ représente une portion des bénéfices engendrés par le fonds en euros. Cette portion est déterminée par a. Plus l'assuré est averse au risque, et plus a est faible.

Cet évènement se produit non seulement lorsque le portefeuille diversifié obtient un rendement supérieur à celui du fonds en euros, mais aussi en cas de performance légèrement inférieure. Cette perte acceptée correspond à la prise de risque que s'autorise l'assuré.

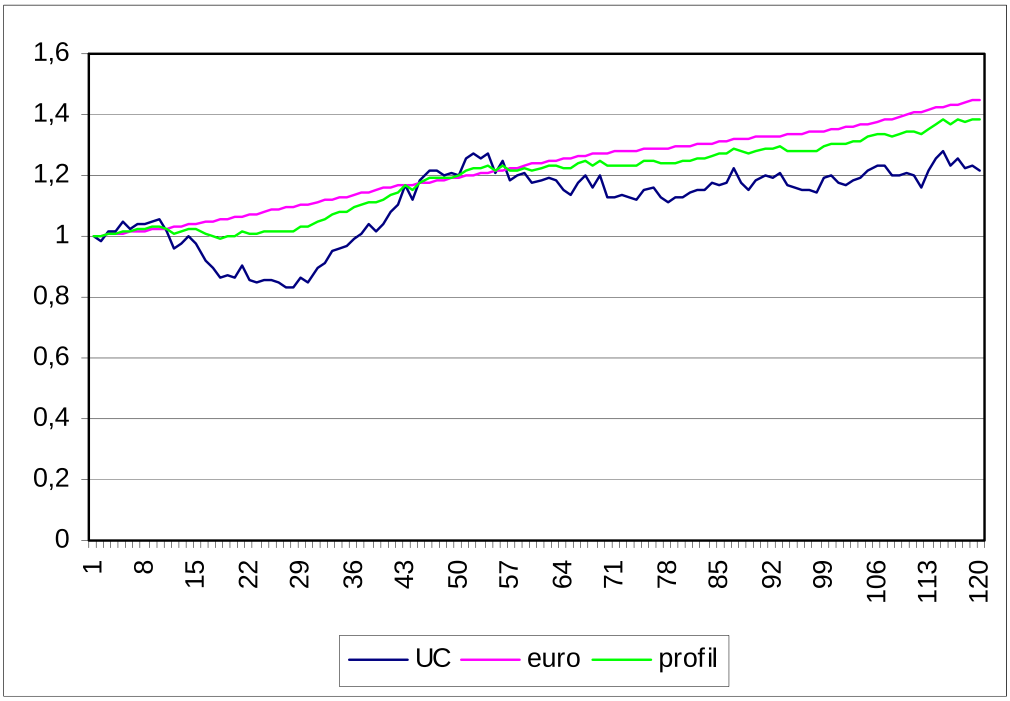
Illustration

Afin de schématiser la formule, nous indiquons quelques exemples de simulations des évolutions des valeurs des supports en euro, en UC, et du portefeuille diversifié, dans lesquelles l'événement A est réalisé ou non :

➢ Exemples de réalisation de A :

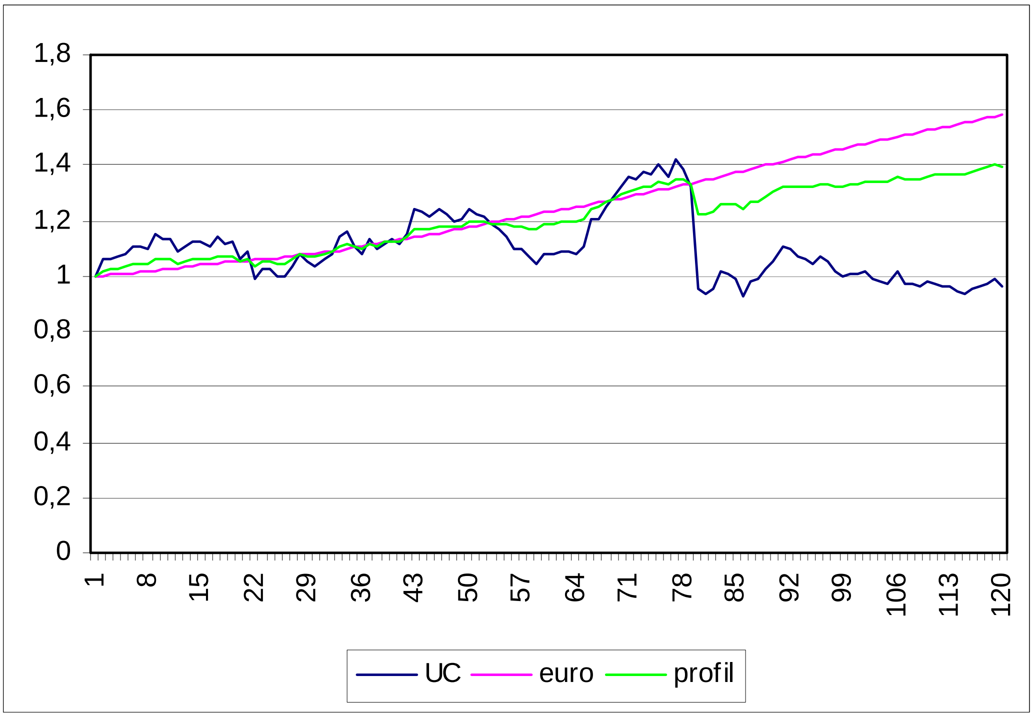


Dans ce cas, le portefeuille diversifié obtient un rendement supérieur à celui du fonds en euros. A est donc réalisé.



Dans ce cas, l'événement A est également réalisé : le portefeuille diversifié a obtenu un rendement inférieur à celui du fonds en euros, mais pas autant que le fonds en UC. Dans ce cas, la perte par rapport au fonds en euros est raisonnable et correspond à la barrière de risque que s'est fixé l'assuré.

➢ Exemple de non réalisation de A :



Dans ce cas, la perte du portefeuille diversifié par rapport au fonds en euro est trop importante par rapport au risque accepté par l'assuré. A n'est pas réalisé.

2.4 Horizons de placement

Un des principaux paramètres de la formule de calcul est T, l'horizon de placement. En effet, comme on l'a expliqué précédemment, celui-ci a une importance primordiale dans cette situation.

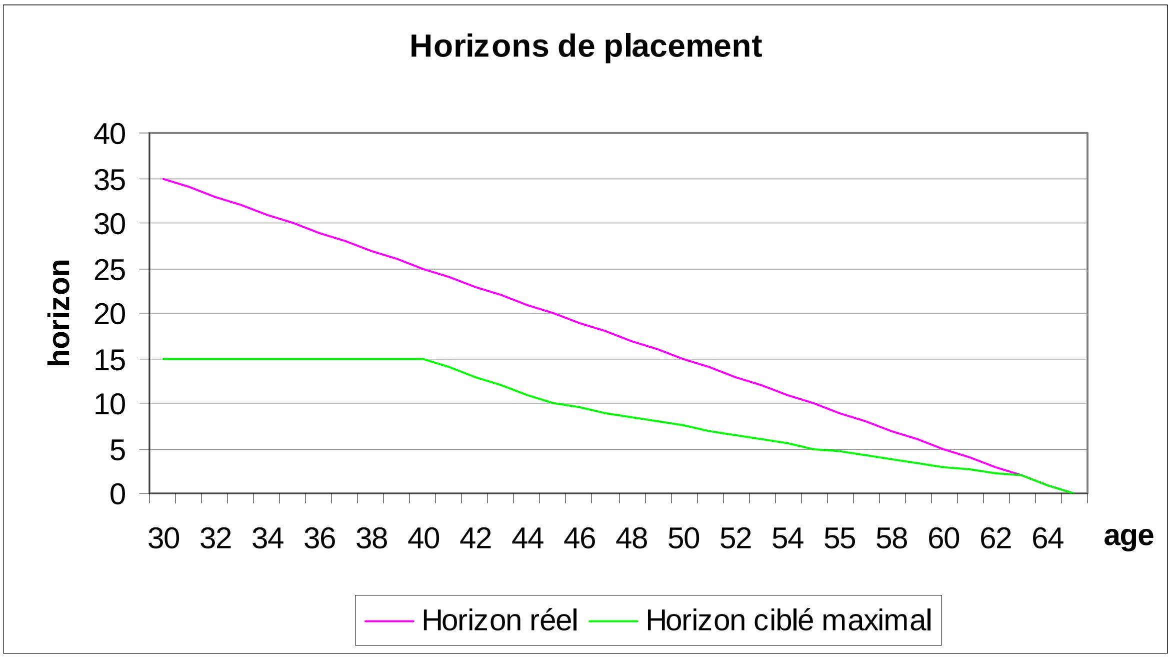
Le PERP est un placement long. On peut donc s'attendre à des valeurs élevées de T. Toutefois, il n'est pas raisonnable de considérer qu'un assuré de 30 ans, qui a fixé son départ à la retraite à 65 ans, dispose d'un horizon de placement de 35 ans. Un tel raisonnement conduirait à investir les fonds sur un actif de rendement très élevé, mais aussi très risqué. Si, sur le long terme, cette pratique est théoriquement rentable, elle s'avèrerait cependant catastrophique en cas de chute de l'actif.

En effet, le PERP est également un produit de retraite, qui exige une forte sécurité, étant donné l'enjeu du placement. On cherchera donc à sécuriser l'épargne, et à satisfaire l'événement A, sur des horizons fixés, plusieurs fois au cours du contrat.

Les horizons retenus sont déterminés par la contrainte de sécurisation de l'épargne du PERP. Pour un assuré partant à la retraite à 65 ans, cette contrainte pose des limites d'âge à 45, 55, 60, 63, et 65 ans. On considèrera donc qu'un assuré de 45 ans a un horizon de placement de 10 ans, qu'un assuré de 55 ans a un horizon de placement de 5 ans,…

Pour les âges différents des âges de référence, on considèrera que l'assuré a un horizon de placement intermédiaire. Pour les assurés de moins de 45 ans, on plafonnera la durée du placement à 15 ans.

Avec cette convention, on obtient les horizons de placement suivants :



2.5 Paramétrage de la probabilité cherchée

2.5.1 Approche retenue

La formule de référence est :

$$P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T_0}\right)\right] > p$$

Dans cette étude, nous utiliserons de très fortes valeurs de p, quitte à augmenter a. Cette approche est prudente : en effet, elle permet de contrôler la perte de bénéfices, en restant dans un intervalle de confiance sûr.

2.5.2 Prudence de l'adhérent

Chaque adhérent possède une prudence qui lui est propre, c'est à dire un niveau de risque pour lequel il n'accepte pas d'obtenir un rendement inférieur à (1-a)(intérêts du fonds en euros). Les différents assurés souhaiteront donc placer différemment leurs épargnes. Il faudra donc définir plusieurs grilles de répartition entre les supports, en tenant compte de ces comportements.

En espérant obtenir des rendements plus élevés, l'adhérent accepte de prendre plus de risques. Dans notre étude, et pour rester en accord avec l'approche retenue, nous modéliserons ce comportement en augmentant a dans la formule de référence. Nous chercherons alors k et s tels qu'ils satisfassent cette formule.

Nous déterminerons trois grilles de répartition de l'épargne, en fonction de trois niveaux de prudence de l'adhérent. Nous appellerons ces répartitions « sécurité », équilibrée », et « ambition ».

Enfin, nous choisirons de postuler que les adhérents, quel que soit le niveau de risque qu'ils sont prêts à accepter, deviennent plus prudents à l'approche de la retraite.

2.5.3 Paramètres retenus

Paramètres

Répartition	a		p
	Avant 55 ans	De 55 à 65 ans	
Sécurité	20%	10%	99,50%
Equilibre	40%	20%	99,50%
Ambition	60%	30%	99,50%

Justification des valeurs

Le paragraphe 6.4.2 donne une quantification des pertes envisageables en fonction de la probabilité p retenue. L'approche retenue étant de privilégier la sécurité, on cherchera à maximiser p. En fixant cette valeur à 99,5 %, les résultats du paragraphe 6.4.2 donnent l'ordre de grandeur des valeurs acceptables de a.

On choisit par ailleurs de diviser par deux ces valeurs à l'approche de la retraite, afin de modéliser l'augmentation de prudence en fin de carrière.

Ces valeurs sont enfin cohérentes. En effet, un assuré prudent, qui hésite à investir 100 % de son épargne sur le fonds en euros, acceptera une faible possibilité de perte des bénéfices de ce fond : un ordre de grandeur de 10 % à 20 % paraît raisonnable. De même, si un souscripteur est prêt à risquer une plus forte proportion des profits du fonds en euros, le cadre général de prudence d'un produit de retraite nous pousse à retenir des valeurs faibles. Ainsi, une valeur de a de 100 % serait déjà trop risquée.

3. Actifs : supports utilisés et modélisations envisagées

3.1 Sélection des actifs risqués

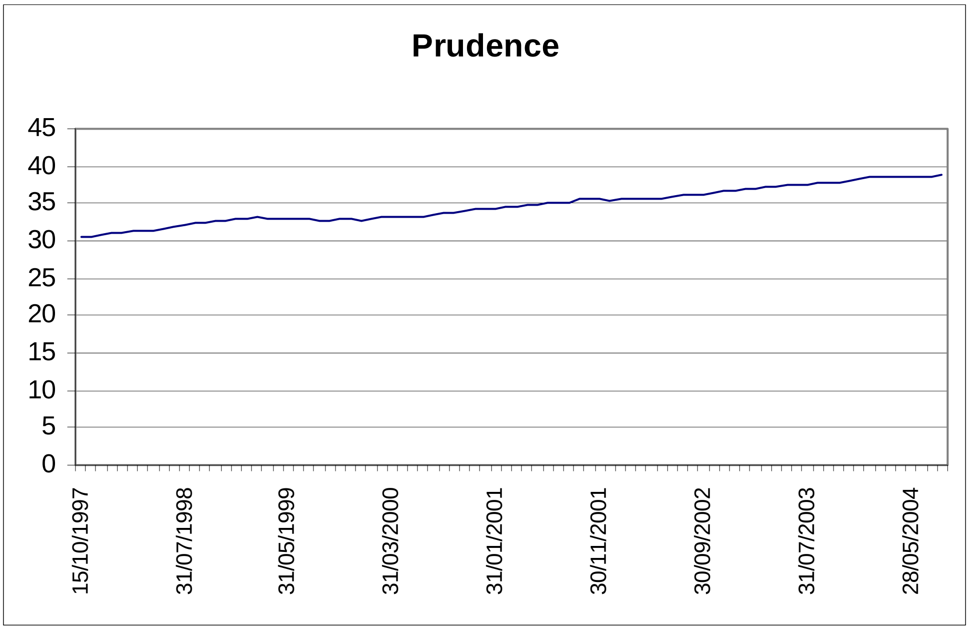
3.1.1 Actifs sélectionnés

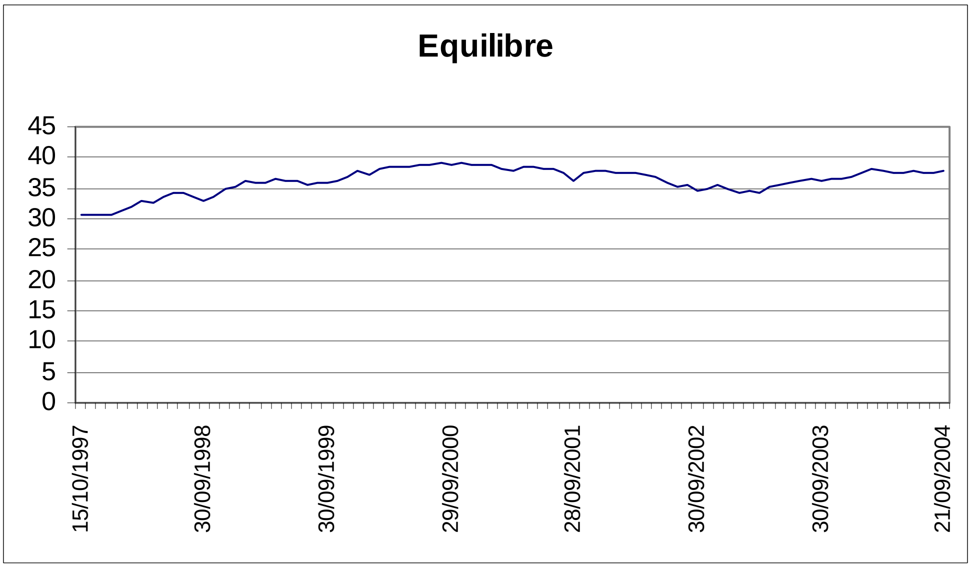
Nous étudions le rendement du portefeuille par rapport à un rendement garanti. Ce premier dépendra donc de la volatilité des actifs choisis. Or, les rendements espérés sont fonction de la variance de ceux-ci. Nous sommes dans un schéma espérance/variance de type Markowitz.

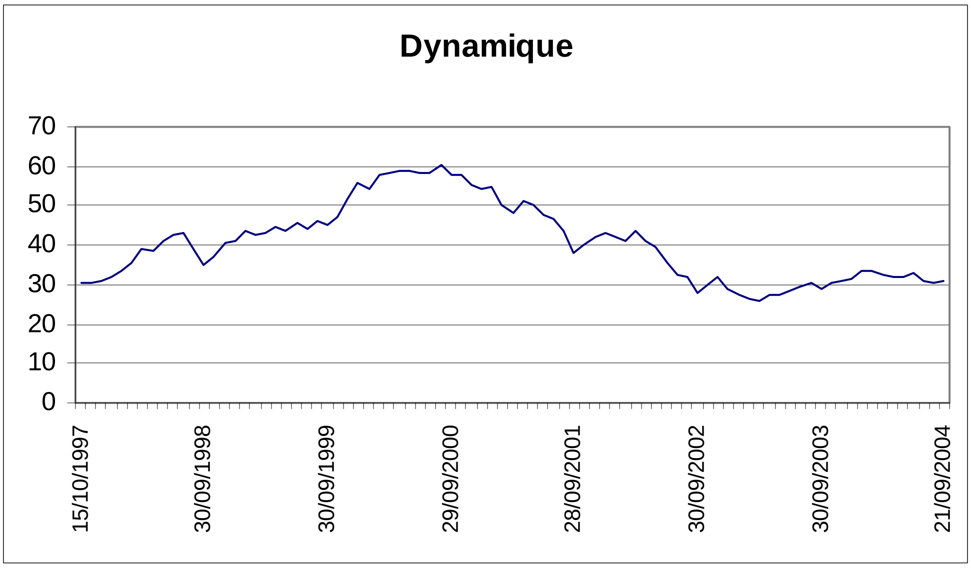
Les actifs sélectionnés sont les unités de compte utilisées dans un PERP. Ils représentent les OPCVM de profils « dynamique », « équilibré », et « prudent ». Les caractéristiques de ces actifs sont données en annexe 2. Ces trois actifs permettent de disposer de trois couples d'espérance-variance.

3.1.2 Graphes des évolutions des valeurs

Nous disposons de l'historique des valeurs de ces supports depuis sept ans. Cet historique permettra d'estimer les divers paramètres de modélisation. Les graphes sont les suivants :




Equilibre
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
15/10/1997
30/09/1998
30/09/1999
29/09/2000
28/09/2001
30/09/2002
30/09/2003
21/09/2004


Dynamique
70
60
50
40
30
20
10
0
15/10/1997
30/09/1998
30/09/1999
29/09/2000
28/09/2001
30/09/2002
30/09/2003
21/09/2004

3.1.3 Corrélations

Afin d'évaluer la variance des portefeuilles composés de plusieurs supports, il est nécessaire de connaître les corrélations existant entre ces derniers. Celles-ci sont évaluées entre les supports en unités de compte. Les corrélations entre les supports en unités de compte et le fonds en euros sont moins apparentes, dans les données collectées comme dans les natures différentes des fonds. L'hypothèse retenue sera une corrélation nulle entre le fonds en euros et les supports en unités de compte.

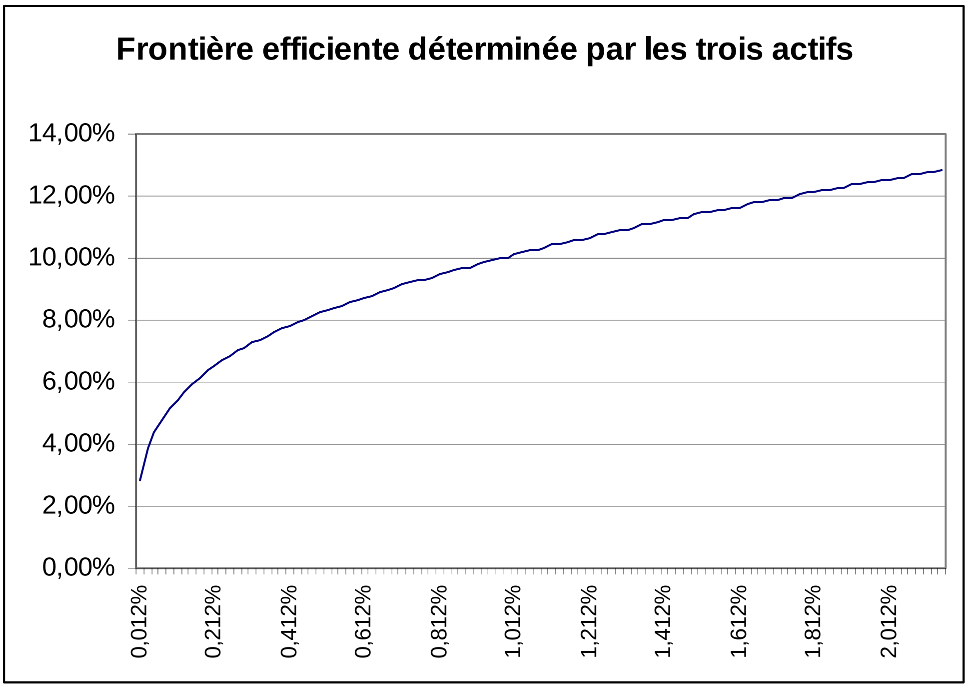
Les valeurs estimées des corrélations sur les données mensuelles de la période d'octobre 1997 à septembre 2004 (données en annexe 2) sont les suivantes :

Corrélations entre les supports	
Prudence – Equilibre	45%
Equilibre - Dynamique	82%
Prudence - Dynamique	12%

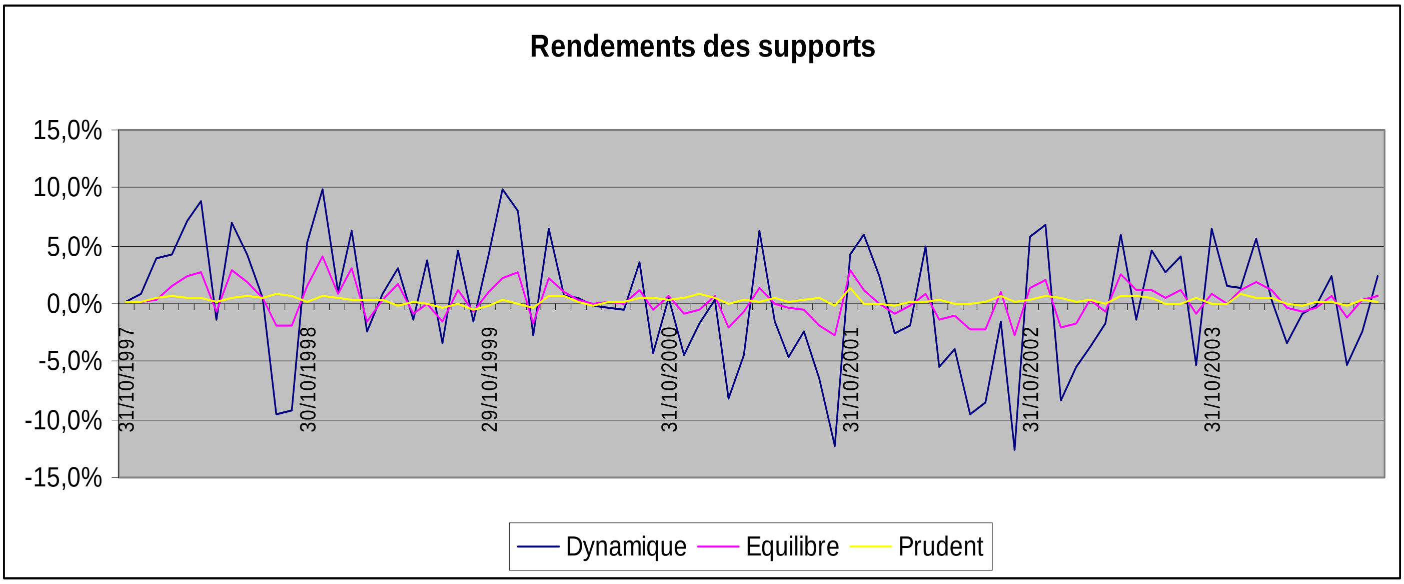
3.1.4 Frontière efficiente

L'analyse des statistiques descriptives des rendements des actifs sélectionnés, fournit la frontière suivante :

	Espérance	Variance
Prudence	3,386%	0,012%
Equilibre	6,183%	0,191%
Dynamique	12,316%	2,138%



3.1.5 Graphes des évolutions des rendements



3.1.6 Problématique des rendements enregistrés

Situation boursière des dernières années

Nos données posent une question troublante par rapport à la théorie financière générale, ou même par rapport à une logique élémentaire d'investissement. En effet, sans étude statistique supplémentaire, il apparaît clairement que sur les supports sélectionnés, le rendement est une fonction décroissante de la volatilité.

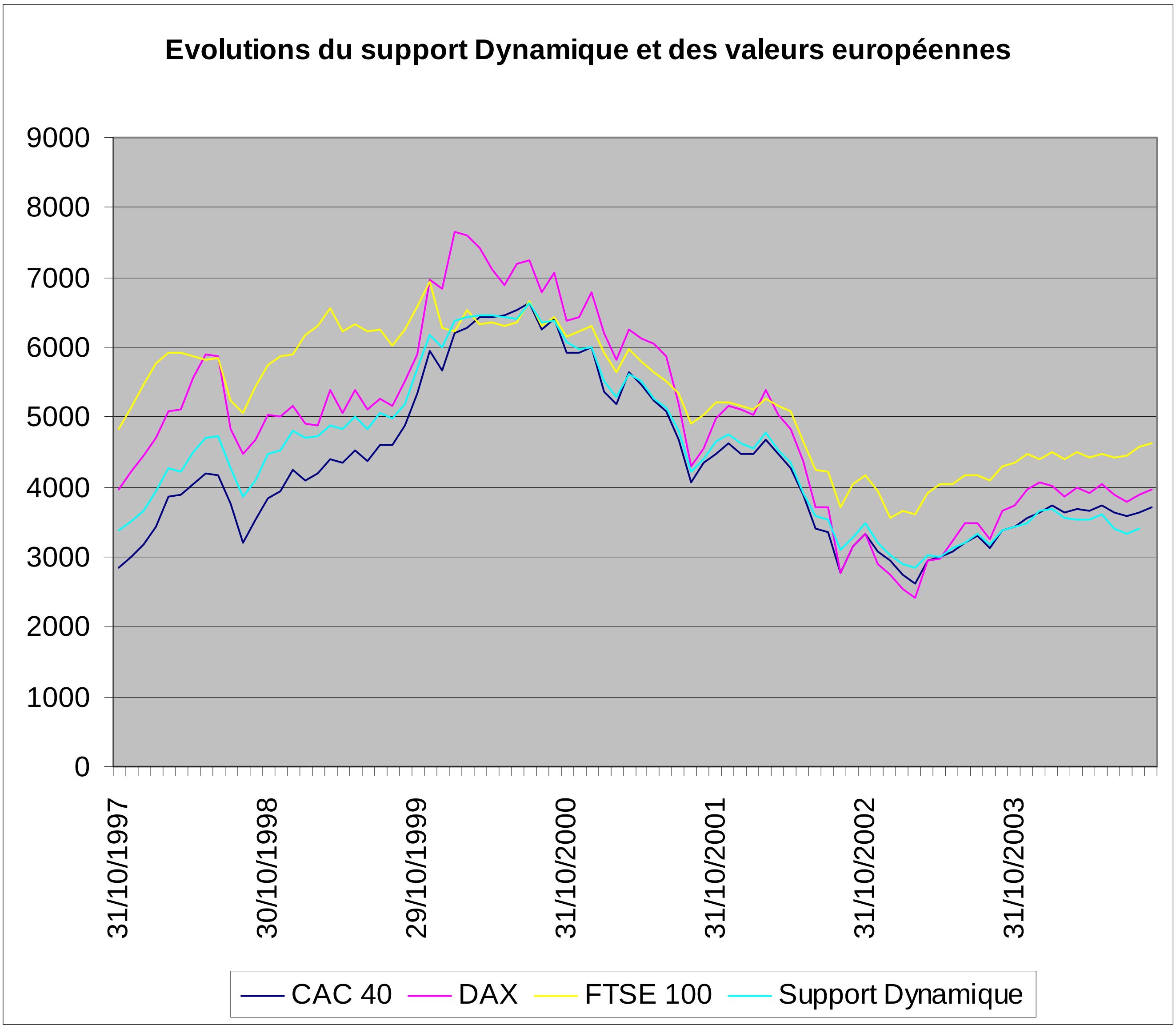
Ce phénomène est dû aux évènements économiques de ces dernières années : montée des cours en 2000, et chute de forte amplitude en 2001 et 2002.

De telles données conduiraient à éliminer les supports Equilibre et Dynamique de la grille d'investissement. Nous serions alors poussés à choisir d'autres supports en actions. Toutefois, vu la composition des supports (FCP de la Communauté européenne indexés sur le MSCI), il est à craindre que tout autre support en actions présenterait les mêmes caractéristiques.

Par ailleurs, si les supports avaient existé avant 1997, les données antérieures auraient pu permettre de discerner la tendance générale des évènements exceptionnels.

Comparaison aux valeurs européennes

Afin d'obtenir de plus amples renseignements, nous comparons le fonds dynamique aux actions de la Communauté européenne : CAC 40, DAX, FTSE 100.



Le tableau ci-dessous précise le coefficient de corrélation entre les rendements du support Dynamique et les indices européens :

	CAC 40	DAX	FTSE 100
Coefficient de corrélation	93,2%	87,7%	77,4%

Conclusion

Nos données dans leur état actuel semblent peu cohérentes. Une première analyse laisse penser que ce fait est dû à l'historique trop court des données disponibles. Nous avons également établi les points suivants :

- Si les supports avaient existé avant 1997, ils auraient certainement eu des comportements semblables à ceux des indices qu'ils reproduisent. Il est donc possible de reconstituer des valeurs antérieures à celles de1997 suivant l'historique des valeurs des indices.

- Le support Dynamique a eu un comportement identique à celui de l'ensemble des actions européennes. Il est donc inutile de remplacer ce support par un autre également fortement réparti en actions, en espérant obtenir des résultats plus en adéquation avec la théorie financière.

Il paraît donc inutile de changer de supports, mais l'extrapolation de valeurs antérieures à celles dont nous disposons est possible. Nous retiendrons donc cette deuxième solution. Les méthodes employées sont décrites dans le paragraphe suivant.

3.1.7 Prolongement des supports

D'après le résultat du paragraphe précédent, il est possible de prolonger les supports en fonction des valeurs des indices auxquels ils se réfèrent. Cette opération est effectuée par la méthode suivante (détaillée en annexe 7).

Nous effectuons une ACP sur l'historique des rendements des indices européens. Nous en déduisons trois axes factoriels, et nous effectuons une régression linéaire du support Dynamique sur ces trois axes. Nous reconstituons alors le support selon les coefficients de régression, et les valeurs des axes déterminés par l'ACP. Les autres supports sont reconstitués à partir de cette valeur et de leur répartition en actions et en obligations (la composition des supports est donnée en annexe 2). Le modèle utilisé suppose que les actifs sont redistribués chaque mois entre les fonds en actions et les fonds en produits de taux selon la composition donnée en annexe 2.

Le modèle de reconstitution du support Dynamique est le suivant :

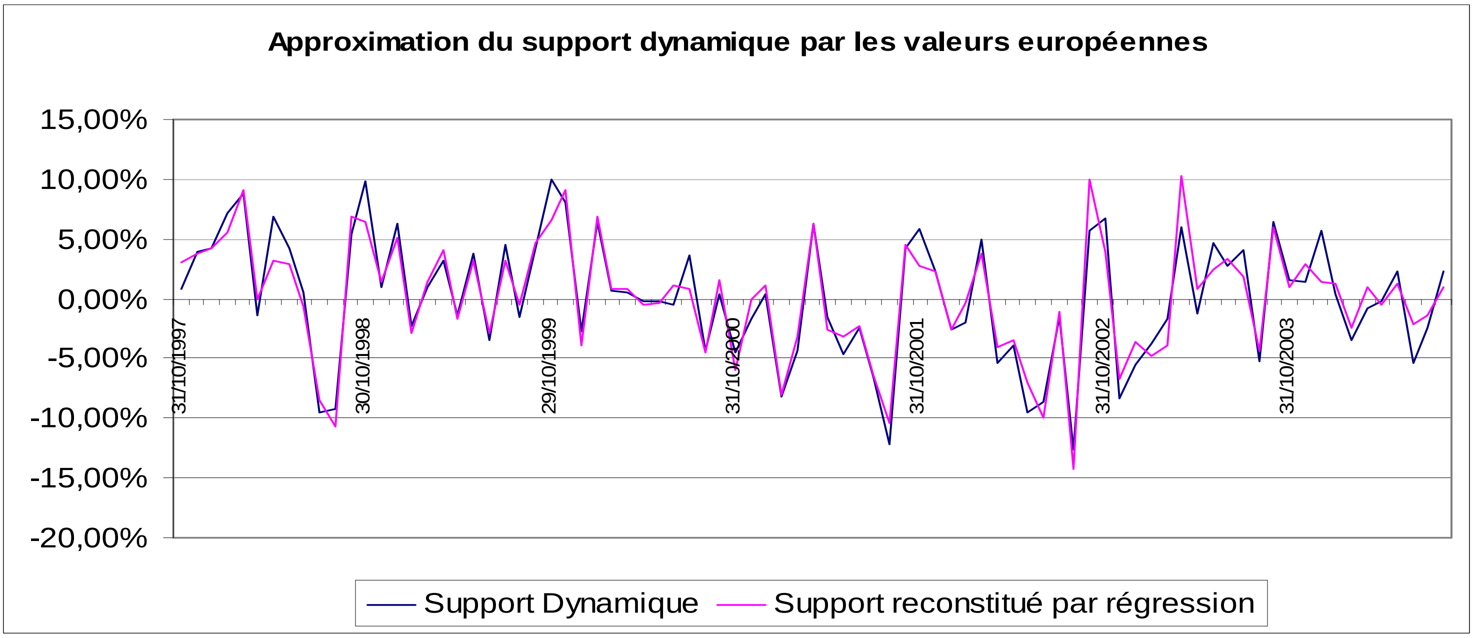
DYNAMIQUE = - 2,89268 AXE1 + 2,37295 AXE2 – 4,24989 AXE3

AXE1 = 0,588314 CAC40 + 0,583722 DAX + 0,559603 FTSE100

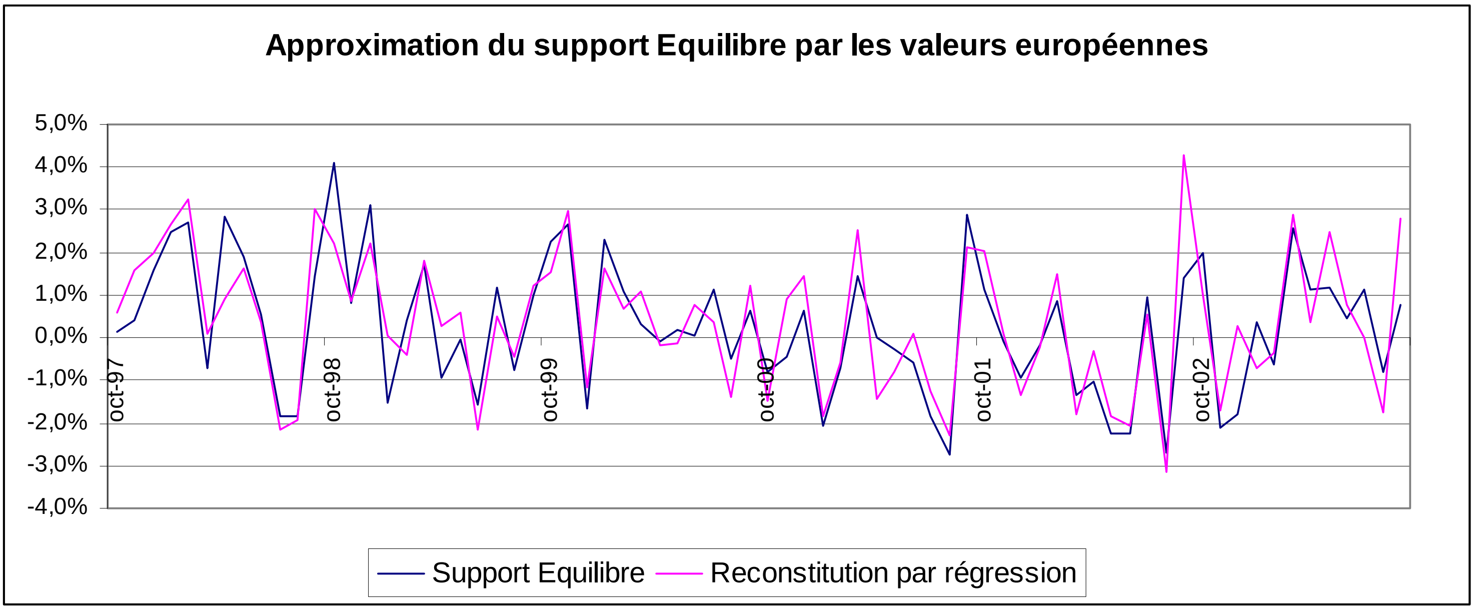
AXE2 = -0,335570 CAC40 – 0,453397 DAX + 0,825726 FTSE100

AXE3 = -0,735717 CAC40 + 0,673573 DAX + 0,070860 FTSE100

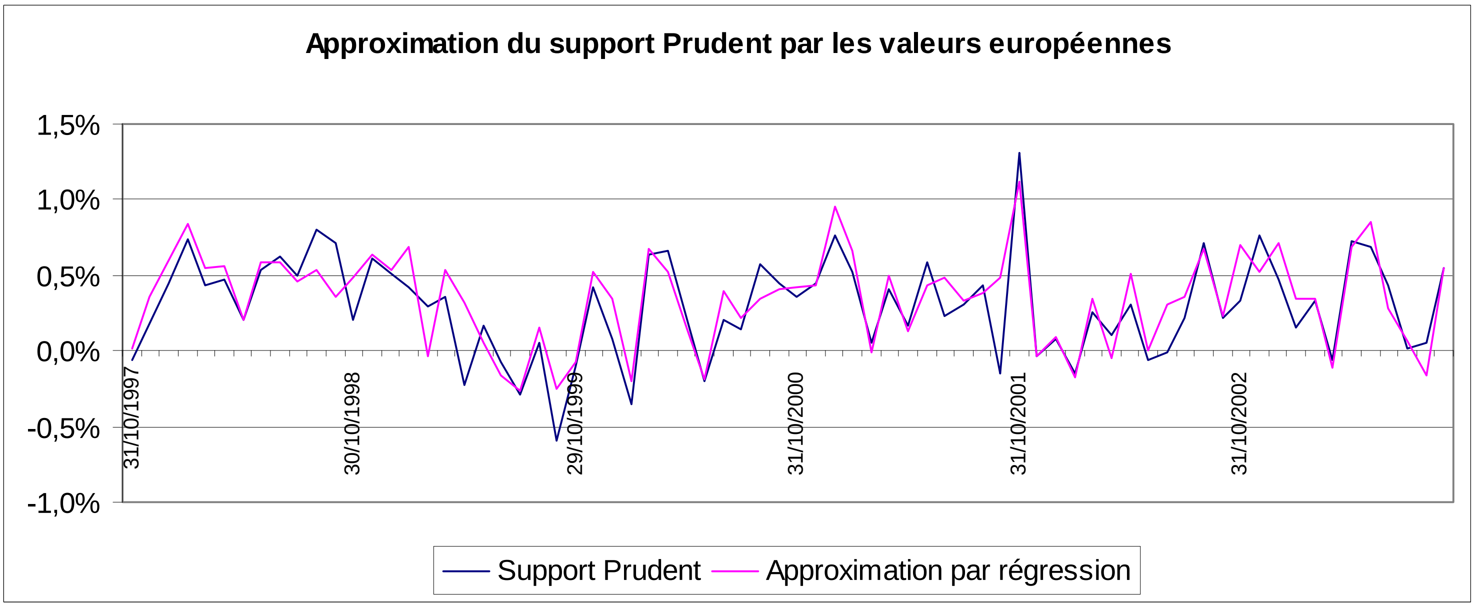
Les graphiques des pages suivantes comparent les reconstitutions des supports par régression aux valeurs réelles des rendements de ces supports. Les comparaisons (graphique, R^2,…) étant probantes, il est alors possible de prolonger les valeurs des supports.



Approximation du support dynamique par les valeurs européennes
15,00%
10,00%
5,00%
0,00%
-5,00%
-10,00%
-15,00%
-20,00%
31/10/1997
30/10/1998
29/10/1999
31/10/2000
31/10/2001
31/10/2002
31/10/2003
Support Dynamique
Support reconstitué par régression



Approximation du support Equilibre par les valeurs européennes
5,0%
4,0%
3,0%
2,0%
1,0%
0,0%
-1,0%
-2,0%
-3,0%
-4,0%
oct-97
oct-98
oct-99
oct-00
oct-01
oct-02
Support Equilibre
Reconstitution par régression

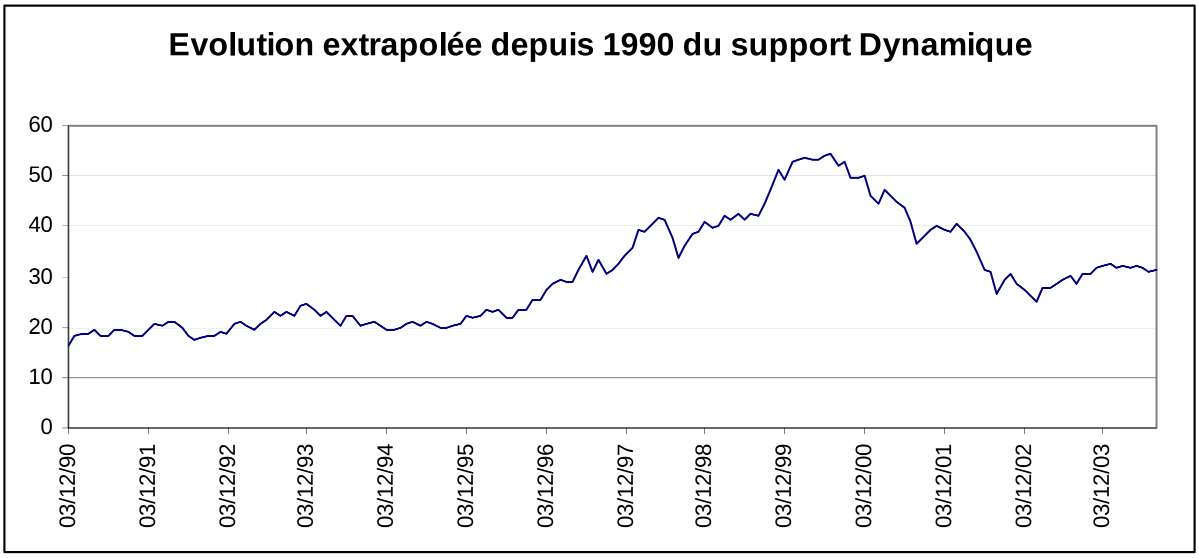


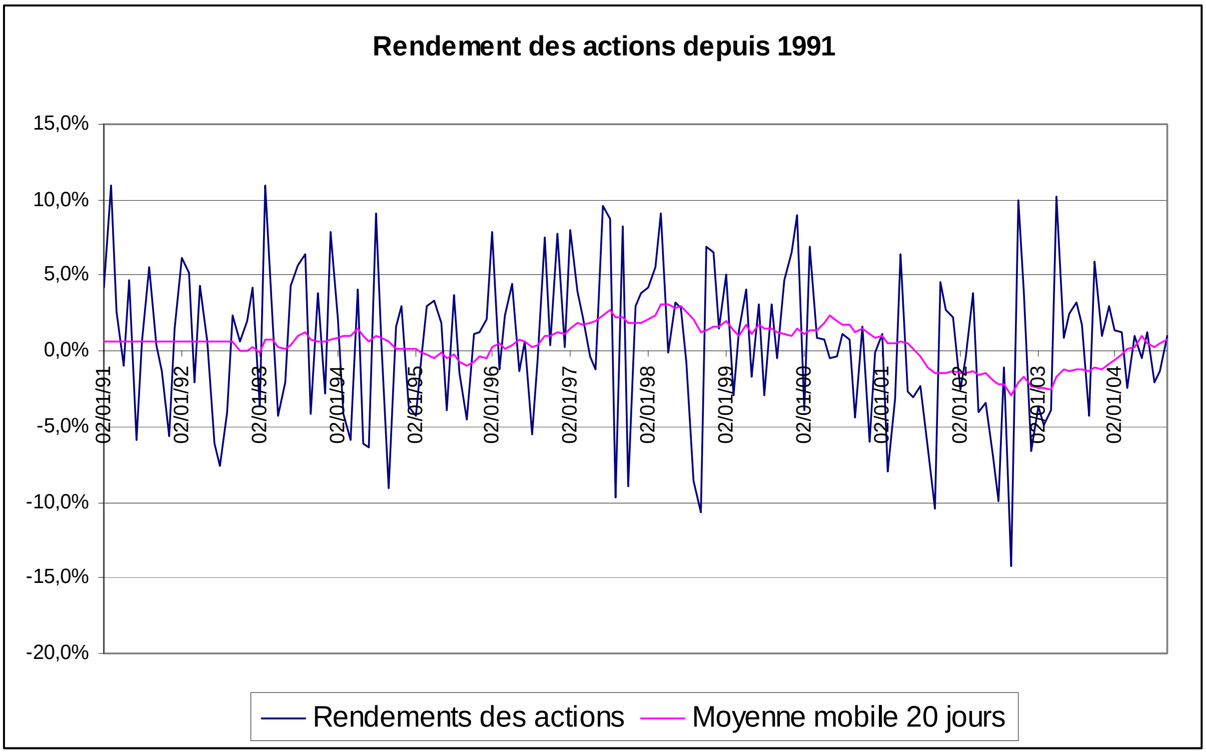
Approximation du support Prudent par les valeurs européennes
1,5%
1,0%
0,5%
0,0%
-0,5%
-1,0%
31/10/1997
30/10/1998
29/10/1999
31/10/2000
31/10/2001
31/10/2002
Support Prudent
Approximation par régression

3.1.8 Résultats des prolongements des supports

Nous ne disposons pas des historiques des rendements obligataires depuis suffisamment longtemps pour changer l'allure générale de nos données : les supports en obligations restent non significativement moins rentables que les supports en actions.

Cependant, l'historique sur une durée plus longue des actions confirme l'intuition de départ : les actions ont un rendement supérieur à 0 %. La « cloche » observée dans nos données est bien un événement séparé de l'évolution globale des cours.

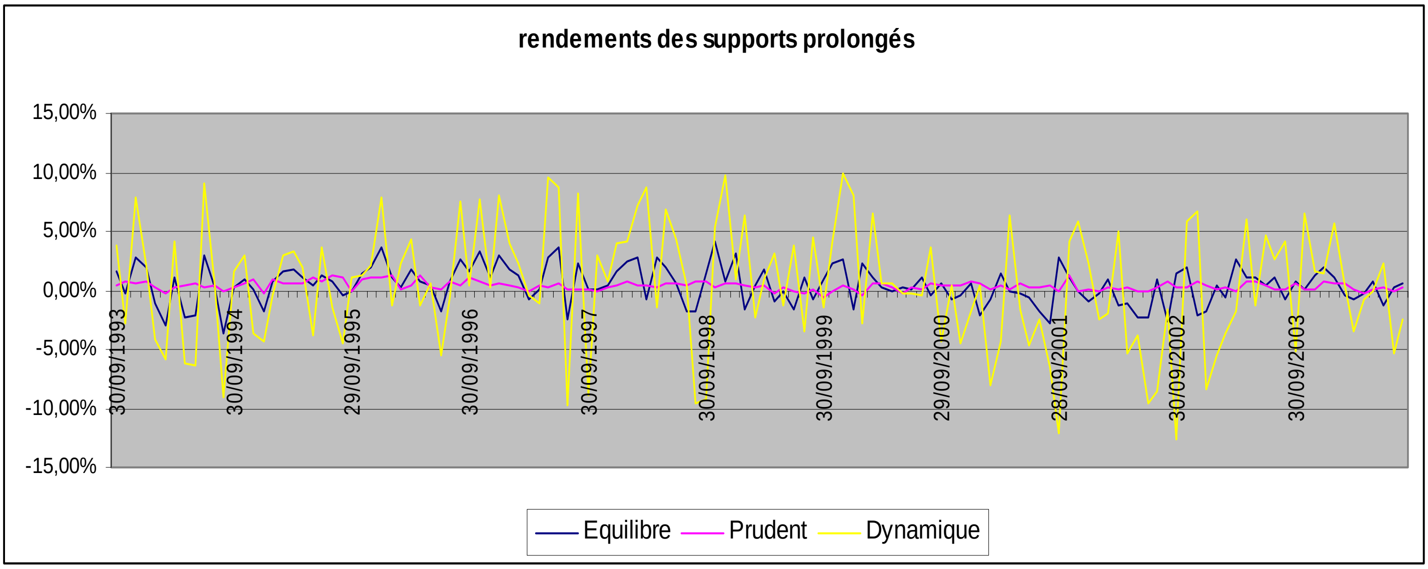




3.2 Statistiques sur les supports en vue de la modélisation

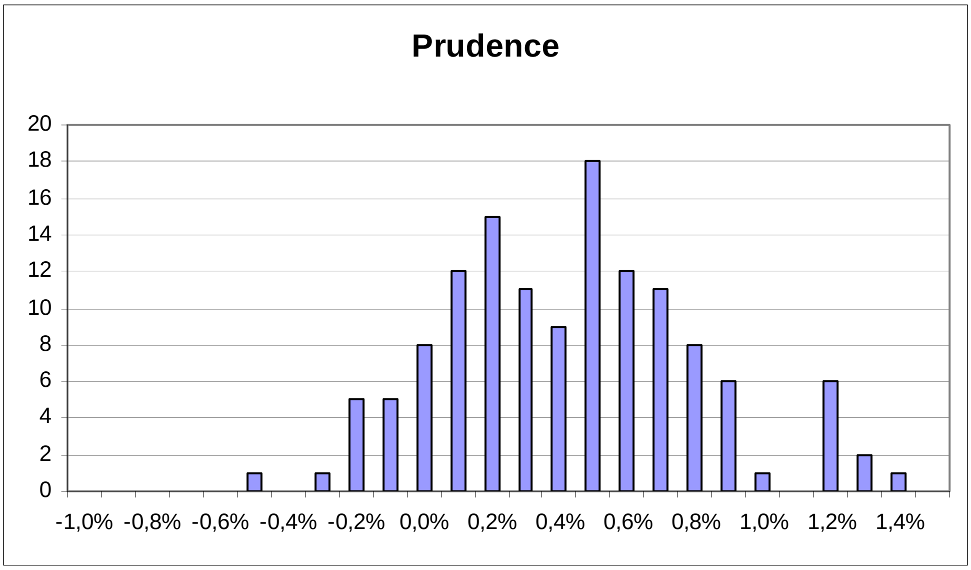
3.2.1 Représentation des rendements des supports

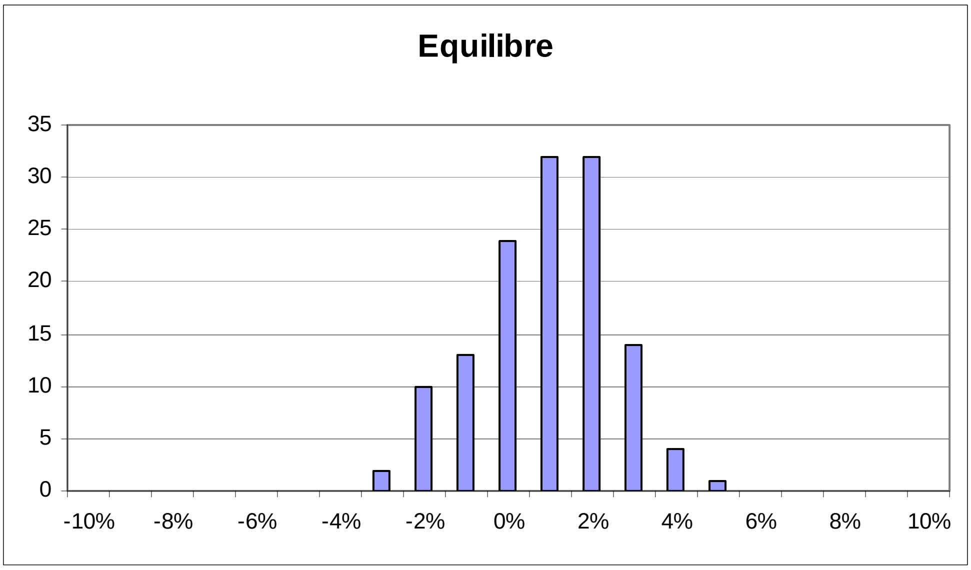
L'historique des rendements des supports prolongés depuis 1993 comme indiqué ci-dessus se présente comme suit :

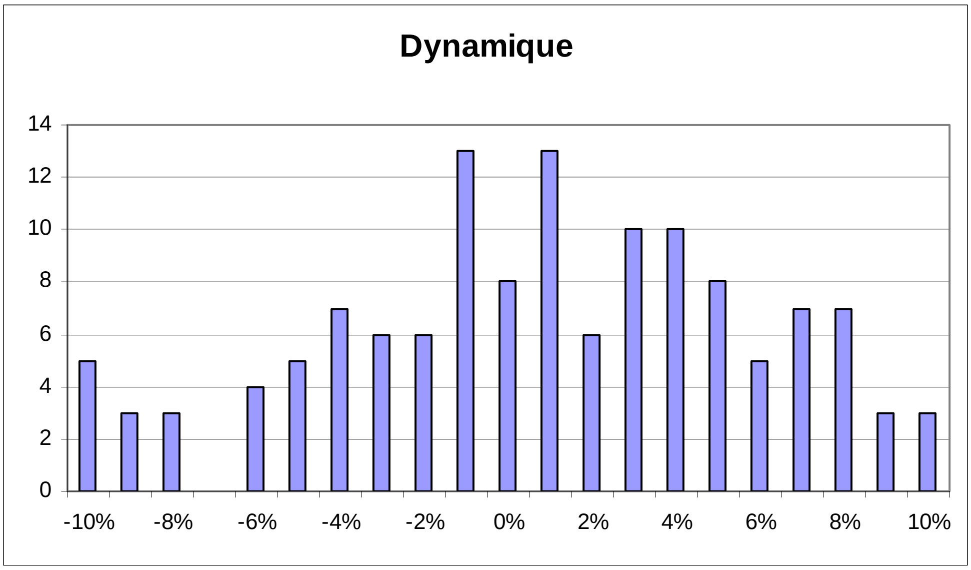


La modélisation la plus naturelle pour une action est le processus de Black et Scholes. Afin de tester si cette représentation correspond à nos données, nous effectuons les premières statistiques suivantes :

En notant St le cours d'un support à l'instant t, les graphiques suivants représentent la répartition des grandeurs $Xt = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$:







Si St suit un processus de Black et Scholes, alors les grandeurs Xt calculées suivent une loi normale. Une simple observation indique que les histogrammes présentés ne sont probablement pas issus de variables aléatoires gaussiennes. Les tests statistiques donnés en annexe 6 le confirment.

Par ailleurs, le comportement de marché décrit dans les paragraphes précédents (forme de cloche) serait mal modélisé par un tel processus.

3.2.2 Choix de modélisation

Il convient donc de rechercher un modèle adapté aux données dont on dispose. Le choix retenu consiste en un modèle de diffusion de Black et Scholes dans lequel la moyenne est elle-même aléatoire. En effet, l'observation des supports laisse apparaître que, sans augmentation de la volatilité, les « cloches » peuvent être vues comme une variation de la tendance des rendements. Les histogrammes ci-dessus seraient alors la superposition de plusieurs courbes gaussiennes centrées en différentes moyennes.

4. Modélisation des actifs en UC

4.1 Modèle choisi

4.1.1 Description du modèle

Une première impression lors de l'observation des cours des supports est que le marché est soumis à des tendances, qui peuvent varier au cours du temps, mais qui oscillent autour d'une valeur moyenne globale sur le long terme. Après avoir vérifié statistiquement que les moyennes ont changé au cours du temps, nous mettrons en place un modèle qui reproduit ces comportements :

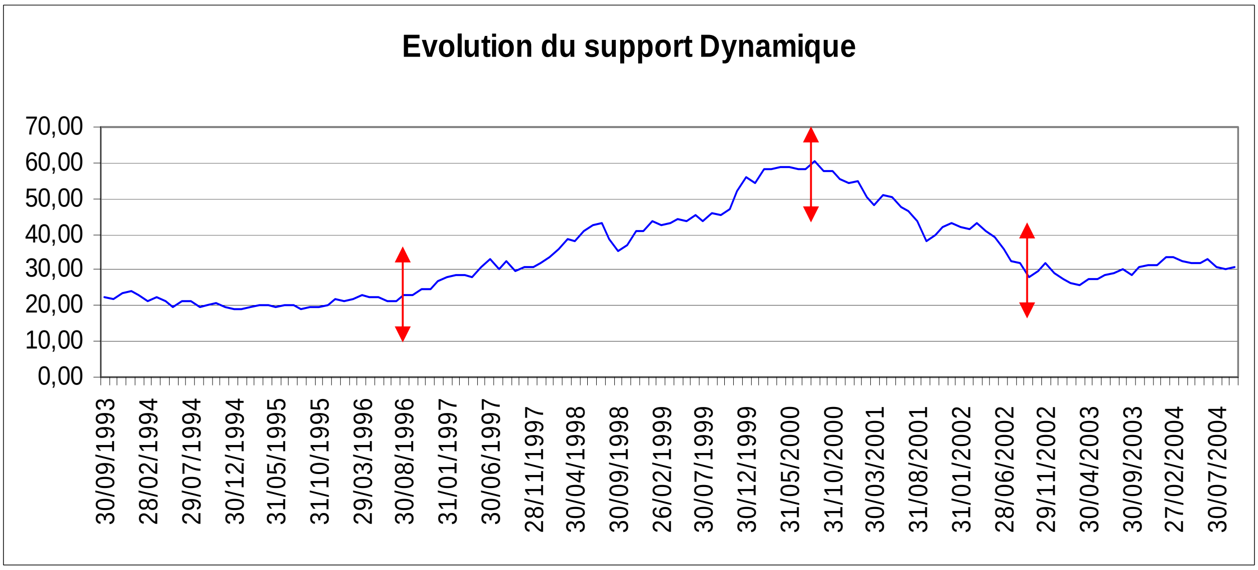
L'actif suit un processus de Black et Scholes : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t.dt + \sigma.dZ$. Selon un processus de Poisson de paramètre λ, la moyenne μ_t change, et oscille autour de la tendance générale μ (par un AR(3)).

4.1.2 Test statistique motivant cette modélisation

Le test statistique confirmant cette intuition que nous utiliserons sera celui décrit par Miklos CSORGÖ et Lajos HORVATH dans leur ouvrage *« Limit Theorems in Change-Point Analysis »*. La présentation mathématique de ce test est expliquée en annexe 3. Son objet est de détecter une variation de la moyenne des observations sur la base de séries gaussiennes. La statistique du test est basée sur un rapport de vraisemblance.

4.1.3 Résultats du test

Support Dynamique



On veut tester la constance de la moyenne des rendements mensuels du support dynamique. On calcule donc les valeurs de la statistique Z_n (décrite en annexe 2), et on la compare à la valeur critique correspondante z_n. Pour le premier test, les résultats sont les suivants :

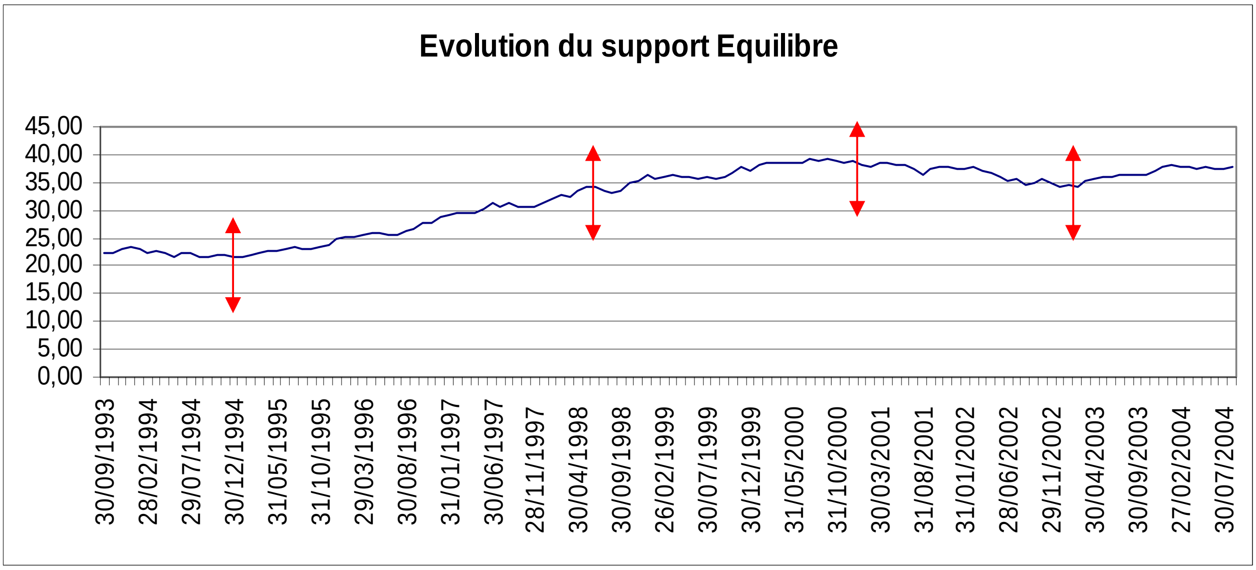
date de début	date de fin	Z_n	z_n	Décision
sept-93	sept-95	2,601	3,02	Constant
sept-93	févr-96	1,977	3,02	Constant
sept-93	juil-96	1,413	3,03	Constant
sept-93	sept-96	2,028	3,03	Constant
sept-93	oct-96	3,896	3,03	Changement
sept-93	déc-96	5,182	3,04	Changement
sept-93	oct-97	3,065	3,05	Changement
sept-93	déc-01	4,878	3,11	Changement
sept-93	sept-04	7,949	3,12	Changement

On en déduit que le test permet de confirmer un changement de la moyenne de la loi des rendements. On placera ce changement en juillet 1996 (identifié par une flèche rouge sur le graphique).

En effectuant le test sur une nouvelle période commençant en juillet 1996, on obtient une nouvelle période sans changement, puis un changement intervient. En itérant ce procédé, on détermine les dates de changements suivantes (matérialisées par les flèches rouges sur le graphique) : juillet 1996, août 2000, septembre 2002.

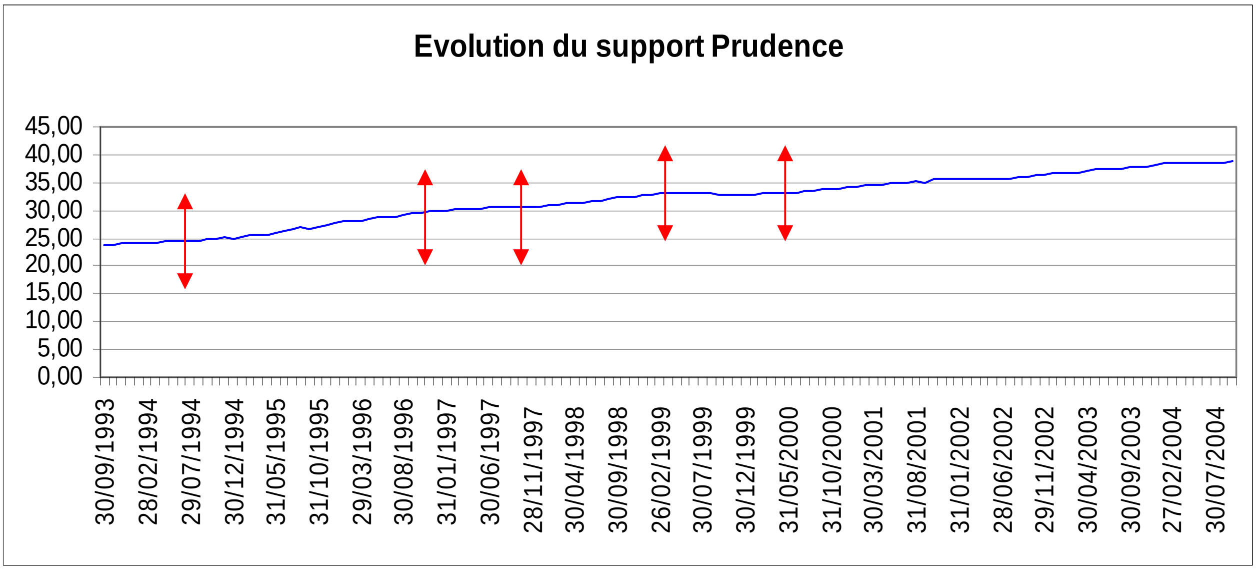
Support Equilibre

On effectue le même test sur le support equilibre.



Les changements de moyenne sont observés en décembre 1994, juillet 1998, décembre 2000, mars 2003.

Support Prudence



Les changements sont observés en mai 1994, décembre 1996, octobre 1997, février 1999, avril 2000.

4.2 Estimation des paramètres

Le modèle étant choisi, il reste à estimer les paramètres le composant, à partir des échantillons des valeurs des actifs choisis.

4.2.1 Calcul pour le processus de Black et Scholes

Ce paragraphe décrit le calcul permettant d'obtenir les estimateurs des paramètres d'un modèle de Black et Scholes.

Le processus utilisé est

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu.dt + \sigma.dZ$$

La solution de cette équation est donnée par

$$S_t = S_0.\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t + \sigma.Z_t\right)$$

On a donc

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times (t+h) + \sigma.Z_{t+h}\right)}{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma.Z_t\right)}$$

d'où

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times h + \sigma \times (Z_{t+h} - Z_t)\right)$$

Donc, en notant $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ où $\forall i \in [1;N], t_{i+1} - t_i = h$,

les variables $(X_i)_{i \in N}$ où $X_i = \left(\frac{S_{t_i+h}}{S_{t_i}}\right)$ sont indépendantes et de loi lognormale.

En effet, les accroissements du brownien sont indépendants et de loi normale.

On a donc

$$\forall i \in [1;N],\ \ln(X_i) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h ; \sigma\sqrt{h}\right)$$

On estime les paramètres σ et μ par la méthode du maximum de vraisemblance :

La densité d’une loi lognormale X telle que ln (X) = Y où Y~N(m,s²) et donnée par

$$f(x)=\frac{1}{x.s.\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\ln(x)-m}{s}\right)^2\right)$$

Les variables Xi étant indépendantes et identiquement distribuées, la vraisemblance du modèle s’écrit

$$L(X_1,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i.s.\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\ln(X_i)-m}{s}\right)^2\right)$$

On en déduit la log-vraisemblance, et en dérivant, on obtient les équations :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln(X_i)-m}{s}\right)^2=0 \\ \displaystyle -\frac{n}{2.s^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(\ln(X_i)-m)^2}{s^4}\right)=0 \end{cases}$$

On en déduit les paramètres estimés :

$$\begin{cases} \displaystyle m_{est}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) \\ \displaystyle s^2{}_{est}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(X_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right)^2 \end{cases}$$

Avec

$$m=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h \quad \text{et} \quad s=\sigma\sqrt{h}$$

On obtient les estimateurs du maximum de vraisemblance de μ et σ :

$$\boxed{\begin{cases} \displaystyle \sigma^2_{est}=\frac{1}{n.h}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(X_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right)^2 \\ \displaystyle \mu_{est}=\frac{1}{n.h}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)+\frac{\sigma^2_{est}}{2} \end{cases}}$$

4.2.2 Estimation des paramètres généraux

Sur la base des périodes déterminées, on peut estimer les paramètres d'un modèle de Black et Scholes sur chaque intervalle. On en déduit ensuite les paramètres du modèle (par moyenne pondérée par le nombre de valeurs par périodes). Pour la variance, on déterminera la valeur globale du paramètre, alors que pour la moyenne, on déterminera la tendance du modèle, autour de laquelle graviteront les valeurs aléatoires.

Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Support Dynamique					
Période		σ^2 estimé	μ estimé	Variance	Espérance
Début	Fin				
janvier-1991	septembre-1993	1,065%	13,445%	1,400%	14,391%
septembre-1993	juillet-1996	0,918%	0,737%	0,936%	0,740%
juillet-1996	août-2000	1,345%	27,097%	2,329%	31,123%
août-2000	septembre-2002	1,077%	-25,830%	0,646%	-22,763%
septembre-2002	septembre-2004	0,971%	5,448%	1,088%	5,599%
Paramètres retenus		**1,075%**	**7,777%**	**1,263%**	**8,088%**

Support Equilibre					
Période		σ^2 estimé	μ estimé	Variance	Espérance
Début	Fin				
septembre-1993	décembre-1994	0,268%	-1,376%	0,261%	-1,367%
décembre-1994	juillet-1998	0,270%	12,697%	0,349%	13,538%
juillet-1998	décembre-2000	0,250%	6,523%	0,285%	6,740%
décembre-2000	mars-2003	0,200%	-3,417%	0,187%	-3,360%
mars-2003	septembre-2004	0,082%	4,786%	0,090%	4,902%
Paramètres retenus		**0,214%**	**5,500%**	**0,239%**	**5,654%**

Support Prudence					
Période		σ^2 estimé	μ estimé	Variance	Espérance
Début	Fin				
septembre-1993	mai-1994	0,011%	4,912%	0,012%	5,035%
mai-1994	décembre-1996	0,022%	6,762%	0,025%	6,996%
décembre-1996	octobre-1997	0,005%	2,524%	0,005%	2,556%
octobre-1997	février-1999	0,004%	5,751%	0,005%	5,919%
février-1999	avril-2000	0,015%	0,810%	0,016%	0,813%
avril-2000	septembre-2004	0,011%	3,254%	0,012%	3,307%
Paramètres retenus		**0,013%**	**3,400%**	**0,014%**	**3,458%**

4.2.3 Modèle de moyenne aléatoire du processus

Le modèle utilisé est un processus de Black et Scholes dont la moyenne est aléatoire. La moyenne est constante par périodes, et les fins de périodes interviennent selon un processus de poisson. Toutefois, cette moyenne oscille autour de la tendance générale. Nous introduisons donc la variation de la moyenne selon une force de rappel autour de la tendance.

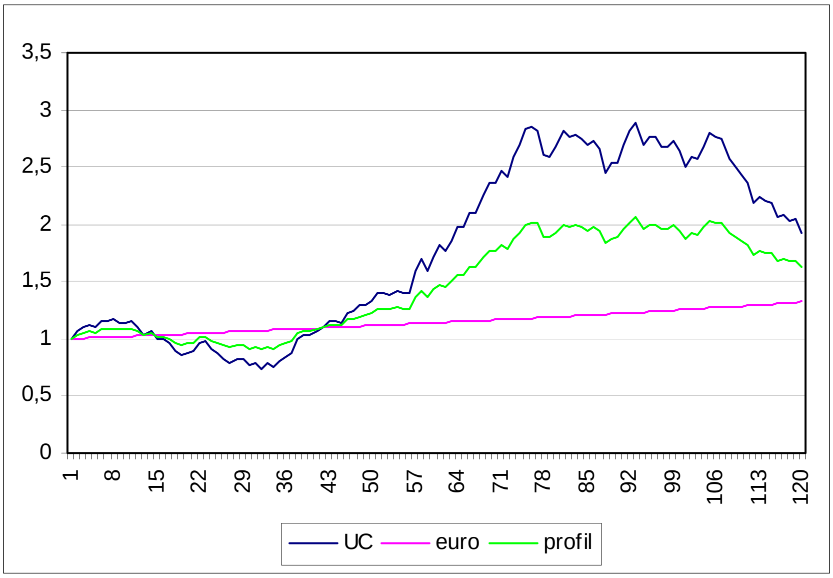
Ce concept est mis en œuvre par un AR(3). En effet, ce modèle permet de prendre en compte l'écart à la valeur moyenne, et d'amplifier celui-ci si l'écart est répété sur plusieurs périodes. Cependant, il nous paraît inutile d'introduire des variables AR(4) ou plus, du fait de l'impossibilité d'évaluer ces paramètres. En effet, on dispose de seulement 3 valeurs pour estimer les coefficients de l'AR. Les valeurs trouvées seront donc indicatives seulement. Le modèle final est donc de la forme :

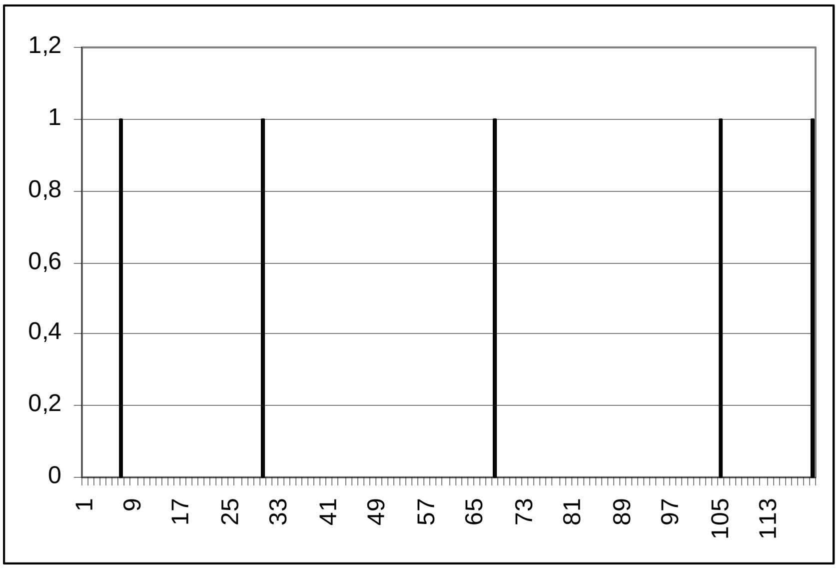
$$\boxed{\mu_n = \mu_0 + k_1(\mu_{n-1} - \mu_0) + k_2(\mu_{n-2} - \mu_0) + k_3(\mu_{n-3} - \mu_0) + \varepsilon}$$

où ε est une loi normale centrée, et μ_0 la tendance du support.

L'exemple donné en page suivante donne l'allure des courbes produites par ce modèle.

Modélisation des actifs par processus à moyenne variable : exemple d'évolution du cours et survenance des changements de moyenne





Moyenne sur la période				
9%	-2%	20%	8%	-2%

4.2.4 Estimation des paramètres du modèle de changement de moyenne

Valeurs initiales des moyennes aléatoires

Les valeurs initiales sont fixées égales à la tendance du processus. Cette décision est prudente, car si l'on choisissait les dernières valeurs connues, nous aboutirions à une première valeur systématiquement supérieure à la tendance, étant donné que les deux dernières valeurs connues sont inférieures à la tendance.

Support	μ_0	μ_{-1}	μ_{-2}
Prudence	3,4%	3,4%	3,4%
Equilibre	5,5%	5,5%	5,5%
Dynamique	7,8%	7,8%	7,8%

Coefficients des variables AR

Ceux-ci sont estimés par régression sur les trois valeurs connues pour chaque support. On en déduit ensuite une valeur moyenne qui sera utilisée pour les trois supports. Nous ne pousserons pas plus loin la recherche de ces valeurs, car le très faible nombre de données ne permet pas de faire des estimations plus précises.

Support	k_1	k_2	k_3
Prudence	-0,45	-0,03	-0,1
Equilibre	-0,45	-0,3	-0,1
Dynamique	-0,45	-0,3	-0,1

Ecart-type du bruit blanc

Celle-ci est estimée sur la base des quelques données disponibles. Les valeurs retenues sont les suivantes :

Support	écart type AR
Prudence	0,0091
Equilibre	0,0308
Dynamique	0,0602

Paramètre de la loi de Poisson de survenance des sauts

Sur la base des données observées, les changements interviennent environ tous les deux ans :

λ
0,5

5. Modélisation des actifs garantis

5.1 Description de la modélisation utilisée

On suppose que les actifs garantis sont investis dans un fonds majoritairement obligataire. L'assuré ne vendant pas cet actif, il n'est pas sujet à la réalisation de moins values du fait de la baisse des taux. Il s'intéresse donc uniquement à la tombée des coupons, ceux-ci étant déterminés par les taux en vigueur lors de l'achat des obligations.

Le fonds en euros est donc modélisé de la manière suivante :

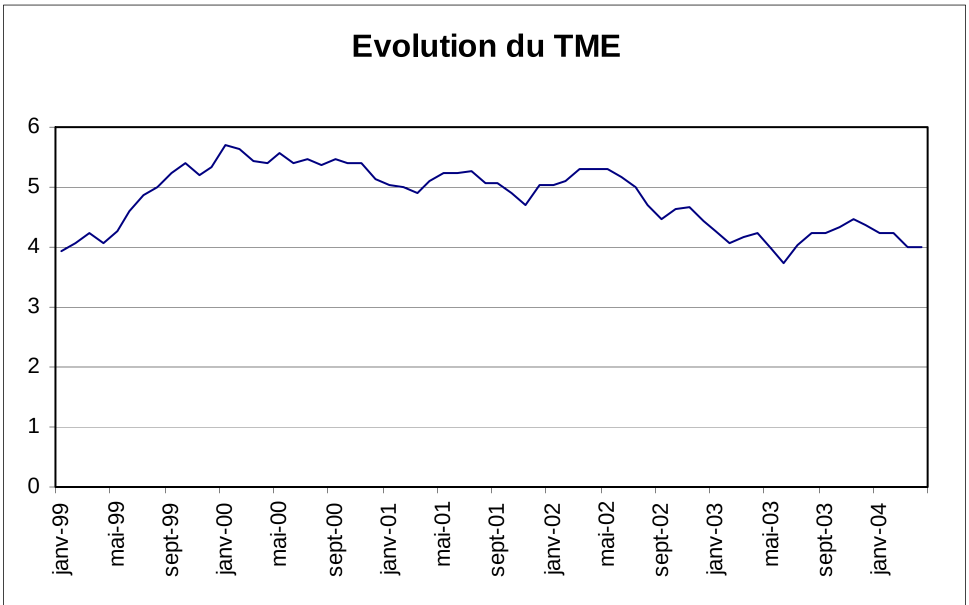
- On modélise un taux d'intérêts par la méthode de Vasicek : $dr_t=a(b-r_t)+\sigma_0^2.\varepsilon$

- On en déduit l'évolution des actifs représentatifs du fonds en euro, augmentés des intérêts produits par une fraction de ce taux. En effet, on considère que l'assureur prélève une partie des produits financiers à titre de frais de gestion, mais également pour couvrir la garantie plancher du fonds en euros.

- On en déduit la valeur du fonds en euros, égal à la valeur précédemment calculée si celle-ci ne fait pas baisser la valeur du fonds. En cas de baisse des actifs représentatifs, le fonds en euros conserve sa valeur précédente. Cela traduit le fait que le fonds en euros ne peut pas baisser.

5.2 Sélection des actifs garantis

Le taux sélectionné est le TME. Dans le cadre du placement que l'on cherche à simuler, il se révèle proche du comportement souhaité.



5.3 *Estimation des paramètres*

5.3.1 Calcul

On fait l'hypothèse que le TME suit un processus de Vasicek défini par :

$$dr_t = a(b - r_t) + \sigma_0{}^2 \varepsilon$$

On a donc la solution :

$$r_t = r_0 . e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \sigma_0{}^2 e^{-at} \int_0^t e^{as} . dW_s$$

exp(as) étant une fonction déterministe, on obtient le résultat de discrétisation exacte suivant :

$$r_{t+d} = r_t + b\left(1 - e^{-ad}\right) + \sigma_0{}^2 \sqrt{\frac{1 - e^{-2ad}}{2a}} \varepsilon$$

On estime donc le modèle AR(1) sur la série de (r_t) : $r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \sigma_1 \varepsilon$

On obtient donc les estimateurs suivants :

$$\begin{cases} a_{est} = -\ln \beta_{est} \\ b_{est} = \dfrac{\alpha_{est}}{1 - \beta_{est}} \\ \sigma_0{}^2{}_{est} = \dfrac{2\sigma_{1\,est}{}^2 \ln \beta_{est}}{\beta_{est}^2 - 1} \end{cases}$$

5.3.2 Estimation

L'estimation sous SAS des paramètres de l'AR(1) nous donne (cf. annexe 4) :

a_{est}	b_{est}	$\sigma_0{}^2{}_{est}$
0,05755496	0,0481281	4,033 E-6

6. Etude de cas particuliers : approche simplifiée

Dans une première étape, nous étudierons le problème sous un aspect mathématique, en recherchant des résultats sous forme de formules fermées. Pour cela, nous choisirons de simplifier la modélisation proposée dans les paragraphes précédents. Nous procéderons en deux étapes de simplifications : la première sera assez grossière, et la seconde plus fine. Ces deux cas particuliers permettrons de dégager les propriétés essentielles de la problématique.

Ensuite, et sur la base du modèle le plus proche possible des hypothèses retenues dans les paragraphes précédents, nous déterminerons des grilles de répartition de l'épargne directement par le calcul.

6.1 Hypothèses communes aux deux simplifications

6.1.1 Description de la problématique

On cherche les solutions en k et s de l'inéquation suivante :

$$P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T0}\right)\right] > p$$

où

- $P(100\%,s)_T$ suit un processus de diffusion de Black et Scholes avec moyenne aléatoire (suivant un AR(3)), les changement intervenant selon un processus de poisson,
- $P(0\%,s)_T$ évolue suivant le taux d'intérêts des obligations d'état.

6.1.2 Simplification du problème

Afin de dégager quelques premiers résultats théoriques, nous simplifierons les hypothèses, tout en gardant l'esprit de celles-ci.

Fonds en UC

Le fonds en UC sera modélisé par un processus de Black et Scholes. Nous négligerons dans cette partie les effets de discontinuités, ou de changements de moyenne.

Le fonds en UC suit la loi :

$$S_t \sim S_0.\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\varepsilon\right)$$

où ε suit une loi normale centrée réduite.

Les effets de cette simplification tendront à diminuer la variance des valeurs de rendement de l'actif.

Fonds en euros

Le fonds en euros sera simplement modélisé par un rendement constant.

Le fonds en euros prendra donc les valeurs :

$$E_t = E_{T0}.(1+i)^t$$

où i est le taux d'intérêts retenu.

Cette simplification, si elle peut paraître un peut forte, respecte toutefois l'esprit de la modélisation. En effet, cette dernière consiste à revaloriser le fonds par un taux variable. Ce taux oscillant autour d'une valeur centrale, il n'est pas aberrant de fixer le taux à cette valeur.

6.2 Calculs théoriques

On cherche

(1)	$P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T0}\right)\right] > p$

On a

$$P(k,s)_t = kS_t + (1-k)E_t$$

en notant

$S_t = P(100\%,s)_t$ la valeur en t du fonds en UC,

$E_t = P(0\%,s)_t$ la valeur en t du fonds en euros.

(1) $\Leftrightarrow$ $P\left[\left(kS_T + (1-k)E_T - E_T\right) \leq -a\left(E_T - E_{T0}\right)\right] \leq 1-p$

$\Leftrightarrow$ $P\left[S_T \leq \frac{(k-a)E_T + aE_{T0}}{k}\right] \leq 1-p$

$\Leftrightarrow$ $P\left[S_T \leq At\right] \leq 1-p$ en notant $At = \frac{(k-a)E_T + a.E_{T0}}{k}$

$\Leftrightarrow$ $P\left[S_0.\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\varepsilon\right) \leq At\right] \leq 1-p$

$\Leftrightarrow$ $P\left[\varepsilon \leq \left(\ln\left(\frac{At}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\frac{1}{\sigma.\sqrt{t}}\right] \leq 1-p$

$\Leftrightarrow$ $$\left(\ln\left(\frac{A_t}{S_0}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\leq q_{1-p}$$ en notant q_{1-p} le quantile d'ordre 1-p d'une N(0,1)

$\Leftrightarrow$ $$\left[\ln\left(\frac{(k-a).E_T+a.E_{T_0}}{kS_0}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\leq q_{1-p}$$

Les solutions cherchées répondent donc à l'inéquation suivante :

(2) $$\left[\ln\left(\frac{(k-a).E_{T_0}(1+i)^t+aE_{T_0}}{kS_0}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\leq q_{1-p}$$

6.3 Modélisation de base

6.3.1 Modèle simple

Dans un premier temps, et afin de mieux appréhender la suite des résultats, nous modélisons de façon simpliste la problématique, de façon à faire apparaître les propriétés fondamentales de la situation.

Le problème initial est de trouver k et s tels que
$$P\left[\left(P(k,s)_T-P(0,s)_T\right)>-a\left(P(0,s)_T-P(0,s)_{T_0}\right)\right]>p$$

Nous rechercherons dans ce paragraphe le temps T nécessaire à la réalisation de la proposition suivante :

(3) $$P\left[\left(P(100,s)_T-P(0,s)_T\right)>0\right]>p$$

Il s'agit donc, sans s'accorder de marge de prise de risque, de déterminer la probabilité que le fonds en UC obtienne un rendement supérieur à celui du fonds en euros.

6.3.2 Calculs

En notant

$S_t=P(100\%,s)_t$ la valeur en t du fonds en UC,

$E_t=P(0\%,s)_t$ la valeur en t du fonds en euros,

le problème cherché s'écrit :
(3) ⇔

$$P\left[\left(S_T - E_T\right) > 0\right] > p$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier du modèle précédent (2), dans lequel a=0 et k=100%.
En posant de plus $E_{to} = S_o = 1$, la relation (2) s'écrit :

(2) ⇔ $$\left[\ln\left((1+i)^t\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \leq q_{1-p}$$

⇔ $$\left[t.\ln(1+i) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \leq q_{1-p}$$

⇔ $$\left[\ln(1+i) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]\frac{\sqrt{t}}{\sigma} \leq q_{1-p}$$

⇔ **(4)** $$t \geq \left(\frac{\sigma.q_{1-p}}{\ln(1+i) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right)^2$$ dans le cas où $\ln(1+i) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) < 0$

(cette relation est a priori vérifiée si le fonds en UC a une espérance de rendement supérieure à celle du fonds en euros)

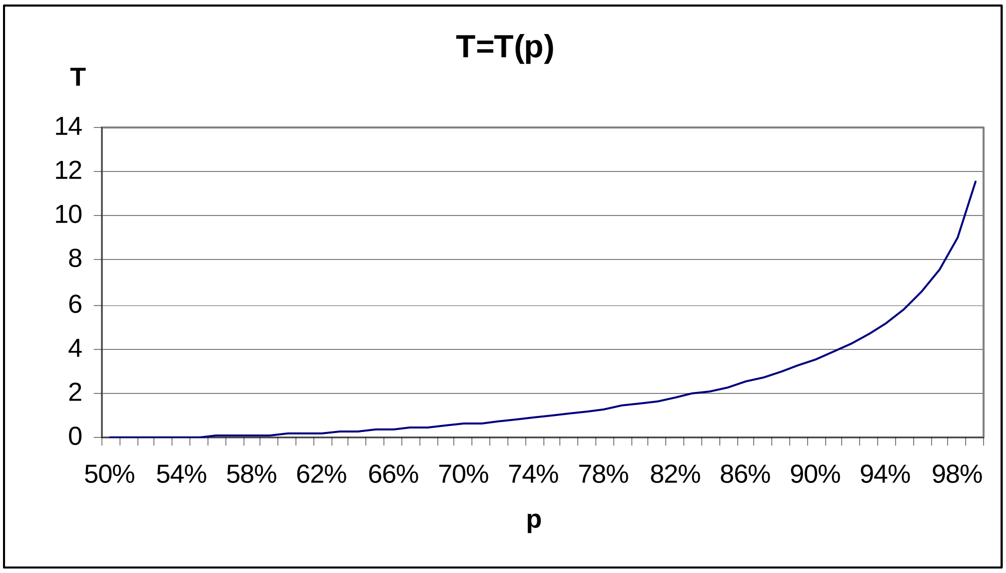
6.3.3 Interprétation

On constate par la relation précédente que le temps nécessaire à la réalisation de la relation cherchée est proportionnel au carré du quantile dépendant de la probabilité cherchée.

On retrouve donc dans ce calcul simple la première intuition énoncée : **plus le placement est long, plus la probabilité d'obtenir un rendement supérieur par les UC que par le fonds en euros est forte.**

Par ailleurs, on constate également que **ce temps est une fonction croissante de i**, l'intérêt du fonds en euros. Ce résultat confirme un raisonnement heuristique : plus i est élevé, plus le fonds en euros devra être performant pour obtenir un rendement supérieur.

Le graphique ci-dessous illustre ces résultats : on représente le temps de placement T nécessaire à la réalisation de (3) :



6.4 *Modèle simplifié*

6.4.1 Définition des hypothèses

Dans ce chapitre, on se replace dans le cadre des hypothèses communes aux deux simulations. La problématique générale est donnée par (1) :

(1) $$P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T_0}\right)\right] > p$$

Dont on déduit la propriété (2) :

(2) $$\left[\ln\left(\frac{(k-a)E_{T_0}(1+i)^t + aE_{T_0}}{kS_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \le q_{1-p}$$

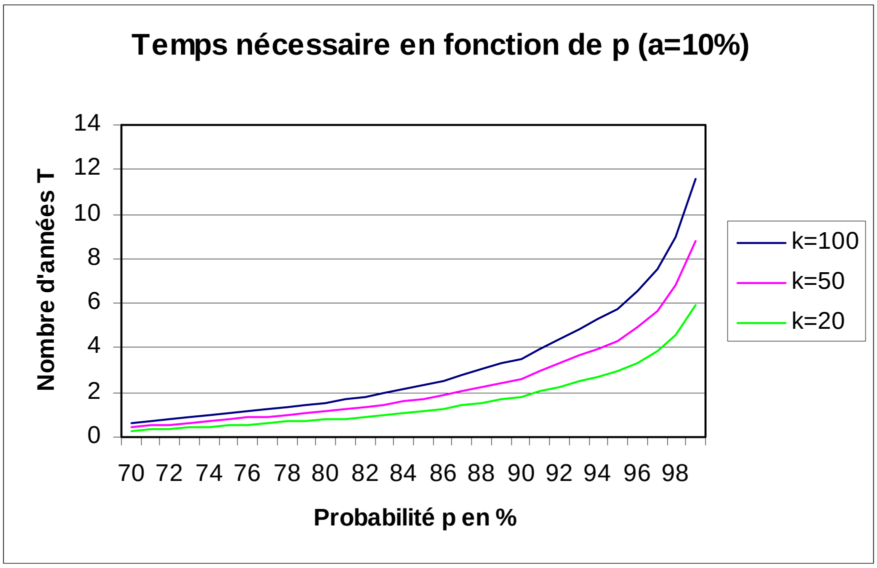
6.4.2 Interprétation

La formule (2), bien que plus précise, comportera les mêmes propriétés que celles commentées sur le résultat (4).

A partir de (2), nous pouvons déterminer le comportement général du modèle par rapport aux différents paramètres.

Horizon de placement en fonction de p

Nous nous intéresserons en premier lieu au temps T nécessaire à la réalisation de (2) en fonction de p, suivant différentes répartitions du portefeuille entre l'euro et les UC, les autres paramètres étant fixés.



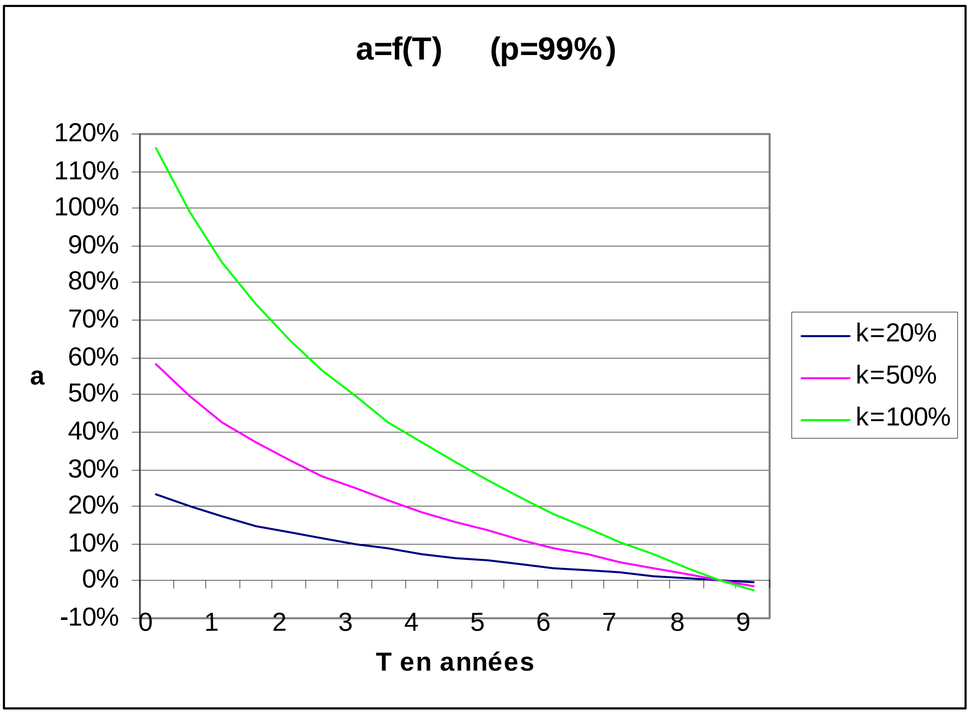
On constate que la diversification a bien l'effet souhaité : pour un même placement, la durée de placement nécessaire à la réalisation de (1) peut être jusqu'à divisée par deux si on diversifie le portefeuille en investissant aussi dans le fond en euros.

Prudence en fonction de l'horizon de placement

Nous nous intéresserons ensuite au temps T nécessaire à la réalisation de (2) en fonction de a, suivant différentes répartitions du portefeuille entre l'euro et les UC, les autres paramètres étant fixés.

On cherche ici le graphe a=a(T).
On inverse donc la formule (2), ce qui nous donne :

$$a \geq \frac{kS_0.\exp(q_{1-p}\sigma\sqrt{T}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T - kE_{T_0}(1+i)^T}{E_{T_0}\left(1-(1+i)^T\right)}$$



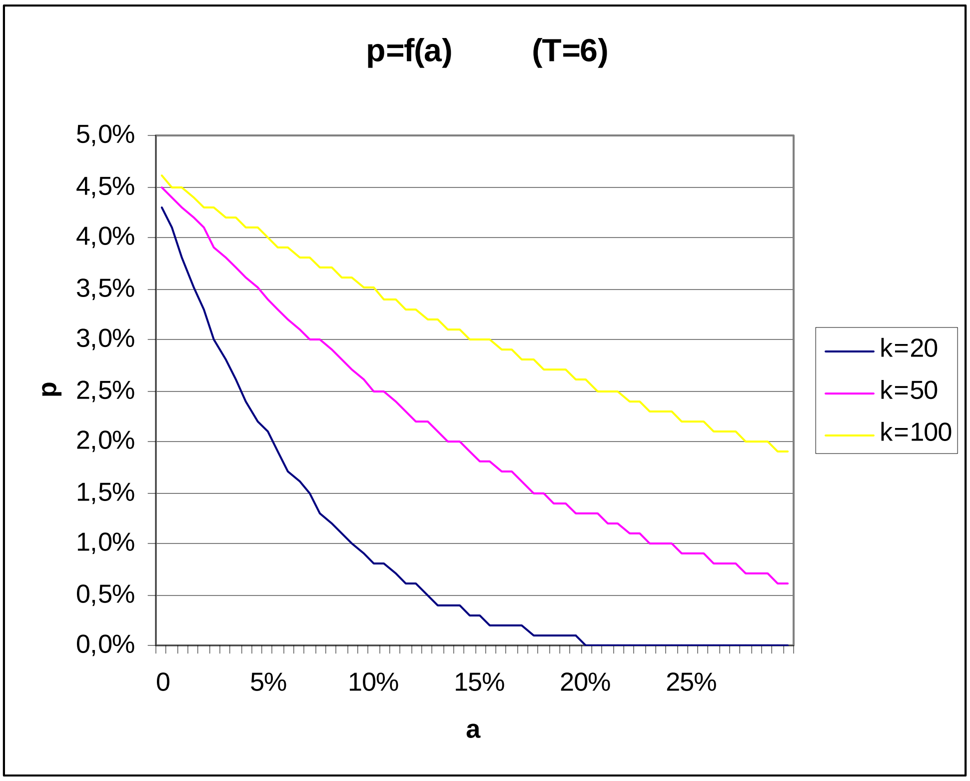
Dans cet exemple, on constate que la durée du placement peut être plus courte dans le cas où l'assuré accepte que le portefeuille dégage un gain plus limité que celui qu'il obtiendrait avec le fonds en euros.

Par ailleurs, la diversification des placements permet aussi de diminuer la perte acceptée.

On remarquera que ces constatations ne sont que la confirmation d'un raisonnement heuristique simple.

P en fonction de la prudence

Afin d'étalonner le modèle, on peut s'intéresser à l'influence de a sur p. En effet, pour satisfaire (1), on peut choisir, d'augmenter a, ou de diminuer p. Le graphique ci-dessous illustre cette recherche.



Ce graphique nous permettra en particulier de calibrer les valeurs de a choisies pour nos modèles.

Dans notre étude, nous privilégierons un modèle contenant des paramètres p élevés, quitte à augmenter a. En effet, l'intérêt de cette modélisation est de contrôler la perte, et non l'espérance uniquement.

6.5 Méthodologie de construction de la grille

Il s'agit de déterminer une grille d'investissement de l'épargne en fonction de l'âge de l'assuré (en considérant que ce dernier part à la retraite à 65 ans).

Comme expliqué au 2.5.3, nous rechercherons trois grilles en fonction de trois niveaux de risques souhaités. Ces grilles seront désignés sous les noms de « Sécurité », « Equilibrée », « Ambition ». Nous rappelons à ce niveau que la prudence de l'adhérent se mesure par le paramètre « a » de la probabilité cherchée :

$$P\left[\left(P(k,s)_T - P(0,s)_T\right) > -a\left(P(0,s)_T - P(0,s)_{T0}\right)\right] > p$$

Pour chaque niveau de risque, des paramètres « a » et « p » sont déterminés. Il reste ensuite à chercher des répartitions correspondant à la propriété cherchée, sur chaque horizon de placement.

Nous commençons par trouver des répartitions satisfaisantes à chaque âge limite (30, 45, 55, 60, 63, et 65 ans), pour l'horizon correspondant (moins de 15 ans, 10, 5, 3, 2 ans).

Ensuite, nous déterminons pour chaque âge intermédiaire une répartition qui corresponde à l'horizon ciblé, et qui soit en phase avec les répartitions limites déjà trouvées. En effet, entre deux placements équivalents en termes de risques et d'espérance, nous choisirons celui dont la répartition constitue le meilleur intermédiaire entre les âges limites précédents et suivants. Ce choix permet d'investir et désinvestir un minimum de fonds. Cela s'inscrit dans la logique de la durée de placement sur laquelle est basée l'étude, et constitue de plus une logique pour l'adhérent : une grille dont les évolutions sembleraient peu linéaires troublerait manifestement les adhérents.

Enfin, nous contrôlons que la répartition déterminée satisfait les contraintes réglementaires.

6.6 Résultats

Cette première approche nous a permis de déterminer une première répartition de l'épargne en fonction de l'horizon de placement, et de la prudence de l'adhérent.

Les résultats sont donnés dans les pages suivantes.

6.6.1 Contrôle des résultats

Afin de contrôler le risque du placement, nous indiquons pour chaque répartition l'échéance T qui satisfait la condition cherchée (le choix des horizons est expliqué au paragraphe 2.4), et la valeur du paramètre « a » qui permettrait de satisfaire cette condition si l'échéance était de T = 5 ans. Cette valeur représente le pourcentage des intérêts du fonds en euros que le souscripteur risque de perdre à l'issue de cinq ans de placement. Elle permet de contrôler la perte que l'assuré lira sur les situations de contrat qu'il recevra.

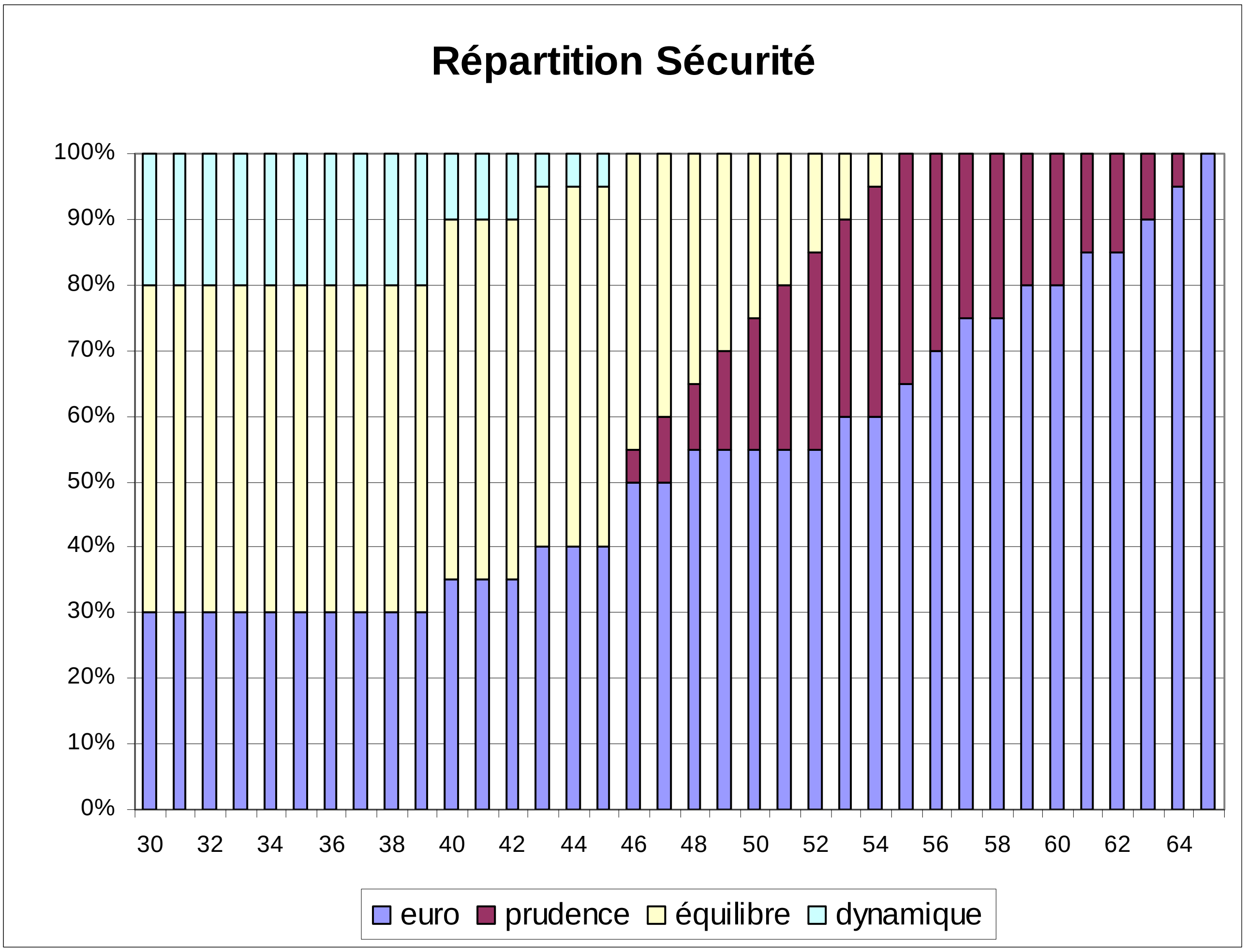
6.6.2 Répartition Sécurité

Grille de répartition déterminée

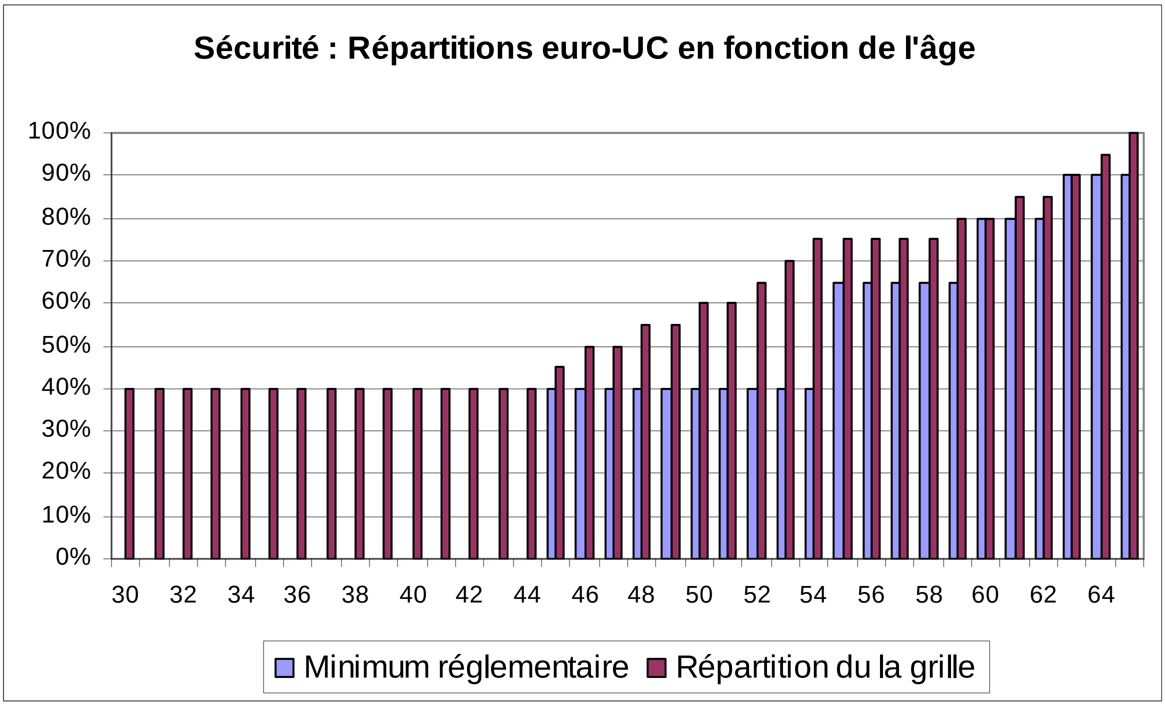
Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique	Horizon T (*)	Perte possible a (pour T=5) (*)
30	30	0	50	20	11,5	72
31	30	0	50	20	11,5	72
32	30	0	50	20	11,5	72
33	30	0	50	20	11,5	72
34	30	0	50	20	11,5	72
35	30	0	50	20	11,5	72
36	30	0	50	20	11,5	72
37	30	0	50	20	11,5	72
38	30	0	50	20	11,5	72
39	30	0	50	20	11,5	72
40	35	0	55	10	9	57
41	35	0	55	10	9	57
42	35	0	55	10	9	57
43	40	0	55	5	8	46
44	40	0	55	5	8	46
45	**40**	**0**	**55**	**5**	**8**	**46**
46	50	5	45	0	7	33
47	50	10	40	0	6	27
48	55	10	35	0	5,5	24
49	55	15	30	0	5	21
50	55	20	25	0	4,5	18
51	55	25	20	0	4	16
52	55	30	15	0	3,5	13
53	60	30	10	0	3	11
54	60	35	5	0	2,5	10
55	**65**	**35**	**0**	**0**	**3,5**	7
56	70	30	0	0	3	6
57	75	25	0	0	2,5	5
58	75	25	0	0	2,5	5
59	80	20	0	0	2	4
60	**80**	**20**	**0**	**0**	**2**	**4**
61	85	15	0	0	1,5	3
62	85	15	0	0	1,5	2
63	**90**	**10**	**0**	**0**	**1**	**2**
64	95	5	0	0	0	1
65	**100**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

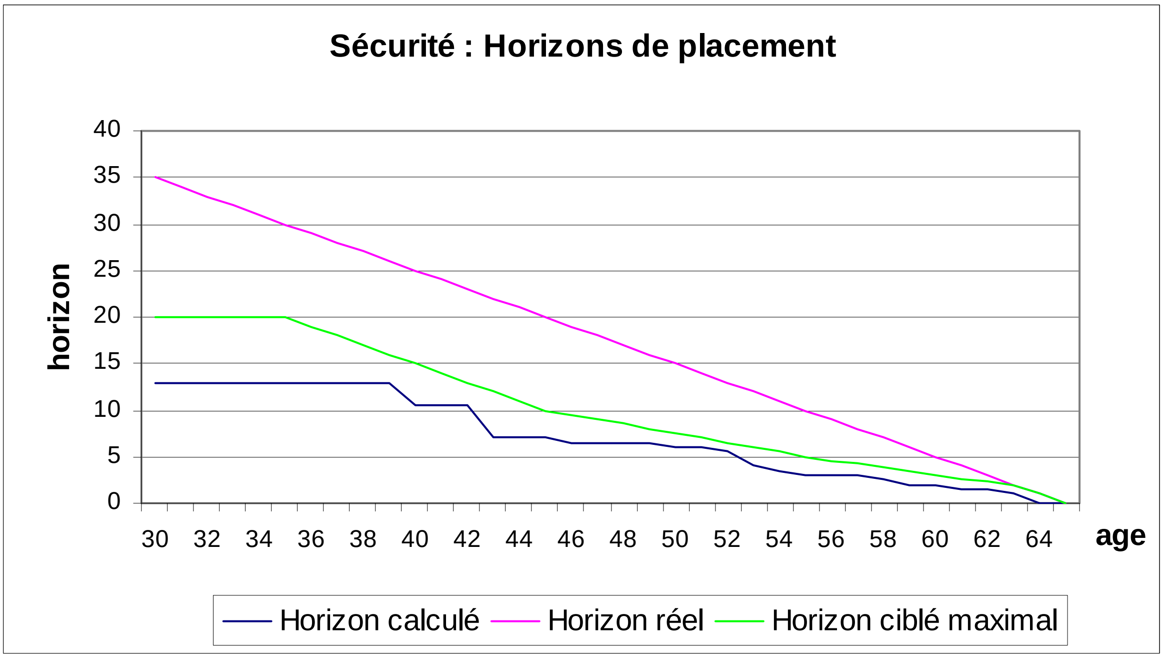
(*) Afin de contrôler le risque du placement, nous indiquons pour chaque répartition l'échéance T qui satisfait la condition cherchée (le choix des horizons est expliqué au paragraphe 2.4), et la valeur du paramètre « a » qui permettrait de satisfaire cette condition si l'échéance était de T = 5 ans. Cette valeur représente le pourcentage des intérêts du fonds en euros que le souscripteur risque de perdre à l'issue de cinq ans de placement. Elle permet de contrôler la perte que l'assuré lira sur les situations de contrat qu'il recevra.

Schéma de la répartition



Caractéristiques





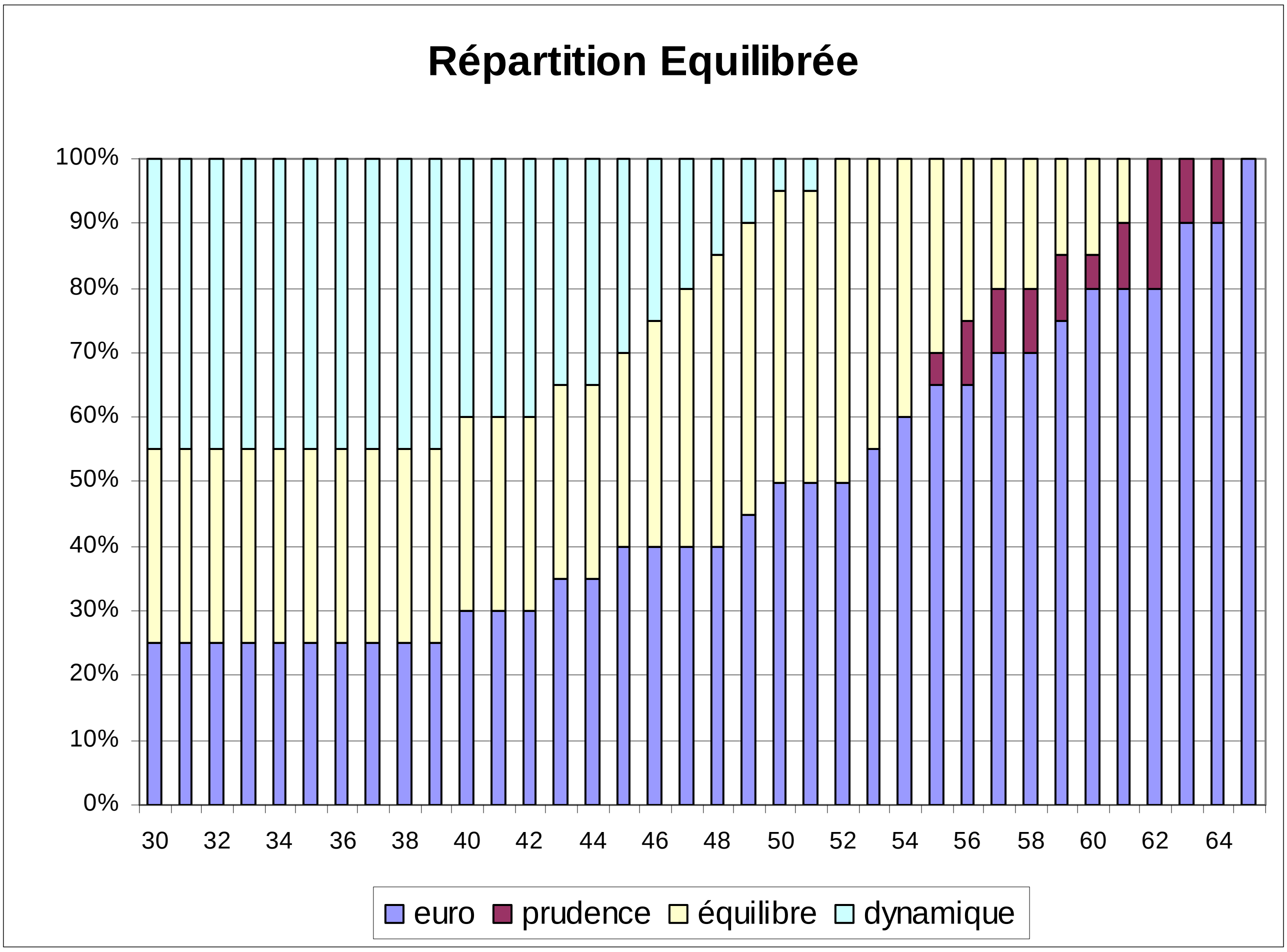
6.6.3 Répartition Equilibrée

Grille de répartition déterminée

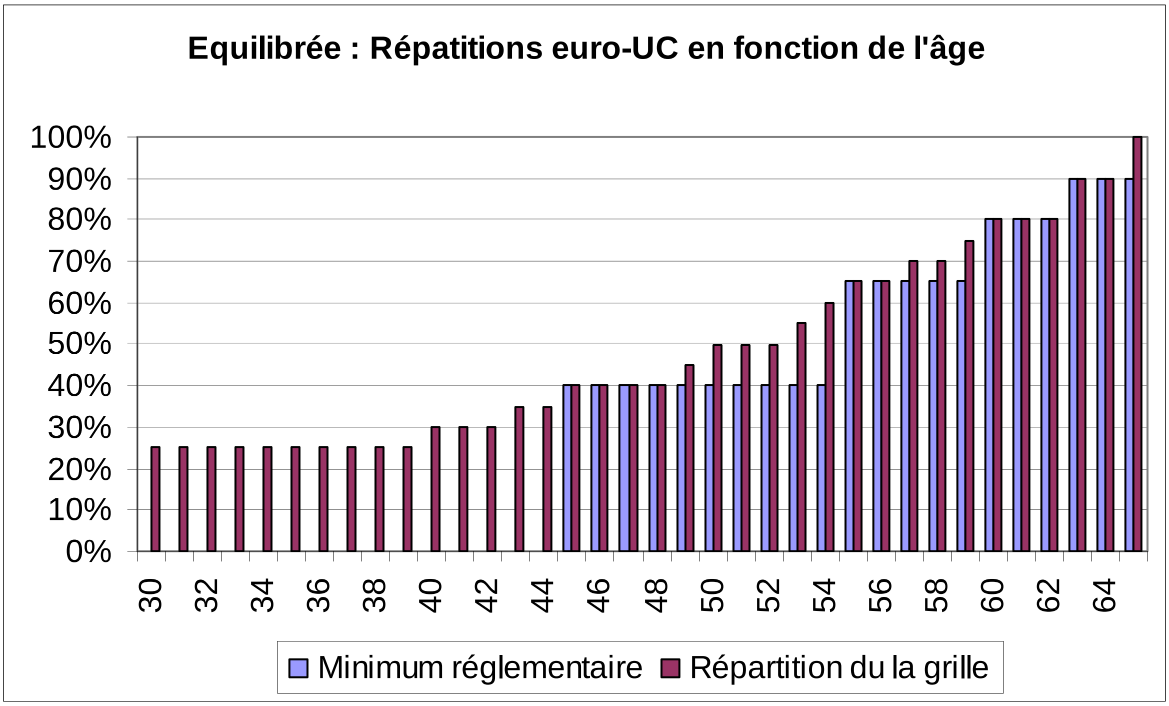
Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique	Horizon T [*]	Perte possible a (pour T=5) [*]
30	25	0	30	45	12	134
31	25	0	30	45	12	134
32	25	0	30	45	12	134
33	25	0	30	45	12	134
34	25	0	30	45	12	134
35	25	0	30	45	12	134
36	25	0	30	45	12	134
37	25	0	30	45	12	134
38	25	0	30	45	12	134
39	25	0	30	45	12	134
40	30	0	30	40	11	120
41	30	0	30	40	11	120
42	30	0	30	40	11	120
43	35	0	30	35	10	107
44	35	0	30	35	10	107
45	**40**	**0**	**30**	**30**	**9,5**	**94**
46	40	0	35	25	8,5	84
47	40	0	40	20	8	73
48	40	0	45	15	7	45
49	45	0	45	10	6,5	42
50	50	0	45	5	5	40
51	50	0	45	5	5	40
52	50	0	50	0	4,5	33
53	55	0	45	0	4	30
54	60	0	40	0	3,5	26
55	**65**	**5**	**30**	**0**	**4,5**	**18**
56	65	10	25	0	4	15
57	70	10	20	0	3,5	12
58	70	10	20	0	3,5	12
59	75	10	15	0	3	9
60	**80**	**5**	**15**	**0**	**2,5**	**9**
61	80	10	10	0	2	6
62	80	20	0	0	1	3
63	**90**	**10**	**0**	**0**	**0**	**2**
64	90	10	0	0	0	2
65	**100**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

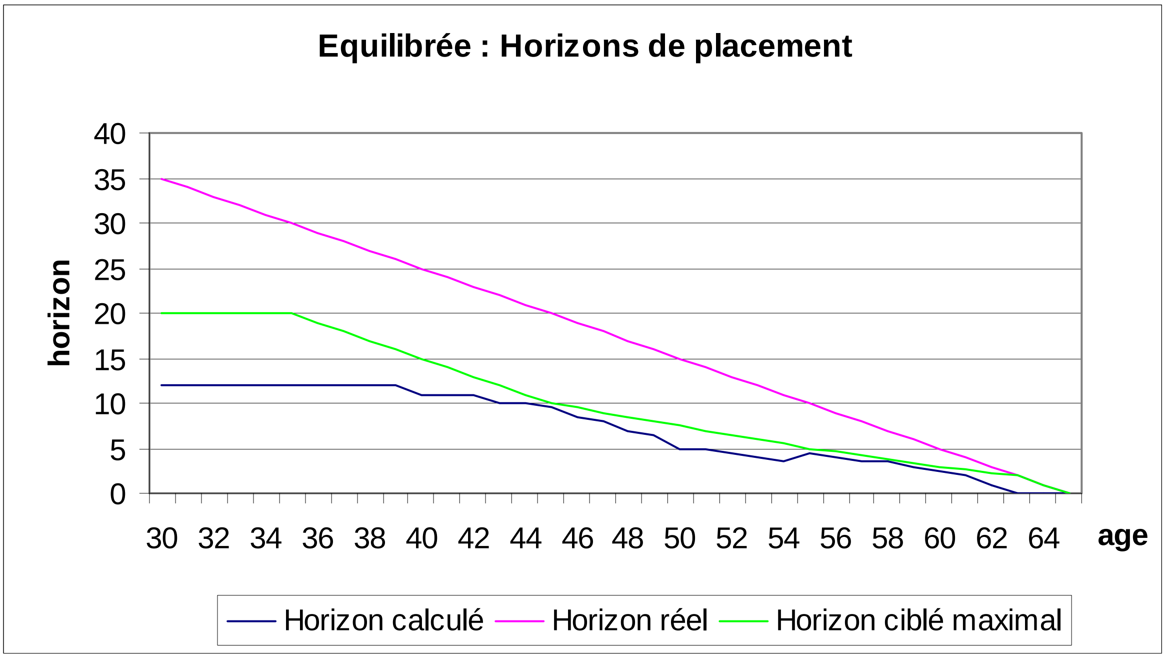
[*] Afin de contrôler le risque du placement, nous indiquons pour chaque répartition l'échéance T qui satisfait la condition cherchée (le choix des horizons est expliqué au paragraphe 2.4), et la valeur du paramètre « a » qui permettrait de satisfaire cette condition si l'échéance était de T = 5 ans. Cette valeur représente le pourcentage des intérêts du fonds en euros que le souscripteur risque de perdre à l'issue de cinq ans de placement. Elle permet de contrôler la perte que l'assuré lira sur les situations de contrat qu'il recevra.

Schéma de la répartition



Caractéristiques





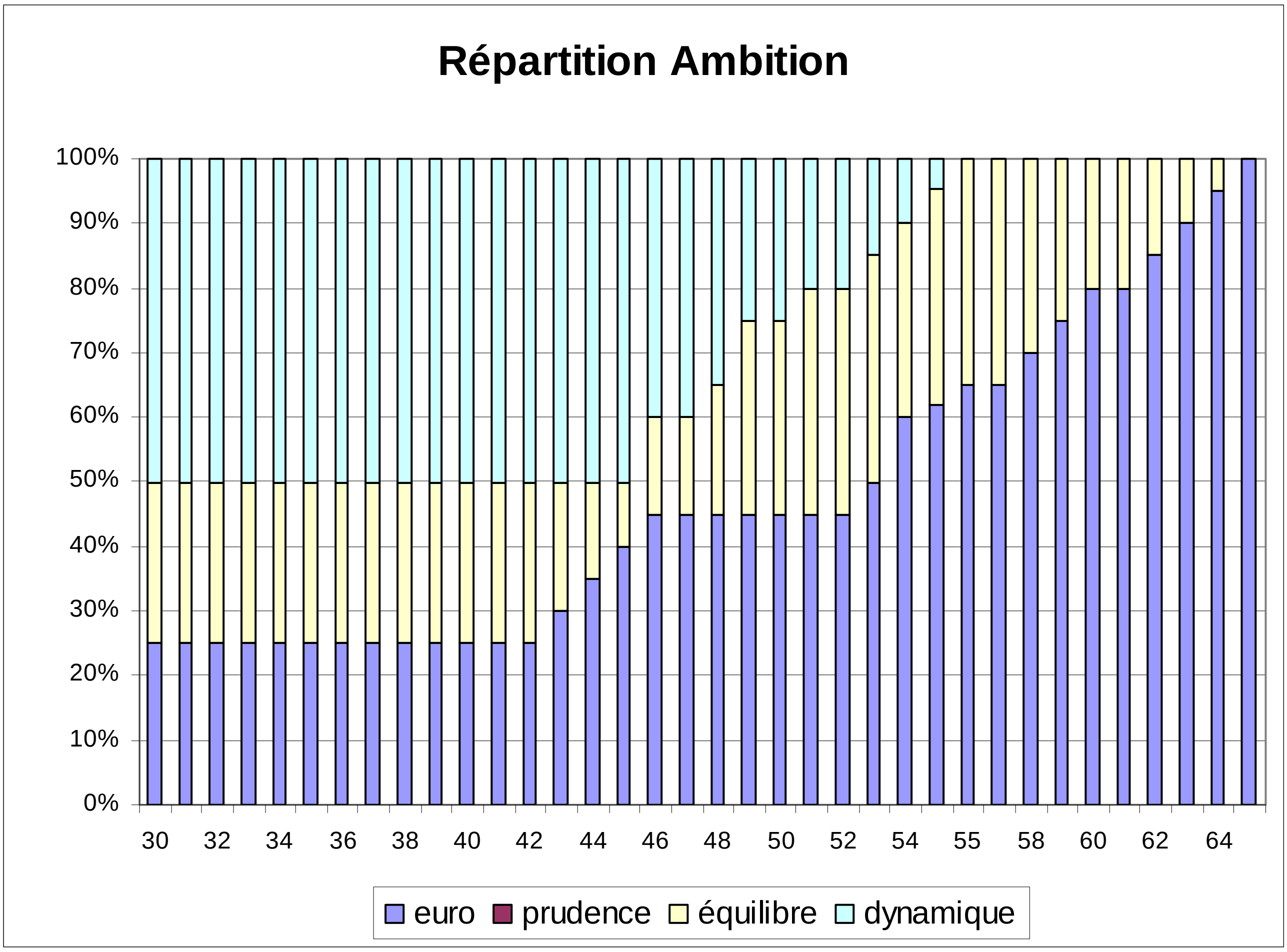
6.6.4 Répartition Ambition

Grille de répartition déterminée

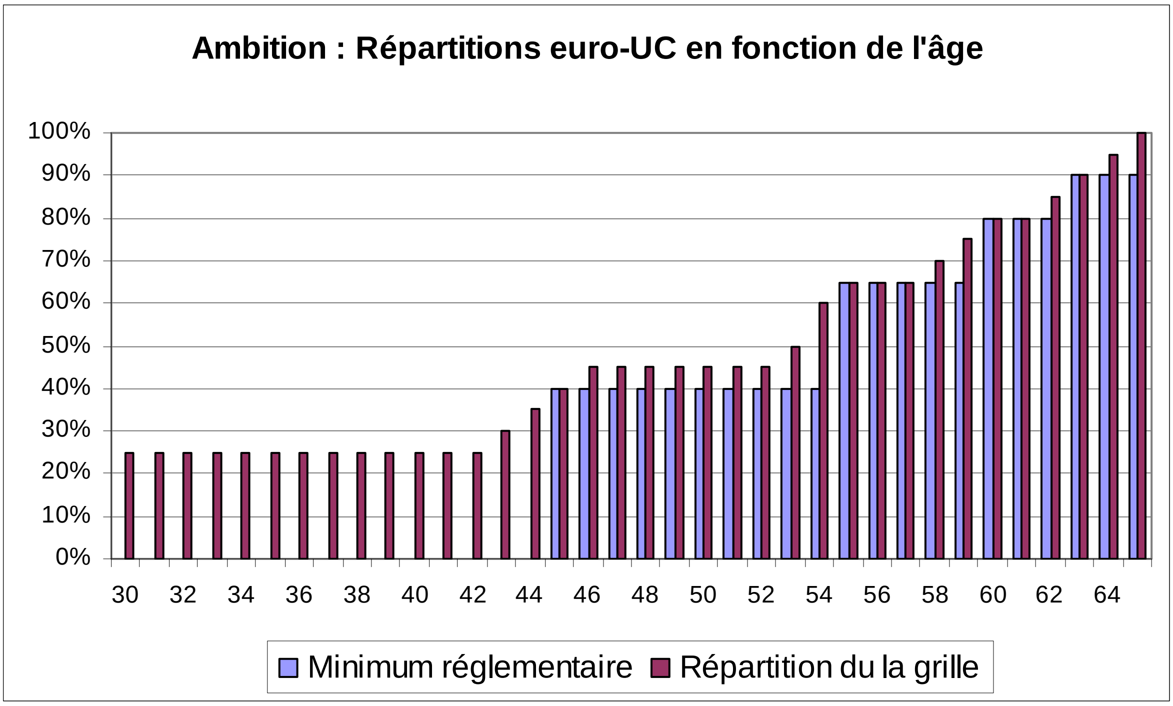
Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique	Horizon T (*)	Perte possible a (pour T=5) (*)
30	25	0	25	50	11	144
31	25	0	25	50	11	144
32	25	0	25	50	11	144
33	25	0	25	50	11	144
34	25	0	25	50	11	144
35	25	0	25	50	11	144
36	25	0	25	50	11	144
37	25	0	25	50	11	144
38	25	0	25	50	11	144
39	25	0	25	50	11	144
40	25	0	25	50	11	144
41	25	0	25	50	11	144
42	25	0	25	50	11	144
43	30	0	20	50	10,5	141
44	35	0	15	50	10	139
45	**40**	**0**	**10**	**50**	**10**	**136**
46	45	0	15	40	8,5	113
47	45	0	15	40	8,5	113
48	45	0	20	35	8	102
49	45	0	30	25	6,5	81
50	45	0	30	25	6	71
51	45	0	35	20	6	71
52	45	0	35	20	6	71
53	50	0	35	15	4,5	58
54	60	0	30	10	3,5	42
55	**65**	**0**	**30**	**5**	**5**	**30**
55	65	0	35	0	4	21
55	65	0	35	0	4	21
58	70	0	30	0	3,5	18
59	75	0	25	0	3	15
60	**80**	**0**	**20**	**0**	**2,5**	**12**
61	80	0	20	0	2,5	12
62	85	0	15	0	2	9
63	**90**	**0**	**10**	**0**	**1**	**6**
64	95	0	5	0	0	3
65	**100**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

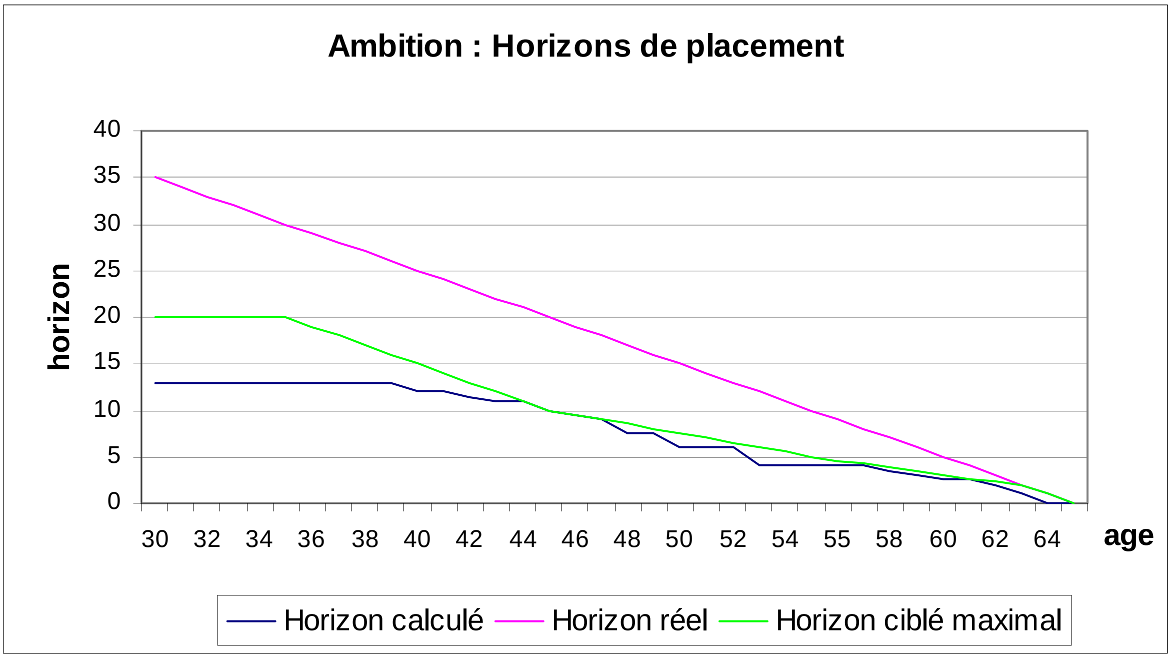
(*) Afin de contrôler le risque du placement, nous indiquons pour chaque répartition l'échéance T qui satisfait la condition cherchée (le choix des horizons est expliqué au paragraphe 2.4), et la valeur du paramètre « a » qui permettrait de satisfaire cette condition si l'échéance était de T = 5 ans. Cette valeur représente le pourcentage des intérêts du fonds en euros que le souscripteur risque de perdre à l'issue de cinq ans de placement. Elle permet de contrôler la perte que l'assuré lira sur les situations de contrat qu'il recevra.

Schéma de la répartition



Caractéristiques





6.6.5 Interprétation

Les répartitions sont conformes aux profils généraux que l'on attendait : si l'adhérent accepte de prendre des risques, la proportion de fonds en euros diminue, et les actifs deviennent plus risqués. Par ailleurs, indépendamment de la prudence recherchée, la sécurisation de l'épargne augmente avec la diminution de l'horizon de placement.

Par ailleurs, la contrainte réglementaire de sécurisation de l'épargne intervient dans ce calcul. En effet, après avoir construit les grilles par application des formules exactes, nous les avons comparées à la répartition réglementaire, et ajustées en conséquence. Dans la répartition Sécurité, elle provoque un ajout de 5 points en euros à 55 ans. Dans la répartition Equilibre, elle impose un ajout de 5 points en euros dans la répartition à 55 et 63 ans. Dans la répartition Ambition, elle entraîne un ajout de 5 points en euros dans les répartitions à 60 et à 63 ans.

Cette contrainte semble relativement adaptée au problème, puisque les modifications à apporter pour la satisfaire restent faibles.

Les grilles ainsi déterminées sont provisoires : nous affinerons les résultats au vu du comportement des supports dans les simulations.

7 Simulations

7.1 Description du mode de simulation

On cherche à calculer le taux de rendement du portefeuille composé de α actifs garantis par l'organisme assureur, et (1-α) actifs risqués.

La variable que l'on cherche à mesurer est la probabilité pour que le rendement de ce portefeuille soit inférieur à un pourcentage de celui du portefeuille garanti à 100%.

Pour calculer cette valeur, disposant d'un couple espérance-variance d'actifs risqués, nous effectuons simultanément des simulations d'évolutions des actifs garantis et risqués par les méthodes décrites ci-dessus. Nous obtenons alors deux rendements, et nous constatons simplement si l'événement A (décrit au paragraphe 2.3) est réalisé.

Il suffit alors de recommencer un nombre important de fois la simulation, et de compter le nombre de fois où le rendement du portefeuille composé a été insuffisant par rapport à celui du portefeuille garanti.

On estime alors simplement la probabilité cherchée comme étant le rapport du nombre d'échecs et du nombre total de simulations :

$$P(\acute{e}chec) = \frac{N_{\acute{e}chec}}{N_{simu}}$$

Avec les notations suivantes :

échec : L'événement A n'est pas réalisé

$N_{\acute{e}chec}$: Nombre d'échecs,

N_{simu} : Nombre de simulations total.

7.2 Simulation des valeurs des actifs

Les codes des algorithmes utilisés sont donnés en annexe 5. Dans ce chapitre, les UC seront modélisées selon le modèle de Black et Scholes à moyenne aléatoire.

7.2.1 Simulation des valeurs du fonds en unités de compte

Simulation d'une variable uniforme sur [0,1]

La méthode la plus simple et fréquemment utilisée pour simuler une variable uniforme sur [0,1] est celle des congruences linéaires :

$$\begin{cases} x_0 \in [0;m] \\ x_{n+1} = a.x_n + b[m] \end{cases}$$

Cependant, on obtient de meilleurs résultats avec la méthode de la translation irrationnelle du tore :

$$\begin{cases} X_n = n\sqrt{p} - \lfloor n\sqrt{p} \rfloor \\ p \text{ premier} \end{cases}$$

Il convient cependant d'utiliser quelques précautions en utilisant cette méthode. En effet, les variables Xi ne sont pas indépendantes. Les conséquences sont donc, dans notre situation, les suivantes :

- Il sera impossible de générer une loi normale par des méthodes demandant deux lois uniformes indépendantes. Nous utiliserons une méthode d'inversion de la fonction de répartition.
- Les valeurs des Xi ne doivent pas être utilisées dans l'ordre : en les tirant au hasard, on retrouve l'indépendance.

Simulation d'une loi normale

Nous utiliserons l'algorithme de De Moro, qui est une méthode numérique de résolution de l'inversion de la fonction de répartition d'une loi normale.
Le code est donné en annexe 5.

Simulation d'une loi exponentielle

On utilise la propriété fondamentale pour la simulation d'une loi continue à partir d'une loi uniforme :

> Si U suit une loi uniforme sur [0 ;1], alors pour toute fonction croissante de R dans [0 ;1], $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.

Dans le cas d'une loi exponentielle, de densité

$$f_X(x) = \lambda . e^{-\lambda x} 1_{[0;\infty[}(x)$$

on a

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Donc,

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$$

On en déduit donc que $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Et comme si U suit une loi uniforme sur [0 ;1], il en est de même de 1-U, on a aussi :

$$\boxed{-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$

Simulation d'une loi de Poisson

D'après les propriétés des processus de Poisson, si $(T_i)_{i>0}$ est une suite de variable exponentielles de paramètre λ, alors la variable N_t = $\sum_{n\geq 1} n.1_{\{T_1+...+T_n \leq t < T_1+...+T_{n+1}\}}$ est une loi de poisson de paramètre λt. On simulera donc une loi exponentielle, et on en déduira la loi de Poisson recherchée. Le code de l'algorithme est donné en annexe 5.

Simulation d'un processus de Black et Scholes

Le processus représentant le modèle de Black et Scholes avec sauts a la loi de :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

où

Wt suit un brownien standard,

Pour simuler ce processus aux instants $(i.\Delta t)_{1 \leq i \leq n}$, on notera que

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{n\Delta t} X_i$$

où

$$\forall i \in [1;n], \qquad X_i = \frac{S_{k\Delta t}}{S_{(k-1)\Delta t}}$$

On simule donc de manière indépendante des réalisations d'une variable g de loi normale N(0,1).

Les Xi sont alors indépendantes, et ont la loi de

$$\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, g\right)$$

7.2.2 Simulation des valeurs du fonds en euros

De même, le processus de Vasicek admet la discrétisation exacte :

$$r_{t+\Delta t} = b\left(1 - e^{-a\Delta t}\right) + e^{-a\Delta t} r_t + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a}}\, g$$

où g suit une N(0,1).

On évalue donc les valeurs du fonds en euros par la méthode suivante. On calcule :

- les évolutions du taux par ce processus,
- le taux reversé aux adhérents (2/3 de ce taux),
- au cas où ce taux est négatif, on n'impacte pas le fonds en euros,
- l'évolution du fonds en euros.

7.3 Simulations

7.3.1 Validation des grilles construites par formules fermées

Les simulations comportent des hypothèses légèrement différentes de celles utilisées dans les calculs en formules fermées. Afin de valider les grilles construites dans cette partie, nous simulerons chaque calcul de la première partie. Nous déterminerons donc empiriquement les probabilités calculées. Les comparaisons des résultats permettront de faire apparaître l'impact des nouvelles hypothèses sur le scénario.

Les simulations donnent les résultats suivants pour les âges limites des horizons de répartition :

Répartition Sécurité		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	97,7 %	96,7 %
45	96,8 %	94,2 %
55	99,1 %	83,6 %
60	99,7 %	87,2 %
63	100 %	86,4 %

Répartition Equilibre		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	97,7 %	96,3 %
45	97,6 %	93,6 %
55	98,5 %	92,0 %
60	99,2 %	81,5 %
63	100 %	84,0 %

Répartition Ambition		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	99,9 %	97,8 %
45	98,3 %	92,6 %
55	99,1 %	91,1 %
60	99,6 %	88,8 %
63	100 %	88,2 %

On constate que les probabilité de réalisation de l'événement A recherché sont inférieure à la limite de 99,5 % que l'on s'était fixée. Ce résultat est dû à l'augmentation de la volatilité créée par les changements de moyenne.

Nous rechercherons donc de nouvelles répartitions plus prudentes, qui permettront de résister aux discontinuités d'évolutions des supports.

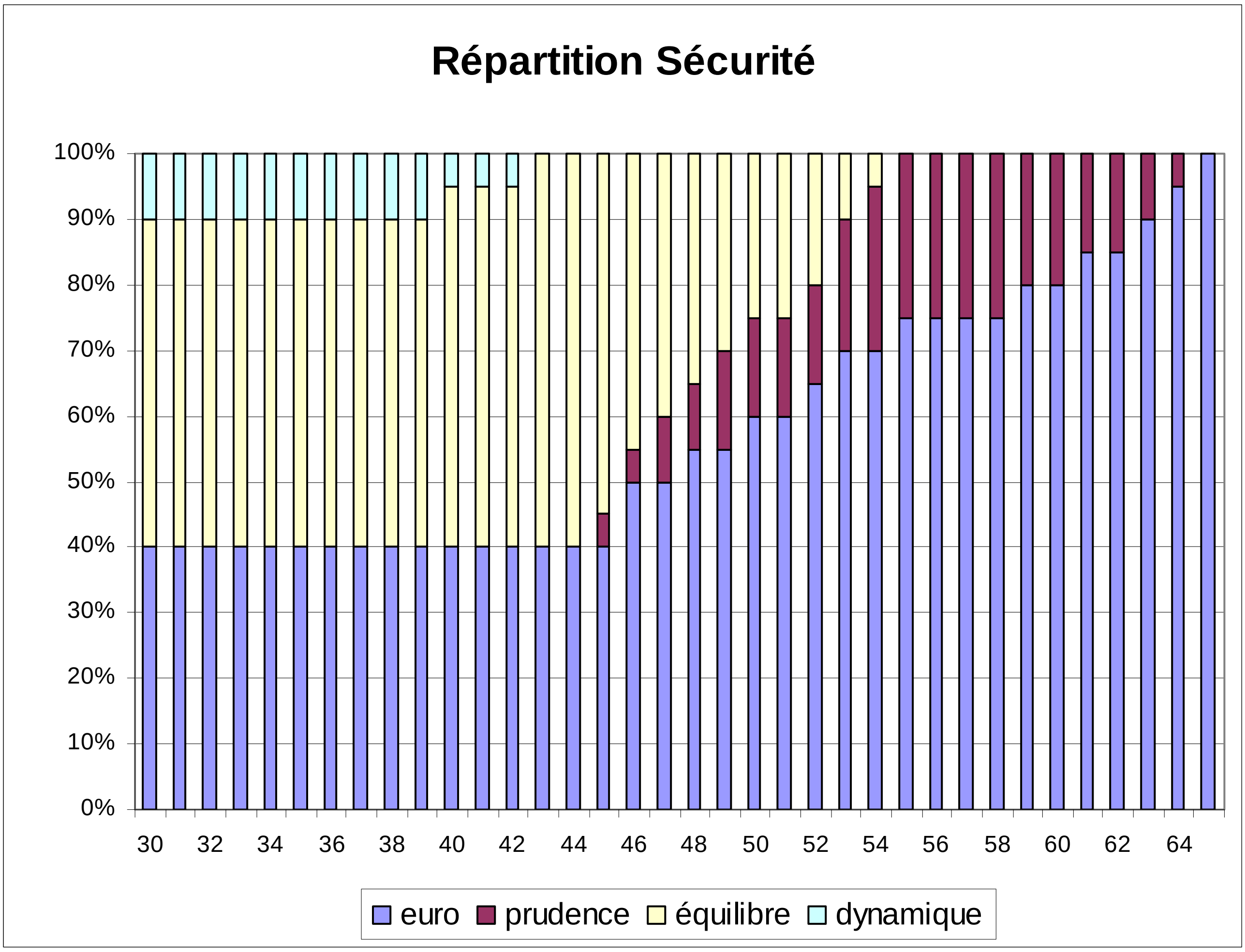
7.3.2 Recherche de nouvelles grilles

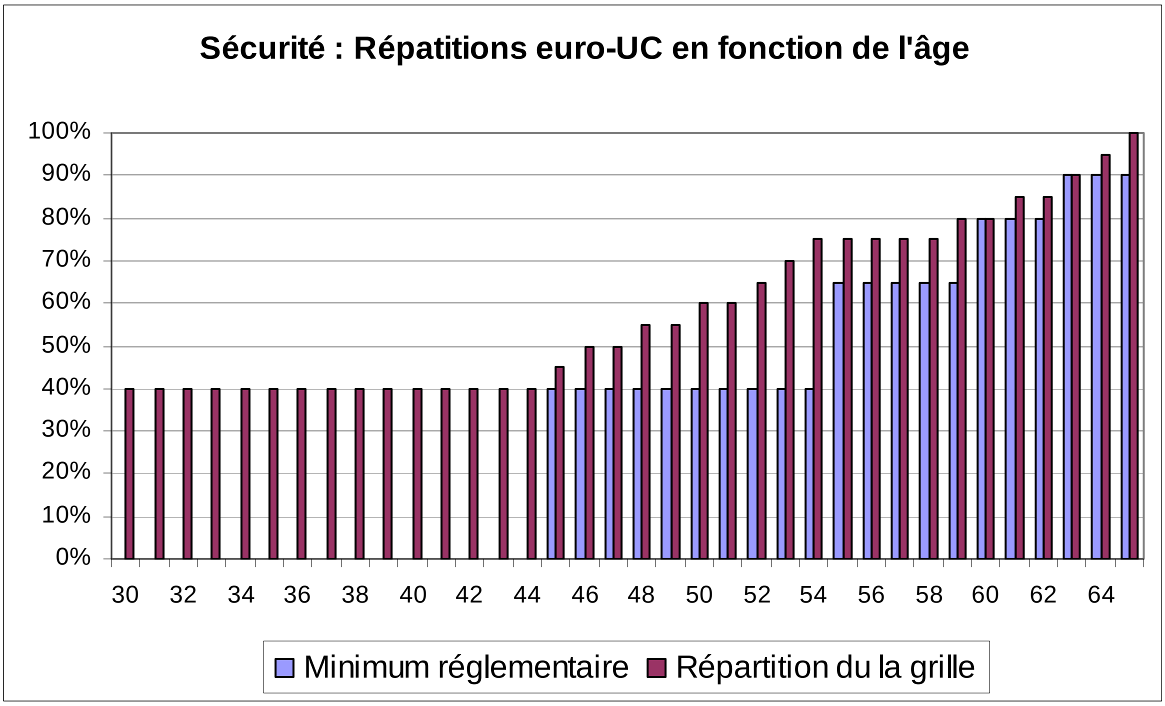
Les simulations permettent de déterminer directement des répartitions répondant aux critères recherchés. Les résultats sont donnés dans les pages suivantes. Chaque simulation est réalisée sur 5000 observations.

Grille Sécurité

Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique
30	40	0	50	10
31	40	0	50	10
32	40	0	50	10
33	40	0	50	10
34	40	0	50	10
35	40	0	50	10
36	40	0	50	10
37	40	0	50	10
38	40	0	50	10
39	40	0	50	10
40	40	0	55	5
41	40	0	55	5
42	40	0	55	5
43	40	0	60	0
44	40	0	60	0
45	**40**	**5**	**55**	**0**
46	50	5	45	0
47	50	10	40	0
48	55	10	35	0
49	55	15	30	0
50	60	15	25	0
51	60	15	25	0
52	65	15	20	0
53	70	20	10	0
54	70	25	5	0
55	**75**	**25**	**0**	**0**
56	75	25	0	0
57	75	25	0	0
58	75	25	0	0
59	80	20	0	0
60	**80**	**20**	**0**	**0**
61	85	15	0	0
62	85	15	0	0
63	**90**	**10**	**0**	**0**
64	95	5	0	0
65	**100**	**0**	**0**	**0**

Grille Sécurité : graphique

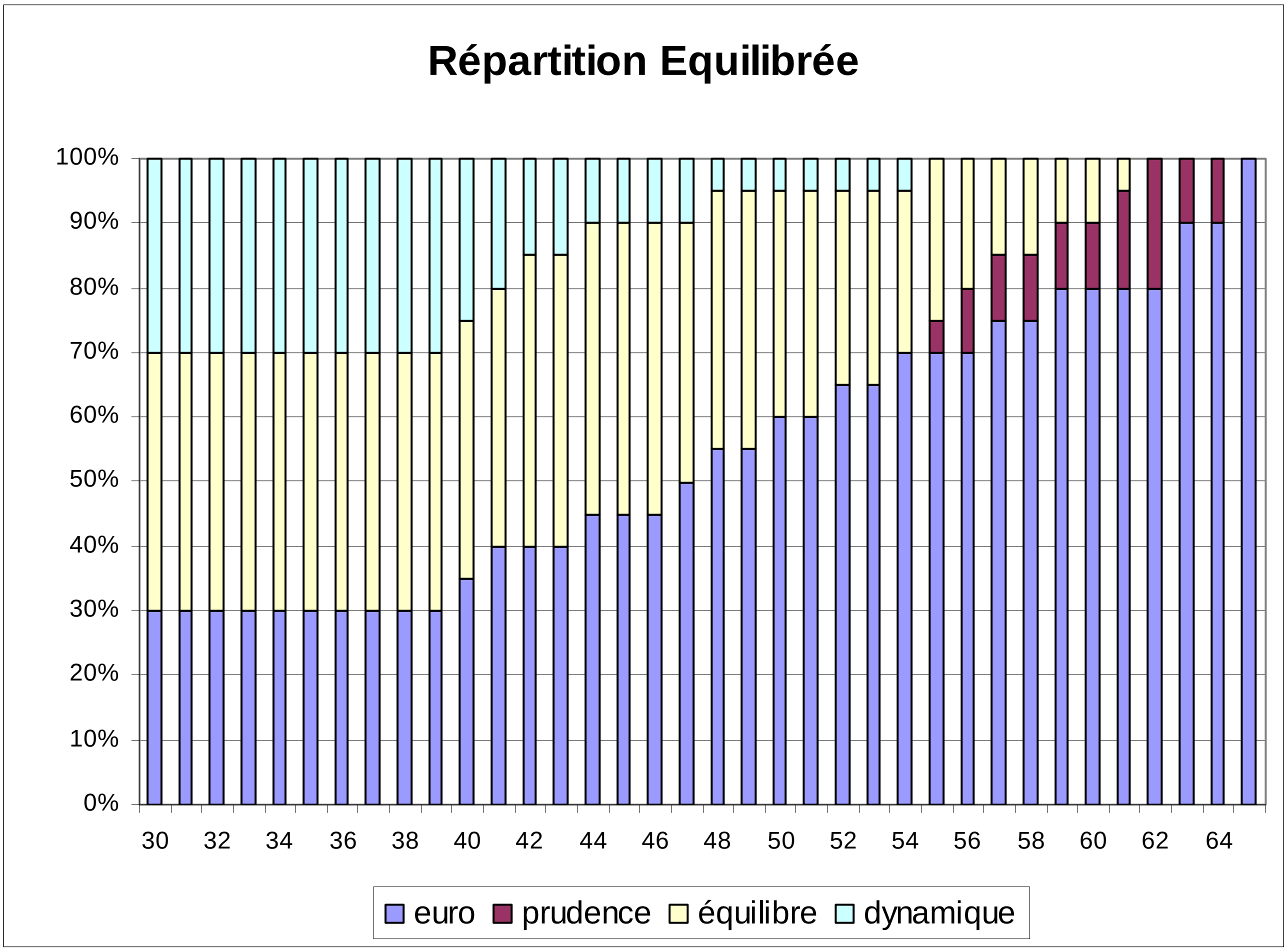


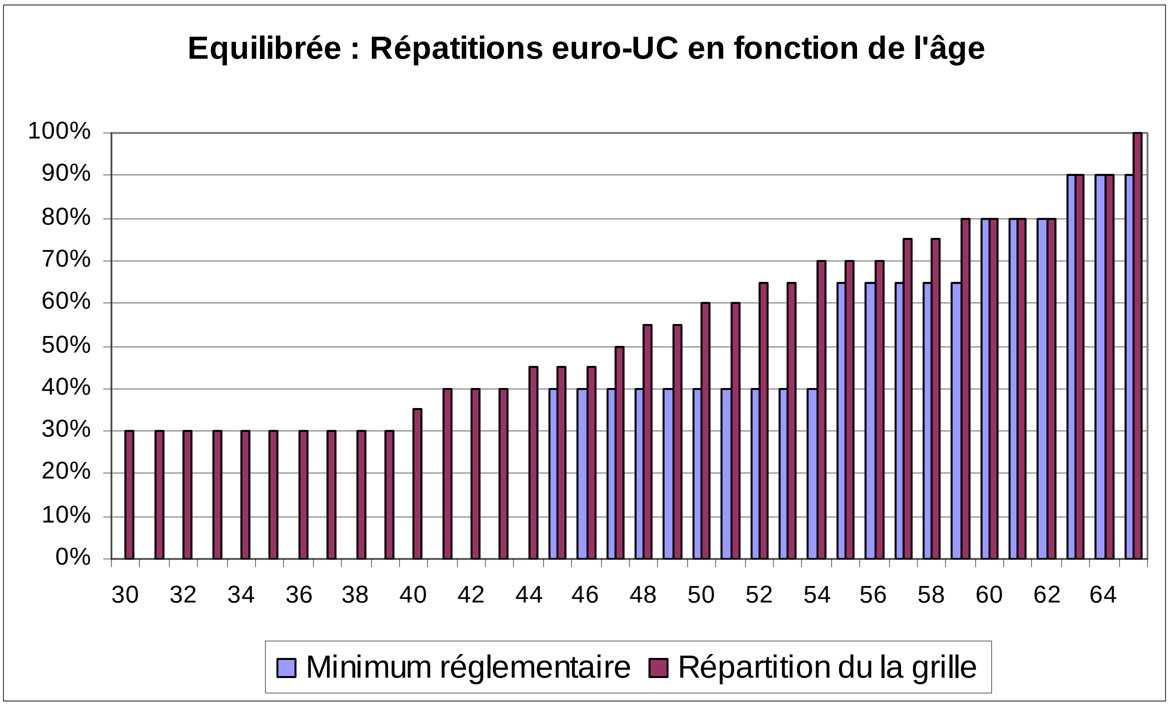


Grille Equilibre

Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique
30	30	0	40	30
31	30	0	40	30
32	30	0	40	30
33	30	0	40	30
34	30	0	40	30
35	30	0	40	30
36	30	0	40	30
37	30	0	40	30
38	30	0	40	30
39	30	0	40	30
40	35	0	40	25
41	40	0	40	20
42	40	0	45	15
43	40	0	45	15
44	45	0	45	10
45	**45**	**0**	**45**	**10**
46	45	0	45	10
47	50	0	40	10
48	55	0	40	5
49	55	0	40	5
50	60	0	35	5
51	60	0	35	5
52	65	0	30	5
53	65	0	30	5
54	70	0	25	5
55	**70**	**5**	**25**	**0**
56	70	10	20	0
57	75	10	15	0
58	75	10	15	0
59	80	10	10	0
60	**80**	**10**	**10**	**0**
61	80	15	5	0
62	80	20	0	0
63	**90**	**10**	**0**	**0**
64	90	10	0	0
65	**100**	**0**	**0**	**0**

Grille Equilibre : graphique

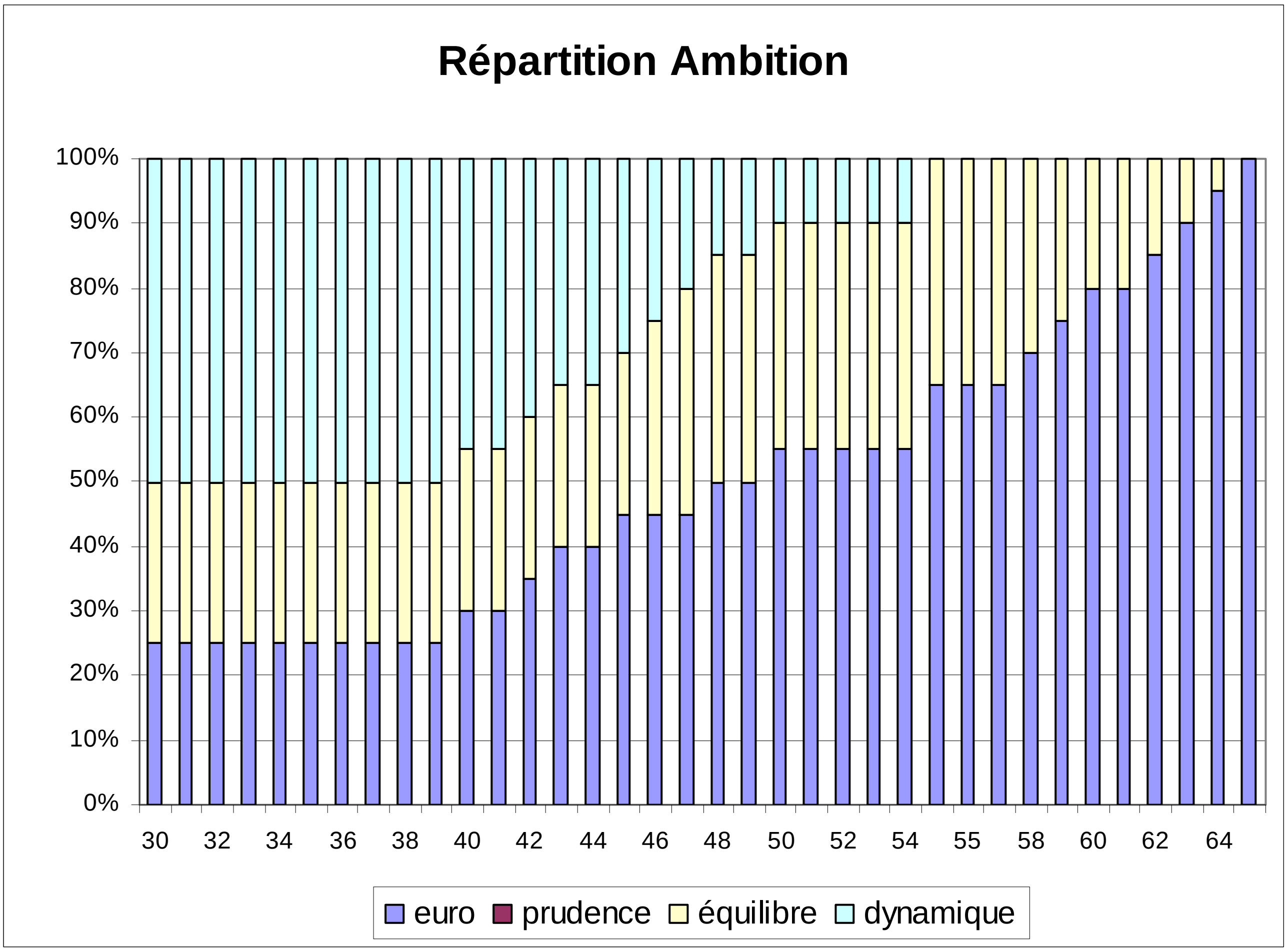


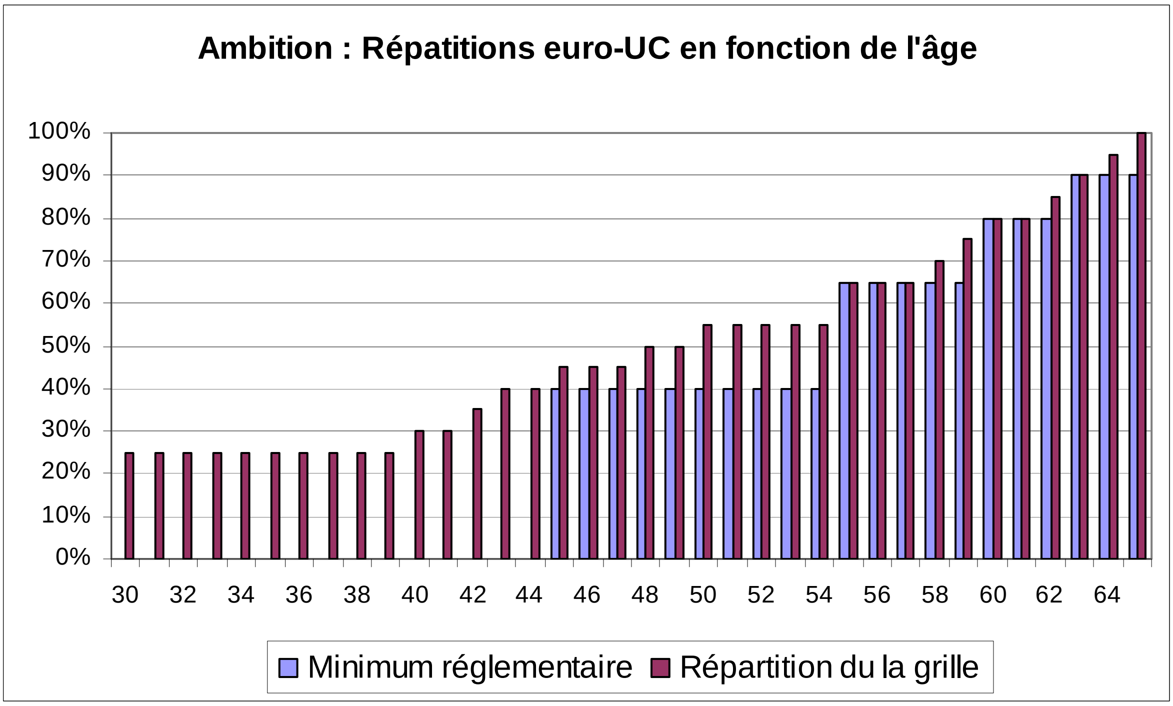


Grille Ambition

Age	Euro	Prudence	Equilibre	Dynamique
30	25	0	25	50
31	25	0	25	50
32	25	0	25	50
33	25	0	25	50
34	25	0	25	50
35	25	0	25	50
36	25	0	25	50
37	25	0	25	50
38	25	0	25	50
39	25	0	25	50
40	30	0	25	45
41	30	0	25	45
42	35	0	25	40
43	40	0	25	35
44	40	0	25	35
45	**45**	**0**	**25**	**30**
46	45	0	30	25
47	45	0	35	20
48	50	0	35	15
49	50	0	35	15
50	55	0	35	10
51	55	0	35	10
52	55	0	35	10
53	55	0	35	10
54	55	0	35	10
55	**65**	**0**	**35**	**0**
55	65	0	35	0
55	65	0	35	0
58	70	0	30	0
59	75	0	25	0
60	**80**	**0**	**20**	**0**
61	80	0	20	0
62	85	0	15	0
63	**90**	**0**	**10**	**0**
64	95	0	5	0
65	**100**	**0**	**0**	**0**

Grille Ambition : graphique





Les nouvelles probabilités cherchées sont les suivantes :

Répartition Sécurité		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	99,7 %	98,2 %
45	99,7 %	95,3 %
55	99,6 %	84,3 %
60	99,7 %	87,2 %
63	100 %	86,4 %

Répartition Equilibre		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	99,7 %	98,8 %
45	99,6 %	95,4 %
55	99,5 %	94,5 %
60	99,6 %	87,6 %
63	100 %	86,0 %

Répartition Ambition		
Age	**P(A)**	**P(€<profil)**
32	99,9 %	97,8 %
45	99,5 %	94,8 %
55	99,6 %	91,4 %
60	99,6 %	88,8 %
63	100 %	88,2 %

Elles satisfont toutes la limite de 99,5% fixée avant le calcul. On constate par ailleurs l'intérêt de notre modélisation qui autorise une certaine perte des bénéfices en euros (paramètre « a » du modèle) : par exemple, dans la répartition à 63 ans du profil Sécurité, l'euro a obtenu de meilleurs résultats que le profil dans 13,6% des simulations. Si le critère retenu était la probabilité d'obtenir un rendement supérieur à l'euro avec le profil, on n'aurait pas retenu cette répartition. Hors, dans 100 % des cas, l'événement A a été satisfait. Donc, la perte était toujours inférieure à 10 % des bénéfices du fonds en euros, donc minime et acceptable.

7.3.3 Espérances des profils créés

Les simulations permettent également de calculer les espérances des placements effectués. Les résultats sont les suivants (les rendements indiqués sont les rendements annuels équivalents) :

GRILLE SECURITE		
Période	**Rendement du portefeuille sur la période**	**Rendement du fonds en euros sur la période**
De 32 à 45 ans	5,02%	2,83%
De 45 à 55 ans	4,51%	2,78%
De 55 à 60 ans	2,84%	2,68%
De 60 à 63 ans	2,76%	2,64%
De 63 à 65 ans	2,68%	2,63%

GRILLE EQUILIBRE		
Période	**Rendement du portefeuille sur la période**	**Rendement du fonds en euros sur la période**
De 32 à 45 ans	6,12%	2,83%
De 45 à 55 ans	4,95%	2,78%
De 55 à 60 ans	3,41%	2,68%
De 60 à 63 ans	2,93%	2,64%
De 63 à 65 ans	2,68%	2,63%

GRILLE AMBITION		
Période	**Rendement du portefeuille sur la période**	**Rendement du fonds en euros sur la période**
De 32 à 45 ans	6,78%	2,83%
De 45 à 55 ans	5,42%	2,77%
De 55 à 60 ans	3,79%	2,68%
De 60 à 63 ans	3,43%	2,64%
De 63 à 65 ans	2,91%	2,63%

On constate comme prévu que plus le profil est risqué, plus l'espérance est élevée. Par ailleurs, plus le placement est long, plus son espérance de rendement est élevée.

De plus, bien qu'ayant construit les grilles sur des raisonnements de prudence, les espérance de rendement sont tout à fait convenables, compte tenu des valeurs des rendements supports en UC et en euros.

7.3.4 Analyse des résultats

En adoptant des répartitions légèrement plus prudentes, on pallie à l’augmentation de volatilité induite par les discontinuités des processus de diffusion. Les probabilités cherchées sont alors toutes supérieures à 99,5 %.

Par ailleurs, la contrainte réglementaire de sécurisation de l’épargne intervient dans ces résultats : dans la répartition Equilibre, elle impose un ajout de 5 points en euros dans la répartition à 55 et 63 ans. Dans la répartition Ambition, elle entraîne un ajout de 5 points en euros dans les répartitions à 60 et à 63 ans. Elle n’a par contre aucun impact sur la répartition Sécurité. On peut donc conclure sur la base de ces données et des hypothèses effectuées que la contrainte réglementaire n’est pas trop forte. L’impact sur les répartitions est raisonnable et s’inscrit dans la logique de notre raisonnement.

Par ailleurs, si cette contrainte est significative dans la répartition dynamique, elle a peu d’impact dans les répartitions Equilibre et Sécurité. En effet, l’OPCVM prudent se rapproche du fonds en euros. En effet, bien que ses valeurs puissent baisser, cette hypothèse est peu probable, et son rendement peu élevé lui confère un comportement proche du fond garanti.

On constate que la contrainte a beaucoup moins d’impact dans ces résultats que dans ceux des formules fermées. En effet, l’augmentation de la volatilité impose une prudence supplémentaire. La grille déterminée s’inscrit alors mieux dans la logique de la contrainte.

8 Conclusion

Dans le cadre de la conception d'un PERP, la mise en place d'une gestion de la répartition de l'épargne entre les différents support est l'une des problématiques les plus complexes compte tenu des risques sous-jacents. En effet, si l'impact commercial est important, il faut noter que la réglementation du PERP impose également une contrainte à ce niveau. L'étude a donc consisté à définir une grille de répartition des cotisations en fonction de la durée de placement jusqu'à la date de départ à la retraite, dans une logique d'optimisation des gains de l'assuré.

Cette étude vise non seulement à déterminer un produit commercialement compétitif, dans la mesure où il optimise les gains de l'assuré en tenant compte de sa prudence, mais également à respecter les contraintes réglementaires du PERP, ainsi que les éléments de bon sens afférents à un produit de retraite. Les grilles déterminées seront donc propres au PERP.

Nous avons dans premier temps étudié les différentes propriétés du contrat étudié, qu'elles soient spécifiques au PERP, ou relatives au cadre général de la retraite.

Ensuite, nous avons déterminé un ensemble d'hypothèses qui ont conduit à formaliser mathématiquement le problème posé. Ce problème dépendant de l'évolution des rendements des actifs, ceux-ci ont du être modélisés. Il a été effectué une modélisation des supports en UC (Black et Scholes avec moyenne aléatoire), et une du fonds en euros (Vasicek). Les paramètres de ces modèles, ainsi que le choix du modèle utilisé, on été estimés sur la base des données connues à cette date.

Une première étape calculatoire a permis, en simplifiant le problème, de déterminer l'ordre de grandeur des solutions recherchées et de définir les premières grilles. Ensuite, et compte tenu de la complexité des modèles qui ne permettait pas de déterminer un résultat par les calculs seuls, nous avons effectué des simulations, afin d'estimer de manière empirique les probabilités cherchées.

Les simulations nous ont également permis de calculer les espérances de rendement des placements investis selon les grilles choisies.

Nous disposons donc à l'issue de cette étude de grilles de répartition de l'épargne dépendant de la prudence des assurés. Ces grilles résistent, dans les limites du modèle proposé, aux variations des valeurs des actifs dans 99,5 % des cas.

De plus, bien qu'ayant privilégié la prudence de l'investissement à la recherche de performance, les espérances de rendement des placements sont tout à fait correctes au vu des paramètres des actifs disponibles.

L'étude pourrait se poursuivre par différents tests de sensibilité des grilles aux différents paramètres, ou par la modélisation des supports en UC par d'autres représentations, comme par exemple un processus de Vasicek. Il serait encore intéressant de comparer les résultats en termes d'espérance à d'autres grilles construites par maximisation de l'espérance de gain.

Par ailleurs, le point de vue de l'assureur n'a pas été évoqué. Il serait intéressant de coupler un modèle de rentabilité aux grilles ainsi déterminées, afin de mesurer l'impact sur les résultats de la compagnie d'assurance.

Enfin, l'outil développé pour construire ces grilles s'est construit dans la logique de pouvoir être adapté à toutes les problématiques faisant intervenir une grille de répartition de l'épargne, en disposant d'autres actifs que ceux utilisés dans cette étude.

Bibliographie

Livres

D. LAMBERTON, B. LAPEYRE (1997) : *« Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance »*

Miklos CSORGO, Lajos HORVATH (1997) : *« Limit Theorems in Change-Point Analysis »*

Patrice PONCET, Roland PORTRAIT, Serge HAYAT (1996) : *« Mathématiques financières ; Evaluation des actifs et analyse du risque »*

Nathalie BARTOLI, Pierre DEL MORAL (2001) : *« Simulations et algorithmes stochastiques »*

Denis BOSC, Hung T. NGUYEN (1996) : *« A course in stochastic processes ; Stochastic models and statistical inferences »*

P. PETAUTON (1996) : *« Théorie et pratique de l'assurance vie »*

Michel PIERMAY, Pierre MATHOULIN, Arnaud COHEN (2002) : *« La gestion Actif-Passif »*

Gilbert SAPORTA (1992) : « Probabilités, analyse des données et statistique »

Mémoires d'actuariat

Julien JACQUEMIN (2003) : *« L'utilisation des Méthodes de Simulation en Assurance »*, mémoire ISFA

Lotfi ELBARHDADI (1996) : *« Allocation d'actifs pour un régime de retraite exprimé en points »*, mémoire ISUP

Claire LAPREVOTTE (1994) : *« Gestion actif/passif d'un compte d'assurance à versements libres par la méthode de simulations de scénarios »*, mémoire ISUP-ESSEC

Publications

AFPEN (23/04/2004) : *« note de présentation »*

Cours

Jean BERTHON : *« Théorie du portefeuille »*

Denis BOSC : *« Statistique des processus »*

Jacques CHEVALLIER : *« Mathématiques Financières »*

Articles de presse

Mireille WEINBERG : *« Retraite : le PERP séduit surtout un public jeune »*, Les Echos, 06/05/2004

Laurence DELAIN : *« Faut-il souscrire un PERP ? »*, Le Monde, supplément « Argent », 8/05/2004

Mireille WEINBERG : *« Plus de 250 000 PERP vendus en deux mois »*, Les Echos, 30/06/2004